



개념원리[®]

문제기본서

RPM

기하

정답과 풀이

01 | 이차곡선



교과서 문제 정복하기

본문 7쪽, 9쪽

0001 $y^2 = 4 \times 5 \times x = 20x$

답 $y^2 = 20x$

0002 $x^2 = 4 \times (-4) \times y = -16y$

답 $x^2 = -16y$

0003 $y^2 = -4x = 4 \times (-1) \times x$ 이므로

초점의 좌표는 $(-1, 0)$, 준선의 방정식은 $x=1$

답 초점의 좌표: $(-1, 0)$, 준선의 방정식: $x=1$

0004 $y^2 = \frac{1}{2}x = 4 \times \frac{1}{8} \times x$ 이므로

초점의 좌표는 $(\frac{1}{8}, 0)$, 준선의 방정식은 $x = -\frac{1}{8}$

답 초점의 좌표: $(\frac{1}{8}, 0)$, 준선의 방정식: $x = -\frac{1}{8}$

0005 $x^2 = 8y = 4 \times 2 \times y$ 이므로

초점의 좌표는 $(0, 2)$, 준선의 방정식은 $y = -2$

답 초점의 좌표: $(0, 2)$, 준선의 방정식: $y = -2$

0006 $x^2 = -\frac{2}{3}y = 4 \times (-\frac{1}{6}) \times y$ 이므로

초점의 좌표는 $(0, -\frac{1}{6})$, 준선의 방정식은 $y = \frac{1}{6}$

답 초점의 좌표: $(0, -\frac{1}{6})$, 준선의 방정식: $y = \frac{1}{6}$

0007 주어진 포물선은 포물선 $y^2 = 4x$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.이때 포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점의 좌표는 $(1, 0)$, 준선의 방정식은 $x = -1$ 이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(0, 1)$, 준선의 방정식은 $x = -2$

답 초점의 좌표: $(0, 1)$, 준선의 방정식: $x = -2$

0008 주어진 포물선은 포물선 $x^2 = -16y$ 를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.이때 포물선 $x^2 = -16y = 4 \times (-4) \times y$ 의 초점의 좌표는 $(0, -4)$, 준선의 방정식은 $y = 4$ 이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(2, -1)$, 준선의 방정식은 $y = 7$

답 초점의 좌표: $(2, -1)$, 준선의 방정식: $y = 7$

0009 $y^2 - 8x - 4y + 28 = 0$ 에서

$(y-2)^2 - 8(x-3) = 0$

$\therefore (y-2)^2 = 8(x-3)$

즉, 주어진 포물선은 포물선 $y^2 = 8x$ 를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.(1) 포물선 $y^2 = 8x$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$ 이므로주어진 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(3, 2)$ (2) 포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점의 좌표는 $(2, 0)$ 이므로주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(5, 2)$ (3) 포물선 $y^2 = 8x$ 의 준선의 방정식은 $x = -2$ 이므로주어진 포물선의 준선의 방정식은 $x = 1$

답 (1) $(3, 2)$ (2) $(5, 2)$ (3) $x = 1$

0010 구하는 타원의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)이라 하면

$2a = 8$ 에서 $a = 4$

$b^2 = 4^2 - 2^2 = 12$

$\therefore \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

답 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

0011 구하는 타원의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > a > 0$)이라 하면

$2b = 10$ 에서 $b = 5$

$a^2 = 5^2 - 3^2 = 16$

$\therefore \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

답 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

0012 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 에서

$\sqrt{25-16} = 3$ 이므로 초점의 좌표는

$(3, 0), (-3, 0)$

장축의 길이는 $2 \times 5 = 10$

단축의 길이는 $2 \times 4 = 8$

답 초점의 좌표: $(3, 0), (-3, 0)$

장축의 길이: 10 , 단축의 길이: 8

0013 타원 $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{49} = 1$ 에서

$\sqrt{49-24} = 5$ 이므로 초점의 좌표는

$(0, 5), (0, -5)$

장축의 길이는 $2 \times 7 = 14$

단축의 길이는 $2 \times 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$

답 초점의 좌표: $(0, 5), (0, -5)$

장축의 길이: 14 , 단축의 길이: $4\sqrt{6}$

0014 타원 $x^2 + 4y^2 = 4$, 즉 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 에서

$\sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ 이므로 초점의 좌표는

$(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$

장축의 길이는 $2 \times 2 = 4$

단축의 길이는 $2 \times 1 = 2$

답 초점의 좌표: $(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$

장축의 길이: 4, 단축의 길이: 2

0015 타원 $4x^2 + 3y^2 = 48$, 즉 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$ 에서

$\sqrt{16-12} = 2$ 이므로 초점의 좌표는

$(0, 2), (0, -2)$

장축의 길이는 $2 \times 4 = 8$

단축의 길이는 $2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

답 초점의 좌표: $(0, 2), (0, -2)$

장축의 길이: 8, 단축의 길이: $4\sqrt{3}$

0016 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 을 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 에서 $\sqrt{8-2} = \sqrt{6}$ 이므로 초점의 좌표는

$(\sqrt{6}, 0), (-\sqrt{6}, 0)$

따라서 주어진 타원의 초점의 좌표는 $(\sqrt{6}, 1), (-\sqrt{6}, 1)$

한편, 타원을 평행이동해도 장축의 길이, 단축의 길이는 변하지 않으므로 주어진 타원의

장축의 길이는 $2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

단축의 길이는 $2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

답 초점의 좌표: $(\sqrt{6}, 1), (-\sqrt{6}, 1)$

장축의 길이: $4\sqrt{2}$, 단축의 길이: $2\sqrt{2}$

0017 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 에서 $\sqrt{25-9} = 4$ 이므로 초점의 좌표는

$(4, 0), (-4, 0)$

따라서 주어진 타원의 초점의 좌표는 $(1, 5), (-7, 5)$

한편, 타원을 평행이동해도 장축의 길이, 단축의 길이는 변하지 않으므로 주어진 타원의

장축의 길이는 $2 \times 5 = 10$

단축의 길이는 $2 \times 3 = 6$

답 초점의 좌표: $(1, 5), (-7, 5)$

장축의 길이: 10, 단축의 길이: 6

0018 $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$ 에서

$(x-1)^2 + 4(y-2)^2 = 4$

$\therefore \frac{(x-1)^2}{4} + (y-2)^2 = 1$

즉, 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

(1) 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 의 중심의 좌표는 $(0, 0)$ 이므로

주어진 타원의 중심의 좌표는 $(1, 2)$

(2) 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 에서 $\sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ 이므로 초점의 좌표는

$(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$

따라서 주어진 타원의 초점의 좌표는

$(\sqrt{3}+1, 2), (-\sqrt{3}+1, 2)$

(3) 주어진 타원의 장축의 길이는 $2 \times 2 = 4$

(4) 주어진 타원의 단축의 길이는 $2 \times 1 = 2$

답 (1) $(1, 2)$ (2) $(\sqrt{3}+1, 2), (-\sqrt{3}+1, 2)$ (3) 4 (4) 2

0019 구하는 쌍곡선의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하면

$2a = 8$ 에서 $a = 4$

$b^2 = 5^2 - 4^2 = 9$

$\therefore \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

답 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

0020 구하는 쌍곡선의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하면

$2a = 10$ 에서 $a = 5$

$b^2 = 13^2 - 5^2 = 144$

$\therefore \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$

답 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$

0021 구하는 쌍곡선의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하면

$2b = 2\sqrt{3}$ 에서 $b = \sqrt{3}$

$a^2 = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 2$

$\therefore \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = -1$

답 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = -1$

0022 구하는 쌍곡선의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하면

$2b = 8$ 에서 $b = 4$

$a^2 = 6^2 - 4^2 = 20$

$\therefore \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = -1$

답 $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = -1$

0023 쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ 에서

$\sqrt{12+4}=4$ 이므로 초점의 좌표는

$(4, 0), (-4, 0)$

꼭짓점의 좌표는 $(2\sqrt{3}, 0), (-2\sqrt{3}, 0)$

주축의 길이는 $2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

답 초점의 좌표: $(4, 0), (-4, 0)$

꼭짓점의 좌표: $(2\sqrt{3}, 0), (-2\sqrt{3}, 0)$

주축의 길이: $4\sqrt{3}$

0024 쌍곡선 $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{16} = -1$ 에서

$\sqrt{10+16}=\sqrt{26}$ 이므로 초점의 좌표는

$(0, \sqrt{26}), (0, -\sqrt{26})$

꼭짓점의 좌표는 $(0, 4), (0, -4)$

주축의 길이는 $2 \times 4 = 8$

답 초점의 좌표: $(0, \sqrt{26}), (0, -\sqrt{26})$

꼭짓점의 좌표: $(0, 4), (0, -4)$

주축의 길이: 8

0025 쌍곡선 $4x^2 - y^2 = 4$, 즉 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 에서

$\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$ 이므로 초점의 좌표는

$(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$

꼭짓점의 좌표는 $(1, 0), (-1, 0)$

주축의 길이는 $2 \times 1 = 2$

답 초점의 좌표: $(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$

꼭짓점의 좌표: $(1, 0), (-1, 0)$

주축의 길이: 2

0026 쌍곡선 $4x^2 - 9y^2 = -36$, 즉 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = -1$ 에서

$\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$ 이므로 초점의 좌표는

$(0, \sqrt{13}), (0, -\sqrt{13})$

꼭짓점의 좌표는 $(0, 2), (0, -2)$

주축의 길이는 $2 \times 2 = 4$

답 초점의 좌표: $(0, \sqrt{13}), (0, -\sqrt{13})$

꼭짓점의 좌표: $(0, 2), (0, -2)$

주축의 길이: 4

0027 쌍곡선 $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{8}{6}x \quad \therefore y = \pm \frac{4}{3}x$$

답 $y = \pm \frac{4}{3}x$

0028 쌍곡선 $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = -1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}x \quad \therefore y = \pm \frac{2}{3}x$$

답 $y = \pm \frac{2}{3}x$

0029 쌍곡선 $9x^2 - 4y^2 = 36$, 즉 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 의 점근선의 방

정식은

$$y = \pm \frac{3}{2}x$$

답 $y = \pm \frac{3}{2}x$

0030 쌍곡선 $5x^2 - 10y^2 = -10$, 즉 $\frac{x^2}{2} - y^2 = -1$ 의 점근선

의 방정식은

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}x \quad \therefore y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

답 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$

0031 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 을 x 축의 방향으

로 1만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 에서 $\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$ 이므로 초점의 좌표

는 $(\sqrt{13}, 0), (-\sqrt{13}, 0)$, 꼭짓점의 좌표는 $(3, 0), (-3, 0)$

따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(\sqrt{13}+1, -1), (-\sqrt{13}+1, -1)$,

꼭짓점의 좌표는 $(4, -1), (-2, -1)$

답 초점의 좌표: $(\sqrt{13}+1, -1), (-\sqrt{13}+1, -1)$

꼭짓점의 좌표: $(4, -1), (-2, -1)$

0032 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = -1$ 을 x 축의 방향

으로 4만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = -1$ 에서 $\sqrt{20+16}=6$ 이므로 초점의

좌표는 $(0, 6), (0, -6)$, 꼭짓점의 좌표는 $(0, 4), (0, -4)$

따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는 $(4, 9), (4, -3)$,

꼭짓점의 좌표는 $(4, 7), (4, -1)$

답 초점의 좌표: $(4, 9), (4, -3)$

꼭짓점의 좌표: $(4, 7), (4, -1)$

0033 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ 을 x 축의 방향으

로 -2만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}x \quad \therefore y = \pm \sqrt{2}x$$

따라서 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \sqrt{2}(x+2)$$

$$\therefore y = \sqrt{2}x + 2\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}$$

답 $y = \sqrt{2}x + 2\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}$

0034 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = -1$ 을 x 축의 방향

으로 3만큼, y 축의 방향으로 -7만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = -1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{4}{2}x \quad \therefore y = \pm 2x$$

따라서 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y + 7 = \pm 2(x - 3)$$

$$\therefore y = 2x - 13, y = -2x - 1$$

$$\text{답 } y = 2x - 13, y = -2x - 1$$

0035 $4x^2 - y^2 + 8x = 0$ 에서

$$4(x+1)^2 - y^2 = 4$$

$$\therefore (x+1)^2 - \frac{y^2}{4} = 1$$

즉, 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

(1) 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 의 중심의 좌표는 $(0, 0)$ 이므로 주어진 쌍곡선의 중심의 좌표는 $(-1, 0)$

(2) 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 에서 $\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ 이므로 초점의 좌표는 $(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$

따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$$(\sqrt{5}-1, 0), (-\sqrt{5}-1, 0)$$

(3) 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 의 점근선의 방정식은 $y = \pm 2x$

따라서 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y = \pm 2(x+1)$$

$$\therefore y = 2x + 2, y = -2x - 2$$

$$\text{답 (1) } (-1, 0) \quad (2) (\sqrt{5}-1, 0), (-\sqrt{5}-1, 0)$$

$$(3) y = 2x + 2, y = -2x - 2$$

0036 $x^2 - 4x - 4y + 16 = 0$ 에서

$$(x-2)^2 = 4(y-3)$$

따라서 주어진 방정식은 포물선을 나타낸다.

답 포물선

0037 $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ 에서

$$(x-2)^2 + y^2 = 9$$

따라서 주어진 방정식은 원을 나타낸다.

답 원

0038 $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$ 에서

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

따라서 주어진 방정식은 타원을 나타낸다.

답 타원

0039 $5x^2 - 4y^2 + 24y - 16 = 0$ 에서

$$5x^2 - 4(y-3)^2 = -20$$

$$\therefore \frac{x^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = -1$$

따라서 주어진 방정식은 쌍곡선을 나타낸다.

답 쌍곡선

유형 익히기

본문 10~20쪽

0040 원의 중심 $(4, 0)$ 을 초점으로 하고 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선의 방정식은

$$y^2 = 4 \times 4 \times x \quad \therefore y^2 = 16x$$

이 포물선이 점 $(4, a)$ 를 지나므로

$$a^2 = 16 \times 4 = 64 \quad \therefore a = \pm 8$$

따라서 모든 a 의 값의 곱은 -64 이다.

답 -64

0041 꼭짓점의 좌표가 $(0, 0)$ 이므로 포물선의 방정식을

$$y^2 = 4px \text{ 또는 } x^2 = 4py \quad (p \neq 0) \text{라 하자.}$$

이 포물선이 점 $(-2, 2)$ 를 지나므로

(i) $y^2 = 4px$ 일 때

$$4 = -8p \quad \therefore p = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore y^2 = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times x = -2x$$

(ii) $x^2 = 4py$ 일 때

$$4 = 8p \quad \therefore p = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x^2 = 4 \times \frac{1}{2} \times y = 2y$$

(i), (ii)에서 구하는 포물선의 방정식은

$$y^2 = -2x, x^2 = 2y$$

$$\text{답 } y^2 = -2x, x^2 = 2y$$

0042 포물선 $y^2 = kx = 4 \times \frac{k}{4} \times x$ 의 초점의 좌표는 $\left(\frac{k}{4}, 0\right)$

포물선 $x^2 = -16y = 4 \times (-4) \times y$ 의 초점의 좌표는 $(0, -4)$

두 초점 사이의 거리가 5이므로

$$\sqrt{\left(\frac{k}{4}\right)^2 + 4^2} = 5$$

양변을 제곱하면

$$\frac{k^2}{16} + 16 = 25, k^2 = 144$$

$$\therefore k = 12 \quad (\because k > 0)$$

답 12

0043 주어진 포물선의 방정식은

$$x^2 = 4 \times (-2) \times y \quad \therefore x^2 = -8y$$

$$\therefore A(0, 0)$$

포물선의 초점 F를 지나고 x 축과 평행한 직선의 방정식은

$$y = -2 \text{이므로 이 직선과 포물선이 만나는 점의 } x \text{좌표는}$$

$$x^2 = -8 \times (-2) \text{에서 } x^2 = 16$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 두 점 B, C의 좌표는 $(-4, -2), (4, -2)$ 이고

$\overline{BC} = 8$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 2 = 8$$

답 ③

0044 주어진 포물선은 포물선 $y^2=8x$ 를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=8x=4 \times 2 \times x$ 의 초점의 좌표는 $(2, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-2$

따라서 주어진 포물선의 초점은 $F(0, 1)$

$$\therefore a=0, b=1$$

또, 준선의 방정식은 $x=-4 \quad \therefore c=-4$

$$\therefore a+b-c=0+1-(-4)=5 \quad \text{답 ④}$$

0045 포물선 $y^2=4x$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$(y-n)^2=4(x-m) \quad \dots\dots ㉠$$

이때 포물선 $y^2=4x$ 의 초점의 좌표는 $(1, 0)$ 이므로 포물선 ㉠의 초점의 좌표는 $(1+m, n)$

이 점이 점 $(3, -2)$ 와 일치하므로

$$1+m=3, n=-2 \quad \therefore m=2$$

$$\therefore mn=-4 \quad \text{답 -4}$$

0046 포물선 $x^2=-6(y+a)$ 는 포물선 $x^2=-6y$ 를 y 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2=-6y=4 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times y$ 의 준선의 방정식은

$$y=\frac{3}{2} \text{이므로 포물선 } x^2=-6(y+a) \text{의 준선의 방정식은}$$

$$y=\frac{3}{2}-a \quad \dots\dots ㉠$$

포물선 $x^2=20(y-b)$ 는 포물선 $x^2=20y$ 를 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2=20y=4 \times 5 \times y$ 의 준선의 방정식은 $y=-5$ 이므로 포물선 $x^2=20(y-b)$ 의 준선의 방정식은

$$y=-5+b \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠, ㉡ \text{이 서로 일치하므로 } \frac{3}{2}-a=-5+b$$

$$\therefore a+b=\frac{13}{2} \quad \text{답 } \frac{13}{2}$$

0047 주어진 포물선은 포물선 $x^2=2ky$ 를 x 축의 방향으로 k 만큼, y 축의 방향으로 $-k+2$ 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2=2ky=4 \times \frac{k}{2} \times y$ 의 초점의 좌표는 $\left(0, \frac{k}{2}\right)$,

준선의 방정식은 $y=-\frac{k}{2}$ 이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는

$$\left(k, -\frac{k}{2}+2\right), \text{준선의 방정식은 } y=-\frac{3}{2}k+2 \quad \text{㉠}$$

그런데 주어진 포물선의 초점이 x 축 위에 있으므로

$$-\frac{k}{2}+2=0 \quad \therefore k=4 \quad \text{㉡}$$

따라서 주어진 포물선의 준선의 방정식은

$$y=-\frac{3}{2} \times 4+2 \quad \therefore y=-4$$

..... ㉢

$$\text{답 } y=-4$$

단계	채점요소	배점
㉠	초점의 좌표와 준선의 방정식을 k 로 나타내기	50%
㉡	k 의 값 구하기	30%
㉢	준선의 방정식 구하기	20%

0048 포물선 위의 한 점을 $P(x, y)$ 라

하고 점 P 에서 준선에 내린 수선의 발을 H 라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF}=\overline{PH} \text{이므로}$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=|x-6|$$

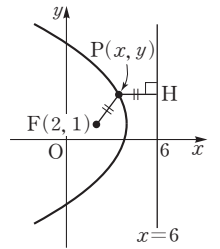
양변을 제곱하면

$$(x-2)^2+(y-1)^2=(x-6)^2$$

$$\therefore (y-1)^2=-8(x-4)$$

이 포물선이 점 $(a, 3)$ 을 지나므로

$$4=-8(a-4) \quad \therefore a=\frac{7}{2} \quad \text{답 ③}$$



다른풀이 준선이 y 축에 평행하므로 포물선의 방정식을

$$(y-n)^2=4p(x-m) \text{이라 하면}$$

포물선의 초점의 좌표는 $(p+m, n)$,

준선의 방정식은 $x=-p+m$

즉, $p+m=2, n=1, -p+m=6$ 에서

$$p=-2, m=4, n=1$$

$$\therefore (y-1)^2=-8(x-4)$$

이 포물선이 점 $(a, 3)$ 을 지나므로

$$4=-8(a-4) \quad \therefore a=\frac{7}{2}$$

0049 점 P 의 좌표를 (x, y) 라

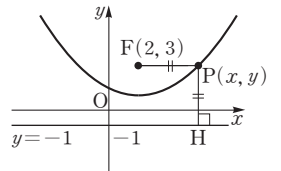
하고 점 P 에서 직선 $y=-1$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 포물선의

정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$ 이므로

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=|y+1|$$

양변을 제곱하면 $(x-2)^2+(y-3)^2=(y+1)^2$

$$\therefore (x-2)^2=8(y-1) \quad \text{답 ②}$$



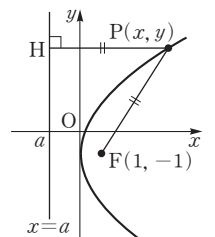
0050 포물선 위의 한 점을 $P(x, y)$ 라

하고 점 P 에서 준선에 내린 수선의 발을 H , 준선의 방정식을 $x=a$ 라 하면 포물선의

정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$ 이므로

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=|x-a|$$

양변을 제곱하면



$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = (x-a)^2$$

$$\therefore (y+1)^2 = (2-2a)x + a^2 - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

포물선 ①이 점 (4, 3)을 지나므로

$$16 = (2-2a) \times 4 + a^2 - 1$$

$$a^2 - 8a - 9 = 0, (a+1)(a-9) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 9$$

$$(i) a = -1 \text{ 일 때, } \textcircled{1} \text{에서 } (y+1)^2 = 4x$$

$$(ii) a = 9 \text{ 일 때, } \textcircled{1} \text{에서 } (y+1)^2 = -16(x-5)$$

$$\text{답 } (y+1)^2 = 4x, (y+1)^2 = -16(x-5)$$

0051 포물선 위의 한 점을 P(x, y)라 하고 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} = \overline{PH} \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = |x-5|$$

양변을 제곱하면

$$(x-3)^2 + y^2 = (x-5)^2$$

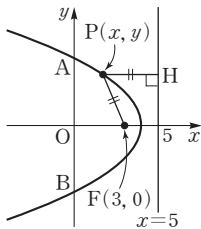
$$\therefore y^2 = -4(x-4) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{에 } x=0 \text{ 을 대입하면 } y^2 = 16$$

$$\therefore y = -4 \text{ 또는 } y = 4$$

따라서 포물선 ①이 y축과 만나는 두 점 A, B의 좌표는

(0, -4), (0, 4)이므로 선분 AB의 길이는 8이다. 답 8



$$\textbf{0052 } y = x^2 + 2px + q \text{에서 } (x+p)^2 = y + p^2 - q$$

즉, 주어진 포물선은 포물선 $x^2 = y$ 를 x축의 방향으로 $-p$ 만큼, y축의 방향으로 $-p^2 + q$ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(-p, \frac{1}{4} - p^2 + q)$ 이므로

$$-p = \frac{1}{2}, \frac{1}{4} - p^2 + q = 4$$

$$\therefore p = -\frac{1}{2}, q = 4 \quad \therefore pq = -2 \quad \text{답 } -2$$

$$\textbf{0053 } y^2 - 8x + 2y + 17 = 0 \text{에서}$$

$$(y+1)^2 = 8(x-2)$$

즉, 주어진 포물선은 포물선 $y^2 = 8x$ 를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2 = 8x = 4 \times 2 \times x$ 의 꼭짓점의 좌표는 (0, 0), 초점의 좌표는 (2, 0), 준선의 방정식은 $x = -2$ 이므로 주어진 포물선의 꼭짓점의 좌표는 (2, -1), 초점의 좌표는 (4, -1), 준선의 방정식은 $x = 0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0054 축이 y축에 평행하므로 구하는 포물선의 방정식을

$$x^2 + Ax + By + C = 0 \text{으로 놓고 세 점 } (1, -3), (-3, -3),$$

(-1, -2)의 좌표를 각각 대입하면

$$1 + A - 3B + C = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$9 - 3A - 3B + C = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$1 - A - 2B + C = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③에서

$$A = 2, B = 4, C = 9$$

따라서 구하는 포물선의 방정식은

$$x^2 + 2x + 4y + 9 = 0 \quad \text{답 } x^2 + 2x + 4y + 9 = 0$$

$$\textbf{0055 } y^2 - 4x - 4y = 0 \text{에서}$$

$$(y-2)^2 = 4(x+1)$$

즉, 주어진 포물선은 포물선 $y^2 = 4x$ 를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점의 좌표는 (1, 0), 준선의 방정식은 $x = -1$ 이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 (0, 2), 준선의 방정식은 $x = -2$

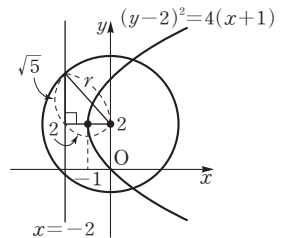
오른쪽 그림과 같이 원의 반지름의

길이를 r라 하면

$$r = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2} = 3$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + (y-2)^2 = 9$$



$$\text{답 } x^2 + (y-2)^2 = 9$$

0056 주어진 포물선은 포물선 $y^2 = 4x$ 를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점의 좌표는 (1, 0), 준선의 방정식은 $x = -1$ 이므로 주어진 포물선의 초점은 F(2, 0), 준선의 방정식은 $x = 0$

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H'이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PH'} = \overline{PF} = 5$$

즉, 점 P의 x좌표가 5이므로 P(5, b)라

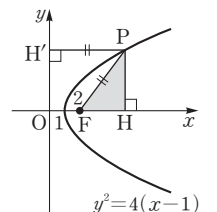
$$\text{하면 } b^2 = 4 \times 5 = 20$$

$$\therefore b = -4 \text{ 또는 } b = 4$$

따라서 점 P의 좌표를 (5, 4)라 하면 H(5, 0)이므로

삼각형 PFH의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{FH} \times \overline{PH} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6 \quad \text{답 } ④$$



0057 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PH}$ 이므로 삼각형 PHF는 이등변삼각형이다.

$$\therefore \angle PFH = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ \quad \text{답 } ⑤$$

0058 주어진 포물선의 초점을 F라 하면 $F(0, \frac{1}{4})$,

준선의 방정식은 $y = -\frac{1}{4}$

오른쪽 그림과 같이 포물선 위의 점 $P(a, b)$ 에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PH} = \overline{PF} = \frac{3}{4}$ 이므로

$$b - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} \quad (\because b \geq 0)$$

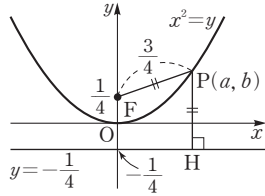
$$\therefore b = \frac{1}{2}$$

또, 점 $P(a, \frac{1}{2})$ 은 포물선 $x^2 = y$ 위의 점이므로

$$a^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 4(a^2 + b^2) = 4\left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} = 3$$

㉠



㉡

㉢

답 3

단계	채점요소	배점
㉠	포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식 구하기	30%
㉡	a^2, b 의 값 구하기	50%
㉢	$4(a^2 + b^2)$ 의 값 구하기	20%

0059 주어진 포물선의 초점은 $F(2, 0)$ 이므로 세 점 A, B, C의 x 좌표를 각각 x_1, x_2, x_3 이라 하면

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 2 \quad \therefore x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

한편, 포물선의 준선의 방정식은

$x = -2$ 이므로 오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, C에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 A', B', C'이라 하면 포물선의 정의에 의하여

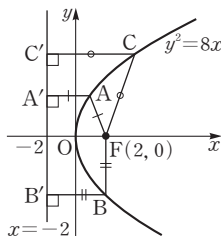
$$\overline{AF} = \overline{AA'} = x_1 + 2$$

$$\overline{BF} = \overline{BB'} = x_2 + 2$$

$$\overline{CF} = \overline{CC'} = x_3 + 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AF} + \overline{BF} + \overline{CF} &= (x_1 + 2) + (x_2 + 2) + (x_3 + 2) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3) + 6 \\ &= 6 + 6 = 12 \end{aligned}$$

답 12



0060 포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점은 $F(1, 0)$ 이고 준선의 방정식은 $x = -1$ 이므로 두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF} = \overline{AH} = a + 1, \quad \overline{BF} = \overline{BH'} = a + 1$$

또, 원이 점 $F(1, 0)$ 을 지나므로 반지름의 길이는 1이다.

$$\therefore \overline{OA} = \overline{OB} = 1$$

008 정답과 풀이

따라서 구하는 사각형 AOBF의 둘레의 길이는

$$\overline{OA} + \overline{AF} + \overline{BF} + \overline{OB} = 1 + (a + 1) + (a + 1) + 1$$

$$= 2a + 4$$

답 ⑤

참고 두 점 A, B는 x 축에 대하여 대칭이므로 x 좌표가 서로 같다.

0061 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PH} = \overline{PF}, \quad \overline{QH'} = \overline{QF}$$

$$\therefore \overline{PH} + \overline{QH'} = \overline{PF} + \overline{QF} = \overline{PQ} = 9$$

따라서 구하는 사각형 HH'QP의 둘레의 길이는

$$\overline{HH'} + \overline{QH'} + \overline{PQ} + \overline{PH} = \overline{HH'} + \overline{PQ} + \overline{PQ}$$

$$= 8 + 9 + 9 = 26$$

답 26

0062 포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점은

$F(2, 0)$, 준선의 방정식은 $x = -2$

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 P', Q'이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} = \overline{PP'} = \alpha + 2$$

$$\overline{QF} = \overline{QQ'} = \beta + 2$$

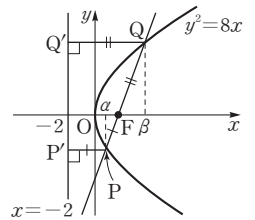
$$\therefore \overline{PQ} = \overline{PF} + \overline{QF} = \overline{PP'} + \overline{QQ'}$$

$$= (\alpha + 2) + (\beta + 2)$$

$$= (\alpha + \beta) + 4$$

$$= 14 + 4 = 18$$

답 18



0063 주어진 포물선의 초점은 $F(1, 0)$, 준선의 방정식은

$x = -1$ 이고, 직선 $y = m(x - 1)$ 은 점 $F(1, 0)$ 을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H₁, H₂라 하고, 두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PQ} = \overline{PF} + \overline{QF} = \overline{PH_1} + \overline{QH_2}$$

$$= (x_1 + 1) + (x_2 + 1)$$

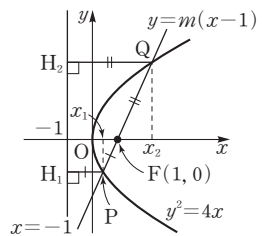
$$= x_1 + x_2 + 2 = 10$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 8$$

따라서 선분 PQ의 중점의 x 좌표는

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

답 4



0064 포물선 $y^2 = 4px$ 의 초점은 $F(p, 0)$, 준선의 방정식은

$x = -p$

즉, 직선 m 의 방정식은 $x = p$ 이므로 두 점 A, B의 x 좌표는 모두 p 이다.

이때 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF} = \overline{AA'} = 2p, \quad \overline{BF} = \overline{BB'} = 2p$$

$$\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF} = \overline{AA'} + \overline{BB'} = 4p$$

직각삼각형 AOF에서

$$\overline{OA} = \sqrt{p^2 + (2p)^2} = p\sqrt{5}$$

직각삼각형 OBF에서

$$\overline{OB} = \sqrt{p^2 + (2p)^2} = p\sqrt{5}$$

한편, 사각형 A'B'BA의 넓이가 32이므로

$$\overline{AA'} \times \overline{AB} = 2p \times 4p = 32$$

$$8p^2 = 32 \quad \therefore p = 2 \quad (\because p > 0)$$

따라서 구하는 삼각형 AOB의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{AB} &= p\sqrt{5} + p\sqrt{5} + 4p \\ &= 8 + 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

답 ②

0065 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B

에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 A', B'이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF} = \overline{AA'}, \overline{BF} = \overline{BB'}$$

점 B에서 $\overline{A'A}$ 의 연장선 위에 내린 수선의 발을 C라 하고

$$\overline{AF} = 2k, \overline{BF} = 3k \quad (k > 0)$$

로 놓으면

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \overline{A'C} - \overline{A'A} = \overline{B'B} - \overline{A'A} \\ &= \overline{BF} - \overline{AF} = 3k - 2k = k \end{aligned}$$

직각삼각형 ACB에서 피타고라스 정리에 의하여

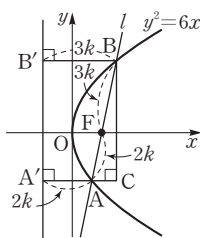
$$\overline{BC} = \sqrt{(5k)^2 - k^2} = 2\sqrt{6}k$$

따라서 직선 l의 기울기 m은

$$m = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{2\sqrt{6}k}{k} = 2\sqrt{6}$$

$$\therefore m^2 = 24$$

답 24



0066 주어진 포물선의 초점은 $F(\frac{5}{2}, 0)$, 준선의 방정식은

$$x = -\frac{5}{2}$$

두 점 A, B의 좌표를 각각 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 하면 두 점 A, B는 포물선 $y^2 = 10x$ 위의 점이므로

$$y_1^2 = 10x_1, y_2^2 = 10x_2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, 두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2 라 하면

$$\begin{aligned} \overline{AF} + \overline{BF} &= \overline{AH_1} + \overline{BH_2} \\ &= \left(x_1 + \frac{5}{2}\right) + \left(x_2 + \frac{5}{2}\right) \\ &= x_1 + x_2 + 5 = 8 \end{aligned}$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 3$$

$$\therefore S_1 + S_2 = \pi \times \overline{AC}^2 + \pi \times \overline{BD}^2$$

$$= \pi y_1^2 + \pi y_2^2$$

$$= 10\pi(x_1 + x_2) \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= 10\pi \times 3 = 30\pi$$

답 30π

0067 주어진 포물선의 초점의 좌표는 (2, 0), 준선의 방정식은 $x = -2$

즉, 점 A(2, 0)은 주어진 포물선의 초점이다.

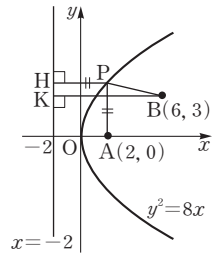
오른쪽 그림과 같이 두 점 P, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, K라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PA} = \overline{PH}$ 이므로

$$\overline{PA} + \overline{PB} = \overline{PH} + \overline{PB}$$

$$\geq \overline{BK}$$

$$= 6 - (-2) = 8$$

따라서 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 8이다.



답 8

0068 주어진 포물선의 초점은 F(0, 1), 준선의 방정식은

$$y = -1$$

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, A에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, K라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} = \overline{PH} \text{이므로}$$

$$\overline{AP} + \overline{PF} = \overline{AP} + \overline{PH} \geq \overline{AK}$$

따라서 세 점 A, P, H가 한 직선 위에 있을 때, $\overline{AP} + \overline{PF}$ 의 값이 최소이다.

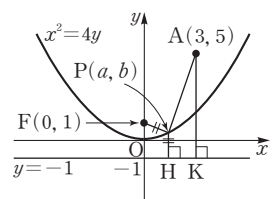
이때 점 P(a, b)의 x좌표는 3이므로 $a = 3$

또, 점 P(3, b)가 포물선 $x^2 = 4y$ 위의 점이므로

$$9 = 4b \quad \therefore b = \frac{9}{4}$$

$$\therefore a + b = 3 + \frac{9}{4} = \frac{21}{4}$$

답 $\frac{21}{4}$



0069 삼각형 APB의 둘레의 길이는 $\overline{AP} + \overline{PB} + \overline{AB}$ 이므로 $\overline{AP} + \overline{PB}$ 의 값이 최소일 때, 삼각형 APB의 둘레의 길이도 최소이다.

주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(\frac{3}{4}, 0)$, 준선의 방정식은

$$x = -\frac{3}{4}, \text{ 즉 점 } B(\frac{3}{4}, 0) \text{은 주어진 포물선의 초점이다.}$$

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, A에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, K라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PB} = \overline{PH} \text{이므로}$$

$$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PH} \geq \overline{AK}$$

즉, 세 점 A, P, H가 한 직선 위에 있을 때, $\overline{AP} + \overline{PB}$ 의 값이 최소이다.

이때 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면

$$b = 3$$

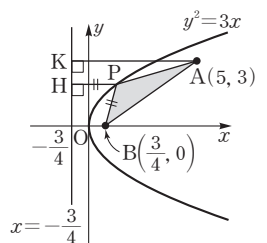
또, 점 P(a, 3)이 포물선 $y^2 = 3x$ 위의 점이므로

$$9 = 3a \quad \therefore a = 3$$

따라서 구하는 삼각형 APB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$$

답 ②



0070 타원 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 에서 $\sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$ 이므로 초점의 좌표는 $(2\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0)$

구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 이라 하면
이 타원의 초점의 좌표가 $(2\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0)$ 이므로
 $(2\sqrt{2})^2 = a^2 - b^2 \quad \therefore a^2 - b^2 = 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

이때 장축의 길이가 10이므로

$$2a = 10 \quad \therefore a = 5$$

$a = 5$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $25 - b^2 = 8$

$$\therefore b = \sqrt{17} (\because b > 0)$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{17} = 1 \quad \text{답 ④}$$

0071 두 초점이 $F(4, 0), F'(-4, 0)$ 이므로 $a > b > 0$ 이고
 $4^2 = a^2 - b^2 \quad \therefore (a+b)(a-b) = 16 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

장축의 길이가 $2a$, 단축의 길이가 $2b$ 이므로

$$2a - 2b = 4 \quad \therefore a - b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a = 5, b = 3$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5^2 + 3^2 = 34 \quad \text{답 34}$$

0072 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > a > 0)$ 이라
하면 한 초점이 $F(0, 2\sqrt{7})$ 이므로
 $(2\sqrt{7})^2 = b^2 - a^2 \quad \therefore b^2 - a^2 = 28 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

한편, 타원이 점 $P(-3, 4\sqrt{3})$ 을 지나므로

$$\frac{9}{a^2} + \frac{48}{b^2} = 1 \quad \therefore 9b^2 + 48a^2 = a^2b^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a^2 = 36, b^2 = 64$

$$\therefore a = 6, b = 8 (\because b > a > 0)$$

$$\therefore \overline{PF} + \overline{PF'} = 2b = 2 \times 8 = 16 \quad \text{답 16}$$

0073 두 초점 F, F' 의 y 좌표가 같으므로 타원의 장축은 x 축
과 평행하다.

$$\therefore a^2 > 5$$

또, 타원의 중심은 선분 FF' 의 중점이므로 중심의 좌표는

$$\left(\frac{5+1}{2}, \frac{1+1}{2}\right) \quad \therefore (3, 1)$$

즉, 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{5} = 1$ 을 x 축의 방향으로 3만큼,
 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$$p = 3, q = 1$$

이때 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{5} = 1$ 의 초점의 좌표는

$$(\sqrt{a^2-5}, 0), (-\sqrt{a^2-5}, 0)$$

따라서 주어진 타원의 초점의 좌표는

$$(\sqrt{a^2-5}+3, 1), (-\sqrt{a^2-5}+3, 1) \text{이므로}$$

$$\sqrt{a^2-5}+3=5, -\sqrt{a^2-5}+3=1 \text{에서}$$

$$\sqrt{a^2-5}=2$$

양변을 제곱하면

$$a^2-5=4 \quad \therefore a=3 (\because a > 0)$$

$$\therefore a+p+q=3+3+1=7 \quad \text{답 7}$$

0074 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{11} = 1$ 을 x 축의 방향으로
-2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{11} = 1$ 에서 $\sqrt{20-11} = 3$ 이므로 초점의 좌표는

$$(3, 0), (-3, 0)$$

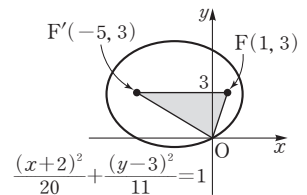
즉, 주어진 타원의 두 초점 F, F' 의 좌표는

$$(1, 3), (-5, 3)$$

따라서 구하는 삼각형 OFF' 의

넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$



0075 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 을 x 축의 방향으로 α 만큼, y 축의 방
향으로 β 만큼 평행이동한 타원의 방정식은

$$\frac{(x-\alpha)^2}{25} + \frac{(y-\beta)^2}{16} = 1$$

이 타원이 x 축과 y 축에 동시에 접하려면

$$|\text{타원의 중심의 } x\text{좌표}| = \frac{(\text{장축의 길이})}{2}$$

$$|\text{타원의 중심의 } y\text{좌표}| = \frac{(\text{단축의 길이})}{2}$$

이어야 한다.

이때 타원의 중심의 좌표는 (α, β) 이므로

$$|\alpha| = \frac{2 \times 5}{2} = 5, |\beta| = \frac{2 \times 4}{2} = 4$$

$$\therefore |\alpha| + |\beta| = 9 \quad \text{답 9}$$

0076 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 을 x 축의 방향으로 k 만
큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 에서 $\sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ 이므로 초점의 좌표는

$$(0, \sqrt{5}), (0, -\sqrt{5})$$

즉, 주어진 타원의 초점의 좌표는

$$(k, \sqrt{5}-2), (k, -\sqrt{5}-2)$$

이고 이 중 y 좌표가 양수인 점은 $(k, \sqrt{5}-2)$ 이다.

따라서 점 $(k, \sqrt{5}-2)$ 와 직선 $2x-y+\sqrt{5}=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|2 \times k - (\sqrt{5}-2) + \sqrt{5}|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

$$\frac{|2k+2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}, |2k+2| = 5$$

$$2k+2 = \pm 5 \quad \therefore k = \frac{3}{2} \quad (\because k > 0)$$

답 $\frac{3}{2}$

참고 점 (x_1, y_1) 과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리

$$\Rightarrow \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

0077 $\overline{PA} + \overline{PB} = 8$ 에서

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-4)^2+y^2} = 8$$

즉, $\sqrt{(x-4)^2+y^2} = 8 - \sqrt{x^2+y^2}$ 에서 양변을 제곱하여 정리하면 $x+6=2\sqrt{x^2+y^2}$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$3(x-2)^2 + 4y^2 = 48$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

따라서 단축의 길이는 $2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$, 장축의 길이는 $2 \times 4 = 8$ 이므로 그 곱은

$$4\sqrt{3} \times 8 = 32\sqrt{3}$$

답 ③

다른풀이 두 점 $A(0, 0)$, $B(4, 0)$ 에 대하여 $\overline{PA} + \overline{PB} = 8$ 을 만족시키는 점 $P(x, y)$ 가 나타내는 도형은 두 점 A, B 를 초점으로 하고 장축의 길이가 8인 타원이다.

이 타원의 중심은 선분 AB 의 중점이므로

$$\left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right) \quad \therefore (2, 0)$$

두 초점 A, B 의 y 좌표가 같으므로 타원의 장축은 x 축과 평행하다. 즉, 구하는 타원의 방정식을

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0) \text{이라 하면 장축의 길이가 8이므로}$$

$$2a = 8 \quad \therefore a = 4$$

타원의 중심에서 초점까지의 거리는 2이므로

$$2^2 = a^2 - b^2 \text{에서 } b^2 = a^2 - 2^2 = 4^2 - 2^2 = 12$$

$$\therefore b = 2\sqrt{3}$$

따라서 단축의 길이는 $2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$, 장축의 길이는 $2 \times 4 = 8$ 이므로 그 곱은

$$4\sqrt{3} \times 8 = 32\sqrt{3}$$

0078 타원 위의 점 P 의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2\sqrt{13} \text{에서}$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-5)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = 2\sqrt{13}$$

즉, $\sqrt{(x+1)^2 + (y-5)^2} = 2\sqrt{13} - \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$ 에서 양변을 제곱하여 정리하면

$$3y+7 = \sqrt{13\{(x+1)^2 + (y+1)^2\}}$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$13(x+1)^2 + 4(y-2)^2 = 52$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{13} = 1$$

따라서 구하는 단축의 길이는

$$2 \times 2 = 4$$

답 4

다른풀이 타원의 중심은 선분 FF' 의 중점이므로

$$\left(\frac{-1-1}{2}, \frac{5-1}{2}\right) \quad \therefore (-1, 2)$$

두 초점 F, F' 의 x 좌표가 같으므로 타원의 장축은 y 축과 평행하다. 즉, 구하는 타원의 방정식을

$$\frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1 \quad (b > a > 0) \text{이라 하면 장축의 길이가}$$

$$2\sqrt{13} \text{이므로}$$

$$2b = 2\sqrt{13} \quad \therefore b = \sqrt{13}$$

타원의 중심에서 초점까지의 거리는 3이므로

$$3^2 = b^2 - a^2 \text{에서 } a^2 = b^2 - 3^2 = (\sqrt{13})^2 - 3^2 = 4$$

$$\therefore a = 2$$

따라서 구하는 단축의 길이는

$$2a = 2 \times 2 = 4$$

0079 두 점 A, C 의 y 좌표가 같으므로 선분 AC 는 타원의 장축 또는 단축이다.

타원의 중심을 M 이라 하면 점 M 은 선분 AC 의 중점이므로

$$M\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{2+2}{2}\right) \quad \therefore M(1, 2)$$

이때 $\overline{AM} = 3$, $\overline{BM} = 2$ 이므로 선분 AC 는 타원의 장축이다.

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1 \quad \therefore \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

$$\text{답 } \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

0080 ㄱ. 단축이 y 축에 평행하고,

두 점 $A(2, 0)$, $B(-3, 3)$ 을 꼭짓점으로 하는 타원은 오른쪽 그림과 같이 2개 존재한다. (참)

ㄴ. 장축의 길이는

$$2 \times \{2 - (-3)\} = 10, \text{ 단축의 길이는 } 2 \times (3 - 0) = 6 \text{이므로 그 합은 } 10 + 6 = 16 \text{ (거짓)}$$

ㄷ. (i)의 경우 타원의 중심의 좌표는 $(2, 3)$ 이고 장축의 길이는 10, 단축의 길이는 6이므로 $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ 에서 타원의 초점의 좌표는 $(-2, 3)$, $(6, 3)$

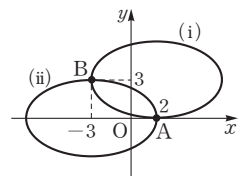
(ii)의 경우 타원의 초점은 x 축 위에 있다.

즉, 타원의 초점 중 제2사분면 위에 존재하는 것이 있다.

(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ



0081 $16x^2 + 7y^2 - 32x + 42y = 33$ 에서

$$16(x-1)^2 + 7(y+3)^2 = 112$$

$$\therefore \frac{(x-1)^2}{7} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

즉, 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$ 에서 $\sqrt{16-7}=3$ 이므로 초점의 좌표는

$(0, 3), (0, -3)$, 중심의 좌표는 $(0, 0)$, 꼭짓점의 좌표는 $(\sqrt{7}, 0), (-\sqrt{7}, 0), (0, 4), (0, -4)$

① 중심의 좌표는 $(1, -3)$

② 초점의 좌표는 $(1, 0), (1, -6)$

③ 장축의 길이는 $2 \times 4 = 8$

④ 단축의 길이는 $2 \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$

⑤ 꼭짓점의 좌표는 $(\sqrt{7}+1, -3), (-\sqrt{7}+1, -3), (1, 1), (1, -7)$

따라서 옳은 것은 ②, ⑤이다.

답 ②, ⑤

0082 $5x^2 - 10x + 4y^2 + 16y + 1 = 0$ 에서

$$5(x-1)^2 + 4(y+2)^2 - 20 = 0$$

..... ㉠

즉, 타원 ㉠을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$$5x^2 + 4y^2 - 20 = 0$$

이 방정식이 방정식 $5x^2 + 4y^2 + k = 0$ 과 일치하므로

$$m = -1, n = 2, k = -20$$

$$\therefore mnk = 40$$

답 40

0083 $x^2 + 2y^2 - 4\sqrt{2}x + 8y + 8 = 0$ 에서

$$(x-2\sqrt{2})^2 + 2(y+2)^2 = 8$$

$$\therefore \frac{(x-2\sqrt{2})^2}{8} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

즉, 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 을 x 축의 방향으로 $2\sqrt{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에서 $\sqrt{8-4}=2$ 이므로 초점의 좌표는

$(2, 0), (-2, 0)$

따라서 주어진 타원의 초점의 좌표는 $(2+2\sqrt{2}, -2),$

$(-2+2\sqrt{2}, -2)$ 이므로 구하는 두 초점 사이의 거리는 4이다.

답 4

다른풀이 타원을 평행이동해도 두 초점 사이의 거리는 변하지 않는다.

타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 의 초점의 좌표는 $(2, 0), (-2, 0)$ 이고

두 초점 사이의 거리는 4이므로 주어진 타원의 두 초점 사이의 거리도 4이다.

012 정답과 풀이

0084 $x^2 + 2y^2 - 4x - 20y + 44 = 0$

..... ㉠

㉠에 $x=0$ 을 대입하면

$$2y^2 - 20y + 44 = 0$$

$$y^2 - 10y + 22 = 0$$

$$\therefore y = 5 \pm \sqrt{3}$$

즉, 두 점 A, B의 좌표는 $(0, 5+\sqrt{3}), (0, 5-\sqrt{3})$ 이므로

$$AB = 2\sqrt{3}$$

㉡

한편, ㉠에서 $(x-2)^2 + 2(y-5)^2 = 10$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{10} + \frac{(y-5)^2}{5} = 1$$

즉, 타원의 중심 C의 좌표는 $(2, 5)$

㉢

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}$$

㉣

답 $2\sqrt{3}$

단계	채점요소	배점
㉡	AB의 길이 구하기	40%
㉢	타원의 중심 C의 좌표 구하기	40%
㉣	삼각형 ABC의 넓이 구하기	20%

0085 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)이라 하자.

타원의 정의에 의하여

$$AF + AF' = BF + BF' = 2a$$

삼각형 AF'B의 둘레의 길이는

$$AF + AF' + BF + BF' = 2a + 2a = 4a$$

즉, $4a = 20$ 에서 $a = 5$

$$3^2 = a^2 - b^2 \text{에서 } b^2 = a^2 - 3^2 = 5^2 - 3^2 = 16$$

$$\therefore b = 4 \quad (\because b > 0)$$

따라서 구하는 단축의 길이는

$$2b = 2 \times 4 = 8$$

답 8

0086 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{9} = 1$ 에서

$\sqrt{9-8}=1$ 이므로 초점의 좌표는

$(0, 1), (0, -1)$

즉, 점 C는 타원의 한 초점이므로 오른쪽 그림과 같이 다른 한 초점을 D

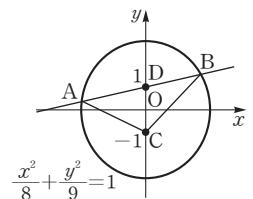
라 하면 타원의 정의에 의하여

$$AC + AD = BC + BD = 2 \times 3 = 6$$

따라서 구하는 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$AD + AC + BD + BC = 6 + 6 = 12$$

답 12



0087 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 에서 $\sqrt{25-9}=4$ 이므로

$$F(4, 0), F'(-4, 0)$$

$$\therefore \overline{FF'}=8$$

$\overline{PF}=a, \overline{PF'}=b$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$a+b=2 \times 5=10 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

직각삼각형 $PF'F$ 에서

$$a^2+b^2=\overline{FF'}^2 \quad \therefore a^2+b^2=64 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (a+b)^2 - 2ab \\ &= 100 - 2ab = 64 \end{aligned}$$

$$\therefore ab=18$$

따라서 구하는 사각형 $PF'QF$ 의 넓이는

$$ab=18 \quad \text{답 18}$$

0088 타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$ 에서 $\sqrt{36-11}=5$ 이므로 초점의 좌표는 $(5, 0), (-5, 0)$

즉, 두 점 A, B는 타원의 초점이므로 타원의 정의에 의하여

$$\overline{AP_k} + \overline{BP_k} = 2 \times 6 = 12 \quad (k=1, 2, \dots, 6)$$

$$(\overline{AP_1} + \overline{AP_2} + \dots + \overline{AP_6}) + (\overline{BP_1} + \overline{BP_2} + \dots + \overline{BP_6})$$

$$= (\overline{AP_1} + \overline{BP_1}) + (\overline{AP_2} + \overline{BP_2}) + \dots + (\overline{AP_6} + \overline{BP_6})$$

$$= 12 \times 6 = 72$$

$$\therefore \overline{BP_1} + \overline{BP_2} + \dots + \overline{BP_6}$$

$$= 72 - (\overline{AP_1} + \overline{AP_2} + \dots + \overline{AP_6})$$

$$= 72 - 32 = 40 \quad \text{답 40}$$

0089 $\overline{PF}=a, \overline{PF'}=b$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$a+b=2 \times 4=8$$

이때 $a>0, b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

$$8 \geq 2\sqrt{ab}, \sqrt{ab} \leq 4$$

$$\therefore ab \leq 16$$

따라서 $\overline{PF} \times \overline{PF'}$ 의 최댓값은 16이다. 답 ③

참고 산술평균과 기하평균의 관계

$$a>0, b>0 \text{ 일 때, } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

0090 점 $P(a, b)$ 가 타원 $2x^2+y^2=10$ 위의 점이므로

$$2a^2+b^2=10$$

이때 $a^2>0, b^2>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2a^2+b^2 \geq 2\sqrt{2a^2 \times b^2} = 2\sqrt{2}ab \quad (\text{단, 등호는 } 2a^2=b^2 \text{ 일 때 성립})$$

$$10 \geq 2\sqrt{2}ab \quad \therefore ab \leq \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

따라서 ab 의 최댓값은 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 이다. 답 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

0091 점 D의 좌표를 (a, b) ($a>0, b>0$)라 하면 직사각형 ABCD의 넓이는

$$2a \times 2b = 4ab$$

점 D(a, b)는 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{25} + \frac{b^2}{16} = 1$$

이때 $a^2>0, b^2>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a^2}{25} + \frac{b^2}{16} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{25} \times \frac{b^2}{16}} = \frac{ab}{10}$$

(단, 등호는 $\frac{a^2}{25} = \frac{b^2}{16}$ 일 때 성립)

$$1 \geq \frac{ab}{10} \quad \therefore ab \leq 10$$

따라서 $4ab \leq 40$ 이므로 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 40이다. 답 ④

0092 $3x^2+2y^2=6$ 에서 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$

$\overline{FP}=a, \overline{F'P}=b$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$a+b=2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{FP}^2 + \overline{F'P}^2 &= a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \\ &= 12 - 2ab \end{aligned}$$

이때 $a>0, b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

$$2\sqrt{3} \geq 2\sqrt{ab} \quad \therefore ab \leq 3$$

따라서 $12-2ab \geq 6$ 이므로 $\overline{FP}^2 + \overline{F'P}^2$ 의 최솟값은 6이다.

