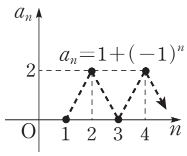
개념원리 미적분

정답과 풀이

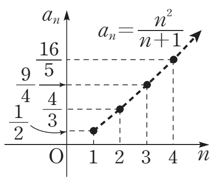
Ⅰ. 수열의 극한

1

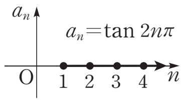
(1) 오른쪽 그래프에서 n이 한없이 커질 때, a_n의 값은 0과 2를 번갈아 가지므로 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다.



(2) 오른쪽 그래프에서 n이 한없이 커질 때, a_n의 값도 한없이 커지므로 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다.



(3) 오른쪽 그래프에서 n이 한없이 커질 때, a_n의 값은 0이므로 수열 $\{a_n\}$은 0에 수렴한다.

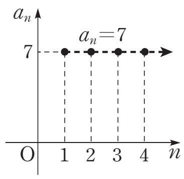


답 (1) **발산** (2) **발산** (3) **수렴, 0**

2

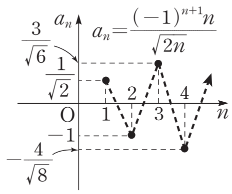
n이 커짐에 따라 a_n의 값의 변화를 그래프로 나타내면 다음 그림과 같다.

ㄱ.



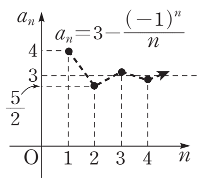
즉, 7에 수렴한다.

ㄴ.



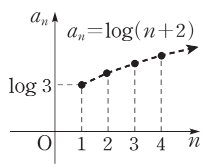
즉, 발산(진동)한다.

ㄷ.



즉, 3에 수렴한다.

ㄹ.



즉, 양의 무한대로 발산한다.

따라서 수렴하는 수열은 ㄱ, ㄷ이다. 답 **ㄱ, ㄷ**

3

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=4+(-3)=1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n-5b_n)=2\lim\limits_{n\to\infty}a_n-5\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

$=2\times4-5\times(-3)=23$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\times\lim\limits_{n\to\infty}b_n=4\times(-3)=-12$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a_n+1}{3b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n+1)}{\lim\limits_{n\to\infty}3b_n}=\dfrac{2\lim\limits_{n\to\infty}a_n+1}{3\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$

$=\dfrac{2\times4+1}{3\times(-3)}=-1$

답 (1) **1** (2) **23** (3) **−12** (4) **−1**

4

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{2}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}$

$=3+0=3$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}$

$=0+0=0$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\dfrac{3}{n}\right)\left(\dfrac{3}{n}-2\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\dfrac{3}{n}\right)\times\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{n}-2\right)$

$=4\times(-2)=-8$

답 (1) **3** (2) **0** (3) **−8**

5

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-2}{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{n}}{2+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{1-0}{2+0}=\dfrac{1}{2}$ (수렴)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$ (수렴)

(3) $\lim_{n\to\infty}(3+2n^2-n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{3}{n^3}+\frac{2}{n}-1\right)$

$=-\infty$ (발산)

답 (1) 수렴, $\mathbf{\frac{1}{2}}$ (2) 수렴, **0** (3) 발산

6

(1) $\lim_{n\to\infty}(3a_n-1)(b_n+2)$

$=\lim_{n\to\infty}(3a_n-1)\times\lim_{n\to\infty}(b_n+2)$

$=(3\lim_{n\to\infty}a_n-1)(\lim_{n\to\infty}b_n+2)$

$=(3\times3-1)(-1+2)$

$=8$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+4}{a_nb_n+2}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n+4}{\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n+2}$

$=\frac{3+4}{3\times(-1)+2}=-7$

답 (1) **8** (2) $\mathbf{-7}$

7

$\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=3$에서 $\lim_{n\to\infty}a_n=4$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n(a_n-2)=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}(a_n-2)$

$=4\times(4-2)=8$

답 8

8

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(3n-5)}{(2n+1)(n-2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n-10}{2n^2-3n-2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}-\frac{10}{n^2}}{2-\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}$

$=\frac{3+0-0}{2-0-0}=\frac{3}{2}$ (수렴)

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n^2-2n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{1-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}$

$=\frac{0-0}{1-0+0}=0$ (수렴)

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+5n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\infty$ (발산)

(4) $\lim_{n\to\infty}\{\log(2n+1)-\log(3n+2)\}$

$=\lim_{n\to\infty}\log\frac{2n+1}{3n+2}$

$=\log\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\log\frac{2}{3}$ (수렴)

답 (1) 수렴, $\mathbf{\frac{3}{2}}$ (2) 수렴, **0**

(3) 발산 (4) 수렴, $\mathbf{\log\frac{2}{3}}$

9

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

이므로

$\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6}$

$=\frac{2+0+0}{6}=\frac{1}{3}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^2-1}{2^2}\times\frac{3^2-1}{3^2}\times\cdots\times\frac{n^2-1}{n^2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2-1)(2+1)}{2\times2}\times\frac{(3-1)(3+1)}{3\times3}\right.$

$\left.\times\cdots\times\frac{(n-1)(n+1)}{n\times n}\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}$$

$$=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$$

답 (1) $\mathbf{\frac{1}{3}}$ (2) $\mathbf{\frac{1}{2}}$

10

$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$

$$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$$

$$=4\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$=\frac{4n^3-n}{3}$$

이므로

$$\frac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}=\frac{4n^3-n}{3n^3}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-n}{3n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n^2}}{3}$$

$$=\frac{4-0}{3}=\frac{4}{3}$$

답 $\mathbf{\frac{4}{3}}$

11

극한값이 0이 아닌 값으로 수렴하므로 $a=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{bn+4}{an^2+2n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn+4}{2n+2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{4}{n}}{2+\frac{2}{n}}$$

$$=\frac{b}{2}$$

따라서 $\frac{b}{2}=6$이므로 $b=12$

$\therefore a+b=0+12=12$

답 **12**

12

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2}+an}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+a}{1}$$

$$=\frac{1+a}{1}=1+a$$

따라서 $1+a=10$이므로 $a=9$

답 **9**

13

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2-3n}-2n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2-3n}-2n)(\sqrt{4n^2-3n}+2n)}{\sqrt{4n^2-3n}+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n}{\sqrt{4n^2-3n}+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{4-\frac{3}{n}}+2}$$

$$=\frac{-3}{2+2}=-\frac{3}{4}\ (\text{수렴})$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{2}{1+1}=1\ (\text{수렴})$$

(3) $\lim_{n\to\infty}(n^3-6n)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(1-\frac{6}{n^2}\right)$

$$=\infty\ (\text{발산})$$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n})}{(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n})(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n})}{4n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}{2}=\frac{1+1}{2}=1\ (\text{수렴})$$

답 (1) **수렴,** $\mathbf{-\frac{3}{4}}$ (2) **수렴, 1** (3) **발산** (4) **수렴, 1**

14

$1+2+3+\cdots+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$,

$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{1+2+3+\cdots+(n+1)}-\sqrt{1+2+3+\cdots+n}\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}{\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{2}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1}\right)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}(1+1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

15

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an+2}-\sqrt{bn^2+2n+3})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-b)n^2+(a-2)n-1}{\sqrt{n^2+an+2}+\sqrt{bn^2+2n+3}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-b)n+(a-2)-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{b+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}}\quad\cdots\cdots ㉠$$

이때 $1-b\neq0$이면 극한값이 3이 될 수 없으므로

$1-b=0$ $\qquad\therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}}=\frac{a-2}{2}$$

따라서 $\dfrac{a-2}{2}=3$이므로 $a-2=6$

$\therefore a=8$

답 $\boldsymbol{a=8,\ b=1}$

16

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+an}-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+an}+n}{(\sqrt{n^2+an}-n)(\sqrt{n^2+an}+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+an}+n}{an}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1}{a}$$

$$=\frac{2}{a}$$

따라서 $\dfrac{2}{a}=-2$이므로 $-2a=2$

$\therefore a=-1$

답 $\boldsymbol{-1}$

17

$\dfrac{3a_n-5}{a_n-1}=b_n$으로 놓으면

$3a_n-5=b_n(a_n-1)$, $(3-b_n)a_n=5-b_n$

$\therefore a_n=\dfrac{5-b_n}{3-b_n}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5-b_n}{3-b_n}$$

$$=\frac{5-2}{3-2}=3$$

답 $\boldsymbol{3}$

18

$na_n=b_n$으로 놓으면

$a_n=\dfrac{b_n}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=5$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n}{n^3a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n}{n^3\times\frac{b_n}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n}{n^2b_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{b_n}=\frac{3}{5}$$

답 $\boldsymbol{\dfrac{3}{5}}$

19

$\frac{3n^2}{n+1}<a_n<\frac{3n^2+2n}{n+1}$에서

$\frac{3n}{n+1}<\frac{a_n}{n}<\frac{3n+2}{n+1}$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{1+\frac{1}{n}}=3,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}=3$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=3$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+6n}{n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n}+6}{1+\frac{5}{n}}$$

$$=\frac{3+6}{1+0}=9$$

답 **9**

20

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $-1\le\cos 2n\theta\le 1$이므로

$$-\frac{1}{n^2}\le\frac{\cos 2n\theta}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos 2n\theta}{n^2}=0$$

(2) 모든 자연수 n에 대하여 $-1\le\sin n\theta\le 1$이므로

$$-\frac{1}{n}\le\frac{\sin n\theta}{n}\le\frac{1}{n}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sin n\theta}{n}\right)=1+0=1$$

답 (1) **0** (2) **1**

21

(1) $\frac{5^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}\right)^n$에서 공비는 $\frac{5}{3}$이고, $\frac{5}{3}>1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{3^{n+1}}=\infty \text{ (발산)}$$

(2) 공비는 $\log 4-\log 5$이고,

$-1<\log 4-\log 5<1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(\log 4-\log 5)^n=0 \text{ (수렴)}$$

(3) $(-2)^n$에서 공비는 -2이고, $-2<-1$이므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.

(4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{1-n}=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n$에서 공비는 $\frac{3}{2}$이고, $\frac{3}{2}>1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{1-n}=\infty \text{ (발산)}$$

답 (1) **발산** (2) **수렴** (3) **발산** (4) **발산**

22

(1) $\frac{(-3)^n}{2^{2n}}=\left(-\frac{3}{4}\right)^n$에서 공비는 $-\frac{3}{4}$이고,

$-1<-\frac{3}{4}<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n}{2^{2n}}=0$ (수렴)

(2) $3^n\times 4^{-n}=\left(\frac{3}{4}\right)^n$에서 공비는 $\frac{3}{4}$이고, $-1<\frac{3}{4}<1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(3^n\times 4^{-n})=0 \text{ (수렴)}$$

(3) $2^{-n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$에서 공비는 $\frac{1}{2}$이고, $-1<\frac{1}{2}<1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}2^{-n}=0$$

$3^{-n}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$에서 공비는 $\frac{1}{3}$이고, $-1<\frac{1}{3}<1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}3^{-n}=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(2^{-n}+3^{-n})=0+0=0 \text{ (수렴)}$$

(4) 공비는 $\frac{\sqrt{5}}{2}$이고, $\frac{\sqrt{5}}{2}>1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n=\infty \text{ (발산)}$$

답 (1) **수렴, 0** (2) **수렴, 0** (3) **수렴, 0** (4) **발산**

23

(1) 공비가 $2r$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<2r\le 1 \qquad \therefore -\dfrac{1}{2}<r\le\dfrac{1}{2}$

(2) 공비가 $-\dfrac{r}{2}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<-\dfrac{r}{2}\le 1 \qquad \therefore -2\le r<2$

답 (1) $-\dfrac{1}{2}<r\le\dfrac{1}{2}$ (2) $-2\le r<2$

24

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{5^n}+1}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1}=\infty$ (발산)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}-2^n}{3^n+2^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

$=\dfrac{3-0}{1+2\times 0}=3$ (수렴)

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+3^{-n}}{3^n-3^{-n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{3^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\left(\frac{1}{9}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}$

$=\dfrac{1+0}{1-0}=1$ (수렴)

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n-4^n)=\lim\limits_{n\to\infty}4^n\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right\}$

$=-\infty$ (발산)

답 (1) **발산** (2) **수렴, 3** (3) **수렴, 1** (4) **발산**

25

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^na_n+5^{n+1}}{5^na_n-3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{3}{5}\right)^n\times a_n+5}{a_n-\left(\frac{3}{5}\right)^n}$

$=\dfrac{0\times\alpha+5}{\alpha-0}=\dfrac{5}{\alpha}$

따라서 $\dfrac{5}{\alpha}=2$이므로 $2\alpha=5 \qquad \therefore \alpha=\dfrac{5}{2}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{5}{2}$

답 $\dfrac{5}{2}$

26

(1) 등비수열 $\left\{\left(\dfrac{x^2-x}{2}\right)^n\right\}$은 첫째항과 공비가 모두 $\dfrac{x^2-x}{2}$이므로 이 수열이 수렴하려면

$-1<\dfrac{x^2-x}{2}\le 1$

(i) $-1<\dfrac{x^2-x}{2}$에서 $x^2-x+2>0$, 즉

$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $\dfrac{x^2-x}{2}\le 1$에서 $x^2-x-2\le 0$

$(x+1)(x-2)\le 0 \qquad \therefore -1\le x\le 2$

(i), (ii)에서 $-1\le x\le 2$

(2) 등비수열 $\left\{(x+2)\left(\dfrac{2x-1}{5}\right)^{n-1}\right\}$은 첫째항이 $x+2$, 공비가 $\dfrac{2x-1}{5}$이므로 이 수열이 수렴하려면

$x+2=0$ 또는 $-1<\dfrac{2x-1}{5}\le 1$

(i) $x+2=0$에서 $x=-2$

(ii) $-1<\dfrac{2x-1}{5}\le 1$에서 $-5<2x-1\le 5$

$-4<2x\le 6 \qquad \therefore -2<x\le 3$

(i), (ii)에서 $-2\le x\le 3$

답 (1) $-1\le x\le 2$ (2) $-2\le x\le 3$

27

등비수열 $\{(\log_3 x-1)^n\}$은 첫째항과 공비가 모두 $\log_3 x-1$이므로 이 수열이 수렴하려면

$-1<\log_3 x-1\le 1$

$0<\log_3 x\le 2$, $\log_3 1<\log_3 x\le\log_3 3^2$

$\therefore 1<x\le 9$

답 $1<x\le 9$

28

(i) **$|r|<1$일 때,** $\lim_{n\to\infty} r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{r^{2n}+1}=\frac{0}{0+1}=\mathbf{0}\ (\text{수렴})$$

(ii) **$r=1$일 때,** $\lim_{n\to\infty} r^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{r^{2n}+1}=\frac{1}{1+1}=\mathbf{\frac{1}{2}}\ (\text{수렴})$$

(iii) **$|r|>1$일 때,** $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{r^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^n}}{1+\frac{1}{r^{2n}}}$$

$$=\frac{0}{1+0}=\mathbf{0}\ (\text{수렴})$$

(iv) **$r=-1$일 때,**

㉠ n이 짝수이면 $\lim_{n\to\infty} r^n=1$, $\lim_{n\to\infty} r^{2n}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{r^{2n}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

㉡ n이 홀수이면 $\lim_{n\to\infty} r^n=-1$, $\lim_{n\to\infty} r^{2n}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{r^{2n}+1}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

㉠, ㉡에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{r^{2n}+1}$은 **발산**(진동)한다.

답 풀이 참조

29

(i) $|r|<5$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{5}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+5^n}{r^n-5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{r}{5}\right)^n+1}{\left(\frac{r}{5}\right)^n-1}=-1$$

(ii) $|r|>5$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{r}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+5^n}{r^n-5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{5}{r}\right)^n}{1-\left(\frac{5}{r}\right)^n}=1$$

(i), (ii)에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+5^n}{r^n-5^n}=-1$을 만족시키는 r의 값의 범위는 $|r|<5$이므로 구하는 정수 r는 -4, -3, -2, $\cdots$, 4의 9개이다. **답 9**

30

(1) 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}+2n\right\}=\frac{n^2+5n}{4}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n}{4}=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(2) 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

(3) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$a_n=n^2$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(4) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}$$

$$=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 2이다.

답 (1) **발산** (2) **수렴, 1** (3) **발산** (4) **수렴, 2**

31

(1) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면 $a_n=\frac{n}{2n+1}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}\neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(2) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$a_n=\sqrt{n^2+2n}-n$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}\\ &=1\neq 0\end{aligned}$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(3) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$a_n=\log\frac{3n^2}{n^2+2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\log\frac{3n^2}{n^2+2}=\log 3\neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(4) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면 $a_n=\frac{5^n}{2^n+3^n}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=\infty\neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

답 **풀이 참조**

32

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+3b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+3\sum_{n=1}^{\infty}b_n$
$=-2+3\times 5=13$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(5a_n-2b_n)=5\sum_{n=1}^{\infty}a_n-2\sum_{n=1}^{\infty}b_n$
$=5\times(-2)-2\times 5=-20$

답 (1) **13** (2) **−20**

33

(1) 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+3k+2}\\ &=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\ &=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\\ &=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\\ &\quad+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\ &=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$

(2) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{(2n)^2-1}\\ &=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\right.\\ &\quad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}\\ &=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$

답 (1) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ (2) $\mathbf{\frac{1}{2}}$

34

$S_n=\frac{n\{2\times3+(n-1)\times2\}}{2}=n(n+2)$이므로

$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$ 답 $\mathbf{\frac{3}{4}}$

35

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\log\frac{n^2}{n^2-1}$

$=\sum_{n=2}^{\infty}\log\frac{n\times n}{(n-1)(n+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\log\left(\frac{k}{k-1}\times\frac{k}{k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log\left(\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\right)+\log\left(\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}\right)\right.$

$\left.+\log\left(\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\right)+\cdots+\log\left(\frac{n}{n-1}\times\frac{n}{n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\log\left\{\left(\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\right)\right.$

$\left.\cdots\left(\frac{n}{n-1}\times\frac{n}{n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\log\frac{2n}{n+1}=\log 2$

(2) 주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$a_n=\log\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}$

$=\log\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$

$=\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k}{k+1}\times\frac{k+2}{k+1}\right)$

$=\log\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)+\log\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)+\log\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\right)$

$+\cdots+\log\left(\frac{n}{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}\right)$

$=\log\left\{\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\right)\right.$

$\left.\cdots\left(\frac{n}{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}\right)\right\}$

$=\log\frac{n+2}{2(n+1)}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log\frac{n+2}{2(n+1)}$

$=\log\frac{1}{2}=-\log 2$

답 (1) **log 2** (2) **−log 2**

36

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log_3 a_k$

$=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\log_3 a_3+\cdots+\log_3 a_n$

$=\log_3(a_1a_2a_3\cdots a_n)=\log_3\frac{3n-1}{n+1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\log_3 a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log_3\frac{3n-1}{n+1}$

$=\log_3 3=1$ 답 **1**

37

(1) 주어진 급수의 제n항을 a_n, 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

(i) $a_{2k-1}=\frac{1}{k}$ (k는 자연수)이므로

$S_{2k-1}=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)$

$+\cdots+\left(-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\right)$

$=1$

$\therefore \lim_{k\to\infty}S_{2k-1}=\lim_{k\to\infty}1=1$

(ii) $a_{2k}=-\frac{1}{k+1}$ (k는 자연수)이므로

$$S_{2k}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{k+1}$$

$$\therefore \lim_{k\to\infty}S_{2k}=\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=1$$

(i), (ii)에서 $\lim_{k\to\infty}S_{2k-1}=\lim_{k\to\infty}S_{2k}=1$이므로 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

(2) 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$=2-\frac{n+2}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n+2}{n+1}\right)=2-1=1$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

답 (1) **수렴, 1** (2) **수렴, 1**

38

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+5)$가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n+5)=0$ $\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=-5$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{12a_n+b_n^2}{3a_n-2b_n^2}=\frac{12\times(-5)+0}{3\times(-5)-2\times0}=4$$

답 **4**

39

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{2n^2}{n^2+1}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{2n^2}{n^2+1}\right)=0$

이때 $b_n=a_n-\frac{2n^2}{n^2+1}$으로 놓으면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이고

$a_n=b_n+\frac{2n^2}{n^2+1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(b_n+\frac{2n^2}{n^2+1}\right)=2$$

답 **2**

40

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=1$에서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=1$

$\therefore \alpha-\beta=1$ …… ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}(4a_n+3b_n)=11$에서 $4\sum_{n=1}^{\infty}a_n+3\sum_{n=1}^{\infty}b_n=11$

$\therefore 4\alpha+3\beta=11$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=2$, $\beta=1$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2+2\times1=4$$

답 **4**

41

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-1}{n^2+n-4}=4,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+6n}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+6n}-n)(\sqrt{n^2+6n}+n)}{\sqrt{n^2+6n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{\sqrt{n^2+6n}+n}=3$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-b_n)=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2\times4-3=5$$

답 **5**

42

(1) 첫째항이 1, 공비가 $\frac{2}{3}$이고, $\left|\frac{2}{3}\right|<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다.

따라서 그 합은

$$\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$$

(2) 첫째항이 1, 공비가 $-\sqrt{2}$이고, $|-\sqrt{2}|>1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다.

(3) 첫째항이 $\sqrt{3}$, 공비가 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$이고, $\left|-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다.
따라서 그 합은

$$\frac{\sqrt{3}}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}=\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}$$

(4) 첫째항이 2, 공비가 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$이고, $\left|\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right|<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다.
따라서 그 합은

$$\frac{2}{1-\frac{\sqrt{3}-1}{2}}=\frac{2(3+\sqrt{3})}{3}$$

답 (1) **수렴, 3** (2) **발산** (3) **수렴, $\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}$**
(4) **수렴, $\frac{2(3+\sqrt{3})}{3}$**

43

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$에서 첫째항이 $-\frac{2}{\sqrt{3}}$, 공비가 $-\frac{2}{\sqrt{3}}$이고, $\left|-\frac{2}{\sqrt{3}}\right|>1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}2\times(-1)^{n-1}$에서 첫째항이 2, 공비가 -1이고, $|-1|=1$이므로 주어진 등비급수는 발산한다.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\sqrt{2})^{n-1}$에서 첫째항이 1, 공비가 $1-\sqrt{2}$이고, $|1-\sqrt{2}|<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다.
따라서 그 합은

$$\frac{1}{1-(1-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{25}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$에서 첫째항이 $\frac{25}{6}$, 공비가 $\frac{5}{6}$이고, $\left|\frac{5}{6}\right|<1$이므로 주어진 등비급수는 수렴한다.
따라서 그 합은

$$\frac{\frac{25}{6}}{1-\frac{5}{6}}=25$$

답 (1) **발산** (2) **발산** (3) **수렴, $\frac{\sqrt{2}}{2}$** (4) **수렴, 25**

44

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^n-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}-\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}=-\frac{5}{6}$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}(4\times3^{-n}+12\times6^{-n})$$
$$=4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+12\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$
$$=4\times\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+12\times\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{22}{5}$$

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{3}{2}\right)^{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{9}{4}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\times\frac{9}{4}\right)^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n=\frac{-\frac{3}{4}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}=-\frac{3}{7}$$

답 (1) **$-\frac{5}{6}$** (2) **$\frac{22}{5}$** (3) **$-\frac{3}{7}$**

45

$$\log_2 2+\log_2\sqrt{2}+\log_2\sqrt[4]{2}+\log_2\sqrt[8]{2}+\cdots$$
$$=\log_2 2+\frac{1}{2}\log_2 2+\frac{1}{4}\log_2 2+\frac{1}{8}\log_2 2+\cdots$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

답 **2**

46

$\frac{a_1}{5}+\frac{a_2}{5^2}+\frac{a_3}{5^3}+\frac{a_4}{5^4}+\cdots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{5^n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7+(-1)^n}{2\times5^n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{7}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right\}$

$=\frac{7}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$

$=\frac{7}{2}\times\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}+\frac{1}{2}\times\frac{-\frac{1}{5}}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)}$

$=\frac{7}{8}-\frac{1}{12}=\frac{19}{24}$ 　　　답 $\frac{19}{24}$

47

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(-1<r<1)$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$에서 $\frac{a}{1-r}=2$

$\therefore a=2(1-r)$ 　　　…… ㉠

수열 $\{a_n{}^2\}$의 첫째항은 a^2, 공비는 r^2이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2=\frac{4}{3}$에서 $\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{4}{3}$

$\therefore \frac{a^2}{(1-r)(1+r)}=\frac{4}{3}$ 　　　…… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{4(1-r)^2}{(1-r)(1+r)}=\frac{4}{3}$

$\frac{1-r}{1+r}=\frac{1}{3}$, $3(1-r)=1+r$

$4r=2$ 　　$\therefore r=\frac{1}{2}$

$r=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $a=1$

따라서 수열 $\{a_n{}^3\}$은 첫째항이 $a^3=1$, 공비가 $r^3=\frac{1}{8}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^3=\frac{a^3}{1-r^3}=\frac{1}{1-\frac{1}{8}}=\frac{8}{7}$ 　　　답 $\frac{8}{7}$

48

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(-1<r<1)$라 하면

$a_2=-\frac{4}{3}$에서 $ar=-\frac{4}{3}$ 　　　…… ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3$에서 $\frac{a}{1-r}=3$

$\therefore a=3(1-r)$ 　　　…… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$3(1-r)r=-\frac{4}{3}$, $9r^2-9r-4=0$

$(3r+1)(3r-4)=0$

$\therefore r=-\frac{1}{3}$ $(\because -1<r<1)$ 　　　답 $-\frac{1}{3}$

49

(1) 주어진 등비급수의 첫째항이 1, 공비가 $\log_{\frac{1}{2}}x$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$-1<\log_{\frac{1}{2}}x<1$ 　　$\therefore \frac{1}{2}<x<2$

(2) 주어진 등비급수의 첫째항이 1, 공비가 $2\cos x$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$-1<2\cos x<1$, $-\frac{1}{2}<\cos x<\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{\pi}{3}<x<\frac{2}{3}\pi$ $(\because 0<x<\pi)$

(3) 주어진 등비급수의 첫째항과 공비가 모두 x^2-x+1이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$-1<x^2-x+1<1$

(i) $-1<x^2-x+1$에서 $x^2-x+2>0$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$

이므로 모든 실수 x에 대하여 항상 성립한다.

(ii) $x^2-x+1<1$에서 $x^2-x<0$

$x(x-1)<0$ 　　$\therefore 0<x<1$

(i), (ii)에서 $0<x<1$

(4) 주어진 등비급수의 첫째항이 $(x-4)(x-2)$, 공비가 $x-2$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$(x-4)(x-2)=0$ 또는 $-1<x-2<1$

(ⅰ) $(x-4)(x-2)=0$에서 $x=4$ 또는 $x=2$

(ⅱ) $-1<x-2<1$에서 $1<x<3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $1<x<3$ 또는 $x=4$

답 (1) $\frac{1}{2}<x<2$ (2) $\frac{\pi}{3}<x<\frac{2}{3}\pi$ (3) $0<x<1$ (4) $1<x<3$ 또는 $x=4$

50

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n$의 첫째항과 공비가 모두 $\frac{x}{4}$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$-1<\frac{x}{4}<1$ $\quad\therefore -4<x<4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{x}\right)^n$의 첫째항과 공비가 모두 $\frac{3}{x}$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$-1<\frac{3}{x}<1$, $\frac{x}{3}<-1$ 또는 $\frac{x}{3}>1$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-4<x<-3$ 또는 $3<x<4$

답 $-4<x<-3$ 또는 $3<x<4$

51

(1) $0.\dot{1}\dot{4}=0.14+0.0014+0.000014+\cdots$

$=\frac{14}{10^2}+\frac{14}{10^4}+\frac{14}{10^6}+\cdots$

이 급수는 첫째항이 $\frac{14}{100}$이고 공비가 $\frac{1}{100}$인 등비급수이므로

$$0.\dot{1}\dot{4}=\frac{\frac{14}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{14}{99}$$

(2) $1.2\dot{3}=1.2+0.03+0.003+0.0003+\cdots$

$=\frac{12}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\cdots$

이때 급수 $\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\cdots$은 첫째항이 $\frac{3}{100}$이고 공비가 $\frac{1}{10}$인 등비급수이므로

$$1.2\dot{3}=\frac{12}{10}+\frac{\frac{3}{100}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{12}{10}+\frac{1}{30}=\frac{37}{30}$$

(3) $1.3\dot{2}\dot{1}=1.3+0.021+0.00021+0.0000021+\cdots$

$=\frac{13}{10}+\frac{21}{10^3}+\frac{21}{10^5}+\frac{21}{10^7}+\cdots$

이때 급수 $\frac{21}{10^3}+\frac{21}{10^5}+\frac{21}{10^7}+\cdots$은 첫째항이 $\frac{21}{1000}$이고 공비가 $\frac{1}{100}$인 등비급수이므로

$$1.3\dot{2}\dot{1}=\frac{13}{10}+\frac{\frac{21}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{13}{10}+\frac{7}{330}=\frac{218}{165}$$

답 (1) $\frac{14}{99}$ (2) $\frac{37}{30}$ (3) $\frac{218}{165}$

52

$0.\dot{4}=\frac{4}{9}$, $0.0\dot{5}=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}$이므로 공비를 r라 하면

$\frac{4}{9}r^3=\frac{1}{18}$, $r^3=\frac{1}{8}$

$\therefore r=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 등비급수의 합은

$$\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{8}{9}$$

답 $\frac{8}{9}$

53

$\frac{12}{99}=0.\dot{1}\dot{2}=0.121212\cdots$이므로

$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=1,\ a_4=2,\ a_5=1,\ a_6=2,\ \cdots$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{2}{3^6}+\cdots$$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^5}+\cdots\right)+\left(\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\frac{2}{3^6}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3^2}}+\frac{\frac{2}{3^2}}{1-\frac{1}{3^2}}$$

$$=\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$$

답 $\frac{5}{8}$

54

점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x=\overline{OP_1}-\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}-\overline{P_6P_7}+\cdots$$
$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5}$$
$$y=\overline{P_1P_2}-\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}-\overline{P_7P_8}+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5-\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}}=\frac{2}{5}$$

따라서 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표는 $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$이다.

답 $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$

55

삼각형 A_1의 둘레의 길이는 4

삼각형 A_2의 둘레의 길이는 $\frac{1}{2}\times 4$

삼각형 A_3의 둘레의 길이는 $\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 4$

⋮

따라서 모든 삼각형 A_1, A_2, A_3, …의 둘레의 길이의 합은

$$4+\frac{1}{2}\times 4+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 4+\cdots$$
$$=\frac{4}{1-\frac{1}{2}}=8$$

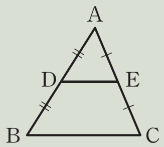
답 8

KEY Point

삼각형의 중점 연결 정리

삼각형 ABC의 두 변 AB와 AC의 중점을 각각 D, E라 할 때

⇨ $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$, $\overline{DE}\,/\!/\,\overline{BC}$



56

원 C_1, C_2, C_3, …, C_n의 반지름의 길이는 각각 $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2, \cdots, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$이므로 원 C_n의 넓이는

$$\pi\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right\}^2=\pi\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

정사각형 M_1, M_2, M_3, …, M_n의 한 변의 길이는 각각 $\sqrt{2}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \cdots, \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$이므로 정사각형 M_n의 넓이는

$$\left\{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right\}^2=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

따라서 원 C_n의 넓이에서 정사각형 M_n의 넓이를 뺀 값은

$$S_n=\pi\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(\pi-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}(\pi-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{\pi-2}{1-\frac{1}{2}}=2(\pi-2)$$

답 $2(\pi-2)$

57

$$A_n=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\times\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}^2$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3n-3}=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^3\right\}^{n-1}=\frac{1}{3}\left(\frac{8}{27}\right)^{n-1}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}A_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{8}{27}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{8}{27}}=\frac{9}{19}$$

답 $\frac{9}{19}$

58

추가 멈출 때까지 움직인 거리는

$$30+30\times\frac{5}{6}+30\times\left(\frac{5}{6}\right)^2+30\times\left(\frac{5}{6}\right)^3+\cdots$$
$$=\frac{30}{1-\frac{5}{6}}=180(\text{cm})$$

답 180 cm

59

감속 장치를 장착한 자동차의 속력이 매초 30 %씩 감소하면 이 자동차의 속력은 이전 속력의 70 %가 되는 것이므로 자동차의 처음 속력을 a m/s라 하면

브레이크 페달을 밟은 순간의 속력은

$a\times\frac{70}{100}=\frac{7}{10}a(\mathrm{m/s})$

이고 1초 동안 자동차가 이동한 거리는

$\frac{7}{10}a\times1=\frac{7}{10}a(\mathrm{m})$

그 다음 1초 동안의 속력은

$\frac{7}{10}a\times\frac{7}{10}=\left(\frac{7}{10}\right)^2a(\mathrm{m/s})$

이고 1초 동안 자동차가 이동한 거리는

$\left(\frac{7}{10}\right)^2a\times1=\left(\frac{7}{10}\right)^2a(\mathrm{m})$

⋮

따라서 자동차가 완전히 멈출 때까지 이동한 거리는

$\frac{7}{10}a+\left(\frac{7}{10}\right)^2a+\left(\frac{7}{10}\right)^3a+\cdots$

$=\dfrac{\frac{7}{10}a}{1-\frac{7}{10}}=\frac{7}{3}a(\mathrm{m})$

한편, 시속 108 km는 초속 30 m이므로

$a=30$

$\therefore\ \frac{7}{3}a=\frac{7}{3}\times30=70(\mathrm{m})$ **답 70 m**

Ⅱ. 미분법

60

답 (1) **1** (2) **∞** (3) **0** (4) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ (5) **0** (6) **∞**

61

(1) $\lim_{x \to 1} \log_3 x = \log_3 1 = 0$

(4) $\lim_{x \to 2} \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{2^{-1}} 2 = -1$

답 (1) **0** (2) **−∞** (3) **∞** (4) **−1** (5) **∞** (6) **−∞**

62

(1) $\lim_{x \to \infty} \frac{2^x}{2^x - 2^{-x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 - 2^{-2x}}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^x} = 1$

(2) $\lim_{x \to \infty} (5^x - 3^{x+1})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \left[5^x \left\{ 1 - 3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^x \right\} \right]^{\frac{1}{x}}$

$= \lim_{x \to \infty} 5 \left\{ 1 - 3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^x \right\}^{\frac{1}{x}}$

$= 5 \times 1 = 5$

(3) $\lim_{x \to \infty} (2^{2x+1} - 3^x) = \lim_{x \to \infty} (2 \times 4^x - 3^x)$

$= \lim_{x \to \infty} 4^x \left\{ 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^x \right\} = \infty$

(4) $\lim_{x \to -\infty} \frac{5^x + 5^{-x}}{5^x - 5^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5^{2x} + 1}{5^{2x} - 1}$

$= \frac{0+1}{0-1} = -1$

답 (1) **1** (2) **5** (3) **∞** (4) **−1**

63

$\lim_{x \to \infty} \frac{a \times 3^{x+1} + 1}{3^{x-1} - 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{a \times 3 + \frac{1}{3^x}}{3^{-1} - 2 \times \frac{1}{3^x}}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{3a + \left(\frac{1}{3}\right)^x}{\frac{1}{3} - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x} = 9a$

따라서 $9a = 27$이므로 $a = 3$ 답 **3**

64

(1) $\lim_{x \to \infty} \{\log_{\frac{1}{2}} (2x+1) - \log_{\frac{1}{2}} x\}$

$= \lim_{x \to \infty} \log_{\frac{1}{2}} \frac{2x+1}{x}$

$= \log_{\frac{1}{2}} \lim_{x \to \infty} \frac{2x+1}{x}$

$= \log_{\frac{1}{2}} \lim_{x \to \infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right)$

$= \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{2^{-1}} 2 = -1$

(2) $\lim_{x \to \infty} \{\log_3 (9x^2 - 1) - \log_3 (x^2 + 1)\}$

$= \lim_{x \to \infty} \log_3 \frac{9x^2 - 1}{x^2 + 1}$

$= \log_3 \lim_{x \to \infty} \frac{9x^2 - 1}{x^2 + 1}$

$= \log_3 \lim_{x \to \infty} \frac{9 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$

$= \log_3 9 = 2$

(3) $\lim_{x \to \infty} \{\log_2 7^x - \log_2 (7^x + 2)\}$

$= \lim_{x \to \infty} \log_2 \frac{7^x}{7^x + 2}$

$= \log_2 \lim_{x \to \infty} \frac{7^x}{7^x + 2}$

$= \log_2 \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{7^x}}$

$= \log_2 1 = 0$

(4) $\lim_{x \to 2} (\log_3 |x^2 - 4| - \log_3 |x^3 - 8|)$

$= \lim_{x \to 2} \log_3 \left| \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} \right|$

$= \lim_{x \to 2} \log_3 \left| \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} \right|$

$= \lim_{x \to 2} \log_3 \left| \frac{x+2}{x^2+2x+4} \right|$

$= \log_3 \lim_{x \to 2} \left| \frac{x+2}{x^2+2x+4} \right|$

$= \log_3 \frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1$

답 (1) **−1** (2) **2** (3) **0** (4) **−1**

65

$\lim_{x\to\infty}\{\log_2(ax+1)-\log_2(3x-1)\}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{ax+1}{3x-1}$

$=\log_2\lim_{x\to\infty}\frac{ax+1}{3x-1}$

$=\log_2\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{1}{x}}{3-\frac{1}{x}}$

$=\log_2\frac{a}{3}$

따라서 $\log_2\frac{a}{3}=2$이므로

$\frac{a}{3}=4$ $\quad\therefore a=12$ **답 12**

66

(1) $\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^2=e^2$

(2) $\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{6x}}=\lim_{x\to0}\{(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\}^{\frac{1}{2}}$

$=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right\}^{\frac{1}{3}}$

$=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$

(4) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{8x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{4x}\right\}^2=e^2$

답 (1) $\boldsymbol{e^2}$ (2) $\boldsymbol{\sqrt{e}}$ (3) $\boldsymbol{\sqrt[3]{e}}$ (4) $\boldsymbol{e^2}$

67

(2) $x=\ln\frac{1}{\sqrt{e}}=\ln e^{-\frac{1}{2}}$

$=-\frac{1}{2}\ln e=-\frac{1}{2}$

(4) $e^x=5$에서 $\ln e^x=\ln 5$ $\quad\therefore x=\ln 5$

답 (1) **3** (2) $\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$ (3) $\boldsymbol{\frac{1}{e^2}}$ (4) **ln 5**

68

답 (1) **−2, −2** (2) $\boldsymbol{2x}$**, 2**

69

(1) $\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-\frac{3}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right\}^{-\frac{3}{2}}$

$=e^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e^3}}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x}{3}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}^{\frac{1}{3}}$

$=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$

(3) $-x=t$로 놓으면 $x=-t$이고 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{2t}\right)^{-t}$

$=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2t}\right)^{2t}\right\}^{-\frac{1}{2}}$

$=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

(4) $x-1=t$로 놓으면 $x=t+1$이고 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to1}x^{\frac{2}{3x-3}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{2}{3t}}$

$=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{\frac{2}{3}}$

$=e^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{e^2}$

답 (1) $\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{e^3}}}$ (2) $\boldsymbol{\sqrt[3]{e}}$ (3) $\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{e}}}$ (4) $\boldsymbol{\sqrt[3]{e^2}}$

70

$x+2=t$로 놓으면 $x=t-2$이고 $x\to-2$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to-2}(x+3)^{\frac{1}{x+2}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$

$-x=s$로 놓으면 $x=-s$이고 $x\to-\infty$일 때 $s\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{s\to\infty}\left(1-\frac{1}{s}\right)^{-s}=e$

$\therefore$ (주어진 식)$=e+e=2e$ **답** $\boldsymbol{2e}$

71

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{6x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\times\frac{1}{3}$

$=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{4x}\times2=1\times2=2$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{\ln(1+3x)}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{3x}{\ln(1+3x)}\times\frac{1}{3}\right\}$

$=1\times1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{1-e^x}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1-e^x}{x}\times\frac{x}{\ln(x+1)}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{-\frac{e^x-1}{x}\times\frac{x}{\ln(x+1)}\right\}$

$=(-1)\times1=-1$

(5) $\lim_{x\to0}\frac{e^{1-x}-e}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e(e^{-x}-1)}{x}\times\frac{1}{2}$

$=e\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{-x}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=e\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}e$

(6) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-2x}}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1+1-e^{-2x}}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{e^{-2x}-1}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{e^{-2x}-1}{-2x}\times(-2)$

$=1-1\times(-2)=3$

답 (1) $\mathbf{\frac{1}{3}}$ (2) **2** (3) $\mathbf{\frac{1}{3}}$ (4) $\mathbf{-1}$ (5) $\mathbf{-\frac{1}{2}e}$ (6) **3**

72

(1) $x+1=t$로 놓으면 $x=t-1$이고 $x\to-1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+e^{x+1}}{x+1}=\lim_{t\to0}\frac{(t-1)^3+e^t}{t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{t^3-3t^2+3t-1+e^t}{t}$

$=\lim_{t\to0}\left(\frac{t^3-3t^2+3t}{t}+\frac{e^t-1}{t}\right)$

$=\lim_{t\to0}(t^2-3t+3)+\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}$

$=3+1=4$

(2) $\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)$ ······ ㉠

$\frac{2}{x-1}=t$로 놓으면 $x=\frac{t+2}{t}$이고 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이므로 ㉠에서

$\lim_{t\to0}\frac{t+2}{t}\ln(1+t)$

$=\lim_{t\to0}\left\{(t+2)\times\frac{\ln(1+t)}{t}\right\}$

$=2\times1=2$

답 (1) **4** (2) **2**

73

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\log_3(1+3x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\log_3(1+3x)}{3x}\times3$

$=\frac{1}{\ln3}\times3=\frac{3}{\ln3}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{2x}{\log_2(1+6x)}=\lim_{x\to0}\frac{6x}{\log_2(1+6x)}\times\frac{1}{3}$

$=\ln2\times\frac{1}{3}=\frac{\ln2}{3}$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{x}{5^x-1}=\frac{1}{\ln5}$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{6^x-2^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{6^x-1+1-2^x}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{6^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}$

$=\ln6-\ln2$

$=\ln3$

답 (1) $\mathbf{\frac{3}{\ln3}}$ (2) $\mathbf{\frac{\ln2}{3}}$ (3) $\mathbf{\frac{1}{\ln5}}$ (4) **ln 3**

다른풀이 (4) $\lim_{x\to 0}\frac{6^x-2^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x(3^x-1)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x-1}{x}\times 2^x\right)$

$=\ln 3\times 1=\ln 3$

74

(1) $x-3=t$로 놓으면 $x=t+3$이고 $x\to 3$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 3}\frac{\log(x-2)}{x-3}=\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=\frac{1}{\ln 10}$$

(2) $x+1=t$로 놓으면 $x=t-1$이고 $x\to -1$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to -1}\frac{2^{x+1}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\left(\frac{2^{x+1}-1}{x+1}\times\frac{1}{x-1}\right)$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{2^t-1}{t}\times\frac{1}{t-2}\right)$$
$$=\ln 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 (1) $\mathbf{\frac{1}{\ln 10}}$ (2) $\mathbf{\ln\frac{\sqrt{2}}{2}}$

75

(1) $x\to 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\ln(a+6x)=0$이므로

$\ln a=0$ $\therefore a=1$

$a=1$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x)}{6x}\times 6$$
$$=1\times 6=6$$

$\therefore b=6$

(2) $x\to 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}(e^{x-2}-a)=0$이므로

$1-a=0$ $\therefore a=1$

$a=1$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^{x-2}-1}{x^2-4}=b$$

이때 $x-2=t$로 놓으면 $x=t+2$이고 $x\to 2$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^{x-2}-1}{x^2-4}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{(t+2)^2-4}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t(t+4)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{e^t-1}{t}\times\frac{1}{t+4}\right)$$
$$=1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$\therefore b=\frac{1}{4}$

답 (1) $\mathbf{a=1,\ b=6}$ (2) $\mathbf{a=1,\ b=\frac{1}{4}}$

76

$\lim_{x\to\infty}ax\{\ln(x+b)-\ln x\}=5$에서

$\lim_{x\to\infty}ax\ln\frac{x+b}{x}=5$

$\therefore \lim_{x\to\infty}ax\ln\left(1+\frac{b}{x}\right)=5$ ...... ㉠

$\frac{b}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{b}{t}$이고 $x\to\infty$일 때 $t\to 0$이므로 ㉠에서

$$\lim_{t\to 0}\frac{ab}{t}\ln(1+t)=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}\times ab$$
$$=1\times ab=ab$$

$\therefore ab=5$ 답 5

다른풀이 $\lim_{x\to\infty}ax\{\ln(x+b)-\ln x\}=5$에서

$$\lim_{x\to\infty}ax\ln\frac{x+b}{x}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{b}{x}\right)^{ax}$$
$$=\ln\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{b}{x}\right)^{\frac{x}{b}}\right\}^{ab}$$
$$=\ln e^{ab}=ab$$

$\therefore ab=5$

77

(1) 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+a)}{3^x-1}=b$ ...... ㉠

㉠에서 $x \to 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 0} \ln(x+a)=0$이므로

$\ln a=0$ $\qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{3^x-1}=\lim_{x \to 0}\left\{\frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{x}{3^x-1}\right\}$$

$$=1 \times \frac{1}{\ln 3}=\frac{1}{\ln 3}$$

$\therefore b=\dfrac{1}{\ln 3}$

(2) 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 0} f(x)=f(0)$

$\therefore \lim_{x \to 0} \dfrac{e^{3x}+a}{5x}=b$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠에서 $x \to 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 0}(e^{3x}+a)=0$이므로

$1+a=0$ $\qquad \therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x}-1}{5x}=\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x}-1}{3x} \times \frac{3}{5}$$

$$=1 \times \frac{3}{5}=\frac{3}{5}$$

$\therefore b=\dfrac{3}{5}$

답 (1) $\boldsymbol{a=1,\ b=\dfrac{1}{\ln 3}}$ $\quad$ (2) $\boldsymbol{a=-1,\ b=\dfrac{3}{5}}$

78

$x \neq 0$일 때 $f(x)=\dfrac{x}{\ln(1+7x)}$이고 $x>-\dfrac{1}{7}$에서 함수 $f(x)$가 연속이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x \to 0} f(x)=f(0)$

$$\therefore \lim_{x \to 0} f(x)=\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(1+7x)}$$

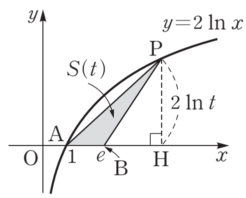
$$=\lim_{x \to 0} \frac{7x}{\ln(1+7x)} \times \frac{1}{7}$$

$$=1 \times \frac{1}{7}=\frac{1}{7}$$

$\therefore f(0)=\dfrac{1}{7}$

답 $\boldsymbol{\dfrac{1}{7}}$

79



점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\text{PH}}=2\ln t$이므로

$$S(t)=\frac{1}{2} \times \overline{\text{AB}} \times \overline{\text{PH}}$$

$$=\frac{1}{2}(e-1) \times 2\ln t$$

$$=(e-1)\ln t$$

$$\therefore \lim_{t \to 1+} \frac{S(t)}{t-1}=\lim_{t \to 1+} \frac{(e-1)\ln t}{t-1}$$

$t-1=x$로 놓으면 $t=x+1$이고 $t \to 1+$일 때 $x \to 0+$이므로

$$\lim_{t \to 1+} \frac{(e-1)\ln t}{t-1}$$

$$=(e-1)\lim_{x \to 0+} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$=(e-1) \times 1=e-1$$

답 $\boldsymbol{e-1}$

80

(1) $y=2^{3x+1}=2^{3x} \times 2=2 \times 8^x$이므로

$$y'=2 \times 8^x \ln 8$$

$$=2^{3x+1} \ln 2^3$$

$$=3 \times 2^{3x+1} \ln 2$$

(2) $e^{-x}=\left(\dfrac{1}{e}\right)^x$이므로

$$y'=(x^3)'\left(\frac{1}{e}\right)^x+x^3\left\{\left(\frac{1}{e}\right)^x\right\}'$$

$$=3x^2\left(\frac{1}{e}\right)^x+x^3\left(\frac{1}{e}\right)^x \ln \frac{1}{e}$$

$$=3x^2e^{-x}-x^3e^{-x}$$

$$=x^2e^{-x}(3-x)$$

(3) $y'=(x^3+3)'\left(\dfrac{1}{3}\right)^x+(x^3+3)\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right\}'$

$$=3x^2\left(\frac{1}{3}\right)^x+(x^3+3)\left(\frac{1}{3}\right)^x \ln \frac{1}{3}$$

$$=3x^2\left(\frac{1}{3}\right)^x-(x^3+3)\left(\frac{1}{3}\right)^x \ln 3$$

$$=(3x^2-x^3\ln 3-3\ln 3)\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

(4) $y'=(e^x)'(6x^2-1)+e^x(6x^2-1)'$

$=e^x(6x^2-1)+e^x\times 12x$

$=e^x(6x^2+12x-1)$

(5) $y'=(3^x)'(5x-1)+3^x(5x-1)'$

$=3^x\ln 3\times(5x-1)+3^x\times 5$

$=3^x(5x\ln 3-\ln 3+5)$

(6) $e^{4x}=(e^4)^x$이므로

$\{(e^4)^x\}'=e^{4x}\ln e^4=4e^{4x}$

$\therefore y'=(x)'e^{4x}+x(e^{4x})'$

$=e^{4x}+x\times 4e^{4x}$

$=e^{4x}(1+4x)$

답 (1) $\boldsymbol{y'=3\times 2^{3x+1}\ln 2}$

(2) $\boldsymbol{y'=x^2e^{-x}(3-x)}$

(3) $\boldsymbol{y'=(3x^2-x^3\ln 3-3\ln 3)\left(\frac{1}{3}\right)^x}$

(4) $\boldsymbol{y'=e^x(6x^2+12x-1)}$

(5) $\boldsymbol{y'=3^x(5x\ln 3-\ln 3+5)}$

(6) $\boldsymbol{y'=e^{4x}(1+4x)}$

(4) $y'=(e^x)'\log_3 x+e^x(\log_3 x)'$

$=e^x\log_3 x+e^x\times\dfrac{1}{x\ln 3}$

$=e^x\left(\log_3 x+\dfrac{1}{x\ln 3}\right)$

(5) $y'=(x^3)'\ln x+x^3(\ln x)'$

$=3x^2\ln x+x^3\times\dfrac{1}{x}$

$=3x^2\ln x+x^2$

$=x^2(3\ln x+1)$

(6) $y=(\log_2 x)^2=(\log_2 x)(\log_2 x)$이므로

$y'=(\log_2 x)'\log_2 x+\log_2 x(\log_2 x)'$

$=\dfrac{1}{x\ln 2}\times\log_2 x+\log_2 x\times\dfrac{1}{x\ln 2}$

$=\dfrac{2\log_2 x}{x\ln 2}$

답 (1) $\boldsymbol{y'=\frac{5}{x}}$ (2) $\boldsymbol{y'=\log_5 2x+\frac{1}{\ln 5}}$

(3) $\boldsymbol{y'=\frac{3}{x}}$ (4) $\boldsymbol{y'=e^x\left(\log_3 x+\frac{1}{x\ln 3}\right)}$

(5) $\boldsymbol{y'=x^2(3\ln x+1)}$ (6) $\boldsymbol{y'=\frac{2\log_2 x}{x\ln 2}}$

81

(1) $y=\ln x^5=5\ln x$이므로

$y'=5\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{x}$

(2) $\log_5 2x=\log_5 2+\log_5 x$이므로

$y'=(x)'\log_5 2x+x(\log_5 2x)'$

$=\log_5 2x+x(\log_5 2+\log_5 x)'$

$=\log_5 2x+x\left(0+\dfrac{1}{x\ln 5}\right)$

$=\log_5 2x+\dfrac{1}{\ln 5}$

(3) $y=\ln(5x)^3$

$=3\ln 5x$

$=3(\ln 5+\ln x)$

$=3\ln 5+3\ln x$

이므로

$y'=(3\ln 5)'+(3\ln x)'$

$=0+3\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x}$

82

$f(x)=(3x^2+2)e^x$에서

$f'(x)=(3x^2+2)'e^x+(3x^2+2)(e^x)'$

$=6xe^x+(3x^2+2)e^x$

$=e^x(3x^2+6x+2)$

$\therefore f'(0)=e^0\times 2=1\times 2=2$ 답 **2**

83

$f(x)=x^3\ln x^2=2x^3\ln x\ (x>0)$에서

$f'(x)=(2x^3)'\ln x+2x^3(\ln x)'$

$=6x^2\ln x+2x^3\times\dfrac{1}{x}$

$=6x^2\ln x+2x^2$

$\therefore f'(1)=0+2=2$ 답 **2**

84

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\times2$$
$$=f'(1)+2f'(1)=3f'(1)$$

이때 $f(x)=3^x$에서

$f'(x)=3^x\ln 3$이므로

$3f'(1)=3\times3\ln3=9\ln3$ **답 $9\ln 3$**

85

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\times(x^2+x+1)\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\times\lim_{x\to1}(x^2+x+1)$$
$$=3f'(1)$$

이때 $f(x)=e^x\ln x+x^2$에서

$$f'(x)=(e^x)'\ln x+e^x(\ln x)'+(x^2)'$$
$$=e^x\ln x+e^x\times\frac{1}{x}+2x$$

$$\therefore 3f'(1)=3(e\ln1+e\times1+2)$$
$$=3(e+2)$$ **답 $3(e+2)$**

86

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$에서

$\lim_{x\to1+}(ax^2+1)=\lim_{x\to1-}\ln bx=\ln b$

$\therefore a+1=\ln b$ …… ㉠

$\ln bx=\ln b+\ln x$이므로

$(\ln bx)'=(\ln b+\ln x)'=\frac{1}{x}$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (0<x<1)\\ 2ax & (x>1)\end{cases}$$

또, $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수 $f'(1)$이 존재하므로

$\lim_{x\to1+}f'(x)=\lim_{x\to1-}f'(x)$에서 $\lim_{x\to1+}2ax=\lim_{x\to1-}\frac{1}{x}$

$2a=1$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{2}+1=\ln b,\ \ln b=\frac{3}{2}$

$\therefore b=e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$ **답 $a=\frac{1}{2},\ b=e\sqrt{e}$**

87

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하면 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$에서

$\lim_{x\to2+}(x^2+a)=\lim_{x\to2-}be^{x-1}=4+a$

$\therefore 4+a=be$ …… ㉠

$be^{x-1}=be^{-1}\times e^x$이므로

$(be^{x-1})'=(be^{-1}\times e^x)'=be^{-1}\times e^x=be^{x-1}$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases}2x & (x>2)\\ be^{x-1} & (x<2)\end{cases}$$

또, $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수 $f'(2)$가 존재하므로

$\lim_{x\to2+}f'(x)=\lim_{x\to2-}f'(x)$에서

$\lim_{x\to2+}2x=\lim_{x\to2-}be^{x-1}$

$4=be$ $\therefore b=\frac{4}{e}$

$b=\frac{4}{e}$를 ㉠에 대입하면

$4+a=\frac{4}{e}\times e$ $\therefore a=0$

$\therefore a+b=0+\frac{4}{e}=\frac{4}{e}$ **답 $\frac{4}{e}$**

88

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$, $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$, $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ $(x\neq0)$이므로

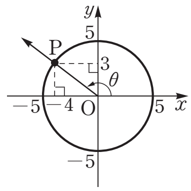
(1) $\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{r}{y}$ $(y\neq0)$

(2) $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{r}{x}$ $(x\neq0)$

(3) $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{x}{y}$ $(y\neq0)$

답 (1) $\boldsymbol{\dfrac{r}{y}\,(y\neq0)}$ (2) $\boldsymbol{\dfrac{r}{x}\,(x\neq0)}$ (3) $\boldsymbol{\dfrac{x}{y}\,(y\neq0)}$

89



오른쪽 그림에서

$\overline{OP}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$이고,

$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$, $\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$,

$\tan\theta=-\dfrac{3}{4}$

(1) $\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{5}{3}$

(2) $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}=-\dfrac{5}{4}$

(3) $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}=-\dfrac{4}{3}$

답 (1) $\boldsymbol{\dfrac{5}{3}}$ (2) $\boldsymbol{-\dfrac{5}{4}}$ (3) $\boldsymbol{-\dfrac{4}{3}}$

90

(1) 400°는 제1사분면의 각이므로

$\sin 400^\circ>0$, $\cos 400^\circ>0$, $\tan 400^\circ>0$

$\therefore$ **$\csc 400^\circ>0$, $\sec 400^\circ>0$, $\cot 400^\circ>0$**

(2) $\dfrac{7}{6}\pi$는 제3사분면의 각이므로

$\sin\dfrac{7}{6}\pi<0$, $\cos\dfrac{7}{6}\pi<0$, $\tan\dfrac{7}{6}\pi>0$

$\therefore$ **$\csc\dfrac{7}{6}\pi<0$, $\sec\dfrac{7}{6}\pi<0$, $\cot\dfrac{7}{6}\pi>0$**

답 **풀이 참조**

91

(1) $\csc\theta>0$이면 $\sin\theta>0$이므로 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이고, $\sec\theta<0$이면 $\cos\theta<0$이므로 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

따라서 θ는 제2사분면의 각이다.

