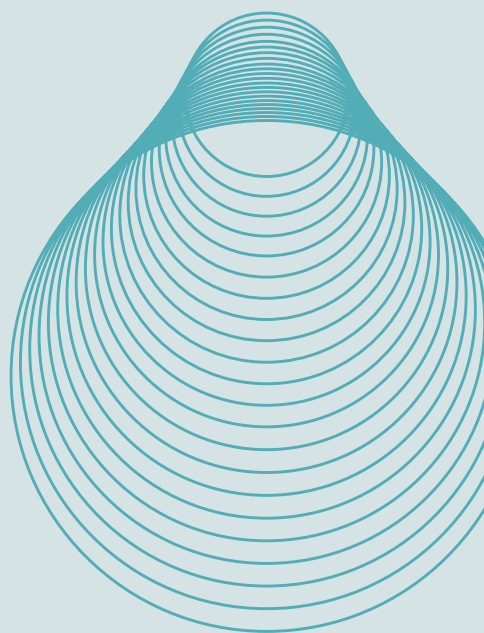


개념

수학의 시작 개념원리

미적분 I

정답 및 풀이



1

함수의 극한

1. 함수의 극한과 연속

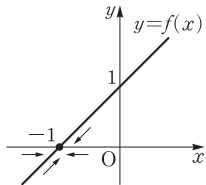
01

함수의 극한

● 본책 10~16쪽

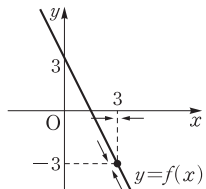
1

- (1) $f(x)=x+1$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
그래프에서 x 의 값이 -1 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 0 에 한없이 가까워지므로



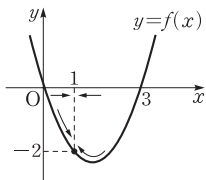
$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0$$

- (2) $f(x)=-2x+3$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
그래프에서 x 의 값이 3 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 -3 에 한없이 가까워지므로



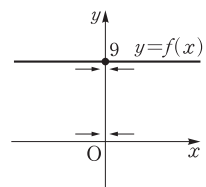
$$\lim_{x \rightarrow 3} (-2x+3) = -3$$

- (3) $f(x)=x^2-3x$ 라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
그래프에서 x 의 값이 1 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 -2 에 한없이 가까워지므로



$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2-3x) = -2$$

- (4) $f(x)=9$ 라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
그래프에서 x 의 값이 0 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 항상 9 이므로

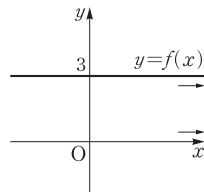


$$\lim_{x \rightarrow 0} 9 = 9$$

답 (1) 0 (2) -3
(3) -2 (4) 9

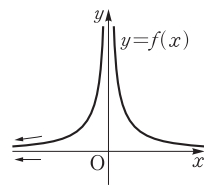
2

- (1) $f(x)=3$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
그래프에서 x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 항상 3 이므로



$$\lim_{x \rightarrow \infty} 3 = 3$$

- (2) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
그래프에서 x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 0 에 한없이 가까워지므로

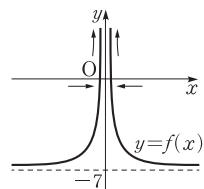


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

답 (1) 3 (2) 0

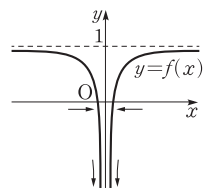
3

- (1) $f(x)=\frac{1}{x^2}-7$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
그래프에서 x 의 값이 0 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 한없이 커지므로



$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - 7 \right) = \infty$$

- (2) $f(x)=-\frac{1}{x^2}+1$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
그래프에서 x 의 값이 0 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로



$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} + 1 \right) = -\infty$$

답 (1) ∞ (2) $-\infty$

4

- (1) $f(x) = 3x - 2$ 라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

그래프에서 x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값도 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x - 2) = \infty$$

- (2) $f(x) = -5x + 1$ 이라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

그래프에서 x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-5x + 1) = -\infty$$

- (3) $f(x) = -x^2 + 1$ 이라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

그래프에서 x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값도 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 1) = -\infty$$

- (4) $f(x) = \sqrt{-x + 4}$ 라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

그래프에서 x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x + 4} = \infty$$

답 (1) ∞ (2) $-\infty$
(3) $-\infty$ (4) ∞

5

- (1) $f(x) = \frac{x}{x-2}$
$$= 1 + \frac{2}{x-2}$$

라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

그래프에서 x 의 값이 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-2} = 3$$

- (2) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{3x} = \frac{x(x+2)}{3x}$ 라 하면 $x \neq 0$ 일 때

$$f(x) = \frac{x+2}{3}$$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

그래프에서 x 의 값이 0에 한없이 가까워질 때,

$f(x)$ 의 값은 $\frac{2}{3}$ 에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

- (3) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$ 이라 하면 $x \neq 3$ 일 때

$$f(x) = x + 3$$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

그래프에서 x 의 값이 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$

의 값은 6에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

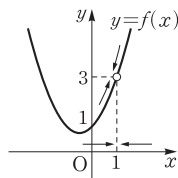
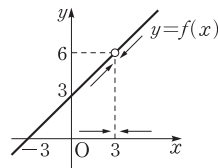
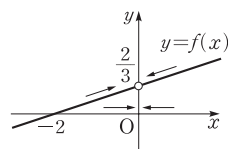
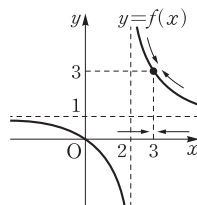
- (4) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1}$ 이라 하면

$x \neq 1$ 일 때 $f(x) = x^2 + x + 1$

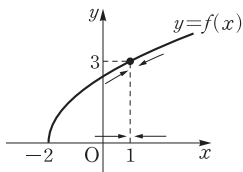
즉 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

그래프에서 x 의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$



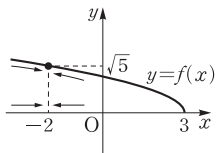
- (5) $f(x) = \sqrt{3x+6}$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



그래프에서 x 의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3x+6} = 3$$

- (6) $f(x) = \sqrt{-x+3}$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



그래프에서 x 의 값이 -2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 $\sqrt{5}$ 에 한없이 가까워지므로

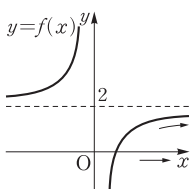
$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{-x+3} = \sqrt{5}$$

답 (1) 3 (2) $\frac{2}{3}$ (3) 6

(4) 3 (5) 3 (6) $\sqrt{5}$

6

- (1) $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



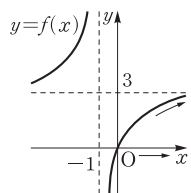
그래프에서 x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$$

- (2) $f(x) = \frac{3x}{x+1}$

$$= 3 - \frac{3}{x+1}$$

이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

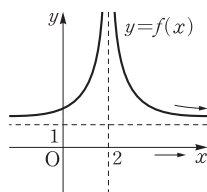


그래프에서 x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x+1} = 3$$

- (3) $f(x) = \frac{1}{|x-2|} + 1$ 이라

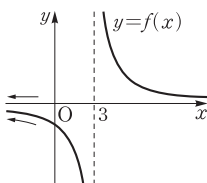
하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



그래프에서 x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{|x-2|} + 1\right) = 1$$

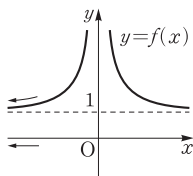
- (4) $f(x) = \frac{1}{x-3}$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



그래프에서 x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-3} = 0$$

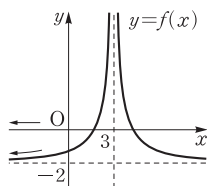
- (5) $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



그래프에서 x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

- (6) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2} - 2$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



그래프에서 x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 -2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ \frac{1}{(x-3)^2} - 2 \right\} = -2$$

답 (1) 2 (2) 3 (3) 1

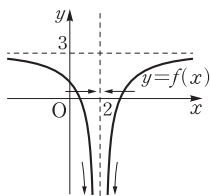
(4) 0 (5) 1 (6) -2

7

(1) $f(x) = 3 - \frac{1}{(x-2)^2}$ 이라

하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 그래프에서 x 의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

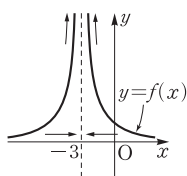
$$\lim_{x \rightarrow 2} \left\{ 3 - \frac{1}{(x-2)^2} \right\} = -\infty$$



(2) $f(x) = \frac{1}{|x+3|}$ 이라 하면

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 그래프에서 x 의 값이 -3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 한없이 커지므로

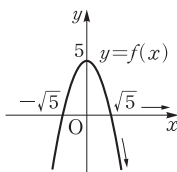
$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{|x+3|} = \infty$$



(3) $f(x) = 5 - x^2$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

그래프에서 x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

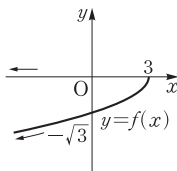
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (5 - x^2) = -\infty$$



(4) $f(x) = -\sqrt{3-x}$ 라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

그래프에서 x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값도 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-\sqrt{3-x}) = -\infty$$



답 (1) $-\infty$ (2) ∞
(3) $-\infty$ (4) $-\infty$

02 무극한과 좌극한

● 본책 17~19쪽

8

(1) x 의 값이 3보다 크면서 3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = 0$$

(2) x 의 값이 4보다 작으면서 4에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = 3$$

(3) x 의 값이 1보다 크면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1$$

x 의 값이 1보다 작으면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

(4) x 의 값이 2보다 크면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 2$$

x 의 값이 2보다 작으면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 2$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$$

(5) x 의 값이 -1보다 크면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 2$$

x 의 값이 -1보다 작으면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 -1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = -1$$

즉 $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

답 (1) 0 (2) 3

(3) 1 (4) 2

(5) 존재하지 않는다.

9

- (1) $y = \frac{x-2}{x+2} = 1 - \frac{4}{x+2}$ 의
그래프는 오른쪽 그림과 같
으므로

$$\lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x-2}{x+2} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2-} \frac{x-2}{x+2} = \infty$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{x+2}$ 의 값은 존재하지 않는다.

- (2) $x \rightarrow -1$ 일 때, $x > -1$ 이므로

$$|x+1| = x+1$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x^2+x}{|x+1|} &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x(x+1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} x \\ &= -1 \end{aligned}$$

$x \rightarrow -1$ 일 때, $x < -1$ 이므로

$$|x+1| = -(x+1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x^2+x}{|x+1|} &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x(x+1)}{-(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} (-x) \\ &= 1 \end{aligned}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x^2+x}{|x+1|} \neq \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x^2+x}{|x+1|}$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+x}{|x+1|}$ 의 값은 존재하지 않는다.

- (3) $-1 < x < 0$ 일 때, $0 < x+1 < 1$ 이므로

$$[x+1] = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{[x+1]}{x+1} = 0$$

답 (1) 존재하지 않는다.

(2) 존재하지 않는다.

(3) 0

10

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (x-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (-x+k) = -1+k$$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의 값이 존재하려면

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) \text{ 이어야 하므로}$$

$$0 = -1+k \quad \therefore k=1$$

답 1

03

함수의 극한에 대한 성질

● 본책 20~27쪽

11

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

$$= 3 + (-1) = 2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - 2g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - 2 \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

$$= 3 - 2 \times (-1) = 5$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

$$= 3 \times (-1) = -3$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \{g(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \times \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

$$= -1 \times (-1) = 1$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)}$$

$$= \frac{3}{-1} = -3$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) + 3g(x)}{\{f(x)\}^2}$$

$$= \frac{2 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 3 \lim_{x \rightarrow 1} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1} f(x)}$$

$$= \frac{2 \times 3 + 3 \times (-1)}{3 \times 3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

답 (1) 2 (2) 5 (3) -3

(4) 1 (5) -3 (6) $\frac{1}{3}$

12

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1} x^3 = (-1)^3 = -1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1) = 0 - 1 = -1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + x^2 - 3) = 2^3 + 2^2 - 3 = 9$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -2} x(2x+3) = -2 \times \{2 \times (-2) + 3\} = 2$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} (x-2)(x^2+5) = (1-2) \times (1^2+5) = -6$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 7}{5 - x} = \frac{3^2 - 2 \times 3 + 7}{5 - 3} = 5$$

답 (1) -1 (2) -1 (3) 9

(4) 2 (5) -6 (6) 5

13

$\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) + g(x)\} = 2$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2$$

$$\alpha + \beta = 2 \quad \therefore \beta = 2 - \alpha \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x) = -8$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -8$$

$$\therefore \alpha\beta = -8 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\alpha(2 - \alpha) = -8, \quad \alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0$$

$$(\alpha + 2)(\alpha - 4) = 0$$

$$\therefore \alpha = -2 \text{ 또는 } \alpha = 4$$

$\alpha = -2$ 이면 $\beta = 4$, $\alpha = 4$ 이면 $\beta = -2$ 이므로

$$\alpha = 4, \beta = -2 \quad (\because \alpha > \beta)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) + 4}{g(x) - 4} &= \frac{2\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} 4}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x) - \lim_{x \rightarrow 2} 4} \\ &= \frac{2 \times 4 + 4}{-2 - 4} = -2 \end{aligned}$$

답 -2

14

주어진 등식의 좌변의 분모, 분자를 각각 x^2 으로 나누면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3f(x)}{3x^2 - 2f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{3f(x)}{x^2}}{3 - \frac{2f(x)}{x^2}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1 + 3\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow 0} 3 - 2\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}} \\ &= \frac{1 + 3a}{3 - 2a} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1 + 3a}{3 - 2a} = -2$ 이므로

$$1 + 3a = -6 + 4a$$

$$\therefore a = 7$$

답 7

15

$x - a = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow a$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x-a)}{x-a} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

이때 주어진 식의 분모, 분자를 각각 x 로 나누면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2f(x)}{2x^2 + 3f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{2f(x)}{x}}{2x + \frac{3f(x)}{x}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1 + 2\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}}{2\lim_{x \rightarrow 0} x + 3\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}} \\ &= \frac{1 + 2 \times 1}{0 + 3 \times 1} = 1 \end{aligned}$$

답 1

16

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + 5x^2}{2x - 3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(6 + 5x)}{x(2 - 3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + 5x}{2 - 3x} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^3 + 3x^2 - x - 3} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(2x-1)(x+3)}{(x+3)(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x-1}{(x+1)(x-1)} \\ &= -\frac{7}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1} + 1)}{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1} + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1} + 1) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)(\sqrt{x}+1) \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-\sqrt{3x-2}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(x+\sqrt{3x-2})}{(x-\sqrt{3x-2})(x+\sqrt{3x-2})(\sqrt{x+2}+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+\sqrt{3x-2})}{(x^2-3x+2)(\sqrt{x+2}+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+\sqrt{3x-2})}{(x-2)(x-1)(\sqrt{x+2}+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+\sqrt{3x-2}}{(x-1)(\sqrt{x+2}+2)} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

답 (1) 3 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{7}{8}$
(4) 2 (5) 4 (6) 1

다른 풀이 (5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)(\sqrt{x}+1) = 4
 \end{aligned}$$

17

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-2x+3}{3x^2+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}} = \frac{1}{3}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x-7}{4x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}}{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} = 0$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{2}{x}-1} = -\infty$$

$$\begin{aligned}
 (4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+5x+3}+x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}+1} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

(5) $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-2x}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-3t-1}{\sqrt{t^2+2t}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-3-\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{2}{t}}} \\
 &= -3
 \end{aligned}$$

(6) $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2x}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1+2t}{\sqrt{4t^2+1}+\sqrt{t^2-1}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{t}+2}{\sqrt{4+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}} \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) 0 (3) $-\infty$
(4) $\frac{1}{2}$ (5) -3 (6) $\frac{2}{3}$

18

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2-2x+4)$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(-1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} \right) \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2+3x-1}-2x)$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2+3x-1}-2x)(\sqrt{4x^2+3x-1}+2x)}{\sqrt{4x^2+3x-1}+2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+3x-1}+2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+2} \\
 &= \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

(4) $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-7x+10}+x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2+7t+10}-t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t^2+7t+10}-t)(\sqrt{t^2+7t+10}+t)}{\sqrt{t^2+7t+10}+t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{7t+10}{\sqrt{t^2+7t+10}+t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{7+\frac{10}{t}}{\sqrt{1+\frac{7}{t}+\frac{10}{t^2}}+1} \\
 &= \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

답 (1) $-\infty$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) -1 (4) $\frac{7}{2}$

19

$$\begin{aligned}
 (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left\{ 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \times \frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \times \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{(x+1)^2} = 2 \\
 (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{3}-x} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \times \frac{\sqrt{3}-(\sqrt{3}-x)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-x)} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \times \frac{x}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-x)} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3-\sqrt{3}x} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x+3}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt{4x+3}-2\sqrt{x})}{2\sqrt{4x+3}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt{4x+3}-2\sqrt{x})(\sqrt{4x+3}+2\sqrt{x})}{2\sqrt{4x+3}(\sqrt{4x+3}+2\sqrt{x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{8x+6+4\sqrt{4x^2+3x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{8+\frac{6}{x}+4\sqrt{4+\frac{3}{x}}} \\
 &= \frac{3}{16}
 \end{aligned}$$

(4) $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{x}{\sqrt{9x^2+3}} \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{\sqrt{9t^2+3}} \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2(\sqrt{9t^2+3}-3t)}{3\sqrt{9t^2+3}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2(\sqrt{9t^2+3}-3t)(\sqrt{9t^2+3}+3t)}{3\sqrt{9t^2+3}(\sqrt{9t^2+3}+3t)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3t^2}{3(9t^2+3+3t\sqrt{9t^2+3})} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{9t^2+3+\sqrt{81t^4+27t^2}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{9+\frac{3}{t^2}+\sqrt{81+\frac{27}{t^2}}} \\
 &= \frac{1}{18}
 \end{aligned}$$

답 (1) 2 (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{3}{16}$ (4) $\frac{1}{18}$

연습 문제

● 본책 28~30쪽

20

전략 우극한과 좌극한이 모두 존재하고 그 값이 같은지 확인한다.

① $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ 의 값은 존재하지 않는다.

② $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \left(1 - \frac{1}{x-1} \right) = -\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \left(1 - \frac{1}{x-1} \right) = \infty$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x-1}$ 의 값은 존재하지 않는다.

③ $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1$,
 $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{-x} = -1$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} \neq \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{|x|}$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ 의 값은 존재하지 않는다.

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x-1} = \infty$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2} = 0$$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

21

전략 $x=1$ 에서의 우극한과 좌극한을 각각 구한다.

$$a = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x+1) = 2,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} x^2 = 1 \text{ 이므로}$$

$$a - b = 1$$

답 1

22

전략 $x=1$ 에서의 우극한과 좌극한이 서로 같음을 이용하여 k 에 대한 식을 세운다.

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \{ -(x-2)^2 + k \} = -1 + k$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (3x+5) = 8$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

$$-1 + k = 8 \quad \therefore k = 9$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} -(x-2)^2 + 9 & (x > 1) \\ 3x + 5 & (x \leq 1) \end{cases} \text{ 이므로}$$

$$f(4) = -(4-2)^2 + 9 = 5$$

답 5

23

전략 분모, 분자를 각각 x 로 나누어 극한값을 a 에 대한 식으로 나타낸다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x^2 - 9x + f(x)}{2x^2 + 3x - f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x - 9 + \frac{f(x)}{x}}{2x + 3 - \frac{f(x)}{x}} \\ &= \frac{-9 + a}{3 - a} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{-9 + a}{3 - a} = 5 \text{ 이므로}$$

$$-9 + a = 15 - 5a$$

$$6a = 24 \quad \therefore a = 4$$

답 4

24

전략 분모를 인수분해한 다음 약분한다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x)}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x+1} \\ &= \frac{f(1)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{f(1)}{2} = 5 \text{ 이므로}$$

$$f(1) = 10$$

답 10

25

전략 $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$ 꼴의 극한값을 구한다.

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 7} - 2}{x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}} - \frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x}} \\ &= 1 \\ \beta &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 7} - 2}{x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x + 7} - 2)(\sqrt{x^2 + 4x + 7} + 2)}{(x + 3)(\sqrt{x^2 + 4x + 7} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 3)(\sqrt{x^2 + 4x + 7} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)(x + 1)}{(x + 3)(\sqrt{x^2 + 4x + 7} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 4x + 7} + 2} \\ &= -\frac{1}{2} \\ \therefore \alpha + \beta &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

26

전략 $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty - \infty$ 꼴의 극한값을 구한다.

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{x-5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{5}{x}} = 3$$

② $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}-x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t+1}{\sqrt{t^2-t}+t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+1} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

③ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

④ $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} = 0\end{aligned}$$

⑤ $x < 0$ 일 때, $|x| = -x$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3|x|+1}{2x-4|x|+1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-3x+1}{2x+4x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+1}{6x+1}\end{aligned}$$

이때 $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+1}{6x+1} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t+1}{-6t+1} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{t}}{-6+\frac{1}{t}} \\ &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

답 ⑤

27

전략 가우스 기호의 정의를 이용하여 우극한 또는 좌극한을 각각 구한다.

① $-1 < x < 0$ 일 때, $[x] = -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{[x]} = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x) = 0$$

② $0 < x < 1$ 일 때, $[x] = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{[x]}{x} = 0$$

③ $-1 < x < 0$ 일 때, $-2 < x-1 < -1$ 이므로

$$[x-1] = -2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{[x-1]}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-2}{x-1} = 2$$

④ $0 < x < 1$ 일 때, $1 < x+1 < 2$ 이므로

$$[x+1] = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x+1}{[x+1]} = \lim_{x \rightarrow 0+} (x+1) = 1$$

⑤ $3 < x < 4$ 일 때, $0 < x-3 < 1$ 이므로

$$[x-3] = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{[x-3]}{x-3} = 0$$

따라서 극한값이 가장 큰 것은 ③이다.

답 ③

28

전략 주어진 그래프에서 $x \rightarrow 2+$, $x \rightarrow 2-$ 일 때의 극한값을 각각 구한다.

$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 2+} g(x) = -3$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2+} g(x) \\ &= 3 \times (-3) = -9\end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = -3$, $\lim_{x \rightarrow 2-} g(x) = 3$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2-} g(x) \\ &= -3 \times 3 = -9\end{aligned}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)g(x) = -9$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x) = -9$$

답 -9

29

전략 함수의 극한의 성질을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \beta$

(α, β 는 실수)라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} g(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x) - f(x)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} - \lim_{x \rightarrow a} f(x) \\ &= \beta - \alpha \quad (\text{참})\end{aligned}$$

ㄴ. [반례] $f(x) = x - a$, $g(x) = \frac{1}{x-a}$ 이라 하면

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} 1 = 1$$

이지만 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a}$ 의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} g(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ f(x) \times \frac{g(x)}{f(x)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} \\ &= \alpha \beta \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

30

전략 $x-2=t$ 로 치환하고 주어진 극한값을 이용한다.

$x-2=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x^2-4} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{(t+2)^2-4} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t(t+4)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t+4} \\ &= 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{3}{4}$

31

전략 합성함수를 구하여 주어진 식에 대입한다.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x-1) = (2x-1)^2,$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2-1 \text{ 이므로}$$

(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-1)^2 - (2x^2-1)}{(x^2-1)(x^3-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)^2}{(x+1)(x-1)^2(x^2+x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x+1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{3}$

32

전략 x^2-a 의 부호를 이용하여 절댓값 기호를 없앤다.

$0 < a < 2$ 이고, $x \rightarrow 2$ 일 때 $x^2 \rightarrow 4$ 이므로

$$x^2 - a > 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2-a| + a-4}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-a) + a-4}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

답 4

33

전략 각 극한값을 a 또는 b 에 대한 식으로 나타낸다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3-a^3}{x^2-a^2} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{(x-a)(x+a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2+ax+a^2}{x+a} \\ &= \frac{3a^2}{2a} \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \frac{3a^2}{2a} = 6 \text{ 이므로 } 3a^2 = 12a$$

$$\therefore a = 4 \quad (\because a \neq 0)$$

따라서

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+4x} - \sqrt{x^2+bx}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+4x} - \sqrt{x^2+bx})(\sqrt{x^2+4x} + \sqrt{x^2+bx})}{\sqrt{x^2+4x} + \sqrt{x^2+bx}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4-b)x}{\sqrt{x^2+4x} + \sqrt{x^2+bx}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-b}{\sqrt{1+\frac{4}{x}} + \sqrt{1+\frac{b}{x}}} \\ &= \frac{4-b}{2} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \frac{4-b}{2} = 3 \quad \therefore b = -2$$

$$\therefore a+b=2$$

답 2

참고 $a=0$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3-a^3}{x^2-a^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

34

전략 $x-1=t$, $f(x)=s$ 로 치환한다.

$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x-1)$ 에서 $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow -1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x-1) = \lim_{t \rightarrow -1+} f(t) = -1$$

$\lim_{x \rightarrow 1+} f(f(x))$ 에서 $f(x)=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $s \rightarrow -1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(f(x)) = \lim_{s \rightarrow -1+} f(s) = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0+} f(x-1) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(f(x)) \\ = -1 + 2 = 1 \end{aligned}$$

답 ④

35

전략 $3f(x)-2g(x)=h(x)$ 로 놓고 주어진 식을 $f(x)$ 와 $h(x)$ 에 대한 식으로 나타낸다.

$3f(x)-2g(x)=h(x)$ 로 놓으면

$$2g(x) = 3f(x) - h(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + 4g(x)}{-2f(x) + 6g(x)} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + 2\{3f(x) - h(x)\}}{-2f(x) + 3\{3f(x) - h(x)\}} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7f(x) - 2h(x)}{7f(x) - 3h(x)} \leftarrow \frac{\infty}{\infty} \text{ 꼴} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - 2 \times \frac{h(x)}{f(x)}}{7 - 3 \times \frac{h(x)}{f(x)}} \leftarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{f(x)} = 0 \\ = 1 \end{aligned}$$

답 1

04 함수의 극한의 응용

● 본책 31~35쪽

36

(1) $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - a) = 0 \text{이므로}$$

$$4 - a = 0 \quad \therefore a = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore b &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4 \end{aligned}$$

(2) $x \rightarrow -3$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow -3} (\sqrt{2x+a} - 1) = 0 \text{이므로}$$

$$\sqrt{-6+a} - 1 = 0, \quad \sqrt{-6+a} = 1$$

$$\therefore a = 7$$

$$\begin{aligned} \therefore b &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{\sqrt{2x+7}-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(\sqrt{2x+7}+1)}{(\sqrt{2x+7}-1)(\sqrt{2x+7}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(\sqrt{2x+7}+1)}{2(x+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{2x+7}+1}{2} = 1 \end{aligned}$$

답 (1) $a=4$, $b=4$

(2) $a=7$, $b=1$

37

(1) $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + ax + b) = 0 \text{이므로}$$

$$1 - a + b = 0 \quad \therefore b = a - 1$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + ax + a - 1}{x + 1} \\ = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+a-1)}{x+1} \\ = \lim_{x \rightarrow -1} (x+a-1) \\ = a - 2 \end{aligned}$$

따라서 $a - 2 = 2$ 이므로

$$a = 4, \quad b = 3$$

(2) $x \rightarrow 2$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 2} (a\sqrt{x-1} + b) = 0 \text{이므로}$$

$$a + b = 0 \quad \therefore b = -a$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{a\sqrt{x-1}-a} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{a(\sqrt{x-1}-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{a(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{a(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}+1}{a} \\ &= \frac{2}{a} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{2}{a}=1$ 이므로

$$a=2, b=-2$$

답 (1) $a=4, b=3$

(2) $a=2, b=-2$

38

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2+1}=2$ 에서 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 2인 이차함수이다.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)(x+1)} = -1$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{이므로 } f(1) = 0$$

(i), (ii)에서 $f(x) = 2(x-1)(x+a)$ (a 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)(x+1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x+a)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x+a)}{x+1} \\ &= 1+a \end{aligned}$$

즉 $1+a=-1$ 이므로

$$a=-2$$

따라서 $f(x) = 2(x-1)(x-2)$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-1)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} 2(x-1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

답 2

39

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-2x^3}{x^2}=2$ 에서 $f(x)$ 는 삼차항의 계수가 2, 이차항의 계수가 2인 삼차함수이다.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -3$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{이므로 } f(0) = 0$$

(i), (ii)에서 $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + ax$ (a 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 2x^2 + ax}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 + 2x + a) = a \end{aligned}$$

따라서 $a=-3$ 이므로

$$f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x$$

답 $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x$

40

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x+1) = 3,$$

$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+2) = 3$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 3$$

답 3

41

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+3}{x+2} = 5, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-2x+7}{x^2} = 5 \text{이므로 함수}$$

의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$$

답 5

42

$2x+1 < f(x) < 2x+5$ 의 각 변을 세제곱하면

$$(2x+1)^3 < \{f(x)\}^3 < (2x+5)^3$$

$x > 0$ 일 때, $x^3+1 > 0$ 이므로 각 변을 x^3+1 로 나누면

$$\frac{(2x+1)^3}{x^3+1} < \frac{\{f(x)\}^3}{x^3+1} < \frac{(2x+5)^3}{x^3+1}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^3}{x^3+1} = 8, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+5)^3}{x^3+1} = 8$ 이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^3}{x^3+1} = 8$$

답 8

43

$$d(t) = \sqrt{(3t-1)^2 + (4t+1)^2}$$

$$= \sqrt{25t^2 + 2t + 2}$$

이므로

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{d(t) - 5t\}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{25t^2 + 2t + 2} - 5t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{25t^2 + 2t + 2} - 5t)(\sqrt{25t^2 + 2t + 2} + 5t)}{\sqrt{25t^2 + 2t + 2} + 5t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t + 2}{\sqrt{25t^2 + 2t + 2} + 5t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{t}}{\sqrt{25 + \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}} + 5}$$

$$= \frac{1}{5}$$

답 1

44

직선 OP의 기울기가 $\frac{t^2}{t} = t$ 이므로 점 P를 지나고 직선 OP와 수직인 직선의 방정식은

$$y - t^2 = -\frac{1}{t}(x - t)$$

위의 식에 $y=0$ 을 대입하면

$$-t^2 = -\frac{1}{t}(x - t) \quad \therefore x = t^3 + t$$

따라서 $f(t) = t^3 + t$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 + t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (t^2 + 1) = 1$$

답 1

연습문제

● 본책 36~38쪽

45

전략 주어진 극한값을 이용하여 $f(1)$ 의 값을 구한다.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 1}{x - 1} = 9$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + 1\} = 0$ 이므로 $f(1) + 1 = 0$

$$\therefore f(1) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x)\}^2 + f(x)}{x^3 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)\{f(x) + 1\}}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 1}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 + x + 1}$$

$$= 9 \times \frac{-1}{3} = -3$$

답 -3

46

전략 $x \rightarrow -3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 임을 이용하여 a 의 값을 먼저 구한다.

$x \rightarrow -3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow -3} (\sqrt{x^2 - x - 3} + ax) = 0$ 이므로

$$\sqrt{9 + 3 - 3} - 3a = 0$$

$$3 - 3a = 0 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore b = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 - x - 3} + x}{x + 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(\sqrt{x^2 - x - 3} + x)(\sqrt{x^2 - x - 3} - x)}{(x + 3)(\sqrt{x^2 - x - 3} - x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-(x + 3)}{(x + 3)(\sqrt{x^2 - x - 3} - x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - x - 3} - x} = -\frac{1}{6}$$

$$\therefore a + b = \frac{5}{6}$$

답 5/6

47

전략 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 임을 이용한다.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + ax + b}{x} = 4$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + ax + b) = 0$ 이므로 $b = 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + ax}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (x + a) = a$$

따라서 $a = 4$ 이므로

$$f(x) = x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 최솟값 -4 를 갖는다.

답 -4

48

전략 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$ 의 차수와 인수를 구한다.

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x^2 - x + 3} = 1$ 에서 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 2인 이차함수이다.

(ii) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{(x+1)(x+2)} = -1$ 에서 $x \rightarrow -2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$ 이므로 $f(-2) = 0$

(i), (ii)에서 $f(x) = 2(x+2)(x+a)$ (a 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{(x+1)(x+2)} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x+2)(x+a)}{(x+1)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x+a)}{x+1} \\ &= 4 - 2a \end{aligned}$$

즉 $4 - 2a = -1$ 이므로 $a = \frac{5}{2}$

따라서 $f(x) = 2(x+2)\left(x + \frac{5}{2}\right)$ 이므로

$$f(1) = 21 \quad \text{답 21}$$

49

전략 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$ 의 차수와 인수를 구한다.

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 3x^2}{x} = a$ 에서 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 3, 일차항의 계수가 a 인 이차함수이다.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 이므로 $f(0) = 0$

(i), (ii)에서 $f(x) = 3x^2 + ax$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + ax}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (3x + a) = a \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2 \quad \text{답 2}$$

50

전략 함수의 극한의 대소 관계를 이용한다.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+5x-3x^2}{3x^2} = -1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-x}{x} = -1$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1 \quad \text{답 -1}$$

51

전략 주어진 식을 정리한 후 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 임을 이용한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left(\frac{x^2}{x+1} + a \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + a}{(x-1)(x+1)} = b$$

에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + a) = 0$ 이므로

$$2a + 1 = 0 \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore b = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \frac{1}{2}}{x+1} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore b - a = \frac{5}{4} \quad \text{답 } \frac{5}{4}$$

52

전략 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$ 의 차수와 인수를 구한다.

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x - \sqrt{x^2 + 3}} = 2$ 에서 $f(x)$ 는 일차함수이다.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)(x+3)} = p$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ 이므로 $f(2) = 0$

(i), (ii)에서 $f(x) = a(x-2)$ (a 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x - \sqrt{x^2 + 3}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(x-2)}{2x - \sqrt{x^2 + 3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a - \frac{2a}{x}}{2 - \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}} = a \end{aligned}$$

이므로 $a = 2$

따라서 $f(x)=2(x-2)$ 이므로

$$\begin{aligned} p &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)(x+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{(x-2)(x+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{5} \\ \therefore f(p) &= f\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{16}{5} \quad \text{답 } -\frac{16}{5} \end{aligned}$$

53

전략 주어진 조건을 이용하여 $f(x)g(x)$ 의 차수와 인수를 구한다.

조건 ㉞에서 $f(x)g(x)$ 는 삼차항의 계수가 2인 삼차 함수이다.

조건 ㉝에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$ 이므로 $f(0)g(0) = 0$

따라서 $f(x)g(x) = 2x^3 + ax^2 + bx$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + ax^2 + bx}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + ax + b}{x} = -4 \quad \dots\dots \text{㉟} \end{aligned}$$

㉟에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 + ax + b) = 0$ 이므로 $b = 0$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + ax + b}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + ax}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (2x + a) = a \end{aligned}$$

이므로 $a = -4$

$$\therefore f(x)g(x) = 2x^3 - 4x^2 = 2x^2(x-2)$$

즉 $f(x)$ 는 $2x^2(x-2)$ 의 인수이므로 $f(x) = 2x^2$ 일 때, $f(2)$ 의 값이 최대이다.

따라서 구하는 최댓값은 $2 \times 2^2 = 8$ 답 ③

54

전략 주어진 부등식의 각 변을 $x-1$ 로 나눈 후 함수의 극한의 대소 관계를 이용한다.

(i) $x > 1$ 일 때

$x-1 > 0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x-1$ 로 나누면

$$\frac{2x^3 - 6x^2 + 4x}{x-1} \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq \frac{x^4 - 2x^3 + 1}{x-1}$$

(ii) $x < 1$ 일 때

$x-1 < 0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x-1$ 로 나누면

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 1}{x-1} \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq \frac{2x^3 - 6x^2 + 4x}{x-1}$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 6x^2 + 4x}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x(x-1)(x-2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} 2x(x-2) = -2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^3 + 1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^3 - x^2 - x - 1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - x^2 - x - 1) = -2 \end{aligned}$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = -2 \quad \text{답 } -2$$

55

전략 주어진 조건을 이용하여 r 를 a 에 대한 식으로 나타낸다.

$\overline{AH} = 1$, $\overline{BH} = \overline{CH} = \frac{a}{2}$ 이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

이때 삼각형 ABC의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times r \times (\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC})$$

$$\frac{1}{2} \times a \times 1 = \frac{1}{2} \times r \times \left(2 \times \frac{\sqrt{a^2 + 4}}{2} + a\right)$$

$$\therefore r = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4} + a}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{a \rightarrow \infty} r &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4} + a} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{a^2}} + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2} \end{aligned}$$

56

전략 분모를 1로 생각하여 분자를 유리화한다.

$x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3ax + 2} - \sqrt{ax^2 + ax + 1}) \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 - 3at + 2} - \sqrt{at^2 - at + 1}) \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 - 3at + 2 - (at^2 - at + 1)}{\sqrt{t^2 - 3at + 2} + \sqrt{at^2 - at + 1}} \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(1-a)t^2 - 2at + 1}{\sqrt{t^2 - 3at + 2} + \sqrt{at^2 - at + 1}} = b \end{aligned}$$

이때 극한값이 존재하려면 $1-a=0$ 이어야 하므로

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ \therefore b &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2t + 1}{\sqrt{t^2 - 3t + 2} + \sqrt{t^2 - t + 1}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2 + \frac{1}{t}}{\sqrt{1 - \frac{3}{t} + \frac{2}{t^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}}} \\ &= -1 \\ \therefore a + b &= 0 \end{aligned}$$

답 0

57

전략 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$ 의 인수를 구한다.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = -6$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고
극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ 이므로

$$f(1) = 0$$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 2$ 에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고
극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$ 이므로

$$f(-1) = 0$$

따라서 $f(x) = (x-1)(x+1)g(x)$

($g(x)$ 는 다항함수)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)g(x)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)g(x) \\ &= 2g(1) = -6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)g(x)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x-1)g(x) \\ &= -2g(-1) = 2 \end{aligned}$$

이므로 $g(1) = -3, g(-1) = -1$

이를 만족시키는 차수가 가장 낮은 다항함수는 일차함수이므로 $g(x) = ax + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$a + b = -3, -a + b = -1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -1, b = -2$

따라서 $g(x) = -x - 2$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x+1)g(x) \\ &= -(x-1)(x+1)(x+2) \\ \text{답 } f(x) &= -(x-1)(x+1)(x+2) \end{aligned}$$

58

전략 함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 a 의 값을 먼저 구한다.

$2x^2 + 1 > 0, x^4 + 2 > 0$ 이므로 조건 (가)에서

$$\begin{aligned} \frac{(2x^2 + 1)(ax^2 - 2)}{x^4 + 2} &\leq \frac{(2x^2 + 1)f(x)}{x^4 + 2} \\ &\leq \frac{(2x^2 + 1)(ax^2 + 2)}{x^4 + 2} \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 + 1)(ax^2 - 2)}{x^4 + 2} &= 2a, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 + 1)(ax^2 + 2)}{x^4 + 2} &= 2a \end{aligned}$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 + 1)f(x)}{x^4 + 2} = 2a$$

따라서 조건 (나)에서 $2a = 4$ 이므로

$$a = 2$$

즉 $2x^2 - 2 \leq f(x) \leq 2x^2 + 2$ 이므로 $x \neq 0$ 일 때 각 변을 x^2 으로 나누면

$$2 - \frac{2}{x^2} \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq 2 + \frac{2}{x^2}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{2}{x^2}\right) = 2, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{2}{x^2}\right) = 2$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2 \quad \text{답 2}$$

59

전략 직각삼각형의 닮음을 이용하여 $\frac{T(t)}{S(t)}$ 를 t 에 대한 식으로 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 선분 AB와 선분 OP의 교점을 M이라 하면

$$\overline{OP} \perp \overline{AB}$$

따라서

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OM},$$

$$T(t) = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PM}$$

이므로

$$\frac{T(t)}{S(t)} = \frac{\overline{PM}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OP} - \overline{OM}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} - 1$$

..... ㉠

이때 직각삼각형 OBP에서 $\overline{OB}^2 = \overline{OM} \times \overline{OP}$ 이므로

$$\overline{OM} = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{OP}} = \frac{4}{\overline{OP}}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\frac{T(t)}{S(t)} = \overline{OP} \times \frac{\overline{OP}}{4} - 1$$

$$= \frac{\overline{OP}^2}{4} - 1$$

$$= \frac{t^2 + (t^2 - 4)^2}{4} - 1$$

$$= \frac{t^4 - 7t^2 + 12}{4}$$

$$= \frac{(t^2 - 3)(t + 2)(t - 2)}{4}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{T(t)}{(t-2)S(t)} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{T(t)}{(t^4-2)S(t)}$$

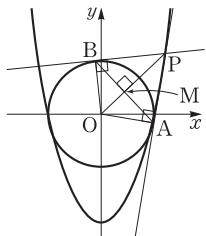
$$= \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{(t^2-3)(t+2)(t-2)}{4(t-2)}$$

$$+ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t^2-3)(t+2)(t-2)}{4(t^4-2)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{(t^2-3)(t+2)}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

답 ②



2 함수의 연속

I. 함수의 극한과 연속

01 함수의 연속

• 본책 40~47쪽

60

(1) $f(1)$ 의 값이 존재하지 않으므로 불연속이다.

(2) $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 불연속이다.

(3) $f(1) = 1$ 이고 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ 이다.

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ 이므로 불연속이다.

답 풀이 참조

61

(1) $f(2) = 0, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

(2) $f(2)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

답 (1) 연속 (2) 불연속

62

답 (1) $[-2, 1]$ (2) $(-1, 2)$ (3) $[0, 2)$

(4) $(1, 3]$ (5) $(-\infty, -2)$ (6) $[3, \infty)$

63

답 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $[1, \infty)$

64

(1) (i) $f(2) = 0$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x-2) = 0,$

$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (-x+2) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

(2) $f(2)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

(3) (i) $f(2)=1$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 1 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

(4) $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} \sqrt{x-2} = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (-1) = -1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

답 (1) 연속 (2) 불연속
(3) 연속 (4) 불연속

65

(i) $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로

$f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

(ii) $f(2)=4$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=3$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$$

따라서 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 $x=1$ 에서 극한값이 존재하지 않고 $x=1$, $x=2$ 에서 불연속이므로 $a=1$, $b=2$

$$\therefore ab=2$$

답 2

66

$$\neg. \text{(i)} f(0)+g(0)=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x)+g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) \\ &= 1 + (-1) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x)+g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) \\ &= -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+g(x)\} = 0$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+g(x)\} = f(0)+g(0)$ 이

므로 함수 $f(x)+g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\neg. \text{(i)} f(0)g(0)=\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) \\ &= 1 \times (-1) = -1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) \\ &= -1 \times 1 = -1 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = -1$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) \neq f(0)g(0)$ 이므로 함

수 $f(x)g(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

ㄷ. $f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t=1$ 이고,

$x \rightarrow 0-$ 일 때 $t=-1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) = g(1) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x)) = g(-1) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x))$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x))$ 의 값이 존재하지 않으므로 함

수 $g(f(x))$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

ㄹ. $g(x)=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $s=-1$ 이고,

$x \rightarrow 0-$ 일 때 $s=1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(g(x)) = f(-1) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(g(x)) = f(1) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} f(g(x)) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(g(x))$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x))$ 의 값이 존재하지 않으므로

함수 $f(g(x))$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

이상에서 $x=0$ 에서 연속인 함수는 ㄱ뿐이다. 답 ㄱ

67

함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이라면

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \text{ 이어야 하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2ax + 3}{x + 1} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 2ax + 3) = 0 \text{ 이므로}$$

$$1 - 2a + 3 = 0 \quad \therefore a = 2$$

$a=2$ 를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+3)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x+3) = 2 \\ \therefore a+b &= 4 \end{aligned}$$

답 4

68

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이면 모든 실수 x 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x^2+8}-b}{x-1} = \frac{a-1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} (a\sqrt{x^2+8}-b) = 0$ 이므로

$$3a-b=0 \quad \therefore b=3a \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x^2+8}-3a}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(\sqrt{x^2+8}-3)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(\sqrt{x^2+8}-3)(\sqrt{x^2+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x^2+8}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+8}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x+1)}{\sqrt{x^2+8}+3} \\ &= \frac{a}{3} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{3} = \frac{a-1}{2}$ 이므로

$$2a=3a-3 \quad \therefore a=3$$

$a=3$ 을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned} b &= 9 \\ \therefore b-a &= 6 \end{aligned}$$

답 6

69

$x \neq 1$ 일 때

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+15}-4}{x-1}$$

함수 $f(x)$ 가 $x \geq -15$ 인 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

$$\begin{aligned} \therefore f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+15}-4}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+15}-4)(\sqrt{x+15}+4)}{(x-1)(\sqrt{x+15}+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+15}+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+15}+4} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{8}$

70

$x \neq -1, x \neq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^4+ax+b}{x^2-x-2} \\ &= \frac{x^4+ax+b}{(x+1)(x-2)} \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=-1, x=2$ 에서도 연속이다.

(i) 함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned} f(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4+ax+b}{(x+1)(x-2)} \end{aligned}$$

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow -1} (x^4+ax+b) = 0$ 이므로

$$1-a+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

(ii) 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned} f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4+ax+b}{(x+1)(x-2)} \end{aligned}$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^4+ax+b) = 0$ 이므로

$$16+2a+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-5, b=-6$$

$$\begin{aligned}
 \therefore f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 5x - 6}{(x+1)(x-2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)(x^2+x+3)}{(x+1)(x-2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+x+3) \\
 &= 9
 \end{aligned}$$

답 9

연습문제

• 본책 48~50쪽

71

전략 $x=0$ 에서의 함숫값과 극한값을 각각 구하여 비교한다.

- ① (i) $f(0)=0$
 (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x|x| = 0$
 (i), (ii)에서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로 $x=0$ 에서 연속이다.
- ② (i) $f(0)=0$
 (ii) $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} x[x] = \lim_{x \rightarrow 0+} x \times \lim_{x \rightarrow 0+} [x] = 0 \times 0 = 0,$
 $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} x[x] = \lim_{x \rightarrow 0-} x \times \lim_{x \rightarrow 0-} [x] = 0 \times (-1) = 0$
 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
 (i), (ii)에서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로 $x=0$ 에서 연속이다.
- ③ $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1,$
 $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x}{x} = -1$
 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$
 따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 $x=0$ 에서 불연속이다.
- ④ (i) $f(0)=1$
 (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2+1) = 1$
 (i), (ii)에서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로 $x=0$ 에서 연속이다.

⑤ (i) $f(0)=3$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-3x}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-3)}{x(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x-1} = 3
 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로 $x=0$ 에서 연속이다.

답 ③

72

전략 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 임을 이용하여 극한값을 $f(1)$ 에 대한 식으로 나타낸다.

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\begin{aligned}
 f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \\
 \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3-1)f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)f(x)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x+1)f(x) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x+1) \times \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \\
 &= 3f(1)
 \end{aligned}$$

즉 $3f(1) = 12$ 이므로 $f(1) = 4$

답 4

73

전략 $x=-1$ 에서의 우극한, 좌극한, 함숫값이 모두 같음을 이용한다.

함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이면 모든 실수 x 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = f(-1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (x^3+bx+2) = 1-b,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (-x^2+x+a) = a-2,$$

$$f(-1) = 2$$

이므로 $1-b = a-2 = 2$

$\therefore a=4, b=-1 \quad \therefore ab=-4$

답 -4

74

전략 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 임을 이용한다.