답 6

0093 $|\overline{PA} - \overline{PB}| = 8$, 즉 두 점 A, B에서 점 P에 이르는 거리의 차가 8이므로

$$2|a|=8 \quad \therefore |a|=4$$

또, 두 초점이 A(5, 0), B(-5, 0)이므로

$$b^2 = 5^2 - a^2 = 5^2 - 4^2 = 9$$

$$\therefore a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7 \quad \text{답 7}$$

0094 $\overline{AF} - \overline{AF'} = 8$ 에서 $2a=8 \quad \therefore a=4$

이때 $\sqrt{4^2+9}=5$ 이므로 두 초점은

$$F(5, 0), F'(-5, 0)$$

$$\therefore \overline{FF'}=10 \quad \text{답 10}$$

0095 포물선 $y^2=8x$ 의 초점의 좌표는 (2, 0)

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 초점의 좌표는

$$(\sqrt{a^2+b^2}, 0), (-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$$

이때 포물선의 초점과 쌍곡선의 한 초점이 일치하므로

$$\sqrt{a^2+b^2}=2 \quad \therefore a^2+b^2=4 \quad \text{답 4}$$

0096 두 초점이 x 축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{이라 하면}$$

$$4^2 = a^2 + b^2 \text{에서 } b^2 = 16 - a^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로

$$16 - a^2 > 0 \quad \therefore 0 < a^2 < 16$$

또, 쌍곡선이 점 $(6, -2\sqrt{2})$ 를 지나므로

$$\frac{36}{a^2} - \frac{8}{b^2} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } \frac{36}{a^2} - \frac{8}{16 - a^2} = 1$$

$$36(16 - a^2) - 8a^2 = a^2(16 - a^2)$$

$$a^4 - 60a^2 + 576 = 0$$

$$(a^2 - 12)(a^2 - 48) = 0$$

$$\therefore a^2 = 12 \quad (\because 0 < a^2 < 16)$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b^2 = 16 - 12 = 4$

$$\therefore \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$$

따라서 구하는 주축의 길이는 $2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ 답 $4\sqrt{3}$

0097 타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ 에서 $\sqrt{36 - 16} = 2\sqrt{5}$ 이므로 두 초점

의 좌표는 $(2\sqrt{5}, 0), (-2\sqrt{5}, 0)$

이때 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$ 이라 하면

$$(2\sqrt{5})^2 = a^2 + b^2 \quad \therefore a^2 + b^2 = 20 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 점근선의 방정식이 $y = \pm 2x$ 이므로

$$\frac{b}{a} = 2 \quad \therefore b = 2a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a^2 = 4, b^2 = 16$$

$$\therefore \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$\therefore |\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2 \times 2 = 4 \quad \text{답 } 4$$

0098 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{b}{a}x$

두 점근선이 서로 수직이므로

$$\frac{b}{a} \times \left(-\frac{b}{a}\right) = -1 \quad \therefore a^2 = b^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 쌍곡선이 점 $(6, 4)$ 를 지나므로

$$\frac{36}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a^2 = 20, b^2 = 20$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 40 \quad \text{답 } 40$$

0099 쌍곡선 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = -1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}x, \text{ 즉 } y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

014 정답과 풀이

오른쪽 그림과 같이 직선 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ 가

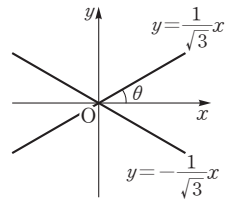
x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를

θ 라 하면

$$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \therefore \theta = 30^\circ$$

따라서 두 점근선이 이루는 예각의 크기는

$$2\theta = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$$



답 ④

0100 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 에서 $\sqrt{9 + 16} = 5$ 이므로 초점의 좌표는 $(5, 0), (-5, 0)$

또, 점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{4}{3}x$

$$\therefore 4x + 3y = 0, 4x - 3y = 0$$

..... ㉠

이때 원의 중심의 좌표를 $(5, 0)$ 이라 하면 원의 중심과 점근선

$4x + 3y = 0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

즉, 원의 반지름의 길이는

$$\frac{|4 \times 5 + 3 \times 0|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 4$$

..... ㉡

따라서 구하는 원의 둘레의 길이는

$$2\pi \times 4 = 8\pi$$

..... ㉢

답 8π

단계	채점요소	배점
㉠	쌍곡선의 초점의 좌표와 점근선의 방정식 구하기	40%
㉡	원의 반지름의 길이 구하기	40%
㉢	원의 둘레의 길이 구하기	20%

0101 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$ 을 x 축의 방향

으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$ 에서 $\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$ 이므로

초점의 좌표는 $(0, \sqrt{13}), (0, -\sqrt{13})$, 중심의 좌표는 $(0, 0)$,

주축의 길이는 $2 \times 3 = 6$, 점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{3}{2}x$

ㄱ. 초점의 좌표는 $(2, \sqrt{13} + 1), (2, -\sqrt{13} + 1)$

즉, 두 초점은 y 축 위에 있지 않다. (거짓)

ㄴ. 중심의 좌표는 $(2, 1)$ (참)

ㄷ. 쌍곡선을 평행이동해도 주축의 길이는 변하지 않는다.

즉, 주축의 길이는 6이다. (거짓)

ㄹ. 점근선의 방정식은 $y - 1 = \pm \frac{3}{2}(x - 2)$

$$\therefore y = \frac{3}{2}x - 2, y = -\frac{3}{2}x + 4 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

0102 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{7} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{7} = 1$ 에서 $\sqrt{1+7} = 2\sqrt{2}$ 이므로 초점의 좌표는 $(2\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0)$

따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$(2\sqrt{2}-3, 1), (-2\sqrt{2}-3, 1)$

$\therefore p+q = (2\sqrt{2}-3) + (-2\sqrt{2}-3) = -6$ **답 -6**

0103 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{k^2} = -1$ 을 x 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{k^2} = -1$ 의 초점의 좌표는

$(0, \sqrt{5+k^2}), (0, -\sqrt{5+k^2})$

이므로 두 초점 사이의 거리는 $2\sqrt{5+k^2}$ 이다.

쌍곡선을 평행이동해도 두 초점 사이의 거리는 변하지 않으므로 주어진 쌍곡선의 두 초점 사이의 거리도 $2\sqrt{5+k^2}$ 이다.

즉, $2\sqrt{5+k^2} = 2\sqrt{14}$ 에서

$5+k^2=14, k^2=9$

$\therefore k=3$ 또는 $k=-3$

따라서 모든 실수 k 의 값의 곱은

$3 \times (-3) = -9$ **답 -9**

0104 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 쌍곡선의 방정식은

$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$ ㉠

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ 의 점근선의 방정식은

$y = \pm \frac{4}{2}x \quad \therefore y = \pm 2x$

즉, 쌍곡선 ㉠의 점근선의 방정식은

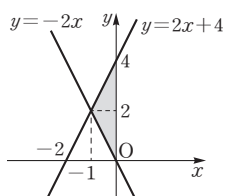
$y-2 = \pm 2(x+1)$

$\therefore y=2x+4, y=-2x$

한편, 두 직선 $y=2x+4, y=-2x$ 의 교점의 좌표는 $(-1, 2)$

따라서 구하는 넓이는 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$\frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 2$



답 2

0105 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 8$ 이므로

$|\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} - \sqrt{(x+6)^2 + (y-2)^2}| = 8$

즉, $\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+6)^2 + (y-2)^2} \pm 8$ 에서 양변을 제곱하여 정리하면

$\pm 4\sqrt{(x+6)^2 + (y-2)^2} = -5x - 21$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$9(x+1)^2 - 16(y-2)^2 = 144$

$\therefore \frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

이 쌍곡선이 점 $(k, -1)$ 을 지나므로

$\frac{(k+1)^2}{16} - \frac{(-1-2)^2}{9} = 1$

$\frac{(k+1)^2}{16} = 2, k+1 = \pm 4\sqrt{2}$

$\therefore k = 4\sqrt{2}-1$ 또는 $k = -4\sqrt{2}-1$

따라서 모든 k 의 값의 합은 -2이다. **답 -2**

다른풀이 쌍곡선의 중심은 선분 FF' 의 중점과 같으므로 쌍곡선의 중심의 좌표는

$(\frac{4-6}{2}, \frac{2+2}{2}) \quad \therefore (-1, 2)$

이때 두 초점이 x 축과 평행한 직선 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{(x+1)^2}{a^2} - \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하자.

$|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 8$, 즉 주축의 길이가 8이므로

$2a = 8 \quad \therefore a = 4$

또, 쌍곡선의 중심과 초점 사이의 거리는 5이므로

$5^2 = a^2 + b^2 \quad \therefore b^2 = 5^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$

$\therefore \frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

이 쌍곡선이 점 $(k, -1)$ 을 지나므로

$\frac{(k+1)^2}{16} - \frac{(-1-2)^2}{9} = 1$

$\frac{(k+1)^2}{16} = 2, k+1 = \pm 4\sqrt{2}$

$\therefore k = 4\sqrt{2}-1$ 또는 $k = -4\sqrt{2}-1$

따라서 모든 k 의 값의 합은 -2이다.

0106 $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 10$ 이므로

$|\sqrt{(x+1)^2 + (y-7)^2} - \sqrt{(x+1)^2 + (y+5)^2}| = 10$

즉, $\sqrt{(x+1)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+5)^2} \pm 10$ 에서 양변을 제곱하여 정리하면

$\pm 5\sqrt{(x+1)^2 + (y+5)^2} = -6y - 19$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$25(x+1)^2 - 11(y-1)^2 = -275$

$\therefore \frac{(x+1)^2}{11} - \frac{(y-1)^2}{25} = -1$ **답 ④**

0107 쌍곡선의 두 초점을 $F(2, 0), F'(10, 0)$ 이라 하면 이 쌍곡선 위의 점 $P(x, y)$ 에 대하여 $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 4$ 이므로

$|\sqrt{(x-2)^2 + y^2} - \sqrt{(x-10)^2 + y^2}| = 4$

즉, $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x-10)^2 + y^2} \pm 4$ 에서 양변을 제곱하여 정리하면

$2x - 14 = \pm \sqrt{(x-10)^2 + y^2}$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$3(x-6)^2 - y^2 = 12$$

$$\therefore \frac{(x-6)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

이 쌍곡선의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면

$$9 - \frac{y^2}{12} = 1, y^2 = 96$$

$$\therefore y = 4\sqrt{6} \text{ 또는 } y = -4\sqrt{6}$$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(0, 4\sqrt{6}), (0, -4\sqrt{6})$ 이므로 선분 AB의 길이는 $8\sqrt{6}$ 이다. 답 ⑤

0108 $9x^2 - 4y^2 + 18x + 48y - 171 = 0$ 에서

$$9(x+1)^2 - 4(y-6)^2 = 36$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-6)^2}{9} = 1 \quad \dots\dots ㉠$$

즉, 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 6 만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 에서 $\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ 이므로 초점의 좌표는 $(\sqrt{13}, 0), (-\sqrt{13}, 0)$

따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$$(\sqrt{13}-1, 6), (-\sqrt{13}-1, 6)$$

$$\therefore a+b+c+d = (\sqrt{13}-1)+6+(-\sqrt{13}-1)+6$$

$$= 10 \quad \text{답 10}$$

0109 $2x^2 - 5y^2 + 12x + 10y + 3 = 0$ 에서

$$2(x+3)^2 - 5(y-1)^2 = 10$$

$$\therefore \frac{(x+3)^2}{5} - \frac{(y-1)^2}{2} = 1 \quad \dots\dots ㉠$$

쌍곡선 ㉠은 쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -3 만큼,

y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a^2=5, b^2=2, m=-3, n=1$ 이므로

$$a^2+b^2+m+n=5 \quad \text{답 5}$$

0110 $x^2 - 9y^2 + 2x - 8 = 0$ 에서 $(x+1)^2 - 9y^2 = 9$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{9} - y^2 = 1 \quad \dots\dots ㉠$$

즉, 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$ 에서 $\sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ 이므로 초점의 좌표는 $(\sqrt{10}, 0), (-\sqrt{10}, 0)$, 점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{1}{3}x$

따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$$(\sqrt{10}-1, 0), (-\sqrt{10}-1, 0)$$

0116 정답과 풀이

점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{1}{3}(x+1)$

$$\therefore x-3y+1=0, x+3y+1=0$$

따라서 점 $(\sqrt{10}-1, 0)$ 과 직선 $x-3y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|(\sqrt{10}-1)+1|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = 1$$

답 1

단계	채점요소	배점
㉠	쌍곡선의 방정식을 표준형으로 고치기	20%
㉡	주어진 쌍곡선의 초점의 좌표와 점근선의 방정식 구하기	50%
㉢	초점과 점근선 사이의 거리 구하기	30%

0111 $2x^2 - y^2 + 4x + 8y - 8 = 0$ 에서

$$2(x+1)^2 - (y-4)^2 = -6$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{3} - \frac{(y-4)^2}{6} = -1$$

즉, 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ 에서 $\sqrt{3+6} = 3$ 이므로 초점의 좌표는 $(0, 3), (0, -3)$

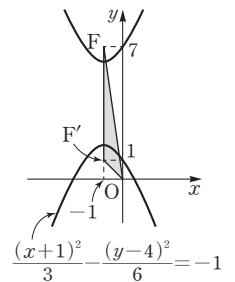
따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$$(-1, 7), (-1, 1)$$

이때 $F(-1, 7), F'(-1, 1)$ 이라 하면

오른쪽 그림에서 삼각형 OFF'의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times FF' \times 1 = \frac{1}{2} \times 6 \times 1 = 3$$



답 ③

0112 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 에서 $\sqrt{9+7} = 4$ 이므로 초점의 좌표

는 $(4, 0), (-4, 0)$

즉, 두 점 C, F는 주어진 쌍곡선의 초점이다.

또, 주축의 길이가 $2 \times 3 = 6$ 이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{AC} - \overline{AF} = 6 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\overline{BC} - \overline{BF} = 6 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$\overline{AC} + \overline{BC} - (\overline{AF} + \overline{BF}) = 12$$

$$\therefore \overline{AC} + \overline{BC} - \overline{AB} = 12 \quad \dots\dots ㉢$$

이때 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 30이므로

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 30 \quad \dots\dots ㉣$$

㉢-㉣을 하면

$$2\overline{AB} = 18 \quad \therefore \overline{AB} = 9$$

답 9

0113 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{6} = 1$ 에서 주축의 길이는 $2 \times 3 = 6$ 이므로 쌍곡선의 정의에 의하여
 $\overline{PF'} - \overline{PF} = 6, \overline{QF'} - \overline{QF} = 6$
 이때 $\overline{PF} = 1, \overline{QF} = 4$ 이므로
 $\overline{PF'} = 6 + 1 = 7, \overline{QF'} = 6 + 4 = 10$
 $\therefore \overline{PF'} + \overline{QF'} = 7 + 10 = 17$

답 17

0114 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 에서

$\sqrt{4+12}=4$ 이므로 두 초점은

$F(4, 0), F'(-4, 0)$ 이라 하면

$\overline{FF'} = 8$

한편, $\overline{PF} : \overline{PF'} = 3 : 2$ 이므로

$\overline{PF} = 3k, \overline{PF'} = 2k (k > 0)$ 로 놓을 수 있다.

이때 주축의 길이가 $2 \times 2 = 4$ 이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

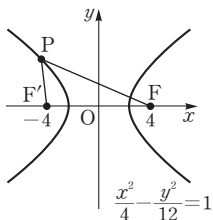
$\overline{PF} - \overline{PF'} = k = 4$

$\therefore \overline{PF} = 3k = 12, \overline{PF'} = 2k = 8$

따라서 구하는 삼각형 $PF'F$ 의 둘레의 길이는

$\overline{PF} + \overline{PF'} + \overline{FF'} = 12 + 8 + 8 = 28$

답 28



0115 쌍곡선 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{16} = 1$ 에서 주축의 길이가

$2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ 이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{F'P_n} - \overline{FP_n} = 4\sqrt{2}$

$\therefore \overline{F'P_n} = \overline{FP_n} + 4\sqrt{2} (n=1, 2, 3, 4, 5)$

$\therefore \overline{F'P_1} + \overline{F'P_2} + \dots + \overline{F'P_5}$

$= (\overline{FP_1} + 4\sqrt{2}) + (\overline{FP_2} + 4\sqrt{2}) + \dots + (\overline{FP_5} + 4\sqrt{2})$

$= (\overline{FP_1} + \overline{FP_2} + \dots + \overline{FP_5}) + 4\sqrt{2} \times 5$

$= 10\sqrt{2} + 20\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$

답 $30\sqrt{2}$

0116 타원 $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$ 의 장축의 길이는 $2 \times 8 = 16$ 이므로

타원의 정의에 의하여

$\overline{PF'} + \overline{PF} = 16$

또, 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ 의 주축의 길이는 $2 \times 4 = 8$ 이므로 쌍

곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'} - \overline{PF} = 8$

$\therefore \overline{PF'}^2 - \overline{PF}^2 = (\overline{PF'} + \overline{PF})(\overline{PF'} - \overline{PF})$

$= 16 \times 8 = 128$

답 128

0117 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 에서 $\sqrt{2+2}=2$ 이므로 두 초점은

$F(2, 0), F'(-2, 0)$

$\therefore \overline{FF'} = 4$

즉, 선분 FF' 은 원 $x^2 + y^2 = 4$ 의 지름이므로 삼각형 $PF'F$ 는

$\angle F'PF = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$\overline{PF'} = a, \overline{PF} = b$ 라 하면 직각삼각형 $PF'F$ 에서 피타고라스 정리에 의하여

$a^2 + b^2 = 16$

또, 쌍곡선의 정의에 의하여

$a - b = 2\sqrt{2}$

이때 $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ 에서

$8 = 16 - 2ab \quad \therefore ab = 4$

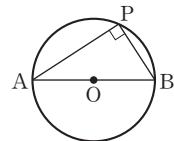
따라서 삼각형 $PF'F$ 의 넓이는

$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 4 = 2$

답 2

참고 반원에 대한 원주각의 크기는 90° 이다.

즉, $\overline{AB}$ 가 지름이면 $\angle APB = 90^\circ$ 이다.



0118 오른쪽 그림과 같이 쌍곡선과

타원의 다른 한 꼭짓점을 각각 C, D라

하자. 이때

$\overline{F'P} = \sqrt{(2+2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{17},$

$\overline{FP} = \sqrt{(2-2)^2 + (1-0)^2} = 1$

이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{BD} = \overline{F'P} + \overline{FP} = \sqrt{17} + 1$

쌍곡선의 정의에 의하여

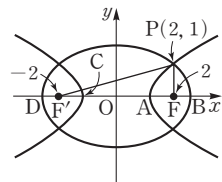
$\overline{AC} = \overline{F'P} - \overline{FP} = \sqrt{17} - 1$

$\therefore \overline{AB} = \frac{1}{2}(\overline{BD} - \overline{AC})$

$= \frac{1}{2}\{(\sqrt{17} + 1) - (\sqrt{17} - 1)\}$

$= 1$

답 1



0119 $2x^2 + y^2 - 1 + k(x^2 + y^2 - 1) = 0$ 에서

$(k+2)x^2 + (k+1)y^2 - (k+1) = 0$

이 방정식이 나타내는 도형이 쌍곡선이 되려면

$(k+2)(k+1) < 0$ 이어야 하므로

$-2 < k < -1$

답 $-2 < k < -1$

0120 주어진 방정식이 나타내는 도형이 타원이 되려면

$1 \times k > 0, k \neq 1$ 이어야 하므로

$0 < k < 1, k > 1$

따라서 실수 k 의 값이 될 수 있는 것은 ④ $\frac{1}{2}$ 이다.

답 ④

0121 주어진 방정식이 나타내는 도형이 포물선이 되려면

$k+2=0$ 또는 $-(3k-1)=0$ 이어야 하므로

$k=-2$ 또는 $k=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-2 + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}$$

..... ㉠

답 $-\frac{5}{3}$

단계	채점요소	배점
㉠	조건을 만족시키는 실수 k 의 값 구하기	60%
㉡	모든 실수 k 의 값의 합 구하기	40%

0122 $7x^2 - y^2 - 4 - k(x^2 - y^2) = 0$ 에서

$$(7-k)x^2 - (1-k)y^2 - 4 = 0$$

이 방정식이 나타내는 도형이 타원이 되려면

$$(7-k)\{- (1-k)\} > 0, 7-k \neq -(1-k) \text{ 이어야 하므로}$$

$$(k-7)(k-1) < 0, 2k \neq 8$$

$$1 < k < 7, k \neq 4$$

$$\therefore 1 < k < 4, 4 < k < 7$$

따라서 구하는 정수 k 는 2, 3, 5, 6의 4개이다.

답 4

유형 ㄴp

본문 21쪽

0123 점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면 점 P가 쌍곡선

$$2x^2 - 7y^2 = 14 \text{ 위의 점이므로}$$

$$2a^2 - 7b^2 = 14 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 M의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \frac{a+1}{2}, y = \frac{b}{2}$$

$$\therefore a = 2x - 1, b = 2y \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$2(2x-1)^2 - 7(2y)^2 = 14$$

$$8x^2 - 8x + 2 - 28y^2 = 14$$

$$\therefore 2x^2 - 7y^2 - 2x - 3 = 0 \quad \text{답 } 2x^2 - 7y^2 - 2x - 3 = 0$$

0124 $A(a, 0), B(0, b)$ 라 하면 삼각형 OAB는 직각삼각형
이므로

$$a^2 + b^2 = 3^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 P(x, y)가 선분 AB를 1 : 2로 내분하므로

$$x = \frac{2a}{3}, y = \frac{b}{3}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}x, b = 3y \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\left(\frac{3}{2}x\right)^2 + (3y)^2 = 3^2$$

$$\therefore \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad \text{답 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

018 정답과 풀이

0125 점 P(x, y)에서 점 A($-2, 0$)과 y 축에 이르는 거리가
서로 같으므로

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = |x|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4(x+1) + y^2 = 0$$

$$\therefore y^2 = -4(x+1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 포물선이다.

포물선 ㉠은 포물선 $y^2 = -4x$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행
이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2 = -4x$ 의 초점의 좌표는 $(-1, 0)$ 이므로 포물선

㉠의 초점의 좌표는 $(-2, 0)$ 답 $(-2, 0)$

0126 두 원 $C_1: (x+1)^2 + y^2 = 1, C_2: (x-1)^2 + y^2 = 25$ 의
중심을 각각 A, B라 하면

$$A(-1, 0), B(1, 0)$$

중심이 P인 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\overline{AP} = r + 1, \overline{BP} = 5 - r$$

$$\therefore \overline{AP} + \overline{BP} = 6$$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 두 점 A, B를 초점으로 하고 장축
의 길이가 6인 타원이다.

따라서 구하는 도형의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)이라
하면

$$2a = 6 \quad \therefore a = 3$$

$$b^2 = 3^2 - 1^2 = 8$$

$$\therefore \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1 \quad \text{답 } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$$

0127 오른쪽 그림과 같이 최장

거리와 최단 거리는 타원 궤도의 두

초점을 잇는 직선이 타원 궤도와 만

나는 점에서 초점인 지구까지의 거

리와 같으므로 타원 궤도의 장축의 길이는

$$1000 + 2000 = 3000(\text{km})$$

궤도의 중심에서 초점인 지구까지의 거리는

$$\frac{3000}{2} - 1000 = 500(\text{km})$$

따라서 구하는 단축의 길이는

$$2\sqrt{\left(\frac{3000}{2}\right)^2 - 500^2} = 2000\sqrt{2}(\text{km})$$

답 ㉠



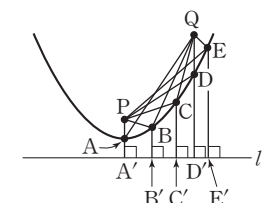
0128 오른쪽 그림과 같이 포물선

의 준선을 l 이라 할 때, 점 A, B, C,

D, E에서 준선 l 에 내린 수선의 발을

각각 A', B', C', D', E'이라 하면

포물선의 정의에 의하여



$$\begin{aligned}\overline{PD} + \overline{QD} &= \overline{DD'} + \overline{QD} = \overline{QD'} \\ \overline{PA} + \overline{QA} &= \overline{AA'} + \overline{QA} > \overline{QD'} \\ \overline{PB} + \overline{QB} &= \overline{BB'} + \overline{QB} > \overline{QD'} \\ \overline{PC} + \overline{QC} &= \overline{CC'} + \overline{QC} > \overline{QD'} \\ \overline{PE} + \overline{QE} &= \overline{EE'} + \overline{QE} > \overline{QD'}\end{aligned}$$

따라서 하수처리장의 위치로 가장 적합한 곳은 D이다.

답 ④

☞ 시험에 꼭 나오는 문제

본문 22~25쪽

0129 포물선 $x^2=4y$ 의 초점은 $F_1(0, 1)$

또, 포물선 $y^2=-8x$ 의 초점은 $F_2(-2, 0)$

$$\therefore \overline{F_1F_2} = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

답 ③

0130 $8x=y^2+4cy$ 에서

$$(y+2c)^2 = 8\left(x + \frac{c^2}{2}\right)$$

이 포물선은 포물선 $y^2=8x$ 를 x 축의 방향으로 $-\frac{c^2}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 $-2c$ 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=8x$ 의 초점의 좌표가 $(2, 0)$ 이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\left(2 - \frac{c^2}{2}, -2c\right)$

이 점이 직선 $y=x-2$ 위에 있으므로

$$-2c = \left(2 - \frac{c^2}{2}\right) - 2, \quad c^2 - 4c = 0, \quad c(c-4) = 0$$

$$\therefore c = 4 \quad (\because c > 0)$$

답 ④

0131 $y^2+4x-4y-4=0$ 에서

$$(y-2)^2 = -4(x-2) \quad \dots\dots ㉠$$

이 포물선은 포물선 $y^2=-4x$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=-4x$ 의 초점의 좌표는 $(-1, 0)$ 이므로 포물선 ㉠의 초점의 좌표는 $(1, 2)$

한편, $x^2-2x-4y+a=0$ 에서

$$(x-1)^2 = 4\left(y - \frac{a-1}{4}\right) \quad \dots\dots ㉡$$

이 포물선은 포물선 $x^2=4y$ 를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 $\frac{a-1}{4}$ 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2=4y$ 의 초점의 좌표는 $(0, 1)$ 이므로 포물선 ㉡의 초점의 좌표는 $\left(1, \frac{a+3}{4}\right)$

이때 두 포물선 ㉠, ㉡의 초점이 일치하므로

$$\frac{a+3}{4} = 2 \quad \therefore a = 5$$

답 5

0132 포물선 $y^2=4x$ 의 초점은 $F(1, 0)$, 준선의 방정식은

$$x = -1$$

점 P의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면

$$H(-1, y_1)$$

삼각형 PHF가 정삼각형이므로 $\overline{PH} = \overline{HF}$ 에서

$$x_1 + 1 = \sqrt{(-1-1)^2 + y_1^2}$$

$$\therefore x_1 + 1 = \sqrt{4 + y_1^2}$$

..... ㉠

또, 점 P(x_1, y_1)은 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로

$$y_1^2 = 4x_1$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$x_1 + 1 = \sqrt{4 + 4x_1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x_1^2 - 2x_1 - 3 = 0, \quad (x_1 - 3)(x_1 + 1) = 0$$

$$\therefore x_1 = 3 \quad (\because x_1 > 0)$$

$$\therefore \overline{PH} = x_1 + 1 = 3 + 1 = 4$$

따라서 구하는 삼각형 PHF의 한 변의 길이는 4이다.

답 ③

0133 포물선 $y^2=12x$ 의 초점은

$$F(3, 0), \text{ 준선 } l \text{의 방정식은 } x = -3$$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 x 축에 내린 수선의 발을 A_1 , 직선 BD에 내린 수선의 발을 A_2 라 하자.

$$\overline{AC} = 4 \text{이므로 } \overline{FA_1} = 2$$

$$\text{또, } \overline{BD} = x \text{라 하면 } \overline{BA_2} = x - 4$$

포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF} = \overline{AC} = 4, \quad \overline{BF} = \overline{BD} = x$$

이고, 두 삼각형 AFA_1, ABA_2 는 서로 닮음이므로

$$\overline{FA_1} : \overline{BA_2} = \overline{AF} : \overline{AB} \text{에서}$$

$$2 : (x - 4) = 4 : (x + 4)$$

$$4x - 16 = 2x + 8$$

$$2x = 24 \quad \therefore x = 12$$

$$\therefore \overline{BD} = 12$$

답 ①

다른풀이 포물선 $y^2=12x$ 의 초점은 $F(3, 0)$, 준선 l 의 방정식은

$$x = -3$$

$\overline{AC} = 4$ 이므로 점 A의 x 좌표는 1이다.

$$\therefore A(1, 2\sqrt{3})$$

따라서 직선 AB의 방정식은

$$y - 0 = \frac{0 - 2\sqrt{3}}{3 - 1}(x - 3)$$

$$\therefore y = -\sqrt{3}(x - 3)$$

..... ㉠

㉠을 $y^2=12x$ 에 대입하면 포물선과 직선 ㉠의 교점의 x 좌표는

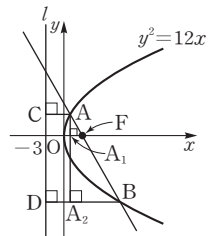
$$\{-\sqrt{3}(x-3)\}^2 = 12x$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0, \quad (x-1)(x-9) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 9$$

즉, 점 B의 x 좌표가 9이므로

$$\overline{BD} = 9 + 3 = 12$$



0134 포물선 $y^2=8x$ 의 초점은 $F(2, 0)$,

준선 l 의 방정식은 $x=-2$

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, A 에서 준선 l 에 내린 수선의 발을 각각 H, K 라 하면 포물선의 정의에 의하여

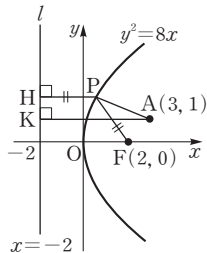
$$\overline{PF} = \overline{PH}$$

$$\therefore \overline{AP} + \overline{PF} = \overline{AP} + \overline{PH}$$

$$\geq \overline{AK}$$

$$= 3 - (-2) = 5$$

따라서 구하는 최솟값은 5이다.



답 5

0135 ㄱ. $k>1$ 이면 타원 $x^2 + \frac{y^2}{k^2} = 1$ 의 초점의 좌표는

$$(0, \sqrt{k^2-1}), (0, -\sqrt{k^2-1})$$

이므로 초점은 y 축 위에 있다. (참)

ㄴ. $k>1$ 이면 타원 위의 한 점에서 두 초점까지의 거리의 합은 $2k$ 이고 $2k>2$ 이다. (거짓)

ㄷ. $0<k<1$ 이면 장축의 길이는 $2 \times 1 = 2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

참고 타원 위의 한 점에서 두 초점까지의 거리의 합은 타원의 장축의 길이와 같다.

0136 타원의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a>b>0)$$

이라 하면 단축의 길

$$이가 6이므로$$

$$2b=6 \quad \therefore b=3$$

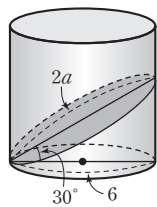
또, 장축의 길이가 $2a$ 이므로

$$2a \cos 30^\circ = 6 \quad \therefore a = 2\sqrt{3}$$

이때 $\sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2-3^2} = \sqrt{3}$ 이므로 타원의 초점의 좌표는

$$(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$$

따라서 두 초점 사이의 거리는 $2\sqrt{3}$ 이다.



답 $2\sqrt{3}$

0137 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에서 $\sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ 이므로

$$P(\sqrt{5}, 0), P'(-\sqrt{5}, 0)$$

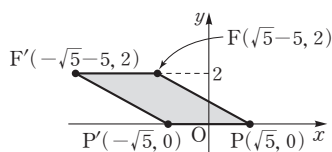
한편, 타원 $\frac{(x+5)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ 은 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -5 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로

$$F(\sqrt{5}-5, 2), F'(-\sqrt{5}-5, 2)$$

따라서 구하는 사각형

$$PFF'P' \text{의 넓이는}$$

$$2\sqrt{5} \times 2 = 4\sqrt{5}$$



답 ㉟

0138 두 점 $F(4, 0), F'(-2, 0)$

이 타원의 초점이므로 타원의 정의에 의하여

$$\overline{AF} + \overline{AF'} = \overline{BF} + \overline{BF'}$$

$$1+7$$

$$= \sqrt{(1-4)^2+k^2} + \sqrt{(1+2)^2+k^2}$$

$$8 = 2\sqrt{9+k^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$k^2=7 \quad \therefore k=\sqrt{7} \quad (\because k>0)$$

답 ㉠

다른풀이 두 초점이 x 축 위에 있고 타원의 중심의 좌표가

$$\left(\frac{4-2}{2}, 0\right), \text{ 즉 } (1, 0)$$

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a>b>0)$$

이라 할 수 있다.

타원의 중심에서 점 $A(5, 0)$ 까지의 거리가 4이므로

$$a=4$$

타원의 중심에서 초점까지의 거리는 $4-1=3$ 이므로

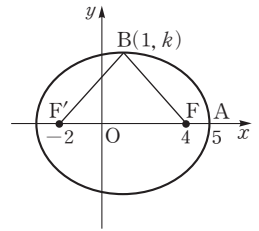
$$b^2=4^2-3^2=7$$

따라서 타원의 방정식은

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

이 타원이 점 $B(1, k)$ 를 지나므로

$$\frac{k^2}{7} = 1, k^2=7 \quad \therefore k=\sqrt{7} \quad (\because k>0)$$



0139 $9x^2+4y^2+54x-8y+49=0$ 에서

$$9(x+3)^2+4(y-1)^2=36$$

$$\therefore \frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

이 타원은 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 을 x 축의

방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

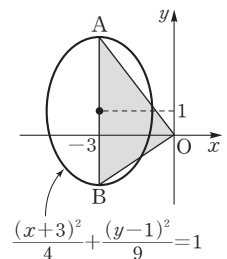
이때 장축의 길이는

$$\overline{AB} = 2 \times 3 = 6$$

따라서 구하는 삼각형 ABO 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times 3 = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$

답 9



0140 $16x^2+25y^2=400$ 에서

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$\sqrt{25-16}=3$ 이므로 타원의 초점

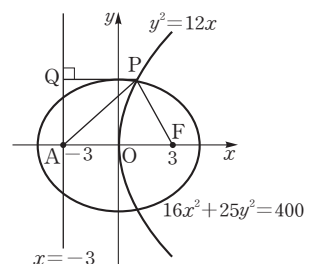
의 좌표는

$$(-3, 0), (3, 0)$$

이때 $F(3, 0)$ 이라 하면 포물선

$y^2=12x$ 의 초점의 좌표도 $(3, 0)$

이므로 타원의 초점 F 와 일치한다.



따라서 타원과 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AP} + \overline{PQ} = \overline{AP} + \overline{PF}$$

$$= 2 \times 5 = 10$$

답 10

0141 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 \times 10 = 20$$

$F(c, 0)$ ($c > 0$)이라 하면

$$c = \sqrt{100 - k} \quad (\because 0 < k < 100)$$

$$\therefore \overline{F'F} = 2\sqrt{100 - k}$$

한편, 삼각형 $PF'F$ 의 둘레의 길이가 34이므로

$$\overline{PF} + \overline{PF'} + \overline{F'F} = 20 + 2\sqrt{100 - k} = 34$$

$$\sqrt{100 - k} = 7, 100 - k = 49$$

$$\therefore k = 51$$

답 ④

0142 타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ 에서 $\sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3}$ 이므로 초점의 좌표는

$$(3\sqrt{3}, 0), (-3\sqrt{3}, 0)$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 주축의 길이가 6이므로

$$2|a| = 6 \quad \therefore |a| = 3$$

또, 쌍곡선의 초점의 좌표가 $(3\sqrt{3}, 0), (-3\sqrt{3}, 0)$ 이므로

$$(3\sqrt{3})^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore b^2 = (3\sqrt{3})^2 - a^2 = (3\sqrt{3})^2 - 3^2 = 18$$

$$\therefore a^2 - b^2 = 9 - 18 = -9$$

답 -9

0143 쌍곡선 $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$, 즉 $\frac{x^2}{\frac{1}{2}} - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$ 의 점근선의 방정

식은

$$y = \pm x$$

점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면 점 P(a, b)와 직선 $y = x$, 즉 $x - y = 0$ 사이의 거리는

$$\overline{PQ} = \frac{|a - b|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|a - b|}{\sqrt{2}}$$

또, 점 P(a, b)와 직선 $y = -x$, 즉 $x + y = 0$ 사이의 거리는

$$\overline{PR} = \frac{|a + b|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|a + b|}{\sqrt{2}}$$

한편, 점 P(a, b)는 쌍곡선 $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$ 위의 점이므로

$$a^2 - b^2 = \frac{1}{2}$$

따라서 사각형 PQOR의 넓이는

$$\begin{aligned} \overline{PQ} \times \overline{PR} &= \frac{|a - b|}{\sqrt{2}} \times \frac{|a + b|}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{|a^2 - b^2|}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{4}$

0144 $x^2 - y^2 + 2y + a = 0$ 에서

$$x^2 - (y - 1)^2 = -a - 1$$

이 쌍곡선의 주축이 x축에 평행하려면

$$-a - 1 > 0 \quad \therefore a < -1$$

답 ①

0145 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$ 에서 $\sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$ 이므로 초점의

좌표는 $(3\sqrt{2}, 0), (-3\sqrt{2}, 0)$

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$$|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2 \times 3 = 6$$

양변을 제곱하면

$$\overline{PF}^2 - 2\overline{PF} \times \overline{PF'} + \overline{PF'}^2 = 36$$

$$\therefore 2\overline{PF} \times \overline{PF'} = \overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 - 36$$

$$= \{(x - 3\sqrt{2})^2 + y^2\} + \{(x + 3\sqrt{2})^2 + y^2\} - 36$$

$$= 2(x^2 + y^2) = 2\overline{OP}^2$$

이때 $\overline{OP} = 7$ 이므로

$$\overline{PF} \times \overline{PF'} = \overline{OP}^2 = 7^2 = 49$$

답 ③

0146 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 에서 $\sqrt{1 + 3} = 2$ 이므로

$$F(2, 0), F'(-2, 0) \quad \therefore \overline{FF'} = 4$$

또, 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2 \times 1 = 2$$

(i) $\overline{PF'} = \overline{FF'}$ 일 때, $\overline{PF'} = 4$ 이므로

$$\overline{PF} = \overline{PF'} - 2 = 4 - 2 = 2$$

오른쪽 그림과 같이 점 F'에서

선분 PF에 내린 수선의 발을

M이라 하면

$$\overline{FM} = \frac{1}{2}\overline{PF} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{F'M} &= \sqrt{\overline{FF'}^2 - \overline{FM}^2} \\ &= \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15} \end{aligned}$$

따라서 삼각형 PF'F의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{PF} \times \overline{F'M} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{15} = \sqrt{15}$$

(ii) $\overline{PF} = \overline{FF'}$ 일 때, $\overline{PF} = 4$ 이므로

$$\overline{PF'} = \overline{PF} + 2 = 4 + 2 = 6$$

오른쪽 그림과 같이 점 F에서

선분 PF'에 내린 수선의 발을

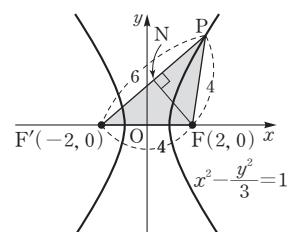
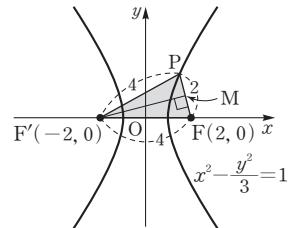
N이라 하면

$$\overline{F'N} = \frac{1}{2}\overline{PF'} = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{FN} &= \sqrt{\overline{FF'}^2 - \overline{F'N}^2} \\ &= \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7} \end{aligned}$$

따라서 삼각형 PF'F의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{PF'} \times \overline{FN} = \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$



(i), (ii)에서 구하는 모든 a 의 값은 $\sqrt{15}$, $3\sqrt{7}$ 이므로 그 곱은 $\sqrt{15} \times 3\sqrt{7} = 3\sqrt{105}$ 답 ⑤

0147 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 에서 $\sqrt{4+5} = 3$ 이므로

$$F(3, 0), F'(-3, 0) \quad \therefore \overline{FF'} = 6$$

한편, $\overline{PF'} = a$, $\overline{PF} = b$ ($a > b$)라 하면 주축의 길이는 $2 \times 2 = 4$ 이므로 $a - b = 4$ ㉠

삼각형 $PF'F$ 에서 $\angle F'PA = \angle FPA$ 이고

$$\overline{F'A} = 4, \overline{AF} = 2 \text{이므로}$$

$$a : b = 2 : 1$$

$$\therefore a = 2b$$
 ㉡

$$\text{㉠, ㉡에서 } a = 8, b = 4$$

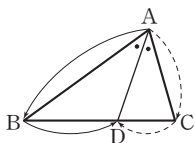
따라서 구하는 삼각형 $PF'F$ 의 둘레의 길이는

$$\overline{PF'} + \overline{PF} + \overline{FF'} = 8 + 4 + 6 = 18$$
 답 18

참고 삼각형 ABC 의 $\angle A$ 의 이등분선과

변 BC 의 교점을 D 라 하면

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$



0148 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ 에서

$$\sqrt{16+20} = 6 \text{이므로 초점의 좌표는}$$

$$(6, 0), (-6, 0)$$

따라서 두 점 $(6, 0), (-6, 0)$ 을 지름

의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 = 36$$
 ㉠

또, 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{4}x, \text{ 즉 } y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$$

이것을 ㉠에 대입하면 원과 직선의 교점의 x 좌표는

$$x^2 + \frac{5}{4}x^2 = 36, \frac{9}{4}x^2 = 36$$

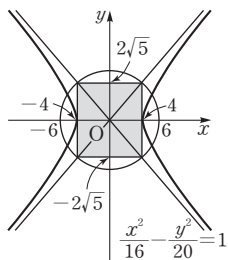
$$x^2 = 16 \quad \therefore x = \pm 4$$

따라서 사각형의 네 꼭짓점의 좌표는

$$(4, 2\sqrt{5}), (4, -2\sqrt{5}), (-4, 2\sqrt{5}), (-4, -2\sqrt{5})$$

이므로 구하는 사각형의 넓이는

$$8 \times 4\sqrt{5} = 32\sqrt{5}$$
 답 32√5



0149 $\overline{PF} = 1$, $\overline{PF'} = \sqrt{(-\sqrt{2}-\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = 3$ 이므로

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 1 + 3 = 4$$

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 3 - 1 = 2$$

이때 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{OA} = \frac{\overline{PF'} - \overline{PF}}{2} = 1$$

또, 타원의 정의에 의하여

$$\overline{OB} = \frac{\overline{PF'} + \overline{PF}}{2} = 2$$

022 정답과 풀이

$$\therefore \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = 1$$

따라서 구하는 삼각형 PAB 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PF} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$
 답 1/2

0150 $x^2 - y^2 + k(2x^2 - y^2) + 2x - y + 2 = 0$ 에서

$$(2k+1)x^2 - (k+1)y^2 + 2x - y + 2 = 0$$

이 방정식이 나타내는 도형이 포물선이 되려면

$$2k+1=0 \text{ 또는 } k+1=0 \text{이어야 하므로}$$

$$k = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } k = -1$$

따라서 $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -1$ ($\because \alpha > \beta$)이므로

$$\beta - \alpha = -\frac{1}{2}$$
 답 ②

0151 오른쪽 그림에서 구하는 원

의 반지름의 길이는 점 P 에서 직선

$x=1$ 에 내린 수선의 길이와 같으므로

$$|x-1| = x-1 \quad (\because x > 1)$$

이때 두 점 $P(x, y), (5, 0)$ 사이의

거리는

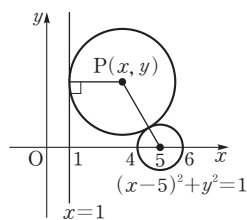
$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = (x-1) + 1$$

$$\therefore \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = x$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$-10\left(x - \frac{5}{2}\right) + y^2 = 0$$

$$\therefore y^2 = 10\left(x - \frac{5}{2}\right)$$
 답 y^2 = 10(x - 5/2)



0152 오른쪽 그림과 같이 혜성과 태양

의 위치를 각각 A, F 라 하고 점 A 에서 혜

성 궤도의 축에 내린 수선의 발을 B , 혜성

궤도의 준선을 직선 l 이라 하자.

포물선 위의 점에서 초점과 준선에 이르는

거리가 같으므로 혜성이 포물선의 꼭짓점

과 일치할 때 태양으로부터의 거리가 가장

가깝다.

포물선의 방정식을 $y^2 = 4px$ ($p > 0$)라 하면

$$\overline{OF} + \overline{FB} = p + (4 \times 10^{10}) \cos 60^\circ$$

$$= p + 2 \times 10^{10}$$

점 A 에서 준선 l 에 내린 수선의 발을 H 라 하고 준선 l 과 x 축의

교점을 H' 이라 하면 포물선의 정의에 의하여

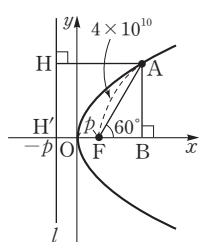
$$\overline{AH} = \overline{AF} = 4 \times 10^{10}$$

$$\overline{BH'} = \overline{AH} \text{에서}$$

$$p + 2 \times 10^{10} - (-p) = 4 \times 10^{10}$$

$$\therefore p = 10^{10}$$

따라서 구하는 거리는 10^{10} km이다.

답 ③


0153 점 $P(4\sqrt{3}, b)$ 는 포물선 $x^2=4ay$ 위의 점이므로
 $(4\sqrt{3})^2=4ab \quad \therefore ab=12$ ㉠

포물선 $x^2=4ay$ 의 준선의 방정식은 $y=-a$ 이므로
 $H(4\sqrt{3}, -a)$
 즉, $\overline{PH}=|-a-b|=8$ 에서
 $|a+b|=8 \quad \therefore (a+b)^2=64$ ㉡

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
 $=64-2 \times 12 (\because \text{㉠, ㉡})$
 $=40$

답 40

단계	채점요소	배점
㉠	ab 의 값 구하기	40%
㉡	$(a+b)^2$ 의 값 구하기	50%
㉢	a^2+b^2 의 값 구하기	10%

0154 타원 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ 에서 $\sqrt{100-36}=8$ 이므로
 $F(8, 0), F'(-8, 0)$
 또, 원 $(x+8)^2+y^2=9$ 의 중심의 좌표는 $(-8, 0)$ 이므로 점 F'
 은 이 원의 중심이다.
 이때 점 P 가 원 위의 점이므로 $\overline{PF'}=3$

한편, 타원의 정의에 의하여 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 \times 10 = 20$ 이므로
 $\overline{PF} = 20 - \overline{PF'} = 20 - 3 = 17$

$\therefore \overline{PF} \times \overline{PF'} = 17 \times 3 = 51$

답 51

단계	채점요소	배점
㉠	$\overline{PF'}$ 의 길이 구하기	40%
㉡	$\overline{PF}$ 의 길이 구하기	50%
㉢	$\overline{PF} \times \overline{PF'}$ 의 값 구하기	10%

0155 쌍곡선 $2x^2-2y^2=1$ 의 점근선의 방정식은
 $y=\pm x$

쌍곡선 $2(x-3)^2-2(y-1)^2=1$ 은 쌍곡선 $2x^2-2y^2=1$ 을 x 축
 의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로
 점근선의 방정식은
 $y-1=\pm(x-3)$
 $\therefore y=x-2, y=-x+4$

오른쪽 그림과 같이

두 직선 $y=x, y=-x+4$ 의 교점을 A
 라 하면

$A(2, 2)$

두 직선 $y=x-2, y=-x+4$ 의 교점
 을 B 라 하면

$B(3, 1)$

$\therefore \overline{OA}=2\sqrt{2}, \overline{AB}=\sqrt{2}$

따라서 네 점근선으로 둘러싸인 도형은 직사각형이므로 그 넓이
 S 는

$S=2\sqrt{2} \times \sqrt{2}=4$

$\therefore S^2=4^2=16$

답 16

단계	채점요소	배점
㉠	쌍곡선 $2x^2-2y^2=1$ 의 점근선의 방정식 구하기	20%
㉡	쌍곡선 $2(x-3)^2-2(y-1)^2=1$ 의 점근선의 방정식 구하기	30%
㉢	네 점근선으로 둘러싸인 직사각형의 가로, 세로의 길이 구하기	30%
㉣	S^2 의 값 구하기	20%

0156 점 $P(x, y)$ 에서 직선 $x=\frac{4}{3}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하
 면 $\overline{PF} : \overline{PH} = 3 : 2$ 이므로

$2\overline{PF} = 3\overline{PH}$

$2\sqrt{(x-3)^2+y^2} = 3\left|x-\frac{4}{3}\right|$

양변을 제곱하여 정리하면

$5x^2-4y^2=20$

따라서 $a=5, b=-4$ 이므로

$a+b=1$

답 1

단계	채점요소	배점
㉠	점 P 가 나타내는 도형의 방정식 구하기	80%
㉡	$a+b$ 의 값 구하기	20%

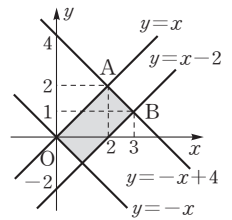
0157 점 A 의 좌표를 $(a, \sqrt{4pa})$ 라 하고, $\overline{AB}$ 와 x 축이 만나
 는 점을 H 라 하면 점 H 의 좌표는 $(a, 0)$ 이다.

직선 AF 가 삼각형 AOB 의 넓이를 이등분할 때, 초점 $F(p, 0)$
 은 삼각형 AOB 의 무게중심이므로

$\overline{OF} : \overline{FH} = 2 : 1$

즉, $p=\frac{2}{3}a$ 이므로 $a=\frac{3}{2}p$

..... ㉠



02 | 이차곡선과 직선

또, 삼각형 AOB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OH} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{4pa} \times a$$

$$= a\sqrt{4pa}$$

즉, $a\sqrt{4pa} = 6\sqrt{6}$ 에서 양변을 제곱하여 정리하면

$$pa^3 = 54$$

..... ㉠

㉠을 ㉠에 대입하면

$$\frac{27}{8}p^4 = 54, p^4 = 16 \quad \therefore p = 2 (\because p > 0)$$

답 ①

0158 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ 에서 $\sqrt{16-7} = 3$ 이므로

$$F(3, 0), F'(-3, 0)$$

한편, 두 삼각형 AOP, FOP에서

$$\overline{PA} = \overline{PF}, \overline{OA} = \overline{OF}, \overline{PO} \text{는 공통이므로}$$

$$\triangle AOP \cong \triangle FOP$$

이때 점 P는 직선 $y = x$ 위의 점이므로

$$\overline{PF'} = \overline{BP}$$

타원의 정의에 의하여

$$\overline{BP} + \overline{PA} = \overline{PF'} + \overline{PF} = 2 \times 4 = 8$$

또, $\overline{AF'} = \overline{BF'} = 3\sqrt{2}$ 이므로 사각형 AF'BP의 둘레의 길이는

$$\overline{BP} + \overline{PA} + \overline{AF'} + \overline{BF'} = 8 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$$

$$= 8 + 6\sqrt{2}$$

따라서 $a = 8, b = 6$ 이므로

$$a + b = 14$$

답 14

0159 조건 (가)에서 $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2$ 이므로

$$2a = 2 \quad \therefore a = 1$$

한편, 포물선 $y^2 = 8(x+c)$ 에서 $\overline{AF'} = 2$ 이고

조건 (나)에서 $\overline{AF'} : \overline{AF} = 1 : 3$ 이므로

$$\overline{AF} = 3\overline{AF'} = 6$$

이때 $A(-c, 0)$ 이고 $c > k > 0$ 이므로

$$\overline{FF'} = \overline{AF} - \overline{AF'} = 6 - 2 = 4$$

$$\therefore F(2, 0), F'(-2, 0), A(-4, 0)$$

즉, 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에서 $a^2 + b^2 = 2^2$ 이고 $a = 1$ 이므로

$$b^2 = 2^2 - 1^2 = 3$$

또, 포물선 $y^2 = 8(x+c)$ 의 꼭짓점은 $A(-4, 0)$ 이므로

$$c = 4$$

$$\therefore ab^2c = 1 \times 3 \times 4 = 12$$

답 12



교과서 문제 정복하기

본문 27쪽

0160 $y = x - 4$ 를 $y^2 = 4x$ 에 대입하면

$$(x-4)^2 = 4x$$

$$\therefore x^2 - 12x + 16 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-6)^2 - 1 \times 16 = 20 > 0$$

따라서 포물선 $y^2 = 4x$ 와 직선 $y = x - 4$ 는 서로 다른 두 점에서 만난다.

답 서로 다른 두 점에서 만난다.

0161 $y = -x + 2$ 를 $2x^2 + y^2 = 2$ 에 대입하면

$$2x^2 + (-x+2)^2 = 2$$

$$\therefore 3x^2 - 4x + 2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 3 \times 2 = -2 < 0$$

따라서 타원 $2x^2 + y^2 = 2$ 와 직선 $y = -x + 2$ 는 만나지 않는다.

답 만나지 않는다.

0162 $x - 2y + \sqrt{3} = 0$, 즉 $y = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$ 을

$x^2 - y^2 = -1$ 에 대입하면

$$x^2 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -1$$

$$\therefore 3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-\sqrt{3})^2 - 3 \times 1 = 0$$

따라서 쌍곡선 $x^2 - y^2 = -1$ 과 직선 $x - 2y + \sqrt{3} = 0$ 은 한 점에서 만난다. (접한다.)