(2) $\sec\theta>0$이면 $\cos\theta>0$이므로 θ는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이고, $\cot\theta<0$이면 $\tan\theta<0$이므로 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

따라서 θ는 제4사분면의 각이다.

(3) $\csc\theta\sec\theta<0$이면

$\csc\theta>0$, $\sec\theta<0$ 또는 $\csc\theta<0$, $\sec\theta>0$

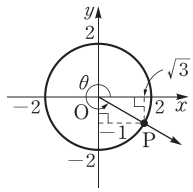
즉, $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

이므로 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

답 (1) **제2사분면** (2) **제4사분면**

(3) **제2사분면 또는 제4사분면**

92



오른쪽 그림에서

$\overline{OP}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$

이므로

$\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}=-2$,

$\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,

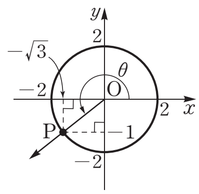
$\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}=-\sqrt{3}$

$$\therefore\ \frac{3\sec\theta+\csc\theta}{\cot^2\theta}=\frac{3\times\frac{2\sqrt{3}}{3}-2}{(-\sqrt{3})^2}=\frac{2\sqrt{3}-2}{3}$$

답 $\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}-2}{3}}$

93

θ가 제3사분면의 각이고 $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로



오른쪽 그림과 같이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원을 그리면 각 θ를 나타내는 동경 OP와 만나는 점 P는 $P(-\sqrt{3},\ -1)$이다.

이때 $\sin\theta=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}=-2$, $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\sqrt{3}$

$\therefore \csc\theta\cot\theta=-2\sqrt{3}$ 답 $-2\sqrt{3}$

94

$\theta=-\frac{5}{6}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{7}{6}\pi$이므로 θ는 제3사분면의 각이다.

따라서 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$이므로

$\csc\theta<0$, $\sec\theta<0$, $\cot\theta>0$ 답 **풀이 참조**

95

(i) $\csc\theta\cot\theta>0$에서

$\csc\theta>0$, $\cot\theta>0$ 또는 $\csc\theta<0$, $\cot\theta<0$

$\csc\theta>0$, $\cot\theta>0$일 때,

θ는 제1사분면의 각

$\csc\theta<0$, $\cot\theta<0$일 때,

θ는 제4사분면의 각

(ii) $\sec\theta\tan\theta<0$에서

$\sec\theta>0$, $\tan\theta<0$ 또는 $\sec\theta<0$, $\tan\theta>0$

$\sec\theta>0$, $\tan\theta<0$일 때,

θ는 제4사분면의 각

$\sec\theta<0$, $\tan\theta>0$일 때,

θ는 제3사분면의 각

(i), (ii)에서 주어진 조건을 동시에 만족시키는 θ는 제4사분면의 각이다. 답 **제4사분면**

96

$\csc\theta>0$, $\sec\theta<0$에서 θ는 제2사분면의 각이므로

$\cot\theta<0$

$\therefore |\csc\theta|+\sqrt{\sec^2\theta}+\sqrt{\cot^2\theta}$

$=\csc\theta-\sec\theta-\cot\theta$

답 **$\csc\theta-\sec\theta-\cot\theta$**

97

답 (1) **$\sec^2\theta$** (2) **$\csc^2\theta$**

98

답 **$\frac{5}{4}$, $<$, $-\frac{\sqrt{5}}{2}$, -2, $\tan^2\theta$, 5, $>$, $\sqrt{5}$**

99

(1) $\tan\theta=\frac{15}{8}$이므로 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$에서

$\sec^2\theta=1+\left(\frac{15}{8}\right)^2=\frac{289}{64}$

그런데 θ가 제3사분면의 각이므로

$\sec\theta<0$ $\therefore \sec\theta=-\frac{17}{8}$

(2) $\cot\theta=\frac{8}{15}$이므로 $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$에서

$\csc^2\theta=1+\left(\frac{8}{15}\right)^2=\frac{289}{225}$

그런데 θ가 제3사분면의 각이므로

$\csc\theta<0$ $\therefore \csc\theta=-\frac{17}{15}$

답 (1) **$-\frac{17}{8}$** (2) **$-\frac{17}{15}$**

100

(1) $(\sin\theta-\csc\theta)^2+(\cos\theta-\sec\theta)^2-(\tan\theta-\cot\theta)^2$

$=(\sin^2\theta-2+\csc^2\theta)+(\cos^2\theta-2+\sec^2\theta)-(\tan^2\theta-2+\cot^2\theta)$

$=-2+(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+(\csc^2\theta-\cot^2\theta)+(\sec^2\theta-\tan^2\theta)$

$=-2+1+1+1=1$

(2) $\frac{1+\sin\theta}{\csc\theta-\cot\theta}-\frac{1-\sin\theta}{\csc\theta+\cot\theta}$

$=\frac{(1+\sin\theta)(\csc\theta+\cot\theta)-(1-\sin\theta)(\csc\theta-\cot\theta)}{(\csc\theta-\cot\theta)(\csc\theta+\cot\theta)}$

$=\frac{2(\cot\theta+\sin\theta\csc\theta)}{\csc^2\theta-\cot^2\theta}$

$=2\left(\cot\theta+\sin\theta\times\frac{1}{\sin\theta}\right)$

$=2(\cot\theta+1)$

답 (1) **1** (2) **$2(\cot\theta+1)$**

101

$$\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$
$$=\frac{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$
$$=\frac{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$
$$=\frac{2(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$
$$=\frac{2}{\sin\theta}$$

즉, $\frac{2}{\sin\theta}=-3$에서 $2\csc\theta=-3$

$\therefore \csc\theta=-\frac{3}{2}$

$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$에서 $\cot^2\theta=\csc^2\theta-1$이므로

$\cot^2\theta=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-1=\frac{5}{4}$

이때 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로 $\cot\theta<0$

$\therefore \cot\theta=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore \csc\theta+\cot\theta=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}=-\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

답 $-\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

102

$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$에서

$\sec^2\alpha=1+\left(-\frac{24}{7}\right)^2=\frac{625}{49}$

$\cos^2\alpha=\frac{1}{\sec^2\alpha}$이므로 $\cos^2\alpha=\frac{49}{625}$

$\therefore \cos\alpha=\frac{7}{25}\left(\because \frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi\right)$

이때 $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$에서 $\frac{3}{4}\pi<\frac{\alpha}{2}<\pi$이므로

$\sin\frac{\alpha}{2}>0,\ \cos\frac{\alpha}{2}<0$ ...... ㉠

$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{1-\frac{7}{25}}{2}=\frac{9}{25}$

$\therefore \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{5}$ ($\because$ ㉠)

$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{1+\frac{7}{25}}{2}=\frac{16}{25}$

$\therefore \cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{4}{5}$ ($\because$ ㉠)

답 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{5}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{4}{5}$

103

답 30°, $\cos 30^\circ$, $\sin 45^\circ$, $\sin 30^\circ$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

104

(1) $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$

$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

(3) $\tan\frac{5}{12}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\times\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$

(4) $\cos 105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)$

$=\cos 60^\circ\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\sin 45^\circ$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

이므로

$\sec 105^\circ=\frac{1}{\cos 105^\circ}=\frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}=-\sqrt{2}-\sqrt{6}$

답 (1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ (3) $2+\sqrt{3}$ (4) $-\sqrt{2}-\sqrt{6}$

105

(1) $\sin 25^\circ \cos 20^\circ + \cos 25^\circ \sin 20^\circ$

$=\sin(25^\circ+20^\circ)=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\cos 55^\circ \cos 10^\circ + \sin 55^\circ \sin 10^\circ$

$=\cos(55^\circ-10^\circ)=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\frac{\tan 20^\circ+\tan 10^\circ}{1-\tan 20^\circ \tan 10^\circ}=\tan(20^\circ+10^\circ)$

$=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(4) $\sin 80^\circ=\sin(90^\circ-10^\circ)=\cos 10^\circ$,

$\sin 125^\circ=\sin(90^\circ+35^\circ)=\cos 35^\circ$이므로

$\sin 80^\circ \sin 125^\circ-\sin 10^\circ \sin 35^\circ$

$=\cos 10^\circ \cos 35^\circ-\sin 10^\circ \sin 35^\circ$

$=\cos(10^\circ+35^\circ)=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

106

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\cos\alpha>0$, $\sin\beta<0$

$\therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2}$

$=-\frac{\sqrt{10}}{10}$

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3}$, $\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{1}{3}$

(1) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)-\frac{3}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$

$=-\frac{9\sqrt{10}}{50}$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)-\frac{4}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$

$=-\frac{\sqrt{10}}{10}$

(3) $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{1}{3}}=3$

답 (1) $-\frac{9\sqrt{10}}{50}$ (2) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ (3) 3

107

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\alpha>0$

$\therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$

$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$이므로 $\cos\beta<0$

$\therefore \cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$

$\therefore \sin(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$

$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$-(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}$

$-\left\{\frac{4}{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}\right\}$

$=\frac{7}{25}$

답 $\frac{7}{25}$

108

이차방정식 $2x^2-4x+1=0$의 두 근이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=2$, $\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{2}$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$

답 4

109

두 직선 $y=-\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}$, $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=-\frac{1}{5}$, $\tan\beta=\frac{2}{3}$

두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|$$
$$=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$
$$=\left|\frac{-\frac{1}{5}-\frac{2}{3}}{1+\left(-\frac{1}{5}\right)\times\frac{2}{3}}\right|=1$$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}\left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 　　**답** $\frac{\pi}{4}$

110

두 직선 $x+3y-4=0$, $2x+y-3=0$, 즉

$y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$, $y=-2x+3$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=-\frac{1}{3}$, $\tan\beta=-2$

$$\therefore\ \tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|$$
$$=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$
$$=\left|\frac{-\frac{1}{3}-(-2)}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)\times(-2)}\right|=1$$

$$\therefore\ \sec^2\theta=1+\tan^2\theta$$
$$=1+1^2=2$$

답 2

111

두 직선 $x-3y+2=0$, $kx-2y-1=0$, 즉

$y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$, $y=\frac{k}{2}x-\frac{1}{2}$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=\frac{1}{3}$, $\tan\beta=\frac{k}{2}$

두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$$|\tan(\alpha-\beta)|=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

$$\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=1$$

$$\left|\frac{\frac{1}{3}-\frac{k}{2}}{1+\frac{1}{3}\times\frac{k}{2}}\right|=1,\ \frac{2-3k}{6+k}=\pm1$$

$\frac{2-3k}{6+k}=1$에서 $2-3k=6+k$ 　　$\therefore\ k=-1$

$\frac{2-3k}{6+k}=-1$에서 $2-3k=-6-k$ 　　$\therefore\ k=4$

그런데 $k>0$이므로 $k=4$ 　　**답** 4

112

$\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$에서 $\cos\alpha>0$이므로

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}}=-2\sqrt{2}$$

(1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$$=2\times\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times\frac{1}{3}=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

(2) $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2$

$$=-\frac{7}{9}$$

(3) $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times(-2\sqrt{2})}{1-(-2\sqrt{2})^2}=\frac{4\sqrt{2}}{7}$

답 (1) $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$ 　(2) $-\frac{7}{9}$ 　(3) $\frac{4\sqrt{2}}{7}$

다른풀이 (3) $\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{-\frac{4\sqrt{2}}{9}}{-\frac{7}{9}}=\frac{4\sqrt{2}}{7}$

113

$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{1}{4}$$

$1+\sin 2\alpha=\frac{1}{4}$ 　　$\therefore\ \sin 2\alpha=-\frac{3}{4}$

$\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha=1$이므로

$\cos^2 2\alpha=1-\sin^2 2\alpha=1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$

$\therefore \cos 2\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}\ \left(\because \frac{3}{2}\pi<2\alpha<2\pi\right)$

$\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{-\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=-\frac{3\sqrt{7}}{7}$

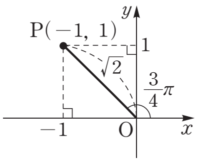
답 $\boldsymbol{\sin 2\alpha=-\frac{3}{4},\ \cos 2\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4},}$
$\boldsymbol{\tan 2\alpha=-\frac{3\sqrt{7}}{7}}$

114

답 ㉠ **2** ㉡ $\boldsymbol{\frac{5}{3}\pi}$ ㉢ $\boldsymbol{\theta+\frac{5}{3}\pi}$

115

(1) 오른쪽 그림과 같이
$\sin\theta$의 계수 -1,
$\cos\theta$의 계수 1을 각각 x좌표, y좌표로 하는 점
$\mathrm{P}(-1,\ 1)$을 잡으면



$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$이고,

$\cos\frac{3}{4}\pi=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\frac{3}{4}\pi=\frac{1}{\sqrt{2}}$

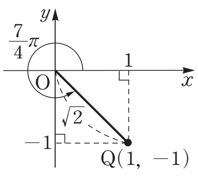
$\therefore -\sin\theta+\cos\theta$

$=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi\sin\theta+\sin\frac{3}{4}\pi\cos\theta\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$

(2) 오른쪽 그림과 같이
$\sin\theta$의 계수 -1,
$\cos\theta$의 계수 1을 각각 y좌표, x좌표로 하는 점
$\mathrm{Q}(1,\ -1)$을 잡으면



$\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$이고,

$\sin\frac{7}{4}\pi=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\frac{7}{4}\pi=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore -\sin\theta+\cos\theta$

$=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$

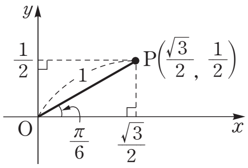
$=\sqrt{2}\left(\sin\frac{7}{4}\pi\sin\theta+\cos\frac{7}{4}\pi\cos\theta\right)$

$=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{7}{4}\pi\right)$

답 (1) $\boldsymbol{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)}$ (2) $\boldsymbol{\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{7}{4}\pi\right)}$

116

오른쪽 그림과 같이
$\sin\theta$의 계수 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,
$\cos\theta$의 계수 $\frac{1}{2}$을 각각
x좌표, y좌표로 하는 점
$\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$을 잡으면



$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$이고,

$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta$

$=\cos\frac{\pi}{6}\sin\theta+\sin\frac{\pi}{6}\cos\theta=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore$ 주기: 2π, 최댓값: 1, 최솟값: -1

답 **주기: $\boldsymbol{2\pi}$, 최댓값: 1, 최솟값: $\boldsymbol{-1}$**

117

$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$

이므로

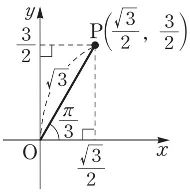
$\sqrt{3}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+3\cos\theta$

$=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)+3\cos\theta$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{3}{2}\cos\theta+3\cos\theta$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{3}{2}\cos\theta$

(i) 오른쪽 그림과 같이 $\sin\theta$의 계수 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta$의 계수 $\frac{3}{2}$을 각각 x좌표, y좌표로 하는 점 $\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{2}\right)$을 잡으면



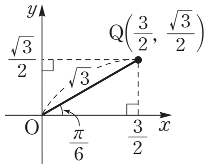
$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$

이고,

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\ \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{3}{2}\cos\theta\\&=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)\\&=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta+\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta\right)\\&=\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

(ii) 오른쪽 그림과 같이 $\sin\theta$의 계수 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta$의 계수 $\frac{3}{2}$을 각각 y좌표, x좌표로 하는 점 $\mathrm{Q}\left(\frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$을 잡으면



$\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$

이고,

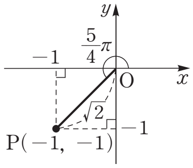
$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{3}{2}\cos\theta\\&=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)\\&=\sqrt{3}\left(\sin\frac{\pi}{6}\sin\theta+\cos\frac{\pi}{6}\cos\theta\right)\\&=\sqrt{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

답 $\boldsymbol{\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right),\ \sqrt{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$

118

(1) 오른쪽 그림과 같이 $\sin x$의 계수 -1, $\cos x$의 계수 -1을 각각 x좌표, y좌표로 하는 점 $\mathrm{P}(-1,\ -1)$을 잡으면



$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

이고, $\cos\frac{5}{4}\pi=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\frac{5}{4}\pi=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned}\therefore\ y&=-\sin x-\cos x\\&=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)\\&=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi\sin x+\sin\frac{5}{4}\pi\cos x\right)\\&=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{5}{4}\pi\right)\end{aligned}$$

이때 $-1\le\sin\left(x+\frac{5}{4}\pi\right)\le1$이므로

$-\sqrt{2}\le\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{5}{4}\pi\right)\le\sqrt{2}$

$\therefore$ 최댓값: $\sqrt{2}$, 최솟값: $-\sqrt{2}$

(2) $y=3\sin x+4\cos x-2$

$$\begin{aligned}&=5\left(\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x\right)-2\\&=5\sin(x+\alpha)-2\end{aligned}$$

$\left(\text{단, } \cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\alpha=\frac{4}{5}\right)$

이때 $-1\le\sin(x+\alpha)\le1$이므로

$-5\le5\sin(x+\alpha)\le5$

$\therefore\ -7\le5\sin(x+\alpha)-2\le3$

$\therefore$ 최댓값: 3, 최솟값: -7

(3) $y=2\sqrt{3}\sin x+3\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned}&=2\sqrt{3}\sin x+3\left(\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}\right)\\&=2\sqrt{3}\sin x+3\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{3}{2}\cos x\\&=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\\&=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)\\&=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

이때 $-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le1$이므로

$-\sqrt{3}\le\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le\sqrt{3}$

$\therefore$ 최댓값: $\sqrt{3}$, 최솟값: $-\sqrt{3}$

(4) $y=2\cos x-2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+3$

$=2\cos x-2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)+3$

$=2\cos x-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)+3$

$=2\cos x-\sqrt{3}\sin x-\cos x+3$

$=-\sqrt{3}\sin x+\cos x+3$

$=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)+3$

$=2\left(\cos\frac{5}{6}\pi\sin x+\sin\frac{5}{6}\pi\cos x\right)+3$

$=2\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)+3$

이때 $-1\le\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)\le1$이므로

$-2\le2\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)\le2$

$\therefore 1\le2\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)+3\le5$

$\therefore$ 최댓값: 5, 최솟값: 1

답 (1) **최댓값: $\sqrt{2}$, 최솟값: $-\sqrt{2}$**
(2) **최댓값: 3, 최솟값: -7**
(3) **최댓값: $\sqrt{3}$, 최솟값: $-\sqrt{3}$**
(4) **최댓값: 5, 최솟값: 1**

119

$y=-\sin x+\sqrt{a}\cos x$

$=\sqrt{1+a}\left(-\frac{1}{\sqrt{1+a}}\sin x+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1+a}}\cos x\right)$

$=\sqrt{1+a}(\cos\alpha\sin x+\sin\alpha\cos x)$

$=\sqrt{1+a}\sin(x+\alpha)$

$\left(\text{단, }\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+a}},\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1+a}}\right)$

이때 $-1\le\sin(x+\alpha)\le1$이므로

$-\sqrt{1+a}\le\sqrt{1+a}\sin(x+\alpha)\le\sqrt{1+a}$

최솟값이 -2이므로 $-\sqrt{1+a}=-2$

$1+a=4$ $\quad\therefore a=3$

답 **3**

120

답 **0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$**

121

(1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin 2x=\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{3+\sin x}{\cos x}=\frac{3+\sin 0}{\cos 0}=\frac{3}{1}=3$

답 (1) **1** (2) **3**

122

답 **$7x$, $\frac{7}{5}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{5}{7}$**

123

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{5x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{2}{5}=1\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\times\frac{5x}{\tan 5x}\times\frac{3}{5}\right)$

$=1\times1\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$

답 (1) **$\frac{2}{5}$** (2) **$\frac{3}{5}$**

124

(1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sec x}{\csc x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan x=1$

(2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 4x}{\sin 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin 2x\cos 2x}{\sin 2x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}2\cos 2x=2\times(-1)=-2$

(3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\cos x-\sin x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\cos x+\sin x)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

(4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan^2 x}{\sin x-\cos x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\tan x)(1-\tan x)}{-\cos x\left(1-\frac{\sin x}{\cos x}\right)}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1+\tan x)(1-\tan x)}{-\cos x(1-\tan x)}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1+\tan x}{-\cos x}$

$=\frac{1+1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-2\sqrt{2}$

답 (1) **1** (2) $\mathbf{-2}$ (3) $\mathbf{\sqrt{2}}$ (4) $\mathbf{-2\sqrt{2}}$

125

$x\neq0$일 때, $x^2>0$이고 $-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq1$이므로

$-x^2\leq x^2\sin\frac{1}{x}\leq x^2$

이때 $\lim_{x\to0}(-x^2)=\lim_{x\to0}x^2=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$ 답 **0**

126

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x^3+x^2+5x)}{5x^3+4x^2+2x}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(3x^3+x^2+5x)}{3x^3+x^2+5x}\times\frac{3x^3+x^2+5x}{5x^3+4x^2+2x}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x^3+x^2+5x)}{3x^3+x^2+5x}\times\lim_{x\to0}\frac{3x^3+x^2+5x}{5x^3+4x^2+2x}$

$=1\times\lim_{x\to0}\frac{3x^2+x+5}{5x^2+4x+2}$

$=1\times\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{x\cos x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan 2x}{2x}\times\frac{2}{\cos x}\right)$

$=1\times\frac{2}{1}=2$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\sin(\tan x)}{\sin 2x}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(\tan x)}{\tan x}\times\frac{\tan x}{x}\times\frac{2x}{\sin 2x}\times\frac{1}{2}\right\}$

$=1\times1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x+\tan 3x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 2x}{x}}{1+\frac{\tan 3x}{x}}$

$=\frac{\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\times2\right)}{1+\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan 3x}{3x}\times3\right)}$

$=\frac{2}{1+3}=\frac{1}{2}$

답 (1) $\mathbf{\frac{5}{2}}$ (2) **2** (3) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ (4) $\mathbf{\frac{1}{2}}$

127

(1) $\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{2x}{\sin 2x}\times\frac{3}{2}\right)$

$=1\times1\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{\tan 3x}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(x+1)}{x}\times\frac{3x}{\tan 3x}\times\frac{1}{3}\right\}$

$=1\times1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

답 (1) $\mathbf{\frac{3}{2}}$ (2) $\mathbf{\frac{1}{3}}$

참고 $\lim_{\blacktriangle\to0}\frac{e^{\blacktriangle}-1}{\blacktriangle}=1$

$\lim_{\blacksquare\to0}\frac{\ln(1+\blacksquare)}{\blacksquare}=1$

128

(1) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\tan 6x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\tan 6x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x\tan 6x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x\tan 6x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{6x}{\tan 6x}\times\frac{1}{6(1+\cos x)}\right\}$

$=1^2\times1\times\frac{1}{6\times2}=\frac{1}{12}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)}{x^2(1+\cos 2x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 2x}{x^2(1+\cos 2x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{x^2(1+\cos 2x)}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2 2x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos 2x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\times\frac{4}{1+\cos 2x}\right\}$

$=1^2\times\frac{4}{2}=2$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{1-\cos 2x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{1-\cos 2x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\times\frac{1+\cos 2x}{1+\cos 2x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos^2 2x}\times\frac{1+\cos 2x}{1+\cos x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 2x}\times\frac{1+\cos 2x}{1+\cos x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{(2x)^2}{\sin^2 2x}\times\frac{1}{2^2}\times\frac{1+\cos 2x}{1+\cos x}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)^2\times\frac{1}{4}\times\frac{1+\cos 2x}{1+\cos x}\right\}$

$=1^2\times1^2\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{2}$

$=\frac{1}{4}$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{\csc x-\cot x}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{1+\cos x}\right)$

$=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

답 (1) $\mathbf{\frac{1}{12}}$ (2) **2** (3) $\mathbf{\frac{1}{4}}$ (4) $\mathbf{\frac{1}{2}}$

129

(1) $x-\pi=t$로 놓으면 $x=\pi+t$이고 $x\to\pi$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi+t)}{-t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin t}{-t}$

$=1$

(2) $x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x=\frac{\pi}{2}+t$이고 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x=\lim_{t\to0}t\tan\left(\frac{\pi}{2}+t\right)$

$=\lim_{t\to0}t(-\cot t)$

$=\lim_{t\to0}\left(-\frac{t}{\tan t}\right)$

$=-1$

(3) $\frac{1}{2x+1}=t$로 놓으면 $x=\frac{1-t}{2t}$이고 $x \to \infty$일 때 $t \to 0$이므로

$$\lim_{x\to\infty} x \tan\frac{1}{2x+1}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-t}{2t}\times\tan t\right)$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-t}{2}\times\frac{\tan t}{t}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

(4) $x-1=t$로 놓으면 $x=t+1$이고 $x \to 1$일 때 $t \to 0$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(\cos\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left\{\cos\frac{\pi}{2}(t+1)\right\}}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}t\right)\right\}}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(-\sin\frac{\pi}{2}t\right)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left\{-\frac{\sin\left(\sin\frac{\pi}{2}t\right)}{\sin\frac{\pi}{2}t}\times\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}\times\frac{\pi}{2}\right\}$$
$$=-1\times 1\times\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$$

답 (1) **1** (2) $\mathbf{-1}$ (3) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ (4) $\mathbf{-\frac{\pi}{2}}$

130

(1) $x \to 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\sin(ax+b)=0$이므로 $\sin b=0$

$\therefore b=0 \left(\because 0\le b\le\frac{\pi}{2}\right)$

$b=0$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{ax}\times\frac{x}{\tan x}\times a\right)$$
$$=1\times 1\times a=a$$

$\therefore a=3$

(2) $x \to 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}(a-b\cos x)=0$이므로 $a-b=0$

$\therefore a=b$ ······ ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{a-a\cos x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{a(1-\cos x)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{a(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{a(1-\cos^2 x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{a\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{a\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos x}\right\}$$
$$=a\times 1^2\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{a}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2}=1$이므로 $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=2$

(3) $x \to 0$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to 0$이므로 (분모) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\ln(x+4-b)=0$이므로 $\ln(4-b)=0$

$4-b=1 \qquad \therefore b=3$

$b=3$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\ln(x+4-3)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\ln(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin ax}{ax}\times\frac{a}{\frac{\ln(x+1)}{x}}\right\}$$
$$=1\times\frac{a}{1}=a$$

$\therefore a=7$

(4) $x \to 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}\sin(2x-a)=0$이므로 $\sin(2-a)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a$는 정수)

$a=2$를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(2x-2)}{\log_3 x}=\lim_{x\to1}\frac{\sin\{2(x-1)\}}{\log_3 x}$$

이때 $x-1=t$로 놓으면 $x=t+1$이고 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin\{2(x-1)\}}{\log_3 x}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{\log_3(t+1)}$$
$$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{\sin 2t}{2t}\times\frac{2}{\frac{\log_3(t+1)}{t}}\right\}$$
$$=1\times\frac{2}{\frac{1}{\ln 3}}=2\ln 3=\ln 9$$

따라서 $\ln 9=\ln b$이므로 $b=9$

답 (1) $\boldsymbol{a=3, b=0}$ (2) $\boldsymbol{a=2, b=2}$ (3) $\boldsymbol{a=7, b=3}$ (4) $\boldsymbol{a=2, b=9}$

131

(1) $y'=(5x^2-3)'\cos x+(5x^2-3)(\cos x)'$
$=10x\cos x+(5x^2-3)(-\sin x)$
$=10x\cos x-(5x^2-3)\sin x$

(2) $y=\sin^2 x-\cos^2 x$
$=\sin x\sin x-\cos x\cos x$

이므로

$y'=(\sin x)'\sin x+\sin x(\sin x)'$
$\quad-\{(\cos x)'\cos x+\cos x(\cos x)'\}$
$=\cos x\sin x+\sin x\cos x$
$\quad-\{(-\sin x)\cos x+\cos x(-\sin x)\}$
$=2\sin x\cos x+2\sin x\cos x$
$=4\sin x\cos x$
$=2\sin 2x$

(3) $y=\sin 2x-\ln x$
$=2\sin x\cos x-\ln x$

이므로

$y'=(2\sin x\cos x)'-(\ln x)'$
$=2(\sin x)'\cos x+2\sin x(\cos x)'-\dfrac{1}{x}$
$=2\cos x\cos x+2\sin x(-\sin x)-\dfrac{1}{x}$
$=2\cos^2 x-2\sin^2 x-\dfrac{1}{x}$
$=2(\cos^2 x-\sin^2 x)-\dfrac{1}{x}$
$=2\cos 2x-\dfrac{1}{x}$

(4) $y'=(3^x)'-(\sin x)'=3^x\ln 3-\cos x$

답 (1) $\boldsymbol{y'=10x\cos x-(5x^2-3)\sin x}$
(2) $\boldsymbol{y'=2\sin 2x}$
(3) $\boldsymbol{y'=2\cos 2x-\dfrac{1}{x}}$
(4) $\boldsymbol{y'=3^x\ln 3-\cos x}$

132

$f(x)=x^2\sin x$에서

$f'(x)=(x^2)'\sin x+x^2(\sin x)'$
$=2x\sin x+x^2\cos x$

$\therefore f'(\pi)=2\pi\sin\pi+\pi^2\cos\pi$
$=-\pi^2$

답 $-\pi^2$

133

$$\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}-h\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{3}-h\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{-h}$$
$$=f'\left(\frac{\pi}{3}\right)+f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

이때

$f'(x)=(e^x)'\cos x+e^x(\cos x)'$
$=e^x\cos x+e^x(-\sin x)$
$=e^x(\cos x-\sin x)$

이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=e^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=e^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{3}}$$
$\therefore\ 2f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=(1-\sqrt{3})e^{\frac{\pi}{3}}$ 답 $\mathbf{(1-\sqrt{3})e^{\frac{\pi}{3}}}$

134

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+}(\sin x+a)=\lim_{x\to 0-}(bx+1)=f(0)$$

$\therefore\ a=1$

또, $f'(0)$이 존재하므로

$f'(x)=\begin{cases}\cos x & (x>0)\\ b & (x<0)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to 0+}\cos x=\lim_{x\to 0-}b$ $\quad\therefore\ b=1$

$\therefore\ a+b=1+1=2$ 답 **2**

135

(1) $y'=-\frac{2(x^2+3x+1)'}{(x^2+3x+1)^2}$
$=-\frac{2(2x+3)}{(x^2+3x+1)^2}$

(2) $y'=\frac{(x^3-2x+3)'(x+1)-(x^3-2x+3)(x+1)'}{(x+1)^2}$
$=\frac{(3x^2-2)(x+1)-(x^3-2x+3)\times 1}{(x+1)^2}$
$=\frac{2x^3+3x^2-5}{(x+1)^2}$

(3) $y'=\frac{(e^x-1)'(e^x+1)-(e^x-1)(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}$
$=\frac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)\times e^x}{(e^x+1)^2}$
$=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

답 (1) $\mathbf{y'=-\frac{2(2x+3)}{(x^2+3x+1)^2}}$
(2) $\mathbf{y'=\frac{2x^3+3x^2-5}{(x+1)^2}}$
(3) $\mathbf{y'=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}}$

136

$f'(x)$
$=\frac{(x^3-x^2+1)'(x^2-1)-(x^3-x^2+1)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$
$=\frac{(3x^2-2x)(x^2-1)-(x^3-x^2+1)\times 2x}{(x^2-1)^2}$
$=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$

$\therefore\ f'(\sqrt{2})=\frac{2\times(2-3)}{(2-1)^2}=-2$ 답 $\mathbf{-2}$

137

(1) $y'=-6x^{-3}$

(2) $y=3x^2-\frac{2}{x^3}=3x^2-2x^{-3}$
$\therefore\ y'=6x+6x^{-4}=6x+\frac{6}{x^4}$

(3) $y=\frac{x^3-2x^2+3}{x^5}=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^5}$
$=x^{-2}-2x^{-3}+3x^{-5}$
$\therefore\ y'=-2x^{-3}+6x^{-4}-15x^{-6}$
$=-\frac{2}{x^3}+\frac{6}{x^4}-\frac{15}{x^6}$

답 (1) $\mathbf{y'=-6x^{-3}}$ (2) $\mathbf{y'=6x+\frac{6}{x^4}}$
(3) $\mathbf{y'=-\frac{2}{x^3}+\frac{6}{x^4}-\frac{15}{x^6}}$

138

$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\cdots+\frac{9}{x^9}$
$=x^{-1}+2x^{-2}+3x^{-3}+\cdots+9x^{-9}$
$\therefore\ f'(x)=-x^{-2}-2^2x^{-3}-3^2x^{-4}-\cdots-9^2x^{-10}$
$\therefore\ f'(1)=-1-2^2-3^2-\cdots-9^2$
$=-(1+2^2+3^2+\cdots+9^2)$
$=-\frac{9\times 10\times 19}{6}=-285$ 답 $\mathbf{-285}$

139

(1) $y'=\sec x\tan x-\sqrt{5}(-\csc x\cot x)$

$=\sec x\tan x+\sqrt{5}\csc x\cot x$

(2) $y'=5e^x\tan x+5e^x\sec^2 x$

$=5e^x(\tan x+\sec^2 x)$

(3) $y'=\sec x\tan x\tan x+\sec x\sec^2 x$

$=\sec x\tan^2 x+\sec^3 x$

$=\sec x(\tan^2 x+\sec^2 x)$

(4) $y'=\dfrac{(1-\tan x)'(1+\tan x)-(1-\tan x)(1+\tan x)'}{(1+\tan x)^2}$

$=\dfrac{(-\sec^2 x)(1+\tan x)-(1-\tan x)\times\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$

$=-\dfrac{2\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$

답 (1) $\boldsymbol{y'=\sec x\tan x+\sqrt{5}\csc x\cot x}$

(2) $\boldsymbol{y'=5e^x(\tan x+\sec^2 x)}$

(3) $\boldsymbol{y'=\sec x(\tan^2 x+\sec^2 x)}$

(4) $\boldsymbol{y'=-\dfrac{2\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}}$

140

$f'(x)=\dfrac{(1+\sec x)'\tan x-(1+\sec x)(\tan x)'}{\tan^2 x}$

$=\dfrac{\sec x\tan x\tan x-(1+\sec x)\sec^2 x}{\tan^2 x}$

$=\sec x-\csc^2 x(1+\sec x)$

$\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sec\dfrac{\pi}{3}-\csc^2\dfrac{\pi}{3}\left(1+\sec\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=2-\dfrac{4}{3}\times(1+2)$

$=-2$ 답 $\boldsymbol{-2}$

141

(1) $\boldsymbol{y'}=\{(x^2+1)^3\}'(x^3+x-1)^2$

$+(x^2+1)^3\{(x^3+x-1)^2\}'$

$=3(x^2+1)^2(x^2+1)'(x^3+x-1)^2$

$+(x^2+1)^3\times2(x^3+x-1)(x^3+x-1)'$

$=3(x^2+1)^2\times2x(x^3+x-1)^2$

$+(x^2+1)^3\times2(x^3+x-1)(3x^2+1)$

$\boldsymbol{=2(x^2+1)^2(x^3+x-1)(6x^4+7x^2-3x+1)}$

(2) $\boldsymbol{y'}=\dfrac{(4x-1)'(3x+2)^2-(4x-1)\{(3x+2)^2\}'}{\{(3x+2)^2\}^2}$

$=\dfrac{4(3x+2)^2-(4x-1)\times2(3x+2)\times3}{(3x+2)^4}$

$=\dfrac{2(3x+2)\{2(3x+2)-3(4x-1)\}}{(3x+2)^4}$

$\boldsymbol{=-\dfrac{2(6x-7)}{(3x+2)^3}}$

(3) $\boldsymbol{y'}=2\cos(x^2-x+2)\{\cos(x^2-x+2)\}'$

$=2\cos(x^2-x+2)$

$\times\{-\sin(x^2-x+2)\}(x^2-x+2)'$

$\boldsymbol{=2(1-2x)\cos(x^2-x+2)\sin(x^2-x+2)}$

(4) $\boldsymbol{y'}=3(1-\tan x)^2(1-\tan x)'$

$=3(1-\tan x)^2(-\sec^2 x)$

$\boldsymbol{=-3(1-\tan x)^2\sec^2 x}$

답 풀이 참조

142

$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$이므로

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$f(x)=(x^2+5x)^2$에서

$f'(x)=2(x^2+5x)(2x+5)$

$g(x)=\dfrac{4x-3}{2x-1}$에서

$g'(x)=\dfrac{4(2x-1)-(4x-3)\times2}{(2x-1)^2}=\dfrac{2}{(2x-1)^2}$

$g(1)=\dfrac{4-3}{2-1}=1,\ g'(1)=\dfrac{2}{1}=2$이므로

$h'(1)=f'(g(1))g'(1)=2f'(1)$

$=2\times(2\times6\times7)=168$ 답 **168**

143

(1) $\boldsymbol{y'}=e^{x^2+x+1}(x^2+x+1)'$

$\boldsymbol{=(2x+1)e^{x^2+x+1}}$

(2) $\boldsymbol{y'}=3^{\cos x}\ln3\times(\cos x)'$

$=3^{\cos x}\ln3\times(-\sin x)$

$\boldsymbol{=-\ln3\times3^{\cos x}\sin x}$

(3) $\boldsymbol{y'}=(e^{3x})'\sin x+e^{3x}(\sin x)'$

$=3e^{3x}\sin x+e^{3x}\cos x$

$\boldsymbol{=e^{3x}(3\sin x+\cos x)}$

(4) $\boldsymbol{y'}=\dfrac{(e^x-e^{-x})'(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})'}{(e^x+e^{-x})^2}$

$=\dfrac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$

$=\boldsymbol{\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}}$

답 풀이 참조

144

$f(x)=\dfrac{5^x-5^{-x}}{5^x+5^{-x}}$에서

$f'(x)=\dfrac{(5^x-5^{-x})'(5^x+5^{-x})-(5^x-5^{-x})(5^x+5^{-x})'}{(5^x+5^{-x})^2}$

$=\dfrac{(5^x+5^{-x})\ln 5\times(5^x+5^{-x})-(5^x-5^{-x})(5^x-5^{-x})\ln 5}{(5^x+5^{-x})^2}$

$=\dfrac{\{(5^x+5^{-x})^2-(5^x-5^{-x})^2\}\ln 5}{(5^x+5^{-x})^2}$

$=\dfrac{4\ln 5}{(5^x+5^{-x})^2}$

$\therefore\ f'(0)=\dfrac{4\ln 5}{2^2}=\ln 5$ **답 $\boldsymbol{\ln 5}$**

145

(1) $\boldsymbol{y'}=\dfrac{(\cos x)'}{\cos x}=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=\boldsymbol{-\tan x}$

(2) $\boldsymbol{y'}=\dfrac{(\sin^2 x)'}{\sin^2 x\times\ln 2}=\dfrac{2\sin x(\sin x)'}{\sin^2 x\times\ln 2}$

$=\dfrac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x\times\ln 2}=\dfrac{2\cos x}{\sin x\times\ln 2}$

$=\boldsymbol{\dfrac{2\cot x}{\ln 2}}$

(3) $\boldsymbol{y'}=(x)'\ln|x|+x(\ln|x|)'-1$

$=\ln|x|+x\times\dfrac{1}{x}-1=\boldsymbol{\ln|x|}$

(4) $\boldsymbol{y'}=\dfrac{(\ln|x|)'\times x^2-\ln|x|\times(x^2)'}{x^4}$

$=\dfrac{\frac{1}{x}\times x^2-\ln|x|\times 2x}{x^4}$

$=\dfrac{x-2x\ln|x|}{x^4}=\boldsymbol{\dfrac{1-2\ln|x|}{x^3}}$

답 풀이 참조

146

(1) $x>0$, $y>0$이므로 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln y=\ln x^x=x\ln x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{y'}{y}=(x)'\ln x+x(\ln x)'$

$=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\ln x+1$

$\therefore\ \boldsymbol{y'}=y(\ln x+1)$

$=\boldsymbol{x^x(\ln x+1)}$

(2) $x>1$, $y>0$이므로 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln y=\ln(\ln x)^x=x\ln(\ln x)$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{y'}{y}=(x)'\ln(\ln x)+x\{\ln(\ln x)\}'$

$=\ln(\ln x)+x\times\dfrac{(\ln x)'}{\ln x}$

$=\ln(\ln x)+\dfrac{1}{\ln x}$

$\therefore\ \boldsymbol{y'}=y\left\{\ln(\ln x)+\dfrac{1}{\ln x}\right\}$

$=\boldsymbol{(\ln x)^x\left\{\ln(\ln x)+\dfrac{1}{\ln x}\right\}}$

(3) 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|y|=\ln\left|\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{(x+3)^3}\right|$

$=2\ln|x-1|+\ln|x+1|-3\ln|x+3|$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x+3}$

$=\dfrac{10x+6}{(x-1)(x+1)(x+3)}$

$\therefore\ \boldsymbol{y'}=y\times\dfrac{10x+6}{(x-1)(x+1)(x+3)}$

$=\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{(x+3)^3}$

$\times\dfrac{10x+6}{(x-1)(x+1)(x+3)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{(x-1)(10x+6)}{(x+3)^4}}$

(4) 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln y=\ln\sqrt{\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^3}}$$

$$=\frac{1}{2}(\ln|x-1|+\ln|x+3|-3\ln|x+1|)$$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}-\frac{3}{x+1}\right)$$

$$=\frac{-x^2-2x+11}{2(x-1)(x+1)(x+3)}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{y'}=y\times\frac{-x^2-2x+11}{2(x-1)(x+1)(x+3)}$$

$$=\sqrt{\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^3}}\times\frac{-x^2-2x+11}{2(x-1)(x+1)(x+3)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{-x^2-2x+11}{2(x+1)^2\sqrt{(x-1)(x+1)(x+3)}}}$$

답 풀이 참조

147

주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=\ln\left|\frac{e^x\cos x}{1+\sin x}\right|$$

$$=x+\ln|\cos x|-\ln(1+\sin x)$$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=1+\frac{(\cos x)'}{\cos x}-\frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x}$$

$$=1-\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{1+\sin x}$$

$$\therefore\ f'(x)=f(x)\left(1-\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$$

$$=\frac{e^x\cos x}{1+\sin x}\left(1-\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$$

$\therefore\ f'(\pi)=-e^\pi\times(1+1)=-2e^\pi$ 답 $\boldsymbol{-2e^\pi}$

148

(1) $\boldsymbol{y'}=e(3x-2)^{e-1}(3x-2)'=\boldsymbol{3e(3x-2)^{e-1}}$

(2) $y=\sqrt[3]{4x-x^2}=(4x-x^2)^{\frac{1}{3}}$이므로

$$\boldsymbol{y'}=\frac{1}{3}(4x-x^2)^{\frac{1}{3}-1}(4x-x^2)'$$

$$=\frac{1}{3}(4x-x^2)^{-\frac{2}{3}}(4-2x)=\boldsymbol{\frac{4-2x}{3\sqrt[3]{(4x-x^2)^2}}}$$

(3) $\boldsymbol{y'}=(x^{3\pi})'\cos x+x^{3\pi}(\cos x)'$

$$=3\pi x^{3\pi-1}\cos x+x^{3\pi}(-\sin x)$$

$$=\boldsymbol{x^{3\pi-1}(3\pi\cos x-x\sin x)}$$

답 풀이 참조

149

$$f'(x)=(2x-1)'\sqrt{x^2+1}+(2x-1)(\sqrt{x^2+1})'$$

$$=2\sqrt{x^2+1}+(2x-1)\times\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$=2\sqrt{x^2+1}+(2x-1)\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{2(x^2+1)+x(2x-1)}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{4x^2-x+2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\therefore\ f'(1)=\frac{4-1+2}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

답 $\boldsymbol{\frac{5\sqrt{2}}{2}}$

150

(1) $x=\sqrt{t+3}$에서 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2\sqrt{t+3}}$

$y=4t^2$에서 $\dfrac{dy}{dt}=8t$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{8t}{\frac{1}{2\sqrt{t+3}}}=16t\sqrt{t+3}$$

(2) $x=3\cos t$에서 $\dfrac{dx}{dt}=-3\sin t$

$y=2\sin t$에서 $\dfrac{dy}{dt}=2\cos t$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\cos t}{-3\sin t}=-\frac{2}{3}\cot t$$

답 (1) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=16t\sqrt{t+3}}$ (2) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{3}\cot t}$

151

$x=t^2-3t+5$에서 $\frac{dx}{dt}=2t-3$

$y=t^3+9t-1$에서 $\frac{dy}{dt}=3t^2+9$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+9}{2t-3}\left(t\neq\frac{3}{2}\right)$$

따라서 $t=-2$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{3\times(-2)^2+9}{2\times(-2)-3}=-3$$

답 -3

152

답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

153

답 $2x,\ 8y,\ x-y,\ \frac{x-y}{x-4y},\ x-4y$

154

답 $3x+2,\ \frac{1}{3}y^3-\frac{2}{3},\ y^2,\ y^2,\ \frac{1}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}}$

155

(1) 주어진 식의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$2(x-2)+2(y+1)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x-2}{y+1}\ (y\neq-1)$$

(2) 주어진 식의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{2y}{2\sqrt{y^2+2}}\times\frac{dy}{dx}=4x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{4x\sqrt{y^2+2}}{y}\ (y\neq0)$$

(3) 주어진 식의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=8x \qquad \therefore \frac{dy}{dx}=8xy$$

답 풀이 참조

156

$x\cos y+y\cos x=\frac{\pi}{3}$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\cos y-x\sin y\frac{dy}{dx}+\cos x\frac{dy}{dx}-y\sin x=0$$

$$(\cos x-x\sin y)\frac{dy}{dx}=y\sin x-\cos y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y\sin x-\cos y}{\cos x-x\sin y}\ (\cos x-x\sin y\neq0)$$

답 $\frac{dy}{dx}=\frac{y\sin x-\cos y}{\cos x-x\sin y}\ (\cos x-x\sin y\neq0)$

157

(1) $y=\sqrt[5]{\frac{x}{2}}$의 양변을 5제곱하면

$$y^5=\frac{x}{2} \qquad \therefore x=2y^5$$

양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=10y^4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{10y^4}=\frac{1}{10\sqrt[5]{\left(\frac{x}{2}\right)^4}}$$

$$=\frac{\sqrt[5]{16}}{10\sqrt[5]{x^4}}\ (x\neq0)$$

(2) 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=\sqrt{y+1}+y\times\frac{1}{2\sqrt{y+1}}$$

$$=\frac{3y+2}{2\sqrt{y+1}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$=\frac{2\sqrt{y+1}}{3y+2}\left(y\neq-\frac{2}{3}\right)$$

(3) 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=2y-(-e^{-y})=2y+e^{-y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2y+e^{-y}}$$

답 풀이 참조

158

$x=\frac{2y}{y^2-4}$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=\frac{2(y^2-4)-2y\times 2y}{(y^2-4)^2}=\frac{-2y^2-8}{(y^2-4)^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{(y^2-4)^2}{2y^2+8}$

따라서 $y=0$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$-\frac{(-4)^2}{8}=-2$

답 -2

159

$f^{-1}(-5)=a$라 하면 $f(a)=-5$

즉, $f(a)=a^3-3a^2+3a+2=-5$이므로

$a^3-3a^2+3a+7=0$

$(a+1)(a^2-4a+7)=0$

이때 $a^2-4a+7>0$이므로 $a=-1$

따라서 $f^{-1}(-5)=-1$이고,

$f'(x)=3x^2-6x+3$이므로

$(f^{-1})'(-5)=\frac{1}{f'(f^{-1}(-5))}=\frac{1}{f'(-1)}$

$=\frac{1}{12}$

답 $\frac{1}{12}$

160

$f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=a$라 하면 $f(a)=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\cos a=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0<a<\pi$이므로 $a=\frac{\pi}{6}$

따라서 $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$이고, $f'(x)=-\sin x$이므로

$(f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

$=\frac{1}{-\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$

답 -2

161

$g(-1)=a$라 하면 $f(a)=-1$이므로

$1-\ln a=-1$, $\ln a=2$

$\therefore a=e^2$

따라서 $g(-1)=e^2$이고, $f'(x)=-\frac{1}{x}$이므로

$g'(-1)=\frac{1}{f'(g(-1))}$

$=\frac{1}{f'(e^2)}$

$=-\frac{1}{e^2}$

답 $-\frac{1}{e^2}$

162

(1) $y'=(x^3)'\ln x+x^3(\ln x)'$

$=3x^2\ln x+x^3\times\frac{1}{x}$

$=3x^2\ln x+x^2$

$=x^2(3\ln x+1)$

$\therefore \boldsymbol{y''}=(x^2)'(3\ln x+1)+x^2(3\ln x+1)'$

$=2x(3\ln x+1)+x^2\times\frac{3}{x}$

$=6x\ln x+5x$

$=\boldsymbol{x(6\ln x+5)}$

(2) $y'=(x^2)'e^x+x^2(e^x)'$

$=2xe^x+x^2e^x$

$=(x^2+2x)e^x$

$\therefore \boldsymbol{y''}=(x^2+2x)'e^x+(x^2+2x)(e^x)'$

$=(2x+2)e^x+(x^2+2x)e^x$

$=\boldsymbol{(x^2+4x+2)e^x}$

(3) $y'=\frac{-(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

$\therefore \boldsymbol{y''}=\frac{(-2x)'(x^2+1)^2-(-2x)\{(x^2+1)^2\}'}{(x^2+1)^4}$

$=\frac{-2(x^2+1)^2+8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$

$=\boldsymbol{\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}}$

답 풀이 참조

163

$f'(x)=\frac{(x)'\ln x-x(\ln x)'}{(\ln x)^2}=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$이므로

$f''(x)=\frac{(\ln x-1)'(\ln x)^2-(\ln x-1)\{(\ln x)^2\}'}{(\ln x)^4}$

$=\frac{\frac{1}{x}(\ln x)^2-(\ln x-1)\times 2\ln x\times\frac{1}{x}}{(\ln x)^4}$

$=\frac{2-\ln x}{x(\ln x)^3}$

$\therefore f''(e)=\frac{2-\ln e}{e(\ln e)^3}=\frac{1}{e}$ 답 $\boldsymbol{\frac{1}{e}}$

164

$f(x)=(x+a)e^{bx}$에서

$f'(x)=(x+a)'e^{bx}+(x+a)(e^{bx})'$

$=e^{bx}+(x+a)\times be^{bx}$

$=(bx+ab+1)e^{bx}$

이때 $f'(0)=3$이므로

$ab+1=3$ $\therefore ab=2$ …… ㉠

또, $f'(x)=(bx+3)e^{bx}$이므로

$f''(x)=(bx+3)'e^{bx}+(bx+3)(e^{bx})'$

$=be^{bx}+(bx+3)\times be^{bx}$

$=b(bx+4)e^{bx}$

이때 $f''(0)=-2$이므로

$4b=-2$ $\therefore b=-\frac{1}{2}$

$b=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$-\frac{1}{2}a=2$ $\therefore a=-4$

$\therefore \frac{a}{b}=(-4)\div\left(-\frac{1}{2}\right)=8$ 답 **8**

165

$y=e^{ax}\sin x$에서

$y'=(e^{ax})'\sin x+e^{ax}(\sin x)'$

$=ae^{ax}\sin x+e^{ax}\cos x$

$=e^{ax}(a\sin x+\cos x)$

$y''=(e^{ax})'(a\sin x+\cos x)+e^{ax}(a\sin x+\cos x)'$

$=ae^{ax}(a\sin x+\cos x)+e^{ax}(a\cos x-\sin x)$

$=e^{ax}\{(a^2-1)\sin x+2a\cos x\}$

이때 $y''-2y'+2y=0$에서

$e^{ax}\{(a^2-1)\sin x+2a\cos x\}$

$-2e^{ax}(a\sin x+\cos x)+2e^{ax}\sin x=0$

$e^{ax}\{(a-1)^2\sin x+2(a-1)\cos x\}=0$

$e^{ax}(a-1)\{(a-1)\sin x+2\cos x\}=0$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$a-1=0$ $\therefore a=1$ 답 **1**

166

(1) $f(x)=\sqrt{x^2+5}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$

점 $(2, 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=\frac{2}{\sqrt{4+5}}=\frac{2}{3}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-3=\frac{2}{3}(x-2)$ $\therefore y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$

(2) $f(x)=\ln x^2$으로 놓으면

$f'(x)=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$

점 $(e, 2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(e)=\frac{2}{e}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-2=\frac{2}{e}(x-e)$ $\therefore y=\frac{2}{e}x$

(3) $f(x)=xe^x-2$로 놓으면

$f'(x)=e^x+xe^x$

점 $(0, -2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=x-2$

답 (1) $\boldsymbol{y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}}$ (2) $\boldsymbol{y=\frac{2}{e}x}$ (3) $\boldsymbol{y=x-2}$

167

$f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+2}$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{2(x^2+2)-(2x+1)\times 2x}{(x^2+2)^2}$

$=\dfrac{-2x^2-2x+4}{(x^2+2)^2}$

점 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=\dfrac{4}{2^2}=1$

즉, 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 -1이므로 점 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y=-x+\dfrac{1}{2}$ $\qquad\therefore\ 2x+2y-1=0$

따라서 $a=2,\ b=2$이므로 $ab=4$ **답 4**

168

$f(x)=\ln(3-x)$로 놓으면 $f'(x)=-\dfrac{1}{3-x}$

접점의 좌표를 $(a,\ \ln(3-a))$라 하면 직선 $y=3-x$에 평행한 직선의 기울기는 -1이므로

$f'(a)=-\dfrac{1}{3-a}=-1$ $\qquad\therefore\ a=2$

따라서 접점의 좌표가 $(2,\ 0)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-0=-(x-2)$ $\qquad\therefore\ y=-x+2$

답 $y=-x+2$

169

$f(x)=e^{-x}$으로 놓으면 $f'(x)=-e^{-x}$

접점의 좌표를 $(a,\ e^{-a})$이라 하면 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $135°$이므로 접선의 기울기는

$\tan 135°=-1$

즉, $f'(a)=-e^{-a}=-1$이므로

$e^{-a}=1$ $\qquad\therefore\ a=0$

따라서 접점의 좌표가 $(0,\ 1)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=-(x-0)$ $\qquad\therefore\ y=-x+1$

답 $y=-x+1$

170

$f(x)=\sin 2x$로 놓으면 $f'(x)=2\cos 2x$

접점의 좌표를 $(a,\ \sin 2a)$라 하면 직선 $x-2y+2=0$에 수직인 직선의 기울기는 -2이므로

$f'(a)=2\cos 2a=-2$

즉, $\cos 2a=-1$에서 $0\le a\le\pi$이므로

$2a=\pi$ $\qquad\therefore\ a=\dfrac{\pi}{2}$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-0=-2\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\qquad\therefore\ y=-2x+\pi$

답 $y=-2x+\pi$

171

(1) $f(x)=x\ln x$로 놓으면 $f'(x)=\ln x+1$

접점의 좌표를 $(a,\ a\ln a)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=\ln a+1$

이므로 기울기가 $\ln a+1$이고 점 $(a,\ a\ln a)$를 지나는 접선의 방정식은

$y-a\ln a=(\ln a+1)(x-a)$ …… ㉠

이 직선이 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1-a\ln a=(\ln a+1)\times(-a)$

$-1=-a$ $\qquad\therefore\ a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=x-1$

(2) $f(x)=\sqrt{x}$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

접점의 좌표를 $(a,\ \sqrt{a})$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

이므로 기울기가 $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$이고 점 $(a,\ \sqrt{a})$를 지나는 접선의 방정식은

$y-\sqrt{a}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)$ …… ㉠

이 직선이 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$-\sqrt{a}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}(-1-a)$

$-2a=-1-a \qquad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y-1=\dfrac{1}{2}(x-1) \qquad \therefore y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

(3) $f(x)=xe^x$으로 놓으면

$f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

접점의 좌표를 $(a,\ ae^a)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=(1+a)e^a$

이므로 기울기가 $(1+a)e^a$이고 점 $(a,\ ae^a)$을 지나는 접선의 방정식은

$y-ae^a=(1+a)e^a(x-a)$ …… ㉠

이 직선이 점 $(-4,\ 0)$을 지나므로

$-ae^a=(1+a)e^a(-4-a)$

$-a=(1+a)(-4-a),\ a^2+4a+4=0$

$(a+2)^2=0 \qquad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y+2e^{-2}=-e^{-2}(x+2)$

$\therefore y=-\dfrac{1}{e^2}x-\dfrac{4}{e^2}$

답 (1) $\boldsymbol{y=x-1}$ (2) $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}}$
(3) $\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{e^2}x-\dfrac{4}{e^2}}$

172

$f(x)=e^{x-1}$으로 놓으면 $f'(x)=e^{x-1}$

접점의 좌표를 $(a,\ e^{a-1})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=e^{a-1}$이므로 기울기가 e^{a-1}이고 점 $(a,\ e^{a-1})$을 지나는 접선의 방정식은

$y-e^{a-1}=e^{a-1}(x-a)$ …… ㉠

이 직선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$-e^{a-1}=e^{a-1}(1-a)$

$-1=1-a \qquad \therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$y-e=e(x-2) \qquad \therefore y=ex-e$

따라서 이 직선이 점 $\left(k,\ \dfrac{e}{2}\right)$를 지나므로

$\dfrac{e}{2}=ek-e \qquad \therefore k=\dfrac{3}{2}$

답 $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

173

$f(x)=\dfrac{x^2+2}{x}=x+\dfrac{2}{x}$로 놓으면 $f'(x)=1-\dfrac{2}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(a,\ a+\dfrac{2}{a}\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=1-\dfrac{2}{a^2}$

이므로 접선의 방정식은

$y-\left(a+\dfrac{2}{a}\right)=\left(1-\dfrac{2}{a^2}\right)(x-a)$

이 직선이 점 $(3,\ 1)$을 지나므로

$1-\left(a+\dfrac{2}{a}\right)=\left(1-\dfrac{2}{a^2}\right)(3-a)$

$a^2+2a-3=0,\ (a+3)(a-1)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=1$

따라서 접점의 좌표가 $\left(-3,\ -\dfrac{11}{3}\right)$, $(1,\ 3)$의 2개이므로 점 $(3,\ 1)$에서 곡선 $y=\dfrac{x^2+2}{x}$에 그을 수 있는 접선의 개수는 2이다.

