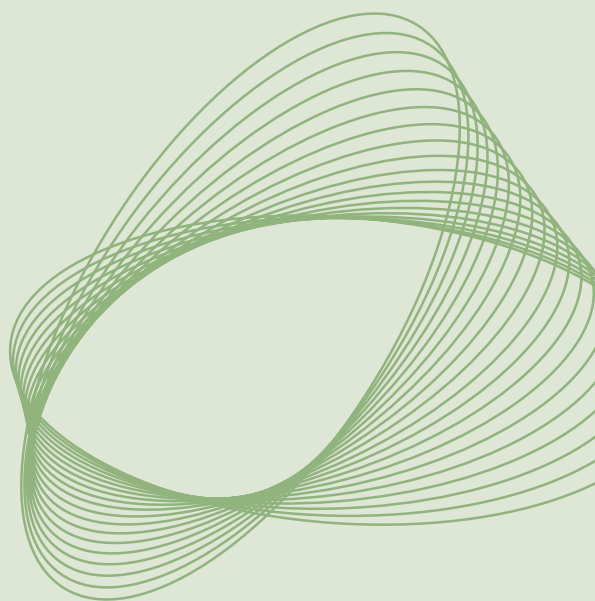




유형의 완성 RPM

미적분 II

정답및 풀이



01 수열의 극한

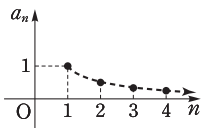
교과서 문제 정복하기

본책 007쪽, 009쪽

0001 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라

하면 $a_n = \frac{1}{n}$

오른쪽 그림에서 n 이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 수렴하고 그 극한값은 0이다.

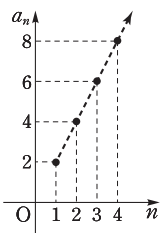


답 수렴, 0

0002 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 2n$$

오른쪽 그림에서 n 이 한없이 커질 때, a_n 의 값도 한없이 커지므로 이 수열은 양의 무한대로 발산한다.

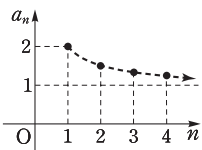


답 발산

0003 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라

하면 $a_n = \frac{n+1}{n}$

오른쪽 그림에서 n 이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 1에 한없이 가까워지므로 이 수열은 수렴하고 그 극한값은 1이다.

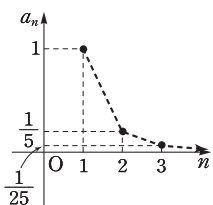


답 수렴, 1

0004 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라

하면 $a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

오른쪽 그림에서 n 이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 수렴하고 그 극한값은 0이다.

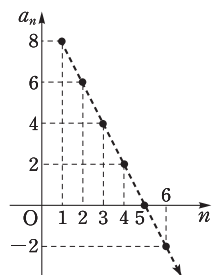


답 수렴, 0

0005 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라

하면 $a_n = -2n + 10$

오른쪽 그림에서 n 이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 이 수열은 음의 무한대로 발산한다.

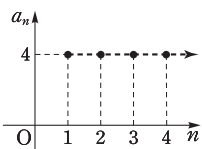


답 발산

0006 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라

하면 $a_n = 4$

오른쪽 그림에서 n 이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 4이므로 이 수열은 수렴하고 그 극한값은 4이다.

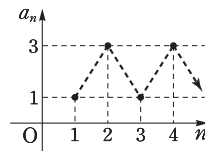


답 수렴, 4

0007 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 2 + (-1)^n$$

오른쪽 그림에서 n 이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 1과 3이 교대로 나타나므로 이 수열은 발산(진동)한다.

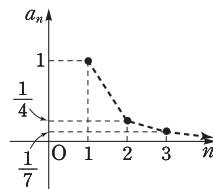


답 발산

0008 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라

하면 $a_n = \frac{1}{3n-2}$

오른쪽 그림에서 n 이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 수렴하고 그 극한값은 0이다.

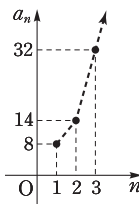


답 수렴, 0

0009 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 5 + 3^n$$

오른쪽 그림에서 n 이 한없이 커질 때, a_n 의 값도 한없이 커지므로 이 수열은 양의 무한대로 발산한다.

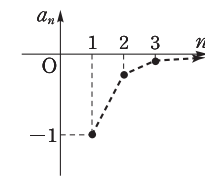


답 발산

0010 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라

하면 $a_n = -\frac{1}{n^2}$

오른쪽 그림에서 n 이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 수렴하고 그 극한값은 0이다.

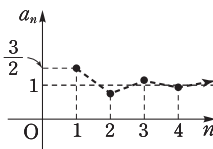


답 수렴, 0

0011 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

오른쪽 그림에서 n 이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 1에 한없이 가까워지므로 이 수열은 수렴하고 그 극한값은 1이다.

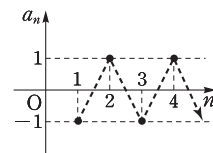


답 수렴, 1

0012 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라

하면 $a_n = \cos n\pi$

오른쪽 그림에서 n 이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 -1과 1이 교대로 나타나므로 이 수열은 발산(진동)한다.



답 발산

0013 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 - 2 = 0$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2 + (-1) = 1$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n + 4b_n) = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 4 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
 $= 3 \times 2 + 4 \times (-1) = 2$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3a_n b_n = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3 \times 2 \times (-1) = -6$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n}{5b_n} = \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{5 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{2 \times 2}{5 \times (-1)} = -\frac{4}{5}$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 3}{6b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} 3}{6 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{2 - 3}{6 \times (-1)} = \frac{1}{6}$$

답 (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) -6 (5) $-\frac{4}{5}$ (6) $\frac{1}{6}$

$$0014 \lim_{n \rightarrow \infty} (4a_n + 5) = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 5 = 4\alpha + 5$$

답 $4\alpha + 5$

$$0015 \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 3b_n) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2\alpha - 3\beta$$

답 $2\alpha - 3\beta$

$$0016 \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n^2 b_n) = -\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\alpha^2 \beta$$

답 $-\alpha^2 \beta$

$$0017 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n^2 - 2}{a_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} 2}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \frac{\beta^2 - 2}{\alpha}$$

답 $\frac{\beta^2 - 2}{\alpha}$

$$0018 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$$

답 2

$$0019 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}\right) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \\ = 2 \times 0 - 0 = 0$$

답 0

$$0020 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{5}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right) \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{5}{n}\right) \\ = 3 \times 2 = 6$$

답 6

$$0021 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

$$0022 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{1}{2}$$

답 수렴, $\frac{1}{2}$

$$0023 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 3n + 1}{n^2 + 5n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} = 3$$

답 수렴, 3

$$0024 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n^2+2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n}} = 0$$

답 수렴, 0

$$0025 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 5}{6n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1 - \frac{5}{n}}{6 - \frac{1}{n}} = \infty$$

답 발산

$$0026 \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2n - n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} - 1\right) = -\infty$$

답 발산

$$0027 \lim_{n \rightarrow \infty} (5n^2 - 4n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(5 - \frac{4}{n}\right) = \infty$$

답 발산

$$0028 \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

답 수렴, 0

$$0029 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3n} - n} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n} + n}{(\sqrt{n^2 + 3n} - n)(\sqrt{n^2 + 3n} + n)} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n} + n}{3n} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1}{3} = \frac{2}{3}$$

답 수렴, $\frac{2}{3}$

$$0030 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4 + \frac{5}{n}} = \frac{1}{4},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+6}{4n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{6}{n}}{4 + \frac{3}{n}} = \frac{1}{4}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

0031 공비는 $\frac{3}{2}$ 이고, $\frac{3}{2} > 1$ 이므로 주어진 수열은 발산한다.

답 발산

0032 공비는 0.7이고, $-1 < 0.7 < 1$ 이므로 주어진 수열은 수렴한다.

답 수렴

0033 공비는 $-\frac{4}{3}$ 이고, $-\frac{4}{3} < -1$ 이므로 주어진 수열은 발산한다.

답 발산

$$0034 \frac{3^n}{(-5)^n} = \left(-\frac{3}{5}\right)^n \text{에서 공비는 } -\frac{3}{5} \text{이고,}$$

$-1 < -\frac{3}{5} < 1$ 이므로 주어진 수열은 수렴한다.

답 수렴

$$0035 \frac{4^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^n \text{에서 공비는 } \frac{4}{3} \text{이고, } \frac{4}{3} > 1 \text{이므로}$$

주어진 수열은 발산한다.