답 한 점에서 만난다. (접한다.)

0163 $y = x + a$ 를 $y^2 = 16x$ 에 대입하면

$$(x+a)^2 = 16x$$

$$\therefore x^2 + 2(a-8)x + a^2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-8)^2 - 1 \times a^2 = -16a + 64$$

$$(1) \frac{D}{4} = -16a + 64 > 0 \quad \therefore a < 4$$

$$(2) \frac{D}{4} = -16a + 64 = 0 \quad \therefore a = 4$$

$$(3) \frac{D}{4} = -16a + 64 < 0 \quad \therefore a > 4$$

답 (1) $a < 4$ (2) 4 (3) $a > 4$

0164 $y^2 = 3x = 4 \times \frac{3}{4}x$ 이므로

$$y = -x + \frac{3}{-1} \quad \therefore y = -x - \frac{3}{4} \quad \text{답 } y = -x - \frac{3}{4}$$

0165 $y^2 = -16x = 4 \times (-4) \times x$ 이므로

$$y = 3x + \frac{-4}{3} \quad \therefore y = 3x - \frac{4}{3} \quad \text{답 } y = 3x - \frac{4}{3}$$

0166 $y^2 = 6x = 4 \times \frac{3}{2}x$ 이므로

$$2\sqrt{3}y = 2 \times \frac{3}{2} \times (x+2) \quad \therefore y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3} \\ \text{답 } y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}$$

0167 $y^2 = -8x = 4 \times (-2) \times x$ 이므로

$$2y = 2 \times (-2) \times \left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \therefore y = -2x + 1 \\ \text{답 } y = -2x + 1$$

0168 $x^2 = \frac{3}{2}y = 4 \times \frac{3}{8}y$ 이므로

$$3x = 2 \times \frac{3}{8} \times (y+6) \quad \therefore y = 4x - 6 \quad \text{답 } y = 4x - 6$$

0169 $x^2 = -4y = 4 \times (-1) \times y$ 이므로

$$-4x = 2 \times (-1) \times (y-4) \quad \therefore y = 2x + 4 \\ \text{답 } y = 2x + 4$$

0170 $y = -x \pm \sqrt{4 \times (-1)^2 + 1} \quad \therefore y = -x \pm \sqrt{5}$

답 $y = -x \pm \sqrt{5}$

0171 $3x^2 + 2y^2 = 6$ 에서 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ 이므로

$$y = 2x \pm \sqrt{2 \times 2^2 + 3} \\ \therefore y = 2x \pm \sqrt{11} \quad \text{답 } y = 2x \pm \sqrt{11}$$

0172 $\frac{2x}{10} + \frac{-3y}{15} = 1 \quad \therefore y = x - 5$

답 $y = x - 5$

0173 $3x + 3 \times y = 12 \quad \therefore y = -x + 4$

답 $y = -x + 4$

0174 $y = \sqrt{3}x \pm \sqrt{4 \times (\sqrt{3})^2 - 3} \quad \therefore y = \sqrt{3}x \pm 3$

답 $y = \sqrt{3}x \pm 3$

0175 $5x^2 - y^2 = -15$, 즉 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{15} = -1$ 이므로

$$y = -2x \pm \sqrt{15 - 3 \times (-2)^2} \\ \therefore y = -2x \pm \sqrt{3} \quad \text{답 } y = -2x \pm \sqrt{3}$$

0176 $\frac{-2x}{3} - \frac{y}{3} = 1 \quad \therefore y = -2x - 3$

답 $y = -2x - 3$

0177 $\frac{6x}{12} - \frac{4y}{4} = -1 \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + 1$

답 $y = \frac{1}{2}x + 1$

0178 $3 \times 4x - 4 \times (-3y) = 12 \quad \therefore y = -x + 1$

답 $y = -x + 1$

0179 $-3x - 3 \times 2y = -3 \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

답 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



유형 익히기

본문 28~34쪽

0180 $y = mx + 4$ 를 $x^2 - 8x + 2y + 17 = 0$ 에 대입하면

$$x^2 - 8x + 2(mx + 4) + 17 = 0$$

$$\therefore x^2 + 2(m-4)x + 25 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (m-4)^2 - 25 = 0$$

$$m^2 - 8m - 9 = 0, (m+1)(m-9) = 0$$

$$\therefore m = -1 \text{ 또는 } m = 9$$

따라서 모든 실수 m 의 값의 합은

$$-1 + 9 = 8$$

답 ④

0181 직선 $y = x$ 를 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y = x - k$$

이것을 $2x^2 + 3y^2 = 6$ 에 대입하면

$$2x^2 + 3(x-k)^2 = 6$$

$$\therefore 5x^2 - 6kx + 3k^2 - 6 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-3k)^2 - 5 \times (3k^2 - 6) \geq 0$$

$$-6k^2 + 30 \geq 0, k^2 \leq 5$$

$$\therefore -\sqrt{5} \leq k \leq \sqrt{5}$$

따라서 구하는 정수 k 는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다.

답 ③

0182 $n(A \cap B) = 0$ 이므로 직선 $y = kx$ 와 쌍곡선

$9x^2 - 16y^2 = 144$ 는 만나지 않는다.

$y = kx$ 를 $9x^2 - 16y^2 = 144$ 에 대입하면

$$9x^2 - 16 \times (kx)^2 = 144$$

$$\therefore (9 - 16k^2)x^2 - 144 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = -4 \times (9 - 16k^2) \times (-144) < 0$$

$$16k^2 > 9 \quad \therefore k < -\frac{3}{4} \text{ 또는 } k > \frac{3}{4}$$

$$\text{답 } k < -\frac{3}{4} \text{ 또는 } k > \frac{3}{4}$$

0183 $y = mx + n$ 을 $2x^2 - 9y^2 = 18$ 에 대입하면

$$2x^2 - 9(mx + n)^2 = 18$$

$$\therefore (9m^2 - 2)x^2 + 18mnx + 9n^2 + 18 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $9m^2 - 2 = 0$ 일 때

$$m = \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \text{이므로 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$\pm 6\sqrt{2}nx + 9n^2 + 18 = 0$$

이때 $n = 0$ 이면 x 의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $9m^2 - 2 \neq 0$ 일 때

이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (9mn)^2 - (9m^2 - 2) \times (9n^2 + 18) \geq 0$$

$$18n^2 - 162m^2 + 36 \geq 0$$

$$\therefore n^2 \geq 9m^2 - 2$$

n 의 값에 관계없이 위의 부등식이 항상 성립하려면

$$9m^2 - 2 \leq 0 \quad \therefore -\frac{\sqrt{2}}{3} \leq m \leq \frac{\sqrt{2}}{3}$$

이때 $9m^2 - 2 \neq 0$, 즉 $m \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$ 이어야 하므로

$$-\frac{\sqrt{2}}{3} < m < \frac{\sqrt{2}}{3}$$

(i), (ii)에서 구하는 실수 m 의 값의 범위는

$$-\frac{\sqrt{2}}{3} < m < \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \text{답 } -\frac{\sqrt{2}}{3} < m < \frac{\sqrt{2}}{3}$$

0184 직선 $2x - y + 1 = 0$, 즉 $y = 2x + 1$ 에 평행한 직선의 기울기는 2이다.

따라서 포물선 $y^2 = -8x = 4 \times (-2) \times x$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y = 2x + \frac{-2}{2} \quad \therefore y = 2x - 1$$

이 직선이 점 $(-2, k)$ 를 지나므로

$$k = 2 \times (-2) - 1 = -5 \quad \text{답 } \textcircled{1}$$

다른풀이 포물선 $y^2 = -8x$ 에 접하고 직선 $2x - y + 1 = 0$, 즉

$y = 2x + 1$ 에 평행한 직선의 방정식을 $y = 2x + a$ 라 하자.

$y = 2x + a$ 를 $y^2 = -8x$ 에 대입하면

026 정답과 풀이

$$(2x + a)^2 = -8x$$

$$\therefore 4x^2 + 4(a + 2)x + a^2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{2(a + 2)\}^2 - 4a^2 = 0$$

$$16a + 16 = 0 \quad \therefore a = -1$$

따라서 접선의 방정식은 $y = 2x - 1$ 이고, 이 직선이 점 $(-2, k)$ 를 지나므로

$$k = 2 \times (-2) - 1 = -5$$

0185 초점의 좌표가 $(\frac{1}{2}p, 0)$, 준선이 $x = -\frac{1}{2}p$ 인 포물선의 방정식은

$$y^2 = 4 \times \frac{1}{2}p \times x \quad \therefore y^2 = 2px$$

따라서 포물선 $y^2 = 2px$ 에 접하고 기울기가 -1 인 접선의 방정식은

$$y = -x + \frac{\frac{1}{2}p}{-1} \quad \therefore y = -x - \frac{1}{2}p$$

이 직선이 직선 $y = -x + 3$ 과 일치하므로

$$-\frac{1}{2}p = 3 \quad \therefore p = -6$$

답 -6

0186 직선 $y = -x + 3$ 에 수직인 직선의 기울기는 1이다.

따라서 포물선 $y^2 + x = 0$, 즉 $y^2 = -x = 4 \times (-\frac{1}{4}) \times x$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y = x + \frac{-\frac{1}{4}}{1} \quad \therefore y = x - \frac{1}{4}$$

즉, $-4x + 4y + 1 = 0$ 이 $ax + by + 1 = 0$ 과 일치하므로

$$a = -4, b = 4$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (-4)^2 + 4^2 = 32 \quad \text{답 } \textcircled{4}$$

참고 두 직선이 서로 수직이면 $\Rightarrow$ (두 기울기의 곱) $= -1$

0187 포물선 $y^2 = 2x = 4 \times \frac{1}{2}x$ 에 접하고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y = -x + \frac{\frac{1}{2}}{-1} \quad \therefore y = -x - \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 을 $y^2 = 2x$ 에 대입하면 접점 A의 x좌표는

$$\left(-x - \frac{1}{2}\right)^2 = 2x$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{2}$$

$x = \frac{1}{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \quad \therefore A\left(\frac{1}{2}, -1\right)$$

한편, ㉠은 포물선 $x^2=2y$ 의 접선이기도 하므로 ㉠을 $x^2=2y$ 에 대입하면 접점 B의 x좌표는

$$x^2=2\left(-x-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2+2x+1=0, (x+1)^2=0 \quad \therefore x=-1$$

$x=-1$ 을 ㉠에 대입하면

$$y=-(-1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad \therefore B\left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

따라서 구하는 선분 AB의 길이는

$$\sqrt{\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+1\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{답 } \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

0188 포물선 $y^2=6x=4\times\frac{3}{2}x$ 위의 점 $P(2, a)$ 에서의 접선의 방정식은

$$ay=2\times\frac{3}{2}\times(x+2) \quad \therefore y=\frac{3}{a}x+\frac{6}{a}$$

또, 점 $P(2, a)$ 가 포물선 $y^2=6x$ 위의 점이므로

$$a^2=6\times 2 \quad \therefore a=2\sqrt{3} (\because a>0)$$

따라서 접선의 방정식은 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{3}$ 이므로

$$b=\frac{\sqrt{3}}{2}, c=\sqrt{3}$$

$$\therefore abc=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=3\sqrt{3} \quad \text{답 } 3$$

0189 포물선 $x^2=3y=4\times\frac{3}{4}y$ 위의 점 $(-\sqrt{3}, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-\sqrt{3}x=2\times\frac{3}{4}\times(y+1) \quad \therefore y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x-1$$

이 직선이 점 $(a, 4)$ 를 지나므로

$$4=-\frac{2\sqrt{3}}{3}a-1 \quad \therefore a=-\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore a^2=\frac{75}{4} \quad \text{답 } \frac{75}{4}$$

0190 점 $(k, -2k)$ 가 포물선 $y^2=-12x$ 위의 점이므로

$$(-2k)^2=-12k$$

$$4k^2+12k=0, 4k(k+3)=0$$

$$\therefore k=-3 (\because k<0)$$

즉, 포물선 $y^2=-12x=4\times(-3)\times x$ 위의 점 $(-3, 6)$ 에서의 접선의 방정식은

$$6y=2\times(-3)\times(x-3) \quad \therefore y=-x+3$$

한편, 직선 $y=-x+3$ 과 평행하고 점 $(3, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=-(x-3) \quad \therefore y=-x+4$$

따라서 $m=-1, n=4$ 이므로

$$m+n=3$$

..... ㉠

답 3

단계	채점요소	배점
㉠	k의 값 구하기	30%
㉡	주어진 포물선의 접선의 방정식 구하기	30%
㉢	직선의 방정식 구하기	30%
㉣	m+n의 값 구하기	10%

0191 포물선 $y^2=16x=4\times 4x$ 위의 점 $P(a, b)$ 에서의 접선의 방정식은

$$by=2\times 4\times(x+a) \quad \therefore y=\frac{8}{b}x+\frac{8a}{b}$$

또, 점 $Q\left(\frac{1}{4}, -2\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-2y=2\times 4\times\left(x+\frac{1}{4}\right) \quad \therefore y=-4x-1$$

두 접선이 서로 수직이므로

$$\frac{8}{b}\times(-4)=-1 \quad \therefore b=32$$

한편, 점 $P(a, 32)$ 가 포물선 위의 점이므로

$$32^2=16a \quad \therefore a=64$$

$$\therefore a+b=64+32=96$$

답 96

0192 포물선 $y^2=-12x=4\times(-3)\times x$ 의 초점은

$$F(-3, 0)$$

또, 포물선 $y^2=-12x$ 위의 점 $P(-3, 6)$ 에서의 접선의 방정식은

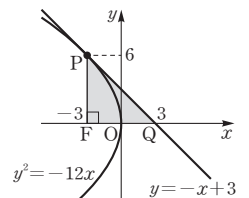
$$6y=2\times(-3)\times(x-3) \quad \therefore y=-x+3$$

이 직선의 x절편은 3이므로

$$Q(3, 0)$$

따라서 구하는 삼각형 PFQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{FQ}\times\overline{FP}=\frac{1}{2}\times 6\times 6=18$$



답 5

0193 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $P(p, 2p)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2py=2p(x+p) \quad \therefore y=x+p$$

이 직선의 x절편, y절편은 각각 $-p, p$ 이므로

$$A(-p, 0), B(0, p)$$

$$\overline{AB}=\sqrt{p^2+p^2}=p\sqrt{2} (\because p>0)$$

$$\overline{PB}=\sqrt{p^2+p^2}=p\sqrt{2} (\because p>0)$$

$$\therefore \frac{\overline{PB}}{\overline{AB}}=\frac{p\sqrt{2}}{p\sqrt{2}}=1$$

답 1

0194 포물선 $y^2=8x=4 \times 2x$ 위의 점 $P(a, b)$ 에서의 접선의 방정식은

$$by=2 \times 2 \times (x+a) \quad \therefore y=\frac{4}{b}x+\frac{4a}{b}$$

이 직선의 x 절편이 $-a$ 이므로 $Q(-a, 0)$

또, 점 $P(a, b)$ 는 포물선 위의 점이므로

$$b^2=8a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{이때 } \overline{PQ}=2\sqrt{3}\text{이므로 } \sqrt{(-a-a)^2+(-b)^2}=2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{4a^2+8a}=2\sqrt{3} \quad (\because \textcircled{1})$$

양변을 제곱하면

$$4a^2+8a=12, \quad a^2+2a-3=0$$

$$(a+3)(a-1)=0 \quad \therefore a=1 \quad (\because a>0)$$

$$\textcircled{1}\text{에서 } b^2=8$$

$$\therefore a^2+b^2=1^2+8=9 \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

0195 $y=-x+4$ 를 $x^2=2y$ 에 대입하면 교점의 x 좌표는

$$x^2=2(-x+4)$$

$$x^2+2x-8=0, \quad (x+4)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-4 \text{ 또는 } x=2$$

즉, 포물선과 직선의 두 교점의 좌표는

$$(-4, 8), (2, 2)$$

두 점 $(-4, 8), (2, 2)$ 에서의 접선의 방정식은 각각

$$-4x=2 \times \frac{1}{2} \times (y+8), \quad 2x=2 \times \frac{1}{2} \times (y+2)$$

$$\therefore y=-4x-8, \quad y=2x-2$$

따라서 $m_1=-4, m_2=2$ 또는 $m_1=2, m_2=-4$ 이므로

$$m_1m_2=(-4) \times 2=-8 \quad \text{답 } -8$$

다른풀이 포물선과 직선의 두 교점의 좌표는

$$(-4, 8), (2, 2)$$

포물선 위의 점 $(-4, 8), (2, 2)$ 에서의 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2 라 하면 각 직선의 방정식은

$$y=m_1(x+4)+8, \quad y=m_2(x-2)+2$$

(i) $y=m_1(x+4)+8$ 을 $x^2=2y$ 에 대입하여 정리하면

$$x^2-2m_1x-8m_1-16=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(-m_1)^2-(-8m_1-16)=0$$

$$m_1^2+8m_1+16=0, \quad (m_1+4)^2=0$$

$$\therefore m_1=-4$$

(ii) $y=m_2(x-2)+2$ 를 $x^2=2y$ 에 대입하여 정리하면

$$x^2-2m_2x+4m_2-4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(-m_2)^2-(4m_2-4)=0$$

$$m_2^2-4m_2+4=0, \quad (m_2-2)^2=0$$

$$\therefore m_2=2$$

(i), (ii)에서 $m_1m_2=(-4) \times 2=-8$

0196 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$y_1y=2 \times 2 \times (x+x_1) \quad \therefore y=\frac{4}{y_1}x+\frac{4x_1}{y_1}$$

이 직선이 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로

$$0=-\frac{8}{y_1}+\frac{4x_1}{y_1} \quad \therefore x_1=2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 점 (x_1, y_1) 이 포물선 위의 점이므로

$$y_1^2=8x_1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$y_1^2=16 \quad \therefore y_1=\pm 4$$

즉, 접선의 방정식은 $y=\pm x \pm 2$ (복부호동순)

따라서 $m=\pm 1, n=\pm 2$ (복부호동순)이므로

$$m^2+n^2=1+4=5 \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

0197 $\frac{x^2}{4}=y$ 에서 $x^2=4y$ 이므로 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x=2(y+y_1) \quad \therefore y=\frac{x_1}{2}x-y_1$$

이 직선이 점 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 을 지나므로

$$-\frac{1}{2}=-\frac{x_1}{4}-y_1 \quad \therefore y_1=\frac{x_1}{4}+\frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 점 (x_1, y_1) 이 포물선 위의 점이므로

$$x_1^2=4y_1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$x_1=2, y_1=1 \text{ 또는 } x_1=-1, y_1=\frac{1}{4}$$

따라서 두 점점의 방정식은

$$y=x-1, \quad y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$$

즉, 두 점점의 기울기는 각각 1, $-\frac{1}{2}$ 이므로 그 곱은 $-\frac{1}{2}$ 이다.

답 $\textcircled{2}$

다른풀이 점 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y-\left(-\frac{1}{2}\right)=m\left(x-\frac{1}{2}\right) \quad \therefore y=mx-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}$$

이것을 $\frac{x^2}{4}=y$, 즉 $x^2=4y$ 에 대입하면

$$x^2=4\left(mx-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore x^2-4mx+2m+2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2m)^2-(2m+2)=0$$

$$4m^2-2m-2=0, \quad 2m^2-m-1=0$$

$$(2m+1)(m-1)=0$$

$$\therefore m=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } m=1$$

따라서 두 점점의 기울기는 각각 $-\frac{1}{2}, 1$ 이므로 그 곱은 $-\frac{1}{2}$ 이다.

0198 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$y_1 y = 2 \times \frac{1}{4} \times (x + x_1) \quad \therefore y = \frac{1}{2y_1}x + \frac{x_1}{2y_1}$$

이 직선이 점 $(-3, -1)$ 을 지나므로

$$-1 = -\frac{3}{2y_1} + \frac{x_1}{2y_1}$$

$$\therefore y_1 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 점 (x_1, y_1) 이 포물선 위의 점이므로

$$y_1^2 = x_1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$x_1 = 1, y_1 = 1 \text{ 또는 } x_1 = 9, y_1 = -3$$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $(1, 1), (9, -3)$ 이므로 구하는 선분 PQ의 길이는

$$\sqrt{(9-1)^2 + (-3-1)^2} = 4\sqrt{5} \quad \text{답 } 4\sqrt{5}$$

0199 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$y_1 y = 2 \times \frac{1}{2} \times (x + x_1) \quad \therefore y = \frac{1}{y_1}x + \frac{x_1}{y_1}$$

이 직선이 점 P $(-2, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -\frac{2}{y_1} + \frac{x_1}{y_1} \quad \therefore x_1 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 점 (x_1, y_1) 이 포물선 위의 점이므로

$$y_1^2 = 2x_1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

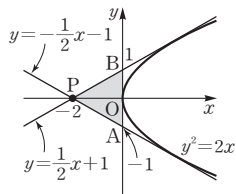
$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } y_1^2 = 4 \quad \therefore y_1 = \pm 2$$

즉, 접선의 방정식은 $y = \pm \frac{1}{2}x \pm 1$ (복부호동순)

따라서 오른쪽 그림과 같이

A $(0, -1)$, B $(0, 1)$ 이라 하면 구하는 삼각형 PAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$



답 2

다른풀이 점 P $(-2, 0)$ 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y = m(x + 2) \quad \therefore y = mx + 2m$$

이것을 $y^2 = 2x$ 에 대입하면

$$(mx + 2m)^2 = 2x$$

$$m^2 x^2 + 2(2m^2 - 1)x + 4m^2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2m^2 - 1)^2 - m^2 \times 4m^2 = 0$$

$$-4m^2 + 1 = 0, m^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore m = \pm \frac{1}{2}$$

따라서 접선의 방정식은

$$y = \pm \frac{1}{2}x \pm 1 \text{ (복부호동순)}$$

이므로 A $(0, -1)$, B $(0, 1)$ 이라 하면 구하는 삼각형 PAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

0200 점선의 기울기를 m ($m \neq 0$)이라 하면 점선의 방정식은

$$y = mx + \frac{1}{m}$$

이 직선이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로

$$0 = am + \frac{1}{m} \quad \therefore am^2 + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 두 점선이 서로 수직이므로 m 에 대한 이차방정식 ①의 두 실근의 곱은 -1 이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{a} = -1 \quad \therefore a = -1 \quad \text{답 } \textcircled{1}$$

다른풀이 점 $(a, 0)$ 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y = m(x - a) \quad \therefore x = \frac{1}{m}y + a$$

이것을 $y^2 = 4x$ 에 대입하면

$$y^2 = 4\left(\frac{1}{m}y + a\right)$$

$$\therefore my^2 - 4y - 4am = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - m \times (-4am) = 0$$

$$\therefore 4am^2 + 4 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 두 점선이 서로 수직이므로 m 에 대한 이차방정식 ①의 두 실근의 곱은 -1 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{4}{4a} = -1 \quad \therefore a = -1$$

0201 점선의 기울기를 m ($m \neq 0$)이라 하면 점선의 방정식은

$$y = mx + \frac{k}{m} \quad \therefore y = mx + \frac{k}{4m}$$

이 직선이 점 $(1, -\sqrt{3})$ 을 지나므로

$$-\sqrt{3} = m + \frac{k}{4m}$$

$$\therefore 4m^2 + 4\sqrt{3}m + k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 두 점선의 기울기의 곱이 -1 이므로 m 에 대한 이차방정식 ①의 두 실근의 곱은 -1 이다.

즉, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{k}{4} = -1 \quad \therefore k = -4$$

따라서 포물선 $y^2 = -4x$ 의 초점의 좌표는 $(-1, 0)$ 이다.

답 $(-1, 0)$

0202 점선의 기울기를 m ($m \neq 0$)이라 하면 점선의 방정식은

$$y = mx + \frac{3}{m}$$

이 직선이 점 (p, q) 를 지나므로

$$q = pm + \frac{3}{m} \quad \therefore pm^2 - qm + 3 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 두 점선이 서로 수직이므로 m 에 대한 이차방정식 ①의 두 실근의 곱은 -1 이다.

즉, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{3}{p} = -1 \quad \therefore p = -3$$

이때 점 (p, q) 가 직선 $x+y=-5$ 위의 점이므로

$$p+q=-5$$

$$\therefore q = -p-5 = -(-3)-5 = -2$$

$$\therefore p-q = -3 - (-2) = -1$$

답 -1

0203 점 $P(a, b)$ 를 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y-b=m(x-a) \quad \therefore y=mx-am+b$$

이것을 $x^2+4y-4=0$ 에 대입하면

$$x^2+4(mx-am+b)-4=0$$

$$\therefore x^2+4mx-4am+4b-4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2m)^2 - (-4am+4b-4) = 0$$

$$\therefore m^2+am-b+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 두 접선이 서로 수직이므로 m 에 대한 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 실근의 곱은 -1 이다.

즉, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-b+1=-1 \quad \therefore b=2$$

따라서 점 P 가 나타내는 도형의 방정식은 $b=2$, 즉 $b-2=0$

답 ③

0204 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$ 에 수직인 직선의 기울기는 -2 이다.

즉, 타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ 에 접하고 기울기가 -2 인 직선의 방정식은

$$y=-2x \pm \sqrt{3 \times (-2)^2 + 4}$$

$$\therefore y=-2x \pm 4$$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $y=-2x+4$ 위의 점 $(0, 4)$

와 직선 $y=-2x-4$, 즉 $2x+y+4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2 \times 0 + 4 + 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{8\sqrt{5}}{5} \quad \text{답 } \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

0205 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 30° 인 직선의 기울기는

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

타원 $2x^2+3y^2=1$, 즉 $\frac{x^2}{\frac{1}{2}}+\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1$ 에 접하고 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 인

직선의 방정식은

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \pm \sqrt{\frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}}$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 구하는 직선의 y 절편은 $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

답 ④

030 정답과 풀이

0206 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 이 점 $(4, 0)$ 을 지나므로

$$\frac{16}{a^2}=1 \quad \therefore a=4 \quad (\because a>0)$$

기울기가 $-\frac{1}{3}$ 이고 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 에 접하는 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{3}x \pm \sqrt{16 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + b^2}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3}x \pm \sqrt{\frac{16}{9} + b^2}$$

이 직선과 직선 $x+3y-8=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$ 이 일치하므로

$$\sqrt{\frac{16}{9} + b^2} = \frac{8}{3}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } b^2 = \frac{16}{3} \quad \therefore b = \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad (\because b>0)$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

0207 타원 $x^2+25y^2=25$, 즉 $\frac{x^2}{25}+y^2=1$ 에 접하고 기울기가

m 인 직선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{25m^2 + 1}$$

이 직선의 x 절편, y 절편은 각각

$$\mp \frac{\sqrt{25m^2 + 1}}{m}, \pm \sqrt{25m^2 + 1} \text{이므로}$$

$$P\left(\mp \frac{\sqrt{25m^2 + 1}}{m}, 0\right), Q(0, \pm \sqrt{25m^2 + 1}) \quad (\text{복부호동순})$$

$$\begin{aligned} \therefore PQ &= \sqrt{\left(\pm \frac{\sqrt{25m^2 + 1}}{m}\right)^2 + (\pm \sqrt{25m^2 + 1})^2} \\ &= \sqrt{25m^2 + \frac{1}{m^2} + 26} \end{aligned}$$

이때 $25m^2 > 0$, $\frac{1}{m^2} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} 25m^2 + \frac{1}{m^2} + 26 &\geq 2\sqrt{25m^2 \times \frac{1}{m^2}} + 26 \\ &= 2 \times 5 + 26 = 36 \end{aligned}$$

$$\left(\text{단, 등호는 } 25m^2 = \frac{1}{m^2} \text{일 때 성립}\right)$$

따라서 구하는 선분 PQ 의 길이의 최솟값은 $\sqrt{36}=6$

답 6

참고 산술평균과 기하평균의 관계

$a>0, b>0$ 일 때, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립)

0208 타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $(2, -2)$ 에서의 접선의 방

정식은

$$\frac{2x}{12} + \frac{-2y}{6} = 1 \quad \therefore y = \frac{1}{2}x - 3$$

이 직선이 점 $(a, 4)$ 를 지나므로

$$4 = \frac{1}{2}a - 3 \quad \therefore a = 14$$

답 ⑤

0209 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1$ 위의 점 $(-\sqrt{2}, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{-\sqrt{2}x}{4} + \frac{2y}{8} = 1 \quad \therefore y = \sqrt{2}x + 4$$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 기울기가 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고 점 $(1, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x - 1)$$

$$\therefore y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \quad \text{답 } y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} + 2$$

0210 점 $P(k, 2k)$ 가 타원 $x^2 + 2y^2 = 16$ 위의 점이므로
 $k^2 + 2 \times (2k)^2 = 16$

$$9k^2 = 16, k^2 = \frac{16}{9}$$

$$\therefore k = \frac{4}{3} (\because k > 0)$$

즉, 타원 위의 점 $P\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{4}{3}x + \frac{16}{3}y = 16 \quad \therefore y = -\frac{1}{4}x + 3$$

따라서 점 P에서의 접선의 x절편은 12이다.

답 12

단계	채점요소	배점
㉠	k의 값 구하기	40%
㉡	접선의 방정식 구하기	40%
㉢	접선의 x절편 구하기	20%

0211 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{6} = 1$ 위의 점 $(b, -2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{bx}{a^2} + \frac{-2y}{6} = 1 \quad \therefore y = \frac{3b}{a^2}x - 3$$

이 직선의 기울기가 1이므로

$$\frac{3b}{a^2} = 1 \quad \therefore a^2 = 3b \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또, 점 $(b, -2)$ 가 타원 위의 점이므로

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{4}{6} = 1, \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3} \quad \therefore a^2 = 3b^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a^2 = 3, b = 1 (\because a^2 \neq 0)$$

$$\therefore a^2 - b = 2$$

답 2

0212 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 위의 점 $(2, 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{16} + \frac{3y}{12} = 1 \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + 4$$

이 직선의 x절편, y절편은 각각 8, 4이므로

$$P(8, 0), Q(0, 4)$$

따라서 구하는 선분 PQ의 길이는

$$\sqrt{8^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{5}$$

답 4√5

0213 점 P의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{3} + \frac{y_1y}{2} = 1 \quad \therefore y = -\frac{2x_1}{3y_1}x + \frac{2}{y_1}$$

이 직선의 x절편은 $\frac{3}{x_1}$ 이므로 $T\left(\frac{3}{x_1}, 0\right)$

또, 점 H의 x좌표는 점 P의 x좌표와 같으므로

$$H(x_1, 0)$$

따라서 $\overline{OH} = x_1, \overline{OT} = \frac{3}{x_1}$ 이므로

$$\overline{OH} \times \overline{OT} = x_1 \times \frac{3}{x_1} = 3$$

답 3

0214 주어진 포물선과 타원이 만나는 점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 이 점에서의 포물선의 접선의 방정식은

$$x_1x = 2 \times \frac{1}{2} \times (y + y_1) \quad \therefore y = x_1x - y_1$$

타원의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{10} + \frac{y_1y}{a} = 1 \quad \therefore y = -\frac{ax_1}{10y_1}x + \frac{a}{y_1}$$

두 접선이 서로 수직이므로

$$x_1 \times \left(-\frac{ax_1}{10y_1}\right) = -1$$

$$\therefore ax_1^2 = 10y_1$$

..... ㉠

또, 점 (x_1, y_1) 이 포물선 $x^2 = 2y$ 위의 점이므로

$$x_1^2 = 2y_1$$

..... ㉡

$$\textcircled{㉠} \text{을 } \textcircled{㉡} \text{에 대입하면 } 2ay_1 = 10y_1 \quad \therefore a = 5$$

답 5

0215 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{16} + \frac{y_1y}{9} = 1 \quad \therefore y = -\frac{9x_1}{16y_1}x + \frac{9}{y_1}$$

이 직선의 x절편, y절편은 각각 $\frac{16}{x_1}, \frac{9}{y_1}$ 이므로

$$A\left(\frac{16}{x_1}, 0\right), B\left(0, \frac{9}{y_1}\right)$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \times \frac{16}{x_1} \times \frac{9}{y_1} = \frac{72}{x_1y_1}$$

또, 점 $P(x_1, y_1)$ 이 타원 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{9} = 1$$

이때 $\frac{x_1^2}{16} > 0, \frac{y_1^2}{9} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{9} \geq 2\sqrt{\frac{x_1^2}{16} \times \frac{y_1^2}{9}} = \frac{x_1 y_1}{6}$$

(단, 등호는 $\frac{x_1^2}{16} = \frac{y_1^2}{9}$ 일 때 성립)

$$\frac{x_1 y_1}{6} \leq 1 \quad \therefore \frac{1}{x_1 y_1} \geq \frac{1}{6}$$

따라서 $\frac{72}{x_1 y_1} \geq 12$ 이므로 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값은 12이다.

답 12

0216 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{4} + \frac{y_1 y}{5} = 1 \quad \therefore y = -\frac{5x_1}{4y_1}x + \frac{5}{y_1}$$

이 직선이 점 $(-8, 5)$ 를 지나므로

$$5 = \frac{10x_1}{y_1} + \frac{5}{y_1} \quad \therefore y_1 = 2x_1 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 점 (x_1, y_1) 은 타원 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{5} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$x_1 = -\frac{4}{3}, y_1 = -\frac{5}{3} \quad \text{또는} \quad x_1 = \frac{4}{7}, y_1 = \frac{15}{7}$$

따라서 두 접선의 기울기는 각각 $-1, -\frac{1}{3}$ 이므로

$$|m_1| + |m_2| = |-1| + \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{4}{3} \quad \text{답 } \frac{4}{3}$$

0217 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1 x + 2y_1 y = 2 \quad \therefore y = -\frac{x_1}{2y_1}x + \frac{1}{y_1}$$

이 직선이 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{x_1}{y_1} + \frac{1}{y_1} \quad \therefore x_1 = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, 점 (x_1, y_1) 이 타원 위의 점이므로

$$x_1^2 + 2y_1^2 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$1 + 2y_1^2 = 2, y_1^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore y_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 접선의 방정식은

$$y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x \pm \sqrt{2} \quad (\text{복부호동순})$$

이 직선이 점 $(4, k)$ 를 지나므로

$$k = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4 + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \quad (\because k > 0) \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

032 정답과 풀이

0218 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$4x_1 x + 3y_1 y = 12 \quad \therefore y = -\frac{4x_1}{3y_1}x + \frac{4}{y_1}$$

이 직선이 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$4 = \frac{4}{y_1} \quad \therefore y_1 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 점 (x_1, y_1) 이 타원 위의 점이므로

$$4x_1^2 + 3y_1^2 = 12 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$4x_1^2 + 3 = 12, x_1^2 = \frac{9}{4} \quad \therefore x_1 = \pm \frac{3}{2}$$

즉, 두 점점 P, Q의 좌표는

$$\left(-\frac{3}{2}, 1\right), \left(\frac{3}{2}, 1\right)$$

한편, 타원 $4x^2 + 3y^2 = 12$, 즉 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에서

$$c = \sqrt{4-3} = 1 \text{이므로 } F(0, -1)$$

다른 한 초점을 F' 이라 하면 $F'(0, 1)$

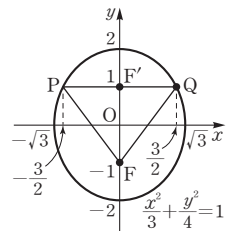
즉, 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = \overline{QF} + \overline{QF'} = 2 \times 2 = 4$$

따라서 구하는 삼각형 PFQ의 둘레의

길이는

$$\begin{aligned} \overline{PQ} + \overline{PF} + \overline{FQ} \\ = \overline{PF} + \overline{PF'} + \overline{QF} + \overline{QF'} \\ = 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$



답 8

0219 쌍곡선 $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{3} = 1$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y = 2x \pm \sqrt{a \times 2^2 - 3} \quad \therefore y = 2x \pm \sqrt{4a - 3}$$

이 직선이 직선 $y = 2x + 3$ 과 일치하므로 $\sqrt{4a - 3} = 3$ 에서

$$4a - 3 = 9 \quad \therefore a = 3$$

즉, $\sqrt{a+3} = \sqrt{3+3} = \sqrt{6}$ 이므로 쌍곡선의 두 초점의 좌표는

$$(\sqrt{6}, 0), (-\sqrt{6}, 0)$$

따라서 구하는 두 초점 사이의 거리는 $2\sqrt{6}$ 이다.

답 ④

0220 직선 $y = x + 1$ 에 수직인 직선의 기울기는 -1 이다.

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 에 접하고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y = -x \pm \sqrt{4 \times (-1)^2 - 1}$$

$$\therefore y = -x \pm \sqrt{3}$$

답 $y = -x \pm \sqrt{3}$

0221 쌍곡선 $11x^2 - 4y^2 = 44$, 즉 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{11} = 1$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y = 2x \pm \sqrt{4 \times 2^2 - 11} \quad \therefore y = 2x \pm \sqrt{5}$$

⑦

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $y=2x+\sqrt{5}$ 위의 점 $(0, \sqrt{5})$ 와 직선 $y=2x-\sqrt{5}$, 즉 $2x-y-\sqrt{5}=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-\sqrt{5}-\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2$$

④

답 2

단계	채점요소	배점
㉠	접선의 방정식 구하기	50%
㉡	두 직선 사이의 거리 구하기	50%

0222 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 인 직선의 기울기는

$$\tan 45^\circ = 1$$

쌍곡선 $5x^2-3y^2=-15$, 즉 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=-1$ 에 접하고 기울기가

1인 직선의 방정식은

$$y=x\pm\sqrt{5-3\times 1^2} \quad \therefore y=x\pm\sqrt{2}$$

이때 y 절편이 양수인 직선은 $y=x+\sqrt{2}$ 이고, 이 직선의 x 절편, y 절편은 각각 $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ 이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times |-\sqrt{2}| \times \sqrt{2} = 1$$

답 1

0223 쌍곡선 $4x^2-y^2=3$ 위의 점 $(1, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4x+y=3 \quad \therefore y=-4x+3$$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{4}$ 이다.

따라서 기울기가 $\frac{1}{4}$ 이고 점 $(1, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y+1=\frac{1}{4}(x-1) \quad \therefore y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$$

이 직선이 점 $(2, a)$ 를 지나므로

$$a=\frac{2}{4}-\frac{5}{4}=-\frac{3}{4}$$

답 ④

0224 점 (k, k) 가 쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=-1$ 위의 점이므로

$$\frac{k^2}{12}-\frac{k^2}{3}=-1, -\frac{1}{4}k^2=-1, k^2=4$$

$$\therefore k=-2 (\because k<0)$$

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=-1$ 위의 점 $(-2, -2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{-2x}{12}-\frac{-2y}{3}=-1$$

$$\therefore y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}$$

답 $y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}$

0225 쌍곡선 $ax^2-by^2=8$ 위의 점 $(3, 5)$ 에서의 접선의 방정식은

$$3ax-5by=8 \quad \therefore y=\frac{3a}{5b}x-\frac{8}{5b}$$

이 직선의 기울기가 3이므로

$$\frac{3a}{5b}=3 \quad \therefore a=5b$$

..... ㉠

또, 점 $(3, 5)$ 는 쌍곡선 위의 점이므로

$$9a-25b=8$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=2, b=\frac{2}{5}$$

$$\therefore a-b=\frac{8}{5}$$

답 $\frac{8}{5}$

0226 쌍곡선 $2x^2-y^2=a$ 위의 점 $(b, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2bx+y=a \quad \therefore y=-2bx+a$$

또, 점 $(b, -1)$ 이 쌍곡선 위의 점이므로

$$2b^2-1=a$$

..... ㉠

한편, 쌍곡선 $2x^2-y^2=a$, 즉 $\frac{x^2}{\frac{a}{2}}-\frac{y^2}{a}=1$ 의 점근선의 방정식은

$$y=\pm\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\frac{a}{2}}}x \quad \therefore y=\pm\sqrt{2}x$$

이때 $b>0$ 이고 접선과 한 점근선이 수직이므로

$$(-2b)\times\sqrt{2}=-1 \quad \therefore b=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2-1=a \quad \therefore a=-\frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{b}{a}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{-\frac{3}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

답 $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

0227 쌍곡선 $x^2-2y^2=-2$ 위의 점 $(4, 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4x-6y=-2 \quad \therefore y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$$

이 직선의 x 절편, y 절편은 각각 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ 이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\left|-\frac{1}{2}\right|\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

답 $\frac{1}{12}$

0228 점 $P(a, b)$ 가 쌍곡선 위의 점이므로

$$a^2-b^2=8$$

..... ㉠

쌍곡선 $x^2 - y^2 = 8$ 위의 점 $P(a, b)$ 에서의 접선의 방정식은

$$ax - by = 8 \quad \therefore y = \frac{a}{b}x - \frac{8}{b}$$

이때 $\frac{AB}{AP}$ 는 접선의 기울기와 같고 $\frac{AB}{AP} = 3$ 이므로

$$\frac{a}{b} = 3 \quad \therefore a = 3b \quad \dots\dots ㉠$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 3, b = 1 (\because b > 0)$$

$$\therefore a + b = 4$$

답 4

0229 쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = -1$ 위의 점 $(3, 4)$ 에서의 접선 l 의 방정식은

$$\frac{3x}{3} - \frac{4y}{4} = -1 \quad \therefore x - y + 1 = 0$$

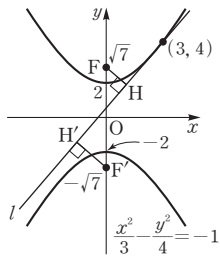
오른쪽 그림과 같이 쌍곡선

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = -1 \text{의 두 초점을 각각 } F, F'$$

이라 하면 $\sqrt{3+4} = \sqrt{7}$ 이므로

$$F(0, \sqrt{7}), F'(0, -\sqrt{7})$$

이때 두 초점 F, F' 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 각각 H, H' 이라 하면



$$\begin{aligned} \overline{FH} \times \overline{F'H'} &= \frac{|\sqrt{7}+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} \times \frac{|\sqrt{7}+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} \\ &= \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

따라서 구하는 곱은 3이다.

답 3

0230 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 8$ 위의 점 $(3, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$3x - y = 8 \quad \therefore y = 3x - 8 \quad \dots\dots ㉠$$

한편, 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 8$, 즉 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}x \quad \therefore y = \pm x \quad \dots\dots ㉡$$

㉠에 $y = x$ 를 대입하면

$$x = 3x - 8 \quad \therefore x = 4$$

즉, 직선 ㉠과 점근선 $y = x$ 의 교점을 A라 하면

$$A(4, 4)$$

$$\therefore \overline{OA} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

㉠에 $y = -x$ 를 대입하면

$$-x = 3x - 8 \quad \therefore x = 2$$

즉, 직선 ㉠과 점근선 $y = -x$ 의 교점을 B라 하면

$$B(2, -2)$$

$$\therefore \overline{OB} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

따라서 두 점근선은 서로 수직이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 8$$

답 8

0231 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x - y_1y = 4$$

이 직선이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$2x_1 - y_1 = 4 \quad \dots\dots ㉠$$

또, 점 (x_1, y_1) 이 쌍곡선 위의 점이므로

$$x_1^2 - y_1^2 = 4 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$x_1 = \frac{10}{3}, y_1 = \frac{8}{3} \text{ 또는 } x_1 = 2, y_1 = 0$$

따라서 두 점점의 좌표는 $(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}), (2, 0)$ 이므로 두 점점 사이의 거리는

$$\sqrt{\left(2 - \frac{10}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{8}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{3} \quad \text{답 } \frac{4\sqrt{5}}{3}$$

0232 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$4x_1x - y_1y = -4 \quad \therefore y = \frac{4x_1}{y_1}x + \frac{4}{y_1}$$

이 직선이 점 $(0, \sqrt{3})$ 을 지나므로

$$\sqrt{3} = \frac{4}{y_1} \quad \therefore y_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad \dots\dots ㉠$$

또, 점 (x_1, y_1) 이 쌍곡선 위의 점이므로

$$4x_1^2 - y_1^2 = -4 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$4x_1^2 - \frac{16}{3} = -4, x_1^2 = \frac{1}{3} \quad \therefore x_1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

즉, 접선의 방정식은 $y = \pm x + \sqrt{3}$

따라서 $m = \pm 1, n = \sqrt{3}$ 이므로

$$m^2 + n^2 = 1 + 3 = 4 \quad \text{답 } 4$$

0233 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{3} - y_1y = 1$$

이 직선이 점 $P(0, 1)$ 을 지나므로

$$y_1 = -1 \quad \dots\dots ㉠$$

또, 점 (x_1, y_1) 이 쌍곡선 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{3} - y_1^2 = 1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\frac{x_1^2}{3} - 1 = 1, x_1^2 = 6 \quad \therefore x_1 = \pm \sqrt{6}$$

$$\therefore A(-\sqrt{6}, -1), B(\sqrt{6}, -1)$$

따라서 구하는 삼각형 PAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 2 = 2\sqrt{6}$$

답 $2\sqrt{6}$

단계	채점요소	배점
㉑	접선의 방정식 구하기	30%
㉒	접점의 좌표 구하기	40%
㉓	삼각형 PAB의 넓이 구하기	30%

유형 1p

본문 35쪽

0234 포물선 $y^2=x$ 위의 점 P와 직선 $y=x+3$ 사이의 거리가 최소이려면 점 P는 기울기가 1인 접선의 접점이어야 한다.

포물선 $y^2=x=4 \times \frac{1}{4}x$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y=x+\frac{1}{4}$$

이 직선이 점 P(a, b)를 지나므로

$$b=a+\frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 점 P(a, b)가 포물선 위의 점이므로

$$b^2=a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a=\frac{1}{4}, b=\frac{1}{2} \quad \therefore ab=\frac{1}{8} \quad \text{답 ⑤}$$

다른풀이 포물선 $y^2=x=4 \times \frac{1}{4}x$ 위의 점 P(a, b)에서의 접선의 방정식은

$$by=2 \times \frac{1}{4} \times (x+a) \quad \therefore y=\frac{1}{2b}(x+a)$$

이 직선의 기울기가 1이므로

$$\frac{1}{2b}=1 \quad \therefore b=\frac{1}{2}$$

또, 점 P(a, $\frac{1}{2}$)은 포물선 위의 점이므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=a \quad \therefore a=\frac{1}{4}$$

$$\therefore ab=\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

0235 점 P의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 점 P는 포물선 위의 점이므로

$$x_1^2=4y_1 \quad \therefore y_1=\frac{1}{4}x_1^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 점 P에서의 접선의 방정식은

$$x_1x=2(y+y_1) \quad \therefore y=\frac{1}{2}x_1x-y_1$$

한편, 이 직선과 직선 PQ가 서로 수직으로 만날 때, $\overline{PQ}$ 의 길이가 최소이므로

$$\frac{1}{2}x_1 \times \frac{y_1-2}{x_1-8}=-1, x_1y_1-2x_1=-2x_1+16$$

$$x_1y_1=16, \frac{1}{4}x_1^3=16 (\because \textcircled{1})$$

$$x_1^3=64 \quad \therefore x_1=4$$

$$\therefore P(4, 4)$$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은

$$\sqrt{(8-4)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{5} \quad \text{답 } 2\sqrt{5}$$

0236 타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 P와 직선 $y=2x+5$ 사이의 거리가 최대 또는 최소가 되려면 점 P는 기울기가 2인 접선의 접점이어야 한다.

타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y=2x \pm \sqrt{3 \times 2^2 + 4} \quad \therefore y=2x \pm 4$$

이때 오른쪽 그림과 같이 점 P와 직선

$y=2x+5$ 사이의 거리의 최솟값은 직

선 $y=2x+4$ 위의 점 (0, 4)와 직선

$y=2x+5$, 즉 $2x-y+5=0$ 사이의

거리와 같으므로

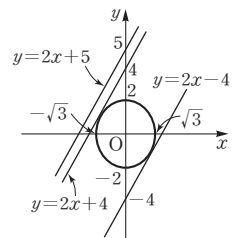
$$m=\frac{|-4+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

또, 최댓값은 직선 $y=2x-4$ 위의 점 (0, -4)와 직선

$y=2x+5$, 즉 $2x-y+5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$M=\frac{|4+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{9\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore M+m=\frac{9\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5} \quad \text{답 } 2\sqrt{5}$$



0237 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 위의 점 P에서의 접선이 직선 AB와 평행할 때, 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최소이므로 삼각형 PAB의 넓이도 최소이다.

직선 AB의 방정식은

$$y-2=\frac{2-(-1)}{1-(-\frac{1}{2})}(x-1) \quad \therefore y=2x$$

즉, 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y=2x \pm \sqrt{4 \times 2^2 - 1} \quad \therefore y=2x \pm \sqrt{15}$$

이때 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최솟값은 직선 $y=2x$ 위의

점 (0, 0)과 직선 $y=2x+\sqrt{15}$, 즉 $2x-y+\sqrt{15}=0$ 사이의 거

리와 같으므로

$$\frac{|\sqrt{15}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } \overline{AB}=\sqrt{\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^2+\{2-(-1)\}^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2} \text{이므로}$$

삼각형 PAB의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{3}=\frac{3\sqrt{15}}{4} \quad \text{답 } \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

0238 $x^2 - 4y^2 = 12$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x - 8y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x}{4y} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

점 $(4, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{4}{4 \times 1} = 1$$

따라서 접선의 방정식은

$$y - 1 = x - 4$$

$$\therefore y = x - 3$$

이 직선이 점 $(-2, k)$ 를 지나므로

$$k = -2 - 3 = -5$$

답 ①

0239 $4x - y^2 = 0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$4 - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

이때 직선 $y = -x + 5$ 와 평행한 직선의 기울기는 -1 이다.

즉, 점점을 $P(x_1, y_1)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 -1 이므로

$$\frac{2}{y_1} = -1 \quad \therefore y_1 = -2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또, 점 P 가 포물선 위의 점이므로

$$4x_1 - y_1^2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①을 ②에 대입하면

$$4x_1 - 4 = 0 \quad \therefore x_1 = 1$$

따라서 기울기가 -1 이고 점 $P(1, -2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y + 2 = -(x - 1)$$

$$\therefore y = -x - 1$$

답 $y = -x - 1$

0240 $x^2 + 2y^2 - 4 = 0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + 4y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

이때 점 $P(\sqrt{2}, a)$ 가 타원 위의 점이므로

$$2 + 2a^2 - 4 = 0, \quad 2a^2 = 2$$

$$\therefore a = 1 \quad (\because a > 0)$$

즉, 점 $P(\sqrt{2}, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 이 접선

에 수직이고 점 P 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 1 = \sqrt{2}(x - \sqrt{2})$$

$$\therefore y = \sqrt{2}x - 1$$

따라서 이 직선의 x 절편은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

036 정답과 풀이



시험에 꼭 나오는 문제

본문 36~38쪽

0241 $y = 3x + k$ 를 $9x^2 + 8y^2 = 72$ 에 대입하면

$$9x^2 + 8(3x + k)^2 = 72$$

$$\therefore 81x^2 + 48kx + 8k^2 - 72 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (24k)^2 - 81(8k^2 - 72) > 0$$

$$k^2 < 81 \quad \therefore -9 < k < 9$$

따라서 구하는 정수 k 는 $-8, -7, \dots, 7, 8$ 의 17개이다.

답 ③

0242 $y = x + k$ 를 $y^2 - 2x = 0$ 에 대입하면

$$(x + k)^2 - 2x = 0$$

$$\therefore x^2 + 2(k - 1)x + k^2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (k - 1)^2 - k^2 < 0$$

$$-2k + 1 < 0 \quad \therefore k > \frac{1}{2}$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 1이다.

답 1

0243 포물선 $y^2 = kx = 4 \times \frac{k}{4} \times x$ 에 접하고 기울기가 1인 직

선의 방정식은

$$y = x + \frac{k}{4}$$

이 직선이 점 $(3, -1)$ 을 지나므로

$$-1 = 3 + \frac{k}{4} \quad \therefore k = -16$$

답 -16

0244 이차방정식 $2x^2 - 3x + 1 = 0$ 에서

$$(2x - 1)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 1$$

이때 $m_1 = \frac{1}{2}$, $m_2 = 1$ 이라 하자.

포물선 $y^2 = 8x = 4 \times 2 \times x$ 에 접하고 기울기가 $m_1 = \frac{1}{2}$ 인 직선

l_1 의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{2}{1} \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또, 기울기가 $m_2 = 1$ 인 직선 l_2 의 방정식은

$$y = x + \frac{2}{1} \quad \therefore y = x + 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$x = 4, y = 6$$

따라서 두 직선 l_1, l_2 의 교점의 x 좌표는 4이다.