답 **2**

174

$f(x)=xe^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$

접점의 좌표를 $(t,\ te^{-t})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=e^{-t}(1-t)$

이므로 접선의 방정식은

$y-te^{-t}=e^{-t}(1-t)(x-t)$

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$-te^{-t}=e^{-t}(1-t)(a-t),\ e^{-t}(t^2-at+a)=0$

$\therefore t^2-at+a=0\ (\because e^{-t}>0)$ …… ㉠

점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=xe^{-x}$에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 접점이 오직 하나만 존재해야 하므로 t에 대한 방정식 ㉠이 중근을 가져야 한다.

즉, 방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(-a)^2-4a=0,\ a(a-4)=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 $a=4$

답 **0, 4**

175

$f(x)=a-2\sin^2 x,\ g(x)=2\cos x$로 놓으면

$f'(x)=-4\sin x\cos x,\ g'(x)=-2\sin x$

두 곡선의 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서

$a-2\sin^2 t=2\cos t$ ...... ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서

$-4\sin t\cos t=-2\sin t$

$\cos t=\frac{1}{2}$ ($\because\ 0<t<\pi$에서 $\sin t>0$)

$\therefore\ t=\frac{\pi}{3}$ ($\because\ 0<t<\pi$)

$t=\frac{\pi}{3}$를 ㉠에 대입하면 $a-2\sin^2\frac{\pi}{3}=2\cos\frac{\pi}{3}$

$a-2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=2\times\frac{1}{2}$ $\quad\therefore\ a=\frac{5}{2}$

답 $\boldsymbol{\frac{5}{2}}$

176

$f(x)=\frac{a}{2x},\ g(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=-\frac{a}{2x^2},\ g'(x)=e^x$

두 곡선의 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\frac{a}{2t}=e^t$ ...... ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $-\frac{a}{2t^2}=e^t$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{a}{2t}=-\frac{a}{2t^2}$ $\quad\therefore\ t=-1$ ($\because\ a\neq0$)

따라서 주어진 곡선의 접점의 좌표가 $\left(-1,\ \frac{1}{e}\right)$이고 접선의 기울기가 $g'(-1)=\frac{1}{e}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{e}=\frac{1}{e}(x+1)$

$\therefore\ y=\frac{1}{e}x+\frac{2}{e}$

답 $\boldsymbol{y=\frac{1}{e}x+\frac{2}{e}}$

177

$\frac{dx}{d\theta}=\sin\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=1-\cos\theta$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ $(\sin\theta\neq0)$

$\theta=\frac{\pi}{2}$일 때, $x=1-\cos\frac{\pi}{2}=1$,

$y=\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-1$이고 접선의 기울기는

$\frac{dy}{dx}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}=1$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=1\times(x-1)$

$\therefore\ y=x+\frac{\pi}{2}-2$

이 접선이 점 $(2,\ a)$를 지나므로

$a=2+\frac{\pi}{2}-2$ $\quad\therefore\ a=\frac{\pi}{2}$

답 $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

178

$\frac{dx}{dt}=\frac{-2t(1+t^2)-(1-t^2)\times2t}{(1+t^2)^2}=\frac{-4t}{(1+t^2)^2}$,

$\frac{dy}{dt}=\frac{2(1+t^2)-2t\times2t}{(1+t^2)^2}=\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}}{\frac{-4t}{(1+t^2)^2}}=\frac{t^2-1}{2t}$ $(t\neq0)$

이때 $\frac{1-t^2}{1+t^2}=-\frac{3}{5}$에서

$-5+5t^2=3+3t^2,\ t^2=4$

$\therefore\ t=\pm2$ ...... ㉠

$\frac{2t}{1+t^2}=\frac{4}{5}$에서

$4t^2-10t+4=0,\ 2t^2-5t+2=0$

$(2t-1)(t-2)=0$

$\therefore\ t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $t=2$

따라서 접선의 기울기는 $\frac{dy}{dx}=\frac{4-1}{4}=\frac{3}{4}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-\frac{4}{5}=\frac{3}{4}\left(x+\frac{3}{5}\right)$ $\qquad\therefore y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$

답 $\boldsymbol{y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}}$

179

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\times\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\ (x\neq0)$

점 $(4,\ 9)$에서의 접선의 기울기는 $x=4$, $y=9$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값이므로 $-\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=-\frac{3}{2}$

따라서 접선의 방정식은

$y-9=-\frac{3}{2}(x-4)$ $\qquad\therefore y=-\frac{3}{2}x+15$

이 직선의 x절편은 10, y절편은 15이므로 구하는 합은 25이다. 답 **25**

180

$x^3+y^2+ax+by=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+2y\frac{dy}{dx}+a+b\frac{dy}{dx}=0$

$(2y+b)\frac{dy}{dx}=-3x^2-a$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2+a}{2y+b}\ (2y+b\neq0)$

이때 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$-\frac{3+a}{4+b}=-1$, $3+a=4+b$

$\therefore a-b=1$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

또한, 곡선 $x^3+y^2+ax+by=0$이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$1+4+a+2b=0$ $\qquad\therefore a+2b=-5$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=-2$

$\therefore ab=2$ 답 **2**

181

(1) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$에서 $x>0$이고

$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $1-\ln x=0$

$\therefore x=e$

(2)

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

(3) 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극대이고 극댓값은 $f(e)=\frac{1}{e}$이다.

답 (1) $\boldsymbol{x=e}$ (2) **풀이 참조** (3) **극댓값:** $\boldsymbol{\frac{1}{e}}$

182

답 (1) $\boldsymbol{-1,\ -1,\ -1,\ -2,\ 1,\ 2}$

(2) $\boldsymbol{-1,\ \frac{2}{x^3},\ -2,\ 2,\ -1,\ -2,\ 1,\ 2}$

183

(1) $f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$에서 $e^x=1$

$\therefore x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 **구간** $(-\infty,\ 0]$**에서 감소**하고, **구간** $[0,\ \infty)$**에서 증가**한다.

(2) $f'(x)=1-2\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ $(\because 0<x<\pi)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$	$\searrow$	$\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$	$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 **구간** $\left(0, \frac{\pi}{6}\right]$, $\left[\frac{5}{6}\pi, \pi\right)$**에서 증가**하고, **구간** $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$**에서 감소**한다.

답 **풀이 참조**

184

$f(x)=ax+\ln(x^2+4)$에서

$f'(x)=a+\dfrac{2x}{x^2+4}=\dfrac{ax^2+2x+4a}{x^2+4}$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로

$\dfrac{ax^2+2x+4a}{x^2+4}\geq 0$

이때 $x^2+4>0$이므로

$ax^2+2x+4a\geq 0$ …… ㉠

(i) $a=0$일 때,
$2x\geq 0$이므로 $f'(x)\geq 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하는 것은 아니다.

(ii) $a\neq 0$일 때,
이차부등식 ㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로
$a>0$
또, 이차방정식 $ax^2+2x+4a=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=1-4a^2\leq 0$, $(2a+1)(2a-1)\geq 0$
$\therefore a\leq -\dfrac{1}{2}$ 또는 $a\geq\dfrac{1}{2}$
그런데 $a>0$이므로 $a\geq\dfrac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $a\geq\dfrac{1}{2}$

답 $\boldsymbol{a\geq\dfrac{1}{2}}$

185

$f(x)=(x^2+1)e^{kx}$에서

$f'(x)=2xe^{kx}+k(x^2+1)e^{kx}=e^{kx}(kx^2+2x+k)$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$이어야 하므로

$e^{kx}(kx^2+2x+k)\leq 0$

이때 $e^{kx}>0$이므로 $kx^2+2x+k\leq 0$ …… ㉠

(i) $k=0$일 때, $2x\leq 0$이므로 $f'(x)\leq 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하는 것은 아니다.

(ii) $k\neq 0$일 때, 이차부등식 ㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 $k<0$
또, 이차방정식 $kx^2+2x+k=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=1-k^2\leq 0$, $(k+1)(k-1)\geq 0$
$\therefore k\leq -1$ 또는 $k\geq 1$
그런데 $k<0$이므로 $k\leq -1$

(i), (ii)에서 $k\leq -1$

따라서 실수 k의 최댓값은 -1이다. 답 **-1**

186

(1) $f'(x)=\dfrac{(2x-3)(x^2+3)-(x^2-3x)\times 2x}{(x^2+3)^2}$

$=\dfrac{3x^2+6x-9}{(x^2+3)^2}$

$f'(x)=0$에서 $3x^2+6x-9=0$

$3(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대이고 극댓값은 $f(-3)=\dfrac{9+9}{9+3}=\dfrac{3}{2}$, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=\dfrac{1-3}{1+3}=-\dfrac{1}{2}$이다.

(2) $f'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}+1$

$=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{1-x^2}=x$

양변을 제곱하면

$1-x^2=x^2$, $x^2=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ($\because 0<x<1$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$에서 극대이고 극댓값은 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{1-\dfrac{1}{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$이다.

(3) $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}$

$=x(2-x)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이고 극댓값은 $f(2)=4e^{-2}=\dfrac{4}{e^2}$, $x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=0$이다.

(4) $f'(x)=-2\cos x\sin x$

$f'(x)=0$에서 $-2\cos x\sin x=0$

$0<x<\pi$에서 $\sin x>0$이므로

$\cos x=0$ $\quad\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{2}$에서 극소이고 극솟값은 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos^2\dfrac{\pi}{2}=0$이다.

답 (1) **극댓값: $\dfrac{3}{2}$, 극솟값: $-\dfrac{1}{2}$** (2) **극댓값: $\sqrt{2}$**
(3) **극댓값: $\dfrac{4}{e^2}$, 극솟값: 0** (4) **극솟값: 0**

187

(1) $f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$이므로

$f'(x)=0$에서 $1+x=0$

$\therefore x=-1$

$f''(x)=e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x$이므로

$f''(-1)=e^{-1}>0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이고 극솟값은 $f(-1)=-e^{-1}=-\dfrac{1}{e}$이다.

(2) $f'(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x$이므로

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{3}\cos x=\sin x$

$\tan x=\sqrt{3}$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$

$f''(x)=-\sqrt{3}\sin x-\cos x$이므로

$f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{3}-\cos\dfrac{\pi}{3}=-2<0$

$f''\left(\dfrac{4}{3}\pi\right)=-\sqrt{3}\sin\dfrac{4}{3}\pi-\cos\dfrac{4}{3}\pi=2>0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{3}$에서 극대이고 극댓값은 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{3}+\cos\dfrac{\pi}{3}=2$, $x=\dfrac{4}{3}\pi$에서 극소이고 극솟값은

$f\left(\dfrac{4}{3}\pi\right)=\sqrt{3}\sin\dfrac{4}{3}\pi+\cos\dfrac{4}{3}\pi=-2$이다.

(3) $f'(x)=(\ln x)^2+x\times 2\ln x\times\frac{1}{x}$

$=\ln x(\ln x+2)$

이므로

$f'(x)=0$에서 $\ln x=0$ 또는 $\ln x+2=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\frac{1}{e^2}$

$f''(x)=\frac{1}{x}(\ln x+2)+\ln x\times\frac{1}{x}$

$=\frac{2}{x}(\ln x+1)$

이므로 $f''(1)=2>0$

$f''\left(\frac{1}{e^2}\right)=2e^2\left(\ln\frac{1}{e^2}+1\right)=-2e^2<0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{e^2}$에서 극대이고 극댓값은 $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{1}{e^2}\left(\ln\frac{1}{e^2}\right)^2=\frac{4}{e^2}$, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=0$이다.

(4) $f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)$

$=2e^x\cos x$

이므로

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

$f''(x)=2\{e^x\cos x+e^x(-\sin x)\}$

$=2e^x(\cos x-\sin x)$

이므로

$f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=2e^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right)=-2e^{\frac{\pi}{2}}<0$

$f''\left(\frac{3}{2}\pi\right)=2e^{\frac{3}{2}\pi}\left(\cos\frac{3}{2}\pi-\sin\frac{3}{2}\pi\right)=2e^{\frac{3}{2}\pi}>0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극대이고 극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}$, $x=\frac{3}{2}\pi$에서 극소이고 극솟값은

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=e^{\frac{3}{2}\pi}\left(\sin\frac{3}{2}\pi+\cos\frac{3}{2}\pi\right)=-e^{\frac{3}{2}\pi}$이다.

답 (1) **극솟값: $-\frac{1}{e}$** (2) **극댓값: 2, 극솟값: -2**

(3) **극댓값: $\frac{4}{e^2}$, 극솟값: 0**

(4) **극댓값: $e^{\frac{\pi}{2}}$, 극솟값: $-e^{\frac{3}{2}\pi}$**

188

$f'(x)=2ax-b+\frac{1}{x}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 -2를 가지므로

$f(1)=-2,\ f'(1)=0$

$f(1)=a-b=-2$ …… ㉠

$f'(1)=2a-b+1=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=3$ 답 $\boldsymbol{a=1,\ b=3}$

189

$f'(x)=ke^{kx}\sin x+e^{kx}\cos x$

$=e^{kx}(k\sin x+\cos x)$

$f''(x)=ke^{kx}(k\sin x+\cos x)$

$+e^{kx}(k\cos x-\sin x)$

$=e^{kx}\{(k^2-1)\sin x+2k\cos x\}$

함수 $f(x)$가 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극댓값을 가지므로

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0,\ f''\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{\pi}{4}k}\left(\frac{k}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$ …… ㉠

$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{\pi}{4}k}\left(\frac{k^2-1}{\sqrt{2}}+\frac{2k}{\sqrt{2}}\right)<0$ …… ㉡

㉠에서 $k=-1$

이것은 ㉡을 만족시키므로 $k=-1$ 답 $\boldsymbol{-1}$

190

$f'(x)=\frac{(2x-1)e^x-(x^2-x+a)e^x}{e^{2x}}$

$=\frac{-x^2+3x-a-1}{e^x}$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 $f'(x)=0$인 점이 존재하고 그 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌어야 하므로 이차방정식 $-x^2+3x-a-1=0$, 즉

$x^2-3x+a+1=0$ …… ㉠

이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4(a+1)>0$

$5-4a>0$ $\therefore a<\frac{5}{4}$ 답 $\boldsymbol{a<\frac{5}{4}}$

191

$f'(x)=e^x(x^2+2x+k)+e^x(2x+2)$

$\quad\;\, =e^x(x^2+4x+k+2)$

이때 $e^x>0$이므로 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2+4x+k+2\ge0$이어야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2+4x+k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=2^2-(k+2)\le0,\ 2-k\le0$

$\therefore\ k\ge2$ 답 $\boldsymbol{k\ge2}$

192

답 (1) $\mathbf{4x^3-6x^2+2,\ 12x^2-12x,\ 0,\ 1,\ (-\infty,\ 0),}$ $\mathbf{(1,\ \infty)}$, **아래로**, $\mathbf{(0,\ 1)}$, **위로**

(2) $\mathbf{\cos x,\ -\sin x,\ (\pi,\ 2\pi)}$, **아래로**, $\mathbf{(0,\ \pi)}$, **위로**

193

답 $\mathbf{15x^4-20x^3,\ 60x^3-60x^2,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ -2}$

194

(1) $f(x)=x^4+4x^3+20$으로 놓으면

$f'(x)=4x^3+12x^2=4x^2(x+3)$

$f''(x)=12x^2+24x=12x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=0$

$f''(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	변곡점	↗	변곡점	↗

따라서 곡선 $y=f(x)$는 **구간** $\mathbf{(-\infty,\ -2)}$, $\mathbf{(0,\ \infty)}$**에서** $f''(x)>0$이므로 **아래로 볼록**하고, **구간** $\mathbf{(-2,\ 0)}$**에서** $f''(x)<0$이므로 **위로 볼록**하다.

이때 **변곡점의 좌표는** $\mathbf{(-2,\ 4)}$, $\mathbf{(0,\ 20)}$이다.

(2) $f(x)=x+2\cos x$로 놓으면

$f'(x)=1-2\sin x$

$f''(x)=-2\cos x$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$

$f''(x)=0$에서 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗		↗	
			극대		변곡점		극소		변곡점		

따라서 곡선 $y=f(x)$는 **구간** $\left(\mathbf{0},\ \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right)$, $\left(\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\pi},\ \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\right)$**에서** $f''(x)<0$이므로 **위로 볼록**하고, **구간** $\left(\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\pi}\right)$**에서** $f''(x)>0$이므로 **아래로 볼록**하다.

이때 **변곡점의 좌표는** $\left(\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right)$, $\left(\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\pi},\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\pi}\right)$이다.

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+3)^2}$

$f''(x)=\dfrac{-2(x^2+3)^2+2x\times2(x^2+3)\times2x}{(x^2+3)^4}$

$\quad\;\;\;=\dfrac{-2(x^2+3)+8x^2}{(x^2+3)^3}=\dfrac{6(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	변곡점	↗	극대	↘	변곡점	↘

따라서 곡선 $y=f(x)$는 **구간 $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$에서** $f''(x)>0$이므로 **아래로 볼록**하고, **구간 $(-1, 1)$에서** $f''(x)<0$이므로 **위로 볼록**하다.

이때 **변곡점의 좌표**는 $\left(-1, \frac{1}{4}\right), \left(1, \frac{1}{4}\right)$이다.

(4) $f(x)=\ln(x^2+1)$로 놓으면

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

$f''(x)=\frac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	변곡점	↘	극소	↗	변곡점	↗

따라서 곡선 $y=f(x)$는 **구간 $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$에서** $f''(x)<0$이므로 **위로 볼록**하고, **구간 $(-1, 1)$에서** $f''(x)>0$이므로 **아래로 볼록**하다.

이때 **변곡점의 좌표**는 $(-1, \ln 2)$, $(1, \ln 2)$이다.

답 풀이 참조

195

$f'(x)=2ax+b-\frac{4}{x}$

$f''(x)=2a+\frac{4}{x^2}$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극대이므로 $f'(2)=0$

$\therefore 4a+b-2=0$ ⋯⋯ ㉠

또, 변곡점의 x좌표가 $\sqrt{2}$이므로 $f''(\sqrt{2})=0$

$2a+2=0$ $\quad\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$-4+b-2=0$ $\quad\therefore b=6$

$\therefore a+b=-1+6=5$

답 5

196

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f''(x)=6ax+2b$

곡선 $y=f(x)$의 $x=2$에서의 접선의 기울기가 4이므로

$f'(2)=4$

$\therefore 12a+4b+c=4$ ⋯⋯ ㉠

또, 점 $(1, 2)$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이므로

$f(1)=2$, $f''(1)=0$

$f(1)=a+b+c=2$ ⋯⋯ ㉡

$f''(1)=6a+2b=0$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-3$, $c=4$

답 $a=1, b=-3, c=4$

197

(1) (i) $x^2+1\neq 0$이므로 주어진 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

(ii) $x=0$일 때, $f(0)=0$이므로 그래프는 원점을 지난다.

(iii) $f(-x)=-\frac{2x}{x^2+1}=-f(x)$이므로 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

(iv) $f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=\frac{-4x(x^2+1)^2-(-2x^2+2)\times 2(x^2+1)\times 2x}{(x^2+1)^4}$

$=\frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$f''(x)=0$에서

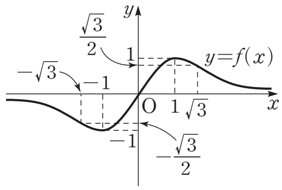
$x=0$ 또는 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘
		↑ 변곡점		↑ 극소		↑ 변곡점		↑ 극대		↑ 변곡점	

(v) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0$이므로 점근선은 x축이다.

따라서 함수 $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) (i) 정의역은 $x\neq1$인 실수 전체의 집합이다.

(ii) $x=0$일 때, $f(0)=-2$이므로 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0,\ -2)$이다.

또, $x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$이므로 x축과 만나지 않는다.

(iii) $f'(x)=\frac{(2x+1)(x-1)-(x^2+x+2)\times1}{(x-1)^2}$

$=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

$=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$

$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-3)\times2(x-1)}{(x-1)^4}$

$=\frac{8}{(x-1)^3}$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

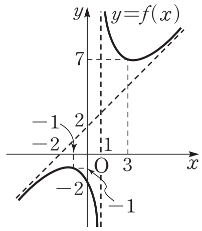
$f''(x)\neq0$이므로 변곡점이 없다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	-1 극대	↘		↘	7 극소	↗

(iv) $y=\frac{x^2+x+2}{x-1}=x+2+\frac{4}{x-1}$이므로 점근선은 두 직선 $x=1$, $y=x+2$이다.

따라서 함수 $f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(3) (i) 정의역은 $x\geq1$인 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

$f''(x)=\frac{1}{4(x-1)\sqrt{x-1}}$

$f'(x)=0$에서 $2\sqrt{x-1}=1$

$4(x-1)=1$ $\therefore x=\frac{5}{4}$

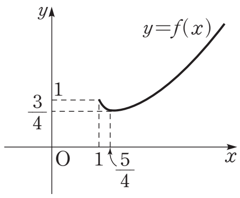
$f''(x)\neq0$이므로 변곡점이 없다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	$\frac{5}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	1	↘	$\frac{3}{4}$ 극소	↗

(iii) $\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x-1})=\infty$

따라서 함수 $f(x)=x-\sqrt{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(4) (i) 정의역은 $x\ge-2$인 실수 전체의 집합이다.

(ii) $x=0$일 때, $f(0)=0$이므로 그래프는 원점을 지난다.
또, $x\sqrt{x+2}=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$이므로 그래프와 x축의 교점의 좌표는 $(-2,\ 0)$, $(0,\ 0)$이다.

(iii) $f'(x)$

$=\sqrt{x+2}+x\times\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$

$=\dfrac{3x+4}{2\sqrt{x+2}}$

$f''(x)$

$=\dfrac{6\sqrt{x+2}-(3x+4)\times\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}}{4(x+2)}$

$=\dfrac{3x+8}{4(x+2)\sqrt{x+2}}$

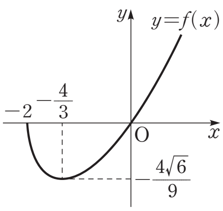
$f'(x)=0$에서

$x=-\dfrac{4}{3}$

$x\ge-2$에서 $f''(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.
함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	$-\frac{4}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	↘	$-\frac{4\sqrt{6}}{9}$ 극소	↗

(iv) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sqrt{x+2}=\infty$
따라서 함수 $f(x)=x\sqrt{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

198

(1) (i) 정의역은 실수 전체의 집합이다.

(ii) $x=0$일 때, $f(0)=1$이므로 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0,\ 1)$이다.

(iii) $f(-x)=e^{-x^2}=f(x)$이므로 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

(iv) $f'(x)=-2xe^{-x^2}$

$f''(x)=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}$

$=2e^{-x^2}(2x^2-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

$f''(x)=0$에서 $x^2=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

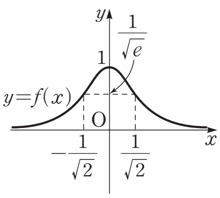
함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$ 변곡점	↗	1 극대	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$ 변곡점	↘

(v) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{x^2}}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}e^{-x^2}=0$

이므로 점근선은 x축이다.

따라서 함수 $f(x)=e^{-x^2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(x)=\ln(x^2+1)^2=2\ln(x^2+1)$

(i) $x^2+1>0$이므로 정의역은 실수 전체의 집합이다.

(ii) $x=0$일 때, $f(0)=0$이므로 그래프는 원점을 지난다.

(iii) $f(-x)=\ln(x^2+1)^2=f(x)$이므로 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

(iv) $f'(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$

$f''(x)=\dfrac{4(x^2+1)-4x\times 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-4(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

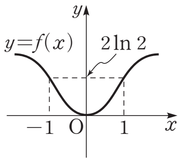
$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$2\ln 2$ 변곡점	↘	0 극소	↗	$2\ln 2$ 변곡점	↗

(v) $\lim_{x\to-\infty}\ln(x^2+1)^2=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\ln(x^2+1)^2=\infty$

따라서 함수 $f(x)=\ln(x^2+1)^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

199

(i) 주어진 함수의 정의역은 $\{x|0\le x\le 2\pi\}$이다.

(ii) $x=0$일 때, $f(0)=0$이므로 그래프는 원점을 지난다.
또, $(2-\sin x)\sin x=0$에서 $\sin x=0$, 즉 $x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$이므로 그래프와 x축의 교점의 좌표는 $(\pi, 0)$, $(2\pi, 0)$이다.

(iii) $f'(x)=-\cos x\sin x+(2-\sin x)\cos x$

$=2(1-\sin x)\cos x$

$f''(x)=2\times(-\cos x)\times\cos x$

$+2(1-\sin x)\times(-\sin x)$

$=-2\cos^2 x-2\sin x+2\sin^2 x$

$=-2(1-\sin^2 x)-2\sin x+2\sin^2 x$

$=4\sin^2 x-2\sin x-2$

$=2(2\sin x+1)(\sin x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=1$ 또는 $\cos x=0$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$

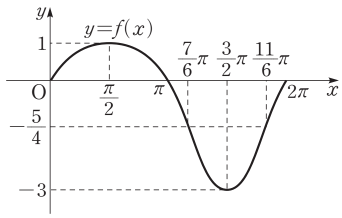
$f''(x)=0$에서 $\sin x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $\sin x=1$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\dfrac{11}{6}\pi$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{7}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{11}{6}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	$-\frac{5}{4}$	↘	-3	↗	$-\frac{5}{4}$	↗	0
			↑ 극대		↑ 변곡점		↑ 극소		↑ 변곡점		

따라서 함수 $f(x)=(2-\sin x)\sin x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



답 풀이 참조

200

(i) 주어진 함수의 정의역은 $\{x|0\le x\le \pi\}$이다.

(ii) $x=0$일 때, $f(0)=1$이므로 그래프와 y축의 교점의 좌표는 $(0, 1)$이다.
또, $\cos x-\sin x=0$에서 $\cos x=\sin x$, 즉 $x=\dfrac{\pi}{4}$이므로 그래프와 x축의 교점의 좌표는 $\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$이다.

(iii) $f'(x)=-\sin x-\cos x$

$f''(x)=-\cos x+\sin x$

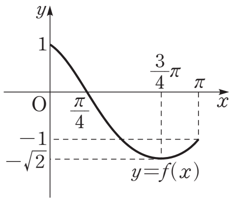
$f'(x)=0$에서 $\sin x=-\cos x$ $\qquad\therefore x=\dfrac{3}{4}\pi$

$f''(x)=0$에서 $\sin x=\cos x$ $\qquad\therefore x=\dfrac{\pi}{4}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	1	↘	0 변곡점	↘	$-\sqrt{2}$ 극소	↗	-1

따라서 함수 $f(x)=\cos x-\sin x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



답 **풀이 참조**

201

(1) $f'(x)=\dfrac{(2x-3)(x+2)-(x^2-3x-1)}{(x+2)^2}$

$=\dfrac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}=\dfrac{(x+5)(x-1)}{(x+2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because -1\le x\le 2$)

닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	↘	-1 극소	↗	$-\frac{3}{4}$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(-1)=3$, 최솟값은 $f(1)=-1$이다.

(2) $f'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}}$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{x-1}=1$

양변을 제곱하면

$x-1=1$ $\qquad \therefore x=2$

닫힌구간 $[1, 5]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	0 극소	↗	1

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)=f(5)=1$, 최솟값은 $f(2)=0$이다.

답 (1) **최댓값: 3, 최솟값: -1**
(2) **최댓값: 1, 최솟값: 0**

202

(1) $f'(x)=e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}=(1-2x^2)e^{-x^2}$

$f'(x)=0$에서

$x^2=\dfrac{1}{2}$ $\qquad \therefore x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{1}{e}$	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2e}}$ 극소	↗	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$ 극대	↘	$\frac{1}{e}$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$,

최솟값은 $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$이다.

(2) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x^2-\ln x\times 2x}{x^4}$

$=\dfrac{x-2x\ln x}{x^4}$

$=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

$f'(x)=0$에서

$\ln x=\dfrac{1}{2}$ $\qquad \therefore x=\sqrt{e}$

닫힌구간 $[1,\ e]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	e
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$ 극대	$\searrow$	$\frac{1}{e^2}$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$, 최솟값은 $f(1)=0$이다.

답 (1) **최댓값: $\frac{1}{\sqrt{2e}}$, 최솟값: $-\frac{1}{\sqrt{2e}}$**

(2) **최댓값: $\frac{1}{2e}$, 최솟값: 0**

203

$f(x)=2x-x\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=2-(\ln x+1)=1-\ln x$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=1$ $\quad\therefore x=e$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

이때 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 최대이고, 최댓값은

$f(e)=2e-e\ln e=e$

따라서 $a=e$, $b=e$이므로

$a+b=2e$

답 **$2e$**

204

(1) $f'(x)=\cos x(1-\sin x)+\sin x\times(-\cos x)$

$=\cos x(1-2\sin x)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=-\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{\pi}{6}$ $\left(\because -\pi\le x\le\frac{\pi}{6}\right)$

닫힌구간 $\left[-\pi,\ \frac{\pi}{6}\right]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2 극소	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$,

최솟값은 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2$이다.

(2) $f'(x)=-\sin^2 x+(1+\cos x)\cos x$

$=-(1-\cos^2 x)+\cos x+\cos^2 x$

$=2\cos^2 x+\cos x-1$

$=(\cos x+1)(2\cos x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=-1$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ $(\because 0\le x\le 2\pi)$

닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 극대	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 극소	$\nearrow$	0

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$,

최솟값은 $f\left(\frac{5}{3}\pi\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$이다.

답 (1) **최댓값: $\frac{1}{4}$, 최솟값: -2**

(2) **최댓값: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, 최솟값: $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$**

205

$f'(x)=-e^{-x}(\sin x+\cos x)+e^{-x}(\cos x-\sin x)$

$=-2e^{-x}\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ $(\because 0\le x\le 2\pi)$

닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{e^{\pi}}$ 극소	$\nearrow$	$\frac{1}{e^{2\pi}}$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $M=f(0)=1$, 최솟값은 $m=f(\pi)=-\frac{1}{e^{\pi}}$이므로

$M+m=1-\frac{1}{e^{\pi}}$ **답** $\mathbf{1-\frac{1}{e^{\pi}}}$

206

$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}+2=\ln x+3$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-3$ $\quad\therefore x=e^{-3}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	e^{-3}	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$a-\frac{1}{e^3}$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(e^{-3})$이므로

$a-\frac{1}{e^3}=0$ $\quad\therefore a=\frac{1}{e^3}$ **답** $\mathbf{\frac{1}{e^3}}$

207

$$f'(x)=\frac{a(x^2+x+1)-(ax+b)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$
$$=\frac{-ax^2-2bx+a-b}{(x^2+x+1)^2}$$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하다.

이때 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 최댓값 1을 가지므로 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이다.

$\therefore f(2)=1,\ f'(2)=0$

$f(2)=\frac{2a+b}{7}=1$ $\quad\therefore 2a+b=7$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(2)=\frac{-4a-4b+a-b}{49}=0$

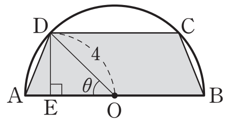
$\therefore 3a+5b=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=-3$

$\therefore ab=-15$ **답** $\mathbf{-15}$

208

오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 E라 하고,



$\angle DOE=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라

하면 지름 AB의 길이가 8이므로

$\overline{OD}=4$, $\overline{DE}=4\sin\theta$, $\overline{EO}=4\cos\theta$

$\overline{DC}=2\overline{EO}=8\cos\theta$

등변사다리꼴 ABCD의 넓이를 $f(\theta)$라 하면

$$f(\theta)=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{DE}$$
$$=\frac{1}{2}(8+8\cos\theta)\times4\sin\theta$$
$$=16(1+\cos\theta)\sin\theta$$
$$f'(\theta)=16\times(-\sin\theta)\times\sin\theta+16(1+\cos\theta)\cos\theta$$
$$=-16\sin^2\theta+16\cos\theta+16\cos^2\theta$$
$$=-16(1-\cos^2\theta)+16\cos\theta+16\cos^2\theta$$
$$=32\cos^2\theta+16\cos\theta-16$$
$$=16(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)$$

$f'(\theta)=0$에서 $\cos\theta=-1$ 또는 $\cos\theta=\frac{1}{2}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{3}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

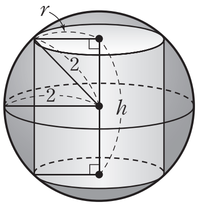
θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	$12\sqrt{3}$ 극대	$\searrow$	

따라서 $f(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 최대이므로 구하는 등변사다리꼴 ABCD의 넓이의 최댓값은

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=12\sqrt{3}$ 답 $\mathbf{12\sqrt{3}}$

209

오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r $(0<r<2)$, 높이를 h라 하면



$h=2\sqrt{4-r^2}$

원기둥의 부피를 $V(r)$라 하면

$V(r)=\pi r^2\times 2\sqrt{4-r^2}$

$\quad=2\pi r^2\sqrt{4-r^2}$

$V'(r)=4\pi r\sqrt{4-r^2}+2\pi r^2\times\frac{-2r}{2\sqrt{4-r^2}}$

$\quad=\frac{4\pi r(4-r^2)-2\pi r^3}{\sqrt{4-r^2}}$

$\quad=\frac{16\pi r-6\pi r^3}{\sqrt{4-r^2}}$

$\quad=\frac{2\pi r(8-3r^2)}{\sqrt{4-r^2}}$

$V'(r)=0$에서

$r^2=\frac{8}{3}\qquad\therefore r=\frac{2\sqrt{6}}{3}\ (\because 0<r<2)$

$0<r<2$에서 함수 $V(r)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	2
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 $V(r)$는 $r=\frac{2\sqrt{6}}{3}$일 때 최대이므로 원기둥의 부피가 최대가 되도록 하는 밑면의 반지름의 길이는 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$이다. 답 $\mathbf{\frac{2\sqrt{6}}{3}}$

210

(1) $f(x)=\ln x-x$로 놓으면 $x>0$이고

$f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

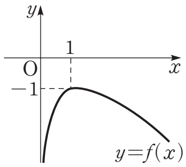
$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	-1 극대	$\searrow$

이때 $\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}(\ln x-x)=-\infty$,

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(\ln x-x)=-\infty$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나지 않으므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 0이다.

(2) $f(x)=xe^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$

$f'(x)=0$에서 $e^{-x}>0$이므로

$1-x=0\qquad\therefore x=1$

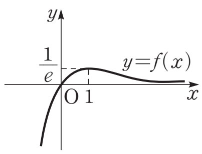
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$ 극대	$\searrow$

이때 $f(0)=0$이고 $\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$,

$\lim_{x\to-\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=-\infty$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 한 점에서 만

나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

답 (1) **0** (2) **1**

211

$\sqrt{x+1}-x+k=0$에서 $k=x-\sqrt{x+1}$

$f(x)=x-\sqrt{x+1}$로 놓으면 $x\geq -1$이고

$f'(x)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{2\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$

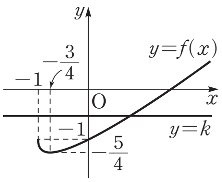
$f'(x)=0$에서 $\sqrt{x+1}=\dfrac{1}{2}$

$x+1=\dfrac{1}{4}$ $\qquad\therefore x=-\dfrac{3}{4}$

$x\geq -1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	$-\frac{3}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	-1	↘	$-\frac{5}{4}$ 극소	↗

이때 $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x+1})=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 방정식 $\sqrt{x+1}-x+k=0$, 즉 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는

(i) $k>-1$이면 **1**

(ii) $-\dfrac{5}{4}<k\leq -1$이면 **2**

(iii) $k=-\dfrac{5}{4}$이면 **1**

(iv) $k<-\dfrac{5}{4}$이면 **0**

답 **풀이 참조**

212

$2\ln x=x+k$에서 $2\ln x-x=k$

방정식 $2\ln x-x=k$가 오직 하나의 실근을 가지려면 함수 $y=2\ln x-x$의 그래프와 직선 $y=k$가 오직 한 점에서 만나야 한다.

$f(x)=2\ln x-x$로 놓으면 $x>0$이고

$f'(x)=\dfrac{2}{x}-1=\dfrac{2-x}{x}$

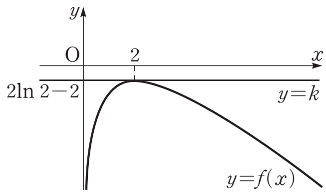
$f'(x)=0$에서 $2-x=0$ $\qquad\therefore x=2$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$2\ln 2-2$ 극대	↘

이때 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}(2\ln x-x)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(2\ln x-x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 오직 한 점에서 만나려면

$k=2\ln 2-2$

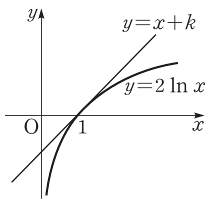
답 $\mathbf{2\ln 2-2}$

다른풀이 $2\ln x=x+k$에서

$f(x)=2\ln x$, $g(x)=x+k$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{2}{x}$, $g'(x)=1$

방정식 $2\ln x=x+k$가 오직 하나의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접해야 한다.



접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서

$2\ln t=t+k$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서

$\frac{2}{t}=1 \qquad \therefore t=2$

$t=2$를 ㉠에 대입하면

$2\ln 2=2+k \qquad \therefore k=2\ln 2-2$

213

방정식 $2\sqrt{x+1}-x=a$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=2\sqrt{x+1}-x$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=2\sqrt{x+1}-x$로 놓으면 $x\geq -1$이고

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1=\frac{1-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{x+1}=1$

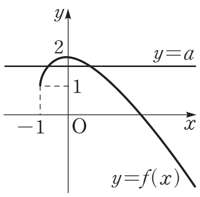
$x+1=1 \qquad \therefore x=0$

$x\geq -1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	1	$\nearrow$	2 극대	$\searrow$

이때 $\lim_{x\to\infty}(2\sqrt{x+1}-x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 두 점에서 만나려면



$1\leq a<2$

답 $\boldsymbol{1\leq a<2}$

214

$(k-2)e^x-x+1=0$에서 $(k-2)e^x=x-1$

$\therefore k-2=e^{-x}(x-1)$

즉, 주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=e^{-x}(x-1)$의 그래프와 직선 $y=k-2$가 만나야 한다.

$f(x)=e^{-x}(x-1)$로 놓으면

$f'(x)=-e^{-x}(x-1)+e^{-x}=-e^{-x}(x-2)$

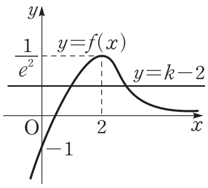
$f'(x)=0$에서 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e^2}$ 극대	$\searrow$

이때 $\lim_{x\to\infty}e^{-x}(x-1)=0$, $\lim_{x\to-\infty}e^{-x}(x-1)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k-2$가 만나려면



$k-2\leq\frac{1}{e^2} \qquad \therefore k\leq\frac{1}{e^2}+2$

따라서 실수 k의 최댓값은 $\frac{1}{e^2}+2$이다.

답 $\boldsymbol{\frac{1}{e^2}+2}$

215

$e^x\geq x+1$에서 $e^x-x-1\geq 0$

$f(x)=e^x-x-1$로 놓으면

$f'(x)=e^x-1$

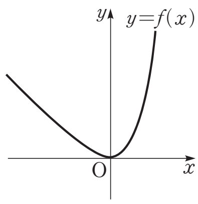
$f'(x)=0$에서 $e^x=1 \qquad \therefore x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 0을 가지므로 $f(x)\geq 0$, 즉 $e^x-x-1\geq 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $e^x\geq x+1$이 성립한다.



답 풀이 참조

216

(1) $\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$에서

$\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}>0$

$f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$으로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}$

$x>0$일 때 $f'(x)>0$이므로 $x>0$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

이때 $f(0)=0$이므로 $f(x)>0$

따라서 $x>0$일 때, 부등식 $\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$이 성립한다.

(2) $f(x)=(x-2)e^x+x+2$로 놓으면

$f'(x)=e^x+(x-2)e^x+1$
$=(x-1)e^x+1$

$f''(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$

$x>0$일 때, $f''(x)>0$

즉, $x>0$에서 함수 $f'(x)$는 증가하고, $f'(0)=0$이므로 $f'(x)>0$

또, $x>0$일 때 $f'(x)>0$이므로 $x>0$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

이때 $f(0)=0$이므로 $f(x)>0$

따라서 $x>0$일 때, 부등식 $(x-2)e^x+x+2>0$이 성립한다.

답 (1) **풀이 참조** (2) **풀이 참조**

217

$\ln(e^x-1)\le 2x+a$에서

$2x+a-\ln(e^x-1)\ge 0$

$f(x)=2x+a-\ln(e^x-1)$로 놓으면

$f'(x)=2-\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{e^x-2}{e^x-1}$

$f'(x)=0$에서 $e^x=2$ $\qquad\therefore x=\ln 2$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\ln 2$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$2\ln 2+a$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(\ln 2)=2\ln 2+a$이므로 $f(x)\ge 0$이 성립하려면

$2\ln 2+a\ge 0$

$\therefore a\ge -2\ln 2$

답 $\boldsymbol{a\ge -2\ln 2}$

218

$\cos x>k-x^2$에서

$\cos x-k+x^2>0$

$f(x)=\cos x-k+x^2$으로 놓으면

$f'(x)=-\sin x+2x$

$f''(x)=-\cos x+2$

이때 $-1\le\cos x\le 1$에서 $1\le -\cos x+2\le 3$이므로 $f''(x)>0$

즉, $x>0$에서 함수 $f'(x)$는 증가하고, $f'(0)=0$이므로 $f'(x)>0$

또, $x>0$일 때 $f'(x)>0$이므로 $x>0$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

이때 $x>0$에서 $f(x)>0$이 성립하려면

$f(0)=1-k\ge 0$ $\qquad\therefore k\le 1$

따라서 실수 k의 최댓값은 1이다.

답 1

219

점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=\cos t+\sin t$, $a=\frac{dv}{dt}=-\sin t+\cos t$

따라서 $t=\pi$에서의 점 P의 속도는

$v=\cos\pi+\sin\pi=-1$

$t=\pi$에서의 점 P의 가속도는

$a=-\sin\pi+\cos\pi=-1$

답 속도: -1, 가속도: -1

220

점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=\cos t+2kt$, $a=\frac{dv}{dt}=-\sin t+2k$

$t=\frac{\pi}{2}$에서의 점 P의 속도는

$v=\cos\frac{\pi}{2}+k\pi=k\pi$

즉, $k\pi=2\pi$이므로 $k=2$

$\therefore v=\cos t+4t,\ a=-\sin t+4$

따라서 $t=\pi$에서의 점 P의 가속도는

$a=-\sin\pi+4=4$ **답 4**

221

점 P의 시각 t에서의 속도는

$\frac{dx}{dt}=\frac{4t^3}{t^4}-2t=\frac{4}{t}-2t$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$\frac{4}{t}-2t=0,\ t^2=2$

$\therefore t=\sqrt{2}\ (\because t>0)$

따라서 $t=\sqrt{2}$에서의 점 P의 위치는

$x=\ln(\sqrt{2})^4-(\sqrt{2})^2=\ln 4-2$ **답 $\ln 4-2$**

222

$\frac{dx}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t)$

$\frac{dy}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t)$

이므로 시각 t에서의 점 P의 속도는

$(e^t(\cos t-\sin t),\ e^t(\sin t+\cos t))$

따라서 $t=2\pi$에서의 점 P의 속도는

$(e^{2\pi}(\cos 2\pi-\sin 2\pi),\ e^{2\pi}(\sin 2\pi+\cos 2\pi))$, 즉

$(e^{2\pi},\ e^{2\pi})$

또,

$\frac{d^2x}{dt^2}=e^t(\cos t-\sin t)+e^t(-\sin t-\cos t)$

$=-2e^t\sin t$

$\frac{d^2y}{dt^2}=e^t(\sin t+\cos t)+e^t(\cos t-\sin t)$

$=2e^t\cos t$

이므로 시각 t에서의 점 P의 가속도는

$(-2e^t\sin t,\ 2e^t\cos t)$

따라서 $t=2\pi$에서의 점 P의 가속도는

$(-2e^{2\pi}\sin 2\pi,\ 2e^{2\pi}\cos 2\pi)$, 즉 $(0,\ 2e^{2\pi})$

답 속도: $(e^{2\pi}, e^{2\pi})$, 가속도: $(0, 2e^{2\pi})$

223

$\frac{dx}{dt}=2t+a,\ \frac{dy}{dt}=4at+4$

이므로 시각 t에서의 점 P의 속도는

$(2t+a,\ 4at+4)$

$t=1$에서의 점 P의 속도는

$(2+a,\ 4a+4)$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{(2+a)^2+(4a+4)^2}=\sqrt{17a^2+36a+20}$

$t=1$에서의 점 P의 속력이 $4\sqrt{10}$이므로

$\sqrt{17a^2+36a+20}=4\sqrt{10}$

$17a^2+36a-140=0,\ (17a+70)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$ **답 2**

224

$\frac{dx}{dt}=1-\cos t,\ \frac{dy}{dt}=\sin t$

이므로 시각 t에서의 점 P의 속도는

$(1-\cos t,\ \sin t)$

즉, 시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{(1-\cos t)^2+(\sin t)^2}=\sqrt{2(1-\cos t)}$

$0\le t\le 2\pi$에서 $-1\le\cos t\le 1$이므로 점 P의 속력은

$\cos t=-1$일 때 최대이다.