답 발산

0036 $2^{-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 에서 수열 $\{2^{-n}\}$ 의 공비는 $\frac{1}{2}$ 이고,

$$-1 < \frac{1}{2} < 1 \text{이므로} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} = 0$$

$5^{-n} = \left(\frac{1}{5}\right)^n$ 에서 수열 $\{5^{-n}\}$ 의 공비는 $\frac{1}{5}$ 이고, $-1 < \frac{1}{5} < 1$ 이

$$\text{므로} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 5^{-n} = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{-n} + 5^{-n}) = 0 + 0 = 0 \quad \text{답 수렴, 0}$$

$$\textbf{0037} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{3^n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n} = 3 \quad \text{답 수렴, 3}$$

$$\textbf{0038} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n}{2^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{7}{5}\right)^n}{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1} = \infty \quad \text{답 발산}$$

0039 공비가 $3r$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < 3r \leq 1 \quad \therefore -\frac{1}{3} < r \leq \frac{1}{3} \quad \text{답 } -\frac{1}{3} < r \leq \frac{1}{3}$$

0040 공비가 $-\frac{r}{2}$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < -\frac{r}{2} \leq 1 \quad \therefore -2 \leq r < 2 \quad \text{답 } -2 \leq r < 2$$

0041 공비가 $2r-1$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < 2r-1 \leq 1, \quad 0 < 2r \leq 2 \\ \therefore 0 < r \leq 1 \quad \text{답 } 0 < r \leq 1$$

유형 익히기

• 본책 010~019쪽

0042 ① n 이 한없이 커지면 $3n+1$ 의 값도 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

② n 이 한없이 커지면 $\frac{4}{2n-1}$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

③ n 이 한없이 커지면 $2+3 \times (-1)^n$ 의 값은 -1 과 5 가 교대로 나타나므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.

④ n 이 한없이 커지면 $\frac{n^2+1}{n}$ 의 값도 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

⑤ 홀수 번째 항 $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{6}, \dots$ 는 -1 에 수렴하고, 짝수 번째 항 $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \dots$ 은 1 에 수렴하므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.

답 ②

0043 ① n 이 한없이 커지면 $\frac{n^2-3}{n+1}$ 의 값도 한없이 커지므로

수열 $\left\{\frac{n^2-3}{n+1}\right\}$ 은 양의 무한대로 발산한다.

② n 이 한없이 커지면 $2n-3$ 의 값도 한없이 커지므로 수열 $\{2n-3\}$ 은 양의 무한대로 발산한다.

③ $\frac{(-1)^n}{n}$ 에 $n=1, 2, 3, 4, \dots$ 를 차례대로 대입하면 $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

따라서 n 이 한없이 커지면 $\frac{(-1)^n}{n}$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 은 0에 수렴한다.

④ n 이 한없이 커지면 $1-n^2$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 수열 $\{1-n^2\}$ 은 음의 무한대로 발산한다.

⑤ $\sin \frac{n\pi}{2}$ 에 $n=1, 2, 3, 4, 5, \dots$ 를 차례대로 대입하면 $1, 0, -1, 0, 1, \dots$

따라서 n 이 한없이 커지면 $\sin \frac{n\pi}{2}$ 의 값은 $1, 0, -1, 0$ 이 이 순서대로 반복되므로 수열 $\left\{\sin \frac{n\pi}{2}\right\}$ 는 발산(진동)한다.

답 ③

0044 ㄱ. n 이 한없이 커지면 $\frac{\sqrt{3n}}{3}$ 의 값도 한없이 커지므로

수열 $\left\{\frac{\sqrt{3n}}{3}\right\}$ 은 양의 무한대로 발산한다.

ㄴ. n 이 한없이 커지면 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ 은 0에 수렴한다.

ㄷ. $\left(-\frac{3}{2}\right)^n$ 에 $n=1, 2, 3, 4, \dots$ 를 차례대로 대입하면 $-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, -\frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \dots$

따라서 n 이 한없이 커지면 $\left(-\frac{3}{2}\right)^n$ 의 값은 절댓값이 한없이 커지면서 그 부호는 음과 양이 교대로 나타나므로 수열 $\left\{\left(-\frac{3}{2}\right)^n\right\}$ 은 발산(진동)한다.

ㄹ. $\tan\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ 에 $n=1, 2, 3, 4, \dots$ 를 차례대로 대입하면 $-1, 1, -1, 1, \dots$

따라서 n 이 한없이 커지면 $\tan\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ 의 값은 -1 과 1 이 교대로 나타나므로 수열 $\left\{\tan\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\}$ 는 발산(진동)한다.

이상에서 발산하는 수열은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

0045 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 6 \text{에서} \quad \alpha + \beta = 6$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 3 \text{에서} \quad \alpha\beta = 3$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= 6^2 - 2 \times 3 = 30$$

답 30

0046 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n - b_n}{a_n b_n + k} = \frac{3 \times (-3) - 3}{-3 \times 3 + k} = \frac{-12}{k-9}$

즉 $\frac{-12}{k-9} = 4$ 이므로 $k-9 = -3$

$\therefore k = 6$

답 6

0047 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - 2 \right) = -2$

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 3 - \frac{2}{n(n+1)} \right\} = 3$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n (2a_n - 3b_n) = -2 \times \{ 2 \times (-2) - 3 \times 3 \}$

$= 26$

답 26

0048 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 3$ 에서 $\alpha - \beta = 3$ ㉠

$\lim_{n \rightarrow \infty} (4a_n + 3b_n) = 5$ 에서 $4\alpha + 3\beta = 5$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha = 2, \beta = -1$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

0049 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α 는 실수)라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+2} = \alpha$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2} + 5}{3a_n - 1} = 3$ 에서 $\frac{\alpha + 5}{3\alpha - 1} = 3$

$\alpha + 5 = 9\alpha - 3, \quad 8\alpha = 8 \quad \therefore \alpha = 1$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

답 ③

0050 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ($\alpha \neq 0$)라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \alpha$

이때 $\frac{4}{a_{n+1}} = 4 - a_n$ 에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (4 - a_n)$ 이므로

$\frac{4}{\alpha} = 4 - \alpha, \quad \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0$

$(\alpha - 2)^2 = 0 \quad \therefore \alpha = 2$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

답 2

0051 이차방정식 $x^2 - 2a_{n+1}x + a_n + 6 = 0$ 이 중근을 가지므로 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = (-a_{n+1})^2 - (a_n + 6) = 0$

$\therefore a_{n+1}^2 - a_n - 6 = 0$ ㉠

한편 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α 는 실수)라 하면

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \alpha$

㉠에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^2 - a_n - 6) = 0$ 이므로

$\alpha^2 - \alpha - 6 = 0, \quad (\alpha + 2)(\alpha - 3) = 0$

$\therefore \alpha = -2$ 또는 $\alpha = 3$

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 각 항이 양수이므로 $\alpha = 3$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

답 ②

0052 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n+1}{na_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 + \frac{1}{n}}{a_n}$

$= \frac{-2}{\frac{1}{7}} = -14$

답 -14

0053 ① $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 5}{2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = 1$

② $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{9n+5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{9 + \frac{5}{n}}} = \frac{1}{3}$

③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

④ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{3n^2}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{3} = \frac{2}{3}$

⑤ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

답 ②

0054 이차방정식 $x^2 + 2nx + 1 = 0$ 의 두 근이 α_n, β_n 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n + \beta_n = -2n, \alpha_n \beta_n = 1$

$\therefore \alpha_n^2 + \beta_n^2 = (\alpha_n + \beta_n)^2 - 2\alpha_n \beta_n$

$= (-2n)^2 - 2 \times 1$

$= 4n^2 - 2$

... 1단계

이때 $f(n) = n^2 + 2n \times n + 1 = 3n^2 + 1$ 이므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n^2 + \beta_n^2}{f(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2}{3n^2 + 1}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{1}{n^2}} = \frac{4}{3}$

... 2단계

답 $\frac{4}{3}$

채점 요소		비율
1단계	$\alpha_n^2 + \beta_n^2$ 을 n 에 대한 식으로 나타내기	50 %
2단계	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n^2 + \beta_n^2}{f(n)}$ 의 값 구하기	50 %

0055 $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 - 3n) - \{2(n-1)^2 - 3(n-1)\} \\ &= 4n - 5 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n-5)^2}{2n^2-3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16n^2-40n+25}{2n^2-3n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16 - \frac{40}{n} + \frac{25}{n^2}}{2 - \frac{3}{n}} = 8 \end{aligned}$$

