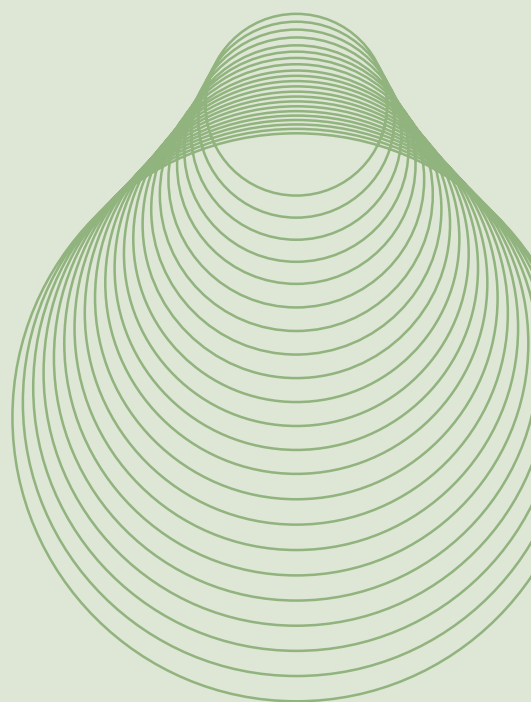




유형의 완성 RPM

미적분 I

정답및풀이



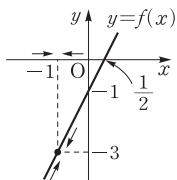
01 함수의 극한

교과서 문제 정복하기

본책 007쪽, 009쪽

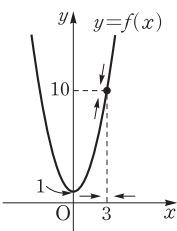
0001 $f(x)=2x-1$ 이라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 x 의 값이 -1 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 -3 에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2x-1) = -3 \quad \text{답 } -3$$



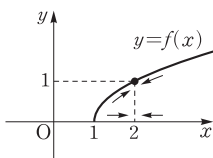
0002 $f(x)=x^2+1$ 이라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 x 의 값이 3 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 10 에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2+1) = 10 \quad \text{답 } 10$$



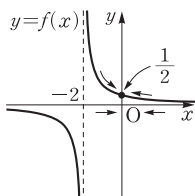
0003 $f(x)=\sqrt{x-1}$ 이라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 x 의 값이 2 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 1 에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-1} = 1 \quad \text{답 } 1$$



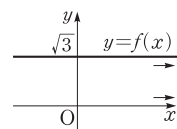
0004 $f(x)=\frac{1}{x+2}$ 이라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 x 의 값이 0 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 $\frac{1}{2}$ 에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$



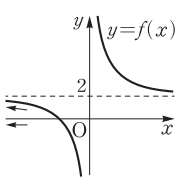
0005 $f(x)=\sqrt{3}$ 이라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 항상 $\sqrt{3}$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{3} = \sqrt{3} \quad \text{답 } \sqrt{3}$$



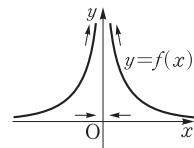
0006 $f(x)=2+\frac{1}{x}$ 이라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 2 에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2 \quad \text{답 } 2$$



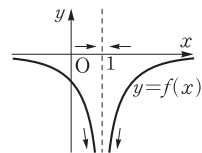
0007 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 이라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 x 의 값이 0 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty \quad \text{답 } \infty$$



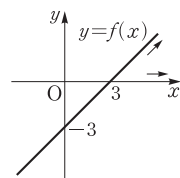
0008 $f(x)=-\frac{1}{|x-1|}$ 이라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 x 의 값이 1 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{1}{|x-1|}\right) = -\infty \quad \text{답 } -\infty$$



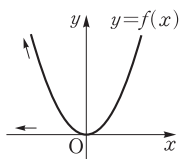
0009 $f(x)=x-3$ 이라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값도 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x-3) = \infty \quad \text{답 } \infty$$



0010 $f(x)=x^2$ 이라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \infty \quad \text{답 } \infty$$



0011 (3) $\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = 2$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$
따라서 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

(6) $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 2$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

답 (1) 0 (2) 2 (3) 존재하지 않는다. (4) 2 (5) 2 (6) 2

참고 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 정의되지 않을 때에도 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값이 존재할 수 있다.

0012 (1) $x \rightarrow 0+$ 일 때, $x > 0$ 이므로 $|x| = x$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} 1 = 1$$

(2) $x \rightarrow 0-$ 일 때, $x < 0$ 이므로 $|x| = -x$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} (-1) = -1 \end{aligned}$$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

답 (1) 1 (2) -1 (3) 존재하지 않는다.

$$\begin{aligned} 0013 \quad \lim_{x \rightarrow -1} (1-3x) &= \lim_{x \rightarrow -1} 1 - 3 \lim_{x \rightarrow -1} x \\ &= 1 - 3 \times (-1) = 4 \end{aligned} \quad \text{답 4}$$

$$\begin{aligned} 0014 \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 5) &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 4 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 \\ &= 4 - 4 \times 2 + 5 = 1 \end{aligned} \quad \text{답 1}$$

$$\begin{aligned} 0015 \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4)(x + 1) &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4) \times \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) \\ &= (\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 4) \times (\lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1) \\ &= (1 - 4) \times (1 + 1) = -6 \end{aligned} \quad \text{답 -6}$$

$$\begin{aligned} 0016 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3}{x - 1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 3)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x - 1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - \lim_{x \rightarrow 3} 3}{\lim_{x \rightarrow 3} x - \lim_{x \rightarrow 3} 1} \\ &= \frac{9 - 3}{3 - 1} = 3 \end{aligned} \quad \text{답 3}$$

$$\begin{aligned} 0017 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -2 \end{aligned} \quad \text{답 -2}$$

$$\begin{aligned} 0018 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x - 3) = -1 \end{aligned} \quad \text{답 -1}$$

$$\begin{aligned} 0019 \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} 0020 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+4} + 2)}{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+4} + 2)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+4} + 2) \\ &= 4 \end{aligned} \quad \text{답 4}$$

$$\begin{aligned} 0021 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - 2}{3x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^2}} = 0 \end{aligned} \quad \text{답 0}$$

$$\begin{aligned} 0022 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 2}{2x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{2} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} 0023 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 2}{1 + \frac{2}{x}} = \infty \end{aligned} \quad \text{답 } \infty$$

$$\begin{aligned} 0024 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 3x + 2) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = \infty \end{aligned} \quad \text{답 } \infty$$

$$\begin{aligned} 0025 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 10x} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 10x} - x)(\sqrt{x^2 + 10x} + x)}{\sqrt{x^2 + 10x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x}{\sqrt{x^2 + 10x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10}{\sqrt{1 + \frac{10}{x}} + 1} \\ &= \frac{10}{1 + 1} = 5 \end{aligned} \quad \text{답 5}$$

$$\begin{aligned} 0026 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \times \frac{x}{x+1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1 \end{aligned} \quad \text{답 1}$$

$$\begin{aligned} 0027 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{x-3} \left(x - \frac{9}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2}{x-3} \times \frac{x^2 - 9}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{2}{x-3} \times \frac{(x-3)(x+3)}{x} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x+3)}{x} = 4 \end{aligned} \quad \text{답 4}$$

0028 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.
즉 $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + a) = 0$ 이므로
 $4 + a = 0 \quad \therefore a = -4$ 답 -4

0029 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.
즉 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{3-x} + a) = 0$ 이므로
 $\sqrt{3} + a = 0 \quad \therefore a = -\sqrt{3}$ 답 $-\sqrt{3}$

0030 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.
즉 $\lim_{x \rightarrow 2} (ax + b) = 0$ 이므로
 $2a + b = 0 \quad \therefore b = -2a$
이를 주어진 식의 좌변에 대입하면
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax - 2a}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-2)}{x-2} = a$
 $\therefore a = 3, b = -6$ 답 $a=3, b=-6$

0031 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.
즉 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax - b) = 0$ 이므로
 $1 + a - b = 0 \quad \therefore b = a + 1$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+ax-(a+1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+a+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+a+1} \\ &= \frac{1}{a+2}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{a+2} = -1$ 이므로

$$a = -3, b = -2$$

답 $a = -3, b = -2$

0032 $\lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + 2x - 3) = -2, \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x - 1) = -2$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$$

답 -2

0033 $x^2 + 1 > 0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x^2 + 1$ 로 나누면

$$\frac{4x^2 - 1}{x^2 + 1} \leq f(x) \leq \frac{4x^2 + 5}{x^2 + 1}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 1}{x^2 + 1} = 4, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5}{x^2 + 1} = 4$ 이므로 함수의 극한의

대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4$$

답 4

유형 익히기

• 본책 010~017쪽

0034 ① $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$

② $\lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = 1$

③ $\lim_{x \rightarrow 5-} f(x) = 4$

④ $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = -3$

즉 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

⑤ $\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = 2$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$

답 ④

0035 ① $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -\infty$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

②, ③, ④ $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

⑤ $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값이 존재한다.

답 ⑤

0036 ㄱ. $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$$

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 2$

즉 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

0037 $\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} (x+k) = -2+k$

... 1단계

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} (-x^2 - 4x + 3) = 7$$

... 2단계

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ 의 값이 존재하려면 $\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} f(x)$ 이어야 하므로

$$-2+k=7 \quad \therefore k=9$$

... 3단계

답 9

	채점 요소	비율
1단계	$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x)$ 의 값을 k 에 대한 식으로 나타내기	30 %
2단계	$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x)$ 의 값 구하기	30 %
3단계	k 의 값 구하기	40 %

0038 ㄱ. $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$ 이라 하면

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = \infty$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - \frac{1}{x}\right)$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x-2}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x-2}{-(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2-} (-1) = -1$

ㄷ. $f(x) = \frac{x-3}{x+3} = 1 - \frac{6}{x+3}$ 이라 하

면 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3} = 0$$

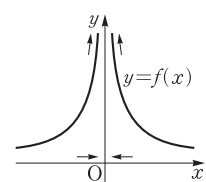
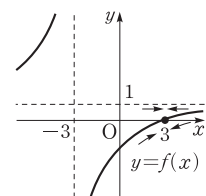
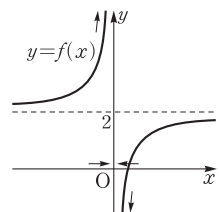
ㄹ. $f(x) = \frac{|x|}{x^2} = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x > 0) \\ -\frac{1}{x} & (x < 0) \end{cases}$

이라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2} = \infty$$

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ의 2개이다.

답 ③



참고 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2} = \infty$ 에서 ∞ 는 일정한 값이 아닌 한없이 커지는 상
태를 나타내므로 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2}$ 의 값은 존재하지 않는다.

0039 $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 + 0 + 3 = 6$ 답 6

0040 $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x+1) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} 3 = 3$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 4$ 답 4

0041 $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{|x - 2|} = \frac{(x-2)(2x+1)}{|x-2|}$
 $= \begin{cases} 2x+1 & (x > 2) \\ -2x-1 & (x < 2) \end{cases}$
 따라서
 $a = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (2x+1) = 5,$
 $b = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (-2x-1) = -5$
 이므로 $a - b = 10$ 답 10

0042 ① $x \rightarrow 1+$ 일 때, $[x] = 1$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{[x]}{x} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x} = 1$
 ② $x \rightarrow 0+$ 일 때 $x+1 \rightarrow 1+$ 이므로 $[x+1] = 1$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x+1}{[x+1]} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x+1}{1} = 1$
 ③ $x \rightarrow 0-$ 일 때 $x-1 \rightarrow -1-$ 이므로 $[x-1] = -2$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{[x-1]}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-2}{x-1} = 2$
 ④ $x \rightarrow 3$ 일 때 $(x-3)^2 \rightarrow 0+$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 3} [(x-3)^2] = 0$
 ⑤ $x \rightarrow \infty$ 일 때 $5 + \frac{2}{x} \rightarrow 5+$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[5 + \frac{2}{x} \right] = 5$ 답 3

0043 $x-5=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 5$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 5} f(x-5) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 3 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+4f(x)}{2-f(x)} = \frac{1+4 \times 3}{2-3} = -13$ 답 -13

0044 $x-3=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 3$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x-3)}{x^2-9} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{(t+3)(t+6)}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t(t+6)}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t+6}$
 $= 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0045 주어진 그래프에서
 $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2$
 $1-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(1-x) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) = 0$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(1-x) = 2 + 0 = 2$ 답 2

0046 $2f(x) - g(x) = h(x)$ 로 놓으면 $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 3$ 이고
 $g(x) = 2f(x) - h(x)$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3g(x)}{3f(x) - g(x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3\{2f(x) - h(x)\}}{3f(x) - \{2f(x) - h(x)\}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5f(x) + 3h(x)}{f(x) + h(x)} \leftarrow \frac{\infty}{\infty} \text{ 꼴}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5 + 3 \times \frac{h(x)}{f(x)}}{1 + \frac{h(x)}{f(x)}} \leftarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)}{f(x)} = 0$
 $= -5$ 답 -5

0047 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = a$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 3g(x)}{f(x)g(x) - 4} = \frac{1}{2}$ 에서 $\frac{2+3a}{2a-4} = \frac{1}{2}$
 $4+6a=2a-4 \quad \therefore a=-2$ 답 -2

0048 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x-3f(x)}{7x+f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5-3 \times \frac{f(x)}{x}}{7+\frac{f(x)}{x}}$
 $= \frac{5-3 \times 3}{7+3} = -\frac{2}{5}$ 답 $-\frac{2}{5}$

0049 $2f(x) + g(x) = h(x)$ 로 놓으면 $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 6$ 이고
 $g(x) = h(x) - 2f(x)$... 1단계
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \{h(x) - 2f(x)\}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} h(x) - 2 \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
 $= 6 - 2 \times (-2) = 10$... 2단계
답 10

채점 요소		비율
1단계	$2f(x) + g(x) = h(x)$ 로 놓고 $g(x)$ 를 $h(x), f(x)$ 에 대한 식으로 나타내기	40 %
2단계	$\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ 의 값 구하기	60 %

다른 풀이 $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} [\{2f(x) + g(x)\} - 2f(x)]$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \{2f(x) + g(x)\} - 2 \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
 $= 6 - 2 \times (-2) = 10$

$$\begin{aligned} 0050 \quad \neg. \lim_{x \rightarrow -1+} \{f(x) + g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1+} g(x) \\ &= -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x) + g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) \\ &= -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1+} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x) + g(x)\} \text{ (참)}$$

$$\begin{aligned} \neg. \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1+} g(x) \\ &= -1 \times 1 = -1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1-} g(x) \\ &= 1 \times (-1) = -1 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -1} f(x)g(x) = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) \\ &= 1 \times (-1) = -1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) \\ &= -1 \times 1 = -1 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) \text{ (참)}$$

$$\text{ㄷ. } \neg \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = -1 \text{이고}$$

$$f(-1)g(-1) = -1 \times 1 = -1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = f(-1)g(-1) \text{ (참)}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$$0051 \quad \neg. [\text{반례}] f(x) = \frac{1}{x-a}, g(x) = -\frac{1}{x-a} \text{이면}$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 와 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 의 값은 모두 존재하지 않지만

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{1}{x-a} + \left(-\frac{1}{x-a} \right) \right\} = 0$$

이다. (거짓)

$$\neg. \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = \beta$$

(α, β 는 실수)라 하고

$$f(x) + g(x) = h(x), f(x) - g(x) = k(x)$$

$$\text{라 하면 } \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} k(x) = \beta$$

$$\text{이때 } f(x) = \frac{h(x) + k(x)}{2} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) + k(x)}{2} \\ &= \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ (참)} \end{aligned}$$

$$\text{ㄷ. } [\text{반례}] f(x) = x - a, g(x) = \frac{1}{x-a} \text{ 이면}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} 1 = 1$$

이지만 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a}$ 의 값은 존재하지 않는다.

(거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

$$\begin{aligned} 0052 \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{2x^2 + 3x - 2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{(x+2)(2x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x + 4}{2x-1} \\ &= -\frac{12}{5} \end{aligned}$$

답 $-\frac{12}{5}$

$$\begin{aligned} 0053 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{8(x^4 - 1)}{(x^2 - 1)f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{8(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{8(x^2 + 1)}{f(x)} \\ &= \frac{16}{f(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{16}{f(1)} = 2 \text{ 이므로} \\ &f(1) = 8 \end{aligned}$$

답 ①

$$0054 \quad (f \circ g)(x) = f(2x) = 2x + 4,$$

$$(g \circ f)(x) = g(x + 4) = 2(x + 4) \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(f \circ g)(x)}{x^2 - 2x - 8} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(g \circ f)(x)}{x^2 + 2x - 8} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + 4}{(x+2)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2(x+4)}{(x+4)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2}{x-4} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2}{x-2} \\ &= -\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

답 0

$$\begin{aligned} 0055 \quad a &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x + |x|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$-1 < x < 0$ 일 때, $x^2 - 1 < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x^2 + x}{|x^2 - 1|} = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x^2 + x}{1 - x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x(1+x)}{(1+x)(1-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x}{1-x} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore ab = -\frac{1}{4}$$

답 $-\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} 0056 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 + 5} - 3)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{(x-2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned}
 0057 \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x})(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}{(\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x})(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}{2x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} \right) = -2 \quad \text{답 -2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0058 \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(x-1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x)(\sqrt{x}+1) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) \\
 &= 3 \times 2 = 6 \quad \text{답 ②}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0059 \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+x}}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3+x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-\sqrt{\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}}} \\
 &= \frac{1+1}{1-0} = 2 \quad \text{답 ④}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0060 \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x+2)-x(x+1)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+2}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 2 \quad \text{답 2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0061 \quad & x=-t \text{로 놓으면 } x \rightarrow -\infty \text{ 일 때 } t \rightarrow \infty \text{ 이므로} \\
 & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5-3x^2}{x^2-2x+1} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-2}{x} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{5-3t^2}{t^2+2t+1} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2+1}-2}{-t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{t^2}-3}{1+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}-\frac{2}{t}}{-1} \\
 &= -3-1 = -4 \quad \text{답 -4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0062 \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+4f(x)}{2x^2-f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{f(x)}{x} \times \frac{4}{x}}{2-\frac{f(x)}{x} \times \frac{1}{x}} \\
 &= \frac{3+3 \times 0}{2-3 \times 0} = \frac{3}{2} \quad \text{답 ②}
 \end{aligned}$$

0063 $x=-t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+2x+3}+x) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2-2t+3}-t) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t^2-2t+3}-t)(\sqrt{t^2-2t+3}+t)}{\sqrt{t^2-2t+3}+t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2t+3}{\sqrt{t^2-2t+3}+t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2+\frac{3}{t}}{\sqrt{1-\frac{2}{t}+\frac{3}{t^2}}+1} \\
 &= \frac{-2}{1+1} = -1 \quad \text{답 ③}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0064 \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left\{ \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{4} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{x-1} \times \frac{-x^2-2x+3}{4(x+1)^2} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x+3)}{4(x-1)(x+1)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+3)}{4(x+1)^2} = -\frac{1}{4} \quad \text{답 -}\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

0065 $x=-t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 \left(1 + \frac{-t}{\sqrt{t^2+2}} \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(t^2 \times \frac{\sqrt{t^2+2}-t}{\sqrt{t^2+2}} \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ t^2 \times \frac{(\sqrt{t^2+2}-t)(\sqrt{t^2+2}+t)}{\sqrt{t^2+2}(\sqrt{t^2+2}+t)} \right\} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t^2}{t^2+2+t\sqrt{t^2+2}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{1+\frac{2}{t^2}+\sqrt{1+\frac{2}{t^2}}} \\
 &= \frac{2}{1+1} = 1 \quad \text{답 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0066 \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2-ax}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2-ax})(\sqrt{x^2+ax} + \sqrt{x^2-ax})}{\sqrt{x^2+ax} + \sqrt{x^2-ax}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2ax}{\sqrt{x^2+ax} + \sqrt{x^2-ax}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}} + \sqrt{1-\frac{a}{x}}} \\
 &= \frac{2a}{1+1} = a \\
 &\therefore a=3 \quad \text{답 3}
 \end{aligned}$$

0067 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} (ax^3 + x + b) = 0 \text{이므로 } a + 1 + b = 0$$

$$\therefore b = -a - 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

⑦을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^3 + x - a - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(ax^2 + ax + a + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (ax^2 + ax + a + 1) \\ &= 3a + 1 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } 3a + 1 = 7 \text{이므로 } a = 2$$

$$a = 2 \text{를 } \textcircled{7} \text{에 대입하면 } b = -3$$

$$\therefore ab = -6 \quad \text{답 } \textcircled{1}$$

0068 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - x - a) = 0 \text{이므로}$$

$$3 + 1 - a = 0 \quad \therefore a = 4$$

$a = 4$ 를 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(3x-4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{3x-4} = \frac{2}{7} \\ \therefore ab &= \frac{8}{7} \quad \text{답 } \frac{8}{7} \end{aligned}$$

0069 $x \rightarrow -3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow -3} (\sqrt{x^2 - x - 3} + ax) = 0 \text{이므로}$$

$$\sqrt{9 + 3 - 3} - 3a = 0 \quad \therefore a = 1$$

$a = 1$ 을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 - x - 3} + x}{x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(\sqrt{x^2 - x - 3} + x)(\sqrt{x^2 - x - 3} - x)}{(x + 3)(\sqrt{x^2 - x - 3} - x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-(x + 3)}{(x + 3)(\sqrt{x^2 - x - 3} - x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - x - 3} - x} \\ &= -\frac{1}{6} \\ \therefore a + b &= \frac{5}{6} \quad \text{답 } \textcircled{5} \end{aligned}$$

0070 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - a}$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이

아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - a) = 0 \text{이므로}$$

$$4 - a = 0 \quad \therefore a = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - ax + 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-3} = -1 \quad \text{답 } \textcircled{1} \end{aligned}$$

0071 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+a} - b) = 0 \text{이므로 } \sqrt{2+a} - b = 0$$

$$\therefore b = \sqrt{2+a} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

⑦을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{2+a}}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+a} - \sqrt{2+a})(\sqrt{x+a} + \sqrt{2+a})}{(x-2)(\sqrt{x+a} + \sqrt{2+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+a} + \sqrt{2+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{2+a}} = \frac{1}{2\sqrt{2+a}} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{2\sqrt{2+a}} = \frac{1}{4} \text{이므로 } a = 2$$

$$a = 2 \text{를 } \textcircled{7} \text{에 대입하면 } b = 2$$

$$\therefore a - b = 0 \quad \text{답 } 0$$

0072 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + ax + b} - a) = 0 \text{이므로}$$

$$\sqrt{b} - a = 0 \quad \therefore b = a^2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

⑦을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + ax + a^2} - a}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + ax + a^2} - a)(\sqrt{x^2 + ax + a^2} + a)(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})}{(\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x})(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})(\sqrt{x^2 + ax + a^2} + a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + ax)(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})}{2x(\sqrt{x^2 + ax + a^2} + a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+a)(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})}{2(\sqrt{x^2 + ax + a^2} + a)} \\ &= \frac{2a\sqrt{a}}{4a} = \frac{\sqrt{a}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{\sqrt{a}}{2} = 1 \text{이므로 } a = 4$$

$$a = 4 \text{를 } \textcircled{7} \text{에 대입하면 } b = 16$$

$$\therefore a + b = 20 \quad \text{답 } 20$$

$$\text{0073 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = a$$

이므로 $a=1$... 1단계

또 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + bx + c}{x^2 + x - 2} = -1$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + bx + c) = 0$ 이므로 $1 + b + c = 0$

$$\therefore c = -b - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + bx - b - 1}{x^2 + x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1+b)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1+b}{x+2} \\ &= \frac{2+b}{3} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{2+b}{3} = -1$ 이므로 $b = -5$

$b = -5$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $c = 4$

$$\therefore a - b + c = 10$$

... 2단계

... 3단계

답 10

채점 요소	비율
1단계 a의 값 구하기	30 %
2단계 b, c의 값 구하기	60 %
3단계 a-b+c의 값 구하기	10 %

0074 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x^2 - 1} = 2$ 에서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 4인 이차함수이므로

$$f(x) = 4x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

또 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = -3$ 에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$ 이므로 $f(-1) = 4 - a + b = 0$

$$\therefore b = a - 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + ax + a - 4}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(4x+a-4)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (4x+a-4) = a-8 \end{aligned}$$

따라서 $a-8 = -3$ 이므로 $a=5$

$a=5$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b=1$

즉 $f(x) = 4x^2 + 5x + 1$ 이므로

$$f(-2) = 7$$

답 7

0075 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 4$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 이므로 $f(0) = 0$... $\textcircled{1}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = -2$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ 이므로 $f(1) = 0$... $\textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 $f(x) = x(x-1)(ax+b)$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)(ax+b)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x-1)(ax+b) \\ &= -b, \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(ax+b)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x(ax+b) \\ &= a+b \end{aligned}$$

즉 $-b=4$, $a+b=-2$ 이므로

$$a=2, b=-4$$

따라서 $f(x) = x(x-1)(2x-4)$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-1)(2x-4)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} 2x(x-1) = 4 \end{aligned}$$

답 4

0076 조건 (가)에서 $f(x)$ 는 삼차항의 계수가 2, 이차항의 계수가 2인 삼차함수이다.

조건 (나)에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 이므로 $f(0) = 0$

따라서 $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + ax$ (a 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 2x^2 + ax}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 + 2x + a) = a \end{aligned}$$

즉 $a=4$ 이므로 $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + 4x$

$$\therefore f(-1) = -4$$

답 -4

0077 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ 이므로 $f(1) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 1$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ 이므로 $f(2) = 0$

따라서 $f(x) = (x-1)(x-2)Q(x)$ ($Q(x)$ 는 다항함수)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)Q(x)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-2)Q(x) \\ &= -Q(1) = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)Q(x)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)Q(x) \\ &= Q(2) = 1\end{aligned}$$

이므로 $Q(1) = -1, Q(2) = 1$

이를 만족시키는 차수가 가장 낮은 다항함수는 일차함수이므로

$$Q(x) = ax + b \quad (a, b \text{는 상수}, a \neq 0)$$

라 하면

$$Q(1) = a + b = -1, Q(2) = 2a + b = 1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 2, b = -3$

따라서 $g(x) = (x-1)(x-2)(2x-3)$ 이므로

$$g(3) = 6$$

답 6

0078 $x \neq 0$ 일 때, $x^2 > 0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 x^2 으로 나누면

$$\frac{x^2 - x - 1}{x^2} < \frac{f(x)}{x^2} < \frac{x^2 - x + 1}{x^2}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 1}{x^2} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2} = 1$ 이므로 함수의

극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$$

답 ③

0079 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{3x+1} = \frac{1}{3}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+5x+3}{3x^2+2x+1} = \frac{1}{3}$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{3}$$

답 1/3

0080 양의 실수 x 에 대하여 $3x+2 > 0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 제곱하면

$$(3x+2)^2 < \{f(x)\}^2 < (3x+4)^2$$

$x^2+1 > 0$ 이므로 각 변을 x^2+1 로 나누면

$$\frac{(3x+2)^2}{x^2+1} < \frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1} < \frac{(3x+4)^2}{x^2+1}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+2)^2}{x^2+1} = 9, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+4)^2}{x^2+1} = 9$ 이므로 함수의 극

한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{x^2+1} = 9$$

답 9

0081 조건 (가), (나)의 식을 변끼리 더하면

$$4x^2 + 6x + 2 \leq 2f(x) \leq 4x^2 + 6x + 4$$

$$\therefore 2x^2 + 3x + 1 \leq f(x) \leq 2x^2 + 3x + 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (나)의 식의 각 변에 -1 을 곱하면

$$-x^2 - 2x - 2 \leq g(x) - f(x) \leq -x^2 - 2x$$

이 식과 조건 (가)의 식을 변끼리 더하면

$$2x^2 + 2x \leq 2g(x) \leq 2x^2 + 2x + 4$$

$$\therefore x^2 + x \leq g(x) \leq x^2 + x + 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

양의 실수 x 에 대하여

$$2x^2 + 3x + 1 > 0, x^2 + x > 0$$

이므로 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + x + 2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{2x^2 + 3x + 3}{x^2 + x}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + x + 2} = 2, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 3}{x^2 + x} = 2$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$$

답 2

0082 $f(x) = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = 1$$

$g(x) = s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $s = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(g(x)) = f(1) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x)) - \lim_{x \rightarrow 0+} f(g(x)) = 1 \quad \text{답 ④}$$

0083 $\neg$. $f(x) = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow -1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+} f(t) = 1 \quad (\text{거짓})$$

$\sqcup$. $f(x) = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t = -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(f(x)) = f(-1) = -1 \quad (\text{거짓})$$

$\sqcap$. $f(x) = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1+$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = -1 \quad (\text{참})$$

이상에서 옳은 것은 $\sqcap$ 뿐이다.

답 ③

$$\textbf{0084} \quad A(x) = \frac{1}{2} \times 1 \times y = \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x^2,$$

$$B(x) = \frac{1}{2} \times 4 \times x = 2x \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{xB(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x \times 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4} \quad \text{답 1/4}$$

0085 점 $(3, 1)$ 과 직선 $y = 3x + t$, 즉 $3x - y + t = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|9 - 1 + t|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|t + 8|}{\sqrt{10}}$$

(i) $\frac{|t + 8|}{\sqrt{10}} > \sqrt{10}$ 일 때

$$|t + 8| > 10 \text{에서} \quad t + 8 < -10 \text{ 또는 } t + 8 > 10$$

$$\therefore t < -18 \text{ 또는 } t > 2$$

이때 원과 직선은 만나지 않으므로 $f(t) = 0$

- (ii) $\frac{|t+8|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$ 일 때
 $|t+8| = 10$ 에서 $t+8 = -10$ 또는 $t+8 = 10$
 $\therefore t = -18$ 또는 $t = 2$
 이때 원과 직선은 접하므로 $f(t) = 1$
- (iii) $\frac{|t+8|}{\sqrt{10}} < \sqrt{10}$ 일 때
 $|t+8| < 10$ 에서 $-10 < t+8 < 10$
 $\therefore -18 < t < 2$
 이때 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만나므로 $f(t) = 2$
- 이상에서 $f(t) = \begin{cases} 0 & (t < -18 \text{ 또는 } t > 2) \\ 1 & (t = -18 \text{ 또는 } t = 2) \\ 2 & (-18 < t < 2) \end{cases}$ 이므로
- $\lim_{t \rightarrow -18-} f(t) - \lim_{t \rightarrow 2-} f(t) + f(2) = 0 - 2 + 1 = -1$
- 답 ②

RPM 비법 노트

원과 직선의 위치 관계

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d , 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원과 직선의 위치 관계는

- (1) $d < r \Rightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.
- (2) $d = r \Rightarrow$ 한 점에서 만난다. (접한다.)
- (3) $d > r \Rightarrow$ 만나지 않는다.

0086 $\overline{OP} = \sqrt{t^2 + t^4}$ 이고 $\overline{OP} = \overline{OQ}$ 이므로

$Q(\sqrt{t^2 + t^4}, 0)$

... 1단계

따라서 직선 PQ의 방정식은

$$y - t^2 = \frac{-t^2}{\sqrt{t^2 + t^4} - t} (x - t)$$

$$\therefore y = \frac{-t^2}{\sqrt{t^2 + t^4} - t} x + \frac{t^3}{\sqrt{t^2 + t^4} - t} + t^2$$

$$\therefore f(t) = \frac{t^3}{\sqrt{t^2 + t^4} - t} + t^2$$

... 2단계

점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $t \rightarrow 0+$ 이므로 구하는 값은

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{t^3}{\sqrt{t^2 + t^4} - t} + t^2 \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{t^2}{\sqrt{1 + t^2} - 1} + t^2 \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \frac{t^2(\sqrt{1 + t^2} + 1)}{(\sqrt{1 + t^2} - 1)(\sqrt{1 + t^2} + 1)} + t^2 \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} (\sqrt{1 + t^2} + 1 + t^2) = 2 \end{aligned}$$

... 3단계

답 2

채점 요소	비율
1단계 점 Q의 좌표 구하기	20 %
2단계 $f(t)$ 구하기	40 %
3단계 $f(t)$ 가 한없이 가까워지는 값 구하기	40 %

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 018~021쪽

0087 $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (x^2 + 2ax + 1) = 2 - 2a$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (-x^2 + 3x - a) = -4 - a$$

이때 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의 값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$$

$$\text{즉 } 2 - 2a = -4 - a \text{ 이므로 } a = 6$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} x^2 + 12x + 1 & (x \geq -1) \\ -x^2 + 3x - 6 & (x < -1) \end{cases} \text{ 이므로}$$

$$f(-2) + f(2) = -16 + 29 = 13$$

답 ④

0088 ⑤ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$

답 ⑤

0089 $f(x) = \begin{cases} x - 2 & (x \geq 2) \\ -x + 2 & (1 \leq x < 2) \\ -x^2 + 3 & (x < 1) \end{cases}$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} (-x^2 + 3) + \lim_{x \rightarrow 1+} (-x + 2) + \lim_{x \rightarrow 3} (x - 2)$$

$$= 2 + 1 + 1 = 4$$

답 4

0090 ① $x \rightarrow 2+$ 일 때 $f(x) \rightarrow 0-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} [f(x)] = -1$$

② $x \rightarrow 2-$ 일 때 $f(x) \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} [f(x)] = 0$$

③ $x \rightarrow -2-$ 일 때 $f(x) \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -2-} [f(x)] = 0$$

④ $x \rightarrow -2+$ 일 때 $f(x) \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -2+} [f(x)] = 0$$

⑤ $x \rightarrow 0$ 일 때 $f(x) \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] = 0$$

답 ④

0091 $x - 2 = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x-2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 4 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 4$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3f(x) - x}{x^2 + 2f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \times \frac{f(x)}{x} - 1}{x + 2 \times \frac{f(x)}{x}}$$

$$= \frac{3 \times 4 - 1}{0 + 2 \times 4} = \frac{11}{8}$$

답 ③

0092 $1 + x = t, 1 - x = s$ 로 놓으면

$x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 1+, s \rightarrow 1-$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+} f(1+x)g(1-x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(1+x) \times \lim_{x \rightarrow 0+} g(1-x) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1+} f(t) \times \lim_{s \rightarrow 1-} g(s) \\ &= -1 \times (-1) = 1\end{aligned}$$

또 $x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow 1-, s \rightarrow 1+$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0-} f(1+x)g(1-x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(1+x) \times \lim_{x \rightarrow 0-} g(1-x) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) \times \lim_{s \rightarrow 1+} g(s) \\ &= 1 \times 1 = 1\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(1+x)g(1-x) = 1 \quad \text{답 1}$$

0093 $2f(x) - 3g(x) = h(x)$ 로 놓으면 $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1$ 이고

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{3g(x) + h(x)}{2} \\ \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4f(x) + g(x)}{3f(x) - g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \times \frac{3g(x) + h(x)}{2} + g(x)}{3 \times \frac{3g(x) + h(x)}{2} - g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7g(x) + 2h(x)}{\frac{7}{2}g(x) + \frac{3}{2}h(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 + 2 \times \frac{h(x)}{g(x)}}{\frac{7}{2} + \frac{3}{2} \times \frac{h(x)}{g(x)}} \leftarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{g(x)} = 0 \\ &= 2 \quad \text{답 2}\end{aligned}$$

0094 $\neg$. $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$ (a, β 는 실수)라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left\{ g(x) \times \frac{f(x)}{g(x)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} g(x) \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = a\beta \quad (\text{참})\end{aligned}$$

ㄴ. [반례] $f(x) = x - a$, $g(x) = \frac{1}{x - a}$ 이면

$$\frac{f(x)}{g(x)} = (x - a)^2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

이지만 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. [반례] $f(x) = \frac{1}{x - a}$, $g(x) = \frac{1}{x - a}$ 이면

$$f(x) - g(x) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = 0$$

이지만 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 와 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

(거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 1

$$\begin{aligned}0095 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - (k+1)x + k}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-k)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-k) = 1-k\end{aligned}$$

$$\text{즉 } 1-k=5 \text{이므로 } k=-4$$

답 -4

$$\begin{aligned}0096 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = 1\end{aligned}$$

답 1

$$0097 \neg. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{x^2+2x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = 0 \quad (\text{거짓})$$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{3x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3 - \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{3} \quad (\text{참})$$

ㄷ. $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{2x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2+1} + t}{-2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} + 1}{-2} = -1 \quad (\text{참})\end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 5

$$\begin{aligned}0098 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+4} - x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+4} + x}{(\sqrt{x^2+3x+4} - x)(\sqrt{x^2+3x+4} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+4} + x}{3x+4} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}} + 1}{3 + \frac{4}{x}} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

답 1

$$\begin{aligned}0099 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{2}{\sqrt{4-x}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \times \frac{\sqrt{4-x} - 2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\sqrt{4-x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \times \frac{(\sqrt{4-x} - 2\sqrt{1-x})(\sqrt{4-x} + 2\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}\sqrt{4-x}(\sqrt{4-x} + 2\sqrt{1-x})} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{1-x}\sqrt{4-x}(\sqrt{4-x} + 2\sqrt{1-x})} \\ &= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

답 3

0100 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 0 \text{이므로 } 1 + a + b = 0 \\ \therefore b = -a - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2 + ax - a - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+a+1)} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+a+1} = \frac{1}{a+2}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{a+2} = \frac{1}{3} \text{이므로 } a = 1$$

$$a = 1 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b = -2$$

$$\therefore ab = -2 \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

0101 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} (a\sqrt{x+1} - b) = 0 \text{이므로} \\ \sqrt{2}a - b = 0 \quad \therefore b = \sqrt{2}a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x+1} - \sqrt{2}a}{x-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(\sqrt{x+1} - \sqrt{2})}{x-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(\sqrt{x+1} - \sqrt{2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{따라서 } \frac{a}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{이므로 } a = 4$$

$$a = 4 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 48 \quad \text{답 } 48$$

0102 $|f(x) - 3x + 1| \leq (x-1)^2$ 에서
 $-(x-1)^2 \leq f(x) - 3x + 1 \leq (x-1)^2$
 $\therefore -x^2 + 5x - 2 \leq f(x) \leq x^2 + x$

이때 $\lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + 5x - 2) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x) = 2$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad \text{답 } 2$$

0103 $g(x) = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1^-$ 일 때 $t = -1$ 이므로
 $a = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(g(x)) = f(-1) = 0$

$f(x) = s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1^+$ 일 때 $s \rightarrow 1^+$ 이므로

$$b = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(f(x)) = \lim_{s \rightarrow 1^+} g(s) = 1 \\ \therefore a + b = 1 \quad \text{답 } 1$$

0104 $\overline{OA} = \sqrt{x^2 + 2x}$, $\overline{OB} = x$ 이므로

$$f(x) = \overline{OA} - \overline{OB} = \sqrt{x^2 + 2x} - x \\ \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} = 1 \quad \text{답 } 1$$

0105 점 P의 좌표가 (a, a) 이므로

$$Q(\sqrt{a}, a), R(a, a^2)$$

(i) $0 < a < 1$ 일 때

$$\overline{PQ} = \sqrt{a} - a, \overline{PR} = a - a^2 \text{이므로} \\ \lim_{a \rightarrow 1^-} \frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}} = \lim_{a \rightarrow 1^-} \frac{a - a^2}{\sqrt{a} - a} \\ = \lim_{a \rightarrow 1^-} \frac{(a - a^2)(\sqrt{a} + a)}{(\sqrt{a} - a)(\sqrt{a} + a)} \\ = \lim_{a \rightarrow 1^-} (\sqrt{a} + a) = 2$$

(ii) $a > 1$ 일 때

$$\overline{PQ} = a - \sqrt{a}, \overline{PR} = a^2 - a \text{이므로} \\ \lim_{a \rightarrow 1^+} \frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}} = \lim_{a \rightarrow 1^+} \frac{a^2 - a}{a - \sqrt{a}} \\ = \lim_{a \rightarrow 1^+} \frac{(a^2 - a)(a + \sqrt{a})}{(a - \sqrt{a})(a + \sqrt{a})} \\ = \lim_{a \rightarrow 1^+} (a + \sqrt{a}) = 2$$

(i), (ii)에서 $\lim_{a \rightarrow 1} \frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}} = 2 \quad \text{답 } 2$

0106 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{2x^2 - 7x + 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2} \quad \dots \text{1단계}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 - x} - 3x) \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{9x^2 - x} - 3x)(\sqrt{9x^2 - x} + 3x)}{\sqrt{9x^2 - x} + 3x} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{\sqrt{9x^2 - x} + 3x} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{9 - \frac{1}{x}} + 3} = -\frac{1}{6} \quad \dots \text{2단계}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{1}{3} \quad \dots \text{3단계}$$

$$\text{답 } \frac{1}{3}$$

채점 요소	비율
1단계 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 의 값 구하기	30 %
2단계 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ 의 값 구하기	60 %
3단계 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ 의 값 구하기	10 %

0107 $a \leq 0$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{x^2+x+1} - (ax-1)\} = \infty$$

이므로 $a > 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{x^2+x+1} - (ax-1)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{\sqrt{x^2+x+1} - (ax-1)\}\{\sqrt{x^2+x+1} + (ax-1)\}}{\sqrt{x^2+x+1} + (ax-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a^2)x^2 + (1+2a)x}{\sqrt{x^2+x+1} + (ax-1)} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

의 극한값이 존재하려면

$$1-a^2=0 \quad \therefore a=1 (\because a>0) \quad \dots \textcircled{1}\text{단계}$$

$a=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+x+1} + x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{1}{x}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

따라서 $b = \frac{3}{2}$ 이므로 $\dots \textcircled{2}\text{단계}$

$$a+b = \frac{5}{2} \quad \dots \textcircled{3}\text{단계}$$

답 $\frac{5}{2}$

채점 요소	비율
1단계 a 의 값 구하기	50 %
2단계 b 의 값 구하기	40 %
3단계 $a+b$ 의 값 구하기	10 %

0108 $\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{xf\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{3-x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{t}f(t) - 1}{3 - \frac{1}{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t) - t}{3t - 1} = 2 \end{aligned}$$

따라서 $f(t) - t = 6t + k$ (k 는 상수)라 하면

$$f(t) = 7t + k \quad \therefore f(x) = 7x + k \quad \dots \textcircled{1}\text{단계}$$

또 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2-3x+2} = a$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극

한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \text{이므로} \quad f(2) = 14 + k = 0$$

$$\therefore k = -14$$

따라서 $f(x) = 7x - 14$ 이므로 $\dots \textcircled{2}\text{단계}$

014 정답 및 풀이

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{7x-14}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{7(x-2)}{(x-2)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{7}{x-1} = 7 \quad \dots \textcircled{3}\text{단계} \\ \therefore f(a) &= f(7) = 35 \quad \dots \textcircled{4}\text{단계} \end{aligned}$$

답 35

채점 요소	비율
1단계 $f(x)$ 가 일차함의 계수가 7인 일차함수임을 알기	40 %
2단계 $f(x)$ 구하기	30 %
3단계 a 의 값 구하기	20 %
4단계 $f(a)$ 의 값 구하기	10 %

0109 (i) $x-1 > 0$, 즉 $x > 1$ 일 때 주어진 부등식의 각 변을

$x-1$ 로 나누면

$$\begin{aligned} \frac{x^2-1}{x-1} &\leq \frac{f(x)}{x-1} \leq \frac{3x^2-4x+1}{x-1} \\ \therefore x+1 &\leq \frac{f(x)}{x-1} \leq 3x-1 \end{aligned}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 1+} (x+1) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1+} (3x-1) = 2$ 이므로 함수의 극

한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)}{x-1} = 2 \quad \dots \textcircled{1}\text{단계}$

(ii) $x-1 < 0$, 즉 $x < 1$ 일 때 주어진 부등식의 각 변을 $x-1$ 로 나누면

$$\begin{aligned} \frac{3x^2-4x+1}{x-1} &\leq \frac{f(x)}{x-1} \leq \frac{x^2-1}{x-1} \\ \therefore 3x-1 &\leq \frac{f(x)}{x-1} \leq x+1 \end{aligned}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 1-} (3x-1) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1-} (x+1) = 2$ 이므로 함수의 극

한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)}{x-1} = 2 \quad \dots \textcircled{2}\text{단계}$

(i), (ii)에서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2 \quad \dots \textcircled{3}\text{단계}$

답 2

채점 요소	비율
1단계 $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)}{x-1}$ 의 값 구하기	40 %
2단계 $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)}{x-1}$ 의 값 구하기	40 %
3단계 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$ 의 값 구하기	20 %

0110 **전략** 정수 n 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow n+} [x] = n$, $\lim_{x \rightarrow n-} [x] = n-1$ 임을 이용한다.

① $x \rightarrow 0-$ 일 때, $[x] = -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{[x]} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{-1} = 0$$

② $x \rightarrow 0+$ 일 때, $[x] = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{[x]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{0}{x} = 0$$

③ $x \rightarrow 0-$ 일 때 $x-2 \rightarrow -2-$ 이므로 $[x-2] = -3$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{[x-2]}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-3}{x-2} = \frac{3}{2}$$

④ $x \rightarrow 0+$ 일 때 $x+1 \rightarrow 1+$ 이므로 $[x+1]=1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x+1}{[x+1]} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x+1}{1} = 1$$

⑤ $x \rightarrow 0-$ 일 때 $x^2-1 \rightarrow -1+$ 이므로

$$[x] = -1, [x^2-1] = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{[x]^2}{[x^2-1]} = \frac{(-1)^2}{-1} = -1$$

답 ③

0111 [전략] $n=1, n=2, n \geq 3$ 인 경우로 나누어 $f(1)$ 의 값을 구해 본다.

(i) $n=1$ 일 때, 주어진 조건은

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^2+1} = 6, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 4$$

따라서 $f(x)-4x^3+3x^2$ 은 최고차항의 계수가 6인 이차함수이고, $f(x)$ 는 x 를 인수로 가져야 하므로

$$f(x)-4x^3+3x^2=6x^2+ax \quad (a \text{ 는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f(x)=4x^3+3x^2+ax$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3+3x^2+ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (4x^2+3x+a) = a$$

$$\text{즉 } a=4 \text{ 이므로 } f(x)=4x^3+3x^2+4x$$

$$\therefore f(1)=11$$

(ii) $n=2$ 일 때, 주어진 조건은

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^3+1} = 6, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 4$$

따라서 $f(x)-4x^3+3x^2$ 은 최고차항의 계수가 6인 삼차함수이고, $f(x)$ 는 x^2 을 인수로 가져야 하므로

$$f(x)-4x^3+3x^2=6x^3+bx^2 \quad (b \text{ 는 상수}) \text{이라 하면}$$

$$f(x)=10x^3+(b-3)x^2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x^3+(b-3)x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (10x+b-3) = b-3$$

$$\text{즉 } b-3=4 \text{ 이므로 } b=7$$

$$\text{따라서 } f(x)=10x^3+4x^2 \text{ 이므로 } f(1)=14$$

(iii) $n \geq 3$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1} = 6, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 4 \text{ 에서 } f(x) \text{ 는}$$

최고차항의 계수가 6인 $(n+1)$ 차 함수이고, x^n 을 인수로 가져야 하므로

$$f(x)=6x^{n+1}+cx^n \quad (c \text{ 는 상수})$$

이라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^{n+1}+cx^n}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} (6x+c) = c$$

$$\text{따라서 } c=4 \text{ 이므로 } f(x)=6x^{n+1}+4x^n$$

$$\therefore f(1)=10$$

이상에서 $f(1)$ 의 최댓값은 14이다.

답 ③

RPM비법노트

다항함수 $f(x)$ 와 자연수 n 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 4$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ 이므로 } f(0) = 0$$

따라서 $f(x)=x \times g(x)$ ($g(x)$ 는 다항함수) 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \times g(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^{n-1}} = 4$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \text{ 이므로 } g(0) = 0$$

따라서 $g(x)=x \times h(x)$ ($h(x)$ 는 다항함수) 라 하면

$$f(x)=x^2 \times h(x)$$

같은 방법으로 반복하면

$$f(x)=x^n \times k(x) \quad (k(x) \text{ 는 다항함수})$$

의 꼴이므로 $f(x)$ 는 x^n 을 인수로 가짐을 알 수 있다.

0112 [전략] 직선 l 이 지나는 점을 이용하여 직선 l 의 방정식을 세운다.

직선 l 이 정사각형 OABC의 넓이를 이등분하려면 두 대각선의 교점인 점 $(-1, 1)$ 을 지나야 한다.

따라서 직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 직선 l 의 방정식은

$$y-1=m(x+1) \quad \therefore y=mx+m+1$$

즉 직선 l 의 y 절편은 $m+1$ 이다.

한편 직선 AP의 방정식은

$$\frac{x}{t} + \frac{y}{2} = 1, \text{ 즉 } y = -\frac{2}{t}x + 2$$

이므로 직선 l 과 직선 AP의 교점의 x 좌표는

$$mx+m+1 = -\frac{2}{t}x+2 \text{ 에서}$$

$$\left(m + \frac{2}{t}\right)x = 1-m \quad \therefore x = \frac{(1-m)t}{mt+2}$$

이때 직선 l 이 삼각형 AOP의 넓이를 이등분하므로

$$\frac{1}{2} \times \{2 - (m+1)\} \times \frac{(1-m)t}{mt+2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times t\right)$$

$$(1-m)^2 = mt+2, \quad m^2 - (t+2)m - 1 = 0$$

$$\therefore m = \frac{t+2 - \sqrt{(t+2)^2 + 4}}{2}$$

$$= \frac{t+2 - \sqrt{t^2 + 4t + 8}}{2} \quad (\because m < 0)$$

$$\text{따라서 } f(t) = m+1 = \frac{t+4 - \sqrt{t^2 + 4t + 8}}{2} \text{ 이므로}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t+4 - \sqrt{t^2 + 4t + 8}}{2} = 2 - \sqrt{2}$$

답 ②

RPM비법노트

오른쪽 그림과 같이 점 $(-1, 1)$ 을

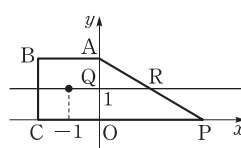
지나고 x 축에 평행한 직선이 y 축과

만나는 점을 Q, 직선 AP와 만나는

점을 R라 하면 삼각형 AQR의 넓

이는 사각형 QOPR의 넓이보다 작다.

따라서 삼각형 AOP의 넓이를 이등분하는 직선 l 의 기울기는 음수이어야 한다.



02 함수의 연속

교과서 문제 정복하기

본책 023쪽, 025쪽

0113 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 정의되어 있지 않으므로 불연속이다. 답 풀이 참조

0114 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)=2, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)=1$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$
 따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 불연속이다. 답 풀이 참조

0115 $f(0)=2$ 이고 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=1$ 이다.
 따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$ 이므로 불연속이다. 답 풀이 참조

0116 $f(1)=2, \lim_{x \rightarrow 1} f(x)=2$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=f(1)$
 따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다. 답 연속

0117 $f(1)=0, \lim_{x \rightarrow 1} f(x)=0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=f(1)$
 따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다. 답 연속

0118 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다. 답 불연속

0119 $f(1)=-1$ 이고,
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$
 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$
 따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다. 답 불연속

0120 답 $[-2, 3]$

0121 답 $(1, 5)$

0122 답 $[-3, 4)$

0123 답 $(-7, 2]$

0124 답 $(-\infty, 4)$

0125 답 $[3, \infty)$

0126 답 $(-\infty, \infty)$

0127 답 $(-\infty, 3]$

0128 답 $(-\infty, -1), (-1, \infty)$

016 정답 및 풀이

0129 함수 $f(x)=x+3$ 은 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다. 답 $(-\infty, \infty)$

0130 함수 $f(x)=\sqrt{x-1}$ 은 $x \geq 1$, 즉 구간 $[1, \infty)$ 에서 연속이다. 답 $[1, \infty)$

0131 함수 $f(x)=2$ 는 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다. 답 $(-\infty, \infty)$

0132 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$ 은 $x \neq 0$ 인 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, 0), (0, \infty)$ 에서 연속이다. 답 $(-\infty, 0), (0, \infty)$

0133 함수 $y=x^2-2x$ 는 다항함수이므로 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다. 답 $(-\infty, \infty)$

0134 함수 $y=(x+1)(x^2+x-2)$ 는 다항함수이므로 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다. 답 $(-\infty, \infty)$

0135 함수 $y=\frac{x-2}{x-3}$ 는 $x \neq 3$ 인 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, 3), (3, \infty)$ 에서 연속이다. 답 $(-\infty, 3), (3, \infty)$

0136 함수 $y=\frac{x+1}{x^2-3x+2}=\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$ 은 $x \neq 1, x \neq 2$ 인 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, 1), (1, 2), (2, \infty)$ 에서 연속이다. 답 $(-\infty, 1), (1, 2), (2, \infty)$

0137 두 함수 $f(x)=x-2, g(x)=x^2+4x-5$ 는 다항함수이므로 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다.

(3) $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x-2}{x^2+4x-5}=\frac{x-2}{(x+5)(x-1)}$ 는 $x \neq -5, x \neq 1$ 인 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, -5), (-5, 1), (1, \infty)$ 에서 연속이다.

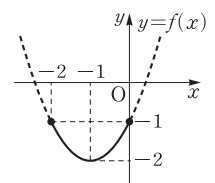
(4) $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2+4x-5}{x-2}$ 는 $x \neq 2$ 인 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, 2), (2, \infty)$ 에서 연속이다.

답 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, \infty)$

(3) $(-\infty, -5), (-5, 1), (1, \infty)$

(4) $(-\infty, 2), (2, \infty)$

0138 함수 $f(x)=x^2+2x-1$ 은 닫힌 구간 $[-2, 0]$ 에서 연속이고 이 구간에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=-2, x=0$ 에서 최댓값 -1 ,

$x=-1$ 에서 최솟값 -2

를 갖는다.

답 최댓값: -1 , 최솟값: -2

0139 함수 $f(x) = \frac{2}{x-1}$ 는 닫힌구간

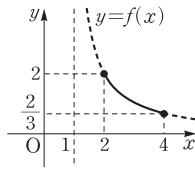
$[2, 4]$ 에서 연속이고 이 구간에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=2$ 에서 최댓값 2,

$x=4$ 에서 최솟값 $\frac{2}{3}$

를 갖는다.



답 최댓값: 2, 최솟값: $\frac{2}{3}$

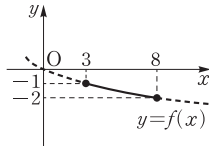
0140 함수 $f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$ 은 닫힌

구간 $[3, 8]$ 에서 연속이고 이 구간에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=3$ 에서 최댓값 -1 , $x=8$ 에서 최솟값 -2

를 갖는다.



답 최댓값: -1 , 최솟값: -2

0141 **답** (가) 연속 (나) 사잇값 정리

0142 **답** (가) 1 (나) -1 (다) $<$ (라) 0

0143 $f(x) = x^3 - x^2 - 2$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 연속이고

$$f(1) = -2 < 0, f(2) = 2 > 0$$

따라서 $f(1)f(2) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

0144 $f(x) = x^4 + x^3 - 9x + 1$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 연속이고

$$f(1) = -6 < 0, f(2) = 7 > 0$$

따라서 $f(1)f(2) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

유형 익히기

● 본책 026~032쪽

0145 $\neg$. 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이면 모든 실수 x 에서 연속이다.

이때 $f(1) = 2$ 이고,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{-x} = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

ㄷ. $f(1)$, $f(-1)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$, $x=-1$ 에서 불연속이다.

ㄹ. 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이면 모든 실수 x 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} = 0, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x) = 0$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\text{이때 } f(0) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

이상에서 모든 실수 x 에서 연속인 함수는 $\neg$, ㄹ이다. **답** $\neg$, ㄹ

0146 ①, ②, ③ $f(0)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (x^2 + 2) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x + 2) = 2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

$$\text{이때 } f(0) = 2 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|5x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{5x}{x} = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|5x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-5x}{x} = -5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

답 ④

$$\textcircled{0147} \text{ (i) } \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x+1) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (2x^2 - 2) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다. ... 1단계

$$\text{(ii) } \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} (2x^2 - 2) = 6,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} (-3x) = 6 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 6$$

이때 $f(-2)=6$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 연속이다.

... 2단계

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x \neq 1$ 인 모든 실수에서 연속이다.

... 3단계

답 $x \neq 1$ 인 모든 실수에서 연속

채점 요소		비율
1단계	$x=1$ 에서 연속성 조사하기	40%
2단계	$x=-2$ 에서 연속성 조사하기	40%
3단계	함수 $f(x)$ 의 연속성 조사하기	20%

$$0148 \quad f(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{x-2}} = \frac{1}{\frac{x^2 - 2x + 1}{x-2}} = \frac{x-2}{(x-1)^2}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x-2=0$, $(x-1)^2=0$ 인 x 의 값에서 정의되어 있지 않으므로 불연속인 x 의 값은 1, 2의 2개이다. **답** 2

$$0149 \quad f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 1) \\ 0 & (x = 1) \text{이므로} \\ -1 & (x < 1) \end{cases}$$

$$f(g(x)) = f(3x^2) = \begin{cases} 1 & (3x^2 > 1) \\ 0 & (3x^2 = 1) \\ -1 & (3x^2 < 1) \end{cases}$$

따라서 함수 $f(g(x))$ 는 $3x^2=1$ 인 x 의 값, 즉 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 불연속이므로 구하는 곱은

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{3} \quad \text{답 } -\frac{1}{3}$$

0150 이차방정식 $x^2 - 2(a+1)x - 4a - 7 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a+1)^2 - (-4a-7) = a^2 + 6a + 8$$

(i) 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

$$\frac{D}{4} > 0 \text{에서} \quad a^2 + 6a + 8 > 0, \quad (a+4)(a+2) > 0$$

$$\therefore a < -4 \text{ 또는 } a > -2$$

(ii) 서로 다른 실근의 개수가 1인 경우

$$\frac{D}{4} = 0 \text{에서} \quad a^2 + 6a + 8 = 0, \quad (a+4)(a+2) = 0$$

$$\therefore a = -4 \text{ 또는 } a = -2$$

(iii) 실근의 개수가 0인 경우

$$\frac{D}{4} < 0 \text{에서} \quad a^2 + 6a + 8 < 0, \quad (a+4)(a+2) < 0$$

$$\therefore -4 < a < -2$$

$$\text{이상에서} \quad f(a) = \begin{cases} 2 & (a < -4 \text{ 또는 } a > -2) \\ 1 & (a = -4 \text{ 또는 } a = -2) \\ 0 & (-4 < a < -2) \end{cases}$$

따라서 함수 $f(a)$ 는 $a = -4$, $a = -2$ 에서 불연속이므로 구하는 곱은 $-4 \times (-2) = 8$ **답** 8

0151 $g(x) = x^2 - 4x + 1$ 이라 하면

$$g(x) = (x-2)^2 - 3$$

이므로 구간 $(0, 5)$ 에서 함수

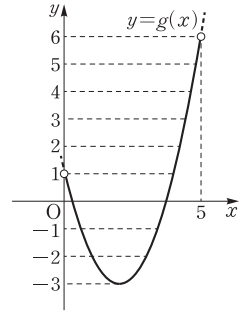
$y = g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 $f(x) = [g(x)]$ 이므로 $f(x)$ 는 $g(x) = -2, -1, 0, \dots, 5$ 를 만족시키는 x 의 값에서 불연속이다.

$g(x) = -2, -1, 0$ 을 만족시키는 x 의 값은 2개씩 존재하고

$g(x) = 1, 2, 3, 4, 5$ 를 만족시키는 x 의 값은 1개씩 존재하므로 구간 $(0, 5)$ 에서 $f(x)$ 가 불연속인 x 의 개수는 11이다.

답 11



RPM 비법 노트

$$g(2) = -3 \text{이므로} \quad f(2) = [g(2)] = -3$$

또 $x \rightarrow 2$ 일 때 $g(x) \rightarrow -3+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} [g(x)] = -3$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$, 즉

$g(x) = -3$ 을 만족시키는 x 의 값에서 연속이다.

0152 $\neg$. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$ (거짓)

$$\neg$$
. $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않는다. (참)

$\neg$. $\neg$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는

$x=1$ 에서 불연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

또 $f(3) = 1$ 이고, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq f(3)$$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 불연속이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1, x=2, x=3$ 에서 불연속이므로 불연속인 x 의 값은 3개이다. (참)

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다. **답** ④

다른 풀이 $\neg$. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 $x=1, x=2, x=3$ 에서 끊어져 있으므로 함수 $f(x)$ 가 불연속인 x 의 값은 1, 2, 3의 3개이다. (참)

0153 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 4$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

또 $f(2)=5$ 이고, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=3$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

따라서 $x=1$ 에서 극한값이 존재하지 않고 $x=1$, $x=2$ 에서 불연속이므로

$$a=1, b=2$$

$$\therefore a+b=3$$

답 ②

0154 $\neg$. $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)=-1$, $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)=-1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=-1$$

이때 $f(0)=-2$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다. (거짓)

$\neg$. $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)=-1$, $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x)=1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않는다. (거짓)

$\neg$. $\neg$ 에서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는

$x=-1$ 에서 불연속이다.

또 $f(1)=0$ 이고, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$ 에서 불연속이므로 불연속인 x 의 값은 3개이다. (참)

이상에서 옳은 것은 $\neg$ 뿐이다.

답 $\neg$

0155 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이고 주어진 함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이면 구간 $[-2, 2]$ 에서 연속이다.