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이라면 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이어야 하므로

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = 1 \end{aligned}$$

답 1

75

전략 $x=a$ 에서의 유극한, 좌극한, 함숫값을 a 에 대한 식으로 나타낸다.

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} (ax-6) = a^2-6,$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} (-2x+a) = -a,$$

$$f(a) = -a$$

$$\text{이므로 } a^2-6 = -a, \quad a^2+a-6=0$$

$$(a+3)(a-2)=0$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 2$$

$$\text{따라서 구하는 함은 } -3+2 = -1$$

답 ①

76

전략 $x=-1$, $x=1$ 에서의 극한값을 이용한다.

$x \neq -1$, $x \neq 1$ 일 때

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8}{x^2 - 1} \\ &= \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-4)}{(x+1)(x-1)} \\ &= (x+2)(x-4) \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=-1$, $x=1$ 에서도 연속이다.

(i) $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned} f(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x+2)(x-4) = -5 \end{aligned}$$

(ii) $x=1$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned} f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+2)(x-4) = -9 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $f(-1)f(1) = 45$

답 45

77

전략 $x=-1$, $x=0$, $x=1$ 에서 함수 $|f(x)|$ 의 연속성을 조사한다.

(i) $\lim_{x \rightarrow -1+} |f(x)| = |-2| = 2$, $\lim_{x \rightarrow -1-} |f(x)| = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} |f(x)| \neq \lim_{x \rightarrow -1-} |f(x)|$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} |f(x)|$ 의 값이 존재하지 않으므로

$|f(x)|$ 는 $x=-1$ 에서 불연속이다.

(ii) $|f(0)| = 0$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 0+} |f(x)| = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} |f(x)| = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = |f(0)|$$

따라서 $|f(x)|$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

(iii) $|f(1)| = 2$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 1+} |f(x)| = |-2| = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1-} |f(x)| = 2 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} |f(x)| = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} |f(x)| = |f(1)|$$

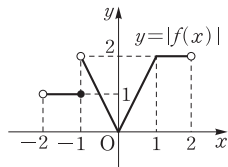
따라서 $|f(x)|$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

이상에서 함수 $|f(x)|$ 가 불연속인 x 의 값은 -1 이다.

답 -1

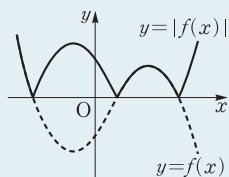
다른 풀이 열린구간 $(-2, 2)$

에서 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $|f(x)|$ 는 $x=-1$ 에서 불연속이다.



해설 Focus

함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 그리고 $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한다.



78

전략 함수 $f(x)g(x)$ 의 $x=1$ 에서의 함숫값, 우극한, 좌극한을 각각 구하여 비교한다.

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) \\ = -1 \times 1 = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) \\ = 1 \times 1 = 1$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로

함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

$$\neg. (i) f(1)g(1) = 0 \times 0 = 0$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) \\ = -1 \times 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) \\ = 1 \times 0 = 0$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = 0$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = f(1)g(1)$ 이므로 함수

$f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\neg. (i) f(1)g(1) = 0 \times 0 = 0$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) \\ = -1 \times 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) \\ = 1 \times 0 = 0$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = 0$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = f(1)g(1)$ 이므로 함수

$f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

이상에서 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이 되도록 하는 함수 $g(x)$ 는 $\neg$, $\neg$ 이다. **답** $\neg$, $\neg$

79

전략 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 임을 이용하여 a, b 에 대한 식을 세운다.

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \text{ 이어야 하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax + b}{(x-1)^2} = c \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + ax + b) = 0 \text{ 이므로}$$

$$1 + a + b = 0$$

$$\therefore b = -a - 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax - a - 1}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + a + 1)}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + a + 1}{x-1}$$

$$= c \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + a + 1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$1 + 1 + a + 1 = 0 \quad \therefore a = -3$$

$$a = -3 \text{ 을 } \textcircled{2} \text{ 에 대입하면 } b = 2$$

또 $a = -3$ 을 $\textcircled{3}$ 에 대입하면

$$c = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$$

$$\therefore abc = -18 \quad \text{답 } -18$$

80

전략 $x = -1, x = 2$ 에서의 함숫값, 우극한, 좌극한이 각각 같음을 이용한다.

함수 $f(x)$ 가 $x = -1, x = 2$ 에서 연속이면 구간

$(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다.

(i) $x = -1$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = f(-1)$$

이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (x^2 - 2x + b) = b + 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (ax + 1) = -a + 1,$$

$$f(-1) = -a + 1$$

$$\text{에서 } b + 3 = -a + 1$$

$$\therefore a + b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $x = 2$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2)$$

이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (ax+1) = 2a+1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (x^2-2x+b) = b,$$

$$f(2) = 2a+1$$

에서 $2a+1=b$

$$\therefore 2a-b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡를 연립하여 풀면

$$a=-1, b=-1$$

$$\therefore 2a+b=-3 \quad \text{답 -3}$$

다른 풀이 함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이라면 이 구간에서 $y=f(x)$ 의 그래프가 이어져 있어야 한다.

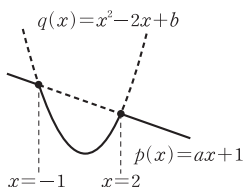
이때 $p(x)=ax+1$,

$q(x)=x^2-2x+b$ 라 하

면 $x=-1, x=2$ 에서

$p(x)$ 와 $q(x)$ 의 함숫값이

각각 같아야 한다.



즉 $p(-1)=q(-1), p(2)=q(2)$ 에서

$$-a+1=3+b, 2a+1=b$$

$$\therefore a=-1, b=-1$$

81

전략 $x \neq -2$ 일 때, $f(x)$ 의 식을 이용하여 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ 의 값을 구한다.

$$x \neq -2 \text{일 때, } f(x) = \frac{ax^2-bx}{x+2}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=-2$ 에서도 연속이다.

즉 $f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax^2-bx}{x+2} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$x \rightarrow -2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow -2} (ax^2-bx) = 0$ 이므로

$$4a+2b=0 \quad \therefore b=-2a \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉡를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax^2+2ax}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax(x+2)}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} ax = -2a \end{aligned}$$

따라서 $-2a=2$ 이므로 $a=-1$

$a=-1$ 을 ㉡에 대입하면 $b=2$

$$\therefore a+b=1$$

답 1

I -2

한
자
로
요
구
함

82

전략 주어진 그래프를 이용하여 새로 정의된 함수의 우극한, 좌극한, 함숫값을 각각 구한다.

㉠. $g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = 1 \quad (\text{참})$$

$$\text{㉡. } \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} g(x)$$

$$= -1 \times 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} g(x)$$

$$= 1 \times 1 = 1$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로

함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다. (참)

㉢. $f(x)=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $s \rightarrow 0+$ 이고,

$x \rightarrow 0-$ 일 때 $s=1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) = \lim_{s \rightarrow 0+} g(s) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x)) = g(1) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x))$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x))$ 의 값이 존재하지 않으므로

함수 $g(f(x))$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

답 ㉠, ㉡

83

전략 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이고 $f(0)=f(4)$ 임을 이용한다.

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재한다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} (x^2+ax+b) = \lim_{x \rightarrow 2-} (2x-4)$$

$$4+2a+b=0$$

$$\therefore 2a+b=-4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(x+4)$ 이므로

$$f(0)=f(4), \quad -4=16+4a+b$$

$$\therefore 4a+b=-20 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -8, b = 12$

따라서 $f(x) = \begin{cases} 2x-4 & (0 \leq x < 2) \\ x^2-8x+12 & (2 \leq x \leq 4) \end{cases}$ 이므로

$$f(11) = f(7) = f(3) \\ = 3^2 - 8 \times 3 + 12 = -3$$

답 -3

84

전략 함수 $h(x)$ 가 $x=1, x=a, x=2$ 에서 연속임을 이용한다.

$$f(x) = \begin{cases} x^2-4x+3 & (x \leq 2) \\ -x^2+ax & (x > 2) \end{cases} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (x^2 - 4x + 3) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (-x^2 + ax) = -4 + 2a$$

이때 $a > 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2+} f(x)$$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

또 조건 ㉠에서 $x \neq 1, x \neq a$ 일 때, $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ 이고

함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1, x=a, x=2$ 에서 연속이다.

$$\therefore h(1) = \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)},$$

$$h(a) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)},$$

$$h(2) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{f(x)}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4x + 3) = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)} = h(1)$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0 \text{이므로 } g(1) = 0$$

(ii) $a > 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (-x^2 + ax) = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = h(a)$ 에서 $x \rightarrow a$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{이므로 } g(a) = 0$$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{f(x)}$ 의 값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{g(x)}{f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x)}{-x^2 + ax} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{g(x)}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\frac{g(2)}{-4 + 2a} = \frac{g(2)}{-1}$$

$$-g(2) = g(2) \times (-4 + 2a)$$

$$g(2) \times (2a - 3) = 0$$

$$\therefore g(2) = 0 \quad (\because 2a - 3 \neq 0)$$

이상에서 $g(1) = 0, g(a) = 0, g(2) = 0$ 이고, $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$g(x) = (x-1)(x-2)(x-a)$$

$$\therefore h(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{x^2 - 4x + 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{(x-1)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-a)}{x-3} = \frac{1-a}{2},$$

$$h(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{-x^2 + ax}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{-x(x-a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-1)(x-2)}{-x}$$

$$= -\frac{(a-1)(a-2)}{a}$$

이때 조건 ㉡에서 $h(1) = h(a)$ 이므로

$$\frac{1-a}{2} = -\frac{(a-1)(a-2)}{a}$$

$$a(1-a) = -2(a-1)(a-2)$$

$a > 2$ 에서 $a-1 \neq 0$ 이므로

$$a = 2a - 4 \quad \therefore a = 4$$

따라서 $h(1) = \frac{1-4}{2} = -\frac{3}{2}$ 이고 $x > 2, x \neq 4$ 일 때

$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{-x^2 + 4x}$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{-x(x-4)}$$

89

함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 닫힌구간 $[-2, 3]$ 에서 연속이다.

이때

$$f(-2)f(-1) < 0, f(0)f(1) < 0$$

이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(-2, -1)$, $(0, 1)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(-2, 3)$ 에서 적어도 2개의 실근을 갖는다. **답 2개**

연습문제

• 본책 56쪽

90

전략 함수 $h(x)$ 의 분모가 0일 때, 불연속임을 이용한다.

$$h(x) = \frac{f(x)}{f(x)-g(x)} = \frac{x^2}{x^2-2x-3}$$

$$= \frac{x^2}{(x+1)(x-3)}$$

따라서 함수 $h(x)$ 는 $(x+1)(x-3) \neq 0$, 즉 $x \neq -1, x \neq 3$ 인 모든 실수에서 연속이므로 구간 $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$, $(3, \infty)$ 에서 연속이다.

답 $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$, $(3, \infty)$

91

전략 주어진 구간에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려 본다.

$$f(x) = \frac{4x}{x+1} = -\frac{4}{x+1} + 4$$

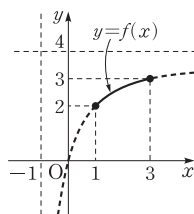
즉 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다.

구간 $[1, 3]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$ 는

$x=3$ 에서 최댓값 3,

$x=1$ 에서 최솟값 2

를 갖는다.



따라서 $M=3, m=2$ 이므로

$$M+m=5$$

답 5

92

전략 $f(x)=x^3+x-9$ 로 놓고 $f(x)$ 의 함숫값을 구한다.

$f(x)=x^3+x-9$ 라 하면 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이고

$$f(0)=-9, f(1)=-7, f(2)=1,$$

$$f(3)=21, f(4)=59, f(5)=121$$

따라서 $f(1)f(2) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(1, 2)$ 에서 실근 α 를 갖는다.

답 ②

93

전략 분수함수가 모든 실수 x 에서 연속하려면 모든 실수 x 에 대하여 (분모) $\neq 0$ 이어야 함을 이용한다.

함수 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-2x+4}{2x^2+ax+3}$ 가 모든 실수 x 에서 연속

이려면 모든 실수 x 에 대하여

$$2x^2+ax+3 \neq 0$$

이어야 한다.

따라서 이차방정식 $2x^2+ax+3=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D=a^2-4 \times 2 \times 3 < 0$

$$a^2 < 24 \quad \therefore -2\sqrt{6} < a < 2\sqrt{6}$$

즉 정수 a 는 $-4, -3, \dots, 4$ 의 9개이다. **답 9**

94

전략 $g(x)=f(x)-x$ 로 놓고 $g(x)$ 의 함숫값을 구한다.

$g(x)=f(x)-x$ 라 하면 함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 연속이다.

이때

$$g(-2)=-1-(-2)=1,$$

$$g(-1)=-2-(-1)=-1,$$

$$g(0)=1-0=1,$$

$$g(1)=-2-1=-3,$$

$$g(2)=-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2}$$

에서

$$g(-2)g(-1) < 0, g(-1)g(0) < 0,$$

$$g(0)g(1) < 0$$

이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$,
즉 $f(x)=x$ 는 열린구간 $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$
에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=x$ 는 열린구간 $(-2, 2)$ 에서 적어도 3개의 실근을 갖는다. **답 3개**

95

전략 주어진 식을 이용하여 함수 $f(x)$ 의 인수를 구한다.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \frac{1}{2}$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ 이므로 $f(1) = 0$ ㉠

또 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \frac{1}{2}$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ 이므로 $f(2) = 0$ ㉡

㉠, ㉡에서

$f(x) = (x-1)(x-2)g(x)$ ($g(x)$ 는 다항식)
라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)g(x)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-2)g(x) \\ &= -g(1) = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)g(x)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)g(x) \\ &= g(2) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

이므로 $g(1) = -\frac{1}{2}$, $g(2) = \frac{1}{2}$

$$\therefore g(1)g(2) < 0$$

이때 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 연속이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$ 은 열린구간 $(1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖고, ㉠, ㉡에 의하여 $x=1$, $x=2$ 도 방정식 $f(x)=0$ 의 근이므로 방정식 $f(x)=0$ 은 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

1 미분계수와 도함수

II. 미분

01 미분계수

● 본책 58~65쪽

96

x 의 값이 2에서 4까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{f(4)-f(2)}{4-2} &= \frac{(16-4\sqrt{a}+4)-(4-2\sqrt{a}+4)}{2} \\ &= \frac{12-2\sqrt{a}}{2} \\ &= 6-\sqrt{a}\end{aligned}$$

따라서 $6-\sqrt{a}=1$ 이므로 $\sqrt{a}=5$

$$\therefore a=25$$

답 25

97

x 의 값이 1에서 a 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{f(a)-f(1)}{a-1} &= \frac{(a^2+a+1)-3}{a-1} \\ &= \frac{(a+2)(a-1)}{a-1} \\ &= a+2 \quad (\because a \neq 1)\end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 의 $x=2$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(2+\Delta x)^2+(2+\Delta x)+1\}-7}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2+5\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x+5) = 5\end{aligned}$$

따라서 $a+2=5$ 이므로

$$a=3$$

답 3

98

$$\begin{aligned}(1) \text{ (주어진 식)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-4h)-f(a)}{-4h} \times (-4) \\ &= f'(a) \times (-4) \\ &= 2 \times (-4) = -8\end{aligned}$$

$$(2) \text{ (주어진 식)} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+h^2) - f(a)}{h^2} \times h \right\} \\ = f'(a) \times 0 = 0$$

$$(3) \text{ (주어진 식)} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f(a-h) + f(a)}{2h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{2h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{2h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times \frac{1}{2} \\ - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} \times \left(-\frac{1}{2} \right) \\ = f'(a) \times \frac{1}{2} - f'(a) \times \left(-\frac{1}{2} \right) = f'(a) = 2$$

$$(4) \text{ (주어진 식)} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+5h) - f(a) - f(a+h) + f(a)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+5h) - f(a)}{h} \\ - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+5h) - f(a)}{5h} \times 5 \\ - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ = f'(a) \times 5 - f'(a) = 4f'(a) \\ = 4 \times 2 = 8$$

답 (1) -8 (2) 0 (3) 2 (4) 8

99

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1+h)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1) - f(1+h) + f(1)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h} \times (-2) \\ - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ = f'(1) \times (-2) - f'(1) = -3f'(1) \\ \text{따라서 } -3f'(1) = 9 \text{ 이므로} \\ f'(1) = -3$$

답 -3

100

$$(1) \text{ (주어진 식)} = \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \frac{1}{x+2} \right\} \\ = f'(2) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$(2) \text{ (주어진 식)} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{x-2}{f(x) - f(2)} \times (x^2 + 2x + 4) \right\} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{1}{\frac{f(x) - f(2)}{x-2}} \times (x^2 + 2x + 4) \right\} \\ = \frac{1}{f'(2)} \times 12 \\ = 2 \times 12 = 24$$

$$(3) \text{ (주어진 식)} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - 2f(2) - xf(2) + 2f(2)}{x-2} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2\{f(x) - f(2)\} - (x-2)f(2)}{x-2} \\ = 2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)f(2)}{x-2} \\ = 2f'(2) - f(2) \\ = 2 \times \frac{1}{2} - 3 = -2$$

답 (1) $\frac{1}{8}$ (2) 24 (3) -2

101

$x=0, y=0$ 을 주어진 식에 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) + 1 \\ \therefore f(0) = -1$$

이때

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4) + f(h) + 1 - f(4)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 1}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ = f'(0)$$

이므로 $f'(0) = 1$

답 1

102

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) + f(h) + h - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

이므로 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 2$

$$\begin{aligned} \therefore f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3) + f(h) + 3h - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 3 \\ &= 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

답 5

103

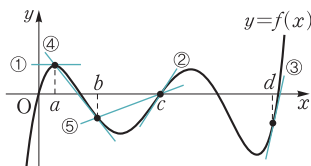
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의 기울기가 10이므로 $f'(2)=10$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{5h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \times \frac{1}{5} \\ &= f'(2) \times \frac{1}{5} \\ &= 10 \times \frac{1}{5} = 2 \end{aligned}$$

답 2

104

①~⑤의 값은 다음 그래프에서 각 직선의 기울기와 같다.



직선의 기울기가 큰 것부터 순서대로 나열하면

③, ②, ⑤, ①, ④

이므로 그 값이 가장 큰 것은 ③이다.

답 ③

02 미분가능성과 연속성

● 본책 66~68쪽

105

(1) (i) $f(-1)=0$ 이고

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) |x+1| = 0 \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= f(-1) \end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{(x+1)|x+1|}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{(x+1)^2}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} (x+1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{(x+1)|x+1|}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{-(x+1)^2}{x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -1-} (-x-1) = 0 \\ \text{따라서 } f'(-1) &= 0 \text{이므로 함수 } f(x) \text{는} \end{aligned}$$

$x=-1$ 에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이고 미분가능하다.

(2) (i) $f(-1)=0$ 이고

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} |x^2 - 1| = 0 \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= f(-1) \end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{|x^2 - 1|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{-(x^2 - 1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{-(x+1)(x-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} (-x+1) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{|x^2 - 1|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x^2 - 1}{x+1} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1-} (x-1) = -2$$

따라서 $f'(-1)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

(3) (i) $f(-1)=1$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} x^2 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (-x) = 1$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

$$(ii) \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x^2-1}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1+} (x-1) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{-x-1}{x+1} = -1$$

따라서 $f'(-1)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

답 (1) 연속이고 미분가능하다.

(2) 연속이지만 미분가능하지 않다.

(3) 연속이지만 미분가능하지 않다.

106

① 점 $(3, f(3))$ 에서의 접선의 기울기는 양수이므로 $f'(3) > 0$ 이다.

② $\lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ 의 값이 존재한다.

③ $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $0 < x < 2$ 에서 1개 존재한다.

④ 함수 $f(x)$ 는 $x=4$, $x=5$ 에서 불연속이므로 불연속인 x 의 값은 2개이다.

⑤ 함수 $f(x)$ 는 $x=2$, $x=4$, $x=5$ 에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 x 의 값은 3개이다.

답 ⑤

연습 문제

● 본책 69~71쪽

107

전략 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 p 에서 q 까지 변할 때의 평균변화율은 $\frac{f(q)-f(p)}{q-p}$ 임을 이용한다.

x 의 값이 1에서 a 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\begin{aligned} \frac{f(a)-f(1)}{a-1} &= \frac{(a^3-2a+5)-4}{a-1} \\ &= \frac{a^3-2a+1}{a-1} \\ &= \frac{(a-1)(a^2+a-1)}{a-1} \\ &= a^2+a-1 \end{aligned}$$

따라서 $a^2+a-1=19$ 이므로

$$a^2+a-20=0, \quad (a+5)(a-4)=0$$

$$\therefore a=4 \quad (\because a>1)$$

답 4

108

전략 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ 임을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(-2h)}{2h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)-\{f(-2h)-f(0)\}}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} \times \frac{1}{2} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2h)-f(0)}{-2h} \\ &= \frac{1}{2} f'(0) + f'(0) \\ &= \frac{3}{2} f'(0) \end{aligned}$$

따라서 $\frac{3}{2} f'(0) = 3$ 이므로

$$f'(0) = 2$$

답 2

109

전략 미분계수의 정의를 이용한다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= 3 \text{에서} \quad f'(2) = 3 \\ \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2) - \{f(2-h) - f(2)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h} \\ &= f'(2) + f'(2) = 2f'(2) = 6 \quad \text{답 ④} \end{aligned}$$

110

전략 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ 임을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x)\}^2 - 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - 1}{x - 1} \times \frac{f(x) + 1}{x + 1} \right\} \\ &= f'(1) \times \frac{f(1) + 1}{2} \\ &= 2 \times \frac{1 + 1}{2} = 2 \quad \text{답 2} \end{aligned}$$

111

전략 $f(2) = 0$ 임을 이용하여 주어진 식이 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 의 꼴을 포함하도록 변형한다.

$$\begin{aligned} f(2) &= 0 \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2 + 2x - 8} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{(x+4)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{1}{x+4} \times \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \right\} \\ &= \frac{1}{6} f'(2) = \frac{1}{6} \times 12 = 2 \quad \text{답 2} \end{aligned}$$

112

전략 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이고, $f'(0)$ 의 값은 존재하지 않는 함수를 찾는다.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ (i) } f(0) &= 2 \text{이고} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2 \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= f(0) \\ \text{따라서 함수 } f(x) &\text{는 } x=0 \text{에서 연속이다.} \end{aligned}$$

$$\text{(ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2}{x} = 0$$

따라서 $f'(0) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이고 미분가능하다.

$$\textcircled{2} \text{ (i) } f(0) = 0 \text{이고} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x|^2 = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\text{(ii) } f(x) = |x|^2 = x^2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

따라서 $f'(0) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이고 미분가능하다.

$$\textcircled{3} \text{ (i) } f(0) = -1 \text{이고}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1) = -1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \text{(ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1 - (-1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \end{aligned}$$

따라서 $f'(0) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이고 미분가능하다.

$$\textcircled{4} \text{ (i) } f(0) = 0 \text{이고}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (|x| - x) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \text{(ii) } \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x| - x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x - x}{x} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x| - x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x - x}{x} = -2 \end{aligned}$$

따라서 $f'(0)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

⑤ $f(0)$ 이 정의되어 있지 않으므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

답 ④

113

전략 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 $x=a$ 에서 끊어지거나 꺾이면 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄱ. $1 < x < 2$ 에서 접선의 기울기는 양수이므로

$$f'(x) > 0 \text{ (참)}$$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 의 값이 존재한다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 $x=3$, $x=5$ 에서 불연속이므로 불연속인 x 의 값은 2개이다. (거짓)

ㄹ. 함수 $f(x)$ 는 $x=1$, $x=3$, $x=5$ 에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 x 의 값은 3개이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

114

전략 평균변화율과 순간변화율의 정의를 이용한다.

x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\begin{aligned} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} &= \frac{(b^2-b+1)-(a^2-a+1)}{b-a} \\ &= \frac{b^2-a^2-(b-a)}{b-a} \\ &= \frac{(b-a)(b+a-1)}{b-a} \\ &= b+a-1 \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 의 $x=3$ 에서의 순간변화율은

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(3+h)^2-(3+h)+1\}-7}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2+5h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+5) = 5 \end{aligned}$$

따라서 $b+a-1=5$ 이므로

$$a+b=6$$

답 6

115

전략 미분계수의 정의를 이용한다.

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-2+x)-f(-2)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+15x^2+7x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x^2+15x+7) = 7 \end{aligned}$$

답 7

116

전략 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ 임을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 f(1) - f(x^2)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 f(1) - f(1) - \{f(x^2) - f(1)\}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3-1)f(1)}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x+1)f(1) \\ &\quad - \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^2) - f(1)}{x^2-1} \times (x+1) \right\} \\ &= 3f(1) - 2f'(1) \\ &= 3 \times 1 - 2 \times 3 = -3 \end{aligned}$$

답 -3

117

전략 $f(1)=0$ 임을 이용하여 주어진 식이 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 의 꼴을 포함하도록 변형한다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x)\}^2 - 2f(x)}{1-x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)\{f(x)-2\}}{1-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x)-f(1)\}\{f(x)-2\}}{1-x} \quad (\because f(1)=0) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \{2-f(x)\} \right] \\ &= f'(1) \times \{2-f(1)\} = 2f'(1) \end{aligned}$$

따라서 $2f'(1)=10$ 이므로

$$f'(1)=5$$

답 5

118

전략 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{q(x)}{p(x)} = a$ (a 는 실수)일 때, $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} q(x) = 0$ 임을 이용한다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-1)-8}{x^2-4} = 3 \text{에서 } x \rightarrow 2 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0$$

이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x-1)-8\} = 0$ 이므로

$$f(1)-8=0 \quad \therefore f(1)=8$$

$x-1=t$ 라 하면 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-1)-8}{x^2-4} &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t)-f(1)}{(t+1)^2-4} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t)-f(1)}{t^2+2t-3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(t)-f(1)}{t-1} \times \frac{1}{t+3} \right\} \\ &= \frac{1}{4} f'(1) \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{4} f'(1) = 3$ 이므로 $f'(1) = 12$

$$\therefore f(1) + f'(1) = 8 + 12 = 20 \quad \text{답 20}$$

119

전략 미분계수의 정의와 주어진 등식을 이용하여 $f'(100)$ 과 $f(100)$ 사이의 관계식을 구한다.

$x=0, y=0$ 을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} f(0) &= 2\{f(0)\}^2 \\ \therefore f(0) &= \frac{1}{2} \quad (\because f(0) \neq 0) \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} f'(100) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(100+h)-f(100)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f(100)f(h)-f(100)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f(100)\left\{f(h)-\frac{1}{2}\right\}}{h} \\ &= 2f(100) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} \\ &= 2f(100)f'(0) \\ &= 2f(100) \times 4 = 8f(100) \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \frac{f'(100)}{f(100)} = 8 \quad \text{답 8}$$

120

전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=a$ 인 점에서의 접선의 기울기와 직선 $y=g(x)$ 의 기울기가 같음을 이용한다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 가 $x=a$ 인 점에서 접하므로

$$\begin{aligned} f(a) &= g(a), \quad f'(a) = g'(a) \\ \therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-g(x)}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)-\{g(x)-g(a)\}}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\ &= f'(a) - g'(a) = 0 \quad \text{답 0} \end{aligned}$$

121

전략 $x=0$ 에서의 미분계수가 존재하는 함수를 찾는다.

ㄱ. $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이고

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2x}{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-2x}{x} = -2 \end{aligned}$$

따라서 $f'(0)$ 의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이고

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(x+1)^2-1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2+2x}{x} = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2x+1-1}{x} = 2$$

따라서 $g'(0) = 2$ 이므로 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

$$\text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow 0+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (x^2+x+1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x^2+x-1) = -1$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

따라서 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

이상에서 $x=0$ 에서 미분가능한 함수는 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

122

전략 주어진 조건을 이용하여 $f'(1)$, $g'(1)$ 사이의 관계식을 구한다.

조건 ㉞에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - g(x)\} = 0$ 이므로

$$f(1) - g(1) = 0$$

$$\therefore f(1) = g(1) \quad \dots\dots \textcircled{㉟}$$

따라서

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - g(x)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1) - \{g(x) - g(1)\}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \\ &= f'(1) - g'(1) \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } f'(1) - g'(1) = 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

또 조건 ㉝에서

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + g(x) - 2f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1) + g(x) - g(1)}{x - 1} \quad (\because \textcircled{㉟}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \\ &= f'(1) + g'(1) \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } f'(1) + g'(1) = 7 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$f'(1) = 6, g'(1) = 1$$

한편 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - a}{x - 1} = b \times g(1)$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - a\} = 0$ 이므로

$$f(1) - a = 0 \quad \therefore a = f(1) = g(1)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - a}{x - 1} = b \times g(1)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = b \times a$$

$$\therefore f'(1) = ab$$

$$\therefore ab = 6 \quad \textcircled{㉣} \quad \textcircled{㉤}$$

03 도함수

• 본책 72~81쪽

123

$$(1) f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3 - 3}{\Delta x} = 0$$

$$(2) f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(x + \Delta x) - 4\} - (x - 4)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$(3) f'(x)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{2(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)\} - (2x^2 + x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(\Delta x)^2 + 4x\Delta x + \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2\Delta x + 4x + 1)$$

$$= 4x + 1$$

$$\textcircled{㉞} (1) f'(x) = 0 \quad (2) f'(x) = 1$$

$$(3) f'(x) = 4x + 1$$

124

$$\textcircled{㉞} (1) y' = 5x^4$$

$$(2) y' = 0$$

$$(3) y' = 24x^7$$

$$(4) y' = -6x^5$$

$$(5) y' = 10x$$

$$(6) y' = 12x^2 - x$$

125

$$(1) y' = (x + 5)'(2x - 3) + (x + 5)(2x - 3)'$$

$$= 1 \times (2x - 3) + (x + 5) \times 2$$

$$= 4x + 7$$

$$(2) y' = (x^3 + 2)'(x^2 - 1) + (x^3 + 2)(x^2 - 1)'$$

$$= 3x^2(x^2 - 1) + (x^3 + 2) \times 2x$$

$$= 5x^4 - 3x^2 + 4x$$

$$\begin{aligned}(3) y' &= x'(x+2)(x-1) + x(x+2)'(x-1) \\ &\quad + x(x+2)(x-1)' \\ &= 1 \times (x+2)(x-1) + x \times 1 \times (x-1) \\ &\quad + x(x+2) \times 1 \\ &= 3x^2 + 2x - 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) y' &= (x-3)'(2x+1)(3x-2) \\ &\quad + (x-3)(2x+1)'(3x-2) \\ &\quad + (x-3)(2x+1)(3x-2)' \\ &= 1 \times (2x+1)(3x-2) \\ &\quad + (x-3) \times 2 \times (3x-2) \\ &\quad + (x-3)(2x+1) \times 3 \\ &= 18x^2 - 38x + 1\end{aligned}$$

$$(5) y = (-3x^2 + 2)^2 = (-3x^2 + 2)(-3x^2 + 2)$$

이므로

$$\begin{aligned}y' &= (-3x^2 + 2)'(-3x^2 + 2) \\ &\quad + (-3x^2 + 2)(-3x^2 + 2)' \\ &= -6x(-3x^2 + 2) + (-3x^2 + 2) \times (-6x) \\ &= -12x(-3x^2 + 2)\end{aligned}$$

$$(6) y = (2x-1)^3 = (2x-1)(2x-1)(2x-1)$$

이므로

$$\begin{aligned}y' &= (2x-1)'(2x-1)(2x-1) \\ &\quad + (2x-1)(2x-1)'(2x-1) \\ &\quad + (2x-1)(2x-1)(2x-1)' \\ &= 2(2x-1)^2 + (2x-1) \times 2 \times (2x-1) \\ &\quad + (2x-1)^2 \times 2 \\ &= 6(2x-1)^2\end{aligned}$$

답 풀이 참조

다른 풀이 (5) $y' = 2 \times (-3x^2 + 2)(-3x^2 + 2)'$

$$\begin{aligned}&= 2 \times (-3x^2 + 2) \times (-6x) \\ &= -12x(-3x^2 + 2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(6) y' &= 3 \times (2x-1)^2(2x-1)' \\ &= 3 \times (2x-1)^2 \times 2 \\ &= 6(2x-1)^2\end{aligned}$$

126

$$f(x) = (x^5 - 2x)^3 = (x^5 - 2x)(x^5 - 2x)(x^5 - 2x)$$

이므로

$$\begin{aligned}f'(x) &= (x^5 - 2x)'(x^5 - 2x)(x^5 - 2x) \\ &\quad + (x^5 - 2x)(x^5 - 2x)'(x^5 - 2x) \\ &\quad + (x^5 - 2x)(x^5 - 2x)(x^5 - 2x)' \\ &= 3(5x^4 - 2)(x^5 - 2x)^2\end{aligned}$$

$$\therefore f'(-1) = 3 \times 3 \times 1 = 9$$

답 9

다른 풀이 $f'(x) = 3 \times (x^5 - 2x)^2(x^5 - 2x)'$

$$= 3(x^5 - 2x)^2(5x^4 - 2)$$

127

$$\begin{aligned}f'(x) &= (x^2 + 1)'g(x) + (x^2 + 1)g'(x) \\ &= 2xg(x) + (x^2 + 1)g'(x) \\ \therefore f'(1) &= 2g(1) + 2g'(1) \\ &= 2 \times (-1) + 2 \times 2 = 2\end{aligned}$$

답 2

128

$$\begin{aligned}f'(x) &= (-x^2 + 2)'(x-3)(x+a) \\ &\quad + (-x^2 + 2)(x-3)'(x+a) \\ &\quad + (-x^2 + 2)(x-3)(x+a)' \\ &= -2x(x-3)(x+a) \\ &\quad + (-x^2 + 2)(x+a) \\ &\quad + (-x^2 + 2)(x-3) \\ \therefore f'(2) &= 4(2+a) - 2(2+a) + 2 \\ &= 2a + 6\end{aligned}$$

따라서 $2a + 6 = 20$ 이므로

$$a = 7$$

답 7

129

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 + 2ax \text{ 이므로} \\ f'(1) &= 3 + 2a \\ g'(x) &= (4 - x^2)'f(x) + (4 - x^2)f'(x) \\ &= -2xf(x) + (4 - x^2)f'(x)\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}g'(1) &= -2f(1) + 3f'(1) \\ &= -2(a-2) + 3(3+2a) \\ &= 4a + 13\end{aligned}$$

이때 $f'(1) = g'(1)$ 이므로

$$3 + 2a = 4a + 13$$

$$-2a = 10 \quad \therefore a = -5$$

답 -5

130

(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)-\{f(1-h)-f(1)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{-h} \\ &= f'(1) + f'(1) \\ &= 2f'(1) \end{aligned}$$

이때 $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$ 이므로

$$f'(1) = -1$$

따라서 구하는 값은

$$2f'(1) = 2 \times (-1) = -2$$

답 -2

131

$$\begin{aligned} \text{(주어진 식)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \times \frac{1}{x^2+2x+4} \right\} \\ &= \frac{1}{12} f'(2) \end{aligned}$$

이때 $f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$ 이므로

$$f'(2) = 4$$

따라서 구하는 값은

$$\frac{1}{12} f'(2) = \frac{1}{12} \times 4 = \frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

132

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{이므로 } f(1) = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= f'(1) = 1 \end{aligned}$$

$$f(1) = 0 \text{에서 } 1 + a + b - b = 0$$

$$\therefore a = -1$$

이때 $f'(x) = 3x^2 - 2x + b$ 이므로 $f'(1) = 1$ 에서

$$3 - 2 + b = 1 \quad \therefore b = 0$$

$$\therefore a - b = -1$$

답 -1

133

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 4 \text{에서 } f'(1) = 4$$

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2-h)-f(-2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2-h)-f(-2)}{-h} \times (-1) \end{aligned}$$

$$= -f'(-2) = -1$$

$$\text{에서 } f'(-2) = 1$$

이때 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 이므로 $f'(1) = 4$ 에서

$$3 + 2a + b = 4 \quad \therefore 2a + b = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$f'(-2) = 1 \text{에서 } 12 - 4a + b = 1$$

$$\therefore 4a - b = 11 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $a = 2, b = -3$

따라서 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ 이므로

$$f(1) = 1$$

답 1

134

$$f(x) = x^{10} + x \text{라 하면 } f(1) = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} + x - 2}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= f'(1) \end{aligned}$$

이때 $f'(x) = 10x^9 + 1$ 이므로 구하는 값은

$$f'(1) = 11$$

답 11

해설 Focus

주어진 식의 분자를 인수분해하여 구할 수도 있다.

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} + x - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^9 + x^8 + \cdots + x + 2)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^9 + x^8 + \cdots + x + 2) \\ &= 1 \times 9 + 2 = 11 \end{aligned}$$

이때 주어진 식이 복잡할수록 인수분해하는 과정이 어려우므로 치환하여 미분계수의 정의를 이용하는 것이 더 간단하다.

135

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^n - x^3 - x - 6}{x - 2} = k \text{에서 } x \rightarrow 2 \text{일 때}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 2} (x^n - x^3 - x - 6) = 0 \text{이므로}$$

$$2^n - 8 - 2 - 6 = 0, \quad 2^n = 16$$

$$\therefore n = 4$$

$f(x) = x^4 - x^3 - x$ 라 하면 $f(2) = 6$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - x^3 - x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$$

이때 $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 1$ 이므로

$$f'(2) = 19 \quad \therefore k = 19$$

$$\therefore n + k = 23$$

답 23

136

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로 $x=2$ 에서 연속이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \text{에서} \quad 16 + b = 4a - 2$$

$$\therefore b = 4a - 18 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $f'(2)$ 가 존재하므로

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(ax^2 - 2) - (4a - 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{a(x+2)(x-2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} a(x+2) = 4a, \\ & \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(x^2 + 6x + b) - (4a - 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(x^2 + 6x + 4a - 18) - (4a - 2)}{x - 2} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(x+8)(x-2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} (x+8) = 10 \end{aligned}$$

$$\text{에서} \quad 4a = 10 \quad \therefore a = \frac{5}{2}$$

$$a = \frac{5}{2} \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면} \quad b = -8$$

$$\text{답 } a = \frac{5}{2}, b = -8$$

다른 풀이 $g(x) = ax^2 - 2$, $h(x) = x^2 + 6x + b$ 라 하면

$$g'(x) = 2ax, h'(x) = 2x + 6$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$g(2) = h(2)$$

즉 $4a - 2 = 16 + b$ 이므로

$$b = 4a - 18 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로

$$g'(2) = h'(2)$$

$$\text{즉 } 4a = 10 \text{이므로} \quad a = \frac{5}{2}$$

$$a = \frac{5}{2} \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면} \quad b = -8$$

137

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하면 $x=1$ 에서도 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \text{에서} \quad 3 = 1 + a + b$$

$$\therefore a + b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $f'(1)$ 이 존재하므로

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x^3 + ax^2 + bx) - (1 + a + b)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x-1)\{x^2 + (a+1)x + a + b + 1\}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \{x^2 + (a+1)x + a + b + 1\} \\ &= 2a + b + 3, \\ & \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(2x^2 + 1) - (1 + a + b)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{2(x+1)(x-1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} 2(x+1) = 4 \end{aligned}$$

$$\text{에서} \quad 2a + b + 3 = 4$$

$$\therefore 2a + b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -1$, $b = 3$

$$\therefore ab = -3 \quad \text{답 } -3$$

다른 풀이 $g(x) = x^3 + ax^2 + bx$, $h(x) = 2x^2 + 1$ 이라

$$\text{하면} \quad g'(x) = 3x^2 + 2ax + b, h'(x) = 4x$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$g(1) = h(1)$$

즉 $1+a+b=3$ 이므로 $a+b=2$ ㉔

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$g'(1)=h'(1)$$

즉 $3+2a+b=4$ 이므로 $2a+b=1$ ㉕

㉔, ㉕을 연립하여 풀면 $a=-1, b=3$

138

다항식 $x^{20}-ax+b$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^{20}-ax+b=(x-1)^2Q(x) \quad \dots\dots ㉑$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1-a+b=0 \quad \therefore b=a-1 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$20x^{19}-a=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$20-a=0 \quad \therefore a=20$$

$a=20$ 을 ㉒에 대입하면 $b=19$

$$\therefore a+b=39$$

답 39

다른 풀이 $f(x)=x^{20}-ax+b$ 라 하면

$$f'(x)=20x^{19}-a$$

다항식 $f(x)$ 가 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어지므로

$$f(1)=0, f'(1)=0$$

$$1-a+b=0, 20-a=0$$

$$\therefore a=20, b=19$$

139

다항식 $x^{100}-2x^3+4$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} x^{100}-2x^3+4 \\ = (x+1)^2Q(x)+ax+b \quad \dots\dots ㉑ \end{aligned}$$

㉑의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$-a+b=7 \quad \therefore b=a+7 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} 100x^{99}-6x^2 \\ = 2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a \end{aligned}$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $a=-106$

$a=-106$ 을 ㉒에 대입하면 $b=-99$

따라서 구하는 나머지는

$$-106x-99 \quad \text{답 } -106x-99$$

다른 풀이 $f(x)=x^{100}-2x^3+4$ 라 하면

$$f'(x)=100x^{99}-6x^2$$

다항식 $f(x)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지를

$$R(x)=ax+b \quad (a, b \text{는 상수})$$

라 하면 $R'(x)=a$ 이고

$$f(-1)=R(-1), f'(-1)=R'(-1)$$

$$7=-a+b, -106=a$$

$$\therefore a=-106, b=-99$$

연습 문제

● 본책 82~84쪽

140

전략 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-5}{x-2}=7$ 에서 $f(2), f'(2)$ 의 값을 구한다.

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-5}{x-2}=7$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-5\}=0$ 이므로 $f(2)-5=0$

$$\therefore f(2)=5$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-5}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \\ &= f'(2)=7 \end{aligned}$$

이때 $g(x)=xf(x)$ 에서

$$g'(x)=f(x)+xf'(x)$$

$$\therefore g'(2)=f(2)+2f'(2)=5+2 \times 7=19$$

답 19

141

전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 기울기가 m 이면 $f(a)=b, f'(a)=m$ 임을 이용한다.

점 $(1, -1)$ 이 곡선 $y=x^3+ax^2+bx$ 위의 점이므로

$$-1=1+a+b$$

$$\therefore a+b=-2 \quad \dots\dots ㉑$$

$y'=3x^2+2ax+b$ 이고 점 $(1, -1)$ 에서의 접선의 기울기가 2이므로

$$3+2a+b=2$$

$$\therefore 2a+b=-1 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑, ㉒을 연립하여 풀면 $a=1, b=-3$

$$\therefore ab=-3$$

답 -3

142

전략 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 $f'(1)$, $g'(1)$ 에 대한 식으로 변형한다.

$f(1)=g(1)=5$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-g(1-h)}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)-\{g(1-h)-g(1)\}}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h} \times \frac{2}{3} \\ & \quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1-h)-g(1)}{-h} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3}f'(1) + \frac{1}{3}g'(1) \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4, \\ g'(x) &= 4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+8x^7 \end{aligned}$$

이므로 $f'(1)=15$, $g'(1)=30$

따라서 구하는 값은

$$\frac{2}{3}f'(1) + \frac{1}{3}g'(1) = \frac{2}{3} \times 15 + \frac{1}{3} \times 30 = 20$$

답 20

143

전략 주어진 조건을 이용하여 $f'(3)$, $f'(1)$ 의 값을 구한다.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = 18 \text{에서} \quad f'(3)=18$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{f(x)-f(1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{x-1}{f(x)-f(1)} \times (x^2+x+1) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}} \times (x^2+x+1) \right\} \\ &= \frac{3}{f'(1)} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

에서 $f'(1)=-2$

이때 $f'(x)=3x^2+2ax+b$ 이므로 $f'(3)=18$ 에서

$$27+6a+b=18$$

$$\therefore 6a+b=-9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f'(1)=-2$ 에서 $3+2a+b=-2$

$$\therefore 2a+b=-5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-3$

$$\therefore a+b=-4$$

답 -4

144

전략 주어진 식의 일부를 $f(x)$ 로 놓고 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

$f(x)=x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6$ 이라 하면

$$f(-1)=1$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6-1}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \\ &= f'(-1) \end{aligned}$$

이때 $f'(x)=10x^9+9x^8+8x^7+7x^6+6x^5$ 이므로 구하는 값은

$$f'(-1)=-8$$

답 -8

145

전략 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=-3$ 에서의 미분계수가 존재함을 이용한다.

$h(x)=f(x)g(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} h(x) &= |x+3|(2x+a) \\ &= \begin{cases} (x+3)(2x+a) & (x \geq -3) \\ -(x+3)(2x+a) & (x < -3) \end{cases} \end{aligned}$$

이때 함수 $h(x)$ 는 $x=-3$ 에서 미분가능하므로

$h'(-3)$ 이 존재하고

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -3+} \frac{h(x)-h(-3)}{x+3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3+} \frac{(x+3)(2x+a)}{x+3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3+} (2x+a) = -6+a, \\ & \lim_{x \rightarrow -3-} \frac{h(x)-h(-3)}{x+3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3-} \frac{-(x+3)(2x+a)}{x+3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3-} (-2x-a) = 6-a \end{aligned}$$

이므로 $-6+a=6-a$

$$\therefore a=6$$

답 ③

다른 풀이 $p(x)=(x+3)(2x+a)$,

$q(x)=-(x+3)(2x+a)$ 라 하면

$$\begin{aligned}
 p'(x) &= (x+3)'(2x+a) + (x+3)(2x+a)' \\
 &= (2x+a) + (x+3) \times 2 \\
 &= 4x+a+6, \\
 q'(x) &= -(x+3)'(2x+a) - (x+3)(2x+a)' \\
 &= -(2x+a) - (x+3) \times 2 \\
 &= -4x-a-6
 \end{aligned}$$

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=-3$ 에서 미분가능하므로

$$\begin{aligned}
 p'(-3) &= q'(-3) \\
 -12+a+6 &= 12-a-6 \\
 2a &= 12 \quad \therefore a=6
 \end{aligned}$$

146

전략 곱의 미분법을 이용하여 $f'(x)$ 를 구한다.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (x-1)'(x-2)(x-3) \times \cdots \times (x-7) \\
 &\quad + (x-1)(x-2)'(x-3) \times \cdots \times (x-7) \\
 &\quad + (x-1)(x-2)(x-3)' \times \cdots \times (x-7) + \cdots \\
 &\quad + (x-1)(x-2)(x-3) \times \cdots \times (x-7)' \\
 &= (x-2)(x-3) \times \cdots \times (x-7) \\
 &\quad + (x-1)(x-3) \times \cdots \times (x-7) \\
 &\quad + (x-1)(x-2) \times \cdots \times (x-7) + \cdots \\
 &\quad + (x-1)(x-2) \times \cdots \times (x-6)
 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 f'(1) &= (1-2) \times (1-3) \times (1-4) \times (1-5) \\
 &\quad \times (1-6) \times (1-7) \\
 &= -1 \times (-2) \times (-3) \times (-4) \\
 &\quad \times (-5) \times (-6) \\
 &= 720,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'(5) &= (5-1) \times (5-2) \times (5-3) \times (5-4) \\
 &\quad \times (5-6) \times (5-7) \\
 &= 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times (-1) \times (-2) = 48
 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \frac{f'(1)}{f'(5)} = 15$$

답 15

147

전략 주어진 조건을 이용하여 $g(x)$ 의 최고차항을 구한다.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= g(x) \text{이므로} \\
 \{f(x) + g(x)\}' &= f'(x) + g'(x) \\
 &= g(x) + g'(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore g(x) + g'(x) \\
 &= x^3 + 3x^2 + 4x + 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

이때 $g(x)$ 의 최고차항을 ax^n (a 는 상수, $a \neq 0$)이라 하면 $g(x) + g'(x)$ 의 최고차항도 ax^n 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$a=1, n=3$$

따라서 $g(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ (b, c, d 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= 3x^2 + 2bx + c \\
 g(x) \text{와 } g'(x) \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면} \\
 x^3 + (b+3)x^2 + (2b+c)x + c + d \\
 &= x^3 + 3x^2 + 4x + 5
 \end{aligned}$$

위의 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$b+3=3, 2b+c=4, c+d=5$$

$$\therefore b=0, c=4, d=1$$

따라서 $g'(x) = 3x^2 + 4$ 이므로

$$g'(-1) = 7$$

답 7

148

전략 $\frac{1}{n} = h$ 로 놓고 미분계수의 정의를 이용한다.