즉, 점 P의 속력이 최대일 때

$t=\pi\ (\because 0\le t\le 2\pi)$

따라서 $t=\pi$일 때,

$x=\pi-\sin\pi=\pi,\ y=1-\cos\pi=2$

이므로 점 P의 위치는 $(\pi, 2)$이고 속력의 최댓값은

$\sqrt{2(1-\cos\pi)}=2$

답 위치: $(\pi, 2)$, 최댓값: 2

Ⅲ. 적분법

225

(1) $\int \frac{4}{x^3}\,dx=4\int x^{-3}\,dx$

$=4\times\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}+C$

$=-2x^{-2}+C=\boldsymbol{-\frac{2}{x^2}+C}$

(2) $\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx=\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx$

$=\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-\frac{3}{2}+1}+C$

$=-2x^{-\frac{1}{2}}+C=\boldsymbol{-\frac{2}{\sqrt{x}}+C}$

(3) $\int\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=\int x^2\,dx+\int x^{-2}\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C$

$=\boldsymbol{\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{x}+C}$

(4) $\int(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})\,dx$

$=\int x^{\frac{1}{3}}\,dx+\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$

$=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1}+\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+C$

$=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\boldsymbol{\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C}$

(5) $\int\frac{x^3-x+2}{x^2}\,dx$

$=\int\left(x-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx$

$=\int x\,dx-\int\frac{1}{x}\,dx+2\int x^{-2}\,dx$

$=\frac{1}{2}x^2-\ln|x|+2\times\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C$

$=\boldsymbol{\frac{1}{2}x^2-\ln|x|-\frac{2}{x}+C}$

답 풀이 참조

226

(1) $\int 2e^{x+3}\,dx=\int 2e^xe^3\,dx$

$=2e^3\int e^x\,dx$

$=2e^3e^x+C=\boldsymbol{2e^{x+3}+C}$

(2) $\int 5^{2x-1}\,dx=\int(5^2)^x\times\frac{1}{5}\,dx$

$=\frac{1}{5}\int 25^x\,dx$

$=\boldsymbol{\frac{25^x}{5\ln 25}+C}$

(3) $\int(e^{2x}-e^x+3)\,dx$

$=\int(e^2)^x\,dx-\int e^x\,dx+\int 3\,dx$

$=\frac{(e^2)^x}{\ln e^2}-e^x+3x+C$

$=\boldsymbol{\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+3x+C}$

(4) $\int(2^{x+2}+3^{2x})\,dx=\int\{2^x\times2^2+(3^2)^x\}\,dx$

$=4\int 2^x\,dx+\int 9^x\,dx$

$=4\times\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{9^x}{\ln 9}+C$

$=\boldsymbol{\frac{2^{x+2}}{\ln 2}+\frac{9^x}{\ln 9}+C}$

(5) $\int(e^{x-2}-4^{x+1})\,dx$

$=\int(e^x\times e^{-2}-4^x\times4)\,dx$

$=e^{-2}\int e^x\,dx-4\int 4^x\,dx$

$=e^{-2}\times e^x-4\times\frac{4^x}{\ln 4}+C$

$=\boldsymbol{e^{x-2}-\frac{4^{x+1}}{\ln 4}+C}$

답 풀이 참조

227

(1) $\int(2\cos x+5\sin x)\,dx$

$=2\int\cos x\,dx+5\int\sin x\,dx$

$=\boldsymbol{2\sin x-5\cos x+C}$

(2) $\int (\sec^2 x - 3\csc^2 x)\,dx$

$=\int \sec^2 x\,dx - 3\int \csc^2 x\,dx$

$=\mathbf{\tan x + 3\cot x + C}$

(3) $\int (\cot x + 3)\sin x\,dx$

$=\int \left(\frac{\cos x}{\sin x}+3\right)\sin x\,dx$

$=\int (\cos x + 3\sin x)\,dx$

$=\int \cos x\,dx + 3\int \sin x\,dx$

$=\mathbf{\sin x - 3\cos x + C}$

(4) $\int \frac{\cos^3 x + 2}{\cos^2 x}\,dx$

$=\int \left(\cos x + \frac{2}{\cos^2 x}\right)dx$

$=\int \cos x\,dx + 2\int \sec^2 x\,dx$

$=\mathbf{\sin x + 2\tan x + C}$

(5) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,dx$

$=\int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}\,dx$

$=\int \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1+\cos x}\,dx$

$=\int (1-\cos x)\,dx$

$=\int dx - \int \cos x\,dx$

$=\mathbf{x - \sin x + C}$

답 풀이 참조

228

(1) $\int \left(x+\frac{1}{x^2}\right)\left(x-\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=\int \left(x^2 - \frac{1}{x^4}\right)dx$

$=\int x^2\,dx - \int x^{-4}\,dx$

$=\mathbf{\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3x^3} + C}$

(2) $\int \frac{x^3+3x^2-x+2}{x^2}\,dx$

$=\int \left(x+3-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx$

$=\int x\,dx + \int 3\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx + 2\int x^{-2}\,dx$

$=\mathbf{\frac{1}{2}x^2 + 3x - \ln|x| - \frac{2}{x} + C}$

(3) $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)^3}{x}\,dx$

$=\int \frac{x+3\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+1}{x}\,dx$

$=\int \left(1+3x^{-\frac{1}{3}}+3x^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{x}\right)dx$

$=\int dx + 3\int x^{-\frac{1}{3}}\,dx + 3\int x^{-\frac{2}{3}}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx$

$=x+\frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}}+9x^{\frac{1}{3}}+\ln|x|+C$

$=\mathbf{x+\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+9\sqrt[3]{x}+\ln|x|+C}$

답 풀이 참조

229

$f(x)=\int \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\,dx$

$=\int \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2}\,dx$

$=\int (\sqrt{x}+2)\,dx$

$=\int (x^{\frac{1}{2}}+2)\,dx$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x+C$

$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2x+C$

이때 $f(1)=\frac{2}{3}$이므로

$\frac{2}{3}+2+C=\frac{2}{3}$ $\qquad \therefore C=-2$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2x-2$이므로

$f(9)=\frac{2}{3}\times 9\sqrt{9}+18-2=34$

답 34

230

(1) $\displaystyle\int \frac{xe^x-2ex-1}{x}\,dx$

$\displaystyle=\int\left(e^x-2e-\frac{1}{x}\right)dx$

$\displaystyle=\int e^x\,dx-2e\int dx-\int\frac{1}{x}\,dx$

$\boldsymbol{=e^x-2ex-\ln|x|+C}$

(2) $\displaystyle\int\frac{8^x+1}{2^x+1}\,dx$

$\displaystyle=\int\frac{(2^x)^3+1}{2^x+1}\,dx$

$\displaystyle=\int\frac{(2^x+1)\{(2^x)^2-2^x+1\}}{2^x+1}\,dx$

$\displaystyle=\int(4^x-2^x+1)\,dx$

$\displaystyle=\int 4^x\,dx-\int 2^x\,dx+\int dx$

$\boldsymbol{=\dfrac{4^x}{\ln 4}-\dfrac{2^x}{\ln 2}+x+C}$

(3) $\displaystyle\int\left(e^{x+4}+\frac{1}{x}\right)dx$

$\displaystyle=e^4\int e^x\,dx+\int\frac{1}{x}\,dx$

$=e^4e^x+\ln|x|+C$

$\boldsymbol{=e^{x+4}+\ln|x|+C}$

답 **풀이 참조**

231

$\displaystyle f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 2e^x(e^x-1)\,dx$

$\displaystyle=\int\{2\times(e^x)^2-2e^x\}\,dx$

$\displaystyle=2\int(e^2)^x\,dx-2\int e^x\,dx$

$\displaystyle=2\times\frac{(e^2)^x}{\ln e^2}-2e^x+C$

$=e^{2x}-2e^x+C$

이때 $f(0)=1$이므로

$1-2+C=1 \qquad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=e^{2x}-2e^x+2$이므로

$f(1)=e^2-2e+2$

답 $\boldsymbol{e^2-2e+2}$

232

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sin x}\,dx$

$\displaystyle=\int\frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\,dx$

$\displaystyle=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

$\displaystyle=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos x}\times\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$

$\displaystyle=\int(\sec^2 x-\sec x\tan x)\,dx$

$\displaystyle=\int\sec^2 x\,dx-\int\sec x\tan x\,dx$

$\boldsymbol{=\tan x-\sec x+C}$

(2) $\displaystyle\int(\tan x+3)\cos x\,dx$

$\displaystyle=\int\left(\frac{\sin x}{\cos x}+3\right)\cos x\,dx$

$\displaystyle=\int(\sin x+3\cos x)dx$

$\displaystyle=\int\sin x\,dx+3\int\cos x\,dx$

$\boldsymbol{=-\cos x+3\sin x+C}$

(3) $\displaystyle\int 3\cot^2 x\,dx$

$\displaystyle=\int 3(\csc^2 x-1)dx$

$\displaystyle=3\int\csc^2 x\,dx-3\int dx$

$\boldsymbol{=-3\cot x-3x+C}$

답 **풀이 참조**

233

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$이므로

$\displaystyle f(x)=\int\frac{1-\cos^3 x}{1-\sin^2 x}\,dx=\int\frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x}\,dx$

$\displaystyle=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x\right)dx$

$\displaystyle=\int(\sec^2 x-\cos x)dx$

$\displaystyle=\int\sec^2 x\,dx-\int\cos x\,dx$

$=\tan x-\sin x+C$

이때 $f(0)=0$이므로

$\tan 0-\sin 0+C=0$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\tan x-\sin x$이므로

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}$

$=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

234

답 (1) $\boldsymbol{4,\ \frac{1}{4}dt,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}t^4,\ 4x+2}$

(2) $\boldsymbol{\sin x,\ dt,\ t^3,\ 1-\cos x}$

235

(1) $2x+5=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$2=\frac{dt}{dx}$

$\therefore \int(2x+5)^4\,dx=\int t^4\times\frac{1}{2}\,dt$

$=\frac{1}{2}\int t^4\,dt=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}t^5+C$

$=\boldsymbol{\frac{1}{10}(2x+5)^5+C}$

(2) $-2x+3=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$-2=\frac{dt}{dx}$

$\therefore \int e^{-2x+3}\,dx=\int e^t\times\left(-\frac{1}{2}\right)dt$

$=-\frac{1}{2}\int e^t\,dt$

$=-\frac{1}{2}e^t+C$

$=\boldsymbol{-\frac{1}{2}e^{-2x+3}+C}$

(3) $3x-1=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$3=\frac{dt}{dx}$

$\therefore \int\cos(3x-1)dx=\int\cos t\times\frac{1}{3}\,dt$

$=\frac{1}{3}\int\cos t\,dt$

$=\frac{1}{3}\sin t+C$

$=\boldsymbol{\frac{1}{3}\sin(3x-1)+C}$

(4) $\frac{3x-5}{x+2}=\frac{3(x+2)-11}{x+2}=3-\frac{11}{x+2}$이므로

$\int\frac{3x-5}{x+2}\,dx=\int\left(3-\frac{11}{x+2}\right)dx$

$=\int 3\,dx-11\int\frac{1}{x+2}\,dx$

$=\boldsymbol{3x-11\ln|x+2|+C}$

(5) $\frac{2}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$이므로

$\int\frac{2}{(x-1)(x+1)}\,dx$

$=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\int\frac{1}{x-1}\,dx-\int\frac{1}{x+1}\,dx$

$=\ln|x-1|-\ln|x+1|+C$

$=\boldsymbol{\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C}$

답 **풀이 참조**

236

(1) $\frac{1}{4}x-1=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{1}{4}=\frac{dt}{dx}$

$\therefore \int\left(\frac{1}{4}x-1\right)^3dx=\int t^3\times 4\,dt$

$=4\int t^3\,dt$

$=4\times\frac{1}{4}t^4+C$

$=\boldsymbol{\left(\frac{1}{4}x-1\right)^4+C}$

(2) $x^3+1=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2=\frac{dt}{dx}$

$\therefore \int 3x^2(x^3+1)^2\,dx=\int t^2\,dt=\frac{1}{3}t^3+C$

$=\boldsymbol{\frac{1}{3}(x^3+1)^3+C}$

(3) $x^3-3x+4=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2-3=\frac{dt}{dx}$

$$\therefore \int (x^2-1)(x^3-3x+4)\,dx$$
$$=\frac{1}{3}\int (3x^2-3)(x^3-3x+4)dx$$
$$=\frac{1}{3}\int t\,dt=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}t^2+C$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}(x^3-3x+4)^2+C}$$

답 풀이 참조

237

(1) $\sqrt{x^2+3x}=t$로 놓고 양변을 제곱하면

$x^2+3x=t^2$이므로 $2x+3=2t\dfrac{dt}{dx}$

$$\therefore \int (2x+3)\sqrt{x^2+3x}\,dx$$
$$=\int t\times 2t\,dt$$
$$=2\int t^2\,dt=\frac{2}{3}t^3+C$$
$$=\frac{2}{3}(\sqrt{x^2+3x})^3+C$$
$$=\boldsymbol{\frac{2}{3}(x^2+3x)\sqrt{x^2+3x}+C}$$

(2) $\sqrt{1-x^2}=t$로 놓고 양변을 제곱하면

$1-x^2=t^2$이므로 $-2x=2t\dfrac{dt}{dx}$, $x^2=1-t^2$

$$\therefore \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$=\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\times x\,dx$$
$$=\int \frac{1-t^2}{t}\times(-t)dt$$
$$=\int (t^2-1)dt$$
$$=\frac{1}{3}t^3-t+C$$
$$=\frac{1}{3}(\sqrt{1-x^2})^3-\sqrt{1-x^2}+C$$
$$=\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x^2}+C$$
$$=\boldsymbol{-\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}+C}$$

(3) $\sqrt{2x^3-x^2}=t$로 놓고 양변을 제곱하면

$2x^3-x^2=t^2$이므로 $6x^2-2x=2t\dfrac{dt}{dx}$

$$\therefore \int \frac{3x^2-x}{\sqrt{2x^3-x^2}}\,dx=\int \frac{1}{t}\times t\,dt$$
$$=\int 1\,dt$$
$$=t+C$$
$$=\boldsymbol{\sqrt{2x^3-x^2}+C}$$

답 풀이 참조

238

$\sqrt{x^2+1}=t$로 놓고 양변을 제곱하면

$x^2+1=t^2$이므로 $2x=2t\dfrac{dt}{dx}$

$$\therefore f(x)=\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$$
$$=\int t\times t\,dt=\int t^2\,dt$$
$$=\frac{1}{3}t^3+C$$
$$=\frac{1}{3}(\sqrt{x^2+1})^3+C$$
$$=\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C$$

이때 $f(0)=3$이므로

$\dfrac{1}{3}+C=3\qquad \therefore C=\dfrac{8}{3}$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+\dfrac{8}{3}$이므로

$$f(-2)=\frac{1}{3}\times 5\sqrt{5}+\frac{8}{3}$$
$$=\frac{1}{3}(5\sqrt{5}+8)$$

답 $\boldsymbol{\frac{1}{3}(5\sqrt{5}+8)}$

239

(1) $2x+3=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$2=\dfrac{dt}{dx}$

$$\therefore \int 10^{2x+3}\,dx=\int 10^t\times\frac{1}{2}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int 10^t\,dt$$
$$=\frac{10^t}{2\ln 10}+C$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2\ln 10}10^{2x+3}+C}$$

(2) $\sqrt{e^x-1}=t$로 놓고 양변을 제곱하면

$e^x-1=t^2$이므로 $e^x=2t\dfrac{dt}{dx}$

$$\therefore \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx=\int \frac{1}{t}\times 2t\,dt$$
$$=\int 2\,dt$$
$$=2t+C$$
$$=\mathbf{2\sqrt{e^x-1}+C}$$

(3) $\ln(x+1)=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{x+1}=\frac{dt}{dx}$$
$$\therefore \int \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx=\int t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}t^2+C$$
$$=\mathbf{\frac{1}{2}\{\ln(x+1)\}^2+C}$$

(4) $\ln x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$$
$$\therefore \int \frac{2}{x(\ln x)^2}\,dx=\int \frac{1}{t^2}\times 2\,dt$$
$$=2\int t^{-2}\,dt$$
$$=-\frac{2}{t}+C$$
$$=\mathbf{-\frac{2}{\ln x}+C}$$

답 풀이 참조

240

$1+e^x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$e^x=\frac{dt}{dx}$$
$$\therefore f(x)=\int e^x(1+e^x)^3\,dx$$
$$=\int t^3\,dt$$
$$=\frac{1}{4}t^4+C$$
$$=\frac{1}{4}(1+e^x)^4+C$$

이때 $f(0)=3$이므로 $\frac{1}{4}(1+e^0)^4+C=3$

$4+C=3 \qquad \therefore C=-1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}(1+e^x)^4-1$이므로

$f(\ln 3)=\frac{1}{4}(1+e^{\ln 3})^4-1=63$

답 63

241

(1) $4x-3=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$4=\frac{dt}{dx}$$
$$\therefore \int \cos(4x-3)\,dx=\int \cos t\times\frac{1}{4}\,dt$$
$$=\frac{1}{4}\int \cos t\,dt$$
$$=\frac{1}{4}\sin t+C$$
$$=\mathbf{\frac{1}{4}\sin(4x-3)+C}$$

(2) $\tan x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\sec^2 x=\frac{dt}{dx}$$
$$\therefore \int \tan x\sec^2 x\,dx=\int t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}t^2+C$$
$$=\mathbf{\frac{1}{2}\tan^2 x+C}$$

(3) $$\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x}\,dx=\int \frac{\cos^2 x\cos x}{1+\sin x}\,dx$$
$$=\int \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}\times\cos x\,dx$$
$$=\int (1-\sin x)\cos x\,dx$$

$1-\sin x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$-\cos x=\frac{dt}{dx}$$
$$\therefore \int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x}\,dx=\int (1-\sin x)\cos x\,dx$$
$$=\int t\times(-1)\,dt$$
$$=-\frac{1}{2}t^2+C$$
$$=\mathbf{-\frac{1}{2}(1-\sin x)^2+C}$$

답 풀이 참조

242

$1+\tan x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\sec^2 x=\dfrac{dt}{dx}$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{\sec^2 x}{1+\tan x}dx$$
$$=\int \frac{1}{t}dt=\ln|t|+C$$
$$=\ln|1+\tan x|+C$$

이때 $f(0)=0$이므로

$\ln 1+C=0 \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=\ln|1+\tan x|$이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\ln\left|1+\tan\dfrac{\pi}{4}\right|=\ln 2$ 답 **$\ln 2$**

243

(1) $(e^x+e^{-x})'=e^x-e^{-x}$이므로

$$\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\int \frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}dx$$
$$=\ln|e^x+e^{-x}|+C$$
$$=\mathbf{\ln(e^x+e^{-x})+C} \leftarrow e^x+e^{-x}>0$$

(2) $(1-\cos x)'=\sin x$이므로

$$\int \frac{\sin x}{1-\cos x}dx=\int \frac{(1-\cos x)'}{1-\cos x}dx$$
$$=\ln|1-\cos x|+C$$
$$=\mathbf{\ln(1-\cos x)+C}$$

$\leftarrow 1-\cos x>0$

(3) $(3^x-x^2)'=3^x\ln 3-2x$이므로

$$\int \frac{3^x\ln 3-2x}{3^x-x^2}dx=\int \frac{(3^x-x^2)'}{3^x-x^2}dx$$
$$=\mathbf{\ln|3^x-x^2|+C}$$

답 **풀이 참조**

244

$(3e^{2x}-1)'=6e^{2x}$이므로

$$f(x)=\int \frac{e^{2x}}{3e^{2x}-1}dx=\frac{1}{6}\int \frac{6e^{2x}}{3e^{2x}-1}dx$$
$$=\frac{1}{6}\int \frac{(3e^{2x}-1)'}{3e^{2x}-1}dx$$
$$=\frac{1}{6}\ln|3e^{2x}-1|+C$$

이때 $f(0)=\dfrac{1}{6}\ln 2$이므로

$\dfrac{1}{6}\ln 2+C=\dfrac{1}{6}\ln 2 \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{6}\ln|3e^{2x}-1|$이므로

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{6}\ln(3e-1)$ 답 **$\dfrac{1}{6}\ln(3e-1)$**

245

(1) $\dfrac{2x^3+x-1}{x-1}=2x^2+2x+3+\dfrac{2}{x-1}$이므로

$$\int \frac{2x^3+x-1}{x-1}dx$$
$$=\int\left(2x^2+2x+3+\frac{2}{x-1}\right)dx$$
$$=\mathbf{\frac{2}{3}x^3+x^2+3x+2\ln|x-1|+C}$$

(2) $\dfrac{7x+4}{(x-3)(x+2)}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x+2}$ (A, B는 상수)

로 놓으면

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$
$$=\frac{(A+B)x+(2A-3B)}{(x-3)(x+2)}$$

즉, $A+B=7$, $2A-3B=4$이므로

$A=5$, $B=2$

$$\therefore \int \frac{7x+4}{(x-3)(x+2)}dx$$
$$=\int\left(\frac{5}{x-3}+\frac{2}{x+2}\right)dx$$
$$=5\int\frac{1}{x-3}dx+2\int\frac{1}{x+2}dx$$
$$=\mathbf{5\ln|x-3|+2\ln|x+2|+C}$$

(3) $\dfrac{2-x^2}{x^3+2x}=\dfrac{2-x^2}{x(x^2+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+2}$

(A, B, C는 상수)로 놓으면

$$\frac{2-x^2}{x^3+2x}=\frac{A(x^2+2)+(Bx+C)x}{x(x^2+2)}$$
$$=\frac{(A+B)x^2+Cx+2A}{x(x^2+2)}$$

즉, $A+B=-1$, $C=0$, $2A=2$이므로

$A=1$, $B=-2$, $C=0$

$$\therefore \int \frac{2-x^2}{x^3+2x}\,dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2x}{x^2+2}\right)dx$$

$$=\int\frac{1}{x}\,dx-\int\frac{2x}{x^2+2}\,dx$$

$$=\int\frac{1}{x}\,dx-\int\frac{(x^2+2)'}{x^2+2}\,dx$$

$$=\ln|x|-\ln|x^2+2|+C$$

$$=\boldsymbol{\ln\left|\frac{x}{x^2+2}\right|+C}$$

답 **풀이 참조**

246

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}=\frac{x+1}{(x-3)(x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-1}$$

(A, B는 상수)로 놓으면

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}=\frac{A(x-1)+B(x-3)}{(x-3)(x-1)}$$

$$=\frac{(A+B)x-(A+3B)}{(x-3)(x-1)}$$

즉, $A+B=1$, $A+3B=-1$이므로

$A=2$, $B=-1$

$$\therefore f(x)=\int\frac{x+1}{x^2-4x+3}\,dx$$

$$=\int\left(\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$=2\int\frac{1}{x-3}\,dx-\int\frac{1}{x-1}\,dx$$

$$=2\ln|x-3|-\ln|x-1|+C$$

$$=\ln\left|\frac{(x-3)^2}{x-1}\right|+C$$

이때 $f(2)=0$이므로

$\ln 1+C=0$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\ln\left|\dfrac{(x-3)^2}{x-1}\right|$이므로

$f(4)=\ln\dfrac{1}{3}=-\ln 3$

답 $\boldsymbol{-\ln 3}$

247

답 (1) $\boldsymbol{x,\ \sin x,\ 1,\ -\cos x,\ -x\cos x,\ -\cos x,}$ $\boldsymbol{-x\cos x+\sin x+C}$

(2) $\boldsymbol{x+3,\ e^x,\ 1,\ e^x,\ (x+3)e^x,\ e^x,}$ $\boldsymbol{(x+2)e^x+C}$

(3) $\boldsymbol{\ln x,\ 2x,\ \frac{1}{x},\ x^2,\ x^2\ln x,\ x,}$

$\boldsymbol{x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2+C}$

248

(1) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=3x^2$으로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x^3$

$$\therefore \int 3x^2\ln x\,dx=(\ln x)\times x^3-\int\frac{1}{x}\times x^3\,dx$$

$$=x^3\ln x-\int x^2\,dx$$

$$=\boldsymbol{x^3\ln x-\frac{1}{3}x^3+C}$$

(2) $f(x)=x$, $g'(x)=e^{3x}$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\dfrac{1}{3}e^{3x}$

$$\therefore \int xe^{3x}\,dx=x\times\frac{1}{3}e^{3x}-\int 1\times\frac{1}{3}e^{3x}\,dx$$

$$=\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}+C}$$

(3) $f(x)=x$, $g'(x)=\sin 2x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x$

$$\therefore \int x\sin 2x\,dx$$

$$=x\times\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)-\int 1\times\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C}$$

답 **풀이 참조**

249

(1) $f(x)=x$, $g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-e^{-x}$

$\therefore \int xe^{-x}\,dx$

$=x\times(-e^{-x})-\int 1\times(-e^{-x})\,dx$

$=-xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx$

$=-xe^{-x}-e^{-x}+C$

$=\boldsymbol{-(x+1)e^{-x}+C}$

(2) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x^3$으로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{4}x^4$

$\therefore \int x^3 \ln x\,dx$

$=(\ln x)\times\frac{1}{4}x^4-\int \frac{1}{x}\times\frac{1}{4}x^4\,dx$

$=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int x^3\,dx$

$=\boldsymbol{\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+C}$

(3) $f(x)=2x+1$, $g'(x)=\sin 2x$로 놓으면

$f'(x)=2$, $g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$

$\therefore \int (2x+1)\sin 2x\,dx$

$=(2x+1)\times\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)$

$\qquad -\int 2\times\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$

$=-\frac{1}{2}(2x+1)\cos 2x+\int \cos 2x\,dx$

$=\boldsymbol{-\frac{1}{2}(2x+1)\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+C}$

답 풀이 참조

250

$f(x)=x$, $g'(x)=\cos 2x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$

$\therefore f(x)=\int x\cos 2x\,dx$

$=x\times\frac{1}{2}\sin 2x-\int 1\times\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$

$=\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx$

$=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$

이때 $f(0)=\frac{1}{4}$이므로

$\frac{1}{4}+C=\frac{1}{4} \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x$이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}\times 1+\frac{1}{4}\times 0=\frac{\pi}{8}$

답 $\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$

251

(1) $f(x)=x^2$, $g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=-e^{-x}$이므로

$\int x^2e^{-x}\,dx=x^2\times(-e^{-x})-\int 2x\times(-e^{-x})dx$

$=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$

한편, $\int xe^{-x}\,dx$에서

$u(x)=x$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-e^{-x}$이므로

$\int xe^{-x}\,dx=x\times(-e^{-x})-\int 1\times(-e^{-x})\,dx$

$=-xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx$

$=-xe^{-x}-e^{-x}+C_1 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int x^2e^{-x}\,dx$

$=-x^2e^{-x}+2(-xe^{-x}-e^{-x}+C_1)$

$=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+2C_1$

$=\boldsymbol{-(x^2+2x+2)e^{-x}+C}$

(2) $f(x)=(\ln x)^2$, $g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=\frac{2}{x}\ln x$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2$이므로

$\int x(\ln x)^2\,dx$

$=(\ln x)^2\times\frac{1}{2}x^2-\int \frac{2}{x}\ln x\times\frac{1}{2}x^2\,dx$

$=\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2-\int x\ln x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$

한편, $\int x\ln x\,dx$에서

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=x$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=\frac{1}{2}x^2$이므로

$$\int x \ln x\, dx=(\ln x)\times\frac{1}{2}x^2-\int \frac{1}{x}\times\frac{1}{2}x^2\, dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2 \ln x-\frac{1}{2}\int x\, dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2 \ln x-\frac{1}{4}x^2+C_1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int x(\ln x)^2\, dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2-\left(\frac{1}{2}x^2 \ln x-\frac{1}{4}x^2+C_1\right)$$
$$=\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2-\frac{1}{2}x^2 \ln x+\frac{1}{4}x^2-C_1$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}x^2\{2(\ln x)^2-2 \ln x+1\}+C}$$

(3) $f(x)=x^2$, $g'(x)=\cos 2x$로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$이므로

$$\int x^2 \cos 2x\, dx$$
$$=x^2\times\frac{1}{2}\sin 2x-\int 2x\times\frac{1}{2}\sin 2x\, dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2 \sin 2x-\int x \sin 2x\, dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, $\int x \sin 2x\, dx$에서

$u(x)=x$, $v'(x)=\sin 2x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$이므로

$$\int x \sin 2x\, dx$$
$$=x\times\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)-\int 1\times\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) dx$$
$$=-\frac{1}{2}x \cos 2x+\frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$$
$$=-\frac{1}{2}x \cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C_1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int x^2 \cos 2x\, dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2 \sin 2x-\left(-\frac{1}{2}x \cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C_1\right)$$
$$=\frac{1}{2}x^2 \sin 2x+\frac{1}{2}x \cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x-C_1$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}(2x^2-1) \sin 2x+\frac{1}{2}x \cos 2x+C}$$

(4) $f(x)=\sin 3x$, $g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=3\cos 3x$, $g(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int e^{-x} \sin 3x\, dx$$
$$=\sin 3x\times(-e^{-x})-\int 3\cos 3x\times(-e^{-x})dx$$
$$=-e^{-x}\sin 3x+3\int e^{-x}\cos 3x\, dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, $\int e^{-x}\cos 3x\, dx$에서

$u(x)=\cos 3x$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=-3\sin 3x$, $v(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int e^{-x}\cos 3x\, dx$$
$$=\cos 3x\times(-e^{-x})-\int(-3\sin 3x)\times(-e^{-x})dx$$
$$=-e^{-x}\cos 3x-3\int e^{-x}\sin 3x\, dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int e^{-x}\sin 3x\, dx$$
$$=-e^{-x}\sin 3x+3\left(-e^{-x}\cos 3x-3\int e^{-x}\sin 3x\, dx\right)$$
$$=-e^{-x}\sin 3x-3e^{-x}\cos 3x-9\int e^{-x}\sin 3x\, dx$$

정리하면

$$10\int e^{-x}\sin 3x\, dx$$
$$=-e^{-x}\sin 3x-3e^{-x}\cos 3x$$
$$\therefore \int e^{-x}\sin 3x\, dx$$
$$=\frac{1}{10}(-e^{-x}\sin 3x-3e^{-x}\cos 3x)+C$$
$$=\boldsymbol{-\frac{1}{10}e^{-x}(\sin 3x+3\cos 3x)+C}$$

답 풀이 참조

252

$f(x)=\int (\ln x)^2\, dx$에서

$u(x)=(\ln x)^2$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{2}{x}\ln x$, $v(x)=x$이므로

$$f(x)=\int(\ln x)^2dx$$
$$=(\ln x)^2\times x-\int\frac{2}{x}\ln x\times x\,dx$$
$$=x(\ln x)^2-2\int\ln x\,dx \quad\cdots\cdots ㉠$$

한편, $\int\ln x\,dx$에서

$p(x)=\ln x$, $q'(x)=1$로 놓으면

$p'(x)=\frac{1}{x}$, $q(x)=x$이므로

$$\int\ln x\,dx=(\ln x)\times x-\int\frac{1}{x}\times x\,dx$$
$$=x\ln x-\int dx$$
$$=x\ln x-x+C_1 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=\int(\ln x)^2dx$$
$$=x(\ln x)^2-2(x\ln x-x+C_1)$$
$$=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$$

이때 $f(1)=2$이므로

$2+C=2 \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$이므로

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\times(-1)^2-\frac{2}{e}\times(-1)+\frac{2}{e}=\frac{5}{e}$$

답 $\boldsymbol{\frac{5}{e}}$

(2) $\int_1^4(\sqrt{x}-2)^2dx$

$$=\int_1^4(x-4\sqrt{x}+4)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+4x\right]_1^4$$
$$=\left(8-\frac{64}{3}+16\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{8}{3}+4\right)=\boldsymbol{\frac{5}{6}}$$

(3) $\frac{x+3}{x^2-1}=\frac{x+3}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$

(A, B는 상수)로 놓으면

$$\frac{x+3}{x^2-1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{(A+B)x+(A-B)}{(x-1)(x+1)}$$

위 식은 x에 대한 항등식이므로

$A+B=1$, $A-B=3$

두 식을 연립하여 풀면

$A=2$, $B=-1$

$$\therefore \int_2^3\frac{x+3}{x^2-1}dx$$
$$=\int_2^3\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\left[2\ln|x-1|-\ln|x+1|\right]_2^3$$
$$=(2\ln 2-\ln 4)-(2\ln 1-\ln 3)$$
$$=\boldsymbol{\ln 3}$$

답 **풀이 참조**

253

(1) $\int_1^e\frac{3x^3-2x^2+1}{x}dx$

$$=\int_1^e\left(3x^2-2x+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\left[x^3-x^2+\ln|x|\right]_1^e$$
$$=(e^3-e^2+\ln e)-(1-1+\ln 1)$$
$$=\boldsymbol{e^3-e^2+1}$$

254

$$\int_1^4\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int_1^4(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4$$
$$=\left(\frac{16}{3}+4\right)-\left(\frac{2}{3}+2\right)=\frac{20}{3}$$

답 $\boldsymbol{\frac{20}{3}}$

255

(1) $\int_0^1 (e^x+e^{-x})^2\,dx$

$=\int_0^1 (e^{2x}+2+e^{-2x})\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1$

$=\left(\frac{1}{2}e^2+2-\frac{1}{2}e^{-2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$

$=\boldsymbol{\frac{1}{2}e^2+2-\frac{1}{2e^2}}$

(2) $\int_0^1 (2^x-1)(4^x+2^x+1)dx$

$=\int_0^1 (8^x-1)dx=\left[\frac{8^x}{\ln 8}-x\right]_0^1$

$=\left(\frac{8}{\ln 8}-1\right)-\frac{1}{\ln 8}=\boldsymbol{\frac{7}{3\ln 2}-1}$

(3) $\int_0^{\ln 3}\frac{1}{1-e^x}\,dx+\int_{\ln 3}^0\frac{e^{3t}}{1-e^t}\,dt$

$=\int_0^{\ln 3}\frac{1}{1-e^x}\,dx-\int_0^{\ln 3}\frac{e^{3x}}{1-e^x}\,dx$

$=\int_0^{\ln 3}\left(\frac{1}{1-e^x}-\frac{e^{3x}}{1-e^x}\right)dx$

$=\int_0^{\ln 3}\frac{1-e^{3x}}{1-e^x}\,dx$

$=\int_0^{\ln 3}\frac{(1-e^x)(1+e^x+e^{2x})}{1-e^x}\,dx$

$=\int_0^{\ln 3}(1+e^x+e^{2x})dx$

$=\left[x+e^x+\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 3}=\left(\ln 3+3+\frac{9}{2}\right)-\frac{3}{2}$

$=\boldsymbol{6+\ln 3}$

(4) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos x+1)^2\,dx+\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-1)^2\,dx$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos x+1)^2\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos x-1)^2\,dx$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\{(\cos x+1)^2-(\cos x-1)^2\}dx$

$=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,dx=4\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$=4\left(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2}\right)=\boldsymbol{-4}$

답 풀이 참조

256

$\int_0^k\frac{e^{2x}-x^2}{e^x+x}\,dx=\int_0^k\frac{(e^x+x)(e^x-x)}{e^x+x}\,dx$

$=\int_0^k(e^x-x)dx$

$=\left[e^x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^k$

$=e^k-\frac{1}{2}k^2-1$

이때 $\int_0^k\frac{e^{2x}-x^2}{e^x+x}\,dx=e^2-3$이므로

$e^k-\frac{1}{2}k^2-1=e^2-3$

$\therefore k=2$

답 2

257

$\int_{-1}^{\pi}f(x)\,dx=\int_{-1}^0 f(x)\,dx+\int_0^{\pi}f(x)\,dx$

$=\int_{-1}^0 e^{-x}\,dx+\int_0^{\pi}\cos x\,dx$

$=\left[-e^{-x}\right]_{-1}^0+\left[\sin x\right]_0^{\pi}$

$=(-1+e)+(\sin\pi-\sin 0)$

$=e-1$

답 $\boldsymbol{e-1}$

258

(1) $\cos x=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0\le x\le\pi$)

따라서 $|\cos x|=\begin{cases}\cos x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)\\ -\cos x & \left(\frac{\pi}{2}\le x\le\pi\right)\end{cases}$이므로

$\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)\,dx$

$=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$=\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)+\left(-\sin\pi+\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$=\boldsymbol{2}$

(2) $e^x-1=0$에서 $e^x=1$ $\quad\therefore x=0$

따라서 $|e^x-1|=\begin{cases}-e^x+1 & (x\le 0)\\ e^x-1 & (x\ge 0)\end{cases}$이므로

$$\int_{-1}^{2}|e^x-1|dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(-e^x+1)dx+\int_{0}^{2}(e^x-1)dx$$
$$=\Big[-e^x+x\Big]_{-1}^{0}+\Big[e^x-x\Big]_{0}^{2}$$
$$=\{-1-(-e^{-1}-1)\}+\{(e^2-2)-1\}$$
$$=\boldsymbol{e^2+\frac{1}{e}-3}$$

(3) $\sqrt{|x-1|}=0$에서 $x=1$

따라서 $\sqrt{|x-1|}=\begin{cases}\sqrt{1-x} & (x\le 1)\\ \sqrt{x-1} & (x\ge 1)\end{cases}$이므로

$$\int_{0}^{5}\sqrt{|x-1|}\,dx$$
$$=\int_{0}^{1}\sqrt{1-x}\,dx+\int_{1}^{5}\sqrt{x-1}\,dx$$
$$=\Big[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\Big]_{0}^{1}+\Big[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\Big]_{1}^{5}$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{16}{3}=\mathbf{6}$$

답 풀이 참조

259

(1) $f(x)=\cos x$, $g(x)=x\cos x$라 하면

$f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$,

$g(-x)=-x\cos(-x)=-x\cos x=-g(x)$

이므로 $f(x)$는 우함수, $g(x)$는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-x\cos x)\,dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx$$
$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx-0=2\Big[\sin x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\mathbf{2}$$

(2) $f(x)=3^x+3^{-x}$, $g(x)=4^x-4^{-x}$이라 하면

$f(-x)=3^{-x}+3^x=f(x)$,

$g(-x)=4^{-x}-4^x=-(4^x-4^{-x})=-g(x)$

이므로 $f(x)$는 우함수, $g(x)$는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-1}^{1}(3^x+4^x+3^{-x}-4^{-x})dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(3^x+3^{-x})dx+\int_{-1}^{1}(4^x-4^{-x})dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(3^x+3^{-x})dx+0$$
$$=2\Big[\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{3^{-x}}{\ln 3}\Big]_{0}^{1}$$
$$=2\times\frac{8}{3\ln 3}=\boldsymbol{\frac{16}{3\ln 3}}$$

(3) $f(x)=\cos x$, $g(x)=x\sin^2 x+x^3\cos x$라 하면

$f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$,

$g(-x)=-x\sin^2(-x)+(-x)^3\cos(-x)$

$\quad=-x\sin^2 x-x^3\cos x=-g(x)$

이므로 $f(x)$는 우함수, $g(x)$는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(\cos x+x\sin^2 x+x^3\cos x)\,dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,dx$$
$$+\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(x\sin^2 x+x^3\cos x)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,dx+0$$
$$=2\Big[\sin x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{6}}=2\times\frac{1}{2}=\mathbf{1}$$

(4) $f(x)=e^x+e^{-x}$이라 하면

$f(-x)=e^{-x}+e^x=f(x)$

이므로 $f(x)$는 우함수이다.

$$\therefore \int_{-1}^{0}(e^x+e^{-x})dx+\int_{0}^{1}(e^x+e^{-x})dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(e^x+e^{-x})dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(e^x+e^{-x})dx$$
$$=2\Big[e^x-e^{-x}\Big]_{0}^{1}=\boldsymbol{2\left(e-\frac{1}{e}\right)}$$

답 풀이 참조

260

$f(x)=|\sin 3x|$로 놓으면 $f(x)$는 주기가 $\frac{\pi}{3}$인 주기함수이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} |\sin 3x|\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} |\sin 3x|\,dx$$

$$=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} |\sin 3x|\,dx$$

$$\therefore \int_0^{\pi} |\sin 3x|\,dx=3\int_0^{\frac{\pi}{3}} |\sin 3x|\,dx$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x\,dx$$

$$=3\left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=3\left(-\frac{1}{3}\cos\pi+\frac{1}{3}\cos 0\right)$$

$$=3\times\frac{2}{3}=2$$

답 2

261

함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이므로

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_1^3 f(x)\,dx=\cdots=\int_7^9 f(x)\,dx$$

이때 $-1\le x\le 1$에서

$f(-x)=e^{-x}+e^{x}=f(x)$

이므로 $f(x)$는 우함수이다. 즉,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(e^x+e^{-x})dx$$

$$=2\int_0^1 (e^x+e^{-x})dx$$

$$=2\left[e^x-e^{-x}\right]_0^1=2\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

$$\therefore \int_{-1}^{9} f(x)\,dx=5\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

$$=5\times 2\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

$$=10\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

답 $10\left(e-\frac{1}{e}\right)$

262

$\sqrt{2-x}=t$로 놓고 양변을 제곱하면 $2-x=t^2$이므로

$\boxed{-1}=2t\dfrac{dt}{dx}$

$x=-2$일 때 $t=\boxed{2}$, $x=1$일 때 $t=\boxed{1}$이므로

$$\int_{-2}^{1}\frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx=\int_{\boxed{2}}^{\boxed{1}}\frac{1}{t}\times(\boxed{-2t})dt$$

$$=\int_{\boxed{1}}^{\boxed{2}}\boxed{2}\,dt$$

$$=\Big[\boxed{2t}\Big]_{\boxed{1}}^{\boxed{2}}=\boxed{2}$$

답 풀이 참조

263

$x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\dfrac{dx}{d\theta}=\boxed{\sec^2\theta}$이고

$x=0$일 때 $\theta=\boxed{0}$, $x=1$일 때 $\theta=\boxed{\frac{\pi}{4}}$이므로

$$\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\,dx=\int_{\boxed{0}}^{\boxed{\frac{\pi}{4}}}\frac{\boxed{\sec^2\theta}}{\tan^2\theta+1}\,d\theta$$

$$=\int_{\boxed{0}}^{\boxed{\frac{\pi}{4}}}\frac{\boxed{\sec^2\theta}}{\sec^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_{\boxed{0}}^{\boxed{\frac{\pi}{4}}}\boxed{1}\,d\theta$$

$$=\Big[\boxed{\theta}\Big]_{\boxed{0}}^{\boxed{\frac{\pi}{4}}}=\boxed{\frac{\pi}{4}}$$

답 풀이 참조

264

답 $\ln x,\ \frac{1}{x},\ \ln x,\ \frac{1}{x},\ e,\ x,\ 1$

265

(1) $\sqrt{x+2}=t$로 놓고 양변을 제곱하면

$x+2=t^2$이므로 $1=2t\dfrac{dt}{dx}$, $x=t^2-2$

$x=2$일 때 $t=2$, $x=7$일 때 $t=3$이므로

$$\int_2^7\frac{x}{\sqrt{x+2}}\,dx=\int_2^3\frac{t^2-2}{t}\times 2t\,dt$$

$$=2\int_2^3(t^2-2)dt$$

$$=2\left[\frac{1}{3}t^3-2t\right]_2^3$$

$$=2\left\{(9-6)-\left(\frac{8}{3}-4\right)\right\}$$

$$=\frac{26}{3}$$

(2) $x^2+2x+5=t$로 놓으면 $2x+2=\dfrac{dt}{dx}$

$x=-1$일 때 $t=4$, $x=1$일 때 $t=8$이므로

$$\int_{-1}^{1}\frac{x+1}{x^2+2x+5}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_{4}^{8}\frac{1}{t}dt$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\ln|t|\Big]_4^8$$
$$=\frac{1}{2}(\ln 8-\ln 4)=\mathbf{\frac{1}{2}\ln 2}$$

(3) $e^x=t$로 놓으면 $e^x=\dfrac{dt}{dx}$

$x=\ln 2$일 때 $t=2$, $x=1$일 때 $t=e$이므로

$$\int_{\ln 2}^{1}\frac{1}{e^x-e^{-x}}dx$$
$$=\int_{\ln 2}^{1}\frac{e^x}{e^{2x}-1}dx=\int_{2}^{e}\frac{1}{t^2-1}dt$$
$$=\int_{2}^{e}\frac{1}{(t-1)(t+1)}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_{2}^{e}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\ln|t-1|-\ln|t+1|\Big]_2^e$$
$$=\frac{1}{2}[\{\ln(e-1)-\ln(e+1)\}-(\ln 1-\ln 3)]$$
$$=\mathbf{\frac{1}{2}\ln\frac{3(e-1)}{e+1}}$$

(4) $\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{1}^{e}\ln x^{\frac{1}{x}}dx=\int_{1}^{e}\frac{1}{x}\ln x\,dx$$
$$=\int_{0}^{1}t\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

(5) $\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\dfrac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{6}$일 때 $t=\dfrac{1}{2}$이므로

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx=\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-t^2)dt$$
$$=\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{24}=\mathbf{\frac{11}{24}}$$

(6) $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x\sin x}{1+\cos x}dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{1+\cos x}dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\sin x\,dx$$

$1-\cos x=t$로 놓으면 $\sin x=\dfrac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\sin x\,dx$$
$$=\int_{0}^{1}t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

답 풀이 참조

266

(1) $x=3\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\dfrac{dx}{d\theta}=3\cos\theta$이고

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=3$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$$\int_{0}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9(1-\sin^2\theta)}\times 3\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9\cos^2\theta}\times 3\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}9\cos^2\theta\,d\theta=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}9\times\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$
$$=\frac{9}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta$$
$$=\frac{9}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{9}{4}\pi$$

(2) $x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$이고

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\frac{1}{2}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\times\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta}}\times\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos\theta}\times\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$$

(3) $x=3\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=3\sec^2\theta$이고

$x=-\sqrt{3}$일 때 $\theta=-\frac{\pi}{6}$, $x=\sqrt{3}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+9}dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{9(\tan^2\theta+1)}\times3\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{9\sec^2\theta}\times3\sec^2\theta\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{3}d\theta$$
$$=\Big[\frac{1}{3}\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{3}\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{9}$$

답 (1) $\mathbf{\frac{9}{4}\pi}$ (2) $\mathbf{\frac{\pi}{6}}$ (3) $\mathbf{\frac{\pi}{9}}$

267

(1) $f(x)=x-1$, $g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int_0^1(x-1)e^{-x}dx$$
$$=\Big[-(x-1)e^{-x}\Big]_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx$$
$$=-1+\Big[-e^{-x}\Big]_0^1$$
$$=-1+(-e^{-1}+1)=-\frac{1}{e}$$

(2) $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x+\cos x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x+\sin x$이므로

$$\int_0^{\pi}x(\sin x+\cos x)dx$$
$$=\Big[x(-\cos x+\sin x)\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-\cos x+\sin x)dx$$
$$=\pi-\Big[-\sin x-\cos x\Big]_0^{\pi}$$
$$=\pi-(1+1)$$
$$=\pi-2$$

(3) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=\frac{1}{x^2}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=-\frac{1}{x}$이므로

$$\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{x}\ln x\Big]_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}\times\left(-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{e}+\int_1^e\frac{1}{x^2}dx$$
$$=-\frac{1}{e}+\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^e$$
$$=-\frac{1}{e}+\left(-\frac{1}{e}+1\right)$$
$$=1-\frac{2}{e}$$

답 (1) $\mathbf{-\frac{1}{e}}$ (2) $\mathbf{\pi-2}$ (3) $\mathbf{1-\frac{2}{e}}$

268

$f(x)=\cos x$, $g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=-\sin x$, $g(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\cos x\,dx$$
$$=\Big[-e^{-x}\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\sin x)\times(-e^{-x})dx$$
$$=1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\sin x\,dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin x\,dx$에서

$u(x)=\sin x$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=\cos x$, $v(x)=-e^{-x}$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin x\,dx$

$=\left[-e^{-x}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\times(-e^{-x})dx$

$=-e^{-\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x\,dx$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x\,dx$

$=1-\left(-e^{-\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x\,dx\right)$

$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x\,dx=1+e^{-\frac{\pi}{2}}$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x\,dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이므로

$ab=\frac{1}{4}$ **답** $\mathbf{\frac{1}{4}}$

269

(1) $\int_1^e f(t)dt=k$ (k는 상수) ······ ㉠

로 놓으면

$f(x)=\ln x+k$

$f(t)=\ln t+k$를 ㉠에 대입하면

$\int_1^e(\ln t+k)dt$

$=\left[t\ln t-t+kt\right]_1^e$ ← $\int\ln x\,dx=x\ln x-x+C$

$=(e\ln e-e+ek)-(\ln 1-1+k)$

$=ek+1-k$

즉, $ek+1-k=k$이므로 $k=\frac{1}{2-e}$

$\therefore f(x)=\ln x+\frac{1}{2-e}$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\sin t\,dt=k$ (k는 상수) ······ ㉠

로 놓으면

$f(x)=\cos x+k$

$f(t)=\cos t+k$를 ㉠에 대입하면

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos t+k)\sin t\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos t\sin t+k\sin t)dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}\sin 2t+k\sin t\right)dt$

$=\left[-\frac{1}{4}\cos 2t-k\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=-\frac{1}{\sqrt{2}}k-\left(-\frac{1}{4}-k\right)$

$=-\frac{1}{\sqrt{2}}k+\frac{1}{4}+k$

즉, $-\frac{1}{\sqrt{2}}k+\frac{1}{4}+k=k$이므로

$k=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\therefore f(x)=\cos x+\frac{\sqrt{2}}{4}$

답 (1) $\mathbf{f(x)=\ln x+\frac{1}{2-e}}$

(2) $\mathbf{f(x)=\cos x+\frac{\sqrt{2}}{4}}$

270

$\int_0^1 f'(t)dt=k$ (k는 상수) ······ ㉠

로 놓으면

$f(x)=e^x+3x+k$

$\therefore f'(x)=e^x+3$

$f'(t)=e^t+3$을 ㉠에 대입하면

$\int_0^1(e^t+3)dt=\left[e^t+3t\right]_0^1$

$=(e+3)-1=e+2$

즉, $k=e+2$이므로

$f(x)=e^x+3x+e+2$

$\therefore f(1)=e+3+e+2$

$=2e+5$ **답** $\mathbf{2e+5}$

271

$\int_0^x tf(t)dt=e^x-xe^x+3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)=e^x-(e^x+xe^x)=-xe^x$

따라서 $f(x)=-e^x$이므로

$f(3)=-e^3$ **답** $\boldsymbol{-e^3}$

272

$\int_{\frac{\pi}{4}}^x f(t)dt=\sin x-a\cos x+\sqrt{2}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\cos x+a\sin x$

또, $\int_{\frac{\pi}{4}}^x f(t)dt=\sin x-a\cos x+\sqrt{2}$의 양변에

$x=\frac{\pi}{4}$를 대입하면

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(t)dt=\sin\frac{\pi}{4}-a\cos\frac{\pi}{4}+\sqrt{2}$

$0=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}a+\sqrt{2}$ $\quad\therefore a=3$

따라서 $f(x)=\cos x+3\sin x$이므로

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\cos\frac{3}{2}\pi+3\sin\frac{3}{2}\pi=-3$ **답** $\boldsymbol{-3}$

273

$\int_0^x (x-t)f(t)dt=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$이므로

$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=e^x+x^2-x-1$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=e^x+2x-1$

$\therefore \int_0^x f(t)dt=e^x+2x-1$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=e^x+2$

$\therefore f(1)=e+2$ **답** $\boldsymbol{e+2}$

274

$\int_0^x (x-t)f'(t)dt=x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt$

이므로

$x\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x tf'(t)dt=\cos 2x-x^2-1$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f'(t)dt+xf'(x)-xf'(x)=-2\sin 2x-2x$

즉, $\int_0^x f'(t)dt=-2\sin 2x-2x$이므로

$\Big[f(t)\Big]_0^x=-2\sin 2x-2x$

$f(x)-f(0)=-2\sin 2x-2x$

이때 $f(0)=2$이므로

$f(x)=-2\sin 2x-2x+2$

답 $\boldsymbol{f(x)=-2\sin 2x-2x+2}$

275

$f(x)=\int_0^x (1+\sin t)\cos t\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(1+\sin x)\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ $(\because 0\le x\le\pi)$

$0\le x\le\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin t)\cos t\,dt$

$1+\sin t=u$로 놓으면 $\cos t=\dfrac{du}{dt}$이고

$t=0$일 때 $u=1$, $t=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $u=2$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos t\,dt$$
$$=\int_1^2 u\,du$$
$$=\left[\frac{1}{2}u^2\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{2}(4-1)=\frac{3}{2}$$

답 $\dfrac{3}{2}$

276

$f(x)=\int_1^x \sqrt{t}(t-2)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\sqrt{x}(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because x>1$)

$x>1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 극솟값은

$$f(2)=\int_1^2 \sqrt{t}(t-2)dt$$
$$=\int_1^2 (t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}})dt$$
$$=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$$
$$=\left(\frac{2}{5}\times 2^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}\times 2^{\frac{3}{2}}\right)-\left(\frac{2}{5}-\frac{4}{3}\right)$$
$$=\frac{14-16\sqrt{2}}{15}$$

답 **극솟값: $\dfrac{14-16\sqrt{2}}{15}$**

277

(1) $f(t)=e^t t^3$으로 놓고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^3-1}\int_1^{x^2} f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^3-1}\Big[F(t)\Big]_1^{x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x^3-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\times\frac{x^2-1}{x^3-1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\times\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\right\}$$
$$=\frac{2}{3}F'(1)$$

이때 $F'(t)=f(t)$이므로 구하는 극한값은

$$\frac{2}{3}F'(1)=\frac{2}{3}f(1)=\frac{2}{3}e$$

(2) $f(t)=(\sin t+1)^2$으로 놓고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to \pi}\frac{1}{x^2-\pi^2}\int_\pi^{x} f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to \pi}\frac{1}{x^2-\pi^2}\Big[F(t)\Big]_\pi^{x}=\lim_{x\to \pi}\frac{F(x)-F(\pi)}{x^2-\pi^2}$$
$$=\lim_{x\to \pi}\left\{\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}\times\frac{1}{x+\pi}\right\}=\frac{1}{2\pi}F'(\pi)$$

이때 $F'(t)=f(t)$이므로 구하는 극한값은

$$\frac{1}{2\pi}F'(\pi)=\frac{1}{2\pi}f(\pi)=\frac{1}{2\pi}$$

답 (1) $\dfrac{2}{3}e$ (2) $\dfrac{1}{2\pi}$

278

$f(x)=x\ln x^2$으로 놓고 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{e^2-h}^{e^2+h} f(x)\,dx$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_{e^2-h}^{e^2+h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(e^2+h)-F(e^2-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(e^2+h)-F(e^2)+F(e^2)-F(e^2-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(e^2+h)-F(e^2)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{F(e^2-h)-F(e^2)}{-h}$$
$$=F'(e^2)+F'(e^2)=2F'(e^2)$$

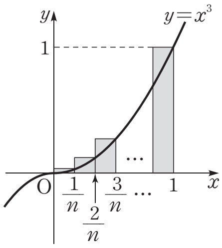
이때 $F'(x)=f(x)$이므로

$$2F'(e^2)=2f(e^2)$$
$$=2e^2\ln e^4$$
$$=8e^2$$

답 $8e^2$

279

오른쪽 그림과 같이 닫힌구간 $[0,\ 1]$을 n등분 하면 양 끝점과 각 분점의 x좌표는 왼쪽부터 차례로



$$0=\frac{0}{n},\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \cdots,\ \frac{n}{n}=1$$

이때 n등분 한 각 구간을 가로의 길이로, 구간의 오른쪽 끝에서의 함숫값을 세로의 길이로 하는 n개의 직사각형을 만들면 각 직사각형의 세로의 길이는

$$\left(\frac{1}{n}\right)^3,\ \left(\frac{2}{n}\right)^3,\ \left(\frac{3}{n}\right)^3,\ \cdots,\ \left(\frac{n}{n}\right)^3$$

이들 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n}\times\left(\frac{2}{n}\right)^3+\frac{1}{n}\times\left(\frac{3}{n}\right)^3+\cdots+\frac{1}{n}\times\left(\frac{n}{n}\right)^3$$
$$=\frac{1}{n^4}(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)$$
$$=\frac{1}{n^4}\times\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$
$$=\frac{(n+1)^2}{4n^2}$$

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2}=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

280

정사각뿔의 높이를 n등분 하여 만들어진 직육면체의 밑넓이는 위에서부터 차례로

$$\left(\frac{a}{n}\right)^2,\ \left(\frac{2a}{n}\right)^2,\ \left(\frac{3a}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \left\{\frac{(n-1)a}{n}\right\}^2$$

이고, 높이는 모두 $\frac{h}{n}$이므로 $(n-1)$개의 직육면체의 부피의 합을 V_n이라 하면

$$V_n=\left(\frac{a}{n}\right)^2\times\frac{h}{n}+\left(\frac{2a}{n}\right)^2\times\frac{h}{n}+\left(\frac{3a}{n}\right)^2\times\frac{h}{n}+\cdots+\left\{\frac{(n-1)a}{n}\right\}^2\times\frac{h}{n}$$
$$=\frac{a^2h}{n^3}\{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\}$$
$$=\frac{a^2h}{n^3}\times\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{1}{6}a^2h\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

따라서 구하는 부피 V는

$$V=\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}a^2h\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{6}a^2h\times2=\frac{1}{3}a^2h$$

답 $\frac{1}{3}a^2h$

281

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\cos\frac{k\pi}{n}=\pi\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\times\frac{1}{n}$

$\frac{k}{n}$를 x로, $\frac{1}{n}$을 dx로 바꾸면

$k=1$일 때 $n\to\infty$이면 $x=0$, $k=n$일 때 $x=1$이므로 적분 구간은 $[0,\ 1]$이다.

$\therefore$ (주어진 식)$\displaystyle=\pi\int_0^1 x\cos\pi x\,dx$

이때 $f(x)=x$, $g'(x)=\cos\pi x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\frac{1}{\pi}\sin\pi x$이므로

$$\pi\int_0^1 x\cos\pi x\,dx$$
$$=\pi\left[x\times\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_0^1-\pi\int_0^1\frac{1}{\pi}\sin\pi x\,dx$$
$$=0-\left[\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1=-\frac{2}{\pi}$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{n+k}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{n}$$

$1+\frac{k}{n}$를 x로, $\frac{1}{n}$을 dx로 바꾸면

$k=1$일 때 $n\to\infty$이면 $x=1$, $k=n$일 때 $x=2$이므로 적분 구간은 $[1,\ 2]$이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{n}$

$=\int_{1}^{2}\ln x\,dx$

$=\Big[x\ln x\Big]_{1}^{2}-\int_{1}^{2}dx$

$=2\ln 2-\Big[x\Big]_{1}^{2}$

$=2\ln 2-1$

답 (1) $-\frac{2}{\pi}$ (2) $2\ln 2-1$

282

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{2}{n}}+e^{\frac{4}{n}}+e^{\frac{6}{n}}+\cdots+e^{\frac{2n}{n}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k}{n}}$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k}{n}}\times\frac{2}{n}$

$\frac{2k}{n}$를 x로, $\frac{2}{n}$를 dx로 바꾸면

$k=1$일 때 $n\to\infty$이면 $x=0$, $k=n$일 때 $x=2$이므로 적분 구간은 $[0, 2]$이다.

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}e^{x}\,dx$

$=\frac{1}{2}\Big[e^{x}\Big]_{0}^{2}=\frac{1}{2}(e^{2}-1)$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)\times\frac{1}{n}$

$\frac{k}{n}$를 x로, $\frac{1}{n}$을 dx로 바꾸면

$k=1$일 때 $n\to\infty$이면 $x=0$, $k=n$일 때 $x=1$이므로 적분 구간은 $[0, 1]$이다.