$\neg$. $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0+} g(x)$

$$= -1 \times 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0-} g(x)$$

$$= 1 \times 0 = 0$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$

이때 $f(0)g(0) = 0 \times 0 = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = f(0)g(0)$$

따라서 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$\neg$. $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0+} g(x)$

$$= -1 \times (-1) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0-} g(x)$$

$$= 1 \times (-1) = -1$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x)$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수

$f(x)g(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

$\neg$. $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0+} g(x)$

$$= -1 \times 1 = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0-} g(x)$$

$$= 1 \times 1 = 1$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x)$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수

$f(x)g(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

이상에서 함수 $f(x)g(x)$ 가 구간 $[-2, 2]$ 에서 연속이 되도록 하는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 $\neg$ 뿐이다.

답 ①

0156 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이라면 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - 3}{x - 1} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax - 3) = 0$ 이므로

$$1 + a - 3 = 0 \quad \therefore a = 2$$

$a=2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$b = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x+3) = 4$$

$$\therefore a+b=6$$

답 6

0157 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이라면 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 이

어야 하므로

$$a = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12$$

답 12

$$\textbf{0158} \quad f(x) = \begin{cases} ax+2 & (|x| \geq 3) \\ x^2+x-b & (|x| < 3) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ax+2 & (x \geq 3) \\ x^2+x-b & (-3 < x < 3) \\ ax+2 & (x \leq -3) \end{cases}$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=-3$, $x=3$ 에서 연속이면 모든 실수 x 에서 연속이다.

(i) $x=-3$ 에서 연속이라면

$$\lim_{x \rightarrow -3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3-} f(x) = f(-3)$$

이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow -3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3+} (x^2 + x - b) = 6 - b,$$

$$\lim_{x \rightarrow -3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3-} (ax + 2) = -3a + 2,$$

$$f(-3) = -3a + 2$$

$$\text{에서} \quad 6 - b = -3a + 2 \quad \therefore 3a - b = -4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $x=3$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = f(3)$$

이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} (ax+2) = 3a+2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} (x^2+x-b) = 12-b,$$

$$f(3) = 3a+2$$

$$\text{에서 } 3a+2=12-b \quad \therefore 3a+b=10 \quad \cdots \cdots \textcircled{L}$$

$\textcircled{L}$, $\textcircled{L}$ 을 연립하여 풀면 $a=1, b=7$

$$\therefore a+b=8$$

답 ①

0159 함수 $f(x)+g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)+g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)+g(x)\} \\ = f(1)+g(1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)+g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) \\ = 2 + (1+k) = k+3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)+g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) \\ = 1+3=4,$$

$$f(1)+g(1)=2+(1+k)=k+3$$

$$\text{이므로 } k+3=4 \quad \therefore k=1$$

$$\text{따라서 } g(x) = \begin{cases} x+1 & (x \geq 1) \\ x^2+2 & (x < 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$g(5)=6$$

답 6

0160 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x+2}-b}{x-2} = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 2} (a\sqrt{x+2}-b) = 0 \text{이므로}$$

$$2a-b=0 \quad \therefore b=2a \quad \cdots \cdots \textcircled{L}$$

$\textcircled{L}$ 을 $\textcircled{1}$ 의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x+2}-2a}{x-2} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a}{\sqrt{x+2}+2} \\ = \frac{a}{4}$$

$$\text{따라서 } \frac{a}{4} = 1 \text{이므로 } a=4$$

$$a=4 \text{를 } \textcircled{L} \text{에 대입하면 } b=8$$

$$\therefore ab=32$$

답 32

채점 요소	비율
1단계 $x=2$ 에서 연속임을 이용하여 식 세우기	20 %
2단계 a, b 사이의 관계식 구하기	30 %
3단계 ab 의 값 구하기	50 %

0161 함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = f(-1)$$

이때 $x \rightarrow -1+$ 이면 $[x] = -1$, $x \rightarrow -1-$ 이면 $[x] = -2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = (-1)^2 + (-a+2) \times (-1) = a-1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = (-2)^2 + (-a+2) \times (-2) = 2a,$$

$$f(-1) = (-1)^2 + (-a+2) \times (-1) = a-1$$

$$\text{즉 } a-1=2a \text{이므로 } a=-1$$

답 -1

0162 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=3$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = f(3)$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} (3x-6) = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} (x^2+ax+b) = 9+3a+b,$$

$$f(3) = 3$$

$$\text{이므로 } 3=9+3a+b \quad \therefore 3a+b=-6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } f(x)=f(x+5) \text{에서 } f(0)=f(5) \text{이므로 } b=9$$

$b=9$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$3a+9=-6 \quad \therefore a=-5$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} 3x-6 & (3 \leq x \leq 5) \\ x^2-5x+9 & (0 \leq x < 3) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(16)=f(11)=f(6)=f(1)=5$$

답 5

$$\textbf{0163 } x \neq 1 \text{일 때, } f(x) = \frac{x^2-4x+a}{x-1}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\therefore f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4x+a}{x-1}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2-4x+a) = 0 \text{이므로}$$

$$-3+a=0 \quad \therefore a=3$$

$$\therefore f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4x+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} (x-3) = -2$$

답 ①

0164 $x \neq 2$ 일 때

$$f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x-2} = \frac{(x-2)(x+4)}{x-2} = x+4$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=2$ 에서 연속이다.

$$\therefore f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x+4) = 6$$

답 6

0165 $x \neq 4$ 일 때

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2} = \frac{(\sqrt{x})^3-2^3}{\sqrt{x}-2} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}-2} \\ &= x+2\sqrt{x}+4 \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 가 $x \geq 0$ 인 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=4$ 에서 연속이다.

$$\therefore f(4) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (x+2\sqrt{x}+4) = 12$$

답 ③

0166 $x \neq 1$ 일 때, $f(x) = \frac{a\sqrt{x+3}+b}{x-1}$

함수 $f(x)$ 가 $x \geq -3$ 인 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x+3}+b}{x-1} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots \text{1단계}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} (a\sqrt{x+3}+b) = 0$ 이므로

$$2a+b=0 \quad \therefore b=-2a \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \dots \text{2단계}$$

①을 ①의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x+3}-2a}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{a}{4} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{4} = 2$ 이므로 $a=8$

$a=8$ 을 ②에 대입하면 $b=-16$

$$\therefore a-b=24 \quad \dots\dots \text{3단계}$$

답 24

	채점 요소	비율
1단계	$x=1$ 에서 연속임을 이용하여 식 세우기	20 %
2단계	a, b 사이의 관계식 구하기	30 %
3단계	$a-b$ 의 값 구하기	50 %

0167 두 함수 $f(x)=x-5$, $g(x)=x^2+3x+5$ 는 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

① 두 함수 $f(x)$, $3g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 함수 $f(x)-3g(x)$ 도 모든 실수 x 에서 연속이다.

② 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 정의되어 있고 모든 실수 x 에서 연속이므로 함수 $g(f(x))$ 도 모든 실수 x 에서 연속이다.

$$\textcircled{3} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-5}{x^2+3x+5}$$

이때 $x^2+3x+5 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0$ 이므로 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 모든 실수 x 에서 연속이다.

④ $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2+3x+5}{x-5}$ 는 $x=5$ 에서 정의되어 있지 않으므로 $x=5$ 에서 불연속이다.

⑤ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$ 도 모든 실수 x 에서 연속이다.

답 ④

0168 ① 두 함수 $2f(x)$, $g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로 함수 $2f(x)-g(x)$ 도 $x=a$ 에서 연속이다.

② 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$ 도 $x=a$ 에서 연속이다.

③ [반례] $f(x)=2x$, $g(x)=x+a$ 이면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 모두 $x=a$ 에서 연속이지만

$$\frac{f(x)}{f(x)-g(x)} = \frac{2x}{x-a}$$

는 $x=a$ 에서 정의되어 있지 않으므로 $x=a$ 에서 불연속이다.

④ 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$ 도 $x=a$ 에서 연속이다.

⑤ [반례] $a \neq 0$ 일 때, $f(x)=x-a$, $g(x)=\frac{1}{x}$ 이면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 모두 $x=a$ 에서 연속이지만

$$g(f(x)) = \frac{1}{x-a}$$

은 $x=a$ 에서 불연속이다.

답 ③, ⑤

0169 $\neg$. [반례] $f(x) = \begin{cases} 0 & (x>0) \\ -1 & (x \leq 0) \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} -1 & (x>0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases} \text{이면}$$

$$f(x)+g(x)=-1, f(x)g(x)=0$$

이므로 두 함수 $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$ 는 모두 $x=0$ 에서 연속이지만 함수

$$f(x)-g(x) = \begin{cases} 1 & (x>0) \\ -1 & (x \leq 0) \end{cases}$$

은 $x=0$ 에서 불연속이다.

$$\neg. \{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2 = \{f(x)+g(x)\}^2 - 2f(x)g(x)$$

이때 두 함수 $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$ 가 모두 $x=0$ 에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2$ 도 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \neg. \{f(x)\}^3 + \{g(x)\}^3 &= \{f(x)+g(x)\}^3 - 3f(x)g(x)\{f(x)+g(x)\} \end{aligned}$$

이때 두 함수 $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$ 가 모두 $x=0$ 에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^3 + \{g(x)\}^3$ 도 $x=0$ 에서 연속이다.

이상에서 $x=0$ 에서 항상 연속인 함수는 $\neg$, $\neg$ 이다. **답 ④**

0170 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 함수 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+1}{x^2-2ax+3}$ 이 모든 실수 x 에서 연속이려면 모든 실수 x 에 대하여 $x^2-2ax+3 \neq 0$ 이어야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2 - 2ax + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3 < 0, \quad (a + \sqrt{3})(a - \sqrt{3}) < 0$$

$$\therefore -\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$$

즉 정수 a 는 $-1, 0, 1$ 의 3개이다.

답 3

0171 $\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 - 8}} = \frac{x(x+2)}{\sqrt{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}}$ 이므로

함수 $\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}$ 는 $(x-2)(x^2 + 2x + 4) > 0$ 인 구간에서 연속이다.

이때 $x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 > 0$ 이므로 $x - 2 > 0$

$$\therefore x > 2$$

따라서 함수 $\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}$ 가 연속인 구간은

$$(2, \infty)$$

답 (2, ∞)

0172 두 함수 $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2 + 4x + k^2}, \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2 - x - k}$

가 모든 실수 x 에서 연속하려면 모든 실수 x 에 대하여

$$x^2 + 4x + k^2 \neq 0, \quad x^2 - x - k \geq 0 \text{ 이어야 한다.}$$

따라서 이차방정식 $x^2 + 4x + k^2 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = 4 - k^2 < 0, \quad (k+2)(k-2) > 0$$

$$\therefore k < -2 \text{ 또는 } k > 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 이차방정식 $x^2 - x - k = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = 1 + 4k \leq 0 \quad \therefore k \leq -\frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } k < -2$$

답 ①

0173 ① 함수 $f(x)$ 가 불연속인 x 의 값은 0, 1의 2개이다.

③ $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 3$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

④ 함수 $f(x)$ 는 구간 $[-1, 2]$ 에서 최솟값을 갖지 않는다.

⑤ 함수 $f(x)$ 는 구간 $[-\frac{3}{2}, 0]$ 에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값을 갖는다.

답 ④

0174 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{3}{x-1} + 2$

이므로 구간 $[2, 4]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

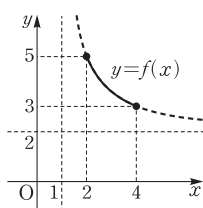
따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=2$ 에서 최댓값 5,

$x=4$ 에서 최솟값 3

을 가지므로 구하는 곱은 $5 \times 3 = 15$

답 15



0175 ㄱ. 함수 $f(x)g(x)$ 는 구간 $[a, b]$ 에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

ㄴ. [반례] $f(x)=x, g(x)=x^2$ 이면 $f(x), g(x)$ 는 구간

$[-1, 1]$ 에서 모두 연속이지만 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x}$ 은 구간

$[-1, 1]$ 에서 최댓값과 최솟값을 갖지 않는다.

ㄷ. [반례] $f(x)=\frac{1}{x}, g(x)=x-2$ 이면 $f(x), g(x)$ 는 구간

$[1, 3]$ 에서 모두 연속이지만 $f(g(x)) = \frac{1}{x-2}$ 은 구간

$[1, 3]$ 에서 최댓값과 최솟값을 갖지 않는다.

이상에서 구간 $[a, b]$ 에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는 함수는 ㄱ뿐이다.

답 ①

0176 $f(x)=2x^3-x^2-x-1$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이고

$$f(-1) = -3 < 0, f(0) = -1 < 0, f(1) = -1 < 0,$$

$$f(2) = 9 > 0, f(3) = 41 > 0, f(4) = 107 > 0$$

따라서 $f(1)f(2) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $(1, 2)$ 이다.

답 ③

0177 $f(-2)f(-1) < 0, f(2)f(3) < 0$

이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 구간

$(-2, -1), (2, 3)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

또 $f(1)=0$ 이므로 방정식 $f(x)=0$ 은 구간 $(-2, 3)$ 에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

답 3개

0178 ㄱ. $f(x)=x^3+x-5$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 구간

$[1, 2]$ 에서 연속이고

$$f(1) = -3 < 0, f(2) = 5 > 0$$

따라서 $f(1)f(2) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식

$f(x)=0$ 은 구간 $(1, 2)$ 에서 실근을 갖는다.

ㄴ. $x^3-2x=3$ 에서 $x^3-2x-3=0$

$f(x)=x^3-2x-3$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 구간 $[1, 2]$ 에서 연속이고

$$f(1) = -4 < 0, f(2) = 1 > 0$$

따라서 $f(1)f(2) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식

$f(x)=0$ 은 구간 $(1, 2)$ 에서 실근을 갖는다.

ㄷ. $f(x)=-x^3+2x+2$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 구간 $[1, 2]$ 에서 연속이고

$$f(1) = 3 > 0, f(2) = -2 < 0$$

따라서 $f(1)f(2) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식

$f(x)=0$ 은 구간 $(1, 2)$ 에서 실근을 갖는다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 구간 $(1, 2)$ 에서 실근을 갖는다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0179 $g(x)=f(x)-1$ 이라 하면 $f(x)$ 가 연속함수이므로

$g(x)$ 도 연속함수이다.

... 1단계

방정식 $f(x)=1$, 즉 $g(x)=0$ 이 구간 $(1, 3)$ 에서 중근이 아닌
한 실근을 가지려면 $g(1)g(3)<0$ 이어야 한다.

이때

$$g(1)=f(1)-1=k-1,$$

$$g(3)=f(3)-1=(k-5)-1=k-6$$

$$\text{이므로 } (k-1)(k-6)<0$$

$$\therefore 1<k<6$$

... 2단계

따라서 정수 k 는 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$$2+3+4+5=14$$

... 3단계

답 14

채점 요소	비율
1단계 $g(x)=f(x)-1$ 로 놓고 $g(x)$ 가 연속함수임을 알기	20 %
2단계 k 의 값의 범위 구하기	60 %
3단계 정수 k 의 값의 합 구하기	20 %

0180 자동차의 속력이 연속하여 변하므로 사잇값 정리에 의하여 속력이 83 km/h에서 98 km/h로 변하는 11시 30분과 12시 사이에 속력이 95 km/h인 순간이 적어도 한 번 존재한다.
또 속력이 98 km/h에서 55 km/h로 변하는 12시와 12시 30분 사이에 속력이 95 km/h인 순간이 적어도 한 번 존재한다.
따라서 k 의 최솟값은 2이다. 답 ②

0181 몸무게는 연속하여 변하므로 사잇값 정리에 의하여 2년 전부터 1년 전 사이에 몸무게가 66 kg, 67 kg, 69 kg, 71 kg, 72 kg인 때가 각각 적어도 한 번 있었다.

또 1년 전부터 현재 사이에 몸무게가 69 kg, 71 kg, 72 kg인 때가 각각 적어도 한 번 있었다.

② 몸무게가 67 kg인 때는 적어도 한 번 있었다.

답 ②

0182 함수 $g(f(x))$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x)) = g(f(1))$$

$f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow 2-$ 이고, $x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow 3-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2-} g(t) = g(2) = 2a+4,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 3-} g(t) = g(3) = 3a+9,$$

$$g(f(1)) = g(2) = 2a+4$$

즉 $2a+4=3a+9$ 이므로

$$a=-5$$

답 ①

0183 주어진 그래프에서

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & (x < 2) \\ \frac{1}{2}x + 2 & (x \geq 2) \end{cases}$$

... 1단계

$f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2+$ 일 때 $t \rightarrow 3+$ 이고, $x \rightarrow 2-$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 3+} f(t)$$

$$= f(3) = \frac{7}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t)$$

$$= f(1) = \frac{1}{2}$$

... 2단계

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+} (f \circ f)(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2-} (f \circ f)(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} (f \circ f)(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수

$(f \circ f)(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

... 3단계

답 불연속

채점 요소	비율
1단계 $f(x)$ 구하기	20 %
2단계 $\lim_{x \rightarrow 2+} (f \circ f)(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2-} (f \circ f)(x)$ 의 값 구하기	60 %
3단계 $x=2$ 에서 불연속임을 알기	20 %

0184 $\neg$. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$
 $= 0 \times 0 = 0$

이때 $f(0)g(0) = 1 \times 0 = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = f(0)g(0)$$

따라서 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

ㄴ. $g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = f(0) = 1$$

이때 $f(g(0)) = f(0) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = f(g(0))$$

따라서 함수 $f(g(x))$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $s \rightarrow 0-$ 이고,

$x \rightarrow 0-$ 일 때 $s \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) = \lim_{s \rightarrow 0-} g(s) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x)) = \lim_{s \rightarrow 0+} g(s) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = 0$$

이때 $g(f(0)) = g(1) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = g(f(0))$$

따라서 함수 $g(f(x))$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

이상에서 $\neg$, ㄴ, ㄷ 모두 $x=0$ 에서 연속이다. 답 $\neg$, ㄴ, ㄷ

0185 조건 (가)에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 \text{이므로 } f(-1) = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

또 조건 (나)에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \text{이므로 } f(2) = 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $f(x)=(x+1)(x-2)g(x)$ ($g(x)$ 는 다항함수)라 하면 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)g(x)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x-2)g(x) \\ &= -3g(-1)=a, \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)g(x)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+1)g(x) \\ &= 3g(2)=b\end{aligned}$$

즉 $g(-1)=-\frac{a}{3}$, $g(2)=\frac{b}{3}$ 이므로

$$g(-1)g(2)=-\frac{ab}{9} < 0 \quad (\because ab > 0)$$

따라서 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$ 은 구간 $(-1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

즉 방정식 $f(x)=0$ 은 구간 $(-1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖고, ㉠, ㉡에 의하여 $x=-1$, $x=2$ 도 방정식 $f(x)=0$ 의 근이므로 구간 $[-1, 2]$ 에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

답 ③

0186 조건 (가)의 식에

$x=1$ 을 대입하면 $f(5)=f(3)$

$x=4$ 를 대입하면 $f(8)=f(0)$

이때 조건 (나)에서 $f(0)f(3)<0$ 이므로

$$f(8)f(5)<0$$

조건 (다)에서 $f(4)f(5)<0$ 이므로

$$f(4)f(3)<0$$

따라서 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 구간

$$(0, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 8)$$

에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

즉 적어도 4개의 실근을 가지므로

$$k=4$$

답 4

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 033~035쪽

0187 ① 함수 $f(x)$ 는 $x < -1$ 에서 정의되지 않으므로

$x \geq -1$, 즉 구간 $[-1, \infty)$ 에서 연속이다.

② $f(0)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

$$\textcircled{3} f(x) = \frac{x+3}{x^2-x-2} = \frac{x+3}{(x+1)(x-2)}$$

즉 $f(-1)$, $f(2)$ 의 값이 정의되어 있지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$, $x=2$ 에서 불연속이다.

④ 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이면 모든 실수 x 에서 연속이다.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^3}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} x^2 = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^3}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^3}{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} (-x^2) = 0\end{aligned}$$

$$\text{이므로} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\text{이때 } f(0)=0 \text{이므로} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

$$\begin{aligned}\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2-x}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} x = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2-x}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x(x-1)}{-(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} (-x) = -1\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

답 ④

0188 함수 $f(x)=[3x]$ 는 $3x$ 가 정수가 되는 x 의 값에서 불연속이다.

$$\text{이때 } -\frac{4}{3} < x < 1 \text{에서} \quad -4 < 3x < 3$$

따라서 $3x=-3, -2, -1, 0, 1, 2$ 인 x 의 값, 즉

$$x=-1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$$

에서 불연속이므로 구하는 x 의 개수는 6이다.

답 ④

$$\textcircled{189} \neg. \lim_{x \rightarrow -1+} \{f(x)+g(x)\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1+} g(x)$$

$$= -1 + (-1) = -2,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1-} \{f(x)+g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1-} g(x) \\ &= 1 + 1 = 2\end{aligned}$$

$$\text{이므로} \quad \lim_{x \rightarrow -1+} \{f(x)+g(x)\} \neq \lim_{x \rightarrow -1-} \{f(x)+g(x)\}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} \{f(x)+g(x)\}$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수

$f(x)+g(x)$ 는 $x=-1$ 에서 불연속이다. (거짓)

$$\begin{aligned}\neg. \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)-g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) \\ &= -1 - 1 = -2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)-g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) \\ &= 1 - (-1) = 2\end{aligned}$$

$$\text{이므로} \quad \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)-g(x)\} \neq \lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)-g(x)\}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-g(x)\}$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수

$f(x)-g(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다. (거짓)

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1+} g(x) \\ &= -1 \times (-1) = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1-} g(x) \\ &= 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -1} f(x)g(x) = 1$$

이때 $f(-1)g(-1) = 1 \times 1 = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)g(x) = f(-1)g(-1)$$

따라서 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x = -1$ 에서 연속이다. (참)

$$\text{ㄹ. } \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1+} g(x)} = \frac{-1}{1} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1-} g(x)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$$

$$\text{이때 } \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{-1}{1} = -1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(1)}{g(1)}$$

따라서 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 $x = 1$ 에서 연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄷ, ㄹ

0190 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이면 구간 $(-\infty, \infty)$ 에 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} 4x = 4a,$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} (x^2 - 5) = a^2 - 5,$$

$$f(a) = 4a$$

$$\text{이므로 } 4a = a^2 - 5, \quad a^2 - 4a - 5 = 0$$

$$(a+1)(a-5) = 0 \quad \therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 5$$

따라서 구하는 합은 $-1 + 5 = 4$

답 4

0191 함수 $f(x)$ 가 $x = -1$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \text{ 이어야 하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + ax + b}{x + 1} = 2 \quad \dots\dots ㉠$$

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + ax + b) = 0 \text{이므로}$$

$$1 - a + b = 0 \quad \therefore b = a - 1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + ax + a - 1}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+a-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x+a-1) \\ &= -2 + a \end{aligned}$$

따라서 $-2 + a = 2$ 이므로 $a = 4$

$a = 4$ 를 ㉡에 대입하면 $b = 3$

$$\therefore a + b = 7$$

답 7

0192 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2 - 3x - 5} = 2$ 에서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이므로

$$f(x) = 2x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수})$$

$$\text{라 하면 } f(x)g(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + ax + b}{x - 3} & (x \neq 3) \\ 2x^2 + ax + b & (x = 3) \end{cases}$$

이때 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = 3$ 에서 연속이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 3} f(x)g(x) = f(3)g(3) \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + ax + b}{x - 3} = 18 + 3a + b \quad \dots\dots ㉠$$

$x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 + ax + b) = 0 \text{이므로 } 18 + 3a + b = 0$$

$$\therefore b = -3a - 18 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + ax - 3a - 18}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(2x+a+6)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (2x+a+6) \\ &= 12 + a \end{aligned}$$

$$\text{즉 } 12 + a = 0 \text{이므로 } a = -12$$

$$a = -12 \text{를 ㉡에 대입하면 } b = 18$$

따라서 $f(x) = 2x^2 - 12x + 18$ 이므로

$$f(1) = 8$$

답 ①

$$\textbf{0193} \quad x \neq 0 \text{일 때, } f(x) = \frac{x^2 - x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-1, 1)$ 에서 연속이면 $x = 0$ 에서도 연속이므로

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

답 ②

0194 $\neg$. $h(x) = f(x) + g(x)$ 라 하면

$$g(x) = h(x) - f(x)$$

이때 두 함수 $f(x)$, $h(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 함수 $g(x)$ 도 모든 실수 x 에서 연속이다. (참)

$$\text{ㄴ. [반례]} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 1) \\ -1 & (x \leq 1) \end{cases}, \quad g(x) = |x| \text{이면}$$

$$g(f(x)) = 1$$

따라서 함수 $g(f(x))$ 는 $x=1$ 에서 연속이지만 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. [반례] $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x-1$ 이면

$$f(g(x))=\frac{1}{x-1}$$

따라서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 모두 $x=1$ 에서 연속이지만 함수 $f(g(x))$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

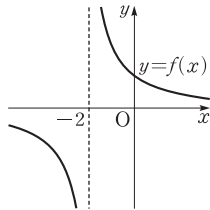
답 ①

0195 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

- ① $-5 \leq x < -2$ 일 때, 최솟값은 없다.
 ②, ④, ⑤ $f(x)$ 는 주어진 구간에서 연속
 이므로 최대·최소 정리에 의하여 이
 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을
 갖는다.

③ $-2 < x \leq 3$ 일 때, 최솟값은 $f(3)=1$

답 ①



0196 $f(x)=x^3+x^2-1$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이고

$$f(-1)=-1<0, f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{8}<0, f(0)=-1<0,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{8}<0, f(1)=1>0, f(2)=11>0$$

따라서 $f\left(\frac{1}{2}\right)f(1)<0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 이다.

답 ④

0197 버스가 A 정류장을 출발한 지 x 시간 후의 버스의 속력을 $f(x)$ km/h라 하고 A 정류장을 출발한 지 각각 b 시간, c 시간 후에 B 정류장, C 정류장에 도착하였다고 하면

$$f(0)=0, f(b)=0, f(c)=0$$

이때 $0 < a < b$, $b < \beta < c$ 이고 $f(a)=58$, $f(\beta)=68$ 인 a , β 가 존재하므로 사잇값 정리에 의하여 $f(k)=30$ 인 k 가 구간

$$(0, a), (a, b), (b, \beta), (\beta, c)$$

에 각각 적어도 하나씩 존재한다.

따라서 버스의 속력이 30 km/h인 순간은 적어도 4번 존재하므로 $n=4$

답 ④

0198 함수 $g(f(x))$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow -1-} g(f(x)) = g(f(-1))$$

$f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1+$ 일 때 $t \rightarrow 2-$ 이고,

$x \rightarrow -1-$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2-} g(t) = g(2) = 4a + 2b + 9,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0-} g(t) = g(0) = 1,$$

$$g(f(-1)) = g(1) = a + b + 2$$

즉 $4a + 2b + 9 = 1$, $a + b + 2 = 1$ 이므로

$$2a + b = -4, a + b = -1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -3$, $b = 2$

따라서 $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ 이므로

$$g(-1) = -5$$

답 -5

0199 $f(0) = -1$ 이므로 $b = 1$

... 1단계

이때 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x = -1$, $x = 1$ 에서 연속이다.

(i) $x = -1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = f(-1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (x^2 - b) = 1 - b = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (-2x + a) = 2 + a,$$

$$f(-1) = 1 - b = 0$$

$$\text{이므로 } 2 + a = 0 \quad \therefore a = -2$$

... 2단계

(ii) $x = 1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (3x + c) = 3 + c,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2 - b) = 1 - b = 0,$$

$$f(1) = 3 + c$$

$$\text{이므로 } 3 + c = 0 \quad \therefore c = -3$$

... 3단계

$$\therefore abc = 6$$

... 4단계

답 6

	채점 요소	비율
1단계	b 의 값 구하기	10 %
2단계	a 의 값 구하기	40 %
3단계	c 의 값 구하기	40 %
4단계	abc 의 값 구하기	10 %

0200 $x \neq 2$ 일 때, $f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x-2}$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2 + bx}{x-2} = 4$$

..... ㉠

... 1단계

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} (ax^2 + bx) = 0$ 이므로

$$4a + 2b = 0 \quad \therefore b = -2a$$

..... ㉡

... 2단계

㉔을 ㉓의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^2 - 2ax}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} ax = 2a$$

따라서 $2a=4$ 이므로 $a=2$

$a=2$ 를 ㉔에 대입하면 $b=-4$

$$\therefore a+b=-2$$

... 3단계

답 -2

채점 요소	비율
1단계 $x=2$ 에서 연속임을 이용하여 식 세우기	20 %
2단계 a, b 사이의 관계식 구하기	30 %
3단계 $a+b$ 의 값 구하기	50 %

0201 $g(x)=f(x)+3x$ 라 하면 $g(x)$ 는 연속함수이고

$$g(1)=f(1)+3=-5+3=-2,$$

$$g(2)=f(2)+6=-2+6=4,$$

$$g(3)=f(3)+9=3+9=12,$$

$$g(4)=f(4)+12=-14+12=-2$$

... 1단계

따라서 $g(1)g(2)<0$, $g(3)g(4)<0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)+3x=0$ 은 구간 $(1, 2)$, $(3, 4)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

즉 방정식 $f(x)+3x=0$ 은 구간 $(1, 4)$ 에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

... 2단계

답 2개

채점 요소	비율
1단계 $g(x)=f(x)+3x$ 로 놓고 $g(1), g(2), g(3), g(4)$ 의 값 구하기	50 %
2단계 방정식 $f(x)+3x=0$ 이 구간 $(1, 4)$ 에서 적어도 몇 개의 실근을 갖는지 구하기	50 %

0202 전략 직선과 곡선이 접할 때와 직선이 점 $(2, 0)$ 을 지날 때의 k 의 값을 기준으로 구간을 나누어 $f(k)$ 를 구한다.

(i) 직선 $y=x+k$ 가 곡선

$y=\sqrt{x-2}$ 와 접할 때

$\sqrt{x-2}=x+k$ 의 양변을 제

곱하면

$$x-2=x^2+2kx+k^2$$

$$\therefore x^2+(2k-1)x+k^2+2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

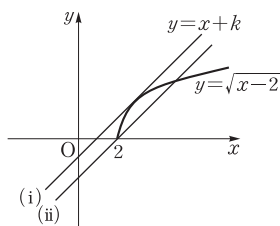
$$D=(2k-1)^2-4(k^2+2)=0$$

$$-4k-7=0 \quad \therefore k=-\frac{7}{4}$$

(ii) 직선 $y=x+k$ 가 점 $(2, 0)$ 을 지날 때

$$0=2+k \quad \therefore k=-2$$

$$(i), (ii)에서 \quad f(k) = \begin{cases} 0 & (k > -\frac{7}{4}) \\ 1 & (k = -\frac{7}{4} \text{ 또는 } k < -2) \\ 2 & (-2 \leq k < -\frac{7}{4}) \end{cases}$$



따라서 함수 $f(k)$ 가 불연속인 k 의 값은 $-2, -\frac{7}{4}$ 이므로 구하

$$는 \text{곱은} \quad -2 \times \left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{7}{2} \quad \text{답 } \frac{7}{2}$$

0203 전략 k 가 양수인 경우와 음수인 경우로 나누어 함수 $f(x)f(x-k)$ 의 $x=k$ 에서의 우극한, 좌극한, 함수값을 구한다.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x < 0) \\ x^2-2x & (x \geq 0) \end{cases} \text{에서}$$

$$f(x-k) = \begin{cases} x-k+1 & (x < k) \\ (x-k)^2-2(x-k) & (x \geq k) \end{cases}$$

이때 함수 $f(x)f(x-k)$ 가 $x=k$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow k+} f(x)f(x-k) = \lim_{x \rightarrow k-} f(x)f(x-k) = f(k)f(0)$$

(i) $k > 0$ 일 때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow k+} f(x)f(x-k) &= \lim_{x \rightarrow k+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow k+} f(x-k) \\ &= (k^2-2k) \times 0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow k-} f(x)f(x-k) &= \lim_{x \rightarrow k-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow k-} f(x-k) \\ &= (k^2-2k) \times 1 = k^2-2k, \end{aligned}$$

$$f(k)f(0) = (k^2-2k) \times 0 = 0$$

$$\text{이므로} \quad k^2-2k=0, \quad k(k-2)=0$$

$$\therefore k=2 \quad (\because k > 0)$$

(ii) $k < 0$ 일 때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow k+} f(x)f(x-k) &= \lim_{x \rightarrow k+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow k+} f(x-k) \\ &= (k+1) \times 0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow k-} f(x)f(x-k) &= \lim_{x \rightarrow k-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow k-} f(x-k) \\ &= (k+1) \times 1 = k+1, \end{aligned}$$

$$f(k)f(0) = (k+1) \times 0 = 0$$

$$\text{이므로} \quad k+1=0$$

$$\therefore k=-1$$

(i), (ii)에서 $k=-1$ 또는 $k=2$

따라서 구하는 곱은 $-1 \times 2 = -2$

답 -2

0204 전략 직선 $y=t$ 에 의하여 나누어지는 사각형의 넓이에 대한 함수를 생각하고 사잇값 정리를 이용한다.

□AOBC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (9+7) \times 6 = 48$$

오른쪽 그림과 같이 직선 $y=t$ 와

□AOBC가 만나는 두 점을 각각 D, E라 하자.

$0 < t \leq 6$ 에서 □DOBE의 넓이를 $f(t)$

라 하고 $f(0)=0$ 이라 하면 함수 $f(t)$

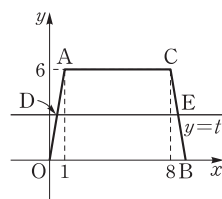
는 구간 $[0, 6]$ 에서 연속이고

$$f(0)=0, \quad f(6)=48$$

이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=24$ 인 c 가 구간 $(0, 6)$ 에 적어도 하나 존재한다.

따라서 □AOBC의 넓이를 이등분하고 x 축에 평행한 직선 $y=c$ 가 적어도 하나 존재한다.

답 풀이 참조



03 미분계수와 도함수

교과서 문제 정복하기

본책 039쪽, 041쪽

$$0205 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{7 - 1}{2} = 3 \quad \text{답 3}$$

$$0206 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 - 0}{2} = 2 \quad \text{답 2}$$

$$0207 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{20 - (-4)}{2} = 12 \quad \text{답 12}$$

$$0208 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{1 - 9}{2} = -4 \quad \text{답 -4}$$

$$0209 \quad (1) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{-14 - 1}{3} = -5$$

$$(2) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{(3 + \Delta x) - 3} \\ = \frac{\{-(3 + \Delta x)^2 + 2\} - (-7)}{\Delta x} \\ = \frac{-6\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = -6 - \Delta x$$

$$(3) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{(a + \Delta x) - a} \\ = \frac{\{-(a + \Delta x)^2 + 2\} - (-a^2 + 2)}{\Delta x} \\ = \frac{-2a\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = -2a - \Delta x$$

답 (1) -5 (2) -6-Δx (3) -2a-Δx

$$0210 \quad f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(2 + \Delta x) - 6}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x} = 3 \quad \text{답 3}$$

다른 풀이 $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 6}{x - 2} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x - 2)}{x - 2} = 3$$

$$0211 \quad f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{-2(2 + \Delta x) + 5\} - 1}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2\Delta x}{\Delta x} = -2 \quad \text{답 -2}$$

$$0212 \quad f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(2 + \Delta x)^2 - 2\} - 2}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = 4 \quad \text{답 4}$$

$$0213 \quad f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x + 5)^2 - 25}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{10\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (10 + \Delta x) = 10 \quad \text{답 10}$$

$$0214 \quad f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(a + \Delta x)^2 - 2(a + \Delta x)\} - (a^2 - 2a)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2a - 2)\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2a - 2 + \Delta x) = 2a - 2$$

즉 $2a - 2 = 6$ 이므로 $a = 4$

답 4

$$0215 \quad f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{2(a + \Delta x)^3 + 3\} - (2a^3 + 3)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6a^2\Delta x + 6a(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{6a^2 + 6a\Delta x + 2(\Delta x)^2\} = 6a^2$$

즉 $6a^2 = 6$ 이므로 $a^2 = 1$

$\therefore a = 1$ ($\because a > 0$)

답 1

$$0216 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a - h) - f(a)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a - h) - f(a)}{-h} \times (-1) \\ = -f'(a) = -3 \quad \text{답 -3}$$

$$0217 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + 2h) - f(a)}{3h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + 2h) - f(a)}{2h} \times \frac{2}{3} \\ = \frac{2}{3} f'(a) = \frac{2}{3} \times 3 = 2 \quad \text{답 2}$$

$$0218 \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x^2 - a^2} \\ = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times \frac{1}{x + a} \right\} \\ = f'(a) \times \frac{1}{2a} = \frac{3}{2a} \quad \text{답 } \frac{3}{2a}$$

$$\begin{aligned}
 \text{0219 } f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{2(1+\Delta x)^2 - 3\} - (-1)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4\Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + 2\Delta x) = 4 \quad \text{답 4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{0220 } f'(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(\Delta x)^2 - 2\Delta x - 5\} - (-5)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x - 2) = -2 \quad \text{답 -2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{0221 } f'(-1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1+\Delta x) - f(-1)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{-(-1+\Delta x)^3 - (-1+\Delta x) + 7\} - 9}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-4\Delta x + 3(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{-4 + 3\Delta x - (\Delta x)^2\} = -4 \quad \text{답 -4}
 \end{aligned}$$

0222 (1) $f(2)=0$ 이고

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2+} (x-2) = 0, \\
 \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2-} (-x+2) = 0
 \end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

(2) $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x-2) - 0}{x-2} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(-x+2) - 0}{x-2} = -1$$

따라서 $f'(2)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

답 (1) 연속이다. (2) 미분가능하지 않다.

0223 (1) $f(1)=2$ 이고

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} 2x^3 = 2, \\
 \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} (6x-4) = 2
 \end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

(2) $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2x^3 - 2}{x-1}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1+} 2(x^2+x+1) = 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(6x-4) - 2}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{6(x-1)}{x-1} = 6
 \end{aligned}$$

따라서 $f'(1)=6$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

답 (1) 연속이다. (2) 미분가능하다.

$$\begin{aligned}
 \text{0224 } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2-2}{h} = 0 \quad \text{답 } f'(x) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{0225 } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{2(x+h)+1\} - (2x+1)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = 2 \quad \text{답 } f'(x) = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{0226 } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h)^2 - 1\} - (x^2 - 1)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \quad \text{답 } f'(x) = 2x
 \end{aligned}$$

0227 $\neg$. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$

$\hookrightarrow$. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = f'(1)$

$\square$. $t-x=h$ 로 놓으면 $t=x+h$

$t \rightarrow x$ 일 때 $h \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t-x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

$\square$. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\Delta x)}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

이므로 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\Delta x)}{\Delta x} \neq f'(x)$

이상에서 도함수 $f'(x)$ 와 같은 것은 $\neg$, $\square$ 이다. 답 $\neg$, $\square$

0228 답 $y' = 3x^2$

0229 답 $y' = 5x^4$

0230 답 $y' = 0$

0231 $y' = \left(\frac{1}{2}x^4 + x^2\right)' = \left(\frac{1}{2}x^4\right)' + (x^2)'$

$$= 2x^3 + 2x \quad \text{답 } y' = 2x^3 + 2x$$

0232 $y' = (-3x^2 + 9x + 10)'$

$$\begin{aligned}
 &= (-3x^2)' + (9x)' + (10)' \\
 &= -6x + 9 \quad \text{답 } y' = -6x + 9
 \end{aligned}$$

0233 $y' = (2x^3 - x^2 + 4x - 1)'$
 $= (2x^3)' - (x^2)' + (4x)' - (1)'$
 $= 6x^2 - 2x + 4$ **답** $y' = 6x^2 - 2x + 4$

0234 (1) $\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$ 이므로 $x=1$ 에서의 미분계수는

$$f'(1) + g'(1) = 3 + (-2) = 1$$

(2) $\{2f(x) - g(x)\}' = 2f'(x) - g'(x)$ 이므로 $x=1$ 에서의 미분계수는

$$2f'(1) - g'(1) = 2 \times 3 - (-2) = 8$$

(3) $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 이므로 $x=1$ 에서의 미분계수는

$$f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = 3 \times 2 + (-1) \times (-2) = 8$$

(4) $\{[f(x)]^2\}' = 2f(x)f'(x)$ 이므로 $x=1$ 에서의 미분계수는

$$2f(1)f'(1) = 2 \times (-1) \times 3 = -6$$

답 (1) 1 (2) 8 (3) 8 (4) -6

0235 $y' = (x)'(3x+2) + x(3x+2)'$
 $= (3x+2) + 3x$
 $= 6x+2$ **답** $y' = 6x+2$

0236 $y' = (x-4)'(3x-1) + (x-4)(3x-1)'$
 $= (3x-1) + 3(x-4)$
 $= 6x-13$ **답** $y' = 6x-13$

0237 $y' = (-x^2)'(2x-3) + (-x^2)(2x-3)'$
 $= -2x(2x-3) - 2x^2$
 $= -6x^2 + 6x$ **답** $y' = -6x^2 + 6x$

0238 $y' = (x^2-3)'(x+4) + (x^2-3)(x+4)'$
 $= 2x(x+4) + (x^2-3)$
 $= 3x^2 + 8x - 3$ **답** $y' = 3x^2 + 8x - 3$

0239 $y' = (x)'(x-1)(x-2) + x(x-1)'(x-2)$
 $+ x(x-1)(x-2)'$
 $= (x-1)(x-2) + x(x-2) + x(x-1)$
 $= 3x^2 - 6x + 2$ **답** $y' = 3x^2 - 6x + 2$

0240 $y' = (x-5)'(2x+4)(-x+1)$
 $+ (x-5)(2x+4)'(-x+1)$
 $+ (x-5)(2x+4)(-x+1)'$
 $= (2x+4)(-x+1) + 2(x-5)(-x+1)$
 $- (x-5)(2x+4)$
 $= -6x^2 + 16x + 14$ **답** $y' = -6x^2 + 16x + 14$

0241 $y = (3x+4)^2 = (3x+4)(3x+4)$ 이므로
 $y' = (3x+4)'(3x+4) + (3x+4)(3x+4)'$
 $= 3(3x+4) + 3(3x+4)$
 $= 6(3x+4)$ **답** $y' = 6(3x+4)$

다른 풀이 $y' = 2(3x+4)(3x+4)' = 6(3x+4)$

0242 $y = (2x-5)^3 = (2x-5)(2x-5)(2x-5)$ 이므로
 $y' = (2x-5)'(2x-5)(2x-5)$
 $+ (2x-5)(2x-5)'(2x-5)$
 $+ (2x-5)(2x-5)(2x-5)'$
 $= 2(2x-5)^2 + 2(2x-5)^2 + 2(2x-5)^2$
 $= 6(2x-5)^2$ **답** $y' = 6(2x-5)^2$

0243 $y = (x^2+1)(2x+1)^2 = (x^2+1)(2x+1)(2x+1)$
 이므로

$$y' = (x^2+1)'(2x+1)(2x+1)$$

$$+ (x^2+1)(2x+1)'(2x+1)$$

$$+ (x^2+1)(2x+1)(2x+1)'$$

$$= 2x(2x+1)^2 + 2(x^2+1)(2x+1)$$

$$+ 2(x^2+1)(2x+1)$$

$$= 2(2x+1)(4x^2+x+2)$$

답 $y' = 2(2x+1)(4x^2+x+2)$

유형 익히기

• 본책 042~050쪽

0244 x 의 값이 1에서 a 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(1)}{a-1} = \frac{(a^3-2a+5)-4}{a-1}$$

$$= \frac{(a-1)(a^2+a-1)}{a-1} = a^2+a-1$$

즉 $a^2+a-1=5$ 이므로 $a^2+a-6=0$

$(a+3)(a-2)=0 \quad \therefore a=2 (\because a>1)$ **답** 2

0245 x 의 값이 1에서 $1+h$ 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{h^2+2h}{h} = h+2$$

즉 $h+2=3$ 이므로 $h=1$

답 1

0246 x 의 값이 1에서 a 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(1)}{a-1} = \frac{(a^2-3a+a)-(-2+a)}{a-1}$$

$$= \frac{a^2-3a+2}{a-1} = \frac{(a-1)(a-2)}{a-1} = a-2$$

즉 $a-2=2a-7$ 이므로 $a=5$

답 5

0247 직선 AB의 기울기는 x 의 값이 2에서 4까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율과 같으므로

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=2$$

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이므로

$$f(0)=f(4)$$

따라서 x 의 값이 0에서 2까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{f(2)-f(0)}{2-0} &= \frac{f(2)-f(4)}{2} \\ &= -\frac{f(4)-f(2)}{4-2} = -2\end{aligned}$$

답 -2

0248 x 의 값이 -1에서 4까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\frac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)} = \frac{8-3}{5} = 1$$

함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(a+h)^2-2(a+h)\}-(a^2-2a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah+h^2-2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2a+h-2) = 2a-2\end{aligned}$$

즉 $2a-2=1$ 이므로 $a=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

0249 x 의 값이 1에서 k 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{f(k)-f(1)}{k-1} &= \frac{(k^3-1)-0}{k-1} \\ &= \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{k-1} \\ &= k^2+k+1\end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 의 $x=\sqrt{7}$ 에서의 순간변화율은

$$\begin{aligned}f'(\sqrt{7}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\sqrt{7}+h)-f(\sqrt{7})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(\sqrt{7}+h)^3-1\}-\{(\sqrt{7})^3-1\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{21h+3\sqrt{7}h^2+h^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (21+3\sqrt{7}h+h^2) = 21\end{aligned}$$

즉 $k^2+k+1=21$ 이므로 $k^2+k-20=0$

$$(k+5)(k-4)=0 \quad \therefore k=4 \quad (\because k>1)$$

답 4

0250 x 의 값이 a 에서 $2a$ 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{f(2a)-f(a)}{2a-a} &= \frac{(4a^3+4a)-(a^3+2a)}{a} \\ &= \frac{3a^3+2a}{a} = 3a^2+2\end{aligned}$$

... 1단계

함수 $f(x)$ 의 $x=1$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{a(1+h)^2+2(1+h)\}-(a+2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah+ah^2+2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2a+ah+2) \\ &= 2a+2\end{aligned}$$

... 2단계

즉 $3a^2+2=2a+2$ 이므로 $3a^2-2a=0$

$$a(3a-2)=0 \quad \therefore a=\frac{2}{3} \quad (\because a>0)$$

... 3단계

답 $\frac{2}{3}$

	채점 요소	비율
1단계	x 의 값이 a 에서 $2a$ 까지 변할 때의 평균변화율 구하기	40 %
2단계	$x=1$ 에서의 미분계수 구하기	40 %
3단계	양수 a 의 값 구하기	20 %

0251 x 의 값이 1에서 k 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율이 $-k$ 이므로

$$\frac{f(k)-f(1)}{k-1} = -k$$

이때 $f(1)=3$ 이므로

$$f(k) = -k^2+k+3$$

따라서 $f(x) = -x^2+x+3$ 이므로 $x=-1$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{-(-1+h)^2+(-1+h)+3\}-1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h-h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3-h) = 3\end{aligned}$$

답 3

$$\text{0252} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2-h)}{3h}$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)-\{f(2-h)-f(2)\}}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \times \frac{1}{3} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h)-f(2)}{-h} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} f'(2) + \frac{1}{3} f'(2) = \frac{2}{3} f'(2) \\ &= \frac{2}{3} \times 6 = 4\end{aligned}$$

답 4

$$\text{0253} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+kh)-f(1)}{h}$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+kh)-f(1)}{kh} \times k \\ &= k f'(1) = 3k\end{aligned}$$

즉 $3k=6$ 이므로

$$k=2$$

답 2

$$\begin{aligned}
 \text{0254 } & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a-3h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a) - \{f(a-3h) - f(a)\}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{2h} \times 2 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-3h) - f(a)}{-3h} \times 3 \\
 &= 2f'(a) + 3f'(a) \\
 &= 5f'(a) \quad \text{답 ⑤}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{0255 } & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a+h^2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a) - \{f(a+h^2) - f(a)\}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a)}{3h} \times 3 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a)}{h^2} \times h \\
 &= 3f'(a) - f'(a) \times 0 = 3f'(a) \\
 &= 3 \times (-3) = -9 \quad \text{답 -9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{0256 } & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3) - f(1)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^3) - f(1)}{x^3 - 1} \times (x^2 + x + 1) \right\} \\
 &= 3f'(1) = 3 \times 2 = 6 \quad \text{답 6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{0257 } & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = 1 \text{ 이므로} \\
 & f'(3) = 1 \\
 & \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+3h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+3h) - f(3)}{3h} \times 3 \\
 &= 3f'(3) = 3 \times 1 = 3 \quad \text{답 3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{0258 } & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + xf(-1)}{x^2 + 3x + 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1) + xf(-1) + f(-1)}{(x+1)(x+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \left\{ \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \times \frac{1}{x+2} \right\} + \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)f(-1)}{(x+1)(x+2)} \\
 &= f'(-1) + f(-1) \\
 &= -2 + 3 = 1 \quad \text{답 ④}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{0259 } & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 3}{\sqrt{x} - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(1)}}{\sqrt{x} - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(1)}\} \{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(1)}\} (\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) \{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(1)}\}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(1)}} \\
 &= f'(1) \times \frac{1}{\sqrt{f(1)}} = 6 \times \frac{1}{3} = 2 \quad \text{답 2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{0260 } & \text{미분계수의 정의에 의하여} \\
 & f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) + f(h) - 1 - f(2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} \\
 & \text{이때 } f'(2) = 1 \text{ 이므로 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) + f(h) - 1 - f(1)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} = 1 \quad \text{답 ①}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{0261 } & \text{미분계수의 정의에 의하여} \\
 & f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0) + f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \\
 & \text{이때 } f'(0) = -1 \text{ 이므로 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = -1
 \end{aligned}$$

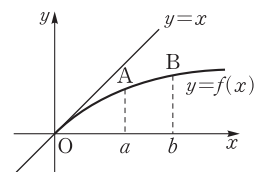
$$\begin{aligned}
 \therefore f'(2a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2a+h) - f(2a)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2a) + f(h) - 2ah - f(2a)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} - 2a = -1 - 2a \\
 & \text{즉 } -1 - 2a = 7 \text{ 이므로 } a = -4 \quad \text{답 ②}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{0262 } & x=0, y=0 \text{ 을 주어진 식에 대입하면} \\
 & f(0) = 2\{f(0)\}^2 \quad \therefore f(0) = \frac{1}{2} \quad (\because f(0) > 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f(2)f(h) - f(2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f(2) \left\{ f(h) - \frac{1}{2} \right\}}{h} \\
 &= 2f(2) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\
 &= 2f(2)f'(0) = 2f(2) \times 3 = 6f(2)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{f'(2)}{f(2)} = 6 \quad \text{답 6}$$

0263 오른쪽 그림과 같이
 A(a, f(a)), B(b, f(b))라 하자.
 ∴ f'(a)는 점 A에서의 접선의 기울기이고, f'(b)는 점 B에서의 접선의 기울기이므로
 f'(a) > f'(b) (거짓)



ㄴ, 직선 AB의 기울기는 1보다 작으므로

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 1$$

이때 $b-a > 0$ 이므로

$$f(b)-f(a) < b-a \quad (\text{참})$$

ㄷ, $\frac{f(a)}{a}$ 는 원점과 점 A를 지나는 직선의 기울기이고, $\frac{f(b)}{b}$ 는

원점과 점 B를 지나는 직선의 기울기이므로

$$\frac{f(a)}{a} > \frac{f(b)}{b} \quad (\text{거짓})$$

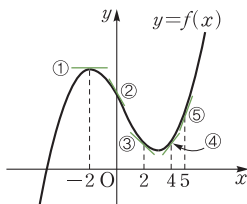
이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

0264 ①~⑤의 값은 오른쪽 그림에서 각 점선의 기울기와 같다. 점선의 기울기가 큰 것부터 순서대로 나열하면

⑤, ④, ①, ③, ②

이므로 그 값이 가장 큰 것은 ⑤이다.



답 ⑤

0265 오른쪽 그림과 같이

$A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ 라 하자.

ㄱ, $f'(a)$ 는 점 A에서의 접선의 기울기이고, $f'(b)$ 는 점 B에서의 접선의 기울기이므로

$$f'(a) < f'(b) \quad (\text{참})$$

ㄴ, 직선 AB의 기울기가 점 B에서의 접선의 기울기보다 작으므로

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(b) \quad (\text{참})$$

ㄷ, $a > 0$, $b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \quad (\because a \neq b)$$

따라서 $x = \frac{a+b}{2}$ 인 점에서의 접선의 기울기는 $x = \sqrt{ab}$ 인

점에서의 접선의 기울기보다 크므로

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right) > f'(\sqrt{ab}) \quad (\text{참})$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

RPM 비법 노트

산술평균과 기하평균의 관계

$a > 0$, $b > 0$ 일 때

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

0266 ㄱ, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이고

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \end{aligned}$$

따라서 $f'(1) = 2$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

ㄴ, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이고

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|x^2-x|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2-x}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} x = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|x^2-x|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-x^2+x}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} (-x) = -1 \end{aligned}$$

따라서 $f'(1)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄷ, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이고

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{1}{x}\right) = -1$$

따라서 $f'(1) = -1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

이상에서 $x=1$ 에서 미분가능한 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

0267 함수 $y=f(x)$ 는 $x=-2$, $x=1$ 에서 불연속이므로

$$m=2$$

또 $x=-2$, $x=1$, $x=2$ 에서 미분가능하지 않으므로

$$n=3$$

$$\therefore m+n=5$$

답 5

0268 $f(1)=0$ 이고

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x+2)|x-1| \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x+2)(x-1) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} (x+2)|x-1| \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} (x+2)(-x+1) = 0 \end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

... 1단계

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x+2)|x-1|}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x+2) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x+2)|x-1|}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x+2)(-x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} (-x-2) = -3 \end{aligned}$$

즉 $f'(1)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

... 2단계

따라서 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

... 3단계

답 연속이지만 미분가능하지 않다.

	채점 요소	비율
1단계	연속성 조사하기	40 %
2단계	미분가능성 조사하기	50 %
3단계	답 구하기	10 %

0269 ① 점 $(3, f(3))$ 에서의 접선의 기울기는 음수이므로 $f'(3) < 0$

② $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값은 존재한다.

③ $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 존재하지 않는다.

④ 함수 $f(x)$ 는 $x=2, x=4$ 에서 불연속이므로 불연속인 x 의 값은 2개이다.

⑤ 함수 $f(x)$ 는 $x=1, x=2, x=4$ 에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 x 의 값은 3개이다.

답 ⑤

0270 $\neg$. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이고

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x}{x} = -1$$

따라서 $f'(0)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

$\neg$. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 2$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이고

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(x^2 - 3|x| + 2) - 2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2 - 3x}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0+} (x - 3) = -3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{(x^2 - 3|x| + 2) - 2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^2 + 3x}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0-} (x + 3) = 3$$

따라서 $f'(0)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

$\cap$. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이고

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(x+1)^2 - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2 + 2x}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0+} (x + 2) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{(2x+1) - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2x}{x} = 2$$

따라서 $f'(0) = 2$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

이상에서 $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 $\neg$, $\cap$ 이다. **답** $\neg, \cap$

0271 $\neg$. $h(x) = xf(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$

이라 하면 $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0) = 0$ 이므로 함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이고

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x) = 0$$

따라서 $h'(0) = 0$ 이므로 함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

$\cap$. $i(x) = f(x) + xg(x) = \begin{cases} x^2 - x & (x \geq 0) \\ x^2 + x & (x < 0) \end{cases}$

라 하면 $\lim_{x \rightarrow 0} i(x) = i(0) = 0$ 이므로 함수 $i(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이고

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{i(x) - i(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} (x - 1) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{i(x) - i(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} (x + 1) = 1$$

따라서 $i'(0)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $i(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

$\cap$. $k(x) = f(x)g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & (x \geq 0) \\ -x^2 - 2x & (x < 0) \end{cases}$

라 하면 $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = k(0) = 0$ 이므로 함수 $k(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이고

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{k(x) - k(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2 - 2x}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0+} (x - 2) = -2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{k(x) - k(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x^2 - 2x}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x - 2) = -2$$

따라서 $k'(0) = -2$ 이므로 함수 $k(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

이상에서 $x=0$ 에서 미분가능한 함수는 $\neg, \cap$ 이다. **답** $\neg, \cap$

0272 $f'(x) = 3x^2 - 6x + a$ 이므로 $f'(1) = 2$ 에서 $-3 + a = 2 \quad \therefore a = 5$

답 ⑤

0273 $f'(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{99}$ 이므로 $f'(1) = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{100\text{개}} = 100$

답 100

0274 $f(1) = 1$ 에서 $a + b + 3 = 1$
 $\therefore a + b = -2$

..... ㉠

$f'(x)=3ax^2+b$ 이므로 $f'(1)=4$ 에서

$$3a+b=4$$

..... ㉠

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3, b=-5$

$$\therefore ab=-15$$

답 ③

0275 $f(x)=2x^2-xf'(1)$ 에서

$$f'(x)=4x-f'(1)$$

$x=1$ 을 대입하면 $f'(1)=4-f'(1)$

$$\therefore f'(1)=2$$

따라서 $f'(x)=4x-2$ 이므로

$$f'(3)=10$$

답 10

0276 $g(x)=(x^2+3x)f(x)$ 에서

$$g'(x)=(x^2+3x)'f(x)+(x^2+3x)f'(x)$$

$$=(2x+3)f(x)+(x^2+3x)f'(x)$$

$$\therefore g'(1)=5f(1)+4f'(1)$$

$$=5 \times 3 + 4 \times 2 = 23$$

답 23

0277 $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)$ 에서

$$f'(x)=(x+1)'(x+2)(x+3)$$

$$+(x+1)(x+2)'(x+3)$$

$$+(x+1)(x+2)(x+3)'$$

$$=(x+2)(x+3)+(x+1)(x+3)$$

$$+(x+1)(x+2)$$

$$\therefore f'(0)=6+3+2=11$$

답 ①

0278 $f(x)=(3x^2-1)^3=(3x^2-1)(3x^2-1)(3x^2-1)$

이므로

$$f'(x)=(3x^2-1)'(3x^2-1)(3x^2-1)$$

$$+(3x^2-1)(3x^2-1)'(3x^2-1)$$

$$+(3x^2-1)(3x^2-1)(3x^2-1)'$$

$$=6x(3x^2-1)^2+6x(3x^2-1)^2+6x(3x^2-1)^2$$

$$=18x(3x^2-1)^2$$

$$\therefore f'(1)=72$$

답 ⑤

0279 $f'(x)$

$$=(x-a)'(x^3+2x^2+8)+(x-a)(x^3+2x^2+8)'$$

$$=x^3+2x^2+8+(x-a)(3x^2+4x)$$

... 1단계

$$f'(a)=11에서 \quad a^3+2a^2+8=11$$

$$a^3+2a^2-3=0, \quad (a-1)(a^2+3a+3)=0$$

$$\therefore a=1 (\because a^2+3a+3>0)$$

... 2단계

따라서 $f'(x)=x^3+2x^2+8+(x-1)(3x^2+4x)$ 이므로

$$f'(-1)=11$$

... 3단계

답 11

채점 요소	비율
1단계 $f'(x)$ 구하기	40 %
2단계 a 의 값 구하기	40 %
3단계 $f'(-1)$ 의 값 구하기	20 %

0280 곡선 $y=f(x)g(x)$ 위의 점 $(1, -4)$ 에서의 접선의 기울기는 함수 $y=f(x)g(x)$ 의 $x=1$ 에서의 미분계수와 같다.