$\frac{1}{n} = h$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $h \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f\left(1 + \frac{3}{n}\right) - f\left(1 - \frac{2}{n}\right) \right\} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1-2h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1) - \{f(1-2h) - f(1)\}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{3h} \times 3 \\
 &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h} \times 2 \\
 &= 3f'(1) + 2f'(1) = 5f'(1)
 \end{aligned}$$

이때 $f'(x) = 8x^3 - 3$ 이므로 $f'(1) = 5$

따라서 구하는 값은 $5f'(1) = 25$

답 25

149

전략 주어진 조건을 이용하여 함수 $f(x)$ 의 함숫값과 미분계수를 구한다.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 이므로

$$f(0) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 1$$

또 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ 이므로

$$f(1) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 1$$

이때 $f(0) = f(1) = 0$ 에서

$$f(x) = x(x-1)(ax+b) \quad (a, b \text{는 상수}, a \neq 0)$$

라 하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= x'(x-1)(ax+b) + x(x-1)'(ax+b) \\ &\quad + x(x-1)(ax+b)' \\ &= (x-1)(ax+b) + x(ax+b) + ax(x-1) \end{aligned}$$

$$f'(0) = 1 \text{에서} \quad -b = 1$$

$$\therefore b = -1$$

$$f'(1) = 1 \text{에서} \quad a + b = 1$$

$$a - 1 = 1 \quad \therefore a = 2$$

따라서 $f(x) = x(x-1)(2x-1)$ 이므로

$$f(2) = 6$$

답 ②

해설 Focus

삼차함수 $f(x)$ 에 대하여

① $f(a) = 0$

$$\Rightarrow f(x) = (x-a)(ax^2+bx+c) \quad (a \neq 0) \text{로 놓는다.}$$

② $f(a) = 0, f(\beta) = 0$

$$\Rightarrow f(x) = (x-a)(x-\beta)(ax+b) \quad (a \neq 0) \text{로 놓는다.}$$

③ $f(a) = 0, f(\beta) = 0, f(\gamma) = 0$

$$\Rightarrow f(x) = a(x-a)(x-\beta)(x-\gamma) \quad (a \neq 0) \text{로 놓는다.}$$

150

전략 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값이 k ($k \neq 0$)이면 분모, 분자의 차수가 같고, 최고차항의 계수의 비가 k 이다.

조건 (가)에서 $f(x)$ 는 삼차항의 계수가 1, 이차항의 계수가 2인 삼차함수이므로

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수})$$

라 하면 조건 (다)에서 $b = 0$

$$\therefore f(x) = x^3 + 2x^2 + ax$$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\} \\ &= \frac{1}{2} f'(1) = 4 \end{aligned}$$

이므로 $f'(1) = 8$

이때 $f'(x) = 3x^2 + 4x + a$ 이므로

$$3 + 4 + a = 8 \quad \therefore a = 1$$

따라서 $f(x) = x^3 + 2x^2 + x$ 이므로

$$f(1) = 4$$

답 4

151

전략 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \text{ 임을 이용한다.}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 에서

$$b + a + b = a + b^2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$b^2 - 2b = 0, \quad b(b-2) = 0$$

$$\therefore b = 0 \text{ 또는 } b = 2 \quad \dots\dots ㉡$$

또 $f'(1)$ 이 존재하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(ax^3 + b^2) - (a + b^2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{a(x-1)(x^2 + x + 1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} a(x^2 + x + 1) \\ &= 3a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(bx^2 + ax + b) - (a + b^2)}{x-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(bx^2+ax+b)-(b+a+b)}{x-1} \quad (\because \textcircled{7}) \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(b+a+b)}{x-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} (bx+a+b) = a+2b
\end{aligned}$$

에서 $3a = a + 2b$

$$\therefore a = b \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{8}, \textcircled{9}$ 에서 $a=2, b=2$ ($\because a \neq 0$)

따라서 $f'(1) = 3a = 3 \times 2 = 6$ 이므로

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)-\{f(1-h)-f(1)\}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h} \times 2 \\
&\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{-h} \\
&= 2f'(1) + f'(1) \\
&= 3f'(1) = 3 \times 6 = 18 \quad \text{답 18}
\end{aligned}$$

다른 풀이 $g(x) = ax^3 + b^2, h(x) = bx^2 + ax + b$ 라 하면

$$g'(x) = 3ax^2, h'(x) = 2bx + a$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$g(1) = h(1)$$

$$\text{즉 } a + b^2 = b + a + b \text{이므로 } b(b-2) = 0$$

$$\therefore b=0 \text{ 또는 } b=2 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$g'(1) = h'(1)$$

$$\text{즉 } 3a = 2b + a \text{이므로 } a = b \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

$\textcircled{9}, \textcircled{10}$ 에서 $a=2, b=2$ ($\because a \neq 0$)

152

전략 다항식 $f(x)$ 를 다항식 $g(x)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라 하면 $f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$ 이다.

다항식 $x^{10} - ax + b$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned}
&x^{10} - ax + b \\
&= (x+1)^2 Q(x) + 3x - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$1 + a + b = -5$$

$$\therefore b = -a - 6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$10x^9 - a = 2(x+1)Q(x) + (x+1)^2 Q'(x) + 3$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$-10 - a = 3$$

$$\therefore a = -13$$

$$a = -13 \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } b = 7$$

$$\therefore ab = -91$$

답 -91

153

전략 주어진 조건을 이용하여 $f(0), g(0), f'(0), g'(0)$ 의 값을 구한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + g(x)}{x} = 3 \text{에서 } x \rightarrow 0 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0$$

이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) + g(x)\} = 0$ 이므로

$$f(0) + g(0) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + g(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) + g(x) - g(0)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x}$$

$$= f'(0) + g'(0)$$

$$= 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{또 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 3}{xg(x)} = 2 \text{에서 } x \rightarrow 0 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0$$

이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) + 3\} = 0$ 이므로 $f(0) + 3 = 0$

$$\therefore f(0) = -3$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $-3 + g(0) = 0$

$$\therefore g(0) = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 3}{xg(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{xg(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x) - f(0)}{x} \times \frac{1}{g(x)} \right\}$$

$$= f'(0) \times \frac{1}{g(0)}$$

$$= \frac{1}{3} f'(0) = 2$$

따라서 $f'(0)=6$ 이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$$6+g'(0)=3$$

$$\therefore g'(0)=-3$$

이때 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 이므로

$$h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$$

$$=6 \times 3 + (-3) \times (-3)$$

$$=27$$

답 ①

154

전략 먼저 주어진 항등식을 만족시키는 $f(x)$ 의 차수를 구한다.

$f(x)$ 가 상수함수이면 $f'(x)=0$ 이므로 주어진 등식에서 좌변은 0, 우변은 이차식이 되어 모순이다.

또 $f(x)$ 가 일차함수이면 $f'(x)$ 는 상수이므로 주어진 등식에서 좌변은 상수, 우변은 이차식이 되어 모순이다. 따라서 2 이상의 자연수 n 에 대하여 $f(x)$ 를 n 차 함수라 하면 $f'(x)$ 는 $(n-1)$ 차 함수이므로 주어진 등식에서 좌변의 차수는 $(n-1)+(n-1)$, 즉 $2n-2$ 이고 우변의 차수는 n 이다.

즉 $2n-2=n$ 이므로 $n=2$

따라서 $f(x)$ 는 이차함수이므로

$$f(x)=ax^2+bx+c \quad (a, b, c \text{는 상수}, a \neq 0)$$

라 하면 $f'(x)=2ax+b$

$f(x)$ 와 $f'(x)$ 를 주어진 등식에 대입하면

$$(2ax+b)(2ax+b+2)$$

$$=8(ax^2+bx+c)+12x^2-5$$

$$\therefore 4a^2x^2+4a(b+1)x+b(b+2)$$

$$=(8a+12)x^2+8bx+8c-5$$

위의 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$4a^2=8a+12 \quad \dots\dots ㉠$$

$$4a(b+1)=8b \quad \dots\dots ㉡$$

$$b(b+2)=8c-5 \quad \dots\dots ㉢$$

㉠에서 $a^2-2a-3=0$, $(a+1)(a-3)=0$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=3$$

$a=-1$ 이면 ㉡, ㉢에서 $b=-\frac{1}{3}$, $c=\frac{5}{9}$

$a=3$ 이면 ㉡, ㉢에서 $b=-3$, $c=1$

그런데 $f(x)$ 의 상수항이 정수이므로

$$f(x)=3x^2-3x+1$$

$$\text{답 } f(x)=3x^2-3x+1$$

155

전략 주어진 조건을 이용하여 $g(1)$, $g'(1)$ 의 값을 구한다.

조건 ㉠에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)g(x)+4\}=0$ 이므로

$$f(1)g(1)+4=0$$

$$\therefore f(1)g(1)=-4$$

이때 $f(1)=-2$ 이므로 $g(1)=2$

따라서 $g(x)=ax+b$ (a , b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$a+b=2 \quad \dots\dots ㉠$$

또 $g'(x)=a$ 이므로 조건 ㉡에서

$$b=a \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

$$\therefore g(x)=x+1, g'(x)=1$$

한편 $h(x)=f(x)g(x)$ 라 하면 $h(1)=-4$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x)+4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)-h(1)}{x-1}$$

$$=h'(1)=8$$

이때 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 이므로

$$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=8$$

$f(1)=-2$, $g(1)=2$, $g'(1)=1$ 을 대입하면

$$f'(1) \times 2 + (-2) \times 1 = 8$$

$$\therefore f'(1)=5$$

답 ①

156

전략 주어진 조건을 이용하여 x 에 대한 항등식을 세우고 $g(x)$ 를 구한다.

다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)^2(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$f(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+g(x)$$

$$\dots\dots ㉠$$

$f(x)$ 가 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어지므로 $g(x)$ 도 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어진다.

즉 $g(x)=a(x-1)^2$ (a 는 상수)이라 하면

$$f(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+a(x-1)^2$$

이때 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 2이므로

$$f(2)=a=2$$

$$\therefore g(x)=2(x-1)^2, g'(x)=4(x-1)$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+2h) - g(2-h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+2h) - g(2) - \{g(2-h) - g(2)\}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+2h) - g(2)}{2h} \times 2 \\
&\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2-h) - g(2)}{-h} \\
&= 2g'(2) + g'(2) \\
&= 3g'(2) = 3 \times 4 = 12 \quad \text{답 12}
\end{aligned}$$

다른 풀이 다항식 $f(x)$ 가 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어지므로

$$f(1)=0, f'(1)=0$$

또 다항식 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 2이므로 $f(2)=2$

따라서 $f(1)=0, f(2)=2$ 이므로 ㉠에서

$$g(1)=0, g(2)=2 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2(x-1)(x-2)Q(x) \\
&\quad + (x-1)^2Q'(x) \\
&\quad + (x-1)^2(x-2)Q'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

$$f'(1)=0 \text{에서} \quad g'(1)=0 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$g(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$g'(x)=2ax+b$$

㉡, ㉢에서

$$a+b+c=0, 4a+2b+c=2, 2a+b=0$$

$$\therefore a=2, b=-4, c=2$$

$$\therefore g(x)=2x^2-4x+2$$



개념 노트

나머지정리

다항식 $f(x)$ 를 일차식 $x-a$ 로 나누었을 때의 나머지를 R 라 하면

$$R=f(a)$$

2 도함수의 활용

II. 미분

01 접선의 방정식

● 본책 86~95쪽

157

(1) $f(x)=2x^2+4x-3$ 이라 하면

$$f'(x)=4x+4$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 3)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=8$$

(2) $f(x)=x^3-2x+1$ 이라 하면

$$f'(x)=3x^2-2$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 5)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(2)=10$$

답 (1) 8 (2) 10

158

답 $2x-4, 4, 4, -1, 4, 4, 4x-17$

159

답 $6x+2, 6t+2, 6, 6, 8, 1, 8x-2$

160

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(1, 5)$ 를 지나므로

$$f(1)=5$$

즉 $1+a+b=5$ 에서

$$a+b=4 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

x 좌표가 -1 인 점에서의 접선의 기울기가 1이므로

$$f'(-1)=1$$

즉 $3-2a+b=1$ 에서

$$2a-b=2 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=2, b=2$$

답 $a=2, b=2$

161

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ 라 하면

$$f'(x)=6x^2+2ax+b$$

두 점 $(-1, -11)$, $(2, 1)$ 이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점
이므로

$$f(-1)=-11, f(2)=1$$

즉 $-2+a-b+c=-11$ 에서

$$a-b+c=-9 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$16+4a+2b+c=1$ 에서

$$4a+2b+c=-15 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

또 두 점 $(-1, -11)$, $(2, 1)$ 에서의 접선이 평행하
므로

$$f'(-1)=f'(2)$$

즉 $6-2a+b=24+4a+b$ 에서

$$6a=-18 \quad \therefore a=-3$$

$a=-3$ 을 $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 에 각각 대입하면

$$-3-b+c=-9, -12+2b+c=-15$$

$$\therefore b-c=6, 2b+c=-3$$

두 식을 연립하여 풀면

$$b=1, c=-5$$

$$\therefore abc=15 \quad \text{답 15}$$

162

$f(x)=-3x^3-x^2+2x+1$ 이라 하면

$$f'(x)=-9x^2-2x+2$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 1)$ 에서의 접선의 기울
기는 $f'(-1)=-5$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-1=-5\{x-(-1)\}$$

$$\therefore y=-5x-4 \quad \text{답 } y=-5x-4$$

163

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

점 $(2, 4)$ 가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(2)=4$$

즉 $8+4a+2b=4$ 에서

$$2a+b=-2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 4)$ 에서의 접선의 기울기가
6이므로

$$f'(2)=6$$

즉 $12+4a+b=6$ 에서

$$4a+b=-6 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a=-2, b=2 \quad \text{답 } a=-2, b=2$$

164

$f(x)=-x^3+ax-5$ 라 하면

$$f'(x)=-3x^2+a$$

점 $(1, -4)$ 가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(1)=-4$$

즉 $-1+a-5=-4$ 에서 $a=2$

따라서 $f'(x)=-3x^2+2$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의
점 $(1, -4)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=-1$$

즉 점 $(1, -4)$ 에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는
1이므로 점 $(1, -4)$ 에서의 접선에 수직인 직선의 방
정식은

$$y-(-4)=x-1$$

$$\therefore y=x-5$$

따라서 $b=1, c=-5$ 이므로

$$abc=-10 \quad \text{답 } -10$$

165

$f(x)=x^2$ 이라 하면 $f'(x)=2x$

곡선 $y=f(x)$ 의 접선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각
의 크기가 45° 이므로 접선의 기울기는 $\tan 45^\circ=1$ 이
다.

이때 접점의 좌표를 (t, t^2) 이라 하면

$$f'(t)=2t=1 \quad \therefore t=\frac{1}{2}$$

따라서 접점의 좌표는 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ 이므로 구하는 접선의
방정식은

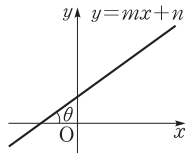
$$y-\frac{1}{4}=x-\frac{1}{2} \quad \therefore y=x-\frac{1}{4}$$

$$\text{답 } y=x-\frac{1}{4}$$



개념 노트

직선 $y=mx+n$ ($m>0$)이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$)이면
 $m=\tan \theta$



166

$f(x) = -2x^2 - 4x + 3$ 이라 하면

$$f'(x) = -4x - 4$$

곡선 $y=f(x)$ 의 접선이 두 점 $(-1, 5)$, $(-3, -3)$ 을 지나는 직선과 평행하므로 접선의 기울기는

$$\frac{-3-5}{-3-(-1)} = 4$$

이때 접점의 좌표를 $(t, -2t^2 - 4t + 3)$ 이라 하면

$$f'(t) = -4t - 4 = 4$$

$$-4t = 8 \quad \therefore t = -2$$

따라서 접점의 좌표는 $(-2, 3)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y - 3 = 4\{x - (-2)\}$$

$$\therefore y = 4x + 11$$

$$\boxed{\text{답}} \quad y = 4x + 11$$

167

$f(x) = x^3 - 11x + 2$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 11$$

직선 $x - 8y + 3 = 0$, 즉 $y = \frac{1}{8}x + \frac{3}{8}$ 에 수직인 직선의 기울기는 -8 이므로 접점의 좌표를

$(t, t^3 - 11t + 2)$ 라 하면

$$f'(t) = 3t^2 - 11 = -8$$

$$3t^2 = 3, \quad t^2 = 1$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 1$$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 12)$, $(1, -8)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y - 12 = -8\{x - (-1)\},$$

$$y - (-8) = -8(x - 1)$$

$$\therefore y = -8x + 4, \quad y = -8x$$

$$\boxed{\text{답}} \quad y = -8x + 4, \quad y = -8x$$

168

(1) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ 이라 하면

$$f'(x) = -2x + 2$$

접점의 좌표를 $(t, -t^2 + 2t + 3)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = -2t + 2$$

따라서 점 $(t, -t^2 + 2t + 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (-t^2 + 2t + 3) = (-2t + 2)(x - t)$$

$$\therefore y = (-2t + 2)x + t^2 + 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(2, 4)$ 를 지나므로

$$4 = (-2t + 2) \times 2 + t^2 + 3$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0, \quad (t - 1)(t - 3) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 3$$

이것을 ①에 각각 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y = 4, \quad y = -4x + 12$$

(2) $f(x) = x^3 - 2x$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 2$

접점의 좌표를 $(t, t^3 - 2t)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = 3t^2 - 2$$

따라서 점 $(t, t^3 - 2t)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (t^3 - 2t) = (3t^2 - 2)(x - t)$$

$$\therefore y = (3t^2 - 2)x - 2t^3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2 = -2t^3, \quad t^3 = -1$$

$$\therefore t = -1$$

$t = -1$ 을 ①에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y = x + 2$$

$$\boxed{\text{답}} \quad (1) \quad y = 4, \quad y = -4x + 12$$

$$(2) \quad y = x + 2$$

다른 풀이 (1) 점 $(2, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식을

$$y - 4 = m(x - 2),$$

$$\text{즉 } y = mx - 2m + 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

라 하면 이 직선이 곡선 $y = -x^2 + 2x + 3$ 에 접하므로 방정식

$$-x^2 + 2x + 3 = mx - 2m + 4,$$

$$\text{즉 } x^2 + (m - 2)x - 2m + 1 = 0$$

은 중근을 갖는다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (m-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2m+1) = 0$$

$$m^2 + 4m = 0, \quad m(m+4) = 0$$

$$\therefore m=0 \text{ 또는 } m=-4$$

이를 ㉠에 각각 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=4, \quad y=-4x+12$$

169

$$f(x) = x^3 - 2 \text{라 하면} \quad f'(x) = 3x^2$$

접점의 좌표를 (t, t^3-2) 라 하면 이 점에서의 접선의

$$\text{기울기는 } f'(t) = 3t^2$$

따라서 점 (t, t^3-2) 에서의 접선의 방정식은

$$y - (t^3 - 2) = 3t^2(x - t)$$

$$\therefore y = 3t^2x - 2t^3 - 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이 직선이 점 $(1, -6)$ 을 지나므로

$$-6 = 3t^2 - 2t^3 - 2, \quad 2t^3 - 3t^2 - 4 = 0$$

$$(t-2)(2t^2 + t + 2) = 0$$

$$\therefore t=2 \quad (\because 2t^2 + t + 2 > 0)$$

$t=2$ 를 ㉠에 대입하면

$$y = 12x - 18$$

이 직선이 점 $(k, 30)$ 을 지나므로

$$30 = 12k - 18, \quad 12k = 48$$

$$\therefore k=4$$

답 4

170

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 3 \text{이라 하면} \quad f'(x) = x^3$$

점 P의 좌표를 $(t, \frac{1}{4}t^4 + 3)$ 이라 하면 점 P에서의 접

$$\text{선의 기울기는 } f'(t) = t^3$$

따라서 점 P에서의 접선의 방정식은

$$y - \left(\frac{1}{4}t^4 + 3\right) = t^3(x - t)$$

$$\therefore y = t^3x - \frac{3}{4}t^4 + 3$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0 = -\frac{3}{4}t^4 + 3, \quad t^4 - 4 = 0$$

$$(t^2 + 2)(t + \sqrt{2})(t - \sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore t = -\sqrt{2} \text{ 또는 } t = \sqrt{2} \quad (\because t^2 + 2 > 0)$$

따라서 점 P의 좌표는 $(-\sqrt{2}, 4)$ 또는 $(\sqrt{2}, 4)$ 이므로

$$\overline{OP} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 4^2} = 3\sqrt{2}$$

답 3

171

$$f(x) = x^3 \text{이라 하면} \quad f'(x) = 3x^2$$

접점의 좌표를 (t, t^3) 이라 하면 이 점에서의 접선의

기울기는 $f'(t) = 3t^2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - t^3 = 3t^2(x - t)$$

$$\therefore y = 3t^2x - 2t^3$$

이 직선이 직선 $y = ax + 2$ 와 일치해야 하므로

$$3t^2 = a \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$-2t^3 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{8} \text{에서 } t^3 = -1 \quad \therefore t = -1$$

$t = -1$ 을 ㉠에 대입하면

$$a = 3 \quad \text{답 3}$$

다른 풀이 곡선과 직선의 접점의 x 좌표를 t 라 하면

$$t^3 = at + 2 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

또 접선의 기울기가 a 이므로

$$a = 3t^2 \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

$$\textcircled{9} \text{을 } \textcircled{10} \text{에 대입하면 } t^3 = 3t^2 \times t + 2$$

$$t^3 = -1 \quad \therefore t = -1$$

$$t = -1 \text{을 } \textcircled{10} \text{에 대입하면 } a = 3$$

172

$$f(x) = x^3 - ax + 2 \text{라 하면} \quad f'(x) = 3x^2 - a$$

접점의 좌표는 $(t, t^3 - at + 2)$ 이고 이 점에서의 접선

의 기울기는 $f'(t) = 3t^2 - a$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (t^3 - at + 2) = (3t^2 - a)(x - t)$$

$$\therefore y = (3t^2 - a)x - 2t^3 + 2$$

이 직선이 직선 $y = 5x$ 와 일치해야 하므로

$$3t^2 - a = 5 \quad \dots\dots \textcircled{11}$$

$$-2t^3 + 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{12}$$

$$\textcircled{12} \text{에서 } t^3 = 1 \quad \therefore t = 1$$

$t = 1$ 을 ㉠에 대입하면

$$3 - a = 5 \quad \therefore a = -2$$

$$\therefore a + t = -1$$

답 -1

다른 풀이 곡선과 직선의 접점의 x 좌표가 t 이므로

$$t^3 - at + 2 = 5t \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 접선의 기울기가 5이므로

$$3t^2 - a = 5 \quad \therefore a = 3t^2 - 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉡}$ 을 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$t^3 - (3t^2 - 5)t + 2 = 5t$$

$$t^3 = 1 \quad \therefore t = 1$$

$t = 1$ 을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면 $a = -2$

173

$f(x) = x^3 + ax$, $g(x) = bx^2 + c$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + a, g'(x) = 2bx$$

두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 가 모두 점 $(-1, 0)$ 을 지나므로

$$f(-1) = 0 \text{에서} \quad -1 - a = 0$$

$$\therefore a = -1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$g(-1) = 0 \text{에서} \quad b + c = 0$$

$$\therefore c = -b \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

두 곡선의 접점 $(-1, 0)$ 에서의 접선의 기울기가 같으므로 $f'(-1) = g'(-1)$

$$\text{즉 } 3 + a = -2b \text{에서} \quad 2 = -2b \quad (\because \textcircled{㉠})$$

$$\therefore b = -1$$

$$b = -1 \text{을 } \textcircled{㉡} \text{에 대입하면} \quad c = 1$$

$$\therefore abc = 1$$

답 1

174

$f(x) = x^3 - 7x - 4$, $g(x) = 2x^2$ 이라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 7, g'(x) = 4x$$

두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 가 공통인 접선을 갖는 점의 x 좌표를 t 라 하면 $f(t) = g(t)$ 에서

$$t^3 - 7t - 4 = 2t^2$$

$$t^3 - 2t^2 - 7t - 4 = 0, \quad (t+1)^2(t-4) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\text{또 } f'(t) = g'(t) \text{에서} \quad 3t^2 - 7 = 4t$$

$$3t^2 - 4t - 7 = 0, \quad (t+1)(3t-7) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = \frac{7}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서} \quad t = -1$$

따라서 점 $(-1, 2)$ 에서 공통인 접선을 갖고, 접선의 기울기는

$$f'(-1) = g'(-1) = -4$$

이므로 공통인 접선의 방정식은

$$y - 2 = -4(x + 1) \quad \therefore y = -4x - 2$$

$$\text{답 } y = -4x - 2$$

175

$f(x) = x^3 + ax + 3$, $g(x) = x^2 + 2$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + a, g'(x) = 2x$$

두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 접점의 x 좌표를 t 라 하면 $f(t) = g(t)$ 에서

$$t^3 + at + 3 = t^2 + 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 $f'(t) = g'(t)$ 에서

$$3t^2 + a = 2t \quad \therefore a = -3t^2 + 2t \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉡}$ 을 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$t^3 + (-3t^2 + 2t)t + 3 = t^2 + 2$$

$$2t^3 - t^2 - 1 = 0, \quad (t-1)(2t^2 + t + 1) = 0$$

$$\therefore t = 1 \quad (\because 2t^2 + t + 1 > 0)$$

$t = 1$ 을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면

$$a = -1$$

$$\text{답 } -1$$

176

$f(x) = -x^3 + 1$, $g(x) = -x^2 + ax + b$ 라 하면

$$f'(x) = -3x^2, g'(x) = -2x + a$$

곡선 $y = g(x)$ 가 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$g(-1) = 2$$

$$\text{즉 } -1 - a + b = 2 \text{에서}$$

$$b = a + 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

두 곡선 위의 점 $(-1, 2)$ 에서의 접선이 서로 수직이

므로 $f'(-1)g'(-1) = -1$ 에서

$$-3 \times (2 + a) = -1$$

$$a + 2 = \frac{1}{3} \quad \therefore a = -\frac{5}{3}$$

$$a = -\frac{5}{3} \text{를 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면} \quad b = \frac{4}{3}$$

$$\therefore 9ab = -20$$

$$\text{답 } -20$$

177

$f(x)=x^2-1$, $g(x)=ax^2$ ($a \neq 0$)이라 하면

$$f'(x)=2x, g'(x)=2ax$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표를 t 라 하면

$f(t)=g(t)$ 에서

$$t^2-1=at^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

두 곡선의 교점에서의 접선이 서로 수직이므로

$f'(t)g'(t)=-1$ 에서

$$2t \times 2at = -1, \quad 4at^2 = -1$$

$$\therefore at^2 = -\frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$t^2-1 = -\frac{1}{4} \quad \therefore t^2 = \frac{3}{4}$$

이것을 ㉡에 대입하면 $\frac{3}{4}a = -\frac{1}{4}$

$$\therefore a = -\frac{1}{3} \quad \text{답} -\frac{1}{3}$$

02 평균값 정리

● 본책 96~99쪽

178

(1) 함수 $f(x)=x^2-6x$ 는 닫힌구간 $[1, 5]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, 5)$ 에서 미분가능하며

$f(1)=f(5)=-5$ 이므로 롤의 정리에 의하여

$f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(1, 5)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x-6$ 이므로 $f'(c)=0$ 에서

$$2c-6=0 \quad \therefore c=3$$

(2) 함수 $f(x)=-x^2+2x+4$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$ 에서 미분가능하며

$f(0)=f(2)=4$ 이므로 롤의 정리에 의하여

$f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(0, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-2x+2$ 이므로 $f'(c)=0$ 에서

$$-2c+2=0 \quad \therefore c=1$$

(3) 함수 $f(x)=x^3-x^2-5x-3$ 은 닫힌구간

$[-1, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 3)$ 에서 미분가능하며 $f(-1)=f(3)=0$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(-1, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-2x-5$ 이므로 $f'(c)=0$ 에서

$$3c^2-2c-5=0, \quad (c+1)(3c-5)=0$$

$$\therefore c = \frac{5}{3} \quad (\because -1 < c < 3)$$

$$\text{답} \quad (1) 3 \quad (2) 1 \quad (3) \frac{5}{3}$$

179

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+2$ 는 닫힌구간

$[-a, a]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-a, a)$ 에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(-a)=f(a)$ 이어야 하므로

$$-\frac{1}{3}a^3+a^2+3a+2 = \frac{1}{3}a^3+a^2-3a+2$$

$$a^3-9a=0, \quad a(a+3)(a-3)=0$$

$$\therefore a=3 \quad (\because a \text{는 자연수})$$

따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(-3, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=x^2+2x-3$ 이므로 $f'(c)=0$ 에서

$$c^2+2c-3=0, \quad (c+3)(c-1)=0$$

$$\therefore c=1 \quad (\because -3 < c < 3)$$

$$\therefore a+c=4$$

답 4

180

(1) 함수 $f(x)=x^2-4x+3$ 은 닫힌구간 $[2, 4]$ 에서 연속이고 열린구간 $(2, 4)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(2, 4)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x-4$ 이므로

$$\frac{3-(-1)}{2} = 2c-4, \quad 2c=6$$

$$\therefore c=3$$

- (2) 함수 $f(x) = -x^3 + x$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(0, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = -3x^2 + 1$ 이므로

$$\frac{-6 - 0}{2} = -3c^2 + 1, \quad 3c^2 = 4$$

$$c^2 = \frac{4}{3} \quad \therefore c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (\because 0 < c < 2)$$

$$\text{답 (1) 3 (2) } \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

181

함수 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ 은 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(0, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = x^2 - 2x$ 이므로

$$\frac{1 - 1}{3} = c^2 - 2c, \quad c(c - 2) = 0$$

$$\therefore c = 2 \quad (\because 0 < c < 3)$$

따라서 실수 c 는 2의 1개이다.

답 1

182

함수 $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ 은 닫힌구간 $[-2, a]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-2, a)$ 에서 미분가능하며 평균값 정리를 만족시키는 실수 c 의 값이 $-\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{f(a) - f(-2)}{a - (-2)} = f'\left(-\frac{1}{2}\right)$$

이때 $f'(x) = 4x - 4$ 이므로

$$\frac{(2a^2 - 4a + 3) - 19}{a + 2} = -6$$

$$2a^2 - 4a - 16 = -6a - 12$$

$$a^2 + a - 2 = 0, \quad (a + 2)(a - 1) = 0$$

$$\therefore a = 1 \quad (\because a > -\frac{1}{2})$$

답 1

연습 문제

● 본책 100~102쪽

183

전략 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$ 임을 이용한다.

함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 1에서 4까지 변할 때의 평균 변화율은

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{52 - (-2)}{3} = 18$$

또 $f'(x) = 3x^2 - 3$ 이므로 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(k, f(k))$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(k) = 3k^2 - 3$$

따라서 $3k^2 - 3 = 18$ 이므로

$$3k^2 = 21, \quad k^2 = 7$$

$$\therefore k = \sqrt{7} \quad (\because k > 0)$$

답 ⑤

184

전략 곡선 $y = f(x)$ 의 접선의 기울기의 최솟값은 $f'(x)$ 의 최솟값임을 이용한다.

$f(x) = x^3 + 3x^2 + ax - 1$ 이라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + a = 3(x + 1)^2 + a - 3$$

따라서 $f'(x)$ 는 $x = -1$ 에서 최솟값 $a - 3$ 을 가지므로

$$a - 3 = 5 \quad \therefore a = 8$$

답 8

185

전략 항등식의 성질을 이용하여 점 P의 좌표를 구한다.

$y = x^3 + kx^2 - (2k - 1)x + k + 3$ 을 k 에 대하여 정리하면

$$(x - 1)^2 k + x^3 + x + 3 - y = 0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$(x - 1)^2 = 0, \quad x^3 + x + 3 - y = 0$$

$$\therefore x = 1, y = 5$$

따라서 점 P의 좌표는 $(1, 5)$ 이다.

이때 $f(x) = x^3 + kx^2 - (2k - 1)x + k + 3$ 이라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2kx - 2k + 1$$

따라서 점 P(1, 5)에서의 접선의 기울기는

$$f'(1) = 3 + 2k - 2k + 1 = 4$$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-5=4(x-1)$$

$$\therefore y=4x+1$$

답 $y=4x+1$

186

전략 먼저 곡선 위의 점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 방정식을 구한다.

$$f(x)=x^3+ax^2-a-1 \text{이라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2+2ax$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=3+2a$$

따라서 점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y=(3+2a)(x-1)$$

이 직선이 곡선 $y=f(x)$ 와 점 $(2, k)$ 에서 다시 만나므로

$$k=f(2)=3+2a$$

이때 $f(2)=8+4a-a-1=3a+7$ 이므로

$$3a+7=3+2a \quad \therefore a=-4$$

$$\therefore k=3+2 \times (-4)=-5$$

답 -5

187

전략 두 직선이 수직이면 두 직선의 기울기의 곱은 -1 임을 이용한다.

$$f(x)=2x^3-ax+b \text{라 하면}$$

$$f'(x)=6x^2-a$$

점 $(1, 6)$ 이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(1)=6$$

즉 $2-a+b=6$ 에서

$$b=a+4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 6)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=6-a$$

이때 점 $(1, 6)$ 에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{3}$ 이므로

$$(6-a) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$$

$$6-a=3 \quad \therefore a=3$$

$a=3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b=7$

$$\therefore ab=21$$

답 21

188

전략 평행한 두 직선의 기울기는 서로 같음을 이용한다.

$$f(x)=-x^2+1 \text{이라 하면}$$

$$f'(x)=-2x$$

직선 $2x-y+3=0$, 즉 $y=2x+3$ 에 평행한 직선의 기울기는 2이므로 접점의 좌표를 $(t, -t^2+1)$ 이라 하면

$$f'(t)=-2t=2 \quad \therefore t=-1$$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 0)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y=2\{x-(-1)\}$$

$$\therefore y=2x+2$$

답 $y=2x+2$

189

전략 접점의 좌표를 (t, t^3+at) 로 놓고 접선의 기울기가 5임을 이용한다.

$$f(x)=x^3+ax \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2+a$$

접점의 좌표를 (t, t^3+at) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=3t^2+a$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3+at)=(3t^2+a)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2+a)x-2t^3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2=-2t^3, \quad t^3=-1$$

$$\therefore t=-1$$

$t=-1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y=(3+a)x+2$$

이 직선의 기울기가 5이므로

$$3+a=5 \quad \therefore a=2$$

즉 $f(x)=x^3+2x$ 이므로

$$f(a)=f(2)=12$$

답 12

190

전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 $x=a$ 인 점에서 접하면 $f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$ 임을 이용한다.

$$f(x)=x^3+ax^2, \quad g(x)=-x^2+4 \text{라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2+2ax, \quad g'(x)=-2x$$

$f(t)=g(t)$ 에서

$$t^3+at^2=-t^2+4 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

또 $f'(t)=g'(t)$ 에서

$$3t^2+2at=-2t$$

$$\therefore at=-\frac{3}{2}t^2-t \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

$\textcircled{㉒}$ 을 $\textcircled{㉑}$ 에 대입하면

$$t^3+\left(-\frac{3}{2}t^2-t\right)t=-t^2+4$$

$$-\frac{1}{2}t^3=4, \quad t^3=-8$$

$$\therefore t=-2$$

$t=-2$ 를 $\textcircled{㉒}$ 에 대입하면

$$-2a=-4 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore a+t=0$$

답 0

191

전략 먼저 물의 정리를 만족시키는 k 의 값을 구한다.

함수 $f(x)=-x^2+kx$ 는 모든 실수에서 연속이고 미분가능하다.

이때 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 물의 정리를 만족시키므로

$$f(1)=f(3)$$

$$\text{즉 } -1+k=-9+3k \text{이므로}$$

$$k=4$$

따라서 $f(x)=-x^2+4x$ 이므로

$$f'(x)=-2x+4$$

$f'(c_1)=0$ 에서

$$-2c_1+4=0 \quad \therefore c_1=2$$

또 닫힌구간 $[1, 5]$ 에서 평균값 정리를 만족시키는 실수가 c_2 이므로

$$\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c_2)$$

$$\text{즉 } \frac{-5-3}{4}=-2c_2+4 \text{이므로}$$

$$2c_2=6 \quad \therefore c_2=3$$

$$\therefore c_1c_2=6$$

답 6

192

전략 곡선 $y=x^4$ 위의 점 (a, a^4) 에서의 접선의 방정식을 이용하여 $h(a)$ 를 구한다.

$f(x)=x^4$ 이라 하면

$$f'(x)=4x^3$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (a, a^4) 에서의 접선의 기울기는

$$f'(a)=4a^3$$

따라서 점 (a, a^4) 에서의 접선의 방정식은

$$y-a^4=4a^3(x-a)$$

$$\therefore y=4a^3x-3a^4$$

이 직선과 y 축의 교점의 좌표는 $(0, -3a^4)$ 이므로

$$h(a)=-3a^4$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{h(\sqrt{a^2+a})-h(a)}{a^3}$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-3(\sqrt{a^2+a})^4 - (-3a^4)}{a^3}$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-3(a^2+a)^2 + 3a^4}{a^3}$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{-6a^3 - 3a^2}{a^3}$$

$$=-6$$

답 -6

193

전략 주어진 조건을 이용하여 $f(8), f'(8)$ 의 값을 구한다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^3)}{x-2} = 24 \text{에서 } x \rightarrow 2 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고}$$

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x^3) = 0 \text{이므로}$$

$$f(8)=0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^3)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^3)-f(8)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x^3)-f(8)}{x^3-8} \times (x^2+2x+4) \right\}$$

$$= 12f'(8)$$

$$= 24$$

따라서 $f'(8)=2$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(8, f(8))$, 즉 $(8, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y=2(x-8)$$

$$\therefore y=2x-16$$

답 $y=2x-16$

194

전략 기울기가 -1인 접선의 접점의 좌표를 구한다.

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - x + 1$ 이라 하면

$$f'(x) = -3x^2 + 6x - 1$$

접점의 좌표를 $(t, -t^3 + 3t^2 - t + 1)$ 이라 하면 접선의 기울기가 -1이므로

$$f'(t) = -3t^2 + 6t - 1 = -1$$

$$t^2 - 2t = 0, \quad t(t-2) = 0$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t=2$$

따라서 접점의 좌표는 $(0, 1), (2, 3)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-1=-x, \quad y-3=-(x-2)$$

$$\therefore y=-x+1, \quad y=-x+5$$

이 두 직선 사이의 거리는 직선 $y=-x+1$ 위의 점 $(0, 1)$ 과 직선 $y=-x+5$, 즉 $x+y-5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|0+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \quad \text{답 } 2\sqrt{2}$$

195

전략 접점의 좌표를 $(t, t^4 - 2t^2 + 8)$ 로 놓고 접선이 원점을 지남을 이용한다.

$f(x) = x^4 - 2x^2 + 8$ 이라 하면

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

접점의 좌표를 $(t, t^4 - 2t^2 + 8)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = 4t^3 - 4t$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - (t^4 - 2t^2 + 8) = (4t^3 - 4t)(x - t)$$

$$\therefore y = (4t^3 - 4t)x - 3t^4 + 2t^2 + 8$$

이 직선이 원점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -3t^4 + 2t^2 + 8$$

$$(t^2 - 2)(3t^2 + 4) = 0$$

$$\therefore t = -\sqrt{2} \text{ 또는 } t = \sqrt{2} \quad (\because 3t^2 + 4 > 0)$$

따라서 $P'(-\sqrt{2}, 8), P(\sqrt{2}, 8)$ 이므로 삼각형 OPP' 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 8 = 8\sqrt{2} \quad \text{답 } 8\sqrt{2}$$

196

전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 방정식과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 방정식을 각각 구한다.

점 $(0, 0)$ 이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(0) = 0$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$f'(0)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = f'(0)x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 $g(x) = xf(x)$ 라 하면

$$g'(x) = f(x) + xf'(x)$$

점 $(1, 2)$ 가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

$$g(1) = 2 \quad \therefore f(1) = 2$$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는

$$g'(1) = f(1) + f'(1) = 2 + f'(1)$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - 2 = \{2 + f'(1)\}(x - 1)$$

$$\therefore y = \{2 + f'(1)\}x - f'(1)$$

이 직선이 직선 $\textcircled{1}$ 과 일치해야 하므로

$$f'(0) = 2 + f'(1), \quad 0 = -f'(1)$$

$$\therefore f'(0) = 2, \quad f'(1) = 0$$

이때 $f(x)$ 가 삼차함수이고 $f(0) = 0$ 이므로

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f'(0) = 2 \text{에서} \quad c = 2$$

$$f'(1) = 0 \text{에서} \quad 3a + 2b + 2 = 0$$

$$\therefore 3a + 2b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(1) = 2 \text{에서} \quad a + b + 2 = 2$$

$$\therefore a + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -2, b = 2$

따라서 $f'(x) = -6x^2 + 4x + 2$ 이므로

$$f'(2) = -14 \quad \text{답 } \textcircled{5}$$

197

전략 점 P에서의 접선의 기울기가 a 이면 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{a}$ 임을 이용한다.

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 8x - 4, g(x) = 3x^2 + 7x + 4$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 8, \quad g'(x) = 6x + 7$$

점 P의 x 좌표를 t 라 하면 $f(t)=g(t)$ 에서

$$\begin{aligned} t^3-3t^2-8t-4 &= 3t^2+7t+4 \\ t^3-6t^2-15t-8 &= 0, \quad (t+1)^2(t-8)=0 \\ \therefore t &= -1 \text{ 또는 } t=8 \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

또 $f'(t)=g'(t)$ 에서

$$\begin{aligned} 3t^2-6t-8 &= 6t+7, \quad t^2-4t-5=0 \\ (t+1)(t-5) &= 0 \\ \therefore t &= -1 \text{ 또는 } t=5 \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $t = -1$

즉 점 P의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고 점 P에서의 접선의 기울기는

$$f'(-1)=g'(-1)=1$$

이므로 접선과 수직인 직선의 기울기는 -1 이다.

따라서 기울기가 -1 이고 점 $(-1, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$\begin{aligned} y &= -\{x - (-1)\} \\ \therefore y &= -x - 1 \end{aligned} \quad \text{답 } y = -x - 1$$

198

전략 점 P에서의 접선이 주어진 직선과 평행할 때, 점 P와 직선 사이의 거리가 최소임을 이용한다.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 6x \quad (x > 0) \text{라 하면}$$

$$f'(x) = x^2 - 6$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P와 직선 $3x-y-20=0$ 사이의 거리가 최소가 되려면 점 P에서의 접선이 직선 $3x-y-20=0$, 즉 $y=3x-20$ 과 평행해야 한다.

따라서 점 P의 x 좌표를 t 라 하면 점 P에서의 접선의 기울기가 3이어야 하므로

$$\begin{aligned} f'(t) &= t^2 - 6 = 3, \quad t^2 = 9 \\ \therefore t &= 3 \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

즉 점 P의 좌표는 $(3, -9)$ 이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$$\begin{aligned} y - (-9) &= 3(x - 3) \\ \therefore y &= 3x - 18 \end{aligned}$$

따라서 접선의 x 절편과 y 절편은 각각 6, -18 이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 18 = 54 \quad \text{답 } 54$$

199

전략 먼저 주어진 곡선의 접선 중에서 기울기가 -1 인 접선의 방정식을 구한다.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

곡선 $y=f(x)$ 의 접선 중에서 직선 $y=-x+2$ 에 평행한 접선의 접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+2t) 라 하면

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3t^2 - 6t + 2 = -1 \\ t^2 - 2t + 1 &= 0, \quad (t-1)^2 = 0 \\ \therefore t &= 1 \end{aligned}$$

따라서 접점의 좌표는 $(1, 0)$ 이므로 접선의 방정식은

$$\begin{aligned} y &= -(x-1) \\ \therefore y &= -x+1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

이때 직선 ㉠을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$\begin{aligned} y-b &= -(x-a)+1 \\ \therefore y &= -x+a+1+b \end{aligned}$$

이 직선이 직선 $y=-x+2$ 와 일치해야 하므로

$$\begin{aligned} a+1+b &= 2 \\ \therefore a+b &= 1 \end{aligned} \quad \text{답 } 1$$

200

전략 평균값 정리를 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[x-1, x+3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(x-1, x+3)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x+3)-f(x-1)}{(x+3)-(x-1)} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(x-1, x+3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $x \rightarrow \infty$ 이면 $c \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x+3)-f(x-1)\} \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+3)-f(x-1)}{(x+3)-(x-1)} \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow \infty} f'(c) \\ &= 4 \lim_{c \rightarrow \infty} f'(c) \\ &= 4 \times 2 \\ &= 8 \end{aligned} \quad \text{답 } 8$$

03 함수의 증가와 감소

● 본책 103~106쪽

201

(1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 1$ 에서

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x+2)(x-3)$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	45	$\searrow$	-80	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -2]$, $[3, \infty)$ 에서 증가하고, 구간 $[-2, 3]$ 에서 감소한다.

(2) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 2$ 에서

$$f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

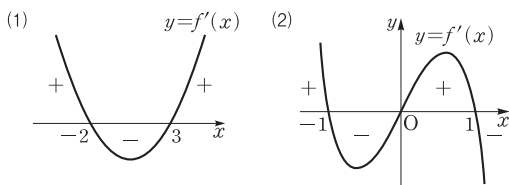
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1]$, $[0, 1]$ 에서 증가하고, 구간 $[-1, 0]$, $[1, \infty)$ 에서 감소한다.

답 풀이 참조

참고 도함수 $y = f'(x)$ 의 그래프는 각각 다음과 같다.



202

$f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 5$ 에서

$$f'(x) = -3x^2 - 6x + 9 = -3(x+3)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -3$ 또는 $x = 1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-22	$\nearrow$	10	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[-3, 1]$ 에서 증가하므로

$$\alpha = -3, \beta = 1$$

$$\therefore \beta - \alpha = 4$$

답 4

다른 풀이 함수 $f(x)$ 는 $f'(x) \geq 0$ 인 구간에서 증가한다.

이때 $f'(x) \geq 0$ 에서 $-3(x+3)(x-1) \geq 0$

$$(x+3)(x-1) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq x \leq 1$$

$$\therefore \alpha = -3, \beta = 1$$

203

$f(x) = 4x^3 + ax^2 - bx + 1$ 에서

$$f'(x) = 12x^2 + 2ax - b$$

함수 $f(x)$ 는 $x = -1$, $x = 2$ 의 좌우에서 증가와 감소가 바뀌므로 $x = -1$, $x = 2$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀐다.