답 ④

0245 포물선 $x^2 = -2y = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times y$ 위의 점 $(-4, -8)$

에서의 접선의 방정식은

$$-4x = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (y - 8)$$

$$\therefore y = 4x + 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 직선 $\textcircled{1}$ 에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$ 이고, 포물선

$x^2 = -2y$ 의 초점의 좌표는 $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$$

따라서 $m = -\frac{1}{4}$, $n = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$mn = \frac{1}{8} \quad \text{답 } \frac{1}{8}$$

0246 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$y_1 y = 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \times (x + x_1)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2y_1}x - \frac{x_1}{2y_1}$$

이 직선이 점 $(4, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -\frac{2}{y_1} - \frac{x_1}{2y_1} \quad \therefore x_1 = -4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 점 (x_1, y_1) 이 포물선 위의 점이므로

$$y_1^2 = -x_1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$y_1^2 = 4 \quad \therefore y_1 = -2 \text{ 또는 } y_1 = 2$$

즉, 접점의 좌표는 $(-4, -2)$, $(-4, 2)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{4}x - 1, y = -\frac{1}{4}x + 1$$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$$\frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{16} \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

0247 직선 $2x - y - 1 = 0$, 즉 $y = 2x - 1$ 에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$ 에 접하고 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2}x \pm \sqrt{3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 6}$$

$$= -\frac{1}{2}x \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore x + 2y \pm 3\sqrt{3} = 0$$

따라서 $a = 2$, $b = \pm 3\sqrt{3}$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 4 + 27 = 31 \quad \text{답 } 31$$

0248 점 P의 좌표를 (a, b) ($a > 0$, $b > 0$)라 하면 점 P는 주어진 포물선과 타원의 교점이므로

$$b^2 = 6a, \frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{12} = 1$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = \frac{3}{2}, b = 3 \quad (\because a > 0, b > 0)$$

따라서 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} = 1$ 위의 점 $P\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{\frac{3}{2}x}{9} + \frac{3y}{12} = 1$$

$$\therefore y = -\frac{2}{3}x + 4$$

$$\text{답 } y = -\frac{2}{3}x + 4$$

0249 타원 $\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에서 $k < 4$ 이므로 초점의 좌표는

$$(0, \sqrt{4-k}), (0, -\sqrt{4-k})$$

이때 직선 $y = -2x + 1$ 은 점 $(0, \sqrt{4-k})$ 를 지나므로

$$\sqrt{4-k} = 1, 4-k = 1$$

$$\therefore k = 3$$

한편, 타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{ax}{3} + \frac{by}{4} = 1 \quad \therefore y = -\frac{4a}{3b}x + \frac{4}{b}$$

이 직선이 직선 $y = -2x + 1$ 과 평행하므로

$$-\frac{4a}{3b} = -2 \quad \therefore 2a = 3b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 점 (a, b) 가 타원 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{4} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = \frac{3}{2}, b = 1 \quad (\because a > 0, b > 0)$$

$$\therefore ab = \frac{3}{2} \quad \text{답 } \frac{3}{2}$$

0250 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 위의 점 $(a, 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{ax}{16} + \frac{3y}{12} = 1 \quad \therefore y = -\frac{a}{4}x + 4$$

이 직선이 원 $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 1$ 의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나야 한다.

즉, 원의 중심의 좌표는 $(-2, 5)$ 이므로

$$5 = -\frac{a}{4} \times (-2) + 4$$

$$\therefore a = 2$$

$$\text{답 } 2$$

0251 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은 $x_1 x + 2y_1 y = 4$

이 직선이 점 P(2, 2)를 지나므로

$$2x_1 + 4y_1 = 4$$

$$\therefore y_1 = -\frac{1}{2}x_1 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또, 점 (x_1, y_1) 이 타원 위의 점이므로

$$x_1^2 + 2y_1^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면

$$x_1 = -\frac{2}{3}, y_1 = \frac{4}{3} \text{ 또는 } x_1 = 2, y_1 = 0$$

따라서 $A(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$, $B(2, 0)$ 이라 하면 삼각형 PAB의 무게

중심의 좌표는

$$\left(\frac{2 + (-\frac{2}{3}) + 2}{3}, \frac{2 + \frac{4}{3} + 0}{3} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{10}{9}, \frac{10}{9} \right) \quad \text{답 ④}$$

0252 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하면 이 쌍곡선이 점 (3, 0)을 지나므로

$$\frac{9}{a^2} = 1 \quad \therefore a^2 = 9$$

또, 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 점근선의 방정식이 $y = \pm \frac{2}{3}x$ 이므로

$$\frac{|b|}{3} = \frac{2}{3}, |b| = 2 \quad \therefore b^2 = 4$$

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 에 접하고 기울기가 $-\sqrt{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y = -\sqrt{2}x \pm \sqrt{9 \times (-\sqrt{2})^2 - 4}$$

$$\therefore y = -\sqrt{2}x \pm \sqrt{14} \quad \text{답 } y = -\sqrt{2}x \pm \sqrt{14}$$

0253 쌍곡선 위의 점 A(4, 1)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{4x}{8} - y = 1 \quad \therefore y = \frac{1}{2}x - 1$$

이 직선의 x절편은 2이므로 B(2, 0)

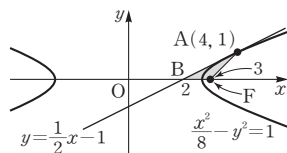
쌍곡선 $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$ 에서 $\sqrt{8+1}=3$ 이므로 초점의 좌표는

$$(3, 0), (-3, 0) \quad \therefore F(3, 0)$$

따라서 구하는 삼각형 FAB의

넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$



답 ②

0254 접점을 $P(x_1, y_1)$ 이라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{4} - \frac{y_1 y}{2} = 1 \quad \therefore x_1 x - 2y_1 y = 4$$

이 직선이 점 $(-2, 1)$ 을 지나므로

$$-2x_1 - 2y_1 = 4 \quad \therefore x_1 + y_1 = -2 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

038 정답과 풀이

또, 점 $P(x_1, y_1)$ 은 쌍곡선 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{2} = 1 \quad \therefore x_1^2 - 2y_1^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

⑨, ⑩을 연립하여 풀면

$$x_1 = -2, y_1 = 0 \text{ 또는 } x_1 = -6, y_1 = 4$$

ㄱ. 점점의 좌표는 $(-2, 0), (-6, 4)$ (거짓)

ㄴ. 두 점점 $(-2, 0), (-6, 4)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(-6+2)^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \text{ (참)}$$

ㄷ. 점 $(-2, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-2x = 4 \quad \therefore x = -2$$

점 $(-6, 4)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-6x - 8y = 4 \quad \therefore 3x + 4y = -2$$

즉, 접선의 방정식은

$$x = -2 \text{ 또는 } 3x + 4y = -2 \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

0255 쌍곡선 $4x^2 - y^2 = -4$, 즉 $x^2 - \frac{y^2}{4} = -1$ 에 접하고 기울

기가 m 인 직선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{4 - m^2}$$

이 직선이 점 $(a, 1)$ 을 지나므로

$$1 = am \pm \sqrt{4 - m^2}$$

즉, $1 - am = \pm \sqrt{4 - m^2}$ 에서 양변을 제곱하여 정리하면

$$(a^2 + 1)m^2 - 2am - 3 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{11}$$

이때 두 점점이 서로 수직이므로 m 에 대한 이차방정식 ⑪의 두 실근의 곱은 -1 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{-3}{a^2 + 1} = -1, a^2 = 2$$

$$\therefore a = \sqrt{2} \quad (\because a > 0)$$

답 $\sqrt{2}$

0256 쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ 위의 점 P와 직선 $y = \sqrt{2}x - 1$ 사

이의 거리가 최소가 되려면 점 P는 기울기가 $\sqrt{2}$ 인 접선의 접점이
어야 한다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ 에 접하고 기울기가 $\sqrt{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \sqrt{2}x \pm \sqrt{3 \times (\sqrt{2})^2 - 2}$$

$$\therefore y = \sqrt{2}x \pm 2$$

따라서 구하는 최솟값은 직선

$y = \sqrt{2}x - 2$ 위의 점 $(0, -2)$ 와 직

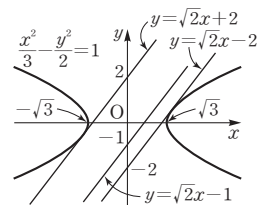
선 $y = \sqrt{2}x - 1$, 즉 $\sqrt{2}x - y - 1 = 0$

사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2 - 1|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

즉, $a = 3, b = 1$ 이므로

$$a + b = 4$$



답 4

0257 (i) $y = -x + k$ 를 $y^2 = 2x$ 에 대입하면

$$(-x+k)^2 = 2x$$

$$\therefore x^2 - 2(k+1)x + k^2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = \{-(k+1)\}^2 - k^2 > 0$$

$$2k+1 > 0 \quad \therefore k > -\frac{1}{2}$$

㉠

(ii) $y = -x + k$ 를 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 에 대입하면

$$\frac{x^2}{3} + \frac{(-x+k)^2}{2} = 1$$

$$\therefore 5x^2 - 6kx + 3k^2 - 6 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (-3k)^2 - 5(3k^2 - 6) < 0$$

$$-6k^2 + 30 < 0, k^2 > 5$$

$$\therefore k > \sqrt{5} \text{ 또는 } k < -\sqrt{5}$$

㉡

(i), (ii)에서 $k > \sqrt{5}$

㉢

답 $k > \sqrt{5}$

단계	채점요소	배점
㉠	주어진 직선과 포물선의 위치 관계를 이용하여 k 의 값의 범위 구하기	40%
㉡	주어진 직선과 타원의 위치 관계를 이용하여 k 의 값의 범위 구하기	40%
㉢	k 의 값의 범위 구하기	20%

0258 포물선 $x^2 + 8y = 0$, 즉 $x^2 = -8y = 4 \times (-2) \times y$ 위의 점 $(4, -2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4x = 2 \times (-2) \times (y - 2)$$

$$\therefore y = -x + 2$$

㉠

이 직선과 평행한 직선의 기울기는 -1 이므로 기울기가 -1 이고 점 $(-2, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 3 = -(x + 2)$$

$$\therefore y = -x + 1$$

㉡

따라서 구하는 y 절편은 1 이다.

㉢

답 1

단계	채점요소	배점
㉠	점 $(4, -2)$ 에서의 접선의 방정식 구하기	40%
㉡	접선과 평행하고 점 $(-2, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식 구하기	40%
㉢	y 절편 구하기	20%

0259 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2\sqrt{2}x}{a^2} + \frac{-\sqrt{2}y}{b^2} = 1 \quad \therefore y = \frac{2b^2}{a^2}x - \frac{\sqrt{2}b^2}{2}$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ 위의 점 $P(2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2\sqrt{2}x}{4} - \frac{-\sqrt{2}y}{2} = 1 \quad \therefore y = -x + \sqrt{2}$$

㉠

두 직선이 서로 수직이므로

$$\frac{2b^2}{a^2} \times (-1) = -1 \quad \therefore a^2 = 2b^2 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉡

한편, 점 P 가 타원 위의 점이므로

$$\frac{8}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a^2 = 12, b^2 = 6$

$$\therefore a = 2\sqrt{3}, b = \sqrt{6} \quad (\because a > 0, b > 0)$$

㉣

답 $a = 2\sqrt{3}, b = \sqrt{6}$

단계	채점요소	배점
㉠	타원과 쌍곡선 위의 점 P 에서의 접선의 방정식 각각 구하기	40%
㉡	두 접선이 수직임을 이용하여 a, b 에 대한 식 세우기	30%
㉢	점 P 가 타원 위의 점임을 이용하여 a, b 에 대한 식 세우기	10%
㉣	a, b 의 값 구하기	20%

0260 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 위의 점 P 에서의 접선이 직선 AB 와 평행할 때, 점 P 와 직선 AB 사이의 거리가 최대이므로 삼각형 PAB 의 넓이도 최대이다.

직선 AB 의 방정식은

$$y + 1 = -\frac{1}{2}x \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x - 1$$

㉠

즉, 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 에 접하고 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2}x \pm \sqrt{4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x \pm \sqrt{2}$$

㉡

이때 점 P 와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값은 직선

$$y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{2} \text{ 위의 점 } (0, \sqrt{2}) \text{와 직선 } y = -\frac{1}{2}x - 1, \text{ 즉}$$

$$x + 2y + 2 = 0 \text{ 사이의 거리와 같으므로}$$

$$\frac{|2\sqrt{2} + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2\sqrt{10} + 2\sqrt{5}}{5}$$

㉢

따라서 $\overline{AB} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ 이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{10} + 2\sqrt{5}}{5} = \sqrt{2} + 1$$

답 $\sqrt{2} + 1$

단계	채점요소	배점
㉠	직선 AB의 방정식 구하기	20%
㉡	접선의 방정식 구하기	30%
㉢	점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값 구하기	30%
㉣	삼각형 PAB의 넓이의 최댓값 구하기	20%

0261 타원 $x^2 + 4y^2 = 8$, 즉 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 의 두 꼭짓점

$(-2\sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{2})$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}x \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + \sqrt{2}$$

이때 이 직선과 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 은 접한다.

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$$

즉, $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2} = \sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{1}{4}a^2 + b^2 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 초점의 좌표가 $(b, 0)$, $(-b, 0)$ 이므로

$$b^2 = a^2 - b^2 \quad \therefore a^2 = 2b^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a^2 = \frac{8}{3}$, $b^2 = \frac{4}{3}$

$$\therefore a^2 + b^2 = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 4 \quad \text{답 4}$$

0262 쌍곡선 위의 점 $P(4, k)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{4x}{a^2} - \frac{ky}{b^2} = 1 \quad \therefore y = \frac{4b^2}{a^2k}x - \frac{b^2}{k}$$

이 직선과 x 축의 교점의 좌표는 $(\frac{a^2}{4}, 0)$

또, 선분 F'F를 2:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times (-3)}{2+1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times 0}{2+1} \right) \quad \therefore (1, 0)$$

두 점 $(\frac{a^2}{4}, 0)$, $(1, 0)$ 이 일치하므로

$$\frac{a^2}{4} = 1 \quad \therefore a^2 = 4$$

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점이 $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$ 이

므로

040 정답과 풀이

$$9 = 4 + b^2 \quad \therefore b^2 = 5$$

따라서 점 $P(4, k)$ 가 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{16}{4} - \frac{k^2}{5} = 1 \quad \therefore k^2 = 15 \quad \text{답 15}$$

0263 기울기가 m 이고 점 $(1, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 1 = m(x - 1) \quad \therefore y = mx - m + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이것을 $y^2 + 8x = 0$ 에 대입하면

$$(mx - m + 1)^2 + 8x = 0$$

$$\therefore m^2x^2 - 2(m^2 - m - 4)x + m^2 - 2m + 1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (m^2 - m - 4)^2 - m^2(m^2 - 2m + 1)$$

$$= -8m^2 + 8m + 16$$

$$= -8(m+1)(m-2)$$

(i) $\frac{D}{4} > 0$ 인 경우

$$-8(m+1)(m-2) > 0, (m+1)(m-2) < 0$$

$$\therefore -1 < m < 2$$

즉, $-1 < m < 2$ 일 때, 직선 $\textcircled{1}$ 과 포물선은 서로 다른 두 점에서 만나므로

$$a_m = 2$$

(ii) $\frac{D}{4} = 0$ 인 경우

$$-8(m+1)(m-2) = 0$$

$$\therefore m = -1 \text{ 또는 } m = 2$$

즉, $m = -1$ 또는 $m = 2$ 일 때, 직선 $\textcircled{1}$ 과 포물선은 한 점에서 만나므로

$$a_m = 1$$

(iii) $\frac{D}{4} < 0$ 인 경우

$$-8(m+1)(m-2) < 0, (m+1)(m-2) > 0$$

$$\therefore m > 2 \text{ 또는 } m < -1$$

즉, $m > 2$ 또는 $m < -1$ 일 때, 직선 $\textcircled{1}$ 과 포물선은 만나지 않으므로

$$a_m = 0$$

(i), (ii), (iii)에서

$$a_m = \begin{cases} 2 & (-1 < m < 2) \\ 1 & (m = -1 \text{ 또는 } m = 2) \\ 0 & (m > 2 \text{ 또는 } m < -1) \end{cases}$$

$$\therefore a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 9a_9 = 2 + 2 \times 1 + 3 \times 0 + \dots + 9 \times 0 = 4 \quad \text{답 4}$$

03 | 벡터의 연산



교과서 문제 정복하기

본문 41쪽

0264 (1) $\overline{BC} = \overline{AD} = 4$ 이므로

$$|\overrightarrow{BC}| = 4$$

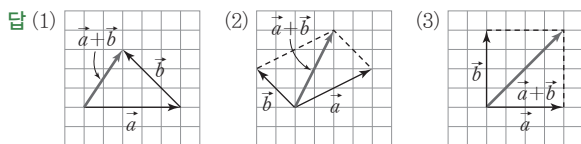
(2) $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이므로

$$|\overrightarrow{AC}| = 5$$

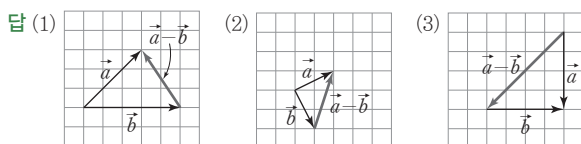
답 (1) 4 (2) 5

0265 답 (1) $\vec{a}$ 와 $\vec{c}$, $\vec{b}$ 와 $\vec{d}$ (2) $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 와 $\vec{d}$, $\vec{e}$ 와 $\vec{f}$
 (3) $\vec{b}$ 와 $\vec{d}$ (4) $\vec{e}$ 와 $\vec{f}$

0266



0267



$$\begin{aligned} 0268 \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

답 $\overrightarrow{AD}$

$$\begin{aligned} 0269 \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{AA} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

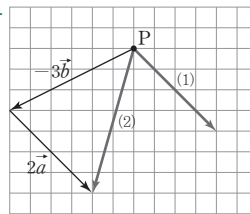
답 $\vec{0}$

$$0270 \quad (1) \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$\begin{aligned} (2) \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AO} \\ &= -\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= -\vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} - \vec{b} \end{aligned}$$

답 (1) $-\vec{a} + \vec{b}$ (2) $-\vec{a} - \vec{b}$

0271 답



$$\begin{aligned} 0272 \quad 3(\vec{a} + 2\vec{b}) + 2(\vec{a} - 4\vec{b}) \\ &= 3\vec{a} + 6\vec{b} + 2\vec{a} - 8\vec{b} \\ &= 5\vec{a} - 2\vec{b} \end{aligned}$$

답 $5\vec{a} - 2\vec{b}$

$$\begin{aligned} 0273 \quad 4(-\vec{a} + 3\vec{b}) - 3(2\vec{a} - \vec{b}) \\ &= -4\vec{a} + 12\vec{b} - 6\vec{a} + 3\vec{b} \\ &= -10\vec{a} + 15\vec{b} \end{aligned}$$

답 $-10\vec{a} + 15\vec{b}$

$$\begin{aligned} 0274 \quad \vec{a} - \vec{x} = 2\vec{a} - 5\vec{b} \text{에서} \\ -\vec{x} = 2\vec{a} - 5\vec{b} - \vec{a}, \quad -\vec{x} = \vec{a} - 5\vec{b} \\ \therefore \vec{x} = -\vec{a} + 5\vec{b} \end{aligned}$$

답 $\vec{x} = -\vec{a} + 5\vec{b}$

$$\begin{aligned} 0275 \quad 3(\vec{x} + 2\vec{a} - 3\vec{b}) = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{x} \text{에서} \\ 3\vec{x} + 6\vec{a} - 9\vec{b} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{x}, \quad 2\vec{x} = -4\vec{a} + 6\vec{b} \\ \therefore \vec{x} = -2\vec{a} + 3\vec{b} \end{aligned}$$

답 $\vec{x} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$

$$\begin{aligned} 0276 \quad \text{두 벡터 } \vec{a} - 2\vec{b}, 4\vec{a} + k\vec{b} \text{가 서로 평행하므로 } 0 \text{이 아닌 실} \\ \text{수 } t \text{에 대하여} \\ 4\vec{a} + k\vec{b} = t(\vec{a} - 2\vec{b}) \\ 4\vec{a} + k\vec{b} = t\vec{a} - 2t\vec{b} \\ \text{따라서 } 4 = t, k = -2t \text{이므로} \\ k = -8 \end{aligned}$$

답 -8

$$\begin{aligned} 0277 \quad \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2\vec{b} - (-\vec{a}) = \vec{a} + 2\vec{b} \\ \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \vec{a} + 4\vec{b} - (-\vec{a}) = 2\vec{a} + 4\vec{b} \end{aligned}$$

따라서 $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ 이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

답 풀이 참조



유형 익히기

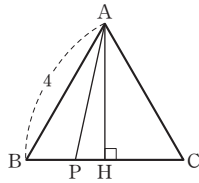
본문 42~47쪽

$$\begin{aligned} 0278 \quad \text{정육각형 } ABCDEF \text{는 한 변의 길이가 2인 정삼각형 6개} \\ \text{로 이루어져 있다.} \\ \text{ㄱ. } |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OE}| = 2 \text{ (참)} \\ \text{ㄴ. } |\overrightarrow{FC}| = \overline{FC} = 2 \times 2 = 4 \text{ (참)} \\ \text{ㄷ. } |\overrightarrow{BO}| = 2 \text{이므로 } \overrightarrow{BO} \text{는 단위벡터가 아니다. (거짓)} \\ \text{따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.} \end{aligned}$$

답 ③

0279 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $|\overrightarrow{AP}|$ 의 최솟값은 $\overline{AH}$ 의 길이와 같으므로

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$



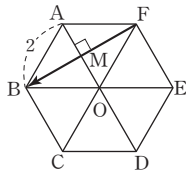
답 2√3

0280 오른쪽 그림과 같이 정육각형의 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O, 두 선분 AD, FB가 만나는 점을 M이라 하면 $\overline{FM}$ 은 정삼각형 AOF의 높이이므로

$$\overline{FM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$$

$$\therefore |\overrightarrow{FB}| = 2|\overrightarrow{FM}| = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

답 ②



0281 크기와 방향이 각각 같은 두 벡터는 서로 같다고 하므로 서로 같은 벡터는 ③ $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{OE}$ 이다.

답 ③

0282 점 F는 변 AC의 중점이므로 $\overline{AF} = \overline{FC}$

$$\therefore \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FC}$$

한편, 두 점 D, E는 각각 두 선분 AB, BC의 중점이므로

$$\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \overline{AF}, \overline{DE} \parallel \overline{AF}$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AF}$$

따라서 벡터 $\overrightarrow{AF}$ 와 서로 같은 벡터는 $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{DE}$ 이다.

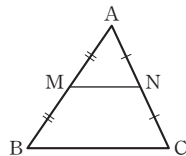
답 ②, ④

참고 삼각형의 중점연결정리

삼각형 ABC에서 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 의 중점을 각각 M, N이라 하면

$$\overline{MN} \parallel \overline{BC}, \overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{BC}$$

$$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$$



0283 벡터 $\vec{a}$ 와 크기와 방향이 각각 같은 벡터는 $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{EF}$ 이므로 $m=3$

..... ㉠

벡터 $\vec{b}$ 와 크기는 같지만 방향이 반대인 벡터는 $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AF}$ 이므로 $n=4$

..... ㉡

$$\therefore m+n=7$$

..... ㉢

답 7

단계	채점요소	배점
㉠	m의 값 구하기	45%
㉡	n의 값 구하기	45%
㉢	m+n의 값 구하기	10%

0284 ㄱ. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{OB} = -\vec{b}$ (참)

ㄴ. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} - \vec{b}$ (거짓)

ㄷ. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$ (참)

ㄹ. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = -\vec{a} - \vec{b}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ④

0285 ② $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$

③ $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB}$

④ $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$

⑤ $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

답 ⑤

0286 $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FC}$

답 ②

0287 ㄱ. $\overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ (거짓)

ㄴ. $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (참)

ㄷ. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

0288 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PE} = (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA}) + (\overrightarrow{QP} - \overrightarrow{QB}) + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QC}) + (\overrightarrow{QP} - \overrightarrow{QD}) + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QE}) = 2(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP}) + \overrightarrow{PQ} + (\overrightarrow{QA} - \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{QE}) = 2 \times \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PQ} + \vec{0} = \vec{0} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ}$

답 ①

0289 $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ 에서

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$$

$$\therefore \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC}$$

..... ㉠

즉, 두 벡터 $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{OC}$ 의 크기와 방향이 각각 같으므로

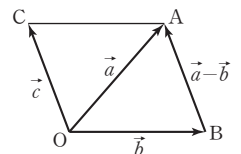
$$\overline{BA} = \overline{OC}, \overline{BA} \parallel \overline{OC}$$

..... ㉡

따라서 사각형 OBAC는 평행사변형이다.

..... ㉢

답 평행사변형



단계	채점요소	배점
㉠	$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OC}$ 임을 알기	30%
㉡	$BA=OC, BA \parallel OC$ 임을 알기	40%
㉢	사각형 OBAC가 어떤 사각형인지 구하기	30%

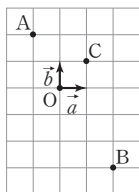
0290 $2\vec{x} + \vec{y} = 5\vec{a}$ ㉠
 $3\vec{x} - \vec{y} = \vec{b}$ ㉡
 ㉠ + ㉡을 하면 $5\vec{x} = 5\vec{a} + \vec{b}$
 $\therefore \vec{x} = \vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$ ㉢
 ㉢을 ㉠에 대입하면
 $2\left(\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}\right) + \vec{y} = 5\vec{a} \quad \therefore \vec{y} = 3\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b}$
 $\therefore \vec{x} + \vec{y} = \left(\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}\right) + \left(3\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b}\right)$
 $= 4\vec{a} - \frac{1}{5}\vec{b}$ ㉣

0291 $2\vec{p} + 3(-\vec{p} + \vec{q})$
 $= 2\vec{p} - 3\vec{p} + 3\vec{q}$
 $= -\vec{p} + 3\vec{q}$
 $= -(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}) + 3(-\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c})$
 $= -\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c} - 3\vec{a} + 6\vec{b} + 3\vec{c}$
 $= -4\vec{a} + 4\vec{b} + 6\vec{c}$ ㉡

0292 $-(\vec{x} - 2\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} + \vec{b}$ 에서
 $-\vec{x} + 2\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \vec{b} \quad \therefore \vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$
 따라서 $m=1, n=-2$ 이므로
 $3m+n=3-2=1$ ㉠

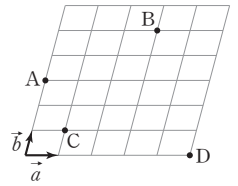
0293 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (3\vec{a} - 2\vec{b}) - \vec{a}$
 $= 2\vec{a} - 2\vec{b}$
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$
 따라서 $\overrightarrow{AC} = -2(\vec{b} - \vec{a}) = -2\overrightarrow{AB}$ 이므로
 $k = -2$ ㉡

0294 오른쪽 그림과 같이 점 O를 시점으로 하고 오른쪽으로 한 칸을 진행하는 벡터를 $\vec{a}$, 위로 한 칸을 진행하는 벡터를 $\vec{b}$ 라 하자.
 세 벡터 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 를 각각 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 로 나타내면
 $\overrightarrow{OA} = -\vec{a} + 2\vec{b}$
 $\overrightarrow{OB} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$
 $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$
 $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ 에 위의 식을 대입하면
 $\vec{a} + \vec{b} = m(-\vec{a} + 2\vec{b}) + n(2\vec{a} - 3\vec{b})$
 $= (-m + 2n)\vec{a} + (2m - 3n)\vec{b}$



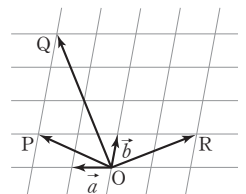
이때 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 는 서로 평행하지 않으므로
 $1 = -m + 2n, 1 = 2m - 3n$
 위의 두 식을 연립하여 풀면
 $m=5, n=3 \quad \therefore m-n=2$ ㉠

0295 오른쪽 그림과 같이 오른쪽으로 한 칸을 진행하는 벡터를 $\vec{a}$, 위로 한 칸을 진행하는 벡터를 $\vec{b}$ 라 하자.
 세 벡터 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ 를 각각 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 로 나타내면
 $\overrightarrow{AB} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$
 $\overrightarrow{AC} = \vec{a} - 2\vec{b}$
 $\overrightarrow{AD} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$
 $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ 에 위의 식을 대입하면
 $5\vec{a} - 3\vec{b} = m(3\vec{a} + 2\vec{b}) + n(\vec{a} - 2\vec{b})$
 $= (3m + n)\vec{a} + (2m - 2n)\vec{b}$



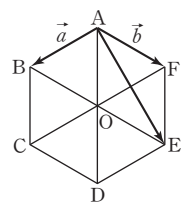
이때 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 는 서로 평행하지 않으므로
 $3m + n = 5, 2m - 2n = -3$
 위의 두 식을 연립하여 풀면
 $m = \frac{7}{8}, n = \frac{19}{8} \quad \therefore m + n = \frac{13}{4}$ ㉡

0296 오른쪽 그림과 같이 점 O를 시점으로 하고 왼쪽으로 한 칸을 진행하는 벡터를 $\vec{a}$, 위로 한 칸을 진행하는 벡터를 $\vec{b}$ 라 하자.
 $\overrightarrow{OP} = 2\vec{a} + \vec{b}$
 $\overrightarrow{OQ} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$
 $\overrightarrow{OR} = -2\vec{a} + \vec{b}$
 $\overrightarrow{OQ} = m\overrightarrow{OP} + n\overrightarrow{OR}$ 에 위의 식을 대입하면
 $2\vec{a} + 4\vec{b} = m(2\vec{a} + \vec{b}) + n(-2\vec{a} + \vec{b})$
 $= (2m - 2n)\vec{a} + (m + n)\vec{b}$



이때 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 평행하지 않으므로
 $2m - 2n = 2, m + n = 4$
 위의 두 식을 연립하여 풀면
 $m = \frac{5}{2}, n = \frac{3}{2} \quad \therefore 4mn = 15$ ㉠

0297 오른쪽 그림과 같이 정육각형의 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O라 하면
 $\overrightarrow{AO} = \vec{a} + \vec{b}$
 $\therefore \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE}$
 $= (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b}$
 $= \vec{a} + 2\vec{b}$



따라서 $m=1, n=2$ 이므로
 $m+n=3$ ㉢

0298 ① $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\vec{a}$

② $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ} = \vec{b} - \vec{a}$

③ $\overrightarrow{RN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{RP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PR} = -\frac{1}{2}\vec{b}$

④ $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PM} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \quad (\because \text{①})$

⑤ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

0299 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로 세 중선을 각 꼭짓점으로부터 2:1로 내분한다.

$\therefore \overrightarrow{GR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BR} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AB})$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right)$

$= -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$

답 $-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$

0300 ㄱ. $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE}$
 $= \overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{OE}$ (참)

ㄴ. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}$
 $= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (참)

ㄷ. $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BO} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO})$
 $= 2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

0301 오른쪽 그림과 같이 한 정육각형의 대각선의 교점을 E라 하면

$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PQ}$
 $= 3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE}$
 $= 3\vec{a} + (\vec{a} + \vec{b})$
 $= 4\vec{a} + \vec{b}$

또, $\overrightarrow{PR} = 2\overrightarrow{OB} = 2\vec{b}$ 이므로

$\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PR} = (4\vec{a} + \vec{b}) + 2\vec{b} = 4\vec{a} + 3\vec{b}$

답 $4\vec{a} + 3\vec{b}$

0302 $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\vec{a}$ 이므로

$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b}\right)$

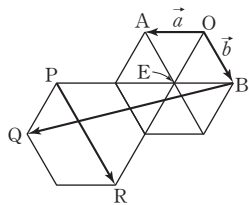
$= \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

또, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ 이므로

$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DC} = \left(\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) - \vec{a}$

$= -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

답 ①



0303 $(2m-n)\vec{a} - (m+4n)\vec{b} = 3(\vec{a} - 2\vec{b})$ 에서
 $(2m-n)\vec{a} - (m+4n)\vec{b} = 3\vec{a} - 6\vec{b}$

이때 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 평행하지 않으므로

$2m-n=3, m+4n=6$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$m=2, n=1 \quad \therefore m^2+n^2=5$

답 5

0304 $(m+n)\vec{a} + 2(m-2n)\vec{b} = -2m\vec{a} + (m-3n+4)\vec{b}$
 에서

$(m+n)\vec{a} + (2m-4n)\vec{b} = -2m\vec{a} + (m-3n+4)\vec{b}$

이때 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 평행하지 않으므로

$m+n=-2m, 2m-4n=m-3n+4$

$\therefore 3m+n=0, m-n=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$m=1, n=-3 \quad \therefore m+n=-2$

답 ②

0305 $(x^2-x)\vec{a} + (x+2y)\vec{b} = (7-x+y^2)\vec{a} + (1+y)\vec{b}$

에서 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 평행하지 않으므로

$x^2-x=7-x+y^2$, 즉 $x^2=7+y^2$ ㉠

$x+2y=1+y$, 즉 $y=1-x$ ㉡

..... ㉢

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^2=7+(1-x)^2, 2x=8 \quad \therefore x=4$

$x=4$ 를 ㉡에 대입하면 $y=-3$

..... ㉣

$\therefore xy=-12$

..... ㉤

답 -12

단계	채점요소	배점
㉠	x, y 에 대한 방정식 세우기	50%
㉡	x, y 의 값 구하기	40%
㉢	xy 의 값 구하기	10%

0306 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$
 $= (\vec{a} - 2\vec{b}) - (2\vec{a} - 3\vec{b})$
 $= -\vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$
 $= (k\vec{a} + \vec{b}) - (2\vec{a} - 3\vec{b})$
 $= (k-2)\vec{a} + 4\vec{b}$

$\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB}$ 에서 $(k-2)\vec{a} + 4\vec{b} = -m\vec{a} + m\vec{b}$

이때 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 평행하지 않으므로

$k-2=-m, 4=m \quad \therefore m=4, k=-2$

답 ①

0307 $\vec{p} + \vec{q} = (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} + 3\vec{b}) = 2\vec{a} + 4\vec{b}$
 $\vec{r} - \vec{q} = (2\vec{a} + k\vec{b}) - (\vec{a} + 3\vec{b}) = \vec{a} + (k-3)\vec{b}$

두 벡터 $\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{r} - \vec{q}$ 가 서로 평행하므로
 $\vec{r} - \vec{q} = t(\vec{p} + \vec{q})$ ($t \neq 0$)라 하면
 $\vec{a} + (k-3)\vec{b} = 2t\vec{a} + 4t\vec{b}$
 이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 서로 평행하지 않으므로
 $1 = 2t, k-3 = 4t$
 $\therefore t = \frac{1}{2}, k = 5$

답 5

0308 두 벡터 $2\vec{a} + m\vec{b}$, $m\vec{a} + 8\vec{b}$ 가 서로 평행하므로
 $2\vec{a} + m\vec{b} = k(m\vec{a} + 8\vec{b})$ ($k \neq 0$)라 하면
 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 서로 평행하지 않으므로
 $2 = km, m = 8k$
 $k = \frac{m}{8}$ 을 $2 = km$ 에 대입하여 정리하면
 $m^2 = 16 \quad \therefore m = 4$ ($\because m > 0$)

답 3

0309 $\vec{OC} = 4\vec{OA} - \vec{OB} = 4\vec{a} - \vec{b}$ 이므로
 $\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (4\vec{a} - \vec{b}) - \vec{a}$
 $= 3\vec{a} - \vec{b}$
 $\neg$, $6\vec{a} - 2\vec{b} = 2(3\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{AC}$
 $\perp$, $-3\vec{a} + \vec{b} = -(3\vec{a} - \vec{b}) = -\vec{AC}$
 $\sqsubset$, $-5\vec{a} + \frac{5}{3}\vec{b} = -\frac{5}{3}(3\vec{a} - \vec{b}) = -\frac{5}{3}\vec{AC}$
 따라서 벡터 $\vec{AC}$ 와 평행한 벡터는 $\neg$, $\perp$, $\sqsubset$ 이다.

답 $\neg, \perp, \sqsubset$

0310 $\vec{x} + 3\vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$ 에서 $\vec{x} = -2\vec{a} + \vec{b}$
 $\vec{x} + \vec{y} = m(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b}$ 에서
 $\vec{y} = m(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} - \vec{x}$
 $= m(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} - (-2\vec{a} + \vec{b})$
 $= (m+2)\vec{a} - m\vec{b}$

가

두 벡터 $\vec{x}$, $\vec{y}$ 가 서로 평행하므로
 $\vec{y} = k\vec{x}$ ($k \neq 0$)라 하면
 $(m+2)\vec{a} - m\vec{b} = k(-2\vec{a} + \vec{b})$

나

이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 서로 평행하지 않으므로
 $m+2 = -2k, -m = k$
 $\therefore m = 2, k = -2$

다

답 2

단계	채점요소	배점
가	$\vec{x}, \vec{y}$ 를 $\vec{a}, \vec{b}$ 로 나타내기	30%
나	$\vec{x}, \vec{y}$ 가 서로 평행함을 이용하여 식 세우기	40%
다	실수 m 의 값 구하기	30%

0311 $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (2\vec{a} - \vec{b}) - (\vec{a} - 2\vec{b})$
 $= \vec{a} + \vec{b}$

$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (5\vec{a} + k\vec{b}) - (\vec{a} - 2\vec{b})$
 $= 4\vec{a} + (k+2)\vec{b}$

두 벡터 $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ 가 서로 평행하므로

$\vec{AC} = t\vec{AB}$ ($t \neq 0$)라 하면

$4\vec{a} + (k+2)\vec{b} = t\vec{a} + t\vec{b}$

이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 서로 평행하지 않으므로

$4 = t, k+2 = t \quad \therefore t = 4, k = 2$

답 2

0312 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$\vec{AC} = t\vec{AB}$ ($t \neq 0$)이어야 하므로

$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (2\vec{a} - k\vec{b}) - (\vec{a} + \vec{b})$
 $= \vec{a} - (k+1)\vec{b}$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (3\vec{a} + 7\vec{b}) - (\vec{a} + \vec{b})$
 $= 2\vec{a} + 6\vec{b}$

에서 $\vec{a} - (k+1)\vec{b} = 2t\vec{a} + 6t\vec{b}$

이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 서로 평행하지 않으므로

$1 = 2t, -k-1 = 6t$

$\therefore t = \frac{1}{2}, k = -4$

답 5

0313 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$\vec{AC} = k\vec{AB}$ ($k \neq 0$)이어야 하므로

$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (3\vec{a} + m\vec{b}) - \vec{a}$
 $= 2\vec{a} + m\vec{b}$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$

에서 $2\vec{a} + m\vec{b} = -k\vec{a} + k\vec{b}$

이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 서로 평행하지 않으므로

$2 = -k, m = k$

$\therefore k = -2, m = -2$

답 2

0314 세 점 A, B, X가 한 직선 위에 있으려면

$\vec{AX} = k\vec{AB}$ ($k \neq 0$)인 실수 k 가 존재해야 한다.

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$

$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3} - \vec{a}$

$= \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{3}\vec{AB}$

$\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA} = \frac{\vec{a} - 3\vec{b}}{4} - \vec{a}$

$= -\frac{3}{4}(\vec{a} + \vec{b})$

$\vec{AE} = \vec{OE} - \vec{OA} = \frac{3\vec{a} - \vec{b}}{2} - \vec{a}$

$= -\frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = -\frac{1}{2}\vec{AB}$

따라서 직선 AB 위의 점은 C, E이다.

답 3

0315 오른쪽 그림과 같이 정사각형

OACB를 그리면

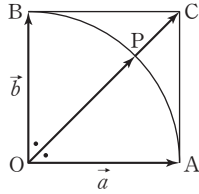
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$$

또, 세 점 O, P, C는 한 직선 위에 있고

$$\overrightarrow{OP} = 2, \overrightarrow{OC} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{2\sqrt{2}} \overrightarrow{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{a} + \vec{b})$$

$$\therefore m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0316 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \quad (k \neq 0) \text{ 이어야 하므로}$$

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

$$\{(3-t)\overrightarrow{OA} + 2t\overrightarrow{OB}\} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

$$(2-t)\overrightarrow{OA} + 2t\overrightarrow{OB} = -k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}$$

이때 두 벡터 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 가 서로 평행하지 않으므로

$$2-t = -k, 2t = k$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$t = -2, k = -4$$

답 -2

다른풀이 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$$\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} \quad (m+n=1) \text{ 이어야 한다.}$$

$$\overrightarrow{OC} = (3-t)\overrightarrow{OA} + 2t\overrightarrow{OB} \text{에서}$$

$$3-t+2t=1 \quad \therefore t = -2$$

0317 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 라 하자.

세 점 A, P, D가 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AD} \quad (k \neq 0) \text{ 라 하면}$$

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OP} - \vec{a} = k\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right)$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = (1-k)\vec{a} + \frac{k}{2}\vec{b}$$

..... ㉠

또, 세 점 B, P, C가 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{BP} = l\overrightarrow{BC} \quad (l \neq 0) \text{ 라 하면}$$

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = l(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$$

$$\overrightarrow{OP} - \vec{b} = l\left(\frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b}\right)$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = \frac{2l}{3}\vec{a} + (1-l)\vec{b}$$

..... ㉡

$$\text{㉠, ㉡에서 } 1-k = \frac{2l}{3}, \frac{k}{2} = 1-l$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$k = \frac{1}{2}, l = \frac{3}{4}$$

$$\text{따라서 } \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} \text{ 이므로}$$

$$m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{4}$$

$$\therefore 4(m+n) = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 3$$

답 3

046 정답과 풀이

유형 lp

본문 48쪽

$$\begin{aligned} 0318 \quad \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} &= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} \\ &= 3\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } |\overrightarrow{AC}| = \overrightarrow{AC} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$|\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}| = 3|\overrightarrow{AC}| = 3 \times 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

답 ④

$$\begin{aligned} 0319 \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} &= (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \\ &= 2\overrightarrow{CB} \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}| = 2|\overrightarrow{CB}| = 2$$

답 2

$$\begin{aligned} 0320 \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} &= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA}) \\ &= (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}) - 4\overrightarrow{OA} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0} \text{에서}$$

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = -\overrightarrow{OA} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}) - 4\overrightarrow{OA} &= -\overrightarrow{OA} - 4\overrightarrow{OA} \\ &= -5\overrightarrow{OA} \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}| = |-5\overrightarrow{OA}| = 5|\overrightarrow{OA}|$$

$$= 5 \times 2 = 10$$

답 ⑤

$$0321 \quad \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{F'O} \text{이므로}$$

$$|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF}| = |\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{F'O}|$$

$$= |\overrightarrow{F'O} + \overrightarrow{OP}|$$

$$= |\overrightarrow{F'P}|$$

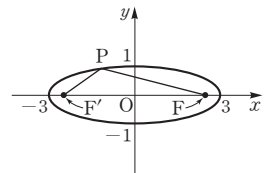
$$\therefore |\overrightarrow{F'P}| = |\overrightarrow{PF'}| = 2$$

한편, 타원의 정의에 의하여 $\overrightarrow{PF'} + \overrightarrow{PF} = 2 \times 3 = 6$ 이므로

$$|\overrightarrow{PF'}| + |\overrightarrow{PF}| = 6$$

$$2 + |\overrightarrow{PF}| = 6 \quad \therefore |\overrightarrow{PF}| = 4$$

답 4



0322 강물이 동쪽에서 서쪽으로 분속 30 m

의 속력으로 흐르고 있으므로 A 지점에서 정북

쪽에 있는 B 지점에 도착하기 위해서는

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} \text{를 만족시키는 C 지점을 향}$$

해 배가 이동해야 한다.

흐르는 강물에서의 배의 속력은

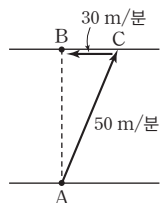
$$|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40 \text{ (m/분)}$$

이므로 배가 B 지점에 도착하는 데 걸리는 시간은

$$\frac{200}{40} = 5 \text{ (분)}$$

따라서 배는 5분 후에 B 지점에 도착한다.

답 5분



0323 오른쪽 그림과 같이 정사각형 ACBD'

을 그리면

$$\vec{CA} + \vec{CB} = \vec{CD'} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

그런데 점 C를 중심으로 세 점 A, B, D의 방향으로 작용하는 힘의 합이 0이므로

$$\vec{CA} + \vec{CB} + \vec{CD} = \vec{0} \\ \therefore \vec{CA} + \vec{CB} = -\vec{CD} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \vec{CD'} = -\vec{CD}$$

$$\therefore |\vec{CD'}| = |-\vec{CD}| = 60$$

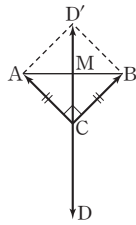
두 대각선 AB, CD'의 교점을 M이라 하면 점 M은 CD'의 중점
이므로

$$|\vec{CM}| = 30$$

이때 삼각형 ACM은 직각이등변삼각형이므로

$$|\vec{CA}| = \sqrt{2}|\vec{CM}| = 30\sqrt{2}$$

따라서 밧줄 CA에 걸리는 힘의 크기는 $30\sqrt{2}$ kg중이다.



0324 (1) 오른쪽 그림에서 흐르는 강물에

서의 배의 속력은

$$\sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ (km/시)}$$

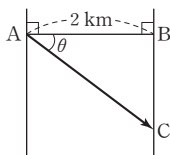
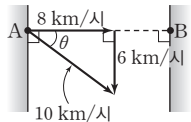
$\vec{AB}$ 와 배가 실제로 움직이는 방향이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\tan \theta = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

실제로 배가 도착한 지점을 C라 하면

$$\vec{BC} = 2 \tan \theta = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \text{ (km)}$$

따라서 B 지점으로부터 $\frac{3}{2}$ km 떨어진 곳에 도착한다.



(2) 배가 실제로 움직인 거리는

$$\vec{AC} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2} \text{ (km)}$$

따라서 배가 강을 건너는 데 걸리는 시간은

$$\frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{10}} = \frac{1}{4} \text{ (시간)}, \text{ 즉 } \frac{1}{4} \times 60 = 15 \text{ (분)}$$

답 (1) $\frac{3}{2}$ km (2) 15분

시험에 꼭 나오는 문제

본문 49~51쪽

0325 $\vec{AP} = -2\vec{BP}$ 이므로 두 벡터 $\vec{AP}$, $\vec{BP}$ 는 서로 방향이 반대이고 $\vec{AP} = 2\vec{BP}$ 이다.

이때 $\vec{AB} = \vec{AP} + \vec{BP} = 3\vec{BP} = 12$ 이므로

$$\vec{BP} = 4$$

$$\therefore |\vec{AP}| = \vec{AP} = 2\vec{BP} = 2 \times 4 = 8$$

답 8

0326 ㄱ. 두 벡터 $\vec{OA}$, $\vec{EF}$ 는 크기와 방향이 각각 같으므로

$$\vec{OA} = \vec{EF} \text{ (참)}$$

ㄴ. 두 벡터 $\vec{OB}$, $\vec{CD}$ 는 크기는 같지만 방향이 서로 반대이므로

$$\vec{OB} = -\vec{CD} \text{ (참)}$$

ㄷ. 두 선분 OE와 DF가 만나는 점을 M이라 하면 $\vec{DM}$ 은 정삼각형 ODE의 높이
이므로

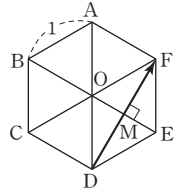
$$\vec{DM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore |\vec{DF}| = 2|\vec{DM}| = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{3} \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③



0327 ② $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{AC} + \vec{CA} = \vec{AA} = \vec{0}$

$$\textcircled{3} \vec{BA} + \vec{AD} - \vec{BC} = \vec{BD} - \vec{BC} = \vec{CD}$$

$$\textcircled{4} \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{CB} - \vec{CD} = \vec{DB} \text{이므로}$$

$$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$$

$$\textcircled{5} \vec{CD} + \vec{DA} + \vec{AB} + \vec{BD} + \vec{DB} = \vec{CA} + \vec{AD} + \vec{DB} \\ = \vec{CD} + \vec{DB} = \vec{CB}$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

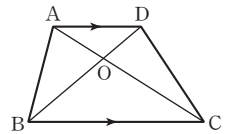
0328 $2\vec{OA} - \vec{OB} = 2\vec{OD} - \vec{OC}$ 에서

$$2(\vec{OA} - \vec{OD}) = \vec{OB} - \vec{OC} \quad \therefore 2\vec{DA} = \vec{CB}$$

즉, $2\vec{AD} = \vec{BC}$ 이므로 벡터 $\vec{AD}$ 와 벡터 $\vec{BC}$ 는 서로 평행하고,

$$|\vec{AD}| = \frac{1}{2}|\vec{BC}| \text{이다.}$$

따라서 사각형 ABCD는 오른쪽 그림과 같은 사다리꼴이다.



답 ①

0329 $2(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{x}) = 3(\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{x})$ 에서

$$2\vec{a} - 4\vec{b} + 2\vec{x} = 3\vec{a} - 6\vec{b} + 6\vec{x}$$

$$4\vec{x} = -\vec{a} + 2\vec{b} \quad \therefore \vec{x} = -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

따라서 $m = -\frac{1}{4}$, $n = \frac{1}{2}$ 이므로

$$m + n = \frac{1}{4}$$

답 ③

0330 $\vec{OE} = -\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{OF} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ 이므로

$$\vec{OE} + \vec{OF} = (-\vec{a} + 2\vec{b}) + (2\vec{a} + 3\vec{b})$$

$$= \vec{a} + 5\vec{b}$$

답 $\vec{a} + 5\vec{b}$

0331 $\vec{FC} = 2\vec{AB} = 2\vec{a}$ 이므로 $\vec{CF} = -2\vec{a}$

$$\vec{AD} = 2\vec{BC} = 2(\vec{AC} - \vec{AB}) = 2(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\therefore \vec{CF} + \vec{AD} = -2\vec{a} + 2(\vec{b} - \vec{a}) = -4\vec{a} + 2\vec{b}$$

답 ②

0332 오른쪽 그림과 같이 정육각형의 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O라 하면

$$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

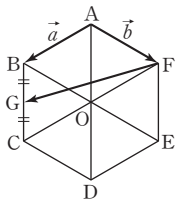
이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FG} &= \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} \\ &= -\vec{b} + \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\end{aligned}$$

따라서 $m = \frac{3}{2}$, $n = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$m - n = 2$$

답 2



0333 오른쪽 그림의 삼각형 ABD에서 세 점 E, G, H는 각각 선분 AB, AD, BD의 중점이므로 삼각형의 중점연결정리에 의하여

$$\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BH}$$

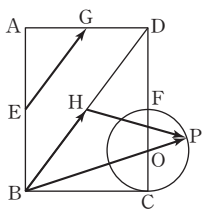
$$\therefore |\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HP}| = |\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HP}| = |\overrightarrow{BP}|$$

이때 $|\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HP}|$ 의 최댓값은 $|\overrightarrow{BP}|$ 의 최댓값과 같으므로 점 B에서 원 위의 점 P에 이르는 거리의 최댓값과 같다.