이때 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 이고

$$f'(x)=-2x+3, \quad g'(x)=6x^2+2x-1$$

이므로 구하는 값은

$$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=1 \times (-2) + 2 \times 7 = 12$$

답 12

0281 조건 ㉠의 식을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=(x^3)'g(x)+x^3g'(x)$$

$$=3x^2g(x)+x^3g'(x)$$

$f(x), f'(x)$ 를 조건 ㉡의 식에 대입하면

$$\{3x^2g(x)+x^3g'(x)\}g(x)-x^3g'(x)g'(x)=48x^4$$

$$3x^2\{g(x)\}^2=48x^4, \quad \{g(x)\}^2=16x^2$$

$$\therefore g(x)=\pm 4x$$

이때 조건 ㉠의 식에 $x=-1$ 을 대입하면 $f(-1)=-g(-1)$ 이므로

$$f(-1)g(-1)=-\{g(-1)\}^2=-16$$

답 ①

0282 $(x-1)^2f(x)=x^8+ax+b$

..... ㉠

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0=1+a+b \quad \therefore b=-a-1$$

..... ㉡

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\{(x-1)^2\}'f(x)+(x-1)^2f'(x)=8x^7+a$$

$$\therefore 2(x-1)f(x)+(x-1)^2f'(x)=8x^7+a$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0=8+a \quad \therefore a=-8$$

$a=-8$ 을 ㉡에 대입하면 $b=7$

따라서 $(x-1)^2f(x)=x^8-8x+7$ 이므로 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f(2)=247$$

답 ②

0283 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$

$$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$$

이때 $f'(x)=3x^2-4x$ 이므로 구하는 값은

$$2f'(1)=2 \times (-1) = -2$$

답 ①

0284 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x)\}^2 - \{f(1)\}^2}{x-1}$

$$=\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \{f(x)+f(1)\} \right]$$

$$=2f(1)f'(1)$$

이때 $f'(x)=3x^2-10x$ 이므로 구하는 값은

$$2f(1)f'(1)=2 \times (-4) \times (-7) = 56$$

답 56

$$\begin{aligned}
 & \text{0285 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - 2f(2) - \{xf(2) - 2f(2)\}}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times 2 - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)f(2)}{x-2} \\
 &= 2f'(2) - f(2)
 \end{aligned}$$

이때 $f(x) = (3x-2)(2x^2+1)$ 에서
 $f'(x) = (3x-2)'(2x^2+1) + (3x-2)(2x^2+1)'$
 $= 3(2x^2+1) + 4x(3x-2)$

이므로 구하는 값은
 $2f'(2) - f(2) = 2 \times 59 - 36 = 82$

답 82

$$\begin{aligned}
 & \text{0286 } f(1) = g(1) = 3 \text{이므로} \\
 & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - g(1-h)}{3h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1) - \{g(1-h) - g(1)\}}{3h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times \frac{2}{3} \\
 & \quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1-h) - g(1)}{-h} \times \frac{1}{3} \\
 &= \frac{2}{3}f'(1) + \frac{1}{3}g'(1)
 \end{aligned}$$

이때 $f'(x) = 1 + 3x^2 + 5x^4$, $g'(x) = 2x + 4x^3 + 6x^5$ 이므로 구하는 값은
 $\frac{2}{3}f'(1) + \frac{1}{3}g'(1) = \frac{2}{3} \times 9 + \frac{1}{3} \times 12 = 10$

답 10

$$\begin{aligned}
 & \text{0287 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2 \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극한} \\
 & \text{값이 존재하므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{이다.} \\
 & \text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{이므로 } f(1) = 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 2$$

한편 $f(x) = x^3 + 2ax^2 + bx - 2b$ 에서
 $f'(x) = 3x^2 + 4ax + b$

$f(1) = 0$ 에서 $1 + 2a - b = 0$
 $\therefore 2a - b = -1$ ㉠

$f'(1) = 2$ 에서 $3 + 4a + b = 2$
 $\therefore 4a + b = -1$ ㉡

㉠, ㉡를 연립하여 풀면 $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{3}$
 $\therefore a + b = 0$

답 ③

$$\begin{aligned}
 & \text{0288 } f(-1) = 3 \text{에서 } -1 + a + b = 3 \\
 & \therefore b = -a + 4
 \end{aligned}$$

한편
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\}$
 $= \frac{1}{2}f'(1) = \frac{5}{2}$

이므로 $f'(1) = 5$
 이때 $f'(x) = 3x^2 + 2ax$ 이므로
 $3 + 2a = 5 \quad \therefore a = 1$
 $a = 1$ 을 ㉠에 대입하면 $b = 3$
 $\therefore ab = 3$

답 ⑤

$$\begin{aligned}
 & \text{0289 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = -2 \text{에서} \\
 & f'(2) = -2 \\
 & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1+2h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1) - \{f(1+2h) - f(1)\}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h} \times (-2) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times 2 \\
 &= -2f'(1) - 2f'(1) = -4f'(1) \\
 & \text{즉 } -4f'(1) = 8 \text{이므로 } f'(1) = -2 \\
 & \text{이때 } f'(x) = 4x^3 + 2ax + b \text{이므로} \\
 & f'(2) = -2 \text{에서 } 32 + 4a + b = -2 \\
 & \therefore 4a + b = -34 \quad \dots\dots ㉠ \\
 & f'(1) = -2 \text{에서 } 4 + 2a + b = -2 \\
 & \therefore 2a + b = -6 \quad \dots\dots ㉡
 \end{aligned}$$

㉠, ㉡를 연립하여 풀면

$$a = -14, b = 22$$

따라서 $f(x) = x^4 - 14x^2 + 22x + 1$ 이므로
 $f(1) = 10$

답 10

$$\begin{aligned}
 & \text{0290 } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 11 \text{에서 } x \rightarrow 3 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극} \\
 & \text{한값이 존재하므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{이다.} \\
 & \text{즉 } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0 \text{이므로 } f(3) = 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = f'(3) = 11$$

또 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = -13$ 에서

$$f'(-1) = -13 \quad \dots \text{1단계}$$

이때 $f(3) = 0$ 에서 이차함수 $f(x)$ 는 $x-3$ 을 인수로 가지므로

$$f(x) = (x-3)(ax+b) \quad (a, b \text{는 상수, } a \neq 0)$$

라 하면

$$f'(x) = ax + b + a(x-3)$$

$f'(3) = 11$ 에서 $3a + b = 11$ ㉠

$f'(-1) = -13$ 에서 $-5a + b = -13$ ㉡

㉠, ㉡를 연립하여 풀면

$$a = 3, b = 2$$

$$\therefore f(x) = (x-3)(3x+2)$$

... 2단계

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합은

$$3 + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{7}{3}$$

... 3단계

답 $\frac{7}{3}$

채점 요소	비율
1단계 $f(3), f'(3), f'(-1)$ 의 값 구하기	40 %
2단계 $f(x)$ 구하기	40 %
3단계 방정식 $f(x)=0$ 의 모든 근의 합 구하기	20 %

0291 $f(x)=x^3+ax+b$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2+a$$

점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기가 -3 이므로

$$f'(1)=3+a=-3 \quad \therefore a=-6$$

또 점 $(1, 1)$ 은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(1)=1-6+b=1 \quad \therefore b=6$$

$$\therefore ab=-36$$

답 ①

0292 $f(x)=x^2-3x+2$ 에서 $f'(x)=2x-3$

점 (a, b) 에서의 접선의 기울기가 9이므로

$$f'(a)=2a-3=9 \quad \therefore a=6$$

또 점 $(6, b)$ 는 함수 $f(x)=x^2-3x+2$ 의 그래프 위의 점이므로
 $b=f(6)=20$ **답 a=6, b=20**

0293 점 $(1, 3)$ 은 함수 $f(x)=x^2+ax+1$ 의 그래프 위의 점
 이므로

$$f(1)=2+a=3 \quad \therefore a=1$$

즉 $f(x)=x^2+x+1$ 이므로

$$f'(x)=2x+1$$

점 $(1, 3)$ 에서의 접선의 기울기가 m 이므로

$$m=f'(1)=3$$

$$\therefore a+m=4$$

답 ①

0294 $f(x)=(2x-1)^2(x^3+k)$

$$=(2x-1)(2x-1)(x^3+k)$$

라 하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-1)'(2x-1)(x^3+k) \\ &\quad + (2x-1)(2x-1)'(x^3+k) \\ &\quad + (2x-1)(2x-1)(x^3+k)' \\ &= 2(2x-1)(x^3+k) \\ &\quad + 2(2x-1)(x^3+k) \\ &\quad + 3x^2(2x-1)^2 \\ &= (2x-1)(10x^3-3x^2+4k) \end{aligned}$$

x 좌표가 1인 점에서의 접선의 기울기가 -13 이므로

$$f'(1)=7+4k=-13$$

$$\therefore k=-5$$

답 ⑤

0295 함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 미분가능하므로 $x=-1$ 에서
 연속이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)=f(-1)$ 이므로

$$-1+1-b=a+3 \quad \therefore b=-a-3 \quad \dots\dots ⑦$$

또 $f'(-1)$ 이 존재하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{(ax^2+3)-(a+3)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{a(x-1)(x+1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} a(x-1) = -2a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{(x^3+x^2+bx)-(a+3)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{\{x^3+x^2+(-a-3)x\}-(a+3)}{x+1} \quad (\because ⑦) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{(x+1)(x^2-a-3)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} (x^2-a-3) = -a-2 \end{aligned}$$

에서 $-2a=-a-2 \quad \therefore a=2$

$a=2$ 를 ⑦에 대입하면 $b=-5$

$$\therefore a-b=7$$

답 7

다른 풀이 $g(x)=ax^2+3, h(x)=x^3+x^2+bx$ 라 하면

$$g'(x)=2ax, h'(x)=3x^2+2x+b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$g(-1)=h(-1), \quad a+3=-1+1-b$$

$$\therefore a+b=-3 \quad \dots\dots ①$$

함수 $f(x)$ 의 $x=-1$ 에서의 미분계수가 존재하므로

$$g'(-1)=h'(-1), \quad -2a=3-2+b$$

$$\therefore 2a+b=-1 \quad \dots\dots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=2, b=-5$$

0296 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속
 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=f(1)$ 이므로

$$a+b=1 \quad \therefore b=-a+1 \quad \dots\dots ⑦$$

또 $f'(1)$ 이 존재하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2-1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x+1) = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(ax+b)-1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{a(x-1)}{x-1} \quad (\because ⑦) \\ &= a \end{aligned}$$

에서 $a=2$

$a=2$ 를 ⑦에 대입하면 $b=-1$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \geq 1) \\ 2x-1 & (x < 1) \end{cases}$ 이므로

$$f(-1)=-3$$

답 -3

0297 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하므로 $x=a$ 에서 연속이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 이므로 $a^3 = a^2 + a + b$ ㉠

또 $f'(a)$ 가 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{(x^2 + x + b) - (a^2 + a + b)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{(x-a)(x+a+1)}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a+} (x+a+1) = 2a+1, \\ \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a-} \frac{x^3 - (a^2 + a + b)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a-} \frac{x^3 - a^3}{x - a} \quad (\because \text{㉠}) \\ &= \lim_{x \rightarrow a-} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a-} (x^2 + ax + a^2) = 3a^2\end{aligned}$$

에서 $2a+1=3a^2$, $3a^2-2a-1=0$

$(3a+1)(a-1)=0 \quad \therefore a=1 \quad (\because a>0)$

$a=1$ 을 ㉠에 대입하면 $1=1+1+b \quad \therefore b=-1$

$\therefore a+b=0$ 답 ②

0298 $h(x) = f(x)g(x) = \begin{cases} (x-2)\left(-\frac{1}{2}x+a\right) & (x \geq 2) \\ -(x-2)\left(-\frac{1}{2}x+a\right) & (x < 2) \end{cases}$

라 하면 함수 $h(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하므로 $x=2$ 에서 미분가능하다.

이때 $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = h(2) = 0$ 이므로 함수 $h(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

또 $h'(2)$ 가 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x-2)\left(-\frac{1}{2}x+a\right)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \left(-\frac{1}{2}x+a\right) = a-1, \\ \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{-(x-2)\left(-\frac{1}{2}x+a\right)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \left(\frac{1}{2}x-a\right) = 1-a\end{aligned}$$

에서 $a-1=1-a \quad \therefore a=1$ 답 1

0299 다항식 $x^3 + ax^2 + bx - 5$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$x^3 + ax^2 + bx - 5 = (x+1)^2 Q(x)$ ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$-1 + a - b - 5 = 0 \quad \therefore a - b = 6$ ㉡

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$3x^2 + 2ax + b = 2(x+1)Q(x) + (x+1)^2 Q'(x)$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$3 - 2a + b = 0 \quad \therefore 2a - b = 3$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a = -3, b = -9$

$\therefore a + b = -12$ 답 -12

0300 다항식 $x^{10} - 2x^3 + 1$ 을 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, $R(x) = ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$x^{10} - 2x^3 + 1 = (x+1)^2 Q(x) + ax + b$ ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$4 = -a + b \quad \therefore b = a + 4$ ㉡

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$10x^9 - 6x^2 = 2(x+1)Q(x) + (x+1)^2 Q'(x) + a$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $a = -16$

$a = -16$ 을 ㉡에 대입하면 $b = -12$

따라서 $R(x) = -16x - 12$ 이므로

$R(1) = -28$ 답 ②

0301 다항식 $x^6 - 3x^2 + a$ 를 $(x-b)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$x^6 - 3x^2 + a = (x-b)^2 Q(x)$ ㉠

㉠의 양변에 $x=b$ 를 대입하면

$b^6 - 3b^2 + a = 0 \quad \therefore a = -b^6 + 3b^2$ ㉡

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$6x^5 - 6x = 2(x-b)Q(x) + (x-b)^2 Q'(x)$

양변에 $x=b$ 를 대입하면

$6b^5 - 6b = 0, \quad 6b(b^2 + 1)(b+1)(b-1) = 0$

$\therefore b = 1 \quad (\because b > 0)$

$b=1$ 을 ㉡에 대입하면 $a=2$

$\therefore a - b = 1$ 답 1

0302 다항식 $x^{10} + ax^3 + b$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $4x-9$ 이므로

$x^{10} + ax^3 + b = (x-1)^2 Q(x) + 4x - 9$ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$1 + a + b = -5 \quad \therefore b = -a - 6$ ㉡

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$10x^9 + 3ax^2 = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x) + 4$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$10 + 3a = 4 \quad \therefore a = -2$

$a = -2$ 를 ㉡에 대입하면 $b = -4$

$\therefore ab = 8$ 답 8

0303 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - kx + 2}{x-1} = 15$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^n - kx + 2) = 0$ 이므로

$1 - k + 2 = 0 \quad \therefore k = 3$

$f(x) = x^n - 3x$ 라 하면 $f(1) = -2$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 3x + 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 15$

이때 $f'(x) = nx^{n-1} - 3$ 이므로

$$f'(1) = n - 3$$

즉 $n - 3 = 15$ 이므로 $n = 18$

$$\therefore n + k = 21$$

답 ④

0304 $f(x) = x^9 - x^8 + x^7 - x^6 + x^5$ 이라 하면 $f(1) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^9 - x^8 + x^7 - x^6 + x^5 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

이때 $f'(x) = 9x^8 - 8x^7 + 7x^6 - 6x^5 + 5x^4$ 이므로 구하는 값은

$$f'(1) = 7$$

답 7

0305 $f(x) = x^n - 2x^2 - 3x$ 라 하면 $f(1) = -4$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 2x^2 - 3x + 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 5$$

이때 $f'(x) = nx^{n-1} - 4x - 3$ 이므로 $f'(1) = n - 7$

즉 $n - 7 = 5$ 이므로 $n = 12$

답 12

0306 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^n + x - 34}{x - 2} = k$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이

고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^n + x - 34) = 0$ 이므로

$$2^n + 2 - 34 = 0, \quad 2^n = 32$$

$$\therefore n = 5$$

... 1단계

$f(x) = x^5 + x$ 라 하면 $f(2) = 34$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 + x - 34}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = k$$

이때 $f'(x) = 5x^4 + 1$ 이므로

$$k = f'(2) = 81$$

... 2단계

$$\therefore n + k = 86$$

... 3단계

답 86

	채점 요소	비율
1단계	n 의 값 구하기	40 %
2단계	k 의 값 구하기	50 %
3단계	$n + k$ 의 값 구하기	10 %

0307 $f(x)$ 가 이차함수이므로

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{는 상수}, a \neq 0)$$

라 하면 $f'(x) = 2ax + b$

$f(x), f'(x)$ 를 주어진 등식에 대입하면

$$(x + 2)(2ax + b) - (ax^2 + bx + c) = 3x^2 + 12x$$

$$\therefore ax^2 + 4ax + 2b - c = 3x^2 + 12x$$

이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$a = 3, 2b - c = 0$$

..... ㉠

또 $f'(-1) = 1$ 이므로 $-2a + b = 1$

..... ㉡

㉠, ㉡에서 $a = 3, b = 7, c = 14$

따라서 $f'(x) = 6x + 7$ 이므로

$$f'(-2) = -5$$

답 ②

0308 $f(x)$ 가 이차함수이므로

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{는 상수}, a \neq 0)$$

라 하면 $f'(x) = 2ax + b$

$f(x), f'(x)$ 를 주어진 등식에 대입하면

$$x(2ax + b) - (ax^2 + bx + c) = x^2 + 3$$

$$\therefore ax^2 - c = x^2 + 3$$

이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$a = 1, c = -3$$

또 $f'(1) = 3$ 이므로 $2a + b = 3 \quad \therefore b = 1$

따라서 $f(x) = x^2 + x - 3$ 이므로

$$f(2) = 3$$

답 ⑤

0309 주어진 등식의 우변의 최고차항이 $3x^2$ 이므로 $f(x)$ 는 상수함수 또는 일차함수가 될 수 없다.

또 $f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 이차함수이면 $f'(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 일차함수이므로 주어진 등식에서 좌변의 최고차항의 계수는 -1 , 우변의 최고차항의 계수는 3이 되어 모순이다.

따라서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이어야 하므로

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{는 상수})$$

라 하면 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f(x), f'(x)$ 를 주어진 등식에 대입하면

$$x(3x^2 + 2ax + b) - 3(x^3 + ax^2 + bx + c) = 3x^2 - x$$

$$\therefore -ax^2 - 2bx - 3c = 3x^2 - x$$

이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$-a = 3, -2b = -1, -3c = 0$$

$$\therefore a = -3, b = \frac{1}{2}, c = 0$$

따라서 $f(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x$ 이므로

$$f(-1) = -\frac{9}{2}$$

답 $-\frac{9}{2}$

시험에 꼭 나오는 문제

● 본책 051~053쪽

0310 $f(a) = g(a)$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - g(a+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \{g(a+h) - g(a)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

$$= f'(a) - g'(a) = 1 - g'(a)$$

즉 $1 - g'(a) = 3$ 이므로

$$g'(a) = -2$$

답 ②

0311 점 $(-2, f(-2))$ 에서의 접선의 기울기가 -6 이므로 $f'(-2) = -6$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x^3 + 8} &= \lim_{x \rightarrow -2} \left\{ \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} \times \frac{1}{x^2 - 2x + 4} \right\} \\ &= \frac{1}{12} f'(-2) = \frac{1}{12} \times (-6) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad \text{답 ④}$$

0312 미분계수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0) + f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \end{aligned}$$

이때 $f'(0) = -2$ 이므로 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = -2$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) - 3xh - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} - 3x \\ &= -3x - 2 \end{aligned} \quad \text{답 } f'(x) = -3x - 2$$

0313 ① $\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = 2$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$

② 점 $(4, f(4))$ 에서의 접선의 기울기는 음수이므로 $f'(4) < 0$

③ 함수 $f(x)$ 는 $x=2, x=3$ 에서 불연속이므로 불연속인 x 의 값은 2개이다.

④ 함수 $f(x)$ 는 $x=1, x=2, x=3$ 에서 미분가능하지 않으므로 미분가능하지 않은 x 의 값은 3개이다.

⑤ $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 구간 $(-1, 1), (4, 5)$ 에서 각각 한 개씩 존재하고, 구간 $(1, 2)$ 의 모든 x 에서 $f'(x) = 0$ 이다.

답 ⑤

0314 $\neg, f(x) = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이고

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{|x-2|}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x-2}{x-2} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{|x-2|}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1 \end{aligned}$$

따라서 $f'(2)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

$\neg, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이고

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x-2)|x-2|}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x-2)^2}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} (x-2) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(x-2)|x-2|}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{-(x-2)^2}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} (-x+2) = 0 \end{aligned}$$

따라서 $f'(2) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다.

$\neg, f(2)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

이상에서 $x=2$ 에서 미분가능하지 않은 함수는 $\neg, \neg$ 이다.

답 $\neg, \neg$

0315 x 의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화

$$\text{율은 } \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{7 - 1}{2} = 3$$

$f'(x) = 2x - 1$ 이므로 $x=a$ 에서의 미분계수는

$$f'(a) = 2a - 1$$

즉 $2a - 1 = 3$ 이므로 $a = 2$

답 ④

0316 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 4} = 2$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - 2\} = 0$ 이므로 $f(2) = 2$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \times \frac{1}{x + 2} \right\} \\ &= \frac{1}{4} f'(2) \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{4} f'(2) = 2$ 이므로 $f'(2) = 8$

또 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - 1}{x^3 - 8} = 1$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한

값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} \{g(x) - 1\} = 0$ 이므로 $g(2) = 1$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - 1}{x^3 - 8} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x^3 - 8} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} \times \frac{1}{x^2 + 2x + 4} \right\} \\ &= \frac{1}{12} g'(2) \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{12} g'(2) = 1$ 이므로 $g'(2) = 12$

한편 함수 $y=f(x)g(x)$ 에서

$$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

이므로 $x=2$ 에서의 미분계수는

$$f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = 8 \times 1 + 2 \times 12 = 32$$

답 32

0317 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(3, 1)$ 에서의 접선의 기울기가 -1 이므로

$$f(3)=1, f'(3)=-1$$

이때 $g(x)=x^2+(x+1)f(x)$ 에서

$$g'(x)=2x+f(x)+(x+1)f'(x)$$

$$\therefore g'(3)=6+f(3)+4f'(3)$$

$$=6+1+4 \times (-1)=3$$

답 3

0318 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서

$$f(1)=0, f'(1)<0, f(2)<0, f'(2)=0,$$

$$f(3)=0, f'(3)>0$$

이때 $g(x)=xf(x)$ 에서

$$g'(x)=f(x)+xf'(x)$$

㉠. $f(1)+g'(1)=2f(1)+f'(1)=f'(1)<0$ (거짓)

㉡. $g(2)g'(2)=2f(2) \times \{f(2)+2f'(2)\}=2\{f(2)\}^2>0$

(참)

㉢. $f(3)+g'(3)=2f(3)+3f'(3)=3f'(3)>0$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㉡, ㉢이다.

답 4

0319 조건 ㉠에서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 -3 인 이차함수이다.

따라서 $f(x)=-3x^2+ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f'(x)=-6x+a$$

한편 조건 ㉡에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-5\}=0$ 이므로 $f(1)=5$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-5}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=f'(1)=-6+a$$

따라서 $-6+a=-8$ 이므로 $a=-2$

즉 $f'(x)=-6x-2$ 이므로

$$f'(-1)=4$$

답 4

0320 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=1$ 에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=f(1)$ 에서

$$1+a+b=b+4 \quad \therefore a=3$$

또 $f'(1)$ 이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{bx+4-(b+4)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{b(x-1)}{x-1} = b,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^3+3x+b-(b+4)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x-1)(x^2+x+4)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2+x+4)=6 \end{aligned}$$

에서 $b=6$

$$\therefore a+b=9$$

답 4

0321 다항식 x^5+ax^4+b 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^5+ax^4+b=(x+1)^2Q(x) \quad \dots\dots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$-1+a+b=0 \quad \therefore b=-a+1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$5x^4+4ax^3=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$5-4a=0 \quad \therefore a=\frac{5}{4}$$

$a=\frac{5}{4}$ 를 ㉡에 대입하면 $b=-\frac{1}{4}$

$$\therefore a-b=\frac{3}{2}$$

답 5

0322 $f(x)=x^{16}+x^8+x^4+x^2$ 이라 하면 $f(-1)=4$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{16}+x^8+x^4+x^2-4}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \\ &= f'(-1) \end{aligned}$$

이때 $f'(x)=16x^{15}+8x^7+4x^3+2x$ 이므로 구하는 값은

$$f'(-1)=-30$$

답 -30

0323 $x+2=t$ 라 하면 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 4$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+2)-6}{x^2-4} &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{f(t)-6}{(t-2)^2-4} \\ &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{f(t)-6}{t^2-4t} = 3 \end{aligned}$$

$t \rightarrow 4$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{t \rightarrow 4} \{f(t)-6\}=0$ 이므로 $f(4)=6$

... 1단계

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 4} \frac{f(t)-6}{t^2-4t} &= \lim_{t \rightarrow 4} \left\{ \frac{f(t)-f(4)}{t-4} \times \frac{1}{t} \right\} \\ &= \frac{1}{4} f'(4) \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{4} f'(4)=3$ 이므로 $f'(4)=12$

... 2단계

$$\therefore f(4)+f'(4)=18$$

... 3단계

답 18

채점 요소		비율
1단계	$f(4)$ 의 값 구하기	40 %
2단계	$f'(4)$ 의 값 구하기	50 %
3단계	$f(4)+f'(4)$ 의 값 구하기	10 %

0324 조건 (가)에 의하여

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) + f(h) + 2h - 1 - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} + 2 \end{aligned}$$

이때 조건 (나)에서 $f'(1) = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} &= -1 \quad \dots \text{1단계} \\ \therefore f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0) + f(h) - 1 - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} = -1 \quad \dots \text{2단계} \end{aligned}$$

답 -1

채점 요소	비율
1단계 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h}$ 의 값 구하기	50 %
2단계 $f'(0)$ 의 값 구하기	50 %

다른 풀이 조건 (가)의 식에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0) + f(0) - 1 \quad \therefore f(0) = 1 \\ \therefore f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) + f(h) + 2h - 1 - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} + 2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + 2 \\ &= f'(0) + 2 \\ \therefore f'(0) &= f'(1) - 2 = -1 \end{aligned}$$

0325 조건 (가)에서 방정식 $f(x) = x - 3$, 즉 $f(x) - x + 3 = 0$ 의 세 실근이 1, 2, 3이므로

$$f(x) - x + 3 = a(x-1)(x-2)(x-3) \quad (a \text{는 상수}, a \neq 0)$$

이라 하면 $f(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + x - 3$

이때 조건 (나)에서 $f(0) = 15$ 이므로

$$-6a - 3 = 15 \quad \therefore a = -3$$

따라서 $f(x) = -3(x-1)(x-2)(x-3) + x - 3$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3\{(x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) \\ &\quad + (x-1)(x-2)\} \\ &\quad + 1 \\ &= -9x^2 + 36x - 32 = -9(x-2)^2 + 4 \quad \dots \text{2단계} \end{aligned}$$

즉 함수 $f'(x)$ 의 최댓값은 4이다. $\dots \text{3단계}$

답 4

채점 요소	비율
1단계 $f(x)$ 구하기	50 %
2단계 $f'(x)$ 구하기	30 %
3단계 $f'(x)$ 의 최댓값 구하기	20 %

0326 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - a}{x - 2} = 4$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - a\} = 0 \text{이므로 } f(2) = a$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - a}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 4 \quad \dots \text{1단계}$$

한편 $f(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $bx+3$ 이므로

$$f(x) = (x-2)^2 Q(x) + bx + 3 \quad \dots \text{2단계}$$

①의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} f(2) &= 2b + 3 \\ \therefore a &= 2b + 3 \quad \dots \text{㉠} \end{aligned}$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 2(x-2)Q(x) + (x-2)^2 Q'(x) + b$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f'(2) = b \quad \therefore b = 4$$

$b=4$ 를 ㉠에 대입하면 $a=11$

$$\therefore a + b = 15 \quad \dots \text{3단계}$$

답 15

채점 요소	비율
1단계 $f(2), f'(2)$ 의 값 구하기	30 %
2단계 $f(x)$ 에 대한 등식 세우기	20 %
3단계 $a+b$ 의 값 구하기	50 %

0327 전략 함수 $h(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} \text{임을 이용한다.}$$

주어진 그래프에서

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (-2 \leq x < 0) \\ 0 & (x=0) \\ x-1 & (0 < x \leq 2) \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} -1 & (-2 \leq x \leq -1) \\ x & (-1 < x < 0 \text{ 또는 } 0 < x < 1) \\ 1 & (x=0 \text{ 또는 } 1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \neg. \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x) + g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) \\ &= -1 + 0 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x) + g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) \\ &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) + g(x)\}$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수

$f(x) + g(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

즉 함수 $f(x) + g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다. (거짓)

ㄴ. 구간 $[-2, 0]$ 에서

$$f(x)g(x) = \begin{cases} -(x+1) & (-2 \leq x \leq -1) \\ x(x+1) & (-1 < x \leq 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)g(x) = f(-1)g(-1) = 0$$

즉 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이고

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x)g(x)-f(-1)g(-1)}{x-(-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1+} x = -1, \\ \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x)g(x)-f(-1)g(-1)}{x-(-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{-(x+1)}{x+1} = -1 \end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)g(x)$ 의 $x=-1$ 에서의 미분계수가 존재하
므로 $x=-1$ 에서 미분가능하다. (참)

ㄷ. 구간 $(0, 2]$ 에서

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} x-1 & (0 < x < 1) \\ 0 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f \circ g)(x) = (f \circ g)(1) = 0$$

즉 함수 $(f \circ g)(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이고

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{0}{x-1} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x-1}{x-1} = 1 \end{aligned}$$

따라서 $(f \circ g)'(1)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수
 $(f \circ g)(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

0328 [전략] $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이고 미분가능함을 이용하여 a, b 의 값을 구한다.

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = f(-1)$$

이때 $f(x+2)=f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$

$$-a+b-1+1=a+b+1+1, \quad 2a=-2$$

$$\therefore a=-1$$

$$\therefore f(x) = -x^3 + bx^2 + x + 1 \quad (-1 \leq x < 1)$$

또 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

이때 $f(x+2)=f(x)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x+2)-f(-1)}{x+1}$$

..... ㉠

㉠의 좌변에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{-x^3 + bx^2 + x + 1 - (1+b)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{-(x+1)(x-1)(x-b)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \{-(x-1)(x-b)\} = -2b-2 \end{aligned}$$

㉠의 우변에서 $x+2=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1-$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이
므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x+2)-f(-1)}{x+1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{f(t)-f(-1)}{t-1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{-t^3 + bt^2 + t + 1 - (1+b)}{t-1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{-(t-1)(t+1)(t-b)}{t-1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1-} \{-(t+1)(t-b)\} \\ &= -2b-2 \end{aligned}$$

따라서 $-2b-2=2b-2$ 이므로

$$b=0$$

즉 $f(x) = -x^3 + x + 1$ ($-1 \leq x < 1$)이고 $f'(-1) = -2$ 이
므로

$$\begin{aligned} f(101) + f'(101) &= f(2 \times 51 - 1) + f'(2 \times 51 - 1) \\ &= f(-1) + f'(-1) \\ &= 1 + (-2) \\ &= -1 \end{aligned}$$

답 -1

RPM비법노트

모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2)=f(x)$ 가 성립하므로 정수 n 에
대하여 구간 $[-2, 0]$ 과 구간 $[2n-2, 2n]$ 에서의 $y=f(x)$ 의
그래프가 일치한다.

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 $x=-1$ 인 점에서의 접선의 기울
기와 $x=2n-1$ 인 점에서의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(2n-1) = f'(-1)$$

0329 [전략] 먼저 주어진 등식을 만족시키는 함수 $f(x)$ 의 차수를 구한다.
 $f(x)$ 를 n 차 함수라 하면 $f'(x)$ 는 $(n-1)$ 차 함수이고 주어진
등식의 우변의 차수는 1이므로

$$n + (n-1) = 1 \quad \therefore n=1$$

따라서 $f(x)$ 는 일차함수이므로

$$f(x) = ax + b \quad (a, b \text{는 상수}, a \neq 0)$$

라 하면 $f'(x) = a$

$f(x), f'(x)$ 를 주어진 등식에 대입하면

$$(ax+b) \times a = 9x+12$$

$$\therefore a^2x + ab = 9x+12$$

이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$a^2=9, ab=12$$

$$\therefore a=3, b=4 \text{ 또는 } a=-3, b=-4$$

(i) $a=3, b=4$ 일 때, $f(x)=3x+4$ 이므로

$$f(1)f(2) = 7 \times 10 = 70$$

(ii) $a=-3, b=-4$ 일 때, $f(x)=-3x-4$ 이므로

$$f(1)f(2) = -7 \times (-10) = 70$$

(i), (ii)에서 $f(1)f(2)=70$

답 70

04 도함수의 활용 (1)

교과서 문제 정복하기

본책 055쪽

0330 $f(x)=x^2-1$ 이라 하면

$$f'(x)=2x$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(2)=4$$

답 4

0331 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2-4$ 라 하면

$$f'(x)=x^2+4x$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-3, 5)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(-3)=-3$$

답 -3

0332 $f(x)=2x^2-3x+7$ 이라 하면

$$f'(x)=4x-3$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 6)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-6=1 \times (x-1)$$

$$\therefore y=x+5$$

답 $y=x+5$

0333 $f(x)=-x^3+6x+8$ 이라 하면

$$f'(x)=-3x^2+6$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 3)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(-1)=3$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-3=3(x+1)$$

$$\therefore y=3x+6$$

답 $y=3x+6$

0334 $f(x)=-x^2+3x+5$ 라 하면

$$f'(x)=-2x+3$$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+3t+5)$ 라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$$f'(t)=-2t+3=1 \quad \therefore t=1$$

따라서 접점의 좌표는 $(1, 7)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-7=x-1 \quad \therefore y=x+6$$

답 $y=x+6$

0335 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-5x+3$ 이라 하면

$$f'(x)=x-5$$

접점의 좌표를 $(t, \frac{1}{2}t^2-5t+3)$ 이라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$$f'(t)=t-5=1 \quad \therefore t=6$$

따라서 접점의 좌표는 $(6, -9)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y+9=x-6 \quad \therefore y=x-15$$

답 $y=x-15$

0336 $f(x)=x^3-2x$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-2$$

접점의 좌표를 (t, t^3-2t) 라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$$f'(t)=3t^2-2=1$$

$$t^2=1 \quad \therefore t=-1 \text{ 또는 } t=1$$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 1), (1, -1)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-1=x+1, y+1=x-1$$

$$\therefore y=x+2, y=x-2$$

답 $y=x+2, y=x-2$

0337 $f(x)=-x^3+4x$ 라 하면

$$f'(x)=-3x^2+4$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(2)=-8$$

이므로 점 $(2, 0)$ 에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{8}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=\frac{1}{8}(x-2)$$

$$\therefore y=\frac{1}{8}x-\frac{1}{4}$$

답 $y=\frac{1}{8}x-\frac{1}{4}$

0338 $f(x)=x^3+5$ 라 하면 $f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 (t, t^3+5) 라 하면 직선 $y=3x+1$ 에 평행한 직선의 기울기는 3이므로

$$f'(t)=3t^2=3$$

$$t^2=1 \quad \therefore t=-1 \text{ 또는 } t=1$$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 4), (1, 6)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-4=3(x+1), y-6=3(x-1)$$

$$\therefore y=3x+7, y=3x+3$$

답 $y=3x+7, y=3x+3$

0339 (1) $f(x)=x^3-x^2-2$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-2x$$

점 (t, t^3-t^2-2) 에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-2t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3-t^2-2)=(3t^2-2t)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2-2t)x-2t^3+t^2-2$$

(2) 직선 $y=(3t^2-2t)x-2t^3+t^2-2$ 가 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$2=-2t^3-2t^2+2t-2, \quad t^3+t^2-t+2=0$$

$$(t+2)(t^2-t+1)=0$$

$$\therefore t=-2 (\because t^2-t+1>0)$$

(3) $t=-2$ 를 $y=(3t^2-2t)x-2t^3+t^2-2$ 에 대입하면

$$y=16x+18$$

답 (1) $y=(3t^2-2t)x-2t^3+t^2-2$

(2) -2

(3) $y=16x+18$

0340 함수 $f(x)=x^2-4x$ 는 닫힌구간 $[-1, 5]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 5)$ 에서 미분가능하며 $f(-1)=f(5)=5$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(-1, 5)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x-4$ 이므로 $f'(c)=0$ 에서

$$2c-4=0 \quad \therefore c=2$$

답 2

0341 함수 $f(x)=x^3-x^2-5x-4$ 는 닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 3)$ 에서 미분가능하며 $f(-1)=f(3)=-1$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(-1, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-2x-5$ 이므로 $f'(c)=0$ 에서

$$3c^2-2c-5=0, \quad (c+1)(3c-5)=0$$

$$\therefore c=\frac{5}{3} \quad (\because -1 < c < 3)$$

답 5/3

0342 함수 $f(x)=x^2$ 은 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, 3)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(c) \text{인 } c \text{가 열린구간 } (1, 3) \text{에 적어도 하나 존재한다.}$$

이때 $f'(x)=2x$ 이므로

$$\frac{9-1}{2}=2c \quad \therefore c=2$$

답 2

0343 함수 $f(x)=-x^3+x-2$ 는 닫힌구간 $[-2, 0]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-2, 0)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=f'(c)$ 인 c 가 열린구간 $(-2, 0)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-3x^2+1$ 이므로

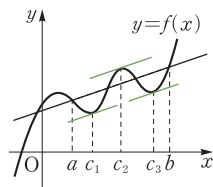
$$\frac{-2-4}{2}=-3c^2+1, \quad c^2=\frac{4}{3}$$

$$\therefore c=-\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (\because -2 < c < 0)$$

답 -2√3/3

0344 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직선과 평행한 접선을 3개 그을 수 있으므로 평균값 정리를 만족시키는 실수 c 의 개수는 3이다.

답 3



유형 익히기

• 본책 056~061쪽

0345 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax$$

점 $(2, 6)$ 이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(2)=6$

$$\text{즉 } 8+4a+b=6 \text{에서 } b=-4a-2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

점 $(2, 6)$ 에서의 접선의 기울기가 8이므로 $f'(2)=8$

$$\text{즉 } 12+4a=8 \text{에서 } a=-1$$

$a=-1$ 을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 $b=2$

$$\therefore a+b=1$$

답 1

0346 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, -4)$ 에서의 접선의 기울기가 -3 이므로

$$f'(2)=-3$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+5h)-f(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+5h)-f(2)}{5h} \times 5 \\ &= 5f'(2) \\ &= 5 \times (-3) = -15 \end{aligned}$$

답 -15

0347 $f(x)=x^3+3ax^2+bx+c$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2+6ax+b$$

점 $(-1, 1)$ 이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(-1)=1$

$$\text{즉 } -1+3a-b+c=1 \text{에서}$$

$$3a-b+c=2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

점 $(-1, 1)$ 에서의 접선의 기울기가 15이므로 $f'(-1)=15$

$$\text{즉 } 3-6a+b=15 \text{에서}$$

$$6a-b=-12 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

또 x 좌표가 2인 점에서의 접선의 기울기가 6이므로 $f'(2)=6$

$$\text{즉 } 12+12a+b=6 \text{에서}$$

$$12a+b=-6 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{9}$ 을 연립하여 풀면 $a=-1, b=6$

이것을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 $-9+c=2 \quad \therefore c=11$

$$\therefore ab+c=5$$

답 5

0348 $f(x)=-x^3+9x^2-20x+1$ 이라 하면

$$f'(x)=-3x^2+18x-20=-3(x-3)^2+7$$

즉 $f'(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최댓값 7을 가지므로 $M=7$

이때 $f(3)=-5$ 이므로 $p=3, q=-5$

$$\therefore p+q+M=5$$

답 5

0349 $f(x)=x^3-x^2+ax+2$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-2x+a$$

점 $(1, 3)$ 이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(1)=3$

$$\text{즉 } 1-1+a+2=3 \text{에서 } a=1$$

점 $(1, 3)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-3=2(x-1) \quad \therefore y=2x+1$$

따라서 $b=2, c=1$ 이므로

$$abc=2$$

답 2

0350 $f(x) = -3x^2 + 7x - 4$ 라 하면

$$f'(x) = -6x + 7$$

점 $(0, -4)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(0) = 7$ 이므로 직선 l 의 방정식은

$$y = 7x - 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 점 $(2, -2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(2) = -5$ 이므로 직선 m 의 방정식은

$$y + 2 = -5(x - 2) \quad \therefore y = -5x + 8 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$x = 1, y = 3$$

따라서 두 직선 l, m 의 교점의 좌표는 $(1, 3)$ 이다.

답 (1, 3)

0351 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - 3}{x + 1} = -2$ 에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$

이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \{f(x) - 3\} = 0 \text{이므로} \quad f(-1) = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = f'(-1) = -2 \quad \dots \text{1단계}$$

따라서 점 $(-1, 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - 3 = -2(x + 1) \quad \therefore y = -2x + 1 \quad \dots \text{2단계}$$

즉 $a = -2, b = 1$ 이므로

$$a + b = -1 \quad \dots \text{3단계}$$

답 -1

	채점 요소	비율
1단계	$f(-1), f'(-1)$ 의 값 구하기	50 %
2단계	접선의 방정식 구하기	40 %
3단계	$a + b$ 의 값 구하기	10 %

0352 $f(0) = f(3) = f(4) = a$ (a 는 상수)라 하면 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$f(x) = x(x - 3)(x - 4) + a$$

이때 $f(1) = 1$ 이므로

$$6 + a = 1$$

$$\therefore a = -5$$

즉 $f(x) = x(x - 3)(x - 4) - 5$ 이므로

$$f'(x) = (x - 3)(x - 4) + x(x - 4) + x(x - 3)$$

따라서 $f(2) = -1, f'(2) = -4$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y + 1 = -4(x - 2)$$

$$\therefore y = -4x + 7 \quad \text{답 } y = -4x + 7$$

RPM비법노트

최고차항의 계수가 k 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여

$$f(a) = f(\beta) = f(\gamma) = a \text{이면}$$

$$f(x) = k(x - a)(x - \beta)(x - \gamma) + a$$

0353 $f(x) = x(x + 1)(2 - x)$ 라 하면

$$f'(x) = (x + 1)(2 - x) + x(2 - x) - x(x + 1)$$

점 $(2, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(2) = -6$$

이므로 점 $(2, 0)$ 에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{6}$ 이다.

따라서 점 $(2, 0)$ 을 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{6}(x - 2) \quad \therefore y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}$$

즉 $m = \frac{1}{6}, n = -\frac{1}{3}$ 이므로

$$m + n = -\frac{1}{6} \quad \text{답 ③}$$

0354 $f(x) = x^2 + ax + b$ 라 하면 $f'(x) = 2x + a$

점 $(3, 2)$ 가 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로 $f(3) = 2$

즉 $9 + 3a + b = 2$ 에서

$$b = -3a - 7 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

점 $(3, 2)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(3) = 6 + a$$

점 $(3, 2)$ 에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{4}$ 이므로

$$(6 + a) \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -1$$

$$6 + a = 4 \quad \therefore a = -2$$

$a = -2$ 를 ㉠에 대입하면 $b = -1$

$$\therefore ab = 2 \quad \text{답 2}$$

0355 $f(x) = 2x - \frac{1}{3}x^3$ 이라 하면 $f'(x) = -x^2 + 2$

점 $\left(2, \frac{4}{3}\right)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(2) = -2$$

이므로 점 $\left(2, \frac{4}{3}\right)$ 에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 직선 l 의 방정식은

$$y - \frac{4}{3} = \frac{1}{2}(x - 2) \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$$

즉 직선 l 의 y 절편은 $\frac{1}{3}$ 이다.

답 $\frac{1}{3}$

0356 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 8x$

점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = -5$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 2 = -5(x - 1) \quad \therefore y = -5x + 7$$

이 직선이 곡선과 만나는 점의 x 좌표는 $-5x + 7 = x^3 - 4x^2 + 5$ 에서

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0, \quad (x - 1)^2(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 다시 만나는 점의 좌표는 $(2, -3)$ 이므로

$$a = 2, b = -3 \quad \therefore a - b = 5 \quad \text{답 5}$$

0357 $f(x)=x^3-3x^2-2x+4$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-6x-2$$

점 $(0, 4)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=-2$ 이므로 접선의 방정식은 $y=-2x+4$

이 직선이 곡선과 만나는 점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} -2x+4 &= x^3-3x^2-2x+4 \text{에서} \\ x^3-3x^2 &= 0, \quad x^2(x-3)=0 \\ \therefore x &= 0 \text{ 또는 } x=3 \end{aligned}$$

즉 점 P의 좌표는 $(3, -2)$ 이므로 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=7$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y+2=7(x-3)$$

$$\therefore y=7x-23$$

답 $y=7x-23$

0358 $f(x)=-x^3+3x^2+x-7$ 이라 하면

$$f'(x)=-3x^2+6x+1$$

점 P(2, -1)에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y+1=x-2 \quad \therefore y=x-3$$

따라서 점 Q의 좌표는 $(3, 0)$ 이므로

$$\overline{PQ}=\sqrt{(3-2)^2+(0+1)^2}=\sqrt{2}$$

또 직선 $y=x-3$ 이 주어진 곡선과 만나는 점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} x-3 &= -x^3+3x^2+x-7 \text{에서} \\ x^3-3x^2+4 &= 0, \quad (x+1)(x-2)^2=0 \\ \therefore x &= -1 \text{ 또는 } x=2 \end{aligned}$$

따라서 점 R의 좌표는 $(-1, -4)$ 이므로

$$\overline{PR}=\sqrt{(-1-2)^2+(-4+1)^2}=3\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{PQ}:\overline{PR}=\sqrt{2}:3\sqrt{2}=1:3$$

답 ②

0359 $f(x)=3x^2-4x+1$ 이라 하면 $f'(x)=6x-4$

점점의 좌표를 $(t, 3t^2-4t+1)$ 이라 하면 직선 $x+y-3=0$, 즉 $y=-x+3$ 에 평행한 직선의 기울기는 -1 이므로

$$f'(t)=6t-4=-1 \quad \therefore t=\frac{1}{2}$$

따라서 점점의 좌표는 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y+\frac{1}{4}=-(x-\frac{1}{2}) \quad \therefore y=-x+\frac{1}{4}$$

답 $y=-x+\frac{1}{4}$

0360 $f(x)=-x^2+3x+2$ 라 하면 $f'(x)=-2x+3$

점점의 좌표를 $(t, -t^2+3t+2)$ 라 하면 접선의 기울기는

$\tan 45^\circ=1$ 이므로

$$f'(t)=-2t+3=1 \quad \therefore t=1$$

즉 점점의 좌표는 $(1, 4)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-4=x-1 \quad \therefore y=x+3$$

따라서 구하는 x 절편은 -3 이다.

답 -3

0361 $f(x)=\frac{1}{2}x^4$ 이라 하면 $f'(x)=2x^3$

곡선 $y=f(x)$ 의 점점 중에서 직선 $y=2x-9$ 와 평행한 접선의 점점의 좌표를 $(t, \frac{1}{2}t^4)$ 이라 하면

$$f'(t)=2t^3=2 \quad \therefore t=1$$

따라서 점점의 좌표는 $(1, \frac{1}{2})$ 이고, 구하는 최솟값은 점 $(1, \frac{1}{2})$

과 직선 $y=2x-9$, 즉 $2x-y-9=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2-\frac{1}{2}-9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{2} \quad \text{답 } \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

0362 $f(x)=x^3-2x$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-2$

점점의 좌표를 (t, t^3-2t) 라 하면 접선의 기울기가 10이므로

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3t^2-2=10 \\ t^2-4 &= 0, \quad (t+2)(t-2)=0 \\ \therefore t &= -2 \text{ 또는 } t=2 \end{aligned}$$

따라서 점점의 좌표는 $(-2, -4)$, $(2, 4)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y+4=10(x+2), \quad y-4=10(x-2)$$

$$\therefore y=10x+16, \quad y=10x-16$$

두 직선의 y 절편은 각각 16, -16 이므로 선분 AB의 길이는

$$16-(-16)=32$$

답 32

0363 $f(x)=x^3-3x^2-9x+a$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-6x-9$$

점점의 좌표를 (t, t^3-3t^2-9t+a) 라 하면 접선의 기울기가 -12 이므로

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3t^2-6t-9=-12 \\ t^2-2t+1 &= 0, \quad (t-1)^2=0 \\ \therefore t &= 1 \end{aligned}$$

따라서 점점의 좌표가 $(1, -11+a)$ 이고 이 점은 직선

$y=-12x+11$ 위의 점이므로

$$-11+a=-1 \quad \therefore a=10$$

답 ④

0364 $f(x)=x^2-4x+a$ 라 하면 $f'(x)=2x-4$

점 (t, t^2-4t+a) 에서의 접선의 기울기가 -2 이므로

$$f'(t)=2t-4=-2 \quad \therefore t=1$$

따라서 점점의 좌표가 $(1, -3+a)$ 이고 이 점은 직선

$y=-2x+5$ 위의 점이므로

$$-3+a=3 \quad \therefore a=6$$

$$\therefore a+t=7$$

답 7

0365 $f(x)=x^3+ax+3$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2+a$

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=4x+b$ 가 점 $(-1, c)$ 에서 접하므로

$$f(-1)=c \text{에서} \quad 2-a=c \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$f'(-1)=4 \text{에서} \quad 3+a=4 \quad \therefore a=1$$

$a=1$ 을 ㉠에 대입하면 $c=1$

따라서 직선 $y=4x+b$ 가 점 $(-1, 1)$ 을 지나므로

$$1 = -4 + b \quad \therefore b = 5$$

$$\therefore abc = 5$$

답 ④

0366 $f(x) = x^3 + ax^2 + 2ax + 1$ 이라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 2a$$

접점의 좌표를 $(t, t^3 + at^2 + 2at + 1)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = 3t^2 + 2at + 2a$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (t^3 + at^2 + 2at + 1) = (3t^2 + 2at + 2a)(x - t)$$

$$\therefore y = (3t^2 + 2at + 2a)x - 2t^3 - at^2 + 1$$

이 직선이 직선 $y=3x+1$ 과 일치해야 하므로

$$3t^2 + 2at + 2a = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$-2t^3 - at^2 + 1 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } t^2(2t+a)=0 \quad \therefore t=0 \text{ 또는 } t=-\frac{a}{2}$$

(i) $t=0$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서

$$2a = 3 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

(ii) $t = -\frac{a}{2}$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서

$$\frac{3}{4}a^2 - a^2 + 2a = 3$$

$$a^2 - 8a + 12 = 0, \quad (a-2)(a-6) = 0$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = 6$$

(i), (ii)에서 구하는 곱은

$$\frac{3}{2} \times 2 \times 6 = 18$$

답 18

0367 $f(x) = x^3 - x + 3$ 이라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 1$

접점의 좌표를 $(t, t^3 - t + 3)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = 3t^2 - 1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (t^3 - t + 3) = (3t^2 - 1)(x - t)$$

$$\therefore y = (3t^2 - 1)x - 2t^3 + 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$1 = -2t^3 + 3, \quad t^3 = 1 \quad \therefore t = 1$$

$t=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 접선의 방정식은 $y=2x+1$

따라서 구하는 x 절편은 $-\frac{1}{2}$ 이다.

답 $-\frac{1}{2}$

0368 $f(x) = x^2 + x$ 라 하면 $f'(x) = 2x + 1$

접점의 좌표를 $(t, t^2 + t)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = 2t + 1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (t^2 + t) = (2t + 1)(x - t)$$

$$\therefore y = (2t + 1)x - t^2$$

이 직선이 점 $(-1, -1)$ 을 지나므로

$$-1 = -(2t + 1) - t^2, \quad t^2 + 2t = 0$$

$$t(t + 2) = 0 \quad \therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 0$$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$$f'(-2)f'(0) = -3 \times 1 = -3$$

답 -3

0369 $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$ 라 하면

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

접점의 좌표를 $(t, -t^3 + 3t^2 - 4)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = -3t^2 + 6t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (-t^3 + 3t^2 - 4) = (-3t^2 + 6t)(x - t)$$

$$\therefore y = (-3t^2 + 6t)x + 2t^3 - 3t^2 - 4$$

이 직선이 점 $(3, 0)$ 을 지나므로

$$0 = 2t^3 - 12t^2 + 18t - 4$$

$$\therefore t^3 - 6t^2 + 9t - 2 = 0$$

이 삼차방정식의 서로 다른 세 실근이 x_1, x_2, x_3 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$x_1 x_2 x_3 = -\frac{-2}{1} = 2$$

답 2

참고 $t^3 - 6t^2 + 9t - 2 = 0$ 에서 $(t-2)(t^2 - 4t + 1) = 0$

이차방정식 $t^2 - 4t + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 1 = 3 > 0$$

이므로 삼차방정식 $t^3 - 6t^2 + 9t - 2 = 0$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

RPM 비법 노트

삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

0370 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$ 이라 하면

$$f'(x) = \frac{1}{2}x$$

접점의 좌표를 $(t, \frac{1}{4}t^2 + 1)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울

기는 $f'(t) = \frac{1}{2}t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \left(\frac{1}{4}t^2 + 1\right) = \frac{1}{2}t(x - t)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}tx - \frac{1}{4}t^2 + 1$$

이 직선이 점 $(0, a)$ 를 지나므로

$$a = -\frac{1}{4}t^2 + 1$$

$$\therefore t^2 + 4(a - 1) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근을 t_1, t_2 라 하면 두 접선의 기울기는 각각

$$\frac{1}{2}t_1, \frac{1}{2}t_2 \text{이고 두 접선이 서로 수직이므로}$$

$$\frac{1}{2}t_1 \times \frac{1}{2}t_2 = -1 \quad \therefore t_1 t_2 = -4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{1}$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$t_1 t_2 = 4(a - 1) \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

따라서 $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서 $4(a - 1) = -4$

$$\therefore a = 0$$

답 0

0371 $f(x) = x^3 + 2x^2, g(x) = -x^2 + 4$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 4x, g'(x) = -2x$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 공통인 접선을 갖는 점의 x 좌표를 t 라 하면

$$f(t)=g(t) \text{에서 } t^3+2t^2=-t^2+4$$

$$t^3+3t^2-4=0, \quad (t+2)^2(t-1)=0$$

$$\therefore t=-2 \text{ 또는 } t=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $f'(t)=g'(t)$ 에서 $3t^2+4t=-2t$

$$t^2+2t=0, \quad t(t+2)=0$$

$$\therefore t=-2 \text{ 또는 } t=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 $t=-2$

따라서 점 $(-2, 0)$ 에서 공통인 접선을 갖고 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(-2)=g'(-2)=4$ 이므로 공통인 접선의 방정식은

$$y=4(x+2)$$

$$\therefore y=4x+8 \quad \text{답 } y=4x+8$$

0372 $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=-x^2+c$ 라 하면

$$f'(x)=2x+a, \quad g'(x)=-2x$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 모두 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$f(1)=3$ 에서 $1+a+b=3$

$$\therefore b=-a+2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$g(1)=3$ 에서 $-1+c=3 \quad \therefore c=4$

또 두 곡선의 접점 $(1, 3)$ 에서의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(1)=g'(1)$ 에서

$$2+a=-2 \quad \therefore a=-4$$

$a=-4$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b=6$

$$\therefore a-b-c=-14 \quad \text{답 } \textcircled{1}$$

0373 $f(x)=x^3-ax$, $g(x)=x^2+bx+c$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-a, \quad g'(x)=2x+b$$

두 곡선이 모두 점 $(1, -1)$ 을 지나므로

$f(1)=-1$ 에서 $1-a=-1 \quad \therefore a=2$

$g(1)=-1$ 에서 $1+b+c=-1$

$$\therefore c=-b-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 두 곡선 위의 점 $(1, -1)$ 에서의 접선이 서로 수직이므로

$f'(1)g'(1)=-1$ 에서

$$(3-a)(2+b)=-1 \quad \therefore b=-3$$

$b=-3$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $c=1$

$$\therefore abc=-6 \quad \text{답 } -6$$

0374 $f(x)=x^3+ax+1$, $g(x)=x^2$ 이라 하면

$$f'(x)=3x^2+a, \quad g'(x)=2x$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 접점의 x 좌표를 t 라 하면

$f(t)=g(t)$ 에서

$$t^3+at+1=t^2 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots \text{1단계}$$

또 $f'(t)=g'(t)$ 에서

$$3t^2+a=2t \quad \therefore a=-3t^2+2t \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \dots \text{2단계}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$t^3+(-3t^2+2t)t+1=t^2, \quad 2t^3-t^2-1=0$$

$$(t-1)(2t^2+t+1)=0$$

$$\therefore t=1 \quad (\because 2t^2+t+1>0)$$

$t=1$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $a=-1 \quad \dots \text{3단계}$

답 -1

	채점 요소	비율
1단계	$f(t)=g(t)$ 임을 이용하여 식 세우기	30 %
2단계	$f'(t)=g'(t)$ 임을 이용하여 식 세우기	30 %
3단계	a 의 값 구하기	40 %

0375 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$ 이라 하면 $f'(x)=-x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, -2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=-2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y+2=-2(x-2) \quad \therefore y=-2x+2$$

이 접선의 x 절편은 1, y 절편은 2이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1 \quad \text{답 } \textcircled{1}$$

0376 $f(x)=-x^2+4x-2$ 라 하면

$$f'(x)=-2x+4$$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+4t-2)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+4$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(-t^2+4t-2)=(-2t+4)(x-t)$$

$$\therefore y=(-2t+4)x+t^2-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $A(2, 3)$ 을 지나므로

$$3=t^2-4t+6, \quad t^2-4t+3=0$$

$$(t-1)(t-3)=0 \quad \therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

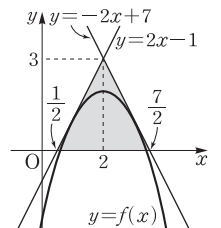
이것을 $\textcircled{1}$ 에 각각 대입하면 접선의 방정식은

$$y=2x-1, \quad y=-2x+7$$

따라서 두 접선의 x 절편은 각각 $\frac{1}{2}, \frac{7}{2}$ 이므로 오른쪽 그림에서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2} \right) \times 3 = \frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$



0377 $f(x)=(x+a)(x-a)=x^2-a^2$ 이라 하면

$$f'(x)=2x$$

$A(-a, 0)$, $B(a, 0)$ 이라 하면 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 A, B에서의 접선의 기울기는 각각

$$f'(-a)=-2a, \quad f'(a)=2a$$

점 $A(-a, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y=-2a(x+a)=-2ax-2a^2$$

점 $B(a, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y=2a(x-a)=2ax-2a^2$$

$\dots \text{1단계}$

두 접선의 교점을 C라 하면 점 C의 x 좌표는
 $-2ax - 2a^2 = 2ax - 2a^2$ 에서 $x=0$ ($\because a \neq 0$)
 $\therefore C(0, -2a^2)$... 2단계

이때 $\triangle ACB$ 의 넓이가 16이므로 $\frac{1}{2} \times 2a \times 2a^2 = 16$
 $a^3 = 8 \quad \therefore a = 2$... 3단계

답 2

채점 요소		비율
1단계	두 점 A, B에서의 접선의 방정식 구하기	50 %
2단계	두 접선의 교점의 좌표 구하기	20 %
3단계	a의 값 구하기	30 %

0378 $f(x) = a(x-1)^2 - 2$ 라 하면

$$f'(x) = 2a(x-1)$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(0, a-2)$ 에서의 접선의 기울기는
 $f'(0) = -2a$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = -2ax + a - 2$$

이 직선의 x 절편은 $\frac{a-2}{2a}$ 이므로 $P\left(\frac{a-2}{2a}, 0\right)$

따라서 삼각형 OPA의 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2} \times \left| \frac{a-2}{2a} \right| \times |a-2| = \frac{(a-2)^2}{4a}$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow 0+} aS = \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{a(a-2)^2}{4a} = \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{(a-2)^2}{4} = 1$$

답 1

0379 함수 $f(x) = (x+2)(x-3)^2$ 은 닫힌구간 $[-2, 3]$ 에
 서 연속이고 열린구간 $(-2, 3)$ 에서 미분가능하며
 $f(-2) = f(3) = 0$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가
 열린구간 $(-2, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때

$$f'(x) = (x-3)^2 + (x+2) \times 2(x-3) = (x-3)(3x+1)$$

이므로 $f'(c) = 0$ 에서 $(c-3)(3c+1) = 0$

$$\therefore c = -\frac{1}{3} \quad (\because -2 < c < 3)$$

답 ①

0380 함수 $f(x) = -2x^2 + kx$ 에 대하여 닫힌구간 $[-1, 3]$
 에서 롤의 정리를 만족시키는 실수 c 가 존재하므로

$$f(-1) = f(3), \quad -2 - k = -18 + 3k \quad \therefore k = 4$$

따라서 $f(x) = -2x^2 + 4x$ 이므로 $f'(x) = -4x + 4$

즉 $f'(c) = 0$ 에서 $-4c + 4 = 0$

$$\therefore c = 1$$

답 ④

0381 함수 $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 8x + 3$ 에 대하여 닫힌구간
 $[-a, a]$ 에서 롤의 정리를 만족시키는 실수 c 가 존재하므로

$$f(-a) = f(a)$$

$$2a^3 - 4a^2 - 8a + 3 = -2a^3 - 4a^2 + 8a + 3$$

$$a^3 - 4a = 0, \quad a(a+2)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a \text{는 자연수})$$

이때 $f'(x) = -6x^2 - 8x + 8$ 이므로 $f'(c) = 0$ 에서

$$-6c^2 - 8c + 8 = 0, \quad (3c-2)(c+2) = 0$$

$$\therefore c = \frac{2}{3} \quad (\because -2 < c < 2)$$

$$\therefore \frac{a}{c} = 3$$

답 3

0382 함수 $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ 은 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 연속
 이고 열린구간 $(1, 3)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하
 여

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(1, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = 4x - 4$ 이므로

$$\frac{7 - (-1)}{2} = 4c - 4$$

$$4c = 8 \quad \therefore c = 2$$

답 2

0383 함수 $f(x) = -x^2 + 5x$ 에 대하여 닫힌구간 $[a, 1]$ 에서
 평균값 정리를 만족시키는 실수 c 의 값이 0이므로

$$\frac{f(1) - f(a)}{1 - a} = f'(0)$$

이때 $f'(x) = -2x + 5$ 이므로

$$\frac{4 - (-a^2 + 5a)}{1 - a} = 5$$

$$a^2 - 5a + 4 = 5 - 5a, \quad a^2 = 1$$

$$\therefore a = -1 \quad (\because a < 0)$$

답 ⑤

0384 $f(x) = 2x^2$ 에서 $f'(x) = 4x$

$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h)$ 에서

$$2(x+h)^2 - 2x^2 = h \times 4(x+\theta h)$$

$$4xh + 2h^2 = 4xh + 4\theta h^2$$

$$\therefore \theta = \frac{1}{2} \quad (\because h \neq 0)$$

답 $\frac{1}{2}$

0385 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하므로 $f(x)$ 는
 닫힌구간 $[x-5, x+1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(x-5, x+1)$
 에서 미분가능하다.