따라서 이차방정식 $f'(x) = 0$, 즉 $12x^2 + 2ax - b = 0$ 의 두 근이 -1 , 2 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1 + 2 = -\frac{2a}{12}, \quad -1 \times 2 = \frac{-b}{12}$$

$$\therefore a = -6, b = 24$$

$$\therefore a + b = 18$$

답 18

204

(1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + (5a-4)x + 2$ 에서

$$f'(x) = x^2 + 2ax + 5a - 4$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

따라서 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - (5a-4) \leq 0$$

$$a^2 - 5a + 4 \leq 0, \quad (a-1)(a-4) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq a \leq 4$$

II-2

도함수의 활용

(2) $f(x) = -x^3 + ax^2 - 12x - 1$ 에서

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax - 12$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

따라서 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-3) \times (-12) \leq 0$$

$$a^2 - 36 \leq 0, \quad (a+6)(a-6) \leq 0$$

$$\therefore -6 \leq a \leq 6$$

답 (1) $1 \leq a \leq 4$ (2) $-6 \leq a \leq 6$

개념 노트

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때, 모든 실수 x 에 대하여

① 이차부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 이 성립하려면

$$a > 0, D \leq 0$$

② 이차부등식 $ax^2 + bx + c \leq 0$ 이 성립하려면

$$a < 0, D \leq 0$$

205

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + ax$ 에서

$$f'(x) = x^2 + 4x + a = (x+2)^2 + a - 4$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $[-1, 1]$

에서 증가하려면 $-1 \leq x \leq 1$

에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

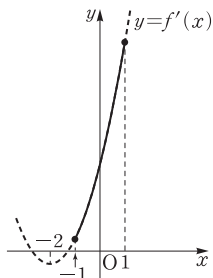
오른쪽 그림에서

$$f'(-1) = a - 3 \geq 0$$

$$\therefore a \geq 3$$

따라서 실수 a 의 최솟값은 3이다.

답 3



연습 문제

• 본책 107쪽

206

전략 부등식 $f'(x) \leq 0$ 의 해가 $1 \leq x \leq 5$ 임을 이용한다.

$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 1$ 에서

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$$

이때 함수 $f(x)$ 가 감소하는 구간이 $[1, 5]$ 이므로 이차부등식 $f'(x) \leq 0$ 의 해가 $1 \leq x \leq 5$ 이다.

따라서

$$f'(x) = 6(x-1)(x-5)$$

$$= 6x^2 - 36x + 30$$

이므로 $2a = -36, b = 30$

$$\therefore a = -18, b = 30$$

$$\therefore a + b = 12$$

답 12

207

전략 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 임을 이용한다.

$f(x) = x^3 + ax^2 - (a^2 - 8a)x + 3$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - a^2 + 8a$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

따라서 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3(-a^2 + 8a) \leq 0$$

$$a^2 - 6a \leq 0, \quad a(a-6) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 6$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 6이다.

답 6

208

전략 함수 $f(x)$ 가 주어진 구간에서 감소함을 이용한다.

$f(x) = x^3 + 6x^2 + ax - 2$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + a$$

주어진 조건을 만족시키려면 함수 $f(x)$ 가 구간

$[-3, 1]$ 에서 감소해야 하므로 $-3 \leq x \leq 1$ 에서

$f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

따라서 오른쪽 그림에서

$f'(-3) \leq 0$ 이므로

$$a - 9 \leq 0$$

$$\therefore a \leq 9 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

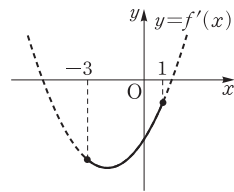
$f'(1) \leq 0$ 이므로

$$a + 15 \leq 0$$

$$\therefore a \leq -15 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧에서 $a \leq -15$

답 $a \leq -15$



209

전략 주어진 범위에서 $f'(x)$ 의 부호를 이용하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 조사한다.

- ㄱ. 구간 $(-5, -4)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$ 는 증가한다. (거짓)
 ㄴ. 구간 $(-2, -1)$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$ 는 감소한다. (참)
 ㄷ. 구간 $(0, 1)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$ 는 증가한다. (참)
 이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. **답** ㄴ, ㄷ

210

전략 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 실수 전체의 집합에서 $f(x)$ 가 증가하거나 감소해야 한다.

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 $f(x)$ 가 일대일 대응이어야 하므로 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다.

이때 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이므로 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

$$f(x) = -x^3 + kx^2 - 3kx - 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2kx - 3k$$

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로 이차 방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - (-3) \times (-3k) \leq 0$$

$$k^2 - 9k \leq 0, \quad k(k-9) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq k \leq 9$$

따라서 정수 k 는 0, 1, 2, ..., 9의 10개이다. **답** 10

211

전략 먼저 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식을 구한다.

$$f(x) = -x^3 + (a-2)x^2 - ax \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2(a-2)x - a$$

따라서 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = -3t^2 + 2(a-2)t - a$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - \{-t^3 + (a-2)t^2 - at\}$$

$$= \{-3t^2 + 2(a-2)t - a\}(x-t)$$

$$\therefore y = \{-3t^2 + 2(a-2)t - a\}x + 2t^3 - (a-2)t^2$$

$$\text{즉 } g(t) = 2t^3 - (a-2)t^2 \text{이므로}$$

$$g'(t) = 6t^2 - 2(a-2)t$$

함수 $g(t)$ 가 구간 $[-3, 0]$ 에서

감소하려면 $-3 \leq t \leq 0$ 에서

$g'(t) \leq 0$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$g'(-3) = 54 + 6(a-2) \leq 0$$

$$6a + 42 \leq 0$$

$$\therefore a \leq -7$$

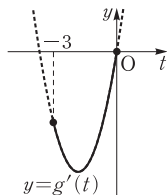
따라서 실수 a 의 최댓값은 -7 이다. **답** -7

참고 $y=g'(t)$ 의 그래프의 축의 방정식은

$$t = \frac{a-2}{6}$$

이때 $a \geq 20$ 이면 $t < 0$ 에서 $g'(t) > 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$\therefore a < 2$$



II-2

도함수의 활용

04 함수의 극대와 극소

● 본책 108~114쪽

212

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = \boxed{6}x^2 - 12x = 6x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=\boxed{2}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	$\boxed{2}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\boxed{-5}$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x=0 \text{에서 극댓값 } 3, x=\boxed{2} \text{에서 극솟값 } \boxed{-5}$$

를 갖는다.

답 6, 2, 2, -5, 2, -5

213

$f(x) = -x^4 + 2x^2 - 3$ 에서

$$f'(x) = \boxed{-4}x^3 + \boxed{4}x = -4x(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$x = -1 \text{ 또는 } x = \boxed{0} \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	$\boxed{0}$	...	1	...
$f'(x)$	+	0	$\boxed{-}$	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\boxed{-3}$	$\nearrow$	-2	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x = -1, x = 1 \text{에서 극댓값 } -2,$$

$$x = \boxed{0} \text{에서 극솟값 } \boxed{-3}$$

을 갖는다.

$$\boxed{\text{답}} \quad -4, 4, 0, 0, -, -3, 0, -3$$

214

(1) $f(x) = x^2(3-x) = -x^3 + 3x^2$ 에서

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x = 0 \text{에서 극솟값 } 0, x = 2 \text{에서 극댓값 } 4$$

를 갖는다.

(2) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 4$ 에서

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	16	$\searrow$	-11	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x = -2 \text{에서 극댓값 } 16,$$

$$x = 1 \text{에서 극솟값 } -11$$

을 갖는다.

$$\boxed{\text{답}} \quad (1) \text{ 극댓값: } 4, \text{ 극솟값: } 0$$

$$(2) \text{ 극댓값: } 16, \text{ 극솟값: } -11$$

215

$f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x - 2$ 에서

$$f'(x) = -6x^2 + 30x - 24$$

$$= -6(x-1)(x-4)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	4	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-13	$\nearrow$	14	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x = 1 \text{에서 극솟값 } -13, x = 4 \text{에서 극댓값 } 14$$

를 가지므로 극댓값과 극솟값의 차는

$$14 - (-13) = 27$$

$$\boxed{\text{답}} \quad 27$$

216

(1) $f(x) = 3x^4 + 16x^3 + 18x^2 + 5$ 에서

$$f'(x) = 12x^3 + 48x^2 + 36x$$

$$= 12x(x+3)(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = -3 \text{ 또는 } x = -1 \text{ 또는 } x = 0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-22	$\nearrow$	10	$\searrow$	5	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x = -3 \text{에서 극솟값 } -22,$$

$$x = -1 \text{에서 극댓값 } 10,$$

$$x = 0 \text{에서 극솟값 } 5$$

를 갖는다.

(2) $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 13$ 에서

$$f'(x) = -4x^3 + 12x^2 = -4x^2(x-3)$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	3	...
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	↗	-13	↗	14	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x=3 \text{에서 극댓값 } 14$$

를 갖는다.

답 (1) 극댓값: 10, 극솟값: -22, 5

(2) 극댓값: 14

217

$f(x) = -3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 24x$ 에서

$$f'(x) = -12x^3 + 24x^2 + 12x - 24$$

$$= -12(x+1)(x-1)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	19	↘	-13	↗	-8	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값 -13을 가지므로

$$a=1, b=-13$$

$$\therefore a+b=-12$$

답 -12

218

$f(x) = ax^3 + bx^2 + 3bx + 2$ 에서

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 3b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 극댓값, $x=3$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f'(-1)=0, f'(3)=0$$

$$3a-2b+3b=0, 27a+6b+3b=0$$

$$\therefore b=-3a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 극댓값과 극솟값의 차가 32이므로

$$f(-1)-f(3)=32$$

$$(-a+b-3b+2)-(27a+9b+9b+2)=32$$

$$\therefore 7a+5b=-8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$7a-15a=-8$$

$$\therefore a=1$$

$a=1$ 을 ①에 대입하면

$$b=-3$$

$$\therefore ab=-3$$

답 -3

219

$f(x) = x^3 + ax^2 - 24x + b$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 24$$

함수 $f(x)$ 가 $x=-4$ 에서 극댓값을 가지므로

$$f'(-4)=0$$

$$48-8a-24=0 \quad \therefore a=3$$

$$\therefore f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + b,$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x+4)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$x = -4 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-4	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$b+80$	↘	$b-28$	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x=-4 \text{에서 극댓값 } b+80,$$

$$x=2 \text{에서 극솟값 } b-28$$

을 가지므로

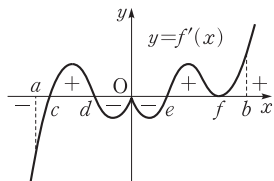
$$b+80=d, c=2, b-28=2$$

$$\therefore b=30, c=2, d=110$$

$$\therefore a+b+c+d=145$$

답 145

다음 그림과 같이 구간 (a, b) 에서 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 작은 것부터 순서대로 $c, d, 0, e, f$ 라 하자.



- (i) $x=d$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=d$ 에서 극댓값을 갖는다.

$$\therefore m=1$$

- (ii) $x=c, x=e$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=c, x=e$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$\therefore n=2$$

- (i), (ii)에서 $m-n=-1$ 답 -1

참고 $x=0, x=f$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$ 는 $x=0, x=f$ 에서 극값을 갖지 않는다.

221

$$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c \text{에서}$$

$$f'(x)=6x^2+2ax+b$$

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프에서

$$f'(-2)=0, f'(1)=0$$

$$f'(-2)=0 \text{에서 } 24-4a+b=0$$

$$\therefore 4a-b=24 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f'(1)=0 \text{에서 } 6+2a+b=0$$

$$\therefore 2a+b=-6 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a=3, b=-12$$

$$\therefore f(x)=2x^3+3x^2-12x+c$$

이때 $x=1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값 -12 를 갖는다.

$$\text{즉 } -7+c=-12 \text{이므로 } c=-5$$

$$\text{따라서 } f(x)=2x^3+3x^2-12x-5 \text{이므로}$$

$$f(-1)=8 \quad \text{답 8}$$

연습 문제

● 본책 115~117쪽

222

전략 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사한다.

$$f(x)=-2x^3-6x^2+9 \text{에서}$$

$$f'(x)=-6x^2-12x=-6x(x+2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$	9	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극솟값 1 을 가지므로 $a=-2, b=1$

$$\therefore a+b=-1$$

답 -1

223

전략 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사한다.

$$f(x)=-x^4+4x^3+2x^2-12x+3 \text{에서}$$

$$f'(x)=-4x^3+12x^2+4x-12$$

$$=-4(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	12	$\searrow$	-4	$\nearrow$	12	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x=-1, x=3 \text{에서 극댓값 } 12,$$

$$x=1 \text{에서 극솟값 } -4$$

$$\text{를 가지므로 } M=12, m=-4$$

$$\therefore M-m=16$$

답 16

224

전략 함수 $f(x)$ 가 $x=k$ 에서 극값을 가지면 $f'(k)=0$ 임을 이용한다.

$$f(x)=x^4+ax^2+b \text{에서 } f'(x)=4x^3+2ax$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극소이므로 $f'(1)=0$

$$4+2a=0 \quad \therefore a=-2$$

$$\therefore f(x)=x^4-2x^2+b,$$

$$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$b-1$	$\nearrow$	b	$\searrow$	$b-1$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 b 를 가지므로

$$b=4 \quad \therefore a+b=2$$

답 2

225

전략 함수 $f(x)$ 가 $x=k$ 에서 극값을 가지면 $f'(k)=0$ 임을 이용한다.

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+100 \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=-6$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(-6)=0, \quad 108-12a+b=0$$

$$\therefore 12a-b=108 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-3, f(-3))$ 에서의 접선의 기울기가 9이므로

$$f'(-3)=9, \quad 27-6a+b=9$$

$$\therefore 6a-b=18 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면 $a=15, b=72$

$$\therefore a+b=87$$

답 87

226

전략 함수 $f(x)$ 의 극값을 a 에 대한 식으로 나타낸다.

$$f(x)=x^3+3x^2-9x+a \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$27+a$	$\searrow$	$-5+a$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-3$ 에서 극댓값 $27+a$,

$x=1$ 에서 극솟값 $-5+a$ 를 갖는다.

이때 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같으므로

$$(27+a)+(-5+a)=0$$

$$22+2a=0$$

$$\therefore a=-11$$

답 -11

227

전략 함수 $f(x)$ 의 극값을 a 에 대한 식으로 나타낸다.

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}ax^2-6a^2x \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2-3ax-6a^2$$

$$=3(x+a)(x-2a)$$

$f'(x)=0$ 에서

$$x=-a \text{ 또는 } x=2a$$

$a>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-a$	...	$2a$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{7}{2}a^3$	$\searrow$	$-10a^3$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x=-a \text{에서 극댓값 } \frac{7}{2}a^3,$$

$$x=2a \text{에서 극솟값 } -10a^3$$

을 갖는다.

이때 극댓값과 극솟값의 차가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{7}{2}a^3-(-10a^3)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{27}{2}a^3=\frac{1}{2}, \quad a^3=\frac{1}{27}$$

$$\therefore a=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

228

전략 먼저 주어진 그래프에서 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값을 찾는다.

구간 $(-5, 5)$ 에서 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는

$$-4, -2, -1, 1, 2, 3, 4$$

(i) $x=-2, x=1, x=3$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-2, x=1, x=3$ 에서 극댓값을 갖는다.

$$\therefore \alpha = -2 + 1 + 3 = 2$$

(ii) $x=-1, x=2$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1, x=2$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$\therefore \beta = -1 + 2 = 1$$

(i), (ii)에서 $\alpha - \beta = 1$

답 1

229

전략 $y=f'(x)$ 의 그래프에서 함수 $f(x)$ 가 극댓값, 극솟값을 갖는 x 의 값을 찾는다.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프에서

$$f'(0)=0, f'(2)=0$$

$$f'(0)=0 \text{에서 } b=0$$

$$f'(2)=0 \text{에서 } 12+4a=0 \quad \therefore a=-3$$

$$\therefore f(x) = x^3 - 3x^2 + c$$

이때 $x=0$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 5를 갖는다.

$$\therefore c=5 \quad \therefore f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$$

또 $x=2$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$ 의 극솟값은

$$f(2)=1$$

답 1

230

전략 먼저 함수 $f(x)$ 의 극값을 구한다.

$$f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 6x^2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^3 - 12x = 3x(x+2)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-12	$\nearrow$	0	$\searrow$	-12	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x=-2, x=2 \text{에서 극솟값 } -12,$$

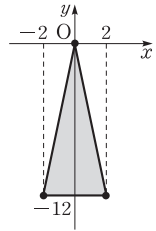
$$x=0 \text{에서 극댓값 } 0$$

을 가지므로 오른쪽 그림에서 구하

는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{2 - (-2)\} \times 12 = 24$$

답 24



231

전략 함수 $f(x)$ 가 극댓값을 갖는 x 의 값을 구한다.

$$f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3(a^2 - 1)x \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6ax + 3(a^2 - 1)$$

$$= 3(x - a + 1)(x - a - 1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=a-1 \text{ 또는 } x=a+1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$a-1$	...	$a+1$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=a-1$ 에서 극댓값을 가지므로

$$f(a-1)=4$$

$$(a-1)^3 - 3a(a-1)^2 + 3(a^2-1)(a-1)=4$$

$$a^3 - 3a - 2 = 0, \quad (a+1)^2(a-2)=0$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=2$$

(i) $a=-1$ 일 때

$$f(x) = x^3 + 3x^2 \text{이므로 } f(-2)=4 > 0$$

(ii) $a=2$ 일 때

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \text{이므로}$$

$$f(-2) = -50 < 0$$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $f(x) = x^3 + 3x^2$ 이므로

$$f(-1)=2$$

답 ②

232

전략 접선의 방정식을 이용하여 $f(1), f'(1)$ 의 값을 구한다.

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 기울기가 6이므로

$$f'(1) = 6, \quad 3 + 2a + b = 6$$

$$\therefore 2a + b = 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

또 접선 $y = 6x - 1$ 이 점 $(1, 5)$ 를 지나므로

$$f(1) = 5, \quad 1 + a + b + c = 5$$

$$\therefore a + b + c = 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

한편 함수 $f(x)$ 가 $x = -1$ 에서 극댓값을 가지므로

$$f'(-1) = 0, \quad 3 - 2a + b = 0$$

$$\therefore 2a - b = 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉓}$$

$\textcircled{㉑}, \textcircled{㉓}$ 을 연립하여 풀면 $a = \frac{3}{2}, b = 0$

이것을 $\textcircled{㉒}$ 에 대입하면 $\frac{3}{2} + c = 4$

$$\therefore c = \frac{5}{2}$$

따라서 $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}$ 이므로

$$f(3) = 43 \quad \text{답 43}$$

233

전략 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{g(x)} = a$ (a 는 실수)이고 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 이면

$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -2$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 이므로 $f(0) = 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = -2$$

따라서 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \quad (a, b, c \text{는 상수}, a \neq 0)$$

라 하면

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

이고 $f'(0) = -2$ 에서

$$c = -2$$

$$\therefore f(x) = ax^3 + bx^2 - 2x,$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 2$$

한편 함수 $f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 극솟값 -3 을 가지므로

$$f'(1) = 0, \quad f(1) = -3$$

$$3a + 2b - 2 = 0, \quad a + b - 2 = -3$$

$$\therefore 3a + 2b = 2, \quad a + b = -1$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = 4, \quad b = -5$$

따라서 $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 2x$ 이므로

$$f(-1) = -7 \quad \text{답 -7}$$

234

전략 함수 $y = f'(x)$ 의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 조사한다.

ㄱ. 구간 $(-1, 2)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가한다. (거짓)

ㄴ. 구간 $(2, 4)$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 감소한다. (거짓)

ㄷ. $f'(1) \neq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄹ. $f'(2) = 0$ 이고 $x = 2$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극댓값을 갖는다.

또 $f'(-1) = f'(4) = 0$ 이고 $x = -1, x = 4$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x = -1, x = 4$ 에서 극솟값을 갖는다.

따라서 구간 $(-2, 5)$ 에서 함수 $f(x)$ 가 극값을 갖는 x 의 개수는 3이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄹ뿐이다. 답 ㄹ

235

전략 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극값을 가지면 $f'(a) = 0$ 임을 이용한다.

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고, 조건 (나)에서 $f(0) = 0$ 이므로

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx \quad (a, b \text{는 상수})$$

라 하면 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

이때 조건 (가)에서 $f'(1) = 0$ 이므로

$$3 + 2a + b = 0$$

$$\therefore 2a + b = -3 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

조건 ㉔에서 $f'(-1-x)=f'(-1+x)$ 의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면

$$f'(1)=f'(-3)$$

즉 $f'(-3)=0$ 이므로

$$27-6a+b=0$$

$$\therefore 6a-b=27 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

㉓, ㉔을 연립하여 풀면

$$a=3, b=-9$$

$$\therefore f(x)=x^3+3x^2-9x,$$

$$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	27	↘	-5	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-3$ 에서 극댓값 27을 갖는다. 답 27

236

전략 함수 $g(x)$ 가 $x=3$ 에서 연속이고 미분가능함을 이용하여 a, b 의 값을 구한다.

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이고 미분가능하다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 3+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} g(x) = g(3)$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 3+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = f(3),$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} \{b-f(x)\} = b-f(3),$$

$$g(3) = f(3)$$

이므로 $f(3) = b-f(3) \quad \dots\dots \textcircled{㉓}$

$$3a-17=b-3a+17$$

$$\therefore b=6a-34 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

또 $\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{g(x)-g(3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{g(x)-g(3)}{x-3}$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{g(x)-g(3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

$$= f'(3),$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} \frac{g(x)-g(3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{\{b-f(x)\}-f(3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{-f(x)+\{b-f(3)\}}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{-f(x)+f(3)}{x-3} \quad (\because \textcircled{㉓})$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = -f'(3)$$

이므로 $f'(3) = -f'(3)$

$$\therefore f'(3) = 0$$

이때 $f'(x) = 3x^2 - 12x + a$ 이므로

$$-9+a=0 \quad \therefore a=9$$

$a=9$ 를 ㉔에 대입하면 $b=20$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} -x^3+6x^2-9x+10 & (x<3) \\ x^3-6x^2+9x+10 & (x\geq 3) \end{cases}$$

(i) $x<3$ 일 때

$$g'(x) = -3x^2+12x-9 = -3(x-1)(x-3)$$

이므로 $g'(x)=0$ 에서

$$x=1 \quad (\because x<3)$$

(ii) $x\geq 3$ 일 때

$$g'(x) = 3x^2-12x+9 = 3(x-1)(x-3)$$

이므로 $g'(x)=0$ 에서

$$x=3 \quad (\because x\geq 3)$$

(i), (ii)에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$g'(x)$	-	0	+	0	+
$g(x)$	↘	6	↗	10	↗

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값 6을 갖는다. 답 6

05 함수의 그래프

● 본책 118~123쪽

237

(1) $f(x) = -x^3+6x^2-12x+4$ 에서

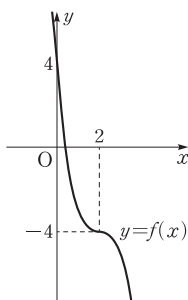
$$f'(x) = -3x^2+12x-12 = -3(x-2)^2$$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가
와 감소를 표로 나
타내면 오른쪽과
같다.

x	...	2	...
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\searrow$

이때 $f(0)=4$ 이므로 함수
 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽
그림과 같다.



(2) $f(x)=2x^3-3x^2+2$ 에서

$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

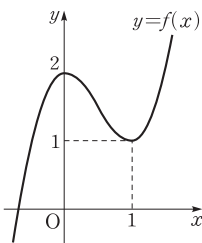
$f'(x)=0$ 에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과
같다.

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그
래프는 오른쪽 그림과 같다.



(3) $f(x)=x^4-4x^3+4x^2+1$ 에서

$$f'(x)=4x^3-12x^2+8x$$

$$=4x(x-1)(x-2)$$

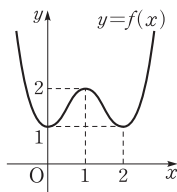
$f'(x)=0$ 에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과
같다.

x	...	0	...	1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래
프는 오른쪽 그림과 같다.



(4) $f(x)=-3x^4-8x^3-6x^2+2$ 에서

$$f'(x)=-12x^3-24x^2-12x$$

$$=-12x(x+1)^2$$

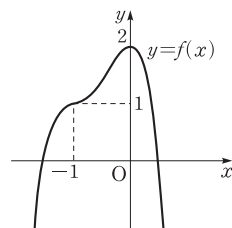
$f'(x)=0$ 에서

$$x=-1 \text{ 또는 } x=0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과
같다.

x	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의
그래프는 오른쪽 그림과
같다.



답 풀이 참조

238

$f(x)=x^3+kx^2+3x+2$ 에서

$$f'(x)=3x^2+2kx+3$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$
이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라
하면

$$\frac{D}{4}=k^2-3 \times 3 > 0$$

$$(k+3)(k-3) > 0$$

$$\therefore k < -3 \text{ 또는 } k > 3$$

답 $k < -3$ 또는 $k > 3$

239

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(a-1)x^2-3ax+2$ 에서

$$f'(x)=3x^2-3(a-1)x-3a$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근을 갖거나 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$D = \{-3(a-1)\}^2 - 4 \times 3 \times (-3a) \leq 0$$

$$a^2 + 2a + 1 \leq 0, \quad (a+1)^2 \leq 0$$

$$\therefore a = -1$$

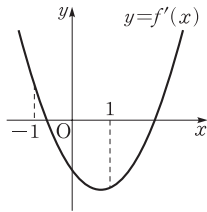
답 -1

240

$$f(x) = x^3 + 2ax^2 - 4a^2x \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 4ax - 4a^2$$

함수 $f(x)$ 가 $-1 < x < 1$ 에서 극댓값을 갖고, $x > 1$ 에서 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 $-1 < x < 1$, $x > 1$ 에서 각각 하나의 실근을 가져야 하므로 $y=f'(x)$ 의 그래프가 위의 그림과 같아야 한다.



(i) $f'(-1) = 3 - 4a - 4a^2 > 0$ 에서

$$4a^2 + 4a - 3 < 0, \quad (2a+3)(2a-1) < 0$$

$$\therefore -\frac{3}{2} < a < \frac{1}{2}$$

(ii) $f'(1) = 3 + 4a - 4a^2 < 0$ 에서

$$4a^2 - 4a - 3 > 0, \quad (2a+1)(2a-3) > 0$$

$$\therefore a < -\frac{1}{2} \text{ 또는 } a > \frac{3}{2}$$

(i), (ii)에서

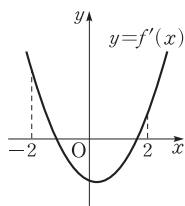
$$-\frac{3}{2} < a < -\frac{1}{2} \quad \text{답 } -\frac{3}{2} < a < -\frac{1}{2}$$

241

$$f(x) = x^3 + ax^2 + (a-1)x \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + a - 1$$

함수 $f(x)$ 가 $-2 < x < 2$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 $-2 < x < 2$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $y=f'(x)$ 의 그래프가 위의 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3(a-1) > 0$$

$$\therefore a^2 - 3a + 3 = \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

따라서 모든 실수 a 에 대하여 항상 성립한다.

(ii) 이차함수 $y=f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이

$$x = -\frac{a}{3} \text{ 이므로}$$

$$-2 < -\frac{a}{3} < 2 \quad \therefore -6 < a < 6$$

(iii) $f'(-2) = 12 - 4a + a - 1 > 0$ 에서 $a < \frac{11}{3}$

(iv) $f'(2) = 12 + 4a + a - 1 > 0$ 에서 $a > -\frac{11}{5}$

이상에서 $-\frac{11}{5} < a < \frac{11}{3}$

따라서 정수 a 는 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ 의 6개이다.

답 6

242

$$f(x) = -x^4 + 8x^3 + 2ax^2 \text{에서}$$

$$f'(x) = -4x^3 + 24x^2 + 4ax$$

$$= -4x(x^2 - 6x - a)$$

최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $f(x)$ 가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2 - 6x - a = 0$ 이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$x=0$ 이 $x^2 - 6x - a = 0$ 의 근이 아니므로

$$-a \neq 0 \quad \therefore a \neq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2 - 6x - a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - (-a) > 0$$

$$\therefore a > -9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $-9 < a < 0$ 또는 $a > 0$

답 $-9 < a < 0$ 또는 $a > 0$

243

$$f(x) = x^4 + 2(a-1)x^2 + 4ax \text{에서}$$

$$f'(x) = 4x^3 + 4(a-1)x + 4a$$

$$= 4(x+1)(x^2 - x + a)$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖거나 중근과 다른 한 실근을 갖거나 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우
이차방정식 $x^2-x+a=0$ 이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$D=(-1)^2-4a<0 \quad \therefore a>\frac{1}{4}$$

(ii) $f'(x)=0$ 이 중근과 다른 한 실근을 갖는 경우
이차방정식 $x^2-x+a=0$ 이 $x=-1$ 을 근으로 갖거나 -1 이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

㉠ 이차방정식 $x^2-x+a=0$ 이 $x=-1$ 을 근으로 가질 때

$$2+a=0 \quad \therefore a=-2$$

㉡ 이차방정식 $x^2-x+a=0$ 이 -1 이 아닌 실수를 중근으로 가질 때, 판별식을 D 라 하면

$$D=(-1)^2-4a=0 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$$

(i), (ii)에서 $a=-2$ 또는 $a\geq\frac{1}{4}$

$$\text{답 } a=-2 \text{ 또는 } a\geq\frac{1}{4}$$

06 함수의 최댓값과 최솟값

● 본책 124~129쪽

244

(1) $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$ 에서

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	6	$\searrow$	-21

따라서 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 최댓값 6, $x=2$ 에서 최솟값 -21을 갖는다.

(2) $f(x)=-2x^3+6x^2-5$ 에서

$$f'(x)=-6x^2+12x=-6x(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

구간 $[-1, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	2	...	3
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5

따라서 $f(x)$ 는 $x=-1, x=2$ 에서 최댓값 3, $x=0, x=3$ 에서 최솟값 -5를 갖는다.

(3) $f(x)=x^4+4x^3-16x$ 에서

$$f'(x)=4x^3+12x^2-16=4(x+2)^2(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

구간 $[-3, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	...	-2	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	-	0	+	
$f(x)$	21	$\searrow$	16	$\searrow$	-11	$\nearrow$	16

따라서 $f(x)$ 는 $x=-3$ 에서 최댓값 21, $x=1$ 에서 최솟값 -11을 갖는다.

(4) $f(x)=-x^4+2x^2$ 에서

$$f'(x)=-4x^3+4x=-4x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

구간 $[-2, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	0	...	1
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-8	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

따라서 $f(x)$ 는 $x=-1, x=1$ 에서 최댓값 1, $x=-2$ 에서 최솟값 -8을 갖는다.

답 (1) 최댓값: 6, 최솟값: -21

(2) 최댓값: 3, 최솟값: -5

(3) 최댓값: 21, 최솟값: -11

(4) 최댓값: 1, 최솟값: -8

245

$$f(x)=-2x^3+3x^2+a \text{에서}$$

$$f'(x)=-6x^2+6x=-6x(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=1$
구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	a	$\nearrow$	$1+a$	$\searrow$	$-4+a$

따라서 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최솟값 $-4+a$ 를 가지므로

$$-4+a=-5 \quad \therefore a=-1$$

또 $x=1$ 에서 최댓값 $1+a$ 를 가지므로 구하는 최댓값은

$$1+(-1)=0$$

답 0

246

$f(x)=x^3-3x^2+a$ 에서

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[-2, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	0	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$a-20$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$a-2$

따라서 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최댓값 a , $x=-2$ 에서 최솟값 $a-20$ 을 가지므로

$$a+(a-20)=-10$$

$$2a=10 \quad \therefore a=5$$

답 5

247

$f(x)=ax^4-4ax^3+b$ 에서

$$f'(x)=4ax^3-12ax^2=4ax^2(x-3)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=3$

이때 $a<0$ 이므로 구간 $[1, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	3	...	4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-3a+b$	$\nearrow$	$-27a+b$	$\searrow$	b

따라서 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값 $-27a+b$, $x=4$ 에서 최솟값 b 를 가지므로

$$-27a+b=3, b=-6$$

$$\therefore a=-\frac{1}{3}, b=-6$$

$$\therefore ab=2$$

답 2

248

$f(t)=-\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{3}t^3+2t^2+4t$ 에서

$$f'(t)=-t^3-t^2+4t+4$$

$$=-(t+2)(t+1)(t-2)$$

$f'(t)=0$ 에서 $t=2$ ($\because 0<t<3$)

$0<t<3$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	2	...	3
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 $f(t)$ 는 $t=2$ 에서 극대이면서 최대이므로 순이익이 최대가 되려면 2년 후에 주식을 팔아야 한다.

답 2년

249

점 C의 x 좌표를 t ($0<t<3$)라 하면 $C(t, 9-t^2)$

$\overline{CD}=2t$, $\overline{AB}=6$ 이고 사다리꼴 ABCD의 높이가

$9-t^2$ 이므로 넓이를 $f(t)$ 라 하면

$$f(t)=\frac{1}{2}(2t+6)(9-t^2)$$

$$=-t^3-3t^2+9t+27$$

$$\therefore f'(t)=-3t^2-6t+9=-3(t+3)(t-1)$$

$f'(t)=0$ 에서 $t=1$ ($\because 0<t<3$)

$0<t<3$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	1	...	3
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		$\nearrow$	32	$\searrow$	

따라서 $f(t)$ 는 $t=1$ 에서 극대이면서 최대이므로 사다리꼴 ABCD의 넓이의 최댓값은 32이다.

답 32

250

점 A의 x 좌표를 t 라 하면 두 점 $A(t, t^2)$, $B(3, 0)$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(t-3)^2 + (t^2-0)^2} \\ &= \sqrt{t^4 + t^2 - 6t + 9} \end{aligned}$$

$f(t) = \overline{AB}^2 = t^4 + t^2 - 6t + 9$ 라 하면

$$f'(t) = 4t^3 + 2t - 6 = 2(t-1)(2t^2 + 2t + 3)$$

$f'(t) = 0$ 에서 $t = 1$ ($\because 2t^2 + 2t + 3 > 0$)

함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

t	...	1	...
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$\searrow$	5	$\nearrow$

따라서 $f(t)$ 는 $t=1$ 에

서 극소이면서 최소이므로 선분 AB의 길이의 최솟값은 $\sqrt{5}$ 이다. 답 $\sqrt{5}$

251

오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x ($0 < x < 1$), 높이를 h 라 하면

$$(3-h) : x = 3 : 1$$

$$3x = 3 - h$$

$$\therefore h = 3 - 3x$$

원기둥의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} V(x) &= \pi x^2 h = \pi x^2 (3 - 3x) \\ &= -3\pi(x^3 - x^2) \end{aligned}$$

$$\therefore V'(x) = -3\pi(3x^2 - 2x) = -3\pi x(3x - 2)$$

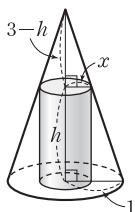
$V'(x) = 0$ 에서 $x = \frac{2}{3}$ ($\because 0 < x < 1$)

$0 < x < 1$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{2}{3}$	...	1
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		$\nearrow$	$\frac{4}{9}\pi$	$\searrow$	

따라서 $V(x)$ 는 $x = \frac{2}{3}$ 에서 극대이면서 최대이므로

원기둥의 부피의 최댓값은 $\frac{4}{9}\pi$ 이다. 답 $\frac{4}{9}\pi$



연습 문제

• 본책 130~132쪽

252

전략 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내고 이를 이용하여 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 찾아 본다.

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표는 $-1, 1$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$		$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극대이므로

$y=f(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ④이다. 답 ④

253

전략 $f(x)$ 가 극값을 갖기 위한 $f'(x)$ 의 조건과 $g(x)$ 가 극값을 갖지 않기 위한 $g'(x)$ 의 조건을 이용한다.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - 3 \times 3 > 0$$

$$(a+3)(a-3) > 0$$

$$\therefore a < -3 \text{ 또는 } a > 3 \quad \dots\dots ㉠$$

$$g(x) = x^3 + ax^2 - 3ax + 2 \text{에서}$$

$$g'(x) = 3x^2 + 2ax - 3a$$

함수 $g(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식

$g'(x) = 0$ 이 중근을 갖거나 허근을 가져야 하므로 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = a^2 - 3 \times (-3a) \leq 0$$

$$a^2 + 9a \leq 0, \quad a(a+9) \leq 0$$

$$\therefore -9 \leq a \leq 0 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서} \quad -9 \leq a < -3$$

따라서 정수 a 는 $-9, -8, -7, \dots, -4$ 의 6개이다. 답 6

254

전략 함수 $f(x)$ 가 주어진 구간에서 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 그 구간에서 실근을 가져야 함을 이용한다.

$$f(x)=x^3+(k-3)x^2+(2-k)x-3 \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2+2(k-3)x+2-k$$

함수 $f(x)$ 가 $0 < x < 1$ 에서

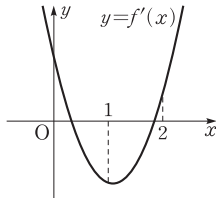
극댓값을 갖고, $1 < x < 2$ 에서

극솟값을 가지려면 이차방정식

$$f'(x)=0 \text{이 } 0 < x < 1, \quad 1 < x < 2 \text{에서 각각 하나의 실}$$

근을 가져야 하므로

$y=f'(x)$ 의 그래프가 위의 그림과 같아야 한다.



(i) $f'(0)=2-k > 0$ 에서

$$k < 2$$

(ii) $f'(1)=3+2(k-3)+2-k < 0$ 에서

$$k < 1$$

(iii) $f'(2)=12+4(k-3)+2-k > 0$ 에서

$$3k+2 > 0 \quad \therefore k > -\frac{2}{3}$$

이상에서 $-\frac{2}{3} < k < 1$ 답 $-\frac{2}{3} < k < 1$

255

전략 구간 $[0, 4]$ 에서 $f(x)$ 의 극값과 $f(0)$, $f(4)$ 의 값을 구한다.

$$f(x)=x^3-3x^2-3 \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=2$$

구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...	4
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	-3	\	-7	/	13

따라서 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 최댓값 13, $x=2$ 에서 최솟값 -7을 가지므로

$$M=13, m=-7$$

$$\therefore M-m=20$$

답 20

256

전략 구간 $[-1, 3]$ 에서 $f(x)$ 의 극값과 $f(-1)$, $f(3)$ 의 값을 a , b 에 대한 식으로 나타낸다.

$$f(x)=ax^3-3ax+2b \text{에서}$$

$$f'(x)=3ax^2-3a=3a(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

이때 $a > 0$ 이므로 구간 $[-1, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	1	...	3
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$2a+2b$	\	$-2a+2b$	/	$18a+2b$

따라서 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값 $18a+2b$, $x=1$ 에서 최솟값 $-2a+2b$ 를 가지므로

$$18a+2b=22, \quad -2a+2b=2$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=1, b=2$$

$$\therefore ab=2$$

답 2

257

전략 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 a 에 대한 식으로 나타낸다.

$$f(x)=x^4-4a^3x+1 \text{에서}$$

$$f'(x)=4x^3-4a^3$$

$$=4(x-a)(x^2+ax+a^2)$$

이때 $x^2+ax+a^2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2 > 0$ 이므로

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=a$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	a	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\	$-3a^4+1$	/

따라서 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 최솟값 $-3a^4+1$ 을 가지므로

$$-3a^4+1=-47, \quad a^4-16=0$$

$$(a^2+4)(a+2)(a-2)=0$$

$$\therefore a=2 \quad (\because a > 0)$$

답 2

258

전략 점 P의 x좌표를 t로 놓고 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 을 t에 대한 식으로 나타낸다.

점 P의 x좌표를 t라 하면 세 점 A(5, -1), B(9, 1), P(t, t^2+2)에 대하여

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= (t-5)^2 + (t^2+3)^2 + (t-9)^2 + (t^2+1)^2 \\ &= 2t^4 + 10t^2 - 28t + 116\end{aligned}$$

$f(t) = 2t^4 + 10t^2 - 28t + 116$ 이라 하면

$$\begin{aligned}f'(t) &= 8t^3 + 20t - 28 \\ &= 4(t-1)(2t^2 + 2t + 7)\end{aligned}$$

$f'(t) = 0$ 에서

$$t = 1 \quad (\because 2t^2 + 2t + 7 > 0)$$

함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	1	...
f'(t)	-	0	+
f(t)	\	100	/

따라서 $f(t)$ 는 $t=1$ 일 때 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은 100이다. **답 100**

259

전략 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 $x=a$ 에서 x축과 접하면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극값 0을 가짐을 이용한다.

$f(0)=0$ 이므로 함수

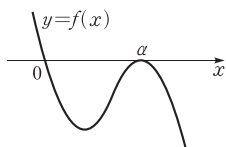
$y=f(x)$ 의 그래프는 원점을 지나면서 원점 이외의 점에 서 x축과 접하고, $f(x)$ 의 극솟값이 -4이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 위의 그림과 같아야 한다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x축과 접하는 점의 좌표를 $(a, 0)$ ($a>0$)이라 하면

$$\begin{aligned}f(x) &= -x(x-a)^2 \\ &= -x^3 + 2ax^2 - a^2x \\ \therefore f'(x) &= -3x^2 + 4ax - a^2 \\ &= -(3x-a)(x-a)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서

$$x = \frac{a}{3} \text{ 또는 } x=a$$



이때 $a>0$ 이므로 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$\frac{a}{3}$	...	a	...
f'(x)	-	0	+	0	-
f(x)	\	극소	/	0	\

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{a}{3}$ 에서 극솟값 -4를 가지므로

$$f\left(\frac{a}{3}\right) = -4, \quad -\frac{4}{27}a^3 = -4$$

$$a^3 = 27 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$$

즉 $m=6$, $n=-9$ 이므로

$$mn = -54$$

답 -54

해설 Focus

삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 $x=a$ ($a \neq 0$)에서 x축과 접하면 점 $(a, 0)$ 을 지나므로

$$f(x) = -x(x-a)(x-\beta) \quad (\beta \neq 0)$$

로 놓을 수 있다. 그런데 $a \neq \beta$ 이면 $y=f(x)$ 의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 x축과 접하지 않는다.

따라서 $a=\beta$ 이어야 하므로 $f(x) = -x(x-a)^2$ 이다.

260

전략 최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $f(x)$ 가 극솟값을 갖지 않기 위한 $f'(x)$ 의 조건을 이용한다.

$f(x) = -3x^4 + 4ax^3 - 6(a+3)x^2 - 1$ 에서

$$\begin{aligned}f'(x) &= -12x^3 + 12ax^2 - 12(a+3)x \\ &= -12x(x^2 - ax + a+3)\end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 가 극솟값을 갖지 않으려면 삼차방정식

$f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖거나 중근과 다른 한 실근을 갖거나 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2 - ax + a+3=0$ 이 허근을 가져야

하므로 판별식을 D라 하면

$$D = (-a)^2 - 4(a+3) < 0$$

$$a^2 - 4a - 12 < 0, \quad (a+2)(a-6) < 0$$

$$\therefore -2 < a < 6$$

(ii) $f'(x)=0$ 이 중근과 다른 한 실근을 갖는 경우
이차방정식 $x^2-ax+a+3=0$ 이 $x=0$ 을 근으로
갖거나 0이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

㉠ 이차방정식 $x^2-ax+a+3=0$ 이 $x=0$ 을 근으
로 가질 때

$$a+3=0 \quad \therefore a=-3$$

㉡ 이차방정식 $x^2-ax+a+3=0$ 이 0이 아닌 실
수를 중근으로 가질 때, 판별식을 D 라 하면

$$D=(-a)^2-4(a+3)=0$$

$$a^2-4a-12=0$$

$$(a+2)(a-6)=0$$

$$\therefore a=-2 \text{ 또는 } a=6$$

(i), (ii)에서

$$a=-3 \text{ 또는 } -2 \leq a \leq 6$$

따라서 정수 a 는 $-3, -2, -1, \dots, 6$ 이므로 구하는
합은

$$-3+(-2)+(-1)+\dots+6=15$$

답 15

261

전략 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내어 참, 거짓을 판별
한다.

$$f(x)=x^3-3x \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2-3$$

$$=3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같
다.

x	$\dots$	-1	$\dots$	1	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

ㄱ. $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값 2 , $x=1$ 에서 극솟값
 -2 를 갖는다. (참)

ㄴ. $f(2)=2$ 이고, $f(x)$ 는 구간 $[2, \infty)$ 에서 증가하
므로 $x \geq 2$ 이면

$$f(x) \geq f(2)=2 \text{ (참)}$$

ㄷ. 구간 $[-2, 2]$ 에서 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로
나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\dots$	-1	$\dots$	1	$\dots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

따라서 $-2 \leq x \leq 2$ 일 때, $f(x)$ 의 최댓값은 2 , 최
솟값은 -2 이므로 $|x| \leq 2$ 이면 $|f(x)| \leq 2$ 이다.

(참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

262

전략 하루에 A 제품 x 개를 판매하여 얻은 이익은
 $1200x-f(x)$ (원)임을 이용한다.

하루에 A 제품 x ($x > 0$)개를 판매하여 얻은 이익을
 $P(x)$ 원이라 하면

$$P(x)=1200x-f(x)$$

$$=1200x-(x^3-60x^2+1200x+5000)$$

$$=-x^3+60x^2-5000$$

$$\therefore P'(x)=-3x^2+120x=-3x(x-40)$$

$$P'(x)=0 \text{에서 } x=40 \text{ (} \because x > 0 \text{)}$$

$x > 0$ 에서 함수 $P(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면
다음과 같다.

x	0	$\dots$	40	$\dots$
$P'(x)$		$+$	0	$-$
$P(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 $P(x)$ 는 $x=40$ 에서 극대이면서 최대이므로
이익을 최대로 하기 위해 하루에 생산해야 할 A 제품
의 개수는 40 이다.

답 40

263

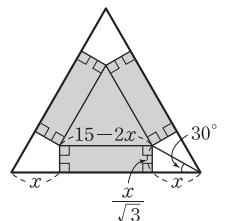
전략 상자의 부피를 x 에 대한 식으로 나타낸다.

상자의 밑면의 한 변의 길이는

$$15-2x$$

이고 높이는

$$x \times \tan 30^\circ = \frac{x}{\sqrt{3}}$$



이때 $15-2x>0$, $\frac{x}{\sqrt{3}}>0$ 이므로

$$0 < x < \frac{15}{2}$$

상자의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{\sqrt{3}}{4} (15-2x)^2 \times \frac{x}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{4} (4x^3 - 60x^2 + 225x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore V'(x) &= \frac{1}{4} (12x^2 - 120x + 225) \\ &= \frac{3}{4} (2x-5)(2x-15) \end{aligned}$$

$V'(x)=0$ 에서

$$x = \frac{5}{2} \left(\because 0 < x < \frac{15}{2} \right)$$

$0 < x < \frac{15}{2}$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{5}{2}$	...	$\frac{15}{2}$
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(x)$ 는 $x = \frac{5}{2}$ 에서 극대이면서 최대이므로 상자의 부피가 최대가 되도록 하는 x 의 값은 $\frac{5}{2}$ 이다.

답 $\frac{5}{2}$

264

전략 주어진 조건을 이용하여 x^2+xy^2 을 x 에 대한 식으로 나타낸다.