$\therefore$ (주어진 식)$=\int_{0}^{1}\sin\pi x\,dx$

$=\Big[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big]_{0}^{1}=\frac{2}{\pi}$

답 (1) $\frac{1}{2}(e^{2}-1)$ (2) $\frac{2}{\pi}$

283

닫힌구간 $[-1, 1]$에서 $y>0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_{-1}^{\boxed{1}}e^{x}\,dx$

$=\Big[\boxed{e^{x}}\Big]_{-1}^{\boxed{1}}=e-e^{-1}=\boxed{e-\frac{1}{e}}$

답 풀이 참조

284

$y=\ln x$에서 $x=e^{y}$이고 닫힌구간 $[2, 4]$에서 $x>0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_{\boxed{2}}^{\boxed{4}}e^{y}\,dy$

$=\Big[\boxed{e^{y}}\Big]_{\boxed{2}}^{\boxed{4}}=\boxed{e^{4}-e^{2}}$

답 풀이 참조

285

곡선 $y=\frac{2}{x}$와 직선 $y=-x+3$의 교점의 x좌표는 $\boxed{1}$, 2이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_{\boxed{1}}^{2}\left\{\left(\boxed{-x+3}\right)-\frac{2}{x}\right\}dx$

$=\Big[\boxed{-\frac{1}{2}x^{2}+3x-2\ln|x|}\Big]_{\boxed{1}}^{2}$

$=(-2+6-2\ln 2)-\left(-\frac{1}{2}+3\right)$

$=\boxed{\frac{3}{2}-2\ln 2}$

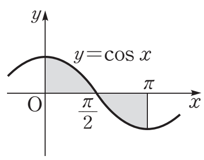
답 풀이 참조

286

(1) 곡선 $y=\cos x$와 x축의 교점의 x좌표는

$\cos x=0$에서

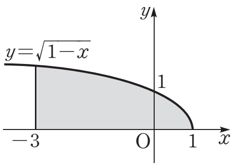
$x=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0\le x\le\pi$)



닫힌구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 $y\geq0$, 닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$에서 $y\leq0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^{\pi}|\cos x|dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx$$
$$=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2$$

(2) 곡선 $y=\sqrt{1-x}$와 x축의 교점의 x좌표는



$0=\sqrt{1-x}$에서

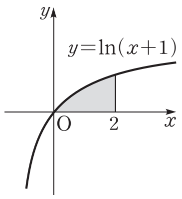
$x=1$

닫힌구간 $[-3,\ 1]$에서

$y\geq0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-3}^{1}\sqrt{1-x}\,dx=\left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_{-3}^{1}=\frac{16}{3}$$

(3) 곡선 $y=\ln(x+1)$과 x축의 교점의 x좌표는



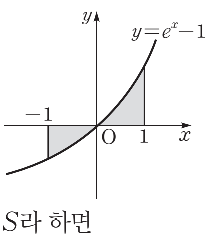
$0=\ln(x+1)$에서 $x+1=1$

$\therefore\ x=0$

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $y\geq0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^2\ln(x+1)dx$$
$$=\Big[x\ln(x+1)\Big]_0^2-\int_0^2\frac{x}{x+1}dx$$
$$=2\ln 3-\int_0^2\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=2\ln 3-\Big[x-\ln|x+1|\Big]_0^2$$
$$=2\ln 3-(2-\ln 3)$$
$$=3\ln 3-2$$

(4) 곡선 $y=e^x-1$과 x축의 교점의 x좌표는



$0=e^x-1$에서 $x=0$

닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 $y\leq0$, 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $y\geq0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{1}|e^x-1|dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(-e^x+1)dx+\int_0^1(e^x-1)dx$$
$$=\Big[-e^x+x\Big]_{-1}^{0}+\Big[e^x-x\Big]_0^1$$
$$=e+\frac{1}{e}-2$$

답 (1) **2** (2) $\mathbf{\frac{16}{3}}$ (3) $\mathbf{3\ln 3-2}$ (4) $\mathbf{e+\frac{1}{e}-2}$

287

곡선 $y=\sqrt{x}$와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^4\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{16}{3}$$

이므로

$$\int_0^a\sqrt{x}\,dx=\frac{8}{3}$$

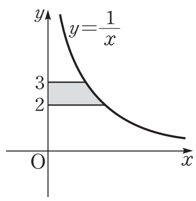
즉, $\int_0^a\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a=\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$에서

$\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}=\frac{8}{3}$, $a^{\frac{3}{2}}=4$

$a^3=16$ $\qquad\therefore\ a=\sqrt[3]{16}$ 답 $\mathbf{\sqrt[3]{16}}$

288

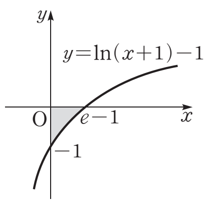
(1) $y=\frac{1}{x}$에서 $x=\frac{1}{y}$



닫힌구간 $[2,\ 3]$에서 $x>0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_2^3\frac{1}{y}dy$$
$$=\Big[\ln|y|\Big]_2^3=\ln\frac{3}{2}$$

(2) $y=\ln(x+1)-1$에서



$x=e^{y+1}-1$

곡선 $x=e^{y+1}-1$과 y축의 교점의 y좌표는

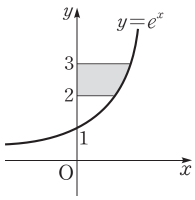
$0=e^{y+1}-1$에서 $y=-1$

닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 $x\geq 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{0}(e^{y+1}-1)dy$$
$$=\left[e^{y+1}-y\right]_{-1}^{0}$$
$$=e-2$$

(3) $y=e^x$에서 $x=\ln y$

닫힌구간 $[2,\ 3]$에서 $x>0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면



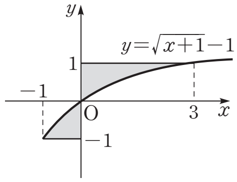
$$S=\int_{2}^{3}\ln y\,dy$$
$$=\left[y\ln y\right]_{2}^{3}-\int_{2}^{3}dy$$
$$=3\ln 3-2\ln 2-\left[y\right]_{2}^{3}$$
$$=\ln\frac{27}{4}-1$$

(4) $y=\sqrt{x+1}-1$에서

$y+1=\sqrt{x+1}\ (y\geq -1)$

$(y+1)^2=x+1$

$\therefore\ x=y^2+2y$



곡선 $x=y^2+2y$와 y축의 교점의 y좌표는 $0=y^2+2y$에서

$y=0\ (\because\ y\geq -1)$

닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 $x\leq 0$, 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $x\geq 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{1}|y^2+2y|dy$$
$$=\int_{-1}^{0}(-y^2-2y)dy+\int_{0}^{1}(y^2+2y)dy$$
$$=\left[-\frac{1}{3}y^3-y^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}y^3+y^2\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$$

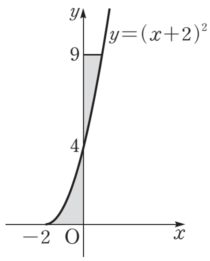
답 (1) $\mathbf{\ln\frac{3}{2}}$ (2) $\boldsymbol{e-2}$ (3) $\mathbf{\ln\frac{27}{4}-1}$ (4) **2**

289

$y=(x+2)^2$에서

$\sqrt{y}=x+2\ (\because\ x\geq -2)$

$\therefore\ x=\sqrt{y}-2$



곡선 $x=\sqrt{y}-2$와 y축의 교점의 y좌표는 $0=\sqrt{y}-2$에서

$y=4$

닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 $x\leq 0$,

닫힌구간 $[4,\ 9]$에서 $x\geq 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

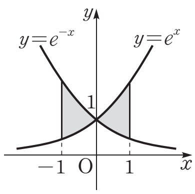
$$S=\int_{0}^{9}|\sqrt{y}-2|dy$$
$$=\int_{0}^{4}(-\sqrt{y}+2)dy+\int_{4}^{9}(\sqrt{y}-2)dy$$
$$=\left[-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+2y\right]_{0}^{4}+\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-2y\right]_{4}^{9}$$
$$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

답 $\mathbf{\frac{16}{3}}$

290

(1) 닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서

$e^x\leq e^{-x}$, 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $e^x\geq e^{-x}$이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_{-1}^{1}|e^x-e^{-x}|dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(e^{-x}-e^x)dx+\int_{0}^{1}(e^x-e^{-x})dx$$
$$=\left[-e^{-x}-e^x\right]_{-1}^{0}+\left[e^x+e^{-x}\right]_{0}^{1}$$
$$=2\left(e+\frac{1}{e}-2\right)$$

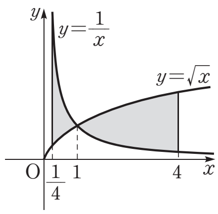
(2) 두 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 $y=\sqrt{x}$의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{x}=\sqrt{x}$에서 $x\sqrt{x}=1$

양변을 제곱하면 $x^3=1$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore\ x=1\ (\because\ x^2+x+1>0)$



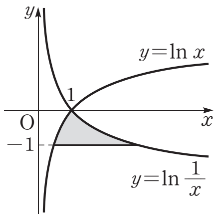
이때 닫힌구간 $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$에서 $\frac{1}{x} \geq \sqrt{x}$, 닫힌구간 $[1, 4]$에서 $\frac{1}{x} \leq \sqrt{x}$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{\frac{1}{4}}^{4}\left|\frac{1}{x}-\sqrt{x}\right|dx$$
$$=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(\frac{1}{x}-\sqrt{x}\right)dx+\int_{1}^{4}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\left[\ln|x|-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{4}}^{1}+\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\ln|x|\right]_{1}^{4}$$
$$=\frac{49}{12}$$

(3) $y=\ln x$에서 $x=e^{y}$

$y=\ln\frac{1}{x}$, 즉 $y=-\ln x$에서 $x=e^{-y}$

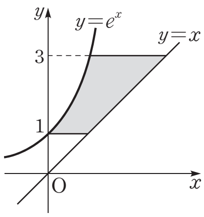
이때 닫힌구간 $[-1, 0]$에서 $e^{y} \leq e^{-y}$이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_{-1}^{0}(e^{-y}-e^{y})dy$$
$$=\left[-e^{-y}-e^{y}\right]_{-1}^{0}$$
$$=e+\frac{1}{e}-2$$

(4) $y=e^{x}$에서 $x=\ln y$

닫힌구간 $[1, 3]$에서 $y>\ln y$이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_{1}^{3}(y-\ln y)dy$$
$$=\int_{1}^{3}y\,dy-\int_{1}^{3}\ln y\,dy$$
$$=\left[\frac{1}{2}y^{2}\right]_{1}^{3}-\left(\left[y\ln y\right]_{1}^{3}-\int_{1}^{3}dy\right)$$
$$=4-3\ln 3+\left[y\right]_{1}^{3}$$
$$=6-3\ln 3$$

답 (1) $\mathbf{2\left(e+\frac{1}{e}-2\right)}$ (2) $\mathbf{\frac{49}{12}}$ (3) $\mathbf{e+\frac{1}{e}-2}$ (4) $\mathbf{6-3\ln 3}$

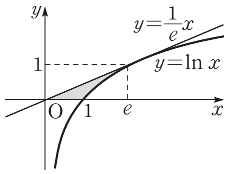
291

$y=\ln x$에서 $y'=\frac{1}{x}$이므로 곡선 위의 점 $(e, 1)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{e}$이다.

따라서 점 $(e, 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{e}(x-e)$ $\therefore y=\frac{1}{e}x$

이때 $y=\ln x$에서 $x=e^{y}$, $y=\frac{1}{e}x$에서 $x=ey$이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_{0}^{1}(e^{y}-ey)dy$$
$$=\left[e^{y}-\frac{e}{2}y^{2}\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{1}{2}e-1$$

답 $\mathbf{\frac{1}{2}e-1}$

다른풀이 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times e\times 1-\int_{1}^{e}\ln x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}e-\left(\left[x\ln x\right]_{1}^{e}-\int_{1}^{e}dx\right)$$
$$=\frac{1}{2}e-e+\left[x\right]_{1}^{e}=\frac{1}{2}e-1$$

292

$y=\sqrt{x-1}$에서 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{t-1})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2\sqrt{t-1}}$이므로 접선의 방정식은

$y-\sqrt{t-1}=\frac{1}{2\sqrt{t-1}}(x-t)$

이 직선이 원점을 지나므로

$0-\sqrt{t-1}=\frac{1}{2\sqrt{t-1}}(0-t)$

$-2(t-1)=-t$ $\therefore t=2$

즉, 곡선 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 방정식은

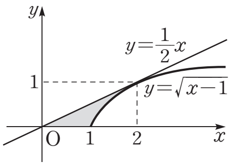
$y=\frac{1}{2}x$

이때 $y=\sqrt{x-1}$에서

$x=y^2+1\ (y\geq 0)$, $y=\frac{1}{2}x$

에서 $x=2y$이므로 구하는

넓이를 S라 하면



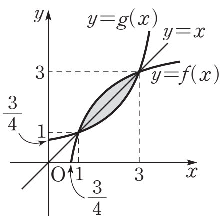
$$S=\int_0^1 \{(y^2+1)-2y\}dy$$

$$=\left[\frac{1}{3}y^3+y-y^2\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

답 $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$

293

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.



즉, $\sqrt{4x-3}=x$에서 $4x-3=x^2$, $x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$ $\qquad\therefore x=1$ 또는 $x=3$

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=2\int_1^3 (\sqrt{4x-3}-x)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{6}(4x-3)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_1^3$$

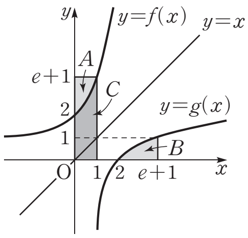
$$=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

답 $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$

294

$f(1)=e+1$에서

$g(e+1)=1$이므로 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=e+1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 A, 곡선 $y=g(x)$와 x축 및 직선 $x=e+1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 B라 하면 $A=B$이다.



이때 $\int_0^1 f(x)dx=C$라 하면

$$\int_0^1 f(x)dx+\int_2^{e+1} g(x)dx=C+B=C+A$$

$$=1\times(e+1)=e+1$$

답 $\boldsymbol{e+1}$

295

답 $\boldsymbol{3\sqrt{x},\ 3\sqrt{x},\ 2x^{\frac{3}{2}},\ 32\sqrt{2}}$

296

답 $\boldsymbol{\sqrt{3x^2+2},\ 3x^2+2,\ 3x^2+2,\ x^3+2x,\ 1020}$

297

물의 깊이가 x cm일 때의 수면의 넓이가 $\ln(x+1)$ cm^2이므로 물의 깊이가 5 cm일 때의 물의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^5 \ln(x+1)dx$$

$$=\Big[x\ln(x+1)\Big]_0^5-\int_0^5 \frac{x}{x+1}dx$$

$$=5\ln 6-\int_0^5\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=5\ln 6-\Big[x-\ln(x+1)\Big]_0^5$$

$$=5\ln 6-5+\ln 6$$

$$=6\ln 6-5(\text{cm}^3)$$

답 $\boldsymbol{(6\ln 6-5)\ \text{cm}^3}$

298

물의 깊이가 t cm일 때의 수면의 넓이를 $S(t)$ cm^2라 하면 물의 깊이가 x cm일 때의 물의 부피 V는

$$V=\int_0^x S(t)dt=x^3-2x^2+3x$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$S(x)=3x^2-4x+3$

따라서 수면의 넓이가 18 cm^2일 때는

$3x^2-4x+3=18$, $3x^2-4x-15=0$

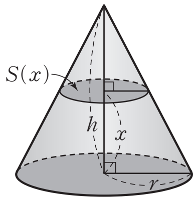
$(3x+5)(x-3)=0$

$\therefore x=3(\text{cm})\ (\because x>0)$

답 **3 cm**

299

오른쪽 그림과 같이 밑면으로부터의 높이가 x인 지점에서 밑면에 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하자.



이때 단면인 원과 원뿔의 밑면은 닮은 도형이고 닮음비는

$(h-x):h$

따라서 넓이의 비는 $(h-x)^2:h^2$이므로

$S(x):\pi r^2=(h-x)^2:h^2$

$\therefore S(x)=\frac{\pi r^2}{h^2}(h-x)^2$

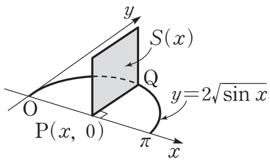
따라서 구하는 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^h S(x)dx$$
$$=\int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2}(h-x)^2\,dx$$
$$=\frac{\pi r^2}{h^2}\left[-\frac{1}{3}(h-x)^3\right]_0^h$$
$$=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

답 $\boldsymbol{\frac{1}{3}\pi r^2 h}$

300

x축 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)\ (0\le x\le\pi)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=2\sqrt{\sin x}$와 만나는 점을 Q라 하면 $\mathrm{Q}(x,\ 2\sqrt{\sin x})$이다.



점 P를 지나고 x축에 수직인 평면으로 주어진 입체도형을 자른 단면은 한 변의 길이가 $\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{\sin x}$인 정사각형이므로 그 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=(2\sqrt{\sin x})^2=4\sin x$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^\pi S(x)dx=\int_0^\pi 4\sin x\,dx$$
$$=\left[-4\cos x\right]_0^\pi=8$$

답 **8**

301

$\overline{\mathrm{PH}}=\frac{2}{x+1}$이므로 선분 PH를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{\mathrm{PH}}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{2}{x+1}\right)^2$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{(x+1)^2}$$

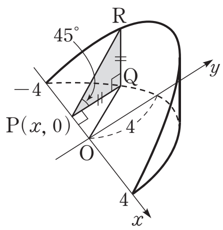
따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^2 S(x)dx=\int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{(x+1)^2}\,dx$$
$$=\left[-\frac{\sqrt{3}}{x+1}\right]_0^2$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

답 $\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

302

오른쪽 그림과 같이 그릇의 밑면인 원의 중심을 원점, 밑면의 지름을 포함하는 직선을 x축으로 정하자. x축 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)\ (-4\le x\le 4)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 남아 있는 물이 이루는 입체도형을 자른 단면을 삼각형 PQR라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{16-x^2}$

$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{16-x^2}$

이때 삼각형 PQR의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}=\frac{1}{2}(16-x^2)$

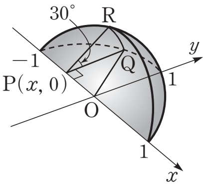
따라서 그릇에 남아 있는 물의 부피는

$$\int_{-4}^4 S(x)dx=\int_{-4}^4 \frac{1}{2}(16-x^2)dx$$
$$=2\times\frac{1}{2}\int_0^4 (16-x^2)dx$$
$$=\left[16x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^4$$
$$=\frac{128}{3}$$

답 $\boldsymbol{\frac{128}{3}}$

303

오른쪽 그림과 같이 밑면인 원의 중심을 원점, 밑면의 지름을 포함하는 직선을 x축으로 정하자. x축 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)\ (-1\le x\le 1)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 주어진 입체도형을 자른 단면을 부채꼴 PQR라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{1-x^2}$

이때 부채꼴 PQR의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}^2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}(1-x^2)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_{-1}^{1}S(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{\pi}{12}(1-x^2)dx$$
$$=2\times\frac{\pi}{12}\int_0^1(1-x^2)dx$$
$$=\frac{\pi}{6}\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{\pi}{9}$$

답 $\boldsymbol{\frac{\pi}{9}}$

304

(1) $t=0$에서의 점 P의 위치가 0이므로 구하는 위치는

$$0+\int_0^t(1+t)e^tdt=\Big[(1+t)e^t\Big]_0^t-\int_0^t e^t\,dt$$
$$=(1+t)e^t-1-\Big[e^t\Big]_0^t$$
$$=(1+t)e^t-1-(e^t-1)$$
$$=te^t$$

(2) $$\int_0^2|(1+t)e^t|dt=\int_0^2(1+t)e^tdt$$
$$=\Big[(1+t)e^t\Big]_0^2-\int_0^2 e^t\,dt$$
$$=3e^2-1-\Big[e^t\Big]_0^2$$
$$=3e^2-1-(e^2-1)$$
$$=2e^2$$

답 (1) $\boldsymbol{te^t}$ (2) $\boldsymbol{2e^2}$

305

$$\int_1^3\left|\frac{2t}{1+t^2}\right|dt=\int_1^3\frac{2t}{1+t^2}\,dt$$
$$=\Big[\ln|1+t^2|\Big]_1^3$$
$$=\ln 10-\ln 2$$
$$=\ln 5$$

답 **ln 5**

306

$\dfrac{dx}{dt}=4t,\ \dfrac{dy}{dt}=3t^2$이므로 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^1\sqrt{(4t)^2+(3t^2)^2}\,dt$$
$$=\int_0^1 t\sqrt{16+9t^2}\,dt$$

여기서 $16+9t^2=u$로 놓으면 $18t=\dfrac{du}{dt}$이고

$t=0$일 때 $u=16$, $t=1$일 때 $u=25$이므로

$$s=\int_{16}^{25}\frac{1}{18}\sqrt{u}\,du$$
$$=\frac{1}{18}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{16}^{25}=\frac{61}{27}$$

답 $\boldsymbol{\frac{61}{27}}$

307

$$\frac{dx}{dt}=-(2t+4)\sin(t^2+4t),$$
$$\frac{dy}{dt}=(2t+4)\cos(t^2+4t)$$

이므로 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^3\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^3\sqrt{(2t+4)^2\sin^2(t^2+4t)+(2t+4)^2\cos^2(t^2+4t)}\,dt$$
$$=\int_0^3\sqrt{(2t+4)^2}\,dt=\int_0^3(2t+4)dt$$
$$=\Big[t^2+4t\Big]_0^3=21$$

답 **21**

308

(1) $\dfrac{dx}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t)$,

$\dfrac{dy}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t)$

이므로 곡선의 길이 l은

$$l=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{e^{2t}(\cos t-\sin t)^2+e^{2t}(\sin t+\cos t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2e^{2t}}\,dt$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^t\,dt$$

$$=\sqrt{2}\Big[e^t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=x^2-\dfrac{1}{4x^2}$이므로 곡선의 길이 l은

$$l=\int_1^3\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^3\sqrt{1+\left(x^2-\frac{1}{4x^2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^3\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^3\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4x}\right]_1^3=\frac{53}{6}$$

답 (1) $\boldsymbol{\sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)}$ (2) $\boldsymbol{\dfrac{53}{6}}$

309

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\sin x}{\cos x}$이므로 곡선의 길이 l은

$$l=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx$$

여기서 $\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{6}$일 때 $t=\dfrac{1}{2}$이므로

$$l=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-t^2}\,dt$$

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(t-1)(t+1)}\,dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{2}\Big[\ln|t-1|-\ln|t+1|\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\ln 3$$

답 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\ln 3}$

연습문제 · 실력 UP

Ⅰ. 수열의 극한

1

① $n\to\infty$일 때, $\dfrac{-n^2+2}{n+1}$의 값은 $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{2}{3}$, $-\dfrac{7}{4}$, $-\dfrac{14}{5}$, …로 한없이 작아지므로 이 수열은 음의 무한대로 발산한다.

② $n\to\infty$일 때, $\dfrac{(-1)^n}{n+1}$의 값은 $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$, $-\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{5}$, $-\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{7}$, …이다.

이때 홀수 번째 항은 $-\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{4}$, $-\dfrac{1}{6}$, …이므로 0에 수렴하고, 짝수 번째 항은 $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{1}{7}$, …이므로 0에 수렴한다.

따라서 이 수열은 0에 수렴한다.

③ $n\to\infty$일 때, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$의 값은 1, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{8}$, …이므로 $1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$의 값은 2, $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{9}{8}$, …이다.

따라서 이 수열은 1에 수렴한다.

④ $n\to\infty$일 때, $(-1)^n$의 값은 -1, 1, -1, 1, … 이므로 $2+(-1)^n$의 값은 1, 3, 1, 3, …이다.

따라서 이 수열은 진동하므로 발산한다.

⑤ $n\to\infty$일 때, $(-1)^{2n+1}$의 값은 -1, -1, -1, -1, …이므로 이 수열은 -1에 수렴한다.

이상에서 발산하는 수열은 ①, ④이다. **답** ①, ④

2

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=5$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+k}{a_n+1}=\frac{3\times5+k}{5+1}=\frac{15+k}{6}$$

따라서 $\dfrac{15+k}{6}=2$이므로 $15+k=12$

$\therefore k=-3$ **답** -3

3

① $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{5}{n}\right)\left(\dfrac{5}{n}-1\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{5}{n}\right)\times\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{n}-1\right)$

$=3\times(-1)=-3$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{n}-3\right)=-3$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n-3}{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6-\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\dfrac{6}{2}=3$

④ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-5n+4}{-n^2+2n-3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}{-1+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}$

$=\dfrac{3}{-1}=-3$

⑤ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)(1-3n)}{(3+n)(1+n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-3n^2-5n+2}{n^2+4n+3}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-3-\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}$

$=\dfrac{-3}{1}=-3$

따라서 극한값이 다른 하나는 ③이다. **답** ③

4

$\lim\limits_{n\to\infty}\{\log_2(2n-1)+\log_2(8n+1)-2\log_2(n+1)\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\{\log_2(2n-1)(8n+1)-\log_2(n+1)^2\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\log_2\dfrac{16n^2-6n-1}{n^2+2n+1}$

$=\log_2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{16-\frac{6}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$

$=\log_2 16=\log_2 2^4=4$ **답** 4

5

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a(n+1)^2}{bn^3+3n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+2an+a}{bn^3+3n^2-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 ㉠이 0이 아닌 값으로 수렴하므로

$b=0$

$b=0$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+2an+a}{3n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{2a}{n}+\frac{a}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}}=\frac{a}{3}$$

따라서 $\frac{a}{3}=-2$이므로 $a=-6$

$\therefore b-a=0-(-6)=6$ **답 6**

6

이차방정식 $x^2-x+n-\sqrt{n^2+n}=0$의 두 근이 α_n, β_n이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=1$, $\alpha_n\beta_n=n-\sqrt{n^2+n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\sqrt{n^2+n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2+n}}{(n-\sqrt{n^2+n})(n+\sqrt{n^2+n})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2+n}}{-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{-1}$$
$$=\frac{1+1}{-1}=-2$$

답 −2

7

$\frac{-3a_n+1}{5a_n-4}=b_n$으로 놓으면

$-3a_n+1=b_n(5a_n-4)$, $(-3-5b_n)a_n=-4b_n-1$

$\therefore a_n=\frac{4b_n+1}{5b_n+3}$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=-1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4b_n+1}{5b_n+3}=\frac{4\times(-1)+1}{5\times(-1)+3}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n-1}=\frac{\frac{3}{2}+1}{\frac{3}{2}-1}=5$$

답 5

8

$\frac{10}{2n^2+3n}<a_n<\frac{10}{2n^2+n}$에서

$\frac{10n^2}{2n^2+3n}<n^2a_n<\frac{10n^2}{2n^2+n}$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10n^2}{2n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{2+\frac{3}{n}}=5,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10n^2}{2n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{2+\frac{1}{n}}=5$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}n^2a_n=5$ **답 5**

9

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{12}{n^2}\right)=2$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left\{1-\frac{1}{n(1+n^2)}\right\}=1$$

$$\therefore 40\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2a_nb_n}=40\times\frac{2^2+1^2}{2\times2\times1}=50$$

답 50

10

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)}{n^3}$$
$$=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$$
$$=\frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)$$
$$=\frac{1}{n^3}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}+\frac{n+1}{2n^2}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}+\frac{n+1}{2n^2}\right\}$$
$$=\frac{2}{6}+0=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

11

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an+3}}{n(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an+3}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{n(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an+3}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{an+3}}{\sqrt{n}}\times\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a+\frac{3}{n}}}{\sqrt{1}}\times\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1}}$$
$$=\sqrt{a}\times(1+1)=2\sqrt{a}$$

따라서 $2\sqrt{a}=6$이므로 $\sqrt{a}=3$

$\therefore a=9$ 답 9

12

$\sqrt{9n^2+6n+1}<\sqrt{9n^2+11n+3}<\sqrt{9n^2+12n+4}$,

즉 $\sqrt{(3n+1)^2}<\sqrt{9n^2+11n+3}<\sqrt{(3n+2)^2}$

이므로

$3n+1<\sqrt{9n^2+11n+3}<3n+2$

따라서 $\sqrt{9n^2+11n+3}$의 정수 부분이 $3n+1$이므로

$a_n=3n+1,\ b_n=\sqrt{9n^2+11n+3}-(3n+1)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+nb_n}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1+n\{\sqrt{9n^2+11n+3}-(3n+1)\}}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n}+\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{9n^2+11n+3}-(3n+1)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{1}+\lim_{n\to\infty}\frac{5n+2}{\sqrt{9n^2+11n+3}+(3n+1)}$$
$$=3+\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{2}{n}}{\sqrt{9+\frac{11}{n}+\frac{3}{n^2}}+3+\frac{1}{n}}$$
$$=3+\frac{5}{6}=\frac{23}{6}$$

따라서 $p=6,\ q=23$이므로

$p+q=29$ 답 29

13

$$\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n(n+4)}-an+b\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+4n}-(an-b)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{n^2+4n}-(an-b)\}\{\sqrt{n^2+4n}+(an-b)\}}{\sqrt{n^2+4n}+(an-b)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n-(an-b)^2}{\sqrt{n^2+4n}+an-b}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n^2+2(2+ab)n-b^2}{\sqrt{n^2+4n}+an-b}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n+2(2+ab)-\frac{b^2}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+a-\frac{b}{n}}\quad\cdots\cdots ㉠$$

이때 0이 아닌 극한값이 존재하므로 분자와 분모의 차수가 같아야 한다. 즉,

$1-a^2=0\qquad \therefore a=1\ (\because a>0)$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2(2+b)-\frac{b^2}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1-\frac{b}{n}}=\frac{2(2+b)}{2}=2+b$$

따라서 $2+b=4$이므로 $b=2$

$\therefore a+b=1+2=3$ 답 3

14

$a_n-1=c_n$으로 놓으면

$a_n=c_n+1,\ \lim\limits_{n\to\infty}c_n=2$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(c_n+1)=2+1=3$

또, $a_n+2b_n=d_n$으로 놓으면

$2b_n=d_n-a_n$에서 $b_n=\frac{1}{2}(d_n-a_n)$이고

$\lim\limits_{n\to\infty}d_n=9$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(d_n-a_n)=\frac{1}{2}(9-3)=3$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n(1+b_n)=3\times(1+3)=12$ 답 12

15

모든 자연수 n에 대하여 $-1\le\sin n\theta\le 1$이므로

$-4n^2-1\le\sin n\theta-4n^2\le -4n^2+1$

$\therefore \dfrac{-4n^2-1}{2n^2+n}\le\dfrac{\sin n\theta-4n^2}{2n^2+n}\le\dfrac{-4n^2+1}{2n^2+n}$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-4n^2-1}{2n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-4-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}}=-2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-4n^2+1}{2n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-4+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}}=-2$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\theta-4n^2}{2n^2+n}=-2$$

답 -2

16

① (반례) $a_n=\dfrac{1}{n}$, $b_n=\dfrac{1}{n^2}$이면

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$이지만

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$ (거짓)

② (반례) $a_n=n+2$, $b_n=n+1$이면

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$이지만

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$ (거짓)

③ (반례) $a_n=n^2$, $b_n=\dfrac{1}{n}$이면

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$이지만

$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$ (거짓)

④ (반례) $a_n=1+\dfrac{1}{n}$, $b_n=1+\dfrac{2}{n}$이면 $a_n<b_n$이지만

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$ (거짓)

⑤ $a_n-b_n=c_n$으로 놓으면 $b_n=a_n-c_n$이고

$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-c_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}c_n$

$=\alpha-0=\alpha$ (참)

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

17

$1\times(2n-1)+2\times(2n-3)+3\times(2n-5)$
$+\cdots+(n-1)\times3+n\times1$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}k\{2n-(2k-1)\}$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}\{-2k^2+(2n+1)k\}$

$=-2\times\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

$=\dfrac{2n^3+3n^2+n}{6}$

$\therefore$ (주어진 식)$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3}\times\dfrac{2n^3+3n^2+n}{6}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6}=\dfrac{1}{3}$

답 $\dfrac{1}{3}$

18

점 $(a_n, \sqrt{n})$이 원 $x^2+y^2=4n^2$ 위의 점이므로

$(a_n)^2+(\sqrt{n})^2=4n^2$, $a_n^2+n=4n^2$

$a_n^2=4n^2-n \qquad \therefore a_n=\sqrt{4n^2-n}$ ($\because a_n>0$)

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(2n-a_n)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(2n-\sqrt{4n^2-n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-\sqrt{4n^2-n})(2n+\sqrt{4n^2-n})}{2n+\sqrt{4n^2-n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+\sqrt{4n^2-n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2+\sqrt{4-\frac{1}{n}}}$

$=\dfrac{1}{2+2}=\dfrac{1}{4}$

답 ④

19

① 공비는 $\dfrac{1}{3}$이고, $-1<\dfrac{1}{3}<1$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}=0$ (수렴)

② 공비는 0.99이고, $-1<0.99<1$이므로

$\lim_{n\to\infty}0.99^n=0$ (수렴)

③ 공비는 $\sqrt{0.9}$이고, $-1<\sqrt{0.9}<1$이므로

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{0.9})^n=0$ (수렴)

④ 공비는 $-\frac{3}{4}$이고, $-1<-\frac{3}{4}<1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n=0$ (수렴)

⑤ $\frac{2^{2n}}{3^n}=\left(\frac{4}{3}\right)^n$에서 공비는 $\frac{4}{3}$이고, $\frac{4}{3}>1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}}{3^n}=\infty$ (발산)

따라서 수렴하지 않는 수열은 ⑤이다. **답** ⑤

20

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\times3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n+2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5\times3-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{15-2\times0}{1+0}=15$$

답 15

21

$a_n=a_1\times3^{n-1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-2}{3^{n+1}+2a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times3^{n-1}-2}{3^{n+1}+2a_1\times3^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_1}{3}-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}{3+\frac{2}{3}a_1}$$

$$=\frac{\frac{a_1}{3}-0}{3+\frac{2}{3}a_1}=\frac{a_1}{9+2a_1}$$

따라서 $\frac{a_1}{9+2a_1}=\frac{2}{5}$이므로

$5a_1=2(9+2a_1)$ $\quad\therefore a_1=18$ **답** ⑤

22

등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하므로 $-1<r\le1$

ㄱ. 등비수열 $\{r^{3n}\}$의 공비는 r^3이고 $-1<r\le1$에서 $-1<r^3\le1$이므로 등비수열 $\{r^{3n}\}$은 항상 수렴한다.

ㄴ. $r\neq0$일 때, 등비수열 $\left\{\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}$의 공비는 $\frac{1}{r}$이고 $-1<r\le1$에서 $\frac{1}{r}<-1$ 또는 $\frac{1}{r}\ge1$이므로 등비수열 $\left\{\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}$은 $\frac{1}{r}=1$일 때만 수렴한다.

ㄷ. 등비수열 $\{(-r)^n\}$의 공비는 $-r$이고 $-1<r\le1$에서 $-1\le-r<1$이므로 등비수열 $\{(-r)^n\}$은 $r=1$일 때는 수렴하지 않는다.

ㄹ. 등비수열 $\left\{\left(\frac{1-r}{2}\right)^n\right\}$의 공비는 $\frac{1-r}{2}$이고

$-1<r\le1$에서

$-1\le-r<1,\ 0\le1-r<2$

$\therefore 0\le\frac{1-r}{2}<1$

따라서 등비수열 $\left\{\left(\frac{1-r}{2}\right)^n\right\}$은 항상 수렴한다.

이상에서 항상 수렴하는 수열인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

23

등비수열 $\{|x|^n\}$은 첫째항과 공비가 모두 $|x|$이므로 이 수열이 수렴하려면

$-1<|x|\le1$

$0\le|x|\le1,\ |x|\le1$

$\therefore -1\le x\le1$ **답** $-1\le x\le1$

24

(i) $|r|>1$이면 $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^n}-1}{\frac{1}{r^n}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

(ii) $r=1$이면 $\lim_{n\to\infty}r^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

실력 UP 연습문제

(iii) $|r|<1$이면 $\lim_{n\to\infty} r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

따라서 $a=-1$, $b=0$, $c=1$이므로 이차방정식

$-x^2+1=0$의 두 근은 $x=-1$ 또는 $x=1$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=2$ **답 2**

25

주어진 수열을 $\{a_n\}$이라 하면

$a_1=\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$

$a_2=\sqrt{3\sqrt{3}}=(3\times 3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=(3^{1+\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$a_3=\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}=\{3^{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\}^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3}$

$\vdots$

$a_n=3^{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

이때

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

이므로

$a_n=3^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}3^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}=3$ **답 3**

26

$x^2+2x-1=0$에서 $x=-1\pm\sqrt{2}$

$\alpha=-1-\sqrt{2}$, $\beta=-1+\sqrt{2}$라 하면

$|\alpha|>1$, $|\beta|<1$이므로

$\lim_{n\to\infty}|\alpha^n|=\infty$, $\lim_{n\to\infty}\beta^n=0$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{\alpha^n+\beta^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha+\beta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}$$

$$=\frac{\alpha+\beta\times 0}{1+0}$$

$$=\alpha=-1-\sqrt{2}$$ **답 $-1-\sqrt{2}$**

27

수열 $\{\log a_n\}$은 첫째항이 $\log 2$이고, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$\log(a_1a_2\cdots a_n)=\log a_1+\log a_2+\cdots+\log a_n$

$$=\frac{(\log 2)\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\log 4^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$\therefore\ a_1a_2\cdots a_n=4^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)=\lim_{n\to\infty}4^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}=4$ **답 4**

28

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\times 3^n-2^{n+1}a_n}{3^na_n+2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\left(\frac{2}{3}\right)^n\times 2a_n}{a_n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{4-0\times 2\alpha}{\alpha+0}=\frac{4}{\alpha}$$

따라서 $\frac{4}{\alpha}=3$이므로 $3\alpha=4$

$\therefore\ \alpha=\frac{4}{3}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{4}{3}$ **답 $\frac{4}{3}$**

29

$\frac{4a_n-4}{5a_n+1}=b_n$으로 놓으면

$4a_n-4=b_n(5a_n+1)$, $(4-5b_n)a_n=b_n+4$

$\therefore\ a_n=\frac{b_n+4}{4-5b_n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+4}{4-5b_n}$$

$$=\frac{2+4}{4-5\times 2}=-1$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3^n a_n}{3^n+a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1+\frac{a_n}{3^n}}=\frac{-1}{1+0}=-1$

답 -1

30

(ⅰ) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-1}{r^n+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$

(ⅱ) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-1}{r^n+1}=\frac{1-1}{1+1}=0$

(ⅲ) $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-1}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{r-\frac{1}{r^n}}{1+\frac{1}{r^n}}$

$=\frac{r-0}{1+0}=r$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-1}{r^n+1}$이 3에 수렴하는 경우는 (ⅲ)이므로 $r=3$

답 ④

31

수열 2, 4, 8, 16, …은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n=2\times2^{n-1}=2^n$

$S_n=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2(2^n-1)=2^{n+1}-2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}-2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{1}{2}$

답 ④

32

$f(x)=2^n x^2+3^n x+1$에서 나머지정리에 의하여

$a_n=f(1)=2^n+3^n+1$

$b_n=f(2)=4\times2^n+2\times3^n+1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n+1}{4\times2^n+2\times3^n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{4\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+2+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

$=\frac{0+1+0}{4\times0+2+0}=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

33

3^n의 양의 약수는 $1, 3, 3^2, \cdots, 3^n$이므로 양의 약수의 총합은

$a_n=1+3+3^2+\cdots+3^n$

$=\frac{1\times(3^{n+1}-1)}{3-1}=\frac{3^{n+1}-1}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-1}{3^n}$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{3-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

34

(ⅰ) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n-1}+4}{x^{2n}+1}=\frac{2\times0+4}{0+1}=4$

(ⅱ) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n-1}+4}{x^{2n}+1}=\frac{2\times1+4}{1+1}=3$

(ⅲ) $x=-1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n-1}=-1$

$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n}=1$

$\therefore f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n-1}+4}{x^{2n}+1}$

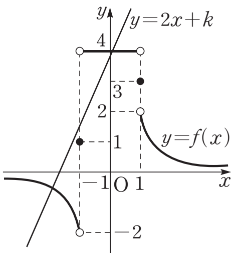
$=\frac{2\times(-1)+4}{1+1}=1$

(ⅳ) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|x^{2n-1}|=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n-1}+4}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\frac{1}{x}+\frac{4}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}$

$=\frac{\frac{2}{x}+0}{1+0}=\frac{2}{x}$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면
$2<k<6$이고 $k\neq3$
또는 $k=1$



따라서 정수 k는 1, 4, 5이므로 모든 정수 k의 값의 합은 10이다. **답 10**

참고 (ⅰ) 직선 $y=2x+k$가 점 $(1,\ 4)$를 지날 때,
$4=2+k \qquad \therefore k=2$
(ⅱ) 직선 $y=2x+k$가 점 $(-1,\ 4)$를 지날 때,
$4=-2+k \qquad \therefore k=6$
(ⅲ) 직선 $y=2x+k$가 점 $(-1,\ 1)$을 지날 때,
$1=-2+k \qquad \therefore k=3$
(ⅳ) 직선 $y=2x+k$가 점 $(1,\ 3)$을 지날 때,
$3=2+k \qquad \therefore k=1$
따라서 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선이 (ⅰ)과 (ⅱ) 사이에 있으면서 (ⅲ)은 아니거나 (ⅳ)이어야 하므로
$2<k<6$이고 $k\neq3$ 또는 $k=1$

35

$P_n(4^n,\ 2^n)$, $P_{n+1}(4^{n+1},\ 2^{n+1})$이므로

$$L_n=\sqrt{(4^{n+1}-4^n)^2+(2^{n+1}-2^n)^2}$$
$$=\sqrt{(3\times4^n)^2+(2^n)^2}$$
$$=\sqrt{9\times16^n+4^n}$$
$$L_{n+1}=\sqrt{9\times16^{n+1}+4^{n+1}}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{9\times16^{n+1}+4^{n+1}}}{\sqrt{9\times16^n+4^n}}\right)^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9\times16^{n+1}+4^{n+1}}{9\times16^n+4^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9\times16+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}{9+\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$
$$=\frac{9\times16+4\times0}{9+0}=16$$
답 16

36

주어진 급수의 제n항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{2n+4}{(n+1)^2(n+3)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+3)^2}\right\}$$

이때 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{(k+3)^2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}-\frac{1}{6^2}\right)+\cdots+\left\{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right\}+\left\{\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+3)^2}\right\}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{1}{(n+3)^2}\right\}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{1}{(n+3)^2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)$$
$$=\frac{13}{72}$$
답 $\frac{13}{72}$

37

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2-n$$

(ⅰ) $n\geq2$일 때,
$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=n^2-n-\{(n-1)^2-(n-1)\}$$
$$=2(n-1)$$
(ⅱ) $n=1$일 때,
$$a_1=S_1=0$$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_n=2(n-1)\ (n\geq1)$
이때
$a_{n+1}=2(n+1-1)=2n$,
$a_{n+2}=2(n+2-1)=2(n+1)$
이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\times2(n+1)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

38

주어진 급수의 제2항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\log\left(1-\frac{1}{a_k}\right)=\sum_{k=2}^{n}\log\frac{a_k-1}{a_k}$$
$$=\sum_{k=2}^{n}\log\frac{k^2-1}{k^2}=\sum_{k=2}^{n}\log\left(\frac{k-1}{k}\times\frac{k+1}{k}\right)$$
$$=\log\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)+\log\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)+\log\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\right)+\cdots+\log\left(\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}\right)$$
$$=\log\left\{\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}\right)\right\}$$
$$=\log\frac{n+1}{2n}$$
$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\log\left(1-\frac{1}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log\frac{n+1}{2n}$$
$$=\log\frac{1}{2}=-\log 2$$

답 $-\log 2$

39

제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

① $S_1=1,\ S_2=0,\ S_3=1,\ S_4=0,\ \cdots$이므로

$S_{2n-1}=1,\ S_{2n}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=1,\ \lim_{n\to\infty}S_{2n}=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

② $S_1=-2,\ S_2=-2,\ S_3=-2,\ \cdots$이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=-2$ (수렴)

③ $S_1=2,\ S_2=2,\ S_3=2,\ \cdots$이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=2$ (수렴)

④ $S_1=0,\ S_2=0,\ S_3=0,\ \cdots$이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=0$ (수렴)

⑤ $S_1=2,\ S_2=0,\ S_3=2,\ S_4=0,\ \cdots$이므로

$S_{2n-1}=2,\ S_{2n}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=2,\ \lim_{n\to\infty}S_{2n}=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

이상에서 수렴하지 않는 것은 ①, ⑤이다. **답** ①, ⑤

40

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

또, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=6$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3}{5a_n-S_n}=\frac{2\times0+3}{5\times0-6}=-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

41

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{5n}{2n-1}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{5n}{2n-1}\right)=0 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{5}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(4n-1)a_n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n+1}\times\lim_{n\to\infty}a_n$$
$$=4\times\frac{5}{2}=10$$

답 ③

42

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{2n+3}=\frac{1}{2}\neq0$

이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+3n}=1\neq0$

이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1})$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\{(\sqrt{2}-0)+(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{4}-\sqrt{2})$
$+\cdots+(\sqrt{n}-\sqrt{n-2})+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\}$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}-1)=\infty$ (발산)

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}-\frac{k+1}{k+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{4}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{n+1}{n+2}\right)=-\frac{1}{2}$

따라서 수렴하는 급수인 것은 ㄹ이다. **답 ㄹ**

43

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=8$에서 $2\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=8$

$\therefore 2\alpha+\beta=8$ …… ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+2b_n)=26$에서 $3\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=26$

$\therefore 3\alpha+2\beta=26$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=-10$, $\beta=28$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=-10$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=28$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n$
$=-10-28=-38$ **답 -38**

44

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고, 공차가 $a_2-a_1=1$인 등차수열이므로

$S_n=\frac{n\{2+(n-1)\}}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$ **답 2**

45

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=n+1$, $\alpha_n\beta_n=n^2+2n$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha_n-1)(\beta_n-1)}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n\beta_n-(\alpha_n+\beta_n)+1}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n-(n+1)+1}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$ **답 1**

46

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$에서 $a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$

이때

$$\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$$ ← $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=5$, $\cdots$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+2}=\infty$

$$=\frac{1}{a_2}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

47

급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_1=a_1$, $S_2=a_1-a_2$, $S_3=a_1$, $S_4=a_1-a_3$,

$S_5=a_1$, $S_6=a_1-a_4$, $\cdots$

$\therefore S_{2n-1}=a_1$, $S_{2n}=a_1-a_{n+1}$

주어진 급수가 수렴하려면 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=a_1$이어야 하므로 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=0$, 즉 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이어야 한다.

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\log\frac{n}{3n+2}$

$$=\log\frac{1}{3}=-\log 3\neq 0$$

따라서 주어진 급수가 수렴하도록 하는 수열 $\{a_n\}$은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

48

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n-\frac{n^2+1}{2n+1}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(na_n-\frac{n^2+1}{2n+1}\right)=0$이어야 한다.

$b_n=na_n-\frac{n^2+1}{2n+1}$로 놓으면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이고,

$a_n=\frac{b_n}{n}+\frac{n^2+1}{2n^2+n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{n}+\frac{n^2+1}{2n^2+n}\right)=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n{}^2+2a_n+2)=\lim_{n\to\infty}a_n{}^2+2\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}2$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\frac{1}{2}+2$$

$$=\frac{13}{4}$$

답 ①

49

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an^2+6}{n^2+2n}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+6}{n^2+2n}=0$ $\qquad\therefore a=0$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2+2n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}3\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}3\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=3\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

50

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n$이 모두 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

실력 UP 연습문제

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log(a_nb_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(\log a_n+\log b_n)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n+\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n=7$$
$\therefore\ \alpha+\beta=7$ …… ㉠

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{{a_n}^2}{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}(2\log a_n-\log b_n)$$
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n-\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n=2$$
$\therefore\ 2\alpha-\beta=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=3,\ \beta=4$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n=3,\ \sum_{n=1}^{\infty}\log b_n=4$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{a_n}{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}(\log a_n-\log b_n)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n-\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n$$
$$=3-4=-1$$

답 -1

51

ㄱ. [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, ⋯

$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, ⋯

이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=0$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n$과 $\lim_{n\to\infty}b_n$은 모두 발산한다. (거짓)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha,\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\beta$라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 수렴한다. (참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\alpha,\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\beta$라 하면

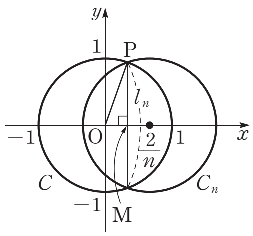
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)\}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$$
$$=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

52



오른쪽 그림에서 삼각형 POM은 직각삼각형이고

$\overline{\text{OP}}=1$,

$\overline{\text{OM}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{n}=\frac{1}{n}$

이므로

$$\overline{\text{PM}}=\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}=\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$$

따라서 $l_n=2\overline{\text{PM}}=\frac{2\sqrt{n^2-1}}{n}$이므로

$$(nl_n)^2=n^2\times{l_n}^2=n^2\times\frac{4(n^2-1)}{n^2}=4(n^2-1)$$

$$\therefore\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(nl_n)^2}$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4(n^2-1)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4(n-1)(n+1)}$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{8}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3}{16}$$

따라서 $p=16,\ q=3$이므로

$p+q=19$

답 19

53

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3^{n+1}-15)\left(\frac{1}{6}\right)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3^{n+1}\left(\frac{1}{6}\right)^n-15\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3\left(\frac{1}{2}\right)^n-15\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$
$$=3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-15\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$
$$=3\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-15\times\frac{1}{1-\frac{1}{6}}=-12$$

답 -12

54

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=6$에서 $\frac{3}{1-r}=6$ $\qquad \therefore r=\frac{1}{2}$

따라서 등비수열 $\{a_n{}^2\}$은 첫째항이 $3^2=9$, 공비가

$r^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2=\frac{9}{1-\frac{1}{4}}=12$ **답 12**

55

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 p, q라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=2$에서 $\frac{1}{1-p}=2$ $\qquad \therefore p=\frac{1}{2}$

$\therefore a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=3$에서 $\frac{1}{1-q}=3$ $\qquad \therefore q=\frac{2}{3}$

$\therefore b_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$\begin{aligned}\therefore &\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n{}^2+2a_nb_n+b_n{}^2)\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2+2\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n{}^2\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}^2\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\\ &=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+2\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}+\frac{1}{1-\frac{4}{9}}\\ &=\frac{4}{3}+3+\frac{9}{5}=\frac{92}{15}\end{aligned}$$

답 $\frac{92}{15}$

56

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\cdots=8$에서

$\frac{a}{1-r}=8$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉠

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots=6$에서

$\frac{a}{1-r^2}=6$

$\therefore \frac{a}{(1-r)(1+r)}=6$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{8}{1+r}=6$ $\qquad \therefore r=\frac{1}{3}$

$r=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면 $a=\frac{16}{3}$

$\therefore a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2+a_5{}^2+\cdots$

$=\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{\left(\frac{16}{3}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=32$ **답 32**

57

수열 $\{a_n\}$의 공비가 $-1<\frac{1}{3}<1$이고, 수열 $\{b_n\}$의 공비가 $-1<\frac{1}{2}<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 각각 수렴한다.

① $\sum_{n=1}^{\infty}2a_n=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이므로 수렴한다.

② $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이므로 수렴한다.

③ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

에서 공비가 $-1<-\frac{1}{2}<1$이므로 수렴한다.

④ $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

에서 공비가 $-1<\frac{1}{6}<1$이므로 수렴한다.

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

에서 공비가 $\frac{3}{2}>1$이므로 발산한다.

따라서 수렴하지 않는 급수는 ⑤이다. **답 ⑤**

다른풀이 $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

① $\sum_{n=1}^{\infty}2a_n=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=2\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}$

$=3$ (수렴)

② $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$

$=-\frac{1}{2}$ (수렴)

③ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=-\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{2}{3}$ (수렴)

④ $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

$=\frac{1}{1-\frac{1}{6}}=\frac{6}{5}$ (수렴)

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=\infty$ (발산)

58

$\sum_{n=1}^{\infty}x^n(x-2)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}x\{x(x-2)\}^{n-1}$이므로 첫째항이 x, 공비가 $x(x-2)$이다.

이 등비급수가 수렴하므로

$x=0$ 또는 $-1<x(x-2)<1$

그런데 등비급수의 합이 $\frac{1}{4}$이므로 $x\neq0$이다.

(i) $x(x-2)>-1$일 때,

$x^2-2x+1>0$, $(x-1)^2>0$

따라서 $x\neq1$인 모든 실수 x에 대하여 항상 성립한다.

(ii) $x(x-2)<1$일 때, $x^2-2x-1<0$

$\therefore 1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$

(i), (ii)에서

$1-\sqrt{2}<x<1$ 또는 $1<x<1+\sqrt{2}$ …… ㉠

이때 등비급수의 합이 $\frac{1}{4}$이므로

$\frac{x}{1-x(x-2)}=\frac{1}{4}$

$4x=1-x(x-2)$, $x^2+2x-1=0$

$\therefore x=-1+\sqrt{2}$ ($\because$ ㉠) 답 ③

59

4^n의 일의 자리의 숫자는 차례로 4, 6, 4, 6, 4, 6, … 이므로 4^n+1의 일의 자리의 숫자는 5, 7이 이 순서로 반복된다. 즉,

$a_1=5$, $a_2=7$, $a_3=5$, $a_4=7$, $a_5=5$, $a_6=7$, …

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}=\frac{5}{10}+\frac{7}{10^2}+\frac{5}{10^3}+\frac{7}{10^4}+\cdots$

$=\left(\frac{5}{10}+\frac{5}{10^3}+\frac{5}{10^5}+\cdots\right)+\left(\frac{7}{10^2}+\frac{7}{10^4}+\frac{7}{10^6}+\cdots\right)$

$=\frac{\frac{5}{10}}{1-\frac{1}{10^2}}+\frac{\frac{7}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}}$

$=\frac{50}{99}+\frac{7}{99}=\frac{57}{99}=\frac{19}{33}$ 답 $\mathbf{\frac{19}{33}}$

60

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n+(-x)^n}{3^n}=0+2\times\left(\frac{x}{3}\right)^2+0+2\times\left(\frac{x}{3}\right)^4+\cdots$

이므로 이 급수는 첫째항이 $2\times\left(\frac{x}{3}\right)^2$, 공비가 $\left(\frac{x}{3}\right)^2$인 등비급수이다.

이때 이 등비급수의 합이 $\frac{8}{5}$이므로

$\frac{\frac{2}{9}x^2}{1-\frac{x^2}{9}}=\frac{8}{5}$, $10x^2=8(9-x^2)$, $x^2=4$

$\therefore x=-2$ ($\because x<0$) 답 ②

61

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n(x-2)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{3}\times\left\{\frac{x(x-2)}{3}\right\}^{n-1}$

이므로 이 급수는 첫째항이 $\frac{x}{3}$, 공비가 $\frac{x(x-2)}{3}$인 등비급수이다.

이때 이 등비급수가 수렴하려면

$\frac{x}{3}=0$ 또는 $-1<\frac{x(x-2)}{3}<1$

(i) $\frac{x}{3}=0$에서 $x=0$

(ii) $-1<\frac{x(x-2)}{3}<1$에서 $-3<x^2-2x<3$

ⓘ $x^2-2x>-3$에서 $x^2-2x+3>0$

$(x-1)^2+2>0$

이므로 모든 실수 x에 대하여 항상 성립한다.

ⓘⓘ $x^2-2x<3$에서 $x^2-2x-3<0$

$(x+1)(x-3)<0$

$\therefore -1<x<3$

ⓘ, ⓘⓘ에서 $-1<x<3$

(i), (ii)에서 $-1<x<3$ …… ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log_3\frac{x}{3}\right)^n$의 첫째항과 공비가 모두 $\log_3\frac{x}{3}$이므로

이 등비급수가 수렴하려면

$-1<\log_3\frac{x}{3}<1$

$-1<\log_3 x-1<1$, $0<\log_3 x<2$

$\therefore 1<x<9$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<x<3$ **답 $1<x<3$**

62

$\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴하므로 $-1<r<1$

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(r^n+3r^{n-1})=\sum_{n=1}^{\infty}r^n+3\sum_{n=1}^{\infty}r^{n-1}$에서 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}r^{n-1}$은 모두 공비가 r인 등비급수이므로 주어진 급수는 항상 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(r^n-r^{2n})=\sum_{n=1}^{\infty}r^n-\sum_{n=1}^{\infty}(r^2)^n$에서

$\sum_{n=1}^{\infty}(r^2)^n$은 공비가 r^2인 등비급수이고 $-1<r<1$에서 $0\le r^2<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(r^2)^n$은 항상 수렴한다.

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n$은 공비가 $\frac{1}{r}$인 등비급수이고

$-1<r<1$에서 $\frac{1}{r}<-1$ 또는 $\frac{1}{r}>1$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n$은 발산한다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}-1\right)^n$은 공비가 $\frac{r}{2}-1$인 등비급수이고

$-1<r<1$에서 $-\frac{3}{2}<\frac{r}{2}-1<-\frac{1}{2}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}-1\right)^n$이 항상 수렴한다고는 할 수 없다.

ㅁ. $\sum_{n=1}^{\infty}r^{3n}=\sum_{n=1}^{\infty}(r^3)^n$은 공비가 r^3인 등비급수이고

$-1<r<1$에서 $-1<r^3<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}r^{3n}$은 항상 수렴한다.

ㅂ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n+(-r)^n}{2}=\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}r^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n\right\}$에서

$\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$은 공비가 $-r$인 등비급수이고

$-1<r<1$에서 $-1<-r<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$은 항상 수렴한다.

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

이상에서 항상 수렴하는 급수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅂ이다. **답 ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅂ**

63

수열 $\{a_n\}$의 일반항을 $a_n=ar^{n-1}$이라 하자.

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $-1<r<1$이다.

이때 $a_{2n}=ar^{2n-1}=ar(r^2)^{n-1}$에서 공비 r^2은 $0\le r^2<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$도 수렴한다. (참)

연습문제 실력 UP

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산하면 $r \le -1$ 또는 $r \ge 1$이다.
이때 수열 $\{a_{2n}\}$의 공비 r^2은 $r^2 \ge 1$이므로
$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$도 발산한다. (참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.
이때 $\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ne 0$이므로
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{1}{2}\right)$은 발산한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ③

64

$2^n S_n = 3^n - 2^n$에서 $S_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1$

$$\therefore a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 - \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1\right\}$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \quad (n \ge 2)$$

이때 $a_1 = S_1 = \frac{1}{2}$이므로 $a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \quad (n \ge 1)$

따라서

$$a_{2n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2n-2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2(n-1)}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = \frac{2}{1-\frac{4}{9}} = \frac{18}{5}$$

답 $\frac{18}{5}$

65

이차함수 $y=4x^2-2x-1$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 이차방정식 $4x^2-2x-1=0$의 두 실근과 같다.

이차방정식 $4x^2-2x-1=0$의 두 근은

$x=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ 또는 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$이고

$-1<\frac{1-\sqrt{5}}{4}<1$, $-1<\frac{1+\sqrt{5}}{4}<1$이므로

$-1<\alpha<1$, $-1<\beta<1$

또한, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{1}{2}$, $\alpha\beta=-\frac{1}{4}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha^n+\beta^n) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n + \sum_{n=1}^{\infty}\beta^n$$
$$= \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{\beta}{1-\beta}$$
$$= \frac{\alpha(1-\beta)+\beta(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)}$$
$$= \frac{\alpha+\beta-2\alpha\beta}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)}{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

답 4

다른풀이 이차함수 $y=4x^2-2x-1$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 이차방정식 $4x^2-2x-1=0$의 두 실근과 같다.