따라서 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x+1) - f(x-5)}{(x+1) - (x-5)} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(x-5, x+1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $x \rightarrow \infty$ 이면 $c \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x+1) - f(x-5)\}$$

$$= 6 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+1) - f(x-5)}{(x+1) - (x-5)}$$

$$= 6 \lim_{x \rightarrow \infty} f'(c)$$

$$= 6 \lim_{c \rightarrow \infty} f'(c)$$

$$= 6 \times (-2) = -12$$

답 -12

0386 $f(x)=x^3-4x^2+1$ 이라 하면

$$f'(x)=3x^2-8x$$

접점의 좌표를 (t, t^3-4t^2+1) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-8t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3-4t^2+1)=(3t^2-8t)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2-8t)x-2t^3+4t^2+1$$

이 직선이 점 $(a, 1)$ 을 지나므로

$$1=(3t^2-8t)a-2t^3+4t^2+1$$

$$t\{2t^2-(3a+4)t+8a\}=0$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } 2t^2-(3a+4)t+8a=0$$

이때 접선이 오직 한 개 존재하려면 이차방정식

$2t^2-(3a+4)t+8a=0$ 이 $t=0$ 을 중근으로 갖거나 실근을 갖지 않아야 한다.

(i) $2t^2-(3a+4)t+8a=0$ 이 $t=0$ 을 중근으로 갖는 경우

$$3a+4=0, 8a=0$$

그런데 이를 만족시키는 a 의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $2t^2-(3a+4)t+8a=0$ 이 실근을 갖지 않는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=\{-(3a+4)\}^2-4 \times 2 \times 8a < 0$$

$$9a^2-40a+16 < 0, \quad (9a-4)(a-4) < 0$$

$$\therefore \frac{4}{9} < a < 4$$

(i), (ii)에서 $\frac{4}{9} < a < 4$

답 ①

0387 $f(x)=x^2-3x-1$ 이라 하면

$$f'(x)=2x-3$$

접점의 좌표를 (t, t^2-3t-1) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-3$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^2-3t-1)=(2t-3)(x-t)$$

$$\therefore y=(2t-3)x-t^2+1$$

... 1단계

이 직선이 점 $A(a, -2)$ 를 지나므로

$$-2=(2t-3)a-t^2+1$$

$$\therefore t^2-2at+3a-1=0$$

... 2단계

이 이차방정식의 두 근을 t_1, t_2 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$t_1+t_2=2a$$

이때 t_1, t_2 는 두 점 B, C의 x 좌표이고 삼각형 ABC의 무게중심의 x 좌표는 3이므로

$$\frac{a+t_1+t_2}{3}=3, \quad \frac{a+2a}{3}=3$$

$$\therefore a=3$$

... 3단계

답 3

채점 요소	비율
1단계 접점의 좌표를 $(t, f(t))$ 로 놓고 접선의 방정식 구하기	40 %
2단계 접선이 점 A를 지남을 이용하여 t 에 대한 이차방정식 세우기	30 %
3단계 a 의 값 구하기	30 %

RPM비법노트

삼각형의 무게중심

좌표평면 위의 세 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G 라 하면

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

0388 $f(x)=-x^2+3$ 이라 하면 $f'(x)=-2x$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+3)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(-t^2+3)=-2t(x-t)$$

$$\therefore y=-2tx+t^2+3$$

이 직선이 점 $P(1, 6)$ 을 지나므로

$$6=-2t+t^2+3, \quad t^2-2t-3=0$$

$$(t+1)(t-3)=0 \quad \therefore t=-1 \text{ 또는 } t=3$$

따라서 $Q(-1, 2), R(3, -6)$ 이므로

$$PQ=\sqrt{(-1-1)^2+(2-6)^2}=2\sqrt{5}$$

이때 점 Q에서의 접선의 방정식은

$$y=2x+4, \text{ 즉 } 2x-y+4=0$$

따라서 직선 PQ와 점 $R(3, -6)$ 사이의 거리는

$$\frac{|2 \times 3 + 6 + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{16\sqrt{5}}{5}$$

이므로 삼각형 PQR의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{16\sqrt{5}}{5} = 16$$

답 16

다른 풀이 삼각형 PQR의 넓이는

$$\{3-(-1)\} \times \{6-(-6)\}$$

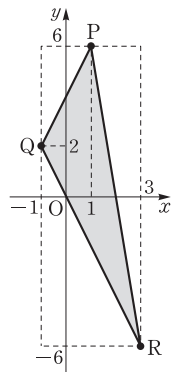
$$-\frac{1}{2} \times \{1-(-1)\} \times \{6-2\}$$

$$-\frac{1}{2} \times \{3-(-1)\} \times \{2-(-6)\}$$

$$-\frac{1}{2} \times \{3-1\} \times \{6-(-6)\}$$

$$=48-4-16-12$$

$$=16$$



시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 062~063쪽

0389 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

두 점 $(-1, -4), (3, 16)$ 이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(-1)=-4, f(3)=16$$

즉 $-1+a-b+c=-4, 27+9a+3b+c=16$ 에서

$$a-b+c=-3, 9a+3b+c=-11 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 두 점 $(-1, -4), (3, 16)$ 에서의 접선이 서로 평행하므로

$$f'(-1)=f'(3)$$

즉 $3-2a+b=27+6a+b$ 에서 $a=-3$

$a=-3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-3-b+c=-3, -27+3b+c=-11$$

$$\therefore b-c=0, 3b+c=16$$

두 식을 연립하여 풀면 $b=4, c=4$

$$\therefore abc=-48$$

답 -48

0390 $f(x)=x^3+6x^2+10x-4$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2+12x+10=3(x+2)^2-2$$

즉 $f'(x)$ 는 $x=-2$ 일 때 최솟값 -2 를 갖는다.

이때 $f(-2)=-8$ 이므로 기울기가 최소인 접선의 방정식은

$$y+8=-2(x+2)$$

$$\therefore y=-2x-12$$

따라서 $a=-2, b=-12$ 이므로

$$ab=24$$

답 24

0391 $f(x)=x^4$ 이라 하면

$$f'(x)=4x^3$$

접점을 $P(1, 1)$ 이라 하면 점 P 에서의

접선의 기울기는

$$f'(1)=4$$

원의 중심을 $C(0, a)$ 라 하면 직선 CP 는 점 P 에서의 접선과 수직이므로

$$\frac{1-a}{1-0}=-\frac{1}{4} \quad \therefore a=\frac{5}{4}$$

$$\therefore C\left(0, \frac{5}{4}\right)$$

이때 원의 반지름의 길이는 선분 CP 의 길이와 같으므로

$$\sqrt{1^2+\left(1-\frac{5}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{4}$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right)^2 = \frac{17}{16}\pi$$

답 $\frac{17}{16}\pi$

0392 $f(x)=x^2-3x+1$ 이라 하면

$$f'(x)=2x-3$$

점 (t, t^2-3t+1) 에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-3$ 이므로

로 접선의 방정식은

$$y-(t^2-3t+1)=(2t-3)(x-t)$$

$$\therefore y=(2t-3)x-t^2+1$$

이 직선의 y 절편은 $-t^2+1$ 이므로

$$g(t)=-t^2+1$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t+2)-g(t)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\{-(t+2)^2+1\}-(-t^2+1)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-4t-4}{t} = -4$$

답 ②

0393 $f(x)=x^3-\frac{5}{2}x^2+ax+2$ 에서

$$f'(x)=3x^2-5x+a$$

점 $A(0, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=a$ 이므로 직선 l 의 방정식은

$$y=ax+2$$

또 $f(2)=2a$ 이고 점 $B(2, 2a)$ 에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=a+2$ 이므로 직선 m 의 방정식은

$$y-2a=(a+2)(x-2)$$

$$\therefore y=(a+2)x-4$$

따라서 직선 l, m 의 x 절편은 각각

$$-\frac{2}{a}, \frac{4}{a+2}$$

$$\text{이므로} \quad -\frac{2}{a}=\frac{4}{a+2}$$

$$2a+4=-4a \quad \therefore a=-\frac{2}{3}$$

즉 $f(2)=2a=2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{3}$ 이므로

$$60 \times |f(2)| = 60 \times \left|-\frac{4}{3}\right| = 80$$

답 80

0394 $f(x)=ax^3-2x^2+1$ 이라 하면 $f'(x)=3ax^2-4x$

점 $(1, 1)$ 이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(1)=1$$

즉 $a-1=1$ 이므로 $a=2$

점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=2$$

이므로 점 $(1, 1)$ 에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

$$\text{답 } y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

0395 $f(x)=x^3-3x^2+2$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-6x$

접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+2) 라 하면 접선의 기울기가 9이므로

$$f'(t)=3t^2-6t=9$$

$$t^2-2t-3=0, \quad (t+1)(t-3)=0$$

$$\therefore t=-1 \text{ 또는 } t=3$$

즉 접점의 좌표는 $(-1, -2), (3, 2)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y+2=9(x+1), y-2=9(x-3)$$

$$\therefore 9x-y+7=0, 9x-y-25=0$$

이때 두 직선 사이의 거리는 직선 $9x-y+7=0$ 위의 점 $(0, 7)$ 과 직선 $9x-y-25=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-7-25|}{\sqrt{9^2+(-1)^2}} = \frac{16\sqrt{82}}{41} \quad \text{답 2}$$

0396 $f(x)=x^3-4x+a$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-4$ 접점의 좌표를 (t, t^3-4t+a) ($t>0$)라 하면 접선의 기울기가 -1 이므로

$$f'(t)=3t^2-4=-1, \quad t^2=1$$

$$\therefore t=1 (\because t>0)$$

따라서 접점의 좌표가 $(1, -3+a)$ 이고 이 점은 직선 $y=-x+b$ 위의 점이므로

$$-3+a=-1+b$$

$$\therefore a-b=2 \quad \text{답 2}$$

0397 $f(x)=x^2-x$ 라 하면 $f'(x)=2x-1$ 접점의 좌표를 (t, t^2-t) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^2-t)=(2t-1)(x-t)$$

$$\therefore y=(2t-1)x-t^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(1, -1)$ 을 지나므로

$$-1=2t-1-t^2, \quad t^2-2t=0$$

$$t(t-2)=0 \quad \therefore t=0 \text{ 또는 } t=2$$

이때 접선의 기울기가 음수이어야 하므로 $t=0$

$t=0$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $y=-x$

이 직선이 점 $(a, -5)$ 를 지나므로 $-5=-a$

$$\therefore a=5 \quad \text{답 4}$$

참고 접선의 기울기가 음수이어야 하므로 $2t-1<0$ 에서 $t<\frac{1}{2}$ 이다.

0398 $f(x)=x^3-x+3, g(x)=x^2+a$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-1, g'(x)=2x$$

두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 가 공통인 접선을 갖는 점의 x 좌표를 t ($t>0$)라 하면

$$f(t)=g(t) \text{에서 } t^3-t+3=t^2+a$$

$$\therefore a=t^3-t^2-t+3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(t)=g'(t) \text{에서 } 3t^2-1=2t$$

$$3t^2-2t-1=0, \quad (3t+1)(t-1)=0$$

$$\therefore t=1 (\because t>0)$$

$t=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $a=2$ 답 2

0399 $f(x)=x^3+x^2-3$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2+2x$

점 $P(-1, -3)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=1$ 이므로 직선 l 의 방정식은

$$y+3=x+1 \quad \therefore y=x-2$$

또 직선 l 과 수직인 직선의 기울기는 -1 이므로 직선 m 의 방정식은

$$y+3=-(x+1) \quad \therefore y=-x-4$$

따라서 두 직선 l, m 의 x 절편이 각각 $2, -4$ 이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{2-(-4)\} \times 3=9 \quad \text{답 9}$$

0400 함수 $f(x)=x^2-(a+b)x+ab$ 는 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하며 $f(a)=f(b)=0$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x-(a+b)$ 이므로 $f'(c)=0$ 에서

$$2c-(a+b)=0 \quad \therefore c=\frac{a+b}{2} \quad \text{답 5}$$

0401 $f(x)=x^3-4x+a$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-4$$

접점의 좌표를 (t, t^3-4t+a) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-4$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3-4t+a)=(3t^2-4)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2-4)x-2t^3+a \quad \dots\dots \textcircled{1} \text{ 단계}$$

이 직선이 직선 $y=ax-4$ 와 일치해야 하므로

$$a=3t^2-4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$-2t^3+a=-4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$-2t^3+3t^2-4=-4, \quad t^2(2t-3)=0$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t=\frac{3}{2}$$

$t=0$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서 $a=-4$

$t=\frac{3}{2}$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서 $a=\frac{11}{4}$... 2단계

따라서 구하는 곱은

$$-4 \times \frac{11}{4} = -11 \quad \dots\dots \textcircled{3} \text{ 단계}$$

답 -11

	채점 요소	비율
1단계	접점의 좌표를 (t, t^3-4t+a) 로 놓고 접선의 방정식 구하기	30 %
2단계	a 의 값 구하기	60 %
3단계	모든 a 의 값의 곱 구하기	10 %

0402 $f(x)=2x^2+3x+4$ 라 하면

$$f'(x)=4x+3$$

접점의 좌표를 $(t, 2t^2+3t+4)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=4t+3$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(2t^2+3t+4)=(4t+3)(x-t)$$

$$\therefore y=(4t+3)x-t^2+4 \quad \dots\dots \textcircled{1} \text{ 단계}$$

이 직선이 점 $(-1, -5)$ 를 지나므로

$$-5=-(4t+3)-t^2+4$$

$$t^2+2t-3=0, \quad (t+3)(t-1)=0$$

$$\therefore t=-3 \text{ 또는 } t=1 \quad \dots\dots \textcircled{2} \text{ 단계}$$

따라서 두 점점의 좌표가 각각 $(-3, 13)$, $(1, 9)$ 이므로 선분 PQ의 길이는

$$\sqrt{(1+3)^2 + (9-13)^2} = 4\sqrt{2}$$

... 3단계

답 $4\sqrt{2}$

채점 요소		비율
1단계	점점의 좌표를 $(t, 2t^2+3t+4)$ 로 놓고 접선의 방정식 구하기	40 %
2단계	t 의 값 구하기	40 %
3단계	선분 PQ의 길이 구하기	20 %

0403 전략 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(t)=m$ 이면 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=t$ 인 점에서의 접선의 기울기가 m 임을 이용한다.

$$f(x)=x^3+(a+3)x^2-ax+7 \text{이라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2+2(a+3)x-a$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=3t^2+2(a+3)t-a$$

이때 직선 $3x-y+1=0$, 즉 $y=3x+1$ 과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$ 이므로 $3t^2+2(a+3)t-a=-\frac{1}{3}$, 즉

$3t^2+2(a+3)t-a+\frac{1}{3}=0$ 을 만족시키는 실수 t 의 값이 존재하지 않아야 한다.

따라서 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+3)^2-3 \times \left(-a+\frac{1}{3}\right) < 0$$

$$a^2+9a+8 < 0, \quad (a+8)(a+1) < 0$$

$$\therefore -8 < a < -1$$

즉 정수 a 는 $-7, -6, \dots, -2$ 의 6개이다.

답 6

0404 전략 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{q(x)}{p(x)} = a$ (a 는 상수)일 때, $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = 0$ 이면

$\lim_{x \rightarrow a} q(x) = 0$ 임을 이용한다.

조건 ㄴ에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - g(x)\} = 0$ 이므로

$$f(1) = g(1)$$

..... ㉠

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - g(x)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1) - \{g(x) - g(1)\}}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$$

$$= f'(1) - g'(1)$$

따라서 $f'(1) - g'(1) = -2$ 이므로

$$f'(1) = g'(1) - 2$$

..... ㉡

조건 ㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$g(1) = 3f(1) - 6, \quad g(1) = 3g(1) - 6 \quad (\because \text{㉠})$$

$$\therefore g(1) = 3$$

조건 ㉡의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = (2x+2)f(x) + (x^2+2x)f'(x)$$

$x=1$ 을 대입하면

$$g'(1) = 4f(1) + 3f'(1)$$

$$g'(1) = 4 \times 3 + 3\{g'(1) - 2\} \quad (\because \text{㉠, ㉡})$$

$$2g'(1) = -6 \quad \therefore g'(1) = -3$$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - 3 = -3(x - 1) \quad \therefore y = -3x + 6$$

즉 $a = -3, b = 6$ 이므로

$$b - a = 9$$

답 9

05 도함수의 활용 (2)

교과서문제 정복하기

본책 065쪽

0405 $f(x)=x^2$ 에서 $f'(x)=2x$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를
표로 나타내면 오른쪽과 같다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간
 $(-\infty, 0]$ 에서 감소하고, 구
간 $[0, \infty)$ 에서 증가한다.

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

답 풀이 참조

0406 $f(x)=-x^3$ 에서 $f'(x)=-3x^2$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를
표로 나타내면 오른쪽과 같다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간
 $(-\infty, \infty)$ 에서 감소한다.

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

답 풀이 참조

0407 $f(x)=3x-x^2$ 에서 $f'(x)=3-2x$

$f'(x)=0$ 에서 $x=\frac{3}{2}$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를
표로 나타내면 오른쪽과 같다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간
 $(-\infty, \frac{3}{2}]$ 에서 증가하고, 구
간 $[\frac{3}{2}, \infty)$ 에서 감소한다.

x	...	$\frac{3}{2}$	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

답 풀이 참조

0408 $f(x)=x^2-x-2$ 에서 $f'(x)=2x-1$

$f'(x)=0$ 에서 $x=\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를
표로 나타내면 오른쪽과 같다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간
 $(-\infty, \frac{1}{2}]$ 에서 감소하고, 구
간 $[\frac{1}{2}, \infty)$ 에서 증가한다.

x	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

답 풀이 참조

0409 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-4$ 에서

$f'(x)=x^2+2x=x(x+2)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -2]$, $[0, \infty)$ 에서 증가하고,
구간 $[-2, 0]$ 에서 감소한다.

답 풀이 참조

0410 (1) b, d (2) a, c, f

참고 함수 $f(x)$ 가 $x=k$ 에서 미분가능하지 않을 때에도 $x=k$ 에서 극값
을 가질 수 있다.

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=c$ 에서 미분가능하지 않지만 $x=c$ 를 포함하는 어떤
열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(x) \geq f(c)$ 이므로 $x=c$ 에서 극솟
값을 갖는다.

0411 (1) $f(x)=2x^3+6x^2-1$ 에서

$f'(x)=6x^2+12x=6x(x+2)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

(2)

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	7	$\searrow$	-1	$\nearrow$

(3) 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극댓값 7, $x=0$ 에서 극솟값 -1을
갖는다.

답 (1) -2, 0 (2) -2, 0, -, 7, -1

(3) 극댓값: 7, 극솟값: -1

0412 $f(x)=x^3-3x+1$ 에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=-1$ 에서 극댓값 3, $x=1$ 에서 극솟값 -1

을 갖는다.

답 극댓값: 3, 극솟값: -1

0413 $f(x)=x^4-2x^2$ 에서

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=0$ 에서 극댓값 0, $x=-1$ 과 $x=1$ 에서 극솟값 -1

을 갖는다.

답 극댓값: 0, 극솟값: -1

0414 $f(x) = -3x^4 + 4x^3 - 1$ 에서

$$f'(x) = -12x^3 + 12x^2 = -12x^2(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	↗	-1	↗	0	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 0을 갖는다.

답 극댓값: 0

참고! $f'(0)=0$ 이지만 $x=0$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극값을 갖지 않는다.

0415 $f(x) = -x^3 + 3x + 2$ 에서

$$f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$$

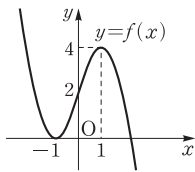
$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	0	↗	4	↘

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



0416 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ 에서

$$f'(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$$

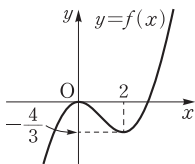
$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{4}{3}$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



0417 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$ 에서

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x-1)(x-2)$$

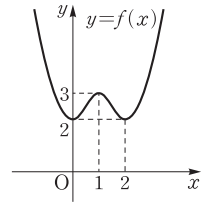
$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	2	↗	3	↘	2	↗

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



0418 $f(x) = -x^3 + 3x^2$ 에서

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

구간 $[-2, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	0	...	2	...	3
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	20	↘	0	↗	4	↘	0

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 최댓값 20, $x=0$ 과 $x=3$ 에서 최솟값 0을 갖는다.

답 최댓값: 20, 최솟값: 0

0419 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	3	...	4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-2	↗	2	↘	-2	↗	2

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 과 $x=4$ 에서 최댓값 2, $x=0$ 과 $x=3$ 에서 최솟값 -2를 갖는다.

답 최댓값: 2, 최솟값: -2

0420 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3$ 에서

$$f'(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

구간 $[-2, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	0	...	3
$f'(x)$		-	0	-	
$f(x)$	12	↘	0	↘	$-\frac{27}{4}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 최댓값 12, $x=3$ 에서 최솟값 $-\frac{27}{4}$ 을 갖는다.

답 최댓값: 12, 최솟값: $-\frac{27}{4}$

0421 $f(x)=3x^4-4x^3+1$ 에서

$$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=1$

구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	-	0	+	
$f(x)$	8	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	17

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 17, $x=1$ 에서 최솟값 0을 갖는다.

답 최댓값: 17, 최솟값: 0

유형 익히기

• 본책 066~074쪽

0422 $f(x)=-x^3-3x^2+24x-2$ 에서

$$f'(x)=-3x^2-6x+24=-3(x+4)(x-2)$$

함수 $f(x)$ 는 $f'(x) \geq 0$ 인 구간에서 증가하므로 $f'(x) \geq 0$ 에서 $-3(x+4)(x-2) \geq 0$

$$(x+4)(x-2) \leq 0 \quad \therefore -4 \leq x \leq 2$$

즉 $a=-4$, $b=2$ 이므로

$$a+b=-2$$

답 -2

다른 풀이 $f'(x)=0$ 에서 $x=-4$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-4	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[-4, 2]$ 에서 증가하므로

$$a=-4, b=2$$

0423 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 에서

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$f'(x) \leq 0$ 의 해가 $1 \leq x \leq 2$ 이므로

$$f'(x)=3(x-1)(x-2)=3x^2-9x+6$$

따라서 $2a=-9$, $b=6$ 이므로

$$2a+b=-3$$

답 -3

0424 $f(x)=2x^3+ax^2+36x+9$ 에서

$$f'(x)=6x^2+2ax+36$$

$f'(x) \leq 0$ 의 해가 $b \leq x \leq 3$ 이므로

$$f'(x)=6(x-b)(x-3)=6x^2-6(b+3)x+18b$$

따라서 $2a=-6(b+3)$, $36=18b$ 이므로

$$a=-15, b=2$$

$$\therefore b-a=17$$

답 17

0425 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+3$ 에서

$$f'(x)=-3x^2+2ax+b$$

주어진 조건에서 함수 $f(x)$ 가 $x=-1$, $x=2$ 의 좌우에서 증가와 감소가 바뀌므로

$$f'(-1)=0, f'(2)=0$$

따라서 이차방정식 $f'(x)=0$, 즉 $-3x^2+2ax+b=0$ 의 두 근이 -1 , 2 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1+2=-\frac{2a}{-3}, -1 \times 2=\frac{b}{-3}$$

$$\therefore a=\frac{3}{2}, b=6 \quad \therefore ab=9$$

답 9

0426 $f(x)=x^3-ax^2+(a+6)x+5$ 에서

$$f'(x)=3x^2-2ax+a+6$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-3(a+6) \leq 0$$

$$a^2-3a-18 \leq 0, (a+3)(a-6) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq a \leq 6$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 6이다.

답 ③

RPM비법 노트

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식을 D 라 할 때, 모든 실수 x 에 대하여

① 이차부등식 $ax^2+bx+c \geq 0$ 이 성립하려면

$$a > 0, D \leq 0$$

② 이차부등식 $ax^2+bx+c \leq 0$ 이 성립하려면

$$a < 0, D \leq 0$$

0427 $f(x)=ax^3+x^2-x$ 에서

$$f'(x)=3ax^2+2x-1$$

... 1단계

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로

$$a < 0$$

..... ①

또 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=1-3a \times (-1) \leq 0$$

$$\therefore a \leq -\frac{1}{3}$$

..... ②

①, ②에서 $a \leq -\frac{1}{3}$

... 2단계

따라서 정수 a 의 최댓값은 -1이다.

... 3단계

답 -1

	채점 요소	비율
1단계	$f'(x)$ 구하기	30 %
2단계	a 의 값의 범위 구하기	60 %
3단계	정수 a 의 최댓값 구하기	10 %

0428 $f(x) = -x^3 + ax^2 + ax + 7$ 에서

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + a$$

임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$ 를 만족시키려면 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.
즉 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-3) \times a \leq 0$$

$$a(a+3) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq a \leq 0$$

따라서 정수 a 는 $-3, -2, -1, 0$ 의 4개이다. 답 4

0429 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + 8x$ 에서

$$f'(x) = x^2 - 2ax + 8$$

함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - 1 \times 8 \leq 0$$

$$(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2}) \leq 0$$

$$\therefore -2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2}$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 2이다. 답 2

참고 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 $f(x)$ 가 일대일대응이어야 하므로 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다.

0430 $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + 2$ 에서

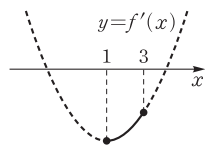
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + a$$

$$= 3(x-1)^2 + a - 3$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $[1, 3]$ 에서 감소하려면 $1 \leq x \leq 3$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$f'(3) = a + 9 \leq 0$$

$$\therefore a \leq -9$$



답 $a \leq -9$

0431 $f(x) = -x^3 + x^2 + ax - 4$ 에서

$$f'(x) = -3x^2 + 2x + a$$

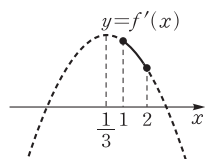
$$= -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + a + \frac{1}{3}$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $[1, 2]$ 에서 증가하려면 $1 \leq x \leq 2$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$f'(2) = -8 + a \geq 0$$

$$\therefore a \geq 8$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 8이다. 답 8



0432 $f(x) = x^3 + kx^2 - 8x + 4$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 2kx - 8$$

함수 $f(x)$ 가 $-2 \leq x \leq 1$ 에서 감소하려면 이 구간에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

따라서 오른쪽 그림에서

$$f'(-2) = 12 - 4k - 8 \leq 0 \text{ 이므로}$$

$$k \geq 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f'(1) = 3 + 2k - 8 \leq 0 \text{ 이므로}$$

$$k \leq \frac{5}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

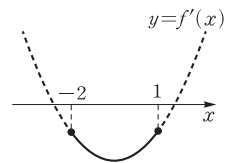
$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서

$$1 \leq k \leq \frac{5}{2}$$

즉 실수 k 의 최댓값은 $\frac{5}{2}$, 최솟값은 1이므로 구하는 합은

$$\frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}$$

답 ④



0433 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax$$

함수 $f(x)$ 가 주어진 조건을 만족시키려면 $1 \leq x \leq 2$ 에서

$f'(x) \leq 0$, $x \geq 3$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

따라서 오른쪽 그림에서

$$f'(1) = 3 + 2a \leq 0 \text{ 이므로}$$

$$a \leq -\frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f'(2) = 12 + 4a \leq 0 \text{ 이므로}$$

$$a \leq -3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

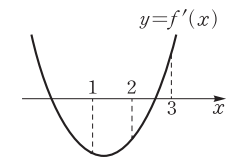
$$f'(3) = 27 + 6a \geq 0 \text{ 이므로}$$

$$a \geq -\frac{9}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 에서

$$-\frac{9}{2} \leq a \leq -3$$

답 $-\frac{9}{2} \leq a \leq -3$



0434 $f(x) = -2x^3 + 6x + 1$ 에서

$$f'(x) = -6x^2 + 6$$

$$= -6(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{ 에서}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 5, $x=-1$ 에서 극솟값 -3 을 가지므로

$$M = 5, m = -3$$

$$\therefore M + m = 2$$

답 ①

0435 $f(x)=x^4-4x^3+15$ 에서

$$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	3	...
$f'(x)$	—	0	—	0	+
$f(x)$	↘	15	↘	-12	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극솟값 -12를 가지므로

$$a=3, b=-12 \quad \therefore a+b=-9 \quad \text{답 ②}$$

0436 $f(x)=-x^4+4x^3+2x^2-12x-7$ 에서

$$f'(x)=-4x^3+12x^2+4x-12$$

$$=-4(x+1)(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	—	0	+	0	—
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 과 $x=3$ 에서 극댓값을 가지므로 구하는 함은

$$-1+3=2 \quad \text{답 2}$$

0437 $f(x)=x^3-3x^2-9x+8$ 에서

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	—	0	+
$f(x)$	↗	13	↘	-19	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값 13, $x=3$ 에서 극솟값 -19를 가지므로

$$A(-1, 13), B(3, -19)$$

따라서 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{13-19}{2}\right), \text{ 즉 } (1, -3) \quad \text{답 (1, -3)}$$

0438 $f(x)=x^3+ax^2+bx+3$ 에서

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 극댓값 23을 가지므로

$$f'(2)=0, f(2)=23$$

$f'(2)=0$ 에서 $12+4a+b=0$

$$\therefore 4a+b=-12 \quad \dots\dots ㉠$$

$f(2)=23$ 에서 $11+4a+2b=23$

$$\therefore 2a+b=6 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-9, b=24$

따라서 $f(x)=x^3-9x^2+24x+3$ 이므로

$$f'(x)=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-4)$$

$f'(x)=0$ 에서

$$x=2 \text{ 또는 } x=4$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	2	...	4	...
$f'(x)$	+	0	—	0	+
$f(x)$	↗	23	↘	19	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 극솟값 19를 갖는다.

답 ⑤

0439 $f(x)=-x^3+27x+a$ 에서

$$f'(x)=-3x^2+27=-3(x+3)(x-3)$$

$f'(x)=0$ 에서

$$x=-3 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	3	...
$f'(x)$	—	0	+	0	—
$f(x)$	↘	$a-54$	↗	$a+54$	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-3$ 에서 극솟값 $a-54$, $x=3$ 에서 극댓값 $a+54$ 를 갖는다.

이때 극댓값과 극솟값의 합이 10이므로

$$(a+54)+(a-54)=10$$

$$2a=10 \quad \therefore a=5 \quad \text{답 5}$$

0440 $f(x)=-2x^3-6x^2+a$ 에서

$$f'(x)=-6x^2-12x=-6x(x+2)$$

$f'(x)=0$ 에서

$$x=-2 \text{ 또는 } x=0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	—	0	+	0	—
$f(x)$	↘	$a-8$	↗	a	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극솟값 $a-8$ 을 가지므로

$$b=-2, a-8=1$$

$$\therefore a=9, b=-2$$

$$\therefore a-b=11 \quad \text{답 ③}$$

0441 $f(x)=x^3+(2a+4)x^2-5x$ 에서

$$f'(x)=3x^2+2(2a+4)x-5$$

함수 $f(x)$ 가 $x=\alpha$ 에서 극대, $x=\beta$ 에서 극소라 하면

$$f'(\alpha)=0, f'(\beta)=0$$

따라서 α, β 는 방정식 $f'(x)=0$, 즉 $3x^2+2(2a+4)x-5=0$ 의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{2(2a+4)}{3}$$

이때 $y=f(x)$ 의 그래프에서 극대인 점과 극소인 점이 원점에 대하여 대칭이므로

$$a=-\beta \quad \therefore a+\beta=0$$

$$\text{따라서 } -\frac{2(2a+4)}{3}=0 \text{이므로}$$

$$a=-2$$

답 -2

0442 $f(x)=2x^3-\frac{3}{2}ax^2+1$ 에서

$$f'(x)=6x^2-3ax=3x(2x-a)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=\frac{a}{2}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$, $x=\frac{a}{2}$ 에서 극값을 갖는다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축에 접하려면

$$f(0)=0 \text{ 또는 } f\left(\frac{a}{2}\right)=0$$

이어야 한다.

$$\text{그런데 } f(0)=1 \text{이므로 } f\left(\frac{a}{2}\right)=0$$

$$-\frac{a^3}{8}+1=0, \quad a^3=8$$

$$\therefore a=2$$

답 2

0443 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$ 인 삼차함수이므로

$$f(x)=x^3+ax^2+bx \quad (a, b \text{는 상수})$$

라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

... 1단계

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 과 $x=3$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(-1)=0, \quad f'(3)=0$$

$$f'(-1)=0 \text{에서 } 3-2a+b=0$$

$$\therefore 2a-b=3$$

..... ㉠

$$f'(3)=0 \text{에서 } 27+6a+b=0$$

$$\therefore 6a+b=-27$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-3, \quad b=-9$$

$$\therefore f(x)=x^3-3x^2-9x,$$

$$f'(x)=3x^2-6x-9$$

... 2단계

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	-27	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값 5를 갖는다. ... 3단계

답 5

	채점 요소	비율
1단계	$f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b 는 상수)로 놓고 $f'(x)$ 구하기	20 %
2단계	$f(x), f'(x)$ 구하기	50 %
3단계	$f(x)$ 의 극댓값 구하기	30 %

0444 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$\text{조건 ㉠에서 } f'(1)=0, \quad f(1)=3$$

$$f'(1)=0 \text{에서 } 3+2a+b=0$$

$$\therefore 2a+b=-3$$

..... ㉠

$$f(1)=3 \text{에서 } 1+a+b+c=3$$

$$\therefore c=-a-b+2$$

..... ㉡

$$\text{조건 ㉡에서 } f'(2)=-7 \text{이므로 } 12+4a+b=-7$$

$$\therefore 4a+b=-19$$

..... ㉢

$$\text{㉠, ㉢을 연립하여 풀면 } a=-8, \quad b=13$$

$$\text{이것을 ㉡에 대입하면 } c=-3$$

$$\text{따라서 } f(x)=x^3-8x^2+13x-3 \text{이므로}$$

$$f(3)=-9$$

답 -9

0445 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a \neq 0, a, b, c, d$ 는 상수)

라 하면

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

조건 ㉠에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)=0 \text{이므로 } f(0)=0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = -2$$

$$f(0)=0 \text{에서 } d=0$$

$$f'(0)=-2 \text{에서 } c=-2$$

$$\text{또 조건 ㉡에서 } f'(1)=0, \quad f(1)=-3$$

$$f'(1)=0 \text{에서 } 3a+2b-2=0$$

$$\therefore 3a+2b=2$$

..... ㉠

$$f(1)=-3 \text{에서 } a+b-2=-3$$

$$\therefore a+b=-1$$

..... ㉡

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } a=4, \quad b=-5$$

$$\text{따라서 } f(x)=4x^3-5x^2-2x \text{이므로}$$

$$f(2)=8$$

답 8

0446 $f(x)=\frac{1}{2}x^3+ax^2+b$ 에서

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2+2ax$$

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프에서

$$f'(0)=0, \quad f'(4)=0$$

$$f'(4)=0 \text{에서 } 24+8a=0 \quad \therefore a=-3$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+b$$

이때 $x=0$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이고, $x=4$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 극소이다.

$$\text{따라서 } f(4)=-6 \text{에서 } -16+b=-6 \quad \therefore b=10$$

$$\text{즉 } f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+10 \text{이므로 구하는 극댓값은}$$

$$f(0)=10$$

답 ③

0447 오른쪽 그림에서

$f'(x_2)=0$ 이고 $x=x_2$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=x_2$ 에서 극댓값을 갖는다.

$$\therefore m=1$$

또 $f'(x_1)=f'(x_3)=0$ 이고 $x=x_1, x=x_3$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=x_1, x=x_3$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$\therefore n=2 \quad \therefore m-n=-1$$

답 -1

참고 함수 $f(x)$ 는 $x=x_4$ 에서 극값을 갖지 않는다.

0448 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a \neq 0, a, b, c, d$ 는 상수)

라 하면 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프에서 $f'(0)=0, f'(-2)=0$

$f'(0)=0$ 에서 $c=0$

$f'(-2)=0$ 에서 $12a-4b=0 \quad \therefore b=3a$

$$\therefore f(x)=ax^3+3ax^2+d$$

이때 $x=-2$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극댓값 6을 갖고, $x=0$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극솟값 -2 를 갖는다.

따라서 $f(0)=-2$ 에서 $d=-2$

$f(-2)=6$ 에서 $4a-2=6 \quad \therefore a=2$

즉 $f(x)=2x^3+6x^2-2$ 이므로

$$f(1)=6$$

답 6

0449 ① 구간 $(-2, 4)$ 에서 $f(x)$ 가 미분가능하므로 $f(x)$ 는 연속이다.

② 구간 $(0, 4)$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이므로 이 구간에서 $f(x)$ 는 증가한다.

③ $f'(-1)=0$ 이고 $x=-1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극소이다.

④ $f'(2)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다.

⑤ 구간 $(-2, 4)$ 에서 $f(x)$ 가 극값을 갖는 x 의 값은 -1 의 1개이다.

답 ⑤

0450 ㄱ. 구간 (α, β) 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 이 구간에서 $f(x)$ 는 증가한다. (거짓)

ㄴ. $f'(\beta)=0$ 이고 $x=\beta$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x=\beta$ 에서 극댓값을 갖는다. (참)

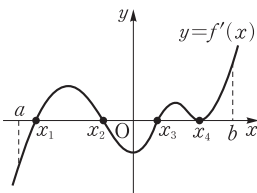
ㄷ. $f'(\gamma)=0$ 이고 $x=\gamma$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x=\gamma$ 에서 극솟값을 갖는다.

따라서 $f(x)$ 가 극값을 갖는 x 의 값은 β, γ 의 2개이다.

(거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ①



0451 $f(x)=x^3+3ax^2+ax-2$ 에서

$$f'(x)=3x^2+6ax+a$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(3a)^2-3a>0, \quad a(3a-1)>0$$

$$\therefore a<0 \text{ 또는 } a>\frac{1}{3}$$

답 $a<0$ 또는 $a>\frac{1}{3}$

0452 $f(x)=x^3+ax^2+12x+2$ 에서

$$f'(x)=3x^2+2ax+12$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-3 \times 12>0, \quad (a+6)(a-6)>0$$

$$\therefore a<-6 \text{ 또는 } a>6$$

따라서 $a=-6, \beta=6$ 이므로

$$\beta-a=12$$

답 ③

0453 $f(x)=x^3+3x^2+ax-1$ 에서

$$f'(x)=3x^2+6x+a$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=3^2-3a>0 \quad \therefore a<3$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 2이다.

답 ⑤

0454 $f(x)$ 가 삼차함수이므로

$$3k \neq 0 \quad \therefore k \neq 0$$

..... ㉠

$$f(x)=3kx^3+(k+2)x^2+kx+1$$

$$f'(x)=9kx^2+2(k+2)x+k$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(k+2)^2-9k \times k>0$$

$$2k^2-k-1<0, \quad (2k+1)(k-1)<0$$

$$\therefore -\frac{1}{2}<k<1$$

..... ㉡

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서} \quad -\frac{1}{2}<k<0 \text{ 또는 } 0<k<1$$

$$\text{답} \quad -\frac{1}{2}<k<0 \text{ 또는 } 0<k<1$$

0455 $f(x)=x^3+ax^2+3x+4$ 에서

$$f'(x)=3x^2+2ax+3$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근을 갖거나 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-3 \times 3 \leq 0, \quad (a+3)(a-3) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq a \leq 3$$

답 $-3 \leq a \leq 3$

0456 $f(x) = x^3 - ax^2 + \left(a - \frac{2}{3}\right)x - 1$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax + a - \frac{2}{3}$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 중근을 갖거나 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (-a)^2 - 3\left(a - \frac{2}{3}\right) \leq 0 \\ a^2 - 3a + 2 &\leq 0, \quad (a-1)(a-2) \leq 0 \\ \therefore 1 &\leq a \leq 2 \end{aligned}$$

따라서 정수 a 는 1, 2이므로 구하는 합은

$$1 + 2 = 3$$

답 ⑤

0457 $f(x) = -x^3 + ax^2 + (a^2 - 4a)x + 3$ 에서

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + a^2 - 4a$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 중근을 갖거나 허근을 가져야 하므로 판별식을 D_1 이라 하면

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{4} &= a^2 - (-3) \times (a^2 - 4a) \leq 0 \\ a^2 - 3a &\leq 0, \quad a(a-3) \leq 0 \\ \therefore 0 &\leq a \leq 3 \end{aligned}$$

..... ㉠

$g(x) = x^3 - 2ax^2 + ax - 2$ 에서

$$g'(x) = 3x^2 - 4ax + a$$

함수 $g(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $g'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D_2 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{D_2}{4} &= (-2a)^2 - 3a > 0 \\ 4a^2 - 3a &> 0, \quad a(4a-3) > 0 \\ \therefore a < 0 \text{ 또는 } a &> \frac{3}{4} \end{aligned}$$

..... ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{3}{4} < a \leq 3$

따라서 정수 a 는 1, 2, 3의 3개이다.

답 3

0458 $f(x) = x^3 - 3(a-1)x^2 - 3(b^2-9)x + a$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 6(a-1)x - 3(b^2-9)$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 중근을 갖거나 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= \{-3(a-1)\}^2 - 3\{-3(b^2-9)\} \leq 0 \\ (a-1)^2 + b^2 - 9 &\leq 0 \\ \therefore b^2 &\leq 9 - (a-1)^2 \end{aligned}$$

... 1단계

(i) $a=1$ 일 때, $b^2 \leq 9$ 이므로 $b=1, 2, 3$

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 3

(ii) $a=2$ 일 때, $b^2 \leq 8$ 이므로 $b=1, 2$

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 2

(iii) $a=3$ 일 때, $b^2 \leq 5$ 이므로 $b=1, 2$

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 2

(iv) $a=4$ 일 때, $b^2 \leq 0$ 이므로 자연수 b 는 존재하지 않는다.

이상에서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$3 + 2 + 2 = 7$$

... 2단계

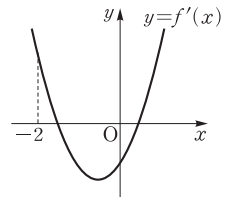
답 7

	채점 요소	비율
1단계	극값을 갖지 않을 조건을 이용하여 a, b 에 대한 부등식 세우기	40 %
2단계	순서쌍 (a, b) 의 개수 구하기	60 %

0459 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + kx - 5$ 에서

$$f'(x) = 6x^2 + 6x + k$$

함수 $f(x)$ 가 $-2 < x < 0$ 에서 극댓값을 갖고, $x > 0$ 에서 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 $-2 < x < 0$, $x > 0$ 에서 각각 하나의 실근을 가져야 하므로 $y = f'(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $f'(-2) > 0$ 에서 $12 + k > 0$

$$\therefore k > -12$$

(ii) $f'(0) < 0$ 에서 $k < 0$

(i), (ii)에서 $-12 < k < 0$

따라서 $a = -12, b = 0$ 이므로

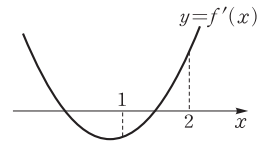
$$a^2 + b^2 = 144$$

답 ④

0460 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3ax - 1$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 6ax + 3a$$

함수 $f(x)$ 가 $1 < x < 2$ 에서 극솟값을 갖고 극댓값을 갖지 않으려면 $y = f'(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $f'(1) < 0$ 에서

$$3 - 6a + 3a < 0$$

$$\therefore a > 1$$

(ii) $f'(2) > 0$ 에서

$$12 - 12a + 3a > 0, \quad -9a > -12$$

$$\therefore a < \frac{4}{3}$$

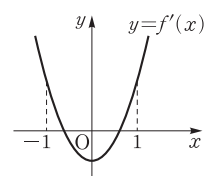
(i), (ii)에서 $1 < a < \frac{4}{3}$

답 1 < a < 4/3

0461 $f(x) = x^3 + px^2 + (p-1)x$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 2px + p - 1$$

함수 $f(x)$ 가 $-1 < x < 1$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 $-1 < x < 1$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $y = f'(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=p^2-3(p-1)>0$$

$$\therefore p^2-3p+3=\left(p-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

따라서 모든 실수 p 에 대하여 성립한다.

(ii) $f'(-1)>0$ 에서 $3-2p+p-1>0$

$$\therefore p<2$$

(iii) $f'(1)>0$ 에서 $3+2p+p-1>0$

$$\therefore p>-\frac{2}{3}$$

(iv) $y=f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=-\frac{p}{3}$ 이므로

$$-1<-\frac{p}{3}<1 \quad \therefore -3<p<3$$

이상에서 $-\frac{2}{3}<p<2$

따라서 정수 p 는 0, 1의 2개이다. 답 ②

0462 $f(x)=-x^4+4x^3+4ax^2$ 에서

$$f'(x)=-4x^3+12x^2+8ax$$

$$=-4x(x^2-3x-2a)$$

함수 $f(x)$ 가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-3x-2a=0$ 이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$x=0$ 이 $x^2-3x-2a=0$ 의 근이 아니므로

$$a \neq 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이차방정식 $x^2-3x-2a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=(-3)^2-4 \times 1 \times (-2a)>0$$

$$\therefore a>-\frac{9}{8} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 $-\frac{9}{8}<a<0$ 또는 $a>0$

따라서 $a=-\frac{9}{8}, \beta=0$ 이므로

$$a+\beta=-\frac{9}{8} \quad \text{답 } -\frac{9}{8}$$

0463 $f(x)=3x^4-8x^3+6ax^2+7$ 에서

$$f'(x)=12x^3-24x^2+12ax$$

$$=12x(x^2-2x+a)$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-2x+a=0$ 이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$x=0$ 이 $x^2-2x+a=0$ 의 근이 아니므로

$$a \neq 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이차방정식 $x^2-2x+a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-a>0 \quad \therefore a<1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 $a<0$ 또는 $0<a<1$

답 $a<0$ 또는 $0<a<1$

0464 사차함수 $f(x)$ 가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖거나 중근과 다른 한 실근을 갖거나 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+ax+2a=0$ 이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$D=a^2-4 \times 1 \times 2a<0, \quad a(a-8)<0$$

$$\therefore 0<a<8$$

(ii) $f'(x)=0$ 이 중근과 다른 한 실근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+ax+2a=0$ 이 $x=-1$ 을 근으로 갖거나 -1 이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

㉠ 이차방정식 $x^2+ax+2a=0$ 이 $x=-1$ 을 근으로 가질 때

$$1-a+2a=0 \quad \therefore a=-1$$

㉡ 이차방정식 $x^2+ax+2a=0$ 이 -1 이 아닌 실수를 중근으로 가질 때, 판별식을 D 라 하면

$$D=a^2-4 \times 1 \times 2a=0, \quad a(a-8)=0$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } a=8$$

(i), (ii)에서 $a=-1$ 또는 $0 \leq a \leq 8$

따라서 정수 a 는 $-1, 0, 1, \dots, 8$ 의 10개이다. 답 10

참고 이차방정식 $x^2+ax+2a=0$ 이 $x=-1$ 을 중근으로 가질 수 없으므로 삼차방정식 $f'(x)=0$ 은 삼중근을 가질 수 없다.

0465 $f(x)=-3x^4-8x^3+6(k+3)x^2-12kx$ 에서

$$f'(x)=-12x^3-24x^2+12(k+3)x-12k$$

$$=-12(x-1)(x^2+3x-k)$$

함수 $f(x)$ 가 극솟값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖거나 중근과 다른 한 실근을 갖거나 삼중근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+3x-k=0$ 이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$D=3^2-4 \times 1 \times (-k)<0$$

$$\therefore k<-\frac{9}{4}$$

(ii) $f'(x)=0$ 이 중근과 다른 한 실근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+3x-k=0$ 이 $x=1$ 을 근으로 갖거나 1이 아닌 실수를 중근으로 가져야 한다.

㉠ 이차방정식 $x^2+3x-k=0$ 이 $x=1$ 을 근으로 가질 때

$$1+3-k=0 \quad \therefore k=4$$

㉡ 이차방정식 $x^2+3x-k=0$ 이 1이 아닌 실수를 중근으로 가질 때, 판별식을 D 라 하면

$$D=3^2-4 \times 1 \times (-k)=0$$

$$\therefore k=-\frac{9}{4}$$

(i), (ii)에서 $k \leq -\frac{9}{4}$ 또는 $k=4$

따라서 실수 k 의 최댓값은 4이다. 답 4

0466 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+3$ 에서

$$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	23	$\searrow$	-4	$\nearrow$	7

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 최댓값 23, $x=1$ 에서 최솟값 -4를 가지므로

$$M=23, m=-4 \quad \therefore M+m=19 \quad \text{답 ②}$$

0467 $f(x)=x^4-2x^2-2$ 에서

$$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

구간 $[-3, 0]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	...	-1	...	0
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	61	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 최솟값 -3을 가지므로

$$a=-1, b=-3 \quad \therefore ab=3 \quad \text{답 3}$$

0468 $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2+1$ 에서

$$f'(x)=12x^3-24x^2+12x=12x(x-1)^2$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=1$

구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	0	+	
$f(x)$	18	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	9

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 최댓값 18, $x=0$ 에서 최솟값 1을 가지므로

$$M=18, m=1 \quad \therefore Mm=18 \quad \text{답 18}$$

0469 $x^2-4x+2=t$ 로 놓으면

$$t=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$$

이때 $0 \leq x \leq 4$ 이므로 $-2 \leq t \leq 2$

$g(t)=t^3-12t+1$ 이라 하면

$$g'(t)=3t^2-12=3(t+2)(t-2)$$

$g'(t)=0$ 에서 $t=-2$ 또는 $t=2$

$-2 \leq t \leq 2$ 에서 $g'(t) \leq 0$ 이므로 함수 $g(t)$ 는 $t=-2$ 에서 최댓값 17, $t=2$ 에서 최솟값 -15를 갖는다.

즉 $M=17, m=-15$ 이므로

$$M+m=2 \quad \text{답 2}$$

0470 $f(x)=-x^4+6x^2-8x+a$ 에서

$$f'(x)=-4x^3+12x-8=-4(x+2)(x-1)^2$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

구간 $[-3, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	...	-2	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$a-3$	$\nearrow$	$a+24$	$\searrow$	$a-3$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 최댓값 $a+24$ 를 가지므로

$$a+24=19 \quad \therefore a=-5 \quad \text{답 ③}$$

0471 $f(x)=ax^3-6ax^2+b$ 에서

$$f'(x)=3ax^2-12ax=3ax(x-4)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=4$

$a>0$ 이므로 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-7a+b$	$\nearrow$	b	$\searrow$	$-16a+b$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최댓값 b , $x=2$ 에서 최솟값 $-16a+b$ 를 갖는다.

즉 $b=3, -16a+b=-13$ 이므로

$$\begin{aligned} a=1, b=3 \\ \therefore a+b=4 \end{aligned} \quad \text{답 ④}$$

0472 $f(x)=x^3+ax^2+bx+5$ 에서

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

이때 구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최솟값 3을 가지므로 $x=2$ 에서 극솟값 3을 가져야 한다.

$$\therefore f'(2)=0, f(2)=3$$

$$f'(2)=0 \text{에서 } 12+4a+b=0$$

$$\therefore 4a+b=-12 \quad \text{..... ㉠}$$

$$f(2)=3 \text{에서 } 8+4a+2b+5=3$$

$$\therefore 2a+b=-5 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-\frac{7}{2}, b=2$$

따라서 $f(x)=x^3-\frac{7}{2}x^2+2x+5$ 이므로

$$f(1)=\frac{9}{2} \quad \text{답 } \frac{9}{2}$$

0473 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

조건 ㉠에서

$$f'(-3)=0, f'(1)=0$$

$$f'(-3)=0 \text{에서} \quad 27-6a+b=0$$

$$\therefore 6a-b=27 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$f'(1)=0 \text{에서} \quad 3+2a+b=0$$

$$\therefore 2a+b=-3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면 $a=3, b=-9$

$$\therefore f(x)=x^3+3x^2-9x+c \quad \dots \textcircled{1\text{단계}}$$

구간 $[-4, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-4	...	-3	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$c+20$	$\nearrow$	$c+27$	$\searrow$	$c-5$	$\nearrow$	$c+2$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=-3$ 에서 최댓값 $c+27$, $x=1$ 에서 최솟값 $c-5$ 를 가지므로 조건 ④에서

$$c-5=-10 \quad \therefore c=-5$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$c+27=-5+27=22 \quad \dots \textcircled{2\text{단계}}$$

답 22

	채점 요소	비율
①단계	$f(x)$ 의 이차항과 일차항의 계수 구하기	60 %
②단계	구간 $[-4, 2]$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값 구하기	40 %

0474 점 D의 좌표를 $(a, 0)$ ($0 < a < 2$)이라 하면

$$\overline{AD}=2a, \overline{CD}=-a^2+4$$

직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$S(a)=2a(-a^2+4)=-2a^3+8a$$

$$\therefore S'(a)=-6a^2+8=-2(3a^2-4)$$

$$S'(a)=0 \text{에서} \quad a=\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (\because 0 < a < 2)$$

$0 < a < 2$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	...	2
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		$\nearrow$	$\frac{32\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	

따라서 $S(a)$ 는 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 에서 극대이면서 최대이므로 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $\frac{32\sqrt{3}}{9}$ 이다. **답 $\frac{32\sqrt{3}}{9}$**

0475 하루에 A 제품 x 개를 판매하여 얻는 이익을 $g(x)$ 원이라 하면

$$g(x)=1000x-f(x)$$

$$=-x^3+180x^2-4000$$

$$\therefore g'(x)=-3x^2+360x=-3x(x-120)$$

$$g'(x)=0 \text{에서} \quad x=120 \quad (\because x > 0)$$

$x > 0$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

x	0	...	120	...
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 $g(x)$ 는 $x=120$ 에서 극대이면서 최대이므로 이익을 최대 하기 위해 하루에 생산해야 할 A 제품의 개수는 120이다.

답 120

0476 잘라 내는 정사각형의 한 변의 길이를 x 라 하면

$$x > 0, 12-2x > 0 \text{이므로}$$

$$0 < x < 6$$

상자의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x)=x(12-2x)^2$$

$$\therefore V'(x)=(12-2x)^2-4x(12-2x)$$

$$=12(x-2)(x-6)$$

$$V'(x)=0 \text{에서} \quad x=2 \quad (\because 0 < x < 6)$$

$0 < x < 6$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...	6
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		$\nearrow$	128	$\searrow$	

따라서 $V(x)$ 는 $x=2$ 에서 극대이면서 최대이므로 상자의 부피의 최댓값은 128이다.

답 ③

0477 점 P의 x 좌표를 t 라 하면 두 점 $P(t, -t^2+3)$,

$A(5, 4)$ 에 대하여

$$\overline{AP}=\sqrt{(t-5)^2+(-t^2+3-4)^2}$$

$$=\sqrt{t^4+3t^2-10t+26}$$

$$f(t)=t^4+3t^2-10t+26 \text{이라 하면}$$

$$f'(t)=4t^3+6t-10$$

$$=2(t-1)(2t^2+2t+5)$$

$$f'(t)=0 \text{에서} \quad t=1 \quad (\because 2t^2+2t+5 > 0)$$

함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

t	...	1	...
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$\searrow$	20	$\nearrow$

따라서 $f(t)$ 는 $t=1$ 에서 극소이면서 최소이므로 선분 AP의 길이의 최솟값은

$$\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

답 $2\sqrt{5}$

RPM비법노트

함수 $g(x)=\sqrt{x}$ 에서 $0 < x_1 < x_2$ 이면

$$0 < g(x_1) < g(x_2)$$

즉 함수 $g(x)$ 는 증가함수이다.

따라서 $f(t)$ 가 최대일 때 $\sqrt{f(t)}$ 도 최대이다.

0478 $-2x^2+8=0$ 에서 $x^2-4=0$
 $(x+2)(x-2)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=2$
 $\therefore A(-2, 0), B(2, 0)$
점 C의 좌표를 $(a, -2a^2+8)$ ($0 < a < 2$)이라 하면
 $\overline{CD}=2a$
또 $\overline{AB}=4$ 이고 사다리꼴의 높이가 $-2a^2+8$ 이므로 사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$S(a) = \frac{1}{2}(2a+4)(-2a^2+8)$$

$$= -2a^3 - 4a^2 + 8a + 16 \quad \dots \text{1단계}$$

$$\therefore S'(a) = -6a^2 - 8a + 8 = -2(a+2)(3a-2)$$
 $S'(a)=0$ 에서 $a = \frac{2}{3}$ ($\because 0 < a < 2$)
 $0 < a < 2$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

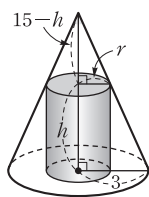
a	0	...	$\frac{2}{3}$	...	2
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		$\nearrow$	$\frac{512}{27}$	$\searrow$	

따라서 $S(a)$ 는 $a = \frac{2}{3}$ 에서 극대이면서 최대이므로 사다리꼴 ABCD의 넓이의 최댓값은 $\frac{512}{27}$ 이다. $\dots \text{2단계}$
즉 $p=27, q=512$ 이므로 $p+q=539$ $\dots \text{3단계}$

답 539

	채점 요소	비율
1단계	사다리꼴 ABCD의 넓이를 점 C의 x 좌표에 대한 식으로 나타내기	40 %
2단계	사다리꼴 ABCD의 넓이의 최댓값 구하기	50 %
3단계	$p+q$ 의 값 구하기	10 %

0479 오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r ($0 < r < 3$), 높이를 h 라 하면



$(15-h) : r = 15 : 3$
 $3(15-h) = 15r \quad \therefore h = 15-5r$
원기둥의 부피를 $V(r)$ 라 하면

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 (15-5r) = \pi (15r^2 - 5r^3)$$

$$\therefore V'(r) = \pi (30r - 15r^2) = 15\pi r(2-r)$$
 $V'(r)=0$ 에서 $r=2$ ($\because 0 < r < 3$)
 $0 < r < 3$ 에서 함수 $V(r)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	...	2	...	3
$V'(r)$		+	0	-	
$V(r)$		$\nearrow$	20π	$\searrow$	

따라서 $V(r)$ 는 $r=2$ 에서 극대이면서 최대이므로 원기둥의 부피의 최댓값은 20π 이다. **답 ⑤**

0480 사각기둥의 밑면의 한 변의 길이를 a , 높이를 x 라 하면 삼각형 ABF에서

$$a^2 + x^2 = 12^2$$

$$\therefore a^2 = 144 - x^2 \quad \dots \text{㉠}$$

이때 $x > 0, 144 - x^2 > 0$ 이므로

$$0 < x < 12$$

사각기둥의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x) = a^2 x = (144 - x^2) \times x$$

$$= -x^3 + 144x$$

$$\therefore V'(x) = -3x^2 + 144$$

$$= -3(x+4\sqrt{3})(x-4\sqrt{3})$$

$V'(x)=0$ 에서

$$x = 4\sqrt{3} \quad (\because 0 < x < 12)$$

$0 < x < 12$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$4\sqrt{3}$	...	12
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 $V(x)$ 는 $x = 4\sqrt{3}$ 에서 극대이면서 최대이므로 사각기둥의 부피가 최대일 때의 밑넓이는 ㉠에서

$$144 - (4\sqrt{3})^2 = 96$$

답 96

0481 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 에서

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$x \rightarrow \infty$ 일 때 $f(x) \rightarrow \infty$ 이므로 $a > 0$

$f(0) > 0$ 이므로 $d > 0$

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 실근이 α, β 이고 $\alpha < 0, \beta > 0$,

$|a| < |\beta|$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -\frac{2b}{3a} > 0, \alpha\beta = \frac{c}{3a} < 0$$

이때 $a > 0$ 이므로 $b < 0, c < 0$

$$\therefore ab < 0, ac < 0, bd < 0, cd < 0$$

답 ④

0482 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 에서

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$x \rightarrow \infty$ 일 때 $f(x) \rightarrow -\infty$ 이므로 $a < 0$

$f(0) > 0$ 이므로 $d > 0$

$$\therefore ad < 0$$

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 실근이 α, β 이고 $\alpha < 0, \beta < 0$ 이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -\frac{2b}{3a} < 0, \alpha\beta = \frac{c}{3a} > 0$$

이때 $a < 0$ 이므로 $b < 0, c < 0$

$$\therefore b+c < 0$$

또 $bc > 0$ 이므로 $bc+d > 0$

$ab > 0$ 이므로 $c-ab < 0$

답 ④

0483 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$		↘		↘	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이므로 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ①이다. **답 ①**

0484 $f'(x)=0$ 에서 $x=a$ 또는 $x=b$ 또는 $x=c$
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	a	...	b	...	c	...
$f'(x)$	+	0	-	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대, $x=c$ 에서 극소이므로 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ③이다. **답 ③**

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 075~078쪽

0485 $f(x)=x^3+ax^2+9x-1$ 에서

$$f'(x)=3x^2+2ax+9$$

$f'(x) \leq 0$ 의 해가 $1 \leq x \leq b$ 이므로

$$f'(x)=3(x-1)(x-b)=3x^2-3(b+1)x+3b$$

따라서 $2a=-3(b+1)$, $9=3b$ 이므로

$$a=-6, b=3$$

$$\therefore a+b=-3$$

답 ②

0486 $f(x)=-x^3-ax^2+2ax+15$ 에서

$$f'(x)=-3x^2-2ax+2a$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-(-3) \times 2a \leq 0, \quad a(a+6) \leq 0$$

$$\therefore -6 \leq a \leq 0$$

따라서 정수 a 는 $-6, -5, \dots, 0$ 의 7개이다. **답 ③**

0487 $f(x)=x^3+2kx^2+4x$ 에서

$$f'(x)=3x^2+4kx+4$$

임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 가 성립하는 함수 $f(x)$ 는 일대일함수이고, $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-3 \times 4 \leq 0, \quad (k+\sqrt{3})(k-\sqrt{3}) \leq 0$$

$$\therefore -\sqrt{3} \leq k \leq \sqrt{3}$$

$$\text{답 } -\sqrt{3} \leq k \leq \sqrt{3}$$

0488 $f(x)=2x^3+ax^2$ 에서

$$f'(x)=6x^2+2ax$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $[2, 3]$ 에서 감소하려면 $2 \leq x \leq 3$ 에서

$f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

즉 오른쪽 그림에서

$$f'(2)=24+4a \leq 0 \text{ 이므로}$$

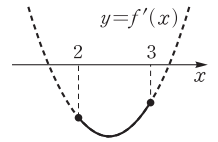
$$a \leq -6 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$f'(3)=54+6a \leq 0 \text{ 이므로}$$

$$a \leq -9 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $a \leq -9$

따라서 실수 a 의 최댓값은 -9 이다. **답 ②**



0489 $f(x)=2x^3-9x^2+12x+2$ 에서

$$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	7	↘	6	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 7, $x=2$ 에서 극솟값 6을 가지므로

$$M=7, m=6$$

$$\therefore Mm=42$$

답 42

0490 다항함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 극솟값 2를 가지므로

$$f'(3)=0, f(3)=2$$

$$g(x)=(x^2-2x)f(x) \text{에서}$$

$$g'(x)=(2x-2)f(x)+(x^2-2x)f'(x)$$

$$\therefore g'(3)=4f(3)+3f'(3)=4 \times 2+3 \times 0=8$$

답 8

0491 $f(x)=x^4-4x^3+4x^2+2$ 에서

$$f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x-1)(x-2)$$

$f'(x)=0$ 에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	2	↗	3	↘	2	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는

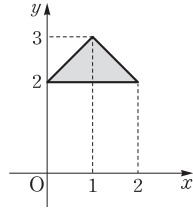
$x=0$ 과 $x=2$ 에서 극솟값 2,

$x=1$ 에서 극댓값 3

을 가지므로 오른쪽 그림에서 구하는 삼각
형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$$

답 ②



0492 $f(x) = -x^3 - x^2 + x + \frac{1}{3}$ 에서

$$f'(x) = -3x^2 - 2x + 1 = -(x+1)(3x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$\frac{14}{27}$	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극

솟값 $-\frac{2}{3}$, $x=\frac{1}{3}$ 에서 극댓값 $\frac{14}{27}$

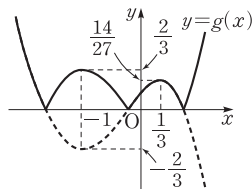
를 가지므로 $y=g(x)$ 의 그래프는
오른쪽 그림과 같다.