RPM 비법 노트

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면
 $a_1 = S_1, a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$

0056 $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2-3n}{1+2+3+\dots+n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2-3n}{\frac{n(n+1)}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16n-6}{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16 - \frac{6}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 16 \end{aligned}$$

RPM 비법 노트

자연수의 거듭제곱의 합

$$\begin{aligned} ① \sum_{k=1}^n k &= \frac{n(n+1)}{2} \\ ② \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ ③ \sum_{k=1}^n k^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \end{aligned}$$

0057 $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\log_2(2n-1) + \log_2(8n+1) - 2\log_2(n+1)\}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{(2n-1)(8n+1)}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{16n^2-6n-1}{n^2+2n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{16 - \frac{6}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} \\ &= \log_2 16 = 4 \end{aligned}$$

RPM 비법 노트

로그의 성질

$a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ 일 때

- ① $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$
- ② $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
- ③ $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
- ④ $\log_a M^k = k \log_a M$ (단, k 는 실수이다.)

$$\begin{aligned} 0058 \quad a_n &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \\ &\quad \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \dots \\ &\quad \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n} \\ &= \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

0059 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

$$\begin{aligned} &= \log \frac{2}{1} + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \dots + \log \frac{n+1}{n} \\ &= \log \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{n+1}{n} \right) = \log(n+1) \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+4}{10^{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+4}{10^{\log(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+4}{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 2 \end{aligned}$$

0060 $a \neq 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2+bn+7}{2n-3}$ 의 값이 존재하지 않으므로

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2+bn+7}{2n-3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn+7}{2n-3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b + \frac{7}{n}}{2 - \frac{3}{n}} = \frac{b}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{b}{2} = 3$ 이므로 $b = 6$

$$\therefore a+b=6$$

$$0061 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2-3n-1}{4n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{1}{n}} = \frac{a}{4}$$

따라서 $\frac{a}{4} = 2$ 이므로 $a = 8$

0062 $a \neq 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2+6n-1}{\sqrt{n^2+3n-2}+n}$ 의 값이 존재하지 않

으므로 $a = 0$

$$\begin{aligned} \therefore b &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n-1}{\sqrt{n^2+3n-2}+n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}} + 1} = \frac{6}{1+1} = 3 \end{aligned}$$

$$\therefore a-b=-3$$

0063 $b \neq 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 - 4n - 1}{bn^3 - n^2 + 6} = 0$ 이므로 $b = 0$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 - 4n - 1}{bn^3 - n^2 + 6} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 - 4n - 1}{-n^2 + 6} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - \frac{4}{n} - \frac{1}{n^2}}{-1 + \frac{6}{n^2}} = -a \end{aligned}$$

따라서 $-a = 5$ 이므로 $a = -5$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(an+b)^2}{n^2 - 2n + 7} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5n)^2}{n^2 - 2n + 7} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{25n^2}{n^2 - 2n + 7} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{25}{1 - \frac{2}{n} + \frac{7}{n^2}} \\ &= 25 \end{aligned}$$

답 25

0064 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 3n + 1} - 2n)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4n^2 + 3n + 1} - 2n)(\sqrt{4n^2 + 3n + 1} + 2n)}{\sqrt{4n^2 + 3n + 1} + 2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1}{\sqrt{4n^2 + 3n + 1} + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{\sqrt{4 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} + 2} \\ &= \frac{3}{2 + 2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

답 ②

0065 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} - n}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2n} + n}{(\sqrt{n^2 + 2n} - n)(\sqrt{n^2 + 2n} + n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2n} + n}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1}{2} \\ &= \frac{1 + 1}{2} = 1 \end{aligned}$$

답 ⑤

0066 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right)}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} \\ &= \frac{3 \times (1 + 1)}{1 + 1} = 3 \end{aligned}$$

답 ⑤

0067 $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$$

$\therefore$ (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{n^2 + n}{2}} - \sqrt{\frac{n^2 - n}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n})(\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n})}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{1 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

답 ②

0068 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_2 = 5$, $a_4 = 11$ 에서

$$a_1 + d = 5, \quad a_1 + 3d = 11$$

두 식을 연립하여 풀면 $a_1 = 2$, $d = 3$

$$\therefore a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} (\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n-1})(\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n-1})}{\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{3 + \frac{2}{n}} + \sqrt{3 - \frac{1}{n}}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

0069 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n + \beta_n = 1, \quad \alpha_n \beta_n = n - \sqrt{n^2 + 2n}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n - \sqrt{n^2 + 2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n^2 + 2n}}{(n - \sqrt{n^2 + 2n})(n + \sqrt{n^2 + 2n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n^2 + 2n}}{-2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}}{-2} \\ &= \frac{1 + 1}{-2} = -1 \end{aligned}$$

답 ②

0070 $(3n)^2 < 9n^2 + 5n + 1 < (3n+1)^2$ 이므로

$$3n < \sqrt{9n^2 + 5n + 1} < 3n + 1$$

$$\therefore a_n = 3n$$

... 1단계

$$\begin{aligned}
&\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2+5n+1} - a_n) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2+5n+1} - 3n) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{9n^2+5n+1} - 3n)(\sqrt{9n^2+5n+1} + 3n)}{\sqrt{9n^2+5n+1} + 3n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{\sqrt{9n^2+5n+1} + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{1}{n}}{\sqrt{9 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} + 3} \\
&= \frac{5}{3+3} = \frac{5}{6} \quad \dots \text{2단계} \\
&\quad \text{답 } \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

	채점 요소	비율
1단계	a_n 구하기	40 %
2단계	$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2+5n+1} - a_n)$ 의 값 구하기	60 %

0071 $a \leq 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n^2+4n-2} - (an+b)\} = \infty$ 이므로 $a > 0$

$$\begin{aligned}
&\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n^2+4n-2} - (an+b)\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{\sqrt{n^2+4n-2} - (an+b)\}(\sqrt{n^2+4n-2} + an+b)}{\sqrt{n^2+4n-2} + an+b} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-a^2)n^2 + 2(2-ab)n - (2+b^2)}{\sqrt{n^2+4n-2} + an+b} \quad \dots \text{①}
\end{aligned}$$

이때 $1-a^2 \neq 0$ 이면 ①의 극한값이 존재하지 않으므로
 $1-a^2=0 \quad \therefore a=1 \quad (\because a>0)$

$a=1$ 을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(2-b)n - (2+b^2)}{\sqrt{n^2+4n-2} + n+b} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(2-b) - \frac{2+b^2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{4}{n} - \frac{2}{n^2}} + 1 + \frac{b}{n}} \\
&= \frac{2(2-b)}{2} = 2-b
\end{aligned}$$

따라서 $2-b=2$ 이므로 $b=0$

$$\therefore a+b=1$$

답 ④

0072 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+an} - \sqrt{n^2+bn})$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+an} - \sqrt{n^2+bn})(\sqrt{n^2+an} + \sqrt{n^2+bn})}{\sqrt{n^2+an} + \sqrt{n^2+bn}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-b)n}{\sqrt{n^2+an} + \sqrt{n^2+bn}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-b}{\sqrt{1+\frac{a}{n}} + \sqrt{1+\frac{b}{n}}} = \frac{a-b}{2}
\end{aligned}$$

따라서 $\frac{a-b}{2}=10$ 이므로 $a-b=20$

답 20

0073 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{9n^2+an} - 3n+a}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2+an} + 3n-a}{(\sqrt{9n^2+an} - 3n+a)(\sqrt{9n^2+an} + 3n-a)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2+an} + 3n-a}{7an-a^2} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 + \frac{a}{n}} + 3 - \frac{a}{n}}{7a - \frac{a^2}{n}} = \frac{6}{7a}
\end{aligned}$$

따라서 $\frac{6}{7a} = \frac{2}{7}$ 이므로 $a=3$

답 3

0074 $k \geq 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 이므로 $k < 0$

$$\begin{aligned}
&\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{(n-1)(n-2)} + kn\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{\sqrt{(n-1)(n-2)} + kn\} \{\sqrt{(n-1)(n-2)} - kn\}}{\sqrt{(n-1)(n-2)} - kn} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-k^2)n^2 - 3n + 2}{\sqrt{n^2 - 3n + 2} - kn}
\end{aligned}$$

이때 $1-k^2 \neq 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값이 존재하지 않으므로

$$1-k^2=0 \quad \therefore k=-1 \quad (\because k<0)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n+2}{\sqrt{n^2-3n+2}+n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3 + \frac{2}{n}}{\sqrt{1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} + 1} = -\frac{3}{2} \quad \text{답 } -\frac{3}{2}$$