이차방정식 $4x^2-2x-1=0$의 두 근은

$x=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ 또는 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

$\therefore \alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$, $\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ 또는

$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$

이때 $-1<\frac{1-\sqrt{5}}{4}<1$, $-1<\frac{1+\sqrt{5}}{4}<1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha^n+\beta^n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n\right\}$$
$$= \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{4}}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{4}} + \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$
$$= \frac{1-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} + \frac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$$
$$= \frac{16}{4} = 4$$

66

$\overline{OA_1} = \overline{OA}\cos 30^\circ = 1\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{OA_2}=\overline{OA_1}\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\overline{OA_3}=\overline{OA_2}\cos 30^\circ=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

⋮

또,

$\overline{AA_1}=\overline{OA}\sin 30^\circ=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\overline{A_1A_2}=\overline{OA_1}\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}$

$\overline{A_2A_3}=\overline{OA_2}\sin 30^\circ=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}$

⋮

따라서 구하는 수선의 길이의 합은

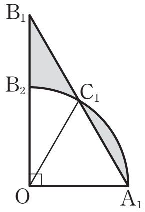
$\overline{AA_1}+\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\cdots$

$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+\cdots$

$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=2+\sqrt{3}$ 답 $\mathbf{2+\sqrt{3}}$

67

그림 R_1에서 부채꼴 OA_1B_2의 호 A_1B_2와 선분 A_1B_1이 만나는 점을 C_1이라 하자.



$\angle C_1OA_1=60^\circ$이므로 부채꼴 C_1OA_1의 넓이와 삼각형 C_1OA_1의 넓이의 차는

$\pi\times4^2\times\frac{60^\circ}{360^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=\frac{8}{3}\pi-4\sqrt{3}$ …… ㉠

또, $\angle C_1OB_1=30^\circ$이므로 삼각형 C_1OB_1의 넓이와 부채꼴 C_1OB_2의 넓이의 차는

$\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times2-\pi\times4^2\times\frac{30^\circ}{360^\circ}=4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$S_1=\left(\frac{8}{3}\pi-4\sqrt{3}\right)+\left(4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{4}{3}\pi$

한편, 삼각형 OA_1B_1과 삼각형 OA_2B_2의 닮음비는

$\overline{OB_1}:\overline{OB_2}=4\sqrt{3}:4=\sqrt{3}:1$

이므로 넓이의 비는 $(\sqrt{3})^2:1=3:1$이다.

따라서 그림 R_{n+1}에서 새로 색칠된 도형의 넓이는 그림 R_n에서 색칠된 도형의 넓이의 $\frac{1}{3}$배이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{1}{3}}=2\pi$ 답 ④

68

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{3^n}=\frac{4}{3}+\frac{7}{3^2}+\frac{10}{3^3}+\cdots$이므로

$S=\frac{4}{3}+\frac{7}{3^2}+\frac{10}{3^3}+\cdots$ …… ㉠

이라 하면

$\frac{1}{3}S=\frac{4}{3^2}+\frac{7}{3^3}+\frac{10}{3^4}+\cdots$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$\frac{2}{3}S=\frac{4}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots$

$=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots$

$=\frac{4}{3}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{11}{6}$

$\therefore S=\frac{11}{6}\times\frac{3}{2}=\frac{11}{4}$ 답 $\mathbf{\frac{11}{4}}$

KEY Point

수열 1×3, 2×3^2, 3×3^3, $\cdots$, $n\times3^n$, $\cdots$과 같이 두 수의 곱이 앞의 수는 등차수열, 뒤의 수는 등비수열로 이루어진 수열의 합을 멱급수라 한다.

〈구하는 방법〉

수열의 합을 S로 놓고 $S-rS$를 계산한다. (단, r는 공비)

69

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 r_1, r_2라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-r_1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{1}{1-r_2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\frac{8}{3}$에서

$\frac{1}{1-r_1}+\frac{1}{1-r_2}=\frac{8}{3}$, $\frac{1-r_2+1-r_1}{(1-r_1)(1-r_2)}=\frac{8}{3}$

$\therefore \frac{2-(r_1+r_2)}{1-(r_1+r_2)+r_1r_2}=\frac{8}{3}$ …… ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n=\frac{4}{5}$에서 $\sum_{n=1}^{\infty}(r_1^{\,n-1}\times r_2^{\,n-1})=\frac{4}{5}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(r_1r_2)^{n-1}=\frac{4}{5}$, $\frac{1}{1-r_1r_2}=\frac{4}{5}$

$4-4r_1r_2=5 \qquad \therefore r_1r_2=-\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $r_1+r_2=0 \qquad \therefore r_1=-r_2$

$r_1=-r_2$를 ㉡에 대입하면

$r_1^{\,2}=r_2^{\,2}=\frac{1}{4}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{\,2}+b_n^{\,2})=\frac{1}{1-r_1^{\,2}}+\frac{1}{1-r_2^{\,2}}$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

70

$a_1=0.\dot{1}=\frac{1}{9}$

$a_2=0.\dot{1}\dot{0}=\frac{10}{99}$

$a_3=0.\dot{1}0\dot{0}=\frac{10^2}{999}$

$\vdots$

$\therefore a_n=0.\dot{1}\underbrace{00\cdots0\dot{0}}_{(n-1)\text{개}}=\frac{10^{n-1}}{10^n-1}$

이때

$$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{10^{n+1}-1}{10^n}-\frac{10^n-1}{10^{n-1}}$$
$$=\frac{10^{n+1}-1-10(10^n-1)}{10^n}=\frac{9}{10^n}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=1$$

답 1

71

$\overline{A_1B_1}=3$, $\overline{B_1C_1}=1$이므로 직사각형 $OA_1B_1C_1$의 넓이는 $3\times1=3$

사분원 $C_1D_1B_1$의 반지름의 길이가 1이므로 그 넓이는

$\frac{1}{4}\times\pi\times1^2=\frac{\pi}{4}$

$\overline{OE_1}=\overline{OD_1}=2$이므로 직각삼각형 OA_1E_1에서

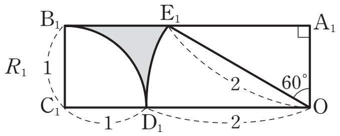
$\overline{A_1E_1}=\sqrt{\overline{OE_1}^2-\overline{OA_1}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

즉, 직각삼각형 OA_1E_1의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

한편, $\cos(\angle A_1OE_1)=\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OE_1}}=\frac{1}{2}$이므로

$\angle A_1OE_1=60^\circ$



따라서 부채꼴 E_1OD_1의 넓이는

$\pi\times2^2\times\frac{30^\circ}{360^\circ}=\frac{\pi}{3}$

$\therefore S_1=3-\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}=3-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{12}\pi$

$\overline{OA_n}=a_n$이라 하면 $\overline{OA_{n+1}}=a_{n+1}$,

$\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=3a_{n+1}$이므로

$\overline{OB_{n+1}}=\overline{OD_n}=\overline{OC_n}-\overline{C_nD_n}$

$\qquad=3a_n-a_n=2a_n \ (\because \overline{OA_n}=\overline{C_nD_n})$

직각삼각형 $OA_{n+1}B_{n+1}$에서

$a_{n+1}^{\,2}+(3a_{n+1})^2=(2a_n)^2$

$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

즉, 두 직사각형 $OA_nB_nC_n$, $OA_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 닮음비는 $\sqrt{5}:\sqrt{2}$이므로 넓이의 비는 $5:2$이다.

따라서 그림 R_{n+1}에서 새로 색칠된 도형의 넓이는 그림 R_n에서 새로 색칠된 도형의 넓이의 $\frac{2}{5}$배이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{S_1}{1-\frac{2}{5}}=\frac{5}{3}S_1$$
$$=\frac{5}{3}\left(3-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{12}\pi\right)$$
$$=5-\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{35}{36}\pi$$

답 ②

Ⅱ. 미분법

72

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a\times2^{x+2}+3}{2^{x-1}-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{8a+\frac{3}{2^{x-1}}}{1-\frac{5}{2^{x-1}}}$$
$$=8a$$

따라서 $8a=16$이므로 $a=2$ **답 2**

73

ㄱ. $-x=t$로 놓으면 $x=-t$이고 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}(1-x)^{-\frac{1}{x}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

ㄴ. $-x=t$로 놓으면 $x=-t$이고 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right\}^{-1}$$
$$=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

ㄷ. $x-2=t$로 놓으면 $x=t+2$이고 $x\to2$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{t\to0}\left(\frac{t+2}{2}\right)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to0}\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{t}}$$
$$=\lim_{t\to0}\left\{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{2}{t}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

ㄹ. $x+1=t$로 놓으면 $x=t-1$이고 $x\to-1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to-1}(x+2)^{\frac{1}{x+1}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

따라서 극한값이 e인 것은 ㄱ, ㄹ이다. **답 ㄱ, ㄹ**

74

$$A=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{3^{x+1}}{3^x-3}+\log_{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{3}{1-\frac{3}{3^x}}+\log_{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right\}$$
$$=3+\log_{\frac{1}{2}}1=3$$

$$B=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\{\ln(2+x)-\ln 2\}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{2+x}{2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\times\frac{1}{2}$$
$$=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$C=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+3x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+2x)}{2x}\times\frac{3x}{\ln(1+3x)}\times\frac{2}{3}\right\}$$
$$=1\times1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$\therefore B<C<A$ **답 $B<C<A$**

75

① $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times3$

$=1\times3=3$

② $-x=t$로 놓으면 $x=-t$이고 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}$$
$$=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-1}$$
$$=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

③ $\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{5x}\times5$

$=1\times5=5$

④ $\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}=\ln 2$

⑤ $\lim_{x\to0}\frac{x}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{e^{2x}-1}\times\frac{1}{2}$

$=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ **답 ②**

76

$$\lim_{x\to0}\frac{3^x+x\ln a-1}{2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{3^x-1}{2x}+\frac{\ln a}{2}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{3^x-1}{x}\times\frac{1}{2}+\frac{\ln a}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{2}\ln a=\frac{1}{2}\ln 3a$$

따라서 $\frac{1}{2}\ln 3a=1$이므로

$\ln 3a=2,\ 3a=e^2$

$\therefore\ a=\frac{e^2}{3}$ 답 $\boldsymbol{\frac{e^2}{3}}$

77

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n+1}\times\cdots\times\frac{2n+1}{2n}\right)^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$ 답 ④

78

$-x=t$로 놓으면 $x=-t$이고 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{-x}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-t-a}{-t+a}\right)^t=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1+\frac{a}{t}}{1-\frac{a}{t}}\right)^t$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left\{\left(1+\frac{a}{t}\right)^{\frac{t}{a}}\right\}^a}{\left\{\left(1-\frac{a}{t}\right)^{-\frac{t}{a}}\right\}^{-a}}=\frac{e^a}{e^{-a}}=e^{2a}$$

따라서 $e^{2a}=e$이므로

$2a=1$ $\quad\therefore\ a=\frac{1}{2}$ 답 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

79

(가)에서 $x\to1$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}(ax+b)=0$이므로

$a+b=0$ $\quad\therefore\ b=-a$

(가)의 식의 좌변에 $b=-a$를 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{ax-a}{e^{x-1}-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)}{e^{x-1}-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{e^{x-1}-1}\times a=a$$

$\therefore\ a=3,\ b=-3$

(다)에서 $c=a-b$이므로 $c=3-(-3)=6$

(나)의 식의 좌변에 $c=6$을 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{(6+12)^x-6^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{18^x-1+1-6^x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{18^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{6^x-1}{x}$$
$$=\ln 18-\ln 6=\ln 3$$

따라서 $\ln d=\ln 3$이므로 $d=3$ 답 **3**

80

$f(x)$가 이차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$f(x)g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)} & (x\neq0,\ x>-1)\\ 8b & (x=0)\end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$가 구간 $(-1,\ \infty)$에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이어야 한다.

$$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)}=8b \quad\cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x\to0$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(x^2+ax+b)=0$이므로 $b=0$

$b=0$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{x}{\ln(x+1)}\times(x+a)\right\}$$
$$=1\times a=a$$

$\therefore\ a=8b=0$

따라서 $f(x)=x^2$이므로 $f(3)=3^2=9$ 답 ②

81

$(\ln x-1)f(x)=x^2-e^2$에서 $x\neq e$일 때

$f(x)=\dfrac{x^2-e^2}{\ln x-1}$

이때 $f(x)$는 연속함수이므로 $x=e$에서도 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to e}f(x)=f(e)$ $\quad\therefore \lim_{x\to e}\dfrac{x^2-e^2}{\ln x-1}=f(e)$

$x-e=t$로 놓으면 $x=e+t$이고 $x\to e$일 때 $t\to 0$이므로

$$\begin{aligned}f(e)&=\lim_{x\to e}\frac{x^2-e^2}{\ln x-1}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{(e+t)^2-e^2}{\ln(e+t)-1}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{t(t+2e)}{\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)}\\&=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{e\times\frac{t}{e}}{\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)}\times(t+2e)\right\}\\&=e\times 2e=2e^2\end{aligned}$$

답 $\mathbf{2e^2}$

82

$y=3^x-1$로 놓으면 $3^x=y+1$

$x=\log_3(y+1)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\log_3(x+1)$

$\therefore g(x)=\log_3(x+1)$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\ln 3\times g(x)}{x}&=\ln 3\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}\\&=\ln 3\lim_{x\to 0}\frac{\log_3(x+1)}{x}\\&=\ln 3\times\frac{1}{\ln 3}=1\end{aligned}$$

답 **1**

83

$f(x)=\dfrac{a\times 3^{x+1}+b\times 2^x}{3^x-2^{x-1}}$이고, $\lim_{x\to\infty}f(x)=12$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{a\times 3^{x+1}+b\times 2^x}{3^x-2^{x-1}}&=\lim_{x\to\infty}\frac{3a+b\times\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^x}\\&=3a\end{aligned}$$

즉, $3a=12$이므로 $a=4$

$a=4$를 $\lim_{x\to 0}f(x)=8$에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{4\times 3^{x+1}+b\times 2^x}{3^x-2^{x-1}}&=\frac{12+b}{1-\frac{1}{2}}\\&=24+2b\end{aligned}$$

즉, $24+2b=8$이므로 $2b=-16$

$\therefore b=-8$

$\therefore a+b=4+(-8)=-4$

답 **−4**

84

두 곡선 $y=e^{x-1}$과 $y=a^x$이 만나는 점의 x좌표, 즉 $f(a)$는 방정식 $e^{x-1}=a^x$의 해이다.

$e^{x-1}=a^x$의 양변에 $\dfrac{e}{a^x}$를 곱하면

$\left(\dfrac{e}{a}\right)^x=e$

$\therefore x=\log_{\frac{e}{a}}e=\dfrac{\ln e}{\ln\frac{e}{a}}=\dfrac{1}{\ln\frac{e}{a}}$

$\therefore f(a)=\dfrac{1}{\ln\frac{e}{a}}$

$a-e=t$로 놓으면 $a=t+e$이고 $a\to e+$일 때 $t\to 0+$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{a\to e+}\frac{1}{(e-a)f(a)}&=\lim_{a\to e+}\frac{\ln\frac{e}{a}}{e-a}\\&=\lim_{t\to 0+}\frac{\ln\frac{e}{t+e}}{-t}\\&=\lim_{t\to 0+}\ln\left(\frac{e}{t+e}\right)^{-\frac{1}{t}}\\&=\lim_{t\to 0+}\ln\left\{\left(\frac{e}{t+e}\right)^{-1}\right\}^{\frac{1}{t}}\\&=\lim_{t\to 0+}\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)^{\frac{1}{t}}\\&=\lim_{t\to 0+}\ln\left\{\left(1+\frac{t}{e}\right)^{\frac{e}{t}}\right\}^{\frac{1}{e}}\\&=\ln\lim_{t\to 0+}\left\{\left(1+\frac{t}{e}\right)^{\frac{e}{t}}\right\}^{\frac{1}{e}}\\&=\ln e^{\frac{1}{e}}=\frac{1}{e}\end{aligned}$$

답 ②

실력 UP 연습문제

85

$\mathrm{P}(p, \ln p)$ $(p>0)$라 하면

$S_1=\frac{1}{2}\times(p-1)\times4=2(p-1)$

$S_2=\frac{1}{2}\times(e-1)\times\ln p=\frac{1}{2}(e-1)\ln p$

$\therefore \frac{S_2}{S_1}=\frac{\frac{1}{2}(e-1)\ln p}{2(p-1)}=\frac{(e-1)\ln p}{4(p-1)}$

여기서 제1사분면의 점 P가 점 B에 한없이 가까워지면 $p\to1+$이므로

$\lim_{p\to1+}\frac{S_2}{S_1}=\lim_{p\to1+}\frac{(e-1)\ln p}{4(p-1)}=\frac{e-1}{4}\lim_{p\to1+}\frac{\ln p}{p-1}$

이때 $p-1=t$로 놓으면 $p=t+1$이고 $p\to1+$일 때 $t\to0+$이므로

$\frac{e-1}{4}\lim_{p\to1+}\frac{\ln p}{p-1}=\frac{e-1}{4}\lim_{t\to0+}\frac{\ln(1+t)}{t}$

$=\frac{e-1}{4}$ 답 $\boldsymbol{\frac{e-1}{4}}$

86

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{e^{x+a}+x^3}{x+1}=b$ ...... ㉠

$x\to-1$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to-1}(e^{x+a}+x^3)=0$이므로

$e^{-1+a}-1=0$ $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to-1}\frac{e^{x+1}+x^3}{x+1}=b$

$x+1=t$로 놓으면 $x=t-1$이고 $x\to-1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to-1}\frac{e^{x+1}+x^3}{x+1}=\lim_{t\to0}\frac{e^t+(t-1)^3}{t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1+t(t^2-3t+3)}{t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}+\lim_{t\to0}(t^2-3t+3)$

$=1+3=4$

$\therefore b=4$

$\therefore a-b=1-4=-3$ 답 $\boldsymbol{-3}$

87

$f(x)=e^{6x}=(e^6)^x$에서 $f'(x)=e^{6x}\ln e^6=6e^{6x}$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f'(x)-6}{x}=\lim_{x\to0}\frac{6e^{6x}-6}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{6(e^{6x}-1)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{e^{6x}-1}{6x}\times36$

$=1\times36=36$ 답 ③

88

$f(x)=x\ln x^2=2x\ln x$ $(x>0)$에서

$f'(x)=(2x)'\ln x+2x(\ln x)'$

$=2\ln x+2x\times\frac{1}{x}$

$=2\ln x+2$

$\therefore f'(e^3)=2\ln e^3+2=8$ 답 8

89

$f(x)=a^{2x}=(a^2)^x$에서

$f'(x)=a^{2x}\ln a^2$

이때 주어진 곡선 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기가 e이므로 $f'(1)=e$이다.

$a^2\ln a^2=e$, $a^2\ln a^2=e\ln e$

$a^2=e$ $\therefore a=\sqrt{e}$ $(\because a>0)$ 답 ②

90

$f(x)=e^x$에서 $f'(x)=e^x$

닫힌구간 $[0, 1]$에서의 평균변화율은

$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=e-1$

또한, $x=a$에서의 미분계수는 $f'(a)$이므로

$f'(a)=e^a$

즉, $e^a=e-1$이므로 $a=\ln(e-1)$ 답 ④

91

$f(x)=e^{2x}\ln x$에서

$$f'(x)=\{(e^2)^x\}'\ln x+e^{2x}(\ln x)'$$
$$=e^{2x}\ln e^2\times\ln x+e^{2x}\times\frac{1}{x}$$
$$=2e^{2x}\ln x+\frac{e^{2x}}{x}$$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h}\times3$$
$$=f'(1)+3f'(1)=4f'(1)$$
$$=4\left(2e^2\ln1+\frac{e^2}{1}\right)=4e^2$$

답 $\mathbf{4e^2}$

92

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$에서

$\lim_{x\to1+}(bx+2)=\lim_{x\to1-}(5+a\ln x)=5$

$b+2=5$ $\quad\therefore b=3$ …… ㉠

또한, $f'(x)=\begin{cases}\frac{a}{x} & (0<x<1)\\ b & (x>1)\end{cases}$이고 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수 $f'(1)$이 존재하므로

$\lim_{x\to1+}f'(x)=\lim_{x\to1-}f'(x)$에서 $\lim_{x\to1+}b=\lim_{x\to1-}\frac{a}{x}$

$\therefore b=a$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=3$, $b=3$

답 $\mathbf{a=3,\ b=3}$

93

$g(x)=f(x)\ln x^4=f(x)\times4\ln x$에서

$$g'(x)=f'(x)\times4\ln x+f(x)\times(4\ln x)'$$
$$=4f'(x)\ln x+f(x)\times\frac{4}{x}$$

이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(e,\ -e)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(e,\ -4e)$에서의 접선이 서로 수직이므로

$$f'(e)g'(e)=-1$$
$$f'(e)\times\left\{4f'(e)\ln e+f(e)\times\frac{4}{e}\right\}=-1$$
$$f'(e)\times\left\{4f'(e)+(-e)\times\frac{4}{e}\right\}=-1$$
$$4\{f'(e)\}^2-4f'(e)+1=0$$
$$\{2f'(e)-1\}^2=0\qquad\therefore f'(e)=\frac{1}{2}$$
$$\therefore 100f'(e)=100\times\frac{1}{2}=50$$

답 **50**

94

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}=b$에서 $x\to1$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=0$이므로 $f(1)=2$

이때 $f(1)=a$이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=x^2\ln x+2x$이므로

$$f'(x)=(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)'+(2x)'$$
$$=2x\ln x+x+2$$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$$
$$=f'(1)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}f'(1)$$
$$\therefore b=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{2}$$
$$\therefore a+b=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$$

답 $\mathbf{\frac{7}{2}}$

95

$f(x)=x\log_2 ax^3=x\log_2 a+3x\log_2 x$에서

$$f'(x)=(x\log_2 a)'+(3x)'\log_2 x+3x(\log_2 x)'$$
$$=\log_2 a+3\log_2 x+3x\times\frac{1}{x\ln2}$$
$$=\log_2 ax^3+\frac{3}{\ln2}$$

실력 UP 연습문제

이때 $f(1)=\log_2 a$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-\log_2 a}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

즉, $f'(1)=2$이므로

$$\log_2 a+\frac{3}{\ln 2}=2$$

$$\log_2 a+3\log_2 e=2$$

$$\log_2 ae^3=2$$

$ae^3=4$ $\quad\therefore a=\dfrac{4}{e^3}$ 답 ③

96

$x\neq1$일 때 $f(x)=\dfrac{e^x-e}{e(x-1)}=\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}$이고

$f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}$$

$g(x)=e^{x-1}$으로 놓으면 $g(1)=1$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$$

$g'(x)=(e^{x-1})'=(e^{-1}\times e^x)'=e^{-1}\times e^x=e^{x-1}$이므로

$f(1)=g'(1)=e^{1-1}=1$ 답 **1**

97

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$에서

$$\lim_{x\to0+}(x^2-bx+1)=\lim_{x\to0-}(ae^{-x}-1)=a-1$$

$1=a-1$ $\quad\therefore a=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$ae^{-x}-1=a\left(\dfrac{1}{e}\right)^x-1$이므로

$$\left\{a\left(\frac{1}{e}\right)^x-1\right\}'=a\left(\frac{1}{e}\right)^x\ln\frac{1}{e}=ae^{-x}\ln e^{-1}=-ae^{-x}$$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases}2x-b & (x>0)\\ -ae^{-x} & (x<0)\end{cases}$$

또, $f(x)$의 $x=0$에서의 미분계수 $f'(0)$이 존재하므로 $\displaystyle\lim_{x\to0+}f'(x)=\lim_{x\to0-}f'(x)$에서

$$\lim_{x\to0+}(2x-b)=\lim_{x\to0-}(-ae^{-x})$$

$-b=-a$ $\quad\therefore a=b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$, $b=2$

$\therefore ab=4$ 답 ⑤

98

$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$$

$$\therefore \sec\theta-\csc\theta=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}}=\frac{4}{3}$$

답 $\dfrac{4}{3}$

99

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\csc\theta>0$, $\sec\theta<0$, $\cot\theta<0$

$$\therefore \sqrt{\csc^2\theta}+\sqrt{\sec^2\theta}+|\cot\theta|-\sqrt{(\cot\theta+\sec\theta)^2}$$
$$=|\csc\theta|+|\sec\theta|+|\cot\theta|-|\cot\theta+\sec\theta|$$
$$=\csc\theta-\sec\theta-\cot\theta+\cot\theta+\sec\theta$$
$$=\csc\theta$$

답 ④

100

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt5}{3}$에서 $\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{3}{\sqrt5}$

$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$이므로

$$\cot^2\theta=\csc^2\theta-1=\left(\frac{3}{\sqrt5}\right)^2-1=\frac{4}{5}$$

그런데 θ가 제2사분면의 각이므로 $\cot\theta<0$

$$\therefore \cot\theta=-\frac{2}{\sqrt5}=-\frac{2\sqrt5}{5},\ \tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}=-\frac{\sqrt5}{2}$$

$$\therefore \cot\theta+\tan\theta=-\frac{2\sqrt5}{5}-\frac{\sqrt5}{2}=-\frac{9\sqrt5}{10}$$

답 $-\dfrac{9\sqrt5}{10}$

101

$\dfrac{\tan\theta}{1+\sec\theta}+\dfrac{1+\sec\theta}{\tan\theta}$

$=\dfrac{\tan^2\theta+(1+\sec\theta)^2}{(1+\sec\theta)\tan\theta}$

$=\dfrac{\tan^2\theta+1+2\sec\theta+\sec^2\theta}{(1+\sec\theta)\tan\theta}$

$=\dfrac{(\sec^2\theta-1)+1+2\sec\theta+\sec^2\theta}{(1+\sec\theta)\tan\theta}$

$=\dfrac{2\sec\theta(\sec\theta+1)}{(1+\sec\theta)\tan\theta}=\dfrac{2\sec\theta}{\tan\theta}$

$=2\times\dfrac{1}{\cos\theta}\times\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\dfrac{2}{\sin\theta}=2\csc\theta$ **답 $2\csc\theta$**

102

$\tan\theta+\cot\theta=2$, 즉 $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=2$에서

양변에 $\tan\theta$를 곱하면 $\tan^2\theta-2\tan\theta+1=0$

$(\tan\theta-1)^2=0$ $\quad\therefore \tan\theta=1$

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로 $\sec^2\theta=2$

$\sec^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}=2$에서 $\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \csc^2\theta=\dfrac{1}{\sin^2\theta}=2$

$\therefore \csc^2\theta+\sec^2\theta=2+2=4$ **답 4**

다른풀이 $\tan\theta+\cot\theta=2$에서

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=2$

즉, $\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=2$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \csc^2\theta+\sec^2\theta=\dfrac{1}{\sin^2\theta}+\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{(\sin\theta\cos\theta)^2}$

$=\dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=4$

103

이차방정식 $4x^2-2x+k=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$, $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{k}{4}$

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$1+2\times\dfrac{k}{4}=\dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore k=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

$(\cos\theta-\sin\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\times\left(-\dfrac{3}{8}\right)=\dfrac{7}{4}$

이때 $\cos\theta>\sin\theta$이므로 $\cos\theta-\sin\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

$\therefore \csc^2\theta-\sec^2\theta$

$=\dfrac{1}{\sin^2\theta}-\dfrac{1}{\cos^2\theta}=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$=\dfrac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\sin\theta\cos\theta)^2}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{2}}{\left(-\frac{3}{8}\right)^2}=\dfrac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{9}{64}}=\dfrac{16\sqrt{7}}{9}$ **답 $\dfrac{16\sqrt{7}}{9}$**

104

$\dfrac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$이므로 $\cos\alpha>0$

$\therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=-\dfrac{3}{4}$

또, $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$이므로 $\cos\beta<0$

$\therefore \cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=-\dfrac{3}{5}$

$\tan\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore \tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\dfrac{-\dfrac{3}{4}-\left(-\dfrac{4}{3}\right)}{1+\left(-\dfrac{3}{4}\right)\times\left(-\dfrac{4}{3}\right)}=\dfrac{7}{24}$$

답 $\dfrac{7}{24}$

참고 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$

$$=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

를 이용하여 구할 수도 있다.

105

이차방정식 $x^2+6x+4=0$의 두 근이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=-6$, $\tan\alpha\tan\beta=4$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-6}{1-4}=2$

$\therefore \sec^2(\alpha+\beta)=1+\tan^2(\alpha+\beta)$

$$=1+2^2=5$$

답 5

106

두 직선 $x-y-1=0$, $ax-y+1=0$, 즉 $y=x-1$, $y=ax+1$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=1$, $\tan\beta=a$

$\tan\theta=\dfrac{1}{6}$이므로 $\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\dfrac{1}{6}$

$\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=\dfrac{1}{6}$, $\left|\dfrac{1-a}{1+a}\right|=\dfrac{1}{6}$

$\dfrac{1-a}{1+a}=\pm\dfrac{1}{6}$

$1-a=\dfrac{1}{6}(1+a)$ 또는 $1-a=-\dfrac{1}{6}(1+a)$

$\therefore a=\dfrac{5}{7}$ 또는 $a=\dfrac{7}{5}$

이때 $a>1$이므로 $a=\dfrac{7}{5}$

답 ④

107

$y=2\sin x+\sqrt{3}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2$

$=2\sin x+\sqrt{3}\left(\cos x\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin x\sin\dfrac{\pi}{3}\right)+2$

$=2\sin x+\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)+2$

$=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x+2$

$=\cos\dfrac{\pi}{3}\sin x+\sin\dfrac{\pi}{3}\cos x+2$

$=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2$

이때 $-1\le\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\le1$이므로

$1\le\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2\le3$

따라서 $M=3$, $m=1$이므로

$2M+m=2\times3+1=7$

답 7

108

$y=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)-k\cos\theta$

$=2\left(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{6}\right)-k\cos\theta$

$=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta\right)-k\cos\theta$

$=\sqrt{3}\sin\theta+(1-k)\cos\theta$

$=\sqrt{3+(1-k)^2}\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+(1-k)^2}}\sin\theta\right.$

$\left.+\dfrac{1-k}{\sqrt{3+(1-k)^2}}\cos\theta\right\}$

$=\sqrt{k^2-2k+4}\sin(\theta+\alpha)$ ⋯⋯ ㉠

$\left(\text{단, }\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{k^2-2k+4}},\ \sin\alpha=\dfrac{1-k}{\sqrt{k^2-2k+4}}\right)$

이때 $-1\le\sin(\theta+\alpha)\le1$이므로 ㉠의 최댓값은

$\sqrt{k^2-2k+4}$

주어진 함수의 최댓값이 $\sqrt{7}$이므로

$\sqrt{k^2-2k+4}=\sqrt{7}$

$k^2-2k+4=7$, $k^2-2k-3=0$

$(k+1)(k-3)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=3$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은

$-1+3=2$ 답 2

109

$y=a\sin x+b\cos x$

$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$

$\left(\text{단, } \cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

이때 $-1\le\sin(x+\alpha)\le1$이므로

$-\sqrt{a^2+b^2}\le\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)\le\sqrt{a^2+b^2}$

주어진 함수의 최댓값이 $2\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{5}$

$\therefore a^2+b^2=20$ ...... ㉠

한편, $b=a\tan\dfrac{\pi}{3}$에서 $b=\sqrt{3}a$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a^2+3a^2=20,\ 4a^2=20$

$\therefore a^2=5,\ b^2=15$

$\therefore b^2-a^2=10$ 답 10

110

$\sin\alpha+\sin\beta=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\dfrac{1}{5}$ ...... ㉠

$\cos\alpha-\cos\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$의 양변을 제곱하면

$\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\dfrac{1}{5}$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면

$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)$

$-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=\dfrac{2}{5}$

$2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=\dfrac{2}{5}$

$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{4}{5}$

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=\dfrac{4}{5}$ 답 $\dfrac{4}{5}$

111

두 직선 $y=-2x$, $y=ax+b$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=-2,\ \tan\beta=a$

이때 $\alpha-\beta=45^\circ$이므로

$\tan(\alpha-\beta)=\tan45^\circ=1$

$\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=1,\ \dfrac{-2-a}{1-2a}=1$

$-2-a=1-2a$ $\therefore a=3$

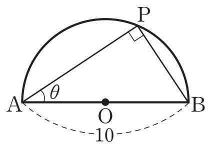
직선 $y=ax+b$, 즉 $y=3x+b$가 점 $P(-1, 2)$를 지나므로

$2=-3+b$ $\therefore b=5$

$\therefore ab=15$ 답 15

112

삼각형 ABP에서 $\angle P=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\angle A=\theta$라 하면



$\overline{AP}=10\cos\theta$

$\overline{BP}=10\sin\theta$

$\therefore 3\overline{AP}+4\overline{BP}$

$=30\cos\theta+40\sin\theta$

$=50\left(\dfrac{4}{5}\sin\theta+\dfrac{3}{5}\cos\theta\right)$

$=50\sin(\theta+\alpha)$ $\left(\text{단, } \cos\alpha=\dfrac{4}{5},\ \sin\alpha=\dfrac{3}{5}\right)$

$0\le\theta<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$에서 $0<\theta+\alpha<\pi$이므로

$0<\sin(\theta+\alpha)\le1$ $\therefore 0<50\sin(\theta+\alpha)\le50$

따라서 구하는 최댓값은 50이다. 답 50

113

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$에서 $\cos\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$이므로

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore \tan2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\times\dfrac{1}{3}}{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{3}{4}$

$\angle ABC=\alpha$라 하면 삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로

$\tan\alpha=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

$\angle EBC=\beta$라 하면 $\beta=\alpha-2\theta$이므로

$\tan\beta=\tan(\alpha-2\theta)=\frac{\tan\alpha-\tan 2\theta}{1+\tan\alpha\tan 2\theta}$

$=\frac{\frac{4}{3}-\frac{3}{4}}{1+\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}}=\frac{7}{24}$

한편, $\overline{BH}=\frac{\overline{FH}}{\tan\beta}$, $\overline{CH}=\frac{\overline{FH}}{\tan\theta}$이고

$\overline{BH}+\overline{CH}=12$이므로

$\frac{\overline{FH}}{\tan\beta}+\frac{\overline{FH}}{\tan\theta}=12$, $\frac{\overline{FH}}{\frac{7}{24}}+\frac{\overline{FH}}{\frac{1}{3}}=12$

$24\overline{FH}+21\overline{FH}=84$ $\therefore\ \overline{FH}=\frac{28}{15}$

따라서 $p=15$, $q=28$이므로

$p+q=43$ **답 43**

114

$g(x)=t$로 놓으면

$t=\sin x-\cos x$

$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{7}{4}\pi\right)$

이때 $-1\le\sin\left(x+\frac{7}{4}\pi\right)\le1$이므로

$-\sqrt{2}\le\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{7}{4}\pi\right)\le\sqrt{2}$

$\therefore\ -\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

$\therefore\ (f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)$

$=t^2+2t-1$

$=(t+1)^2-2\ (-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2})$

따라서 $t=-1$일 때 최솟값 -2, $t=\sqrt{2}$일 때 최댓값 $1+2\sqrt{2}$를 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은

$1+2\sqrt{2}+(-2)=2\sqrt{2}-1$ **답 ③**

115

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x-\tan x}{\cos x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ **답 ②**

116

① $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\times\frac{x}{\sin x}\right)$

$=1\times1=1$

② $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$이고 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$

③ $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1$

④ $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$이고 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to\infty}x\tan\frac{1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{\tan t}{t}=1$

⑤ $0\le\left|\cos\frac{1}{x}\right|\le1$이므로

$0\le|x|\left|\cos\frac{1}{x}\right|\le|x|$

$\therefore\ 0\le\left|x\cos\frac{1}{x}\right|\le|x|$

이때 $\lim_{x\to0}|x|=0$이므로 $\lim_{x\to0}\left|x\cos\frac{1}{x}\right|=0$

$\therefore\ \lim_{x\to0}x\cos\frac{1}{x}=0$

따라서 극한값이 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

답 ⑤

117

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos kx}{\sin^2 x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos kx)(1+\cos kx)}{\sin^2 x(1+\cos kx)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 kx}{\sin^2 x(1+\cos kx)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 kx}{\sin^2 x(1+\cos kx)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\times\left(\frac{\sin kx}{kx}\right)^2\times\frac{k^2}{1+\cos kx}\right\}$$
$$=1^2\times 1^2\times\frac{k^2}{2}$$
$$=\frac{k^2}{2}$$

즉, $\frac{k^2}{2}=4$이므로 $k^2=8$

$\therefore k=2\sqrt{2}$ ($\because k>0$) **답** $2\sqrt{2}$

118

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$이고 $x\to\infty$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\sin\frac{3}{x}\cot\frac{5}{x}$$
$$=\lim_{t\to 0}\sin 3t\cot 5t$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{\tan 5t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin 3t}{3t}\times\frac{5t}{\tan 5t}\times\frac{3}{5}\right)$$
$$=1\times 1\times\frac{3}{5}$$
$$=\frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

119

$x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x=\frac{\pi}{2}+t$이고 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(2x-\pi)^2}{2(1-\sin x)}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left\{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2}{2(1-\sin x)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{(2t)^2}{2\left\{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\right\}}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{4t^2}{2(1-\cos t)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{4t^2(1+\cos t)}{2(1-\cos t)(1+\cos t)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{2t^2(1+\cos t)}{1-\cos^2 t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{2t^2(1+\cos t)}{\sin^2 t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left\{\left(\frac{t}{\sin t}\right)^2\times 2(1+\cos t)\right\}$$
$$=1^2\times 2\times 2=4$$

답 4

참고 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\cos t$

120

$x\to 0$일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자)$\to 0$이므로 (분모)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}(\sqrt{2x+9}+a)=0$이므로 $\sqrt{9}+a=0$

$\therefore a=-3$

$a=-3$을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 4x}{\sqrt{2x+9}-3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 4x(\sqrt{2x+9}+3)}{(\sqrt{2x+9}-3)(\sqrt{2x+9}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 4x(\sqrt{2x+9}+3)}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\tan 4x}{4x}\times 2\times(\sqrt{2x+9}+3)\right\}$$
$$=1\times 2\times(\sqrt{9}+3)=12$$

따라서 $b=12$이므로

$a+b=-3+12=9$ **답** 9

121

함수 $f(\theta)$가 $-\pi\le\theta\le\pi$에서 연속이므로 $f(\theta)$는 $\theta=0$일 때도 연속이다. 즉,

$$f(0)=\lim_{\theta\to0}f(\theta)$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{2\theta^2}{1-\cos\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{2\theta^2(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{2\theta^2(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{2\theta^2(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\left\{\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^2\times2(1+\cos\theta)\right\}$$
$$=1^2\times2\times2=4$$

답 4

122

(ⅰ) $x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x=\frac{\pi}{2}+t$이고 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$$A=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\csc\left\{\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{t\to0}2t\csc\frac{t}{2}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{2t}{\sin\frac{t}{2}}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\times4$$
$$=1\times4=4$$

(ⅱ) $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos x}\right\}$$
$$=1^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos3\theta}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{(1-\cos3\theta)(1+\cos3\theta)}{\theta^2(1+\cos3\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin^23\theta}{\theta^2(1+\cos3\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\left\{\left(\frac{\sin3\theta}{3\theta}\right)^2\times\frac{9}{1+\cos3\theta}\right\}$$
$$=1^2\times\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$$

$$\therefore B=\frac{1}{2}+\frac{9}{2}=5$$

(ⅲ) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\tan3x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(\tan3x)}{\tan3x}\times\frac{\tan3x}{3x}\times3\right\}$$
$$=1\times1\times3=3$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{\log x^3}{\log(\sin^2x)}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{3\log x}{2\log(\sin x)}$$
$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to0+}\frac{\log x}{\log\frac{\sin x}{x}+\log x}$$
$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to0+}\frac{\log x}{\log x}\qquad\leftarrow \lim_{x\to0+}\log\frac{\sin x}{x}=\log1=0$$
$$=\frac{3}{2}$$

$$\therefore C=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $A<C<B$

답 $A<C<B$

123

$x\to\pi$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to\pi}(\sqrt{a+\cos x}-b)=0$이므로 $\sqrt{a-1}-b=0$

$\therefore b=\sqrt{a-1}$ …… ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{a+\cos x}-\sqrt{a-1}}{(x-\pi)^2}=\frac{1}{4}$$

이때 $x-\pi=t$로 놓으면 $x=\pi+t$이고 $x\to\pi$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{a+\cos x}-\sqrt{a-1}}{(x-\pi)^2}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{a+\cos(\pi+t)}-\sqrt{a-1}}{t^2}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{a-\cos t}-\sqrt{a-1}}{t^2}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{(\sqrt{a-\cos t}-\sqrt{a-1})(\sqrt{a-\cos t}+\sqrt{a-1})}{t^2(\sqrt{a-\cos t}+\sqrt{a-1})}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2(\sqrt{a-\cos t}+\sqrt{a-1})}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{t^2(\sqrt{a-\cos t}+\sqrt{a-1})(1+\cos t)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t^2(\sqrt{a-\cos t}+\sqrt{a-1})(1+\cos t)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left\{\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\times\frac{1}{(\sqrt{a-\cos t}+\sqrt{a-1})(1+\cos t)}\right\}$$
$$=1^2\times\frac{1}{2\sqrt{a-1}\times 2}=\frac{1}{4\sqrt{a-1}}$$

즉, $\frac{1}{4\sqrt{a-1}}=\frac{1}{4}$이므로 $\sqrt{a-1}=1$

$a-1=1$ $\qquad\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore a+2b=4$ **답 4**

124

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$

이때 $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sin 2(x-1)}{x-1}$

$x-1=t$로 놓으면 $x=t+1$이고

$x\to 1$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin 2(x-1)}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t}\times 2=2$$

$\therefore f(1)=a=2$ **답 2**

125

선분 BD를 그으면 $\overline{BC}=\overline{BD}=\sin\theta$이므로 삼각형 BCD는 이등변삼각형이다.

이때 $\angle BCD=\angle BDC=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로

$\angle CBD=\pi-2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2\theta$

$\overline{DE}\,/\!/\,\overline{BC}$이므로 $\angle BDE=2\theta$

삼각형 DEB에서

$\overline{DE}=\sin\theta\cos 2\theta$, $\overline{BE}=\sin\theta\sin 2\theta$

따라서 사다리꼴 BCDE의 넓이는

$$S(\theta)=\frac{1}{2}(\overline{DE}+\overline{BC})\times\overline{BE}$$
$$=\frac{1}{2}(\sin\theta\cos 2\theta+\sin\theta)\times\sin\theta\sin 2\theta$$
$$=\frac{1}{2}\sin^2\theta\sin 2\theta(1+\cos 2\theta)$$
$$\therefore\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^2\theta\sin 2\theta(1+\cos 2\theta)}{2\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\times(1+\cos 2\theta)\right\}$$
$$=1^2\times 1\times 2=2$$

답 ④

126

$f(x)=\sec x$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{f(x)-f(0)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sec 2x-1}{\sec x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}-1}{\frac{1}{\cos x}-1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos 2x}{\cos 2x}}{\frac{1-\cos x}{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2-2\cos^2 x}{2\cos^2 x-1}}{\frac{1-\cos x}{\cos x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x(1-\cos^2 x)}{(1-\cos x)(2\cos^2 x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x(1+\cos x)(1-\cos x)}{(1-\cos x)(2\cos^2 x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x(1+\cos x)}{2\cos^2 x-1}$$
$$=\frac{2\times 1\times 2}{2-1}=4$$

답 4

127

$f(n)$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{x}+\cdots+\frac{\sin nx}{x}}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{2x}\times 2+\cdots+\frac{\sin nx}{nx}\times n}$

$=\frac{2}{1+2+\cdots+n}=\frac{2}{\frac{n(n+1)}{2}}$

$=\frac{4}{n(n+1)}=4\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(k)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 4\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}4\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}4\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=4$ **답 4**

128

삼각형 ABC에서

$\overline{AB}=\overline{BC}\cos\theta=2\cos\theta$

$\overline{AC}=\overline{BC}\sin\theta=2\sin\theta$

이때 삼각형 ABC의 넓이에서

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}$이므로

$\frac{1}{2}\times 2\cos\theta\times 2\sin\theta=\frac{1}{2}\times 2\times\overline{AH}$

$\therefore \overline{AH}=2\sin\theta\cos\theta$

$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{AH}}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\theta}$

$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times 2\cos\theta\right)$

$=1\times 2=2$ **답 2**

129

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면 $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$이어야 한다.

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\sin^2 x}=b$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x\to 0$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}(a-\cos x)=0$이므로 $a-1=0$

$\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}=b$

$\therefore a+b=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ **답 $\frac{3}{2}$**

130

직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=1$, $\angle A=\theta$이므로

$\overline{AC}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$, $\overline{BC}=\tan\theta$

이때 직선 CD가 $\angle C$를 이등분하므로 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{AD}:\overline{BD}$

$\sec\theta:\tan\theta=\overline{AD}:(1-\overline{AD})$

$\tan\theta\times\overline{AD}=\sec\theta(1-\overline{AD})$

$\therefore \overline{AD}=\frac{\sec\theta}{\tan\theta+\sec\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta+1}$

따라서 부채꼴 ADE의 넓이는

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1+\sin\theta}\right)^2\times\theta$

$=\frac{\theta}{2(1+\sin\theta)^2}$

한편,

$\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{AC}}-\overline{\mathrm{AE}}=\sec\theta-\dfrac{1}{1+\sin\theta}$

이므로 삼각형 BCE의 넓이는

$$T(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CE}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\sin(\angle\mathrm{C})$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\sec\theta-\frac{1}{1+\sin\theta}\right)\times\tan\theta\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sec\theta-\frac{1}{1+\sin\theta}\right)\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\cos\theta$$

$$=\frac{1}{2}\sin\theta\left(\sec\theta-\frac{1}{1+\sin\theta}\right)$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left\{\dfrac{\theta}{2(1+\sin\theta)^2}\right\}^2}{\dfrac{1}{2}\sin\theta\left(\sec\theta-\dfrac{1}{1+\sin\theta}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2}{2\sin\theta(1+\sin\theta)^3(\sec\theta+\sec\theta\sin\theta-1)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2\cos\theta}{2\sin\theta(1+\sin\theta)^3(1+\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{\theta}{\sin\theta}\times\frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)^3}\times\frac{\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{\theta}{\sin\theta}\times\frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)^3}\times\frac{1}{\dfrac{1-\cos\theta}{\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\theta}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{1}\times\frac{1}{0+1}=\frac{1}{2}$$

답 ②

참고 $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)$$

$$=1\times\frac{0}{2}=0$$

131

$f'(x)=a\cos x-b\sin x$

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$에서 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a-\dfrac{\sqrt{2}}{2}b=0$

$\therefore a=b$ ······ ㉠

$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}-1$에서

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a-\dfrac{1}{2}b=\sqrt{3}-1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=2$

$\therefore ab=4$

답 4

132

$$f(x)=\lim_{h\to0}\frac{x\sin(x+h)-x\sin x}{h}$$

$$=x\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=x(\sin x)'=x\cos x$$

이므로

$f'(x)=\cos x+x(-\sin x)$

$=\cos x-x\sin x$

$\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}$

$=-\dfrac{\pi}{2}$

답 $-\dfrac{\pi}{2}$

133

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0-}\cos x=\lim_{x\to0+}(3x^2+ax+b)=f(0)$$

$\therefore b=1$

또, $f'(0)$이 존재하므로

$f'(x)=\begin{cases}-\sin x & (x<0)\\ 6x+a & (x>0)\end{cases}$에서

$$\lim_{x\to0-}(-\sin x)=\lim_{x\to0+}(6x+a)$$

$\therefore a=0$

$\therefore a+b=1$

답 1

134

$f'(x)=-\sqrt{3}\sin x-\cos x-1$이므로

$f'(a)=-\sqrt{3}\sin a-\cos a-1$

$=-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin a+\frac{1}{2}\cos a\right)-1$

$=-2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin a+\sin\frac{\pi}{6}\cos a\right)-1$

$=-2\sin\left(a+\frac{\pi}{6}\right)-1$

즉, $-2\sin\left(a+\frac{\pi}{6}\right)-1=-\sqrt{2}-1$이므로

$\sin\left(a+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0\le a\le\frac{\pi}{2}$에서

$\frac{\pi}{6}\le a+\frac{\pi}{6}\le\frac{2}{3}\pi$이므로

$a+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$ $\quad\therefore a=\frac{\pi}{12}$

답 $\boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$

135

$f(x)=\sin^2 x=\sin x\sin x$이므로

$f'(x)=\cos x\sin x+\sin x\cos x$

$=2\sin x\cos x$

$\therefore \lim_{x\to\pi}\frac{f'(x)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin x\cos x}{x-\pi}$

이때 $x-\pi=t$로 놓으면 $x=\pi+t$이고 $x\to\pi$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin x\cos x}{x-\pi}$

$=\lim_{t\to0}\frac{2\sin(\pi+t)\cos(\pi+t)}{t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{2(-\sin t)(-\cos t)}{t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{2\sin t\cos t}{t}$

$=\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}\times2\cos t\right)$

$=1\times2=2$

답 2

136

$\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(a)\}^2}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)-f(a)\}\{f(x)+f(a)\}}{x-a}$

$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\lim_{x\to a}\{f(x)+f(a)\}$

$=2f'(a)f(a)$

$f'(x)=\cos x-\sin x$이므로

$2f'(a)f(a)=2(\cos a-\sin a)(\sin a+\cos a)$

$=2(\cos^2 a-\sin^2 a)$

$=2\{\cos^2 a-(1-\cos^2 a)\}$

$=4\cos^2 a-2$

따라서 $4\cos^2 a-2=1$이므로

$\cos^2 a=\frac{3}{4}$

답 ⑤

137

$f'(x)=\frac{(\sin x)'(1+e^x)-\sin x(1+e^x)'}{(1+e^x)^2}$

$=\frac{\cos x(1+e^x)-e^x\sin x}{(1+e^x)^2}$

$\therefore f'(0)=\frac{1\times(1+1)}{(1+1)^2}=\frac{1}{2}$

답 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

138

$\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{6}-h\right)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)+f\left(\frac{\pi}{6}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}-h\right)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}$

$+\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{6}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{-h}$

$=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)+f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$

이때 $f'(x)=2\cos x\times(\cos x)'=-2\sin x\cos x$ 이므로

$$2f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\times(-2)\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=-\sqrt{3}$$

답 ②

139

$f(x)=\left(\frac{2x+a}{x+1}\right)^3$에서

$$f'(x)=3\left(\frac{2x+a}{x+1}\right)^2\left(\frac{2x+a}{x+1}\right)'$$
$$=3\left(\frac{2x+a}{x+1}\right)^2\times\frac{2(x+1)-(2x+a)}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{3(2x+a)^2(2-a)}{(x+1)^4}$$

$f'(0)=3$이므로

$3a^2(2-a)=3,\ (a-1)(a^2-a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a$는 정수)

답 ③

140

$g(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$이므로

$g'(x)=f'(f(x))f'(x)$

이때 $f'(x)=\frac{1}{2}+2\cos x,\ f(\pi)=\frac{\pi}{2}$,

$f'(\pi)=-\frac{3}{2},\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$이므로

$$g'(\pi)=f'(f(\pi))\times f'(\pi)$$
$$=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\times f'(\pi)$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4}$$

답 ③

141

$y=\log_2(\ln x^2)$에서

$$y'=\frac{(\ln x^2)'}{\ln x^2\ln 2}=\frac{\frac{2x}{x^2}}{2\ln|x|\ln 2}$$
$$=\frac{1}{x\ln|x|\ln 2}$$

따라서 점 $(e,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{1}{e\ln e\ln 2}=\frac{1}{e\ln 2}$$

답 ②

142

$$f'(x)=\frac{(1+\sin^2 2x)'}{2\sqrt{1+\sin^2 2x}}$$
$$=\frac{2\sin 2x\times\cos 2x\times 2}{2\sqrt{1+\sin^2 2x}}$$
$$=\frac{2\sin 2x\cos 2x}{\sqrt{1+\sin^2 2x}}$$

따라서 $x=\frac{\pi}{6}$에서의 미분계수는

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

답 $\frac{\sqrt{21}}{7}$

143

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$에서 $x\to 2$일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

$\therefore \lim_{x\to 2}\{f(x)-3\}=0$

이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서 $\lim_{x\to 2}\{f(x)-3\}=f(2)-3=0$에서

$f(2)=3$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=f'(2)$$

$\therefore f'(2)=5$

한편, $g(x)=\frac{f(x)}{e^{x-2}}$에서

$$g'(x)=\frac{f'(x)\times e^{x-2}-f(x)\times e^{x-2}}{(e^{x-2})^2}$$
$$=\frac{\{f'(x)-f(x)\}\times e^{x-2}}{(e^{x-2})^2}$$
$$=\frac{f'(x)-f(x)}{e^{x-2}}$$

$$\therefore g'(2)=\frac{f'(2)-f(2)}{e^0}$$
$$=\frac{5-3}{1}=2$$

답 ②

144

$f(x)$를 $(2x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^8+ax+b=(2x-1)^2Q(x)$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$8x^7+a=2(2x-1)\times2\times Q(x)+(2x-1)^2Q'(x)$ …… ㉡

㉠, ㉡의 양변에 각각 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면

$\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2}a+b=0,\ \frac{8}{2^7}+a=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{1}{2^4},\ b=\frac{7}{2^8}$

$\therefore\ a+16b=-\frac{1}{2^4}+16\times\frac{7}{2^8}$

$=\frac{3}{8}$

답 $\frac{3}{8}$

145

$(f\circ g)(x)=xe^x$에서 $f(g(x))=xe^x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=e^x+xe^x$

$=(1+x)e^x$ …… ㉠

이때 $g(x)=x^3+1=9$에서 $x=2$이므로

$g(2)=9$

$g'(x)=3x^2$이므로 $g'(2)=12$

㉠에 $x=2$를 대입하면

$f'(g(2))g'(2)=f'(9)\times12=3e^2$

$\therefore\ f'(9)=\frac{e^2}{4}$

답 $\frac{e^2}{4}$

146

$f(x)=\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx})$이라 하면

$f(0)=\ln n$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

이때 $f'(x)=\frac{e^x+2e^{2x}+3e^{3x}+\cdots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}}$이므로

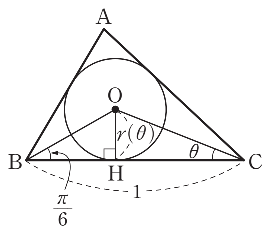
$f'(0)=\frac{1+2+3+\cdots+n}{n}$

$=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}=\frac{n+1}{2}$

답 ①

147

삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심을 O라 하고, 점 O에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.