즉 함수 $g(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값

$\frac{2}{3}$, $x=\frac{1}{3}$ 에서 극댓값 $\frac{14}{27}$ 를 가지므로 $g(x)$ 의 모든 극댓값의
합은

$$\frac{2}{3} + \frac{14}{27} = \frac{32}{27}$$

답 $\frac{32}{27}$



0493 조건 (가)에 의하여

$$f(x) = (x-2)^2(x+a) \quad (a \text{는 상수})$$

라 하면 $f'(x) = 2(x-2)(x+a) + (x-2)^2$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3x^2 f(1) + 2f(1)}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1) - 3x^2 f(1) + 3f(1)}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2-1)f(1)}{x^2-1} \\ &= \frac{1}{2} f'(1) - 3f(1) = -\frac{15}{2} \end{aligned}$$

이때 $f(1)=a+1$, $f'(1)=-2a-1$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times (-2a-1) - 3(a+1) = -\frac{15}{2}$$

$$-4a - \frac{7}{2} = -\frac{15}{2} \quad \therefore a=1$$

$$\therefore f(x) = (x-2)^2(x+1),$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-2)(x+1) + (x-2)^2 \\ &= 3x(x-2) \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 4를 갖는다.

답 4

다른 풀이 $g(x) = f(x) - 3x^2 f(1)$ 이라 하면

$$g(1) = -2f(1)$$

조건 (나)에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3x^2 f(1) + 2f(1)}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{g(x) - g(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\} \\ &= \frac{g'(1)}{2} = -\frac{15}{2} \\ \therefore g'(1) &= -15 \end{aligned}$$

이때 $g'(x) = f'(x) - 6xf(1)$ 이므로

$$g'(1) = f'(1) - 6f(1)$$

$f(1)=a+1$, $f'(1)=-2a-1$ 이므로

$$g'(1) = -2a-1-6(a+1) = -8a-7$$

따라서 $-8a-7 = -15$ 이므로 $a=1$

0494 $f(x) = x^3 - 3kx^2 - 9k^2x + 1$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 6kx - 9k^2 = 3(x+k)(x-3k)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-k$ 또는 $x=3k$

$k>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과
같다.

x	$\cdots$	$-k$	$\cdots$	$3k$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$5k^3+1$	$\searrow$	$-27k^3+1$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-k$ 에서 극댓값 $5k^3+1$, $x=3k$ 에서
극솟값 $-27k^3+1$ 을 갖는다.

이때 극댓값과 극솟값의 차가 32이므로

$$(5k^3+1) - (-27k^3+1) = 32$$

$$32k^3 = 32, \quad k^3 = 1$$

$$\therefore k=1$$

답 1

0495 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$, a, b, c, d 는 상수)

라 하면

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프에서

$$f'(0)=3, \quad f'(-3)=0, \quad f'(1)=0$$

$f'(0)=3$ 에서 $c=3$

$f'(-3)=0$ 에서

$$27a - 6b + 3 = 0 \quad \therefore 9a - 2b = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$f'(1)=0$ 에서

$$3a + 2b + 3 = 0 \quad \therefore 3a + 2b = -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -\frac{1}{3}, b = -1$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + d$$

이때 $x = -3$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x = -3$ 에서 극소이고, $x = 1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극대이다.

따라서 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 차는

$$f(1) - f(-3) = \left(\frac{5}{3} + d\right) - (-9 + d) = \frac{32}{3}$$

답 $\frac{32}{3}$

0496 ㄱ. $f'(0) \neq 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄴ. $0 < x < 1$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 이 구간에서 $f(x)$ 는 감소한다. (거짓)

ㄷ. $f'(-1) = 0$ 이고 $x = -1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값을 갖는다.

또 $f'(1) = 0$ 이고 $x = 1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극솟값을 갖는다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

0497 $f(x) = x^3 - ax^2 + (a+6)x + 1$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax + a + 6$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 중근을 갖거나 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - 3(a+6) \leq 0$$

$$a^2 - 3a - 18 \leq 0, \quad (a+3)(a-6) \leq 0$$

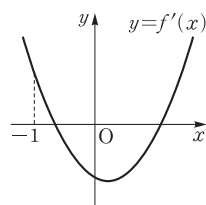
$$\therefore -3 \leq a \leq 6$$

따라서 정수 a 는 $-3, -2, -1, \dots, 6$ 의 10개이다. 답 ④

0498 $f(x) = x^3 - (a+2)x^2 + ax$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 2(a+2)x + a$$

함수 $f(x)$ 가 $-1 < x < 0$ 에서 극댓값을 갖고, $x > 0$ 에서 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 $-1 < x < 0$, $x > 0$ 에서 각각 하나의 실근을 가져야 하므로 $y = f'(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $f'(-1) > 0$ 에서 $3 + 2(a+2) + a > 0$

$$\therefore a > -\frac{7}{3}$$

(ii) $f'(0) < 0$ 에서 $a < 0$

(i), (ii)에서 $-\frac{7}{3} < a < 0$

따라서 정수 a 는 $-2, -1$ 이므로 구하는 곱은

$$-2 \times (-1) = 2$$

답 2

0499 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2ax^2 + 1$ 에서

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 4ax = 4x(x^2 - 3x + a)$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2 - 3x + a = 0$ 이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$x = 0$ 이 $x^2 - 3x + a = 0$ 의 근이 아니므로

$$a \neq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2 - 3x + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-3)^2 - 4a > 0 \quad \therefore a < \frac{9}{4} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡에서 $a < 0$ 또는 $0 < a < \frac{9}{4}$

따라서 정수 a 의 최댓값은 2이다. 답 ③

0500 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$ 에서

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 2$

구간 $[-2, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	2	...	3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	11	↘	-16	↗	-5

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 최댓값 11, $x = 2$ 에서 최솟값 -16을 가지므로

$$M = 11, m = -16 \quad \therefore M + m = -5 \quad \text{답 } -5$$

0501 $f(x) = -x^4 + 4a^3x - 20$ 에서

$$f'(x) = -4x^3 + 4a^3 = -4(x-a)(x^2 + ax + a^2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = a$ ($\because x^2 + ax + a^2 > 0$)

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를

표로 나타내면 오른쪽과 같

다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = a$

에서 최댓값 $3a^4 - 20$ 을 가지므로

$$3a^4 - 20 = a^4 + 12, \quad a^4 - 16 = 0$$

$$(a^2 + 4)(a + 2)(a - 2) = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

답 ②

0502 $f(x) = ax(x-3)^2 + b$ 에서

$$f'(x) = a(x-3)^2 + 2ax(x-3) = 3a(x-1)(x-3)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 1$ 또는 $x = 3$

구간 $[0, 5]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	3	...	5
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	b	↗	$4a+b$	↘	b	↗	$20a+b$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=5$ 에서 최댓값 $20a+b$, $x=0$ 과 $x=3$ 에서 최솟값 b 를 가지므로

$$20a+b=15, b=-5 \quad \therefore a=1, b=-5$$

$$\therefore a^2+b^2=26$$

답 26

0503 점 (a, b) 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$b=a^2-4a+4$$

$$f(x)=x^2-4x+4에서$$

$$f'(x)=2x-4$$

점 (a, a^2-4a+4) 에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=2a-4$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(a^2-4a+4)=(2a-4)(x-a)$$

$$\therefore y=(2a-4)x-a^2+4$$

따라서 접선의 x 절편은 $\frac{a^2-4}{2a-4}=\frac{a+2}{2}$, y 절편은 $-a^2+4$ 이므로 접선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$S(a)=\frac{1}{2} \times \frac{a+2}{2} \times (-a^2+4)$$

$$=\frac{1}{4}(-a^3-2a^2+4a+8)$$

$$\therefore S'(a)=\frac{1}{4}(-3a^2-4a+4)$$

$$=-\frac{1}{4}(a+2)(3a-2)$$

$$S'(a)=0에서 \quad a=\frac{2}{3} (\because 0 < a < 2)$$

$0 < a < 2$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	$\frac{2}{3}$	...	2
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 $S(a)$ 는 $a=\frac{2}{3}$ 에서 극대이면서 최대이다.

즉 삼각형의 넓이가 최대일 때 $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{16}{9}$ 이므로

$$b-a=\frac{16}{9}-\frac{2}{3}=\frac{10}{9}$$

답 ③

0504 상자의 밑면의 한 변의 길이는 $10-2x$ 이고 높이는

$$x \times \tan 30^\circ = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

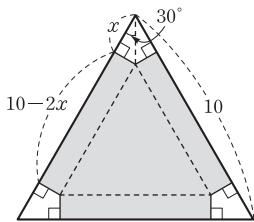
이때 $10-2x > 0$, $\frac{x}{\sqrt{3}} > 0$ 이므로

$$0 < x < 5$$

상자의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(10-2x)^2 \times \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$=x^3-10x^2+25x$$



$$\therefore V'(x)=3x^2-20x+25=(3x-5)(x-5)$$

$$V'(x)=0에서 \quad x=\frac{5}{3} (\because 0 < x < 5)$$

$0 < x < 5$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{5}{3}$	...	5
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 $V(x)$ 는 $x=\frac{5}{3}$ 에서 극대이면서 최대이므로 상자의 부피가 최대가 되도록 하는 x 의 값은 $\frac{5}{3}$ 이다.

답 $\frac{5}{3}$

0505 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 에서

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$x \rightarrow \infty$ 일 때 $f(x) \rightarrow \infty$ 이므로

$$a > 0$$

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 실근이 α, β 이고 $\alpha < 0, \beta > 0$,

$|a| > |\beta|$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a} < 0, \alpha\beta=\frac{c}{3a} < 0$$

이때 $a > 0$ 이므로

$$b > 0, c < 0$$

$$\therefore |c-b|-|b|+|c|=-(-b)-b+(-c)$$

$$=-2c$$

답 ②

0506 $f(x)=x^3-2ax^2+ax$ 에서

$$f'(x)=3x^2-4ax+a$$

... 1단계

함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

... 2단계

즉 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이차방정식

$f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2a)^2-3 \times a \leq 0, \quad a(4a-3) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq \frac{3}{4}$$

... 3단계

답 $0 \leq a \leq \frac{3}{4}$

	채점 요소	비율
1단계	$f'(x)$ 구하기	20 %
2단계	함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가해야 함을 알기	30 %
3단계	a 의 값의 범위 구하기	50 %

0507 $f(x)=x^3-6x^2+k$ 에서

$$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$$

... 1단계

$f'(x)=0$ 에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=4$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	k	↘	$k-32$	↗

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 k , $x=4$ 에서 극솟값 $k-32$ 를 갖는다. ... 2단계

이때 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 그 부호가 서로 다르므로
 $k + (k-32) = 0, \quad 2k = 32$
 $\therefore k = 16$... 3단계

답 16

채점 요소	비율
1단계 $f'(x)$ 구하기	20 %
2단계 극댓값과 극솟값을 k 에 대한 식으로 나타내기	50 %
3단계 k 의 값 구하기	30 %

0508 $f(x) = x^3 - 3kx^2 + kx$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 6kx + k$$

함수 $f(x)$ 가 $x > 0$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차 방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

... 1단계

(i) 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-3k)^2 - 3k > 0, \quad k(3k-1) > 0$$

$$\therefore k < 0 \text{ 또는 } k > \frac{1}{3}$$

(ii) (두 근의 합) $= -\frac{-6k}{3} = 2k > 0 \quad \therefore k > 0$

(iii) (두 근의 곱) $= \frac{k}{3} > 0 \quad \therefore k > 0$

이상에서 $k > \frac{1}{3}$... 2단계

답 $k > \frac{1}{3}$

채점 요소	비율
1단계 방정식 $f'(x) = 0$ 의 해의 조건 구하기	30 %
2단계 k 의 값의 범위 구하기	70 %

0509 $g(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$ 이므로 $g(x) = t$ 로 놓으면 $t \geq -1$... 1단계

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(t) = -t^3 + 3t$$

$$f'(t) = -3t^2 + 3 = -3(t+1)(t-1)$$

$f'(t) = 0$ 에서 $t = -1$ 또는 $t = 1$... 2단계

$t \geq -1$ 에서 함수

$f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

t	-1	...	1	...
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$	-2	↗	2	↘

따라서 함수 $f(t)$ 는 $t=1$ 에서 최댓값 2를 가지므로 $(f \circ g)(x)$ 의 최댓값은 2이다. ... 3단계

답 2

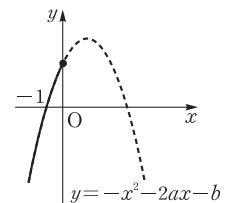
채점 요소	비율
1단계 $g(x) = t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기	30 %
2단계 $f'(t) = 0$ 을 만족시키는 t 의 값 구하기	40 %
3단계 $(f \circ g)(x)$ 의 최댓값 구하기	30 %

0510 [전략] 주어진 조건을 만족시키도록 $y = f'(x)$ 의 그래프를 그려 본다.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 - ax^2 - bx & (x < 0) \\ \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - bx & (x \geq 0) \end{cases} \text{에서}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax - b & (x < 0) \\ x^2 + 2ax - b & (x \geq 0) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, -1]$ 에서 감소하고 구간 $[-1, 0]$ 에서 증가하려면 $x \leq -1$ 에서 $f'(x) \leq 0$, $-1 \leq x < 0$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 $x \leq 0$ 에서 $y = -x^2 - 2ax - b$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



따라서 $f'(-1) = 0$ 이므로

$$-1 + 2a - b = 0$$

$$\therefore b = 2a - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f'(0) \geq 0$ 이므로

$$-b \geq 0, \quad -(2a-1) \geq 0 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore a \leq \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

한편 함수 $f(x)$ 가 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가하려면 $x \geq 0$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

$x \geq 0$ 에서

$$f'(x) = x^2 + 2ax - b = (x+a)^2 - a^2 - b \\ = (x+a)^2 - a^2 - 2a + 1 \quad (\because \textcircled{1})$$

(i) $-a \leq 0$, 즉 $a \geq 0$ 이면 오른쪽 그림과 같이 $f'(-a) \geq 0$ 이어야 하므로

$$-2a + 1 \geq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq \frac{1}{2}$$

$$(\because a \geq 0)$$

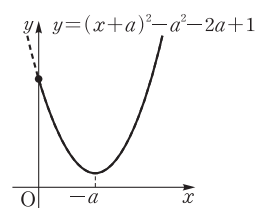
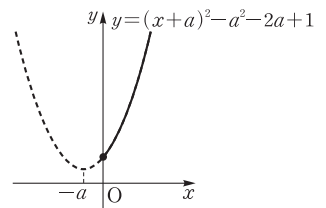
(ii) $-a > 0$, 즉 $a < 0$ 이면 오른쪽 그림과 같이 $f'(-a) \geq 0$ 이어야 하므로

$$-a^2 - 2a + 1 \geq 0$$

$$a^2 + 2a - 1 \leq 0$$

$$\therefore -1 - \sqrt{2} \leq a < 0 \quad (\because a < 0)$$

(i), (ii)에서 $-1 - \sqrt{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$... ㉔



㉔, ㉕에서 $-1-\sqrt{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$

이때 ㉔에서 $a+b=a+(2a-1)=3a-1$ 이고

$$-4-3\sqrt{2} \leq 3a-1 \leq \frac{1}{2}$$

이므로 $M=\frac{1}{2}, m=-4-3\sqrt{2}$

$$\therefore M-m=\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$$

답 ③

다른 풀이 $x \geq 0$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$, 즉 $x^2+2ax-2a+1=0$ 이 중근 또는 허근을 갖거나 양수가 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 갖는 경우

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-(-2a+1) \leq 0, \quad a^2+2a-1 \leq 0$$

$$\therefore -1-\sqrt{2} \leq a \leq -1+\sqrt{2}$$

(ii) $f'(x)=0$ 이 양수가 아닌 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-(-2a+1) > 0, \quad a^2+2a-1 > 0$$

$$\therefore a < -1-\sqrt{2} \text{ 또는 } a > -1+\sqrt{2} \quad \dots\dots \text{㉔}$$

또 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2a < 0, \quad -2a+1 \geq 0$$

$$\therefore 0 < a \leq \frac{1}{2} \quad \dots\dots \text{㉕}$$

㉔, ㉕에서 $-1+\sqrt{2} < a \leq \frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $-1-\sqrt{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$

0511 전략 x 의 값의 범위를 나누어 $f'(x)$ 의 부호를 파악한다.

$y=xf'(x)$ 의 그래프에서 $-f'(-1)=0$ 이므로

$$f'(-1)=0$$

(i) $x < -1$ 일 때, $xf'(x) < 0$ 이므로

$$f'(x) > 0$$

(ii) $-1 < x < 0$ 일 때, $xf'(x) > 0$ 이므로

$$f'(x) < 0$$

(iii) $x > 0$ 일 때, $xf'(x) > 0$ 이므로

$$f'(x) > 0$$

이상에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-1	$\dots$	0	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

ㄱ. $f(x)$ 는 $-1 < x < 0$ 에서 감소한다. (참)

ㄴ. $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값을 갖는다. (거짓)

ㄷ. $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극솟값을 갖는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

0512 전략 원기둥의 부피를 h 에 대한 함수로 나타낸다.

반구의 반지름의 길이를 R , 반구의 중

심을 O 라 하면 오른쪽 그림에서

$$r^2+h^2=R^2$$

$$\therefore r^2=R^2-h^2$$

이때 $h > 0, R^2-h^2 > 0$ 이므로

$$0 < h < R$$

따라서 원기둥의 부피를 $V(h)$ 라 하면

$$V(h)=\pi r^2 h=\pi(R^2-h^2)h=\pi(R^2 h-h^3)$$

$$\therefore V'(h)=\pi(R^2-3h^2)=-3\pi\left(h+\frac{R}{\sqrt{3}}\right)\left(h-\frac{R}{\sqrt{3}}\right)$$

$V'(h)=0$ 에서 $h=\frac{R}{\sqrt{3}}$ ($\because 0 < h < R$)

$0 < h < R$ 에서 함수 $V(h)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

h	0	$\dots$	$\frac{R}{\sqrt{3}}$	$\dots$	R
$V'(h)$		$+$	0	$-$	
$V(h)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

즉 $V(h)$ 는 $h=\frac{R}{\sqrt{3}}$ 에서 극대이면서 최대이므로 $h=\frac{R}{\sqrt{3}}$ 일 때 원기둥의 부피가 최대이다.

$h=\frac{R}{\sqrt{3}}$ 일 때, $r^2=R^2-\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{2}{3}R^2$

$$\therefore r=\sqrt{\frac{2}{3}}R$$

따라서 구하는 값은 $\frac{\frac{R}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{2}{3}}R}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

06 도함수의 활용 (3)

교과서문제 정복하기

본책 081쪽

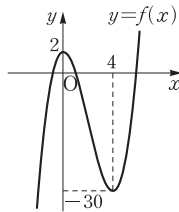
0513 $f(x)=x^3-6x^2+2$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=4$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	-30	↗



따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^3-6x^2+2=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. **답 3**

다른 풀이 함수 $f(x)$ 는 $x=0, x=4$ 에서 극값을 갖고

$$f(0)f(4)=2 \times (-30) = -60 < 0$$

이므로 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

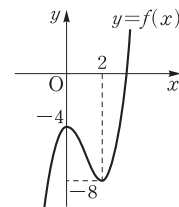
0514 $f(x)=x^3-3x^2-4$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	-4	↘	-8	↗



따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 한 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^3-3x^2-4=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이다. **답 1**

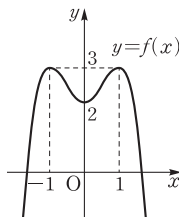
0515 $f(x)=-x^4+2x^2+2$ 라 하면

$$f'(x)=-4x^3+4x=-4x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	3	↘	2	↗	3	↘



따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$, 즉 $-x^4+2x^2+2=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. **답 2**

0516 $3x^4+6x^2=8x^3+1$ 에서 $3x^4-8x^3+6x^2-1=0$

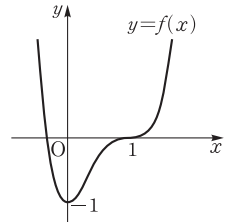
$$f(x)=3x^4-8x^3+6x^2-1 \text{이라 하면}$$

$$f'(x)=12x^3-24x^2+12x=12x(x-1)^2$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	↘	-1	↗	0	↗



따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$, 즉 $3x^4+6x^2=8x^3+1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. **답 2**

0517 $f(x)=x^3-6x^2-15x+k$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-12x-15=3(x+1)(x-5)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=5$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1, x=5$ 에서 극값을 갖는다.

(1) 방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$$f(-1)f(5) < 0 \text{이어야 하므로}$$

$$(k+8)(k-100) < 0 \quad \therefore -8 < k < 100$$

(2) 방정식 $f(x)=0$ 이 중근과 다른 한 실근을 가지려면

$$f(-1)f(5) = 0 \text{이어야 하므로}$$

$$(k+8)(k-100) = 0 \quad \therefore k = -8 \text{ 또는 } k = 100$$

(3) 방정식 $f(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$$f(-1)f(5) > 0 \text{이어야 하므로}$$

$$(k+8)(k-100) > 0 \quad \therefore k < -8 \text{ 또는 } k > 100$$

답 (1) $-8 < k < 100$ (2) $k = -8$ 또는 $k = 100$

(3) $k < -8$ 또는 $k > 100$

다른 풀이 $x^3-6x^2-15x+k=0$ 에서

$$-x^3+6x^2+15x=k$$

$$g(x)=-x^3+6x^2+15x \text{라 하면}$$

$$g'(x)=-3x^2+12x+15=-3(x+1)(x-5)$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=5$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	5	...
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	↘	-8	↗	100	↘

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

(1) 직선 $y=k$ 와 세 점에서 만나도록

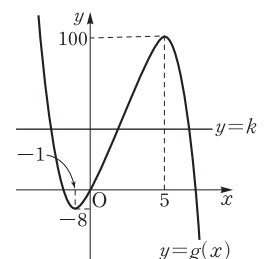
하는 k 의 값의 범위는

$$-8 < k < 100$$

(2) 직선 $y=k$ 와 두 점에서 만나도록

하는 k 의 값은

$$k = -8 \text{ 또는 } k = 100$$



- (3) 직선 $y=k$ 와 한 점에서 만나도록 하는 k 의 값의 범위는
 $k < -8$ 또는 $k > 100$

0518 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	18	$\searrow$	2	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\boxed{(가) 2}$ 에서 극소이면서 최소이므로
 $f(x)$ 의 최솟값은 $\boxed{(나) 2}$ 이다.

즉 $f(x) \geq \boxed{(다) 2}$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$3x^4 - 8x^3 + 18 > 0$$

이 성립한다.

답 (가) 2 (나) 2 (다) $\geq$

0519 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$ 이라 하면

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=1$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$

즉 $x > 0$ 일 때 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값 2를 가지므로

$$f(x) \geq 2$$

따라서 $x > 0$ 일 때, 부등식 $f(x) > 0$, 즉 $2x^3 - 3x^2 + 3 > 0$ 이 성립한다.

답 풀이 참조

0520 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + k$ 라 하면

$$f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	k	$\nearrow$	$k + \frac{1}{4}$	$\searrow$	k	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 과 $x=2$ 에서 최솟값 k 를 가지므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$k \geq 0$$

답 $k \geq 0$

0521 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 8t, a = \frac{dv}{dt} = 6t - 8$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 속도는

$$12 - 16 = -4$$

가속도는 $12 - 8 = 4$

답 속도: -4, 가속도: 4

0522 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -3t^2 + 6t - 2, a = \frac{dv}{dt} = -6t + 6$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 속도는

$$-12 + 12 - 2 = -2$$

가속도는 $-12 + 6 = -6$

답 속도: -2, 가속도: -6

0523 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 4t^3 - 4, a = \frac{dv}{dt} = 12t^2$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 속도는

$$32 - 4 = 28$$

가속도는 48

답 속도: 28, 가속도: 48

0524 $\frac{dl}{dt} = 2t + 4$ 이므로 $t=3$ 에서의 물체의 길이의 변화율은

$$6 + 4 = 10$$

답 10

0525 (1) 구의 겉넓이를 S 라 하면

$$S = 4\pi \times (0.2t)^2 = 0.16\pi t^2$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = 0.32\pi t$$

따라서 $t=10$ 에서의 구의 겉넓이의 변화율은

$$0.32\pi \times 10 = 3.2\pi$$

(2) 구의 부피를 V 라 하면

$$V = \frac{4}{3}\pi \times (0.2t)^3 = \frac{0.032}{3}\pi t^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = 0.032\pi t^2$$

따라서 $t=10$ 에서의 구의 부피의 변화율은

$$0.032\pi \times 10^2 = 3.2\pi$$

답 (1) 3.2π (2) 3.2π

유형 익히기

• 본책 082~089쪽

0526 $x^3 - 3x^2 + 2 - k = 0$ 에서

$$x^3 - 3x^2 + 2 = k$$

따라서 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$y = x^3 - 3x^2 + 2$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 세 점에서 만나야 한다.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ 라 하면

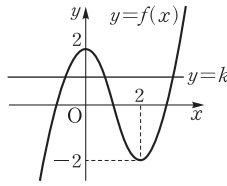
$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$ 와 세 점에서 만나도록 하는 k 의 값의 범위는 $-2 < k < 2$ 즉 정수 k 는 $-1, 0, 1$ 의 3개이다.

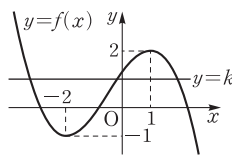


답 3

0527 $y=f'(x)$ 의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	-1	↗	2	↘

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이때 방정식 $f(x)-k=0$, 즉 $f(x)=k$ 가 서로 다른 세 실근을 가지려면 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 세 점에서 만나야 하므로 $-1 < k < 2$



답 $-1 < k < 2$

0528 $\frac{3}{4}x^4 - x^3 - 3x^2 + k = 0$ 에서 $-\frac{3}{4}x^4 + x^3 + 3x^2 = k$

따라서 주어진 방정식이 서로 다른 네 개의 실근을 가지려면 $y = -\frac{3}{4}x^4 + x^3 + 3x^2$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 네 점에서 만나야 한다.

$f(x) = -\frac{3}{4}x^4 + x^3 + 3x^2$ 이라 하면
 $f'(x) = -3x^3 + 3x^2 + 6x$
 $= -3x(x+1)(x-2)$

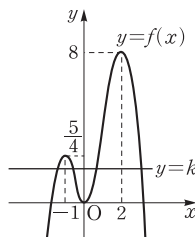
$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	$\frac{5}{4}$	↘	0	↗	8	↘

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$ 와 네 점에서 만나도록 하는 k 의 값의 범위는 $0 < k < \frac{5}{4}$

즉 $\alpha=0$, $\beta=\frac{5}{4}$ 이므로 $\beta-\alpha=\frac{5}{4}$



답 $\frac{5}{4}$

0529 $x^4 + 4x^3 + 28 = 8x^2 + k$ 에서

$$x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 28 = k$$

따라서 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$y = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 28$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 세 점에서 만나야 한다.

$f(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 28$ 이라 하면

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 16x$$

$$= 4x(x+4)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서

$$x=-4 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-4	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-100	↗	28	↘	25	↗

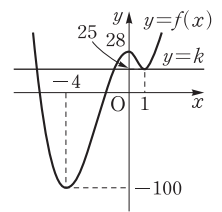
함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$ 와 세 점에서 만나려면

$$k=25 \text{ 또는 } k=28$$

따라서 구하는 함은

$$25+28=53$$

답 53



0530 $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - a = 0$ 에서 $x^3 - \frac{3}{2}x^2 = a$

$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$ 이라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 3x = 3x(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=1$

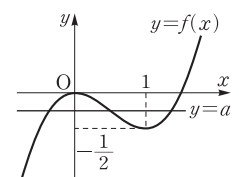
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 직선 $y=a$ 와 교점의 x 좌표가 한 개는 음수, 두 개는 양수이어야 하므로

$$-\frac{1}{2} < a < 0$$

답 $-\frac{1}{2} < a < 0$



0531 $2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 - k = 0$ 에서

$$2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = k$$

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ 이라 하면

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$= 6(x+1)(x-2)$$

$f'(x)=0$ 에서

$$x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

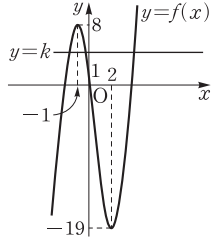
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	8	↘	-19	↗

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 직선 $y=k$ 와 교점의 x 좌표가 한 개는 양수, 두 개는 음수이어야 하므로

$$1 < k < 8$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 7, 최솟값은 2
이므로 구하는 합은 $7+2=9$



답 9

0532 $x^3-5x^2+7x=x^2-2x+a$ 에서
 $x^3-6x^2+9x=a$

$f(x)=x^3-6x^2+9x$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

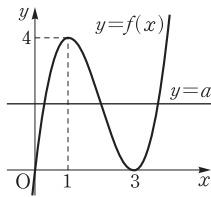
x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 직선 $y=a$ 와 교점의 x 좌표가 3개 모두 양수이어야 하므로

$$0 < a < 4$$

따라서 정수 a 는 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$$1+2+3=6$$



답 ⑤

0533 $x^4-4x^3-2x^2+12x-k=0$ 에서

$$x^4-4x^3-2x^2+12x=k$$

$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x$ 라 하면

$$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12=4(x+1)(x-1)(x-3)$$

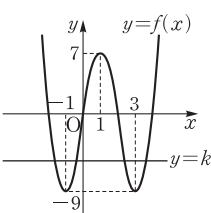
$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

x	...	-1	...	1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-9	↗	7	↘	-9	↗

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 직선 $y=k$ 와 교점의 x 좌표가 두 개는 양수, 두 개는 음수이어야 하므로

$$-9 < k < 0$$

따라서 정수 k 는 $-8, -7, \dots, -1$ 의 8개이다.



답 8

0534 $f(x)=x^3-3x^2+1-k$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0, x=2$ 에서 극값을 갖는다.

이때 방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$$f(0)f(2) < 0, \quad (1-k)(-3-k) < 0$$

$$(k-1)(k+3) < 0 \quad \therefore -3 < k < 1$$

따라서 정수 k 는 $-2, -1, 0$ 의 3개이다.

답 3

0535 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+a$ 라 하면

$$f'(x)=x^2-2x=x(x-2)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0, x=2$ 에서 극값을 갖는다.

이때 방정식 $f(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$$f(0)f(2) > 0, \quad a\left(a-\frac{4}{3}\right) > 0$$

$$\therefore a < 0 \text{ 또는 } a > \frac{4}{3}$$

답 $a < 0$ 또는 $a > \frac{4}{3}$

0536 $f(x)=2x^3-6x^2-18x+k$ 라 하면

$$f'(x)=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1, x=3$ 에서 극값을 갖는다.

이때 방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$$f(-1)f(3) = 0, \quad (10+k)(-54+k) = 0$$

$$\therefore k = -10 \text{ 또는 } k = 54$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-10+54=44$$

답 44

0537 $x^3-2=12x+k$ 에서 $x^3-12x-2-k=0$

$f(x)=x^3-12x-2-k$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2, x=2$ 에서 극값을 갖는다.

이때 방정식 $f(x)=0$ 이 한 개의 실근을 가지려면

$$f(-2)f(2) > 0, \quad (14-k)(-18-k) > 0$$

$$(k-14)(k+18) > 0 \quad \therefore k < -18 \text{ 또는 } k > 14$$

따라서 $\alpha = -18, \beta = 14$ 이므로

$$\beta - \alpha = 32$$

답 ⑤

0538 주어진 곡선과 직선이 세 점에서 만나려면 방정식

$$x^3-11x=x+k, \text{ 즉 } x^3-12x-k=0$$

이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-12x-k$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$, $x=2$ 에서 극값을 가지므로 방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$$f(-2)f(2)<0, \quad (16-k)(-16-k)<0$$

$$(k-16)(k+16)<0$$

$$\therefore -16<k<16 \quad \text{답 } -16<k<16$$

다른 풀이 주어진 곡선과 직선이 세 점에서 만나려면 방정식 $x^3-11x=x+k$, 즉 $x^3-12x=k$ 가 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 $y=x^3-12x$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 세 점에서 만나야 한다.

$g(x)=x^3-12x$ 라 하면

$$g'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$$

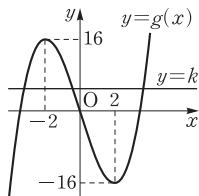
$$g'(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	2	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	16	↘	-16	↗

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$ 와 세 점에서 만나도록 하는 k 의 값의 범위는

$$-16<k<16$$



0539 주어진 두 곡선이 두 점에서 만나려면 방정식

$$x^3-5x^2+3x+k=-2x^2+3x, \text{ 즉 } x^3-3x^2+k=0$$

이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2+k$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$, $x=2$ 에서 극값을 가지므로 방정식

$f(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$$f(0)f(2)=0, \quad k(k-4)=0$$

$$\therefore k=4 \quad (\because k>0)$$

답 4

0540 주어진 두 곡선이 한 점에서 만나려면 방정식

$$x^3+2x^2-5x+k=-x^2+4x+2,$$

$$\text{즉 } x^3+3x^2-9x+k-2=0$$

이 한 실근과 두 허근을 가져야 한다.

... 1단계

$f(x)=x^3+3x^2-9x+k-2$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

... 2단계

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-3$, $x=1$ 에서 극값을 가지므로 방정식 $f(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 가지려면

$$f(-3)f(1)>0, \quad (k+25)(k-7)>0$$

$$\therefore k<-25 \text{ 또는 } k>7$$

... 3단계

따라서 자연수 k 의 최솟값은 8이다.

... 4단계

답 8

채점 요소	비율
1단계 방정식이 한 실근과 두 허근을 가져야 함을 알기	20 %
2단계 $f'(x)=0$ 인 x 의 값 구하기	30 %
3단계 k 의 값의 범위 구하기	40 %
4단계 자연수 k 의 최솟값 구하기	10 %

0541 주어진 두 곡선이 한 점에서 만나고 다른 한 점에서 접하려면 방정식

$$-2x^3-x^2+6x+3=2x^2-6x+k,$$

$$\text{즉 } 2x^3+3x^2-12x+k-3=0$$

이 중근과 다른 한 실근을 가져야 한다.

$f(x)=2x^3+3x^2-12x+k-3$ 이라 하면

$$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$, $x=1$ 에서 극값을 가지므로 방정식 $f(x)=0$ 이 중근과 다른 한 실근을 가지려면

$$f(-2)f(1)=0$$

$$(k+17)(k-10)=0$$

$$\therefore k=-17 \text{ 또는 } k=10$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-17+10=-7$$

답 -7

0542 $f(x)=x^4-4a^3x+48$ 이라 하면

$$f'(x)=4x^3-4a^3$$

$$=4(x-a)(x^2+ax+a^2)$$

이때 $x^2+ax+a^2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2\geq 0$ 이므로 $f'(x)=0$ 에서

$$x=a$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소

를 표로 나타내면 오른쪽

과 같다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=a$

에서 최솟값 $-3a^4+48$ 을 가지므로 모든 실수 x 에 대하여

$f(x)>0$ 이 성립하려면

$$-3a^4+48>0, \quad a^4-16<0$$

$$\therefore (a+2)(a-2)(a^2+4)<0$$

이때 $a^2+4>0$ 이므로 $(a+2)(a-2)<0$

$$\therefore -2<a<2$$

답 ③

0543 $x^4-4x+a^2>2ax(2-x)$ 에서

$$x^4+2ax^2-4(a+1)x+a^2>0$$

$f(x)=x^4+2ax^2-4(a+1)x+a^2$ 이라 하면

$$f'(x)=4x^3+4ax-4(a+1)$$

$$=4(x-1)(x^2+x+a+1)$$

이때 $x^2+x+a+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+a+\frac{3}{4}>0$ ($\because a>0$)이므로

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

x	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	a^2-2a-3	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=1$ 에서 최솟값 a^2-2a-3 을 가지므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)>0$ 이 성립하려면

$$a^2-2a-3>0, \quad (a+1)(a-3)>0$$

$$\therefore a>3 \quad (\because a>0)$$

따라서 양의 정수 a 의 최솟값은 4이다.

답 ④

0544 $y=f(x)$ 의 그래프가 $y=g(x)$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$f(x)>g(x), \quad \text{즉 } f(x)-g(x)>0$$

이 성립해야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면

$$h(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{5}{2}x^2-3x+k$$

$$\therefore h'(x)=x^3-3x^2+5x-3=(x-1)(x^2-2x+3)$$

$h'(x)=0$ 에서 $x=1$ ($\because x^2-2x+3>0$)

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

x	...	1	...
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$	$k-\frac{5}{4}$	$\nearrow$

따라서 함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값 $k-\frac{5}{4}$ 를 가지므로

모든 실수 x 에 대하여 $h(x)>0$ 이 성립하려면

$$k-\frac{5}{4}>0 \quad \therefore k>\frac{5}{4}$$

답 $k>\frac{5}{4}$

0545 $3x^4+4a^3\geq 4x^3+3a^4$ 에서

$$3x^4-4x^3-3a^4+4a^3\geq 0$$

$f(x)=3x^4-4x^3-3a^4+4a^3$ 이라 하면

$$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-3a^4+4a^3$	$\searrow$	$-3a^4+4a^3-1$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값 $-3a^4+4a^3-1$ 을 가지므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)\geq 0$ 이 성립하려면

$$-3a^4+4a^3-1\geq 0, \quad 3a^4-4a^3+1\leq 0$$

$$(a-1)^2(3a^2+2a+1)\leq 0$$

$$\therefore a=1 \quad (\because 3a^2+2a+1>0)$$

답 1

0546 $x^3+k>3x^2$ 에서 $x^3-3x^2+k>0$

$f(x)=x^3-3x^2+k$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$x>2$ 일 때 $f'(x)>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(2, \infty)$ 에서 증가한다.

따라서 $x>2$ 에서 부등식 $f(x)>0$ 이 성립하려면 $f(2)\geq 0$ 이어야 하므로

$$8-12+k\geq 0 \quad \therefore k\geq 4$$

즉 정수 k 의 최솟값은 4이다.

답 ②

0547 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+k$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$$

$0<x<2$ 일 때 $f'(x)<0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(0, 2)$ 에서 감소한다.

따라서 $0<x<2$ 에서 부등식 $f(x)>0$ 이 성립하려면 $f(2)\geq 0$ 이어야 하므로

$$8-6-12+k\geq 0 \quad \therefore k\geq 10$$

답 $k\geq 10$

0548 $f(x)\geq g(x)$ 에서 $f(x)-g(x)\geq 0$

$h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면

$$h(x)=4x^3-3x^2-6x+k$$

$$\therefore h'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1) \quad \dots \text{1단계}$$

$x\geq 1$ 일 때 $h'(x)\geq 0$ 이므로 함수 $h(x)$ 는 구간 $[1, \infty)$ 에서 증가한다.

따라서 $x\geq 1$ 에서 부등식 $h(x)\geq 0$ 이 성립하려면 $h(1)\geq 0$ 이어야 하므로

$$4-3-6+k\geq 0 \quad \therefore k\geq 5$$

... 2단계

즉 실수 k 의 최솟값은 5이다.

... 3단계

답 5

	채점 요소	비율
1단계	$h(x)=f(x)-g(x)$ 로 놓고 $h'(x)$ 구하기	30 %
2단계	k 의 값의 범위 구하기	60 %
3단계	k 의 최솟값 구하기	10 %

0549 $x^3-x^2-2x+1\geq -x^2+x-k$ 에서

$$x^3-3x+1+k\geq 0$$

$f(x)=x^3-3x+1+k$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$0\leq x\leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$k+1$	$\searrow$	$k-1$	$\nearrow$	$k+3$

따라서 $0\leq x\leq 2$ 일 때 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값 $k-1$ 을 가지므로 구간 $[0, 2]$ 에서 부등식 $f(x)\geq 0$ 이 성립하려면

$$k-1\geq 0 \quad \therefore k\geq 1$$

즉 실수 k 의 최솟값은 1이다.

답 1

0550 $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2 > 6x + k$ 에서

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 - k > 0$$

$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 - k$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x+1)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 2$

$1 < x < 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	2	...	3
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		\	$-8-k$	/	

따라서 $1 < x < 3$ 일 때 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최솟값 $-8-k$ 를 가지므로 부등식 $f(x) > 0$ 이 성립하려면

$$-8-k > 0 \quad \therefore k < -8$$

즉 정수 k 의 최댓값은 -9 이다.

답 ②

0551 $x > -1$ 일 때 $y=f(x)$ 의 그래프가 $y=g(x)$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 부등식 $f(x) > g(x)$, 즉 $f(x) - g(x) > 0$ 이 성립해야 한다.

$h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면

$$h(x) = 2x^3 + 3x^2 + k - 5$$

$$\therefore h'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$$

$h'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 0$

$x > -1$ 에서 함수

$h(x)$ 의 증가와 감소를

표로 나타내면 오른쪽

과 같다.

x	-1	...	0	...
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$		\	$k-5$	/

따라서 $x > -1$ 일 때 함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 최솟값 $k-5$ 를 가지므로 부등식 $h(x) > 0$ 이 성립하려면

$$k-5 > 0 \quad \therefore k > 5$$

답 k > 5

0552 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 10t + 6$$

점 P가 원점을 지나는 순간의 시각은 $x=0$ 에서

$$t^3 - 5t^2 + 6t = 0, \quad t(t-2)(t-3) = 0$$

$$\therefore t=2 \text{ 또는 } t=3 \quad (\because t > 0)$$

따라서 점 P는 $t=3$ 에서 마지막으로 원점을 지나므로 이때의 점 P의 속도는

$$27 - 30 + 6 = 3$$

답 3

0553 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t - 14$$

점 P의 속도가 10일 때의 시각은 $v=10$ 에서

$$3t^2 - 6t - 14 = 10$$

$$t^2 - 2t - 8 = 0, \quad (t+2)(t-4) = 0$$

$$\therefore t=4 \quad (\because t > 0)$$

따라서 $t=4$ 에서의 점 P의 위치는

$$64 - 48 - 56 = -40$$

답 ②

0554 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 6t + k, \quad a = \frac{dv}{dt} = 6t + 6$$

점 P의 가속도가 18일 때의 시각은 $a=18$ 에서

$$6t + 6 = 18 \quad \therefore t = 2$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 위치가 22이므로

$$8 + 12 + 2k = 22$$

$$2k = 2 \quad \therefore k = 1$$

답 ①

0555 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -t^2 + 6t + 16 = -(t-3)^2 + 25$$

$0 \leq t \leq 5$ 에서 v 는

$$t=3 \text{에서 최댓값 } 25, \quad t=0 \text{에서 최솟값 } 16$$

을 가지므로

$$16 \leq v \leq 25 \quad \therefore 16 \leq |v| \leq 25$$

따라서 $0 \leq t \leq 5$ 에서 점 P의 속력 $|v|$ 는 $t=3$ 일 때 최댓값 25를 가지므로

$$M = 25, \quad a = 3 \quad \therefore M - a = 22$$

답 22

0556 시각 t 에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_P(t)$, $v_Q(t)$ 라 하면

$$v_P(t) = x_P'(t) = t^2 + 4, \quad v_Q(t) = x_Q'(t) = 4t$$

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간의 시각은 $v_P(t) = v_Q(t)$ 에서

$$t^2 + 4 = 4t, \quad t^2 - 4t + 4 = 0$$

$$(t-2)^2 = 0 \quad \therefore t = 2$$

이때 시각 t 에서의 점 P의 가속도를 $a_P(t)$ 라 하면

$$a_P(t) = 2t$$

이므로 $t=2$ 에서의 점 P의 가속도는

$$2 \times 2 = 4$$

답 4

0557 시각 t 에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_P(t)$, $v_Q(t)$ 라 하면

$$v_P(t) = x_P'(t) = 2t^2 + 4t,$$

$$v_Q(t) = x_Q'(t) = 8t + 30$$

... 1단계

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간의 시각은 $v_P(t) = v_Q(t)$ 에서

$$2t^2 + 4t = 8t + 30, \quad t^2 - 2t - 15 = 0$$

$$(t+3)(t-5) = 0 \quad \therefore t = 5 \quad (\because t > 0)$$

... 2단계

$t=5$ 에서의 두 점 P, Q의 위치는 각각

$$x_P(5)=133, x_Q(5)=250$$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$250-133=117$$

... 3단계

답 117

채점 요소		비율
1단계	두 점 P, Q의 속도 구하기	40 %
2단계	속도가 같아지는 순간의 시각 구하기	30 %
3단계	두 점 P, Q 사이의 거리 구하기	30 %

0558 시각 t 에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_P(t)$, $v_Q(t)$ 라 하면

$$v_P(t)=x_P'(t)=6t^2+2t, v_Q(t)=x_Q'(t)=3t^2+2$$

두 점 P, Q가 다시 만나는 순간의 시각은 $x_P(t)=x_Q(t)$ 에서

$$2t^3+t^2=t^3+2t, \quad t^3+t^2-2t=0$$

$$t(t+2)(t-1)=0$$

$$\therefore t=1 (\because t>0)$$

$t=1$ 에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각

$$v_P(1)=8, v_Q(1)=5$$

따라서 $\alpha=8$, $\beta=5$ 이므로

$$\alpha\beta=40$$

답 40

0559 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=-3t^2+10t-3, a=\frac{dv}{dt}=-6t+10$$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$-3t^2+10t-3=0$$

$$(3t-1)(t-3)=0 \quad \therefore t=\frac{1}{3} \text{ 또는 } t=3$$

따라서 점 P는 $t=3$ 에서 두 번째로 운동 방향을 바꾸므로 이때의 점 P의 가속도는

$$-18+10=-8$$

답 -8

0560 시각 t 에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_P(t)$, $v_Q(t)$ 라 하면

$$v_P(t)=x_P'(t)=8t-3, v_Q(t)=x_Q'(t)=4t-8$$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 속도의 부호가 서로 반대이므로 $v_P(t)v_Q(t)<0$ 에서

$$(8t-3)(4t-8)<0, \quad (8t-3)(t-2)<0$$

$$\therefore \frac{3}{8}<t<2 \quad \text{답 } \frac{3}{8}<t<2$$

0561 자동차가 제동을 건 지 t 초 후의 속도를 v 라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=18-0.9t \text{ (m/s)}$$

자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$18-0.9t=0 \quad \therefore t=20$$

따라서 20초 동안 자동차가 움직인 거리는

$$360-180=180 \text{ (m)}$$

답 180 m

0562 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-18t+24$$

... 1단계

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$3t^2-18t+24=0, \quad (t-2)(t-4)=0$$

$$\therefore t=2 \text{ 또는 } t=4$$

즉 점 P는 $t=2$, $t=4$ 에서 운동 방향을 바꾼다.

... 2단계

$$t=2\text{에서의 점 P의 위치는 } 8-36+48=20$$

$$t=4\text{에서의 점 P의 위치는 } 64-144+96=16$$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는

$$20-16=4$$

... 3단계

답 4

채점 요소		비율
1단계	점 P의 속도 구하기	40 %
2단계	운동 방향을 바꾸는 순간의 시각 구하기	30 %
3단계	두 지점 A, B 사이의 거리 구하기	30 %

0563 ① $v(1)=2$, $v(3)=-2$ 이므로 $t=1$ 일 때와 $t=3$ 일 때 점 P는 움직이고 있다.

② $2<t<4$ 에서 $v(t)<0$ 이므로 점 P는 음의 방향으로 움직인다.

③ $t=5$ 의 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 $t=5$ 에서 점 P는 운동 방향을 바꾸지 않는다.

④ $3<t<4$ 에서 $|v(t)|$ 의 값이 감소하므로 점 P의 속력은 감소한다.

⑤ $v(2)=v(4)=0$ 이고 $t=2$, $t=4$ 의 좌우에서 각각 $v(t)$ 의 부호가 바뀌므로 점 P는 $t=2$, $t=4$ 에서 운동 방향을 바꾼다.

따라서 $0<t<6$ 에서 점 P는 운동 방향을 2번 바꾼다.

답 ②

0564 점 P의 시각 t 에서의 가속도를 $a(t)$ 라 하면

$a(t)=v'(t)$ 이므로 점 P의 시각 t 에서의 가속도는 시각 t 에서의 $y=v(t)$ 의 그래프의 접선의 기울기와 같다.

이때

$$a(t_1)<0, a(t_2)=0, a(t_3)>0, a(t_4)=0, a(t_5)<0$$

이므로 $t=t_3$ 에서의 가속도가 가장 크다.

답 ③

0565 t 초 후의 물체의 속도를 v 라 하면

$$v=\frac{dh}{dt}=20-10t \text{ (m/s)}$$

최고 지점에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$20-10t=0 \quad \therefore t=2$$

따라서 이 물체가 최고 지점에 도달했을 때 지면으로부터의 높이는

$$40+40-20=60 \text{ (m)}$$

답 ②

0566 t 초 후의 물체의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dh}{dt} = a - 10t \text{ (m/s)}$$

최고 지점에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$a - 10t = 0 \quad \therefore t = \frac{a}{10}$$

즉 $t = \frac{a}{10}$ 일 때 물체의 높이가 최대이므로

$$a \times \frac{a}{10} - 5 \times \left(\frac{a}{10}\right)^2 \geq 45, \quad a^2 - 900 \geq 0$$

$$(a+30)(a-30) \geq 0 \quad \therefore a \geq 30 \quad (\because a > 0)$$

따라서 a 의 최솟값은 30이다.

답 30

참고 물체가 지면으로부터의 높이가 45 m인 지점까지 도달하려면 (물체가 최고 지점에 도달했을 때의 높이) ≥ 45

0567 돌을 던진 지 t 초 후의 돌의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dh}{dt} = 40 - 10t \text{ (m/s)}$$

ㄱ. 돌을 던진 지 2초 후의 돌의 속도는

$$40 - 20 = 20 \text{ (m/s)} \quad (\text{참})$$

ㄴ. 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$40 - 10t = 0 \quad \therefore t = 4 \quad (\text{참})$$

ㄷ. 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로 $h=0$ 에서

$$45 + 40t - 5t^2 = 0, \quad t^2 - 8t - 9 = 0$$

$$(t+1)(t-9) = 0 \quad \therefore t = 9 \quad (\because t > 0)$$

따라서 돌을 던진 지 9초 후의 돌의 속도는

$$40 - 90 = -50 \text{ (m/s)} \quad (\text{참})$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0568 t 초 후의 정사각형의 한 변의 길이는 $(8+2t)$ cm이므로 정사각형의 한 대각선의 길이를 l cm라 하면

$$l = \sqrt{2}(8+2t) = 2\sqrt{2}t + 8\sqrt{2}$$

따라서 정사각형의 한 대각선의 길이의 변화율은

$$\frac{dl}{dt} = 2\sqrt{2} \text{ (cm/s)}$$

답 $2\sqrt{2}$ cm/s

0569 t 초 후의 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(t, 0)$, $(0, 2t)$ 이므로 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{t} + \frac{y}{2t} = 1$$

... 1단계

이 직선과 직선 $y=2x$ 의 교점 R의 x 좌표는 $\frac{x}{t} + \frac{2x}{2t} = 1$ 에서

$$x = \frac{t}{2} \quad \therefore R\left(\frac{t}{2}, t\right)$$

... 2단계

선분 OR의 길이를 l 이라 하면

$$l = \sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2 + t^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}t \quad (\because t > 0)$$

따라서 선분 OR의 길이의 변화율은

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

... 3단계

답 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

채점 요소	비율
1단계 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식 구하기	30 %
2단계 점 R의 좌표 구하기	20 %
3단계 선분 OR의 길이의 변화율 구하기	50 %

0570 경민이가 t 분 동안 움직인 거리는 90t m

t 분 후의 경민이의 그림자의 길이를

l m라 하면 오른쪽 그림에서

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (AA 닮음)이

므로

$$1.5 : 3 = l : (l + 90t)$$

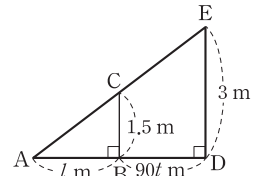
$$3l = 1.5(l + 90t)$$

$$\therefore l = 90t$$

따라서 그림자의 길이의 변화율은

$$\frac{dl}{dt} = 90 \text{ (m/min)}$$

답 90 m/min



0571 t 초 후의 가장 바깥쪽 파문의 반지름의 길이는 $5t$ cm이므로 파문의 넓이를 S cm²라 하면

$$S = \pi \times (5t)^2 = 25\pi t^2$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = 50\pi t \text{ (cm}^2/\text{s)}$$

따라서 2초 후의 파문의 넓이의 변화율은

$$50\pi \times 2 = 100\pi \text{ (cm}^2/\text{s)}$$

$$\therefore a = 100$$

답 ⑤

0572 t 초 후의 정육각형의 한 변의 길이는 $4+2t$ 이므로 정육각형의 넓이를 S 라 하면

$$S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} (4+2t)^2 = 6\sqrt{3}(t+2)^2$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = 6\sqrt{3} \times 2(t+2) = 12\sqrt{3}(t+2)$$

이때 정육각형의 넓이가 $54\sqrt{3}$ 이 되는 순간의 시각은

$$6\sqrt{3}(t+2)^2 = 54\sqrt{3} \text{에서}$$

$$(t+2)^2 = 9$$

$$\therefore t = 1 \quad (\because t > 0)$$

따라서 1초 후의 정육각형의 넓이의 변화율은

$$12\sqrt{3} \times 3 = 36\sqrt{3}$$

답 $36\sqrt{3}$

0573 점 P가 출발한 지 t 초 후의 두 점 P, Q의 좌표는

$$P(3t, 0), Q(0, 4(t-2)) \quad (t > 2)$$

이때 삼각형 OPQ의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 3t \times 4(t-2) = 6t^2 - 12t$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = 12t - 12$$

따라서 5초 후의 삼각형 OPQ의 넓이의 변화율은

$$60 - 12 = 48$$

답 48

0574 t 초 후의 고무 풍선의 반지름의 길이는

$$(4+t) \text{ cm}$$

t 초 후의 고무 풍선의 부피를 $V \text{ cm}^3$ 라 하면

$$V = \frac{4}{3} \pi (4+t)^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3} \pi \times 3(4+t)^2$$

$$= 4\pi(t+4)^2 (\text{cm}^3/\text{s})$$

따라서 6초 후의 고무 풍선의 부피의 변화율은

$$4\pi \times 10^2 = 400\pi (\text{cm}^3/\text{s})$$

답 $400\pi \text{ cm}^3/\text{s}$

0575 t 초 후의 수면의 높이는 t

이때 오른쪽 그림과 같이 t 초 후의 수면의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$6:18=r:t$$

$$\therefore r = \frac{1}{3}t$$

t 초 후의 물의 부피를 V 라 하면

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 t = \frac{1}{3} \pi \times \left(\frac{1}{3}t\right)^2 \times t$$

$$= \frac{1}{27} \pi t^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{1}{9} \pi t^2$$

수면의 높이가 5가 되는 순간의 시각은 $t=5$ 이므로 구하는 물의 부피의 변화율은

$$\frac{1}{9} \pi \times 25 = \frac{25}{9} \pi$$

답 $\frac{25}{9} \pi$

0576 비가 내리기 전 측정기의 각 모서리의 길이는

$$50 - 5 \times 9 = 5 (\text{mm})$$

따라서 낮 12시부터 t 시간이 지난 후의 측정기의 각 모서리의 길이는 $(5+5t) \text{ mm}$ 이므로 측정기의 부피를 $V \text{ mm}^3$ 라 하면

$$V = (5+5t)^3 = 125(1+t)^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = 125 \times 3(1+t)^2$$

$$= 375(1+t)^2 (\text{mm}^3/\text{h})$$

이때 측정기의 부피의 변화율이 $13500 \text{ mm}^3/\text{h}$ 가 되는 순간의 시각은 $375(1+t)^2 = 13500$ 에서

$$(1+t)^2 = 36$$

$$\therefore t = 5 (\because t > 0)$$

따라서 낮 12시부터 5시간이 지난 후인 오후 5시이다.

답 ②

0577 $\neg$. $|x'(a)| = 0$ 이고 $0 < t < a$ 또는 $a < t < b$ 일 때

$|x'(t)| > 0$ 이므로 $t=a$ 에서 점 P의 속력은 최대가 아니다.

(거짓)

$\therefore$ $t=a$, $t=c$, $t=e$ 에서 점 P의 운동 방향이 바뀌므로 3번 바뀐다. (참)

$\therefore$ $x'(c) = 0$ 이므로 $t=c$ 에서 점 P의 속도는 0이다. (참)

$\therefore$ $0 \leq t \leq f$ 일 때 $|x(t)|$ 는 $t=a$ 에서 최대이므로 $t=a$ 일 때 점

P가 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

0578 $\neg$. $x_P'(a) = 0$, $x_Q'(a) > 0$ 이므로 $t=a$ 에서 점 Q의 속도가 더 크다. (거짓)

$\therefore$ $x_P(b) = x_Q(b)$ 이므로 두 점 P, Q는 $t=b$ 에서 만난다. (참)

$\therefore$ $x_P'(c) > 0$, $x_Q'(c) < 0$ 이므로 $t=c$ 에서 두 점 P, Q는 서로 반대 방향으로 움직인다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 090~093쪽

0579 $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - a = 0$ 에서

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x = a$$

따라서 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면

$y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 네 점에서 만나야 한다.

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$$

$$= 4(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	7	$\searrow$	-9	$\nearrow$

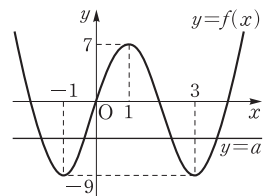
따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오

른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=a$ 와

네 점에서 만나도록 하는 a 의 값의

범위는

$$-9 < a < 7$$



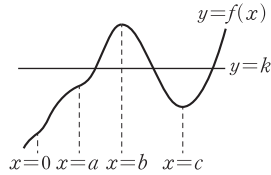
답 $-9 < a < 7$

0580 $y=f'(x)$ 의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	a	...	b	...	c	...
$f'(x)$	+	0	+	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 방정식 $f(x)=k$ 의 서로 다른 실근의 개수는 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수와 같으므로 방정식 $f(x)=k$ 의 서로 다른 실근의 최대 개수는 3이다.

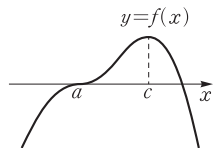


답 ③

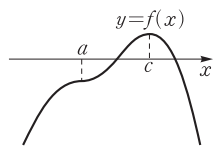
0581 $y=f'(x)$ 의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	a	...	c	...
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	↗		↗	극대	↘

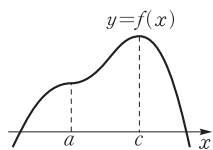
ㄱ. $f(a)=0$ 이면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)



ㄴ. $f(a)f(c)<0$ 이면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)



ㄷ. $f(a)>0, f(c)>0$ 이면 $f(a)f(c)>0$ 이지만 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (거짓)



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

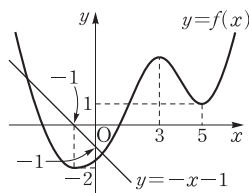
답 ㄱ, ㄴ

0582 $y=f'(x)$ 의 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...	5	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-2	↗	극대	↘	1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 방정식 $f(x)+x+1=0$, 즉 $f(x)=-x-1$ 의 실근은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선



$y=-x-1$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로 방정식

$f(x)+x+1=0$ 은 1개의 양의 실근과 1개의 음의 실근을 갖는다.