따라서 원의 중심을 O라 하면 구하는 최댓값은

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OP} &= \sqrt{6^2 + 2^2} + 2 \leftarrow \overrightarrow{FC} = 40 \text{이므로 } \overrightarrow{OC} = 2 \\ &= 2 + 2\sqrt{10}\end{aligned}$$

답 ②



0334 $m(\vec{a} - \vec{b}) + n(3\vec{a} - 2\vec{b}) - \vec{b} = n\vec{a} + m(-\vec{a} + 2\vec{b})$ 에서 $(m + 3n)\vec{a} - (m + 2n + 1)\vec{b} = (-m + n)\vec{a} + 2m\vec{b}$

이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 서로 평행하지 않으므로

$$m + 3n = -m + n, -(m + 2n + 1) = 2m$$

$$\therefore m + n = 0, 3m + 2n + 1 = 0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$m = -1, n = 1$$

$$\therefore m - n = -2$$

답 ②

$$\begin{aligned}\vec{p} + \vec{q} &= (\vec{a} - \vec{b}) + (m\vec{a} + 3\vec{b}) \\ &= (m + 1)\vec{a} + 2\vec{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{q} - \vec{r} &= (m\vec{a} + 3\vec{b}) - (2\vec{a} - 5\vec{b}) \\ &= (m - 2)\vec{a} + 8\vec{b}\end{aligned}$$

두 벡터 $\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{q} - \vec{r}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{q} - \vec{r} = k(\vec{p} + \vec{q}) \quad (k \neq 0) \text{라 하면}$$

$$(m - 2)\vec{a} + 8\vec{b} = k(m + 1)\vec{a} + 2k\vec{b}$$

이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 서로 평행하지 않으므로

$$m - 2 = k(m + 1), 8 = 2k$$

$$\therefore k = 4, m = -2$$

답 ①

0336 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \quad (k \neq 0) \text{이어야 하므로}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (\vec{a} + t\vec{b}) - (-3\vec{a} - \vec{b}) \\ &= 4\vec{a} + (t + 1)\vec{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (5\vec{a} - 3\vec{b}) - (-3\vec{a} - \vec{b}) \\ &= 8\vec{a} - 2\vec{b}\end{aligned}$$

$$\text{에서 } 4\vec{a} + (t + 1)\vec{b} = 8k\vec{a} - 2k\vec{b}$$

이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 서로 평행하지 않으므로

$$4 = 8k, t + 1 = -2k$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}, t = -2$$

답 -2

$$\begin{aligned}\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BD} \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}) + 2\overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{BD} \\ &= -\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{BD}\end{aligned}$$

$$\text{이때 } |\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}| = 2 \text{이므로 } |\overrightarrow{BD}| = 2$$

따라서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 k라 하면 대각선의 길이가 2이므로

$$\sqrt{2}k = 2 \quad \therefore k = \sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

0338 오른쪽 그림과 같이 정육각형의 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O라 하면

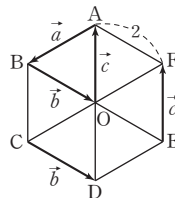
$$\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{CO} = \vec{b}, \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OF} = \vec{c}$$

$$\therefore \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

$$\text{즉, } \vec{a} + \vec{b} = -\vec{c} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}|\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}| &= |-\vec{c} - 3\vec{c}| = |-4\vec{c}| \\ &= 4|\vec{c}| = 4 \times 2 = 8\end{aligned}$$

답 8



0339 선분 BD의 중점을 M, 선분 EF의 중점을 N이라 하면

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NF}$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NE}$$

$$\text{이때 } \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DM} = \vec{0}, \overrightarrow{NF} + \overrightarrow{NE} = \vec{0} \text{이므로}$$

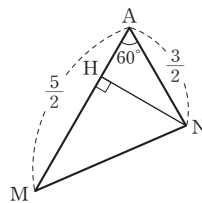
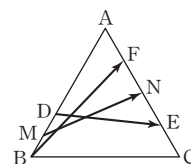
$$\begin{aligned}\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE} &= (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NF}) + (\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NE}) \\ &= (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DM}) + (\overrightarrow{NF} + \overrightarrow{NE}) + 2\overrightarrow{MN} \\ &= 2\overrightarrow{MN}\end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2 = |2\overrightarrow{MN}|^2 = 4\overrightarrow{MN}^2$$

$$\text{한편, } \overrightarrow{AM} = \frac{5}{2}, \overrightarrow{AN} = \frac{3}{2} \text{이고}$$

$\angle MAN = 60^\circ$ 이므로 오른쪽 그림과 같이 점 N에서 $\overrightarrow{AM}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}, \overrightarrow{HN} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$



따라서 $\overline{HM} = \frac{5}{2} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ 이므로 직각삼각형 MNH에서

$$\overline{MN}^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{19}{4}$$

$$\therefore |\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2 = 4\overline{MN}^2 = 4 \times \frac{19}{4} = 19$$

답 ③

0340 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB}$ 에서

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}$$

$$2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}, 2\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PC}$$

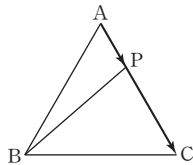
$$\therefore |\overrightarrow{AP}| : |\overrightarrow{PC}| = 1 : 2$$

따라서 오른쪽 그림에서

$$\triangle PAB : \triangle PBC = 1 : 2$$

이므로

$$\triangle PBC = 2\triangle PAB = 2 \times 6 = 12$$



답 12

단계	채점요소	배점
㉠	$ \overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PC} $ 구하기	60 %
㉡	삼각형 PBC의 넓이 구하기	40 %

0341 오른쪽 그림에서

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OQ} \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OQ} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OP}$$

$$= \vec{q} - \frac{1}{2}\vec{p}$$

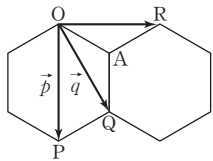
$$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \vec{q} - \vec{p}$$

$$\therefore \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AR} = \left(\vec{q} - \frac{1}{2}\vec{p}\right) + (\vec{q} - \vec{p})$$

$$= -\frac{3}{2}\vec{p} + 2\vec{q}$$

따라서 $m = -\frac{3}{2}$, $n = 2$ 이므로

$$mn = -3$$



답 -3

단계	채점요소	배점
㉠	$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AR}$ 를 $\vec{p}$, $\vec{q}$ 로 나타내기	60 %
㉡	$\overrightarrow{OR}$ 를 $\vec{p}$, $\vec{q}$ 로 나타내기	30 %
㉢	mn 의 값 구하기	10 %

$$\begin{aligned} 0342 \quad \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (-2\vec{a} + 3\vec{b}) - (3\vec{a} + \vec{b}) \\ &= -5\vec{a} + 2\vec{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{RS} &= \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR} = \{(m+3)\vec{a} + \vec{b}\} - (-5\vec{a} + m\vec{b}) \\ &= (m+8)\vec{a} + (1-m)\vec{b} \end{aligned}$$

두 벡터 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ 가 서로 평행하므로

$$\overrightarrow{RS} = k\overrightarrow{PQ} \quad (k \neq 0) \text{라 하면}$$

$$(m+8)\vec{a} + (1-m)\vec{b} = -5k\vec{a} + 2k\vec{b}$$

이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 서로 평행하지 않으므로

$$m+8 = -5k, 1-m = 2k$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$k = -3, m = 7$$

㉠

㉡

㉢

답 7

단계	채점요소	배점
㉠	$\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ 를 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 로 나타내기	30 %
㉡	$\overrightarrow{RS} = k\overrightarrow{PQ}$ 로 놓고 k , m 사이의 관계식 구하기	50 %
㉢	실수 m 의 값 구하기	20 %

0343 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

$$\begin{aligned} &= (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) \\ &\quad + (\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA}) \end{aligned}$$

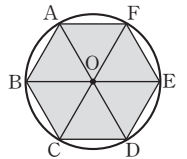
$$= (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}) - 3\overrightarrow{OA}$$

$$= \{(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}) + \overrightarrow{OD}\} - 3\overrightarrow{OA}$$

$$= 2\overrightarrow{OD} - 3\overrightarrow{OA}$$

$$= -2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OA}$$

$$= -5\overrightarrow{OA}$$



$$\therefore |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}| = |-5\overrightarrow{OA}|$$

$$= 5|\overrightarrow{OA}| = 30$$

$$\therefore |\overrightarrow{OA}| = 6$$

이때 삼각형 OAB는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이므로

$$\triangle OAB = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 9\sqrt{3}$$

따라서 구하는 정육각형의 넓이는

$$6 \times 9\sqrt{3} = 54\sqrt{3}$$

답 $54\sqrt{3}$

단계	채점요소	배점
㉠	$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ 를 $\overrightarrow{OA}$ 로 나타내기	50 %
㉡	$ \overrightarrow{OA} $ 구하기	30 %
㉢	정육각형의 넓이 구하기	20 %

04 평면벡터의 성분과 내적

0344 오른쪽 그림과 같이 두 점 S, T를 정하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TR} \\ &= \overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OS} \\ &= (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{OS} \\ &= (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) \\ &= -\frac{5}{4}\overrightarrow{OP} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OQ}\end{aligned}$$

따라서 $m = -\frac{5}{4}$, $n = \frac{3}{4}$ 이므로

$$m+n = -\frac{1}{2}$$

답 ②

0345 $|\overrightarrow{C_1P} + \overrightarrow{C_1Q} + \overrightarrow{C_2Q} - \overrightarrow{C_2P}|$

$$\begin{aligned}&= |\overrightarrow{C_1P} + \overrightarrow{C_1Q} + \overrightarrow{PQ}| \\ &= |(\overrightarrow{C_1P} + \overrightarrow{PQ}) + \overrightarrow{C_1Q}| \\ &= |\overrightarrow{C_1Q} + \overrightarrow{C_1Q}| \\ &= |2\overrightarrow{C_1Q}| = 2|\overrightarrow{C_1Q}|\end{aligned}$$

오른쪽 그림과 같이 점 C_1 에서 $\overrightarrow{C_2Q}$ 의 연장선에 내린 수선의 발을 R라 하면 직각삼각형 C_1RC_2 에서

$$\overrightarrow{C_1R} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

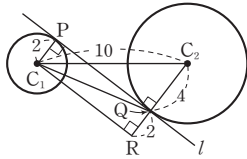
이므로 직각삼각형 C_1RQ 에서

$$\overrightarrow{C_1Q} = \sqrt{8^2 + 2^2} = 2\sqrt{17}$$

따라서 $|\overrightarrow{C_1Q}| = 2\sqrt{17}$ 이므로

$$|\overrightarrow{C_1P} + \overrightarrow{C_1Q} + \overrightarrow{C_2Q} - \overrightarrow{C_2P}| = 2|\overrightarrow{C_1Q}| = 4\sqrt{17}$$

답 ⑤



0346 $|\overrightarrow{OP}| = \frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OA}|} = 1$ 이고 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{|\overrightarrow{OA}|} \times \overrightarrow{OA}$ 이므로

$\overrightarrow{OP}$ 는 벡터 $\overrightarrow{OA}$ 와 방향이 같고 크기가 1인 벡터이다.

오른쪽 그림과 같이

원 $(x-1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 1$ 의 중심을

Q, 원점 O에서 원에 그은 접선의 접점을

R라 하면

$$\angle ORQ = 90^\circ, \overrightarrow{QR} = 1, \overrightarrow{OR} = \sqrt{3}$$

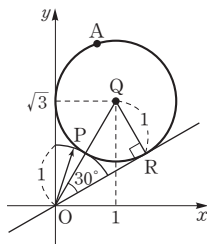
이므로 직각삼각형 ORQ에서

$$\overrightarrow{OQ} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\therefore \angle QOR = 30^\circ$$

따라서 점 P가 나타내는 도형의 길이는 반지름의 길이가 1, 중심각의 크기가 60° 인 부채꼴의 호의 길이와 같으므로

$$2\pi \times 1 \times \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{3}$$

답 $\frac{\pi}{3}$ 

교과서 문제 정복하기

본문 53쪽, 55쪽

0347 (1) $\overrightarrow{BC} = (2\vec{a} - 3\vec{b}) - \vec{b} = 2\vec{a} - 4\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{CA} = \vec{a} - (2\vec{a} - 3\vec{b}) = -\vec{a} + 3\vec{b}$

답 (1) $2\vec{a} - 4\vec{b}$ (2) $-\vec{a} + 3\vec{b}$

0348 $\vec{p} = \frac{3\vec{b} + 2\vec{a}}{3+2} = \frac{2\vec{a} + 3\vec{b}}{5}$

답 $\frac{2\vec{a} + 3\vec{b}}{5}$

0349 $\vec{q} = \frac{2\vec{b} - \vec{a}}{2-1} = -\vec{a} + 2\vec{b}$

답 $-\vec{a} + 2\vec{b}$

0350 $\vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

답 $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

0351 답 (2, -3)

0352 답 (-1, -5)

0353 답 $3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$

0354 답 $-4\vec{e}_1 + 9\vec{e}_2$

0355 $|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

답 $\sqrt{13}$

0356 $|\vec{b}| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13$

답 13

0357 $3 = n - 2$, $m - 1 = 4$ 이므로

$$n = 5, m = 5$$

답 $m = 5, n = 5$

0358 $2m + 1 = 5$, $3 = n + 1$ 이므로

$$m = 2, n = 2$$

답 $m = 2, n = 2$

0359 (1) $3\vec{a} + \vec{b} = 3(-2, 3) + (4, 2) = (-2, 11)$

(2) $-2\vec{a} - \vec{b} = -2(-2, 3) - (4, 2) = (0, -8)$

답 (1) $(-2, 11)$ (2) $(0, -8)$

0360 $\overrightarrow{AB} = (2, 1) - (3, -1) = (-1, 2)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

답 $\overrightarrow{AB} = (-1, 2), |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}$

0361 $\overrightarrow{AB} = (-6, 8) - (-3, 4) = (-3, 4)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

답 $\overrightarrow{AB} = (-3, 4), |\overrightarrow{AB}| = 5$

0362 (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ$

$= 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}| \cos (180^\circ - 120^\circ)$

$= -3 \times 4 \times \frac{1}{2} = -6$

답 (1) $6\sqrt{2}$ (2) -6

0363 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 3 + (-3) \times 2 = -3$

답 -3

0364 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times (-2) + (-1) \times 4 = -8$

답 -8

0365 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 5 + \sqrt{3} \times 0 = 5 \geq 0$ 이므로

$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \sqrt{5^2 + 0^2}} = \frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

0366 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 4 + 4 \times (-3) = 0 \geq 0$ 이므로

$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{0}{\sqrt{3^2 + 4^2} \sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 0$

답 0

0367 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \times 2 + 3 \times (-1) = -5 < 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 θ ($90^\circ < \theta \leq 180^\circ$)라 하면

$\cos (180^\circ - \theta) = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = -\frac{-5}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2}}$
 $= \frac{5}{\sqrt{10} \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $180^\circ - \theta = 45^\circ$ 이므로 $\theta = 135^\circ$

답 135°

0368 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 에서 $(3, 2) \cdot (k, 6) = 0$

$3 \times k + 2 \times 6 = 0, 3k = -12 \quad \therefore k = -4$

답 -4

0369 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 에서 $(2k, -3) \cdot (-1, 2) = 0$

$2k \times (-1) + (-3) \times 2 = 0, 2k = -6$

$\therefore k = -3$

답 -3

0370 $\vec{b} = t\vec{a}$ ($t \neq 0$)라 하면 $(k, \frac{1}{2}) = t(4, 1)$

$k = 4t, \frac{1}{2} = t \quad \therefore t = \frac{1}{2}, k = 2$

답 2

0371 $\vec{b} = t\vec{a}$ ($t \neq 0$)라 하면 $(-2, k) = t(1, -1)$

$-2 = t, k = -t \quad \therefore t = -2, k = 2$

답 2

0372 답 $\frac{x-7}{2} = \frac{y+2}{3}$

0373 답 $x = 3$

0374 $\frac{x-5}{6-5} = \frac{y-(-1)}{2-(-1)}$ 에서 $x-5 = \frac{y+1}{3}$

답 $x-5 = \frac{y+1}{3}$

0375 $\frac{x-(-2)}{3-(-2)} = \frac{y-4}{1-4}$ 에서 $\frac{x+2}{5} = \frac{4-y}{3}$

답 $\frac{x+2}{5} = \frac{4-y}{3}$

0376 $(x+2) - 5(y-3) = 0$ 에서 $x-5y+17=0$

답 $x-5y+17=0$

0377 $3(x-4) + 4(y-2) = 0$ 에서 $3x+4y-20=0$

답 $3x+4y-20=0$

0378 두 직선 $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{2}, \frac{x+3}{-2} = \frac{y-2}{3}$ 의 방향벡터를 각

각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$\vec{u} = (3, 2), \vec{v} = (-2, 3)$

$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|3 \times (-2) + 2 \times 3|}{\sqrt{3^2 + 2^2} \sqrt{(-2)^2 + 3^2}} = 0$

답 0

0379 두 직선 $x-1 = \frac{y-2}{2}, \frac{x-2}{2} = y$ 의 방향벡터를 각각

$\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$\vec{u} = (1, 2), \vec{v} = (2, 1)$

$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|1 \times 2 + 2 \times 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{4}{5}$

답 $\frac{4}{5}$

0380 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$\vec{u} = (a, -2), \vec{v} = (-5, 1)$

(1) 두 직선이 서로 수직이면 두 벡터 $\vec{u}, \vec{v}$ 도 서로 수직이므로

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ 에서 $(a, -2) \cdot (-5, 1) = 0$

$a \times (-5) + (-2) \times 1 = 0, 5a = -2 \quad \therefore a = -\frac{2}{5}$

- (2) 두 직선이 서로 평행하면 두 벡터 $\vec{u}, \vec{v}$ 도 서로 평행하므로
 $\vec{u} = k\vec{v}$ ($k \neq 0$)라 하면
 $(a, -2) = k(-5, 1)$
 $a = -5k, -2 = k \quad \therefore k = -2, a = 10$

답 (1) $-\frac{2}{5}$ (2) 10

- 0381** (1) $\vec{p} - \vec{c} = (x, y) - (2, 3) = (x-2, y-3)$ 이므로
 $|\vec{p} - \vec{c}| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = 1$
 $\therefore (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$
(2) $|\vec{p}| = \sqrt{x^2 + y^2} = 3$ 이므로 $x^2 + y^2 = 9$

답 (1) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ (2) $x^2 + y^2 = 9$

유형 익히기

본문 56~65쪽

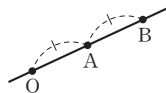
- 0382** $2\vec{AB} - \vec{BC} = 2(\vec{OB} - \vec{OA}) - (\vec{OC} - \vec{OB})$
 $= 2(\vec{b} - \vec{a}) - (\vec{c} - \vec{b})$
 $= -2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$

따라서 $x = -2, y = 3, z = -1$ 이므로
 $xyz = 6$

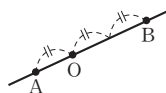
답 6

- 0383** $2\vec{OA} = \vec{OB}$ 인 경우는 다음의 두 가지 경우가 있다.

- (i) 오른쪽 그림과 같이
 $\vec{OB} = 2\vec{OA} = 2\vec{a}$ 일 때
 $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = 2\vec{a} - \vec{a} = \vec{a}$
 $\therefore k = 1$



- (ii) 오른쪽 그림과 같이
 $\vec{OB} = -2\vec{OA} = -2\vec{a}$ 일 때
 $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = -2\vec{a} - \vec{a} = -3\vec{a}$
 $\therefore k = -3$



- (i), (ii)에서 모든 실수 k 의 값의 곱은
 $1 \times (-3) = -3$

답 -3

- 0384** $\triangle APC$ 에서 $\vec{CQ} : \vec{QP} = 1 : 2$ 이므로

$$\vec{AQ} = \frac{1 \times \vec{AP} + 2 \times \vec{AC}}{1+2} = \frac{1}{3} \vec{AP} + \frac{2}{3} \vec{AC}$$

이때

$$\vec{AP} = \frac{2}{5} \vec{AB} = \frac{2}{5} (\vec{CB} - \vec{CA}) = \frac{2}{5} (\vec{b} - \vec{a})$$

$$\vec{AC} = -\vec{CA} = -\vec{a}$$

이므로

$$\begin{aligned} \vec{AQ} &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} (\vec{b} - \vec{a}) + \frac{2}{3} \times (-\vec{a}) \\ &= -\frac{4}{5} \vec{a} + \frac{2}{15} \vec{b} \end{aligned}$$

따라서 $x = -\frac{4}{5}, y = \frac{2}{15}$ 이므로

$$x + y = -\frac{2}{3}$$

답 $-\frac{2}{3}$

- 0385** $\vec{OP} = \frac{2}{3} \vec{a}, \vec{OQ} = \frac{1}{3} \vec{b}$ 이므로

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OP} + \vec{OQ}}{2} = \frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{6} \vec{b}$$

답 $\frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{6} \vec{b}$

- 0386** $\square ABCD$ 가 평행사변형이면 두 대각선 AC, BD 의 중점이 일치한다.

$$\overline{AC} \text{의 중점의 위치벡터는 } \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2}$$

$$\overline{BD} \text{의 중점의 위치벡터는 } \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2}$$

따라서 $\frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} = \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2}$ 이므로

$$\vec{b} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{d}$$

답 $\vec{a} + \vec{c} - \vec{d}$

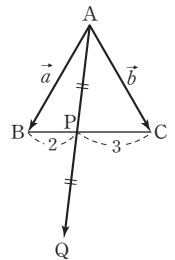
- 0387** 점 Q 는 $\overline{AP}$ 를 2 : 1로 외분하는 점
 이므로

$$\vec{AQ} = 2\vec{AP}$$

한편, 점 P 는 $\overline{BC}$ 를 2 : 3으로 내분하는 점이므로

$$\vec{AP} = \frac{2\vec{b} + 3\vec{a}}{2+3} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{5}$$

$$\therefore \vec{AQ} = 2\vec{AP} = \frac{6\vec{a} + 4\vec{b}}{5} = \frac{6}{5} \vec{a} + \frac{4}{5} \vec{b}$$



답 $\frac{6}{5} \vec{a} + \frac{4}{5} \vec{b}$

- 0388** $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{a} + \vec{b}$ 이므로

$$\begin{aligned} \vec{AM} &= \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \end{aligned}$$

점 P 는 $\overline{MD}$ 를 4 : 3으로 내분하는 점이므로

$$\begin{aligned} \vec{AP} &= \frac{4\vec{AD} + 3\vec{AM}}{4+3} = \frac{4}{7} \vec{AD} + \frac{3}{7} \vec{AM} \\ &= \frac{4}{7} \vec{b} + \frac{3}{7} \left(\vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right) = \frac{3}{7} \vec{a} + \frac{11}{14} \vec{b} \end{aligned}$$

따라서 $m = \frac{3}{7}, n = \frac{11}{14}$ 이므로

$$m + n = \frac{17}{14}$$

답 $\frac{17}{14}$

단계	채점요소	배점
㉑	$\overrightarrow{AM}$ 을 $\vec{a}, \vec{b}$ 로 나타내기	40%
㉒	$\overrightarrow{AP}$ 를 $\vec{a}, \vec{b}$ 로 나타내기	40%
㉓	$m+n$ 의 값 구하기	20%

0389 점 G는 $\triangle OAB$ 의 무게중심이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} \\ \therefore \overrightarrow{GB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG} = \vec{b} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} \\ &= -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

따라서 $x = -\frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$ 이므로

$$x - y = -1$$

답 -1

0390 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ 에서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GC} &= -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = -\vec{a} - \vec{b} \\ \therefore \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB} = (-\vec{a} - \vec{b}) - \vec{b} = -\vec{a} - 2\vec{b}\end{aligned}$$

따라서 $m = -1, n = -2$ 이므로

$$mn = 2$$

답 2

0391 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$ 이므로

$\triangle OAB$ 에서

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{3} = \frac{\vec{a} + (\vec{a} + \vec{b})}{3} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$$

$\triangle OBC$ 에서

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b}}{3} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$$

$$\therefore \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OG}$$

$$= \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3} - \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$$

$$= -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\text{답 } -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

0392 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC})$

$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AO} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BO}$$

$$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO})$$

$$= -\frac{2}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

이때 점 G가 $\triangle OAB$ 의 무게중심이므로

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{3} \quad \therefore \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OG}$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3} \times 3\overrightarrow{OG} = -2\overrightarrow{OG}$$

$$\therefore k = -2$$

답 -2

0393 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}$ 이므로

$$2\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}$$

$$2\overrightarrow{PA} = -6\overrightarrow{PB} \quad \therefore \overrightarrow{PA} = -3\overrightarrow{PB}$$

따라서 두 벡터 $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ 는 한 직선 위에 있고 방향이 서로 반대
이므로 점 P는 $\overline{AB}$ 를 3 : 1로 내분하는 점이다.

$$\therefore \triangle CAP : \triangle CBP = \overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1$$

답 ③

0394 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}$ 이므로

$$(\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}) + 3\overrightarrow{PC} + 7\overrightarrow{PA} = \vec{0}$$

$$4\overrightarrow{PC} + 6\overrightarrow{PA} = \vec{0} \quad \therefore 2\overrightarrow{PC} = -3\overrightarrow{PA}$$

따라서 두 벡터 $\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PA}$ 는 한 직선 위에 있고 방향이 서로 반대
이므로 점 P는 $\overline{CA}$ 를 3 : 2로 내분하는 점이다.

$$\text{즉, } m=3, n=2 \text{이므로 } m+n=5$$

답 5

0395 $\neg$. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}$ 이므로

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}$$

$$\therefore \overrightarrow{PC} = -2\overrightarrow{PA} \quad (\text{참})$$

$\neg$. $\neg$ 에서 $\overrightarrow{PC} = -2\overrightarrow{PA}$ 이므로 두 벡터 $\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PA}$ 는 한 직선 위에 있고 방향이 서로 반대이다.

즉, 점 P는 $\overline{AC}$ 를 1 : 2로 내분하는 점이다. (거짓)

$\neg$. $\neg$ 에서 $\overline{PA} : \overline{PC} = 1 : 2$ 이므로

$$\triangle PAB : \triangle PBC = \overline{PA} : \overline{PC} = 1 : 2 \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 $\neg, \neg$

0396 $4\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP} = \vec{0}$ 에서

$$4\overrightarrow{AP} = -3\overrightarrow{BP} - 2\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{3\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}}{5} \times \frac{5}{4}$$

..... ㉑

이때 $\overline{BC}$ 를 2 : 3으로 내분하는 점을 D라

하면

$$\overrightarrow{PD} = \frac{3\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}}{5}$$

㉑에서 $\overrightarrow{AP} = \frac{5}{4}\overrightarrow{PD}$ 이므로 점 P는 $\overline{AD}$

를 5 : 4로 내분하는 점이다.

$$\therefore \triangle ABP : \triangle BDP = \triangle ACP : \triangle CDP = 5 : 4$$

$$\therefore \triangle BCP = \triangle BDP + \triangle CDP$$

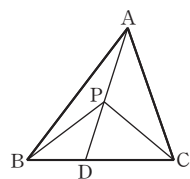
$$= \frac{4}{9}\triangle ABD + \frac{4}{9}\triangle ACD$$

$$= \frac{4}{9}(\triangle ABD + \triangle ACD)$$

$$= \frac{4}{9}\triangle ABC = \frac{4}{9} \times 90 = 40$$

..... ㉒

답 40



단계	채점요소	배점
㉠	$\overrightarrow{AP}$ 를 $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ 로 나타내기	30%
㉡	삼각형의 넓이의 비 구하기	40%
㉢	삼각형 BCP의 넓이 구하기	30%

$$\begin{aligned}
 \text{0397 } 2(\vec{a}-3\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b}) &= 2\vec{a}-6\vec{b}-\vec{a}+2\vec{b} \\
 &= \vec{a}-4\vec{b} \\
 &= (3, 1)-4(3, -2) \\
 &= (-9, 9)
 \end{aligned}$$

따라서 $m=-9, n=9$ 이므로
 $m+n=0$

답 0

$$\begin{aligned}
 \text{0398 } \vec{a} &= 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 = 3(1, 0) + 5(0, 1) = (3, 5) \\
 \vec{b} &= \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = (1, 0) + 2(0, 1) = (1, 2) \\
 \therefore 2(\vec{a}+\vec{b})-3(\vec{a}-\vec{b}) &= 2\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{a}+3\vec{b} \\
 &= -\vec{a}+5\vec{b} \\
 &= -(3, 5)+5(1, 2) \\
 &= (2, 5)
 \end{aligned}$$

답 (2, 5)

$$\begin{aligned}
 \text{0399 } \vec{a}+3\vec{b} &= (5, 3) \quad \dots\dots \text{㉠} \\
 \vec{a}-\vec{b} &= (-3, -1) \quad \dots\dots \text{㉡} \\
 \text{㉠}-\text{㉡을 하면} \\
 4\vec{b} &= (8, 4) \quad \therefore \vec{b} = (2, 1) \\
 \text{이것을 ㉠에 대입하면} \\
 \vec{a}+3(2, 1) &= (5, 3) \\
 \therefore \vec{a} &= (5, 3)-3(2, 1) = (-1, 0) \\
 \therefore \vec{a}+\vec{b} &= (-1, 0)+(2, 1) = (1, 1)
 \end{aligned}$$

답 3

$$\begin{aligned}
 \text{0400 } 3\vec{x}-\vec{a} &= 2(\vec{a}+3\vec{b}) \text{에서} \\
 3\vec{x}-\vec{a} &= 2\vec{a}+6\vec{b}, 3\vec{x} = 3\vec{a}+6\vec{b} \\
 \therefore \vec{x} &= \vec{a}+2\vec{b} = (-4, 5)+2(2, -1) = (0, 3)
 \end{aligned}$$

답 3

$$\begin{aligned}
 \text{0401 } \vec{p} &= t\vec{a}+\vec{b} = t(1, -1)+(2, 3) \\
 &= (t+2, -t+3) \\
 \therefore |\vec{p}| &= \sqrt{(t+2)^2+(-t+3)^2} \\
 &= \sqrt{2t^2-2t+13} \\
 &= \sqrt{2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{2}}
 \end{aligned}$$

따라서 $|\vec{p}|$ 의 최솟값은 $t=\frac{1}{2}$ 일 때 $\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 이다.

답 2

$$\begin{aligned}
 \text{0402 } 2\vec{a}+\vec{b} &= 2(-1, 2)+(3, 1) \\
 &= (1, 5) \\
 \therefore |2\vec{a}+\vec{b}| &= \sqrt{1^2+5^2} = \sqrt{26}
 \end{aligned}$$

답 3

054 정답과 풀이

$$\text{0403 } |\vec{x}|=1 \text{이므로 } \sqrt{(2a-3)^2+1^2}=1$$

양변을 제곱하면 $(2a-3)^2+1=1$

$$(2a-3)^2=0 \quad \therefore a=\frac{3}{2}$$

답 1

$$\begin{aligned}
 \text{0404 } \text{직선 } y=x-1 \text{ 위의 점 P의 좌표를 } (a, a-1) \text{이라 하면} \\
 \overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP} &= (a+1, a-1)+(a-1, a-3) \\
 &= (2a, 2a-4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore |\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}| &= \sqrt{(2a)^2+(2a-4)^2} \\
 &= \sqrt{8a^2-16a+16} \\
 &= \sqrt{8(a-1)^2+8}
 \end{aligned}$$

따라서 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|$ 의 최솟값은 $a=1$ 일 때 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ 이다.

답 $2\sqrt{2}$

단계	채점요소	배점
㉠	점 P의 좌표를 $(a, a-1)$ 이라 하고 $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}$ 의 성분을 a 로 나타내기	40%
㉡	$ \overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP} $ 를 a 에 대한 식으로 나타내기	40%
㉢	$ \overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP} $ 의 최솟값 구하기	20%

$$\begin{aligned}
 \text{0405 } \vec{c} &= m\vec{a}+n\vec{b} \text{에서} \\
 (1, 6) &= m(-4, 6)+n(3, -2) \\
 &= (-4m, 6m)+(3n, -2n) \\
 &= (-4m+3n, 6m-2n)
 \end{aligned}$$

$$\therefore 1=-4m+3n, 6=6m-2n$$

두 식을 연립하여 풀면 $m=2, n=3$

답 $m=2, n=3$

$$\begin{aligned}
 \text{0406 } \vec{c} &= 2\vec{a}+3\vec{b} \text{에서} \\
 (-3l, 2) &= 2(3, -k)+3(k+l, 2) \\
 &= (6, -2k)+(3k+3l, 6) \\
 &= (6+3k+3l, -2k+6)
 \end{aligned}$$

$$\therefore -3l=6+3k+3l, 2=-2k+6$$

두 식을 연립하여 풀면 $k=2, l=-2$

$$\therefore k-l=4$$

답 5

$$\begin{aligned}
 \text{0407 } 2\vec{a}+\vec{b} &= \vec{c}-\vec{b} \text{에서 } \vec{c}=2\vec{a}+2\vec{b} \text{이므로} \\
 (-4, q) &= 2(2, 3)+2(p, -1) \\
 &= (4, 6)+(2p, -2) \\
 &= (4+2p, 4)
 \end{aligned}$$

$$\therefore -4=4+2p, q=4$$

따라서 $p=-4, q=4$ 이므로

$$\vec{b}-\vec{c} = (-4, -1)-(-4, 4) = (0, -5)$$

$$\therefore |\vec{b}-\vec{c}| = \sqrt{0^2+(-5)^2} = 5$$

답 5

0408 세 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 의 시점을 좌표평면에서의 원점으로 놓고 각 벡터를 성분으로 나타내면

$$\vec{a} = (3, 2), \vec{b} = (-1, -2), \vec{c} = (4, -4)$$

이므로 $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ 에서

$$\begin{aligned}(4, -4) &= p(3, 2) + q(-1, -2) \\ &= (3p, 2p) + (-q, -2q) \\ &= (3p - q, 2p - 2q)\end{aligned}$$

$$\therefore 4 = 3p - q, -4 = 2p - 2q$$

두 식을 연립하여 풀면 $p = 3, q = 5$

$$\therefore p + q = 8$$

답 8

$$\textbf{0409} \quad \vec{a} + t\vec{c} = (5, 4) + t(3, 7) = (5 + 3t, 4 + 7t)$$

$$\vec{b} - \vec{a} = (-2, 3) - (5, 4) = (-7, -1)$$

두 벡터 $\vec{a} + t\vec{c}, \vec{b} - \vec{a}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{a} + t\vec{c} = k(\vec{b} - \vec{a}) \quad (k \neq 0) \text{라 하면}$$

$$(5 + 3t, 4 + 7t) = k(-7, -1)$$

$$\therefore 5 + 3t = -7k, 4 + 7t = -k$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } t = -\frac{1}{2}, k = -\frac{1}{2}$$

답 ②

$$\textbf{0410} \quad 2\vec{a} + \vec{b} = 2(1, 2) + (x, -1) = (2 + x, 3)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (1, 2) - (x, -1) = (1 - x, 3)$$

두 벡터 $2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$2\vec{a} + \vec{b} = k(\vec{a} - \vec{b}) \quad (k \neq 0) \text{라 하면}$$

$$(2 + x, 3) = k(1 - x, 3)$$

$$\therefore 2 + x = k - kx, 3 = 3k$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } k = 1, x = -\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

$$\textbf{0411} \quad \overrightarrow{AB} = (1, 3) - (2, 2) = (-1, 1)$$

$$\overrightarrow{CD} = (1, a) - (4, -4) = (-3, a + 4)$$

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ 이므로

$$(-3, a + 4) = k(-1, 1) \quad (k \neq 0) \text{이라 하면}$$

$$-3 = -k, a + 4 = k$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } k = 3, a = -1$$

답 ②

0412 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$$\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC} \quad (t \neq 0)$$

$$\overrightarrow{AB} = (k, 1) - (1, 2) = (k - 1, -1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (5, 6) - (1, 2) = (4, 4)$$

이므로

$$(k - 1, -1) = t(4, 4)$$

$$\therefore k - 1 = 4t, -1 = 4t$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } t = -\frac{1}{4}, k = 0$$

답 0

0413 $\overline{AB}$ 가 원 O의 지름이므로 $\angle APB = 90^\circ$

$$\triangle ABP \text{에서 } \overline{AP} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

두 벡터 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}$ 가 이루는 각의 크기를 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$)라 하면

$$\cos \theta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 10 \times 6 \times \cos \theta = 10 \times 6 \times \frac{3}{5} = 36$$

답 36

0414 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BA}$ 이고, $\angle ABC = 120^\circ$ 이므로

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}| \cos (180^\circ - 120^\circ)$$

$$= -2 \times 2 \times \cos 60^\circ$$

$$= -2 \times 2 \times \frac{1}{2} = -2$$

답 -2

0415 두 벡터 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\theta = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}| \cos 60^\circ$$

$$12 = 6 \times |\overrightarrow{AD}| \times \frac{1}{2} \quad \therefore |\overrightarrow{AD}| = 4$$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$\overline{AD} \times \overline{AB} \times \sin 60^\circ = 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

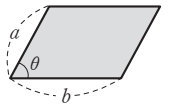
답 $12\sqrt{3}$

참고 평행사변형의 넓이

이웃하는 두 변의 길이가 각각 a, b 이고 그 끼인각

의 크기가 θ 인 평행사변형의 넓이는

$$\Rightarrow ab \sin \theta$$



0416 $\neg, \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{CB}| |\overrightarrow{CD}| \cos 90^\circ = 0$ (참)

$\perp, |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ 이므로 $\angle ACD = \theta$ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} &= |\overrightarrow{CD}| |\overrightarrow{CA}| \cos \theta \\ &= 1 \times \sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = 1 \text{ (참)}\end{aligned}$$

$\angle, \angle ABD = \theta$ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$)라 하면

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

오른쪽 그림에서

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD'}, \angle D'AB = 180^\circ - \theta$$

이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD'} \\ &= -|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD'}| \cos \{180^\circ - (180^\circ - \theta)\} \\ &= -|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD'}| \cos \theta \\ &= -1 \times \sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = -1 \text{ (거짓)}\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \perp$ 이다.

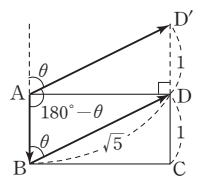
답 $\neg, \perp$

$$\textbf{0417} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = (x, -3) \cdot (2, 3x - 1)$$

$$= 2x - 3(3x - 1) = -7x + 3$$

따라서 $-7x + 3 = 17$ 이므로 $x = -2$

답 ②



0418 $\vec{a}-\vec{b}=(x, 3)-(0, 1)=(x, 2)$
 $\vec{a}-\vec{c}=(x, 3)-(x+2, 4)=(-2, -1)$
 $\therefore (\vec{a}-\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{c})=(x, 2) \cdot (-2, -1)$
 $=-2x-2$

따라서 $-2x-2=6$ 이므로 $x=-4$ 답 ④

0419 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$ 에서 $|\vec{a}|^2=2$ 이므로
 $x^2+(x+2)^2=2, x^2+2x+1=0$
 $(x+1)^2=0 \quad \therefore x=-1$
따라서 $\vec{a}=(-1, 1), \vec{b}=(-4, 2)$ 이므로
 $\vec{a} \cdot \vec{b}=(-1, 1) \cdot (-4, 2)=4+2=6$ 답 ③

0420 $\vec{a} \cdot \vec{b}=\left(x, \frac{3}{x}\right) \cdot\left(3y, \frac{1}{y}\right)=3xy+\frac{3}{xy}$
이때 $xy>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $3xy+\frac{3}{xy} \geq 2 \sqrt{3xy \times \frac{3}{xy}}=6$
(단, 등호는 $3xy=\frac{3}{xy}$ 일 때 성립)

따라서 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 의 최솟값은 6이다. 답 6
참고 산술평균과 기하평균의 관계
 $a>0, b>0$ 일 때, $a+b \geq 2 \sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립)

0421 두 점 P, Q의 좌표를 각각 $(a, 2a^2), (b, 2b^2)$ 이라 하면
 $\overrightarrow{OP}=(a, 2a^2), \overrightarrow{OQ}=(b, 2b^2)$
 $\therefore \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}=(a, 2a^2) \cdot (b, 2b^2)=ab+4a^2b^2$
 $=4\left(ab+\frac{1}{8}\right)^2-\frac{1}{16}$

따라서 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 의 최솟값은 $ab=-\frac{1}{8}$ 일 때 $-\frac{1}{16}$ 이다.

답 ③

0422 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면
 $\overrightarrow{AB}=(5, 1)-(2, 3)=(3, -2)$
 $\overrightarrow{OP}=(x, y)$
이므로
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OP}=(3, -2) \cdot (x, y)=3x-2y$
즉, $3x-2y=13$ 이므로 점 P가 나타내는 도형은 직선
 $3x-2y-13=0$ 이다.
따라서 $\overrightarrow{OP}$ 의 길이의 최솟값은 원점 O와 직선 $3x-2y-13=0$
사이의 거리와 같으므로

$\frac{|-13|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$ 답 ③

0423 $\vec{a} \cdot \vec{b}=|\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ$
 $=3 \times 4 \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}=12$

$\therefore (\vec{a}+\vec{b}) \cdot (2\vec{a}-\vec{b})=2|\vec{a}|^2+\vec{a} \cdot \vec{b}-|\vec{b}|^2$
 $=2 \times 3^2+12-(4 \sqrt{2})^2$
 $=-2$

답 ②

0424 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$ 의 양변을 제곱하면
 $|\vec{a}|^2-2\vec{a} \cdot \vec{b}+|\vec{b}|^2=3$
 $2^2-2\vec{a} \cdot \vec{b}+1^2=3 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b}=1$
 $\therefore (3\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}-4\vec{b})=3|\vec{a}|^2-11\vec{a} \cdot \vec{b}-4|\vec{b}|^2$
 $=3 \times 2^2-11 \times 1-4 \times 1^2$
 $=-3$

답 -3

0425 $|\vec{a}+\vec{b}|=2$ 의 양변을 제곱하면
 $|\vec{a}|^2+2\vec{a} \cdot \vec{b}+|\vec{b}|^2=4$ ㉠
 $|\vec{a}-\vec{b}|=1$ 의 양변을 제곱하면
 $|\vec{a}|^2-2\vec{a} \cdot \vec{b}+|\vec{b}|^2=1$ ㉡
㉠+㉡을 하면 $2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)=5$
 $\therefore |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=\frac{5}{2}$

..... ㉢
㉠-㉡을 하면 $4\vec{a} \cdot \vec{b}=3 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b}=\frac{3}{4}$

..... ㉣
 $\therefore |\vec{a}-2\vec{b}|^2+|2\vec{a}-\vec{b}|^2$
 $=|\vec{a}|^2-4\vec{a} \cdot \vec{b}+4|\vec{b}|^2+4|\vec{a}|^2-4\vec{a} \cdot \vec{b}+|\vec{b}|^2$
 $=5(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)-8\vec{a} \cdot \vec{b}$
 $=5 \times \frac{5}{2}-8 \times \frac{3}{4}=\frac{13}{2}$

답 $\frac{13}{2}$

단계	채점요소	배점
㉠	$ \vec{a} ^2+ \vec{b} ^2$ 의 값 구하기	30%
㉡	$\vec{a} \cdot \vec{b}$ 구하기	30%
㉣	$ \vec{a}-2\vec{b} ^2+ 2\vec{a}-\vec{b} ^2$ 의 값 구하기	40%

0426 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2, \angle A=60^\circ$ 이므로
 $\vec{a} \cdot \vec{b}=|\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ$
 $=2 \times 2 \times \frac{1}{2}=2$

$\therefore |\vec{a}+3\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+6\vec{a} \cdot \vec{b}+9|\vec{b}|^2$
 $=2^2+6 \times 2+9 \times 2^2=52$
 $\therefore |\vec{a}+3\vec{b}|=2 \sqrt{13}$

답 ③

0427 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ 이므로
 $\overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})$
 $=|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2=0$
즉, $|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2$ 이므로 $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}|$
따라서 $\triangle ABC$ 는 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ 인 이등변삼각형이다.

답 ③

0428 $\vec{a} + \vec{b} = (1, -1) + (-3, -2) = (-2, -3)$
 $2\vec{a} - \vec{b} = 2(1, -1) - (-3, -2) = (5, 0)$
 $\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = (-2, -3) \cdot (5, 0) = -10$
 이때 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) < 0$ 이므로 $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$
 $\therefore \cos(180^\circ - \theta) = -\frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}| |2\vec{a} - \vec{b}|}$

$$= -\frac{-10}{\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} \sqrt{5^2 + 0^2}}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{13} \times 5} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

답 ⑤

0429 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (0, 2) \cdot (1, \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$
 이때 $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$ 이므로 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$
 $\therefore \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{0^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}}$
 $= \frac{2\sqrt{3}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 $\theta = 30^\circ$ 이므로 $\sin \theta = \frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

0430 $\vec{b} + \vec{c} = (-2, 5) + (3, k) = (1, 5+k)$ 이므로
 $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (0, -2) \cdot (1, 5+k) = -10 - 2k$
 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}$ 가 이루는 각의 크기가 135° 이므로
 $-10 - 2k < 0 \quad \therefore k > -5$

..... ㉠

$\cos(180^\circ - 135^\circ) = -\frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{a}| |\vec{b} + \vec{c}|}$ 에서

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{-10 - 2k}{\sqrt{0^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + (5+k)^2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{k+5}{\sqrt{k^2 + 10k + 26}}$$

$$\sqrt{2} \sqrt{k^2 + 10k + 26} = 2(k+5)$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$k^2 + 10k + 24 = 0, (k+6)(k+4) = 0$$

$$\therefore k = -6 \text{ 또는 } k = -4$$

그런데 ㉠에서 $k > -5$ 이므로 $k = -4$

답 ③

0431 $|\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{13}$ 의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 = 13$$

$$4^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9 \times 1^2 = 13 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 2$$

이때 $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$ 이므로 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2}{4 \times 1} = \frac{1}{2}$$

따라서 $\theta = 60^\circ$ 이므로 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

답 ⑤

0432 $|3\vec{a} + \vec{b}| = |3\vec{a} - \vec{b}|$ 의 양변을 제곱하면

$$9|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 9|\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$12\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

따라서 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기는 90° 이다.

답 90°

0433 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \geq 0$ 이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 가 이루는 각의 크기를 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$)라 하면

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{6}{3 \times 4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

따라서 $\triangle ABC$ 의 넓이는

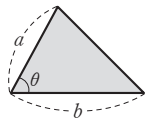
$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

답 ②

참고 삼각형의 넓이

이웃하는 두 변의 길이가 각각 a, b 이고 그 끼인각의 크기가 θ 인 삼각형의 넓이는

$$\Rightarrow \frac{1}{2} ab \sin \theta$$



0434 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{5}$ 의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 5$$

..... ㉠

$|\vec{a} - \vec{b}| = 1$ 의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1$$

..... ㉡

㉠ - ㉡을 하면 $4\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$

..... ㉢

㉠ + ㉡을 하면 $2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) = 6$

$$\therefore |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 3$$

..... ㉣

한편, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 1$ 이므로

$$|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 1$$

..... ㉤

㉣, ㉤에서 $|\vec{a}|^2 = 2, |\vec{b}|^2 = 1$

$$\therefore |\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = 1$$

..... ㉥

$\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를

θ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$)라 하면

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

..... ㉦

답 45°

단계	채점요소	배점
㉡	$\vec{a} \cdot \vec{b}$ 구하기	40%
㉣	$ \vec{a} , \vec{b} $ 구하기	40%
㉥	$\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기 구하기	20%

0435 $\vec{a} + k\vec{b} = (2, 1) + k(1, -1) = (2+k, 1-k)$

$$2\vec{a} + \vec{b} = 2(2, 1) + (1, -1) = (5, 1)$$

두 벡터 $\vec{a} + k\vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b}$ 가 서로 수직이므로

$$(\vec{a} + k\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 0$$
에서

$$(2+k, 1-k) \cdot (5, 1) = 0$$

$$5(2+k) + (1-k) = 0, 4k = -11$$

$$\therefore k = -\frac{11}{4}$$

답 ②

0436 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 수직이므로 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 에서

$$(3t-1, t) \cdot \left(1, -\frac{2}{t}\right) = 0$$

$$3t-1+t \times \left(-\frac{2}{t}\right) = 0 \quad \therefore t=1$$

따라서 $\vec{a} = (2, 1), \vec{b} = (1, -2)$ 이므로

$$\vec{a} - 3\vec{b} = (2, 1) - 3(1, -2) = (-1, 7)$$

$$\therefore |\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = 5\sqrt{2}$$

답 5√2

0437 $\vec{c} - \vec{a} = (x, y) - (5, 0) = (x-5, y)$

두 벡터 $\vec{c} - \vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{c} - \vec{a} = k\vec{b} \quad (k \neq 0) \text{라 하면}$$

$$(x-5, y) = k(1, -2)$$

$$\therefore x-5=k, y=-2k$$

..... ㉠

또, 두 벡터 $\vec{a}, \vec{c}$ 가 서로 수직이므로 $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ 에서

$$(5, 0) \cdot (x, y) = 0$$

$$5x=0 \quad \therefore x=0$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$k=-5, y=10$$

$$\text{따라서 } \vec{c} = (0, 10) \text{이므로 } |\vec{c}| = \sqrt{0^2 + 10^2} = 10$$

답 10

0438 두 벡터 $3\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}$ 가 서로 수직이므로

$$(3\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = 0 \text{에서}$$

$$3|\vec{a}|^2 + 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 2|\vec{b}|^2 = 0$$

..... ㉠

$$\text{이때 } 3|\vec{a}| = 2|\vec{b}| \text{이므로 } |\vec{b}| = \frac{3}{2}|\vec{a}|$$

..... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$3|\vec{a}|^2 + 5\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{9}{2}|\vec{a}|^2 = 0 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3}{10}|\vec{a}|^2$$

$$\text{따라서 } \vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0 \text{이므로 } 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\frac{3}{10}|\vec{a}|^2}{|\vec{a}| \times \frac{3}{2}|\vec{a}|} = \frac{1}{5}$$

답 ③

0439 $\vec{AB} = (-1, 3) - (1, 1) = (-2, 2)$

$$\vec{AC} = (-3, -1) - (1, 1) = (-4, -2)$$

$$\therefore \vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-2, 2) \cdot (-4, -2) = 8 - 4 = 4$$

$$|\vec{AB}|^2 = (-2)^2 + 2^2 = 8,$$

$$|\vec{AC}|^2 = (-4)^2 + (-2)^2 = 20$$

이므로 $\triangle ABC$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{8 \times 20 - 4^2} = 6$$

답 6

0440 $\vec{AB} = (0, 2) - (3, 6) = (-3, -4)$

$$\vec{AC} = (-1, 6) - (3, 6) = (-4, 0)$$

$$\therefore \vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-3, -4) \cdot (-4, 0) = 12 + 0 = 12$$

058 정답과 풀이

$$|\vec{AB}|^2 = (-3)^2 + (-4)^2 = 25,$$

$$|\vec{AC}|^2 = (-4)^2 + 0^2 = 16$$

이므로 $\triangle ABC$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{25 \times 16 - 12^2} = 8$$

답 8

0441 $3(x-3) = -2(y+1)$ 에서 $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-3}$ 이므로 이

직선의 방향벡터는 $(2, -3)$ 이다.

따라서 점 $(3, -4)$ 를 지나고 방향벡터가 $(2, -3)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-3}$$

이때 이 직선이 점 $(k, -1)$ 을 지나므로

$$\frac{k-3}{2} = \frac{-1+4}{-3} \quad \therefore k=1$$

답 1

0442 두 점 $A(-3, 2), B(-4, 6)$ 을 지나는 직선의 방향벡터는

$$\vec{AB} = (-4, 6) - (-3, 2) = (-1, 4)$$

이므로 점 $(3, 0)$ 을 지나고 방향벡터가 $(-1, 4)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y}{4} \quad \therefore y = -4(x-3)$$

$$\text{따라서 } m = -4, n = -3 \text{이므로 } m+n = -7$$

답 -7

0443 $\frac{x+1}{2} = 5-y$ 에서 $\frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{-1}$ 이므로 이 직선의

방향벡터는 $(2, -1)$ 이다.

구하는 직선은 이 직선에 수직이므로 구하는 직선의 법선벡터는 $(2, -1)$ 이다.

따라서 점 $(-4, 3)$ 을 지나고 법선벡터가 $(2, -1)$ 인 직선의 방정식은

$$2(x+4) - (y-3) = 0 \quad \therefore 2x - y + 11 = 0$$

이때 이 직선이 점 $(-1, k)$ 를 지나므로

$$-2 - k + 11 = 0 \quad \therefore k = 9$$

답 ④

0444 구하는 직선은 직선 $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{3}$ 에 수직이므로 구하

는 직선의 법선벡터는 $(2, 3)$ 이다.

따라서 점 $(5, -2)$ 를 지나고 법선벡터가 $(2, 3)$ 인 직선의 방정식은

$$2(x-5) + 3(y+2) = 0$$

$$\therefore 2x + 3y - 4 = 0$$

답 ②

0445 두 점 $A(0, 3), B(3, 0)$ 을 지나는 직선의 방향벡터는

$$\vec{AB} = (3, 0) - (0, 3) = (3, -3)$$

구하는 직선은 이 직선에 수직이므로 구하는 직선의 법선벡터는 $(3, -3)$ 이다.

따라서 점 $(-1, 2)$ 를 지나고 법선벡터가 $(3, -3)$ 인 직선의 방정식은

$$3(x+1)-3(y-2)=0$$

$$\therefore y=x+3$$

이때 직선 $y=x+3$ 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

단계	채점요소	배점
㉠	구하는 직선의 법선벡터 구하기	40%
㉡	직선의 방정식 구하기	40%
㉢	직선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이 구하기	20%

0446 $x+1=\frac{y+13}{3}, \frac{x+4}{2}=\frac{5-y}{3}$ 에서

$$3x-y=10, 3x+2y=-2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=2, y=-4$$

즉, 두 직선 l_1, l_2 의 교점의 좌표는 $(2, -4)$ 이므로 점 $(2, -4)$ 를 지나고 벡터 $\vec{n}=(3, 1)$ 에 수직인 직선의 방정식은

$$3(x-2)+(y+4)=0$$

$$\therefore 3x+y-2=0$$

답 $3x+y-2=0$

0447 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u}=(a, 1), \vec{v}=(1, \sqrt{3})$$

두 직선이 이루는 각의 크기가 30° 이므로

$$\cos 30^\circ = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|a+\sqrt{3}|}{\sqrt{a^2+1^2} \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}$$

$$\sqrt{3} \sqrt{a^2+1} = |a+\sqrt{3}|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2-\sqrt{3}a=0, a(a-\sqrt{3})=0$$

$$\therefore a=\sqrt{3} (\because a \neq 0)$$

답 ①

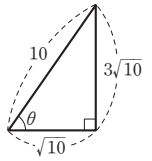
0448 두 직선 l_1, l_2 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u}=(4, 3), \vec{v}=(-1, 3)$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|-4+9|}{\sqrt{4^2+3^2} \sqrt{(-1)^2+3^2}} \\ &= \frac{5}{5\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \end{aligned}$$

오른쪽 그림과 같은 직각삼각형을 생각하면

$$\sin \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$



답 ③

0449 주어진 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u}=(a, b), \vec{v}=(3, 4)$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|3a+4b|}{\sqrt{a^2+b^2} \sqrt{3^2+4^2}} \\ &= \frac{3a+4b}{5\sqrt{a^2+b^2}} (\because 3a+4b > 0) \end{aligned}$$

이때 $\cos \theta = \frac{4}{5}$ 이므로

$$\frac{3a+4b}{5\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{4}{5}$$

$$3a+4b=4\sqrt{a^2+b^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$7a^2-24ab=0, a(7a-24b)=0$$

그런데 a 는 자연수이므로

$$7a-24b=0 \quad \therefore \frac{b}{a} = \frac{7}{24}$$

답 ②

0450 세 직선 l_1, l_2, l_3 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 라 하면

$$\vec{u}=(2, 3), \vec{v}=(a, 6), \vec{w}=(1, b)$$

$l_1 \parallel l_2$ 일 때, $\vec{u} \parallel \vec{v}$ 이므로 $\vec{u}=t\vec{v} (t \neq 0)$ 라 하면

$$(2, 3)=t(a, 6)$$

$$2=at, 3=6t \quad \therefore t=\frac{1}{2}, a=4$$

또, $l_1 \perp l_3$ 일 때, $\vec{u} \cdot \vec{w}=0$ 이므로

$$(2, 3) \cdot (1, b)=0$$

$$2+3b=0 \quad \therefore b=-\frac{2}{3}$$

$$\therefore a+b=4+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{3}$$

답 $\frac{10}{3}$

0451 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u}=(-k, 3), \vec{v}=(-2, 1)$$

두 벡터 $\vec{u}, \vec{v}$ 가 서로 평행하므로 $\vec{u}=t\vec{v} (t \neq 0)$ 라 하면

$$(-k, 3)=t(-2, 1)$$

$$-k=-2t, 3=t \quad \therefore t=3, k=6$$

답 6

0452 두 점 $(4, 6), (7, -3)$ 을 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u}=(7, -3)-(4, 6)=(3, -9)$$

직선 $x+1=\frac{y}{2k-1}$ 의 방향벡터를 $\vec{v}$ 라 하면

$$\vec{v}=(1, 2k-1)$$

이때 두 직선이 서로 수직이므로 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ 에서

$$(3, -9) \cdot (1, 2k-1) = 0$$

$$3 - 9(2k-1) = 0 \quad \therefore k = \frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0453 점 H의 좌표를 (a, b) 라 하면 점 H는 직선 l 위의 점이므로

$$\frac{a-1}{2} = 3-b \quad \therefore a+2b=7 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편, 직선 l 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (2, -1)$$

$$\vec{AH} = (a, b) - (-4, 3) = (a+4, b-3)$$

이때 벡터 $\vec{AH}$ 가 직선 l 에 수직이므로

$$\vec{AH} \cdot \vec{u} = 0$$

$$(a+4, b-3) \cdot (2, -1) = 0$$

$$2(a+4) - (b-3) = 0$$

$$\therefore 2a - b = -11 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

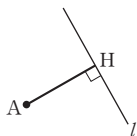
$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $a = -3$, $b = 5$

따라서 두 점 A(-4, 3), H(-3, 5)를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x - (-4)}{-3 - (-4)} = \frac{y - 3}{5 - 3}$$

$$\therefore x + 4 = \frac{y - 3}{2}$$

답 $x + 4 = \frac{y - 3}{2}$



0454 $(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$ 에서

$$(\vec{OP} - \vec{OA}) \cdot (\vec{OP} - \vec{OB}) = 0$$

$$\therefore \vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$$

즉, $\vec{AP} \perp \vec{BP}$ 에서 $\angle APB = 90^\circ$ 이므로 점 P는 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원 위의 점이다.