점 O는 삼각형 ABC의 내심이므로

$\angle\mathrm{OBH}=\frac{\pi}{6},\ \angle\mathrm{OCH}=\theta$

$\frac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{BH}}}=\tan\frac{\pi}{6}$에서 $\frac{r(\theta)}{\overline{\mathrm{BH}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로

$\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{3}r(\theta)$

$\frac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{CH}}}=\tan\theta$에서 $\frac{r(\theta)}{\overline{\mathrm{CH}}}=\tan\theta$이므로

$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{r(\theta)}{\tan\theta}$

이때 $\overline{\mathrm{BH}}+\overline{\mathrm{HC}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로

$\sqrt{3}r(\theta)+\frac{r(\theta)}{\tan\theta}=1,\ r(\theta)=\frac{\tan\theta}{1+\sqrt{3}\tan\theta}$

$\therefore\ h(\theta)=\frac{r(\theta)}{\tan\theta}=\frac{1}{1+\sqrt{3}\tan\theta}$

$h(\theta)$를 θ에 대하여 미분하면

$h'(\theta)=-\frac{\sqrt{3}\sec^2\theta}{(1+\sqrt{3}\tan\theta)^2}$

$\therefore\ h'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(1+\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 ②

148

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\cos\frac{\pi}{2}}=1$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

한편, $f(x)=x^{\cos x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\ln x^{\cos x}=\cos x\times\ln x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\sin x\times\ln x+\cos x\times\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=x^{\cos x}\left(-\sin x\times\ln x+\frac{1}{x}\cos x\right)$$

$$\therefore\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\cos\frac{\pi}{2}}\left(-\sin\frac{\pi}{2}\times\ln\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-\ln\frac{\pi}{2}$$

답 $-\ln\frac{\pi}{2}$

149

$$\frac{dx}{dt}=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t$$

$$\frac{dy}{dt}=\cos t-(\cos t-t\sin t)=t\sin t$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t\sin t}{t\cos t}$$

$$=\tan t\ (t\cos t\neq 0)$$

따라서 $t=\frac{\pi}{3}$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

답 ④

150

$x=y^3+y-1$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=3y^2+1$$

따라서 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{3y^2+1}$이므로

$$\lim_{y\to1}\frac{dy}{dx}=\lim_{y\to1}\frac{1}{3y^2+1}=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

151

$f'(x)=\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$이므로

$$f'(-1)=\frac{e}{(1+e)^2}$$

$$\therefore\ g'(f(-1))=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{(1+e)^2}{e}$$

답 ⑤

152

$f'(x)=\frac{(\sin x)'}{\sin x}=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$이므로

$$f''(x)=(\cot x)'=-\csc^2 x$$

$$\therefore\ f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\csc^2\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{3}}$$

$$=-\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=-\frac{4}{3}$$

답 $-\frac{4}{3}$

153

$f'(x)=\frac{(x^2+2)'}{x^2+2}=\frac{2x}{x^2+2}$이므로

$$f''(x)=\frac{2(x^2+2)-2x\times2x}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{-2(x^2-2)}{(x^2+2)^2}$$

$$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{f'(2+h)-f'(2)}{h}=f''(2)$$

$$=\frac{-2\times2}{6^2}$$

$$=-\frac{1}{9}$$

답 $-\frac{1}{9}$

154

$y=e^{-x}\cos x$에서

$y'=(e^{-x})'\cos x+e^{-x}(\cos x)'$

$=-e^{-x}\cos x+e^{-x}\times(-\sin x)$

$=-e^{-x}(\cos x+\sin x)$

$y''=(-e^{-x})'(\cos x+\sin x)-e^{-x}(\cos x+\sin x)'$

$=e^{-x}(\cos x+\sin x)-e^{-x}(-\sin x+\cos x)$

$=2e^{-x}\sin x$

$y''+2y'=ky$에서

$2e^{-x}\sin x-2e^{-x}(\cos x+\sin x)=ke^{-x}\cos x$

$-2e^{-x}\cos x=ke^{-x}\cos x$

위 등식이 x의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$k=-2$ 답 ①

155

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=2f'(1)$

이때 $\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=\frac{(1+t)-t}{(1+t)^2}=\frac{1}{(1+t)^2}$이므로

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{\frac{1}{(1+t)^2}}{2t}=\frac{1}{2t(1+t)^2}$$

$x=1$일 때, $t^2=1$에서 $t=1$ ($\because t>0$)

$\therefore$ (주어진 식)$=2f'(1)$

$=2\times\frac{1}{2\times(1+1)^2}=\frac{1}{4}$ 답 ③

156

y를 x에 대한 함수로 보고 주어진 식의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}y\frac{dy}{dx}=0$ $\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3x}{y}$ $(y\neq 0)$

점 (a, b)에서의 접선의 기울기는 $\frac{3a}{b}$이므로

$\frac{3a}{b}=2\sqrt{3}$ $\therefore a=\frac{2\sqrt{3}}{3}b$ …… ㉠

또, 점 (a, b)는 곡선 위의 점이므로

$\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{12}=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $b=\pm 2$ (복부호동순)

$\therefore 3(a^2+b^2)=3\left(\frac{16}{3}+4\right)=28$ 답 28

157

$\lim_{x\to 1}\frac{2-g(x)}{x-1}=\frac{1}{3}$에서 $x\to 1$일 때 극한값이 존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}\{2-g(x)\}=0$에서 $2-g(1)=0$

$\therefore g(1)=2$

또, 미분계수의 정의에 의하여

$\lim_{x\to 1}\frac{2-g(x)}{x-1}=-\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

$=-g'(1)=\frac{1}{3}$

$\therefore g'(1)=-\frac{1}{3}$

한편, $f(x)$와 $g(x)$는 역함수 관계이므로

$g(1)=2$에서 $f(2)=1$

따라서 역함수의 미분법에 의하여

$$f'(2)=\frac{1}{g'(f(2))}$$

$$=\frac{1}{g'(1)}$$

$$=\frac{1}{-\frac{1}{3}}=-3$$

답 -3

158

함수 $f(x)=\ln(e^x+1)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$g(a)=b$라 하면 $f(b)=a$

즉, $\ln(e^b+1)=a$에서 $e^b+1=e^a$

이때 $f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$이므로

$$g'(a)=\frac{1}{f'(g(a))}=\frac{1}{f'(b)}$$

$$=\frac{e^b+1}{e^b}=\frac{e^a}{e^a-1}$$

$$\therefore \frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{g'(a)}$$

$$=\frac{e^a+1}{e^a}+\frac{e^a-1}{e^a}$$

$$=\frac{2e^a}{e^a}=2$$

답 ④

159

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(3e+h)-g(3e-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(3e+h)-g(3e)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(3e-h)-g(3e)}{-h}$$
$$=g'(3e)+g'(3e)$$
$$=2g'(3e)$$

이때 $f(e)=3e$이고 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(3e)=e$

함수 $f(x)=3x\ln x$에서

$$f'(x)=3\ln x+3x\times\frac{1}{x}=3\ln x+3$$

이므로 $f'(e)=3\ln e+3=6$

이때 역함수의 미분법에 의하여

$$g'(3e)=\frac{1}{f'(g(3e))}=\frac{1}{f'(e)}=\frac{1}{6}$$

$\therefore$ (주어진 식)$=2g'(3e)=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

답 ①

160

$$f'(x)=(e^{3x})'\sin x+e^{3x}(\sin x)'$$
$$=3e^{3x}\sin x+e^{3x}\cos x$$
$$=e^{3x}(3\sin x+\cos x)$$
$$f''(x)=(e^{3x})'(3\sin x+\cos x)+e^{3x}(3\sin x+\cos x)'$$
$$=3e^{3x}(3\sin x+\cos x)+e^{3x}(3\cos x-\sin x)$$
$$=2e^{3x}(4\sin x+3\cos x)$$

이때 방정식 $f''(x)=0$의 해가 $x=\alpha$이므로

$2e^{3\alpha}(4\sin\alpha+3\cos\alpha)=0$

$2e^{3\alpha}>0$이므로 $4\sin\alpha+3\cos\alpha=0$

$0<\alpha<\pi$에서 $\sin\alpha>0$이므로

$4\sin\alpha+3\cos\alpha=0$의 양변을 $\sin\alpha$로 나누면

$4+3\times\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=0$, $4+3\cot\alpha=0$

$\therefore \cot\alpha=-\frac{4}{3}$

답 $-\frac{4}{3}$

161

$\frac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=3\cos\theta$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{3\cos\theta}{2\sin\theta}=-\frac{3}{2}\cot\theta$ $(\sin\theta\neq 0)$

$-\frac{3}{2}\cot\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 $\cot\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

즉, $\tan\theta=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$에서 $0<\theta<2\pi$이므로

$\theta=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\frac{4}{3}\pi$

그런데 $\theta=\frac{4}{3}\pi$이면 $b<0$이므로 $\theta=\frac{\pi}{3}$

$\therefore a=4+2\cos\frac{\pi}{3}=5$,

$b=2+3\sin\frac{\pi}{3}=2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore ab=5\left(2+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=10+\frac{15\sqrt{3}}{2}$

답 $10+\frac{15\sqrt{3}}{2}$

162

두 곡선의 교점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 점 P는 곡선 $x^2+2y^2=17$과 곡선 $4x^2-y^2=-4$ 위의 점이므로

$a^2+2b^2=17$, $4a^2-b^2=-4$

두 식을 연립하여 풀면 $a^2=1$, $b^2=8$ …… ㉠

$x^2+2y^2=17$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$2x+4y\frac{dy}{dx}=0$ $\quad\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{2y}$ $(y\neq 0)$

따라서 곡선 $x^2+2y^2=17$ 위의 점 $P(a, b)$에서의 접선의 기울기는 $m_1=-\frac{a}{2b}$

또, $4x^2-y^2=-4$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$8x-2y\frac{dy}{dx}=0$ $\quad\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{4x}{y}$ $(y\neq 0)$

따라서 곡선 $4x^2-y^2=-4$ 위의 점 $P(a, b)$에서의 접선의 기울기는 $m_2=\frac{4a}{b}$

$$\therefore m_1m_2=\left(-\frac{a}{2b}\right)\times\frac{4a}{b}=-\frac{2a^2}{b^2}$$
$$=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}\ (\because ㉠)$$

답 $-\frac{1}{4}$

연습문제 실력UP

163

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=6$에서 $f(2)=3$, $f'(2)=6$

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-1}{x-3}=\frac{1}{3}$에서 $f(3)=1$, $f'(3)=\frac{1}{3}$

이때 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$f(2)=3$에서 $g(3)=2$

$f(3)=1$에서 $g(1)=3$

$g(g(x))=h(x)$로 놓으면

$h(1)=g(g(1))=g(3)=2$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{g(g(x))-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)$

따라서 $h'(x)=g'(g(x))g'(x)$이므로

$$\begin{aligned}h'(1)&=g'(g(1))g'(1)\\&=g'(3)g'(1)\\&=\frac{1}{f'(g(3))}\times\frac{1}{f'(g(1))}\\&=\frac{1}{f'(2)}\times\frac{1}{f'(3)}\\&=\frac{1}{6}\times 3=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ②

164

$x^2+2xy=3$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$2x+2y+2x\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-1-\frac{y}{x}$ $(x\neq 0)$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(-1-\frac{y}{x}\right)\\&=-\frac{\frac{dy}{dx}\times x-y}{x^2}=\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}\times\frac{dy}{dx}\\&=\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}\left(-1-\frac{y}{x}\right)\\&=\frac{2y}{x^2}+\frac{1}{x}\end{aligned}$$

따라서 $x=1$, $y=1$일 때, $\frac{d^2y}{dx^2}$의 값은

$\frac{2}{1}+1=3$

답 3

165

조건 (나)에서 $x\to 1$일 때 극한값이 존재하고

(분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}\{f'(f(x))-1\}=0$에서 $f'(f(1))=1$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to 1}&\frac{f'(f(x))-1}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{f'(f(x))-f'(f(1))}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f'(f(x))-f'(f(1))}{f(x)-f(1)}\times\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right\}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{f'(f(x))-f'(f(1))}{f(x)-f(1)}\\&\qquad\times\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\&=f''(f(1))f'(1)\\&=f''(2)\times 3=3f''(2)\end{aligned}$$

따라서 $3f''(2)=3$이므로

$f''(2)=1$

답 ①

166

$f(x)=\sqrt{1+\sin\pi x}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{\pi\cos\pi x}{2\sqrt{1+\sin\pi x}}$

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=\frac{\pi\times(-1)}{2}=-\frac{\pi}{2}$

이므로 접선의 방정식은

$y-1=-\frac{\pi}{2}(x-1)$ $\qquad\therefore y=-\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}+1$

따라서 $a=-\frac{\pi}{2}$, $b=\frac{\pi}{2}+1$이므로

$a-b=-\pi-1$

답 $-\pi-1$

167

$f(x)=e^x$으로 놓으면 $f'(x)=e^x$

접점의 좌표를 $(a,\ e^a)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(a)=e^a=1$ $\qquad\therefore a=0$

따라서 접점의 좌표가 $(0,\ 1)$이므로 접선의 방정식은

$y=x+1$ $\qquad\therefore k=1$

답 ①

168

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{\ln t}{t}\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$

이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{\ln t}{t}=\frac{1-\ln t}{t^2}(x-t)$ …… ㉠

이 직선이 원점을 지나므로

$-\frac{\ln t}{t}=\frac{1-\ln t}{t^2}\times(-t)$

$\ln t=1-\ln t \ (\because t>0)$

$\ln t=\frac{1}{2}$ $\quad \therefore t=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

$t=\sqrt{e}$를 ㉠에 대입하면

$y-\frac{1}{2\sqrt{e}}=\frac{1}{2e}(x-\sqrt{e})$ $\quad \therefore y=\frac{1}{2e}x$

따라서 이 직선이 점 $\left(a, \frac{1}{2}\right)$을 지나므로

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2e}\times a$ $\quad \therefore a=e$

답 $\boldsymbol{e}$

169

$f(x)=k-\cos^2 x$, $g(x)=\cos x$로 놓으면

$f'(x)=2\sin x\cos x$, $g'(x)=-\sin x$

두 곡선의 접점의 x좌표가 t이므로

$f(t)=g(t)$에서

$k-\cos^2 t=\cos t$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서

$2\sin t\cos t=-\sin t$

$\sin t(2\cos t+1)=0$

이때 $0<t<\pi$에서 $\sin t>0$이므로

$\cos t=-\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$k-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$ $\quad \therefore k=-\frac{1}{4}$

답 $\boldsymbol{-\frac{1}{4}}$

170

$\frac{dx}{dt}=e^t+e^{-t}$, $\frac{dy}{dt}=2e^t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2e^t}{e^t+e^{-t}}$$

$t=\ln 3$일 때, $x=e^{\ln 3}-e^{-\ln 3}=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$,

$y=2e^{\ln 3}=6$이고 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2e^{\ln 3}}{e^{\ln 3}+e^{-\ln 3}}=\frac{6}{\frac{10}{3}}=\frac{9}{5}$$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-6=\frac{9}{5}\left(x-\frac{8}{3}\right)$

$\therefore y=\frac{9}{5}x+\frac{6}{5}$

답 $\boldsymbol{y=\frac{9}{5}x+\frac{6}{5}}$

171

$e^y\ln x=2y+1$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$e^y\ln x\frac{dy}{dx}+e^y\times\frac{1}{x}=2\frac{dy}{dx}$

$(e^y\ln x-2)\frac{dy}{dx}=-\frac{e^y}{x}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{e^y}{x(e^y\ln x-2)}$

점 $(e, 0)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{dy}{dx}=-\frac{e^0}{e(e^0\ln e-2)}=\frac{1}{e}$

이므로 접선의 방정식은

$y-0=\frac{1}{e}(x-e)$ $\quad \therefore y=\frac{1}{e}x-1$

따라서 $a=\frac{1}{e}$, $b=-1$이므로

$ab=-\frac{1}{e}$

답 ⑤

172

점 P의 x좌표는 $f(x)=0$에서

$\ln(\tan x)=0$, $\tan x=1$

$0<x<\frac{\pi}{2}$이므로 $x=\frac{\pi}{4}$

즉, 점 P의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

$f'(x)=\frac{\sec^2 x}{\tan x}$이므로 점 P에서의 접선의 기울기는

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{(\sqrt{2})^2}{1}=2$

점 P에서의 접선의 방정식은

$y-0=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\qquad \therefore y=2x-\frac{\pi}{2}$

따라서 이 접선의 y절편은 $-\frac{\pi}{2}$이다. **답** ④

173

$f(x)=\frac{1}{e^{kx}}-2x=e^{-kx}-2x$로 놓으면

$f'(x)=-ke^{-kx}-2$

접점의 좌표를 $(t,\ 0)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-ke^{-kt}-2$

이때 곡선 $y=f(x)$가 $x=t$에서 x축에 접하므로

$f(t)=0,\ f'(t)=0$

$f(t)=e^{-kt}-2t=0$에서 $e^{-kt}=2t$ …… ㉠

$f'(t)=-ke^{-kt}-2=0$에서

$ke^{-kt}+2=0$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$k\times 2t+2=0\qquad \therefore t=-\frac{1}{k}$

$t=-\frac{1}{k}$을 ㉠에 대입하면

$e=-\frac{2}{k}\qquad \therefore k=-\frac{2}{e}$ **답** $-\frac{2}{e}$

174

$\frac{dx}{d\theta}=4\sin^3\theta\cos\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=-4\cos^3\theta\sin\theta$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-4\cos^3\theta\sin\theta}{4\sin^3\theta\cos\theta}$$

$$=-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=-\cot^2\theta\ (\sin\theta\cos\theta\neq 0)$$

$\theta=\frac{5}{4}\pi$일 때, $x=\sin^4\frac{5}{4}\pi=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4=\frac{1}{4}$,

$y=\cos^4\frac{5}{4}\pi=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4=\frac{1}{4}$이고 접선의 기울기는

$-\cot^2\frac{5}{4}\pi=-1$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{4}=-\left(x-\frac{1}{4}\right)\qquad \therefore y=-x+\frac{1}{2}$

따라서 이 접선의 x절편은 $\frac{1}{2}$이다. **답** $\frac{1}{2}$

175

$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$x-\frac{y}{2}\times\frac{dy}{dx}=0\qquad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{y}\ (y\neq 0)$

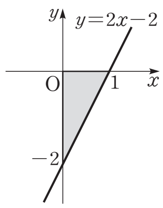
점 $(2,\ 2)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{dy}{dx}=\frac{4}{2}=2$

이므로 접선의 방정식은

$y-2=2(x-2)\qquad \therefore y=2x-2$

따라서 직선 $y=2x-2$와 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$ **답** 1

176

함수 $f(x)=e^{ax}$의 그래프와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 $f(x)=e^{ax}$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 서로 접하므로 접선의 방정식은 $y=x$이다.

두 함수의 그래프의 접점의 좌표를 $(t,\ e^{at})$이라 하면 접점 $(t,\ e^{at})$은 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$e^{at}=t$ …… ㉠

또, 점 $(t,\ e^{at})$에서의 접선의 기울기는 1이므로

$f'(x)=ae^{ax}$에서 $ae^{at}=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $at=1$

$at=1$을 ㉡에 대입하면

$ae=1\qquad \therefore a=\frac{1}{e}$ **답** $\frac{1}{e}$

177

$f(x)=(x-1)e^x$으로 놓으면

$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$

접점의 좌표를 $(a,\ (a-1)e^a)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=ae^a$이므로 접선의 방정식은

$y-(a-1)e^a=ae^a(x-a)$

이 직선이 점 $(t,\ 0)$을 지나므로

$0-(a-1)e^a=ae^a(t-a)$

$e^a\{a^2-(t+1)a+1\}=0$

$e^a>0$이므로 $a^2-(t+1)a+1=0$ ...... ㉠

이때 점 $(t,\ 0)$에서 곡선 $y=(x-1)e^x$에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 a에 대한 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

즉, 방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(t+1)^2-4>0,\ t^2+2t-3>0$

$(t+3)(t-1)>0$

$\therefore\ t<-3$ 또는 $t>1$

따라서 $\alpha=-3,\ \beta=1$이므로

$\alpha^2+\beta^2=10$ **답 10**

178

$f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$에서 $x>-1$이고

$f'(x)=\dfrac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\ln(1+x)=1$

$1+x=e$ $\therefore\ x=e-1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	$e-1$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-1,\ e-1]$에서 증가하고 구간 $[e-1,\ \infty)$에서 감소하므로

$a=e-1$ **답 $e-1$**

179

$f'(x)=2-\dfrac{2x}{x^2+k}=\dfrac{2x^2-2x+2k}{x^2+k}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 하므로

$\dfrac{2x^2-2x+2k}{x^2+k}\ge0$

이때 $x^2+k>0$이므로

$2x^2-2x+2k\ge0$

이차방정식 $2x^2-2x+2k=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1-4k\le0$ $\therefore\ k\ge\dfrac{1}{4}$ **답 $k\ge\dfrac{1}{4}$**

180

$f'(x)=e^{ax+b}+x\times ae^{ax+b}=e^{ax+b}(1+ax)$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극솟값 $-\dfrac{2}{e}$를 가지므로

$f(-2)=-\dfrac{2}{e},\ f'(-2)=0$

$f(-2)=-2e^{-2a+b}=-\dfrac{2}{e}$에서 $e^{-2a+b}=e^{-1}$

$\therefore\ -2a+b=-1$ ...... ㉠

$f'(-2)=e^{-2a+b}(1-2a)=0$에서 $e^{-2a+b}>0$이므로

$1-2a=0$ $\therefore\ a=\dfrac{1}{2}$

$a=\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$-1+b=-1$ $\therefore\ b=0$ **답 $a=\dfrac{1}{2},\ b=0$**

181

$f(x)=a\sin x+b\cos x+x$에서

$f'(x)=a\cos x-b\sin x+1$

함수 $f(x)$가 $x=\dfrac{\pi}{3}$와 $x=\pi$에서 극값을 가지므로

$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0,\ f'(\pi)=0$

$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}a-\dfrac{\sqrt{3}}{2}b+1=0$ ...... ㉠

$f'(\pi)=-a+1=0$ $\therefore\ a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}b+1=0$ $\therefore\ b=\sqrt{3}$

즉, $f'(x)=\cos x-\sqrt{3}\sin x+1$이므로
$f''(x)=-\sin x-\sqrt{3}\cos x$
이때 $f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}<0$,
$f''(\pi)=\sqrt{3}>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 극대이고 $x=\pi$에서 극소이다.
따라서 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x+x$에서 극솟값은
$f(\pi)=\sin \pi+\sqrt{3}\cos \pi+\pi=\pi-\sqrt{3}$

답 $\pi-\sqrt{3}$

182

$f(x)=2\ln x-\frac{a}{x}-x$에서 $x>0$이고
$f'(x)=\frac{2}{x}+\frac{a}{x^2}-1=\frac{-x^2+2x+a}{x^2}$
함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 모든 양수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$ 또는 $f'(x)\le 0$이어야 한다.
이때 $x^2>0$이므로 모든 양수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$,
즉 $-x^2+2x+a\le 0$이어야 한다.
그런데 $-x^2+2x+a=-(x-1)^2+a+1\le a+1$이므로
$a+1\le 0$ $\therefore a\le -1$
따라서 a의 값이 될 수 있는 것은 -3이다. 답 ①

183

$f(x)=e^{-x}(\sin x+\cos x)$에서
$f'(x)=-e^{-x}(\sin x+\cos x)+e^{-x}(\cos x-\sin x)$
$=-2e^{-x}\sin x$
$f'(x)=0$에서 $\sin x=0$
$\therefore x=k\pi$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π	$\cdots$	3π	$\cdots$	4π	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2n\pi$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$에서 극대이고 극댓값은
$f(2n\pi)=e^{-2n\pi}(\sin 2n\pi+\cos 2n\pi)$
$=e^{-2n\pi}$
극댓값이 큰 것부터 차례로 $a_1, a_2, a_3, \cdots$이므로
$a_n=e^{-2n\pi}$ $\therefore \ln a_n=-2n\pi$
$\therefore \ln a_{99}-\ln a_{100}=-2\times 99\pi-(-2\times 100\pi)$
$=2\pi$ 답 2π

184

$f'(x)=e^x(x^2+4x+2)+e^x(2x+4)$
$=e^x(x^2+6x+6)$
$f''(x)=e^x(x^2+6x+6)+e^x(2x+6)$
$=e^x(x^2+8x+12)$
곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록한 구간은 $f''(x)<0$에서
$e^x(x^2+8x+12)<0$
이때 $e^x>0$이므로 $x^2+8x+12<0$
$(x+6)(x+2)<0$
$\therefore -6<x<-2$ 답 ③

185

삼차함수의 그래프가 어떤 점에 대하여 대칭일 때, 그 점은 그래프의 변곡점이므로 점 P는 곡선
$y=x^3-3x^2+2$의 변곡점이다.
$f(x)=x^3-3x^2+2$로 놓으면
$f'(x)=3x^2-6x$, $f''(x)=6x-6$
$f''(x)=0$에서 $x=1$
이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $(-\infty, 1)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $(1, \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.
즉, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 x좌표는 1이다.
$\therefore$ P$(1, 0)$ 답 **(1, 0)**

186

$f(x)=e^x-e^{-x}+1$로 놓으면
$f'(x)=e^x+e^{-x}$
$f''(x)=e^x-e^{-x}=e^{-x}(e^{2x}-1)$
$f''(x)=0$에서 $x=0$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $(-\infty, 0)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하고, 구간 $(0, \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 아래로 볼록하다.
즉, $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(0, 1)$이다.
이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=1+1=2$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y=2x+1$ **답** ④

187

$y=f'(x)$의 그래프로부터 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	극대	↘	변곡점	↘	변곡점	↘

$f''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=b$이고 각각의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 x좌표는 0, b이다. **답** $0, b$

188

$f(x)=\dfrac{2}{x^2+b}\ (b>0)$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{-4x}{(x^2+b)^2}$

$f''(x)=\dfrac{-4(x^2+b)^2+4x\times2(x^2+b)\times2x}{(x^2+b)^4}$

$=\dfrac{12x^2-4b}{(x^2+b)^3}$

이때 점 $(2, a)$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이므로

$f(2)=a$, $f''(2)=0$

$f(2)=\dfrac{2}{4+b}=a$ …… ㉠

$f''(2)=\dfrac{48-4b}{(4+b)^3}=0$에서

$48-4b=0$ $\therefore b=12$

$b=12$를 ㉠에 대입하면

$\dfrac{2}{4+12}=a$ $\therefore a=\dfrac{1}{8}$

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{12}{\frac{1}{8}}=96$ **답** 96

189

$f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}$에서

$f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+3)^2}$

$f''(x)=\dfrac{-2(x^2+3)^2+2x\times2(x^2+3)\times2x}{(x^2+3)^4}$

$=\dfrac{6x^2-6}{(x^2+3)^3}=\dfrac{6(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

이때 $x=-1$과 $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 두 변곡점의 좌표는

$\left(-1, \dfrac{1}{4}\right)$, $\left(1, \dfrac{1}{4}\right)$

따라서 두 변곡점 사이의 거리는

$\sqrt{(1+1)^2+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\right)^2}=2$ **답** 2

190

ㄱ. $f'(x)=0$인 점은 x의 값이 0, c, e, g일 때이지만 그 점의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌는 경우는 $x=0$, $x=c$, $x=g$의 3개이다. 즉, 극값을 갖는 점은 3개이다. (거짓)

ㄴ. $x=c$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=c$에서 극솟값을 갖는다. (참)

ㄷ. $f''(x)=0$인 점은 x의 값이 b, d, e, f일 때이고 각 점의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 개수는 4이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. **답** ㄴ, ㄷ

191

$f(x)=\left(\ln \dfrac{1}{2ax}\right)^2$으로 놓으면

$$f(x)=\left(\ln \frac{1}{2ax}\right)^2=(-\ln 2ax)^2$$
$$=(\ln 2ax)^2$$

$$f'(x)=2(\ln 2ax)\times\frac{2a}{2ax}$$
$$=\frac{2\ln 2ax}{x}$$

$$f''(x)=\frac{2\times\dfrac{2a}{2ax}\times x-2\ln 2ax}{x^2}$$
$$=\frac{2-2\ln 2ax}{x^2}$$

$f''(x)=0$에서 $2-2\ln 2ax=0$

$\ln 2ax=1$, $2ax=e$

$\therefore x=\dfrac{e}{2a}$, $f\left(\dfrac{e}{2a}\right)=1$

이때 $x=\dfrac{e}{2a}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로

변곡점의 좌표는 $\left(\dfrac{e}{2a}, 1\right)$이다.

변곡점이 직선 $y=4x$ 위에 있으므로

$1=4\times\dfrac{e}{2a}$ $\qquad\therefore a=2e$

답 $2e$

192

$f(x)=ae^{3x}+be^{x}$에서

$f'(x)=3ae^{3x}+be^{x}$, $f''(x)=9ae^{3x}+be^{x}$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 $x=\ln\dfrac{2}{3}$의 좌우에서

$f''(x)$의 부호가 바뀌므로 $x=\ln\dfrac{2}{3}$에서 변곡점을 갖는다.

즉, $f''\left(\ln\dfrac{2}{3}\right)=0$이므로

$9ae^{3\ln\frac{2}{3}}+be^{\ln\frac{2}{3}}=0$

$9a\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3+b\times\dfrac{2}{3}=0$

$8a+2b=0$ $\qquad\therefore b=-4a$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $a>0$이므로 $f(x)$는 구간 $[k, \infty)$에서 증가해야 한다.

즉, 구간 $[k, \infty)$에서 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

$$f'(x)=3ae^{3x}+be^{x}=3ae^{3x}-4ae^{x}$$
$$=ae^{x}(3e^{2x}-4)\geq 0$$

$ae^{x}>0$이므로 $3e^{2x}-4\geq 0$

$e^{2x}\geq\dfrac{4}{3}$, $2x\geq\ln\dfrac{4}{3}$ $\qquad\therefore x\geq\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{3}$

따라서 $k\geq\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{3}$이므로 $m=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{3}$

이때 $f(2m)=-\dfrac{80}{9}$이므로

$$f(2m)=f\left(\ln\frac{4}{3}\right)=ae^{3\ln\frac{4}{3}}-4ae^{\ln\frac{4}{3}}$$
$$=a\times\left(\frac{4}{3}\right)^3-4a\times\frac{4}{3}$$
$$=-\frac{80}{27}a=-\frac{80}{9}$$

$\therefore a=3$, $b=-12$

$\therefore f(0)=a+b=-9$

답 ③

193

$f(x)=e^{-2x^2}$에서

$$f'(x)=-4xe^{-2x^2}$$
$$f''(x)=-4e^{-2x^2}+(-4x)\times(-4xe^{-2x^2})$$
$$=4e^{-2x^2}(4x^2-1)$$
$$=4e^{-2x^2}(2x+1)(2x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

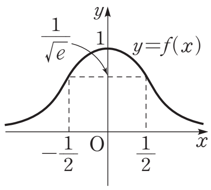
$f''(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\frac{1}{\sqrt{e}}$ 변곡점		1 극대		$\frac{1}{\sqrt{e}}$ 변곡점	

또, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-2x^2}=0$이므로 점근선은 x축이다.

따라서 함수 $f(x)=e^{-2x^2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $x=0$에서 극댓값 1을 갖는다. (거짓)

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=e^{-2\times(-x)^2}=e^{-2x^2}=f(x)$ (참)

ㄷ. 구간 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$에서 $f''(x)<0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. **답 ㄴ, ㄷ**

194

$$f'(x)=\frac{xe^{x+1}-e^{x+1}}{x^2}=\frac{e^{x+1}(x-1)}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	e^2 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)=e^2$이다. **답 e^2**

195

$f'(x)=a(1-2\cos 2x)$

$f'(x)=0$에서 $\cos 2x=\frac{1}{2}$

$2x=-\frac{\pi}{3}$ 또는 $2x=\frac{\pi}{3}$ $\left(\because -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore x=-\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{6}$

$a>0$이므로 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{a}{2}\pi$	↗	$a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$ 극대	↘	$a\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 극소	↗	$\frac{a}{2}\pi$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$이므로

$-\frac{a}{2}\pi=-\pi$ $\quad\therefore a=2$ **답 2**

196

$$f'(x)=\frac{x^2+5-(x+2)\times 2x}{(x^2+5)^2}$$
$$=\frac{-x^2-4x+5}{(x^2+5)^2}=-\frac{(x+5)(x-1)}{(x^2+5)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ $(\because x\ge 0)$

$x\ge 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$\frac{2}{5}$	↗	$\frac{1}{2}$ 극대	↘

이때 $0<a<1$이면 최댓값 $\frac{1}{2}$을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으므로

$a\ge 1$ …… ㉠

또, 최솟값이 $\frac{2}{5}$이려면 $f(a)\ge\frac{2}{5}$이어야 하므로

$f(a)=\frac{a+2}{a^2+5}\ge\frac{2}{5}$에서

$5(a+2)\ge 2(a^2+5)$

$2a^2-5a\le 0$, $a(2a-5)\le 0$

$\therefore 0\le a\le\frac{5}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $1\le a\le\frac{5}{2}$ **답 $1\le a\le\frac{5}{2}$**

197

$f(x)=\cos^3 x+3\sin^2 x+1$

$=\cos^3 x+3(1-\cos^2 x)+1$

$=\cos^3 x-3\cos^2 x+4$

이때 $\cos x=t\ (-1\le t\le 1)$로 놓고 주어진 함수를 $g(t)$라 하면

$g(t)=t^3-3t^2+4$

$g'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$

$g'(t)=0$에서 $t=0\ (\because -1\le t\le 1)$

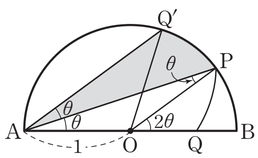
$-1\le t\le 1$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	4 극대	$\searrow$	2

따라서 함수 $g(t)$의 최댓값은 $M=g(0)=4$, 최솟값은 $m=g(-1)=0$이다.

$\therefore M+m=4+0=4$ **답 4**

198



색종이를 접었을 때 호 AP와 선분 AB의 교점을 Q, 접힌 색종이를 다시 폈을 때 점 Q가 호 AB와 만나는 점을 Q′이라 하자.

도형 APQ와 도형 APQ′은 합동이므로 $S(\theta)$는 호 AP와 현 AP로 둘러싸인 도형의 넓이에서 호 AQ′과 현 AQ′으로 둘러싸인 도형의 넓이를 뺀 것과 같다.

이때 $\angle\mathrm{AOP}=\pi-2\theta$, $\angle\mathrm{AOQ'}=\pi-4\theta$이므로

$S(\theta)$

$=\left\{\frac{1}{2}\times 1^2\times(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin(\pi-2\theta)\right\}$

$-\left\{\frac{1}{2}\times 1^2\times(\pi-4\theta)-\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin(\pi-4\theta)\right\}$

$=\frac{1}{2}(2\theta-\sin 2\theta+\sin 4\theta)$

$S'(\theta)=\frac{1}{2}(2-2\cos 2\theta+4\cos 4\theta)$

$=2\cos 4\theta-\cos 2\theta+1$

$=2(\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta)-\cos 2\theta+1$

$=2(2\cos^2 2\theta-1)-\cos 2\theta+1$

$=4\cos^2 2\theta-\cos 2\theta-1$

$S'(\theta)=0$에서

$4\cos^2 2\theta-\cos 2\theta-1=0$

$\therefore \cos 2\theta=\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$에서 $0<\cos 2\theta<1$이므로

$\cos 2\theta=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$인 θ에서 $S'(\theta)=0$이다.

$0<\theta<\frac{\pi}{4}$에서 $\cos 2\theta=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$을 만족시키는 θ를 θ_0이라 하면

$\theta<\theta_0$일 때 $S'(\theta)>0$이고,

$\theta>\theta_0$일 때 $S'(\theta)<0$이므로

$S(\theta)$는 $\theta=\theta_0$에서 최댓값을 갖는다.

따라서 $\alpha=\theta_0$이므로

$\cos 2\alpha=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$ **답 ④**

참고 (호 AP와 현 AP로 둘러싸인 도형의 넓이)

$=$(부채꼴 AOP의 넓이)$-$(삼각형 AOP의 넓이)

199

$f(x)=e^x+e^{-x}-3$으로 놓으면

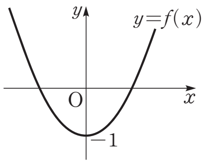
$f'(x)=e^x-e^{-x}=\frac{e^{2x}-1}{e^x}$

$f'(x)=0$에서 $e^{2x}=1$, $2x=0$ $\therefore x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-1 극소	$\nearrow$

이때



$\lim\limits_{x\to\infty}(e^x+e^{-x}-3)=\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+e^{-x}-3)=\infty$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

답 2

200

$\dfrac{\ln x}{x}=kx$에서 $\dfrac{\ln x}{x^2}=k$

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$로 놓으면 $x>0$이고

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-\ln x\times 2x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

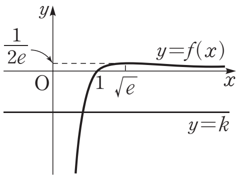
$f'(x)=0$에서 $\ln x=\dfrac{1}{2}$ $\qquad\therefore x=\sqrt{e}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$ 극대	$\searrow$

이때 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln x}{x^2}=-\infty$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$0<k<\dfrac{1}{2e}$

답 ②

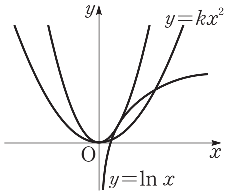
다른풀이 $\dfrac{\ln x}{x}=kx$에서 $\ln x=kx^2$

$f(x)=\ln x$, $g(x)=kx^2$으로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g'(x)=2kx$

두 함수의 그래프가 $x=a$에서 접한다고 하면

$f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$



$f(a)=g(a)$에서

$\ln a=ka^2$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(a)=g'(a)$에서

$\dfrac{1}{a}=2ka$

$\therefore k=\dfrac{1}{2a^2}$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\ln a=\dfrac{1}{2}$ $\qquad\therefore a=\sqrt{e}$

$\therefore k=\dfrac{1}{2e}$

따라서 방정식 $\dfrac{\ln x}{x}=kx$가 서로 다른 두 실근을 가지려면

$0<k<\dfrac{1}{2e}$

201

$e^{-x}>1-x$에서 $e^{-x}-1+x>0$

$f(x)=e^{-x}-1+x$로 놓으면

$f'(x)=-e^{-x}+1$, $f''(x)=e^{-x}$

$x>0$일 때 $e^{-x}>0$이므로 $f''(x)>0$

즉, $x>0$에서 함수 $f'(x)$는 증가하고, $f'(0)=0$이므로 $f'(x)>0$

또, $x>0$일 때 $f'(x)>0$이므로 $x>0$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

이때 $f(0)=0$이므로 $f(x)>0$

따라서 $x>0$일 때, 부등식 $e^{-x}>1-x$가 성립한다.

답 풀이 참조

202

$x \ln x \geq x+a$에서 $x \ln x-x-a \geq 0$

$f(x)=x \ln x-x-a$로 놓으면

$f'(x)=\ln x$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=0$ $\qquad \therefore x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-1-a$ 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)=-1-a$이므로 $f(x) \geq 0$이 성립하려면

$-1-a \geq 0$ $\qquad \therefore a \leq -1$

답 $\boldsymbol{a \leq -1}$

203

점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{t}+e^t-2kt,\ a=\dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{2}{t^2}+e^t-2k$

$t=1$에서의 점 P의 속도는

$v=2+e-2k$

즉, $2+e-2k=e$이므로 $k=1$

$\therefore v=\dfrac{2}{t}+e^t-2t,\ a=-\dfrac{2}{t^2}+e^t-2$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는

$a=-\dfrac{2}{4}+e^2-2=e^2-\dfrac{5}{2}$

답 $\boldsymbol{e^2-\dfrac{5}{2}}$

204

$\dfrac{dx}{dt}=4 \sin 4t,\ \dfrac{dy}{dt}=\cos 4t$

이므로 시각 t에서의 점 P의 속도는

$(4 \sin 4t,\ \cos 4t)$이고 속력은

$\sqrt{(4 \sin 4t)^2+(\cos 4t)^2}=\sqrt{16 \sin^2 4t+\cos^2 4t}$

$=\sqrt{15 \sin^2 4t+1}$

$t \geq 0$에서 $0 \leq \sin^2 4t \leq 1$이므로 점 P의 속력은 $\sin^2 4t=1$일 때 최대이다.

한편,

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=16 \cos 4t,\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=-4 \sin 4t$

이므로 시각 t에서의 점 P의 가속도는

$(16 \cos 4t,\ -4 \sin 4t)$이고 가속도의 크기는

$\sqrt{(16 \cos 4t)^2+(-4 \sin 4t)^2}$

$=\sqrt{256 \cos^2 4t+16 \sin^2 4t}$

따라서 점 P의 속력이 최대일 때 $\sin^2 4t=1$, $\cos^2 4t=0$이므로 구하는 가속도의 크기는

$\sqrt{256 \times 0+16 \times 1}=4$

답 **4**

205

$\ln x=kx$에서 $\dfrac{\ln x}{x}=k$

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$로 놓으면 $x>0$이고

$f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x} \times x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=1$ $\qquad \therefore x=e$

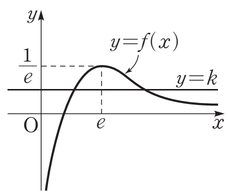
$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\dfrac{1}{e}$ 극대	↘

이때 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)=\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x}=0$,

$\lim\limits_{x \to 0+} f(x)=\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\ln x}{x}=-\infty$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 방정식 $\ln x=kx$, 즉 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는

(i) $\boldsymbol{k>\frac{1}{e}}$**이면 0**

(ii) $\boldsymbol{k=\frac{1}{e}}$**이면 1**

(iii) $\boldsymbol{0<k<\frac{1}{e}}$**이면 2**

(iv) $\boldsymbol{k\le 0}$**이면 1** **답 풀이 참조**

다른풀이 방정식 $\ln x=kx$의 실근의 개수는 곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=kx$의 교점의 개수와 같다.

$\ln x=kx$에서 $f(x)=\ln x$, $g(x)=kx$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 $x=a$에서 접한다고 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=\frac{1}{a}$

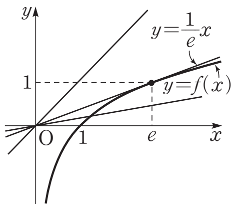
따라서 기울기가 $\frac{1}{a}$이고 점 $(a,\ \ln a)$를 지나는 접선의 방정식은

$y-\ln a=\frac{1}{a}(x-a)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-\ln a=-1$ $\qquad\therefore a=e$

즉, 원점을 지나고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 방정식은 $y=\frac{1}{e}x$이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는



(i) $k>\frac{1}{e}$이면 0

(ii) $k=\frac{1}{e}$이면 1

(iii) $0<k<\frac{1}{e}$이면 2

(iv) $k\le 0$이면 1

206

$\sin x-x\cos x-k=0$에서

$\sin x-x\cos x=k$

$f(x)=\sin x-x\cos x$로 놓으면

$f'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)$

$\qquad=x\sin x$

$f'(x)=0$에서

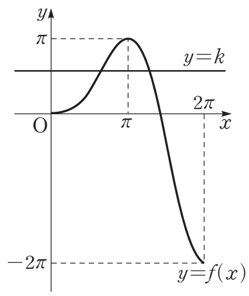
$x=0$ 또는 $\sin x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ $(\because 0\le x\le 2\pi)$

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	π 극대	↘	-2π

방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로



$0\le k<\pi$

따라서 정수 k는 0, 1, 2, 3이므로 그 합은 6이다. **답 ⑤**

207

$f(x)>g(x)$에서 $x^2-x+2>ke^{-x}$

이때 $e^x>0$이므로 양변에 e^x을 곱하면

$(x^2-x+2)e^x>k$

$h(x)=(x^2-x+2)e^x-k$로 놓으면

$h'(x)=(2x-1)e^x+(x^2-x+2)e^x$

$\qquad=e^x(x^2+x+1)$

$x>0$일 때 $h'(x)>0$이므로 $x>0$에서 함수 $h(x)$는 증가한다.

이때 $x>0$에서 $h(x)>0$이 성립하려면

$h(0)=2-k\ge 0$ $\qquad\therefore k\le 2$

따라서 실수 k의 최댓값은 2이다. **답 2**

208

점 P의 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=\frac{m}{t}+2nt$, $a=\frac{dv}{dt}=-\frac{m}{t^2}+2n$

$t=2$에서의 점 P의 속도는

$v=\frac{m}{2}+4n=10$

$\therefore m+8n=20$ …… ㉠

$t=2$에서의 점 P의 가속도는

$a=-\frac{m}{4}+2n=3$

$\therefore -m+8n=12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=4$, $n=2$

$\therefore mn=8$ 답 8

209

점 P의 속력이 매초 1이므로 t초 후의 호 AP의 길이가 t이고 이때 선분 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 t이다.

즉, 직선 OP의 기울기는 $\tan t$이므로 직선 OP의 방정식은

$y=(\tan t)x$

점 Q는 두 직선 $y=-x+1$과 $y=(\tan t)x$의 교점이므로

$-x+1=(\tan t)x$ $\therefore x=\frac{1}{1+\tan t}$

즉, 점 Q의 시각 t에서의 위치 (x, y)는

$x=\frac{1}{1+\tan t}$, $y=\frac{\tan t}{1+\tan t}$

이때

$\frac{dx}{dt}=\frac{-\sec^2 t}{(1+\tan t)^2}$,

$\frac{dy}{dt}=\frac{\sec^2 t(1+\tan t)-\tan t\times\sec^2 t}{(1+\tan t)^2}$

$=\frac{\sec^2 t}{(1+\tan t)^2}$

이므로 시각 t에서의 점 Q의 속도는

$\left(\frac{-\sec^2 t}{(1+\tan t)^2}, \frac{\sec^2 t}{(1+\tan t)^2}\right)$

점 P는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로 점 P의 x좌표가 $\frac{4}{5}$일 때 점 P의 좌표는

$\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

따라서 점 P의 x좌표가 $\frac{4}{5}$일 때의 시각을 t_1이라 하면

$\tan t_1=\frac{3}{4}$, $\sec^2 t_1=\frac{25}{16}$ ($\because 1+\tan^2 t_1=\sec^2 t_1$)

이때 점 Q의 속도는

$\left(-\frac{\frac{25}{16}}{\left(1+\frac{3}{4}\right)^2}, \frac{\frac{25}{16}}{\left(1+\frac{3}{4}\right)^2}\right)$, 즉 $\left(-\frac{25}{49}, \frac{25}{49}\right)$

이므로

$a=-\frac{25}{49}$, $b=\frac{25}{49}$

$\therefore b-a=\frac{25}{49}-\left(-\frac{25}{49}\right)=\frac{50}{49}$ 답 ⑤

210

① $\int e^{x+2}\,dx=\int e^x e^2\,dx$
$=e^2\int e^x\,dx$
$=e^2e^x+C$
$=e^{x+2}+C$

② $\int \frac{1}{1+\tan^2 x}\,dx+\int \frac{1}{1+\cot^2 x}\,dx$
$=\int \frac{1}{\sec^2 x}\,dx+\int \frac{1}{\csc^2 x}\,dx$
$=\int \cos^2 x\,dx+\int \sin^2 x\,dx$
$=\int (\cos^2 x+\sin^2 x)\,dx$
$=\int dx$
$=x+C$

③ $\sqrt{x^3+1}=t$로 놓고 양변을 제곱하면
$x^3+1=t^2$이므로
$3x^2=2t\frac{dt}{dx}$
$\therefore \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx=\int \frac{1}{t}\times\frac{2}{3}t\,dt$
$=\int \frac{2}{3}\,dt$
$=\frac{2}{3}t+C$
$=\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C$

④ $(x^2+4x+5)'=2x+4$이므로
$\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx$
$=\frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5}\,dx$
$=\frac{1}{2}\ln|x^2+4x+5|+C$
$=\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)+C$
$(\because x^2+4x+5=(x+2)^2+1>0)$

⑤ $\cos x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면
$-\sin x=\frac{dt}{dx}$
$\therefore \int \cos^3 x\sin x\,dx=\int t^3\times(-1)dt$
$=-\int t^3\,dt$
$=-\frac{1}{4}t^4+C$
$=-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

211

$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$이므로
$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\,dx$
$=x^{\frac{2}{3}}+C_1$
이때 $f(8)=3$이므로 $8^{\frac{2}{3}}+C_1=3$
$4+C_1=3$ $\therefore C_1=-1$
$\therefore f(x)=x^{\frac{2}{3}}-1$
따라서 함수 $f(x)$의 부정적분은
$\int (x^{\frac{2}{3}}-1)\,dx=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-x+C$
$=\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}-x+C$

답 $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}-x+C$

212

$\sqrt{\ln x+7}=t$로 놓고 양변을 제곱하면
$\ln x+7=t^2$이므로 $\frac{1}{x}=2t\frac{dt}{dx}$
$\therefore f(x)=\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x+7}}\,dx$
$=\int \frac{1}{t}\times 2t\,dt$
$=\int 2\,dt$
$=2t+C$
$=2\sqrt{\ln x+7}+C$

이때 $f(e^2)=4$이므로

$2\sqrt{\ln e^2+7}+C=4$

$6+C=4 \qquad \therefore C=-2$

따라서 $f(x)=2\sqrt{\ln x+7}-2$이므로

$f\left(\frac{1}{e^3}\right)=2\sqrt{\ln\frac{1}{e^3}+7}-2=2\sqrt{4}-2=2$ 답 **2**

213

$$f(x)=\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}dx-\int\frac{e^x}{e^{2x}-1}dx$$
$$=\int\frac{e^{2x}-e^x}{e^{2x}-1}dx=\int\frac{e^x(e^x-1)}{(e^x-1)(e^x+1)}dx$$
$$=\int\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx$$
$$=\ln(e^x+1)+C\ (\because e^x+1>0)$$

이때 $f(0)=0$이므로 $\ln 2+C=0$

$\therefore C=-\ln 2$

따라서 $f(x)=\ln(e^x+1)-\ln 2=\ln\frac{e^x+1}{2}$이므로

$f(1)=\ln\frac{e+1}{2}$ 답 $\ln\frac{e+1}{2}$

214

$\frac{3}{x^2+x-2}=\frac{3}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}$

이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{3}{x^2+x-2}dx$$
$$=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\int\frac{1}{x-1}dx-\int\frac{1}{x+2}dx$$
$$=\ln|x-1|-\ln|x+2|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$$

이때 $f(-1)=\ln 2$이므로

$\ln 2+C=\ln 2 \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$이므로

$f(2)=\ln\frac{1}{4}=-\ln 4$ 답 $-\ln 4$

215

$F(x)=xf(x)-x^2e^x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)+xf'(x)-2xe^x-x^2e^x$

그런데 $F'(x)=f(x)$이므로

$f(x)=f(x)+xf'(x)-2xe^x-x^2e^x$

$xf'(x)=2xe^x+x^2e^x$, $f'(x)=2e^x+xe^x$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int(2e^x+xe^x)dx$$
$$=2\int e^x dx+\int xe^x dx$$
$$=2e^x+xe^x-\int e^x dx$$
$$=2e^x+xe^x-e^x+C$$
$$=(x+1)e^x+C$$

이때 $f(0)=1$이므로

$1+C=1 \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=(x+1)e^x$이므로

$f(1)=2e$ 답 $2e$

216

$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=e^x$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int e^x dx$

$f(x)+g(x)=e^x+C_1$

$f(0)=0$, $g(0)=0$이므로

$0+0=1+C_1 \qquad \therefore C_1=-1$

$\therefore f(x)+g(x)=e^x-1$ …… ㉠

또, $\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=e^{-2x}$에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}\right]dx=\int e^{-2x}dx$

$f(x)-g(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}+C_2$

$f(0)=0$, $g(0)=0$이므로

$0-0=-\frac{1}{2}+C_2 \qquad \therefore C_2=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)-g(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{2}$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$f(x)=\frac{1}{2}\left(e^x-\frac{1}{2}e^{-2x}-\frac{1}{2}\right)$,

$g(x)=\frac{1}{2}\left(e^x+\frac{1}{2}e^{-2x}-\frac{3}{2}\right)$

$\therefore \frac{g(\ln 2)}{f(\ln 2)}=\frac{\frac{5}{16}}{\frac{11}{16}}=\frac{5}{11}$ **답** $\mathbf{\frac{5}{11}}$

217

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(\tan x+\tan^3 x)dx$

$=\int \tan x(1+\tan^2 x)dx$

$=\int \tan x \sec^2 x\, dx$

$\tan x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\sec^2 x=\frac{dt}{dx}$

$\therefore f(x)=\int \tan x \sec^2 x\, dx$

$=\int t\, dt$

$=\frac{1}{2}t^2+C$

$=\frac{1}{2}\tan^2 x+C$

이때 $f(0)=1$이므로

$\frac{1}{2}\tan^2 0+C=1$

$\therefore C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\tan^2 x+1$이므로

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2+1$

$=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$ **답** $\mathbf{\frac{5}{2}}$

218

$f'(x)=\frac{1}{2+e^x}$이므로

$f(x)=\int f'(x)\, dx$

$=\int \frac{1}{2+e^x}dx=\int \frac{e^{-x}}{2e^{-x}+1}dx$

$=-\frac{1}{2}\int \frac{-2e^{-x}}{2e^{-x}+1}dx$

$=-\frac{1}{2}\int \frac{(2e^{-x}+1)'}{2e^{-x}+1}dx$

$=-\frac{1}{2}\ln(2e^{-x}+1)+C$ $(\because\ 2e^{-x}+1>0)$

한편, 곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로

$-\frac{1}{2}\ln 3+C=0$ $\therefore C=\frac{1}{2}\ln 3$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}\ln(2e^{-x}+1)+\frac{1}{2}\ln 3$이므로

$f(\ln 2)=-\frac{1}{2}\ln(2e^{-\ln 2}+1)+\frac{1}{2}\ln 3$

$=-\frac{1}{2}\ln\left(2\times\frac{1}{2}+1\right)+\frac{1}{2}\ln 3$

$=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$ **답** $\mathbf{\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}}$

219

함수 $f'(x)$를 각 구간에서 적분하면

$f(x)=\begin{cases} x^2+3x+C_1 & (x<1) \\ x\ln x-x+C_2 & (x>1)\end{cases}$

$f(e)=2$에서 $e>1$이므로

$f(e)=e\ln e-e+C_2=2$ $\therefore C_2=2$

또, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)=f(1)$

이때 $\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(x\ln x-x+2)=1$,

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(x^2+3x+C_1)=4+C_1$에서

$1=4+C_1$이므로 $C_1=-3$

$\therefore f(x)=\begin{cases} x^2+3x-3 & (x\le 1) \\ x\ln x-x+2 & (x>1)\end{cases}$

$\therefore f(-6)=36-18-3=15$ **답** ④

실력 UP 연습문제

220

$y=e^x-1$로 놓고 x에 대하여 풀면

$e^x=y+1 \qquad \therefore x=\ln(y+1)$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\ln(x+1)$

$\therefore f^{-1}(x)=\ln(x+1)$

즉, $g(x)=\int f^{-1}(x)dx=\int \ln(x+1)dx$에서

$u(x)=\ln(x+1)$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x+1}$, $v(x)=x$이므로

$$\begin{aligned} g(x)&=\int \ln(x+1)\,dx \\ &=x\ln(x+1)-\int \frac{x}{x+1}\,dx \\ &=x\ln(x+1)-\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx \\ &=x\ln(x+1)-\{x-\ln(x+1)\}+C \\ &=(x+1)\ln(x+1)-x+C \end{aligned}$$

이때 $g(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $g(x)=(x+1)\ln(x+1)-x+1$이므로

$g(e-1)=e-(e-1)+1=2$ **답 2**

221

$f(x)=\int e^{-x}\sin x\,dx$에서

$u(x)=\sin x$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=\cos x$, $v(x)=-e^{-x}$이므로

$\int e^{-x}\sin x\,dx$

$=-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x\,dx$ …… ㉠

한편, $\int e^{-x}\cos x\,dx$에서

$p(x)=\cos x$, $q'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$p'(x)=-\sin x$, $q(x)=-e^{-x}$이므로

$\int e^{-x}\cos x\,dx$

$=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x\,dx$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int e^{-x}\sin x\,dx$

$=-e^{-x}\sin x+\left(-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x\,dx\right)$

이므로

$2\int e^{-x}\sin x\,dx=-e^{-x}(\sin x+\cos x)$

$\therefore \int e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C$

즉, $f(x)=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C$이고

$f(0)=-\frac{1}{2}$이므로

$-\frac{1}{2}+C=-\frac{1}{2} \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)$이므로

$f(\pi)=-\frac{1}{2}e^{-\pi}(\sin\pi+\cos\pi)=\frac{1}{2e^{\pi}}$ **답 $\frac{1}{2e^{\pi}}$**

222

함수 $f(x)=-1+\sin x-\sin^2 x+\sin^3 x-\cdots$는 첫째항이 -1, 공비가 $-\sin x$인 등비급수이다.