답 ③

0583 주어진 방정식의 세 실근 α, β, γ 에 대하여 $\alpha<0<\beta<\gamma$ 이려면 방정식이 한 개의 음의 실근과 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가져야 한다.

이때 $2x^3+3x^2-12x+a=0$ 에서

$$-2x^3-3x^2+12x=a$$

$f(x)=-2x^3-3x^2+12x$ 라 하면

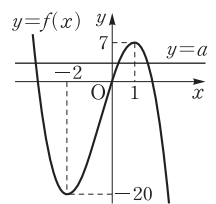
$$f'(x)=-6x^2-6x+12=-6(x+2)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	-20	↗	7	↘

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 직선 $y=a$ 와 교점의 x 좌표가 한 개는 음수, 두 개는 양수이어야 하므로



$$0 < a < 7$$

따라서 정수 a 는 1, 2, 3, ..., 6이므로 구하는 합은

$$1+2+3+\dots+6=21$$

답 ④

0584 $f(x)=2x^3-3ax^2+a$ 라 하면

$$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=a$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0, x=a$ 에서 극값을 가지므로 방정식

$f(x)=0$ 이 중근과 다른 한 실근을 가지려면

$$f(0)f(a)=0, \quad a(-a^3+a)=0$$

$$a^2(a+1)(a-1)=0$$

$$\therefore a=1 (\because a>0)$$

답 ①

0585 주어진 두 곡선이 만나는 점의 개수가 2가 되려면 방정식

$$2x^2-1=x^3-x^2+k, \quad \text{즉 } x^3-3x^2+k+1=0$$

이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2+k+1$ 이라 하면

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0, x=2$ 에서 극값을 가지므로 방정식

$f(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$$f(0)f(2)=0, \quad (k+1)(k-3)=0$$

$$\therefore k=3 (\because k>0)$$

답 ③

0586 $x^4-8x+a \geq 4x^3-6x^2$ 에서

$$x^4-4x^3+6x^2-8x+a \geq 0$$

$f(x)=x^4-4x^3+6x^2-8x+a$ 라 하면

$$f'(x)=4x^3-12x^2+12x-8$$

$$=4(x-2)(x^2-x+1)$$

$f'(x)=0$ 에서

$$x=2 (\because x^2-x+1>0)$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를
표로 나타내면 오른쪽과 같다.
따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에
서 최솟값 $a-8$ 을 가지므로 모
든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

x	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$a-8$	$\nearrow$

$$a-8 \geq 0 \quad \therefore a \geq 8$$

따라서 실수 a 의 최솟값은 8이다.

답 ⑤

0587 $y=f(x)$ 의 그래프가 $y=g(x)$ 의 그래프보다 항상 위쪽
에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$f(x) > g(x), \text{ 즉 } f(x) - g(x) > 0$$

이 성립해야 한다.

$$h(x) = f(x) - g(x) \text{라 하면}$$

$$h(x) = x^4 + x^2 - 6x + a$$

$$\therefore h'(x) = 4x^3 + 2x - 6 = 2(x-1)(2x^2 + 2x + 3)$$

$$h'(x) = 0 \text{에서 } x=1 (\because 2x^2 + 2x + 3 > 0)$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를
표로 나타내면 오른쪽과 같다.
따라서 함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 에
서 최솟값 $a-4$ 를 가지므로 모
든 실수 x 에 대하여 부등식 $h(x) > 0$ 이 성립하려면

x	...	1	...
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$	$a-4$	$\nearrow$

$$a-4 > 0 \quad \therefore a > 4$$

답 $a > 4$

0588 $2x^3 + k \geq 3x^2$ 에서 $2x^3 - 3x^2 + k \geq 0$

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$
의 증가와 감소를 표로
나타내면 오른쪽과 같
다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	k	$\searrow$	$k-1$	$\nearrow$

따라서 $x \geq 0$ 일 때 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값 $k-1$ 을 가지
므로 부등식 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$k-1 \geq 0 \quad \therefore k \geq 1$$

답 $k \geq 1$

0589 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{3}{4}t^2 - 3t - 1 = \frac{3}{4}(t-2)^2 - 4$$

$$0 \leq t \leq 6 \text{에서 } -4 \leq v \leq 8 \text{이므로}$$

$$0 \leq |v| \leq 8$$

따라서 점 P의 속력 $|v|$ 의 최댓값은 8이다.

답 8

0590 시각 t 에서의 중점 M의 위치를 x 라 하면

$$x = \frac{1}{2}\{x_P(t) + x_Q(t)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{(2t^3 - 2t^2 + 3t) + (-4t^2 - t)\}$$

$$= t^3 - 3t^2 + t$$

시각 t 에서의 중점 M의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t + 1$$

따라서 $t=3$ 에서의 중점 M의 속도는

$$27 - 18 + 1 = 10$$

답 ①

0591 브레이크를 밟은 지 t 초 후의 자동차의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 16 - 4t \text{ (m/s)}$$

자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$16 - 4t = 0 \quad \therefore t = 4$$

따라서 자동차가 정지할 때까지 걸린 시간은 4초이다.

답 4초

0592 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 6t - 24$$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$3t^2 + 6t - 24 = 0, \quad t^2 + 2t - 8 = 0$$

$$(t+4)(t-2) = 0 \quad \therefore t = 2 (\because t > 0)$$

즉 $t=2$ 에서의 점 P의 위치가 원점이므로

$$8 + 12 - 48 + k = 0 \quad \therefore k = 28$$

답 28

0593 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = t^2 + 2pt + q, \quad a = \frac{dv}{dt} = 2t + 2p$$

$t=1$ 에서 점 P는 운동 방향을 바꾸므로 속도가 0이다.

즉 $1 + 2p + q = 0$ 이므로

$$2p + q = -1$$

..... ㉠

또 $t=1$ 에서의 점 P의 위치가 $\frac{10}{3}$ 이므로

$$\frac{1}{3} + p + q = \frac{10}{3} \quad \therefore p + q = 3$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p = -4, q = 7$

$$\therefore v = t^2 - 8t + 7, a = 2t - 8$$

이때 $v=0$ 에서 $t^2 - 8t + 7 = 0$

$$(t-1)(t-7) = 0 \quad \therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 7$$

즉 점 P는 $t=7$ 에서 두 번째로 운동 방향을 바꾸므로 이때의 점
P의 가속도는

$$14 - 8 = 6$$

답 6

0594 ㄱ. $0 < t < 2$ 에서 점 P는 양의 방향으로 이동하므로

$t=2$ 에서의 점 P의 위치는 원점이 아니다. (거짓)

ㄴ. $v(1) = 2 > 0, v(3) = -2 < 0$ 이므로 $t=1$ 일 때와 $t=3$ 일 때

점 P의 운동 방향은 서로 반대이다. (참)

ㄷ. $t=2, t=5$ 에서 점 P가 운동 방향을 바꾸므로 점 P는 운동
방향을 2번 바꾼다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

0595 ㄱ. 물체의 t 초 후의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dh}{dt} = 30 - 10t \text{ (m/s)}$$

최고 높이에서 물체의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$30 - 10t = 0 \quad \therefore t = 3$$

따라서 최고 높이에 도달하는 데 걸리는 시간은 3초이다. (참)

ㄴ. 물체의 최고 높이는 $t=3$ 일 때의 높이이므로

$$35 + 90 - 45 = 80 \text{ (m)} \text{ (거짓)}$$

ㄷ. 물체가 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로 $h=0$ 에서

$$35 + 30t - 5t^2 = 0, \quad t^2 - 6t - 7 = 0$$

$$(t+1)(t-7) = 0 \quad \therefore t = 7 \text{ (} \because t > 0 \text{)}$$

따라서 지면에 떨어지는 데 걸리는 시간은 7초이다. (거짓)

ㄹ. 물체의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = -10 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

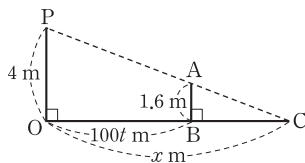
따라서 가속도는 일정하다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

0596 지훈이가 t 분 동안 움직인 거리는 $100t$ m

t 분 후의 가로등 바로 밑에서부터 지훈이의 그림자의 머리끝까지의 거리를 x m라 하면 오른쪽 그림에서



$\triangle POC \sim \triangle ABC$ (AA 닮음)이므로

$$4 : 1.6 = x : (x - 100t)$$

$$1.6x = 4(x - 100t), \quad 2.4x = 400t$$

$$\therefore x = \frac{500}{3}t$$

따라서 그림자의 머리끝이 움직이는 속도는

$$\frac{dx}{dt} = \frac{500}{3} \text{ (m/min)}$$

답 ③

0597 t 초 후의 정삼각형의 한 변의 길이는 $(2+2t)$ cm이므로 정삼각형의 넓이를 S cm²라 하면

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} (2t+2)^2 = \sqrt{3} (t+1)^2$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = \sqrt{3} \times 2(t+1) = 2\sqrt{3} (t+1) \text{ (cm}^2\text{/s)}$$

따라서 5초 후의 정삼각형의 넓이의 변화율은

$$2\sqrt{3} \times 6 = 12\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{/s)} \quad \textbf{답 } 12\sqrt{3} \text{ cm}^2\text{/s}$$

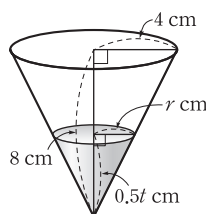
0598 t 초 후의 수면의 높이는 $0.5t$ cm

이때 오른쪽 그림과 같이 t 초 후의 수면의

반지름의 길이를 r cm라 하면

$$4 : 8 = r : 0.5t$$

$$\therefore r = \frac{t}{4}$$



t 초 후의 물의 부피를 V cm³라 하면

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times 0.5t = \frac{1}{3} \pi \times \left(\frac{t}{4}\right)^2 \times \frac{t}{2} = \frac{\pi}{96} t^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{32} t^2 \text{ (cm}^3\text{/s)}$$

한편 수면의 높이가 4 cm가 되는 순간의 시각은 $0.5t=4$ 에서

$$t=8$$

따라서 8초 후의 물의 부피의 변화율은

$$\frac{\pi}{32} \times 64 = 2\pi \text{ (cm}^3\text{/s)}$$

답 ①

0599 $x^3 - 3x^2 - k = 0$ 에서 $x^3 - 3x^2 = k$

따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 $y = x^3 - 3x^2$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점의 개수와 같다. ... 1단계

$f(x) = x^3 - 3x^2$ 이라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

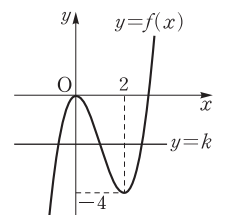
$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ... 2단계

이때 $-4 < k < 0$ 이면 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. ... 3단계



답 3

	채점 요소	비율
1단계	주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수의 의미 파악하기	20 %
2단계	$y = f(x)$ 의 그래프 그리기	50 %
3단계	주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수 구하기	30 %

0600 주어진 곡선과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식

$$x^4 - x = 3x + k, \text{ 즉 } x^4 - 4x = k$$

가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

즉 $y = x^4 - 4x$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 두 점에서 만나야 한다. ... 1단계

$f(x) = x^4 - 4x$ 라 하면

$$f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x-1)(x^2+x+1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=1 \text{ (} \because x^2+x+1 > 0 \text{)}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

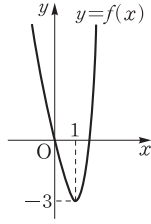
x	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	-3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ... 2단계

이때 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 두 점에서 만나도록 하는 k 의 값의 범위는

$$k > -3$$

답 $k > -3$... 3단계



채점 요소		비율
1단계	$y=x^4-4x$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 두 점에서 만나야 함을 알기	20 %
2단계	$y=x^4-4x$ 의 그래프 그리기	50 %
3단계	k 의 값의 범위 구하기	30 %

0601 $f(x) \geq g(x)$ 에서 $f(x)-g(x) \geq 0$

$h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면

$$h(x)=x^3-3x^2+a$$

$$\therefore h'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$h'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$... 1단계

$1 < x < 3$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	2	...	3
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$		\	$a-4$	/	

$1 < x < 3$ 일 때 함수 $h(x)$ 는 $x=2$ 에서 최솟값 $a-4$ 를 갖는다.

... 2단계

즉 $1 < x < 3$ 에서 부등식 $h(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$a-4 \geq 0 \quad \therefore a \geq 4$$

따라서 a 의 최솟값은 4이다.

... 3단계

답 4

채점 요소		비율
1단계	$h(x)=f(x)-g(x)$ 로 놓고 $h'(x)=0$ 인 x 의 값 구하기	30 %
2단계	$1 < x < 3$ 에서 $h(x)$ 의 최솟값 구하기	40 %
3단계	a 의 최솟값 구하기	30 %

0602 시각 t 에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_P(t)$, $v_Q(t)$ 라 하면

$$v_P(t)=x_P'(t)=2t-6,$$

$$v_Q(t)=x_Q'(t)=t+4$$

... 1단계

두 점 P, Q가 같은 방향으로 움직이면 속도의 부호가 같으므로

$$v_P(t)v_Q(t) > 0 \text{에서}$$

$$(2t-6)(t+4) > 0, \quad (t-3)(t+4) > 0$$

$$\therefore t > 3 \quad (\because t > 0)$$

... 2단계

답 $t > 3$

채점 요소		비율
1단계	두 점 P, Q의 속도 구하기	40 %
2단계	t 의 값의 범위 구하기	60 %

0603 전략 조건 ㉑를 이용하여 $f(x)$ 가 x^2 을 인수로 가짐을 알고 조건 ㉒를 이용하여 $f(x)$ 의 식을 세운다.

$g(x)=f(x)+|f'(x)|$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$$g(0)=f(0)+|f'(0)|$$

조건 ㉑에서 $f(0)=g(0)=0$ 이므로

$$|f'(0)|=0 \quad \therefore f'(0)=0$$

즉 $f(0)=0$, $f'(0)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 x^2 을 인수로 갖는다.

이때 조건 ㉒에서 방정식 $f(x)=0$ 은 양의 실근을 가지므로 양의 실근을 a 라 하면

$$f(x)=x^2(x-a)$$

$$\therefore f'(x)=2x(x-a)+x^2$$

$$=x(3x-2a)$$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad x=0 \text{ 또는 } x=\frac{2}{3}a$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	$\frac{2}{3}a$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	0	\	$-\frac{4}{27}a^3$	/

따라서 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 조건 ㉒에 의하여 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y=4$ 가 세 점에서 만나야 하므로

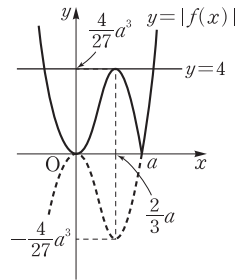
$$\frac{4}{27}a^3=4, \quad a^3=27$$

$$\therefore a=3$$

따라서 $f(x)=x^2(x-3)$, $f'(x)=3x(x-2)$ 이므로

$$g(3)=f(3)+|f'(3)|=0+9=9$$

답 ①



0604 전략 접점의 x 좌표를 t 로 놓고 접선의 방정식을 세운 후 접선이 점 $(0, a)$ 를 지나도록 이용한다.

$f(x)=x^3-3x^2-2$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-6x$$

접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2-2) 라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t)=3t^2-6t \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-(t^3-3t^2-2)=(3t^2-6t)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2-2$$

이 직선이 점 $(0, a)$ 를 지나므로

$$a=-2t^3+3t^2-2$$

$$\therefore 2t^3-3t^2+2+a=0$$

..... ㉑

점 $(0, a)$ 에서 곡선 $y=x^3-3x^2-2$ 에 오직 한 개의 접선만을 그을 수 있으려면 t 에 대한 삼차방정식 ㉑이 오직 하나의 실근만을 가져야 한다.

$g(t)=2t^3-3t^2+2+a$ 라 하면

$$g'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$$

$$g'(t)=0 \text{에서} \quad t=0 \text{ 또는 } t=1$$

따라서 함수 $g(t)$ 는 $t=0, t=1$ 에서 극값을 가지므로 방정식 ㉠이 오직 하나의 실근을 가지려면

$$g(0)g(1) > 0$$

$$(a+2)(a+1) > 0 \quad \therefore a < -2 \text{ 또는 } a > -1$$

답 $a < -2$ 또는 $a > -1$

0605 전략 $h(x)=f(x)-g(x)$ 로 놓고 주어진 조건을 만족시키는 함수 $h(x)$ 를 구한다.

두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 y 축에서 만나므로

$$f(0)=g(0)$$

또 x 좌표가 2인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$$f(2)=g(2), f'(2)=g'(2)$$

이때 $f(x) \geq g(x) + 3$ 에서

$$f(x)-g(x) \geq 3$$

이므로 $h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)$$

$$\therefore h(0)=0, h(2)=0, h'(2)=0$$

$h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$h(x)=x(x-2)^2=x^3-4x^2+4x$$

$$\therefore h'(x)=3x^2-8x+4=(3x-2)(x-2)$$

$h'(x)=0$ 에서

$$x=\frac{2}{3} \text{ 또는 } x=2$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$\frac{2}{3}$	...	2	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

즉 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 $h(x)=3$ 에서

$$x^3-4x^2+4x=3$$

$$x^3-4x^2+4x-3=0$$

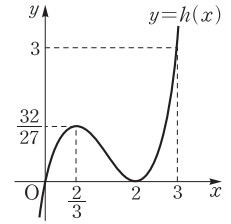
$$(x-3)(x^2-x+1)=0$$

$$\therefore x=3 \quad (\because x^2-x+1 > 0)$$

따라서 $x \geq a$ 일 때 부등식 $h(x) \geq 3$ 이 성립하려면

$$a \geq 3$$

즉 실수 a 의 최솟값은 3이다.



답 3

07 부정적분

교과서 문제 정복하기

본책 097쪽

0606 ㄱ. $(-2x)' = -2$ 이므로

$$\int (-2)dx = -2x + C \text{ (참)}$$

ㄴ. $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$ 이므로 $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$ (거짓)

ㄷ. $(3x^2 - x)' = 6x - 1$ 이므로

$$\int (6x - 1)dx = 3x^2 - x + C \text{ (참)}$$

ㄹ. $(x^4 + 3x^2)' = 4x^3 + 6x$ 이므로

$$\int (4x^3 + 6x)dx = x^4 + 3x^2 + C \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

0607 $f(x) = (3x^2 + 4x + C)' = 6x + 4$

답 $f(x) = 6x + 4$

0608 $f(x) = (x^3 - x^2 + C)' = 3x^2 - 2x$

답 $f(x) = 3x^2 - 2x$

0609 $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C\right)'$

$$= x^3 + x^2 + x$$

답 $f(x) = x^3 + x^2 + x$

0610 답 $x^3 + 2x$

0611 답 $x^3 + 2x + C$

0612 답 $\frac{1}{4}x^4 + C$

0613 답 $\frac{1}{15}x^{15} + C$

0614 답 $\frac{1}{51}x^{51} + C$

0615 $\int (3x - 4)dx = 3 \int x dx - \int 4 dx$

$$= \frac{3}{2}x^2 - 4x + C \quad \text{답 } \frac{3}{2}x^2 - 4x + C$$

0616 $\int (5x^2 - 2x + 1)dx = 5 \int x^2 dx - 2 \int x dx + \int 1 dx$

$$= \frac{5}{3}x^3 - x^2 + x + C$$

답 $\frac{5}{3}x^3 - x^2 + x + C$

0617 $\int (x-1)(x+2)dx = \int (x^2 + x - 2)dx$

$$= \int x^2 dx + \int x dx - \int 2 dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$$

답 $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

0618 $\int (2x-3)^2 dx = \int (4x^2 - 12x + 9)dx$

$$= 4 \int x^2 dx - 12 \int x dx + \int 9 dx$$

$$= \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 9x + C$$

답 $\frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 9x + C$

0619 $\int (x-3)(x^2 + 3x + 9)dx = \int (x^3 - 27)dx$

$$= \int x^3 dx - \int 27 dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - 27x + C$$

답 $\frac{1}{4}x^4 - 27x + C$

0620 $\int \frac{x^2 - 4}{x + 2} dx = \int \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} dx = \int (x-2)dx$

$$= \int x dx - \int 2 dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$$

답 $\frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

0621 $\int \frac{x^3 + 1}{x + 1} dx = \int \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x+1} dx$

$$= \int (x^2 - x + 1)dx$$

$$= \int x^2 dx - \int x dx + \int 1 dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

답 $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$

0622 $\int (x+1)^2 dx + \int (1+x)(1-x)dx$

$$= \int (x^2 + 2x + 1)dx + \int (1 - x^2)dx$$

$$= \int (x^2 + 2x + 1 + 1 - x^2)dx$$

$$= \int (2x + 2)dx = 2 \int x dx + \int 2 dx$$

$$= x^2 + 2x + C$$

답 $x^2 + 2x + C$

0623 $\int \frac{x^3}{x-2} dx - \int \frac{8}{x-2} dx$

$$= \int \frac{x^3 - 8}{x-2} dx = \int \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x-2} dx$$

$$= \int (x^2 + 2x + 4)dx$$

$$= \int x^2 dx + 2 \int x dx + \int 4 dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 4x + C$$

답 $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 4x + C$

유형 익히기

• 본책 098~103쪽

0624 $(x-3)f(x)=(x^3-27x+C)'=3x^2-27$
 $=3(x+3)(x-3)$

따라서 $f(x)=3(x+3)$ 이므로

$f(-1)=6$

답 6

0625 $F(x)=x^3+x^2+1$ 로 놓으면
 $f(x)=F'(x)=3x^2+2x$

답 ②

0626 $F(x)=\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
 $=4x(4x+3)+(2x^2-1)\times 4$
 $=24x^2+12x-4$
 $\therefore F(0)=-4$

답 -4

0627 $f(x)=F'(x)=3x^2+2ax+2$ 이므로
 $b=f(0)=2$

... 1단계

$f'(x)=6x+2a$ 이므로 $f'(0)=3$ 에서

$2a=3 \quad \therefore a=\frac{3}{2}$

... 2단계

$\therefore ab=3$

... 3단계

답 3

	채점 요소	비율
1단계	b의 값 구하기	40 %
2단계	a의 값 구하기	40 %
3단계	ab의 값 구하기	20 %

0628 $F(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^3-2x)\right\}dx=x^3-2x+C$

이때 $F(0)=2$ 이므로 $C=2$

따라서 $F(x)=x^3-2x+2$ 이므로

$F(2)=6$

답 6

0629 $\frac{d}{dx}\left\{\int(ax^3+2x^2+bx-7)dx\right\}=ax^3+2x^2+bx-7$

이므로

$ax^3+2x^2+bx-7=x^3+cx^2+3x+d$

위의 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$a=1, b=3, c=2, d=-7$

$\therefore a+b+c+d=-1$

답 -1

0630 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-4x)\right\}dx=x^2-4x+C$
 $= (x-2)^2+C-4$

이때 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -8 이므로

$C-4=-8 \quad \therefore C=-4$

따라서 $f(x)=x^2-4x-4$ 이므로

$f(5)=1$

답 1

0631 $F(x)=\int\left[\frac{d}{dx}\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx\right]dx$
 $=\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+C_1\}\right]dx$
 $=f(x)+C_2$
 $=10x^{10}+9x^9+\cdots+2x^2+x+C_2$

이때 $F(0)=-5$ 이므로 $C_2=-5$

따라서 $F(x)=10x^{10}+9x^9+\cdots+2x^2+x-5$ 이므로

$F(1)=10+9+\cdots+2+1-5=50$

답 50

0632 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=4$ 에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int 4dx$

$\therefore f(x)+g(x)=4x+C_1$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$C_1=f(0)+g(0)=-1$

$\therefore f(x)+g(x)=4x-1$

..... ㉠

$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=4x$ 에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}\right]dx=\int 4x dx$

$\therefore f(x)-g(x)=2x^2+C_2$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$C_2=f(0)-g(0)=7$

$\therefore f(x)-g(x)=2x^2+7$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$f(x)=x^2+2x+3, g(x)=-x^2+2x-4$

$\therefore f(1)+g(-1)=6+(-7)=-1$

답 -1

0633 $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2$ 에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}\right]dx=\int 3x^2 dx$

$\therefore f(x)g(x)=x^3+C$

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$f(2)g(2)=8+C=0 \quad \therefore C=-8$

즉 $f(x)g(x)=x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ 이고 $f(2)=0$,

$g(2)=12$ 이므로

$f(x)=x-2, g(x)=x^2+2x+4$

$\therefore f(0)+g(1)=-2+7=5$

답 5

0634 조건 ㉢에서

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}\right]dx=\int 3dx$

$\therefore f(x)+g(x)=3x+C_1$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$C_1=f(0)+g(0)=3$

$\therefore f(x)+g(x)=3x+3$

..... ㉣

조건 ㉔에서

$$\int \left[\frac{d}{dx} \{ f(x)g(x) \} \right] dx = \int (4x+5) dx$$

$$\therefore f(x)g(x) = 2x^2 + 5x + C_2$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$C_2 = f(0)g(0) = 2$$

$$\therefore f(x)g(x) = 2x^2 + 5x + 2$$

$$= (2x+1)(x+2) \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

이때 $f(x), g(x)$ 는 일차함수이고 $f(0)=2, g(0)=1$ 이므로

㉑, ㉒에서

$$f(x) = x+2, g(x) = 2x+1$$

$$\therefore f(1)-g(2) = 3-5 = -2$$

답 -2

$$\begin{aligned} \text{0635 } f(x) &= \int \frac{x^2}{x-1} dx - \int \frac{1}{x-1} dx \\ &= \int \frac{x^2-1}{x-1} dx = \int \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} dx \\ &= \int (x+1) dx = \frac{1}{2}x^2 + x + C \end{aligned}$$

이때 $f(0)=1$ 이므로 $C=1$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ 이므로

$$f(2)=5$$

답 5

$$\begin{aligned} \text{0636 } f(x) &= \int (1-x)^3 dx - \int (1+x)^3 dx \\ &= \int \{ (1-x)^3 - (1+x)^3 \} dx \\ &= \int (-2x^3 - 6x) dx = -\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + C \end{aligned}$$

이때 $f(0) = \frac{1}{2}$ 이므로 $C = \frac{1}{2}$

따라서 $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2}$ 이므로

$$f(1) = -3$$

답 -3

$$\begin{aligned} \text{0637 } \int \frac{9}{x} dx + \int \frac{(2x+3)(2x-3)}{x} dx \\ = \int \frac{9}{x} dx + \int \frac{4x^2-9}{x} dx = \int \frac{9+4x^2-9}{x} dx \\ = \int 4x dx = 2x^2 + C \end{aligned}$$

따라서 $a=2, b=0$ 이므로 $a+b=2$

답 ②

$$\begin{aligned} \text{0638 } f(x) &= \int (1+2x+3x^2+\dots+9x^8) dx \\ &= x+x^2+x^3+\dots+x^9+C \end{aligned}$$

이때 $f(1)=10$ 이므로 $\underbrace{1+1+1+\dots+1}_{9\text{개}} + C = 10$

$$9+C=10 \quad \therefore C=1$$

따라서 $f(x) = x+x^2+x^3+\dots+x^9+1$ 이므로

$$f(-1) = -1+1-1+\dots-1+1=0$$

답 0

$$\begin{aligned} \text{0639 } f(x) &= \int f'(x) dx = \int (3x^2+2ax+1) dx \\ &= x^3+ax^2+x+C \end{aligned}$$

이때 $f(0)=1, f(1)=2$ 이므로

$$C=1, 1+a+1+C=2$$

$$\therefore a=-1, C=1$$

따라서 $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1$ 이므로

$$f(2)=7$$

답 7

$$\begin{aligned} \text{0640 } f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{x^3-27}{x^2+3x+9} dx \\ &= \int \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x^2+3x+9} dx \\ &= \int (x-3) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 3x + C \end{aligned}$$

이때 $f(0)=1$ 이므로 $C=1$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$ 이므로

$$f(-2)=9$$

답 9

0641 $f'(x) = 3x^2 - 1$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2-1) dx = x^3 - x + C$$

이때 $f(0)=2$ 이므로 $C=2$

따라서 $f(x) = x^3 - x + 2$ 이므로

$$\int f(x) dx = \int (x^3 - x + 2) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$$

$$\text{답 } \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$$

$$\begin{aligned} \text{0642 } f(x) &= \int f'(x) dx = \int (12x^2+4x-2) dx \\ &= 4x^3+2x^2-2x+C \end{aligned}$$

이때 $f(x)$ 가 $x-1$ 로 나누어떨어지므로 $f(1)=0$

$$4+2-2+C=0 \quad \therefore C=-4$$

따라서 $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 2x - 4$ 이므로

$$f(-1) = -4$$

답 ①

RPM 비법 노트

인수정리

다항식 $f(x)$ 가 일차식 $x-a$ 로 나누어떨어지면 $f(a)=0$ 이다.

0643 $f'(x) = 3x^2 + 5$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2+5) dx = x^3 + 5x + C$$

이때 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(0, 3)$ 을 지나므로 $f(0)=3$

$$\therefore C=3$$

따라서 $f(x) = x^3 + 5x + 3$ 이므로

$$f(1)=9$$

답 ⑤

0644 $f'(x) = -4x + 2$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (-4x + 2) dx = -2x^2 + 2x + C$$

이때 곡선 $y = f(x)$ 가 점 $(1, 2)$ 를 지나므로 $f(1) = 2$

$$-2 + 2 + C = 2 \quad \therefore C = 2$$

따라서 $f(x) = -2x^2 + 2x + 2$ 이고 곡선 $y = f(x)$ 가 점 $(2, k)$ 를 지나므로

$$k = f(2) = -2 \quad \text{답 } -2$$

0645 $f'(x) = 4x - 16$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (4x - 16) dx \\ &= 2x^2 - 16x + C = 2(x - 4)^2 - 32 + C \end{aligned}$$

이때 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -10 이므로

$$-32 + C = -10$$

$$\therefore f(x) = 2(x - 4)^2 - 10$$

따라서 구간 $[-1, 1]$ 에서 $f(x)$ 는 $x = -1$ 일 때 최댓값

$f(-1) = 40$ 을 갖는다. 답 40

0646 $f(x) = \int (kx^2 - 4x + 4) dx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분

하면 $f'(x) = kx^2 - 4x + 4$

이때 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기가 6이므로 $f'(1) = 6$

$$k - 4 + 4 = 6 \quad \therefore k = 6 \quad \dots \text{1단계}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int (6x^2 - 4x + 4) dx \\ &= 2x^3 - 2x^2 + 4x + C \end{aligned}$$

점 $(1, 2)$ 가 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로 $f(1) = 2$

$$2 - 2 + 4 + C = 2 \quad \therefore C = -2$$

따라서 $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 4x - 2$ 이므로 ... 2단계

$$f(2) = 14 \quad \dots \text{3단계}$$

답 14

채점 요소	비율
1단계 k 의 값 구하기	50 %
2단계 $f(x)$ 구하기	40 %
3단계 $f(2)$ 의 값 구하기	10 %

0647 $F(x) = xf(x) + 2x^3 - x^2 + 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) + 6x^2 - 2x$$

$$xf'(x) = -6x^2 + 2x \quad \therefore f'(x) = -6x + 2$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (-6x + 2) dx \\ &= -3x^2 + 2x + C \end{aligned}$$

이때 $f(1) = 2$ 이므로 $-3 + 2 + C = 2 \quad \therefore C = 3$

$$\therefore f(x) = -3x^2 + 2x + 3$$

$$\text{답 } f(x) = -3x^2 + 2x + 3$$

$$\text{0648 } \int (x-2)f(x)dx + 2F(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^3 + x^2 + C$$

의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$(x-2)f(x) + 2f(x) = -2x^3 + 8x^2 + 2x$$

$$xf(x) = -2x^3 + 8x^2 + 2x$$

$$\therefore f(x) = -2x^2 + 8x + 2 = -2(x-2)^2 + 10$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 10을 갖는다. 답 10

0649 $(x-1)f(x) - F(x) = 4x^3 - 6x^2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + (x-1)f'(x) - f(x) = 12x^2 - 12x$$

$$(x-1)f'(x) = 12x(x-1)$$

$$\therefore f'(x) = 12x \quad \dots \text{1단계}$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int 12x dx = 6x^2 + C$$

이때 $f(1) = 2$ 이므로 $6 + C = 2 \quad \therefore C = -4$

따라서 $f(x) = 6x^2 - 4$ 이므로 ... 2단계

$$f(-2) = 20 \quad \dots \text{3단계}$$

답 20

채점 요소	비율
1단계 $f'(x)$ 구하기	40 %
2단계 $f(x)$ 구하기	40 %
3단계 $f(-2)$ 의 값 구하기	20 %

0650 $f(x) + \int xf(x)dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) + xf(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 2 \quad \dots \text{㉠}$$

이때 $f(x)$ 를 n 차 함수라 하면 $xf(x)$ 는 $(n+1)$ 차 함수이므로 ㉠에서

$$n+1=3 \quad \therefore n=2$$

즉 $f(x)$ 가 이차함수이므로

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{는 상수, } a \neq 0)$$

로 놓으면 $f'(x) = 2ax + b$

$f(x), f'(x)$ 를 ㉠에 대입하면

$$2ax + b + x(ax^2 + bx + c) = x^3 + 2x^2 - 5x + 2$$

$$\therefore ax^3 + bx^2 + (2a+c)x + b = x^3 + 2x^2 - 5x + 2$$

이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$a=1, b=2, 2a+c=-5$$

$$\therefore a=1, b=2, c=-7$$

따라서 $f(x) = x^2 + 2x - 7$ 이므로

$$f(3) = 8 \quad \text{답 } ④$$

$$\text{0651 } f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & (x>0) \\ -x^2+4 & (x<0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2-x+C_1 & (x>0) \\ -\frac{1}{3}x^3+4x+C_2 & (x<0) \end{cases}$$

이때 $f(2) = -4$ 이므로 $4 - 2 + C_1 = -4 \quad \therefore C_1 = -6$
 한편 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=0$ 에서 연속이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$ 에서

$$C_2 = -6$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6 & (x \geq 0) \\ -\frac{1}{3}x^3 + 4x - 6 & (x \leq 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(-3) = -9$$

답 -9

0652 $f'(x) = \begin{cases} 2x+2 & (x \geq 1) \\ 3x^2+1 & (x \leq 1) \end{cases}$ 이므로

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + C_1 & (x \geq 1) \\ x^3 + x + C_2 & (x \leq 1) \end{cases}$$

이때 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

$$1 + 2 + C_1 = 1 + 1 + C_2 \quad \therefore C_1 = C_2 - 1$$

$$\begin{aligned} \therefore f(0) - f(2) &= C_2 - (8 + C_1) \\ &= C_2 - (8 + C_2 - 1) \\ &= -7 \end{aligned}$$

답 -7

0653 $f'(x) = x^2 - |x| = \begin{cases} x^2 - x & (x \geq 0) \\ x^2 + x & (x \leq 0) \end{cases}$ 이므로

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C_1 & (x \geq 0) \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_2 & (x \leq 0) \end{cases}$$

이때 $f(1) = 0$ 이므로 $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + C_1 = 0 \quad \therefore C_1 = \frac{1}{6}$

한편 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=0$ 에서 연속이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0)$ 에서

$$C_2 = \frac{1}{6}$$

따라서 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6} & (x \geq 0) \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6} & (x \leq 0) \end{cases}$ 이므로

$$f(-2) + f(2) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

0654 $f'(x) = \begin{cases} 2x+k & (x > 1) \\ 6 & (x < 1) \end{cases}$ 이므로

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + kx + C_1 & (x > 1) \\ 6x + C_2 & (x < 1) \end{cases}$$

이때 $f(0) = -2$ 이므로 $C_2 = -2$

$f(2) = 6$ 이므로 $4 + 2k + C_1 = 6$

$$\therefore 2k + C_1 = 2$$

..... ㉠

한편 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=1$ 에서 연속이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 에서

$$1 + k + C_1 = 4 \quad \therefore k + C_1 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $k = -1, C_1 = 4$

따라서 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 4 & (x \geq 1) \\ 6x - 2 & (x \leq 1) \end{cases}$ 이므로

$$k + f(1) = -1 + 4 = 3$$

답 3

0655 $f(x) = \int (x^3 - 2x + 2)dx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = x^3 - 2x + 2$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2) - \{f(-2-h) - f(-2)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$+ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2-h) - f(-2)}{-h}$$

$$= f'(-2) + f'(-2) = 2f'(-2)$$

$$= 2 \times (-2) = -4$$

답 -4

0656 $f(x) = \int (x^2 - 2x + k)dx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = x^2 - 2x + k$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = 4 \text{에서 } f'(-2) = 4 \text{이므로}$$

$$4 + 4 + k = 4 \quad \therefore k = -4$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x)dx = \int (x^2 - 2x - 4)dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 4x + C$$

이때 $f(0) = 3$ 이므로 $C = 3$

따라서 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 4x + 3$ 이므로

$$f(3) = -9$$

답 ①

0657 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - f(x-h)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - f(x) - \{f(x-h) - f(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - f(x)}{3h} \times 3 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}$$

$$= 3f'(x) + f'(x) = 4f'(x)$$

즉 $4f'(x) = 12x^2 + 8x - 8$ 이므로

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x)dx = \int (3x^2 + 2x - 2)dx$$

$$= x^3 + x^2 - 2x + C$$

이때 $f(1)=3$ 이므로

$$1+1-2+C=3 \quad \therefore C=3$$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-2x+3$ 이므로

$$f(-1)=5$$

답 5

0658 조건 (나)에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=0$ 이므로 $f(1)=0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)=2a-1$$

이때 조건 (가)에서 $f'(1)=2+a$ 이므로

$$2+a=2a-1 \quad \therefore a=3$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x)dx = \int (2x+3)dx \\ &= x^2+3x+C \end{aligned}$$

$f(1)=0$ 이므로

$$1+3+C=0 \quad \therefore C=-4$$

따라서 $f(x)=x^2+3x-4$ 이므로

$$f(2)=6$$

$$\therefore a+f(2)=9$$

답 9

0659 $f(x+y)=f(x)+f(y)-2xy$ 에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$$

$f'(1)=2$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1)+f(h)-2h-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} - 2 = 2 \\ \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} &= 4 \end{aligned}$$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)-2xh-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} - 2x \\ &= 4-2x \\ \therefore f(x) &= \int f'(x)dx = \int (4-2x)dx \\ &= -x^2+4x+C \end{aligned}$$

이때 $f(0)=0$ 이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=-x^2+4x$ 이므로

$$f(3)=3$$

답 ③

0660 조건 (나)의 식에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+1 \quad \therefore f(0)=-1$$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)+xh+1-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+1}{h} + x \end{aligned}$$

조건 (가)에서 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+1}{h}=2$ 이므로

$$f'(x)=x+2$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x)dx = \int (x+2)dx \\ &= \frac{1}{2}x^2+2x+C \end{aligned}$$

이때 $f(0)=-1$ 이므로 $C=-1$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-1 \quad \text{답 } f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-1$$

0661 $f(x+y)=f(x)+f(y)+x^2y+xy^2-3$ 에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)-3 \quad \therefore f(0)=3$$

$f'(0)=3$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0)+f(h)-3-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-3}{h} = 3 \end{aligned}$$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)+x^2h+xh^2-3-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-3}{h} + x^2 \\ &= 3+x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x)dx = \int (3+x^2)dx \\ &= \frac{1}{3}x^3+3x+C \end{aligned}$$

이때 $f(0)=3$ 이므로 $C=3$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+3x+3$ 이므로

$$f(2)=\frac{35}{3}$$

답 ③

0662 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프에서

$$f'(-2)=0, f'(0)=0$$

이때 $x=-2$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌고, $x=0$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극솟값, $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다.

$$\therefore f(-2)=-1, f(0)=3$$

$f'(x) = kx(x+2)$ ($k < 0$)로 놓으면

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int kx(x+2) dx \\ &= \int (kx^2 + 2kx) dx = \frac{k}{3} x^3 + kx^2 + C \end{aligned}$$

$f(0) = 3$ 에서 $C = 3$

$f(-2) = -1$ 에서 $\frac{4}{3}k + 3 = -1 \quad \therefore k = -3$

따라서 $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 3$ 이므로

$$f(-1) = 1$$

답 ④

0663 $f'(x) = x^2 + 2x - 8 = (x+4)(x-2)$ 이므로

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -4$ 또는 $x = 2$

x	...	-4	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f(2) = -8$$

이때

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (x^2 + 2x - 8) dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 + x^2 - 8x + C \end{aligned}$$

이므로 $f(2) = \frac{8}{3} + 4 - 16 + C = -8 \quad \therefore C = \frac{4}{3}$

즉 $f(x) = \frac{1}{3} x^3 + x^2 - 8x + \frac{4}{3}$ 이므로 $f(x)$ 의 극댓값은

$$f(-4) = 28$$

답 28

0664 $f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 4$

x	...	0	...	4	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극솟값을 갖고, $x = 4$ 에서 극댓값을 갖는다.

이때

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int \{-x(x-4)\} dx \\ &= \int (-x^2 + 4x) dx = -\frac{1}{3} x^3 + 2x^2 + C \end{aligned}$$

이므로 $f(x)$ 의 극솟값과 극댓값은 각각

$$f(0) = C, f(4) = C + \frac{32}{3}$$

극댓값이 극솟값의 $\frac{5}{3}$ 배이므로

$$C + \frac{32}{3} = \frac{5}{3} C \quad \therefore C = 16$$

즉 $f(x) = -\frac{1}{3} x^3 + 2x^2 + 16$ 이므로

$$f(3) = 25$$

답 ④

0665 함수 $f(x)$ 의 최고차항이 $2x^3$ 이므로 $f'(x)$ 의 최고차항은 $6x^2$ 이다.

$f'(-1) = f'(3) = 0$ 이므로

$$f'(x) = 6(x+1)(x-3)$$

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값을 가지므로

$$f(-1) = 24$$

이때

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int 6(x+1)(x-3) dx \\ &= \int (6x^2 - 12x - 18) dx \\ &= 2x^3 - 6x^2 - 18x + C \end{aligned}$$

이므로

$$f(-1) = -2 - 6 + 18 + C = 24 \quad \therefore C = 14$$

즉 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 14$ 이므로 $f(x)$ 의 극솟값은

$$f(3) = -40$$

답 ⑤

0666 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = \frac{1}{3}$

x	...	-1	...	$\frac{1}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값을 갖고, $x = \frac{1}{3}$ 에서 극솟값을 갖는다.

이때 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축에 접하고 $f(x)$ 의 극댓값이 양수

이므로 $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

... 1단계

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (x+1)(3x-1) dx \\ &= \int (3x^2 + 2x - 1) dx = x^3 + x^2 - x + C \end{aligned}$$

이므로

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + C = 0 \quad \therefore C = \frac{5}{27}$$

즉 $f(x) = x^3 + x^2 - x + \frac{5}{27}$ 이므로

... 2단계

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27}$$

... 3단계

답 $\frac{16}{27}$

채점 요소		비율
1단계	$f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ 임을 알기	50%
2단계	$f(x)$ 구하기	40%
3단계	$f\left(-\frac{1}{3}\right)$ 의 값 구하기	10%

0667 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프에서

$$f'(-1)=0, f'(1)=0$$

따라서 $f'(x)=a(x+1)(x-1)$ ($a>0$)로 놓으면

$$f'(0)=-2\text{이므로}$$

$$-a=-2 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore f'(x)=2(x+1)(x-1)$$

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int 2(x+1)(x-1)dx$$

$$=\int (2x^2-2)dx=\frac{2}{3}x^3-2x+C$$

$$\text{이므로 } f(0)=0\text{에서 } C=0$$

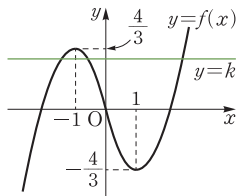
$$\therefore f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x$$

한편 $x=-1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌고, $x=1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값 $\frac{4}{3}$, $x=1$ 에서 극솟값 $-\frac{4}{3}$ 를 갖는다.

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 방정식 $f(x)=k$ 가 서로 다른 세 실근을 가지려면 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 세 점에서 만나야 하므로

$$-\frac{4}{3}<k<\frac{4}{3} \quad \text{답 } -\frac{4}{3}<k<\frac{4}{3}$$



다른 풀이 $f(x)=k$ 에서 $\frac{2}{3}x^3-2x=k$

$$\therefore \frac{2}{3}x^3-2x-k=0$$

$$g(x)=\frac{2}{3}x^3-2x-k\text{로 놓으면}$$

$$g'(x)=2x^2-2=2(x+1)(x-1)$$

$$g'(x)=0\text{에서}$$

$$x=-1\text{ 또는 }x=1$$

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=-1$, $x=1$ 에서 극값을 가지므로 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)=k$ 가 서로 다른 세 실근을 가지려면

$$g(-1)g(1)<0, \quad \left(\frac{4}{3}-k\right)\left(-\frac{4}{3}-k\right)<0$$

$$\left(k-\frac{4}{3}\right)\left(k+\frac{4}{3}\right)<0 \quad \therefore -\frac{4}{3}<k<\frac{4}{3}$$

RPM 비법 노트

삼차방정식의 근의 판별

삼차함수 $f(x)$ 가 극값을 가질 때, 삼차방정식 $f(x)=0$ 의 실근의 개수는 다음과 같다.

(i) (극댓값) $\times$ (극솟값) < 0

$\iff$ 서로 다른 세 실근을 갖는다.

(ii) (극댓값) $\times$ (극솟값) $= 0$

$\iff$ 중근과 다른 한 실근 (서로 다른 두 실근)을 갖는다.

(iii) (극댓값) $\times$ (극솟값) > 0

$\iff$ 한 실근과 두 허근을 갖는다.

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 104~106쪽

0668 $F(x)-G(x)=k$ (k 는 상수)라 하면

$$k=F(0)-G(0)=1-2=-1$$

$$\therefore G(x)=F(x)-k$$

$$=x^3-2x^2+1-(-1)=x^3-2x^2+2$$

$$\therefore G(2)=2$$

답 2

0669 $\frac{d}{dx} \left\{ \int x f(x) dx \right\} = x f(x)$ 이므로

$$x f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x = x(x^3 + x^2 + x + 1)$$

따라서 $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ 이므로

$$f(3)=40$$

답 3

0670 $\int (x+3y)^2 dy = \int (x^2 + 6xy + 9y^2) dy$

$$= x^2 \int dy + 6x \int y dy + 9 \int y^2 dy$$

$$= x^2 y + 3xy^2 + 3y^3 + C$$

답 $x^2 y + 3xy^2 + 3y^3 + C$

참고 적분변수 이외의 문자는 상수로 생각한다.

0671 $f(x) = \int (\sqrt{x}+5)^2 dx + \int (\sqrt{x}-5)^2 dx$

$$= \int \{(\sqrt{x}+5)^2 + (\sqrt{x}-5)^2\} dx$$

$$= \int (2x+50) dx$$

$$= x^2 + 50x + C$$

이때 $f(0)=49$ 이므로 $C=49$

따라서 $f(x)=x^2+50x+49$ 이므로

$$f(1)=100$$

답 3

0672 $f(1)=a$ (a 는 상수)라 하면

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (6x^2 - 2ax) dx$$

$$= 2x^3 - ax^2 + C$$

이때 $f(0)=4$ 이므로 $C=4$

즉 $f(x)=2x^3-ax^2+4$ 이므로 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$a=2-a+4 \quad \therefore a=3$$

따라서 $f(x)=2x^3-3x^2+4$ 이므로

$$f(2)=8$$

답 4

0673 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

따라서

$$f'(x) = \{3x - f(1)\}(x-1)$$

$$= 3 \left\{ x - \frac{f(1)}{3} \right\} (x-1)$$

에서 $\frac{f(1)}{3} = 1$ 이므로 $f(1)=3$

즉 $f'(x) = 3(x-1)^2 = 3x^2 - 6x + 3$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (3x^2 - 6x + 3) dx \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x + C \end{aligned}$$

이때 $f(1) = 3$ 이므로 $1 - 3 + 3 + C = 3$

$$\therefore C = 2$$

따라서 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ 이므로

$$f(2) = 4$$

답 ②

다른 풀이 $f(1) = a$ (a 는 상수)라 하면

$$f'(x) = (3x - a)(x - 1) = 3x^2 - (3 + a)x + a$$

이때 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (3 + a)^2 - 4 \times 3 \times a \leq 0$$

$$(a - 3)^2 \leq 0 \quad \therefore a = 3$$

0674 곡선 $y = f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기가 x^2 에 정비례하므로

$$f'(x) = ax^2 \quad (a \text{는 상수, } a \neq 0)$$

으로 놓으면

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int ax^2 dx = \frac{a}{3}x^3 + C$$

이때 곡선 $y = f(x)$ 가 두 점 $(1, 3)$, $(-1, 1)$ 을 지나므로

$$f(1) = 3, f(-1) = 1$$

$$\frac{a}{3} + C = 3, -\frac{a}{3} + C = 1$$

$$\therefore a = 3, C = 2$$

따라서 $f(x) = x^3 + 2$ 이므로

$$f(3) = 29$$

답 29

0675 $\int g(x) dx = x^3 f(x) + x + C$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x) + 1$$

$$\therefore g(2) = 12f(2) + 8f'(2) + 1$$

$$= 12 \times 1 + 8 \times (-1) + 1 = 5$$

답 ⑤

0676 $\int (3x + 2)f'(x) dx = x^3 - 2x^2 - 4x + C$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$(3x + 2)f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 = (3x + 2)(x - 2)$$

$$\therefore f'(x) = x - 2$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (x - 2) dx = \frac{1}{2}x^2 - 2x + C_1$$

이때 $y = f(x)$ 의 그래프의 y 절편이 1이므로

$$f(0) = C_1 = 1$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ 이므로 $f(x)$ 의 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합은

$$\frac{1}{2} + (-2) + 1 = -\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

0677 주어진 그래프에서

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & (x \geq 1) \\ 2x & (x \leq 1) \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 2x + C_1 & (x \geq 1) \\ x^2 + C_2 & (x \leq 1) \end{cases}$$

이때 $y = f(x)$ 의 그래프가 원점을 지나므로 $f(0) = 0$

$$\therefore C_2 = 0$$

한편 $f(x)$ 가 연속함수이므로 $x = 1$ 에서 연속이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$ 에서

$$2 + C_1 = 1 \quad \therefore C_1 = -1$$

따라서 $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & (x \geq 1) \\ x^2 & (x \leq 1) \end{cases}$ 이므로

$$f(4) = 7$$

답 7

0678 $f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & (|x| \geq 1) \\ -3x^2 + 2x & (|x| \leq 1) \end{cases}$ 이므로

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + C_1 & (x \leq -1) \\ -x^3 + x^2 + C_2 & (-1 \leq x \leq 1) \\ x^2 - 3x + C_3 & (x \geq 1) \end{cases}$$

이때 $f(-2) = 10$ 이므로

$$4 + 6 + C_1 = 10 \quad \therefore C_1 = 0$$

한편 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x = -1$, $x = 1$ 에서 연속이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = f(-1)$ 에서

$$1 + 1 + C_2 = 4$$

$$\therefore C_2 = 2$$

또 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$ 에서

$$1 - 3 + C_3 = 2$$

$$\therefore C_3 = 4$$

따라서 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & (x \leq -1) \\ -x^3 + x^2 + 2 & (-1 \leq x \leq 1) \\ x^2 - 3x + 4 & (x \geq 1) \end{cases}$ 이므로

$$f(2) = 2$$

답 2

0679 $f(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx} (3x^3 - ax^2) \right\} dx$
 $= 3x^3 - ax^2 + C$

이때 $f(1) = 6$ 이므로 $3 - a + C = 6$

$$\therefore C = a + 3$$

..... ㉠

또 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = -1$ 이므로

$f'(x) = 9x^2 - 2ax$ 에서

$$9 - 2a = -1 \quad \therefore a = 5$$

$a = 5$ 를 ㉠에 대입하면 $C = 8$

따라서 $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 8$ 이므로

$$f(2) = 12$$

답 12

0680 $f(x) = \int (5x^3 - x^2 + 4x + 7)dx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $f'(x) = 5x^3 - x^2 + 4x + 7$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^3 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \frac{1}{x^2 + x + 1} \right\}$$

$$= \frac{1}{3} f'(1) = \frac{1}{3} \times 15 = 5 \quad \text{답 ⑤}$$

0681 조건 ㉠에서 $f'(x)$ 는 일차항의 계수가 2인 일차함수이므로

$$f'(x) = 2x + k \quad (k \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

조건 ㉡에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$ 이므로 $f(3) = 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = f'(3) = 2$$

이때 $f'(3) = 6 + k$ 이므로 $6 + k = 2 \quad \therefore k = -4$

$$\therefore f'(x) = 2x - 4$$

즉 $f(x) = \int (2x - 4)dx = x^2 - 4x + C$ 이고 $f(3) = 0$ 이므로

$$9 - 12 + C = 0 \quad \therefore C = 3$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

따라서 방정식 $f(x) = 0$, 즉 $(x-1)(x-3) = 0$ 의 해는 $x=1$ 또는 $x=3$ 답 x=1 또는 x=3

0682 $f(x) = \int (6x^2 + ax - 12)dx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 6x^2 + ax - 12$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극솟값 3을 가지므로

$$f'(1) = 0, f(1) = 3$$

$f'(1) = 0$ 에서 $6 + a - 12 = 0 \quad \therefore a = 6$

따라서

$$f(x) = \int (6x^2 + 6x - 12)dx = 2x^3 + 3x^2 - 12x + C$$

이므로

$$f(1) = 2 + 3 - 12 + C = 3 \quad \therefore C = 10$$

$$\therefore f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 10$$

한편 $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$ 이므로 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = 1$

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극대이므로 구하는 극댓값은 $f(-2) = 30$ 답 ①

0683 $F(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \int x f(x) dx \right\} = x f(x)$

$$= x(2x+1) = 2x^2 + x \quad \dots \text{1단계}$$

$$G(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx} x f(x) \right\} dx = x f(x) + C$$

$$= x(2x+1) + C = 2x^2 + x + C$$

이때 $G(1) = 5$ 이므로

$$2 + 1 + C = 5 \quad \therefore C = 2$$

따라서 $G(x) = 2x^2 + x + 2$ 이므로 ... 2단계

$$F(-1) + G(-1) = 1 + 3 = 4 \quad \dots \text{3단계}$$

답 4

채점 요소		비율
1단계	$F(x)$ 구하기	40 %
2단계	$G(x)$ 구하기	50 %
3단계	$F(-1) + G(-1)$ 의 값 구하기	10 %

0684 $\frac{d}{dx} \{ f(x) + g(x) \} = 2x + 1$ 에서

$$\int \left[\frac{d}{dx} \{ f(x) + g(x) \} \right] dx = \int (2x + 1) dx$$

$$\therefore f(x) + g(x) = x^2 + x + C_1$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$C_1 = f(0) + g(0) = -1$$

$$\therefore f(x) + g(x) = x^2 + x - 1 \quad \dots \text{㉠}$$

$\frac{d}{dx} \{ f(x)g(x) \} = 3x^2 - 6x + 2$ 에서

$$\int \left[\frac{d}{dx} \{ f(x)g(x) \} \right] dx = \int (3x^2 - 6x + 2) dx$$

$$\therefore f(x)g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + C_2$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$C_2 = f(0)g(0) = -6$$

$$\therefore f(x)g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$$

$$= (x-3)(x^2+2) \quad \dots \text{㉡} \quad \dots \text{1단계}$$

이때 $f(0) = -3, g(0) = 2$ 이므로 ㉠, ㉡에서 ... 2단계

$$f(x) = x - 3, g(x) = x^2 + 2 \quad \dots \text{3단계}$$

$$\therefore f(1) + g(2) = -2 + 6 = 4 \quad \text{답 4}$$

채점 요소		비율
1단계	$f(x) + g(x), f(x)g(x)$ 구하기	60 %
2단계	$f(x), g(x)$ 구하기	30 %
3단계	$f(1) + g(2)$ 의 값 구하기	10 %

0685 $f'(x) = 4x + 6$ 이므로 ... 1단계

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (4x + 6) dx = 2x^2 + 6x + C$$

이때 곡선 $y = f(x)$ 가 점 $(1, 3)$ 을 지나므로 $f(1) = 3$

$$2 + 6 + C = 3 \quad \therefore C = -5$$

$$\therefore f(x) = 2x^2 + 6x - 5 \quad \dots \text{2단계}$$

따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $2x^2+6x-5=0$ 의 모든 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $-\frac{5}{2}$ 이다. ... 3단계

답 $-\frac{5}{2}$

채점 요소	비율
1단계 $f'(x)$ 구하기	20 %
2단계 $f(x)$ 구하기	50 %
3단계 방정식 $f(x)=0$ 의 모든 근의 곱 구하기	30 %

0686 $4 \int f(x)dx - f(x) = 2xf(x) + x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$4f(x) - f'(x) = 2f(x) + 2xf'(x) + 1$$

$$\therefore 2f(x) = (2x+1)f'(x) + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots \text{1단계}$$

이때 $f(x)$ 가 일차함수이므로

$$f(x) = ax + b \quad (a, b \text{는 상수}, a \neq 0)$$

로 놓으면 $f'(x) = a$

$f(x), f'(x)$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2(ax+b) = (2x+1) \times a + 1$$

$$\therefore a - 2b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

또 $f(1) = 1$ 이므로

$$a + b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{을 연립하여 풀면} \quad a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ 이므로

$$f(4) = 2 \quad \dots \text{2단계}$$

... 3단계

답 2

채점 요소	비율
1단계 $f(x)$ 와 $f'(x)$ 사이의 관계식 구하기	30 %
2단계 $f(x)$ 구하기	60 %
3단계 $f(4)$ 의 값 구하기	10 %

0687 전략 주어진 등식의 양변을 미분하여 $f(x)$ 와 $f'(x)$ 사이의 관계식을 구한다.

$3 \int f(x)dx = xf(x) - 2f(x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3f(x) = f(x) + xf'(x) - 2f'(x)$$

$$\therefore 2f(x) = (x-2)f'(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $f(x)$ 의 최고차항을 ax^n (a 는 상수, n 은 자연수)이라 하면 $2f(x)$ 의 최고차항은 $2ax^n$, $(x-2)f'(x)$ 의 최고차항은 anx^n 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$2a = an, \quad a(n-2) = 0$$

$$\therefore n = 2 \quad (\because a \neq 0)$$

즉 $f(x)$ 가 이차함수이고 $f(0) = 2$ 이므로

$$f(x) = ax^2 + bx + 2 \quad (b \text{는 상수})$$

로 놓으면 $f'(x) = 2ax + b$

$f(x), f'(x)$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2(ax^2 + bx + 2) = (x-2)(2ax + b)$$

$$\therefore 2ax^2 + 2bx + 4 = 2ax^2 + (b-4a)x - 2b$$

이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$2b = b - 4a, \quad 4 = -2b$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, \quad b = -2$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ 이므로

$$f(6) = 8$$

답 8

0688 전략 미분계수와 도함수의 정의를 이용한다.

ㄱ. $f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy$ 에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0)$$

$$\therefore f(0) = 0 \quad (\text{참})$$

ㄴ. $f'(1) = 6$ 이므로

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) + f(h) + 3h - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 3 = 6$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 3$$

이때 $-h=t$ 라 하면 $h \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h)}{h} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \times (-1) \\ &= 3 \times (-1) = -3 \quad (\text{거짓}) \end{aligned}$$

$$\text{ㄷ. } f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1) + f(h) - 3h - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} - 3$$

$$= 3 - 3 = 0 \quad (\text{참})$$

$$\text{ㄹ. } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) + 3xh - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 3x$$

$$= 3 + 3x$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x)dx = \int (3+3x)dx$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + 3x + C$$

이때 $f(0) = 0$ 이므로

$$C = 0$$

따라서 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x$ 이므로

$$f(-3) = \frac{9}{2} > 0 \quad (\text{거짓})$$

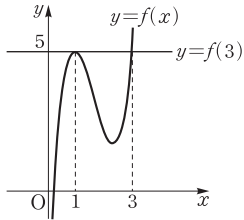
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

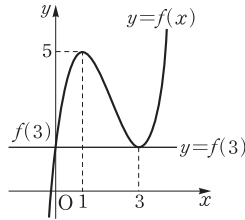
0689 전략 먼저 조건 (나), (다)를 만족시키는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형을 파악한다.

조건 (다)를 만족시키려면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=f(3)$ 이 두 점에서 만나야 한다.