0075 $\frac{3a_n-2}{a_n+1} = b_n$ 으로 놓으면

$$3a_n-2=b_n(a_n+1), \quad (3-b_n)a_n=b_n+2$$

$$\therefore a_n = \frac{b_n+2}{3-b_n}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n+2}{3-b_n} = \frac{2+2}{3-2} = 4$$

답 4

다른 풀이 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ 이면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n-2}{a_n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{a_n}}{1 + \frac{1}{a_n}} = 3$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α 는 실수)로 놓으면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n-2}{a_n+1} = 2$ 에서

$$\frac{3\alpha-2}{\alpha+1} = 2, \quad 3\alpha-2=2\alpha+2 \quad \therefore \alpha=4$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$$

0076 $(2n^2-3n)a_n = b_n$ 으로 놓으면

$$a_n = \frac{b_n}{2n^2-3n}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 b_n}{2n^2 - 3n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{2 - \frac{3}{n}} = \frac{4}{2} = 2\end{aligned}$$

답 ②

0077 $(n^2 + 2n)a_n = c_n$ 으로 놓으면

$$a_n = \frac{c_n}{n^2 + 2n}$$

$(3n - 2)b_n = d_n$ 으로 놓으면

$$b_n = \frac{d_n}{3n - 2}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 6$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n + 2)a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n + 2) \times \frac{c_n}{n^2 + 2n}}{\frac{d_n}{3n - 2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n + 2)(3n - 2)c_n}{(n^2 + 2n)d_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(12n^2 - 2n - 4)c_n}{(n^2 + 2n)d_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(12 - \frac{2}{n} - \frac{4}{n^2}\right)c_n}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)d_n} \\ &= \frac{12 \times 2}{1 \times 6} = 4\end{aligned}$$

답 4

0078 $a_n - 3b_n = c_n$ 으로 놓으면

$$a_n = 3b_n + c_n$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{b_n} = 0$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - 5}{a_n + 5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - 5}{3b_n + c_n + 5} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5}{b_n}}{3 + \frac{c_n}{b_n} + \frac{5}{b_n}} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

답 1/3

0079 $n^2 + n < (10n^2 + 3)a_n < n^2 + 2n$ 에서

$$\frac{n^2 + n}{10n^2 + 3} < a_n < \frac{n^2 + 2n}{10n^2 + 3}$$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{10n^2 + 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{10 + \frac{3}{n^2}} = \frac{1}{10}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{10n^2 + 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{10 + \frac{3}{n^2}} = \frac{1}{10}\end{aligned}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{10}$$

답 1/10

$$\mathbf{0080} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 3,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 3$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$$

답 ⑤

0081 $-1 \leq \cos n\theta \leq 1$ 이므로 $n \neq 0$ 일 때

$$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\cos n\theta}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n^2}\right) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ 이므로 수열의 극한의 대소

관계에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n\theta}{n^2} = 0$

답 0

0082 $3n - 3 < na_n < \sqrt{9n^2 + 5n}$ 에서

$$\frac{3n - 3}{n} < a_n < \frac{\sqrt{9n^2 + 5n}}{n}$$

이때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 3}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{3}{n}\right) = 3,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 + 5n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{9 + \frac{5}{n}} = 3$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 3n)a_n}{4n^2 - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{n}\right)a_n}{4 - \frac{2}{n^2}} = \frac{3}{4}$$

답 ③

0083 조건 (가)에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(16 - \frac{1}{n}\right) = 16, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(16 + \frac{1}{n}\right) = 16$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 16$$

또 조건 (나)에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(10 - \frac{1}{n}\right) = 10, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(10 + \frac{1}{n}\right) = 10$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 10$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n + b_n) + (a_n - b_n)}{2} \\ &= \frac{16 + 10}{2} = 13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n + b_n) - (a_n - b_n)}{2} \\ &= \frac{16 - 10}{2} = 3\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 39$$

답 39

0084 $-1 \leq \sin n\theta \leq 1$ 이므로

$$3n-1 \leq 3n - \sin n\theta \leq 3n+1$$

따라서 $n > 0$ 일 때 $\frac{3n-1}{2n+1} \leq \frac{3n - \sin n\theta}{2n+1} \leq \frac{3n+1}{2n+1}$

이때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{2}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - \sin n\theta}{2n+1} = \frac{3}{2} \quad \text{답 ④}$$

0085 $2n < a_n < 2n+1$ 에서 $\sum_{k=1}^n 2k < \sum_{k=1}^n a_k < \sum_{k=1}^n (2k+1)$

$$2 \times \frac{n(n+1)}{2} < \sum_{k=1}^n a_k < 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$n^2 + n < \sum_{k=1}^n a_k < n^2 + 2n$$

$$\therefore \frac{n^2 + n}{7n^2 + 10} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{7n^2 + 10} < \frac{n^2 + 2n}{7n^2 + 10}$$

... 1단계

이때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{7n^2 + 10} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{7 + \frac{10}{n^2}} = \frac{1}{7},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{7n^2 + 10} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{7 + \frac{10}{n^2}} = \frac{1}{7}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{7n^2 + 10} = \frac{1}{7} \quad \text{... 2단계}$$

답 $\frac{1}{7}$

	채점 요소	비율
1단계	$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{7n^2 + 10}$ 에 대한 부등식 세우기	50 %
2단계	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{7n^2 + 10}$ 의 값 구하기	50 %

0086 곡선 $y = x^2 - (n+2)x + a_n$ 이 x 축과 만나므로 이차방정식 $x^2 - (n+2)x + a_n = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = \{-(n+2)\}^2 - 4a_n \geq 0$$

$$\therefore a_n \leq \frac{(n+2)^2}{4} \quad \text{..... ①}$$

또 곡선 $y = x^2 - (n-1)x + a_n$ 이 x 축과 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2 - (n-1)x + a_n = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = \{-(n-1)\}^2 - 4a_n < 0$$

$$\therefore a_n > \frac{(n-1)^2}{4} \quad \text{..... ②}$$

①, ②에서 $\frac{(n-1)^2}{4} < a_n \leq \frac{(n+2)^2}{4}$ 이므로

$$\frac{(n-1)^2}{4(n^2+2n)} < \frac{a_n}{n^2+2n} \leq \frac{(n+2)^2}{4(n^2+2n)}$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^2}{4(n^2+2n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-2n+1}{4n^2+8n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{8}{n}} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2}{4(n^2+2n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+4n+4}{4n^2+8n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{8}{n}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2+2n} = \frac{1}{4} \quad \text{답 } \frac{1}{4}$$

0087 $\neg$. [반례] $a_n = n, b_n = n^2$ 이면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{이지만}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ (거짓)}$$

$\neg$. $a_n - b_n = c_n$ 으로 놓으면 $b_n = a_n - c_n$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = 0$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - c_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{c_n}{a_n}\right) \\ &= 1 - 0 = 1 \text{ (참)} \end{aligned}$$

$\neg$. [반례] $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \frac{2}{n}$ 이면 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < b_n$

이지만

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg$ 뿐이다.

답 ②

0088 $\neg$. $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ 에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-|a_n|) = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \text{이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ (참)}$$

$\neg$. [반례] $a_n = n, b_n = \frac{1}{n}$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이지만

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \text{ (거짓)}$$

$\neg$. [반례] $\{a_n\}: 0, 1, 0, 1, \dots, \{b_n\}: 1, 0, 1, 0, \dots$ 이면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0 \text{이지만 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0 \text{이다. (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg$ 뿐이다.

답 ①

0089 ① [반례] $a_n = \frac{1}{n}, b_n = n$ 이면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \text{이지만}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$$

즉 두 수열 $\{a_n\}$, $\{a_nb_n\}$ 은 모두 수렴하지만 수열 $\{b_n\}$ 은 발산한다.

② [반례] $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$ 이면

$$a_nb_n = (-1)^{2n+1} = -1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_nb_n = -1$$

즉 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 은 모두 발산(진동)하지만 수열 $\{a_nb_n\}$ 은 수렴한다.

③ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n - (a_n - b_n)\} = \alpha - \beta$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_nb_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha(\alpha - \beta)$$

즉 두 수열 $\{a_n\}$, $\{a_n - b_n\}$ 이 모두 수렴하면 수열 $\{a_nb_n\}$ 도 수렴한다.

④ [반례] $a_n = (-1)^n$ 이면

$$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1, a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = -1$$

즉 두 수열 $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n-1}\}$ 은 모두 수렴하지만 수열 $\{a_n\}$ 은 발산(진동)한다.