이때 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 $-1<-\sin x<1$이므로

$f(x)$는 수렴하는 등비급수이고

$f(x)=\frac{-1}{1+\sin x}$

함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$$\begin{aligned} F(x)&=\int f(x)dx \\ &=\int \frac{-1}{1+\sin x}\,dx \\ &=-\int \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\,dx \\ &=-\int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx \\ &=-\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\,dx \\ &=-\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{1}{\cos x}\right)dx \\ &=-\int(\sec^2 x-\sec x\tan x)\,dx \\ &=-\tan x+\sec x+C \end{aligned}$$

이때 $F(0)=1$이므로

$1+C=1 \qquad \therefore C=0$

따라서 $F(x)=-\tan x+\sec x$이므로

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}+\sec\frac{\pi}{3}$$
$$=-\sqrt{3}+\frac{1}{\frac{1}{2}}$$
$$=2-\sqrt{3}$$

답 $2-\sqrt{3}$

KEY Point

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ $(a\neq 0,\ -1<r<1)$의 합

$\Rightarrow \dfrac{a}{1-r} \longleftarrow \dfrac{(\text{첫째항})}{1-(\text{공비})}$

223

$x^2-2x+3=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x-2=\frac{dt}{dx}$$

$$\therefore f(x)=(\ln 4)\times\int(x-1)2^{x^2-2x+3}\,dx$$
$$=(\ln 4)\times\int\frac{1}{2}(2x-2)2^{x^2-2x+3}\,dx$$
$$=(\ln 4)\times\frac{1}{2}\int 2^t\,dt$$
$$=\ln 2\times\frac{2^t}{\ln 2}+C$$
$$=2^t+C$$
$$=2^{x^2-2x+3}+C$$
$$=2^{(x-1)^2+2}+C$$

이때 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값을 갖는다. 함수 $f(x)$의 최솟값이 3이므로

$f(1)=2^2+C=3$

$\therefore C=-1$

즉, $f(x)=2^{(x-1)^2+2}-1$이고 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 구하는 최댓값은

$f(3)=2^6-1=63$

답 63

224

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$f^{-1}(x)=g(x)$, 즉 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=x$

$g(f(x))=x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=1 \qquad \therefore g'(f(x))=\dfrac{1}{f'(x)}$

조건 (나)에서 $g'(f(x))\neq 0$이므로

$$f(x)g'(f(x))=f(x)\times\frac{1}{f'(x)}=\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{1}{x^2+1}$$

$$\therefore \frac{f'(x)}{f(x)}=x^2+1$$

양변을 x에 대하여 적분하면

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\int(x^2+1)dx$$

$$\ln|f(x)|=\frac{1}{3}x^3+x+C$$

$$\therefore |f(x)|=e^{\frac{1}{3}x^3+x+C}$$

조건 (가)에서 $f(0)=1>0$이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$f(x)=e^{\frac{1}{3}x^3+x+C}$$

이때 $f(0)=1$에서 $e^C=1 \qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=e^{\frac{1}{3}x^3+x}$이므로

$f(3)=e^{12}$

답 ④

225

$\sin x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\cos x=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int\cos x\ln(\sin x)dx$$
$$=\int\ln t\,dt$$

$u(t)=\ln t$, $v'(t)=1$로 놓으면

$u'(t)=\dfrac{1}{t}$, $v(t)=t$이므로

$$f(x)=\int\ln t\,dt$$
$$=t\ln t-\int t\times\frac{1}{t}\,dt$$
$$=t\ln t-t+C$$
$$=\sin x\ln(\sin x)-\sin x+C$$

이때 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}$이므로

$-1+C=-\frac{1}{2}$ $\qquad \therefore C=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\sin x \ln(\sin x)-\sin x+\frac{1}{2}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\ln\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)-\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{2}\ln 2$

답 $-\frac{1}{2}\ln 2$

226

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int (x-2)\ln x\, dx$

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=x-2$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$이므로

$f(x)=\int (x-2)\ln x\, dx$

$=\left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)\ln x-\int\left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)\frac{1}{x}\, dx$

$=\left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)\ln x-\int\left(\frac{1}{2}x-2\right) dx$

$=\left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)\ln x-\frac{1}{4}x^2+2x+C$

한편, 진수의 조건에서 $x>0$이고

$f'(x)=(x-2)\ln x=0$에서

$x-2=0$ 또는 $\ln x=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$의 극댓값이 $\frac{3}{4}$이므로 $f(1)=\frac{3}{4}$

즉, $-\frac{1}{4}+2+C=\frac{3}{4}$이므로 $C=-1$

따라서 $f(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)\ln x-\frac{1}{4}x^2+2x-1$이므로 함수 $f(x)$의 극솟값은

$f(2)=-2\ln 2-1+4-1=2-2\ln 2$

답 $2-2\ln 2$

227

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)=x^2e^{2x}$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int x^2e^{2x}\, dx$

$u(x)=x^2$, $v'(x)=e^{2x}$으로 놓으면

$u'(x)=2x$, $v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$이므로

$\int x^2e^{2x}\, dx=x^2\times\frac{1}{2}e^{2x}-\int 2x\times\frac{1}{2}e^{2x}\, dx$

$=\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\int xe^{2x}\, dx$ ...... ㉠

한편, $\int xe^{2x}\, dx$에서

$p(x)=x$, $q'(x)=e^{2x}$으로 놓으면

$p'(x)=1$, $q(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$이므로

$\int xe^{2x}\, dx=x\times\frac{1}{2}e^{2x}-\int 1\times\frac{1}{2}e^{2x}\, dx$

$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C_1$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int x^2e^{2x}\, dx=\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\left(\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C_1\right)$

$=\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\frac{1}{2}xe^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}-C_1$

$=\frac{1}{4}e^{2x}(2x^2-2x+1)+C$

이때 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}e$이므로

$\frac{1}{8}e+C=\frac{1}{8}e$ $\qquad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}e^{2x}(2x^2-2x+1)$이므로

$f(0)=\frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

228

$$\int_1^5 \left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}\right) dx=\Big[\ln|x+1|+\ln|x|\Big]_1^5$$
$$=(\ln 6+\ln 5)-(\ln 2+\ln 1)$$
$$=\ln 15$$

$\therefore a=15$ 답 **15**

229

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+5\sin^3 x}{\sin^2 x}\,dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sin^2 x}+5\sin x\right) dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\csc^2 x+5\sin x)\,dx$$
$$=\Big[-\cot x-5\cos x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\left(-\cot\frac{\pi}{4}-5\cos\frac{\pi}{4}\right)-\left(-\cot\frac{\pi}{6}-5\cos\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=-1-\frac{5\sqrt{2}}{2}-\left(-\sqrt{3}-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=-\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{7\sqrt{3}}{2}-1$$

따라서 $a=-\frac{5}{2}$, $b=\frac{7}{2}$이므로

$a+b=1$ 답 **1**

230

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 (-2^x+2)\,dx+\int_1^2 (2^x-2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{2^x}{\ln 2}+2x\right]_0^1+\left[\frac{2^x}{\ln 2}-2x\right]_1^2$$
$$=\left\{\left(-\frac{2}{\ln 2}+2\right)+\frac{1}{\ln 2}\right\}$$
$$+\left\{\left(\frac{4}{\ln 2}-4\right)-\left(\frac{2}{\ln 2}-2\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{\ln 2}$$

답 $\mathbf{\frac{1}{\ln 2}}$

231

$$\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=\begin{cases} -\dfrac{x-2}{x+2} & (-2<x\le 2) \\ \dfrac{x-2}{x+2} & (x<-2 \text{ 또는 } x\ge 2) \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-1}^4 \left|\frac{x-2}{x+2}\right| dx$$
$$=\int_{-1}^2 \left(-\frac{x-2}{x+2}\right) dx+\int_2^4 \frac{x-2}{x+2}\,dx$$
$$=-\int_{-1}^2 \left(1-\frac{4}{x+2}\right) dx+\int_2^4 \left(1-\frac{4}{x+2}\right) dx$$
$$=-\Big[x-4\ln|x+2|\Big]_{-1}^2+\Big[x-4\ln|x+2|\Big]_2^4$$
$$=-(3-4\ln 4)+(2-4\ln 6+4\ln 4)$$
$$=8\ln 4-4\ln 6-1$$
$$=12\ln 2-4\ln 3-1$$

답 **12 ln 2−4 ln 3−1**

232

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (x^3+\sin x+a)\cos x\,dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (x^3\cos x+\sin x\cos x+a\cos x)\,dx$$

에서 $f(x)=x^3\cos x+\sin x\cos x$,

$g(x)=a\cos x$라 하면

$$f(-x)=(-x)^3\cos(-x)+\sin(-x)\cos(-x)$$
$$=-x^3\cos x-\sin x\cos x=-f(x)$$
$$g(-x)=a\cos(-x)=a\cos x=g(x)$$

이므로 $f(x)$는 기함수, $g(x)$는 우함수이다.

$$\therefore (\text{주어진 식})=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (x^3\cos x+\sin x\cos x)\,dx$$
$$+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a\cos x\,dx$$
$$=0+2a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx$$
$$=2a\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}a$$

따라서 $\sqrt{2}a=1$이므로

$a=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

233

함수 $f(x)$에 대하여 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f(x)$이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} f(x)\,dx=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} f(x)\,dx$$
$$=\cdots=\int_{\frac{7}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi} f(x)\,dx$$

이때 $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$에서

$f(-x)=\sec^2(-x)=\sec^2 x=f(x)$

이므로 $f(x)$는 우함수이다.

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{9}{4}\pi} f(x)\,dx=5\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$$
$$=10\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$$
$$=10\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx$$
$$=10\Big[\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=10\tan\frac{\pi}{4}=10$$

답 **10**

234

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (e^x-ax)dx$$
$$=\left[e^x-\frac{1}{2}ax^2\right]_0^1=e-\frac{1}{2}a-1$$

이때 $\int_0^1 f(x)dx=f(1)$이므로

$e-\frac{1}{2}a-1=e-a$

$\frac{1}{2}a=1 \qquad \therefore a=2$

답 **2**

235

$$a_n=(\ln 3)\times\int_0^n 3^x\,dx$$
$$=(\ln 3)\times\left[\frac{3^x}{\ln 3}\right]_0^n$$
$$=(\ln 3)\times\left(\frac{3^n}{\ln 3}-\frac{1}{\ln 3}\right)=3^n-1$$

따라서 $\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{1+3^n-1}=\frac{1}{3^n}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

답 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

236

$$\int_0^{\pi}|2\sin x\cos x|dx=\int_0^{\pi}|\sin 2x|dx$$

이때 $|\sin 2x|=\begin{cases}\sin 2x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)\\ -\sin 2x & \left(\frac{\pi}{2}\le x\le\pi\right)\end{cases}$이므로

$$\int_0^{\pi}|\sin 2x|dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\sin 2x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$=1+1=2$$

답 **2**

237

$\int_{-1}^{1} f'(x)dx=\Big[f(x)\Big]_{-1}^{1}=f(1)-f(-1)$이므로

$$\int_{-1}^{1}|e^x-1|dx=f(1)-f(-1)$$

$$\therefore f(1)=f(-1)+\int_{-1}^{1}|e^x-1|dx$$

이때 $|e^x-1|=\begin{cases}1-e^x & (x\le 0)\\ e^x-1 & (x\ge 0)\end{cases}$이므로

$$f(1)=f(-1)+\int_{-1}^{1}|e^x-1|dx$$
$$=2+\int_{-1}^{0}(1-e^x)dx+\int_0^1(e^x-1)dx$$
$$=2+\Big[x-e^x\Big]_{-1}^{0}+\Big[e^x-x\Big]_0^1$$
$$=2+\frac{1}{e}+(e-2)$$
$$=e+\frac{1}{e}$$

답 $\boldsymbol{e+\frac{1}{e}}$

238

닫힌구간 $[-2, 2]$에서

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{e^{-x}} & (-2\le x\le 0) \\ \dfrac{1}{e^{x}} & (0\le x\le 2) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} e^{x} & (-2\le x\le 0) \\ e^{-x} & (0\le x\le 2) \end{cases}$$

이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로

$$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx$$
$$=\int_0^2 f(x)dx+\int_{-2}^0 f(x)dx$$
$$=\int_0^2 e^{-x}\,dx+\int_{-2}^0 e^{x}\,dx$$
$$=\Big[-e^{-x}\Big]_0^2+\Big[e^{x}\Big]_{-2}^0$$
$$=\left(-\frac{1}{e^2}+1\right)+\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$$
$$=2\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$$

답 $\mathbf{2\left(1-\frac{1}{e^2}\right)}$

239

조건 ㈐에서 곡선 $y=f(x)$가 원점에 대하여 대칭이므로 $f(0)=0$이고, 함수 $f(x)$는 기함수이다.

즉, $f'(x)$는 우함수이고, $f'(x)\sin x$, $f'(x)\sin^3 x$는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-2}^2 f'(x)(1+\sin x+\sin^3 x)dx$$
$$=\int_{-2}^2 \{f'(x)+f'(x)\sin x+f'(x)\sin^3 x\}dx$$
$$=\int_{-2}^2 f'(x)dx$$
$$=2\int_0^2 f'(x)dx$$
$$=2\Big[f(x)\Big]_0^2$$
$$=2\{f(2)-f(0)\}$$
$$=2(3-0)$$
$$=6$$

답 **6**

240

$f(a)=\displaystyle\int_1^a \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$에서

$\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=a$일 때 $t=\ln a$이므로

$$f(a)=\int_1^a \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$$
$$=\int_0^{\ln a}\sqrt{t}\,dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\ln a}$$
$$=\frac{2}{3}(\ln a)^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore f(a^4)=\frac{2}{3}(\ln a^4)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}(4\ln a)^{\frac{3}{2}}$$
$$=4^{\frac{3}{2}}\times\frac{2}{3}(\ln a)^{\frac{3}{2}}=8f(a)$$

답 ②

241

$x=a\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\dfrac{dx}{d\theta}=a\sec^2\theta$이고 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=a$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^a \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a^2(1+\tan^2\theta)}\times a\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a^2\sec^2\theta}\times a\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a}\,d\theta$$
$$=\left[\frac{1}{a}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{1}{a}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4a}$$

따라서 $\dfrac{\pi}{4a}=\dfrac{\pi}{16}$이므로 $4a=16$

$\therefore a=4$

답 **4**

연습문제 실력 UP

242

$f(x)=\sin x,\ g(x)=3x$이므로

$$\int_0^{\pi} f(g(x))g(x)\,dx=\int_0^{\pi} 3x\sin 3x\,dx$$

이때 $u(x)=3x,\ v'(x)=\sin 3x$로 놓으면

$u'(x)=3,\ v(x)=-\frac{1}{3}\cos 3x$이므로

$$\int_0^{\pi} 3x\sin 3x\,dx$$

$$=\Big[-x\cos 3x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} 3\times\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)dx$$

$$=\pi+\Big[\frac{1}{3}\sin 3x\Big]_0^{\pi}=\pi$$

답 π

243

주어진 그래프에서

$$f(x)=\begin{cases}1 & (0\le x\le 1)\\ x & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

$\int_0^{\ln 2} e^x f(e^x)dx$에서

$e^x=t$로 놓으면 $e^x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\ln 2$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^{\ln 2} e^x f(e^x)dx=\int_1^2 f(t)dt=\int_1^2 t\,dt$$

$$=\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_1^2=\frac{1}{2}(4-1)=\frac{3}{2}$$

답 ④

244

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}}dt$$

$$=\int_0^x \frac{e^t}{e^t+1}dt \qquad \leftarrow \frac{1}{1+e^{-t}}=\frac{1\times e^t}{(1+e^{-t})e^t}$$

에서 $e^t+1=s$로 놓으면 $e^t=\frac{ds}{dt}$이고

$t=0$일 때 $s=2$, $t=x$일 때 $s=1+e^x$이므로

$$f(x)=\int_2^{1+e^x}\frac{1}{s}ds=\Big[\ln|s|\Big]_2^{1+e^x}$$

$$=\ln(1+e^x)-\ln 2=\ln\frac{1+e^x}{2}$$

$$\therefore (f\circ f)(a)=f(f(a))$$

$$=f\left(\ln\frac{1+e^a}{2}\right)$$

$$=\ln\frac{1+e^{\ln\frac{1+e^a}{2}}}{2}$$

$$=\ln\frac{1+\frac{1+e^a}{2}}{2}$$

$$=\ln\frac{3+e^a}{4}$$

이때 $(f\circ f)(a)=\ln 5$이므로

$$\ln\frac{3+e^a}{4}=\ln 5$$

$y=\ln x$는 일대일함수이므로

$$\frac{3+e^a}{4}=5,\ e^a=17$$

$\therefore a=\ln 17$

답 ④

245

$f(t)=\ln t,\ g'(t)=1$로 놓으면

$f'(t)=\frac{1}{t},\ g(t)=t$이므로

$$F(x)=\int_{e^x}^{e^{2x}}\ln t\,dt$$

$$=\Big[t\ln t\Big]_{e^x}^{e^{2x}}-\int_{e^x}^{e^{2x}}\frac{1}{t}\times t\,dt$$

$$=(e^{2x}\ln e^{2x}-e^x\ln e^x)-\Big[t\Big]_{e^x}^{e^{2x}}$$

$$=2xe^{2x}-xe^x-(e^{2x}-e^x)$$

$$=(2x-1)e^{2x}-(x-1)e^x$$

$$F'(x)=2e^{2x}+(2x-1)\times 2e^{2x}-e^x-(x-1)e^x$$

$$=4xe^{2x}-xe^x=xe^x(4e^x-1)$$

$F'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $e^x=\frac{1}{4}$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=-2\ln 2$

이때 함수 $F(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-2\ln 2$	$\cdots$	0	$\cdots$
$F'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $F(x)$는 $x=-2\ln 2$에서 극댓값을 가지므로
$a=-2\ln 2$ **답** $-2\ln 2$

246

$\int_0^1 tf(t)dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

로 놓으면
$f(x)=e^{x^2}+k$
$f(t)=e^{t^2}+k$를 ㉠에 대입하면
$\int_0^1 t(e^{t^2}+k)dt=\int_0^1 (te^{t^2}+kt)dt$
$=\left[\frac{1}{2}e^{t^2}+\frac{1}{2}kt^2\right]_0^1$
$=\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}$
즉, $\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}=k$이므로
$k=e-1$
$\therefore \int_0^1 xf(x)dx=k=e-1$ **답** $e-1$

247

$\int_0^\pi f(t)\cos t\,dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

로 놓으면
$f(x)=x+k$
$f(t)=t+k$를 ㉠에 대입하면
$\int_0^\pi f(t)\cos t\,dt=\int_0^\pi (t+k)\cos t\,dt$
$u(t)=t+k$, $v'(t)=\cos t$로 놓으면
$u'(t)=1$, $v(t)=\sin t$
$\therefore \int_0^\pi (t+k)\cos t\,dt$
$=\Big[(t+k)\sin t\Big]_0^\pi-\int_0^\pi \sin t\,dt$
$=0-\Big[-\cos t\Big]_0^\pi$
$=-2$
즉, $k=-2$이므로 $f(x)=x-2$
$\therefore f(3)=1$ **답** 1

248

$\int_1^x f(t)dt=x^2-a\sqrt{x}$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=2x-\frac{a}{2\sqrt{x}}$
또, $\int_1^x f(t)dt=x^2-a\sqrt{x}$의 양변에 $x=1$을 대입하면
$\int_1^1 f(t)dt=1-a\sqrt{1}$
$0=1-a$ $\therefore a=1$
따라서 $f(x)=2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$이므로
$f(1)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ **답** ②

249

$\int_1^x (x-t)f(t)dt=x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt$
이므로 주어진 등식에서
$x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x tf(t)dt=x^3\ln x+ax+b$ ...... ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$\int_1^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=3x^2\ln x+x^2+a$
$\therefore \int_1^x f(t)dt=3x^2\ln x+x^2+a$
위 식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$0=1+a$ $\therefore a=-1$
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$0=a+b$ $\therefore b=1$
$\therefore ab=-1$ **답** -1

250

$f(x)=\int_1^x (1-\ln t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=1-\ln x$
$f'(x)=0$에서 $\ln x=1$ $\therefore x=e$
$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극대이므로 구하는 극댓값은

$$f(e)=\int_1^e (1-\ln t)dt$$

$u(t)=1-\ln t$, $v'(t)=1$로 놓으면

$u'(t)=-\frac{1}{t}$, $v(t)=t$이므로

$$\begin{aligned} f(e)&=\int_1^e (1-\ln t)dt \\ &=\Big[t(1-\ln t)\Big]_1^e-\int_1^e \left(-\frac{1}{t}\right)\times t\,dt \\ &=-1+\Big[t\Big]_1^e \\ &=-1+e-1 \\ &=e-2 \end{aligned}$$

답 $e-2$

251

$g(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$으로 놓고 $g(t)$의 한 부정적분을 $G(t)$라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{f(0)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h g(t)dt \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big[G(t)\Big]_0^h \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{G(h)-G(0)}{h} \\ &=G'(0) \end{aligned}$$

이때 $G'(t)=g(t)$이므로

$G'(0)=g(0)=1$

답 ④

252

$\int_0^1 f(t)dt=k$ (k는 상수) ...... ㉠

로 놓으면

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}+2k$$

$f(t)=\frac{t}{t^2+1}+2k$를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t)dt&=\int_0^1 \left(\frac{t}{t^2+1}+2k\right)dt \\ &=\int_0^1 \frac{t}{t^2+1}dt+\int_0^1 2k\,dt \\ &=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{t^2+1}dt+\Big[2kt\Big]_0^1 \\ &=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(t^2+1)'}{t^2+1}dt+2k \\ &=\frac{1}{2}\Big[\ln(t^2+1)\Big]_0^1+2k \\ &=\frac{1}{2}\ln 2+2k \end{aligned}$$

즉, $\frac{1}{2}\ln 2+2k=k$이므로 $k=-\frac{1}{2}\ln 2$

따라서 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}-\ln 2$이므로

$f(1)=\frac{1}{2}-\ln 2$

답 $\frac{1}{2}-\ln 2$

253

$xf(x)-\int_e^x f(t)dt=x^2\ln x$ ...... ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)-f(x)=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}$

$xf'(x)=2x\ln x+x$

$\therefore f'(x)=2\ln x+1$

$$\begin{aligned} \therefore f(x)&=\int f'(x)\,dx \\ &=\int (2\ln x+1)\,dx \\ &=2(x\ln x-x)+x+C \\ &=2x\ln x-x+C \end{aligned}$$

위 식의 양변에 $x=e$를 대입하면

$f(e)=2e-e+C=e+C$ ...... ㉡

㉠의 양변에 $x=e$를 대입하면

$ef(e)=e^2$ $\quad\therefore f(e)=e$ ...... ㉢

㉡, ㉢에서 $e=e+C$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=2x\ln x-x$이므로

$f(1)=-1$

답 -1

254

$x-t=u$로 놓고 양변을 t에 대하여 미분하면

$-1=\dfrac{du}{dt}$

$t=0$일 때 $u=x$, $t=x$일 때 $u=0$이므로

$$\int_0^x f(x-t)dt=\int_x^0 f(u)\times(-1)du$$
$$=-\int_x^0 f(u)du$$
$$=\int_0^x f(u)du$$

$$\therefore \int_0^x f(u)du=\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}=\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}$$
$$=\frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1-\sin x}$$
$$=1+\sin x \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\cos x$

$\therefore f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ 답 ④

255

$f(x)=\int_0^x (1+\cos t)\sin t\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(1+\cos x)\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=-1$ 또는 $\sin x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pi$ ($\because -\pi<x<2\pi$)

$-\pi<x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\pi$	$\cdots$	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\pi$에서 극대이므로 극댓값은

$f(\pi)=\int_0^\pi (1+\cos t)\sin t\,dt$

$1+\cos t=u$로 놓으면 $-\sin t=\dfrac{du}{dt}$이고

$t=0$일 때 $u=2$, $t=\pi$일 때 $u=0$이므로

$$f(\pi)=\int_2^0 u\times(-1)du=\int_0^2 u\,du$$
$$=\left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^2=2$$

$\therefore M=2$

또한, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이므로 극솟값은

$f(0)=\int_0^0 (1+\cos t)\sin t\,dt=0$

$\therefore m=0$

$\therefore M+m=2+0=2$ 답 2

256

$F(x)=\int_{\frac{\pi}{6}}^x (\cos t+e^t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=\cos x+e^x$

또, $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos t+e^t)dt=0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{F(x)}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{F(x)-F\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$$
$$=F'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}+e^{\frac{\pi}{6}}$$
$$=e^{\frac{\pi}{6}}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 $e^{\frac{\pi}{6}}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

257

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2+1}{x}\int_1^{x+1} f(t)dt\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x}\Big[F(t)\Big]_1^{x+1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{(x^2+1)\times\frac{F(x+1)-F(1)}{x}\right\}$$
$$=1\times F'(1)=f(1)=3$$

이때 $f(x)=a\cos(\pi x^2)$에서 $f(1)=a\cos\pi=-a$이므로

$-a=3$ $\qquad\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=-3\cos(\pi x^2)$이므로

$f(a)=f(-3)=-3\cos 9\pi=3$ 답 ⑤

258

$$xf(x)=x^2 \sin x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)dt \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=2x \sin x+x^2 \cos x+f(x)$

이므로

$f'(x)=2 \sin x+x \cos x$

$$\begin{aligned} \therefore\ f(x)&=\int f'(x)\,dx \\ &=\int (2 \sin x+x \cos x)\,dx \\ &=\int 2 \sin x\,dx+\int x \cos x\,dx \\ &=-2 \cos x+\int x \cos x\,dx \end{aligned}$$

$\int x \cos x\,dx$에서

$u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$이므로

$$\begin{aligned} f(x)&=-2 \cos x+\int x \cos x\,dx \\ &=-2 \cos x+x \sin x-\int \sin x\,dx \\ &=-2 \cos x+x \sin x+\cos x+C \\ &=x \sin x-\cos x+C \end{aligned}$$

위 식의 양변에 $x=\frac{\pi}{2}$를 대입하면

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right)&=\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}-\cos \frac{\pi}{2}+C \\ &=\frac{\pi}{2}+C \qquad \cdots\cdots ㉡ \end{aligned}$$

㉠의 양변에 $x=\frac{\pi}{2}$를 대입하면

$$\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢에서 $\frac{\pi}{2}+C=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ C=0$

따라서 $f(x)=x \sin x-\cos x$이므로

$$\begin{aligned} f(\pi)&=\pi \sin \pi-\cos \pi \\ &=0-(-1)=1 \end{aligned}$$

답 1

259

ㄱ. $f(x)=\int_0^x \sin(\pi \cos t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\sin(\pi \cos x)$

$$\begin{aligned} \therefore\ f'(0)&=\sin(\pi \cos 0) \\ &=\sin \pi=0\ (\text{참}) \end{aligned}$$

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=\int_0^{-x} \sin(\pi \cos t)dt$

$-t=y$로 놓고 양변을 t에 대하여 미분하면

$-1=\frac{dy}{dt}$

$t=0$일 때 $y=0$, $t=-x$일 때 $y=x$이므로

$$\begin{aligned} f(-x)&=\int_0^{-x} \sin(\pi \cos t)dt \\ &=\int_0^{x} \sin\{\pi \cos(-y)\}\times(-1)dy \\ &=-\int_0^{x} \sin(\pi \cos y)dy \\ &=-f(x) \end{aligned}$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. $\pi-t=y$로 놓고 양변을 t에 대하여 미분하면

$-1=\frac{dy}{dt}$

$t=0$일 때 $y=\pi$, $t=\pi$일 때 $y=0$이므로

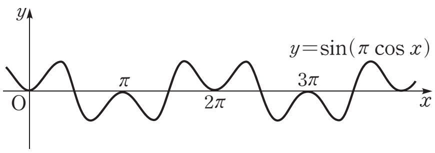
$$\begin{aligned} f(\pi)&=\int_0^{\pi} \sin(\pi \cos t)dt \\ &=\int_{\pi}^{0} \sin\{\pi \cos(\pi-y)\}\times(-1)dy \\ &=-\int_{\pi}^{0} \sin(-\pi \cos y)dy \\ &=\int_{\pi}^{0} \sin(\pi \cos y)dy \\ &=-\int_0^{\pi} \sin(\pi \cos y)dy \\ &=-f(\pi) \end{aligned}$$

$2f(\pi)=0$

$\therefore\ f(\pi)=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. **답 ⑤**

참고 함수 $y=\sin(\pi\cos x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



260

$f(x)=\int_0^x t\sin(x-t)dt$에서 $x-t=u$로 놓고 양변을 t에 대하여 미분하면 $-1=\frac{du}{dt}$

$t=0$일 때 $u=x$, $t=x$일 때 $u=0$이므로

$$f(x)=\int_0^x t\sin(x-t)dt$$
$$=\int_x^0 (x-u)\sin u\times(-1)du$$
$$=\int_0^x (x-u)\sin u\,du$$
$$=x\int_0^x \sin u\,du-\int_0^x u\sin u\,du$$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\int_0^x \sin u\,du+x\sin x-x\sin x$$
$$=\int_0^x \sin u\,du$$
$$=\Big[-\cos u\Big]_0^x$$
$$=1-\cos x$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}\right)$$
$$=1\times\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

261

$f(x)=\int_1^x \frac{n-\ln t}{t}dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{n-\ln x}{x}$$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=n$ $\qquad\therefore x=e^n$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	e^n	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e^n$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$g(n)=f(e^n)=\int_1^{e^n}\frac{n-\ln t}{t}dt$$

$n-\ln t=s$로 놓고 양변을 t에 대하여 미분하면

$$-\frac{1}{t}=\frac{ds}{dt}$$

$t=1$일 때 $s=n$, $t=e^n$일 때 $s=0$이므로

$$g(n)=\int_1^{e^n}\frac{n-\ln t}{t}dt$$
$$=\int_n^0 s\times(-1)ds$$
$$=\int_0^n s\,ds$$
$$=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_0^n=\frac{1}{2}n^2$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{12}g(n)=\sum_{n=1}^{12}\frac{1}{2}n^2$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{12\times13\times25}{6}$$
$$=325$$

답 325

262

$g(t)=e^t\sin\frac{\pi}{2}t$로 놓고 $g(t)$의 한 부정적분을 $G(t)$라 하면

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x^2-4}\int_{f(2)}^{f(x)} g(t)dt$$

$$=\lim_{x \to 2} \frac{1}{x^2-4}\Big[G(t)\Big]_{f(2)}^{f(x)}$$

$$=\lim_{x \to 2} \frac{G(f(x))-G(f(2))}{(x+2)(x-2)}$$

$$=\lim_{x \to 2}\left\{\frac{1}{x+2}\times\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{G(f(x))-G(f(2))}{f(x)-f(2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}f'(2)G'(f(2))$$

$$=\frac{1}{4}f'(2)G'(1)\ (\because f(2)=1)$$

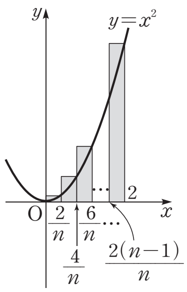
$$=\frac{1}{4}f'(2)g(1)=\frac{1}{4}f'(2)\times e\ (\because g(1)=e)$$

따라서 $\frac{1}{4}f'(2)\times e=2e$이므로

$f'(2)=8$ **답** 8

263

오른쪽 그림과 같이 닫힌구간 $[0, 2]$를 n등분 하면 양 끝 점과 각 분점의 x좌표는 왼쪽부터 차례로



$$0=\frac{0}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{4}{n},\ \frac{6}{n},\ \cdots,\ \frac{2n}{n}=2$$

이때 n등분 한 각 구간을 가로의 길이로, 구간의 오른쪽 끝에서의 함숫값을 세로의 길이로 하는 n개의 직사각형을 만들면 각 직사각형의 세로의 길이는

$$\left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \left(\frac{4}{n}\right)^2,\ \left(\frac{6}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \left(\frac{2n}{n}\right)^2$$

이들 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{2}{n}\times\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{2}{n}\times\left(\frac{4}{n}\right)^2+\frac{2}{n}\times\left(\frac{6}{n}\right)^2+\cdots+\frac{2}{n}\times\left(\frac{2n}{n}\right)^2$$

$$=\frac{8}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$

$$=\frac{8}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\lim_{n \to \infty}S_n=\lim_{n \to \infty}\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

264

ㄱ. $\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{2k}{n}\right)^2\times\frac{1}{n}$

$=\frac{1}{2}\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{2k}{n}\right)^2\times\frac{2}{n}$

$\frac{2k}{n}$를 x로, $\frac{2}{n}$를 dx로 바꾸면

$k=1$일 때 $n\to\infty$이면 $x=0$, $k=n$일 때 $x=2$이므로 적분 구간은 $[0, 2]$이다.

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{1}{2}\int_0^2 (3+x)^2\,dx$

ㄴ. $\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{2k}{n}\right)^2\times\frac{1}{n}$

$=\frac{1}{2}\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{2k}{n}\right)^2\times\frac{2}{n}$

$3+\frac{2k}{n}$를 x로, $\frac{2}{n}$를 dx로 바꾸면

$k=1$일 때 $n\to\infty$이면 $x=3$, $k=n$일 때 $x=5$이므로 적분 구간은 $[3, 5]$이다.

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{1}{2}\int_3^5 x^2\,dx$

ㄷ. $\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{2k}{n}\right)^2\times\frac{1}{n}$에서 $\frac{k}{n}$를 x로, $\frac{1}{n}$을 dx로 바꾸면

$k=1$일 때 $n\to\infty$이면 $x=0$, $k=n$일 때 $x=1$이므로 적분 구간은 $[0, 1]$이다.

$\therefore$ (주어진 식)$=\int_0^1 (3+2x)^2\,dx$

따라서 주어진 식과 같은 값을 갖는 것은 ㄷ뿐이다.

답 ㄷ

265

$$\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{n}f'\left(1+\frac{3k}{n}\right)$$

$$=2\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n}f'\left(1+\frac{3k}{n}\right)\times\frac{3}{n}$$

$1+\dfrac{3k}{n}$를 x로, $\dfrac{3}{n}$을 dx로 바꾸면

$k=1$일 때 $n \to \infty$이면 $x=1$, $k=n$일 때 $x=4$이므로 적분 구간은 $[1, 4]$이다.

$\therefore$ (주어진 식)$=2\displaystyle\int_1^4 f'(x)dx=2\Big[f(x)\Big]_1^4$

$=2\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^4=4$

답 4

266

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\times\frac{1}{n}$

$\dfrac{k}{n}$를 x로, $\dfrac{1}{n}$을 dx로 바꾸면

$k=1$일 때 $n \to \infty$이면 $x=0$, $k=n$일 때 $x=1$이므로 적분 구간은 $[0, 1]$이다.

$\therefore$ (주어진 식)$=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$

이때 $x=\tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\dfrac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$이고

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$이므로

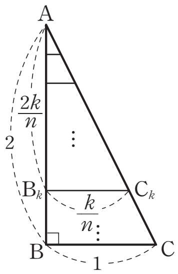
$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta}d\theta$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$

답 $\dfrac{\pi}{4}$

267



오른쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k}^2=\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$

이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k}^2$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2$

$\displaystyle=2\pi\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2\times\frac{1}{n}$

$\dfrac{k}{n}$를 x로, $\dfrac{1}{n}$을 dx로 바꾸면

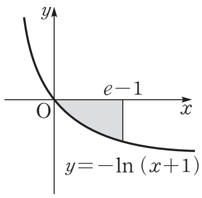
$k=1$일 때 $n \to \infty$이면 $x=0$, $k=n$일 때 $x=1$이므로 적분 구간은 $[0, 1]$이다.

$\therefore$ (주어진 식)$=2\pi\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$

$=2\pi\Big[\dfrac{1}{3}x^3\Big]_0^1=\dfrac{2}{3}\pi$

답 $\dfrac{2}{3}\pi$

268



곡선 $y=-\ln(x+1)$과 x축의 교점의 x좌표는

$0=-\ln(x+1)$에서 $x=0$

닫힌구간 $[0, e-1]$에서 $y\le 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\displaystyle\int_0^{e-1}[-\{-\ln(x+1)\}]dx$

$=\displaystyle\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx$

$=\Big[x\ln(x+1)\Big]_0^{e-1}-\displaystyle\int_0^{e-1}\frac{x}{x+1}dx$

$=e-1-\displaystyle\int_0^{e-1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=e-1-\Big[x-\ln|x+1|\Big]_0^{e-1}$

$=e-1-(e-1-1)=1$

답 1

269

곡선 $y=e^x$과 x축, y축 및 직선 $x=\ln 3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\displaystyle\int_0^{\ln 3}e^x\,dx=\Big[e^x\Big]_0^{\ln 3}$

$=e^{\ln 3}-1=2$

이므로

$\displaystyle\int_0^k e^x\,dx=1$

즉, $\displaystyle\int_0^k e^x\,dx=\Big[e^x\Big]_0^k=e^k-1$에서

$e^k-1=1$, $e^k=2$

$\therefore k=\ln 2$

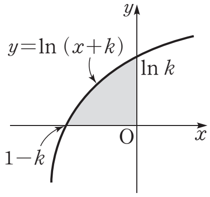
답 $\ln 2$

270

$y=\ln(x+k)$에서 $x+k=e^y$

$\therefore x=e^y-k$

닫힌구간 $[0, \ln k]$에서 $x\le 0$ 이고 곡선 $y=\ln(x+k)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\int_0^{\ln k}\{-(e^y-k)\}dy=1$

$\Big[-e^y+ky\Big]_0^{\ln k}=1$

$-k+k\ln k+1=1$, $k(\ln k-1)=0$

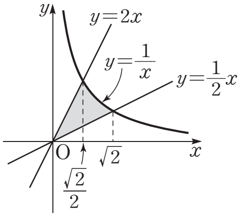
$\ln k=1$ ($\because k>1$)

$\therefore k=e$

답 e

271

곡선 $y=\dfrac{1}{x}$과 직선 $y=2x$의 교점의 x좌표는



$\dfrac{1}{x}=2x$에서 $x^2=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because x>0$)

곡선 $y=\dfrac{1}{x}$과 직선 $y=\dfrac{1}{2}x$의 교점의 x좌표는

$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}x$에서 $x^2=2$ $\qquad \therefore x=\sqrt{2}$ ($\because x>0$)

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(2x-\frac{1}{2}x\right)dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}x\right)dx$$

$$=\left[\frac{3}{4}x^2\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\left[\ln x-\frac{1}{4}x^2\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3}{8}+\left\{\left(\ln\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)-\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{8}\right)\right\}$$

$$=\ln 2$$

답 $\ln 2$

272

$y=e^x$에서 $y'=e^x$이므로 접점의 좌표를 (t, e^t)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 e^t이다.

즉, 접선의 방정식은

$y-e^t=e^t(x-t)$

이 직선이 점 $(1, 0)$을 지나므로

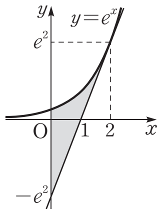
$-e^t=e^t(1-t)$, $1-t=-1$

$\therefore t=2$

즉, 곡선 위의 점 $(2, e^2)$에서의 접선의 방정식은

$y=e^2x-e^2$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^2\{e^x-(e^2x-e^2)\}dx$$

$$=\int_0^2(e^x-e^2x+e^2)dx$$

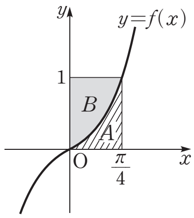
$$=\left[e^x-\frac{e^2}{2}x^2+e^2x\right]_0^2$$

$$=e^2-1$$

답 ⑤

273

오른쪽 그림과 같이 두 부분의 넓이를 각각 A, B라 하면



$f(0)=\tan 0=0$,

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$이고 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $\int_0^1 g(x)dx$의 값은 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이인 B와 같다.

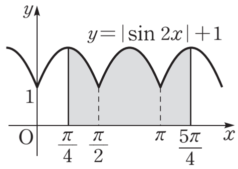
$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx+\int_0^1 g(x)dx=A+B$$

$$=\frac{\pi}{4}\times 1=\frac{\pi}{4}$$

답 $\dfrac{\pi}{4}$

274

곡선 $y=|\sin 2x|+1$과 x축 및 두 직선 $x=\dfrac{\pi}{4}$, $x=\dfrac{5\pi}{4}$로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x+1)dx$$

$$=4\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

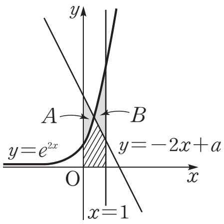
$$=4\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$=\pi+2$$

답 ③

275

A의 넓이와 B의 넓이가 같으므로 두 직선 $y=-2x+a$와 $x=1$ 및 x축, y축으로 둘러싸인 영역의 넓이와 곡선 $y=e^{2x}$과 직선 $x=1$ 및 x축, y축으로 둘러싸인 영역의 넓이가 같다. 즉,



$$\int_0^1(-2x+a)dx=\int_0^1 e^{2x}\,dx$$

$$\left[-x^2+ax\right]_0^1=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$$

$$-1+a=\frac{e^2-1}{2}$$

$$\therefore a=\frac{e^2+1}{2}$$

답 ①

276

두 곡선 $y=\cos x$와 $y=\sqrt{3}\sin x$의 교점의 x좌표는 $\cos x=\sqrt{3}\sin x$에서

$$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore x=\frac{\pi}{6}\left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$$

따라서 구하는 넓이 S_1, S_2는

$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos x-\sqrt{3}\sin x)dx$$

$$=\left[\sin x+\sqrt{3}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=2-\sqrt{3}$$

$$S_2=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{3}\sin x\,dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$

$$=\left[-\sqrt{3}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\sqrt{3}-1$$

$$\therefore S_2-S_1=(\sqrt{3}-1)-(2-\sqrt{3})$$

$$=2\sqrt{3}-3$$

답 $\mathbf{2\sqrt{3}-3}$

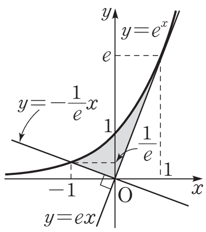
277

$y=e^x$에서 $y'=e^x$이므로 곡선 위의 점 $(1,\ e)$에서의 접선의 기울기는 e이다.

따라서 점 $(1,\ e)$에서의 접선의 방정식은

$$y-e=e(x-1)\qquad \therefore y=ex$$

이때 접선 $y=ex$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{e}$이다.



즉, 기울기가 $-\frac{1}{e}$이고 점 $\left(-1,\ \frac{1}{e}\right)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}(x+1)\qquad \therefore y=-\frac{1}{e}x$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{0}\left\{e^x-\left(-\frac{1}{e}x\right)\right\}dx+\int_0^1(e^x-ex)dx$$

$$=\left[e^x+\frac{1}{2e}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{e^2-3}{2e}$$

답 $\mathbf{\frac{e^2-3}{2e}}$

다른풀이 구하는 넓이를 S라 하면

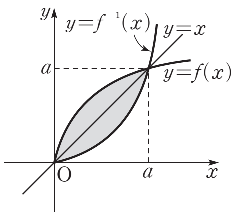
$$S=\int_{-1}^{1}e^x\,dx-\left(\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{e}+\frac{1}{2}\times1\times e\right)$$

$$=\left[e^x\right]_{-1}^{1}-\left(\frac{1}{2e}+\frac{e}{2}\right)$$

$$=\left(e-\frac{1}{e}\right)-\left(\frac{1}{2e}+\frac{e}{2}\right)$$

$$=\frac{e^2-3}{2e}$$

278



$y=\sqrt{ax}$에서 $y^2=ax$

$\therefore x=\frac{1}{a}y^2$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x^2\ (x\geq 0)$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f^{-1}(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.

즉, $\frac{1}{a}x^2=x$에서 $x(x-a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a$

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 직선 $y=x$와 곡선 $y=f^{-1}(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로

$$2\int_0^a\left(x-\frac{1}{a}x^2\right)dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3a}x^3\right]_0^a=\frac{1}{3}a^2$$

따라서 $\frac{1}{3}a^2=\frac{25}{3}$이므로

$a^2=25$ $\quad\therefore a=5\ (\because a>0)$

답 5

279

곡선 $y=\frac{1}{x}$과 두 직선 $x=1$, $x=2$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$S=\int_1^2\frac{1}{x}\,dx=\Big[\ln|x|\Big]_1^2=\ln 2$$

이때 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 두 직선 $x=1$, $x=a$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$2S=2\ln 2=\ln 4$

(i) $a>1$일 때,

$$\int_1^a\frac{1}{x}\,dx=\Big[\ln|x|\Big]_1^a=\ln a$$

$\ln a=\ln 4$ $\quad\therefore a=4$

(ii) $0<a<1$일 때,

$$\int_a^1\frac{1}{x}\,dx=\Big[\ln|x|\Big]_a^1=-\ln a$$

$-\ln a=\ln 4$ $\quad\therefore a=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 구하는 모든 a의 값의 합은

$4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$

답 ②

280

$$S_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin x\right|dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|\,dx$$

이때 $y=|\sin x|$는 주기가 π인 주기함수이므로 임의의 자연수 n에 대하여

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|\,dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$

$$=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=2$$

$$\therefore S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\times 2=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

답 2

281

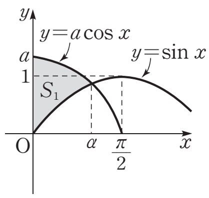
두 곡선 $y=a\cos x$, $y=\sin x$의 교점의 x좌표를 α라 하면

$a\cos\alpha=\sin\alpha$, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=a$

$\therefore \tan\alpha=a\ (a>0)$

곡선 $y=a\cos x$와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos x\,dx=\Big[a\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=a$$



두 곡선 $y=a\cos x$, $y=\sin x$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하면

$$S_1=\int_0^{\alpha}(a\cos x-\sin x)dx$$

$$=\Big[a\sin x+\cos x\Big]_0^{\alpha}$$

$$=a\sin\alpha+\cos\alpha-1$$

$$=a\times\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}-1$$

$$=\sqrt{1+a^2}-1$$

이때 $S=2S_1$이므로 $a=2(\sqrt{1+a^2}-1)$

$a+2=2\sqrt{1+a^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$3a^2-4a=0$, $a(3a-4)=0$

$\therefore a=\frac{4}{3}$ ($\because a>0$) 답 $\frac{4}{3}$

참고 $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$에서 $\tan\alpha=a$이므로

$1+a^2=\sec^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, $\cos^2\alpha=\frac{1}{1+a^2}$

$\therefore \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ $\left(\because 0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\right)$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$이므로

$\sin^2\alpha=\frac{a^2}{1+a^2}$

$\therefore \sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ $\left(\because a>0,\ 0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\right)$

282

A의 넓이와 B의 넓이가 같으므로

$\int_0^k x\sin x\,dx=\int_k^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\sin x\right)dx$

$\int_0^k x\sin x\,dx=\int_k^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}\,dx-\int_k^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$

$\int_0^k x\sin x\,dx+\int_k^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=\int_k^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}\,dx$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=\int_k^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}\,dx$ …… ㉠

이때

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$

$=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)dx$

$=0+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

$\int_k^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}\,dx=\left[\frac{\pi}{2}x\right]_k^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{k}{2}\pi$

이를 ㉠에 대입하면

$1=\frac{\pi^2}{4}-\frac{k}{2}\pi$, $\frac{k}{2}\pi=\frac{\pi^2}{4}-1$

$\therefore k=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}$ 답 ③

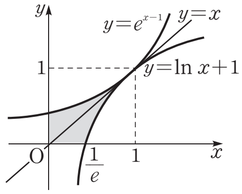
283

두 함수 $y=e^{x-1}$과 $y=\ln x+1$은 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 이때 두 곡선이 서로 접하므로 접선의 방정식은 $y=x$이다.

두 곡선과 직선 $y=x$의 접점의 좌표를 $(t,\ e^{t-1})$이라 하면 $t=e^{t-1}$에서 $t=1$

즉, 두 곡선은 점 $(1,\ 1)$에서 접한다.

두 곡선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같고 이것은 직선 $y=x$에 의하여 이등분된다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=2\int_0^1(e^{x-1}-x)dx$

$=2\left[e^{x-1}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=2\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)$

$=1-\frac{2}{e}$ 답 $1-\frac{2}{e}$

284

밑면으로부터의 높이가 x인 지점에서의 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=(\sqrt{30-2x})^2$

$=30-2x$

따라서 구하는 용기의 부피는

$\int_0^{10}S(x)dx$

$=\int_0^{10}(30-2x)dx$

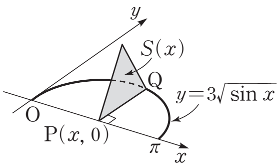
$=\Big[30x-x^2\Big]_0^{10}$

$=300-100$

$=200$ 답 200

285

x축 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)$ $(0\le x\le \pi)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=3\sqrt{\sin x}$와 만나는 점을 Q라 하면 $\mathrm{Q}(x,\ 3\sqrt{\sin x})$이다.



점 P를 지나고 x축에 수직인 평면으로 주어진 입체도형을 자른 단면은 한 변의 길이가 $\overline{\mathrm{PQ}}=3\sqrt{\sin x}$인 정삼각형이므로 그 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(3\sqrt{\sin x})^2$$
$$=\frac{9\sqrt{3}}{4}\sin x$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^{\pi} S(x)dx$$
$$=\int_0^{\pi}\frac{9\sqrt{3}}{4}\sin x\,dx$$
$$=\frac{9\sqrt{3}}{4}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$
$$=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

답 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

286

시각 $t=1$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^2 |\cos \pi t|dt$$
$$=\int_1^{\frac{3}{2}}(-\cos \pi t)dt+\int_{\frac{3}{2}}^2 \cos \pi t\,dt$$
$$=\Big[-\frac{1}{\pi}\sin \pi t\Big]_1^{\frac{3}{2}}+\Big[\frac{1}{\pi}\sin \pi t\Big]_{\frac{3}{2}}^2$$
$$=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

답 $\frac{2}{\pi}$

287

$\frac{dx}{dt}=-3,\ \frac{dy}{dt}=3\sqrt{t}$이므로 시각 $t=3$에서 $t=8$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_3^8 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_3^8 \sqrt{(-3)^2+(3\sqrt{t})^2}\,dt$$
$$=\int_3^8 \sqrt{9+9t}\,dt$$
$$=3\int_3^8 \sqrt{1+t}\,dt$$
$$=3\Big[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\Big]_3^8$$
$$=3\times\frac{38}{3}=38$$

답 38

288

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}e^{2x}-e^{-2x}$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}e^{2x}-e^{-2x}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\ln 2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\ln 2}\left(\frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}\right)dx$$
$$=\Big[\frac{1}{8}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big]_0^{\ln 2}$$
$$=\left(\frac{1}{8}e^{2\ln 2}-\frac{1}{2}e^{-2\ln 2}\right)-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$$

답 ⑤

289

물의 깊이가 t cm일 때의 수면의 넓이를 $S(t)$ cm^2, 물의 깊이가 x cm일 때의 물의 부피를 V cm^3라 하면

$$V=\int_0^x S(t)dt$$
$$=\frac{1}{\ln 3}(9^x+3^x-2)$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$S(x)=2\times 9^x+3^x$

따라서 수면의 넓이가 21 cm^2, 즉 $S(x)=21$일 때,

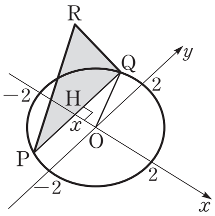
$2\times 9^x+3^x=21$, $2\times(3^x)^2+3^x-21=0$

$(2\times 3^x+7)(3^x-3)=0$, $3^x=3$

$\therefore x=1(\text{cm})$ **답 1 cm**

290

오른쪽 그림과 같이 밑면인 원의 중심을 원점, 밑면의 지름을 포함하는 직선을 x축으로 정하자. x축 위의 점 $\mathrm{H}(x,\ 0)$ $(-2\le x\le 2)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 주어진 입체도형을 자른 단면을 삼각형 PQR라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{4-x^2}$

이때 삼각형 PQR의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{4-x^2})^2$

$=\sqrt{3}(4-x^2)$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$\int_{-2}^{2}S(x)dx=\int_{-2}^{2}\sqrt{3}(4-x^2)dx$

$=2\times\sqrt{3}\int_0^2(4-x^2)dx$

$=2\sqrt{3}\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$

$=\frac{32\sqrt{3}}{3}$ **답 $\frac{32\sqrt{3}}{3}$**

291

$\frac{dx}{dt}=-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t=-e^{-t}(\cos t+\sin t)$,

$\frac{dy}{dt}=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t=e^{-t}(\cos t-\sin t)$

이므로 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리 $s(a)$는

$s(a)$

$=\int_0^a\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$=\int_0^a\sqrt{e^{-2t}(\cos t+\sin t)^2+e^{-2t}(\cos t-\sin t)^2}\,dt$

$=\int_0^a\sqrt{2e^{-2t}(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt$

$=\int_0^a\sqrt{2}e^{-t}\,dt$

$=\sqrt{2}\left[-e^{-t}\right]_0^a$

$=\sqrt{2}(1-e^{-a})$

$\therefore \lim_{a\to\infty}s(a)=\lim_{a\to\infty}\sqrt{2}(1-e^{-a})$

$=\sqrt{2}$ **답 $\sqrt{2}$**

292

$y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$에서

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\times 2x=x(x^2+2)^{\frac{1}{2}}$이므로

$0\le x\le a$에서 곡선의 길이를 l이라 하면

$l=\int_0^a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

$=\int_0^a\sqrt{1+\{x(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\}^2}\,dx$

$=\int_0^a\sqrt{x^4+2x^2+1}\,dx$

$=\int_0^a\sqrt{(x^2+1)^2}\,dx$

$=\int_0^a(x^2+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^a$

$=\frac{1}{3}a^3+a$

즉, $\frac{1}{3}a^3+a=12$에서 $a^3+3a-36=0$

$(a-3)(a^2+3a+12)=0$

$\therefore a=3$ **답 3**

293

$x<0$일 때, $\overline{\mathrm{PH}}=e^{-x}$

$x\ge 0$일 때, $\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{\ln(x+1)+1}$

즉, $\overline{\mathrm{PH}}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는

$x<0$일 때, $(e^{-x})^2=e^{-2x}$

$x\ge 0$일 때, $\{\sqrt{\ln(x+1)+1}\}^2=\ln(x+1)+1$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_{-\ln 2}^{0} e^{-2x}\,dx+\int_{0}^{e-1}\{\ln(x+1)+1\}dx$$

이때 $V_1=\int_{-\ln 2}^{0} e^{-2x}\,dx$,

$V_2=\int_{0}^{e-1}\{\ln(x+1)+1\}dx$라 하면

$$V_1=\int_{-\ln 2}^{0} e^{-2x}\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-\ln 2}^{0}$$
$$=-\frac{1}{2}(1-e^{2\ln 2})=\frac{3}{2}$$

$V_2=\int_{0}^{e-1}\{\ln(x+1)+1\}dx$에서

$u(x)=\ln(x+1)+1$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x+1}$, $v(x)=x$이므로

$$V_2=\left[x\{\ln(x+1)+1\}\right]_{0}^{e-1}-\int_{0}^{e-1}\frac{x}{x+1}\,dx$$
$$=2(e-1)-\int_{0}^{e-1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=2(e-1)-\left[x-\ln|x+1|\right]_{0}^{e-1}$$
$$=2(e-1)-(e-2)=e$$

$\therefore V=V_1+V_2=e+\frac{3}{2}$ 답 ④

294

$\frac{dx}{dt}=t-\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=2$이므로 점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2^2}=\sqrt{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}=t+\frac{1}{t}$$

$t>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t+\frac{1}{t}\ge 2\sqrt{t\times\frac{1}{t}}=2$$

이때 등호는 $t=\frac{1}{t}$일 때 성립하므로 $t^2=1$, 즉 $t=1$일 때 점 P의 속력이 최소가 된다.

따라서 $t=1$일 때부터 3초 동안 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_{1}^{4}\left(t+\frac{1}{t}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+\ln|t|\right]_{1}^{4}$$
$$=(8+\ln 4)-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{15}{2}+\ln 4$$

답 $\mathbf{\frac{15}{2}+\ln 4}$