따라서 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 조건 (나), (다)를 만족시키려면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



[그림 1]



[그림 2]

(i) [그림 1]의 경우

방정식 $f(x)=f(3)$, 즉 $f(x)-f(3)=0$ 의 해는 $x=1$ 또는 $x=3$

이고 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=f(3)$ 이 $x=1$ 에서 접하므로

$$\begin{aligned} f(x)-f(3) &= (x-1)^2(x-3) \\ \therefore f(x) &= (x-1)^2(x-3)+f(3) \end{aligned}$$

이때 $f'(x)=2(x-1)(x-3)+(x-1)^2$ 이므로

$$f'\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{5}{3}>0$$

따라서 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) [그림 2]의 경우

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $f'(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=1$, $x=3$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(x)=3(x-1)(x-3)$$

따라서 $f'\left(\frac{8}{3}\right)=-\frac{5}{3}<0$ 이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $f'(x)=3(x-1)(x-3)$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx = \int 3(x-1)(x-3)dx \\ &= \int (3x^2-12x+9)dx \\ &= x^3-6x^2+9x+C \end{aligned}$$

이때 조건 (나)에서 $f(1)=5$ 이므로

$$1-6+9+C=5 \quad \therefore C=1$$

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ 이므로

$$f(-1)=-15$$

답 -15

07

07
부
정
적
분

08 정적분

교과서 문제 정복하기

본책 109쪽

0690 답 0

0691 $\int_0^1 2x dx = \left[x^2 \right]_0^1 = 1 - 0 = 1$ 답 1

0692 $\int_1^3 (2y-1) dy = \left[y^2 - y \right]_1^3$
 $= (9-3) - (1-1) = 6$ 답 6

0693 $\int_1^2 (x^2 - 2x + 6) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 6x \right]_1^2$
 $= \left(\frac{8}{3} - 4 + 12 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 6 \right)$
 $= \frac{16}{3}$ 답 $\frac{16}{3}$

0694 $\int_3^1 (3x^2 - x + 1) dx = \left[x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_3^1$
 $= \left(1 - \frac{1}{2} + 1 \right) - \left(27 - \frac{9}{2} + 3 \right)$
 $= -24$ 답 -24

0695 $\int_1^{-2} (x^3 + 3x^2) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 \right]_1^{-2}$
 $= (4-8) - \left(\frac{1}{4} + 1 \right)$
 $= -\frac{21}{4}$ 답 $-\frac{21}{4}$

0696 $\int_{-2}^0 x(x+4) dx = \int_{-2}^0 (x^2 + 4x) dx$
 $= \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_{-2}^0$
 $= 0 - \left(-\frac{8}{3} + 8 \right) = -\frac{16}{3}$ 답 $-\frac{16}{3}$

0697 $\int_1^2 (x-1)(x-2) dx = \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx$
 $= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_1^2$
 $= \left(\frac{8}{3} - 6 + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 \right)$
 $= -\frac{1}{6}$ 답 $-\frac{1}{6}$

0698 $\int_0^1 (x+3)(x^2-3x+9) dx = \int_0^1 (x^3 + 27) dx$
 $= \left[\frac{1}{4}x^4 + 27x \right]_0^1$
 $= \left(\frac{1}{4} + 27 \right) - 0$
 $= \frac{109}{4}$ 답 $\frac{109}{4}$

0699 $\int_0^2 (x^2-1) dx + \int_0^2 (x^2+1) dx$
 $= \int_0^2 (x^2-1+x^2+1) dx = \int_0^2 2x^2 dx$
 $= \left[\frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 = \frac{16}{3} - 0 = \frac{16}{3}$ 답 $\frac{16}{3}$

0700 $\int_{-1}^3 (3x^2+x-2) dx - \int_{-1}^3 (x+3) dx$
 $= \int_{-1}^3 \{3x^2+x-2-(x+3)\} dx = \int_{-1}^3 (3x^2-5) dx$
 $= \left[x^3 - 5x \right]_{-1}^3 = (27-15) - (-1+5) = 8$ 답 8

0701 $\int_{-2}^1 (x+1)^3 dx - \int_{-2}^1 (x-1)^3 dx$
 $= \int_{-2}^1 \{(x+1)^3 - (x-1)^3\} dx$
 $= \int_{-2}^1 (6x^2+2) dx = \left[2x^3+2x \right]_{-2}^1$
 $= (2+2) - (-16-4) = 24$ 답 24

0702 $\int_{-1}^0 (x^2+1) dx + \int_0^2 (x^2+1) dx$
 $= \int_{-1}^2 (x^2+1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-1}^2$
 $= \left(\frac{8}{3} + 2 \right) - \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) = 6$ 답 6

0703 $\int_{-1}^0 (2x^2-x+1) dx + \int_0^{-1} (2x^2-x+1) dx$
 $= \int_{-1}^{-1} (2x^2-x+1) dx = 0$ 답 0

0704 $\int_{-2}^{-1} (x^2-4x+5) dx + \int_{-1}^1 (y^2-4y+5) dy$
 $= \int_{-2}^{-1} (x^2-4x+5) dx + \int_{-1}^1 (x^2-4x+5) dx$
 $= \int_{-2}^1 (x^2-4x+5) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x \right]_{-2}^1$
 $= \left(\frac{1}{3} - 2 + 5 \right) - \left(-\frac{8}{3} - 8 - 10 \right) = 24$ 답 24

0705 $\int_0^1 (x^3-3x^2) dx - \int_2^1 (x^3-3x^2) dx$
 $= \int_0^1 (x^3-3x^2) dx + \int_1^2 (x^3-3x^2) dx$
 $= \int_0^2 (x^3-3x^2) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 \right]_0^2$
 $= (4-8) - 0 = -4$ 답 -4

0706 $\int_{-1}^1 (x^5-x^3+3x^2+5x+1) dx$
 $= \int_{-1}^1 (x^5-x^3+5x) dx + \int_{-1}^1 (3x^2+1) dx$
 $= 2 \int_0^1 (3x^2+1) dx = 2 \left[x^3+x \right]_0^1$
 $= 2 \times \{(1+1) - 0\} = 4$ 답 4

$$\begin{aligned}
 \text{0707 } & \int_{-2}^2 (x^7 - 5x^4 + 3x^2 - 1) dx \\
 &= \int_{-2}^2 x^7 dx + \int_{-2}^2 (-5x^4 + 3x^2 - 1) dx \\
 &= 2 \int_0^2 (-5x^4 + 3x^2 - 1) dx = 2 \left[-x^5 + x^3 - x \right]_0^2 \\
 &= 2 \times \{(-32 + 8 - 2) - 0\} = -52 \quad \text{답 -52}
 \end{aligned}$$

0708 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f(x) = 2x - 2$ 답 $f(x) = 2x - 2$

0709 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ 답 $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$

0710 $f(t) = 2t^2 + 3$ 으로 놓고 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x (2t^2 + 3) dt &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[F(t)]_1^x}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} \\
 &= F'(1) = f(1) = 5 \quad \text{답 5}
 \end{aligned}$$

0711 $f(x) = x^2 - 2x - 1$ 로 놓고 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h (x^2 - 2x - 1) dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f(x) dx \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[F(x)]_0^h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} \\
 &= F'(0) = f(0) = -1 \quad \text{답 -1}
 \end{aligned}$$

유형 익히기 ● 본책 110~118쪽

0712 $\int_{-1}^2 (6t+5)(1-2t) dt + \int_3^3 (6t-5)(1+2t) dt$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1}^2 (6t+5)(1-2t) dt + 0 = \int_{-1}^2 (-12t^2 - 4t + 5) dt \\
 &= \left[-4t^3 - 2t^2 + 5t \right]_{-1}^2 = -27 \quad \text{답 ①}
 \end{aligned}$$

0713 $\int_0^2 x^2 f(x) dx = \int_0^2 x^2 (5x^2 - 8x + 3) dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^2 (5x^4 - 8x^3 + 3x^2) dx \\
 &= \left[x^5 - 2x^4 + x^3 \right]_0^2 = 8 \quad \text{답 8}
 \end{aligned}$$

0714 $\int_{-2}^1 \{f'(x) + 3x^2\} dx = [f(x) + x^3]_{-2}^1$

$$\begin{aligned}
 &= \{f(1) + 1\} - \{f(-2) - 8\} \\
 &= f(1) + 4 \quad (\because f(-2) = 5) \\
 \text{따라서 } f(1) + 4 &= 2 \Rightarrow f(1) = -2 \quad \text{답 -2}
 \end{aligned}$$

0715 $F(x) - G(x) = k$ (k 는 상수)라 하면
 $k = F(0) - G(0) = 1$
 이므로 $F(x) = G(x) + 1$
 $\therefore \int_1^4 f(x) dx = [F(x)]_1^4 = F(4) - F(1)$
 $= \{G(4) + 1\} - F(1)$
 $= (7 + 1) - 2 = 6 \quad \text{답 6}$

0716 $\int_0^2 (-6x^2 + 6kx - 5) dx = [-2x^3 + 3kx^2 - 5x]_0^2$

$$\begin{aligned}
 &= 12k - 26 \\
 12k - 26 &< 10 \text{에서 } k < 3 \\
 \text{따라서 정수 } k \text{의 최댓값은 } &2 \text{이다.} \quad \text{답 2}
 \end{aligned}$$

0717 $\int_0^a (3x^2 + 2x - 2) dx = [x^3 + x^2 - 2x]_0^a$

$$\begin{aligned}
 &= a^3 + a^2 - 2a \\
 \text{따라서 } a^3 + a^2 - 2a &= 0 \Rightarrow a(a+2)(a-1) = 0 \quad \therefore a = 1 \quad (\because a > 0) \quad \text{답 1}
 \end{aligned}$$

0718 $\int_0^1 (6a^2x^2 - 8ax - 3) dx = [2a^2x^3 - 4ax^2 - 3x]_0^1$

$$\begin{aligned}
 &= 2a^2 - 4a - 3 \\
 &= 2(a-1)^2 - 5 \quad \dots \text{1단계} \\
 \text{따라서 } \int_0^1 (6a^2x^2 - 8ax - 3) dx & \text{는 } a=1 \text{일 때 최솟값 } -5 \text{를 가지므로} \\
 m=1, n=-5 & \quad \dots \text{2단계} \\
 \therefore m+n &= -4 \quad \dots \text{3단계} \\
 \text{답 -4}
 \end{aligned}$$

채점 요소	비율
1단계 $\int_0^1 (6a^2x^2 - 8ax - 3) dx$ 의 값을 a 에 대한 이차식으로 나타내기	60 %
2단계 m, n 의 값 구하기	30 %
3단계 $m+n$ 의 값 구하기	10 %

0719 함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 점 $(-1, 1)$ 을 지나므로 $f(-1) = 1$

$$\begin{aligned}
 \therefore a - b + c &= 1 \quad \dots \text{㉠} \\
 \text{또 점 } (1, 1) \text{을 지나므로 } f(1) &= 1 \\
 \therefore a + b + c &= 1 \quad \dots \text{㉡} \\
 \text{㉠} - \text{㉡} \text{을 하면 } -2b &= 0 \quad \therefore b = 0 \\
 b = 0 \text{을 } \text{㉠} \text{에 대입하면 } a + c &= 1 \quad \therefore c = 1 - a
 \end{aligned}$$

따라서 $f(x) = ax^2 + 1 - a$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 (ax^2 + 1 - a)dx \\ &= \left[\frac{a}{3}x^3 + (1-a)x \right]_0^1 \\ &= -\frac{2}{3}a + 1\end{aligned}$$

즉 $-\frac{2}{3}a + 1 = -1$ 이므로 $a = 3$

답 ④

$$\begin{aligned}\text{0720 } & \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx - \int_1^0 \frac{y^3}{y+1} dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx + \int_0^1 \frac{x^3}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} dx = \int_0^1 (x^2-x+1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1 = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

답 $\frac{5}{6}$

$$\begin{aligned}\text{0721 } & \int_{-1}^3 (2x^2 + x + 1) dx + 2 \int_{-1}^3 (-x^2 + 1) dx \\ &= \int_{-1}^3 (2x^2 + x + 1) dx + \int_{-1}^3 2(-x^2 + 1) dx \\ &= \int_{-1}^3 \{2x^2 + x + 1 + 2(-x^2 + 1)\} dx \\ &= \int_{-1}^3 (x + 3) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_{-1}^3 = 16\end{aligned}$$

답 16

$$\begin{aligned}\text{0722 } & \int_0^2 (x+k)^2 dx + \int_2^0 (x-k)^2 dx \\ &= \int_0^2 (x+k)^2 dx - \int_0^2 (x-k)^2 dx \\ &= \int_0^2 \{(x+k)^2 - (x-k)^2\} dx \\ &= \int_0^2 4kx dx = \left[2kx^2 \right]_0^2 = 8k\end{aligned}$$

따라서 $8k = 16$ 이므로 $k = 2$

답 ④

$$\begin{aligned}\text{0723 } & \int_1^3 \{f(x) - 2\}^2 dx \\ &= \int_1^3 [\{f(x)\}^2 - 4f(x) + 4] dx \\ &= \int_1^3 \{f(x)\}^2 dx - 4 \int_1^3 f(x) dx + \int_1^3 4 dx \\ &= \int_1^3 \{f(x)\}^2 dx + 4 \int_3^1 f(x) dx + \int_1^3 4 dx \\ &= 6 + 4 \times (-2) + \left[4x \right]_1^3 \\ &= 6 - 8 + 8 = 6\end{aligned}$$

답 6

$$\begin{aligned}\text{0724 } & \int_1^2 \frac{x^2}{x^2+1} dx - \int_3^2 \frac{x^2}{x^2+1} dx + \int_1^3 \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \int_1^2 \frac{x^2}{x^2+1} dx + \int_2^3 \frac{x^2}{x^2+1} dx + \int_1^3 \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \int_1^3 \frac{x^2}{x^2+1} dx + \int_1^3 \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \int_1^3 \frac{x^2+1}{x^2+1} dx = \int_1^3 1 dx = \left[x \right]_1^3 = 2\end{aligned}$$

답 2

$$\begin{aligned}\text{0725 } & \int_{-1}^1 (2x^3 + 6x^2 - 2) dx + \int_1^2 (2y^3 + 6y^2 - 2) dy \\ &= \int_{-1}^1 (2x^3 + 6x^2 - 2) dx + \int_1^2 (2x^3 + 6x^2 - 2) dx \\ &= \int_{-1}^2 (2x^3 + 6x^2 - 2) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 2x \right]_{-1}^2 = \frac{39}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{39}{2}$

$$\begin{aligned}\text{0726 } & \int_2^5 f(x) dx - \int_3^5 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\ &= \int_2^5 f(x) dx + \int_5^3 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\ &= \int_2^3 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx \\ &= \int_1^3 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_1^3 = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}\text{0727 } & \int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^2 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx \\ &= 2 - 8 + 4 = -2\end{aligned}$$

답 -2

$$\begin{aligned}\text{0728 } & \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\ &= \int_0^1 x dx + \int_1^2 (x-2)^2 dx \\ &= \int_0^1 x dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

답 $\frac{5}{6}$

0729 주어진 그래프에서

$$\begin{aligned}f(x) &= \begin{cases} 12 & (x \geq 0) \\ 3x + 12 & (x < 0) \end{cases} \\ \therefore \int_{-4}^4 xf(x) dx &= \int_{-4}^0 xf(x) dx + \int_0^4 xf(x) dx \\ &= \int_{-4}^0 (3x^2 + 12x) dx + \int_0^4 12x dx \\ &= \left[x^3 + 6x^2 \right]_{-4}^0 + \left[6x^2 \right]_0^4 \\ &= -32 + 96 = 64\end{aligned}$$

답 64

$$\begin{aligned}\text{0730 } & \int_a^0 f(x) dx = \int_a^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^0 f(x) dx \\ &= \int_a^{-1} 4x dx + \int_{-1}^0 (3x^2 - 7) dx \\ &= \left[2x^2 \right]_a^{-1} + \left[x^3 - 7x \right]_{-1}^0 \\ &= (2 - 2a^2) + (-6) = -2a^2 - 4\end{aligned}$$

따라서 $-2a^2 - 4 = -22$ 이므로

$$a^2 = 9 \quad \therefore a = -3 \quad (\because a < -1)$$

답 ①

0731 $\int_0^2 |x^2-1|dx - 2\int_2^0 |1-x^2|dx$

$= \int_0^2 |x^2-1|dx + 2\int_0^2 |x^2-1|dx$

$= 3\int_0^2 |x^2-1|dx$

이때 $|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ -x^2+1 & (-1 \leq x \leq 1) \end{cases}$ 이므로

$$3\int_0^2 |x^2-1|dx = 3\left\{\int_0^1 (-x^2+1)dx + \int_1^2 (x^2-1)dx\right\}$$
$$= 3\left\{\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^2\right\}$$
$$= 3 \times \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right) = 6$$

답 6

0732 $|x^2-x-2| = \begin{cases} x^2-x-2 & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -x^2+x+2 & (-1 \leq x \leq 2) \end{cases}$

$$\therefore \int_{-2}^0 |x^2-x-2|dx$$
$$= \int_{-2}^{-1} (x^2-x-2)dx + \int_{-1}^0 (-x^2+x+2)dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^0$$
$$= \frac{11}{6} + \frac{7}{6} = 3$$

답 3

0733 $x|x-2| = \begin{cases} x(x-2) & (x \geq 2) \\ -x(x-2) & (x \leq 2) \end{cases}$

$$\therefore \int_0^a x|x-2|dx$$
$$= \int_0^2 \{-x(x-2)\}dx + \int_2^a x(x-2)dx$$
$$= \int_0^2 (-x^2+2x)dx + \int_2^a (x^2-2x)dx$$
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^a$$
$$= \frac{4}{3} + \left(\frac{a^3}{3} - a^2 + \frac{4}{3}\right) = \frac{a^3}{3} - a^2 + \frac{8}{3}$$

따라서 $\frac{a^3}{3} - a^2 + \frac{8}{3} = 8$ 이므로

$a^3 - 3a^2 - 16 = 0, \quad (a-4)(a^2+a+4) = 0$

$\therefore a = 4 \quad (\because a^2+a+4 > 0)$

답 ②

0734 $f(x) = |x+2| + |x| + |x-2|$

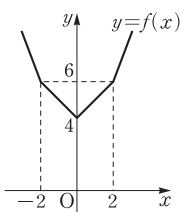
$$= \begin{cases} -3x & (x \leq -2) \\ -x+4 & (-2 \leq x \leq 0) \\ x+4 & (0 \leq x \leq 2) \\ 3x & (x \geq 2) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ... 1단계

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 최솟값 4를 가지므로

$a = 4$

... 2단계



$\therefore \int_1^a f(x)dx = \int_1^4 f(x)dx$

$= \int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx$

$= \int_1^2 (x+4)dx + \int_2^4 3x dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2+4x\right]_1^2 + \left[\frac{3}{2}x^2\right]_2^4$

$= \frac{11}{2} + 18 = \frac{47}{2}$

... 3단계

답 $\frac{47}{2}$

채점 요소		비율
1단계	함수 $y=f(x)$ 의 그래프 그리기	30%
2단계	a 의 값 구하기	20%
3단계	$\int_1^a f(x)dx$ 의 값 구하기	50%

0735 $\int_{-2}^4 (5x^4-x^3+3x+1)dx + \int_4^2 (5x^4-x^3+3x+1)dx$

$= \int_{-2}^2 (5x^4-x^3+3x+1)dx = 2\int_0^2 (5x^4+1)dx$

$= 2\left[x^5+x\right]_0^2 = 2 \times 34 = 68$

답 ①

0736 $\int_{-a}^a (2x^3-3x+4)dx = 2\int_0^a 4dx = 2\left[4x\right]_0^a$

$= 2 \times 4a = 8a$

따라서 $8a = 16$ 이므로 $a = 2$

답 2

0737 $\int_{-1}^1 (1+2x+3x^2+\dots+100x^{99})dx$

$= 2\int_0^1 (1+3x^2+5x^4+\dots+99x^{98})dx$

$= 2\left[x+x^3+x^5+\dots+x^{99}\right]_0^1$

$= 2 \times 50 = 100$

답 100

0738 $\int_{-1}^1 xf(x)dx = \int_{-1}^1 (ax^2+bx)dx = 2\int_0^1 ax^2dx$

$= 2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1 = 2 \times \frac{a}{3} = \frac{2}{3}a$

따라서 $\frac{2}{3}a = 1$ 이므로 $a = \frac{3}{2}$

$\int_{-1}^1 x^2f(x)dx = \int_{-1}^1 (ax^3+bx^2)dx = 2\int_0^1 bx^2dx$

$= 2\left[\frac{b}{3}x^3\right]_0^1 = 2 \times \frac{b}{3} = \frac{2}{3}b$

따라서 $\frac{2}{3}b = -1$ 이므로 $b = -\frac{3}{2}$

$\therefore ab = -\frac{9}{4}$

답 $-\frac{9}{4}$

0739 $f(-x) = -f(x)$ 에서 $f(x)$ 는 기함수이고

$(-x)^2 f(-x) = -x^2 f(x),$

$-xf(-x) = xf(x)$

에서 $x^2f(x)$ 는 기함수, $xf(x)$ 는 우함수이다.

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-2}^2 (5x^2+2x+1)f(x)dx \\ = 5 \int_{-2}^2 x^2 f(x)dx + 2 \int_{-2}^2 x f(x)dx + \int_{-2}^2 f(x)dx \\ = 0 + 4 \int_0^2 x f(x)dx + 0 = 4 \times 2 = 8 \end{aligned}$$

답 8

RPM 비법 노트

우함수, 기함수의 곱

일반적으로 우함수와 기함수에 대하여 다음이 성립한다.

- ① (우함수) $\times$ (우함수) $\Rightarrow$ 우함수
- ② (우함수) $\times$ (기함수) $\Rightarrow$ 기함수
- ③ (기함수) $\times$ (기함수) $\Rightarrow$ 우함수

0740 $f(-x)=f(x)$ 에서 $f(x)$ 는 우함수이므로

$$\begin{aligned} \int_{-4}^4 f(x)dx &= 2 \int_0^4 f(x)dx = 14 \\ \therefore \int_0^4 f(x)dx &= 7 \\ \therefore \int_2^4 f(x)dx &= \int_2^0 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx \\ &= -\int_0^2 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx \\ &= -5 + 7 = 2 \end{aligned}$$

답 2

0741 $f(-x)=-f(x)$ 에서 $f(x)$ 는 기함수이고,

$g(-x)=g(x)$ 에서 $g(x)$ 는 우함수이다.

또 $f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)$ 이므로 $f(x)g(x)$ 는 기함수이다.

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-3}^3 \{f(x)+g(x)+f(x)g(x)\}dx \\ = \int_{-3}^3 f(x)dx + \int_{-3}^3 g(x)dx + \int_{-3}^3 f(x)g(x)dx \\ = 0 + 2 \int_0^3 g(x)dx + 0 = 2 \times 5 = 10 \end{aligned}$$

답 10

0742 $\int_0^2 f(t)dt=k$ (k 는 상수) ㉠

로 놓으면 $f(x)=3x^2+2x+k$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} \int_0^2 (3t^2+2t+k)dt &= k, \quad \left[t^3+t^2+kt \right]_0^2 = k \\ 12+2k &= k \quad \therefore k=-12 \end{aligned}$$

따라서 $f(x)=3x^2+2x-12$ 이므로

$$f(2)=4$$

답 ⑤

0743 $\int_0^3 t f'(t)dt=k$ (k 는 상수) ㉡

로 놓으면 $f(x)=4x+k$

$$\therefore f'(x)=4$$

이것을 ㉡에 대입하면

$$\int_0^3 4t dt = k, \quad \left[2t^2 \right]_0^3 = k \quad \therefore k=18$$

따라서 $f(x)=4x+18$ 이므로 $f(-3)=6$ 답 ②

0744 $\int_1^2 f(t)dt=k$ (k 는 상수) ㉢

로 놓으면 $f(x)=\frac{75}{7}x^2-6kx+k^2$

이것을 ㉢에 대입하면

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\frac{75}{7}t^2 - 6kt + k^2 \right) dt &= k \\ \left[\frac{25}{7}t^3 - 3kt^2 + k^2t \right]_1^2 &= k \\ 25-9k+k^2 &= k, \quad k^2-10k+25=0 \\ (k-5)^2 &= 0 \quad \therefore k=5 \\ \therefore \int_1^2 f(x)dx &= 5 \end{aligned}$$

답 5

$$\begin{aligned} \mathbf{0745} \quad f(x) &= 3x^2 + \int_0^1 (2x-1)f(t)dt \\ &= 3x^2 + 2x \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt \end{aligned}$$

이때

$$\int_0^1 f(t)dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots \text{㉣}$$

로 놓으면 $f(x)=3x^2+2kx-k$

이것을 ㉣에 대입하면

$$\begin{aligned} \int_0^1 (3t^2+2kt-k)dt &= k, \quad \left[t^3+kt^2-kt \right]_0^1 = k \\ \therefore k &= 1 \end{aligned}$$

따라서 $f(x)=3x^2+2x-1$ 이므로

$$f(-2)=7$$

답 7

0746 $\int_0^2 f(t)dt=a, \int_0^1 f(t)dt=b$ (a, b 는 상수)로 놓으면

$$f(x)=x^2-ax+2b$$

$$\int_0^2 f(t)dt=a \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 (t^2-at+2b)dt &= a, \quad \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}at^2 + 2bt \right]_0^2 = a \\ \frac{8}{3} - 2a + 4b &= a \quad \therefore 3a - 4b = \frac{8}{3} \quad \dots\dots \text{㉤} \end{aligned}$$

$$\text{또 } \int_0^1 f(t)dt=b \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (t^2-at+2b)dt &= b, \quad \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}at^2 + 2bt \right]_0^1 = b \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{2}a + 2b &= b \quad \therefore a - 2b = \frac{2}{3} \quad \dots\dots \text{㉥} \end{aligned}$$

$$\text{㉤, ㉥을 연립하여 풀면 } a = \frac{4}{3}, b = \frac{1}{3}$$

따라서 $f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$ 이므로

$$f(1)=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

0747 주어진 등식의 양변에 $x=3$ 을 대입하면

$$9-3a-3=0 \quad \therefore a=2$$

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=2x-2 \quad \therefore f(7)=12$$

답 ④

0748 주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $f(1)=0$

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = (2x-3)(x^2+1)$$

따라서 $f'(1) = -2$ 이므로

$$f(1) + f'(1) = -2$$

답 -2

0749 주어진 등식의 양변에 $x=a$ 를 대입하면

$$a^2 - 2a - 8 = 0, \quad (a+2)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = 4 \quad (\because a > 0)$$

... 1단계

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 2x - 2$$

$$\therefore f(a) = f(4) = 6$$

... 2단계

$$\therefore a + f(a) = 10$$

... 3단계

답 10

채점 요소		비율
1단계	a 의 값 구하기	40 %
2단계	$f(a)$ 의 값 구하기	40 %
3단계	$a + f(a)$ 의 값 구하기	20 %

0750 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \{(x+2)^3 - (x+2)\} - (x^3 - x)$$

$$= 6x^2 + 12x + 6$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (6x^2 + 12x + 6) dx$$

$$= 2x^3 + 6x^2 + 6x + C$$

이때 $f(-1) = 0$ 이므로

$$-2 + 6 - 6 + C = 0 \quad \therefore C = 2$$

따라서 $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 6x + 2$ 이므로

$$f(1) = 16$$

답 ④

0751 주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = 14$$

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + xf'(x) = 24x^3 - 12x^2 + 24x + f(x)$$

$$xf'(x) = 24x^3 - 12x^2 + 24x$$

$$\therefore f'(x) = 24x^2 - 12x + 24$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (24x^2 - 12x + 24) dx$$

$$= 8x^3 - 6x^2 + 24x + C$$

이때 $f(1) = 14$ 이므로

$$8 - 6 + 24 + C = 14 \quad \therefore C = -12$$

따라서 $f(x) = 8x^3 - 6x^2 + 24x - 12$ 이므로

$$f(2) = 76$$

답 76

0752 주어진 등식에서

$$x \int_a^x f(t) dt - \int_a^x tf(t) dt = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_a^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = 3x^2 - 4x - 4$$

$$\therefore \int_a^x f(t) dt = 3x^2 - 4x - 4$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 6x - 4$$

$$\therefore f(2) = 8$$

답 8

0753 주어진 등식에서

$$x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt = 2x^4 - 3x^2$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = 8x^3 - 6x$$

$$\therefore \int_0^x f(t) dt = 8x^3 - 6x$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면 $\int_0^2 f(t) dt = 52$

$$\therefore \int_0^2 f(x) dx = 52$$

답 52

0754 주어진 등식에서

$$x \int_0^x f'(t) dt - \int_0^x tf'(t) dt = \frac{2}{3}x^3$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f'(t) dt + xf'(x) - xf'(x) = 2x^2$$

$$\therefore \int_0^x f'(t) dt = 2x^2$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면 $f'(x) = 4x$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int 4x dx = 2x^2 + C$$

이때 $f(0) = 2$ 이므로 $C = 2$

따라서 $f(x) = 2x^2 + 2$ 이므로

$$f(1) = 4$$

답 4

0755 주어진 등식에서

$$x \int_2^x f(t) dt - \int_2^x tf(t) dt = -2x^3 + ax + b$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_2^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = -6x^2 + a$$

$$\therefore \int_2^x f(t) dt = -6x^2 + a$$

..... ㉠

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = -12x$$

한편 주어진 등식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$-16 + 2a + b = 0 \quad \therefore b = -2a + 16$$

..... ㉡

㉠의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$-24 + a = 0 \quad \therefore a = 24$$

$a=24$ 를 ㉡에 대입하면 $b = -32$

$$\therefore f(a+b) = f(-8) = 96$$

답 96

0756 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \int_x^3 f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{x-3} \int_3^x f(t) dt \\ &= -\lim_{x \rightarrow 3} \frac{F(x) - F(3)}{x-3} \\ &= -F'(3) = -f(3) \\ &= -12\end{aligned}$$

답 -12

0757 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \int_{-1}^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{F(x) - F(-1)}{x - (-1)} \\ &= F'(-1) = f(-1) \\ &= -6 + a\end{aligned}$$

따라서 $-6 + a = 2$ 이므로

$$a = 8$$

답 8

0758 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2-4} \int_2^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x^2-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{F(x) - F(2)}{x-2} \times \frac{1}{x+2} \right\} \\ &= \frac{1}{4} F'(2) = \frac{1}{4} f(2) \\ &= \frac{1}{4} \times 12 = 3\end{aligned}$$

답 ③

0759 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{F(x) - F(1)}{x^3-1} \times (x^2+x+1) \right\} \\ &= 3F'(1) = 3f(1) \\ &= 3 \times 1 = 3\end{aligned}$$

답 3

0760 $f(x) = x^3 - x^2 + 2$ 로 놓고 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+2h} (x^3 - x^2 + 2) dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+2h} f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+2h) - F(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+2h) - F(1)}{2h} \times 2 = 2F'(1) = 2f(1) \\ &= 2 \times 2 = 4\end{aligned}$$

답 ④

0761 $f(x) = \int_0^x (4t^2 + t - 5) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}f'(x) &= 4x^2 + x - 5 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f'(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= f'(0) = -5\end{aligned}$$

답 -5

0762 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{2-3h}^{2+h} f(x) dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h) - F(2-3h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h) - F(2) - \{F(2-3h) - F(2)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h) - F(2)}{h} \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2-3h) - F(2)}{-3h} \times 3 \\ &= F'(2) + 3F'(2) = 4F'(2) \\ &= 4f(2) = 4(10 - 2k) = 40 - 8k\end{aligned}$$

따라서 $40 - 8k = 24$ 이므로

$$k = 2$$

답 2

0763 $h \neq 0$ 일 때, 조건 (4)의 양변을 h 로 나누면

$$\begin{aligned}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \\ \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt\end{aligned}$$

$f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ \therefore g'(x) &= F'(x) = f(x) = 3x^2 - 2x + 1\end{aligned}$$

... 1단계

이때

$$\begin{aligned}g(x) &= \int g'(x) dx = \int (3x^2 - 2x + 1) dx \\ &= x^3 - x^2 + x + C\end{aligned}$$

이므로 조건 (7)에서 $C = 2$

$$\therefore g(x) = x^3 - x^2 + x + 2$$

... 2단계

$$\therefore g'(2) + g(2) = 9 + 8 = 17$$

... 3단계

답 17

채점 요소		비율
1단계	$g'(x)$ 구하기	50 %
2단계	$g(x)$ 구하기	40 %
3단계	$g'(2) + g(2)$ 의 값 구하기	10 %

0764 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+3) = f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 f(x) dx &= \int_2^5 f(x) dx = \int_5^8 f(x) dx \\ &= \int_8^{11} f(x) dx = 3 \\ \therefore \int_{-1}^{11} f(x) dx &= \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx + \int_5^8 f(x) dx \\ &\quad + \int_8^{11} f(x) dx \\ &= 3 + 3 + 3 + 3 = 12\end{aligned}$$

답 12

0765 $f(-x)=f(x)$ 에서 $f(x)$ 는 우함수이므로

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = 2 \int_0^1 f(x)dx = 2 \times 5 = 10$$

이때 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2)=f(x)$ 이므로

$$\int_{-9}^{-7} f(x)dx = \int_{-7}^{-5} f(x)dx = \cdots = \int_7^9 f(x)dx = 10$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-9}^9 f(x)dx &= \int_{-9}^{-7} f(x)dx + \int_{-7}^{-5} f(x)dx + \cdots + \int_7^9 f(x)dx \\ &= 10 + 10 + \cdots + 10 = 90 \end{aligned}$$

답 90

0766 조건 (가)에 의하여

$$\int_{-2}^{-1} f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-2}^2 f(x)dx &= \int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx \\ &\quad + \int_1^2 f(x)dx \\ &= 4 \int_0^1 f(x)dx \\ &= 4 \int_0^1 (-x^2 + x)dx \quad (\because \text{조건 (나)}) \\ &= 4 \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = 4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{2}{3}$

0767 $f(x) = \int_{-3}^x (3t^2 + at + b)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 3x^2 + ax + b$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=5$ 에서 극솟값 -32 를 가지므로

$$f'(5) = 0, f(5) = -32$$

$$f'(5) = 0 \text{에서} \quad 75 + 5a + b = 0$$

$$\therefore 5a + b = -75 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(5) = -32 \text{에서} \quad \int_{-3}^5 (3t^2 + at + b)dt = -32$$

$$\left[t^3 + \frac{a}{2}t^2 + bt \right]_{-3}^5 = -32, \quad 152 + 8a + 8b = -32$$

$$\therefore a + b = -23 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면} \quad a = -13, b = -10$$

$$\therefore ab = 130 \quad \text{답 130}$$

0768 $f(x) = \int_x^{x+a} t(t-2)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+a)(x+a-2) - x(x-2) \\ &= 2ax + a^2 - 2a \end{aligned}$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f'(-1) = 0$$

$$\text{즉 } a^2 - 4a = 0 \text{이므로} \quad a(a-4) = 0$$

$$\therefore a = 4 \quad (\because a > 0) \quad \text{답 4}$$

0769 $f(x) = \int_{-1}^x t(t-1)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = x(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이므로

$$\begin{aligned} M = f(0) &= \int_{-1}^0 t(t-1)dt = \int_{-1}^0 (t^2 - t)dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \right]_{-1}^0 = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

또 $x=1$ 에서 극소이므로

$$\begin{aligned} m = f(1) &= \int_{-1}^1 t(t-1)dt = \int_{-1}^1 (t^2 - t)dt \\ &= 2 \int_0^1 t^2 dt = 2 \left[\frac{1}{3}t^3 \right]_0^1 \\ &= 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ \therefore M + m &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

답 ②

0770 주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = a + 3 \quad \therefore a = -3$$

따라서 주어진 등식에서

$$x \int_1^x f'(t)dt - \int_1^x t f'(t)dt = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f'(t)dt + x f'(x) - x f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5$$

$$\therefore \int_1^x f'(t)dt = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 12x^2 - 6x - 6 = 6(2x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 1$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{1}{2}$ 에서 극대, $x=1$ 에서 극소이다.

이때

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx = \int (12x^2 - 6x - 6)dx \\ &= 4x^3 - 3x^2 - 6x + C \end{aligned}$$

이므로

$$M = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4} + C, \quad m = f(1) = -5 + C$$

$$\therefore M - m = \left(\frac{7}{4} + C\right) - (-5 + C) = \frac{27}{4} \quad \text{답 } \frac{27}{4}$$

0771 $f(x) = \int_x^{x+1} (t^3 - t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \{(x+1)^3 - (x+1)\} - (x^3 - x) = 3x^2 + 3x = 3x(x+1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 0$

x	-1	...	0	...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	

이때

$$f(-1) = \int_{-1}^0 (t^3 - t) dt = \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 \right]_{-1}^0 = \frac{1}{4},$$

$$f(0) = \int_0^1 (t^3 - t) dt = \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 = -\frac{1}{4},$$

$$f(1) = \int_1^2 (t^3 - t) dt = \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 \right]_1^2 = \frac{9}{4}$$

이므로 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{9}{4}$, 최솟값은 $-\frac{1}{4}$ 이다.

따라서 $M = \frac{9}{4}$, $m = -\frac{1}{4}$ 이므로

$$M + m = 2$$

답 2

0772 $f(x) = -6x^2 + \int_{-1}^0 xf(t) dt$
 $= -6x^2 + x \int_{-1}^0 f(t) dt$

이므로

$$\int_{-1}^0 f(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

로 놓으면 $f(x) = -6x^2 + kx$

이것을 ①에 대입하면

$$\int_{-1}^0 (-6t^2 + kt) dt = k$$

$$\left[-2t^3 + \frac{k}{2}t^2 \right]_{-1}^0 = k, \quad -2 - \frac{k}{2} = k$$

$$\therefore k = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore f(x) = -6x^2 - \frac{4}{3}x = -6\left(x + \frac{1}{9}\right)^2 + \frac{2}{27}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{1}{9}$ 에서 최댓값 $\frac{2}{27}$ 를 갖는다.

답 ②

0773 주어진 등식에서

$$x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt = \frac{3}{4}x^4 - x^2$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = 3x^3 - 2x$$

$$\therefore \int_0^x f(t) dt = 3x^3 - 2x$$

... **1단계**

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 9x^2 - 2$$

... **2단계**

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최솟값 -2 를 갖는다.

... **3단계**

답 -2

	채점 요소	비율
1단계	$\int_0^x f(t) dt$ 구하기	50 %
2단계	$f(x)$ 구하기	30 %
3단계	$f(x)$ 의 최솟값 구하기	20 %

0774 $f(x) = \int_{-1}^x (1 - |t|) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 1 - |x|$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$

x	-1	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

이때

$$f(-1) = \int_{-1}^{-1} (1 - |t|) dt = 0,$$

$$f(1) = \int_{-1}^1 (1 - |t|) dt = \int_{-1}^0 (1 + t) dt + \int_0^1 (1 - t) dt$$

$$= \left[t + \frac{1}{2}t^2 \right]_{-1}^0 + \left[t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$f(2) = \int_{-1}^2 (1 - |t|) dt = \int_{-1}^0 (1 + t) dt + \int_0^2 (1 - t) dt$$

$$= \left[t + \frac{1}{2}t^2 \right]_{-1}^0 + \left[t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^2 = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

이므로 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 1, 최솟값은 0이다.

따라서 $M = 1$, $m = 0$ 이므로

$$M - m = 1$$

답 1

0775 주어진 그래프에서

$$f(x) = a(x+1)(x-3) \quad (a < 0)$$

으로 놓으면 $f(0) = 3$ 이므로

$$-3a = 3 \quad \therefore a = -1$$

$$\therefore f(x) = -(x+1)(x-3) = -x^2 + 2x + 3$$

한편 $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$F'(x) = f(x)$$

이때 $f(3) = 0$ 이고 $x=3$ 의 좌우에서 $f(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $F(x)$ 는 $x=3$ 에서 극대이다.

따라서 $F(x)$ 의 극댓값은

$$F(3) = \int_{-1}^3 f(t) dt = \int_{-1}^3 (-t^2 + 2t + 3) dt$$

$$= \left[-\frac{1}{3}t^3 + t^2 + 3t \right]_{-1}^3$$

$$= \frac{32}{3}$$

답 $\frac{32}{3}$

0776 주어진 그래프에서

$$F(x) = ax(x-2) = ax^2 - 2ax \quad (a > 0)$$

로 놓으면 $F(x) = \int_2^x f(t)dt$ 에서

$$\int_2^x f(t)dt = ax^2 - 2ax$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 2ax - 2a$$

이때 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(2, 4)$ 를 지나므로 $f(2) = 4$

$$2a = 4 \quad \therefore a = 2$$

따라서 $f(x) = 4x - 4$ 이므로

$$f(3) = 8$$

답 ④

0777 주어진 그래프에서

$$f(x) = a(x-2)(x-7) \quad (a < 0)$$

로 놓을 수 있다.

$g(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} g'(x) &= f(x+1) - f(x) \\ &= a(x-1)(x-6) - a(x-2)(x-7) \\ &= 2a(x-4) \end{aligned}$$

$g'(x) = 0$ 에서 $x = 4$

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x = 4$ 일

때 극대이면서 최대이므로

$$k = 4$$

답 4

x	...	4	...
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$		극대	

시험에 꼭 나오는 문제

● 본책 119~121쪽

0778 $\int_{-1}^3 f(x)dx = \int_{-1}^3 (4x^3 + 2kx)dx$

$$\begin{aligned} &= \left[x^4 + kx^2 \right]_{-1}^3 \\ &= 80 + 8k \end{aligned}$$

이때 $f(2) = 32 + 4k$ 이므로 $80 + 8k = 32 + 4k$

$$4k = -48 \quad \therefore k = -12$$

답 ⑤

0779 $f'(x) = 2x$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int 2x dx = x^2 + C$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^3 f(x)dx &= \int_0^3 (x^2 + C)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + Cx \right]_0^3 = 9 + 3C \end{aligned}$$

즉 $9 + 3C = 0$ 이므로 $C = -3$

따라서 $f(x) = x^2 - 3$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f(x)dx &= \int_{-1}^2 (x^2 - 3)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x \right]_{-1}^2 = -6 \end{aligned}$$

답 -6

0780 $\int_0^2 (4x+2)dx - \int_k^2 (4t+2)dt$

$$\begin{aligned} &= \int_0^2 (4x+2)dx + \int_2^k (4x+2)dx \\ &= \int_0^k (4x+2)dx = \left[2x^2 + 2x \right]_0^k \\ &= 2k^2 + 2k \end{aligned}$$

따라서 $2k^2 + 2k = 84$ 이므로

$$\begin{aligned} k^2 + k - 42 &= 0, \quad (k+7)(k-6) = 0 \\ \therefore k &= 6 \quad (\because k > 0) \end{aligned}$$

답 6

0781 $\int_{-2}^2 f(x)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx$

이때 $\int_{-2}^2 f(x)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx$ 이므로

$$\int_0^2 f(x)dx = 0$$

$$\therefore \int_{-2}^2 f(x)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx = 0$$

$f(0) = 1$ 이므로

$$f(x) = ax^2 + bx + 1 \quad (a, b \text{는 상수}, a \neq 0)$$

로 놓으면

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 f(x)dx &= \int_{-2}^0 (ax^2 + bx + 1)dx \\ &= \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + x \right]_{-2}^0 \\ &= \frac{8}{3}a - 2b + 2 = 0 \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)dx &= \int_0^2 (ax^2 + bx + 1)dx \\ &= \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + x \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3}a + 2b + 2 = 0 \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -\frac{3}{4}, \quad b = 0$$

따라서 $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 1$ 이므로

$$f(2) = -2$$

답 -2

0782 $\int_{-2}^2 f(x)dx = \int_{-2}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$

$$\begin{aligned} &= \int_{-2}^1 x^2 dx + \int_1^2 (2x - x^2)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^1 + \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_1^2 \\ &= 3 + \frac{2}{3} \\ &= \frac{11}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{11}{3}$

$$\begin{aligned}
 0783 \quad (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2+1) \\
 &= |x^2-4| \\
 &= \begin{cases} x^2-4 & (x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -x^2+4 & (-2 \leq x \leq 2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \int_1^3 (f \circ g)(x) dx &= \int_1^2 (f \circ g)(x) dx + \int_2^3 (f \circ g)(x) dx \\
 &= \int_1^2 (-x^2+4) dx + \int_2^3 (x^2-4) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3+4x \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}x^3-4x \right]_2^3 \\
 &= \frac{5}{3} + \frac{7}{3} = 4
 \end{aligned}$$

답 4

$$0784 \quad (x+a)|x-a| = \begin{cases} (x+a)(x-a) & (x \geq a) \\ -(x+a)(x-a) & (x \leq a) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 f(a) &= \int_0^1 (x+a)|x-a| dx \\
 &= \int_0^a \{-(x+a)(x-a)\} dx \\
 &\quad + \int_a^1 (x+a)(x-a) dx \\
 &= \int_0^a (a^2-x^2) dx + \int_a^1 (x^2-a^2) dx \\
 &= \left[a^2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^a + \left[\frac{1}{3}x^3 - a^2x \right]_a^1 \\
 &= \frac{2}{3}a^3 + \left(\frac{2}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3} \right) \\
 &= \frac{4}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\therefore f'(a) = 4a^2 - 2a = 2a(2a-1)$$

$$f'(a) = 0 \text{에서} \quad a = \frac{1}{2} \quad (\because 0 < a < 1)$$

a	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$f'(a)$		-	0	+	
$f(a)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	

따라서 $0 < a < 1$ 일 때, 함수 $f(a)$ 는 $a = \frac{1}{2}$ 에서 극소이면서 최소이므로 $f(a)$ 의 최솟값은

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

답 ②

0785 $|-x| = |x|$, $-x - |x| = -x|x|$
에서 $y = |x|$ 는 우함수, $y = x|x|$ 는 기함수이다.

$$\begin{aligned}
 \therefore \int_{-3}^3 (x^7 - 3x^5 - x|x| + |x| - 1) dx &= 2 \int_0^3 (|x| - 1) dx = 2 \int_0^3 (x - 1) dx \\
 &= 2 \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_0^3 \\
 &= 2 \times \frac{3}{2} = 3
 \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned}
 0786 \quad f(x) &= x^2 + \int_0^1 (3x+1)f(t) dt \\
 &= x^2 + 3x \int_0^1 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt
 \end{aligned}$$

이때

$$\int_0^1 f(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots ⑦$$

로 놓으면 $f(x) = x^2 + 3kx + k$

이것을 ⑦에 대입하면

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (t^2 + 3kt + k) dt &= k, \quad \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}kt^2 + kt \right]_0^1 = k \\
 \frac{1}{3} + \frac{5}{2}k &= k \quad \therefore k = -\frac{2}{9}
 \end{aligned}$$

따라서 $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}$ 이므로

$$f(-1) = \frac{13}{9} \quad \text{답 } \frac{13}{9}$$

0787 조건 ㉠에서

$$\int_0^1 g(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots ⑦$$

로 놓으면 $f(x) = 2x + 2k$

이때 $f(x)$ 의 한 부정적분이 $g(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int f(x) dx = \int (2x + 2k) dx \\
 &= x^2 + 2kx + C
 \end{aligned}$$

따라서 ⑦에서 $\int_0^1 (t^2 + 2kt + C) dt = k$

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{1}{3}t^3 + kt^2 + Ct \right]_0^1 &= k \\
 \frac{1}{3} + k + C &= k \quad \therefore C = -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

즉 $g(x) = x^2 + 2kx - \frac{1}{3}$ 이므로 조건 ㉡에서

$$-\frac{1}{3} - k = \frac{2}{3} \quad \therefore k = -1$$

따라서 $g(x) = x^2 - 2x - \frac{1}{3}$ 이므로

$$g(1) = -\frac{4}{3} \quad \text{답 } ③$$

0788 주어진 등식에서

$$\int_1^x f'(t) dt = 2x^3 + ax^2 - 1 \quad \dots\dots ⑦$$

⑦의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$2 + a - 1 = 0 \quad \therefore a = -1$$

⑦의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 6x^2 - 2x \\
 \therefore f'(a) &= f'(-1) = 8
 \end{aligned}$$

답 8

0789 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - \int_{-2}^x f(t) dt}{x+2} = 3$ 에서 $x \rightarrow -2$ 일 때
(분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow -2} \left\{ f(x) - \int_{-2}^x f(t) dt \right\} = 0 \text{에서}$$

$$f(-2) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - \int_{-2}^x f(t) dt}{x+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2) - \{F(x) - F(-2)\}}{x+2} \quad (\because \textcircled{7})$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} - \lim_{x \rightarrow -2} \frac{F(x) - F(-2)}{x - (-2)}$$

$$= f'(-2) - F'(-2) = f'(-2) - f(-2)$$

$$= f'(-2) \quad (\because \textcircled{7})$$

이므로 $f'(-2) = 3$ 답 3

0790 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h) - F(2)}{h}$$

$$= F'(2) = f(2)$$

$$= 4 + 2a - b$$

따라서 $4 + 2a - b = 2$ 이므로

$$2a - b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + ax - b) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 - bx \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{a}{2} - b$$

이므로

$$\frac{1}{3} + \frac{a}{2} - b = 1 \quad \therefore a - 2b = \frac{4}{3} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{을 연립하여 풀면} \quad a = -\frac{16}{9}, b = -\frac{14}{9}$$

$$\therefore b - a = \frac{2}{9} \quad \text{답 } \frac{2}{9}$$

0791 조건 (가)에 의하여

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx = 2 \int_0^1 (-x^2 + 1) dx$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

이때 조건 (나)에 의하여

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx = \int_3^5 f(x) dx = \dots = \frac{4}{3}$$

$$\text{이고 } \int_1^k f(x) dx = 8 = \frac{4}{3} \times 6 \text{이므로}$$

$$\int_1^k f(x) dx$$

$$= \int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx + \int_5^7 f(x) dx$$

$$+ \int_7^9 f(x) dx + \int_9^{11} f(x) dx + \int_{11}^{13} f(x) dx$$

$$= \int_1^{13} f(x) dx$$

$$\therefore k = 13 \quad \text{답 } 13$$

0792 $f(x) = \int_0^x (3t^2 - 6t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

x	$\dots$	0	$\dots$	2	$\dots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이므로 $f(x)$ 의 극솟값은

$$f(2) = \int_0^2 (3t^2 - 6t) dt = \left[t^3 - 3t^2 \right]_0^2 = -4$$

즉 $\alpha = 2, \beta = -4$ 이므로

$$\alpha + \beta = -2 \quad \text{답 } \textcircled{1}$$

0793 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$F'(x) = f(x) = x^3 - 12x + a$$

따라서 사차함수 $F(x)$ 가 오직 하나의 극값을 가지려면 삼차방정식 $F'(x) = 0$, 즉 $f(x) = 0$ 이 한 실근과 두 허근을 갖거나 중근과 다른 한 실근을 가져야 한다.

이때 $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$ 이므로

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

즉 $f(-2)f(2) \geq 0$ 이어야 하므로

$$(a+16)(a-16) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -16 \text{ 또는 } a \geq 16$$

따라서 양수 a 의 최솟값은 16이다. 답 16

0794 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2)$$

$$6 = 2 + k \quad \therefore k = 4$$

... 1단계

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5x & (x \geq 2) \\ x + 4 & (x \leq 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\int_{-1}^3 f(x) dx$$

$$= \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx$$

$$= \int_{-1}^2 (x+4) dx + \int_2^3 (-x^2 + 5x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + 4x \right]_{-1}^2 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 \right]_2^3$$

$$= \frac{27}{2} + \frac{37}{6}$$

$$= \frac{59}{3}$$

... 2단계

$$\text{답 } \frac{59}{3}$$

채점 요소		비율
1단계	k 의 값 구하기	50%
2단계	$\int_{-1}^3 f(x) dx$ 의 값 구하기	50%

0795 $f(-x) = -f(x)$ 이므로 $f(x)$ 는 기함수이다. ... 1단계

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-4}^5 f(x) dx &= \int_{-4}^4 f(x) dx + \int_4^5 f(x) dx \\ &= \int_4^5 f(x) dx \\ &= \int_4^0 f(x) dx + \int_0^5 f(x) dx \\ &= -\int_0^4 f(x) dx + \int_0^5 f(x) dx \\ &= -3 + (k+1) = k-2 \end{aligned} \quad \dots \text{2단계}$$

이때 $\int_{-4}^5 f(x) dx = 2k$ 이므로

$$k-2=2k \quad \therefore k=-2 \quad \dots \text{3단계}$$

답 -2

채점 요소		비율
1단계	$f(x)$ 가 기함수임을 알기	30 %
2단계	$\int_0^4 f(x) dx = 3, \int_0^5 f(x) dx = k+1$ 임을 이용하여 $\int_{-4}^5 f(x) dx$ 를 k 에 대한 식으로 나타내기	50 %
3단계	k 의 값 구하기	20 %

0796 주어진 등식의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$-2 + a - 1 = 0 \quad \therefore a = 3 \quad \dots \text{1단계}$$

따라서 주어진 등식에서

$$x \int_{-1}^x f(t) dt - \int_{-1}^x t f(t) dt = 2x^3 + 3x^2 - 1$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_{-1}^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) = 6x^2 + 6x$$

$$\therefore \int_{-1}^x f(t) dt = 6x^2 + 6x$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 12x + 6$$

$$\therefore b = f(-1) = -6 \quad \dots \text{2단계}$$

$$\therefore ab = -18 \quad \dots \text{3단계}$$

답 -18

채점 요소		비율
1단계	a 의 값 구하기	30 %
2단계	b 의 값 구하기	60 %
3단계	ab 의 값 구하기	10 %

0797 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 극솟값 $\frac{2}{3}$ 를 가지므로

$$f(2) = \frac{2}{3}$$

$$\text{즉 } \int_0^2 (t-a)(t-2) dt = \frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$\int_0^2 \{t^2 - (a+2)t + 2a\} dt = \frac{2}{3}$$

$$\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{a+2}{2}t^2 + 2at \right]_0^2 = \frac{2}{3}, \quad 2a - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore a = 1 \quad \dots \text{1단계}$$

따라서 $f(x) = \int_0^x (t-1)(t-2) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = (x-1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이므로 구하는 극댓값은

$$f(1) = \int_0^1 (t-1)(t-2) dt = \int_0^1 (t^2 - 3t + 2) dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t \right]_0^1 = \frac{5}{6}$$

... 2단계

답 $\frac{5}{6}$

채점 요소		비율
1단계	a 의 값 구하기	40 %
2단계	극댓값 구하기	60 %

0798 전략 주어진 조건을 이용하여 함수 $g(x)$ 의 식을 구하고

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = \int_{-1}^0 g(x) dx + \int_0^1 g(x) dx \text{임을 이용한다.}$$

$f(x)$ 의 최고차항이 x^3 이므로 $f'(x)$ 의 최고차항은 $3x^2$ 이다.

이때 $f'(0) = f'(2) = 0$ 이므로

$$f'(x) = 3x(x-2) = 3x^2 - 6x$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2 - 6x) dx$$

$$= x^3 - 3x^2 + C$$

따라서

$$f(x) - f(0) = (x^3 - 3x^2 + C) - C = x^3 - 3x^2,$$

$$f(x+p) - f(p)$$

$$= \{(x+p)^3 - 3(x+p)^2 + C\} - (p^3 - 3p^2 + C)$$

$$= x^3 + 3(p-1)x^2 + 3p(p-2)x$$

이므로

$$g(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & (x \leq 0) \\ x^3 + 3(p-1)x^2 + 3p(p-2)x & (x > 0) \end{cases}$$

ㄱ. $p=1$ 일 때, $x>0$ 에서 $g(x) = x^3 - 3x$ 이므로

$$g'(x) = 3x^2 - 3 \quad \therefore g'(1) = 0 \text{ (참)}$$

ㄴ. $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=0$ 에서 미분가능해야 한다.

$$\text{이때 } g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \text{이므로 } g(x) \text{는 } x=0 \text{에서 연속}$$

이고

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x) - g(0)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^3 + 3(p-1)x^2 + 3p(p-2)x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \{x^2 + 3(p-1)x + 3p(p-2)\}$$

$$= 3p(p-2),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 3x^2}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 3x) = 0$$

이므로 $3p(p-2)=0 \quad \therefore p=2 \quad (\because p>0)$

즉 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p 의 개수는 1이다. (참)

$$\square. \int_{-1}^0 g(x) dx = \int_{-1}^0 (x^3 - 3x^2) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 \right]_{-1}^0 = -\frac{5}{4}$$

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \{x^3 + 3(p-1)x^2 + 3p(p-2)x\} dx \\ = \left[\frac{1}{4}x^4 + (p-1)x^3 + \frac{3p(p-2)}{2}x^2 \right]_0^1 \\ = \frac{3}{2}p^2 - 2p - \frac{3}{4}$$

$$\therefore \int_{-1}^1 g(x) dx = \int_{-1}^0 g(x) dx + \int_0^1 g(x) dx \\ = -\frac{5}{4} + \left(\frac{3}{2}p^2 - 2p - \frac{3}{4} \right) \\ = \frac{3}{2}p^2 - 2p - 2 \\ = \frac{1}{2}(3p+2)(p-2)$$

이때 $p \geq 2$ 이면 $\frac{1}{2}(3p+2)(p-2) \geq 0$ 이므로

$$\int_{-1}^1 g(x) dx \geq 0 \quad (\text{참})$$

이상에서 $\neg$, $\sqcup$, $\sqsubset$ 모두 옳다.

답 ⑤

0799 [전략] 주어진 조건을 이용하여 $h'(x)$ 가 우함수인지 기함수인지 알아본다.

$h(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) = -h(x)$ 이므로 $h(x)$ 는 기함수이다.

따라서 $h(0)=0$ 이고 $h'(x)$ 는 우함수, $xh'(x)$ 는 기함수이므로

$$\int_{-2}^2 (x+1)h'(x) dx = \int_{-2}^2 xh'(x) dx + \int_{-2}^2 h'(x) dx \\ = 2 \int_0^2 h'(x) dx \\ = 2 \left[h(x) \right]_0^2 = 2\{h(2) - h(0)\} \\ = 2h(2)$$

즉 $2h(2)=20$ 이므로 $h(2)=10$

답 10

RPM비법노트

$f(x)$ 와 $g(x)$ 가 다항함수이므로 $h(x)=f(x)g(x)$ 는 다항함수이다.

이때 $h(x)$ 는 기함수이므로

$h(x)=ax+bx^3+cx^5+dx^7+\dots$ ($a, b, c, d, \dots$ 는 상수)로 놓으면

$$h'(x)=a+3bx^2+5cx^4+7dx^6+\dots$$

즉 $h'(x)$ 는 짝수 차수의 항과 상수항의 합으로만 이루어진 다항함수이므로 우함수이다.

0800 [전략] 함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 극댓값을 가져야 함을 이용한다.

$g(x)=\int_0^x f(t)dt - xf(x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x)=f(x)-f(x)-xf'(x) \\ = -xf'(x)$$

이때 $f(x)$ 의 최고차항이 $4x^3$ 이므로 $f'(x)$ 의 최고차항은 $12x^2$ 이다.

따라서 $g'(x)$ 는 최고차항의 계수가 -12 인 삼차함수이다.

한편 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \leq g(2)$ 이므로 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값을 갖는다.

즉 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 가지므로

$$g'(2)=0$$

따라서

$$g'(x) = -12x(x-2)(x-a) \quad (a \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

또 $g(x)$ 는 오직 한 개의 극값만 가지므로 $x=0$ 에서 극값을 갖지 않아야 한다.