$x^2+3y^2=9$ 에서

$$y^2 = \frac{1}{3} (9-x^2) \quad (-3 \leq x \leq 3)$$

$$\begin{aligned} \therefore x^2+xy^2 &= x^2+x \times \frac{1}{3} (9-x^2) \\ &= -\frac{1}{3} x^3 + x^2 + 3x \end{aligned}$$

$f(x) = -\frac{1}{3} x^3 + x^2 + 3x$ 라 하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= -x^2 + 2x + 3 \\ &= -(x+1)(x-3) \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 3$

$-3 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	...	-1	...	3
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	9	↘	$-\frac{5}{3}$	↗	9

따라서 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극소이면서 최소이므로 x^2+xy^2 의 최솟값은 $-\frac{5}{3}$ 이다.

답 $-\frac{5}{3}$

참고 $y^2 \geq 0$ 이므로 $\frac{1}{3} (9-x^2) \geq 0$ 에서

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &\leq 0, \quad (x+3)(x-3) \leq 0 \\ \therefore -3 &\leq x \leq 3 \end{aligned}$$

265

전략 함수 $g(x)$ 의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 k 의 값의 범위를 구한다.

$g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ 에서

$$g'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$$

$g'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	2	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	3	↘	2	↗

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 3을 갖고,

$x=2$ 에서 극솟값 2를 갖는다.

한편 $f(x) = x^2 + 2x + k = (x+1)^2 + k-1$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) \geq k-1$$

따라서 $f(x)=t$ 라 하면 $t \geq k-1$ 이고

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(t)$$

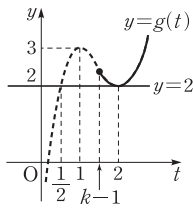
이때 함수 $g(t)$ 의 최솟값이 2이므로 $g(t)=2$ 에서

$$2t^3 - 9t^2 + 12t - 2 = 2$$

$$2t^3 - 9t^2 + 12t - 4 = 0, \quad (2t-1)(t-2)^2 = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } t = 2$$

즉 함수 $(g \circ f)(x)$ 의 최솟값이 2가 되려면 함수 $y=g(t)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$$\frac{1}{2} \leq k-1 \leq 2$$

$$\therefore \frac{3}{2} \leq k \leq 3$$

따라서 실수 k 의 최솟값은 $\frac{3}{2}$ 이다.

답 ⑤

266

전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식은 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ 이다.

$f(x)=x(x-a)(x-6)$ 이라 하면

$$f'(x)=(x-a)(x-6)+x(x-6)+x(x-a)$$

이때 $f(0)=0$ 이므로 원점은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이고 원점에서의 접선의 기울기는

$$f'(0)=6a$$

또 원점이 아닌 접점의 좌표를 $(t, f(t))$ 라 하면 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0-f(t)=f'(t)(0-t)$$

$$-t(t-a)(t-6)$$

$$=-t\{(t-a)(t-6)+t(t-6)+t(t-a)\}$$

$$t^2(2t-6-a)=0 \quad \therefore t=\frac{6+a}{2} \quad (\because t \neq 0)$$

$$\therefore f'(t)=f'\left(\frac{6+a}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{4}(a^2-12a+36)$$

따라서 원점에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 두 접선의 기울기의 곱을 $g(a)$ 라 하면

$$g(a)=6a \times \left\{-\frac{1}{4}(a^2-12a+36)\right\}$$

$$=-\frac{3}{2}(a^3-12a^2+36a)$$

$$\therefore g'(a)=-\frac{3}{2}(3a^2-24a+36)$$

$$=-\frac{9}{2}(a-2)(a-6)$$

$g'(a)=0$ 에서 $a=2$ ($\because 0 < a < 6$)

$0 < a < 6$ 에서 함수 $g(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	2	...	6
$g'(a)$		-	0	+	
$g(a)$		\	-48	/	

따라서 $g(a)$ 는 $a=2$ 일 때 극소이면서 최솟이므로 구하는 최솟값은 -48이다.

답 ③

267

전략 원뿔의 높이를 x 로 놓고 원뿔의 부피를 x 에 대한 식으로 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 구에 내접

하는 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 x ($0 < x < 6$)

라 하면

$$r^2+(x-3)^2=3^2$$

$$\therefore r^2=6x-x^2$$

원뿔의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x)=\frac{1}{3}\pi r^2 x=\frac{\pi}{3}(6x-x^2)x$$

$$=\frac{\pi}{3}(6x^2-x^3)$$

$$\therefore V'(x)=\frac{\pi}{3}(12x-3x^2)$$

$$=-\pi x(x-4)$$

$V'(x)=0$ 에서 $x=4$ ($\because 0 < x < 6$)

$0 < x < 6$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	4	...	6
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		/	$\frac{32}{3}\pi$	\	

따라서 $V(x)$ 는 $x=4$ 에서 극대이면서 최대이므로 원뿔의 부피의 최댓값은 $\frac{32}{3}\pi$ 이다.

답 $\frac{32}{3}\pi$

07 방정식과 부등식의 활용

● 본책 133~141쪽

268

(1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$ 라 하면

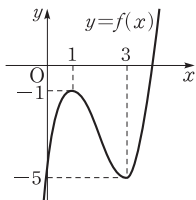
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	-1	↘	-5	↗

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 한 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^3 - 6x^2 + 9x - 5 = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



(2) $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ 이라 하면

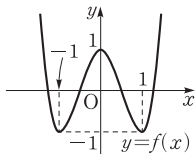
$$f'(x) = 8x^3 - 8x = 8x(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 네 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$, 즉 $2x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.



(3) $2x^3 - x^2 - 4x = 2x^2 + 8x - 15$ 에서

$$2x^3 - 3x^2 - 12x + 15 = 0$$

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 15$ 라 하면

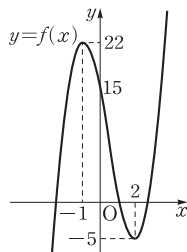
$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	22	↘	-5	↗

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$, 즉 $2x^3 - 3x^2 - 12x + 15 = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



(4) $2x^4 + 3x^3 = x^4 - x^3 - 5$ 에서

$$x^4 + 4x^3 + 5 = 0$$

$f(x) = x^4 + 4x^3 + 5$ 라 하면

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x+3)$$

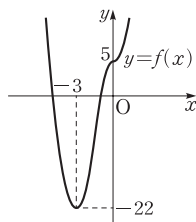
$f'(x) = 0$ 에서

$$x = -3 \text{ 또는 } x = 0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	↘	-22	↗	5	↗

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^4 + 4x^3 + 5 = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



답 (1) 1 (2) 4 (3) 3 (4) 2

다른 풀이 (1) $f(1)f(3) = -1 \times (-5) = 5 > 0$

따라서 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

(3) $f(-1)f(2) = 22 \times (-5) = -110 < 0$

따라서 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

II-2

단원수의 활용

269

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 $y=x^3-3x$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x^3-3x$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

- (1) 직선 $y=k$ 와 세 점에서 만나도록 하는 k 의 값의 범위는

$$-2 < k < 2$$

- (2) 직선 $y=k$ 와 두 점에서 만나도록 하는 k 의 값은
 $k=-2$ 또는 $k=2$

- (3) 직선 $y=k$ 와 한 점에서 만나도록 하는 k 의 값의 범위는

$$k < -2 \text{ 또는 } k > 2$$

답 (1) $-2 < k < 2$

(2) $k=-2$ 또는 $k=2$

(3) $k < -2$ 또는 $k > 2$

참고 (2)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 는 접한다.

270

$3x^4-4x^3-12x^2+15-k=0$ 에서

$$3x^4-4x^3-12x^2+15=k$$

따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는

$y=3x^4-4x^3-12x^2+15$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+15$ 라 하면

$$f'(x)=12x^3-12x^2-24x$$

$$=12x(x+1)(x-2)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	10	↗	15	↘	-17	↗

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

- (1) 직선 $y=k$ 와 네 점에서 만나도록 하는 k 의 값의 범위는

$$10 < k < 15$$

- (2) 직선 $y=k$ 와 세 점에서 만나도록 하는 k 의 값은

$$k=10 \text{ 또는 } k=15$$

- (3) 직선 $y=k$ 와 두 점에서 만나도록 하는 k 의 값의 범위는

$$-17 < k < 10 \text{ 또는 } k > 15$$

- (4) 직선 $y=k$ 와 한 점에서 만나도록 하는 k 의 값은
 $k=-17$

답 (1) $10 < k < 15$

(2) $k=10$ 또는 $k=15$

(3) $-17 < k < 10$ 또는 $k > 15$

(4) $k=-17$

271

곡선 $y=x^3-10x-4$ 와 직선 $y=2x+a$ 의 교점의 개수는 방정식 $x^3-10x-4=2x+a$, 즉

$x^3-12x-4=a$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$f(x)=x^3-12x-4$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	12	↘	-20	↗

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

- (1) 직선 $y=a$ 와 세 점에서 만나도록 하는 a 의 값의 범위는

$$-20 < a < 12$$

- (2) 직선 $y=a$ 와 두 점에서 만나도록 하는 a 의 값은

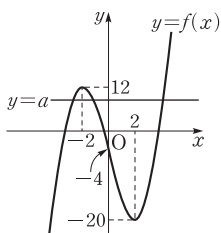
$$a = -20 \text{ 또는 } a = 12$$

답 (1) $-20 < a < 12$ (2) $a = -20$ 또는 $a = 12$

참고 곡선 $y=x^3-10x-4$ 와 직선 $y=2x+a$ 가 접한다.

$\Leftrightarrow$ 방정식 $x^3-10x-4=2x+a$, 즉 $x^3-12x-4=a$ 가 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$\Leftrightarrow$ 곡선 $y=x^3-12x-4$ 와 직선 $y=a$ 가 두 점에서 만난다.



272

$f(x)=2x^3-3x^2+a$ 라 하면

$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$, $x=1$ 에서 극값을 갖는다.

- (1) 방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$$f(0)f(1) < 0$$

$$a(-1+a) < 0 \quad \therefore 0 < a < 1$$

- (2) 방정식 $f(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$$f(0)f(1) > 0$$

$$a(-1+a) > 0 \quad \therefore a < 0 \text{ 또는 } a > 1$$

답 (1) $0 < a < 1$ (2) $a < 0$ 또는 $a > 1$

다른 풀이 $2x^3-3x^2+a=0$ 에서 $-2x^3+3x^2=a$
 $g(x)=-2x^3+3x^2$ 이라 하면 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 개수와 같다.

$$g'(x)=-6x^2+6x=-6x(x-1) \text{ 이므로}$$

$g'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

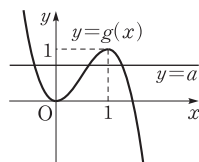
x	...	0	...	1	...
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

- (1) 직선 $y=a$ 와 세 점에서 만나도록 하는 a 의 값의 범위는

$$0 < a < 1$$

- (2) 직선 $y=a$ 와 한 점에서 만나도록 하는 a 의 값의 범위는 $a < 0$ 또는 $a > 1$



273

$f(x)=16x^3-12x^2-24x-k$ 라 하면

$$f'(x)=48x^2-24x-24$$

$$=24(2x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-\frac{1}{2}$, $x=1$ 에서 극값을 갖는다.

이때 방정식 $f(x)=0$ 이 중근과 다른 한 실근을 가지려면

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)f(1)=0$$

$$(7-k)(-20-k)=0$$

$$\therefore k=7 \text{ 또는 } k=-20$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$7+(-20)=-13$$

답 -13

다른 풀이 $16x^3-12x^2-24x-k=0$ 에서

$$16x^3-12x^2-24x=k$$

$g(x)=16x^3-12x^2-24x$ 라 하면 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수와 같다.

$g'(x)=48x^2-24x-24=24(2x+1)(x-1)$ 이므로 $g'(x)=0$ 에서

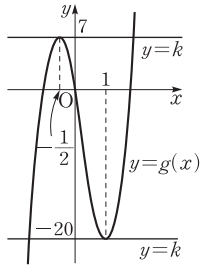
$$x=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=1$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\frac{1}{2}$	...	1	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\nearrow$	7	$\searrow$	-20	$\nearrow$

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$ 와 두 점에서 만나도록 하는 k 의 값은

$$k=7 \text{ 또는 } k=-20$$



274

$$x^3-3x^2-9x+k=0 \text{에서}$$

$$-x^3+3x^2+9x=k$$

$$f(x)=-x^3+3x^2+9x \text{라 하면}$$

$$f'(x)=-3x^2+6x+9$$

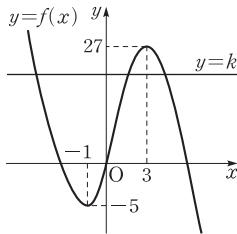
$$=-3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	-5	/	27	\

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(1) 직선 $y=k$ 와 접하고, 접점이 아닌 다른 교점의 x 좌표가 음수이어야 하므로

$$k=27$$

(2) 직선 $y=k$ 와 교점의 x 좌표가 두 개는 양수, 한 개는 음수이어야 하므로

$$0 < k < 27$$

(3) 직선 $y=k$ 와 교점의 x 좌표가 두 개는 음수, 한 개는 양수이어야 하므로

$$-5 < k < 0$$

(4) 직선 $y=k$ 와 교점이 1개이고 그 교점의 x 좌표가 양수이어야 하므로

$$k < -5$$

답 (1) $k=27$ (2) $0 < k < 27$

(3) $-5 < k < 0$ (4) $k < -5$

275

$$f(x)=g(x) \text{에서}$$

$$2x^3-5x^2-3x=x^3-3x^2+x-a$$

$$\therefore -x^3+2x^2+4x=a$$

$$h(x)=-x^3+2x^2+4x \text{라 하면}$$

$$h'(x)=-3x^2+4x+4$$

$$=-(3x+2)(x-2)$$

$$h'(x)=0 \text{에서 } x=-\frac{2}{3} \text{ 또는 } x=2$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

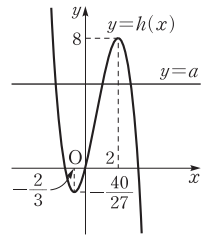
x	...	$-\frac{2}{3}$	...	2	...
$h'(x)$	-	0	+	0	-
$h(x)$	\	$-\frac{40}{27}$	/	8	\

따라서 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 직선 $y=a$ 와 교점의 x 좌표가 두 개는 양수, 한 개는 음수이어야 하므로

$$0 < a < 8$$

따라서 정수 a 는 1, 2, ..., 7의 7개이다.



276

$$f(x)=x^4-2x^2+a \text{라 하면}$$

$$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	$a-1$	/	a	\	$a-1$	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$, $x=1$ 에서 최솟값 $a-1$ 을 가지므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$a-1 \geq 0 \quad \therefore a \geq 1$$

답 $a \geq 1$

277

$y=f(x)$ 의 그래프가 $y=g(x)$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) > g(x)$, 즉 $f(x) - g(x) > 0$ 이 성립해야 한다. $h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면

$$h(x) = x^4 - \frac{16}{3}x^3 + 6x^2 + k$$

$$\therefore h'(x) = 4x^3 - 16x^2 + 12x = 4x(x-1)(x-3)$$

$h'(x) = 0$ 에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...	3	...
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$	\	k	/	$k + \frac{5}{3}$	\	$k-9$	/

따라서 함수 $h(x)$ 는 $x=3$ 에서 최솟값 $k-9$ 를 가지므로 모든 실수 x 에 대하여 $h(x) > 0$ 이 성립하려면

$$k-9 > 0 \quad \therefore k > 9 \quad \text{답 } k > 9$$

278

$x^3 + 9x + a > 6x^2 + 6$ 에서

$$x^3 - 6x^2 + 9x + a - 6 > 0$$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + a - 6$ 이라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$x=1 \text{ 또는 } x=3$$

$x > 1$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	3	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	$a-6$	/

따라서 $x > 1$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 최솟값 $a-6$ 을 가지므로 부등식 $f(x) > 0$ 이 성립하려면

$$a-6 > 0 \quad \therefore a > 6 \quad \text{답 } a > 6$$

279

$f(x) \geq g(x)$ 에서 $f(x) - g(x) \geq 0$

$h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면

$$h(x) = 5x^3 - 15x^2 + k - 2$$

$$\therefore h'(x) = 15x^2 - 30x = 15x(x-2)$$

$h'(x) = 0$ 에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=2$$

$0 < x < 3$ 일 때, 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...	3
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$		\	$k-22$	/	

따라서 $0 < x < 3$ 일 때, 함수 $h(x)$ 는 $x=2$ 에서 최솟값 $k-22$ 를 가지므로 부등식 $h(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$k-22 \geq 0 \quad \therefore k \geq 22$$

즉 실수 k 의 최솟값은 22이다.

답 22

280

$f(x) = x^3 - 12x + a$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

$-2 < x < 2$ 일 때 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-2, 2)$ 에서 감소한다.

따라서 $-2 < x < 2$ 에서 부등식 $f(x) > 0$ 이 성립하려면 $f(2) \geq 0$ 이어야 하므로

$$-16 + a \geq 0 \quad \therefore a \geq 16$$

즉 실수 a 의 최솟값은 16이다.

답 16



연습 문제

• 본책 142~143쪽

281

전략 $y = f(x) - 2g(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 개수를 구한다.

$f(x) = 2g(x)$ 에서

$$x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3 = 2(-x^4 + 4x^2 - 2)$$

$$\therefore 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 7 = 0$$

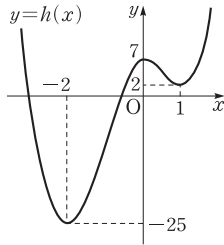
$h(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 7$ 이라 하면

$$\begin{aligned} h'(x) &= 12x^3 + 12x^2 - 24x \\ &= 12x(x+2)(x-1) \end{aligned}$$

$h'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...	1	...
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$	\	-25	/	7	\	2	/

따라서 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 두 점에서 만나므로 방정식 $h(x)=0$, 즉 $f(x)=2g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



답 2

282

전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $f(x)=g(x)$ 가 서로 다른 세 실근을 가져야 함을 이용한다.

$$x^3 - 2x^2 - 6x + 2 = x^2 + 3x + a \text{에서}$$

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 2 = a$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2 \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

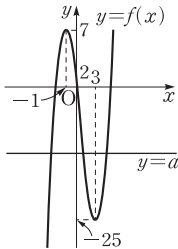
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	7	\	-25	/

즉 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=a$ 와 세 점에서 만나도록 하는 a 의 값의 범위는

$$-25 < a < 7$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 6이다.



답 6

다른 풀이 $x^3 - 2x^2 - 6x + 2 = x^2 + 3x + a$ 에서

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 2 - a = 0$$

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2 - a \text{라 하면}$$

$$g'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=-1$, $x=3$ 에서 극값을 가지므로 방정식 $g(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$$g(-1)g(3) < 0$$

$$(7-a)(-25-a) < 0 \quad \therefore -25 < a < 7$$

283

전략 주어진 방정식의 실근은 곡선 $y=x^3-27x$ 와 직선 $y=a$ 의 교점의 x 좌표와 같음을 이용한다.

$$x^3 - 27x - a = 0 \text{에서}$$

$$x^3 - 27x = a$$

$$f(x) = x^3 - 27x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 27 = 3(x+3)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$x=-3 \text{ 또는 } x=3$$

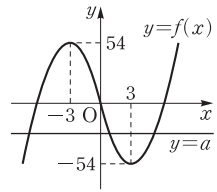
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	54	\	-54	/

즉 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=a$ 와 교점의 x 좌표가 한 개는 음수, 두 개는 양수이려면

$$-54 < a < 0$$

따라서 정수 a 는 $-53, -52, -51, \dots, -1$ 의 53개이다.



답 53

284

전략 주어진 부등식을 $f(x) \geq 0$ 의 꼴로 변형한 후 $f(x)$ 의 최솟값을 구한다.

$$x^4 + 3x^3 + k \geq -x^3 + 16x \text{에서}$$

$$x^4 + 4x^3 - 16x + k \geq 0$$

$f(x) = x^4 + 4x^3 - 16x + k$ 라 하면

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 16$$

$$= 4(x+2)^2(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$k+16$	$\searrow$	$k-11$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값 $k-11$ 을 가지므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$k-11 \geq 0 \quad \therefore k \geq 11$$

즉 실수 k 의 최솟값은 11이다.

답 11

285

전략 $x \geq 0$ 에서 $(f(x) - g(x))$ 의 최솟값 ≥ 0 임을 이용한다.

$f(x) \geq g(x)$ 에서

$$f(x) - g(x) \geq 0$$

$h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면

$$h(x) = x^3 - x^2 - x + 6 - a$$

$$\therefore h'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

$$= (3x+1)(x-1)$$

$h'(x) = 0$ 에서

$$x = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 1$$

$x \geq 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$	$6-a$	$\searrow$	$5-a$	$\nearrow$

따라서 $x \geq 0$ 일 때, 함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값 $5-a$ 를 가지므로 부등식 $h(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$5-a \geq 0 \quad \therefore a \leq 5$$

즉 실수 a 의 최댓값은 5이다.

답 5

286

전략 어떤 구간에서 감소하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 그 구간에서 $f(x) > 0$ 을 만족시키기 위한 조건을 파악한다.

$$4x^3 - 2x^2 - 4x + 3 > x^2 + 2x + a \text{에서}$$

$$4x^3 - 3x^2 - 6x + 3 - a > 0$$

$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 3 - a$ 라 하면

$$f'(x) = 12x^2 - 6x - 6 = 6(2x+1)(x-1)$$

$0 < x < 1$ 일 때 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(0, 1)$ 에서 감소한다.

따라서 $0 < x < 1$ 일 때 부등식 $f(x) > 0$ 이 성립하려면 $f(1) \geq 0$ 이어야 하므로

$$-2-a \geq 0$$

$$\therefore a \leq -2$$

답 $a \leq -2$

287

전략 $y = f'(x)$ 의 그래프와 주어진 함수값을 이용하여 $y = f(x)$ 의 그래프를 그린다.

$y = f'(x)$ 의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	a	...	b	...	c	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$

따라서 함수 $y = f(x)$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

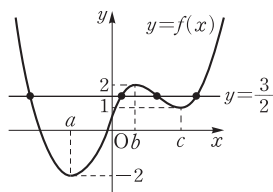
이때 방정식

$$2f(x) - 3 = 0, \text{ 즉}$$

$$f(x) = \frac{3}{2} \text{의 서로 다른 실근의 개수는 함수 } y = f(x)$$

의 그래프와 직선 $y = \frac{3}{2}$ 의 교점의 개수와 같으므로 4이다.

답 4



288

전략 $y = f(x) - g(x)$ 의 그래프를 이용한다.

$f(x) = g(x)$ 에서

$$3x^3 - x^2 - 3x = x^3 - 4x^2 + 9x + a$$

$$\therefore 2x^3 + 3x^2 - 12x = a$$

$$h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= 6x^2 + 6x - 12 \\ &= 6(x+2)(x-1) \end{aligned}$$

$$h'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	1	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗	20	↘	-7	↗

따라서 함수 $y = h(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

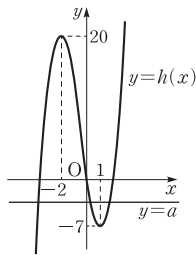
이때 $N(a) = 2$ 이라면

$y = h(x)$ 의 그래프와 직선

$y = a$ 의 교점의 x 좌표 중 양수가 2개이어야 하므로

$$-7 < a < 0$$

즉 정수 a 는 $-6, -5, \dots, -1$ 의 6개이다. **답 6**



289

전략 $f(x) \leq 12x + k$, $12x + k \leq g(x)$ 를 만족시키는 k 의 값의 범위를 각각 구한다.

$$f(x) \leq 12x + k \text{에서} \quad -x^4 - 2x^3 - x^2 \leq 12x + k$$

$$\therefore x^4 + 2x^3 + x^2 + 12x + k \geq 0$$

$$h(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 12x + k \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= 4x^3 + 6x^2 + 2x + 12 \\ &= 2(x+2)(2x^2 - x + 3) \end{aligned}$$

$$h'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = -2 \quad (\because 2x^2 - x + 3 > 0)$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	↘	$k-20$	↗

따라서 함수 $h(x)$ 는 $x = -2$ 에서 최솟값 $k - 20$ 을 가지므로 모든 실수 x 에 대하여 $h(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$k - 20 \geq 0$$

$$\therefore k \geq 20 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\text{또 } 12x + k \leq g(x) \text{에서}$$

$$12x + k \leq 3x^2 + a$$

$$\therefore 3x^2 - 12x + a - k \geq 0$$

이차방정식 $3x^2 - 12x + a - k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-6)^2 - 3(a - k) \leq 0$$

$$12 - a + k \leq 0$$

$$\therefore k \leq a - 12 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 에서

$$20 \leq k \leq a - 12$$

이를 만족시키는 자연수 k 의 개수가 3이고 a 는 자연수 이므로

$$a - 12 = 22 \quad \therefore a = 34$$

답 34

290

전략 주어진 조건을 만족시키는 $y = |f(x)|$ 의 그래프를 유추한다.

조건 (가) 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

이때 조건 (나) 에서 함수

$y = |f(x)|$ 의 그래프와

직선 $y = 6$ 의 교점의 개

수가 4이므로 함수

$y = |f(x)|$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉 함수 $f(x)$ 는 극댓값 6, 극솟값 -6 을 갖는다.

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 3이므로

$$f(x) = 3x^3 - ax \quad (a > 0) \text{라 하면}$$

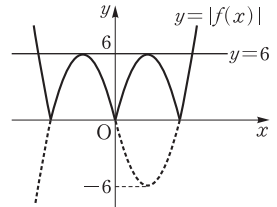
$$f'(x) = 9x^2 - a$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad 9x^2 - a = 0$$

$$x^2 = \frac{a}{9} \quad \therefore x = \pm \frac{\sqrt{a}}{3}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\frac{\sqrt{a}}{3}$	...	$\frac{\sqrt{a}}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗



따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\sqrt{a}}{3}$ 에서 극솟값 -6 을 가지므로

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\sqrt{a}}{3}\right) &= -6 \\ -\frac{2a\sqrt{a}}{9} &= -6, \quad a\sqrt{a} = 27 \\ \therefore a &= 9 \end{aligned}$$

즉 $f(x) = 3x^3 - 9x$ 이므로

$$f(-3) = -54 \quad \text{답 } -54$$

해설 Focus

모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키는 다항함수 $f(x)$ 는 기함수이므로 홀수 차수의 항의 합으로만 이루어져 있다.

따라서 최고차항의 계수가 3인 삼차함수 $f(x)$ 가

$f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키면

$$f(x) = 3x^3 - ax \quad (a \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

291

전략 방정식 $f(x) = 0$ 이 오직 한 개의 실근을 가지려면 $(\text{극댓값}) \times (\text{극솟값}) > 0$ 이어야 함을 이용한다.

$$f(x) = 2x^3 - 6ax - 3a \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6a = 6(x^2 - a)$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$

이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$$a > 0$$

$$\text{즉 } f'(x) = 0 \text{에서 } x^2 = a$$

$$\therefore x = -\sqrt{a} \text{ 또는 } x = \sqrt{a}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -\sqrt{a}$, $x = \sqrt{a}$ 에서 극값을 가지므로 방정식 $f(x) = 0$ 이 오직 한 개의 실근을 가지려면

$$\begin{aligned} f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a}) &> 0 \\ (4a\sqrt{a} - 3a)(-4a\sqrt{a} - 3a) &> 0 \\ \therefore a^2(4\sqrt{a} - 3)(4\sqrt{a} + 3) &< 0 \end{aligned}$$

이때 $a > 0$ 에서 $4\sqrt{a} + 3 > 0$ 이므로

$$4\sqrt{a} - 3 < 0, \quad \sqrt{a} < \frac{3}{4}$$

$$\therefore 0 < a < \frac{9}{16} \quad \text{답 } 0 < a < \frac{9}{16}$$

08 속도 와 가속도

● 본책 144~150쪽

292

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 18t + 12,$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 18$$

점 P의 속도가 72이므로 $v = 72$ 에서

$$6t^2 - 18t + 12 = 72, \quad t^2 - 3t - 10 = 0$$

$$(t+2)(t-5) = 0 \quad \therefore t = 5 \quad (\because t > 0)$$

따라서 $t = 5$ 에서의 점 P의 가속도는

$$60 - 18 = 42 \quad \text{답 } 42$$

293

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = t^2 - 7t + 6,$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 2t - 7$$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$v = 0$ 에서

$$t^2 - 7t + 6 = 0, \quad (t-1)(t-6) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 6$$

따라서 점 P는 $t = 6$ 에서 두 번째로 운동 방향을 바꾸므로 이때의 점 P의

위치는

$$72 - 126 + 36 = -18$$

가속도는

$$12 - 7 = 5$$

$$\text{답 위치: } -18, \text{ 가속도: } 5$$

294

물로켓이 지면에 떨어지는 순간의 높이는 0이므로

$x = 0$ 에서

$$20t - 5t^2 = 0, \quad t(t-4) = 0$$

$$\therefore t = 4 \quad (\because t > 0)$$

t 초 후의 물로켓의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 20 - 10t \text{ (m/s)}$$

따라서 4초 후의 물로켓의 속도는

$$20 - 40 = -20 \text{ (m/s)}$$

$$\text{답 } -20 \text{ m/s}$$

295

t 초 후의 공의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 50 - 2at \text{ (m/s)}$$

공이 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0이고 도달하는 데 걸린 시간은 5초이므로 $v=0$, $t=5$ 를 대입하면

$$50 - 10a = 0 \quad \therefore a = 5$$

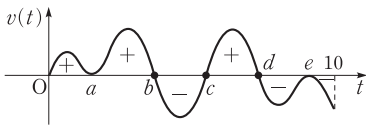
$$\therefore x = 40 + 50t - 5t^2$$

따라서 공이 도달하는 최고 높이는 $\leftarrow t=5$ 에서의 높이

$$40 + 250 - 125 = 165 \text{ (m)} \quad \text{답 165 m}$$

296

속도 $v(t)$ 의 부호가 바뀌는 시각 t 에서 점 P의 운동 방향이 바뀐다.



위의 그림과 같이 $0 \leq t \leq 10$ 에서 속도 $v(t)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 작은 것부터 순서대로 $0, a, b, c, d, e$ 라 하면 속도 $v(t)$ 의 부호는

$$t=b, t=c, t=d$$

의 좌우에서 바뀌므로 점 P의 운동 방향은 3번 바뀐다.

답 3번

297

ㄱ. 위치 $x(t)$ 의 그래프 위의 점 $(3, 0)$ 에서의 접선의 기울기가 음수이므로 $t=3$ 에서의 점 P의 속도는 음수이다.

따라서 $t=3$ 에서 점 P는 운동 방향을 바꾸지 않는다. (거짓)

ㄴ. 위치 $x(t)$ 의 그래프 위의 점 $(5, 0)$ 에서의 접선의 기울기가 양수이므로 $t=5$ 에서의 점 P의 속도는 양수이다. (거짓)

ㄷ. $0 < t < 5$ 일 때 위치 $x(t)$ 의 그래프에서 접선의 기울기가 0인 점이 3개이므로 점 P는 세 번 멈춘다.

(참)

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ㄷ

298

t 초 후의 정삼각형의 한 변의 길이는 $(10+6t)$ cm이므로 높이를 h cm라 하면

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \times (10+6t) = 3\sqrt{3}t + 5\sqrt{3}$$

따라서 정삼각형의 높이의 변화율은

$$\frac{dh}{dt} = 3\sqrt{3} \text{ (cm/s)} \quad \text{답 } 3\sqrt{3} \text{ cm/s}$$

299

(1) 민지가 t 초 동안 움직인 거리는 $1.8t$ m

t 초 후의 가로등 바로 밑

에서부터 민지의 그림자

의 머리끝까지의 거리를

x m라 하면 오른쪽 그림

에서 $\triangle POC \sim \triangle ABC$

(AA 닮음)이므로

$$4 : 1.6 = x : (x - 1.8t)$$

$$1.6x = 4(x - 1.8t)$$

$$2.4x = 7.2t \quad \therefore x = 3t$$

따라서 그림자의 머리끝이 움직이는 속도는

$$\frac{dx}{dt} = 3 \text{ (m/s)}$$

(2) t 초 후의 그림자의 길이를 l m라 하면

$$l = \overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB}$$

$$= x - 1.8t = 3t - 1.8t = 1.2t$$

따라서 그림자의 길이의 변화율은

$$\frac{dl}{dt} = 1.2 \text{ (m/s)}$$

답 (1) 3 m/s (2) 1.2 m/s

300

t 초 후의 직사각형의 가로의 길이, 세로의 길이는 각각

$$(9+0.2t) \text{ cm}, (4+0.3t) \text{ cm}$$

t 초 후의 직사각형의 넓이를 S cm²라 하면

$$S = (9+0.2t)(4+0.3t) = 0.06t^2 + 3.5t + 36$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = 0.12t + 3.5 \text{ (cm}^2/\text{s)}$$

직사각형이 정사각형이 되는 순간의 시각은

$$9+0.2t = 4+0.3t \text{ 에서}$$

$$t = 50$$

따라서 50초 후의 직사각형의 넓이의 변화율은

$$6 + 3.5 = 9.5 \text{ (cm}^2/\text{s)}$$

답 9.5 cm²/s

301

t 초 후의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r cm, 높이를 h cm라 하면

$$r = 20 - 0.2t, h = 5 + 0.5t$$

t 초 후의 원기둥의 부피를 V cm³라 하면

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ &= \pi (20 - 0.2t)^2 (5 + 0.5t) \\ &= \frac{\pi}{50} (100 - t)^2 (10 + t) \\ &= \frac{\pi}{50} (t^3 - 190t^2 + 8000t + 100000) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{50} (3t^2 - 380t + 8000) \text{ (cm}^3/\text{s)}$$

따라서 10초 후의 원기둥의 부피의 변화율은

$$\frac{\pi}{50} \times (300 - 3800 + 8000) = 90\pi \text{ (cm}^3/\text{s)}$$

답 90π cm³/s



연습문제

● 본책 151~152쪽

302

전략 시각 t 에서의 위치가 x 일 때 속도는 $\frac{dx}{dt}$ 이다.

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 14t + 12$$

$$x=0 \text{에서 } t^3 - 7t^2 + 12t = 0$$

$$t(t-3)(t-4) = 0$$

$$\therefore t=3 \text{ 또는 } t=4 \text{ (} \because t>0 \text{)}$$

따라서 점 P는 $t=4$ 에서 마지막으로 원점을 지나므로

이때의 점 P의 속도는

$$48 - 56 + 12 = 4$$

답 4

303

전략 $x(t)$ 를 미분하여 점 P의 속도, 가속도를 각각 t 에 대한 함수로 나타낸다.

시각 t 에서의 점 P의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$ 라 하면

$$v(t) = x'(t) = 6t^3 - 24t^2 + 30t - 12,$$

$$a(t) = v'(t) = 18t^2 - 48t + 30$$

$$v(t)=0 \text{에서 } 6t^3 - 24t^2 + 30t - 12 = 0$$

$$t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = 0$$

$$(t-1)^2(t-2) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=2$$

이때 $t=2$ 의 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀌므로 $t=2$ 에서 점 P의 운동 방향이 바뀐다.

따라서 점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간 점 P의 가속도는

$$a(2) = 6$$

답 6

304

전략 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0임을 이용한다.

t 초 후의 장난감 로켓의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 10 - 10t \text{ (m/s)}$$

장난감 로켓이 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$10 - 10t = 0 \quad \therefore t = 1$$

따라서 장난감 로켓의 최고 높이는

$$20 + 10 - 5 = 25 \text{ (m)}$$

즉 $\alpha = 1, \beta = 25$ 이므로

$$\alpha + \beta = 26$$

답 26

다른 풀이 $x = 20 + 10t - 5t^2 = -5(t-1)^2 + 25$

이므로 x 는 $t=1$ 에서 최댓값 25를 갖는다.

따라서 장난감 로켓은 쏘아 올린 지 1초 후에 최고 높이 25 m에 도달한다.

305

전략 $t=a$ 에서의 가속도는 주어진 그래프 위의 $t=a$ 인 점에서의 접선의 기울기와 같음을 이용한다.

ㄱ. $2 < t < 3$ 에서 $v(t) > 0$ 이므로 점 P는 양의 방향으로 움직인다. (참)

- ㄴ. $v(1) < 0, v(3) > 0$ 이므로 $t=1$ 일 때와 $t=3$ 일 때의 점 P의 운동 방향이 서로 반대이다. (참)
- ㄷ. 속도 $v(t)$ 의 그래프 위의 점 $(4, v(4))$ 에서의 접선의 기울기가 0이므로 $t=4$ 에서의 점 P의 가속도는 0이다. (참)
- 이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. **답 ㄱ, ㄴ, ㄷ**

306

전략 점 P의 속도가 v 이면 속력은 $|v|$ 이다.

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = t^2 - 8t + 10 = (t-4)^2 - 6$$

$0 \leq t \leq 5$ 일 때, v 는

$t=4$ 에서 최솟값 -6 ,

$t=0$ 에서 최댓값 10

을 가지므로

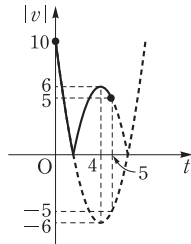
$$-6 \leq v \leq 10 \quad \therefore 0 \leq |v| \leq 10$$

따라서 $0 \leq t \leq 5$ 에서 점 P의 속력 $|v|$ 의 최댓값은 10이다.

참고 $0 \leq t \leq 5$ 에서

$$|v| = |t^2 - 8t + 10|$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 10

307

전략 먼저 두 점의 속도가 같아지는 순간의 시각을 구한다.

시각 t 에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_1, v_2 라 하면

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = 3t^2 - 4t + 3, \quad v_2 = \frac{dx_2}{dt} = 2t + 12$$

두 점의 속도가 같아지는 순간의 시각은 $v_1 = v_2$ 에서

$$3t^2 - 4t + 3 = 2t + 12, \quad t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t+1)(t-3) = 0 \quad \therefore t = 3 \quad (\because t > 0)$$

$t=3$ 에서의 두 점 P, Q의 위치는 각각

$$27 - 18 + 9 = 18, \quad 9 + 36 = 45$$

따라서 구하는 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$45 - 18 = 27$$

답 27

308

전략 자동차가 멈출 때의 속도는 0임을 이용한다.

브레이크를 밟고 t 초 후의 자동차의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 36 - 2at \quad (\text{m/s})$$

자동차가 멈출 때의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$36 - 2at = 0 \quad \therefore t = \frac{18}{a}$$

즉 자동차가 멈출 때까지 걸린 시간은 $\frac{18}{a}$ 초이고 그때

까지 달린 거리는 90 m 이내이어야 하므로

$$36 \times \frac{18}{a} - a \times \left(\frac{18}{a}\right)^2 \leq 90, \quad \frac{324}{a} \leq 90$$

$$\therefore a \geq \frac{18}{5} \quad (\because a > 0)$$

따라서 구하는 양수 a 의 최솟값은 $\frac{18}{5}$ 이다. **답 $\frac{18}{5}$**

309

전략 점 P의 운동 방향이 바뀌지 않으려면 $t \geq 0$ 에서 점 P의 속도 v 가 항상 $v \geq 0$ 이거나 $v \leq 0$ 이어야 한다.

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 16t + a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 P의 운동 방향이 바뀌지 않으려면 $t \geq 0$ 에서 $v \geq 0$ 이어야 한다.

이때 ①에서

$$v = 3\left(t - \frac{8}{3}\right)^2 + a - \frac{64}{3}$$

이므로 v 는 $t = \frac{8}{3}$ 일 때 최솟값 $a - \frac{64}{3}$ 를 갖는다.

따라서 $a - \frac{64}{3} \geq 0$ 이어야 하므로

$$a \geq \frac{64}{3}$$

즉 자연수 a 의 최솟값은 22이다.

답 22

310

전략 시각 t 에서의 넓이가 S 일 때, 넓이의 변화율은 $\frac{dS}{dt}$ 임을 이용한다.

수면의 높이가 매분 1씩 올라가므로 t 분 후의 수면의 높이는 t

따라서 오른쪽 그림에서

$$\overline{OA} = 5 - t$$

이때 t 분 후의 수면의 반지름의 길이를 r 라 하면 직각삼각형 OAB에서

$$(5-t)^2 + r^2 = 5^2$$

$$\therefore r^2 = 10t - t^2$$

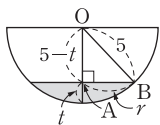
t 분 후의 수면의 넓이를 S 라 하면

$$S = \pi r^2 = \pi(10t - t^2)$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = \pi(10 - 2t)$$

따라서 물을 넣기 시작한 지 2분 후의 수면의 넓이의 변화율은

$$\pi \times (10 - 4) = 6\pi$$



311

전략 시각 t 에서의 부피가 V 일 때, 부피의 변화율은 $\frac{dV}{dt}$ 임을 이용한다.