⑤ [반례] $a_n = n - \frac{1}{n}$, $b_n = n + \frac{1}{n}$, $c_n = n$ 이면

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < c_n < b_n$ 이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0 \text{ 이지만}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

즉 수열 $\{c_n\}$ 은 발산한다.

답 ③

$$\begin{aligned} 0090 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^{2n-1}}{3^{n-1} + 2^{2n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - \frac{1}{2} \times 4^n}{\frac{1}{3} \times 3^n + 4^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 1} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned} 0091 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9^n - 3^n} - 3^n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{9^n - 3^n} - 3^n)(\sqrt{9^n - 3^n} + 3^n)}{\sqrt{9^n - 3^n} + 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3^n}{\sqrt{9^n - 3^n} + 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n} + 1} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 $-\frac{1}{2}$

0092 $5^{n+1} - 2^n < a_n < 5^{n+1} + 2^n$ 에서

$$\frac{5^{n+1} - 2^n}{5^n + 2^{n-1}} < \frac{a_n}{5^n + 2^{n-1}} < \frac{5^{n+1} + 2^n}{5^n + 2^{n-1}}$$

이때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} - 2^n}{5^n + 2^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n} = 5,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} + 2^n}{5^n + 2^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n} = 5$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{5^n + 2^{n-1}} = 5$$

답 5

0093 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α 는 실수)라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} + 3^n a_n}{3^{n+1} - 5^n a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \left(\frac{3}{5}\right)^n \times a_n}{3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n - a_n} = -\frac{5}{\alpha}$$

$$\text{따라서 } -\frac{5}{\alpha} = 6 \text{ 이므로 } \alpha = -\frac{5}{6}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{5}{6}$$

답 $-\frac{5}{6}$

0094 $n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= n \times 3^n - (n-1) \times 3^{n-1} = (2n+1) \times 3^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \times 3^n}{(2n+1) \times 3^{n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n+1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

답 ④

0095 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 에서 $x = 1 \pm \sqrt{2}$

$\alpha = 1 + \sqrt{2}$, $\beta = 1 - \sqrt{2}$ 라 하면 $-1 < \frac{\beta}{\alpha} < 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n+2} + \beta^{n+2}}{\alpha^n + \beta^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^2 + \beta^2 \times \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} \\ &= \alpha^2 = (1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

답 ⑤

0096 공비가 $\frac{x-x^2}{2}$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < \frac{x-x^2}{2} \leq 1 \quad \therefore -2 < x-x^2 \leq 2$$

(i) $-2 < x-x^2$, 즉 $x^2 - x - 2 < 0$ 에서

$$(x+1)(x-2) < 0 \quad \therefore -1 < x < 2$$

(ii) $x-x^2 \leq 2$, 즉 $x^2 - x + 2 \geq 0$ 에서

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq 0$$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $-1 < x < 2$

따라서 주어진 등비수열이 수렴하도록 하는 정수 x 는 0, 1의 2개이다.

답 2

0097 공비가 $\sqrt{2} \cos x$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < \sqrt{2} \cos x \leq 1, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3}{4}\pi \quad (\because 0 \leq x < \pi)$$

$$\text{답 } \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3}{4}\pi$$

0098 공비가 $\log_3 x - 2$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < \log_3 x - 2 \leq 1, \quad 1 < \log_3 x \leq 3$$

$$\log_3 3 < \log_3 x \leq \log_3 3^3$$

$$\therefore 3 < x \leq 27$$

따라서 구하는 모든 자연수 x 의 값의 합은

$$4 + 5 + 6 + \dots + 27 = \frac{24 \times (4 + 27)}{2} = 372 \quad \text{답 ②}$$

RPM비법노트

등차수열의 합

첫째항이 a , 제 n 항이 l 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{n(a+l)}{2}$$

0099 (i) 등비수열 $\left\{\left(\frac{3x+1}{2}\right)^n\right\}$ 의 공비가 $\frac{3x+1}{2}$ 이므로 이

등비수열이 수렴하려면

$$-1 < \frac{3x+1}{2} \leq 1, \quad -2 < 3x+1 \leq 2$$

$$-3 < 3x \leq 1 \quad \therefore -1 < x \leq \frac{1}{3} \quad \dots \text{①단계}$$

(ii) 등비수열 $\{(x-3)(2x+1)^n\}$ 의 첫째항이 $(x-3)(2x+1)$,

공비가 $2x+1$ 이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$$(x-3)(2x+1) = 0 \text{ 또는 } -1 < 2x+1 \leq 1$$

$$(x-3)(2x+1) = 0 \text{에서}$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 3 \quad \dots \text{①}$$

$$-1 < 2x+1 \leq 1 \text{에서} \quad -2 < 2x \leq 0$$

$$\therefore -1 < x \leq 0 \quad \dots \text{②}$$

$$\text{①, ②에서} \quad -1 < x \leq 0 \text{ 또는 } x = 3 \quad \dots \text{②단계}$$

$$(i), (ii) \text{에서} \quad -1 < x \leq 0 \quad \dots \text{③단계}$$

$$\text{답 } -1 < x \leq 0$$

	채점 요소	비율
①단계	등비수열 $\left\{\left(\frac{3x+1}{2}\right)^n\right\}$ 이 수렴하도록 하는 x 의 값의 범위 구하기	40 %
②단계	등비수열 $\{(x-3)(2x+1)^n\}$ 이 수렴하도록 하는 x 의 값의 범위 구하기	50 %
③단계	두 등비수열이 모두 수렴하도록 하는 x 의 값의 범위 구하기	10 %

0100 (i) $|r| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = \infty$ 이므로

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n}}{1+r^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{r^{2n}} + 1} = \frac{1}{0+1} = 1$$

(ii) $|r| = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 1$ 이므로

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n}}{1+r^{2n}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(iii) $|r| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 0$ 이므로

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n}}{1+r^{2n}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

$$\text{이상에서} \quad a+b-c = \frac{3}{2}$$

$$\text{답 } \frac{3}{2}$$

0101 $\neg$. $r > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-r^n}{2+r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{r^n} - 1}{\frac{2}{r^n} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1 \text{ (거짓)}$$

$\neg$. $r = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-r^n}{2+r^n} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3} \text{ (거짓)}$$

$\neg$. $-1 < r < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-r^n}{2+r^n} = \frac{2-0}{2+0} = 1 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg$ 뿐이다.

$$\text{답 } \neg$$

0102 (i) $0 < r < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} + r + 2}{r^n + 1} = \frac{0 + r + 2}{0 + 1} = r + 2$$

$$\text{따라서 } r + 2 = \frac{8}{3} \text{ 이려면 } r = \frac{2}{3}$$

(ii) $r = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} + r + 2}{r^n + 1} = \frac{1 + 1 + 2}{1 + 1} = 2$$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $r > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} + r + 2}{r^n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r + \frac{1}{r^{n-1}} + \frac{2}{r^n}}{1 + \frac{1}{r^n}} \\ &= \frac{r + 0 + 0}{1 + 0} = r \end{aligned}$$

$$\therefore r = \frac{8}{3}$$

이상에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} + r + 2}{r^n + 1} = \frac{8}{3}$ 을 만족시키는 r 의 값은 $\frac{2}{3}, \frac{8}{3}$

이므로 구하는 합은

$$\frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3} \quad \text{답 } \frac{10}{3}$$

0103 (i) $0 < |r| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n+1} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n+1} - 1}{r^{2n} + r^2} = \frac{0 - 1}{0 + r^2} = -\frac{1}{r^2}$$

(ii) $r = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n+1} = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n+1} - 1}{r^{2n} + r^2} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0$$

(iii) $|r| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |r^{2n+1}| = \infty$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n+1}-1}{r^{2n}+r^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r - \frac{1}{r^{2n}}}{1 + \frac{1}{r^{2n-2}}} = \frac{r-0}{1+0} = r$$

(iv) $r = -1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n+1} = -1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n+1}-1}{r^{2n}+r^2} = \frac{-1-1}{1+1} = -1$$

$$\text{이상에서 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n+1}-1}{r^{2n}+r^2} = \begin{cases} -\frac{1}{r^2} & (0 < |r| < 1) \\ 0 & (r=1) \\ r & (|r| > 1) \\ -1 & (r=-1) \end{cases}$$

이때 $0 < |r| < 1$ 이면 $0 < r^2 < 1$ 이므로

$$\frac{1}{r^2} > 1 \quad \therefore -\frac{1}{r^2} < -1$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n+1}-1}{r^{2n}+r^2} = \alpha$ 라 하면

$$\alpha \leq -1 \text{ 또는 } \alpha = 0 \text{ 또는 } \alpha > 1$$

즉 극한값이 될 수 없는 것은 ④이다.