따라서 방정식 $g'(x)=0$ 은 $x=0$ 을 중근으로 가져야 하므로

$$a=0$$

$$\therefore g'(x) = -12x^2(x-2) = -12x^3 + 24x^2$$

$$\therefore \int_0^1 g'(x) dx = \int_0^1 (-12x^3 + 24x^2) dx \\ = \left[-3x^4 + 8x^3 \right]_0^1 \\ = 5$$

답 5

09 정적분의 활용

교과서 문제 정복하기

본책 123쪽

0801 $\int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1 = \frac{9}{2}$
답 $\frac{9}{2}$

다른 풀이 포물선 $y = -x^2 - x + 2$ 와 x 축의 교점의 x 좌표가 -2 , 1 이므로 구하는 넓이는

$$\frac{|-1| \{1 - (-2)\}^3}{6} = \frac{9}{2}$$

0802 $-\int_0^2 (x^2 - 2x) dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3}$
답 $\frac{4}{3}$

0803 곡선 $y = x^2 - 5x + 4$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^2 - 5x + 4 = 0$ 에서

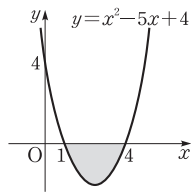
$$(x-1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 구하는 넓이는

$$-\int_1^4 (x^2 - 5x + 4) dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x \right]_1^4 = \frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$



0804 곡선 $y = x^3 - 4x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^3 - 4x = 0$ 에서

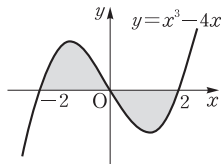
$$x(x+2)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx - \int_0^2 (x^3 - 4x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_{-2}^0 - \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_0^2 \\ &= 4 - (-4) = 8 \end{aligned}$$

답 8



0805 $\int_{-2}^1 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-2}^1 = 6$

답 6

0806 $-\int_{-1}^2 (x^3 - 3x^2) dx = -\left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 \right]_{-1}^2 = \frac{21}{4}$

답 $\frac{21}{4}$

0807 곡선 $y = x^2 + 2x - 3$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^2 + 2x - 3 = 0$ 에서

$$(x+3)(x-1) = 0 \quad \therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & -\int_{-2}^1 (x^2 + 2x - 3) dx + \int_1^2 (x^2 + 2x - 3) dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x \right]_{-2}^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x \right]_1^2 \\ &= -(-9) + \frac{7}{3} = \frac{34}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{34}{3}$

0808 $\int_{-2}^1 \{-x^2 - (x-2)\} dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1 = \frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

0809 곡선 $y = x^2 - 3x$ 와 직선

$y = -x$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - 3x = -x \text{ 에서}$$

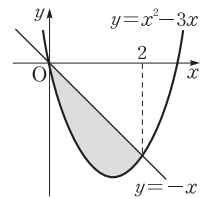
$$x^2 - 2x = 0, \quad x(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \{-x - (x^2 - 3x)\} dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{4}{3}$



0810 곡선 $y = x^3$ 과 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3 = x$ 에서

$$x^3 - x = 0$$

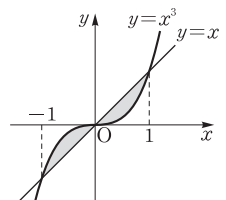
$$x(x+1)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$



0811 $\int_{-2}^2 \{(-x^2 + 7) - (x^2 - 1)\} dx$

$$= \int_{-2}^2 (-2x^2 + 8) dx = 2 \int_0^2 (-2x^2 + 8) dx$$

$$= 2 \left[-\frac{2}{3}x^3 + 8x \right]_0^2 = 2 \times \frac{32}{3} = \frac{64}{3}$$

답 $\frac{64}{3}$

0812 두 곡선 $y = x^2 - 5x + 6$,

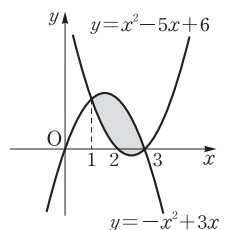
$y = -x^2 + 3x$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - 5x + 6 = -x^2 + 3x \text{ 에서}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$



따라서 구하는 넓이는

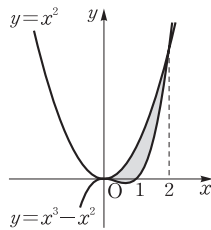
$$\begin{aligned} & \int_1^3 \{(-x^2+3x)-(x^2-5x+6)\}dx \\ &= \int_1^3 (-2x^2+8x-6)dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2-6x\right]_1^3 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

0813 두 곡선 $y=x^3-x^2$ 과 $y=x^2$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3-x^2=x^2$ 에서

$$\begin{aligned} x^3-2x^2 &= 0 \\ x^2(x-2) &= 0 \\ \therefore x &= 0 \text{ 또는 } x=2 \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \{x^2-(x^3-x^2)\}dx = \int_0^2 (-x^3+2x^2)dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

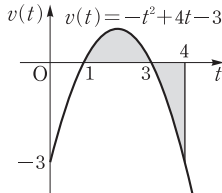


0814 (1) $0 + \int_0^2 (-t^2+4t-3)dt = \left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_0^2 = -\frac{2}{3}$

(2) $\int_1^4 (-t^2+4t-3)dt = \left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_1^4 = 0$

(3) $\int_1^4 |-t^2+4t-3|dt$

$$\begin{aligned} &= \int_1^3 (-t^2+4t-3)dt - \int_3^4 (-t^2+4t-3)dt \\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_1^3 - \left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_3^4 \\ &= \frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3} \end{aligned}$$



답 (1) $-\frac{2}{3}$ (2) 0 (3) $\frac{8}{3}$

유형 익히기

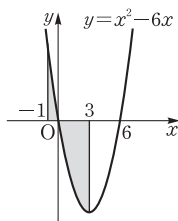
• 본책 124~131쪽

0815 곡선 $y=x^2-6x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^2-6x=0$ 에서

$$\begin{aligned} x(x-6) &= 0 \\ \therefore x &= 0 \text{ 또는 } x=6 \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 (x^2-6x)dx - \int_0^3 (x^2-6x)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3-3x^2\right]_{-1}^0 - \left[\frac{1}{3}x^3-3x^2\right]_0^3 \\ &= \frac{10}{3} - (-18) = \frac{64}{3} \end{aligned}$$



답 $\frac{64}{3}$

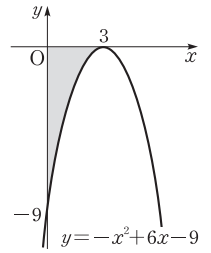
0816 곡선 $y=-x^2+6x-9$ 와 x 축의

교점의 x 좌표는 $-x^2+6x-9=0$ 에서

$$\begin{aligned} (x-3)^2 &= 0 \\ \therefore x &= 3 \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & -\int_0^3 (-x^2+6x-9)dx \\ &= -\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2-9x\right]_0^3 = 9 \end{aligned}$$



답 ④

0817 곡선 $y=x^3+x^2-2x$ 와

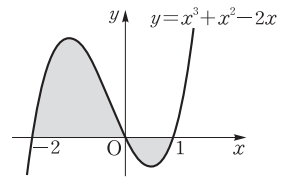
x 축의 교점의 x 좌표는

$x^3+x^2-2x=0$ 에서

$$\begin{aligned} x(x+2)(x-1) &= 0 \\ \therefore x &= -2 \text{ 또는 } x=0 \\ & \text{또는 } x=1 \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^0 (x^3+x^2-2x)dx - \int_0^1 (x^3+x^2-2x)dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^0 - \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^1 \\ &= \frac{8}{3} - \left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{37}{12} \end{aligned}$$



답 ③

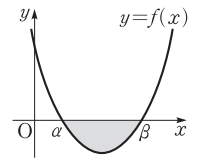
0818 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축의 교점의 x

좌표는 $(x-a)(x-\beta)=0$ 에서

$$x=a \text{ 또는 } x=\beta$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & -\int_a^\beta f(x)dx \\ &= -\left\{\int_a^0 f(x)dx + \int_0^\beta f(x)dx\right\} \\ &= -\left\{-\int_0^a f(x)dx + \int_0^\beta f(x)dx\right\} \\ &= \int_0^a f(x)dx - \int_0^\beta f(x)dx \\ &= \frac{7}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{6} \end{aligned}$$



답 $\frac{17}{6}$

0819 곡선 $y=-x^2+ax$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

$-x^2+ax=0$ 에서

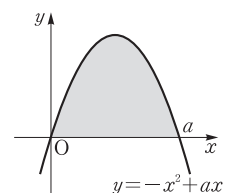
$$x(x-a)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=a$$

오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^a (-x^2+ax)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^a = \frac{a^3}{6} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a^3}{6} = \frac{32}{3}$ 이므로

$$a^3=64 \quad \therefore a=4$$

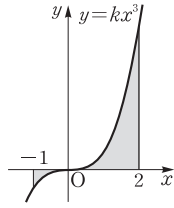


답 ②

0820 오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & -\int_{-1}^0 kx^3 dx + \int_0^2 kx^3 dx \\ &= -\left[\frac{k}{4}x^4\right]_{-1}^0 + \left[\frac{k}{4}x^4\right]_0^2 \\ &= -\left(-\frac{k}{4}\right) + 4k = \frac{17}{4}k \end{aligned}$$

따라서 $\frac{17}{4}k = 17$ 이므로 $k = 4$



답 4

0821 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 2x^2 - x$$

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$2x^2 - x = 0 \text{에서}$$

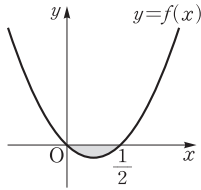
$$x(2x-1)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 넓이는

$$-\int_0^{\frac{1}{2}} (2x^2 - x) dx = -\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24}$$

답 1/24



0822 곡선 $y=x(x-3)^2$ 과 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는

$$x(x-3)^2 = x \text{에서}$$

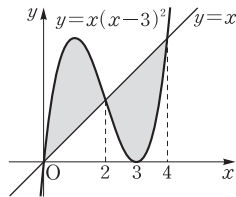
$$x(x-2)(x-4)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \{x(x-3)^2 - x\} dx + \int_2^4 \{x - x(x-3)^2\} dx \\ &= \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx + \int_2^4 (-x^3 + 6x^2 - 8x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - 4x^2\right]_2^4 \\ &= 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$

답 ④



0823 곡선 $y=-x^2+6x$ 와 직선 $y=2x-5$ 의 교점의 x 좌표는

$$-x^2+6x=2x-5 \text{에서}$$

$$x^2-4x-5=0$$

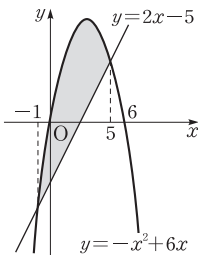
$$(x+1)(x-5)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=5$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^5 \{(-x^2+6x) - (2x-5)\} dx \\ &= \int_{-1}^5 (-x^2+4x+5) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2+5x\right]_{-1}^5 = 36 \end{aligned}$$

답 36



0824 곡선 $y=x^3+4x^2+k$ 와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^3+4x^2+k=k \text{에서}$$

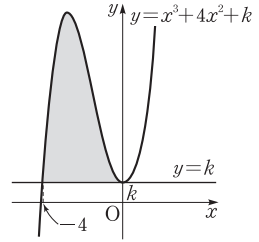
$$x^3+4x^2=0, \quad x^2(x+4)=0$$

$$\therefore x=-4 \text{ 또는 } x=0$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-4}^0 \{(x^3+4x^2+k) - k\} dx \\ &= \int_{-4}^0 (x^3+4x^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3\right]_{-4}^0 = \frac{64}{3} \end{aligned}$$

답 64/3



0825 곡선 $y=x^2-3x$ 와 직선 $y=ax$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2-3x=ax \text{에서}$$

$$x\{x-(a+3)\}=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=a+3$$

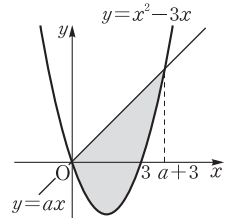
오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^{a+3} \{ax - (x^2-3x)\} dx \\ &= \int_0^{a+3} \{-x^2 + (a+3)x\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{a+3}{2}x^2\right]_0^{a+3} \\ &= \frac{(a+3)^3}{6} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{(a+3)^3}{6} = 36 \text{이므로 } (a+3)^3 = 216$$

$$a+3=6 \quad \therefore a=3$$

답 ③



0826 두 곡선 $y=x^3-4x$, $y=3x^2$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3-4x=3x^2$ 에서

$$x^3-3x^2-4x=0$$

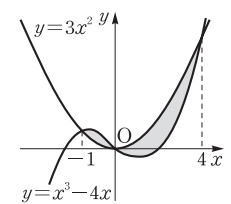
$$x(x+1)(x-4)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 \{(x^3-4x) - 3x^2\} dx + \int_0^4 \{3x^2 - (x^3-4x)\} dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3-3x^2-4x) dx + \int_0^4 (-x^3+3x^2+4x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2\right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 2x^2\right]_0^4 \\ &= \frac{3}{4} + 32 = \frac{131}{4} \end{aligned}$$

답 131/4



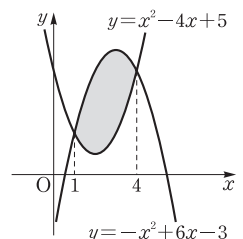
0827 두 곡선 $y=x^2-4x+5$, $y=-x^2+6x-3$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2-4x+5=-x^2+6x-3 \text{에서}$$

$$x^2-5x+4=0$$

$$(x-1)(x-4)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=4$$



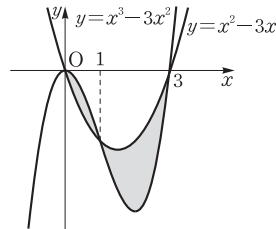
따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_1^4 \{(-x^2+6x-3)-(x^2-4x+5)\}dx \\ &= \int_1^4 (-2x^2+10x-8)dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-8x\right]_1^4=9 \end{aligned}$$

답 ①

0828 두 곡선 $y=x^3-3x^2$, $y=x^2-3x$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3-3x^2=x^2-3x$ 에서

$$\begin{aligned} x^3-4x^2+3x &= 0 \\ x(x-1)(x-3) &= 0 \\ \therefore x &= 0 \text{ 또는 } x=1 \\ &\text{또는 } x=3 \end{aligned}$$



... 1단계

따라서 두 곡선 $y=x^3-3x^2$, $y=x^2-3x$ 로 둘러싸인 두 도형의 넓이는 각각

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \{(x^3-3x^2)-(x^2-3x)\}dx \\ &= \int_0^1 (x^3-4x^2+3x)dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1=\frac{5}{12}, \\ & \int_1^3 \{(x^2-3x)-(x^3-3x^2)\}dx \\ &= \int_1^3 (-x^3+4x^2-3x)dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_1^3=\frac{8}{3} \end{aligned}$$

... 2단계

이므로 $S_1S_2=\frac{5}{12} \times \frac{8}{3}=\frac{10}{9}$

... 3단계

답 $\frac{10}{9}$

채점 요소	비율
1단계 두 곡선의 교점의 x 좌표 구하기	30%
2단계 두 도형의 넓이 구하기	60%
3단계 S_1S_2 의 값 구하기	10%

0829 곡선 $y=x^2-1$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 곡선의 방정식은

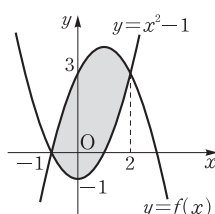
$$-y=x^2-1 \quad \therefore y=-x^2+1$$

이 곡선을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 곡선의 방정식은

$$\begin{aligned} y &= -(x-1)^2+4 \\ \therefore f(x) &= -(x-1)^2+4 = -x^2+2x+3 \end{aligned}$$

두 곡선 $y=x^2-1$, $y=f(x)$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2-1=-x^2+2x+3$ 에서

$$\begin{aligned} x^2-x-2 &= 0 \\ (x+1)(x-2) &= 0 \\ \therefore x &= -1 \text{ 또는 } x=2 \end{aligned}$$



따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^2 \{(-x^2+2x+3)-(x^2-1)\}dx \\ &= \int_{-1}^2 (-2x^2+2x+4)dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^2=9 \end{aligned}$$

답 9

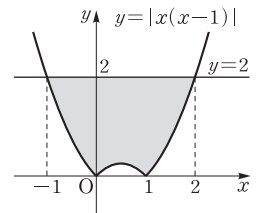
0830 $y=|x(x-1)|=\begin{cases} x(x-1) & (x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ -x(x-1) & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$

$x \leq 0$ 또는 $x \geq 1$ 일 때 곡선

$y=|x(x-1)|$ 과 직선 $y=2$ 의 교점

의 x 좌표는 $x(x-1)=2$ 에서

$$\begin{aligned} x^2-x-2 &= 0 \\ (x+1)(x-2) &= 0 \\ \therefore x &= -1 \text{ 또는 } x=2 \end{aligned}$$



따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 \{2-x(x-1)\}dx + \int_0^1 [2-\{-x(x-1)\}]dx \\ &+ \int_1^2 \{2-x(x-1)\}dx \\ &= \int_{-1}^0 (-x^2+x+2)dx + \int_0^1 (x^2-x+2)dx \\ &+ \int_1^2 (-x^2+x+2)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^1 \\ &+ \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_1^2 \\ &= \frac{7}{6} + \frac{11}{6} + \frac{7}{6} = \frac{25}{6} \end{aligned}$$

답 ④

0831 $y=x^2-2|x|-3=\begin{cases} x^2-2x-3 & (x \geq 0) \\ x^2+2x-3 & (x \leq 0) \end{cases}$

$y=x^2-2|x|-3$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표는

(i) $x \leq 0$ 일 때

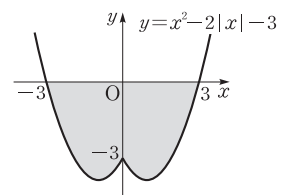
$$\begin{aligned} x^2+2x-3 &= 0 \text{에서} \quad (x+3)(x-1)=0 \\ \therefore x &= -3 \quad (\because x \leq 0) \end{aligned}$$

(ii) $x \geq 0$ 일 때

$$\begin{aligned} x^2-2x-3 &= 0 \text{에서} \quad (x+1)(x-3)=0 \\ \therefore x &= 3 \quad (\because x \geq 0) \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & -\int_{-3}^0 (x^2+2x-3)dx \\ & -\int_0^3 (x^2-2x-3)dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-3x\right]_{-3}^0 \\ & -\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right]_0^3 \\ &= -(-9)-(-9)=18 \end{aligned}$$



답 18

다른 풀이 $y=x^2-2|x|-3$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

$$2\left[-\int_{-3}^0 (x^2+2x-3)dx\right] = -2\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-3x\right]_{-3}^0 = -2 \times (-9) = 18$$

0832 $y=|x^2-ax|=\begin{cases} x^2-ax & (x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq a) \\ -x^2+ax & (0 \leq x \leq a) \end{cases}$

곡선 $y=|x^2-ax|$ 와 직선 $y=ax$ 의 교점의 x 좌표는

(i) $x \leq 0$ 또는 $x \geq a$ 일 때

$$x^2-ax=ax \text{에서} \quad x^2-2ax=0$$

$$x(x-2a)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2a$$

(ii) $0 \leq x \leq a$ 일 때

$$-x^2+ax=ax \text{에서}$$

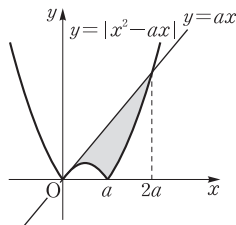
$$x^2=0 \quad \therefore x=0$$

따라서 곡선 $y=|x^2-ax|$ 와 직선 $y=ax$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^a \{ax - (-x^2+ax)\}dx \\ & + \int_a^{2a} \{ax - (x^2-ax)\}dx \\ & = \int_0^a x^2 dx \\ & + \int_a^{2a} (-x^2+2ax)dx \\ & = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a + \left[-\frac{1}{3}x^3+ax^2\right]_a^{2a} \\ & = \frac{1}{3}a^3 + \frac{2}{3}a^3 = a^3 \end{aligned}$$

즉 $a^3 = \frac{27}{8}$ 이므로 $a = \frac{3}{2}$

답 ③



0833 $f(x)=-x^3$ 으로 놓으면

$$f'(x)=-3x^2$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(-1)=-3$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-1=-3(x+1)$$

$$\therefore y=-3x-2$$

곡선 $y=-x^3$ 과 직선 $y=-3x-2$ 의 교점의 x 좌표는 $-x^3=-3x-2$ 에서

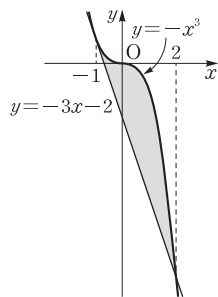
$$x^3-3x-2=0, \quad (x+1)^2(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^2 \{-x^3 - (-3x-2)\}dx \\ & = \int_{-1}^2 (-x^3+3x+2)dx \\ & = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^2 = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

답 ③



0834 $f(x)=x^2+2$ 로 놓으면

$$f'(x)=2x$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 3)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=2$$

이므로 접선의 방정식은

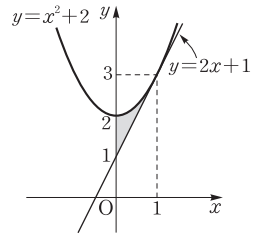
$$y-3=2(x-1)$$

$$\therefore y=2x+1$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \{(x^2+2) - (2x+1)\}dx = \int_0^1 (x^2-2x+1)dx \\ & = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right]_0^1 \\ & = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

답 1/3



0835 $f(x)=x^2$ 으로 놓으면

$$f'(x)=2x$$

접점의 좌표를 (t, t^2) 이라 하면 이 점에서 접선의 기울기는

$f'(t)=2t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-t^2=2t(x-t) \quad \therefore y=2tx-t^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(1, -3)$ 을 지나므로

$$-3=2t-t^2$$

$$t^2-2t-3=0, \quad (t+1)(t-3)=0$$

$$\therefore t=-1 \text{ 또는 } t=3$$

$t=-1$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서

$$y=-2x-1$$

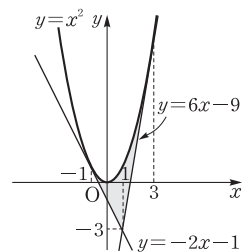
$t=3$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서

$$y=6x-9$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \{x^2 - (-2x-1)\}dx \\ & + \int_1^3 \{x^2 - (6x-9)\}dx \\ & = \int_{-1}^1 (x^2+2x+1)dx + \int_1^3 (x^2-6x+9)dx \\ & = 2\int_0^1 (x^2+1)dx + \int_1^3 (x^2-6x+9)dx \\ & = 2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_1^3 \\ & = 2 \times \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

답 ⑤



RPM 비법 노트

곡선 밖의 한 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$ 밖의 점 (x_1, y_1) 에서 이 곡선에 그은 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

- (i) 접점의 좌표를 $(t, f(t))$ 로 놓고 접선의 기울기 $f'(t)$ 를 구한다.
- (ii) 직선 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ 가 점 (x_1, y_1) 을 지남을 이용하여 t 의 값을 구한다.
- (iii) (ii)에서 구한 t 의 값을 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ 에 대입한다.

0836 곡선 $y=x(x-2)(x-k)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x(x-2)(x-k)=0$ 에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=k$$

오른쪽 그림에서 색칠한 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\int_0^k x(x-2)(x-k)dx=0$$

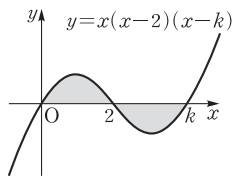
$$\int_0^k \{x^3-(k+2)x^2+2kx\}dx$$

$$=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{k+2}{3}x^3 + kx^2 \right]_0^k = 0$$

$$-\frac{k^4}{12} + \frac{k^3}{3} = 0, \quad k^3(k-4)=0$$

$$\therefore k=4 (\because k>2)$$



답 4

0837 두 곡선 $y=x^2(x-4)$, $y=ax(x-4)$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2(x-4)=ax(x-4)$ 에서

$$x(x-4)(x-a)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=4 \text{ 또는 } x=a$$

이때 색칠한 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\int_0^4 \{x^2(x-4)-ax(x-4)\}dx=0$$

$$\int_0^4 \{x^3-(4+a)x^2+4ax\}dx=0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4+a}{3}x^3 + 2ax^2 \right]_0^4 = 0$$

$$-\frac{64}{3} + \frac{32}{3}a = 0 \quad \therefore a=2$$

답 2

0838 $A:B=1:2$ 에서

$$B=2A$$

이때 곡선

$$y=x^2-2x+p=(x-1)^2+p-1$$

직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 A

와 같다.

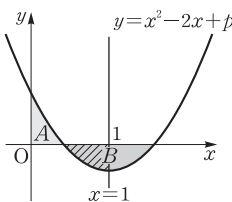
즉 곡선 $y=x^2-2x+p$ 와 x 축, y 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\int_0^1 (x^2-2x+p)dx=0$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + px \right]_0^1 = 0$$

$$-\frac{2}{3} + p = 0 \quad \therefore p = \frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$



0839 곡선 $y=x^2-2x$ 와 직선 $y=mx$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2-2x=mx$ 에서

$$x^2-(m+2)x=0, \quad x\{x-(m+2)\}=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=m+2$$

오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$$\int_0^{m+2} \{mx-(x^2-2x)\}dx$$

$$= \int_0^{m+2} \{-x^2+(m+2)x\}dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{m+2}{2}x^2 \right]_0^{m+2}$$

$$= \frac{1}{6}(m+2)^3$$

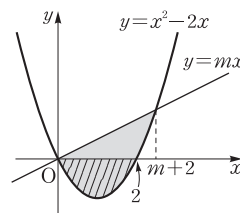
위의 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는

$$-\int_0^2 (x^2-2x)dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

따라서 $\frac{1}{6}(m+2)^3 = 2 \times \frac{4}{3}$ 이므로

$$(m+2)^3 = 16$$

답 16



0840 곡선 $y=-x^2+3x$ 와 직선 $y=mx$ 의 교점의 x 좌표는 $-x^2+3x=mx$ 에서

$$x^2+(m-3)x=0, \quad x(x+m-3)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=3-m$$

오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는

$$\int_0^{3-m} \{(-x^2+3x)-mx\}dx$$

$$= \int_0^{3-m} \{-x^2+(3-m)x\}dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3-m}{2}x^2 \right]_0^{3-m}$$

$$= \frac{1}{6}(3-m)^3$$

위의 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

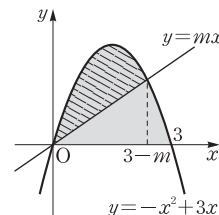
$$\int_0^3 (-x^2+3x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

따라서 $\frac{9}{2} = 2 \times \frac{1}{6}(3-m)^3$ 이므로

$$(3-m)^3 = \frac{27}{2}, \quad 27-27m+9m^2-m^3 = \frac{27}{2}$$

$$\therefore m^3-9m^2+27m = \frac{27}{2}$$

답 $\frac{27}{2}$



09

정적분의 활용

채점 요소	비율
1단계 곡선과 직선의 교점의 x 좌표 구하기	20%
2단계 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	30%
3단계 곡선과 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	30%
4단계 m^3-9m^2+27m 의 값 구하기	20%

0841 두 곡선 $y=4x-x^2$, $y=ax^2$ 의 교점의 x 좌표는 $4x-x^2=ax^2$ 에서

$$(a+1)x^2-4x=0, \quad x\{(a+1)x-4\}=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{4}{a+1}$$

오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는

$$\int_0^{\frac{4}{a+1}} \{(4x-x^2)-ax^2\}dx$$

$$= \int_0^{\frac{4}{a+1}} \{4x-(a+1)x^2\}dx$$

$$= \left[2x^2 - \frac{a+1}{3}x^3 \right]_0^{\frac{4}{a+1}} = \frac{32}{3(a+1)^2}$$

위의 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$$\int_0^4 (4x-x^2)dx = \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 = \frac{32}{3}$$

따라서 $\frac{32}{3} = 2 \times \frac{32}{3(a+1)^2}$ 이므로

$$(a+1)^2 = 2, \quad a+1 = \sqrt{2} \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore a = \sqrt{2} - 1$$

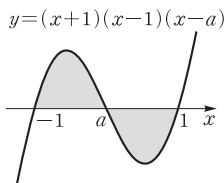
답 ①

0842 곡선 $y=(x+1)(x-1)(x-a)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $(x+1)(x-1)(x-a)=0$ 에서

$$x=-1 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=a$$

따라서 곡선

$y=(x+1)(x-1)(x-a)$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$ 라 하면



$$S(a)$$

$$= \int_{-1}^a (x+1)(x-1)(x-a)dx$$

$$- \int_a^1 (x+1)(x-1)(x-a)dx$$

$$= \int_{-1}^a (x^3 - ax^2 - x + a)dx$$

$$- \int_a^1 (x^3 - ax^2 - x + a)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + ax \right]_{-1}^a$$

$$- \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + ax \right]_a^1$$

$$= -\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{3}a + \frac{1}{4}$$

$$- \left(\frac{1}{12}a^4 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{3}a - \frac{1}{4} \right)$$

$$= -\frac{1}{6}a^4 + a^2 + \frac{1}{2}$$

$$\therefore S'(a) = -\frac{2}{3}a^3 + 2a$$

$$= -\frac{2}{3}a(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})$$

$$S'(a)=0 \text{에서 } a=0 \quad (\because -1 < a < 1)$$

a	-1	...	0	...	1
$S'(a)$		-	0	+	
$S(a)$		\searrow	극소	\nearrow	

따라서 $S(a)$ 는 $a=0$ 일 때 극소이면서 최소이다.

답 0

0843 두 곡선 $y=\frac{1}{k}x^3$, $y=-9kx^3$

과 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1 \left\{ \frac{1}{k}x^3 - (-9kx^3) \right\} dx$$

$$= \left(9k + \frac{1}{k} \right) \int_0^1 x^3 dx$$

$$= \left(9k + \frac{1}{k} \right) \times \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} \left(9k + \frac{1}{k} \right)$$

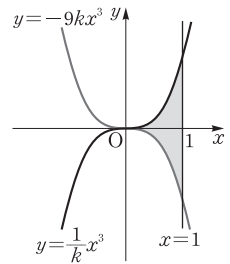
이때 $9k > 0$, $\frac{1}{k} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{4} \left(9k + \frac{1}{k} \right) \geq \frac{1}{4} \times 2 \sqrt{9k \times \frac{1}{k}} = \frac{3}{2}$$

(단, 등호는 $k=\frac{1}{3}$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{3}{2}$ 이다.

답 $\frac{3}{2}$



0844 $f(x)=x^2-1$ 로 놓으면

$$f'(x)=2x$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (t, t^2-1) 에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=2t$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^2-1)=2t(x-t) \quad \therefore y=2tx-t^2-1$$

오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$$\int_0^1 \{ (x^2-1) - (2tx-t^2-1) \} dx$$

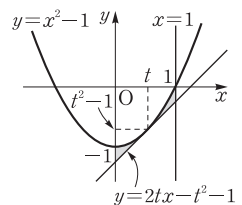
$$= \int_0^1 (x^2 - 2tx + t^2) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - tx^2 + t^2x \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - t + t^2 = \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{12}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{1}{12}$ 이다.

답 $\frac{1}{12}$



0845 $v(t)=0$ 에서 $t^2-7t+10=0$

$$(t-2)(t-5)=0 \quad \therefore t=2 \text{ 또는 } t=5$$

따라서 시각 $t=5$ 에서 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌므로

이때의 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^5 (t^2 - 7t + 10)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 10t \right]_0^5 = \frac{25}{6}$$

답 ②

참고 움직이던 물체가 운동 방향을 바꿀 때의 물체의 속도는 0이다.

0846 시각 $t=4$ 에서의 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^2 (-t^2 + 2t)dt + \int_2^4 (t^2 - 3t + 2)dt$$

$$= \left[-\frac{1}{3}t^3 + t^2 \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t \right]_2^4$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{14}{3} = 6$$

답 6

0847 점 P가 출발한 후 다시 원점으로 되돌아올 때까지 걸리는 시간을 a 라 하면 $t=0$ 에서 $t=a$ 까지 점 P의 위치의 변화량은 0이므로

$$\int_0^a (t^2 - 2t) dt = 0, \quad \left[\frac{1}{3} t^3 - t^2 \right]_0^a = 0$$

$$\frac{1}{3} a^3 - a^2 = 0, \quad a^2(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

따라서 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |t^2 - 2t| dt = \int_0^2 (-t^2 + 2t) dt + \int_2^3 (t^2 - 2t) dt$$

$$= \left[-\frac{1}{3} t^3 + t^2 \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3} t^3 - t^2 \right]_2^3$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

0848 물체를 쏘아 올린 후 5초 동안 움직인 거리는

$$\int_0^5 |15 - 10t| dt$$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}} (15 - 10t) dt + \int_{\frac{3}{2}}^5 (-15 + 10t) dt$$

$$= \left[15t - 5t^2 \right]_0^{\frac{3}{2}} + \left[-15t + 5t^2 \right]_{\frac{3}{2}}^5$$

$$= \frac{45}{4} + \frac{245}{4} = \frac{145}{2} \text{ (m)}$$

답 $\frac{145}{2}$ m

0849 $v(t)=0$ 에서 $30 - 3t = 0$
 $\therefore t = 10$

따라서 열차는 제동을 건 지 10초 후에 정지하므로 정지할 때까지 달린 거리는

$$\int_0^{10} (30 - 3t) dt = \left[30t - \frac{3}{2} t^2 \right]_0^{10}$$

$$= 150 \text{ (m)}$$

답 ②

0850 물체를 쏘아 올린 지 3초 후의 지면으로부터의 높이는

$$25 + \int_0^3 (20 - 10t) dt = 25 + \left[20t - 5t^2 \right]_0^3$$

$$= 25 + 15 = 40 \text{ (m)}$$

$$\therefore h_1 = 40$$

... 1단계

$v(t)=0$ 에서 $20 - 10t = 0 \quad \therefore t = 2$

따라서 $t=2$ 일 때 최고 높이에 도달하므로 이때의 지면으로부터의 높이는

$$25 + \int_0^2 (20 - 10t) dt = 25 + \left[20t - 5t^2 \right]_0^2$$

$$= 25 + 20 = 45 \text{ (m)}$$

$$\therefore h_2 = 45$$

... 2단계

$$\therefore h_1 + h_2 = 40 + 45 = 85$$

... 3단계

답 85

채점 요소	비율
1단계 h_1 의 값 구하기	40 %
2단계 h_2 의 값 구하기	50 %
3단계 $h_1 + h_2$ 의 값 구하기	10 %

0851 $v(t)=0$ 에서 $4t - t^2 = 0$

$$t(4 - t) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = 4$$

따라서 물이 흐르기 시작한 지 4초 후에 물이 멈추므로 구하는 물의 양은

$$\pi \int_0^4 (4t - t^2) dt = \pi \left[2t^2 - \frac{1}{3} t^3 \right]_0^4$$

$$= \frac{32}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

답 $\frac{32}{3} \pi \text{ cm}^3$

0852 출발한 후 t 초 동안 두 자동차 A, B의 위치의 변화량을 각각 x_A m, x_B m라 하면

$$x_A = \int_0^t 2t dt = \left[t^2 \right]_0^t = t^2,$$

$$x_B = \int_0^t (t+1) dt = \left[\frac{1}{2} t^2 + t \right]_0^t = \frac{1}{2} t^2 + t$$

두 자동차 A, B가 만나려면 $x_A = 24 + x_B$ 에서

$$t^2 = 24 + \frac{1}{2} t^2 + t, \quad t^2 - 2t - 48 = 0$$

$$(t-8)(t+6) = 0 \quad \therefore t = 8 \quad (\because t > 0)$$

따라서 두 자동차 A, B가 만나는 것은 출발한 지 8초 후이다.

답 ③

0853 고속열차가 출발한 후 4 km를 달리는 데 걸리는 시간을 x 분이라 하면

$$\int_0^x \left(\frac{3}{4} t^2 + \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \right) dt = 4$$

$$\left[\frac{1}{4} t^3 + \frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{2} t \right]_0^x = 4$$

$$\frac{1}{4} x^3 + \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x = 4$$

$$x^3 + x^2 + 2x - 16 = 0, \quad (x-2)(x^2 + 3x + 8) = 0$$

$$\therefore x = 2 \quad (\because x^2 + 3x + 8 > 0)$$

이때 $v(2) = \frac{9}{2}$ 이므로 2분 후부터는 속도가 $\frac{9}{2}$ km/min으로 일정하다.

따라서 열차가 출발한 후 10분 동안 달린 거리는

$$4 + \int_2^{10} \frac{9}{2} dt = 4 + \left[\frac{9}{2} t \right]_2^{10} = 4 + 36 = 40 \text{ (km)}$$

답 40 km

0854 시각 $t=0$ 에서 $t=6$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^6 |v(t)| dt = \frac{1}{2} \times (1+4) \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 7$$

답 7

0855 시각 $t=2$ 에서의 점 P의 위치는

$$-3 + \int_0^2 v(t) dt = -3 + \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = -2$$

$$\therefore a = -2$$

... 1단계

시각 $t=4$ 에서의 점 P의 위치는

$$-3 + \int_0^4 v(t)dt = -3 + \frac{1}{2} \times 2 \times 1 - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = -3$$

$\therefore b = -3$... 2단계

$\therefore a + b = -5$... 3단계

답 -5

채점 요소	비율
1단계 a의 값 구하기	40 %
2단계 b의 값 구하기	40 %
3단계 a+b의 값 구하기	20 %

0856 시각 $t=7$ 에서의 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^7 v(t)dt$$

$$= \frac{1}{2} \times (1+3) \times k - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times k$$

$$= 3k - 2$$

따라서 $3k - 2 = 10$ 이므로

$$k = 4$$

답 4

0857 ㄱ. 시각 $t=4$ 에서의 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^4 v(t)dt = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 0 \text{ (참)}$$

ㄴ. 점 P는 $t=2$ 와 $t=6$ 에서 운동 방향을 바꾸므로 2번 바꾼다. (거짓)

ㄷ. 시각 $t=1$ 에서의 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^1 v(t)dt = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$$

시각 $t=7$ 에서의 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^7 v(t)dt$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2$$

$$= -1$$

따라서 시각 $t=1$ 에서와 시각 $t=7$ 에서의 점 P의 위치는 다르다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

다른 풀이 ㄷ. 시각 $t=1$ 에서 $t=7$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^7 v(t)dt$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2$$

$$= -2$$

따라서 위치의 변화량이 0이 아니므로 시각 $t=1$ 에서와 시각 $t=7$ 에서의 점 P의 위치는 다르다. (거짓)

0858 ② $\int_0^c v(t)dt = 0$ 이면 시각 $t=0$ 에서 $t=c$ 까지 점 P의

위치의 변화량이 0이므로 시각 $t=c$ 에서 점 P는 원점에 있다.

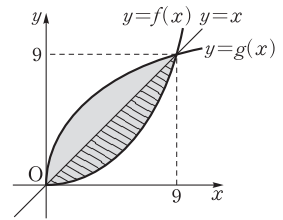
③ $v(a) > 0$ 이므로 시각 $t=a$ 에서 점 P는 양의 방향으로 움직이고 있다.

⑤ $|v(c)| > v(a)$ 이면 시각 $t=c$ 에서 $|v(t)|$ 의 값이 가장 크므로 점 P의 속력은 시각 $t=c$ 에서 최대이다.

답 ③

0859 두 곡선 $y=f(x)$ 와

$y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.



곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는 $\frac{1}{9}x^2 = x$ 에서

$$x^2 - 9x = 0, \quad x(x-9) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 9$$

따라서 구하는 넓이는

$$2 \int_0^9 \left(x - \frac{1}{9}x^2 \right) dx = 2 \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{27}x^3 \right]_0^9$$

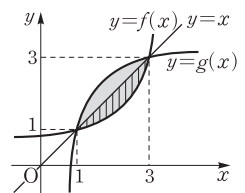
$$= 2 \times \frac{27}{2} = 27$$

답 ②

0860 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$

는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는 직선 $y=x$ 에 의하여 이등분된다.

이때 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는



$$\int_1^3 \{x - f(x)\} dx = \int_1^3 x dx - \int_1^3 f(x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_1^3 - 3 = 4 - 3 = 1$$

따라서 구하는 넓이는 빗금 친 부분의 넓이의 2배이므로

$$2 \times 1 = 2$$

답 2

0861 $f(0)=1$, $f(2)=13$ 이므로

곡선 $y=f(x)$ 는 두 점 $(0, 1)$, $(2, 13)$ 을 지나고 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 오른쪽 그림에서

$$(A \text{의 넓이}) = (B \text{의 넓이})$$

이므로 구하는 넓이는

$$(A \text{의 넓이}) = (B \text{의 넓이})$$

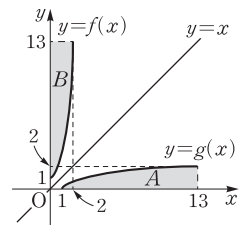
$$= 2 \times 13 - \int_0^2 f(x) dx$$

$$= 26 - \int_0^2 (3x^2 + 1) dx$$

$$= 26 - \left[x^3 + x \right]_0^2$$

$$= 26 - 10 = 16$$

답 ⑤



0862 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 오른쪽 그림에서

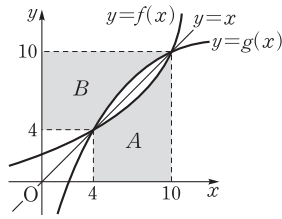
$$(B \text{의 넓이}) = (A \text{의 넓이}) \\ = S$$

이므로

$$\int_4^{10} g(x)dx = 10^2 - 4^2 - (B \text{의 넓이}) \\ = 84 - S$$

$$\therefore a = 84$$

답 ①



0863 $f(1)=1$, $f(9)=3$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 두 점 $(1, 1)$, $(9, 3)$ 을 지나고 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

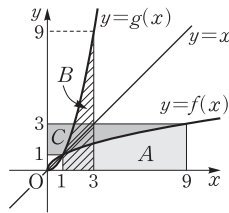
따라서 오른쪽 그림에서

$$(B \text{의 넓이}) = (C \text{의 넓이})$$

이므로

$$\int_1^9 f(x)dx + \int_1^3 g(x)dx \\ = (A \text{의 넓이}) + (B \text{의 넓이}) \\ = (A \text{의 넓이}) + (C \text{의 넓이}) \\ = 9 \times 3 - 1 \times 1 = 26$$

답 26



0864 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

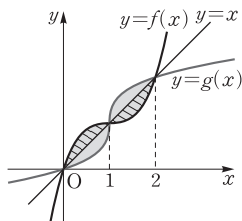
곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3 - 3x^2 + 3x = x$ 에서

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0, \quad x(x-1)(x-2) = 0 \\ \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 구하는 넓이는

$$2 \int_0^2 |x - f(x)| dx \\ = 2 \left[\int_0^1 \{(x^3 - 3x^2 + 3x) - x\} dx \right. \\ \left. + \int_1^2 \{x - (x^3 - 3x^2 + 3x)\} dx \right] \\ = 2 \left\{ \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x) dx \right\} \\ = 2 \left[\left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 \right)_0^1 + \left(-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2 \right)_1^2 \right] \\ = 2 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = 1$$

답 ④



시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 132~134쪽

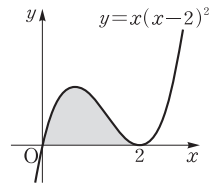
0865 곡선 $y=x(x-2)^2$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는 $x(x-2)^2=0$ 에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 x(x-2)^2 dx \\ = \int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 4x) dx \\ = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 \\ = \frac{4}{3}$$

답 ②



0866 곡선 $y=x^2-2x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^2-2x=0$ 에서

$$x(x-2)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

주어진 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$$-\int_0^2 (x^2 - 2x) dx + \int_2^a (x^2 - 2x) dx \\ = -\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_2^a \\ = \frac{4}{3} + \left(\frac{1}{3}a^3 - a^2 + \frac{4}{3} \right) \\ = \frac{1}{3}a^3 - a^2 + \frac{8}{3}$$

따라서 $\frac{1}{3}a^3 - a^2 + \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$ 이므로

$$\frac{1}{3}a^3 - a^2 = 0, \quad a^2(a-3) = 0 \\ \therefore a = 3 \quad (\because a > 2)$$

답 3

0867 곡선 $y=-x^2+5nx$ 와 직선 $y=2nx$ 의 교점의 x 좌표는 $-x^2+5nx=2nx$ 에서

$$x^2 - 3nx = 0, \quad x(x-3n) = 0 \\ \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 3n$$

오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

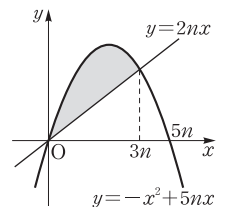
$$S_n \\ = \int_0^{3n} \{(-x^2 + 5nx) - 2nx\} dx \\ = \int_0^{3n} (-x^2 + 3nx) dx \\ = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}nx^2 \right]_0^{3n} \\ = \frac{9}{2}n^3$$

따라서 $S_n > 180$ 에서 $\frac{9}{2}n^3 > 180$

$$\therefore n^3 > 40$$

이때 $3^3=27$, $4^3=64$ 이므로 자연수 n 의 최솟값은 4이다.

답 4



0868 두 곡선 $y=x^3-2x$, $y=x^2$ 의

교점의 x 좌표는 $x^3-2x=x^2$ 에서

$$x^3-x^2-2x=0$$

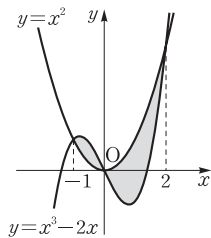
$$x(x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 \{(x^3-2x)-x^2\}dx + \int_0^2 \{x^2-(x^3-2x)\}dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3-x^2-2x)dx + \int_0^2 (-x^3+x^2+2x)dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

답 ④



0869 $y=2x|x-1| = \begin{cases} 2x(x-1) & (x \geq 1) \\ -2x(x-1) & (x \leq 1) \end{cases}$

곡선 $y=2x|x-1|$ 과 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는

(i) $x \leq 1$ 일 때

$$-2x(x-1)=x \text{에서}$$

$$2x^2-x=0, \quad x(2x-1)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{1}{2}$$

(ii) $x \geq 1$ 일 때

$$2x(x-1)=x \text{에서}$$

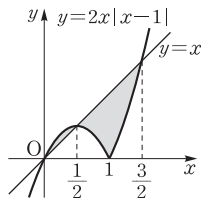
$$2x^2-3x=0, \quad x(2x-3)=0$$

$$\therefore x=\frac{3}{2} \quad (\because x \geq 1)$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{1}{2}} \{-2x(x-1)-x\}dx \\ &+ \int_{\frac{1}{2}}^1 [x - \{-2x(x-1)\}]dx \\ &+ \int_1^{\frac{3}{2}} \{x - 2x(x-1)\}dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (-2x^2+x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x^2-x)dx \\ &+ \int_1^{\frac{3}{2}} (-2x^2+3x)dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &+ \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_1^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{24} + \frac{5}{24} + \frac{7}{24} = \frac{13}{24} \end{aligned}$$

답 13/24



0870 $f(x)=x^2$ 으로 놓으면 $f'(x)=2x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=2$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-1=2(x-1) \quad \therefore y=2x-1$$

곡선 $y=ax^2-1$ ($a>0$)과 직선 $y=2x-1$ 의 교점의 x 좌표는

$$ax^2-1=2x-1 \text{에서}$$

$$ax^2-2x=0, \quad x(ax-2)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{2}{a}$$

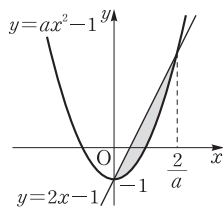
오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{2}{a}} \{(2x-1)-(ax^2-1)\}dx \\ &= \int_0^{\frac{2}{a}} (2x-ax^2)dx \\ &= \left[x^2 - \frac{a}{3}x^3 \right]_0^{\frac{2}{a}} = \frac{4}{3a^2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{4}{3a^2} = \frac{4}{3} \text{이므로 } a^2=1$$

$$\therefore a=1 \quad (\because a>0)$$

답 ②



0871 $y=2|x| = \begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ -2x & (x \leq 0) \end{cases}$

이므로 함수 $y=ax^2+1$ 의 그래프와 직선 $y=2x$ 가 점 B에서 접한다.

따라서 방정식 $ax^2+1=2x$, 즉 $ax^2-2x+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - a = 0 \quad \therefore a=1$$

즉 점 B의 x 좌표는 $x^2-2x+1=0$ 에서

$$(x-1)^2=0 \quad \therefore x=1$$

이때 두 함수 $y=x^2+1$ 과 $y=2|x|$ 의 그래프는 모두 y 축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^1 \{(x^2+1)-2x\}dx \\ &= 2 \int_0^1 (x^2-2x+1)dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right]_0^1 = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

답 2/3

0872 색칠한 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\begin{aligned} & \int_0^k (-x^2+3x)dx=0, \quad \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^k = 0 \\ & -\frac{1}{3}k^3 + \frac{3}{2}k^2=0, \quad k^2(2k-9)=0 \\ & \therefore k=\frac{9}{2} \quad (\because k>3) \end{aligned}$$

답 9/2

0873 $A=B$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx=0 \\ & \int_0^2 (x^3+2x^2-k)dx=0 \\ & \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - kx \right]_0^2 = 0 \\ & \frac{28}{3} - 2k = 0 \quad \therefore k=\frac{14}{3} \end{aligned}$$

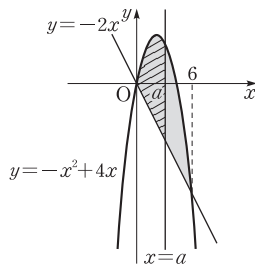
답 ④

0874 곡선 $y = -x^2 + 4x$ 와 직선 $y = -2x$ 의 교점의 x 좌표는 $-x^2 + 4x = -2x$ 에서

$$x^2 - 6x = 0, \quad x(x-6) = 0 \\ \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 6$$

오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$$\int_0^6 \{(-x^2 + 4x) - (-2x)\} dx \\ = \int_0^6 (-x^2 + 6x) dx \\ = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^6 \\ = 36$$



위의 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는

$$\int_0^a \{(-x^2 + 4x) - (-2x)\} dx = \int_0^a (-x^2 + 6x) dx \\ = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^a \\ = -\frac{1}{3}a^3 + 3a^2$$

따라서 $36 = 2 \times \left(-\frac{1}{3}a^3 + 3a^2 \right)$ 이므로

$$a^3 - 9a^2 + 54 = 0, \quad (a-3)(a^2 - 6a - 18) = 0 \\ \therefore a = 3 \quad (\because 0 < a < 6)$$

답 3

다른 풀이 위의 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$$\int_0^6 \{(-x^2 + 4x) - (-2x)\} dx = \int_0^6 (-x^2 + 6x) dx$$

이때 $\int_0^6 (-x^2 + 6x) dx$ 의 값은 곡선

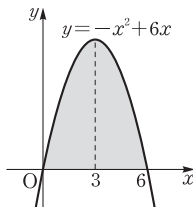
$y = -x^2 + 6x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

이때 곡선

$$y = -x^2 + 6x = -(x-3)^2 + 9$$

는 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭이므로

$$a = 3$$



0875 두 점 P, Q의 t 초 후의 위치를 각각 x_P, x_Q 라 하면

$$x_P = 0 + \int_0^t t(t-1) dt \\ = \int_0^t (t^2 - t) dt \\ = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^t = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2,$$

$$x_Q = 0 + \int_0^t (2t+3) dt \\ = \left[t^2 + 3t \right]_0^t = t^2 + 3t$$

두 점 P, Q가 다시 만나려면 $x_P = x_Q$ 에서

$$\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 = t^2 + 3t, \quad 2t^3 - 9t^2 - 18t = 0 \\ t(2t+3)(t-6) = 0 \\ \therefore t = 6 \quad (\because t > 0)$$

따라서 두 점 P, Q는 시각 $t=6$ 에서 다시 만난다.

답 ③

0876 $\neg, v(0) = 4 > 0$

$$v(t) < 0 \text{에서} \quad t^2 - 5t + 4 < 0$$

$$(t-1)(t-4) < 0 \quad \therefore 1 < t < 4$$

따라서 점 P가 출발할 때의 운동 방향과 반대 방향으로 움직이는 것은 1초 후부터 4초 후까지의 3초 동안이다. (거짓)

ㄴ. 출발한 지 2초 후의 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^2 v(t) dt = \int_0^2 (t^2 - 5t + 4) dt \\ = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 4t \right]_0^2 \\ = \frac{2}{3} \quad (\text{참})$$

ㄷ. 출발한 후 3초 동안 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |t^2 - 5t + 4| dt \\ = \int_0^1 (t^2 - 5t + 4) dt + \int_1^3 (-t^2 + 5t - 4) dt \\ = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 4t \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 4t \right]_1^3 \\ = \frac{11}{6} + \frac{10}{3} = \frac{31}{6} \quad (\text{거짓})$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ①

0877 $\neg, v(2) = 1 > 0, v(4) = -1 < 0$ 이므로 시각 $t=2$ 에서와 시각 $t=4$ 에서의 물체의 운동 방향은 서로 반대이다. (참)

ㄴ. 시각 $t=3$ 에서의 물체의 위치는

$$0 + \int_0^3 v(t) dt = \frac{1}{2} \times (1+3) \times 1 = 2 \quad (\text{거짓})$$

ㄷ. 시각 $t=1$ 에서의 물체의 위치는

$$0 + \int_0^1 v(t) dt = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

시각 $t=5$ 에서의 물체의 위치는

$$0 + \int_0^5 v(t) dt \\ = \frac{1}{2} \times (1+3) \times 1 - \frac{1}{2} \times (2+1) \times 1 \\ = \frac{1}{2}$$

따라서 시각 $t=1$ 에서와 시각 $t=5$ 에서의 물체의 위치는 같다. (참)

ㄹ. 시각 $t=1$ 에서 $t=4$ 까지 물체가 움직인 거리는

$$\int_1^4 |v(t)| dt = \frac{1}{2} \times (1+2) \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \\ = 2 \quad (\text{참})$$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \text{ㄷ}, \text{ㄹ}$ 이다.

답 $\neg, \text{ㄷ}, \text{ㄹ}$

다른 풀이 ㄷ. 시각 $t=1$ 에서 $t=5$ 까지 물체의 위치의 변화량은

$$\int_1^5 v(t) dt = \frac{1}{2} \times (1+2) \times 1 - \frac{1}{2} \times (2+1) \times 1 \\ = 0$$

따라서 시각 $t=1$ 에서와 시각 $t=5$ 에서의 물체의 위치는 같다. (참)

0878 $f(0)=2, f(2)=6$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 두 점 $(0, 2), (2, 6)$ 을 지나고 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 오른쪽 그림에서

(B의 넓이)=(C의 넓이)

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^2 f(x)dx + \int_2^6 g(x)dx &= (\text{A의 넓이}) + (\text{B의 넓이}) \\ &= (\text{A의 넓이}) + (\text{C의 넓이}) \\ &= 2 \times 6 = 12\end{aligned}$$

답 12

0879 주어진 그래프에서

$$f(x) = k(x-1)(x-3) \quad (k > 0)$$

으로 놓으면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$f(0)=3 \quad \therefore k=1$$

$$\therefore f(x) = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3 \quad \dots \text{1단계}$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx - \int_1^3 (x^2 - 4x + 3)dx \\ = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_1^3 \\ = \frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3} \right) = \frac{8}{3}\end{aligned} \quad \dots \text{2단계}$$

답 $\frac{8}{3}$

채점 요소	비율
1단계 함수 $f(x)$ 의 식 구하기	40 %
2단계 색칠한 도형의 넓이 구하기	60 %

0880 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x$ 로 놓으면

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 4$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1) = -3$$

이므로 접선의 방정식은

$$y = -3(x-1) \quad \therefore y = -3x + 3 \quad \dots \text{1단계}$$

곡선 $y = x^3 - 5x^2 + 4x$ 와 직선

$y = -3x + 3$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^3 - 5x^2 + 4x = -3x + 3 \text{에서}$$

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$$

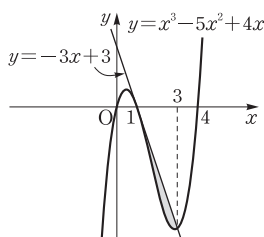
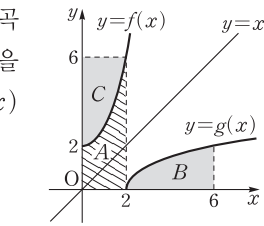
$$(x-1)^2(x-3) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=3 \quad \dots \text{2단계}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}\int_1^3 \{(-3x+3) - (x^3 - 5x^2 + 4x)\}dx \\ = \int_1^3 (-x^3 + 5x^2 - 7x + 3)dx \\ = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x \right]_1^3 = \frac{4}{3}\end{aligned} \quad \dots \text{3단계}$$

답 $\frac{4}{3}$



채점 요소	비율
1단계 접선의 방정식 구하기	30 %
2단계 곡선과 접선의 교점의 x 좌표 구하기	30 %
3단계 도형의 넓이 구하기	40 %

0881 시각 $t=1$ 에서의 점 P의 위치가 -4 이므로

$$0 + \int_0^1 (3t^2 + 2t - k)dt = -4$$

$$\left[t^3 + t^2 - kt \right]_0^1 = -4, \quad 2 - k = -4$$

$$\therefore k=6 \quad \dots \text{1단계}$$

따라서 시각 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^3 (3t^2 + 2t - 6)dt = \left[t^3 + t^2 - 6t \right]_1^3 = 22 \quad \dots \text{2단계}$$

답 22

채점 요소	비율
1단계 k 의 값 구하기	50 %
2단계 시각 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량 구하기	50 %

0882 시각 $t=4$ 에서의 물체의 위치는

$$0 + \int_0^4 v(t)dt = \frac{1}{2} \times (2+4) \times a = 3a$$

$$\text{즉 } 3a=6 \text{이므로 } a=2 \quad \dots \text{1단계}$$

따라서 시각 $t=0$ 에서 $t=6$ 까지 물체가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^6 |v(t)|dt &= \frac{1}{2} \times (2+5) \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \\ &= 8\end{aligned} \quad \dots \text{2단계}$$

답 8

채점 요소	비율
1단계 a 의 값 구하기	50 %
2단계 시각 $t=0$ 에서 $t=6$ 까지 물체가 움직인 거리 구하기	50 %

0883 전략 주어진 조건을 이용하여 두 점 A, B의 x 좌표 사이의 관계식을 구한다.

두 점 A, B의 좌표를 각각 $\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right), \left(\beta, \frac{\beta}{2}\right) (0 < \alpha < \beta)$ 라 하면

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 가 원점 O에서 접하고 두 점 A,

B에서 만나므로 방정식 $f(x) = \frac{1}{2}x$, 즉 $f(x) - \frac{1}{2}x = 0$ 은 세 실근 $x=0$ (중근), $x=\alpha, x=\beta$ 를 갖는다.

$$\therefore f(x) - \frac{1}{2}x = x^2(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$= x^4 - (\alpha+\beta)x^3 + \alpha\beta x^2$$

이때 $S_1=S_2$ 이므로

$$\int_0^\beta \left\{ f(x) - \frac{1}{2}x \right\} dx = 0$$

$$\int_0^\beta \{x^4 - (\alpha+\beta)x^3 + \alpha\beta x^2\} dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{\alpha+\beta}{4}x^4 + \frac{\alpha\beta}{3}x^3 \right]_0^\beta = 0$$

$$\frac{1}{12}\alpha\beta^4 - \frac{1}{20}\beta^5 = 0$$

$$\therefore 5\alpha - 3\beta = 0 \quad (\because \beta > 0) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 $\overline{AB} = \sqrt{5}$ 이므로

$$\sqrt{(\beta - \alpha)^2 + \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)^2} = \sqrt{5}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}(\beta - \alpha) = \sqrt{5} \quad (\because \beta > \alpha)$$

$$\therefore \beta - \alpha = 2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $\alpha = 3, \beta = 5$

따라서 $f(x) - \frac{1}{2}x = x^4 - 8x^3 + 15x^2$ 이므로

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 15x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$\therefore f(1) = \frac{17}{2} \quad \text{답 ⑤}$$

0884 [전략] 먼저 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 t 에 대한 식으로 나타낸다.

함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표는

(i) $x \leq t$ 일 때

$$f(x) = 0 \text{에서} \quad -x(x-7) = 0$$

$$\therefore x = 0 \quad (\because 0 < t < 7)$$

(ii) $x \geq t$ 일 때

$$-x + t + f(t) = 0 \text{에서} \quad x = t + f(t)$$

(i), (ii)에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t)$$

$$= \int_0^t f(x) dx$$

$$+ \frac{1}{2} \times \{t + f(t) - t\} \times f(t)$$

$$= \int_0^t f(x) dx + \frac{1}{2} \{f(t)\}^2$$

$$= \int_0^t \{-x(x-7)\} dx + \frac{1}{2} t^2 (t-7)^2$$

$$= \int_0^t (-x^2 + 7x) dx + \frac{1}{2} t^4 - 7t^3 + \frac{49}{2} t^2$$

$$= \left[-\frac{1}{3} x^3 + \frac{7}{2} x^2 \right]_0^t + \frac{1}{2} t^4 - 7t^3 + \frac{49}{2} t^2$$

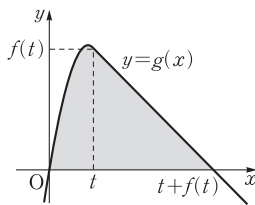
$$= \frac{1}{2} t^4 - \frac{22}{3} t^3 + 28t^2$$

$$\therefore S'(t) = 2t^3 - 22t^2 + 56t = 2t(t-4)(t-7)$$

$$S'(t) = 0 \text{에서} \quad t = 4 \quad (\because 0 < t < 7)$$

t	0	...	4	...	7
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$			$\nearrow$	$\searrow$	

따라서 $S(t)$ 는 $t=4$ 일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은 $\frac{320}{3}$ 이다. 답 $\frac{320}{3}$



0885 [전략] 시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$\int_0^2 v(t) dt$ 임을 이용한다.

점 P가 시각 $t=0$ 일 때 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸려면 두 양수 α, β ($\alpha \neq \beta$)에 대하여

$$v(t) = -t^3(t-\alpha) \text{ 또는 } v(t) = -t(t-\alpha)^2(t-\beta)$$

의 꼴이어야 하므로

$$a=0 \text{ 또는 } a=1 \text{ 또는 } 2a=1$$

이어야 한다.

(i) $a=0$ 일 때

$v(t) = -t^3(t-1)$ 이므로 시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\begin{aligned} \int_0^2 v(t) dt &= \int_0^2 \{-t^3(t-1)\} dt \\ &= \int_0^2 (-t^4 + t^3) dt \\ &= \left[-\frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{4} t^4 \right]_0^2 \\ &= -\frac{12}{5} \end{aligned}$$

(ii) $a=1$ 일 때

$v(t) = -t(t-1)^2(t-2)$ 이므로 시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\begin{aligned} \int_0^2 v(t) dt &= \int_0^2 \{-t(t-1)^2(t-2)\} dt \\ &= \int_0^2 (-t^4 + 4t^3 - 5t^2 + 2t) dt \\ &= \left[-\frac{1}{5} t^5 + t^4 - \frac{5}{3} t^3 + t^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

(iii) $2a=1$, 즉 $a=\frac{1}{2}$ 일 때

$v(t) = -t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2$ 이므로 시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지

점 P의 위치의 변화량은

$$\begin{aligned} \int_0^2 v(t) dt &= \int_0^2 \left\{ -t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2 \right\} dt \\ &= \int_0^2 \left(-t^4 + \frac{5}{2} t^3 - 2t^2 + \frac{1}{2} t \right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{5} t^5 + \frac{5}{8} t^4 - \frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{4} t^2 \right]_0^2 \\ &= -\frac{11}{15} \end{aligned}$$

이상에서 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은 $\frac{4}{15}$ 이다. 답 ③

참고 (i) $v(t) = -t^3(t-1)$ 이면 점 P는 시각 $t=1$ 에서 운동 방향을 한 번 바꾼다.

(ii) $v(t) = -t(t-1)^2(t-2)$ 이면 점 P는 시각 $t=2$ 에서 운동 방향을 한 번 바꾼다.

(iii) $v(t) = -t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2$ 이면 점 P는 시각 $t=\frac{1}{2}$ 에서 운동 방향을 한 번 바꾼다.



A series of horizontal lines for writing, spanning the width of the page.