이때 $AB = \sqrt{(1+3)^2 + (-3-3)^2} = 2\sqrt{13}$ 이므로 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{13}$ 이다.

따라서 구하는 넓이는 $\pi \times (\sqrt{13})^2 = 13\pi$

답 13π

다른풀이 두 점 A, B의 위치벡터는 각각

$$\vec{a} = (-3, 3), \vec{b} = (1, -3)$$

점 P의 위치벡터를 $\vec{p} = (x, y)$ 라 하면

$$\vec{p} - \vec{a} = (x+3, y-3), \vec{p} - \vec{b} = (x-1, y+3)$$

이때 $(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$ 에서

$$(x+3, y-3) \cdot (x-1, y+3) = 0$$

$$(x+3)(x-1) + (y-3)(y+3) = 0$$

$$x^2 + 2x + y^2 - 12 = 0$$

$$\therefore (x+1)^2 + y^2 = 13$$

따라서 구하는 도형은 중심의 좌표가 $(-1, 0)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$ 인 원이므로 그 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{13})^2 = 13\pi$$

참고 세 점 A, B, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}$ 라 할 때, $\vec{AB}$ 를 지름으로 하는 원의 방정식은

$$\Leftrightarrow (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$$

0455 $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$ 에서 $\vec{AP} \perp \vec{BP}$ 이므로 $\angle APB = 90^\circ$

즉, 점 P는 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원 위의 점이다.

이때 원의 중심은 $\vec{AB}$ 의 중점이므로

$$\left(\frac{4+2}{2}, \frac{-1+3}{2}\right), \text{ 즉 } (3, 1)$$

반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \sqrt{(2-4)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{5}$$

따라서 $m=3$, $n=1$, $r=\sqrt{5}$ 이므로

$$m^2 + n^2 + r^2 = 15$$

답 15

다른풀이 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\vec{AP} = (x-4, y+1), \vec{BP} = (x-2, y-3)$$

이때 $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$ 에서

$$(x-4, y+1) \cdot (x-2, y-3) = 0$$

$$(x-4)(x-2) + (y+1)(y-3) = 0$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y + 5 = 0$$

$$\therefore (x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(3, 1)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 원이므로

$$m=3, n=1, r=\sqrt{5} \quad \therefore m^2 + n^2 + r^2 = 15$$

$$\begin{aligned} \vec{p} - \vec{a} - \vec{b} &= (x, y) - (1, 2) - (3, -4) \\ &= (x-4, y+2) \end{aligned}$$

$$\vec{p} - 2\vec{a} + \vec{b} = (x, y) - 2(1, 2) + (3, -4)$$

$$= (x+1, y-8)$$

이때 $(\vec{p} - \vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{p} - 2\vec{a} + \vec{b}) = 0$ 에서

$$(x-4, y+2) \cdot (x+1, y-8) = 0$$

$$(x-4)(x+1) + (y+2)(y-8) = 0$$

$$x^2 - 3x + y^2 - 6y - 20 = 0$$

$$\therefore \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{125}{4}$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ 이고 반지름의 길이가 $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ 인 원이므로 그 둘레의 길이는

$$2\pi \times \frac{5\sqrt{5}}{2} = 5\sqrt{5}\pi$$

답 ③

0457 $\vec{p} - \vec{c} = (x, y) - (3, 4) = (x-3, y-4)$ 이므로

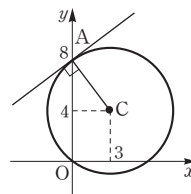
$$|\vec{p} - \vec{c}| = 5$$
에서

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = 5$$

$$\therefore (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같이 중심이 점 C(3, 4)이고 반지름의 길이가 5인 원이다.

이 원 위의 점 A(0, 8)에서의 접선의 법선 벡터는 $\vec{CA}$ 이므로



$$\overrightarrow{CA} = (0, 8) - (3, 4) = (-3, 4)$$

따라서 구하는 점선은 점 A(0, 8)을 지나고 법선벡터가

$$\overrightarrow{CA} = (-3, 4) \text{인 직선이므로}$$

$$-3(x-0) + 4(y-8) = 0$$

$$\therefore 3x - 4y + 32 = 0$$

$$\text{답 } 3x - 4y + 32 = 0$$

유형 1p

본문 66쪽

$$\text{0458 } \overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} \text{에서}$$

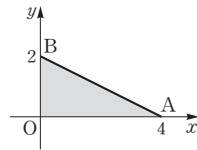
$$m+n \leq 1, m \geq 0, n \geq 0$$

일 때, 점 P가 나타내는 도형은 $\triangle OAB$ 의 내부와 그 둘레이다.

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

답 4



$$\text{0459 } m+n=1, m \geq 0, n \geq 0 \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} = \frac{n\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OA}}{n+m}$$

즉, 점 P는 $\overline{AB}$ 를 $n : m$ 으로 내분하는 점이므로 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB이다.

따라서 구하는 도형의 길이는

$$AB = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

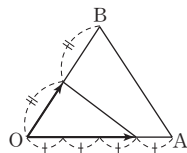
답 ④

$$\text{0460 } 4m+6n=3 \text{에서}$$

$$n=0 \text{일 때, } m=\frac{3}{4} \text{이므로 } \overrightarrow{OP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA}$$

$$m=0 \text{일 때, } n=\frac{1}{2} \text{이므로 } \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

따라서 오른쪽 그림과 같이 점 P의 자취는 $\overline{OA}$ 를 3 : 1로 내분하는 점과 $\overline{OB}$ 의 중점을 이은 선분이다.



답 ④

$$\text{0461 점 P의 좌표를 } (x, y) \text{라 하면}$$

$$\overrightarrow{AP} = (x-2, y+5), \overrightarrow{BP} = (x-1, y+3)$$

$$|\overrightarrow{AP}| = 2|\overrightarrow{BP}| \text{에서}$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+5)^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2}$$

양변을 제곱하면

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 4\{(x-1)^2 + (y+3)^2\}$$

$$\therefore 3x^2 + 3y^2 - 4x + 14y + 11 = 0$$

$$\text{따라서 } a = -4, b = 14, c = 11 \text{이므로}$$

$$a+b+c=21$$

답 21

$$\text{0462 점 P의 좌표를 } (x, y) \text{라 하면}$$

$$\overrightarrow{PA} = (1-x, -2-y), \overrightarrow{PB} = (2-x, 3-y),$$

$$\overrightarrow{PC} = (-3-x, -1-y)$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$$

$$= (1-x, -2-y) + (2-x, 3-y) + (-3-x, -1-y)$$

$$= (-3x, -3y)$$

$$|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}| = 3 \text{에서}$$

$$\sqrt{(-3x)^2 + (-3y)^2} = 3$$

양변을 제곱하면

$$9x^2 + 9y^2 = 9 \quad \therefore x^2 + y^2 = 1$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원이므로 그 넓이는 $\pi \times 1^2 = \pi$

답 π

단계	채점요소	배점
㉠	P(x, y)로 놓고, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$ 를 성분으로 나타내기	40 %
㉡	점 P가 나타내는 도형의 방정식 구하기	40 %
㉢	점 P가 나타내는 도형의 넓이 구하기	20 %

$$\text{0463 점 P의 좌표를 } (x, y) \text{라 하면}$$

$$\overrightarrow{PA} = (2-x, 1-y), \overrightarrow{PB} = (1-x, -4-y)$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = (2-x, 1-y) + (1-x, -4-y)$$

$$= (3-2x, -3-2y)$$

$$|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}| = 10 \text{에서 } \sqrt{(3-2x)^2 + (-3-2y)^2} = 10$$

양변을 제곱하면

$$(3-2x)^2 + (-3-2y)^2 = 100$$

$$\therefore \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 25$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ 이고 반지름의 길이가 5인 원이므로 그 둘레의 길이는

$$2\pi \times 5 = 10\pi$$

답 ③

$$\text{0464 점 P의 좌표를 } (x, y) \text{라 하면}$$

$$\overrightarrow{AP} = (x+4, y), \overrightarrow{BP} = (x-4, y)$$

$$|\overrightarrow{AP}| + |\overrightarrow{BP}| = 10 \text{에서}$$

$$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10$$

$$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x-4)^2 + y^2} + 10$$

양변을 제곱하면

$$(x+4)^2 + y^2 = (x-4)^2 + y^2 - 20\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + 100$$

$$4x - 25 = -5\sqrt{(x-4)^2 + y^2}$$

다시 양변을 제곱하면

$$(4x-25)^2 = 25\{(x-4)^2 + y^2\}$$

$$\therefore \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\text{답 } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$



0465 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AD}$ 가 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC} = 4 : 3$$

즉, 점 D는 $\overline{BC}$ 를 4 : 3으로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AD} = \frac{4\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}}{4+3} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$$

따라서 $m = \frac{3}{7}$, $n = \frac{4}{7}$ 이므로

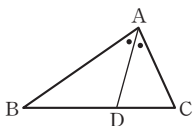
$$m - n = -\frac{1}{7}$$

답 $-\frac{1}{7}$

참고 삼각형의 내각의 이등분선의 성질

삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 $\overline{BC}$ 와 만나는 점을 D라 하면

$$\Rightarrow \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$



0466 점 P는 $\overline{AB}$ 의 중점이므로

$$\overrightarrow{CP} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

또, $|\overrightarrow{CG}| : |\overrightarrow{GP}| = 2 : 1$ 에서 $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$ 이므로

$$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3} \times \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

따라서 $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$ 이므로

$$xy = \frac{1}{9}$$

답 ④

0467 $\overline{AB} = \overline{PB} - \overline{PA}$ 이므로

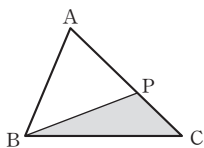
$$\overline{PA} + \overline{PB} + 3\overline{PC} = \overline{PB} - \overline{PA}$$

$$2\overline{PA} + 3\overline{PC} = \vec{0} \quad \therefore 2\overline{PA} = -3\overline{PC}$$

따라서 점 P는 $\overline{AC}$ 를 3 : 2로 내분하는 점이다.

$$\therefore \triangle PBC = \frac{2}{5} \times \triangle ABC$$

$$= \frac{2}{5} \times 30 = 12$$



답 ③

$$\mathbf{0468} \quad 3(\vec{a} + \vec{b}) - 2\vec{b} = 3\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{b} = 3\vec{a} + \vec{b}$$

$$= 3(1, -2) + (3, 1)$$

$$= (6, -5)$$

$$\therefore |3(\vec{a} + \vec{b}) - 2\vec{b}| = \sqrt{6^2 + (-5)^2} = \sqrt{61}$$

답 $\sqrt{61}$

$$\mathbf{0469} \quad \overline{AB} = (1, 2) - (2, -1) = (-1, 3)$$

$$\overline{CD} = (a, b) - (-1, 3) = (a+1, b-3)$$

$$\overline{AB} = \overline{CD} \text{에서 } -1 = a+1, 3 = b-3 \text{이므로}$$

$$a = -2, b = 6$$

$$\therefore a + b = 4$$

답 ③

0470 $\vec{v} = (x, y)$ 라 하면

$$\vec{v} + \vec{b} = (x, y) + (4, -2) = (x+4, y-2)$$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{v} + \vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{v} + \vec{b} = k\vec{a} \quad (k \neq 0) \text{라 하면}$$

$$(x+4, y-2) = k(3, 1)$$

$$\therefore x+4 = 3k, y-2 = k$$

$$\text{즉, } x+4 = 3(y-2) \text{이므로 } x = 3y-10$$

$$\therefore |\vec{v}|^2 = x^2 + y^2 = (3y-10)^2 + y^2$$

$$= 10y^2 - 60y + 100$$

$$= 10(y-3)^2 + 10$$

따라서 $|\vec{v}|^2$ 의 최솟값은 $y=3$ 일 때 10이다.

답 ⑤

0471 $\overline{BC}$ 가 원 O의 지름이므로 $\angle BAC = 90^\circ$

$$\triangle ABC \text{에서 } |\overline{BA}| = \sqrt{12^2 - 9^2} = 3\sqrt{7}$$

두 벡터 $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ 가 이루는 각의 크기를 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$)라 하면

$$\cos \theta = \frac{3\sqrt{7}}{12} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\therefore \overline{BA} \cdot \overline{BC} = |\overline{BA}| |\overline{BC}| \cos \theta$$

$$= 3\sqrt{7} \times 12 \times \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$= 63$$

답 63

0472 오른쪽 그림과 같이 점 I에서

변 AB에 내린 수선의 발을 E라 하면

$$\overline{BE} = \overline{BD} = 8$$

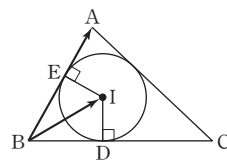
$$\therefore \overline{BA} \cdot \overline{BI}$$

$$= |\overline{BA}| |\overline{BI}| \cos (\angle EBI)$$

$$= |\overline{BA}| |\overline{BE}| \quad \leftarrow |\overline{BI}| \cos (\angle EBI) = |\overline{BE}|$$

$$= 15 \times 8 = 120$$

답 120



0473 $\overline{AF} = \overline{CD}$ 이고 $\angle BCD = 120^\circ$ 이므로 정육각형의 한 변의 길이를 a 라 하면

$$\overline{CB} \cdot \overline{AF} = \overline{CB} \cdot \overline{CD}$$

$$= -|\overline{CB}| |\overline{CD}| \cos (180^\circ - 120^\circ)$$

$$= -a \times a \times \cos 60^\circ$$

$$= -a \times a \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}a^2$$

$$\text{즉, } -\frac{1}{2}a^2 = -18 \text{이므로 } a^2 = 36 \quad \therefore a = 6 \quad (\because a > 0)$$

따라서 구하는 정육각형의 넓이는 한 변의 길이가 6인 정삼각형의 넓이의 6배이므로

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 \right) \times 6 = 54\sqrt{3}$$

답 $54\sqrt{3}$

0474 두 벡터 $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (1, 2)$ 에 대하여

$$t\vec{a} + \vec{b} = t(1, 0) + (1, 2) = (t+1, 2)$$

$$\vec{a} + t\vec{b} = (1, 0) + t(1, 2) = (t+1, 2t)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore f(t) &= (t\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + t\vec{b}) \\
 &= (t+1, 2) \cdot (t+1, 2t) \\
 &= (t+1)^2 + 2 \times 2t \\
 &= t^2 + 6t + 1 \\
 &= (t+3)^2 - 8
 \end{aligned}$$

따라서 $f(t)$ 는 $t = -3$ 일 때 최솟값 -8 을 갖는다.

답 -3

$$0475 \quad \vec{a} + \vec{b} = (4t - 2, -1) + \left(2, 1 + \frac{3}{t}\right) = \left(4t, \frac{3}{t}\right)$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (4t)^2 + \left(\frac{3}{t}\right)^2 = 16t^2 + \frac{9}{t^2}$$

이때 $t^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$16t^2 + \frac{9}{t^2} \geq 2\sqrt{16t^2 \times \frac{9}{t^2}} = 24 \quad \left(\text{단, 등호는 } t = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $|\vec{a} + \vec{b}|^2$ 의 최솟값은 24이다.

답 24

0476 두 점 P, Q의 좌표를 각각 $\left(\frac{a^2}{4}, a\right), \left(\frac{b^2}{4}, b\right)$ 라 하면

$$\overrightarrow{OP} = \left(\frac{a^2}{4}, a\right), \overrightarrow{OQ} = \left(\frac{b^2}{4}, b\right)$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \left(\frac{a^2}{4}, a\right) \cdot \left(\frac{b^2}{4}, b\right)$$

$$= \frac{a^2 b^2}{16} + ab = \frac{1}{16}(ab + 8)^2 - 4$$

따라서 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 의 최솟값은 $ab = -8$ 일 때 -4 이다.

답 ⑤

0477 $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$ 의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16$$

$$2^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 3^2 = 16 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3}{2}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$= 2^2 - 2 \times \frac{3}{2} + 3^2 = 10$$

$$\therefore |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{10}$$

답 ⑤

$$0478 \quad \vec{a} + \vec{b} = (-1, 3) + (2, -1) = (1, 2)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (-1, 3) - (2, -1) = (-3, 4)$$

$$\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = (1, 2) \cdot (-3, 4)$$

$$= -3 + 8 = 5$$

이때 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \geq 0$ 이므로 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

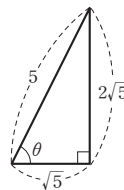
$$\therefore \cos \theta = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}| |\vec{a} - \vec{b}|}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{1^2 + 2^2} \sqrt{(-3)^2 + 4^2}}$$

$$= \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

오른쪽 그림과 같은 직각삼각형을 생각하면

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$



답 ⑤

0479 $|2\vec{a} + \vec{b}| = 4$ 의 양변을 제곱하면

$$4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16$$

$$4 \times 1^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 3^2 = 16 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3}{4}$$

이때 $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$ 이므로 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\frac{3}{4}}{1 \times 3} = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

0480 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \geq 0$ 이므로 두 벡터 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 가 이루는 각의 크기를 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$)라 하면

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = \frac{6\sqrt{3}}{3 \times 4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

따라서 평행사변형 AOBC의 넓이는

$$|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \sin 30^\circ = 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 6$$

답 6

0481 두 벡터 $6\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$ 가 서로 수직이므로

$$(6\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0 \text{에서}$$

$$6|\vec{a}|^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{b}|^2 = 0$$

$$6 \times 1^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 3^2 = 0$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{5}$$

답 ②

$$0482 \quad \vec{b} - \vec{c} = (-1, -3) - (-5, -1) = (4, -2)$$

$$k\vec{a} + \vec{c} = k(2, 1) + (-5, -1) = (2k - 5, k - 1)$$

두 벡터 $\vec{b} - \vec{c}, k\vec{a} + \vec{c}$ 가 서로 수직이므로

$$(\vec{b} - \vec{c}) \cdot (k\vec{a} + \vec{c}) = 0 \text{에서}$$

$$(4, -2) \cdot (2k - 5, k - 1) = 0$$

$$4(2k - 5) - 2(k - 1) = 0, 6k = 18 \quad \therefore k = 3$$

답 ③

0483 $\vec{b} - \vec{a} = (5, 8) - (3, 1) = (2, 7)$ 이므로 구하는 직선의 법선벡터는 $(2, 7)$ 이다.

점 $(3, -6)$ 을 지나고 법선벡터가 $(2, 7)$ 인 직선의 방정식은

$$2(x - 3) + 7(y + 6) = 0$$

$$\therefore 2x + 7y + 36 = 0$$

따라서 $m = 2, n = 36$ 이므로

$$m + n = 38$$

답 ②

0484 두 직선 l_1, l_2 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (k, -1), \vec{v} = (-3, 4)$$

두 직선이 이루는 각의 크기가 45° 이므로

$$\cos 45^\circ = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|-3k-4|}{\sqrt{k^2+(-1)^2} \sqrt{(-3)^2+4^2}}$$

$$5\sqrt{2k^2+2} = |-6k-8|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$7k^2 - 48k - 7 = 0, (7k+1)(k-7) = 0$$

$$\therefore k = 7 \quad (\because k \text{는 자연수})$$

답 ①

0485 두 점 A(2, 4), B(k, 12)를 지나는 직선을 m 이라 하면 직선 m 의 방향벡터는

$$\overrightarrow{AB} = (k, 12) - (2, 4) = (k-2, 8)$$

직선 $l: \frac{x-1}{3} = \frac{3-y}{2}$ 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (3, -2)$$

두 벡터 $\overrightarrow{AB}, \vec{u}$ 가 서로 평행하므로 $\overrightarrow{AB} = t\vec{u} \quad (t \neq 0)$ 라 하면

$$(k-2, 8) = t(3, -2)$$

따라서 $k-2=3t, 8=-2t$ 이므로

$$t = -4, k = -10$$

답 -10

0486 주어진 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (-1, 2), \vec{v} = (1, a)$$

두 직선이 서로 수직이므로 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ 에서

$$(-1, 2) \cdot (1, a) = 0$$

$$-1 + 2a = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

답 ③

0487 $(\vec{p}-\vec{a}) \cdot (\vec{p}-\vec{b}) = 0$ 에서

$$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}) = 0$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$$

즉, $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$ 이므로 점 P는 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원 위의 점이다.

이때 $AB = \sqrt{(5-1)^2 + (2+2)^2} = 4\sqrt{2}$ 이므로 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이다.

따라서 구하는 넓이는 $\pi \times (2\sqrt{2})^2 = 8\pi$

답 8π

다른풀이 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\vec{p}-\vec{a} = (x-1, y+2), \vec{p}-\vec{b} = (x-5, y-2)$$

$$(\vec{p}-\vec{a}) \cdot (\vec{p}-\vec{b}) = 0 \text{에서}$$

$$(x-1, y+2) \cdot (x-5, y-2) = 0$$

$$(x-1)(x-5) + (y+2)(y-2) = 0$$

$$x^2 - 6x + y^2 + 1 = 0$$

$$\therefore (x-3)^2 + y^2 = 8$$

064 정답과 풀이

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 (3, 0)이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이므로 그 넓이는

$$\pi \times (2\sqrt{2})^2 = 8\pi$$

0488 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overrightarrow{PA} = (2-x, -y), \overrightarrow{PB} = (4-x, 5-y),$$

$$\overrightarrow{PC} = (-3-x, 1-y)$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$$

$$= (2-x, -y) + (4-x, 5-y) + (-3-x, 1-y)$$

$$= (3-3x, 6-3y)$$

$$|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}| = 4 \text{에서}$$

$$\sqrt{(3-3x)^2 + (6-3y)^2} = 4$$

양변을 제곱하면

$$(3-3x)^2 + (6-3y)^2 = 16$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-2)^2 = \frac{16}{9}$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 (1, 2)이고 반지름의 길이가 $\frac{4}{3}$ 인 원이므로 그 둘레의 길이는

$$2\pi \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}\pi$$

답 $\frac{8}{3}\pi$

0489 $\vec{a} + \vec{b} = (1, 2) + (-3, 4) = (-2, 6)$

$$k\vec{a} + (1-k)\vec{b} = k(1, 2) + (1-k)(-3, 4)$$

$$= (4k-3, -2k+4)$$

㉠

이때 두 벡터 $\vec{a} + \vec{b}, k\vec{a} + (1-k)\vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$k\vec{a} + (1-k)\vec{b} = t(\vec{a} + \vec{b}) \quad (t \neq 0) \text{라 하면}$$

$$(4k-3, -2k+4) = t(-2, 6)$$

㉡

따라서 $4k-3 = -2t, -2k+4 = 6t$ 이므로

$$t = \frac{1}{2}, k = \frac{1}{2}$$

㉢

답 $\frac{1}{2}$

단계	채점요소	배점
㉠	$\vec{a} + \vec{b}, k\vec{a} + (1-k)\vec{b}$ 를 성분으로 나타내기	30%
㉡	평행 조건을 이용하여 식 세우기	40%
㉢	k 의 값 구하기	30%

0490 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$ 라 하면

점 P는 $\overline{BC}$ 를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\vec{b} + 2\vec{a}}{1+2} = \frac{1}{3}(2\vec{a} + \vec{b})$$

점 Q는 $\overline{BC}$ 를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{2\vec{b} + \vec{a}}{2+1} = \frac{1}{3}(\vec{a} + 2\vec{b})$$

또, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $\angle BAC = 60^\circ$ 이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} &= \frac{1}{9}(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= \frac{1}{9}(2|\vec{a}|^2 + 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 2|\vec{b}|^2) \\ &= \frac{1}{9}(2 \times 2^2 + 5 \times 2 + 2 \times 2^2) \\ &= \frac{26}{9} \end{aligned}$$

답 $\frac{26}{9}$

단계	채점요소	배점
㉠	$\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$ 를 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 로 나타내기	40%
㉡	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 구하기	30%
㉢	$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 구하기	30%

0491 점 A에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overrightarrow{AH}$ 는 점 A(0, 1)과 직선 $\frac{x-1}{2} = 3-y$, 즉 $x+2y-7=0$ 사이의 거리
이므로

$$|\overrightarrow{AH}| = \frac{|2-7|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

이때 $\overrightarrow{AH}$ 는 정삼각형 ABC의 높이이므로 정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a 라 하면

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a = \sqrt{5} \quad \therefore a = \frac{2\sqrt{15}}{3}$$

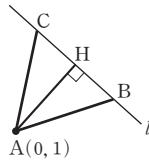
$$\therefore |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = \frac{2\sqrt{15}}{3}$$

또, $\angle BAC = 60^\circ$ 이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ \\ &= \frac{2\sqrt{15}}{3} \times \frac{2\sqrt{15}}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{10}{3}$

단계	채점요소	배점
㉠	점 A와 직선 l 사이의 거리 구하기	30%
㉡	$ \overrightarrow{AB} $, $ \overrightarrow{AC} $ 구하기	40%
㉢	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 구하기	30%



0492 점 A(-2, 1)을 지나고 방향벡터가 (3, -2)인 직선 l 의 방정식은

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} \quad \therefore 2x+3y=-1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

또, 두 점 B(2, -1), C(3, 1)을 지나고 직선 m 의 방정식은

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+1}{1-(-1)} \quad \therefore 2x-y=5 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

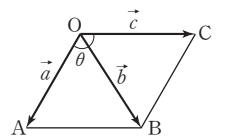
$$x = \frac{7}{4}, y = -\frac{3}{2}$$

따라서 두 직선 l , m 의 교점의 좌표는 $(\frac{7}{4}, -\frac{3}{2})$ 이다.

답 $(\frac{7}{4}, -\frac{3}{2})$

단계	채점요소	배점
㉠	직선 l 의 방정식 구하기	40%
㉡	직선 m 의 방정식 구하기	40%
㉢	두 직선 l , m 의 교점의 좌표 구하기	20%

0493 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} < 0$ 에서 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ 가 이루는 각은 둔각이므로 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ 라 하면 $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$ 이므로



$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \text{에서}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = 2 \quad \therefore |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{c} = 2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 2 \text{에서}$$

$$(\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{c} = 2 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 2 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -2 \text{에서 } \vec{a} \cdot \vec{c} = -2$$

이것을 ㉠, ㉡에 각각 대입하여 정리하면

$$|\vec{a}|^2 = 4, |\vec{c}|^2 = 4$$

$$\therefore |\vec{a}| = 2, |\vec{c}| = 2$$

한편, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{c}$ 가 이루는 각의 크기를 θ ($90^\circ < \theta < 180^\circ$)라 하면

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = -|\vec{a}| |\vec{c}| \cos(180^\circ - \theta)$$

$$-2 = -2 \times 2 \times \cos(180^\circ - \theta)$$

$$\therefore \cos(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2}$$

즉, $180^\circ - \theta = 60^\circ$ 이므로 $\theta = 120^\circ$

따라서 평행사변형 OABC의 넓이는

$$|\vec{a}| |\vec{c}| \sin(180^\circ - 120^\circ) = 2 \times 2 \times \sin 60^\circ$$

$$= 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

답 $2\sqrt{3}$

05 | 공간도형



교과서 문제 정복하기

본문 73쪽, 75쪽

0494 조건 (가)에서 $|\overrightarrow{AH}|=2k$, $|\overrightarrow{HB}|=3k$ ($k>0$)라 하면

$$|\overrightarrow{AB}|=5k$$

두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 가 이루는 각의 크기를 θ ($0^\circ<\theta<90^\circ$)라 하면 조건 (나)에서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos \theta \\ &= |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AH}| + |\overrightarrow{AC}| \cos \theta = |\overrightarrow{AH}| \\ &= 5k \times 2k = 10k^2\end{aligned}$$

$$\text{즉, } 10k^2=40 \text{ 이므로 } k^2=4 \quad \therefore k=2 \quad (\because k>0)$$

조건 (다)에서

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{CH}| \\ &= \frac{1}{2} \times 10 \times |\overrightarrow{CH}| + |\overrightarrow{AB}| = 5k = 5 \times 2 = 10 \\ &= 5 |\overrightarrow{CH}|\end{aligned}$$

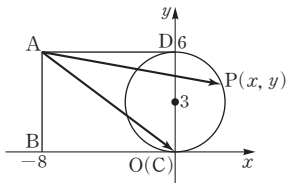
$$\text{즉, } 5 |\overrightarrow{CH}| = 30 \text{ 이므로 } |\overrightarrow{CH}| = 6$$

두 벡터 $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CH}$ 가 이루는 각의 크기는 $90^\circ - \theta$ 이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CH} &= |\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{CH}| \cos (90^\circ - \theta) \\ &= |\overrightarrow{CH}|^2 + |\overrightarrow{CA}| \cos (90^\circ - \theta) = |\overrightarrow{CH}| \\ &= 6^2 = 36\end{aligned}$$

답 ①

0495 다음 그림과 같이 주어진 도형을 직선 BC를 x 축으로 하고 직선 CD를 y 축으로 하는 좌표평면 위에 놓으면 $A(-8, 6)$, $B(-8, 0)$, $C(0, 0)$, $D(0, 6)$



이때 $\overline{CD}$ 를 지름으로 하는 원의 중심의 좌표는 $(0, 3)$ 이고 반지름의 길이는 3이므로 이 원의 방정식은

$$x^2 + (y-3)^2 = 9 \quad \dots\dots ①$$

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= (8, -6), \overrightarrow{AP} = (x+8, y-6) \\ \therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP} &= (8, -6) \cdot (x+8, y-6) \\ &= 8(x+8) - 6(y-6) \\ &= 8x - 6y + 100\end{aligned}$$

이때 점 P가 원 ① 위에 있으므로 $8x - 6y + 100 = k$ (k 는 상수)라 하면 원 ①과 이 직선이 만나야 한다.

즉, 원의 중심 $(0, 3)$ 과 직선 $8x - 6y + 100 - k = 0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 3 이하이어야 하므로

$$\begin{aligned}\frac{|-18 + 100 - k|}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} &\leq 3 \\ |82 - k| &\leq 30, -30 \leq 82 - k \leq 30 \\ \therefore 52 &\leq k \leq 112\end{aligned}$$

따라서 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP}$ 의 최솟값은 52이다.

답 ②

0496 사각뿔 A-BCDE에서 5개의 꼭짓점으로 만들 수 있는 서로 다른 평면은

평면 BCDE, 평면 ABC, 평면 ACD, 평면 ADE, 평면 ABE, 평면 ABD, 평면 ACE

따라서 구하는 평면의 개수는 7이다.

답 7

0497 답 모서리 AD, 모서리 AE, 모서리 BC, 모서리 BF

0498 답 모서리 DC, 모서리 EF, 모서리 HG

0499 답 모서리 DH, 모서리 CG, 모서리 EH, 모서리 FG

0500 답 면 ABCD, 면 AEFB

0501 답 면 AEHD, 면 BFGC

0502 답 면 DHGC, 면 EFGH

0503 답 면 ABCD, 면 BFGC, 면 EFGH, 면 AEHD

0504 답 면 DHGC

0505 답 면 ACFD, 면 ABED, 면 BCFE

0506 답 면 DEF

0507 $\overrightarrow{DH} \parallel \overrightarrow{AE}$ 이므로 직선 AB와 직선 DH가 이루는 각의 크기는 직선 AB와 직선 AE가 이루는 각의 크기와 같다.

이때 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AE}$ 이므로 $\angle BAE = 90^\circ$

따라서 직선 AB와 직선 DH가 이루는 각의 크기는 90° 이다.

답 90°

0508 $\overrightarrow{FG} \parallel \overrightarrow{BC}$ 이므로 직선 AC와 직선 FG가 이루는 각의 크기는 직선 AC와 직선 BC가 이루는 각의 크기와 같다.

이때 삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이므로

$$\angle ACB = 45^\circ$$

따라서 직선 AC와 직선 FG가 이루는 각의 크기는 45° 이다.

답 45°

0509 $\overrightarrow{BE} \parallel \overrightarrow{CF}$ 이므로 직선 AC와 직선 BE가 이루는 각의 크기는 직선 AC와 직선 CF가 이루는 각의 크기와 같다.
 이때 $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{CF}$ 이므로 $\angle ACF = 90^\circ$
 따라서 직선 AC와 직선 BE가 이루는 각의 크기는 90° 이다.
답 90°

0510 $\overrightarrow{DF} \parallel \overrightarrow{AC}$ 이므로 직선 BC와 직선 DF가 이루는 각의 크기는 직선 BC와 직선 AC가 이루는 각의 크기와 같다.
 이때 삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이므로
 $\angle ACB = 45^\circ$
 따라서 직선 BC와 직선 DF가 이루는 각의 크기는 45° 이다.
답 45°

0511 직선 AD는 평면 AEFB 위의 평행하지 않은 두 직선 AB, AE와 각각 수직이므로
 $\overrightarrow{AD} \perp (\text{평면 AEFB})$
 따라서 모서리 AD와 면 AEFB가 이루는 각의 크기는 90° 이다.
답 90°

0512 두 삼각형 ABC, DBC는 모두 정삼각형이고,
 $\overline{BM} = \overline{CM}$ 이므로
 $\overline{BC} \perp \overline{AM}$, $\overline{BC} \perp \overline{DM}$
 즉, $\overline{BC}$ 는 평면 AMD 위의 평행하지 않은 두 직선 AM, DM
 과 각각 수직이므로
 $\overline{BC} \perp (\text{평면 AMD})$
답 풀이 참조

0513 $\overline{BC} \perp (\text{평면 AMD})$ 이므로 $\overline{BC}$ 는 평면 AMD 위의 임의의 직선과 수직이다.
 $\therefore \overline{BC} \perp \overline{AD}$
답 풀이 참조

0514 삼각형 PHO는 빗변이 $\overline{PH}$ 인 직각삼각형이므로
 $\overline{PH} = \sqrt{\overline{OH}^2 + \overline{OP}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \boxed{5}$
 $\overline{PO} \perp \alpha$ 이고 $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여
 $\overline{PH} \perp \overline{AB}$
 따라서 삼각형 AHP는 빗변이 $\overline{AP}$ 인 직각삼각형이므로
 $\overline{AP} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{PH}^2} = \sqrt{(\sqrt{11})^2 + 5^2} = \boxed{6}$
답 (가) 5 (나) $\overline{AB}$ (다) 6

0515 **답** (가) l (나) n

0516 **답** 점 A

0517 **답** 선분 CH

0518 **답** 삼각형 DHC

0519 **답** 선분 CF

0520 $\overline{A'B'} = 4 \cos 60^\circ = 2$ **답** 2

0521 $5\sqrt{3} = 10 \cos \theta$ 에서 $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 이므로 $\theta = 30^\circ$ **답** 30°

0522 구하는 정사영의 넓이를 S' 이라 하면
 $S' = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \times \cos 30^\circ = \frac{3}{2}$ **답** $\frac{3}{2}$

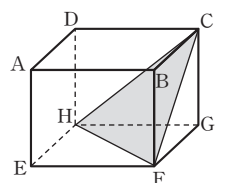
0523 구하는 정사영의 넓이를 S' 이라 하면
 $S' = 4^2 \times \cos 45^\circ = 8\sqrt{2}$ **답** $8\sqrt{2}$

유형 익히기 본문 76~83쪽

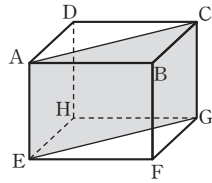
0524 (i) 두 직선 BD, DF로 만들 수 있는 평면은 평면 BDF의 1개이다.
 (ii) 네 꼭짓점 A, C, E, G로 만들 수 있는 평면은 평면 AEGC의 1개이다.
 (iii) 직선 BD와 네 꼭짓점 A, C, E, G로 만들 수 있는 평면은 평면 ABCD, 평면 BDE, 평면 BDG의 3개이다.
 (iv) 직선 DF와 네 꼭짓점 A, C, E, G로 만들 수 있는 평면은 평면 AFGD, 평면 DEFC의 2개이다.
 (i) ~ (iv)에서 구하는 서로 다른 평면의 개수는
 $1 + 1 + 3 + 2 = 7$ **답** 7

0525 (i) 세 점 B, D, E로 만들 수 있는 평면은 평면 BCDE의 1개이다.
 (ii) 직선 AC와 세 점 B, D, E로 만들 수 있는 평면은 평면 ABC, 평면 ACD, 평면 AEC의 3개이다.
 (i), (ii)에서 구하는 서로 다른 평면의 개수는
 $1 + 3 = 4$ **답** 4

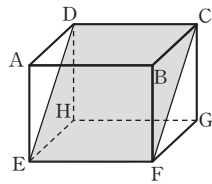
0526 ① 세 점 H, F, C는 한 직선 위에 있지 않다.
 즉, 세 점 H, F, C는 평면 HFC를 결정한다.



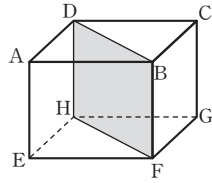
- ② 점 A는 직선 CG 위에 있지 않다.
즉, 점 A와 직선 CG는 평면 AEGC를 결정한다.



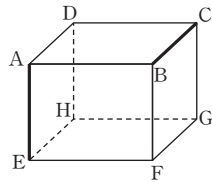
- ③ 직선 CF와 직선 DE는 평행하다.
즉, 직선 CF와 직선 DE는 평면 CDEF를 결정한다.



- ④ 직선 DH와 직선 HF는 한 점 H에서 만난다.
즉, 직선 DH와 직선 HF는 평면 DHFB를 결정한다.



- ⑤ 직선 AE와 직선 BC는 평행하지도 않고 한 점에서 만나지도 않는다.
즉, 두 직선 AE, BC는 꼬인 위치에 있으므로 한 평면을 결정하지 않는다.



따라서 한 평면을 결정하지 않는 것은 ⑤이다. **답 ⑤**

0527 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 한 평면을 결정하므로 구하는 평면의 개수는 6개의 점에서 3개를 선택하는 조합의 수와 같다.

$$\therefore {}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20 \quad \text{답 20}$$

0528 ④ 평면 DHIE와 평행한 모서리는 $\overline{AB}$, $\overline{CF}$, $\overline{GJ}$, $\overline{CG}$, $\overline{FJ}$ 의 5개이다.

⑤ 직선 AD와 꼬인 위치에 있는 모서리는 $\overline{CF}$, $\overline{EF}$, $\overline{BF}$, $\overline{GJ}$, $\overline{HI}$, $\overline{EI}$, $\overline{FJ}$, $\overline{JI}$ 의 8개이다. **답 ⑤**

0529 ㄱ. 직선 DF와 평행한 모서리는 $\overline{AC}$ 의 1개이다. (참)
ㄴ. 직선 DE와 꼬인 위치에 있는 모서리는 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{CF}$ 의 3개이다. (참)
ㄷ. 평면 ABC와 평행한 면은 면 DEF의 1개이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. **답 ㄱ, ㄴ, ㄷ**

0530 직선 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리는 $\overline{ED}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{CF}$ 의 4개이고, 평면 CFD와 평행한 모서리는 $\overline{BE}$, $\overline{AB}$, $\overline{AE}$ 의 3개이다.
따라서 구하는 합은 $4 + 3 = 7$ **답 7**

0531 직선 AH와 꼬인 위치에 있는 모서리는 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{IJ}$, $\overline{JK}$, $\overline{KL}$, $\overline{LG}$, $\overline{CI}$, $\overline{DJ}$, $\overline{EK}$, $\overline{FL}$ 의 12개이므로 $a = 12$

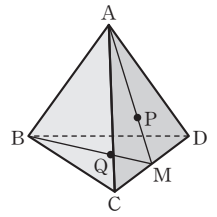
직선 AH와 평행한 면은 면 EKJD의 1개이므로 $b = 1$

$$\therefore a + b = 12 + 1 = 13$$

답 13

단계	채점요소	배점
㉠	a의 값 구하기	50%
㉡	b의 값 구하기	40%
㉢	a+b의 값 구하기	10%

0532 ㄱ. 두 점 P, Q는 각각 두 삼각형 ACD, BCD의 무게중심이므로 오른 쪽 그림과 같이 $\overline{CD}$ 의 중점을 M이라 하면



$$\overline{AP} : \overline{PM} = 2 : 1$$

$$\overline{BQ} : \overline{QM} = 2 : 1$$

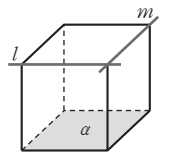
즉, 삼각형 ABM에서 $\overline{AP} : \overline{PM} = \overline{BQ} : \overline{QM}$ 이므로 $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$ (거짓)

ㄴ. 직선 BD와 직선 PQ는 만나지도 않고 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다. (참)

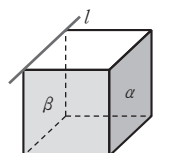
ㄷ. 직선 PQ는 평면 ABD에 포함되지도 않고 만나지도 않으므로 평행하다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. **답 ㄴ, ㄷ**

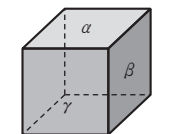
0533 ㄱ. 오른쪽 그림과 같이 $l \parallel \alpha$ 이고 $m \parallel \alpha$ 이지만 직선 l과 직선 m이 한 점에서 만날 수도 있다. (거짓)



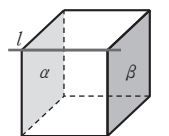
ㄴ. 오른쪽 그림과 같이 $l \parallel \alpha$ 이고 $l \perp \beta$ 이면 $\alpha \perp \beta$ 이다. (참)



ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 $\alpha \perp \beta$ 이고 $\alpha \perp \gamma$ 이지만 $\beta \perp \gamma$ 일 수도 있다. (거짓)

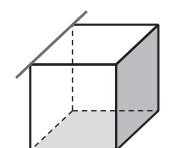


ㄹ. 오른쪽 그림과 같이 $l \perp \alpha$ 이고 $l \perp \beta$ 이면 $\alpha \parallel \beta$ 이다. (참)

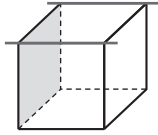


따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. **답 ㉣**

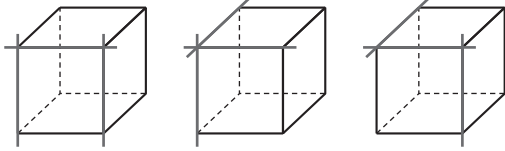
0534 ① 오른쪽 그림과 같이 한 직선에 평행한 서로 다른 두 평면은 만날 수도 있다. (거짓)



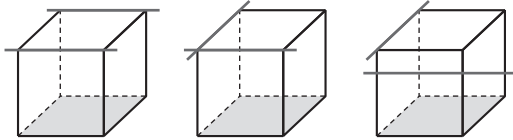
- ② 오른쪽 그림과 같이 한 평면에 수직인 서로 다른 두 직선은 항상 평행하다. (참)



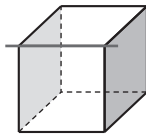
- ③ 다음 그림과 같이 한 직선에 수직인 서로 다른 두 직선은 평행하거나 만나거나 꼬인 위치에 있다. (거짓)



- ④ 다음 그림과 같이 한 평면에 평행한 서로 다른 두 직선은 평행하거나 만나거나 꼬인 위치에 있다. (거짓)



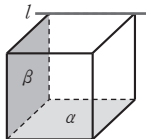
- ⑤ 오른쪽 그림과 같이 한 직선에 수직인 서로 다른 두 평면은 항상 평행하다. (참)



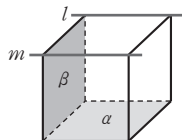
따라서 옳은 것은 ②, ⑤이다.

답 ②, ⑤

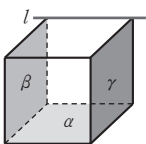
- 0535 ㄱ. 오른쪽 그림과 같이 직선 l 과 평면 β 가 만날 수도 있다. (거짓)



- ㄴ. 오른쪽 그림과 같이 직선 m 이 직선 l 과 평행한 경우도 있다. (거짓)



- ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 직선 l 과 수직인 평면 γ 는 평면 α 와 항상 수직이다. (참)



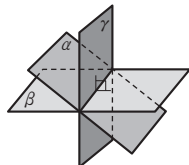
따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ②

- 0536 주어진 조건에서 나누어지는 공간의 개수는 다음 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

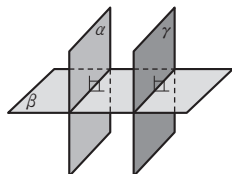
- (i) 두 평면 α, β 가 수직이 아닌 경우

세 평면 α, β, γ 의 위치 관계가 오른쪽 그림과 같을 때 나누어지는 공간의 개수가 최소이므로 그 개수는 6이다.



- (ii) 두 평면 α, β 가 수직인 경우

세 평면 α, β, γ 의 위치 관계가 오른쪽 그림과 같을 때 나누어지는 공간의 개수가 최소이므로 그 개수는 6이다.



- (i), (ii)에서 구하는 공간의 최소 개수는 6이다.

답 ④

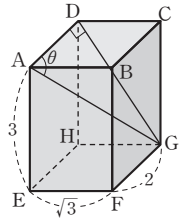
- 0537 $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ 이므로 직선 AG와 직선 BC가 이루는 각의 크기는 직선 AG와 직선 AD가 이루는 각의 크기와 같다.

$$\therefore \angle DAG = \theta$$

$$\text{이때 } \overline{AG} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4 \text{이고}$$

삼각형 AGD는 직각삼각형이므로

$$\cos \theta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AG}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



답 ①

- 0538 $\overline{DE} \parallel \overline{CF}$ 이므로 직선 DE와 직선 HF가 이루는 각의 크기는 직선 CF와 직선 HF가 이루는 각의 크기와 같다.

이때 삼각형 CHF는 정삼각형이므로 $\angle CFH = 60^\circ$ 이다.

따라서 직선 DE와 직선 HF가 이루는 각의 크기는 60° 이다.

답 ③

- 0539 $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$ 이므로 직선 AB와 직선 CD가 이루는 각의 크기는 직선 AB와 직선 BE가 이루는 각의 크기와 같다.

이때 삼각형 ABE는 정삼각형이므로 $\angle ABE = 60^\circ$ 이다.

따라서 직선 AB와 직선 CD가 이루는 각의 크기는 60° 이다.

답 ④

- 0540 $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ 이므로 직선 AD와 직선 BE가 이루는 각의 크기는 직선 AD와 직선 CD가 이루는 각의 크기와 같다.

$$\therefore \angle ADC = \theta$$

이때 삼각형 ACD는 정삼각형이므로 $\angle ADC = 60^\circ$ 이다.

$$\therefore \sin \theta = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

- 0541 ① $\overline{EH} \parallel \overline{AD}$ 이고 $\overline{AB} \perp \overline{AD}$ 이므로 $\overline{AB} \perp \overline{EH}$

$$\text{즉, } \theta = 90^\circ \text{이므로 } \cos \theta = 0$$

- ② $\overline{CG} \parallel \overline{BF}$ 이고 $\overline{AB} \perp \overline{BF}$ 이므로 $\overline{AB} \perp \overline{CG}$

$$\text{즉, } \theta = 90^\circ \text{이므로 } \cos \theta = 0$$

- ③ $\overline{EG} \parallel \overline{AC}$ 이므로 $\overline{AB}$ 와 $\overline{EG}$ 가 이루는 각의 크기는 $\overline{AB}$ 와 $\overline{AC}$ 가 이루는 각의 크기와 같다. $\therefore \angle CAB = \theta$

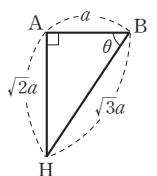
이때 삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 인 직각이등변삼각형이므로 $\angle CAB = 45^\circ$ 이다.

$$\therefore \cos \theta = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- ④ $\overline{AB} = a$ 라 하면 $\overline{AH} = \sqrt{2}a$, $\overline{BH} = \sqrt{3}a$ 이므로 삼각형 AHB는 $\angle BAH = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

이때 $\theta = \angle ABH$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BH}} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



⑤ $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ 이고 $\overline{EF} \perp \overline{DE}$ ($\because \overline{EF} \perp$ (평면 AEHD))이므로 $\overline{AB} \perp \overline{DE}$

즉, $\theta = 90^\circ$ 이므로 $\cos \theta = 0$

따라서 $\cos \theta$ 의 값이 가장 큰 것은 ③이다.

답 ③

0542 오른쪽 그림과 같이 합동인 두 정육면체를 이어 붙여 직육면체를 만들면 $\overline{CF} \parallel \overline{GI}$ 이므로 직선 AG와 직선 CF가 이루는 각의 크기는 직선 AG와 직선 GI가 이루는 각의 크기와 같다. $\therefore \angle AGI = \theta$

이때 정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

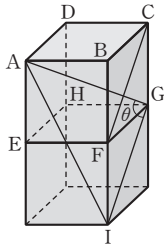
$$\overline{GI} = \sqrt{2}a, \overline{AG} = \sqrt{3}a,$$

$$\overline{AI} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}a$$

이므로 삼각형 AIG는 $\angle AGI = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$$\therefore \cos \theta = \cos 90^\circ = 0$$

답 0



0543 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}$ 의 중점을 L이라 하면 삼각형의 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의하여

$$\overline{ML} \parallel \overline{BD}, \overline{ML} = \frac{1}{2} \overline{BD}$$

$$\overline{LN} \parallel \overline{AC}, \overline{LN} = \frac{1}{2} \overline{AC}$$

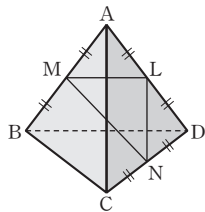
그런데 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, $\overline{AC} = \overline{BD}$ 이므로

$$\overline{ML} = \overline{LN}, \overline{ML} \perp \overline{LN}$$

즉, 삼각형 LMN은 직각이등변삼각형이다.

따라서 직선 MN과 직선 AC가 이루는 각의 크기는 직선 MN과 직선 LN이 이루는 각의 크기와 같고, 그 크기는 45° 이다.

답 45°



0544 $\overline{DH} \perp$ (평면 EFGH), $\overline{DI} \perp \overline{EG}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HI} \perp \overline{EG}$

직각삼각형 HEG에서 $\overline{EG} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$$\triangle HEG = \frac{1}{2} \times \overline{EH} \times \overline{HG} = \frac{1}{2} \times \overline{EG} \times \overline{HI} \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times \overline{HI} \quad \therefore \overline{HI} = \frac{12}{5}$$

따라서 직각삼각형 DHI에서

$$\overline{DI} = \sqrt{\overline{DH}^2 + \overline{HI}^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{41}}{5}$$

답 $\frac{3\sqrt{41}}{5}$

0545 $\overline{PH} \perp \alpha$, $\overline{HQ} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$

직각삼각형 PQH에서 $\overline{PQ} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2} = 3\sqrt{2}$

따라서 직각삼각형 PAQ에서

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AQ}^2 + \overline{PQ}^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = 6$$

답 6

070 정답과 풀이

0546 $\overline{AB} \perp \alpha$, $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AC} \perp \overline{CD}$

직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

또, 직각삼각형 BCD에서 $\overline{CD} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

$$\therefore \triangle ACD = \frac{1}{2} \times \overline{CD} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$$

답 10

단계	채점요소	배점
㉑	$\overline{AC} \perp \overline{CD}$ 임을 보이기	40%
㉒	$\overline{AC}$, $\overline{CD}$ 의 길이 구하기	40%
㉓	삼각형 ACD의 넓이 구하기	20%

0547 $\overline{CO} \perp \overline{OA}$, $\overline{CO} \perp \overline{OB}$ 이므로 $\overline{CO} \perp$ (평면 OAB)

$\overline{CO} \perp$ (평면 OAB), $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{OH} \perp \overline{AB}$

직각삼각형 OAB에서 $\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OH} \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{1}{2} \times 5 \times \overline{OH} \quad \therefore \overline{OH} = \frac{12}{5}$$

따라서 직각삼각형 COH에서

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{CO}^2 + \overline{OH}^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{13}{5}$$

답 ①

0548 $\overline{AD} \perp$ (평면 DEF), $\overline{AH} \perp \overline{EF}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{DH} \perp \overline{EF}$

직각삼각형 DEF에서 $\overline{EF} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$$\triangle DEF = \frac{1}{2} \times \overline{DE} \times \overline{DF} = \frac{1}{2} \times \overline{EF} \times \overline{DH} \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \overline{DH} \quad \therefore \overline{DH} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

따라서 직각삼각형 ADH에서

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AH}^2 - \overline{DH}^2} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = 1$$

답 ②

0549 점 A에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH} \perp \alpha$, $\overline{AP} \perp \overline{PQ}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HP} \perp \overline{PQ}$

$\overline{HP} = a$ 라 하면 삼각형 HPQ에서 $\angle HPQ = 90^\circ$ 이므로

$$\overline{HQ} = \sqrt{a^2 + 9}$$

선분 PQ가 그리는 도형의 넓이는

오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이

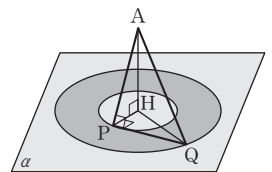
와 같으므로

$$\pi \times \overline{HQ}^2 - \pi \times \overline{HP}^2$$

$$= \pi \times (\overline{a^2 + 9}) - \pi \times a^2$$

$$= \pi \{ (a^2 + 9) - a^2 \} = 9\pi$$

답 9π



0550 $\overline{AE} \perp$ (평면 ABCD),

$\overline{AM} \perp \overline{BM}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{EM} \perp \overline{BM}$

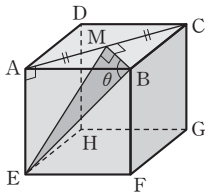
이때 주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

$$\overline{BE} = \sqrt{2}a, \overline{BM} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

따라서 직각삼각형 MEB에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{BM}}{\overline{BE}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$



0551 오른쪽 그림과 같이 직선 l 위의 점 A에서 교선 XY에 내린 수선의 발을 B라 하고, 점 B에서 직선 m 에 내린 수선의 발을 C라 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AC} \perp \overline{PC}$ 이다.