답 ④

0104 $f(-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2n}-2 \times (-1)}{(-1)^{2n+2}+2} = \frac{1+2}{1+2} = 1$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}-2 \times \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+2}+2} = \frac{0-\frac{2}{3}}{0+2} = -\frac{1}{3}$$

$$f(2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}-2 \times 2}{2^{2n+2}+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{1}{4^{n-1}}}{4+\frac{2}{4^n}} = \frac{1-0}{4+0} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore f(-1) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f(2) = \frac{11}{12}$$

답 11/12

RPM 비법 노트

(i) $|x| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+2} = 0$ 이므로

$$f(x) = -x$$

(ii) $x = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+2} = 1$ 이므로

$$f(x) = -\frac{1}{3}$$

(iii) $|x| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+2} = \infty$ 이므로

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

(iv) $x = -1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+2} = 1$ 이므로

$$f(x) = 1$$

0105 (i) $-1 < x < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^n}{1+x^n} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

(ii) $x = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^n}{1+x^n} = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

(iii) $x > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^n}{1+x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^n}-1}{\frac{1}{x^n}+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

이상에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 ③이다.

답 ③

0106 (i) $|x| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+4} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+4}+x^2+3}{x^{2n}+1} = \frac{0+x^2+3}{0+1} = x^2+3$$

(ii) $|x| = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+4} = 1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+4}+x^2+3}{x^{2n}+1} = \frac{1+1+3}{1+1} = \frac{5}{2}$$

(iii) $|x| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+4} = \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+4}+x^2+3}{x^{2n}+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^4 + \frac{1}{x^{2n-2}} + \frac{3}{x^{2n}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} \\ &= \frac{x^4+0+0}{1+0} = x^4 \end{aligned}$$

$$\text{이상에서 } f(x) = \begin{cases} x^2+3 & (|x| < 1) \\ \frac{5}{2} & (|x| = 1) \\ x^4 & (|x| > 1) \end{cases}$$

답 풀이 참조

0107 $Q_n(2n, 0)$ 이므로

$$\overline{OP_n} = \sqrt{(2n)^2 + (\sqrt{2n})^2} = \sqrt{4n^2 + 2n}, \overline{OQ_n} = 2n$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{OP_n} - \overline{OQ_n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 2n} - 2n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4n^2 + 2n} - 2n)(\sqrt{4n^2 + 2n} + 2n)}{\sqrt{4n^2 + 2n} + 2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{4n^2 + 2n} + 2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{4 + \frac{2}{n}} + 2} \\ &= \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 1/2

0108 $P(n, 3n^2), Q(n+1, 3(n+1)^2)$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= \overline{PQ} = \sqrt{1^2 + \{3(n+1)^2 - 3n^2\}^2} \\ &= \sqrt{36n^2 + 36n + 10} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{36n^2 + 36n + 10}}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{36 + \frac{36}{n} + \frac{10}{n^2}} \\ &= 6 \end{aligned}$$

답 6

0109 직선 $2x+3y=8$, 즉 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$ 과 직선

$y=\frac{n}{3n+1}x$ 의 교점의 x 좌표는 $-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}=\frac{n}{3n+1}x$ 에서

$$\frac{9n+2}{3(3n+1)}x=\frac{8}{3}$$

$$\therefore x=\frac{8(3n+1)}{9n+2}$$

$x=\frac{8(3n+1)}{9n+2}$ 을 $y=\frac{n}{3n+1}x$ 에 대입하면

$$y=\frac{n}{3n+1}\times\frac{8(3n+1)}{9n+2}=\frac{8n}{9n+2}$$

$$\therefore P_n\left(\frac{8(3n+1)}{9n+2}, \frac{8n}{9n+2}\right)$$

... 1단계

이때 $A(4, 0)$ 이므로

$$S_n=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{8n}{9n+2}=\frac{16n}{9n+2}$$

... 2단계

$$\therefore \lim_{n\rightarrow\infty} S_n=\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{16n}{9n+2}=\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{16}{9+\frac{2}{n}}=\frac{16}{9}$$

... 3단계

답 $\frac{16}{9}$

	채점 요소	비율
1단계	점 P_n 의 좌표 구하기	40 %
2단계	S_n 구하기	30 %
3단계	$\lim_{n\rightarrow\infty} S_n$ 의 값 구하기	30 %

0110 원 $x^2+y^2=9^n+1$ 위의 점 $A_n(3^n, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$3^n x+y=9^n+1$$

$y=0$ 을 대입하면

$$3^n x=9^n+1 \quad \therefore x=\frac{9^n+1}{3^n}$$

$$\therefore B\left(\frac{9^n+1}{3^n}, 0\right)$$

따라서 $S_n=\frac{1}{2}\times\frac{9^n+1}{3^n}\times 1=\frac{9^n+1}{2\times 3^n}$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} &= \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{\frac{9^{n+1}+1}{2\times 3^{n+1}}}{\frac{9^n+1}{2\times 3^n}} = \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{9^{n+1}+1}{3\times 9^n+3} \\ &= \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{9+\left(\frac{1}{9}\right)^n}{3+\frac{3}{9^n}} = 3\end{aligned}$$

답 ①

0111 직선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)$ 과 함수 $y=3x(x-1)$ 의 그래

프의 교점의 x 좌표는 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)=3x(x-1)$ 에서

$$(x-1)\left\{3x-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$x=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 을 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)$ 에 대입하면

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1\right\}$$

따라서 $\overline{OH_n}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

$\overline{P_nH_n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left\{1-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{\overline{P_nH_n}}{\overline{OH_n}} &= \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left\{1-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \\ &= \lim_{n\rightarrow\infty} \left\{3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=3\end{aligned}$$

답 3

0112 $\overline{OA}=30$, $\overline{OC_n}=n$ 이므로

$$\overline{AC_n}=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{OC_n}^2}=\sqrt{900+n^2}$$

한편 $\triangle AB_1D_n\sim\triangle AB_nC_n$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AB_1}:\overline{AB_n}=\overline{B_1D_n}:\overline{B_nC_n}$ 에서

$$1:n=\overline{B_1D_n}:30 \quad \therefore \overline{B_1D_n}=\frac{30}{n}$$

$$\therefore \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{\overline{AC_n}-\overline{OC_n}}{\overline{B_1D_n}}$$

$$= \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{\sqrt{900+n^2}-n}{\frac{30}{n}}$$

$$= \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{n(\sqrt{900+n^2}-n)(\sqrt{900+n^2}+n)}{30(\sqrt{900+n^2}+n)}$$

$$= \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{30n}{\sqrt{900+n^2}+n}$$

$$= \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{30}{\sqrt{\frac{900}{n^2}+1}+1}=15$$

답 15

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 020~023쪽

0113 ㄱ. n 이 한없이 커지면 $\frac{1}{7^n}$ 의 값은 0에 한없이 가까워지

므로 수열 $\left\{\frac{1}{7^n}\right\}$ 은 0에 수렴한다.

ㄴ. n 이 한없이 커지면 $\frac{2n-1}{n+3}$ 의 값은 2에 한없이 가까워지므로

수열 $\left\{\frac{2n-1}{n+3}\right\}$ 은 2에 수렴한다.

ㄷ. $\frac{1-(-1)^n}{2}$ 에 $n=1, 2, 3, 4, \dots$ 를 차례대로 대입하면

$$1, 0, 1, 0, \dots$$

따라서 n 이 한없이 커지면 $\frac{1-(-1)^n}{2}$ 의 값은 1과 0이 교대

로 나타나므로 수열 $\left\{\frac{1-(-1)^n}{2}\right\}$ 은 발산(진동)한다.

ㄷ. $\log \frac{1}{n} = -\log n$ 에 $n=1, 2, 3, 4, \dots$ 를 차례대로 대입하면
 $-\log 1, -\log 2, -\log 3, -\log 4, \dots$

따라서 n 이 한없이 커지면 $\log \frac{1}{n}$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 수열 $\left\{\log \frac{1}{n}\right\}$ 은 음의 무한대로 발산한다.