수면의 높이가 매초 2 cm씩 올라가므로 t 초 후의 수면의 높이는

$$2t \text{ cm}$$

이때 오른쪽 그림과 같이 t 초 후의 수면의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$$6 : 24 = r : 2t$$

$$\therefore r = \frac{t}{2}$$

t 초 후의 물의 부피를 $V \text{ cm}^3$ 라 하면

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times 2t$$

$$= \frac{1}{3} \pi \times \left(\frac{t}{2}\right)^2 \times 2t = \frac{\pi}{6} t^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{2} t^2 \text{ (cm}^3/\text{s)}$$

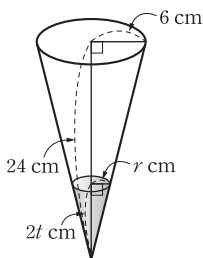
한편 수면의 높이가 8 cm가 되는 순간의 시각은 $2t = 8$ 에서

$t = 4$

따라서 4초 후의 물의 부피의 변화율은

$$\frac{\pi}{2} \times 16 = 8\pi \text{ (cm}^3/\text{s)}$$

$$\therefore k = 8$$



1 부정적분

III. 적분

01 부정적분

● 본책 154~159쪽

312

- ㄱ. $(x^5)' = 5x^4$
- ㄴ. $(-x^5)' = -5x^4$
- ㄷ. $(x^5 + 100)' = 5x^4$
- ㄹ. $(x^5 + x)' = 5x^4 + 1$

이상에서 함수 $5x^4$ 의 부정적분인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

313

- (1) $(7x)' = 7$ 이므로

$$\int 7 dx = 7x + C$$

- (2) $(3x^2)' = 6x$ 이므로

$$\int 6x dx = 3x^2 + C$$

- (3) $(x^3)' = 3x^2$ 이므로

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

- (4) $(-x^4)' = -4x^3$ 이므로

$$\int (-4x^3) dx = -x^4 + C$$

- 답** (1) $7x + C$ (2) $3x^2 + C$
(3) $x^3 + C$ (4) $-x^4 + C$

314

- (1) $f(x) = (2x + C)' = 2$

- (2) $f(x) = (3x^2 + x + C)' = 6x + 1$

- (3) $f(x) = (4x^3 - 5x^2 + 11x + C)'$
 $= 12x^2 - 10x + 11$

- 답** (1) $f(x) = 2$
(2) $f(x) = 6x + 1$
(3) $f(x) = 12x^2 - 10x + 11$

315

- 답** (1) $5x^2 + x$ (2) $5x^2 + x + C$

316

$$8x^3 + ax^2 - 2x + 1 = (bx^4 + 2x^3 + cx^2 + x)'$$

$$= 4bx^3 + 6x^2 + 2cx + 1$$

즉 $8=4b$, $a=6$, $-2=2c$ 이므로

$$a=6, b=2, c=-1$$

$$\therefore abc = -12$$

답 -12

317

$$\left(\frac{1}{2}x-1\right)f(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 3x + C\right)'$$

$$= x^2 - \frac{1}{2}x - 3$$

$$= \frac{1}{2}(x-2)(2x+3)$$

$$= \left(\frac{1}{2}x-1\right)(2x+3)$$

따라서 $f(x) = 2x+3$ 이므로

$$f(2) = 7$$

답 7

318

$$h(x) = \{f(x)g(x)\}'$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$= 2x(x^3-2) + (x^2+1) \times 3x^2$$

$$= 5x^4 + 3x^2 - 4x$$

$$\text{답 } h(x) = 5x^4 + 3x^2 - 4x$$

319

$$\frac{d}{dx} \int (x^2 + ax - 1) dx = bx^2 + 2x + c \text{에서}$$

$$x^2 + ax - 1 = bx^2 + 2x + c$$

따라서 $a=2$, $b=1$, $c=-1$ 이므로

$$a+b+c=2$$

답 2

320

$$f(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx} (x^2 + 6x) \right\} dx$$

$$= x^2 + 6x + C$$

$$= (x+3)^2 + C - 9$$

이때 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -4 이므로

$$C-9 = -4 \quad \therefore C = 5$$

따라서 $f(x) = x^2 + 6x + 5$ 이므로

$$f(2) = 21$$

답 21

321

$$f(x) + g(x) = x^2 - x - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) + g(1) = -1$$

이때 $f(1) = 0$ 이므로

$$g(1) = -1$$

$$\frac{d}{dx} \{f(x) - g(x)\} = -5 \text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx} \{f(x) - g(x)\} \right] dx = \int (-5) dx$$

$$\therefore f(x) - g(x) = -5x + C$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) - g(1) = -5 + C$$

$$0 - (-1) = -5 + C \quad \therefore C = 6$$

$$\therefore f(x) - g(x) = -5x + 6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{을 하면} \quad 2f(x) = x^2 - 6x + 5$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{을 하면} \quad 2g(x) = x^2 + 4x - 7$$

$$\therefore g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{7}{2}$$

$$\therefore f(3) + g(-1) = -2 + (-5) = -7$$

답 -7

322

$$\frac{d}{dx} \{f(x) + g(x)\} = 2 \text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx} \{f(x) + g(x)\} \right] dx = \int 2 dx$$

$$\therefore f(x) + g(x) = 2x + C_1$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$C_1 = f(0) + g(0) = 0$$

$$\therefore f(x) + g(x) = 2x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{d}{dx} \{f(x)g(x)\} = 2x \text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx} \{f(x)g(x)\} \right] dx = \int 2x dx$$

$$\therefore f(x)g(x) = x^2 + C_2$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$C_2 = f(0)g(0) = -9$$

$$\therefore f(x)g(x) = x^2 - 9$$

$$= (x+3)(x-3) \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

이때 $f(x), g(x)$ 는 일차함수이고 $f(0)=3$,

$g(0)=-3$ 이므로 $\textcircled{J}, \textcircled{L}$ 에서

$$f(x) = x+3, g(x) = x-3$$

$$\therefore f(4)-g(3) = 7-0=7$$

답 7

다른 풀이 $f(x), g(x)$ 가 일차함수이고 $f(0)=3$,

$g(0)=-3$ 이므로 $f(x)=ax+3, g(x)=bx-3$

(a, b 는 상수, $a \neq 0, b \neq 0$)으로 놓으면

$$f'(x) = a, g'(x) = b$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\} = 2 \text{에서 } f'(x)+g'(x) = 2 \text{이}$$

므로

$$a+b=2 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = 2x \text{에서}$$

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 2x \text{이므로}$$

$$a(bx-3) + (ax+3) \times b = 2x$$

$$\therefore 2abx - 3a + 3b = 2x$$

위의 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$2ab=2, -3a+3b=0$$

$$\therefore ab=1, a=b \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

$\textcircled{C}, \textcircled{D}$ 을 연립하여 풀면 $a=1, b=1$

$$\therefore f(x) = x+3, g(x) = x-3$$

$$\begin{aligned} (2) \int (3x^2+7) dx &= 3 \int x^2 dx + \int 7 dx \\ &= 3\left(\frac{1}{3}x^3 + C_1\right) + (7x + C_2) \\ &= x^3 + 7x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int (-x^3+x+2) dx &= -\int x^3 dx + \int x dx + \int 2 dx \\ &= -\left(\frac{1}{4}x^4 + C_1\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 + C_2\right) + (2x + C_3) \\ &= -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int (x^7+4x^2-1) dx &= \int x^7 dx + 4 \int x^2 dx - \int 1 dx \\ &= \left(\frac{1}{8}x^8 + C_1\right) + 4\left(\frac{1}{3}x^3 + C_2\right) - (x + C_3) \\ &= \frac{1}{8}x^8 + \frac{4}{3}x^3 - x + C \end{aligned}$$

$$\text{답 (1)} -\frac{1}{2}x^2 + 4x + C$$

$$(2) x^3 + 7x + C$$

$$(3) -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$$

$$(4) \frac{1}{8}x^8 + \frac{4}{3}x^3 - x + C$$

325

$$\begin{aligned} (1) \int (x+2)(2-x) dx &= \int (-x^2+4) dx = -\int x^2 dx + \int 4 dx \\ &= -\left(\frac{1}{3}x^3 + C_1\right) + (4x + C_2) \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + 4x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int (x+1)^2 dx &= \int (x^2+2x+1) dx \\ &= \int x^2 dx + 2 \int x dx + \int 1 dx \\ &= \left(\frac{1}{3}x^3 + C_1\right) + 2\left(\frac{1}{2}x^2 + C_2\right) + (x + C_3) \\ &= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C \end{aligned}$$

02 부정적분의 계산

• 본책 160~169쪽

323

$$\text{답 (1)} \frac{1}{6}x^6 + C \quad (2) \frac{1}{13}x^{13} + C$$

324

$$\begin{aligned} (1) \int (-x+4) dx &= -\int x dx + \int 4 dx \\ &= -\left(\frac{1}{2}x^2 + C_1\right) + (4x + C_2) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 4x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int (3t-1)(2t+3)dt \\
 &= \int (6t^2+7t-3)dt \\
 &= 6 \int t^2 dt + 7 \int t dt - \int 3 dt \\
 &= 6\left(\frac{1}{3}t^3+C_1\right) + 7\left(\frac{1}{2}t^2+C_2\right) - (3t+C_3) \\
 &= 2t^3 + \frac{7}{2}t^2 - 3t + C
 \end{aligned}$$

$$\text{답 (1)} -\frac{1}{3}x^3+4x+C$$

$$(2) \frac{1}{3}x^3+x^2+x+C$$

$$(3) 2t^3+\frac{7}{2}t^2-3t+C$$

$$\begin{aligned}
 \text{다른 풀이 (2)} \int (x+1)^2 dx &= \frac{1}{3}(x+1)^3 \times \frac{1}{1} + C \\
 &= \frac{1}{3}(x+1)^3 + C \\
 &\quad \sqsubset \frac{1}{3}x^3+x^2+x+\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

326

$$\begin{aligned}
 (1) \int (x^2-4x+1)dx + \int (x^2+4x-1)dx \\
 &= \int (x^2-4x+1+x^2+4x-1)dx \\
 &= \int 2x^2 dx = 2 \int x^2 dx \\
 &= 2\left(\frac{1}{3}x^3+C_1\right) \\
 &= \frac{2}{3}x^3+C \\
 (2) \int (2x^3+3x^2-5x)dx - \int (2x^3-x^2+3x)dx \\
 &= \int \{2x^3+3x^2-5x-(2x^3-x^2+3x)\}dx \\
 &= \int (4x^2-8x)dx \\
 &= 4 \int x^2 dx - 8 \int x dx \\
 &= 4\left(\frac{1}{3}x^3+C_1\right) - 8\left(\frac{1}{2}x^2+C_2\right) \\
 &= \frac{4}{3}x^3-4x^2+C
 \end{aligned}$$

$$\text{답 (1)} \frac{2}{3}x^3+C \quad (2) \frac{4}{3}x^3-4x^2+C$$

327

$$\begin{aligned}
 (1) \int \frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1} dx \\
 &= \int \frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{x^2+x+1} dx \\
 &= \int (x^2-x+1)dx \\
 &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C \\
 (2) \int (x-y)^2 dx &= \int (x^2-2xy+y^2)dx \\
 &= \int x^2 dx - 2y \int x dx + y^2 \int dx \\
 &= \frac{1}{3}x^3 - x^2y + xy^2 + C \\
 (3) \int \left(\frac{x}{2}+2\right)^2 dx - \int \left(\frac{x}{2}-2\right)^2 dx \\
 &= \int \left\{\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 - \left(\frac{x}{2}-2\right)^2\right\} dx \\
 &= \int 4x dx = 2x^2 + C \\
 (4) \int \frac{x^3-3x}{x+2} dx + \int \frac{3x+8}{x+2} dx \\
 &= \int \frac{x^3+8}{x+2} dx = \int \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2} dx \\
 &= \int (x^2-2x+4)dx \\
 &= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x + C
 \end{aligned}$$

$$\text{답 (1)} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

$$(2) \frac{1}{3}x^3 - x^2y + xy^2 + C$$

$$(3) 2x^2 + C$$

$$(4) \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x + C$$

328

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int (10x^9+9x^8+8x^7+\cdots+2x+1)dx \\
 &= x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x^2+x+C
 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } f(0)=1 \text{ 이므로 } C=1$$

$$\text{따라서 } f(x)=x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x^2+x+1 \text{ 이므로}$$

$$f(1)=\underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{11\text{개}}=11$$

답 11

329

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{x^4}{x^2+2} dx - \int \frac{4}{x^2+2} dx \\ &= \int \frac{x^4-4}{x^2+2} dx \\ &= \int \frac{(x^2+2)(x^2-2)}{x^2+2} dx \\ &= \int (x^2-2) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - 2x + C \end{aligned}$$

이때 $f(1)=2$ 이므로

$$\frac{1}{3} - 2 + C = 2 \quad \therefore C = \frac{11}{3}$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + \frac{11}{3}$ 이므로 $f(k)=5$ 에서

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}k^3 - 2k + \frac{11}{3} &= 5 \\ k^3 - 6k - 4 &= 0, \quad (k+2)(k^2-2k-2) = 0 \\ \therefore k &= -2 \quad (\because k \text{는 정수}) \end{aligned}$$

답 -2

330

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (-6x^2 + 12x - 1) dx \\ &= -2x^3 + 6x^2 - x + C \end{aligned}$$

이때 $f(-1)=6$ 이므로

$$\begin{aligned} 2 + 6 + 1 + C &= 6 \quad \therefore C = -3 \\ \therefore f(x) &= -2x^3 + 6x^2 - x - 3 \end{aligned}$$

따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $-2x^3 + 6x^2 - x - 3=0$ 의 모든 근의 곱은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{-3}{-2} = -\frac{3}{2} \quad \text{답} -\frac{3}{2}$$



개념 노트

삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

331

$f'(x) = 9x^2 - 2x + 1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (9x^2 - 2x + 1) dx \\ &= 3x^3 - x^2 + x + C_1 \end{aligned}$$

이때 $f(0)=2$ 이므로 $C_1=2$

따라서 $f(x) = 3x^3 - x^2 + x + 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int (3x^3 - x^2 + x + 2) dx \\ &= \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + C \\ \text{답} \quad \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + C \end{aligned}$$

332

$f'(x) = 6x - 6$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (6x - 6) dx \\ &= 3x^2 - 6x + C \\ &= 3(x-1)^2 + C - 3 \end{aligned}$$

이때 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 1이므로

$$C - 3 = 1 \quad \therefore C = 4$$

따라서 $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$ 이므로

$$f(-1) = 13$$

답 13

333

$\int f(x) dx = f(x) + xf(x) - 2x^4 + 4x^2$ 의 양변을 x 에

대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(x) + f(x) + xf'(x) - 8x^3 + 8x \\ (x+1)f'(x) &= 8x^3 - 8x = 8x(x+1)(x-1) \\ \therefore f'(x) &= 8x^2 - 8x \\ \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (8x^2 - 8x) dx \\ &= \frac{8}{3}x^3 - 4x^2 + C \end{aligned}$$

이때 $f(1) = -\frac{1}{3}$ 이므로

$$\frac{8}{3} - 4 + C = -\frac{1}{3} \quad \therefore C = 1$$

$$\therefore f(x) = \frac{8}{3}x^3 - 4x^2 + 1$$

$$\text{답} \quad f(x) = \frac{8}{3}x^3 - 4x^2 + 1$$

334

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & (x > -1) \\ 2x + 1 & (x < -1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x + C_1 & (x > -1) \\ x^2 + x + C_2 & (x < -1) \end{cases}$$

이때 $f(0) = 2$ 이므로

$$C_1 = 2$$

한편 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x = -1$ 에서도 연속이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = f(-1) \text{에서}$$

$$-1 + 1 + 2 = 1 - 1 + C_2$$

$$\therefore C_2 = 2$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} x^3 - x + 2 & (x \geq -1) \\ x^2 + x + 2 & (x \leq -1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(-3) + f(1) = 8 + 2 = 10$$

답 10

335

$f(x) = \int (5x^2 + 2x - 1)dx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 5x^2 + 2x - 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \frac{1}{x + 1} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} f'(1)$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

답 3

336

$f(x) = \int (6x^2 - 4x + k)dx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 6x^2 - 4x + k$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 4 \text{에서 } f'(1) = 4 \text{이므로}$$

$$6 - 4 + k = 4$$

$$\therefore k = 2$$

$$\therefore f(x) = \int (6x^2 - 4x + 2)dx$$

$$= 2x^3 - 2x^2 + 2x + C$$

이때 $f(0) = 1$ 이므로

$$C = 1$$

따라서 $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ 이므로

$$f(1) = 3$$

답 3

337

함수 $f(x)$ 가 $x = 4$ 에서 극솟값 -72 를 가지므로

$$f'(4) = 0, f(4) = -72$$

$f(x) = \int (3x^2 + ax - 24)dx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 3x^2 + ax - 24$$

$$f'(4) = 0 \text{에서}$$

$$48 + 4a - 24 = 0 \quad \therefore a = -6$$

$$\therefore f(x) = \int (3x^2 - 6x - 24)dx$$

$$= x^3 - 3x^2 - 24x + C$$

$$f(4) = -72 \text{에서}$$

$$64 - 48 - 96 + C = -72 \quad \therefore C = 8$$

$$\therefore f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 8$$

한편 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x+2)(x-4)$ 이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 4$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극대이므로 구하는 극댓값은

$$f(-2) = 36$$

답 36

338

$$f'(x) = k(x^2 - 4) = k(x+2)(x-2) \text{이므로}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

x	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 갖고, $x=-2$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f(2)=20, f(-2)=-12$$

이때

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int k(x^2-4) dx \\ &= \frac{k}{3} x^3 - 4kx + C \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } f(2)=20 \text{에서 } \frac{8}{3}k - 8k + C = 20$$

$$\therefore -\frac{16}{3}k + C = 20 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f(-2)=-12 \text{에서 } -\frac{8}{3}k + 8k + C = -12$$

$$\therefore \frac{16}{3}k + C = -12 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠-㉡을 하면

$$-\frac{32}{3}k = 32 \quad \therefore k = -3 \quad \text{답 -3}$$

339

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$$

$f'(0)=6$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0)+f(h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 6 \end{aligned}$$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)+xh(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ x(x+h) + \frac{f(h)}{h} \right\} \\ &= x^2 + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (x^2+6) dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 + 6x + C \end{aligned}$$

이때 $f(0)=0$ 이므로 $C=0$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3} x^3 + 6x \quad \text{답 } f(x) = \frac{1}{3} x^3 + 6x$$

340

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$$

$f'(1)=3$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1)+f(h)+2h-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 2 = 3 \end{aligned}$$

즉 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h} \\ &= 2x + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (2x+1) dx \\ &= x^2 + x + C \end{aligned}$$

이때 $f(0)=0$ 이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=x^2+x$ 이므로

$$f(-2)=2 \quad \text{답 2}$$

연습 문제

● 본책 170~172쪽

341

전략 함수 $F(x)$ 가 함수 $f(x)$ 의 부정적분이면 $f(x)=F'(x)$ 임을 이용한다.

$$\begin{aligned} f(x) &= F'(x) = (2x^3+ax^2+bx)' \\ &= 6x^2+2ax+b \end{aligned}$$

이때 $f(0)=-3$ 에서 $b=-3$

$f'(x) = 12x + 2a$ 이므로 $f'(1) = 0$ 에서

$$12 + 2a = 0 \quad \therefore a = -6$$

$$\therefore ab = 18$$

답 18

342

전략 부정적분과 미분의 관계를 이용하여 $g(x)$, $h(x)$ 를 구한다.

$$\begin{aligned} g(x) &= \int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx = f(x) + C \\ &= 2x^2 - x + C \end{aligned}$$

이때 $g(1) = 2$ 이므로

$$2 - 1 + C = 2 \quad \therefore C = 1$$

$$\therefore g(x) = 2x^2 - x + 1$$

또 $h(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \int f(x) dx \right\} = f(x) = 2x^2 - x$ 이므로

$$g(2) - h(-1) = 7 - 3 = 4$$

답 4

343

전략 $\int g(x) dx + \int h(x) dx = \int \{g(x) + h(x)\} dx$ 임을 이용하여 피적분함수를 간단히 한다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (\sqrt{x} + 3)^2 dx + \int (\sqrt{x} - 3)^2 dx \\ &= \int \{(\sqrt{x} + 3)^2 + (\sqrt{x} - 3)^2\} dx \\ &= \int (2x + 18) dx \\ &= x^2 + 18x + C \end{aligned}$$

이때 $f(0) = -10$ 이므로 $C = -10$

따라서 $f(x) = x^2 + 18x - 10$ 이므로

$$f(2) = 30$$

답 30

344

전략 $f(x) = \int f'(x) dx$ 임을 이용한다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (6x^2 + 5) dx \\ &= 2x^3 + 5x + C \end{aligned}$$

이때 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로

$$f(-2) = 0$$

$$-16 - 10 + C = 0 \quad \therefore C = 26$$

따라서 $f(x) = 2x^3 + 5x + 26$ 이므로

$$f(1) = 33$$

답 33

345

전략 먼저 주어진 등식의 양변을 미분하여 $f'(x)$ 를 구한다.

$\int (2x-1)f'(x) dx = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} (2x-1)f'(x) &= 6x^2 + x - 2 \\ &= (2x-1)(3x+2) \end{aligned}$$

$$\therefore f'(x) = 3x + 2$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (3x+2) dx$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$$

이때 $f(-1) = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{3}{2} - 2 + C = \frac{1}{2} \quad \therefore C = 1$$

따라서 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$ 이므로

$$f(2) = 11$$

답 11

346

전략 $f(x) = \int f'(x) dx$ 임을 이용하여 $f(x)$ 를 구한 후 인수정리를 이용한다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (12x^2 - 4x + a) dx \\ &= 4x^3 - 2x^2 + ax + C \end{aligned}$$

이때 다항식 $f(x)$ 가 $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ 로 나누어떨어지므로

$$f(1) = 0, f(2) = 0$$

$f(1) = 0$ 에서

$$4 - 2 + a + C = 0$$

$$\therefore a + C = -2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$f(2) = 0$ 에서

$$32 - 8 + 2a + C = 0$$

$$\therefore 2a + C = -24 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{8} - \textcircled{7}$ 을 하면

$$a = -22$$

답 -22

347

전략 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x^2) - F(1)}{x - 1}$ 을 $F'(1)$ 에 대한 식으로 나타낸 후 $F'(x) = f(x)$ 임을 이용한다.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x^2) - F(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{F(x^2) - F(1)}{x^2 - 1} \times (x + 1) \right\} \\ &= 2F'(1) \end{aligned}$$

이때 $F'(x) = f(x)$ 이므로

$$F'(1) = f(1) = -1$$

따라서 구하는 값은

$$2F'(1) = 2 \times (-1) = -2$$

답 -2

348

전략 도함수의 정의를 이용하여 $f'(x)$ 를 구한다.

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x) - \{f(x-h) - f(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h} \times 2 \\ & \quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \\ &= 2f'(x) + f'(x) \\ &= 3f'(x) \end{aligned}$$

따라서 $3f'(x) = 12x - 3$ 이므로

$$f'(x) = 4x - 1$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (4x - 1) dx \\ &= 2x^2 - x + C \end{aligned}$$

이때 $f(1) = 2$ 이므로

$$2 - 1 + C = 2 \quad \therefore C = 1$$

$$\therefore f(x) = 2x^2 - x + 1$$

답 $f(x) = 2x^2 - x + 1$

349

전략 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 1$ 에서 $f(2)$, $f'(2)$ 의 값을 구한다.

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 1$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ 이므로

$$f(2) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \\ &= f'(2) = 1 \end{aligned}$$

따라서 $16 + k = 1$ 이므로

$$k = -15$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (8x - 15) dx \\ &= 4x^2 - 15x + C \end{aligned}$$

이때 $\textcircled{1}$ 에서

$$16 - 30 + C = 0 \quad \therefore C = 14$$

따라서 $f(x) = 4x^2 - 15x + 14$ 이므로

$$f(1) = 3$$

답 3

350

전략 주어진 그래프에서 극값을 갖는 x 의 값을 찾는다.

함수 $y = f'(x)$ 의 그래프에서

$$f'(-1) = 0, f'(0) = 0$$

이때 $x=0$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 갖고, $x=-1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$\therefore f(0) = 1, f(-1) = -1$$

$f'(x) = ax(x+1) = ax^2 + ax$ ($a < 0$)로 놓으면

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (ax^2 + ax) dx \\ &= \frac{a}{3} x^3 + \frac{a}{2} x^2 + C \end{aligned}$$

$f(0) = 1$ 에서 $C = 1$

$f(-1) = -1$ 에서

$$-\frac{a}{3} + \frac{a}{2} + 1 = -1$$

$$\frac{a}{6} = -2 \quad \therefore a = -12$$

$$\therefore f(x) = -4x^3 - 6x^2 + 1$$

답 $f(x) = -4x^3 - 6x^2 + 1$

351

전략 $\int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx = f(x) + C$ 임을 이용하여 $F(x)$ 를 구한다.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \left[\frac{d}{dx} \int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx \right] dx \\ &= \int \left[\frac{d}{dx} \{ f(x) + C_1 \} \right] dx \\ &= f(x) + C_2 \\ &= x^{100} + x^{99} + x^{98} + \cdots + x + C_2 \end{aligned}$$

이때 $F(0) = 10$ 이므로

$$C_2 = 10$$

따라서 $F(x) = x^{100} + x^{99} + x^{98} + \cdots + x + 10$ 이므로

$$F(1) = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{100\text{개}} + 10 = 110$$

답 110

352

전략 주어진 등식의 양변을 적분하여 $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ 를 구한다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{ f(x) + g(x) \} &= 2x + 1 \text{에서} \\ \int \left[\frac{d}{dx} \{ f(x) + g(x) \} \right] dx &= \int (2x + 1) dx \\ \therefore f(x) + g(x) &= x^2 + x + C_1 \end{aligned}$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} C_1 &= f(0) + g(0) = 1 \\ \therefore f(x) + g(x) &= x^2 + x + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} \{ f(x)g(x) \} = 3x^2 - 2x + 2 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \int \left[\frac{d}{dx} \{ f(x)g(x) \} \right] dx &= \int (3x^2 - 2x + 2) dx \\ \therefore f(x)g(x) &= x^3 - x^2 + 2x + C_2 \end{aligned}$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} C_2 &= f(0)g(0) = -2 \\ \therefore f(x)g(x) &= x^3 - x^2 + 2x - 2 \\ &= (x-1)(x^2+2) \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

이때 $f(0)=2$, $g(0)=-1$ 이므로 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2, \quad g(x) = x - 1 \\ \therefore f(2) + g(3) &= 6 + 2 = 8 \end{aligned}$$

답 8

353

전략 $f(x) = \int f'(x) dx$ 임을 이용하여 $f(x)$ 를 구한 후 $f(1)$ 의 값을 부분분수로 변형하여 간단히 한다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{n}x^n \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2 \times 3}x^3 + \frac{1}{3 \times 4}x^4 + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n(n+1)}x^{n+1} + C \end{aligned}$$

이때 $f(0) = 0$ 이므로

$$C = 0$$

또 $f(1) = \frac{9}{10}$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{9}{10} \\ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{9}{10} \\ 1 - \frac{1}{n+1} &= \frac{9}{10}, \quad \frac{1}{n+1} = \frac{1}{10} \\ \therefore n &= 9 \end{aligned}$$

답 9

354

전략 먼저 주어진 등식의 양변을 미분하여 $f'(x)$ 를 구한다.

$$F(x) = (x+2)f(x) - x^3 + 12x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$F'(x) = f(x) + (x+2)f'(x) - 3x^2 + 12$$

이때 $F'(x) = f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) + (x+2)f'(x) - 3x^2 + 12 \\ (x+2)f'(x) &= 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2) \\ \therefore f'(x) &= 3x - 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (3x - 6) dx \\ &= \frac{3}{2}x^2 - 6x + C \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

한편 ㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$F(0)=2f(0), \quad 30=2f(0)$$

$$\therefore f(0)=15$$

따라서 ㉡에서 $C=15$

즉 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+15$ 이므로

$$f(2)=9$$

답 9

355

전략 함수 $F(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속임을 이용한다.

$$f(x)=\begin{cases} -2x & (x<0) \\ k(2x-x^2) & (x\geq 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$F(x)=\begin{cases} -x^2+C_1 & (x<0) \\ -\frac{k}{3}x^3+kx^2+C_2 & (x\geq 0) \end{cases}$$

한편 함수 $F(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서 $F(x)$ 가 $x=0$ 에서도 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = F(0) \text{에서}$$

$$C_1=C_2$$

이때 $F(2)-F(-3)=21$ 이므로

$$-\frac{8}{3}k+4k+C_2-(-9+C_1)=21$$

$$\frac{4}{3}k=12 \quad \therefore k=9$$

답 9

356

전략 주어진 조건에서 $f'(x)=ax^2-3x-6$ 이고 $f'(-1)=0$,

$f(-1)=\frac{11}{2}$ 임을 이용한다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 임의의 점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기가 ax^2-3x-6 이므로

$$f'(x)=ax^2-3x-6$$

$f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 극댓값 $\frac{11}{2}$ 을 가지므로

$$f'(-1)=0, \quad f(-1)=\frac{11}{2}$$

$$f'(-1)=0 \text{에서} \quad a+3-6=0 \quad \therefore a=3$$

따라서 $f'(x)=3x^2-3x-6$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx = \int (3x^2-3x-6)dx \\ &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + C \end{aligned}$$

$f(-1)=\frac{11}{2}$ 에서

$$-1 - \frac{3}{2} + 6 + C = \frac{11}{2} \quad \therefore C=2$$

$$\therefore f(x)=x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2$$

한편 $f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$ 이므로

$f'(x)=0$ 에서

$$x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$$f(2)=-8$$

답 -8

357

전략 도함수의 정의를 이용하여 $f'(x)$ 를 구한다.

$f(x+y)=f(x)+f(y)-3xy+1$ 의 양변에 $x=0$, $y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+1$$

$$\therefore f(0)=-1$$

$f'(2)=-4$ 이므로

$$f'(2)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2)+f(h)-6h+1-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+1}{h} - 6 = -4$$

$$\text{즉 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+1}{h} = 2 \text{이므로}$$

$$f'(x)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)-3xh+1-f(x)}{h}$$

$$=-3x + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+1}{h}$$

$$=-3x+2$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx = \int (-3x+2)dx$$

$$=-\frac{3}{2}x^2 + 2x + C$$

이때 $f(0) = -1$ 이므로 $C = -1$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= -\frac{3}{2}x^2 + 2x - 1 \\ &= -\frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}\end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $-\frac{1}{3}$ 이다.

답 $-\frac{1}{3}$

358

전략 부정적분과 미분의 관계를 이용하여 주어진 조건에서 $g(x)$ 와 $g'(x)$ 사이의 관계식을 구한다.

$f(x) = \int xg(x)dx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = xg(x) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x) - g(x)\} = 2x^3 + 5x \text{에서}$$

$$f'(x) - g'(x) = 2x^3 + 5x$$

$\textcircled{7}$ 을 대입하면

$$xg(x) - g'(x) = 2x^3 + 5x \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 $g(x)$ 의 최고차항을 ax^n (a 는 상수, $a \neq 0$)이라 하면 $xg(x) - g'(x)$ 의 최고차항은 ax^{n+1} 이므로 $\textcircled{8}$ 에서 $a=2, n+1=3$

$$\therefore a=2, n=2$$

따라서 $g(x) = 2x^2 + px + q$ (p, q 는 상수)로 놓으면

$$g'(x) = 4x + p$$

$g(x)$ 와 $g'(x)$ 를 $\textcircled{8}$ 에 대입하면

$$x(2x^2 + px + q) - (4x + p) = 2x^3 + 5x$$

$$\therefore 2x^3 + px^2 + (q-4)x - p = 2x^3 + 5x$$

위의 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$p=0, q-4=5$$

$$\therefore p=0, q=9$$

따라서 $g(x) = 2x^2 + 9$ 이므로

$$g(1) = 11$$

답 11

359

전략 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$ 를 k 에 대한 식으로 나타낸다.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여

$$f(0)=0, f(k)=0, f'(k)=0 \text{이므로}$$

$$f(x) = x(x-k)^2$$

이때 조건 (가)에서

$$g'(x) = f(x) + xf'(x) = \{xf(x)\}' \text{이므로}$$

$$\int g'(x)dx = \int \{xf(x)\}' dx$$

$$\therefore g(x) = xf(x) + C = x^2(x-k)^2 + C$$

$$\begin{aligned}\therefore g'(x) &= 2x(x-k)^2 + x^2 \times 2(x-k) \\ &= 2x(2x-k)(x-k)\end{aligned}$$

$g'(x)=0$ 에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=\frac{k}{2} \text{ 또는 } x=k$$

x	$\dots$	0	$\dots$	$\frac{k}{2}$	$\dots$	k	$\dots$
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=\frac{k}{2}$ 에서 극댓값을 갖고,

$x=0, x=k$ 에서 극솟값을 가지므로 조건 (나)에서

$$g\left(\frac{k}{2}\right) = 16, g(0) = g(k) = 0$$

$$g\left(\frac{k}{2}\right) = 16 \text{에서} \quad \left(\frac{k}{2}\right)^4 + C = 16 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$$g(0) = g(k) = 0 \text{에서} \quad C = 0$$

이것을 $\textcircled{9}$ 에 대입하면

$$\left(\frac{k}{2}\right)^4 = 16, \quad \frac{k}{2} = 2 \quad (\because k > 0)$$

$$\therefore k=4$$

따라서 $g(x) = x^2(x-4)^2$ 이므로

$$g\left(\frac{k}{4}\right) = g(1) = 9$$

답 9

해설 Focus

다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(a)=0, f'(a)=0$ 이면 다항식 $g(x)$ 에 대하여

$$f(x) = (x-a)g(x)$$

로 놓을 수 있다.

이때 $f'(x) = g(x) + (x-a)g'(x)$ 이므로 $f'(a)=0$ 에서

$$g(a)=0$$

따라서 다항식 $h(x)$ 에 대하여

$$f(x) = (x-a)^2h(x)$$

로 놓을 수 있다.

2 정적분

III. 적분

01 정적분

• 본책 174~183쪽

360

$$(1) \int_2^2 (x^3 - 6x) dx = 0$$

$$(2) \int_0^1 4x dx = \left[2x^2 \right]_0^1 = 2 \times 1^2 - 0 = 2$$

$$\begin{aligned} (3) \int_{-1}^2 (2x+3) dx &= \left[x^2 + 3x \right]_{-1}^2 \\ &= (2^2 + 3 \times 2) - \{ (-1)^2 + 3 \times (-1) \} \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int_2^4 (-3x^2 + 1) dx &= \left[-x^3 + x \right]_2^4 \\ &= (-4^3 + 4) - (-2^3 + 2) = -54 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \int_{-2}^0 (t^2 + 2t - 1) dt &= \left[\frac{1}{3}t^3 + t^2 - t \right]_{-2}^0 \\ &= 0 - \left\{ \frac{1}{3} \times (-2)^3 + (-2)^2 - (-2) \right\} \\ &= -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \int_0^{-1} (-2x^2 + 4x) dx &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^{-1} \\ &= \left\{ -\frac{2}{3} \times (-1)^3 + 2 \times (-1)^2 \right\} - 0 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7) \int_3^1 (3y^2 - y + 1) dy &= \left[y^3 - \frac{1}{2}y^2 + y \right]_3^1 \\ &= \left(1^3 - \frac{1}{2} \times 1^2 + 1 \right) - \left(3^3 - \frac{1}{2} \times 3^2 + 3 \right) \\ &= -24 \end{aligned}$$

답 (1) 0 (2) 2 (3) 12 (4) -54

(5) $-\frac{10}{3}$ (6) $\frac{8}{3}$ (7) -24

361

$$\begin{aligned} (1) \int_1^2 5(4x^3 - 2x) dx &= 5 \int_1^2 (4x^3 - 2x) dx \\ &= 5 \left[x^4 - x^2 \right]_1^2 \\ &= 5 \times \{ (2^4 - 2^2) - (1^4 - 1^2) \} \\ &= 5 \times 12 = 60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int_0^1 (x^2 + 2) dx + \int_0^1 (-x^2 + 2) dx &= \int_0^1 (x^2 + 2 - x^2 + 2) dx \\ &= \int_0^1 4 dx = \left[4x \right]_0^1 \\ &= 4 \times 1 - 0 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int_{-2}^1 (x^3 - 2x + 5) dx - \int_{-2}^1 (x^3 + 2x + 4) dx &= \int_{-2}^1 \{ x^3 - 2x + 5 - (x^3 + 2x + 4) \} dx \\ &= \int_{-2}^1 (-4x + 1) dx \\ &= \left[-2x^2 + x \right]_{-2}^1 \\ &= (-2 \times 1^2 + 1) - \{ -2 \times (-2)^2 + (-2) \} \\ &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int_1^2 (2x - 1) dx + \int_2^3 (2x - 1) dx &= \int_1^3 (2x - 1) dx \\ &= \left[x^2 - x \right]_1^3 \\ &= (3^2 - 3) - (1^2 - 1) \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \int_0^1 (3x^2 - 2x + 4) dx - \int_2^1 (3x^2 - 2x + 4) dx &= \int_0^1 (3x^2 - 2x + 4) dx + \int_1^2 (3x^2 - 2x + 4) dx \\ &= \int_0^2 (3x^2 - 2x + 4) dx \\ &= \left[x^3 - x^2 + 4x \right]_0^2 \\ &= (2^3 - 2^2 + 4 \times 2) - 0 \\ &= 12 \end{aligned}$$

답 (1) 60 (2) 4 (3) 9 (4) 6 (5) 12

III-2

정적분

362

$$\begin{aligned}
 (1) \int_{-1}^1 (x+1)^2 dx &= \int_{-1}^1 (x^2+2x+1) dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right]_{-1}^1 \\
 &= \left(\frac{1}{3} + 1 + 1 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 - 1 \right) \\
 &= \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int_{-1}^{-3} (3y+1)(3y-1) dy &= \int_{-1}^{-3} (9y^2-1) dy \\
 &= \left[3y^3 - y \right]_{-1}^{-3} \\
 &= (-81+3) - (-3+1) \\
 &= -76
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int_1^0 \frac{x^3+1}{x+1} dx &= \int_1^0 \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} dx \\
 &= \int_1^0 (x^2-x+1) dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_1^0 \\
 &= -\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 \right) \\
 &= -\frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \int_0^2 (x-1)(x+1)(x^2+1) dx &= \int_0^2 (x^2-1)(x^2+1) dx \\
 &= \int_0^2 (x^4-1) dx \\
 &= \left[\frac{1}{5}x^5 - x \right]_0^2 \\
 &= \frac{32}{5} - 2 = \frac{22}{5}
 \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{8}{3}$ (2) -76 (3) $-\frac{5}{6}$ (4) $\frac{22}{5}$

다른 풀이 (1) $\int_{-1}^1 (x+1)^2 dx = \left[\frac{1}{3}(x+1)^3 \right]_{-1}^1 = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$

363

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x^2 f(x) dx &= \int_0^1 x^2 (x^2+4x) dx \\
 &= \int_0^1 (x^4+4x^3) dx \\
 &= \left[\frac{1}{5}x^5 + x^4 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{5} + 1 = \frac{6}{5}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{6}{5}$

364

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^k (6x+k) dx &= \left[3x^2 + kx \right]_{-1}^k \\
 &= (3k^2 + k^2) - (3 - k) \\
 &= 4k^2 + k - 3
 \end{aligned}$$

따라서 $4k^2 + k - 3 = 15$ 이므로

$$4k^2 + k - 18 = 0, \quad (4k+9)(k-2) = 0$$

$$\therefore k = 2 \quad (\because k > 0)$$

답 2

365

$f'(x) = -2x + 5$ 이므로

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int f'(x) dx \\
 &= \int (-2x+5) dx \\
 &= -x^2 + 5x + C \\
 \therefore \int_{-2}^2 f(x) dx &= \int_{-2}^2 (-x^2 + 5x + C) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + Cx \right]_{-2}^2 \\
 &= \left(-\frac{8}{3} + 10 + 2C \right) - \left(\frac{8}{3} + 10 - 2C \right) \\
 &= -\frac{16}{3} + 4C
 \end{aligned}$$

즉 $-\frac{16}{3} + 4C = 0$ 이므로

$$C = \frac{4}{3}$$

$$\therefore f(x) = -x^2 + 5x + \frac{4}{3}$$

답 $f(x) = -x^2 + 5x + \frac{4}{3}$

366

$$\begin{aligned}\int_1^k (-4x+2)dx &= \left[-2x^2+2x\right]_1^k \\ &= (-2k^2+2k) - (-2+2) \\ &= -2k^2+2k \\ &= -2\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

이므로 $\int_1^k (-4x+2)dx$ 는 $k=\frac{1}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{1}{2}$ 을 갖는다.

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$ 이므로

$$a+b=1$$

답 1

367

(1) (주어진 식)

$$\begin{aligned}&= \int_{-2}^1 (x^3+1)dx - \int_1^{-2} (x^3-1)dx \\ &= \int_{-2}^1 (x^3+1)dx + \int_{-2}^1 (x^3-1)dx \\ &= \int_{-2}^1 (x^3+1+x^3-1)dx \\ &= \int_{-2}^1 2x^3dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^4\right]_{-2}^1 \\ &= \frac{1}{2} - 8 = -\frac{15}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \text{ (주어진 식)} &= \int_0^1 \frac{8}{t-2} dt - \int_0^1 \frac{y^3}{y-2} dy \\ &= \int_0^1 \frac{8}{t-2} dt - \int_0^1 \frac{t^3}{t-2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{8-t^3}{t-2} dt \\ &= -\int_0^1 \frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{t-2} dt \\ &= -\int_0^1 (t^2+2t+4) dt \\ &= -\left[\frac{1}{3}t^3+t^2+4t\right]_0^1 \\ &= -\left(\frac{1}{3}+1+4\right) \\ &= -\frac{16}{3}\end{aligned}$$

(3) (주어진 식)

$$\begin{aligned}&= \int_2^4 (x^2-4x)dx + \int_4^3 (x^2-4x)dx \\ &\quad + \int_1^2 (x^2-4x)dx \\ &= \int_2^3 (x^2-4x)dx + \int_1^2 (x^2-4x)dx \\ &= \int_1^2 (x^2-4x)dx + \int_2^3 (x^2-4x)dx \\ &= \int_1^3 (x^2-4x)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_1^3 \\ &= (9-18) - \left(\frac{1}{3}-2\right) = -\frac{22}{3}\end{aligned}$$

$$\text{답 (1)} -\frac{15}{2} \quad (2) -\frac{16}{3} \quad (3) -\frac{22}{3}$$

368

$$\begin{aligned}xf(x) &= \begin{cases} x^3 & (x \leq 1) \\ -2x^2+3x & (x \geq 1) \end{cases} \text{이므로} \\ &\int_0^2 xf(x)dx \\ &= \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (-2x^2+3x)dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 + \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

$$\text{답 } \frac{1}{12}$$

369

$a > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^a f(x)dx \\ &= \int_{-1}^0 (x+1)dx + \int_0^a (x^2-2x+1)dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^a \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}a^3-a^2+a\right) \\ &= \frac{1}{3}a^3-a^2+a + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{3}a^3-a^2+a + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}a^3-3a^2+3a-9 &= 0 \\ (a-3)(a^2+3) &= 0 \\ \therefore a &= 3 \quad (\because a^2+3 > 0)\end{aligned}$$

답 3

370

$$\begin{aligned}
 (1) |2x+3| &= \begin{cases} -2x-3 & (x \leq -\frac{3}{2}) \\ 2x+3 & (x \geq -\frac{3}{2}) \end{cases} \\
 \therefore \int_{-2}^0 |2x+3| dx &= \int_{-2}^{-\frac{3}{2}} (-2x-3) dx + \int_{-\frac{3}{2}}^0 (2x+3) dx \\
 &= \left[-x^2-3x \right]_{-2}^{-\frac{3}{2}} + \left[x^2+3x \right]_{-\frac{3}{2}}^0 \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) |x^2+x-2| &= \begin{cases} x^2+x-2 & (x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ -x^2-x+2 & (-2 \leq x \leq 1) \end{cases} \\
 \therefore \int_0^2 |x^2+x-2| dx &= \int_0^1 (-x^2-x+2) dx + \int_1^2 (x^2+x-2) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_1^2 \\
 &= \frac{7}{6} + \frac{11}{6} = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) (|x|+x+1)^2 &= \begin{cases} 1 & (x \leq 0) \\ 4x^2+4x+1 & (x \geq 0) \end{cases} \\
 \therefore \int_{-2}^1 (|x|+x+1)^2 dx &= \int_{-2}^0 1 dx + \int_0^1 (4x^2+4x+1) dx \\
 &= \left[x \right]_{-2}^0 + \left[\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x \right]_0^1 \\
 &= 2 + \frac{13}{3} = \frac{19}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) |x-2|+|x-3| &= \begin{cases} -(x-2)-(x-3) & (x \leq 2) \\ (x-2)-(x-3) & (2 \leq x \leq 3) \\ (x-2)+(x-3) & (x \geq 3) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} -2x+5 & (x \leq 2) \\ 1 & (2 \leq x \leq 3) \\ 2x-5 & (x \geq 3) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \int_0^4 (|x-2|+|x-3|) dx &= \int_0^2 (-2x+5) dx + \int_2^3 1 dx + \int_3^4 (2x-5) dx \\
 &= \left[-x^2+5x \right]_0^2 + \left[x \right]_2^3 + \left[x^2-5x \right]_3^4 \\
 &= 6+1+2=9 \\
 \text{답 (1) } \frac{5}{2} \quad (2) 3 \quad (3) \frac{19}{3} \quad (4) 9
 \end{aligned}$$

371

$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ -x^2+1 & (-1 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

이때 $a > 1$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int_0^a |x^2-1| dx &= \int_0^1 (-x^2+1) dx + \int_1^a (x^2-1) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3+x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3-x \right]_1^a \\
 &= \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}a^3-a+\frac{2}{3} \right) \\
 &= \frac{1}{3}a^3-a+\frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{3}a^3-a+\frac{4}{3} = \frac{56}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 a^3-3a-52 &= 0 \\
 (a-4)(a^2+4a+13) &= 0 \\
 \therefore a &= 4 \quad (\because a^2+4a+13 > 0)
 \end{aligned}$$

답 4

02 여러 가지 정적분

● 본책 184~187쪽

372

(주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-2}^2 (5x^4+6x^2-1) dx + \int_{-2}^2 (-2x^3-3x) dx \\
 &= 2 \int_0^2 (5x^4+6x^2-1) dx \\
 &= 2 \left[x^5+2x^3-x \right]_0^2 \\
 &= 2 \times 46 = 92
 \end{aligned}$$

답 92

373

$f(-x)=f(x)$ 에서 $f(x)$ 는 우함수이므로

$$\int_{-3}^3 f(x)dx = 2 \int_0^3 f(x)dx = 8$$

$$\therefore \int_0^3 f(x)dx = 4$$

또 $xf(x)$ 는 기함수이므로

$$\int_{-3}^3 xf(x)dx = 0$$

$$\therefore \int_0^3 f(x)dx + \int_{-3}^3 xf(x)dx = 4 + 0 = 4$$

답 4

374

모든 실수 x 에 대하여 $f(x+3)=f(x)$ 이므로

$$\int_1^4 f(x)dx = \int_4^7 f(x)dx = \int_7^{10} f(x)dx = 5$$

$$\therefore \int_1^{10} f(x)dx$$

$$= \int_1^4 f(x)dx + \int_4^7 f(x)dx + \int_7^{10} f(x)dx \\ = 5 + 5 + 5 = 15$$

답 15

375

모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4)=f(x)$ 이므로

$$\int_0^4 f(x)dx = \int_4^8 f(x)dx = \int_8^{12} f(x)dx \\ = \int_{12}^{16} f(x)dx$$

$$\therefore \int_0^{16} f(x)dx$$

$$= \int_0^4 f(x)dx + \int_4^8 f(x)dx + \int_8^{12} f(x)dx \\ + \int_{12}^{16} f(x)dx$$

$$= 4 \int_0^4 f(x)dx$$

$$= 4 \left\{ \int_0^2 x^2 dx + \int_2^4 (-2x+8) dx \right\}$$

$$= 4 \left\{ \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 + \left[-x^2 + 8x \right]_2^4 \right\}$$

$$= 4 \times \left(\frac{8}{3} + 4 \right) = \frac{80}{3}$$

답 $\frac{80}{3}$

연습 문제

• 본책 188~190쪽

376

전략 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ 에서 $f(1)$, $f'(1)$ 의 값을 구한다.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극

한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ 이므로 $f(1) = 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 1$$

$f(1)=0$ 에서 $a+b+3=0$

$$\therefore a+b=-3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$f'(x)=3ax^2+b$ 이므로 $f'(1)=1$ 에서

$$3a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$a=2, b=-5$$

따라서 $f(x)=2x^3-5x+3$ 이므로

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (2x^3-5x+3)dx \\ = \left[\frac{1}{2} x^4 - \frac{5}{2} x^2 + 3x \right]_0^1 = 1 \quad \text{답 1}$$

377

전략 주어진 식을 정리하여 $f(x)$ 를 구하고, 우함수와 기함수의 정적분을 이용한다.

$xf(x)-f(x)=3x^4-3x$ 에서

$$(x-1)f(x)=3x(x-1)(x^2+x+1)$$

$$\therefore f(x)=3x^3+3x^2+3x$$

$$\therefore \int_{-2}^2 f(x)dx = \int_{-2}^2 (3x^3+3x^2+3x)dx$$

$$= 2 \int_0^2 3x^2 dx$$

$$= 2 \left[x^3 \right]_0^2$$

$$= 2 \times 8 = 16$$

답 ②

378

전략 정적분과 함숫값을 a 에 대한 식으로 나타낸다.

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (6x^2+2ax)dx$$

$$= \left[2x^3+ax^2 \right]_0^1 = 2+a$$

이때 $f(1)=6+2a$ 이므로

$$2+a=6+2a \quad \therefore a=-4$$

답 -4

379

전략 정적분의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^0 \frac{x^3}{x-1} dx - \int_{-1}^0 \frac{1}{x-1} dx \\ &\quad - \int_1^0 (x^2+x+1) dx \\ &= \int_{-1}^0 \frac{x^3-1}{x-1} dx - \int_1^0 (x^2+x+1) dx \\ &= \int_{-1}^0 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} dx - \int_1^0 (x^2+x+1) dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^2+x+1) dx + \int_0^1 (x^2+x+1) dx \\ &= \int_{-1}^1 (x^2+x+1) dx \\ &= 2 \int_0^1 (x^2+1) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} x^3 + x \right]_0^1 \\ &= 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{8}{3}$

380

전략 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속임을 이용하여 a 의 값을 구한다.

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=1$ 에서도 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

$$5 = -1 + a \quad \therefore a = 6$$

따라서 $f(x) = \begin{cases} 3x^2-4x+6 & (x \leq 1) \\ 2x+3 & (x \geq 1) \end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^3 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 (3x^2-4x+6) dx + \int_1^3 (2x+3) dx \\ &= 2 \int_0^1 (3x^2+6) dx + \int_1^3 (2x+3) dx \\ &= 2 \left[x^3+6x \right]_0^1 + \left[x^2+3x \right]_1^3 \\ &= 2 \times 7 + 14 \\ &= 28 \end{aligned}$$

답 28

381

전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x 의 값을 기준으로 구간을 나누어 피적분함수를 절댓값 기호 없이 나타낸다.

$$\begin{aligned} 2x^3+6|x| &= \begin{cases} 2x^3+6x & (x \geq 0) \\ 2x^3-6x & (x \leq 0) \end{cases} \text{이므로} \\ &\int_{-3}^2 (2x^3+6|x|) dx - \int_{-3}^{-2} (2x^3-6x) dx \\ &= \int_{-3}^0 (2x^3-6x) dx + \int_0^2 (2x^3+6x) dx \\ &\quad - \int_{-3}^{-2} (2x^3-6x) dx \\ &= \int_{-2}^{-3} (2x^3-6x) dx + \int_{-3}^0 (2x^3-6x) dx \\ &\quad + \int_0^2 (2x^3+6x) dx \\ &= \int_{-2}^0 (2x^3-6x) dx + \int_0^2 (2x^3+6x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^4 - 3x^2 \right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{2} x^4 + 3x^2 \right]_0^2 \\ &= 4 + 20 = 24 \end{aligned}$$

답 24

다른 풀이

$$\begin{aligned} &\int_{-3}^2 (2x^3+6|x|) dx - \int_{-3}^{-2} (2x^3-6x) dx \\ &= \int_{-3}^{-2} (2x^3+6|x|) dx + \int_{-2}^2 (2x^3+6|x|) dx \\ &\quad - \int_{-3}^{-2} (2x^3-6x) dx \\ &= \int_{-3}^{-2} (2x^3-6x) dx + \int_{-2}^2 (2x^3+6|x|) dx \\ &\quad - \int_{-3}^{-2} (2x^3-6x) dx \\ &= \int_{-2}^2 (2x^3+6|x|) dx \\ &= 2 \int_0^2 6|x| dx = 2 \int_0^2 6x dx \\ &= 2 \left[3x^2 \right]_0^2 \\ &= 2 \times 12 = 24 \end{aligned}$$

382

전략 $g(x)$ 가 우함수이면 $\int_{-a}^a g(x) dx = 2 \int_0^a g(x) dx$,

$g(x)$ 가 기함수이면 $\int_{-a}^a g(x) dx = 0$ 임을 이용한다.

$f(-x) = f(x)$ 에서 $f(x)$ 는 우함수이므로 $x^3 f(x)$, $xf(x)$ 는 기함수이다.