이때 $\overline{PA} = 1$ 이라 하면

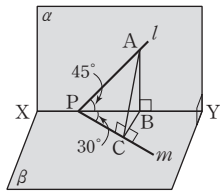
$$\overline{PB} = \overline{PA} \cos 45^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{PC} = \overline{PB} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

이때 $\theta = \angle APC$ 이므로 직각삼각형 APC에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{4}}{1} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

답 $\frac{\sqrt{6}}{4}$



0552 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\overline{DM} \perp \overline{EG}$

이때 $\overline{DH} \perp$ (평면 EFGH), $\overline{DM} \perp \overline{EG}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HM} \perp \overline{EG}$

즉, 평면 EFGH와 평면 DEG가 이루는 각의 크기는 직선 DM과 직선 HM이 이루는 각의 크기와 같다.

$$\therefore \theta = \angle DMH$$

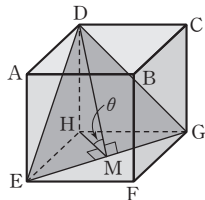
정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

$$\overline{HM} = \frac{1}{2} \overline{HF} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\overline{DM} = \sqrt{\overline{DH}^2 + \overline{HM}^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{HM}}{\overline{DM}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{6}}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$



0553 $\overline{FG} \perp \overline{AF}$, $\overline{FG} \perp \overline{EF}$ 이므로 평면 AFGD와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기는 $\overline{AF}$ 와 $\overline{EF}$ 가 이루는 각의 크기와 같다.

즉, 평면 AFGD와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\theta = \angle AFE$

직각삼각형 AEF에서 $\overline{AF} = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2} = 10$ 이므로

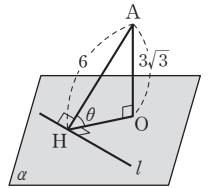
$$\cos \theta = \frac{\overline{EF}}{\overline{AF}} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \theta = 30^\circ$$

답 30°

0554 점 A에서 직선 l 과 평면 α 에 내린 수선의 발을 각각 H, O라 하면

$\overline{AO} \perp \alpha$, $\overline{AH} \perp l$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{OH} \perp l$



점 A와 직선 l 로 결정되는 평면이 평면 α 와 이루는 각은 $\angle AHO$ 이다.

$\angle AHO = \theta$ 라 하면 직각삼각형 AHO에서

$$\sin \theta = \frac{\overline{AO}}{\overline{AH}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

답 60°

단계	채점요소	배점
㉠	삼수선의 정리를 이용하여 $\overline{OH} \perp l$ 임을 보이기	40 %
㉡	구하는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\sin \theta$ 의 값 구하기	40 %
㉢	θ 의 크기 구하기	20 %

0555 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 밑면인 정사각형의 두 대각선의 교점이므로 $\overline{BH} = \overline{CH}$

$\overline{BC}$ 의 중점을 M이라 하면

$\overline{AM} \perp \overline{BC}$, $\overline{HM} \perp \overline{BC}$

$$\therefore \theta = \angle AMH$$

이때 사각뿔의 한 모서리의 길이를 $2a$ 라 하면

$$\overline{MH} = \frac{1}{2} \times 2a = a, \overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a = \sqrt{3}a$$

$$\therefore \theta = \angle AMH$$

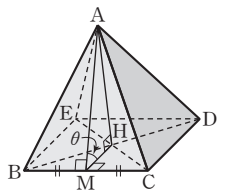
이때 사각뿔의 한 모서리의 길이를 $2a$ 라 하면

$$\overline{MH} = \frac{1}{2} \times 2a = a, \overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a = \sqrt{3}a$$

이므로 직각삼각형 AMH에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{MH}}{\overline{AM}} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

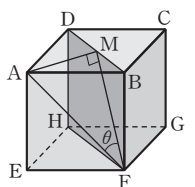
답 ㉢



0556 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 DHFB에 내린 수선의 발을 M이라 하면 점 M은 $\overline{BD}$ 의 중점이고 $\theta = \angle AFM$ 이다.

정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면 $\overline{AF} = \sqrt{2}a$,

$$\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$



따라서 직각삼각형 AFM에서

$$\sin \theta = \frac{\overline{AM}}{\overline{AF}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{2}$$

답 ②

0557 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 밑면 BCD에 내린 수선의 발을 H, $\overline{BH}$ 의 연장선과 $\overline{CD}$ 의 교점을 M이라 하면

$$\theta = \angle ABH$$

점 H는 정삼각형 BCD의 무게중심이므로 $\overline{BM} \perp \overline{CD}$ 이다.

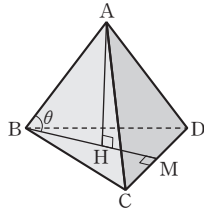
정사면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

$$\overline{AB} = a, \overline{BH} = \frac{2}{3} \overline{BM} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

따라서 직각삼각형 ABH에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$



0558 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H, 직선 AB와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\theta = \angle ABH$$

점 H는 정사각형 BCDE의 두 대각선의 교점이므로 정사면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

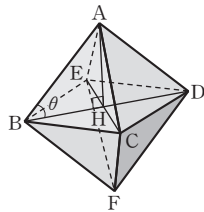
$$\overline{AB} = a, \overline{BH} = \frac{1}{2} \overline{BD} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

따라서 직각삼각형 ABH에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

답 45°



0559 오른쪽 그림과 같이 점 G에서 평면 DEF에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\theta = \angle GFH$$

점 H는 $\overline{DE}$ 의 중점이므로

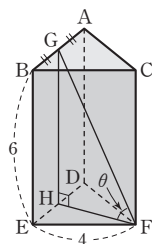
$$\overline{FH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

따라서 직각삼각형 GHF에서

$$\overline{GF} = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{FH}}{\overline{GF}} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$



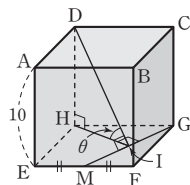
0560 $\overline{DH} \perp$ (평면 EFGH),

$\overline{DI} \perp \overline{MG}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{HI} \perp \overline{MG}$$
이고 $\theta = \angle DIH$

직각삼각형 MFG에서

$$\overline{MG} = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$$



이때

$$\triangle HMG = \frac{1}{2} \times \overline{MG} \times \overline{HI} = \frac{1}{2} \times \square EFGH \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \times 5\sqrt{5} \times \overline{HI} = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \quad \therefore \overline{HI} = 4\sqrt{5}$$

또, 직각삼각형 DHI에서

$$\overline{DI} = \sqrt{10^2 + (4\sqrt{5})^2} = 6\sqrt{5}$$

따라서 직각삼각형 DHI에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{HI}}{\overline{DI}} = \frac{4\sqrt{5}}{6\sqrt{5}} = \frac{2}{3}$$

답 ③

0561 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 평면 AFC에 내린 수선의 발을 P라 하면

$$\theta = \angle BAP$$

사면체 B-AFC의 부피를 V 라 하면

$$V = \frac{1}{3} \times \triangle BFC \times \overline{AB}$$

$$= \frac{1}{3} \times \triangle AFC \times \overline{BP}$$

..... ㉠

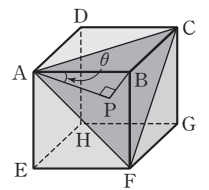
이때 정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면 삼각형 AFC는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}a$ 인 정삼각형이므로 ㉠에서

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} a^2 \times a = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2}a)^2 \times \overline{BP} \quad \therefore \overline{BP} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

따라서 직각삼각형 ABP에서

$$\sin \theta = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$



단계	채점요소	배점
㉠	$\theta = \angle BAP$ 임을 알기	30%
㉡	$\overline{BP}$ 의 길이 구하기	40%
㉢	$\sin \theta$ 의 값 구하기	30%

0562 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영이 선분 A'B'이므로 직선 l 과 평면 α 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta \text{에서 } \sqrt{3} = 2 \cos \theta$$

$$\text{따라서 } \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{이므로}$$

$$\theta = 30^\circ$$

답 30°

0563 타원의 장축의 밑면 위로의 정사영은 밑면인 원의 지름이므로

$$(\text{타원의 장축의 길이}) \times \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore (\text{타원의 장축의 길이}) = 4$$

답 4

0564 오른쪽 그림에서 삼각형 AND는

$\overline{AN} = \overline{ND}$ 인 이등변삼각형이므로

$\overline{NM} \perp \overline{AD}$

$$\overline{ND} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}, \overline{MD} = \frac{1}{2} \overline{AD} = 1$$

이므로 직각삼각형 MND에서

$$\overline{MN} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2}$$

선분 MN과 평면 BCD가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$\theta = \angle MND$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\overline{MN}}{\overline{ND}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 선분 MN의 평면 BCD 위로의 정사영의 길이는

$$\overline{MN} \cos \theta = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

답 ⑤

다른풀이 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, M에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면 점 H는 정삼각형 BCD의 무게중심이다.

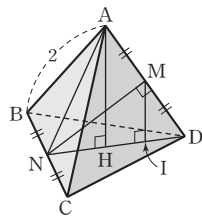
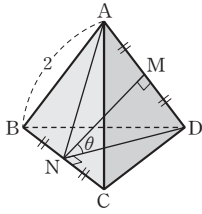
이때 삼각형 AHD에서 $\overline{AM} = \overline{MD}$,

$\overline{AH} \parallel \overline{MI}$ 이므로

$\overline{HI} = \overline{ID}$

$\overline{MN}$ 의 평면 BCD 위로의 정사영은 $\overline{NI}$ 이므로 구하는 길이는

$$\overline{NI} = \frac{2}{3} \overline{ND} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



0565 삼각형 AB'C의 밑면 DEF 위로의 정사영이 삼각형 DEF이므로

$$\triangle DEF = \triangle AB'C \times \cos 30^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \triangle AB'C \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \triangle AB'C = 2$$

답 2

0566 단면인 타원의 원기둥의 밑면 위로의 정사영은 원기둥의 밑면인 원이다.

구하는 단면의 넓이를 S라 하면 원기둥의 밑면인 원의 넓이는

$$\pi \times (3\sqrt{2})^2 = 18\pi$$

이므로

$$18\pi = S \cos 60^\circ, 18\pi = S \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore S = 36\pi$$

답 ③

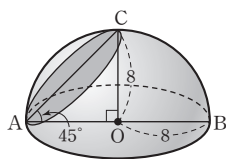
0567 오른쪽 그림과 같이 밑면과 45° 의 각을 이루는 평면으로 자른 단면은 원이다.

이때 단면인 원의 지름을 $\overline{AC}$ 라 하면

삼각형 AOC는 $\overline{OA} = \overline{OC} = 8$ 인 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{AC} = 8\sqrt{2}$$

즉, 단면인 원의 넓이를 S라 하면



$$S = \pi \times \left(\frac{8\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 32\pi$$

따라서 구하는 정사영의 넓이를 S' 이라 하면

$$S' = S \cos 45^\circ = 32\pi \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 16\sqrt{2}\pi$$

답 $16\sqrt{2}\pi$

0568 삼각형 DEB의 평면 EFGH 위로의 정사영은 삼각형 HEF이므로

$$\triangle HEF = \triangle DEB \times \cos \theta$$

이때 주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

$$\triangle HEF = \frac{1}{2} \times a \times a = \frac{1}{2} a^2$$

$$\triangle DEB = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2}a)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\triangle HEF}{\triangle DEB} = \frac{\frac{1}{2} a^2}{\frac{\sqrt{3}}{2} a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ③

0569 오른쪽 그림과 같이 점 A의 밑면 BCDE 위로의 정사영을 A'이라 하면 삼각형 ABC의 평면 BCDE 위로의 정사영은 삼각형 A'BC이다.

$$\therefore \triangle A'BC = \triangle ABC \times \cos \theta$$

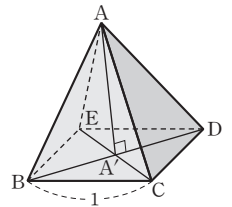
이때 점 A'은 정사각형 BCDE의 두 대각선의 교점이므로

$$\triangle A'BC = \frac{1}{4} \times 1 \times 1 = \frac{1}{4}$$

삼각형 ABC의 넓이가 2이므로

$$2 \cos \theta = \frac{1}{4} \quad \therefore \cos \theta = \frac{1}{8}$$

답 $\frac{1}{8}$



0570 삼각형 ABD의 평면 BCD 위로의 정사영은 삼각형 A'BD이므로

$$\triangle A'BD = \triangle ABD \times \cos \theta$$

그런데 $\overline{CA'} : \overline{A'D} = 16 : 9$ 이므로

$$\triangle BCA' : \triangle BA'D = 16 : 9$$

이때 삼각형 BCD의 넓이를 S라 하면

$$\triangle A'BD = \frac{9}{25} S$$

$$\triangle ABD = \triangle BCD = S \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{\triangle A'BD}{\triangle ABD} = \frac{\frac{9}{25} S}{S} = \frac{9}{25}$$

답 $\frac{9}{25}$

0571 평면 OAB와 평면 ABCD가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 삼각형 OAB의 평면 ABCD 위로의 정사영이 삼각형 EAB이므로

$$\triangle EAB = \triangle OAB \times \cos \theta$$

$$\triangle OAB = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}, \triangle EAB = \frac{1}{4} \times 4 \times 4 = 4 \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{\triangle EAB}{\triangle OAB} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 삼각형 EAB의 평면 OAB 위로의 정사영의 넓이는

$$\triangle EAB \times \cos \theta = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad \text{답 ④}$$

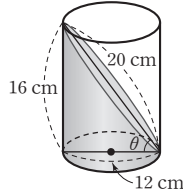
0572 오른쪽 그림과 같이 수면과 밑면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

이때 수면의 원기둥의 밑면 위로의 정사영은 원기둥의 밑면인 원이므로 수면의 넓이를 S 라 하면

$$S \times \cos \theta = \pi \times 6^2$$

$$S \times \frac{3}{5} = 36\pi \quad \therefore S = 60\pi \text{ (cm}^2\text{)} \quad \text{답 } 60\pi \text{ cm}^2$$



0573 평면 BFGC와 평면 MFGN이 이루는 각의 크기를 θ 라 하고 $\overline{BF}$ 의 중점을 M' 이라 하자.

이때 $\overline{MF}$ 의 평면 BFGC 위로의 정사영은 $\overline{M'F}$ 이고

$$\overline{M'F} = \frac{1}{2} \overline{BF} = 3, \overline{MF} = \overline{NG} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\overline{M'F} = \overline{MF} \cos \theta \text{ 에서 } 3 = 3\sqrt{5} \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

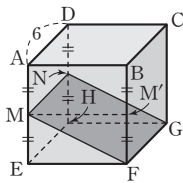
..... ㉠

따라서 사각형 BFGC의 평면 MFGN 위로의 정사영의 넓이는

$$\square BFGC \times \cos \theta = 36 \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{36\sqrt{5}}{5}$$

..... ㉡

$$\text{답 } \frac{36\sqrt{5}}{5}$$



단계	채점요소	배점
㉠	두 평면 BFGC, MFGN이 이루는 각의 크기 θ 에 대하여 $\cos \theta$ 의 값 구하기	60%
㉡	정사영의 넓이 구하기	40%

유형 lp

본문 84쪽

0574 $\overline{GC} \perp$ (평면 BCD)이므로

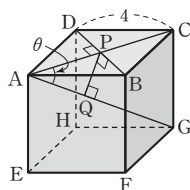
$$\overline{BD} \perp \overline{GC}$$

또, $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ 이므로

$$\overline{BD} \perp (\text{평면 AGC})$$

이때 점 P는 $\overline{BD}$ 와 평면 AGC, 즉

$\overline{AC}$, $\overline{BD}$ 의 교점이므로



074 정답과 풀이

$$\overline{AP} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$\angle CAG = \theta$ 라 하면 $\overline{AG} = 4\sqrt{3}$ 이므로 직각삼각형 AGC에서

$$\sin \theta = \frac{\overline{CG}}{\overline{AG}} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 삼각형 PAQ에서

$$\overline{PQ} = \overline{AP} \sin \theta = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \quad \text{답 ④}$$

다른풀이 점 P가 $\overline{BD}$ 의 중점인 동시에

$\overline{AC}$ 의 중점이므로

$$\overline{AP} = \frac{1}{2} \overline{AC} = 2\sqrt{2}$$

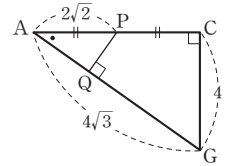
이때 $\triangle ACG \sim \triangle AQP$ (AA 닮음)

이므로

$$\overline{AG} : \overline{AP} = \overline{GC} : \overline{PQ}$$

$$\text{즉, } 4\sqrt{3} : 2\sqrt{2} = 4 : \overline{PQ} \text{에서 } 4\sqrt{3} \times \overline{PQ} = 8\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{PQ} = \frac{8\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$



0575 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면

BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H

는 삼각형 BCD의 무게중심이다.

$\overline{CD}$ 의 중점을 M이라 하면

$$\overline{BM} = \overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

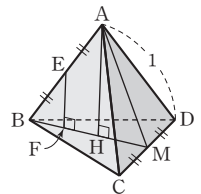
$$\overline{HM} = \frac{1}{3} \overline{BM} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

직각삼각형 AHM에서

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{HM}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

삼각형 ABH에서 $\overline{AE} = \overline{BE}$, $\overline{AH} \parallel \overline{EF}$ 이므로

$$\overline{EF} = \frac{1}{2} \overline{AH} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{6} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{6}}{6}$$



0576 $\overline{AC} = 2\sqrt{2}$, $\overline{AB} = \overline{BC} = 2\sqrt{5}$ 이므로 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다.

오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{AC}$ 에 내린 수선

의 발을 H라 하면 직각삼각형 BAH에서

$$\overline{BH} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$$

점 O에서 평면 ABC에 내린 수선의 길이를 h 라

하면

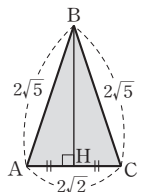
$$(\text{사면체의 부피}) = \frac{1}{3} \times \triangle OAC \times \overline{OB}$$

$$= \frac{1}{3} \times \triangle ABC \times h$$

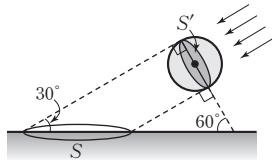
이므로

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2\right) \times 4 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}\right) \times h$$

$$\therefore h = \frac{4}{3} \quad \text{답 } \frac{4}{3}$$



0577 애드벌룬의 그림자의 넓이를 S 라 하고, 애드벌룬의 중심을 지나고 태양 광선의 방향에 수직인 평면으로 애드벌룬을 잘랐을 때 생기는 원의 넓이를 S' 이라 하면



$$S' = \pi \times 5^2 = 25\pi$$

태양 광선이 지면과 30° 의 각을 이루도록 비추면 태양 광선과 수직으로 만나는 애드벌룬의 단면이 지면과 이루는 각의 크기는 60° 이므로

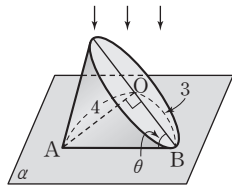
$$S' = S \cos 60^\circ \text{에서 } 25\pi = S \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore S = 50\pi$$

따라서 애드벌룬의 그림자의 넓이는 $50\pi \text{ m}^2$ 이다.

답 ②

0578 오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있는 원뿔의 모선의 양 끝 점을 각각 A, B, 원뿔의 밑면인 원의 중심을 O라 하고 원뿔의 밑면과 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면



$$\theta = \angle OBA$$

직각삼각형 OAB에서 $\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이므로

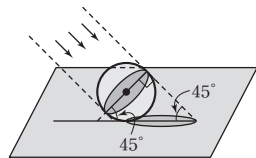
$$\cos \theta = \frac{\overline{BO}}{\overline{AB}} = \frac{3}{5}$$

따라서 구하는 그림자의 넓이는 원뿔의 밑면의 평면 α 위로의 정사영의 넓이와 같으므로

$$(\text{밑면의 넓이}) \times \cos \theta = \pi \times 3^2 \times \frac{3}{5} = \frac{27}{5}\pi$$

답 ⑤

0579 오른쪽 그림과 같이 햇빛과 수직이고 공의 중심을 지나는 평면이 지면과 이루는 각의 크기는 45° 이다.



이때 공의 반지름의 길이를 $r \text{ cm}$ 라 하면 공의 그림자의 넓이가 $81\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2$ 이므로

$$\pi r^2 = 81\sqrt{2}\pi \times \cos 45^\circ$$

$$\pi r^2 = 81\sqrt{2}\pi \times \frac{\sqrt{2}}{2}, r^2 = 81 \quad \therefore r = 9 (\because r > 0)$$

따라서 공의 반지름의 길이는 9 cm 이다.

답 9 cm



시험에 꼭 나오는 문제

본문 85~87쪽

0580 (i) 네 꼭짓점 B, C, D, E로 만들 수 있는 평면은 평면 BCDE의 1개이다.

(ii) 두 직선 AE, AC로 만들 수 있는 평면은 평면 AEC의 1개이다.

(iii) 네 꼭짓점 B, C, D, E와 직선 AE로 만들 수 있는 평면은 평면 ABE, 평면 AED의 2개이다.

(iv) 네 꼭짓점 B, C, D, E와 직선 AC로 만들 수 있는 평면은 평면 ABC, 평면 ACD의 2개이다.

(i)~(iv)에서 구하는 서로 다른 평면의 개수는

$$1 + 1 + 2 + 2 = 6$$

답 6

참고 (iii), (iv)에서 평면 AEC는 (ii)에서 이미 구했으므로 제외한다.

0581 $\overline{AG}$ 와 꼬인 위치에 있는 모서리는

$\overline{EF}, \overline{BF}, \overline{BC}, \overline{DH}, \overline{CD}, \overline{EH}$

의 6개이다.

답 6

0582 ① $\overline{CG} \parallel \overline{DH}$ 이고 $\overline{AD} \perp \overline{DH}$ 이므로 $\overline{AD} \perp \overline{CG}$

② $\overline{BG} \parallel \overline{AH}$ 이고 삼각형 AFH는 정삼각형이다.

즉, $\angle FAH = 60^\circ$ 이므로 $\overline{AF} \perp \overline{BG}$ 가 아니다.

③ $\overline{FG} \perp$ (평면 AEFB)이므로 $\overline{FG}$ 는 평면 AEFB 위의 모든 직선과 수직이다.

$$\therefore \overline{BE} \perp \overline{FG}$$

④ 정사각형의 두 대각선은 서로 수직이므로 $\overline{BE} \perp \overline{AF}$

⑤ $\overline{BE} \perp \overline{AF}, \overline{BE} \perp \overline{FG}$ 이므로 $\overline{BE} \perp$ (평면 AFGD)

즉, $\overline{BE}$ 는 평면 AFGD 위의 모든 직선과 수직이므로

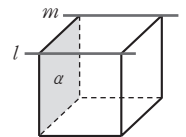
$$\overline{BE} \perp \overline{AG}$$

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

답 ②

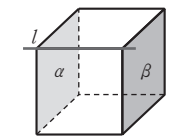
0583 ㄱ. 오른쪽 그림에서

$l \perp \alpha, m \perp \alpha$ 이면 $l \parallel m$ 이다. (참)



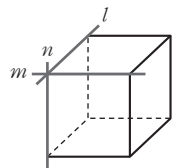
ㄴ. 오른쪽 그림에서 $l \perp \alpha, l \perp \beta$ 이면

$\alpha \parallel \beta$ 이다. (참)



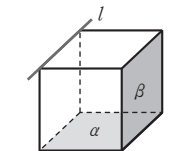
ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 $l \perp m, m \perp n$ 이지

만 $l \perp n$ 일 수도 있다. (거짓)



ㄹ. 오른쪽 그림과 같이 $l \parallel \alpha, l \parallel \beta$ 이지만

두 평면 α, β 는 만날 수도 있다. (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ①

0584 $\overline{DH} \parallel \overline{AE}$ 이므로 직선 ME와 직선 DH가 이루는 각의 크기는 직선 ME와 직선 AE가 이루는 각의 크기와 같다.

$$\therefore \theta = \angle AEM$$

이때 $\overline{AE} = 6, \overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ 이므로

직각삼각형 AME에서

$$\overline{ME} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{AM}^2} = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{11}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{AE}}{\overline{ME}} = \frac{6}{2\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{11}}{11} \quad \text{답 } \frac{3\sqrt{11}}{11}$$

0585 $\overline{PH} \perp \alpha$, $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HQ} \perp \overline{AB}$

점 H가 삼각형 ABC의 무게중심이고 삼각형 ABC의 넓이가 24이므로

$$\triangle ABH = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{HQ} = \frac{1}{3} \triangle ABC \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \times 8 \times \overline{HQ} = \frac{1}{3} \times 24 \quad \therefore \overline{HQ} = 2$$

따라서 직각삼각형 PHQ에서

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{PH}^2 + \overline{HQ}^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

답 ②

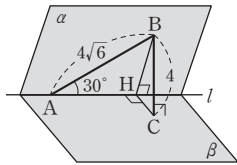
0586 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{BC} \perp \beta$, $\overline{BH} \perp l$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{CH} \perp l$

따라서 두 평면 α , β 가 이루는 각의 크기는 $\overline{BH}$ 와 $\overline{HC}$ 가 이루는 각의 크기와 같으므로 $\theta = \angle BHC$

이때 $\overline{BH} = 4\sqrt{6} \sin 30^\circ = 2\sqrt{6}$ 이므로 직각삼각형 BHC에서

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{BH}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 - 4^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{CH}}{\overline{BH}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$\textbf{0587} \quad \cos \alpha = \frac{\overline{DB}}{\overline{DF}} = \frac{\sqrt{1^2 + 2^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

$$\cos \beta = \frac{\overline{AF}}{\overline{DF}} = \frac{\sqrt{1^2 + 2^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

$$\cos \gamma = \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \frac{\sqrt{1^2 + 1^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

$$\therefore \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{5}{6} + \frac{5}{6} + \frac{2}{6} = 2 \quad \text{답 ②}$$

0588 점 D에서 평면 BEFC에 내린 수선의 발이 F이므로

$\theta = \angle DBF$

$\overline{EF} = \overline{DF} = a$ 라 하면 직각삼각형 DEF에서

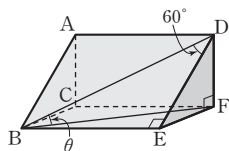
$$\overline{DE} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$$

또, 직각삼각형 BED에서 $\overline{BD} = \frac{\overline{DE}}{\cos 60^\circ}$ 이므로

$$\overline{BD} = \frac{\sqrt{2}a}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}a$$

따라서 직각삼각형 BFD에서

$$\sin \theta = \frac{\overline{DF}}{\overline{BD}} = \frac{a}{2\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{답 ①}$$



0589 구와 입체도형이 접하는 점들을 연결하면 구와 반지름의 길이가 같은 원이 된다. 이 원을 오른쪽 그림과 같이 밑면과 한 점에서 만나도록 평행이동하면 이 원과 밑면이 이루는 각의 크기는 30° 이다.

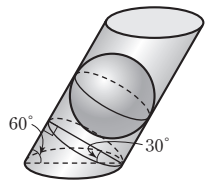
이 원을 포함하는 평면을 α 라 하면 밑면인 타원의 평면 α 위로의 정사영이 이 원이 되므로 원의 넓이는

$$6\sqrt{3}\pi \times \cos 30^\circ = 9\pi$$

구의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\pi r^2 = 9\pi, r^2 = 9 \quad \therefore r = 3 (\because r > 0)$$

답 3



0590 정육각형 IJKLMN의 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로 그 넓이는

$$6 \times \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{2})^2 \right\} = 12\sqrt{3}$$

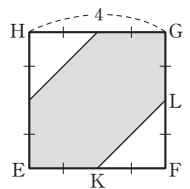
정육각형 IJKLMN의 평면 EFGH 위로의 정사영은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분과 같으므로 그 넓이는

$$4 \times 4 - 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \right) = 12$$

따라서 $12\sqrt{3} \cos \theta = 12$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{12}{12\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ③



0591 $\overline{BD}$ 의 중점을 M, 점 A와 점 F에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 각각 G, E라 하면 점 G는 정삼각형 BCD의 무게중심이고

$$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 = 5\sqrt{3}$$

이때 $\overline{AF} : \overline{FC} = 2 : 3$ 이므로

$$\overline{EM} = \overline{GM} + \frac{2}{5} \overline{CG}$$

$$= \frac{1}{3} \overline{CM} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} \overline{CM}$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{15} \right) \times \overline{CM}$$

$$= \frac{3}{5} \times 5\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

따라서 삼각형 FBD의 평면 BCD 위로의 정사영은 삼각형 BED이므로 구하는 넓이는

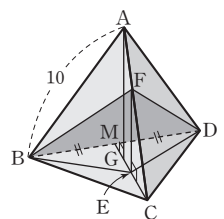
$$\triangle BED = \frac{1}{2} \times \overline{BD} \times \overline{EM}$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 3\sqrt{3}$$

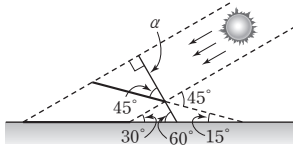
$$= 15\sqrt{3}$$

답 15√3

참고 점 E는 $\overline{GC}$ 를 2 : 3으로 내분하는 점이고 점 G는 $\overline{CM}$ 을 2 : 1로 내분하는 점이다.



0592 다음 그림과 같이 태양 광선과 수직을 이루는 평면을 α 라 하면 평면 α 가 지면과 이루는 각의 크기는 60° 이다.



차광막의 그림자의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S 라 하면

$$S = 20 \cos 60^\circ = 20 \times \frac{1}{2} = 10$$

차광막과 평면 α 가 이루는 각의 크기가 45° 이므로 차광막의 넓이를 S' 이라 하면

$$S = S' \cos 45^\circ$$

$$10 = S' \times \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore S' = 10\sqrt{2}$$

답 $10\sqrt{2}$

0593 $\overrightarrow{PO} \perp \alpha$, $\overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{AB}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AB}$

직각삼각형 PAQ에서

$$\overline{PQ} = \sqrt{14^2 - (4\sqrt{6})^2} = 10$$

따라서 직각삼각형 PQO에서

$$\overline{OQ} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

답 6

단계	채점요소	배점
㉠	$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AB}$ 임을 보이기	40%
㉡	$\overline{PQ}$ 의 길이 구하기	30%
㉢	$\overline{OQ}$ 의 길이 구하기	30%

0594 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 의

중점을 각각 M, N이라 하면

$\overline{CD} \perp \overline{BN}$, $\overline{CD} \perp \overline{AN}$ 이므로

$\overline{CD} \perp$ (평면 ABN)

$\therefore \overline{CD} \perp \overline{MN}$

같은 방법으로

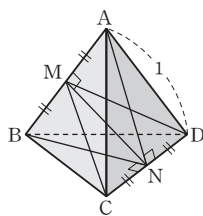
$\overline{AB} \perp$ (평면 CDM)

$\therefore \overline{AB} \perp \overline{MN}$

즉, $\overline{AB}$ 와 $\overline{CD}$ 사이의 거리는 $\overline{MN}$ 의 길이이다.

정사면체의 한 모서리의 길이가 1이므로

$$\overline{AN} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \overline{AM} = \frac{1}{2}$$



따라서 직각삼각형 AMN에서

$$\overline{MN} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

단계	채점요소	배점
㉠	$\overline{AB}$ 와 $\overline{CD}$ 사이의 거리는 $\overline{MN}$ 의 길이임을 보이기	50%
㉡	$\overline{AN}$, $\overline{AM}$ 의 길이 구하기	20%
㉢	$\overline{MN}$ 의 길이 구하기	30%

0595 오른쪽 그림과 같이 점 D에서

선분 EG에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{DI} \perp \overline{EG}$, $\overline{DH} \perp$ (평면 EFGH)이므로

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HI} \perp \overline{EG}$

직각삼각형 HEG에서

$$\overline{EG} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$$

$$\triangle HEG = \frac{1}{2} \times \overline{EG} \times \overline{HI} = \frac{1}{2} \times \overline{EH} \times \overline{HG} \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \times 25 \times \overline{HI} = \frac{1}{2} \times 15 \times 20$$

$$\therefore \overline{HI} = 12$$

직각삼각형 DHI에서

$$\overline{DI} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$$

따라서 삼각형 DEG의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{EG} \times \overline{DI} = \frac{1}{2} \times 25 \times 20 = 250$$

답 250

단계	채점요소	배점
㉠	삼수선의 정리를 만족시키는 $\overline{EG}$ 위의 점 I 정하기	30%
㉡	$\overline{HI}$ 의 길이 구하기	30%
㉢	$\overline{DI}$ 의 길이 구하기	20%
㉣	삼각형 DEG의 넓이 구하기	20%

0596 오른쪽 그림과 같이 점 P에서

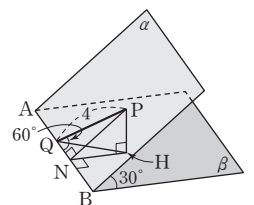
평면 β 에 내린 수선의 발을 H, 점 H

에서 교선 AB에 내린 수선의 발을 N

이라 하면 $\overline{PH} \perp \beta$, $\overline{HN} \perp \overline{AB}$ 이므로

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{PN} \perp \overline{AB}$



직각삼각형 PQN에서

$$\overline{PN} = \overline{PQ} \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\overline{QN} = \overline{PQ} \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

또, 두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기가 30° 이므로

$$\angle PNH = 30^\circ$$

$$\therefore \overline{HN} = \overline{PN} \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

따라서 선분 PQ의 평면 β 위로의 정사영은 선분 HQ이므로 구하는 길이는

$$\overline{HQ} = \sqrt{\overline{QN}^2 + \overline{HN}^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

답 $\sqrt{13}$

단계	채점요소	배점
㉠	삼수선의 정리를 만족시키는 두 점 H, N 정하기	30%
㉡	$\overline{PN}, \overline{QN}$ 의 길이 구하기	20%
㉢	$\overline{HN}$ 의 길이 구하기	20%
㉣	선분 PQ의 평면 β 위로의 정사영의 길이 구하기	30%

0597 오른쪽 그림과 같이 점 C에

서 $\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\overline{OC} \perp$ (평면 OAB),

$\overline{CM} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{OM} \perp \overline{AB}$$

삼각형 ABC는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이므로

$$\overline{MC} = 3\sqrt{3}, \overline{AM} = \overline{BM} = 3$$

직각삼각형 OMC에서

$$\overline{OM} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3^2} = 3\sqrt{2}$$

점 O에서 선분 MC에 내린 수선의

발을 H라 하면 $\overline{OH} \perp$ (평면 ABC),

$\overline{OM} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{MH} \perp \overline{AB}$$

즉, 점 H는 $\overline{MC}$ 위의 점이다.

$$\triangle OMC = \frac{1}{2} \times \overline{OM} \times \overline{OC} = \frac{1}{2} \times \overline{MC} \times \overline{OH} \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 3 = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times \overline{OH}$$

$$\therefore \overline{OH} = \sqrt{6}$$

직각삼각형 OHC에서

$$\overline{HC} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{3},$$

$$\overline{MH} = \overline{MC} - \overline{HC} = 2\sqrt{3}$$

078 정답과 풀이

따라서 삼각형 OBC의 평면 ABC 위로의 정사영은 삼각형 HBC이고 점 H는 $\overline{CM}$ 을 1 : 2로 내분하는 점이므로 구하는 정사영의 넓이는

$$\triangle HBC = \frac{1}{3} \times \triangle CMB = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \triangle ABC$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

답 ④

0598 오른쪽 그림과 같이 반구를 반

구의 중심을 지나고 평면 α 와 평행한 평면으로 자를 때 생기는 단면인 반원의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S_1 , 반구의 밑면의 반인 반원의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S_2 라 하면 구하는 정사영의 넓이는 $S_1 + S_2$ 이다.

S_1 은 반원의 넓이와 같으므로

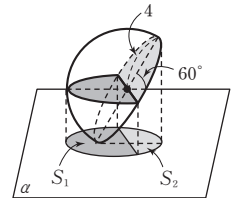
$$S_1 = \frac{1}{2} \times \pi \times 4^2 = 8\pi$$

$$S_2 = (\text{반원의 넓이}) \times \cos 60^\circ = 8\pi \times \frac{1}{2} = 4\pi$$

따라서 구하는 넓이는

$$S_1 + S_2 = 8\pi + 4\pi = 12\pi$$

답 12 π



0599 평면 β 와 구가 만나서 생기는 도형은 원이다. 이 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 이 원의 평면 α 위로의 정사영의 넓이가 $4\sqrt{3}\pi$ 이고 두 평면이 이루는 각의 크기가 30° 이므로

$$4\sqrt{3}\pi = \pi r^2 \times \cos 30^\circ, \frac{\sqrt{3}}{2} \pi r^2 = 4\sqrt{3}\pi$$

$$r^2 = 8 \quad \therefore r = 2\sqrt{2} (\because r > 0)$$

오른쪽 그림과 같이 평면 β 와 구가

만나서 생기는 도형인 원의 중심을

O' 이라 하고, 원 위의 임의의 점을

A라 하면 직선 OO' 이 평면 β 에

수직이므로 삼각형 OAO' 은

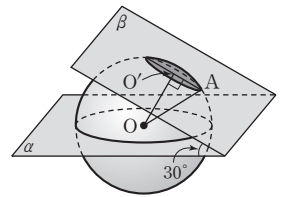
$\angle OO'A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$$\overline{OA} = 6, \overline{O'A} = 2\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\overline{OO'} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{7}$$

따라서 구의 중심 O와 평면 β 사이의 거리는 $2\sqrt{7}$ 이다.

답 $2\sqrt{7}$



06 | 공간좌표



교과서 문제 정복하기

본문 89쪽

0600 답 (1) (2, 0, 1) (2) (2, 4, 1) (3) (2, 4, 0)

0601 답 (1) (-2, 3, 0) (2) (0, 3, 1) (3) (-2, 0, 1)

0602 답 (1) (3, 2, -4) (2) (-3, -2, -4)
(3) (3, 2, 4) (4) (-3, 2, -4)0603 $\overline{OA} = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$ 답 60604 $\overline{AB} = \sqrt{\{2 - (-2)\}^2 + (-3 - 1)^2 + (1 - 3)^2}$
 $= \sqrt{36} = 6$ 답 60605 $\overline{AB} = \sqrt{(3 - 1)^2 + \{2 - (-2)\}^2 + (6 - 3)^2}$
 $= \sqrt{29}$ 답 $\sqrt{29}$

0606 (1) B(-1, 2, 3)

(2) $\overline{AB} = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (2 - 2)^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{4} = 2$
답 (1) (-1, 2, 3) (2) 20607 (1) $\left(\frac{2 \times 5 + 1 \times (-1)}{2 + 1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2 + 1}, \frac{2 \times 5 + 1 \times 2}{2 + 1}\right)$
 $\therefore (3, 3, 4)$ (2) $\left(\frac{1 \times 5 - 2 \times (-1)}{1 - 2}, \frac{1 \times 4 - 2 \times 1}{1 - 2}, \frac{1 \times 5 - 2 \times 2}{1 - 2}\right)$
 $\therefore (-7, -2, -1)$ (3) $\left(\frac{-1 + 5}{2}, \frac{1 + 4}{2}, \frac{2 + 5}{2}\right) \therefore \left(2, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$
답 (1) (3, 3, 4) (2) (-7, -2, -1) (3) $\left(2, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 0608 $\left(\frac{1 + 2 + 6}{3}, \frac{2 + 1 + 3}{3}, \frac{3 + (-2) + 2}{3}\right)$
 $\therefore (3, 2, 1)$ 답 (3, 2, 1)

0609 답 중심의 좌표: (1, -1, 2), 반지름의 길이: 3

0610 답 중심의 좌표: (-3, 2, -4), 반지름의 길이: 4

0611 답 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = 25$

0612 구의 반지름의 길이는

$$\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5$$

답 $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ 0613 $x^2 + y^2 + z^2 - 6y = 0$ 에서

$$x^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 3^2$$

따라서 중심의 좌표는 (0, 3, 0), 반지름의 길이는 3이다.

답 중심의 좌표: (0, 3, 0), 반지름의 길이: 3

0614 $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 6z = 0$ 에서

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z + 3)^2 = 14$$

따라서 중심의 좌표는 (2, -1, -3), 반지름의 길이는 $\sqrt{14}$ 이다.답 중심의 좌표: (2, -1, -3), 반지름의 길이: $\sqrt{14}$

0615 구하는 구의 방정식을

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0 \text{이라 하자.}$$

구가 두 점 (0, 0, 0), (1, 0, 0)을 지나므로

$$D = 0, A = -1$$

즉, 구의 방정식은 $x^2 + y^2 + z^2 - x + By + Cz = 0$ 이고 두 점

(2, -1, 0), (2, 1, 2)를 지나므로

$$B = 3, B + 2C = -7 \therefore C = -5$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 5z = 0$$

답 $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 5z = 0$ 

유형 익히기

본문 90~98쪽

0616 점 A(2, -1, 3)과 x축에 대하여 대칭인 점의 좌표는
(2, 1, -3)

점 (2, 1, -3)에서 yz평면에 내린 수선의 발의 좌표는

(0, 1, -3)

따라서 $a = 0, b = 1, c = -3$ 이므로

$$a + b + c = -2$$

답 -2

0617 점 A(-2, 3, 1)과 zx평면에 대하여 대칭인 점의 좌표는
(-2, -3, 1)따라서 $a = -2, b = -3, c = 1$ 이므로

$$abc = 6$$

답 6

0618 P(4, 2, 1)이므로 점 P를 x축에 대하여 대칭이동한 점
의 좌표는

(4, -2, -1)

따라서 $a=4, b=-2, c=-1$ 이므로

$$a-3b+2c=4-3 \times (-2)+2 \times (-1)=8 \quad \text{답 ④}$$

0619 점 A(2, 3, 1)을 xy 평면에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$$(2, 3, -1)$$

점 B(2, 3, -1)을 z 축에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는

$$(-2, -3, -1)$$

따라서 $a=-2, b=-3, c=-1$ 이므로

$$a-b+c=-2-(-3)+(-1)=0 \quad \text{답 0}$$

0620 P(3, -2, 1), Q(-3, 2, -1)이므로

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \sqrt{(-3-3)^2 + (2+2)^2 + (-1-1)^2} \\ &= \sqrt{56} = 2\sqrt{14} \end{aligned} \quad \text{답 ③}$$

0621 $\overline{AB}=3\sqrt{5}$ 이므로

$$\sqrt{(a-2)^2 + (2+3)^2 + (-1-1)^2} = 3\sqrt{5}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 4a - 12 = 0, (a+2)(a-6) = 0$$

$$\therefore a=6 (\because a>0) \quad \text{답 6}$$

0622 $\overline{AC}=\overline{BC}$ 에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} (-3-a)^2 + (2-5)^2 + a^2 &= (-3+4)^2 + (2-a)^2 + (a-1)^2 \\ 12a &= -12 \quad \therefore a=-1 \end{aligned} \quad \text{답 ②}$$

0623 P(1, 2, -3), Q(-1, 2, 3)이므로

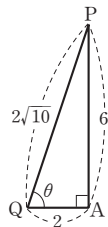
$$\overline{AP} = \sqrt{(1-1)^2 + (2-2)^2 + (-3-3)^2} = 6$$

$$\overline{AQ} = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-2)^2 + (3-3)^2} = 2$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-2)^2 + (3+3)^2} = 2\sqrt{10}$$

이때 $\overline{PQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2$ 이므로 삼각형 PQA는 $\angle A=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{AQ}}{\overline{PQ}} = \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$



답 ②

0624 $\overline{AB}^2 = (a-2)^2 + (-1-1)^2 + 2^2 = a^2 - 4a + 12$

$$\overline{BC}^2 = (1-a)^2 + (-2+1)^2 + (-1)^2 = a^2 - 2a + 3$$

$$\overline{CA}^2 = (2-1)^2 + (1+2)^2 + (-2+1)^2 = 11$$

..... ㄱ

삼각형 ABC가 $\angle A=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2$$

..... ㄴ

따라서 $a^2 - 2a + 3 = a^2 - 4a + 12 + 11$ 이므로

$$2a=20 \quad \therefore a=10$$

..... ㄹ

답 10

단계	채점요소	배점
㉑	삼각형 ABC의 세 변의 길이 구하기	50%
㉒	피타고라스 정리 이용하기	30%
㉓	a의 값 구하기	20%

0625 직선 $y=z$ 위의 점 P의 좌표를 $(0, a, a)$ ($a \neq 0$)라 하면 원점 O에 대하여 삼각형 APO는 $\angle APO=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{AO}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PO}^2$$

$$2^2 + 3^2 + 1^2 = (-2)^2 + (a-3)^2 + (a-1)^2 + 0^2 + a^2 + a^2$$

$$4a^2 - 8a = 0, 4a(a-2) = 0$$

$$\therefore a=2 (\because a \neq 0)$$

따라서 P(0, 2, 2)이므로

$$\overline{AP} = \sqrt{(-2)^2 + (2-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{6} \quad \text{답 } \sqrt{6}$$

0626 두 점 A(a, b, 1), B(-1, 2, a)에 대하여

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(-1-a)^2 + (2-b)^2 + (a-1)^2} \\ &= \sqrt{2a^2 + (b-2)^2 + 2} \end{aligned}$$

이므로 두 점 A, B 사이의 거리는 $a=0, b=2$ 일 때 최소이고 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이다. 답 ②

0627 $\overline{OA} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \overline{OB} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-4)^2 + (3-3)^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{OB}$ 에 내

린 수선의 발 H에 대하여 $\overline{OH}=x$ 라 하면

$$5^2 - x^2 = (2\sqrt{10})^2 - (7-x)^2$$

$$25 - x^2 = 40 - 49 + 14x - x^2$$

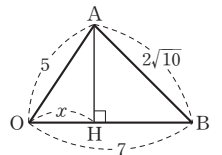
$$14x = 34 \quad \therefore x = \frac{17}{7}$$

$$\text{따라서 } \overline{AH} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{17}{7}\right)^2} = \frac{6\sqrt{26}}{7} \text{이므로}$$

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times \overline{AH}$$

$$= \frac{1}{2} \times 7 \times \frac{6\sqrt{26}}{7} = 3\sqrt{26}$$

답 ⑤



0628 y 축 위의 점을 P(0, y, 0)이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서

$$\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$(-4)^2 + (y-2)^2 + (-1)^2 = 3^2 + (y-3)^2 + (-3)^2$$

$$2y=6 \quad \therefore y=3$$

따라서 구하는 점의 y 좌표는 3이다. 답 ②

0629 $P(x, 0, 0)$ 이라 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로
 $(x+2)^2 + (-2)^2 = (x-1)^2 + 4^2 + (-3)^2$
 $6x = 18 \quad \therefore x = 3$
따라서 $P(3, 0, 0)$ 이므로
 $\overline{AP} = \sqrt{(3+2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$ 답 ③

0630 점 P는 xy 평면 위의 점이므로 점 P의 z 좌표는 0이다.
즉, $c=0$ 이므로 $P(a, b, 0)$
 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로
 $(a-1)^2 + (b+1)^2 + (-1)^2 = (a-1)^2 + (b-2)^2 + 2^2$
 $6b = 6 \quad \therefore b = 1$
 $\overline{PA} = \overline{PC}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2$ 이므로
 $(a-1)^2 + (b+1)^2 + (-1)^2 = (a-2)^2 + (b+1)^2$
 $2a = 2 \quad \therefore a = 1$
 $\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 1 + 0 = 2$ 답 2

0631 $\overline{AB}^2 = 2^2 + (-1)^2 + (1-2)^2 = 6$
 $\overline{BC}^2 = (a-2)^2 + b^2 + (-1)^2 = a^2 + b^2 - 4a + 5$
 $\overline{CA}^2 = (-a)^2 + (1-b)^2 + 2^2 = a^2 + b^2 - 2b + 5$
 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로 $a^2 + b^2 - 4a - 1 = 0$ ㉠
 $\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$ 이므로 $b = 2a$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면
 $5a^2 - 4a - 1 = 0, (5a+1)(a-1) = 0$
 $\therefore a = -\frac{1}{5}$ 또는 $a = 1$
그런데 a, b 는 모두 정수이므로 $a = 1, b = 2$ ($\because$ ㉡)
 $\therefore a + b = 3$ 답 ⑤

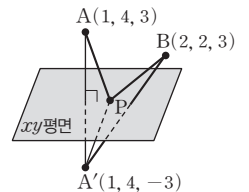
0632 $\overline{AB} = \sqrt{(1+2)^2 + (2-7)^2 + (-1-3)^2} = 5\sqrt{2}$
두 점 A, B의 zx 평면 위로의 정사영을 각각 A', B' 이라 하면
 $A'(-2, 0, 3), B'(1, 0, -1)$
 $\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(1+2)^2 + (-1-3)^2} = 5$
이때 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$ 이므로
 $\cos \theta = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 ④

0633 두 점 A, B의 yz 평면 위로의 정사영을 각각 A', B' 이라 하면
 $A'(0, 3, \sqrt{11}), B'(0, 7, 2\sqrt{11})$
 $\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(7-3)^2 + (2\sqrt{11}-\sqrt{11})^2} = 3\sqrt{3}$
이때 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 60^\circ$ 이므로
 $3\sqrt{3} = \sqrt{(a-3)^2 + (7-3)^2 + (2\sqrt{11}-\sqrt{11})^2} \times \frac{1}{2}$
양변을 제곱하여 정리하면
 $a^2 - 6a - 72 = 0, (a+6)(a-12) = 0$
 $\therefore a = 12$ ($\because a > 0$) 답 ⑤

0634 $\overline{AB} = \sqrt{(4-1)^2 + (4-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{17}$
 $\overline{BC} = \sqrt{(4-4)^2 + (2-4)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2}$
 $\overline{AC} = \sqrt{(4-1)^2 + (2-2)^2 + (3-3)^2} = 3$
이때 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$ 이므로 삼각형 ABC는 $\angle C = 90^\circ$ 인 직
각삼각형이다.

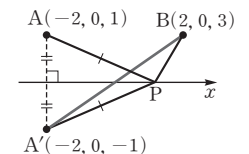
$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3 = 3\sqrt{2}$
세 점 A, B, C의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 A', B', C' 이라
하면
 $A'(1, 2, 0), B'(4, 4, 0), C'(4, 2, 0)$
 $\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(4-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{13}$
 $\overline{B'C'} = \sqrt{(4-4)^2 + (2-4)^2} = 2$
 $\overline{A'C'} = \sqrt{(4-1)^2 + (2-2)^2} = 3$
이때 $\overline{A'B'}^2 = \overline{B'C'}^2 + \overline{A'C'}^2$ 이므로 삼각형 $A'B'C'$ 은
 $\angle C' = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.
 $\therefore \triangle A'B'C' = \frac{1}{2} \times \overline{B'C'} \times \overline{A'C'} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$
이때 삼각형 ABC와 xy 평면이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면
 $\triangle A'B'C' = \triangle ABC \cos \theta$ 이므로
 $3 = 3\sqrt{2} \cos \theta, \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\therefore \theta = 45^\circ$ 답 45°

0635 두 점 A, B의 z 좌표의 부호가
같으므로 두 점 A, B는 좌표공간에서
 xy 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.
점 A와 xy 평면에 대하여 대칭인 점을
 A' 이라 하면



$A'(1, 4, -3)$
이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로
 $\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{A'P} + \overline{PB} \geq \overline{A'B'}$
 $= \sqrt{(2-1)^2 + (2-4)^2 + (3+3)^2}$
 $= \sqrt{41}$
따라서 $\overline{AP} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 $\sqrt{41}$ 이다. 답 $\sqrt{41}$

0636 두 점 A, B는 x 축을 기준으로
같은 쪽에 있다.
점 A와 x 축에 대하여 대칭인 점을 A'
이라 하면



$A'(-2, 0, -1)$
이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로
 $\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{A'P} + \overline{PB} \geq \overline{A'B'}$
 $= \sqrt{(2+2)^2 + (3+1)^2}$
 $= 4\sqrt{2}$
따라서 $\overline{AP} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 $4\sqrt{2}$ 이다. 답 ④

0637 두 점 A, B의 x 좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 좌표공간에서 yz 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

㉠

점 A와 yz 평면에 대하여 대칭인 점을 A'이라 하면

$$A'(-2, 3, 1)$$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{A'P} + \overline{PB} \geq \overline{A'B}$$

$$= \sqrt{(4+2)^2 + (1-3)^2 + (a-1)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - 2a + 41}$$

㉡

즉, $\sqrt{a^2 - 2a + 41} = 2\sqrt{14}$ 이므로 양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 2a - 15 = 0, (a+3)(a-5) = 0$$

$$\therefore a = 5 (\because a > 0)$$

㉢

답 5

단계	채점요소	배점
㉠	두 점 A, B가 yz 평면을 기준으로 같은 쪽에 있음을 확인하기	20%
㉡	$\overline{AP} + \overline{PB}$ 의 최솟값을 구하는 식 세우기	40%
㉢	a 의 값 구하기	40%

0638 두 점 A, B의 y 좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 좌표공간에서 zx 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A와 zx 평면에 대하여 대칭인 점을 A'이라 하면

$$A'(1, -2, 3)$$

이때 $\overline{PA} = \overline{PA'}$ 이므로 삼각형 ABP의 둘레의 길이는

$$\overline{AB} + \overline{BP} + \overline{PA} = \overline{AB} + \overline{BP} + \overline{PA'} \geq \overline{AB} + \overline{A'B}$$

$$= \sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2 + (-2-3)^2}$$

$$+ \sqrt{(2-1)^2 + (1+2)^2 + (-2-3)^2}$$

$$= 3\sqrt{3} + \sqrt{35}$$

따라서 삼각형 ABP의 둘레의 길이의 최솟값은 $3\sqrt{3} + \sqrt{35}$ 이다.