이상에서 수렴하는 수열은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ①

0114 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 3) = 1$ 에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 - 2a_n + 2)$$

$$= 4^2 - 2 \times 4 + 2 = 10$$

답 ⑤

0115 $\lim_{n \rightarrow \infty} nb_n(3a_n - 2n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 b_n \left(3 \times \frac{a_n}{n} - 2\right)$
 $= \frac{1}{2} \times (3 \times 10 - 2) = 14$

답 ②

0116 ① $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{3}{n}} = \frac{1}{2}$

② $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3-1} = 0$

③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n-4)}{n^3+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-4n^2}{n^3+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n^3}} = 1$

④ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{3n^2-5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{3n^2-5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{3-\frac{5}{n}} = \frac{1}{3}$

⑤ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(3n-1)}{4n^2-5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-4n+1}{4n^2-5n}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{4-\frac{5}{n}} = \frac{3}{4}$

답 ③

0117 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_n = a_1 + (n-1)d, a_{2n} = a_1 + (2n-1)d$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}-3n}{a_n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + (2n-1)d - 3n}{a_1 + (n-1)d + 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2d-3)n + a_1 - d}{nd + a_1 - d + 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2d-3 + \frac{a_1-d}{n}}{d + \frac{a_1-d+1}{n}}$$

$$= \frac{2d-3}{d}$$

따라서 $\frac{2d-3}{d} = \frac{3}{2}$ 이므로 $4d-6=3d$

$$\therefore d=6$$

$$\therefore a_3 - a_1 = 2d = 2 \times 6 = 12$$

답 12

0118 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 -2 , 공차가 5 이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$= \frac{n\{2 \times (-2) + (n-1) \times 5\}}{2} = \frac{5n^2 - 9n}{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 9n}{2n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{9}{n}}{2} = \frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

0119 $c \neq 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn + 2}{cn^3 + 3n - 2} = 0$ 이므로 $c=0$

또 $a \neq 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn + 2}{3n - 2}$ 의 값이 존재하지 않으므로

$$a=0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn + 2}{cn^3 + 3n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn + 2}{3n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b + \frac{2}{n}}{3 - \frac{2}{n}} = \frac{b}{3}$$

따라서 $\frac{b}{3} = 3$ 이므로 $b=9$

$$\therefore a+b-c=9$$

답 ⑤

0120 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - \sqrt{4n^2 + 1}}{n - \sqrt{n^2 + 2}}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n - \sqrt{4n^2 + 1})(2n + \sqrt{4n^2 + 1})(n + \sqrt{n^2 + 2})}{(n - \sqrt{n^2 + 2})(n + \sqrt{n^2 + 2})(2n + \sqrt{4n^2 + 1})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n^2 + 2}}{2(2n + \sqrt{4n^2 + 1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}}}{2\left(2 + \sqrt{4 + \frac{1}{n^2}}\right)}$$

$$= \frac{1+1}{2 \times (2+2)} = \frac{1}{4}$$

답 ①

0121 $x^2 + 2nx - 6n = 0$ 에서

$$x = -n \pm \sqrt{n^2 + 6n}$$

$$\therefore a_n = \sqrt{n^2 + 6n} - n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 6n} - n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 6n} - n)(\sqrt{n^2 + 6n} + n)}{\sqrt{n^2 + 6n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{\sqrt{n^2 + 6n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{\sqrt{1 + \frac{6}{n}} + 1}$$

$$= \frac{6}{1+1} = 3$$

답 3

$$\begin{aligned}
& \text{0122 } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{an^2+n} - \sqrt{an^2-an}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{an^2+n} - \sqrt{an^2-an})(\sqrt{an^2+n} + \sqrt{an^2-an})}{\sqrt{an^2+n} + \sqrt{an^2-an}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a+1)n}{\sqrt{an^2+n} + \sqrt{an^2-an}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a+1}{\sqrt{a+\frac{1}{n}} + \sqrt{a-\frac{1}{n}}} = \frac{a+1}{2\sqrt{a}} \\
&\text{즉 } \frac{a+1}{2\sqrt{a}} = \frac{5}{4} \text{ 이므로} \\
&2(a+1) = 5\sqrt{a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{양변을 제곱하면 } 4a^2 + 8a + 4 = 25a \\
&4a^2 - 17a + 4 = 0, \quad (4a-1)(a-4) = 0 \\
&\therefore a = \frac{1}{4} \text{ 또는 } a = 4
\end{aligned}$$

$$\text{따라서 구하는 합은 } \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4} \quad \text{답 ④}$$

$$\begin{aligned}
& \text{0123 } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+an+1} - \sqrt{bn^2-3n+2}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+an+1} - \sqrt{bn^2-3n+2})(\sqrt{n^2+an+1} + \sqrt{bn^2-3n+2})}{\sqrt{n^2+an+1} + \sqrt{bn^2-3n+2}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-b)n^2 + (a+3)n - 1}{\sqrt{n^2+an+1} + \sqrt{bn^2-3n+2}} \quad \dots\dots \text{㉠}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{이때 } 1-b \neq 0 \text{ 이면 ㉠의 극한값이 존재하지 않으므로} \\
&1-b=0 \quad \therefore b=1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&b=1 \text{ 을 ㉠에 대입하면} \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a+3)n-1}{\sqrt{n^2+an+1} + \sqrt{n^2-3n+2}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a+3-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}} = \frac{a+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{따라서 } \frac{a+3}{2} = 10 \text{ 이므로 } a=17 \\
&\therefore a+b=18 \quad \text{답 ⑤}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{0124 } \frac{-2a_n+1}{5a_n-3} = b_n \text{ 으로 놓으면} \\
&-2a_n+1 = b_n(5a_n-3), \quad (5b_n+2)a_n = 3b_n+1 \\
&\therefore a_n = \frac{3b_n+1}{5b_n+2} \\
&\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -1 \text{ 이므로} \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n+1}{a_n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3b_n+1}{5b_n+2} + 1}{\frac{3b_n+1}{5b_n+2} - 1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8b_n+3}{-2b_n-1} \\
&= \frac{8 \times (-1) + 3}{-2 \times (-1) - 1} = -5 \quad \text{답 ②}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{0125 } \frac{a_n+2}{2} = b_n \text{ 으로 놓으면} \\
&a_n = 2b_n - 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 6 \text{ 이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0 \\
&\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n+1}{a_n+2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2b_n-2)+1}{(2b_n-2)+2n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2b_n-2+\frac{1}{n}}{2 \times \frac{b_n}{n} - \frac{2}{n} + 2} \\
&= \frac{2 \times 6 - 2}{2} = 5 \quad \text{답 ⑤}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{0126 } a_n^2 - 2na_n < n - n^2 \text{ 에서} \\
&a_n^2 - 2na_n + n^2 < n, \quad (a_n - n)^2 < n \\
&-\sqrt{n} < a_n - n < \sqrt{n}, \quad 2n - \sqrt{n} < a_n + n < 2n + \sqrt{n} \\
&\therefore \frac{2n - \sqrt{n}}{4n+1} < \frac{a_n + n}{4n+1} < \frac{2n + \sqrt{n}}{4n+1}
\end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - \sqrt{n}}{4n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \sqrt{\frac{1}{n}}}{4 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}, \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \sqrt{n}}{4n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \sqrt{\frac{1}{n}}}{4 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + n}{4n+1} = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$

$$\text{0127 } \neg, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n - (a_n - b_n)\} = \alpha - 0 = \alpha \text{ (참)}$$

$$\begin{aligned}
&\neg. \text{ [반례]} a_n = (-1)^n \text{ 이면 } a_n^2 = (-1)^{2n} = 1 \text{ 이므로} \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 1 \text{ 이지만 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ 의 값은 존재하지 않는다. (거짓)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\neg. \text{ [반례]} a_n = (-1)^n \text{ 이면 } a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \text{ 이므로} \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1 \text{ 이지만 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ 의 값은 존재하지 않는다. (거짓)}
\end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ㄱ

$$\begin{aligned}
& \text{0128 } 4 \diamond 2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 4^n + 3 \times 2^n}{4^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 3 \\
&\therefore (4 \diamond 2) \diamond 6 = 3 \diamond 6 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 \times 3^n + 2 \times 6^n}{3^n + 6^n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = 2 \quad \text{답 ②}
\end{aligned}$$

0129 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 1, 공비가 r 이므로

$$a_n = 1 \times r^{n-1} = r^{n-1}, \quad S_n = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n-1}}{r^n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - r^{n-1}}{r^n - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{r}}{1 - \left(\frac{1}{r}\right)^n} \\ &= 1 - \frac{1}{r} \quad \left(\because 0 < \frac{1}{r} < 1\right)\end{aligned}$$

따라서 $1 - \frac{1}{r} = \frac{6}{7}$ 이므로 $\frac{1}{r} = \frac{1}{7}$
 $\therefore r = 7$

답 ⑤

0130 공비가 $\frac{|x|}{2} - 3$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < \frac{|x|}{2} - 3 \leq 1, \quad 2 < \frac{|x|}{2} \leq 4$$

$$\therefore 4 < |x| \leq 8$$

따라서 정수 x 는 $\pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 8$ 의 8개이다.