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-2}^2 (3x^3 - 2x + 6)f(x)dx \\ = 3 \int_{-2}^2 x^3 f(x)dx - 2 \int_{-2}^2 x f(x)dx \\ + 6 \int_{-2}^2 f(x)dx \\ = 6 \times 2 \int_0^2 f(x)dx \\ = 12 \times \frac{1}{4} = 3 \end{aligned}$$

답 3

383

전략 주어진 조건에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 사이의 관계식을 구한다.

$$\int_1^2 f'(x)dx = \int_1^3 f'(x)dx = 0 \text{에서}$$

$$\left[f(x) \right]_1^2 = \left[f(x) \right]_1^3 = 0$$

$$f(2) - f(1) = f(3) - f(1) = 0$$

$$\therefore f(1) = f(2) = f(3)$$

이때 $f(1) = f(2) = f(3) = k$ (k 는 상수)라 하면

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + k$$

$$\therefore f'(x)$$

$$= (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3)$$

$$+ (x-1)(x-2)$$

$$\therefore f'(2) = -1$$

답 -1



개념 노트

최고차항의 계수가 a 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여

$$f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = k \text{이면}$$

$$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) + k$$

384

전략 $f(x) = ax^2 + bx + 1$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)로 놓고 주어진 조건을 만족시키는 a, b 의 값을 구한다.

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx \text{에서}$$

$$\int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$$

$$= \int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx$$

$$\therefore \int_{-1}^0 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 0$$

이때 $f(0) = 1$ 이므로

$$f(x) = ax^2 + bx + 1 \quad (a, b \text{는 상수, } a \neq 0)$$

로 놓으면

$$\int_{-1}^0 f(x)dx = \int_{-1}^0 (ax^2 + bx + 1)dx$$

$$= \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + x \right]_{-1}^0$$

$$= \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + 1$$

$$\text{에서 } \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + 1 = 0$$

$$\therefore 2a - 3b = -6 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (ax^2 + bx + 1)dx$$

$$= \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + x \right]_0^1$$

$$= \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 1$$

$$\text{에서 } \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 1 = 0$$

$$\therefore 2a + 3b = -6 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -3, b = 0$$

따라서 $f(x) = -3x^2 + 1$ 이므로

$$f(3) = -26$$

답 -26

385

전략 $f(x) = ax + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)로 놓고 주어진 조건을 만족시키는 a, b 의 값을 구한다.

$f(x) = ax + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)로 놓으면

$$\int_{-1}^1 xf(x)dx = \int_{-1}^1 x(ax + b)dx$$

$$= \int_{-1}^1 (ax^2 + bx)dx$$

$$= 2 \int_0^1 ax^2 dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{3}ax^3 \right]_0^1$$

$$= 2 \times \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a$$

$$\text{에서 } \frac{2}{3}a = 2$$

$$\therefore a = 3$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx &= \int_{-1}^1 x^2 (ax+b) dx \\
 &= \int_{-1}^1 (ax^3 + bx^2) dx \\
 &= 2 \int_0^1 bx^2 dx = 2 \left[\frac{1}{3} bx^3 \right]_0^1 \\
 &= 2 \times \frac{1}{3} b = \frac{2}{3} b
 \end{aligned}$$

에서 $\frac{2}{3}b = -2 \quad \therefore b = -3$

따라서 $f(x) = 3x - 3$ 이므로

$$f(-2) = -9$$

답 -9

386

전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x 의 값을 기준으로 구간을 나누어 피적분함수를 절댓값 기호 없이 나타낸다.

$$\begin{aligned}
 x|x-a| &= \begin{cases} x(x-a) & (x \geq a) \\ -x(x-a) & (x \leq a) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} x^2 - ax & (x \geq a) \\ -x^2 + ax & (x \leq a) \end{cases}
 \end{aligned}$$

이때 $0 \leq a \leq 1$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x|x-a| dx &= \int_0^a (-x^2 + ax) dx + \int_a^1 (x^2 - ax) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 \right]_0^a + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 \right]_a^1 \\
 &= \frac{a^3}{6} + \left(\frac{a^3}{6} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$f(a) = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}$ 로 놓으면

$$f'(a) = a^2 - \frac{1}{2}$$

$f'(a) = 0$ 에서 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because 0 \leq a \leq 1$)

a	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	1
$f'(a)$		-	0	+	
$f(a)$			↘	↗	

따라서 $0 \leq a \leq 1$ 일 때 함수 $f(a)$ 는 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 극

소이면서 최소이므로 정적분 $\int_0^1 x|x-a| dx$ 의 값은

$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때 최소가 된다.

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

387

전략 주어진 조건을 이용하여 $\int_{-4}^0 f(x) dx$ 의 값을 구한다.

$f(-x) = f(x)$ 에서 $f(x)$ 는 우함수이므로

$$\int_{-2}^0 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx = 16$$

이때 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x+4)$ 이므로

$$\int_{-4}^{-2} f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx = 16$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \int_{-4}^0 f(x) dx &= \int_{-4}^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^0 f(x) dx \\
 &= 16 + 16 = 32
 \end{aligned}$$

따라서

$$\int_{-4}^0 f(x) dx = \int_0^4 f(x) dx = \int_4^8 f(x) dx = 32$$

이므로

$$\begin{aligned}
 \int_{-4}^8 f(x) dx &= \int_{-4}^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx + \int_4^8 f(x) dx \\
 &= 32 + 32 + 32 = 96
 \end{aligned}$$

답 96

388

전략 주어진 조건을 이용하여 $1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 식을 구한다.

조건 (나)에 의하여 $x \geq 0$ 에서

$$f(x+1) = xf(x) + ax + b$$

조건 (가)에 의하여 $0 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x) = x$ 이므로

$$\begin{aligned}
 f(x+1) &= x \times x + ax + b \\
 &= x^2 + ax + b
 \end{aligned}$$

이때 $x+1=t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq 1$ 에서 $1 \leq t \leq 2$ 이고 $x=t-1$ 이므로

$$\begin{aligned}
 f(t) &= (t-1)^2 + a(t-1) + b \\
 &= t^2 + (a-2)t + 1 - a + b
 \end{aligned}$$

따라서 $1 \leq x \leq 2$ 에서

$$f(x) = x^2 + (a-2)x + 1 - a + b$$

한편 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이고 미분가능하다.

이때 $g(x) = x$, $h(x) = x^2 + (a-2)x + 1 - a + b$ 로 놓으면

$$g'(x) = 1, h'(x) = 2x + a - 2$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$g(1)=h(1)$$

$$1=1+a-2+1-a+b \quad \therefore b=1$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$g'(1)=h'(1)$$

$$\therefore a=1$$

따라서 $1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)=x^2-x+1$ 이므로

$$\begin{aligned} 60 \times \int_1^2 f(x) dx &= 60 \times \int_1^2 (x^2 - x + 1) dx \\ &= 60 \times \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + x \right]_1^2 \\ &= 60 \times \frac{11}{6} = 110 \end{aligned} \quad \text{답 110}$$

389

전략 삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않을 조건을 이용하여 a 의 값을 구한다.

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으므로 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

$f'(x)=3x^2+2ax+2a-3$ 이므로 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3(2a - 3) \leq 0$$

$$a^2 - 6a + 9 \leq 0, \quad (a-3)^2 \leq 0$$

$$\therefore a=3$$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$ 이므로

$$\begin{aligned} &\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx + \int_2^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx - \int_1^2 \frac{1}{x} dx \\ &= \int_1^2 \frac{f(x)-1}{x} dx = \int_1^2 \frac{x^3+3x^2+3x}{x} dx \\ &= \int_1^2 (x^2+3x+3) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 3x \right]_1^2 = \frac{59}{6} \end{aligned} \quad \text{답 59}$$

개념 노트

- ① 삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖는다.
 $\Rightarrow$ 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- ② 삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않는다.
 $\Rightarrow$ 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 갖는다.

390

전략 두 함수 $y=x^2-2$, $y=2x+1$ 의 그래프의 위치 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 를 구한다.

$(x^2-2) + (2x+1) = x^2+2x-1$ 이므로 주어진 조건에서

$$x^2-2 \geq 2x+1 \text{ 이면}$$

$$f(x)=x^2-2, \quad g(x)=2x+1$$

$$x^2-2 \leq 2x+1 \text{ 이면}$$

$$f(x)=2x+1, \quad g(x)=x^2-2$$

이때 $x^2-2=2x+1$ 에서

$$x^2-2x-3=0$$

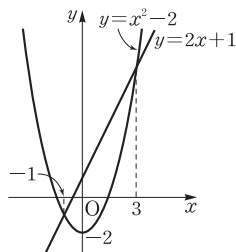
$$(x+1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 두 함수 $y=x^2-2$,

$y=2x+1$ 의 그래프는 오

른쪽 그림과 같으므로



$$f(x) = \begin{cases} x^2-2 & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 3) \\ 2x+1 & (-1 \leq x \leq 3) \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 3) \\ x^2-2 & (-1 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^4 f(x) dx &= \int_0^3 (2x+1) dx + \int_3^4 (x^2-2) dx \\ &= \left[x^2+x \right]_0^3 + \left[\frac{1}{3} x^3 - 2x \right]_3^4 \\ &= 12 + \frac{31}{3} = \frac{67}{3} \end{aligned} \quad \text{답 67}$$

391

전략 주어진 조건을 이용하여 $y=g(x)$ 의 그래프를 그려 본다.

함수 $y=-f(x+1)+1$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

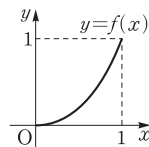
따라서 $0 \leq x \leq 1$ 에서 함수

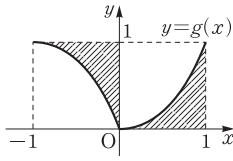
$y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림

과 같다고 하면 조건 (가), (나)에 의

하여 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수

$y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.





이때 위의 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 g(x)dx &= 1 \times 1 - \int_0^1 g(x)dx \\ &= 1 - \int_0^1 f(x)dx \\ &= 1 - \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{6}\end{aligned}$$

따라서 조건 (나)에 의하여

$$\begin{aligned}\int_{-3}^2 g(x)dx &= \int_{-3}^{-1} g(x)dx + \int_{-1}^1 g(x)dx + \int_1^2 g(x)dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 g(x)dx + \int_1^2 g(x)dx \\ &= 2 \left\{ \int_{-1}^0 g(x)dx + \int_0^1 f(x)dx \right\} + \int_{-1}^0 g(x)dx \\ &= 2 \times \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6} \right) + \frac{5}{6} \\ &= \frac{17}{6}\end{aligned}$$

답 ②

03 정적분으로 정의된 함수

● 본책 191~198쪽

392

$$\begin{aligned}(3) \frac{d}{dx} \int_x^{x+1} (-t+5)dt &= \{-(x+1)+5\} - (-x+5) \\ &= -1 \\ (4) \frac{d}{dx} \int_x^{x+2} (t^2-2t+1)dt &= \{(x+2)^2-2(x+2)+1\} - (x^2-2x+1) \\ &= 4x\end{aligned}$$

답 (1) x^2+2 (2) $5x^3-3x^2$

(3) -1 (4) $4x$

393

(1) 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 4x - 5$$

(2) 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = -2x + 3$$

(3) 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 9x^2 - 6$$

(4) 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}f(x) &= 1 \times (x-3) + (x+1) \times 1 \\ &= 2x - 2\end{aligned}$$

답 (1) $f(x) = 4x - 5$ (2) $f(x) = -2x + 3$

(3) $f(x) = 9x^2 - 6$ (4) $f(x) = 2x - 2$

394

(1) $f(t) = 3t + 6$ 으로 놓고 $f(t)$ 의 한 부정적분을

$F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x (3t+6)dt &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t)dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[F(t)]_1^x}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = F'(1)\end{aligned}$$

이때 $F'(t) = f(t)$ 이므로 구하는 값은

$$F'(1) = f(1) = 9$$

(2) $f(x) = 2x^2 - 3$ 으로 놓고 $f(x)$ 의 한 부정적분을

$F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h (2x^2-3)dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f(x)dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[F(x)]_0^h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = F'(0)\end{aligned}$$

이때 $F'(x) = f(x)$ 이므로 구하는 값은

$$F'(0) = f(0) = -3$$

답 (1) 9 (2) -3

395

(1) $\int_0^1 tf(t)dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = -2x^2 + 3x + k$$

따라서

$$\begin{aligned} k &= \int_0^1 tf(t)dt = \int_0^1 (-2t^3 + 3t^2 + kt)dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}t^4 + t^3 + \frac{k}{2}t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{k}{2} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \frac{k}{2} = \frac{1}{2} \quad \therefore k = 1$$

$$\therefore f(x) = -2x^2 + 3x + 1$$

(2) $f(x) = x^2 + \int_0^2 (3x+1)f(t)dt$

$$= x^2 + (3x+1) \int_0^2 f(t)dt$$

이때 $\int_0^2 f(t)dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = x^2 + k(3x+1) = x^2 + 3kx + k$$

따라서

$$\begin{aligned} k &= \int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 (t^2 + 3kt + k)dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}kt^2 + kt \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} + 8k \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } 7k = -\frac{8}{3} \quad \therefore k = -\frac{8}{21}$$

$$\therefore f(x) = x^2 - \frac{8}{7}x - \frac{8}{21}$$

(3) $f(x) = 3x^2 + \int_0^1 (2x-t)f(t)dt$

$$= 3x^2 + 2x \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 tf(t)dt$$

이때 $\int_0^1 f(t)dt = a$, $\int_0^1 tf(t)dt = b$ (a, b 는 상수)

로 놓으면

$$f(x) = 3x^2 + 2ax - b$$

따라서

$$\begin{aligned} a &= \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (3t^2 + 2at - b)dt \\ &= \left[t^3 + at^2 - bt \right]_0^1 \\ &= 1 + a - b \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } b = 1$$

또

$$\begin{aligned} b &= \int_0^1 tf(t)dt \\ &= \int_0^1 (3t^3 + 2at^2 - bt)dt \\ &= \left[\frac{3}{4}t^4 + \frac{2}{3}at^3 - \frac{b}{2}t^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{4} + \frac{2}{3}a - \frac{b}{2} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } 1 = \frac{3}{4} + \frac{2}{3}a - \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3}a = \frac{3}{4} \quad \therefore a = \frac{9}{8}$$

$$\therefore f(x) = 3x^2 + \frac{9}{4}x - 1$$

$$\text{답 (1) } f(x) = -2x^2 + 3x + 1$$

$$(2) f(x) = x^2 - \frac{8}{7}x - \frac{8}{21}$$

$$(3) f(x) = 3x^2 + \frac{9}{4}x - 1$$

396

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 2x - 3$$

주어진 등식의 양변에 $x=a$ 를 대입하면

$$0 = a^2 - 3a - 10, \quad (a+2)(a-5) = 0$$

$$\therefore a = -2 \quad (\because a < 0)$$

$$\therefore f(a) = f(-2) = -7$$

답 -7

397

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2xf(x) + x^2f'(x) = 4x^5 - 2x^3 + 2xf(x)$$

$$x^2f'(x) = 4x^5 - 2x^3$$

$$\therefore f'(x) = 4x^3 - 2x$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x)dx$$

$$= \int (4x^3 - 2x)dx$$

$$= x^4 - x^2 + C \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = \frac{1}{6}$$

이때 ㉠에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1)=1-1+C \quad \therefore C=\frac{1}{6}$$

따라서 $f(x)=x^4-x^2+\frac{1}{6}$ 이므로

$$f(-1)=\frac{1}{6} \quad \text{답 } \frac{1}{6}$$

398

주어진 등식에서

$$x \int_1^x f(t)dt - \int_1^x t f(t)dt = x^4 - 3x^2 + 2x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt + x f(x) - x f(x) = 4x^3 - 6x + 2$$

$$\therefore \int_1^x f(t)dt = 4x^3 - 6x + 2$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 12x^2 - 6$$

$$\therefore f(0) = -6 \quad \text{답 } -6$$

399

주어진 등식에서

$$x \int_1^x f(t)dt - \int_1^x t f(t)dt = x^3 + ax^2 + bx$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t)dt + x f(x) - x f(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\therefore \int_1^x f(t)dt = 3x^2 + 2ax + b \quad \dots\dots \text{㉠}$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 6x + 2a$$

한편 주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = 1 + a + b$$

$$\therefore a + b = -1 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = 3 + 2a + b$$

$$\therefore 2a + b = -3 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$a = -2, b = 1$$

따라서 $f(x) = 6x - 4$ 이므로

$$f(ab) = f(-2) = -16 \quad \text{답 } -16$$

400

$f(x) = \int_{-3}^x (t^2 + t + k)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = x^2 + x + k$$

함수 $f(x)$ 가 $x=-3$ 에서 극댓값을 가지므로

$$f'(-3) = 0$$

$$9 - 3 + k = 0 \quad \therefore k = -6$$

$$\therefore f'(x) = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-3$ 또는 $x=2$

x	$\dots$	-3	$\dots$	2	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이므로 $f(x)$ 의 극솟값은

$$f(2) = \int_{-3}^2 (t^2 + t - 6)dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 6t \right]_{-3}^2$$

$$= -\frac{125}{6} \quad \text{답 } -\frac{125}{6}$$

401

주어진 그래프에서

$$f(x) = ax(x-2) \quad (a < 0)$$

로 놓으면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$ 이고 $f(x)$ 의 최댓값이 1이므로 $f(1)=1$ 에서

$$-a = 1 \quad \therefore a = -1$$

$$\therefore f(x) = -x(x-2) = -x^2 + 2x$$

한편 $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$F'(x) = f(x)$$

이때 $x=2$ 의 좌우에서 $f(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $F(x)$ 는 $x=2$ 에서 극대이다.

따라서 $F(x)$ 의 극댓값은

$$F(2) = \int_1^2 (-t^2 + 2t)dt$$

$$= \left[-\frac{1}{3}t^3 + t^2 \right]_1^2 = \frac{2}{3}$$

$$\text{답 } \frac{2}{3}$$

402

$f(x) = \int_0^x (t-1)(t-5)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미

분하면 $f'(x) = (x-1)(x-5)$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 1$ ($\because 0 \leq x \leq 3$)

x	0	...	1	...	3
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_0^1 (t-1)(t-5)dt \\ &= \int_0^1 (t^2 - 6t + 5)dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t \right]_0^1 = \frac{7}{3} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{7}{3}$$

403

$f(x) = \int_x^{x+1} (2t^2 + 2t)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \{2(x+1)^2 + 2(x+1)\} - (2x^2 + 2x) \\ &= 4x + 4 \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$

x	-2	...	-1	...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	극소	↗	

이때

$$\begin{aligned} f(-2) &= \int_{-2}^{-1} (2t^2 + 2t)dt \\ &= \left[\frac{2}{3}t^3 + t^2 \right]_{-2}^{-1} = \frac{5}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= \int_{-1}^0 (2t^2 + 2t)dt \\ &= \left[\frac{2}{3}t^3 + t^2 \right]_{-1}^0 = -\frac{1}{3}, \end{aligned}$$

$$f(1) = \int_1^2 (2t^2 + 2t)dt = \left[\frac{2}{3}t^3 + t^2 \right]_1^2 = \frac{23}{3}$$

이므로 $-2 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{23}{3}$,

최솟값은 $-\frac{1}{3}$ 이다.

따라서 $M = \frac{23}{3}$, $m = -\frac{1}{3}$ 이므로

$$M - m = 8$$

답 8

다른 풀이 $f(x) = \int f'(x)dx = \int (4x+4)dx$

$$\begin{aligned} &= 2x^2 + 4x + C \\ &= 2(x+1)^2 + C - 2 \end{aligned}$$

따라서 $-2 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값은

$f(1) = C+6$, 최솟값은 $f(-1) = C-2$ 이므로

$$M = C+6, m = C-2$$

$$\therefore M - m = 8$$

404

(1) $f(t) = 2t^2 + 3t - 1$ 로 놓고 $f(t)$ 의 한 부정적분을

$F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x (2t^2 + 3t - 1)dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t)dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[F(t)]_1^x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x^2) - F(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{F(x^2) - F(1)}{x^2 - 1} \times (x+1) \right\} \\ &= 2F'(1) \\ &= 2f(1) = 2 \times 4 = 8 \end{aligned}$$

(2) $f(x) = 3x^2 - x + 1$ 로 놓고 $f(x)$ 의 한 부정적분을

$F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{2-h}^{2+h} (3x^2 - x + 1)dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{2-h}^{2+h} f(x)dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[F(x)]_{2-h}^{2+h}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h) - F(2-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h) - F(2) - \{F(2-h) - F(2)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h) - F(2)}{h} \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2-h) - F(2)}{-h} \end{aligned}$$

III-2

2021
12월
19일

$$=F'(2)+F'(2)=2F'(2)$$

$$=2f(2)=2\times 11=22$$

답 (1) 8 (2) 22

405

$f(x)=ax-x^2$ 으로 놓고 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\lim_{h\rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{-1}^{-1+h} (ax-x^2)dx$$

$$= \lim_{h\rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{-1}^{-1+h} f(x)dx$$

$$= \lim_{h\rightarrow 0} \frac{\left[F(x)\right]_{-1}^{-1+h}}{h}$$

$$= \lim_{h\rightarrow 0} \frac{F(-1+h)-F(-1)}{h}$$

$$=F'(-1)$$

$$=f(-1)=-a-1$$

따라서 $-a-1=-3$ 이므로

$$a=2$$

답 2

연습 문제

● 본책 199~201쪽

406

전략 $\int_1^2 f(t)dt=k$ (k 는 상수)로 놓고 k 의 값을 구한다.

$$\int_1^2 f(t)dt=k \text{ (k 는 상수)로 놓으면}$$

$$f(x)=\frac{12}{7}x^2-2kx+k^2$$

따라서

$$k=\int_1^2 f(t)dt$$

$$=\int_1^2 \left(\frac{12}{7}t^2-2kt+k^2\right)dt$$

$$=\left[\frac{4}{7}t^3-kt^2+k^2t\right]_1^2$$

$$=4-3k+k^2$$

$$\text{이므로 } k^2-4k+4=0$$

$$(k-2)^2=0 \quad \therefore k=2$$

$$\text{즉 } f(x)=\frac{12}{7}x^2-4x+4 \text{이므로}$$

$$f(7)=60$$

답 60

407

전략 주어진 등식의 양변을 미분하여 $f(x)$ 를 구하고

$$\int_2^2 f(t)dt=0 \text{임을 이용한다.}$$

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=3x^2-6ax+5a$$

$$=3(x-a)^2-3a^2+5a$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 일 때 최솟값 $-3a^2+5a$ 를 갖는다.

이때 주어진 등식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$0=8-12a+10a-a^2$$

$$a^2+2a-8=0, \quad (a+4)(a-2)=0$$

$$\therefore a=2 \quad (\because a>0)$$

따라서 $f(x)$ 의 최솟값은

$$-3a^2+5a=-3\times 2^2+5\times 2=-2 \quad \text{답 } -2$$

408

전략 주어진 등식의 양변을 미분한 후 $\int_0^1 f(t)dt=k$ (k 는 상수)

로 놓고 k 의 값을 구한다.

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=6x^2-2x-4 \int_0^1 f(t)dt$$

$$\int_0^1 f(t)dt=k \text{ (k 는 상수)로 놓으면}$$

$$f(x)=6x^2-2x-4k$$

따라서

$$k=\int_0^1 f(t)dt$$

$$=\int_0^1 (6t^2-2t-4k)dt$$

$$=\left[2t^3-t^2-4kt\right]_0^1$$

$$=1-4k$$

$$\text{이므로 } 5k=1 \quad \therefore k=\frac{1}{5}$$

$$\text{즉 } f(x)=6x^2-2x-\frac{4}{5} \text{이므로}$$

$$f(-1)=\frac{36}{5}$$

답 $\frac{36}{5}$

다른 풀이 주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$\int_0^1 f(t)dt = 2 - 1 - 4 \int_0^1 f(t)dt$$

$$5 \int_0^1 f(t)dt = 1$$

$$\therefore \int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{5}$$

이것을 주어진 등식에 대입하면

$$\int_0^x f(t)dt = 2x^3 - x^2 - \frac{4}{5}x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 6x^2 - 2x - \frac{4}{5}$$

409

전략 함수 $g(x)$ 가 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 증가하려면 이 구간에서 $g'(x) \geq 0$ 이어야 함을 이용한다.

$g(x) = \int_0^x f(t)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} g'(x) &= f(x) = -x^2 - 4x + a \\ &= -(x+2)^2 + 4 + a \end{aligned}$$

이때 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서

$g'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 오

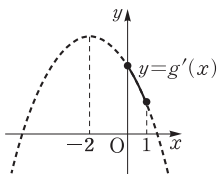
른쪽 그림에서

$$g'(1) \geq 0$$

$$a - 5 \geq 0$$

$$\therefore a \geq 5$$

따라서 a 의 최솟값은 5이다.



답 5

410

전략 피적분함수에 x 가 포함되지 않도록 주어진 등식의 좌변을 변형한 후 양변을 x 에 대하여 미분한다.

주어진 등식에서

$$\begin{aligned} x \int_1^x f'(t)dt - \int_1^x t f'(t)dt \\ = 2x^4 + x^3 - 11x + 8 \end{aligned}$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f'(t)dt + x f'(x) - x f'(x)$$

$$= 8x^3 + 3x^2 - 11$$

$$\therefore \int_1^x f'(t)dt = 8x^3 + 3x^2 - 11$$

$$\int_1^x f'(t)dt = \left[f(t) \right]_1^x = f(x) - f(1) \text{이므로}$$

$$f(x) - f(1) = 8x^3 + 3x^2 - 11$$

이때 $f(1) = 2$ 이므로

$$f(x) = 8x^3 + 3x^2 - 9$$

$$\text{답 } f(x) = 8x^3 + 3x^2 - 9$$

411

전략 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분한 후 $f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값을 구한다.

$f(x) = \int_{-3}^x (3t^2 - 6t - 9)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극대이므로 $f(x)$ 의 극댓값은

$$\begin{aligned} f(-1) &= \int_{-3}^{-1} (3t^2 - 6t - 9)dt \\ &= \left[t^3 - 3t^2 - 9t \right]_{-3}^{-1} \\ &= 32 \end{aligned}$$

또 $x = 3$ 에서 극소이므로 $f(x)$ 의 극솟값은

$$\begin{aligned} f(3) &= \int_{-3}^3 (3t^2 - 6t - 9)dt \\ &= 2 \int_0^3 (3t^2 - 9)dt \\ &= 2 \left[t^3 - 9t \right]_0^3 \\ &= 2 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

답 극댓값: 32, 극솟값: 0

412

전략 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

$f(t) = |t^2 - 9|$ 로 놓고 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_{-2-x}^{-2+x} |t^2 - 9| dt \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_{-2-x}^{-2+x} f(t) dt \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[F(t)]_{-2-x}^{-2+x}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(-2+x) - F(-2-x)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(-2+x) - F(-2) - \{F(-2-x) - F(-2)\}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(-2+x) - F(-2)}{x} \\
&\quad + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(-2-x) - F(-2)}{-x} \\
&= F'(-2) + F'(-2) = 2F'(-2) \\
&= 2f(-2) = 2 \times 5 = 10
\end{aligned}$$

답 10

413

전략 조건 ⑦을 만족시키는 $f(x)$ 를 구한다.

조건 ⑦에서 $\int_0^2 f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = 2x + k$$

즉

$$\begin{aligned}
k &= \int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 (2t + k) dt \\
&= \left[t^2 + kt \right]_0^2 = 4 + 2k
\end{aligned}$$

이므로 $k = -4$

$$\therefore f(x) = 2x - 4$$

이때 $f(x)$ 의 한 부정적분이 $g(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int f(x) dx = \int (2x - 4) dx \\
&= x^2 - 4x + C
\end{aligned}$$

따라서 조건 ④에서

$$\begin{aligned}
C - \int_0^2 (t^2 - 4t + C) dt &= \frac{1}{3} \\
C - \left[\frac{1}{3} t^3 - 2t^2 + Ct \right]_0^2 &= \frac{1}{3} \\
C - \left(-\frac{16}{3} + 2C \right) &= \frac{1}{3} \\
\therefore C &= 5
\end{aligned}$$

즉 $g(x) = x^2 - 4x + 5$ 이므로

$$g(1) = 2$$

답 2

414

전략 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분한 후

$\int_0^2 t f(t) dt = a$ (a 는 상수)로 놓고 a 의 값을 구한다.

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 8x^2 - 6x + 4 \int_0^2 t f(t) dt$$

$\int_0^2 t f(t) dt = a$ (a 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = 8x^2 - 6x + 4a$$

따라서

$$\begin{aligned}
a &= \int_0^2 t f(t) dt = \int_0^2 (8t^3 - 6t^2 + 4at) dt \\
&= \left[2t^4 - 2t^3 + 2at^2 \right]_0^2 \\
&= 16 + 8a
\end{aligned}$$

$$\text{이므로 } 7a = -16 \quad \therefore a = -\frac{16}{7}$$

즉 $f(x) = 8x^2 - 6x - \frac{64}{7}$ 이므로

$$f(2) = \frac{76}{7}$$

답 $\frac{76}{7}$

415

전략 주어진 등식의 양변에 $x=1$, $x=0$ 을 각각 대입하여 $f(1)$,

$\int_0^1 f(t) dt$ 의 값을 a 에 대한 식으로 나타낸다.

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = 2 + 4a \quad \dots\dots ①$$

주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0 = 3a + \int_1^0 f(t) dt$$

$$\therefore \int_0^1 f(t) dt = 3a$$

이때 $f(1) = \int_0^1 f(t) dt$ 이므로

$$2 + 4a = 3a \quad \therefore a = -2$$

따라서 주어진 등식은

$$x f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 6 + \int_1^x f(t) dt$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + x f'(x) = 6x^2 - 4x + f(x)$$

$$x f'(x) = 6x^2 - 4x$$

$$\therefore f'(x) = 6x - 4$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (6x-4) dx \\ &= 3x^2 - 4x + C\end{aligned}$$

이때 ㉠에서 $f(1) = -6$ 이므로

$$3 - 4 + C = -6 \quad \therefore C = -5$$

즉 $f(x) = 3x^2 - 4x - 5$ 이므로 $f(3) = 10$

$$\therefore a + f(3) = 8 \quad \text{답 ④}$$

416

전략 함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 극솟값 0을 가지므로 $f(3)=0$, $f'(3)=0$ 임을 이용한다.

$f(x) = \int_0^x (t^2 + at + b) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = x^2 + ax + b$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 극솟값 0을 가지므로

$$f(3)=0, f'(3)=0$$

$$f(3)=0 \text{에서} \quad \int_0^3 (t^2 + at + b) dt = 0$$

$$\left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{a}{2}t^2 + bt \right]_0^3 = 0, \quad 9 + \frac{9}{2}a + 3b = 0$$

$$\therefore 3a + 2b = -6 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$f'(3)=0 \text{에서} \quad 9 + 3a + b = 0$$

$$\therefore 3a + b = -9 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -4, b = 3$$

$$\therefore f'(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad x=1 \text{ 또는 } x=3$$

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이므로 $f(x)$ 의 극댓값은

$$\begin{aligned}f(1) &= \int_0^1 (t^2 - 4t + 3) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3} \quad \text{답 4/3}\end{aligned}$$

417

전략 주어진 그래프를 이용하여 $f(x)$ 의 식을 세우고 $g'(x) = f(x) - f(x-1)$ 임을 이용한다.

주어진 그래프에서

$$f(x) = a(x+1)(x-3) \quad (a > 0)$$

으로 놓을 수 있다.

이때 $g(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}g'(x) &= f(x) - f(x-1) \\ &= a(x+1)(x-3) - ax(x-4) \\ &= a(2x-3)\end{aligned}$$

$$g'(x)=0 \text{에서} \quad x = \frac{3}{2}$$

x	...	$\frac{3}{2}$	...
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x = \frac{3}{2}$ 일 때 극소이면서 최소이므로 $\text{답 } \frac{3}{2}$

418

전략 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 극한을 포함한 식을 변형한다.

$\int_0^x f(t) dt = \frac{1}{3}x^3 + kx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = x^2 + k$$

이때 $f(1) = 4$ 이므로

$$1 + k = 4 \quad \therefore k = 3$$

$$\therefore f(x) = x^2 + 3$$

$t^2 f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x^2 - 9} \int_{-3}^x t^2 f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{F(t)}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{F(x) - F(-3)}{(x+3)(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \left\{ \frac{F(x) - F(-3)}{x+3} \times \frac{1}{x-3} \right\} \\ &= -\frac{1}{6} F'(-3)\end{aligned}$$

이때 $F'(t) = t^2 f(t)$ 이므로 구하는 값은

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6}F'(-3) &= -\frac{1}{6} \times 9f(-3) \\ &= -\frac{1}{6} \times 9 \times 12 = -18 \end{aligned}$$

답 -18

419

전략 먼저 조건 ㉑의 양변을 x 에 대하여 미분하고

$\int_1^1 f(t)dt = 0$ 임을 이용하여 $f(x)$ 를 구한다.

조건 ㉑의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) + xf'(x) - 4x \\ xf'(x) &= 4x \quad \therefore f'(x) = 4 \\ \therefore f(x) &= \int f'(x)dx = \int 4dx \end{aligned}$$

$$= 4x + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 ㉑의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = f(1) - 2 - 1 \quad \therefore f(1) = 3$$

이때 ㉑에 $x=1$ 을 대입하면 $f(1) = 4 + C_1$

$$3 = 4 + C_1 \quad \therefore C_1 = -1$$

따라서 $f(x) = 4x - 1$ 이므로

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (4x - 1)dx \\ &= 2x^2 - x + C_2 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

한편 $f(x)G(x) + F(x)g(x) = \{F(x)G(x)\}'$ 이

므로 조건 ㉒의 양변을 적분하면

$$\begin{aligned} F(x)G(x) &= \int (8x^3 + 3x^2 + 1)dx \\ &= 2x^4 + x^3 + x + C_3 \end{aligned}$$

이때 ㉑에서 $F(x)$ 가 최고차항의 계수가 2인 이차함수이므로

$$G(x) = x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수})$$

로 놓으면

$$\begin{aligned} (2x^2 - x + C_2)(x^2 + ax + b) \\ &= 2x^4 + x^3 + x + C_3 \\ \therefore 2x^4 + (2a - 1)x^3 + (-a + 2b + C_2)x^2 \\ &\quad + (aC_2 - b)x + bC_2 \\ &= 2x^4 + x^3 + x + C_3 \end{aligned}$$

위의 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$2a - 1 = 1 \quad \therefore a = 1$$

따라서 $G(x) = x^2 + x + b$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^3 g(x)dx &= [G(x)]_1^3 = G(3) - G(1) \\ &= (12 + b) - (2 + b) \\ &= 10 \end{aligned}$$

답 10

420

전략 최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $G(x)$ 가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $G'(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 함을 이용한다.

$G(x) = \int_1^x f(t)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$G'(x) = f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - k$$

$G'(x)$ 가 최고차항의 계수가 음수인 삼차함수이므로

$G(x)$ 는 최고차항의 계수가 음수인 사차함수이다.

따라서 함수 $G(x)$ 가 극솟값을 가지려면 삼차방정식

$G'(x) = 0$, 즉 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

이때

$$f'(x) = -3x^2 + 3x + 6 = -3(x+1)(x-2)$$

이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$, $x = 2$ 에서 극값을 가지

므로 $f(-1)f(2) < 0$

$$\left(-\frac{7}{2} - k\right)(10 - k) < 0$$

$$\left(k + \frac{7}{2}\right)(k - 10) < 0 \quad \therefore -\frac{7}{2} < k < 10$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 9, 최솟값은 -3 이므로

$$M = 9, m = -3$$

$$\therefore \frac{M}{m} = -3$$

답 -3

개념 노트

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 가질 때, 삼차방정식 $f(x) = 0$ 의 근은 다음과 같다.

① (극댓값) $\times$ (극솟값) < 0

$\iff$ 서로 다른 세 실근

② (극댓값) $\times$ (극솟값) $= 0$

$\iff$ 한 실근과 중근 (서로 다른 두 실근)

③ (극댓값) $\times$ (극솟값) > 0

$\iff$ 한 실근과 두 허근

421

전략 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \alpha$ (α 는 실수)일 때, $\lim_{x \rightarrow a} q(x) = 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = 0$ 임을 이용한다.

$G(x) = \int_1^x (x-t)f(t)dt$ 로 놓으면

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_1^x (x-t)f(t)dt = 3$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{G(x)}{x-2} = 3$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} G(x) = 0$ 이고 함수 $G(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$G(2) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{G(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{G(x) - G(2)}{x-2} = G'(2) = 3$$

한편 $G(x) = \int_1^x (x-t)f(t)dt$ 에서

$$G(x) = x \int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt \quad \cdots \textcircled{7}$$

$G(2) = 0$ 이므로

$$2 \int_1^2 f(t)dt - \int_1^2 tf(t)dt = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$G'(x) = \int_1^x f(t)dt + xf(x) - xf(x)$$

$$\therefore G'(x) = \int_1^x f(t)dt$$

$$G'(2) = 3 \text{이므로} \quad \int_1^2 f(t)dt = 3$$

이것을 ⑧에 대입하면

$$2 \times 3 - \int_1^2 tf(t)dt = 0$$

$$\therefore \int_1^2 tf(t)dt = 6$$

$$\therefore \int_1^2 (4x+1)f(x)dx$$

$$= 4 \int_1^2 xf(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$$

$$= 4 \times 6 + 3$$

$$= 27$$

답 ⑤

3 정적분의 활용

III. 적분

01 정적분과 넓이

● 본책 204~213쪽

422

곡선 $y = -x^2 + 2x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 **0**, **2**

이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^2 (-x^2 + 2x)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

답 풀이 참조

423

곡선 $y = x^2 - 4x$ 와 직선 $y = -x$ 의 교점의 x 좌표는

0, **3**이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^3 \{-x - (x^2 - 4x)\}dx \\ &= \int_0^3 (-x^2 + 3x)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

답 풀이 참조

424

두 곡선 $y = x^2 + x$, $y = -2x^2 + x + 3$ 의 교점의 x 좌표는 **-1**, **1**이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \{(-2x^2 + x + 3) - (x^2 + x)\}dx \\ &= \int_{-1}^1 (-3x^2 + 3)dx \\ &= 2 \int_0^1 (-3x^2 + 3)dx \\ &= 2 \left[-x^3 + 3x \right]_0^1 \\ &= 2 \times 2 = 4 \end{aligned}$$

답 풀이 참조

425

(1) 곡선 $y = x^2 + 2x - 8$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는

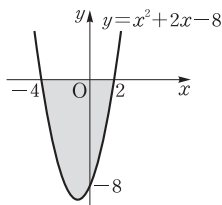
$$x^2 + 2x - 8 = 0 \text{에서}$$

$$(x+4)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 2$$

III-3

정적분의 활용

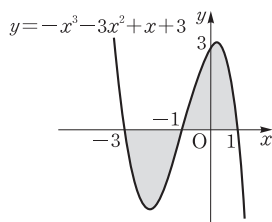


이때 $-4 \leq x \leq 2$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & -\int_{-4}^2 (x^2 + 2x - 8) dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 8x \right]_{-4}^2 \\ &= 36 \end{aligned}$$

(2) 곡선 $y = -x^3 - 3x^2 + x + 3$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는 $-x^3 - 3x^2 + x + 3 = 0$ 에서

$$\begin{aligned} & (x+3)(x+1)(x-1) = 0 \\ & \therefore x = -3 \text{ 또는 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1 \end{aligned}$$



이때 $-3 \leq x \leq -1$ 에서 $y \leq 0$, $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & -\int_{-3}^{-1} (-x^3 - 3x^2 + x + 3) dx \\ & + \int_{-1}^1 (-x^3 - 3x^2 + x + 3) dx \\ &= -\int_{-3}^{-1} (-x^3 - 3x^2 + x + 3) dx \\ & + 2 \int_0^1 (-3x^2 + 3) dx \\ &= -\left[-\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_{-3}^{-1} \\ & + 2\left[-x^3 + 3x \right]_0^1 \\ &= -(-4) + 2 \times 2 = 8 \end{aligned}$$

답 (1) 36 (2) 8

426

곡선 $y = -x^2 + kx$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $-x^2 + kx = 0$ 에서

$$x(x-k) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = k$$

이때 $k < 0$ 이므로 $k \leq x \leq 0$ 에서

$$y \geq 0$$

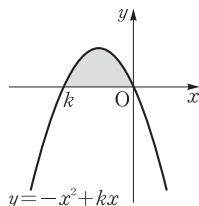
따라서 곡선 $y = -x^2 + kx$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_k^0 (-x^2 + kx) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}kx^2 \right]_k^0 = -\frac{1}{6}k^3 \end{aligned}$$

즉 $-\frac{1}{6}k^3 = 36$ 이므로

$$k^3 = -216 \quad \therefore k = -6$$

답 -6



427

곡선 $y = -2x^2 + x + 1$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는 $-2x^2 + x + 1 = 0$ 에서

$$\begin{aligned} & (2x+1)(x-1) = 0 \\ & \therefore x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 1 \end{aligned}$$

이때 $-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$ 에서 $y \leq 0$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ 에서

$y \geq 0$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & -\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-2x^2 + x + 1) dx \\ & + \int_{-\frac{1}{2}}^1 (-2x^2 + x + 1) dx \\ &= -\left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} \\ & + \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-\frac{1}{2}}^1 \\ &= -\left(-\frac{11}{24}\right) + \frac{9}{8} = \frac{19}{12} \end{aligned}$$

답 19/12

428

곡선 $y = x^2 - 3x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^2 - 3x = 0$ 에서

$$x(x-3) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$

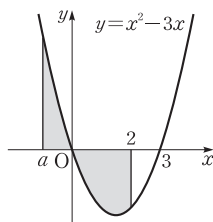
이때 $a < 0$ 이므로

$$a \leq x \leq 0 \text{에서 } y \geq 0$$

$$0 \leq x \leq 2 \text{에서 } y \leq 0$$

따라서 곡선 $y = x^2 - 3x$ 와 x 축 및 두 직선 $x = a$, $x = 2$ 로

둘러싸인 도형의 넓이는



$$\begin{aligned} & \int_a^0 (x^2 - 3x) dx - \int_0^2 (x^2 - 3x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_a^0 - \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^2 \\ &= \left(-\frac{1}{3}a^3 + \frac{3}{2}a^2 \right) - \left(-\frac{10}{3} \right) \\ &= -\frac{1}{3}a^3 + \frac{3}{2}a^2 + \frac{10}{3} \end{aligned}$$

따라서 $-\frac{1}{3}a^3 + \frac{3}{2}a^2 + \frac{10}{3} = \frac{31}{6}$ 이므로

$$2a^3 - 9a^2 + 11 = 0$$

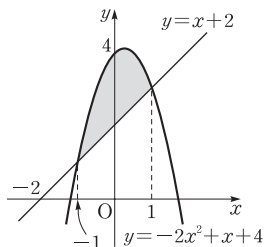
$$(a+1)(2a^2 - 11a + 11) = 0$$

$$\therefore a = -1 \quad (\because a < 0)$$

답 -1

429

- (1) 곡선 $y = -2x^2 + x + 4$ 와 직선 $y = x + 2$ 의 교점의 x 좌표는 $-2x^2 + x + 4 = x + 2$ 에서
- $$x^2 = 1 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$



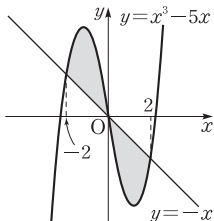
이때 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $-2x^2 + x + 4 \geq x + 2$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \{-2x^2 + x + 4 - (x + 2)\} dx \\ &= \int_{-1}^1 (-2x^2 + 2) dx = 2 \int_0^1 (-2x^2 + 2) dx \\ &= 2 \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x \right]_0^1 = 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

- (2) 곡선 $y = x^3 - 5x$ 와 직선 $y = -x$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3 - 5x = -x$ 에서

$$x^3 - 4x = 0, \quad x(x+2)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$



이때 $-2 \leq x \leq 0$ 에서 $x^3 - 5x \geq -x$, $0 \leq x \leq 2$ 에서 $x^3 - 5x \leq -x$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^0 \{x^3 - 5x - (-x)\} dx \\ &+ \int_0^2 \{-x - (x^3 - 5x)\} dx \\ &= \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx + \int_0^2 (-x^3 + 4x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 \right]_0^2 \\ &= 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{8}{3}$ (2) 8

430

곡선 $y = x^2 - 2x$ 와 직선 $y = ax$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2 - 2x = ax$ 에서

$$x^2 - (a+2)x = 0, \quad x\{x - (a+2)\} = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = a+2$$

이때 $a > 0$ 이므로

$0 \leq x \leq a+2$ 에서

$$x^2 - 2x \leq ax$$

따라서 곡선 $y = x^2 - 2x$

와 직선 $y = ax$ 로 둘러싸

인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^{a+2} \{ax - (x^2 - 2x)\} dx \\ &= \int_0^{a+2} \{-x^2 + (a+2)x\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(a+2)x^2 \right]_0^{a+2} \\ &= \frac{1}{6}(a+2)^3 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \frac{1}{6}(a+2)^3 = \frac{9}{2} \text{ 이므로}$$

$$(a+2)^3 = 27, \quad a+2 = 3$$

$$\therefore a = 1$$

답 1

431

- (1) 두 곡선 $y = x^3$, $y = 3x^2 - 4$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^3 = 3x^2 - 4 \text{ 에서}$$

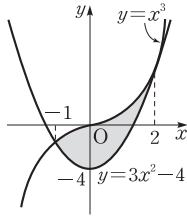
$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0, \quad (x+1)(x-2)^2 = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

이때 $-1 \leq x \leq 2$ 에서

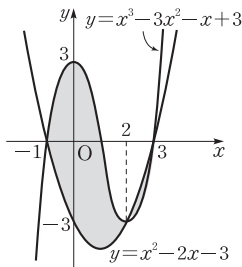
$x^3 \geq 3x^2 - 4$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^2 \{x^3 - (3x^2 - 4)\} dx \\ &= \int_{-1}^2 (x^3 - 3x^2 + 4) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$



(2) 두 곡선 $y=x^3-3x^2-x+3$, $y=x^2-2x-3$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3-3x^2-x+3=x^2-2x-3$ 에서

$$\begin{aligned} & x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0 \\ & (x+1)(x-2)(x-3) = 0 \\ & \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x = 3 \end{aligned}$$



이때

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 $x^3 - 3x^2 - x + 3 \geq x^2 - 2x - 3$,

$2 \leq x \leq 3$ 에서 $x^3 - 3x^2 - x + 3 \leq x^2 - 2x - 3$

이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^2 \{x^3 - 3x^2 - x + 3 - (x^2 - 2x - 3)\} dx \\ &+ \int_2^3 \{x^2 - 2x - 3 - (x^3 - 3x^2 - x + 3)\} dx \\ &= \int_{-1}^2 (x^3 - 4x^2 + x + 6) dx \\ &+ \int_2^3 (-x^3 + 4x^2 - x - 6) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_{-1}^2 \\ &+ \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x \right]_2^3 \\ &= \frac{45}{4} + \frac{7}{12} = \frac{71}{6} \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{27}{4}$ (2) $\frac{71}{6}$

432

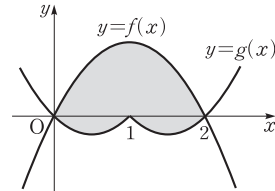
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표는

(i) $x \leq 1$ 일 때

$$\begin{aligned} & -x^2 + 2x = x^2 - x \text{에서} \\ & 2x^2 - 3x = 0, \quad x(2x - 3) = 0 \\ & \therefore x = 0 \quad (\because x \leq 1) \end{aligned}$$