답 $3\sqrt{3} + \sqrt{35}$

0639 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 4 + 2 \times (-2)}{1+2}, \frac{1 \times 2 + 2 \times 5}{1+2}, \frac{1 \times (-1) + 2 \times 2}{1+2} \right)$$

$$\therefore P(0, 4, 1)$$

선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 4 - 2 \times (-2)}{3-2}, \frac{3 \times 2 - 2 \times 5}{3-2}, \frac{3 \times (-1) - 2 \times 2}{3-2} \right)$$

$$\therefore Q(16, -4, -7)$$

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0+16}{2}, \frac{4-4}{2}, \frac{1-7}{2} \right)$$

$$\therefore (8, 0, -3)$$

답 (8, 0, -3)

082 정답과 풀이

0640 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 0 - 1 \times (-1)}{2-1}, \frac{2 \times (-1) - 1 \times (-2)}{2-1}, \frac{2 \times 4 - 1 \times (-3)}{2-1} \right)$$

$$\therefore D(1, 0, 11)$$

선분 CD를 2 : 1로 내분하는 점 E의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 1 + 1 \times 2}{2+1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times 1}{2+1}, \frac{2 \times 11 + 1 \times 3}{2+1} \right)$$

$$\therefore E\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{25}{3}\right)$$

$$\text{따라서 } a = \frac{4}{3}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{25}{3} \text{이므로}$$

$$a+b+c = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} + \frac{25}{3} = 10$$

답 10

0641 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times a - 1 \times (-7)}{3-1}, \frac{3 \times b - 1 \times 0}{3-1}, \frac{3 \times c - 1 \times 5}{3-1} \right)$$

$$\therefore Q\left(\frac{3a+7}{2}, \frac{3b}{2}, \frac{3c-5}{2}\right)$$

이때 Q(5, 6, -7)이므로

$$\frac{3a+7}{2} = 5, \frac{3b}{2} = 6, \frac{3c-5}{2} = -7$$

$$\therefore a=1, b=4, c=-3$$

즉, 점 B의 좌표는 (1, 4, -3)이므로 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 1 + 1 \times (-7)}{3+1}, \frac{3 \times 4 + 1 \times 0}{3+1}, \frac{3 \times (-3) + 1 \times 5}{3+1} \right)$$

$$\therefore P(-1, 3, -1)$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{(5+1)^2 + (6-3)^2 + (-7+1)^2} = 9$$

답 9

0642 $2\triangle ABD = 3\triangle ADC$ 에서

$$\triangle ABD : \triangle ADC = 3 : 2$$

오른쪽 그림과 같이 점 D는 선분 BC 위의

점이므로 ㉠을 만족시키는 점 D는 선분 BC

를 3 : 2로 내분하는 점이다.

따라서 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times (-3) + 2 \times 2}{3+2}, \frac{3 \times 1 + 2 \times 6}{3+2}, \frac{3 \times (-2) + 2 \times 3}{3+2} \right)$$

$$\therefore D(-1, 3, 0)$$

$$\therefore \overline{AD} = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-5)^2 + (-7)^2} = \sqrt{62}$$

답 $\sqrt{62}$

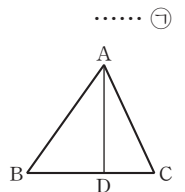
0643 $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$ 이라 하면 점 P는 선분 AB를

$m : n$ 으로 내분하는 점이고, 점 P가 zx 평면 위에 있으므로 점 P의 y 좌표는 0이다.

$$\text{즉, } \frac{m \times (-1) + n \times 2}{m+n} = 0 \text{에서 } m = 2n \text{이므로}$$

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$$

따라서 점 P는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로



$$P\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times (-3)}{2+1}, \frac{2 \times (-1) + 1 \times 2}{2+1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2+1}\right)$$

$$\therefore P(1, 0, 3) \quad \text{답 ②}$$

0644 선분 AB를 1 : m으로 내분하는 점이 xy평면 위에 있으므로 내분점의 z좌표는 0이다.

$$\text{즉, } \frac{1 \times (-4) + m \times 2}{1+m} = 0 \text{ 이므로}$$

$$2m - 4 = 0 \quad \therefore m = 2 \quad \text{답 2}$$

0645 두 점 A, B의 z좌표의 부호가 다르므로 선분 AB가 xy평면에 의하여 내분되고 선분 AB를 m : n으로 내분하는 점이 xy평면 위에 있으므로 내분점의 z좌표는 0이다.

$$\text{즉, } \frac{m \times 4 + n \times (-2)}{m+n} = 0 \text{ 에서 } 2m = n \text{ 이므로}$$

$$m : n = 1 : 2$$

따라서 xy평면은 선분 AB를 1 : 2로 내분한다. 답 ①

0646 선분 AB를 7 : 4로 내분하는 점이 yz평면 위에 있으므로 내분점의 x좌표는 0이다.

$$\text{즉, } \frac{7 \times a + 4 \times (-7)}{7+4} = 0 \text{ 이므로}$$

$$7a - 28 = 0 \quad \therefore a = 4$$

또, 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점이 x축 위에 있으므로 외분점의 y좌표, z좌표는 모두 0이다.

$$\text{즉, } \frac{2 \times b - 1 \times 4}{2-1} = 0, \frac{2 \times c - 1 \times 5}{2-1} = 0 \text{ 이므로}$$

$$2b - 4 = 0, 2c - 5 = 0$$

$$\therefore b = 2, c = \frac{5}{2}$$

$$\therefore a + b + c = 4 + 2 + \frac{5}{2} = \frac{17}{2}$$

단계	채점요소	배점
㉑	a의 값 구하기	40%
㉒	b, c의 값 구하기	50%
㉓	a+b+c의 값 구하기	10%

0647 선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4+0}{2}, \frac{-7+1}{2}, \frac{-2+0}{2}\right), \text{ 즉 } (2, -3, -1)$$

점 D의 좌표를 (a, b, c)라 하면 선분 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+a}{2}, \frac{1+b}{2}, \frac{0+c}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{2+a}{2}, \frac{1+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC와 BD의 중점은 일치하므로

$$\frac{2+a}{2} = 2, \frac{1+b}{2} = -3, \frac{c}{2} = -1$$

$$\therefore a = 2, b = -7, c = -2$$

따라서 D(2, -7, -2)이므로

$$\overline{BD} = \sqrt{(2-2)^2 + (-7-1)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{17} \quad \text{답 ①}$$

0648 점 A는 선분 PP'의 중점이므로

$$A\left(\frac{-4+6}{2}, \frac{2+8}{2}, \frac{-3+9}{2}\right) \quad \therefore A(1, 5, 3)$$

따라서 a=1, b=5, c=3이므로

$$a + b + c = 9 \quad \text{답 9}$$

0649 점 B의 좌표를 (a, b, c)라 하면 평행사변형 ABCD의 대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a-2}{2}, \frac{b+4}{2}, \frac{c+3}{2}\right)$$

이때 대각선 BD의 중점은 두 대각선의 교점 M(0, 1, 4)와 일치하므로

$$\frac{a-2}{2} = 0, \frac{b+4}{2} = 1, \frac{c+3}{2} = 4$$

$$\therefore a = 2, b = -2, c = 5$$

따라서 B(2, -2, 5)이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-3)^2 + (-2+1)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{3} \quad \text{답 ③}$$

0650 선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a-1}{2}, \frac{-5+6}{2}, \frac{-3+2}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{a-1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

선분 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{b+2}{2}, \frac{-1+2}{2}, \frac{2-3}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{b+2}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

마름모 ABCD의 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{a-1}{2} = \frac{b+2}{2} \quad \therefore a = b + 3 \quad \dots\dots ㉑$$

또, 마름모는 네 변의 길이가 모두 같으므로 $\overline{AD} = \overline{CD}$ 에서

$$\overline{AD}^2 = \overline{CD}^2$$

$$(2-a)^2 + (2+5)^2 + (-3+3)^2$$

$$= (2+1)^2 + (2-6)^2 + (-3-2)^2$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0, (a-1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = 1 (\because a < 2)$$

$$a = 1 \text{ 을 ㉑에 대입하면 } b = -2$$

$$\therefore a + b = 1 + (-2) = -1$$

$$\text{답 -1}$$

단계	채점요소	배점
㉑	대각선의 중점을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	40%
㉒	마름모의 정의를 이용하여 a, b의 값 구하기	50%
㉓	a+b의 값 구하기	10%

0651 점 C의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-1+0+a}{3}, \frac{2+4+b}{3}, \frac{3+1+c}{3}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{-1+a}{3}, \frac{6+b}{3}, \frac{4+c}{3}\right)$$

이 점이 점 $(1, 3, 5)$ 와 일치하므로

$$\frac{-1+a}{3}=1, \frac{6+b}{3}=3, \frac{4+c}{3}=5$$

따라서 $a=4, b=3, c=11$ 이므로

C(4, 3, 11)

답 ⑤

0652 O(0, 0, 0), E(2, 0, 6), G(0, 3, 6)이므로 삼각형 OEG의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0+2+0}{3}, \frac{0+0+3}{3}, \frac{0+6+6}{3}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{2}{3}, 1, 4\right)$$

답 $\left(\frac{2}{3}, 1, 4\right)$

0653 A(3, 6, -9), B(-3, 6, 9), C(3, -6, 9)이므로 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{3+(-3)+3}{3}, \frac{6+6+(-6)}{3}, \frac{-9+9+9}{3}\right), \text{ 즉 } (1, 2, 3)$$

답 (1, 2, 3)

0654 선분 CM을 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 4 + 1 \times a}{2+1}, \frac{2 \times 5 + 1 \times b}{2+1}, \frac{2 \times 6 + 1 \times c}{2+1}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{8+a}{3}, \frac{10+b}{3}, \frac{12+c}{3}\right)$$

이 점이 삼각형 ABC의 무게중심 G(3, 1, 2)와 일치하므로

$$\frac{8+a}{3}=3, \frac{10+b}{3}=1, \frac{12+c}{3}=2$$

따라서 $a=1, b=-7, c=-6$ 이므로

$$abc=42$$

답 42

0655 구의 중심을 C라 하면 점 C는 $\overline{AB}$ 의 중점이므로

$$C\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{3-3}{2}\right) \therefore C(1, 1, 0)$$

또, 구의 반지름의 길이는

$$\overline{CA} = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-1)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 18$$

답 ③

0656 $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z = 11$ 에서

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 25$$

따라서 구의 중심의 좌표는 $(2, -3, -1)$ 이고 반지름의 길이는 5이므로

$$a=2, b=-3, c=-1, r=5$$

$$\therefore a+b+c-r=-7$$

답 ②

0657 구 $(x+6)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 16$ 의 중심의 좌표는 $(-6, 2, 5)$

이때 구하는 구의 반지름의 길이는 두 점 $(-6, 2, 5),$

$(-4, 1, 3)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(-4+6)^2 + (1-2)^2 + (3-5)^2} = 3$$

답 ②

0658 구하는 구의 방정식을

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0 \text{이라 하자.}$$

구가 점 $(0, 0, 0)$ 을 지나므로 $D=0$

또, 구가 두 점 $(1, 0, 1), (-1, 0, 1)$ 을 지나므로

$$A+C=-2, -A+C=-2$$

두 식을 연립하여 풀면 $A=0, C=-2$

즉, 구의 방정식은 $x^2 + y^2 + z^2 + By - 2z = 0$ 이고 이 구가

점 $(0, 1, 1)$ 을 지나므로

$$2+B-2=0 \therefore B=0$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$$

답 $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$

0659 구하는 구의 방정식을

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0 \text{이라 하자.}$$

구가 점 $(0, 0, 0)$ 을 지나므로 $D=0$

또, 구가 두 점 $(-2, 0, 0), (0, 4, 0)$ 을 지나므로

$$A=2, B=-4$$

즉, 구의 방정식은 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + Cz = 0$ 이고 이 구가

점 $(0, -1, 1)$ 을 지나므로

$$1+1+4+C=0 \therefore C=-6$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z = 0$$

이때 점 $(1, a, 6)$ 이 이 구 위의 점이므로

$$1+a^2+36+2-4a-36=0$$

$$a^2-4a+3=0, (a-1)(a-3)=0$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=3$$

따라서 모든 a 의 값의 합은

$$1+3=4$$

답 ④

0660 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 11$ 에서

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 14$$

즉, 구의 중심의 좌표는 $(1, 1, 1)$ 이다.

이때 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+a}{2}, \frac{-1+b}{2}, \frac{4+c}{2}\right)$$

이 점이 구의 중심 $(1, 1, 1)$ 과 일치하므로

$$\frac{2+a}{2}=1, \frac{-1+b}{2}=1, \frac{4+c}{2}=1$$

따라서 $a=0, b=3, c=-2$ 이므로

$$a+b+c=1$$

답 1

0661 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times (-1) + 1 \times 2}{2+1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times (-3)}{2+1}, \frac{2 \times (-1) + 1 \times 5}{2+1} \right)$$

$$\therefore P(0, -1, 1)$$

선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times (-1) - 1 \times 2}{2-1}, \frac{2 \times 0 - 1 \times (-3)}{2-1}, \frac{2 \times (-1) - 1 \times 5}{2-1} \right)$$

$$\therefore Q(-4, 3, -7)$$

이때 구하는 구의 중심을 C라 하면 점 C는 선분 PQ의 중점이므로

$$C\left(\frac{0-4}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{1-7}{2}\right) \therefore C(-2, 1, -3)$$

또, 구의 반지름의 길이는

$$\overline{CP} = \sqrt{2^2 + (-1-1)^2 + (1+3)^2} = 2\sqrt{6}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 24$$

$$\text{답 } (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 24$$

0662 점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 에서 $\overline{AP} = 2\overline{BP}$, 즉 $\overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$ 이므로

$$(x+3)^2 + y^2 + z^2 = 4\{(x-3)^2 + y^2 + z^2\}$$

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 30x + 27 = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 9 = 0$$

따라서 $a = -10, b = 0, c = 0, d = 9$ 이므로

$$a+b+c+d = -1$$

답 ③

0663 점 B의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 점 B는 구

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ 위의 점이므로}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4 \quad \dots\dots ①$$

선분 AB의 중점의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, z = \frac{c+6}{2}$$

$$\therefore a = 2x, b = 2y, c = 2z - 6$$

이것을 ①에 대입하면

$$(2x)^2 + (2y)^2 + (2z-6)^2 = 4$$

$$\therefore x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 1$$

답 ②

0664 $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2z + 4 = 0$ 에서

$$(x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

점 B의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 점 B는 구

$$(x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \text{ 위의 점이므로}$$

$$(a-2)^2 + b^2 + (c-1)^2 = 1 \quad \dots\dots ①$$

선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$x = \frac{1 \times a + 2 \times (-6)}{1+2} = \frac{a-12}{3}$$

$$y = \frac{1 \times b + 2 \times 3}{1+2} = \frac{b+6}{3}$$

$$z = \frac{1 \times c + 2 \times 0}{1+2} = \frac{c}{3}$$

$$\therefore a = 3x + 12, b = 3y - 6, c = 3z$$

이것을 ①에 대입하면

$$(3x+12)^2 + (3y-6)^2 + (3z-1)^2 = 1$$

$$\therefore \left(x + \frac{10}{3}\right)^2 + (y-2)^2 + \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

따라서 이 구의 반지름의 길이는 $\frac{1}{3}$ 이므로 구의 부피는

$$\frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{4}{81}\pi$$

답 ②

0665 $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax + 4y - 4bz + 20 = 0$ 에서

$$(x-a)^2 + (y+2)^2 + (z-2b)^2 = a^2 + 4b^2 - 16$$

따라서 구의 중심의 좌표는 $(a, -2, 2b)$ 이고 반지름의 길이는 $\sqrt{a^2 + 4b^2 - 16}$ 이다.

이때 구가 xy 평면에 접하므로

$$\sqrt{a^2 + 4b^2 - 16} = |2b|$$

$$\text{양변을 제곱하면 } a^2 + 4b^2 - 16 = 4b^2$$

$$a^2 = 16 \quad \therefore a = 4 (\because a > 0)$$

또, 구가 yz 평면에 접하므로

$$\sqrt{a^2 + 4b^2 - 16} = |a|$$

$$\text{양변을 제곱하면 } a^2 + 4b^2 - 16 = a^2$$

$$b^2 = 4 \quad \therefore b = 2 (\because b > 0)$$

$$\therefore a + 2b = 4 + 2 \times 2 = 8$$

답 ③

0666 중심의 좌표가 $(3, -1, 5)$ 이고 zx 평면에 접하는 구는 중심의 y 좌표의 절댓값이 반지름의 길이와 같으므로 반지름의 길이는

$$|-1| = 1$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 1$$

$$\text{답 } (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 1$$

0667 중심의 좌표가 $(3, -2, 6)$ 인 구가 x 축에 접하므로 구의 반지름의 길이 r 는

$$r = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$$

$$\therefore r^2 = 40$$

답 ③

다른풀이 중심의 좌표가 $(3, -2, 6)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 구의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-6)^2 = r^2 \quad \dots\dots ①$$

이 구가 x 축에 접하면 접점의 좌표가 $(3, 0, 0)$ 이므로

$$x=3, y=0, z=0 \text{을 } ① \text{에 대입하면}$$

$$(3-3)^2 + (0+2)^2 + (0-6)^2 = r^2$$

$$\therefore r^2 = 40$$

0668 중심의 좌표가 $(2, 3, a)$ 이고 xy 평면에 접하는 구는 중심의 z 좌표의 절댓값이 반지름의 길이와 같으므로 반지름의 길이는

$$r = |a| = a \quad (\because a > 0)$$

또, 이 구가 z 축에 접하므로

$$r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\therefore a = \sqrt{13}$$

$$\therefore a + r = \sqrt{13} + \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$$

답 ④

0669 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 동시에 접하는 구가 점 $(2, -3, 4)$ 를 지나므로 구의 반지름의 길이를 r 라 하면 구의 중심의 좌표는 $(r, -r, r)$ 이다.

즉, 구의 방정식은

$$(x-r)^2 + (y+r)^2 + (z-r)^2 = r^2$$

점 $(2, -3, 4)$ 가 이 구 위의 점이므로

$$(2-r)^2 + (-3+r)^2 + (4-r)^2 = r^2$$

$$2r^2 - 18r + 29 = 0 \quad \therefore r = \frac{9 \pm \sqrt{23}}{2}$$

따라서 구하는 두 구의 반지름의 길이의 합은

$$\frac{9 + \sqrt{23}}{2} + \frac{9 - \sqrt{23}}{2} = 9$$

가

나

다

답 9

단계	채점요소	배점
㉑	구의 방정식 세우기	50%
㉒	구의 방정식에 점 $(2, -3, 4)$ 의 좌표 대입하기	20%
㉓	두 구의 반지름의 길이의 합 구하기	30%

0670 구가 x 축, y 축, z 축에 동시에 접하면 구의 중심에서 x 축, y 축, z 축에 이르는 거리가 모두 같으므로 구의 중심을 C 라 하면 $C(a, a, a) (a > 0)$ 로 놓을 수 있다.

이때 이 구가 x 축에 접하는 점을 P 라 하면 점 P 는 구의 중심에서 x 축에 내린 수선의 발과 같으므로 $P(a, 0, 0)$

$\overline{CP}$ 의 길이는 구의 반지름의 길이와 같으므로

$$\overline{CP} = \sqrt{(a-a)^2 + a^2 + a^2} = 6\sqrt{2}$$

$$a\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \quad \therefore a = 6$$

즉, 중심이 점 $(6, 6, 6)$ 이고 반지름의 길이가 $6\sqrt{2}$ 인 구의 방정식은 $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = 72$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 12y - 12z + 36 = 0$$

따라서 $A = -12, B = -12, C = -12, D = 36$ 이므로

$$A + B + C + D = 0$$

답 ③

0671 x 축 위의 점은 y 좌표와 z 좌표가 모두 0이므로 주어진 구의 방정식에 $y=0, z=0$ 을 대입하면

$$x^2 - 8x - 9 = 0, (x+1)(x-9) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 9$$

따라서 구와 x 축의 두 교점의 좌표는 $(-1, 0, 0), (9, 0, 0)$ 이므로

$$\overline{AB} = |9 - (-1)| = 10$$

답 ③

다른풀이 $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 2z - 9 = 0$ 에서

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 35$$

즉, 주어진 구의 중심을 C 라 하면 $C(4, 3, 1)$ 이고 반지름의 길이는 $\sqrt{35}$ 이다.

이때 구의 중심 C 에서 x 축에 내린 수선의

발을 H 라 하면

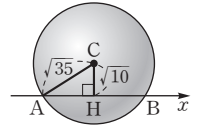
$$H(4, 0, 0)$$

$$\therefore \overline{CH} = \sqrt{(4-4)^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

따라서 직각삼각형 CAH 에서

$$\overline{AH} = \sqrt{(\sqrt{35})^2 - (\sqrt{10})^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{AH} + \overline{BH} = 2\overline{AH} = 10$$



0672 구의 중심을 C 라 하면 점 C 는 $\overline{AB}$ 의 중점이므로

$$C\left(\frac{2-4}{2}, \frac{-2+2}{2}, \frac{1+3}{2}\right) \quad \therefore C(-1, 0, 2)$$

또, 구의 반지름의 길이는

$$\overline{CA} = \sqrt{(2+1)^2 + (-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{14}$$

즉, 중심이 점 $C(-1, 0, 2)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{14}$ 인 구의 방정식은

$$(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 14$$

x 축 위의 점은 y 좌표와 z 좌표가 모두 0이므로 구의 방정식에

$y=0, z=0$ 을 대입하면

$$(x+1)^2 + 4 = 14, (x+1)^2 = 10$$

$$\therefore x = -1 \pm \sqrt{10}$$

따라서 구와 x 축의 두 교점의 좌표는

$$(-1 + \sqrt{10}, 0, 0), (-1 - \sqrt{10}, 0, 0)$$

이므로 구하는 거리는

$$|(-1 - \sqrt{10}) - (-1 + \sqrt{10})| = 2\sqrt{10}$$

답 2√10

0673 z 축 위의 점은 x 좌표와 y 좌표가 모두 0이므로 주어진 구의 방정식에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$4 + 36 + (z-8)^2 = r^2$$

$$\therefore z^2 - 16z + 104 - r^2 = 0$$

..... ㉠

주어진 구와 z 축이 만나는 두 점의 z 좌표를 α, β 라 하면 두 점 사이의 거리가 14이므로

$$|\alpha - \beta| = 14$$

또, α, β 는 z 에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 16, \alpha\beta = 104 - r^2$$

$$\therefore |\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= 16^2 - 4(104 - r^2)$$

$$= 4r^2 - 160$$

즉, $4r^2 - 160 = 14^2$ 이므로

$$4r^2 = 356, r^2 = 89$$

$$\therefore r = \sqrt{89} \quad (\because r > 0)$$

답 ①

0674 y 축 위의 점은 x 좌표와 z 좌표가 모두 0이므로 주어진 구의 방정식에 $x=0, z=0$ 을 대입하면

$$y^2 - 2y - 24 = 0, (y+4)(y-6) = 0$$

$$\therefore y = -4 \text{ 또는 } y = 6$$

즉, 주어진 구와 y 축의 두 교점의 좌표는 $(0, -4, 0), (0, 6, 0)$ 이므로

$$\overline{AB} = |6 - (-4)| = 10$$

또, 두 점 A, B는 구 위의 점이므로 $\overline{AC}, \overline{BC}$ 의 길이는 구의 반지름의 길이와 같다.

$$\text{이때 } x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z - 24 = 0 \text{에서}$$

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 30$$

$$\therefore \overline{AC} = \overline{BC} = \sqrt{30}$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 10 + \sqrt{30} + \sqrt{30}$$

$$= 10 + 2\sqrt{30}$$

답 10 + 2√30

0675 xy 평면 위의 점은 z 좌표가 0이므로 주어진 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 45$$

따라서 주어진 구와 xy 평면의 교선은 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$ 인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는

$$2\pi \times 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}\pi$$

답 ④

다른풀이 주어진 구의 중심을 C라 하면 $C(3, -4, 2)$ 이고, 점 C에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면

오른쪽 그림에서

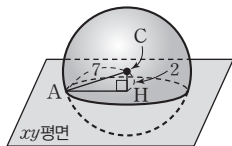
$$\overline{AC} = 7, \overline{CH} = 2$$

직각삼각형 CAH에서

$$\overline{AH} = \sqrt{7^2 - 2^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

따라서 주어진 구와 xy 평면의 교선은 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$ 인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는

$$2\pi \times 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}\pi$$



0676 yz 평면 위의 점은 x 좌표가 0이므로 주어진 구의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면

$$y^2 + z^2 - 6y - 4z + k = 0$$

$$\therefore (y-3)^2 + (z-2)^2 = 13 - k$$

따라서 주어진 구와 yz 평면의 교선은 반지름의 길이가 $\sqrt{13-k}$ 인 원이므로

$$\sqrt{13-k} = \sqrt{5}, 13-k = 5$$

$$\therefore k = 8$$

답 8

0677 주어진 구의 중심의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 구의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 25$$

zx 평면 위의 점은 y 좌표가 0이므로 $y=0$ 을 위의 방정식에 대입하면

$$(x-a)^2 + (z-c)^2 = 25 - b^2$$

이 식이 $(x-2)^2 + (z-3)^2 = 16$ 과 일치하므로

$$a=2, c=3, 25-b^2=16$$

$$25-b^2=16 \text{에서 } b^2=9$$

$$\therefore b=3 \quad (\because b>0)$$

따라서 구의 중심의 y 좌표는 3이다.

답 3

다른풀이 주어진 구의 중심을 C라 하고, 점 C에서 zx 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 오른쪽 그림에서

$\overline{AC}=5, \overline{AH}=4$

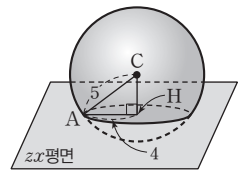
직각삼각형 CAH에서

$$\overline{CH} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

이때 점 C의 y 좌표는 양수이므로 점 C는 점 H를 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$$H(2, 0, 3) \text{이므로 } C(2, 3, 3)$$

따라서 구의 중심의 y 좌표는 3이다.



0678 원기둥의 한 밑면의 둘레는 구와 xy 평면의 교선과 같다. xy 평면 위의 점은 z 좌표가 0이므로 주어진 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$$

$$\therefore (x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$$

즉, 원기둥의 밑면인 원의 반지름의 길이는 1이다.

또, $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4z + 4 = 0$ 에서

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 5$$

이므로 구의 중심의 좌표는 $(-1, 2, 2)$ 이고 xy 평면 위에 있는 원기둥의 밑면의 중심의 좌표는 $(-1, 2, 0)$ 이므로 원기둥의 높이는 4이다.

따라서 원기둥의 부피는

$$\pi \times 1^2 \times 4 = 4\pi$$

답 ①

다른풀이 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4z + 4 = 0$ 에서

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 5$$

주어진 구의 중심을 C라 하면

$C(-1, 2, 2)$ 이고, 점 C에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 오른쪽

그림에서

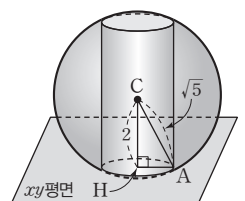
$$\overline{AC} = \sqrt{5}, \overline{CH} = 2$$

직각삼각형 CHA에서

$$\overline{AH} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = 1$$

따라서 구하는 원기둥의 부피는

$$\pi \times 1^2 \times 4 = 4\pi$$

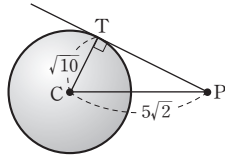


0679 주어진 구의 중심을 C라 하면 $C(-3, -1, -2)$ 이므로

$$PC = \sqrt{(-3-1)^2 + (-1-2)^2 + (-2-3)^2} = 5\sqrt{2}$$

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 구에 그은 접선의 접점을 T라 하면 직각삼각형 PTC에서 구하는 접선의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{PT} &= \sqrt{\overline{PC}^2 - \overline{CT}^2} \\ &= \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10})^2} = 2\sqrt{10} \end{aligned}$$



답 ③

0680 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + k = 0$ 에서

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 5-k$$

이 구의 중심을 C라 하면 $C(1, -2, 0)$ 이므로

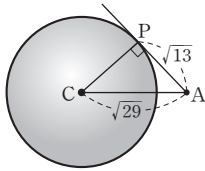
$$\overline{CA} = \sqrt{(3-1)^2 + (2+2)^2 + 3^2} = \sqrt{29}$$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 구에 그은 접선의 접점을 P라 하면

$$\overline{PA} = \sqrt{13}$$

직각삼각형 PCA에서 구의 반지름의 길이는

$$\overline{PC} = \sqrt{(\sqrt{29})^2 - (\sqrt{13})^2} = 4$$



따라서 $5-k=4^2$ 이므로 $k=-11$

답 -11

단계	채점요소	배점
㉠	구의 중심을 C라 할 때, $\overline{CA}$ 의 길이 구하기	40%
㉡	구의 반지름의 길이 구하기	40%
㉢	k의 값 구하기	20%

0681 주어진 구의 중심을 C라 하면 $C(-4, 1, -3)$ 이므로

$$\overline{PC} = \sqrt{(-4+2)^2 + (1+1)^2 + (-3-1)^2} = 2\sqrt{6}$$

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 구에 그은 접선의 접점을 T라 하면 직각삼각형 PCT에서

$$\overline{PT} = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 - (\sqrt{6})^2} = 3\sqrt{2}$$

삼각형 PCT의 꼭짓점 T에서 선분

PC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\triangle PCT = \frac{1}{2} \times \overline{PT} \times \overline{CT} = \frac{1}{2} \times \overline{PC} \times \overline{TH} \text{에서}$$

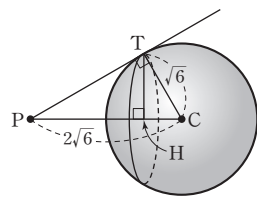
$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{6} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times \overline{TH} \quad \therefore \overline{TH} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

따라서 접점이 나타내는 도형은 중심이 점 H이고 반지름의 길이가

$\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 인 원이므로 그 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}\pi$$

답 ④



유형 1p

본문 99쪽

0682 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 는 중심의 좌표가 $(0, 0, 0)$ 이고 반지름의 길이가 3이다.

$$x^2 - 10x + y^2 - 8y + z^2 - 6z + 49 = 0 \text{에서}$$

$$(x-5)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 1$$

이므로 중심의 좌표가 $(5, 4, 3)$ 이고 반지름의 길이가 1이다.

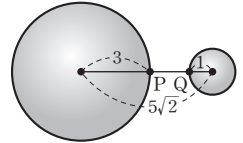
따라서 두 구의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{5^2 + 4^2 + 3^2} = 5\sqrt{2}$$

두 점 P, Q 사이의 거리가 최소가 되는 경우는 두 점 P, Q가 오른쪽 그림

과 같을 때이므로 구하는 최솟값은

$$5\sqrt{2} - (3+1) = 5\sqrt{2} - 4$$



답 ②

0683 중심이 점 $C(-1, 2\sqrt{2}, 4)$ 인 구가 z축에 접할 때, 점점의 좌표는 $(0, 0, 4)$ 이므로 이 구의 반지름의 길이는

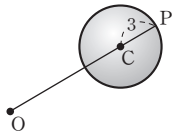
$$\sqrt{(-1)^2 + (2\sqrt{2})^2} = 3$$

점 P와 원점 O 사이의 거리가 최대가 되는

경우는 오른쪽 그림과 같이 직선 OC가 구와 만나는 점 중 점 O에서 멀리 있는 점 P일 때이다.

따라서 구하는 최댓값은

$$\overline{OC} + 3 = \sqrt{(-1)^2 + (2\sqrt{2})^2 + 4^2} + 3 = 8$$



답 ④

0684 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 은 중심의 좌표가 $(0, 0, 0)$ 이고 반지름의 길이가 1이다.

구 $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1$ 은 중심의 좌표가 $(2, 1, 2)$ 이고 반지름의 길이가 1이다.

따라서 두 구의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$$

이므로 선분 PQ의 길이의 최댓값과 최솟값은

$$M = 3 + (1+1) = 5$$

$$m = 3 - (1+1) = 1$$

$$\therefore Mm = 5 \times 1 = 5$$

답 5

0685 $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 8y + 8z + 32 = 0$ 에서

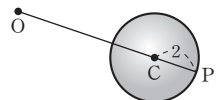
$$(x+2)^2 + (y-4)^2 + (z+4)^2 = 4$$

이 구의 중심을 C라 하면 $C(-2, 4, -4)$ 이고 반지름의 길이가 2이다.

이때 원점 O에 대하여 $\overline{OP}^2 = a^2 + b^2 + c^2$

이므로 오른쪽 그림에서 직선 OC가 구와 만나는 점 중 점 O에서 멀리 있는 점이

P일 때 $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은 최대가 된다.



$$\overline{OC} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6 \text{이므로}$$

$$\overline{OP} = \overline{OC} + \overline{CP} = 6 + 2 = 8$$

따라서 $a^2 + b^2 + c^2$ 의 최댓값은 $8^2 = 64$

답 64

0686 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ 은 중심의 좌표가 $(0, 0, 0)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이다.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 6y - 10z + k = 0 \text{에서}$$

$(x-4)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 = 50 - k$ 이므로 중심의 좌표가 $(4, -3, 5)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{50-k}$ 이다.

따라서 두 구의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{4^2 + (-3)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$$

두 구가 외접하므로

$$2\sqrt{2} + \sqrt{50-k} = 5\sqrt{2}, \sqrt{50-k} = 3\sqrt{2}$$

$$50-k=18 \quad \therefore k=32$$

답 ④

0687 $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 2 = 0$ 에서

$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 16$ 이므로 중심의 좌표가 $(2, -3, 1)$ 이고 반지름의 길이가 4이다.

$$\text{또, } x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2z + 12 - k = 0 \text{에서}$$

$(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = k-9$ 이므로 중심의 좌표가 $(-1, 1, 1)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{k-9}$ 이다.

따라서 두 구의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(-1-2)^2 + (1+3)^2 + (1-1)^2} = 5$$

한 구가 다른 구에 내접하므로

$$|\sqrt{k-9}-4|=5, \sqrt{k-9}-4=\pm 5$$

그런데 $k > 9$ 이므로 $\sqrt{k-9}=9$

$$k-9=81 \quad \therefore k=90$$

답 90

0688 구 $S: (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 16$ 의 중심을 O 라 하면 $O(3, 1, 0)$ 이고 반지름의 길이는 4이다.

$$S': x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8z + 20 = 0 \text{에서}$$

$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 9$ 이므로 구 S' 의 중심을 O' 이라 하면 $O'(3, -2, 4)$ 이고 반지름의 길이는 3이다.

즉, 두 구의 중심 사이의 거리는

$$\overline{OO'} = \sqrt{(3-3)^2 + (-2-1)^2 + 4^2} = 5$$

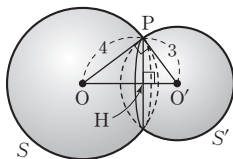
오른쪽 그림과 같이 두 구가 만나서 생기는 원 위의 점 P 에서 $\overline{OO'}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $\overline{PH}$ 는 두 구가 만나서 생기는 원의 반지름이다.

이때 $\overline{OP}=4, \overline{O'P}=3, \overline{OO'}=5$ 에서

$\overline{OP}^2 + \overline{O'P}^2 = \overline{OO'}^2$ 이므로 삼각형 POO' 은 직각삼각형이다.

$$\triangle POO' = \frac{1}{2} \times \overline{OP} \times \overline{O'P} = \frac{1}{2} \times \overline{OO'} \times \overline{PH} \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{1}{2} \times 5 \times \overline{PH} \quad \therefore \overline{PH} = \frac{12}{5}$$



따라서 구하는 원의 둘레의 길이는

$$2\pi \times \frac{12}{5} = \frac{24}{5}\pi$$

답 ⑤



시험에 꼭 나오는 문제

본문 100~103쪽

0689 점 P 의 x 좌표는 점 B 의 x 좌표와 같으므로 5

점 P 의 y 좌표는 점 A 의 y 좌표와 같으므로 -4

점 P 의 z 좌표는 점 A 의 z 좌표와 같으므로 3

$$\therefore P(5, -4, 3)$$

이때 점 $P(5, -4, 3)$ 과 yz 평면에 대하여 대칭인 점의 좌표는 $(-5, -4, 3)$ 이다.

따라서 $a = -5, b = -4, c = 3$ 이므로

$$a+b+c = -5+(-4)+3 = -6$$

답 ②

0690 삼각형 ABC 에서

$$\overline{AB}^2 = (a-1)^2 + (1-1)^2 + (-3-1)^2 = a^2 - 2a + 17$$

$$\overline{BC}^2 = (4-a)^2 + (5-1)^2 + (-3+3)^2 = a^2 - 8a + 32$$

$$\overline{CA}^2 = (1-4)^2 + (1-5)^2 + (1+3)^2 = 41$$

이때 삼각형 ABC 가 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

$$\text{즉, } 41 = a^2 - 2a + 17 + a^2 - 8a + 32 \text{이므로}$$

$$a^2 - 5a + 4 = 0, (a-1)(a-4) = 0$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=4$$

답 1, 4

0691 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(a-2)^2 + (b+1)^2 + (-1)^2 = (a-1)^2 + (b+2)^2 + (-3)^2$$

$$\therefore a+b = -4 \quad \dots\dots ㉠$$

또, $\overline{BP} = \overline{CP}$ 에서 $\overline{BP}^2 = \overline{CP}^2$ 이므로

$$(a-1)^2 + (b+2)^2 + (-3)^2 = (a-3)^2 + (b-1)^2 + 2^2$$

$$\therefore 2a+3b = 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -12, b = 8$$

$$\therefore b-a = 20$$

답 20

0692 $\overline{AB} = \sqrt{(4-1)^2 + (3+1)^2 + (7-2)^2} = 5\sqrt{2}$

두 점 A, B 의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 A', B' 이라 하면

$$A'(1, -1, 0), B'(4, 3, 0)$$

$$\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(4-1)^2 + (3+1)^2} = 5$$

이때 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 ④

0693 두 점 A, B의 y 좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 좌표공간에서 zx 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A와 zx 평면에 대하여 대칭인 점을 A'이라 하면

$$A'(2, -3, 1)$$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{A'P} + \overline{PB} \geq \overline{A'B}$$

$$= \sqrt{(4-2)^2 + (1+3)^2 + (5-1)^2} = 6$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 6이다.

답 6

0694 두 점 A(3, 5, 0), B(4, 3, -2)에 대하여 선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점의 좌표가 $(a, -1, -6)$ 이므로

$$a = \frac{3 \times 4 - 2 \times 3}{3 - 2} = 6$$

답 ②

0695 $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$ 이므로 점 P는 선분 AB를 $m : n$ 으로 내분하는 점이고, 점 P가 zx 평면 위에 있으므로 점 P의 y 좌표는 0이다.

$$\text{즉, } \frac{m \times 6 + n \times (-2)}{m + n} = 0 \text{에서 } 3m = n \text{이므로}$$

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 3$$

따라서 $m = 1, n = 3$ 이므로

$$m - n = -2$$

답 -2

0696 ㄱ. zx 평면 위의 점은 y 좌표가 0이므로 H(1, 0, 4)이다. (거짓)

ㄴ. 점 B와 yz 평면에 대하여 대칭인 점은 x 좌표의 부호만 바뀌므로 B'(3, 0, 5)이다. (참)

$$\text{ㄷ. } \overline{AB} = \sqrt{(-3-1)^2 + (-2)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{21} \text{ (거짓)}$$

ㄹ. 선분 AB가 yz 평면에 의하여 $m : n$ 으로 내분된다고 하면 선분 AB를 $m : n$ 으로 내분하는 점이 yz 평면 위에 있으므로 내분점의 x 좌표는 0이다.

$$\frac{m \times (-3) + n \times 1}{m + n} = 0 \text{에서 } 3m = n \text{이므로}$$

$$m : n = 1 : 3$$

즉, 선분 AB는 yz 평면에 의하여 1 : 3으로 내분된다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ의 2개이다.

답 2

0697 점 A(3, -2, 4)를 xy 평면에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (3, -2, -4)

점 (3, -2, -4)를 원점에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는

$$(-3, 2, 4)$$

이때 점 (a, b, c) 는 선분 PQ의 중점이므로

$$\left(\frac{-3+3}{2}, \frac{2-2}{2}, \frac{4-4}{2} \right), \text{ 즉 } (1, -1, 1)$$

따라서 $a = 1, b = -1, c = 1$ 이므로

$$a + b + c = 1$$

답 ①

090 정답과 풀이

0698 세 점 A($a, 0, 5$), B(1, $b, -3$), C(1, 1, 1)을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{a+1+1}{3}, \frac{0+b+1}{3}, \frac{5-3+1}{3} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{a+2}{3}, \frac{b+1}{3}, 1 \right)$$

이 점이 점 (2, 2, 1)과 일치하므로

$$\frac{a+2}{3} = 2, \frac{b+1}{3} = 2 \quad \therefore a = 4, b = 5$$

$$\therefore a + b = 9$$

답 ④

0699 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-1-6+a}{3}, \frac{1+1+b}{3}, \frac{-2-1+c}{3} \right), \text{ 즉}$$

$$\left(\frac{a-7}{3}, \frac{b+2}{3}, \frac{c-3}{3} \right)$$

이 점이 삼각형 ABC의 무게중심 G(-1, 0, 0)과 일치하므로

$$\frac{a-7}{3} = -1, \frac{b+2}{3} = 0, \frac{c-3}{3} = 0$$

따라서 $a = 4, b = -2, c = 3$ 이므로

$$a + b + c = 5$$

답 5

0700 삼각형 PBC의 무게중심을 G_1 이라 하면

$$G_1 \left(\frac{a+1+4}{3}, \frac{3-1+2}{3}, \frac{-4-2+3}{3} \right)$$

$$\therefore G_1 \left(\frac{a+5}{3}, \frac{4}{3}, -1 \right)$$

삼각형 ABC의 무게중심을 G_2 라 하면

$$G_2 \left(\frac{-3+1+4}{3}, \frac{b-1+2}{3}, \frac{5-2+3}{3} \right)$$

$$\therefore G_2 \left(\frac{2}{3}, \frac{b+1}{3}, 2 \right)$$

두 점 G_1, G_2 의 xy 평면 위로의 정사영은 각각 $\left(\frac{a+5}{3}, \frac{4}{3}, 0 \right),$

$\left(\frac{2}{3}, \frac{b+1}{3}, 0 \right)$ 이고 이 두 점이 일치하므로

$$\frac{a+5}{3} = \frac{2}{3}, \frac{4}{3} = \frac{b+1}{3}$$

따라서 $a = -3, b = 3$ 이므로 $a + b = 0$

답 0

0701 같은 공간에 있는 두 점의 x 좌표, y 좌표, z 좌표의 부호는 각각 일치한다.

ㄱ. 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+1}{2}, \frac{-3+2}{2}, \frac{5-3}{2} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right)$$

ㄴ. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 10 = 0$ 에서

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4$$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 (1, 2, -3)

ㄷ. 점 (-3, 5, 2)와 yz 평면에 대하여 대칭인 점의 좌표는

$$(3, 5, 2)$$

ㄹ. 구 $x^2 + y^2 + z^2 - 26 = 0$ 의 중심의 좌표는 (0, 0, 0)이므로 점

(-1, 3, -4)와 점 (0, 0, 0)에 대하여 대칭인 점의 좌표는

$$(1, -3, 4)$$

이때 각 점의 좌표의 부호는

ㄱ. (+, -, +) ㄴ. (+, +, -)

ㄷ. (+, +, +) ㄹ. (+, -, +)

따라서 같은 공간에 있는 두 점은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ③

0702 $x^2+y^2+z^2+4x+ky-2z+1-k=0$ 에서

$$(x+2)^2 + \left(y + \frac{k}{2}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{k^2}{4} + k + 4$$

구의 부피가 최소하려면 구의 반지름의 길이인 $\sqrt{\frac{k^2}{4} + k + 4}$ 가 최소이어야 한다.

이때 $\sqrt{\frac{k^2}{4} + k + 4} = \sqrt{\frac{1}{4}(k+2)^2 + 3}$ 이므로 $k=-2$ 일 때 구의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$ 으로 최소이다.

따라서 부피가 최소일 때 구의 부피는

$$\frac{4}{3}\pi \times (\sqrt{3})^3 = 4\sqrt{3}\pi$$

답 $4\sqrt{3}\pi$

0703 점 B의 좌표를 (x_1, y_1, z_1) 이라 하면 점 B는 구

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 + (z+7)^2 = 16 \text{ 위의 점이므로}$$

$$(x_1-4)^2 + (y_1+3)^2 + (z_1+7)^2 = 16 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

선분 AB의 중점의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$x = \frac{-2+x_1}{2}, y = \frac{5+y_1}{2}, z = \frac{1+z_1}{2}$$

$$\therefore x_1 = 2x+2, y_1 = 2y-5, z_1 = 2z-1$$

이것을 ①에 대입하면

$$(2x-2)^2 + (2y-2)^2 + (2z+6)^2 = 16$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 4$$

따라서 $a=1, b=1, c=-3, r=2$ 이므로

$$a+b+c-r=1+1+(-3)-2=-3$$

답 -3

0704 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 동시에 접하는 구가 점

$(1, 1, 4)$ 를 지나므로 구의 반지름의 길이를 r 라 하면 구의 중심의 좌표는 (r, r, r) 이다.

따라서 구의 방정식은

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 + (z-r)^2 = r^2$$

점 $(1, 1, 4)$ 가 이 구 위의 점이므로

$$(1-r)^2 + (1-r)^2 + (4-r)^2 = r^2$$

$$r^2 - 6r + 9 = 0, (r-3)^2 = 0 \quad \therefore r=3$$

답 ⑤

0705 주어진 구가 점 $(3, 4, 1)$ 을 지나므로

$$9+16+1-6-24-2a+b=0$$

$$\therefore 2a-b=-4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x^2+y^2+z^2-2x-6y-2az+b=0 \text{에서}$$

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-a)^2 = a^2 - b + 10$$

이므로 이 구는 중심의 좌표가 $(1, 3, a)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{a^2-b+10}$ 이다.

$$\text{이 구가 } xy \text{평면에 접하므로 } \sqrt{a^2-b+10} = |a|$$

양변을 제곱하면

$$a^2 - b + 10 = a^2 \quad \therefore b=10$$

$b=10$ 을 ①에 대입하면

$$2a-10=-4 \quad \therefore a=3$$

$$\therefore a+b=3+10=13$$

답 13

0706 z 축 위의 점은 x 좌표와 y 좌표가 모두 0이므로 주어진 구의 방정식에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$1+4+z^2=9, z^2=4$$

$$\therefore z=-2 \text{ 또는 } z=2$$

따라서 구와 z 축의 두 교점의 좌표는 $(0, 0, -2), (0, 0, 2)$ 이므로

$$|AB| = |2 - (-2)| = 4$$

답 ③

0707 yz 평면 위의 점은 x 좌표가 0이므로 주어진 구의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면

$$y^2 + z^2 + 6y - 8z + k = 0$$

$$\therefore (y+3)^2 + (z-4)^2 = 25 - k$$

따라서 주어진 구와 yz 평면의 교선은 반지름의 길이가 $\sqrt{25-k}$ 인 원이다.

이 원의 넓이가 10π 이므로

$$\pi \times (\sqrt{25-k})^2 = 10\pi, 25-k=10$$

$$\therefore k=15$$

답 15

$$\textbf{0708 } x^2+y^2+z^2+8x-6y-2kz+9=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

xy 평면 위의 점은 z 좌표가 0이므로 ①에 $z=0$ 을 대입하면

$$x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$$

$$\therefore (x+4)^2 + (y-3)^2 = 16 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

yz 평면 위의 점은 x 좌표가 0이므로 ①에 $x=0$ 을 대입하면

$$y^2 + z^2 - 6y - 2kz + 9 = 0$$

$$\therefore (y-3)^2 + (z-k)^2 = k^2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

두 원 ②, ③의 넓이의 비가 4 : 1이므로

$$16\pi : k^2\pi = 4 : 1$$

$$4k^2\pi = 16\pi, k^2=4$$

$$\therefore k=2 (\because k>0)$$

답 2

0709 xy 평면 위의 점은 z 좌표가 0이므로 주어진 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면

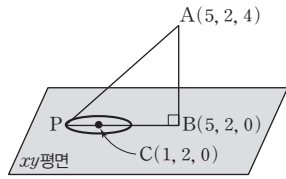
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$$

즉, 주어진 구와 xy 평면이 만나서 생기는 원의 중심을 C라 하면 $C(1, 2, 0)$ 이고 반지름의 길이는 1이다.

점 A에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 B라 하면

$$B(5, 2, 0)$$

오른쪽 그림과 같이 직선 BC가
원과 만나는 점 중 점 B에서 멀
리 있는 점 P에 대하여 선분 AP
의 길이가 구하는 최댓값이다.
이때 $\overline{BC}=4$ 이고 원의 반지름의
길이가 1이므로



$$\overline{BP}=4+1=5$$

또, $\overline{AB}=4$ 이므로 직각삼각형 APB에서

$$\overline{AP}=\sqrt{\overline{BP}^2+\overline{AB}^2}=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$$

답 $\sqrt{41}$

0710 $x^2+y^2+z^2+6x+4y+k=0$ 에서

$$(x+3)^2+(y+2)^2+z^2=13-k$$

이 구의 중심을 C라 하면 $C(-3, -2, 0)$ 이므로

$$\overline{CA}=\sqrt{(1+3)^2+(2+2)^2+(-1)^2}=\sqrt{33}$$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 구에 그은

접선의 접점을 P라 하면

$$\overline{PA}=5$$

직각삼각형 PAC에서 구의 반지름의 길

이는

$$\overline{PC}=\sqrt{(\sqrt{33})^2-5^2}=2\sqrt{2}$$

따라서 $13-k=(2\sqrt{2})^2$ 이므로

$$k=5$$

답 5

0711 $x^2+y^2+z^2+2x+2y+4z+5=0$ 에서

$$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=1$$

이므로 이 구의 중심을 C라 하면 $C(-1, -1, -2)$ 이고 반지름
의 길이는 1이다.

이때 $\overline{AC}=\sqrt{(-1-1)^2+(-1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{21}$ 이므로

$$M=\overline{AC}+1=\sqrt{21}+1, m=\overline{AC}-1=\sqrt{21}-1$$

$$\therefore Mm=(\sqrt{21}+1)(\sqrt{21}-1)=21-1=20$$

답 ④

0712 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+5=0$ 에서

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=4$$

이므로 이 구는 중심의 좌표가 $(1, -2, 2)$ 이고 반지름의 길이가
2이다.

두 구의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(4-1)^2+(2+2)^2+(2-2)^2}=5$$

중심의 좌표가 $(4, 2, 2)$ 인 구의 반지름의 길이를 r 라 하면 두 구
가 외접하므로

$$2+r=5 \quad \therefore r=3$$

답 3

0713 zx 평면 위의 점은 y 좌표가 0이므로 점 P의 좌표를

$(a, 0, b)$ 라 하자.

$\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로

$$(a+1)^2+(-1)^2+(b-1)^2=(a-1)^2+4^2+(b-2)^2$$

$$\therefore 2a+b=9$$

..... ㉠

또, $\overline{AP}=\overline{CP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$ 이므로

$$(a+1)^2+(-1)^2+(b-1)^2=(a+1)^2+(-2)^2+b^2$$

$$-2b=2 \quad \therefore b=-1$$

$b=-1$ 을 ㉠에 대입하면

$$2a-1=9 \quad \therefore a=5$$

..... ㉡

따라서 구하는 점 P의 좌표는

$$(5, 0, -1)$$

..... ㉢

답 $(5, 0, -1)$

단계	채점요소	배점
㉠	점 P의 좌표 정하기	20%
㉡	점 P의 x 좌표, z 좌표 구하기	60%
㉢	점 P의 좌표 구하기	20%

0714 점 B의 좌표를 (x, y, z) 라 하면 평행사변형 ABCD의
대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{x+3}{2}, \frac{y-2}{2}, \frac{z+4}{2}\right)$$

..... ㉠

이때 대각선 BD의 중점은 두 대각선의 교점 $(0, -4, 3)$ 과 일치
하므로

$$\frac{x+3}{2}=0, \frac{y-2}{2}=-4, \frac{z+4}{2}=3$$

$$\therefore x=-3, y=-6, z=2$$

따라서 $B(-3, -6, 2)$ 이므로

..... ㉡

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(-3+1)^2+(-6-4)^2+(2+5)^2} \\ &= \sqrt{153}=3\sqrt{17} \end{aligned}$$

..... ㉢

답 $3\sqrt{17}$

단계	채점요소	배점
㉠	점 B의 좌표를 정하고 대각선 BD의 중점의 좌표 구하기	30%
㉡	점 B의 좌표 구하기	40%
㉢	선분 AB의 길이 구하기	30%

0715 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times (-3) + 1 \times 5}{3+1}, \frac{3 \times 3 + 1 \times 3}{3+1}, \frac{3 \times 6 + 1 \times (-2)}{3+1}\right)$$

$$\therefore C(-1, 3, 4)$$

선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times (-3) - 1 \times 5}{3-1}, \frac{3 \times 3 - 1 \times 3}{3-1}, \frac{3 \times 6 - 1 \times (-2)}{3-1}\right)$$

0720 구 $x^2 + y^2 + (z-6)^2 = 25$ 의 중심을 C라 하면

$C(0, 0, 6)$ 이고 구의 반지름의 길이는 5이다.

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 나온 빛이 구

와 접하는 한 점을 A, 선분 PA를 연장하

였을 때 xy 평면과 만나는 점을 B라 하면

$\overline{PC} = 10$, $\overline{AC} = 5$ 이므로 직각삼각형

PCA에서

$$\overline{PA} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$$

이때 $\triangle PAC \sim \triangle POB$ 이고, $\overline{PO} = 16$ 이므로

$$\overline{AC} : \overline{OB} = \overline{PA} : \overline{PO} \text{에서}$$

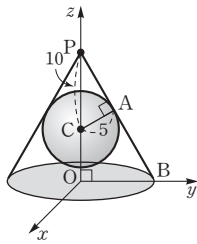
$$5 : \overline{OB} = 5\sqrt{3} : 16$$

$$\therefore \overline{OB} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

따라서 그림자는 반지름의 길이가 $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ 인 원이므로 그 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{16\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{256}{3} \pi$$

$$\text{답 } \frac{256}{3} \pi$$





A series of horizontal lines for writing, consisting of 25 evenly spaced lines across the page.

memorandum

[illegible]