(ii) $x \geq 1$ 일 때

$$\begin{aligned} & -x^2 + 2x = x^2 - 3x + 2 \text{에서} \\ & 2x^2 - 5x + 2 = 0, \quad (2x - 1)(x - 2) = 0 \\ & \therefore x = 2 \quad (\because x \geq 1) \end{aligned}$$



이때 $0 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x) \geq g(x)$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_0^1 \{-x^2 + 2x - (x^2 - x)\} dx \\ &+ \int_1^2 \{-x^2 + 2x - (x^2 - 3x + 2)\} dx \\ &= \int_0^1 (-2x^2 + 3x) dx \\ &+ \int_1^2 (-2x^2 + 5x - 2) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x \right]_1^2 \\ &= \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{5}{3}$

433

$f(x) = x^2 - 1$ 로 놓으면 $f'(x) = 2x$

$$\therefore f'(2) = 4$$

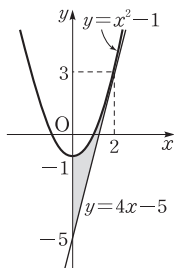
따라서 점 (2, 3)에서의 접선의 방정식은

$$y - 3 = 4(x - 2)$$

$$\therefore y = 4x - 5$$

즉 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \{x^2 - 1 - (4x - 5)\} dx \\ &= \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$



답 $\frac{8}{3}$

434

$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 4$ 로 놓으면

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$$

$$\therefore f'(0) = 1$$

따라서 점 (0, 4)에서의 접선의 방정식은

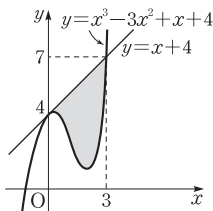
$$y = x + 4$$

곡선 $y = x^3 - 3x^2 + x + 4$ 와 직선 $y = x + 4$ 의 교점의

x 좌표는 $x^3 - 3x^2 + x + 4 = x + 4$ 에서

$$x^3 - 3x^2 = 0, \quad x^2(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$



따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^3 \{x + 4 - (x^3 - 3x^2 + x + 4)\} dx \\ &= \int_0^3 (-x^3 + 3x^2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 \right]_0^3 = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{27}{4}$

435

$$y = |3x^2 + 3x|$$

$$= \begin{cases} 3x^2 + 3x & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 0) \\ -3x^2 - 3x & (-1 \leq x \leq 0) \end{cases}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^{-1} (3x^2 + 3x) dx + \int_{-1}^0 (-3x^2 - 3x) dx \\ &= \left[x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_{-2}^{-1} + \left[-x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

답 3

436

$$y = |x^2 - x|$$

$$= \begin{cases} x^2 - x & (x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ -x^2 + x & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

곡선 $y = |x^2 - x|$ 와 직선

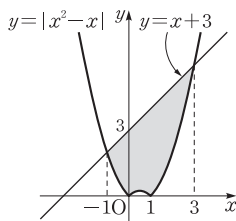
$y = x + 3$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - x = x + 3 \text{에서}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$



따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 \{x + 3 - (x^2 - x)\} dx \\ &+ \int_0^1 \{x + 3 - (-x^2 + x)\} dx \\ &+ \int_1^3 \{x + 3 - (x^2 - x)\} dx \\ &= \int_{-1}^0 (-x^2 + 2x + 3) dx + \int_0^1 (x^2 + 3) dx \\ &+ \int_1^3 (-x^2 + 2x + 3) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3 + 3x \right]_0^1 \\ &+ \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_1^3 \\ &= \frac{5}{3} + \frac{10}{3} + \frac{16}{3} \\ &= \frac{31}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{31}{3}$

다른 풀이 구하는 넓이는 곡선 $y = x^2 - x$ 와 직선

$y = x + 3$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이에서 곡선

$y = -x^2 + x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배를 뺀 것과 같으므로

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^3 \{x+3-(x^2-x)\}dx - 2 \int_0^1 (-x^2+x)dx \\
&= \int_{-1}^3 (-x^2+2x+3)dx - 2 \int_0^1 (-x^2+x)dx \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^3 - 2\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\
&= \frac{32}{3} - 2 \times \frac{1}{6} = \frac{31}{3}
\end{aligned}$$

02 정적분과 넓이의 활용

● 본책 214~218쪽

437

색칠한 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\begin{aligned}
& \int_{-2}^k \left(\frac{1}{2}x^2+x\right)dx = 0 \\
& \left[\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^k = 0 \\
& \frac{1}{6}k^3+\frac{1}{2}k^2-\frac{2}{3}=0, \quad k^3+3k^2-4=0 \\
& (k+2)^2(k-1)=0 \\
& \therefore k=1 \quad (\because k>0)
\end{aligned}$$

답 1

438

색칠한 두 도형의 넓이가 같으므로

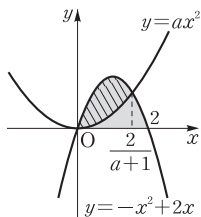
$$\begin{aligned}
& \int_0^3 \{x^2(x-3)-ax(x-3)\}dx = 0 \\
& \int_0^3 \{x^3-(a+3)x^2+3ax\}dx = 0 \\
& \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+3}{3}x^3+\frac{3}{2}ax^2\right]_0^3 = 0 \\
& \frac{9}{2}a-\frac{27}{4}=0 \quad \therefore a=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

답 $\frac{3}{2}$

439

곡선 $y=-x^2+2x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^2 (-x^2+2x)dx \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2 \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$



두 곡선 $y=-x^2+2x$, $y=ax^2$ 의 교점의 x 좌표는 $-x^2+2x=ax^2$ 에서

$$\begin{aligned}
& (a+1)x^2-2x=0, \quad x\{(a+1)x-2\}=0 \\
& \therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{2}{a+1}
\end{aligned}$$

따라서 두 곡선 $y=-x^2+2x$, $y=ax^2$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_0^{\frac{2}{a+1}} (-x^2+2x-ax^2)dx \\
&= \int_0^{\frac{2}{a+1}} \{-(a+1)x^2+2x\}dx \\
&= \left[-\frac{a+1}{3}x^3+x^2\right]_0^{\frac{2}{a+1}} \\
&= \frac{4}{3(a+1)^2}
\end{aligned}$$

이때 $S=2S_1$ 이므로

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3} &= 2 \times \frac{4}{3(a+1)^2} \\
(a+1)^2 &= 2, \quad a+1=\sqrt{2} \quad (\because a>0) \\
\therefore a &= -1+\sqrt{2}
\end{aligned}$$

답 $-1+\sqrt{2}$

440

곡선 $y=x^2-3x$ 와 직선 $y=ax$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2-3x=ax$ 에서

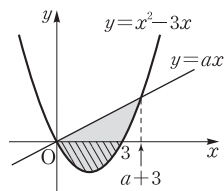
$$\begin{aligned}
& x^2-(a+3)x=0 \\
& x(x-a-3)=0 \\
& \therefore x=0 \text{ 또는 } x=a+3
\end{aligned}$$

곡선 $y=x^2-3x$ 와 직선 $y=ax$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{a+3} \{ax-(x^2-3x)\}dx \\
&= \int_0^{a+3} \{-x^2+(a+3)x\}dx \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+3}{2}x^2\right]_0^{a+3} = \frac{1}{6}(a+3)^3
\end{aligned}$$

곡선 $y=x^2-3x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$\begin{aligned}
S_1 &= -\int_0^3 (x^2-3x)dx \\
&= -\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{9}{2}
\end{aligned}$$



이때 $S=2S_1$ 이므로

$$\frac{1}{6}(a+3)^3 = 2 \times \frac{9}{2}$$

$$(a+3)^3 = 54, \quad a+3 = 3\sqrt[3]{2}$$

$$\therefore a = -3 + 3\sqrt[3]{2}$$

답 $-3 + 3\sqrt[3]{2}$

441

두 곡선 $y=2kx^2$, $y=-\frac{1}{2k}x^2$

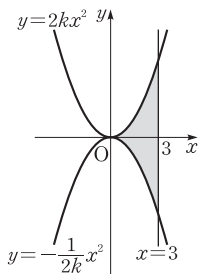
과 직선 $x=3$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^3 \left\{ 2kx^2 - \left(-\frac{1}{2k}x^2 \right) \right\} dx$$

$$= \left(2k + \frac{1}{2k} \right) \int_0^3 x^2 dx$$

$$= \left(2k + \frac{1}{2k} \right) \times \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^3$$

$$= 9 \left(2k + \frac{1}{2k} \right)$$



이때 $2k > 0$, $\frac{1}{2k} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$9 \left(2k + \frac{1}{2k} \right) \geq 9 \times 2 \sqrt{2k \times \frac{1}{2k}} = 18$$

(단, 등호는 $2k = \frac{1}{2k}$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 18이다.

답 18

개념 노트

산술평균과 기하평균의 관계

$a > 0$, $b > 0$ 일 때

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

442

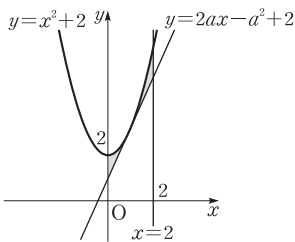
$f(x)=x^2+2$ 로 놓으면 $f'(x)=2x$

$$\therefore f'(a)=2a$$

따라서 점 (a, a^2+2) 에서의 접선의 방정식은

$$y - (a^2+2) = 2a(x-a)$$

$$\therefore y = 2ax - a^2 + 2$$



이때 곡선 $y=x^2+2$ 와 직선 $y=2ax-a^2+2$ 및 두 직선 $x=0$, $x=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^2 \{ x^2 + 2 - (2ax - a^2 + 2) \} dx$$

$$= \int_0^2 (x^2 - 2ax + a^2) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + a^2x \right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3} - 4a + 2a^2$$

$$= 2(a-1)^2 + \frac{2}{3}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{2}{3}$ 이다.

답 $\frac{2}{3}$

443

$f(x)=2x^3+x^2+x$ 에서

$$f'(x)=6x^2+2x+1$$

$$= 6 \left(x + \frac{1}{6} \right)^2 + \frac{5}{6} > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

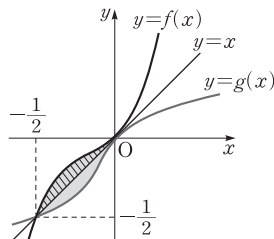
이때 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는

$$2x^3+x^2+x=x \text{에서}$$

$$2x^3+x^2=0, \quad x^2(2x+1)=0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=0$$



III-3

02
13
10
14
15

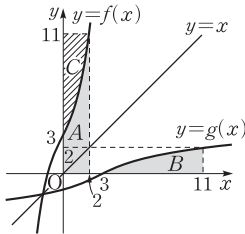
따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & 2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 \{(2x^3 + x^2 + x) - x\} dx \\ &= 2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 (2x^3 + x^2) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{3} x^3 \right]_{-\frac{1}{2}}^0 \\ &= 2 \times \frac{1}{96} = \frac{1}{48} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{48}$

444

$f(0)=3, f(2)=11$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 두 점 $(0, 3), (2, 11)$ 을 지나고 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.



따라서 위의 그림에서

(B의 넓이) = (C의 넓이)

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^2 f(x) dx + \int_{f(0)}^{f(2)} g(x) dx \\ &= \int_0^2 f(x) dx + \int_3^{11} g(x) dx \\ &= (A \text{의 넓이}) + (B \text{의 넓이}) \\ &= (A \text{의 넓이}) + (C \text{의 넓이}) \\ &= 2 \times 11 = 22 \end{aligned}$$

답 22

연습문제

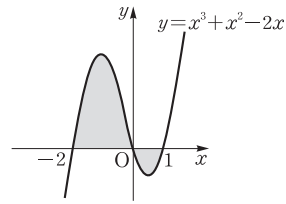
● 본책 219~221쪽

445

전략 곡선과 x 축의 교점의 x 좌표를 구한 다음 $y \geq 0$ 인 구간과 $y \leq 0$ 인 구간으로 나누어 정적분의 값을 구한다.

곡선 $y=x^3+x^2-2x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^3+x^2-2x=0$ 에서

$$\begin{aligned} & x(x+2)(x-1)=0 \\ \therefore & x=-2 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1 \end{aligned}$$



따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^0 (x^3+x^2-2x) dx - \int_0^1 (x^3+x^2-2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_{-2}^0 - \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{8}{3} - \left(-\frac{5}{12} \right) \\ &= \frac{37}{12} \end{aligned}$$

답 $\frac{37}{12}$

446

전략 곡선과 x 축의 교점의 x 좌표를 구한 다음 $y \geq 0$ 인 구간과 $y \leq 0$ 인 구간으로 나누어 정적분의 값을 구한다.

곡선 $y=x^3-1$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^3-1=0$ 에서

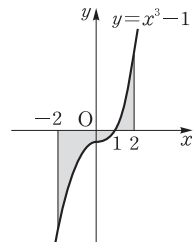
$$\begin{aligned} & (x-1)(x^2+x+1)=0 \\ \therefore & x=1 \quad (\because x^2+x+1 > 0) \end{aligned}$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는

넓이는

$$\begin{aligned} & -\int_{-2}^1 (x^3-1) dx \\ &+ \int_1^2 (x^3-1) dx \\ &= -\left[\frac{1}{4} x^4 - x \right]_{-2}^1 \\ &+ \left[\frac{1}{4} x^4 - x \right]_1^2 \\ &= -\left(-\frac{27}{4} \right) + \frac{11}{4} = \frac{19}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{19}{2}$

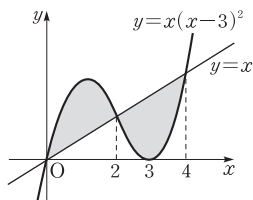


447

전략 곡선과 직선의 교점의 x 좌표를 구한 다음 곡선과 직선의 위치 관계를 파악한다.

곡선 $y=x(x-3)^2$ 과 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는 $x(x-3)^2=x$ 에서

$$\begin{aligned} & x(x-2)(x-4)=0 \\ \therefore & x=0 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=4 \end{aligned}$$



따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \{x(x-3)^2 - x\} dx + \int_2^4 \{x - x(x-3)^2\} dx \\ &= \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx \\ & \quad + \int_2^4 (-x^3 + 6x^2 - 8x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - 4x^2 \right]_2^4 \\ &= 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$

답 8

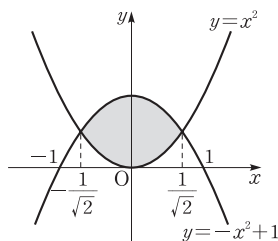
448

전략 두 곡선의 교점의 x 좌표를 구한 다음 두 곡선의 위치 관계를 파악한다.

두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2+1$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2 = -x^2 + 1 \text{에서} \quad x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 또는 } x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-x^2 + 1 - x^2) dx \\ &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-2x^2 + 1) dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-2x^2 + 1) dx \\ &= 2 \left[-\frac{2}{3}x^3 + x \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

449

전략 접선의 방정식을 구한 다음 곡선과 접선의 교점의 x 좌표를 구한다.

$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ 으로 놓으면

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 1$$

$$\therefore f'(-3) = 8$$

따라서 점 $(-3, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

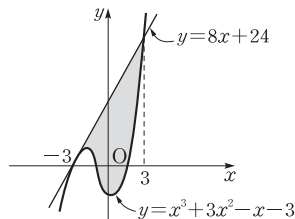
$$y = 8(x+3) \quad \therefore y = 8x + 24$$

곡선 $y = x^3 + 3x^2 - x - 3$ 과 직선 $y = 8x + 24$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 8x + 24$ 에서

$$x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = 0$$

$$(x+3)^2(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 3$$



따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-3}^3 \{8x + 24 - (x^3 + 3x^2 - x - 3)\} dx \\ &= \int_{-3}^3 (-x^3 - 3x^2 + 9x + 27) dx \\ &= 2 \int_0^3 (-3x^2 + 27) dx \\ &= 2 \left[-x^3 + 27x \right]_0^3 \\ &= 2 \times 54 = 108 \end{aligned}$$

답 108

450

전략 $x \leq 0$ 인 구간과 $x \geq 0$ 인 구간으로 나누어 정적분의 값을 구한다.

$$y = x^2 - |x| - 2 = \begin{cases} x^2 + x - 2 & (x \leq 0) \\ x^2 - x - 2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

함수 $y = x^2 - |x| - 2$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표는

(i) $x \leq 0$ 일 때

$$x^2 + x - 2 = 0 \text{에서} \quad (x+2)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -2 \quad (\because x \leq 0)$$

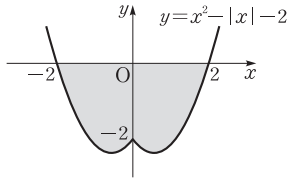
III-3

오
전
대
문
비
교

(ii) $x \geq 0$ 일 때

$$x^2 - x - 2 = 0 \text{에서} \quad (x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 2 \quad (\because x \geq 0)$$



따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$-\int_{-2}^0 (x^2 + x - 2) dx - \int_0^2 (x^2 - x - 2) dx$$

$$= -\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_{-2}^0$$

$$- \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_0^2$$

$$= -\left(-\frac{10}{3}\right) - \left(-\frac{10}{3}\right)$$

$$= \frac{20}{3}$$

답 $\frac{20}{3}$

다른 풀이 함수 $y = x^2 - |x| - 2$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

$$2 \left\{ -\int_0^2 (x^2 - x - 2) dx \right\}$$

$$= -2 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_0^2$$

$$= -2 \times \left(-\frac{10}{3}\right)$$

$$= \frac{20}{3}$$

451

전략 곡선 $y = x^2 - 5x$ 와 직선 $y = x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y = x^2 - 5x$ 와 두 직선 $y = x$, $x = k$ 로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 같음을 이용한다.

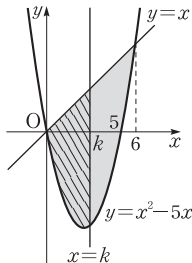
곡선 $y = x^2 - 5x$ 와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2 - 5x = x$ 에서

$$x^2 - 6x = 0$$

$$x(x - 6) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 6$$

따라서 곡선 $y = x^2 - 5x$ 와 직선 $y = x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하면



$$S = \int_0^6 \{x - (x^2 - 5x)\} dx$$

$$= \int_0^6 (-x^2 + 6x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^6 = 36$$

곡선 $y = x^2 - 5x$ 와 두 직선 $y = x$, $x = k$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \int_0^k \{x - (x^2 - 5x)\} dx$$

$$= \int_0^k (-x^2 + 6x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^k = -\frac{1}{3}k^3 + 3k^2$$

이때 $S = 2S_1$ 이므로

$$36 = 2 \left(-\frac{1}{3}k^3 + 3k^2 \right)$$

$$k^3 - 9k^2 + 54 = 0$$

$$(k - 3)(k^2 - 6k - 18) = 0$$

$$\therefore k = 3 \quad (\because 0 < k < 6)$$

답 ①

452

전략 두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 a , b 라 하면

(A의 넓이) $= \int_0^a f(x) dx$, (B의 넓이) $= -\int_a^b f(x) dx$ 임을 이용한다.

곡선 $y = f(x)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$kx(x - 2)(x - 3) = 0 \text{에서}$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 두 점 P, Q의 x 좌표는 각각 2, 3이므로

(A의 넓이) $-(B \text{의 넓이}) = 3$ 에서

$$\int_0^2 f(x) dx - \left\{ -\int_2^3 f(x) dx \right\} = 3$$

$$\int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = 3$$

$$\int_0^3 f(x) dx = 3$$

$$\int_0^3 kx(x - 2)(x - 3) dx = 3$$

$$k \int_0^3 (x^3 - 5x^2 + 6x) dx = 3$$

$$k \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^3 = 3$$

$$\frac{9}{4}k = 3 \quad \therefore k = \frac{4}{3}$$

답 ②

453

전략 $f(x) = kx(x-4)^2$ ($k < 0$)으로 놓고 $\int_0^4 |f(x)| dx = 4$ 에서 k 의 값을 구한다.

$f(x) = kx(x-4)^2$ ($k < 0$)으로 놓으면 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & -\int_0^4 kx(x-4)^2 dx \\ &= -k \int_0^4 (x^3 - 8x^2 + 16x) dx \\ &= -k \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 8x^2 \right]_0^4 \\ &= -\frac{64}{3}k \end{aligned}$$

즉 $-\frac{64}{3}k = 4$ 이므로

$$k = -\frac{3}{16}$$

따라서 $f(x) = -\frac{3}{16}x(x-4)^2$ 이므로

$$f(-2) = \frac{27}{2} \quad \text{답 } \frac{27}{2}$$

454

전략 $f(x)$ 의 식을 구한 다음 두 곡선 $y = x^2$, $y = f(x)$ 의 교점의 x 좌표를 구한다.

곡선 $y = x^2$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 곡선의 방정식은

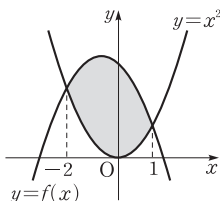
$$y = -x^2$$

이 곡선을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 5 만큼 평행이동한 곡선의 방정식은

$$\begin{aligned} y - 5 &= -(x+1)^2 \\ \therefore y &= -(x+1)^2 + 5 \\ \therefore f(x) &= -(x+1)^2 + 5 \end{aligned}$$

두 곡선 $y = x^2$ 과 $y = f(x)$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2 = -(x+1)^2 + 5$ 에서

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 &= 0, & (x+2)(x-1) &= 0 \\ \therefore x &= -2 \text{ 또는 } x = 1 \end{aligned}$$



따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^1 \{-(x+1)^2 + 5 - x^2\} dx \\ &= \int_{-2}^1 (-2x^2 - 2x + 4) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x \right]_{-2}^1 = 9 \end{aligned}$$

답 9

455

전략 접선의 방정식을 구한 다음 구간을 나누어 곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

$f(x) = 2x^2 + 3$ 으로 놓으면 $f'(x) = 4x$

접점의 좌표를 $(a, 2a^2 + 3)$ 이라 하면 $f'(a) = 4a$ 이므로 접선의 방정식은

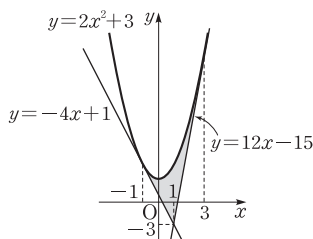
$$\begin{aligned} y - (2a^2 + 3) &= 4a(x - a) \\ \therefore y &= 4ax - 2a^2 + 3 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(1, -3)$ 을 지나므로

$$\begin{aligned} -3 &= 4a - 2a^2 + 3, & a^2 - 2a - 3 &= 0 \\ (a+1)(a-3) &= 0 & \therefore a &= -1 \text{ 또는 } a = 3 \end{aligned}$$

$a = -1$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서 $y = -4x + 1$

$a = 3$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서 $y = 12x - 15$



따라서 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \{2x^2 + 3 - (-4x + 1)\} dx \\ &+ \int_1^3 \{2x^2 + 3 - (12x - 15)\} dx \\ &= \int_{-1}^1 (2x^2 + 4x + 2) dx \\ &+ \int_1^3 (2x^2 - 12x + 18) dx \\ &= 2 \int_0^1 (2x^2 + 2) dx + \int_1^3 (2x^2 - 12x + 18) dx \\ &= 2 \left[\frac{2}{3}x^3 + 2x \right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^3 - 6x^2 + 18x \right]_1^3 \\ &= 2 \times \frac{8}{3} + \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{32}{3}$

III-3

이
것
이
는
이
것
이
는
이
것
이
는

개념 노트

곡선 밖의 한 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$ 밖의 한 점 (x_1, y_1) 에서 이 곡선에 그은 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

- 점점의 좌표를 $(t, f(t))$ 로 놓고 접선의 기울기 $f'(t)$ 를 구한다.
- 접선 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ 가 점 (x_1, y_1) 을 지남을 이용하여 t 의 값을 구한다.
- (ii)에서 구한 t 의 값을 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ 에 대입한다.

456

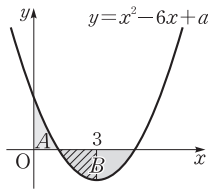
전략 곡선 $y=x^2-6x+a$ 가 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭임을 이용한다.

$A : B = 1 : 2$ 에서

$$B=2A$$

이때 곡선

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6x + a \\ &= (x-3)^2 + a - 9 \end{aligned}$$



가 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭이므로 위의 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}B=A$ 이다.

즉 곡선 $y=x^2-6x+a$ 와 x 축, y 축 및 직선 $x=3$ 으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\begin{aligned} \int_0^3 (x^2 - 6x + a) dx &= 0 \\ \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + ax \right]_0^3 &= 0 \\ -18 + 3a &= 0 \\ \therefore a &= 6 \end{aligned}$$

답 6

457

전략 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$ 과 직선 $y=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=kx^2$ 과 직선 $y=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 3배와 같음을 이용한다.

곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$ 과 직선 $y=1$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{1}{4}x^2=1 \text{에서}$$

$$x^2=4 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$ 과 직선 $y=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right) dx = 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right) dx \\ &= 2 \left[x - \frac{1}{12}x^3 \right]_0^2 = 2 \times \frac{4}{3} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

한편 곡선 $y=kx^2$ 과 직선 $y=1$ 의 교점의 x 좌표는 $kx^2=1$ 에서

$$x^2 = \frac{1}{k} \quad \therefore x = -\frac{1}{\sqrt{k}} \text{ 또는 } x = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

따라서 곡선 $y=kx^2$ 과 직선 $y=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{k}}}^{\frac{1}{\sqrt{k}}} (1 - kx^2) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}}} (1 - kx^2) dx \\ &= 2 \left[x - \frac{k}{3}x^3 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{k}}} = 2 \times \frac{2}{3\sqrt{k}} \\ &= \frac{4}{3\sqrt{k}} \end{aligned}$$

이때 $S=3S_1$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{8}{3} &= 3 \times \frac{4}{3\sqrt{k}}, \quad \sqrt{k} = \frac{3}{2} \\ \therefore k &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

답 9/4

458

전략 구하는 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같음을 이용한다.

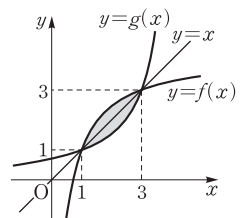
함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 구하는 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러

싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로

$$\begin{aligned} 2 \int_1^3 \{f(x) - x\} dx &= 2 \int_1^3 f(x) dx - 2 \int_1^3 x dx \\ &= 2 \times \frac{11}{2} - 2 \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_1^3 \\ &= 11 - 2 \times 4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

답 3



459

전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 함수 $y=g(x)$ 의 그래프를 그려 본다.

$$f(x)=x^3+x^2-x \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad x=-1 \text{ 또는 } x=\frac{1}{3}$$

x	...	-1	...	$\frac{1}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{5}{27}$	$\nearrow$

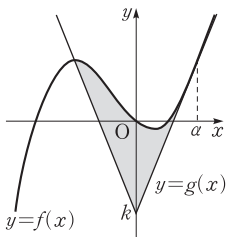
따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값 1, $x=\frac{1}{3}$ 에

서 극솟값 $-\frac{5}{27}$ 를 갖는다.

한편

$$g(x)=4|x|+k=\begin{cases} 4x+k & (x \geq 0) \\ -4x+k & (x \leq 0) \end{cases}$$

이므로 두 함수 $y=f(x)$,
 $y=g(x)$ 의 그래프가 만나
는 점의 개수가 2가 되려면
오른쪽 그림과 같이 함수
 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선
 $y=4x+k$ 가 접해야 한다.



이때 접점의 x 좌표를

α ($\alpha > 0$)라 하면 $f'(\alpha)=4$ 이므로

$$3\alpha^2+2\alpha-1=4$$

$$3\alpha^2+2\alpha-5=0$$

$$(3\alpha+5)(\alpha-1)=0$$

$$\therefore \alpha=1 \quad (\because \alpha > 0)$$

즉 접점의 좌표가 $(1, 1)$ 이므로

$$1=4+k \quad \therefore k=-3$$

$$\therefore g(x)=\begin{cases} 4x-3 & (x \geq 0) \\ -4x-3 & (x \leq 0) \end{cases}$$

$x \leq 0$ 에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교
점의 x 좌표는 $x^3+x^2-x=-4x-3$ 에서

$$x^3+x^2+3x+3=0$$

$$(x+1)(x^2+3)=0$$

$$\therefore x=-1 \quad (\because x^2+3 > 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore S &= \int_{-1}^1 \{f(x)-g(x)\}dx \\ &= \int_{-1}^0 \{x^3+x^2-x-(-4x-3)\}dx \\ &\quad + \int_0^1 \{x^3+x^2-x-(4x-3)\}dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3+x^2+3x+3)dx \\ &\quad + \int_0^1 (x^3+x^2-5x+3)dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x \right]_{-1}^0 \\ &\quad + \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x \right]_0^1 \\ &= \frac{19}{12} + \frac{13}{12} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore 30 \times S = 30 \times \frac{8}{3} = 80$$

답 80

다른 풀이 S 는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 로
둘러싸인 도형의 넓이에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와
직선 $y=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 뺀 것과 같으므
로

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \int_{-1}^1 \{1-(x^3+x^2-x)\}dx \\ &= 4 - \int_{-1}^1 (-x^3-x^2+x+1)dx \\ &= 4 - 2 \int_0^1 (-x^2+1)dx \\ &= 4 - 2 \left[-\frac{1}{3}x^3+x \right]_0^1 \\ &= 4 - 2 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

460

전략 곡선 $y=x^2-x-2$ 와 직선 $y=ax$ 의 두 교점의 x 좌표를
 α , β ($\alpha < \beta$)로 놓고 이차방정식 $x^2-x-2=ax$ 에서 근과 계수
의 관계를 이용한다.

곡선 $y=x^2-x-2$ 와 직선

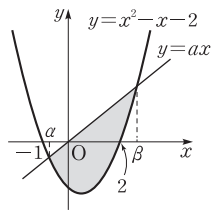
$y=ax$ 의 두 교점의 x 좌표를

α , β ($\alpha < \beta$)라 하면 α , β 는

방정식 $x^2-x-2=ax$, 즉

$x^2-(a+1)x-2=0$ 의 두

근이다.



따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = a + 1, \alpha\beta = -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 곡선 $y = x^2 - x - 2$ 와 직선 $y = ax$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^\beta \{ax - (x^2 - x - 2)\} dx \\ &= \int_a^\beta \{-x^2 + (a+1)x + 2\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{a+1}{2}x^2 + 2x \right]_a^\beta \\ &= -\frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3) + \frac{a+1}{2}(\beta^2 - \alpha^2) \\ &\quad + 2(\beta - \alpha) \\ &= -\frac{1}{3}(\beta - \alpha)(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2) \\ &\quad + \frac{a+1}{2}(\beta - \alpha)(\beta + \alpha) + 2(\beta - \alpha) \\ &= -\frac{1}{6}(\beta - \alpha) \\ &\quad \times \{2(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \\ &\quad - 3(a+1)(\alpha + \beta) - 12\} \\ &= -\frac{1}{6}\sqrt{(a+\beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &\quad \times [2\{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta\} \\ &\quad - 3(a+1)(\alpha + \beta) - 12] \quad (\because \alpha < \beta) \\ &= -\frac{1}{6}\sqrt{(a+1)^2 + 8} \\ &\quad \times [2\{(a+1)^2 + 2\} - 3(a+1)^2 - 12] \\ &\quad (\because \textcircled{1}) \\ &= -\frac{1}{6}\sqrt{(a+1)^2 + 8} \times \{-(a+1)^2 - 8\} \\ &= \frac{1}{6}\{(a+1)^2 + 8\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

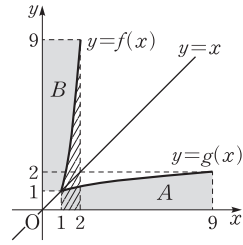
따라서 $S(a)$ 는 $(a+1)^2 + 8$ 의 값이 최소일 때, 즉 $a = -1$ 일 때 최소이다.

답 -1

461

전략 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭임을 이용한다.

$f(1)=1, f(2)=9$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 두 점 $(1, 1), (2, 9)$ 를 지나고 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.



따라서 위의 그림에서

$$(A \text{의 넓이}) = (B \text{의 넓이})$$

이므로

$$\begin{aligned} \int_1^9 g(x) dx &= (A \text{의 넓이}) = (B \text{의 넓이}) \\ &= 2 \times 9 - 1 \times 1 - \int_1^2 f(x) dx \\ &= 17 - \int_1^2 (x^3 + x - 1) dx \\ &= 17 - \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^2 \\ &= 17 - \frac{17}{4} \\ &= \frac{51}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{51}{4}$

03 속도 와 거리

● 본책 222~225쪽

462

(1) 점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간의 속도는 0이므로

$$\begin{aligned} v(t) &= -t^2 - t + 6 = 0 \text{에서} \\ t^2 + t - 6 &= 0, \quad (t+3)(t-2) = 0 \\ \therefore t &= 2 \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

따라서 운동 방향이 바뀔 때의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^2 (-t^2 - t + 6) dt \\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 6t \right]_0^2 \\ &= \frac{22}{3} \end{aligned}$$

- (2) 시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^3 (-t^2 - t + 6) dt = \left[-\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 6t \right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

- (3) 시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^3 |-t^2 - t + 6| dt \\ &= \int_0^2 (-t^2 - t + 6) dt + \int_2^3 (t^2 + t - 6) dt \\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 6t \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 6t \right]_2^3 \\ &= \frac{22}{3} + \frac{17}{6} \\ &= \frac{61}{6} \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{22}{3}$ (2) $\frac{9}{2}$ (3) $\frac{61}{6}$

463

열차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$$v(t) = 24 - 2t = 0 \text{에서}$$

$$t = 12$$

따라서 열차는 제동을 건 지 12초 후에 정지하므로 열차가 정지할 때까지 달린 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^{12} |24 - 2t| dt = \int_0^{12} (24 - 2t) dt \\ &= \left[24t - t^2 \right]_0^{12} \\ &= 144 \text{ (m)} \end{aligned}$$

답 144 m

464

- (1) 공이 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로

$$v(t) = -10t + 60 = 0 \text{에서}$$

$$t = 6$$

따라서 $t=6$ 일 때 최고 높이에 도달하므로 구하는 높이는

$$\begin{aligned} & 0 + \int_0^6 (-10t + 60) dt = \left[-5t^2 + 60t \right]_0^6 \\ &= 180 \text{ (m)} \end{aligned}$$

- (2) 공을 던진 후 8초 동안 공이 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^8 |-10t + 60| dt \\ &= \int_0^6 (-10t + 60) dt + \int_6^8 (10t - 60) dt \\ &= \left[-5t^2 + 60t \right]_0^6 + \left[5t^2 - 60t \right]_6^8 \\ &= 180 + 20 = 200 \text{ (m)} \end{aligned}$$

- (3) 공을 던진 지 t 초 후의 공의 높이는

$$\begin{aligned} & 0 + \int_0^t (-10t + 60) dt \\ &= \left[-5t^2 + 60t \right]_0^t = -5t^2 + 60t \text{ (m)} \end{aligned}$$

공이 땅에 떨어질 때의 높이는 0이므로

$$-5t^2 + 60t = 0 \text{에서}$$

$$t(t - 12) = 0 \quad \therefore t = 12 \text{ (} \because t > 0 \text{)}$$

따라서 $t=12$ 일 때 공이 땅에 떨어지므로 구하는 속도는

$$v(12) = -60 \text{ (m/s)}$$

답 (1) 180 m (2) 200 m (3) -60 m/s

465

- (1) 시각 $t=5$ 에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} & 0 + \int_0^5 v(t) dt \\ &= \int_0^4 v(t) dt + \int_4^5 v(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \times (1 + 4) \times 2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

- (2) 운동 방향이 바뀌는 순간의 속도는 0이므로

$$v(t) = 0 \text{에서 } t = 4$$

따라서 점 P는 시각 $t=4$ 에서 운동 방향을 바꾸므로 구하는 거리는

$$\int_0^4 |v(t)| dt = \frac{1}{2} \times (1 + 4) \times 2 = 5$$

- (3) 시각 $t=0$ 에서 $t=5$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^5 |v(t)| dt \\ &= \int_0^4 v(t) dt - \int_4^5 v(t) dt \\ &= 5 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{11}{2} \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{9}{2}$ (2) 5 (3) $\frac{11}{2}$



466

전략 시간 $t=k$ 에서의 점 P의 위치는 $0 + \int_0^k v(t)dt$, 시간 $t=t_1$ 에서 $t=t_2$ 까지 점 P가 움직인 거리는 $\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|dt$ 임을 이용한다.

시간 $t=3$ 에서의 점 P의 위치는

$$a = 0 + \int_0^3 (6t - 3t^2)dt = \left[3t^2 - t^3 \right]_0^3 = 0$$

시간 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} b &= \int_0^3 |6t - 3t^2|dt \\ &= \int_0^2 (6t - 3t^2)dt + \int_2^3 (-6t + 3t^2)dt \\ &= \left[3t^2 - t^3 \right]_0^2 + \left[-3t^2 + t^3 \right]_2^3 \\ &= 4 + 4 = 8 \\ \therefore a + b &= 8 \end{aligned}$$

답 8

467

전략 먼저 두 점 P, Q의 t 초 후의 위치를 각각 구한다.

두 점 P, Q의 t 초 후의 위치를 각각 x_1, x_2 라 하면

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 + \int_0^t (3t^2 - 8t + 4)dt \\ &= \left[t^3 - 4t^2 + 4t \right]_0^t \\ &= t^3 - 4t^2 + 4t, \\ x_2 &= 0 + \int_0^t (12 - 8t)dt \\ &= \left[12t - 4t^2 \right]_0^t \\ &= 12t - 4t^2 \end{aligned}$$

$x_1 = x_2$ 일 때 두 점 P, Q가 만나므로

$$\begin{aligned} t^3 - 4t^2 + 4t &= 12t - 4t^2 \\ t^3 - 8t &= 0, \quad t(t^2 - 8) = 0 \\ \therefore t &= 2\sqrt{2} \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

답 $2\sqrt{2}$ 초

468

전략 시간 $t=1$ 에서 점 P의 위치는 $0 + \int_0^1 v(t)dt$ 임을 이용하여 k 의 값을 구한다.

시간 $t=0$ 에서 점 P의 위치가 0이므로 시간 $t=1$ 에서 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^1 (3t^2 - 4t + k)dt &= \left[t^3 - 2t^2 + kt \right]_0^1 \\ &= k - 1 \end{aligned}$$

따라서 $k - 1 = -3$ 이므로

$$k = -2$$

즉 $v(t) = 3t^2 - 4t - 2$ 이므로 시간 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^3 (3t^2 - 4t - 2)dt = \left[t^3 - 2t^2 - 2t \right]_1^3 = 6$$

답 6

469

전략 $0 \leq t \leq 20$ 인 구간과 $20 \leq t \leq 35$ 인 구간으로 나누어 정적분의 값을 구한다.

출발한 지 35분 후 열기구의 지면으로부터의 높이는

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^{20} t dt + \int_{20}^{35} (60 - 2t)dt \\ = \left[\frac{1}{2}t^2 \right]_0^{20} + \left[60t - t^2 \right]_{20}^{35} \\ = 200 + 75 = 275 \text{ (m)} \end{aligned}$$

답 275 m

470

전략 원점에서 출발하여 다시 원점에 돌아올 때까지 점 P의 위치의 변화량은 0이다.

시간 $t=a$ 에서 점 P가 처음으로 다시 원점에 돌아온다고 하면 시간 $t=0$ 에서 $t=a$ 까지 점 P의 위치의 변화량이 0이므로

$$\int_0^a v(t)dt = 0$$

이때

$$\begin{aligned} \int_0^2 v(t)dt &= \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1, \\ \int_2^3 v(t)dt &= -\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = -1 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \int_0^3 v(t)dt &= \int_0^2 v(t)dt + \int_2^3 v(t)dt \\ &= 1 + (-1) = 0 \end{aligned}$$

따라서 다시 원점에 돌아올 때까지 걸리는 시간은 3초이다.

답 3초

471

전략 시각 $t=a$ 에서의 점 P의 위치가 원점이면 시각 $t=0$ 에서 $t=a$ 까지 점 P의 위치의 변화량이 0임을 이용한다.

시각 $t=a$ 에서 점 P가 원점으로 다시 돌아온다고 하면

$$\begin{aligned}\int_0^a (-9t+18)dt &= 0 \\ \left[-\frac{9}{2}t^2+18t\right]_0^a &= 0, \quad -\frac{9}{2}a^2+18a=0 \\ a(a-4) &= 0 \quad \therefore a=4 \quad (\because a>0)\end{aligned}$$

따라서 구하는 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^4 |-9t+18|dt &= \int_0^2 (-9t+18)dt + \int_2^4 (9t-18)dt \\ &= \left[-\frac{9}{2}t^2+18t\right]_0^2 + \left[\frac{9}{2}t^2-18t\right]_2^4 \\ &= 18+18 \\ &= 36\end{aligned}$$

답 36

472

전략 시각 $t=0$ 에서 $t=a$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^a |v(t)|dt \text{임을 이용한다.}$$

점 P가 시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^2 |6t^2-12t|dt &= \int_0^2 (-6t^2+12t)dt \\ &= \left[-2t^3+6t^2\right]_0^2 = 8\end{aligned}$$

따라서 $a>2$ 이므로 점 P가 시각 $t=0$ 에서 $t=a$ 까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^a |6t^2-12t|dt &= \int_0^2 (-6t^2+12t)dt + \int_2^a (6t^2-12t)dt \\ &= 8 + \left[2t^3-6t^2\right]_2^a = 8 + (2a^3-6a^2+8) \\ &= 2a^3-6a^2+16\end{aligned}$$

즉 $2a^3-6a^2+16=48$ 에서

$$\begin{aligned}a^3-3a^2-16 &= 0 \\ (a-4)(a^2+a+4) &= 0 \\ \therefore a &= 4 \quad (\because a^2+a+4>0) \\ \therefore v(a) &= v(4) = 48\end{aligned}$$

답 48

473

전략 물체가 지면에 도달할 때 물체의 높이는 0임을 이용한다.

물체를 쏘아 올린 지 t 초 후의 물체의 높이는

$$\begin{aligned}20 + \int_0^t (15-10t)dt &= 20 + [15t-5t^2]_0^t \\ &= -5t^2+15t+20\end{aligned}$$

물체가 지면에 도달할 때의 높이는 0이므로

$$\begin{aligned}-5t^2+15t+20 &= 0 \text{에서} \\ t^2-3t-4 &= 0, \quad (t+1)(t-4)=0 \\ \therefore t &= 4 \quad (\because t>0)\end{aligned}$$

따라서 물체가 지면에 도달할 때까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^4 |15-10t|dt &= \int_0^{\frac{3}{2}} (15-10t)dt + \int_{\frac{3}{2}}^4 (-15+10t)dt \\ &= \left[15t-5t^2\right]_0^{\frac{3}{2}} + \left[-15t+5t^2\right]_{\frac{3}{2}}^4 \\ &= \frac{45}{4} + \frac{125}{4} \\ &= \frac{85}{2} \text{ (m)}\end{aligned}$$

답 $\frac{85}{2}$ m

다른 풀이 물체가 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0
이므로 $v(t)=15-10t=0$ 에서

$$t = \frac{3}{2}$$

따라서 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{3}{2}} |15-10t|dt &= \int_0^{\frac{3}{2}} (15-10t)dt \\ &= \left[15t-5t^2\right]_0^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{45}{4} \text{ (m)}\end{aligned}$$

이때 물체를 지상 20 m의 높이에서 쏘아 올렸으므로
물체가 지면에 도달할 때까지 움직인 거리는

$$\frac{45}{4} + \left(\frac{45}{4} + 20\right) = \frac{85}{2} \text{ (m)}$$

474

전략 시각 $t=3$ 에서의 점 P의 위치는 $0 + \int_0^3 v(t)dt$ 임을 이용하여 a 의 값을 구한다.

시각 $t=3$ 에서의 점 P의 위치는

III-3

오
전
대
로
만
아

$$\begin{aligned}
 & 0 + \int_0^3 v(t) dt \\
 &= \int_0^1 v(t) dt + \int_1^3 v(t) dt \\
 &= \frac{1}{2} \times 1 \times a + \frac{1}{2} \times (a+2a) \times 2 \\
 &= \frac{7}{2} a
 \end{aligned}$$

즉 $\frac{7}{2} a = \frac{7}{2}$ 이므로 $a=1$

따라서 시각 $t=0$ 에서 $t=6$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}
 & \int_0^6 |v(t)| dt \\
 &= \int_0^1 v(t) dt + \int_1^3 v(t) dt + \int_3^4 v(t) dt \\
 &\quad - \int_4^6 v(t) dt \\
 &= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times (1+2) \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \\
 &= \frac{11}{2}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{11}{2}$

475

전략 점 P의 운동 방향을 조사하여 점 P의 위치가 0이 되는 시각을 구한다.

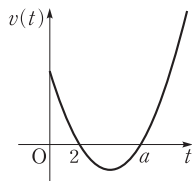
점 P는 $0 < t < 2$ 또는 $t > a$ 에서 양의 방향으로 움직이고,

$2 < t < a$ 에서 음의 방향으로 움직이므로 $t > 0$ 에서 점 P의 위치가 0이 되는 순간이 한 번뿐이려

면 점 P의 시각 $t=a$ 에서의 위치가 0이어야 한다.

이때 점 P의 시각 $t=0$ 에서의 위치가 0이므로 시각 $t=a$ 에서의 위치는

$$\begin{aligned}
 & 0 + \int_0^a 3(t-2)(t-a) dt \\
 &= 3 \int_0^a \{t^2 - (a+2)t + 2a\} dt \\
 &= 3 \left[\frac{1}{3} t^3 - \frac{a+2}{2} t^2 + 2at \right]_0^a \\
 &= 3 \left(\frac{1}{3} a^3 - \frac{a+2}{2} \times a^2 + 2a^2 \right) \\
 &= -\frac{1}{2} a^3 + 3a^2
 \end{aligned}$$



따라서 $-\frac{1}{2} a^3 + 3a^2 = 0$ 이므로

$$a^2(a-6)=0 \quad \therefore a=6 \quad (\because a>2)$$

즉 $v(t)=3(t-2)(t-6)$ 이므로

$$v(8)=36$$

답 ②

476

전략 점 P의 시각 $t=k$ 에서의 위치는 $0 + \int_0^k v(t) dt$ 임을 이용하여 주어진 조건에서 정적분의 값을 구한다.

점 P는 $t=a$ 에서 처음으로 운동 방향을 바꾸므로

$$0 + \int_0^a v(t) dt = -10$$

$$\therefore \int_0^a v(t) dt = -10$$

또 시각 $t=c$ 에서의 점 P의 위치가 -8 이므로

$$0 + \int_0^c v(t) dt = -8$$

$$\int_0^a v(t) dt + \int_a^b v(t) dt + \int_b^c v(t) dt = -8$$

$$-10 + \int_a^b v(t) dt + \int_b^c v(t) dt = -8$$

$$\therefore \int_a^b v(t) dt + \int_b^c v(t) dt = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $\int_0^b v(t) dt = \int_b^c v(t) dt$ 에서

$$\int_0^a v(t) dt + \int_a^b v(t) dt = \int_b^c v(t) dt$$

$$-10 + \int_a^b v(t) dt = \int_b^c v(t) dt$$

$$\therefore \int_a^b v(t) dt - \int_b^c v(t) dt = 10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$2 \int_a^b v(t) dt = 12 \quad \therefore \int_a^b v(t) dt = 6$$

따라서 구하는 거리는

$$\int_a^b |v(t)| dt = \int_a^b v(t) dt = 6$$

답 6