답 8

0131 등비수열 $\{r^n\}$ 이 수렴하므로

$$-1 < r \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

ㄱ. 등비수열 $\{(-r)^n\}$ 의 공비는 $-r$ 이고 $\textcircled{1}$ 에서

$$-1 \leq -r < 1$$

이때 $-r = -1$, 즉 $r = 1$ 이면 등비수열 $\{(-r)^n\}$ 은 수렴하지 않는다.

ㄴ. 등비수열 $\left\{\left(\frac{1-r}{2}\right)^n\right\}$ 의 공비는 $\frac{1-r}{2}$ 이고 $\textcircled{1}$ 에서

$$0 \leq \frac{1-r}{2} < 1$$

따라서 등비수열 $\left\{\left(\frac{1-r}{2}\right)^n\right\}$ 은 항상 수렴한다.

ㄷ. 등비수열 $\{r^{2n}\}$ 의 공비는 r^2 이고 $\textcircled{1}$ 에서

$$0 \leq r^2 \leq 1$$

따라서 등비수열 $\{r^{2n}\}$ 은 항상 수렴한다.

이상에서 항상 수렴하는 수열인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

0132 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_n = ar^{n-1}$$

이때 $a = 0$ 또는 $r = 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 1}{3^n + 2^{2n-1}} = 0$ 이므로

$$ar \neq 0$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 1}{3^n + 2^{2n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ar^{n-1} + 1}{3^n + \frac{1}{2} \times 4^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{4} \left(\frac{r}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{4^n}}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}} \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

(i) $|r| > 4$ 일 때

$\textcircled{1}$ 의 극한값이 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $r = 4$ 일 때

$\textcircled{1}$ 에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{4} \left(\frac{r}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{4^n}}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}} = \frac{a}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2} = 3$ 이므로 $a = 6$

(iii) $0 < |r| < 4$ 일 때

$\textcircled{1}$ 에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{4} \left(\frac{r}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{4^n}}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}} = 0$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $r = -4$ 일 때

$\textcircled{1}$ 의 극한값이 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 $a = 6, r = 4$ 이므로

$$a_2 = ar = 24$$

답 ⑤

0133 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2} - 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1} = 5$

$$f(4) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+2} - 6 \times 4 + 2}{4^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16 - \frac{22}{4^n}}{1 + \frac{1}{4^n}} = 16$$

$$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right) + f(4) = 21$$

답 21

0134 두 점 $(n, \sqrt{n+4}), (n+1, \sqrt{n+5})$ 를 지나는 직선의 기울기가 a_n 이므로

$$a_n = \frac{\sqrt{n+5} - \sqrt{n+4}}{(n+1) - n} = \sqrt{n+5} - \sqrt{n+4}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n+4}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n+4}) (\sqrt{n+5} + \sqrt{n+4})}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n+4}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n+4}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{5}{n}} + \sqrt{1 + \frac{4}{n}}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

0135 $P_n(n, 3^n), Q_n(n, 5^n)$ 이므로

$$P_n Q_n = 5^n - 3^n$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1} Q_{n+1}}{P_n Q_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} - 3^{n+1}}{5^n - 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - 3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n}{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n} = 5\end{aligned}$$

답 5

0136 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + b_n) = 6$ 에서 $2\alpha + \beta = 6$ ㉠

$\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - 2b_n) = 2$ 에서 $3\alpha - 2\beta = 2$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha = 2, \beta = 2$... 1단계

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3b_n - a_n}{2a_n + 3b_n} = \frac{3\beta - \alpha}{2\alpha + 3\beta} = \frac{2}{5}$... 2단계

답 $\frac{2}{5}$

채점 요소	비율
1단계 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 의 값 구하기	60 %
2단계 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3b_n - a_n}{2a_n + 3b_n}$ 의 값 구하기	40 %

0137 $a_n = \left(1 - \frac{2}{3}\right)\left(1 - \frac{2}{4}\right)\left(1 - \frac{2}{5}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{2}{n+2}\right)$
 $= \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \cdots \times \frac{n-1}{n+1} \times \frac{n}{n+2}$
 $= \frac{2}{(n+1)(n+2)}$... 1단계

$b_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$... 2단계

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{n}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \times \frac{2}{(n+1)(n+2)} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{6}{n}} = \frac{2}{3}$... 3단계

답 $\frac{2}{3}$

채점 요소	비율
1단계 a_n 을 간단히 하기	30 %
2단계 b_n 을 간단히 하기	20 %
3단계 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{n}$ 의 값 구하기	50 %

0138 $S_n = \frac{n\{2 \times 3 + (n-1) \times 2\}}{2} = n^2 + 2n$... 1단계

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{(n+1)^2 + 2(n+1)} - \sqrt{n^2 + 2n} \}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n + 3} - \sqrt{n^2 + 2n})$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{\sqrt{n^2 + 4n + 3} + \sqrt{n^2 + 2n}}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{\sqrt{1 + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}}$
 $= \frac{2}{1+1} = 1$... 2단계

답 1

채점 요소	비율
1단계 S_n 구하기	30 %
2단계 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$ 의 값 구하기	70 %

0139 (i) $|r| > 10$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10}{r}\right)^n = 0$ 이므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n + 10^n}{r^n - 10^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{10}{r}\right)^n}{1 - \left(\frac{10}{r}\right)^n} = 1$... 1단계

(ii) $|r| < 10$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{10}\right)^n = 0$ 이므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n + 10^n}{r^n - 10^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{r}{10}\right)^n + 1}{\left(\frac{r}{10}\right)^n - 1} = -1$... 2단계

(i), (ii)에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n + 10^n}{r^n - 10^n} = -1$ 을 만족시키는 r 의 값의 범위는 $|r| < 10$ 이므로 정수 r 는 $-9, -8, -7, \dots, 9$ 의 19개이다.

... 3단계

답 19

채점 요소	비율
1단계 $ r > 10$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n + 10^n}{r^n - 10^n}$ 의 값 구하기	40 %
2단계 $ r < 10$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n + 10^n}{r^n - 10^n}$ 의 값 구하기	40 %
3단계 조건을 만족시키는 정수 r 의 개수 구하기	20 %

0140 전략 a, b 의 값의 범위에 따라 경우를 나누어 극한값을 구해 본다.

$1 < a < 2, a = 2, a > 2$ 인 경우로 나누어 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + a^{n+1}}{2^{n+1} + a^n}$ 의 값을 구하면 다음과 같다.

(i) $1 < a < 2$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{2}\right)^n = 0$ 이므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + a^{n+1}}{2^{n+1} + a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a \times \left(\frac{a}{2}\right)^n}{2 + \left(\frac{a}{2}\right)^n} = \frac{1}{2} \neq a$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a = 2$ 일 때

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + a^{n+1}}{2^{n+1} + a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 2^{n+1}}{2^{n+1} + 2^n} = 1 \neq a$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a > 2$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{a}\right)^n = 0$ 이므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + a^{n+1}}{2^{n+1} + a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{a}\right)^n + a}{2 \times \left(\frac{2}{a}\right)^n + 1} = a$

이상에서 $a > 2$

이때 $a < b, a = b, a > b$ 인 경우로 나누어 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1} + b^n}$ 의 값을 구하면 다음과 같다.

(iv) $a < b$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1} + b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n + b}{a \times \left(\frac{a}{b}\right)^n + 1} = b$$

따라서 $b = \frac{4}{a}$ 에서 $a > 2$ 이면 $b < 2$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(v) $a = b$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1} + b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + a^{n+1}}{a^{n+1} + a^n} = 1$$

따라서 $\frac{4}{a} = 1$ 이므로 $a = 4, b = 4$

(vi) $a > b$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{a}\right)^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1} + b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + b \times \left(\frac{b}{a}\right)^n}{a + \left(\frac{b}{a}\right)^n} = \frac{1}{a} \neq \frac{4}{a}$$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 $a = 4, b = 4$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 32$$

답 32

0141 **전략** x 의 값의 범위를 나누어 $f(x)$ 를 다항함수로 나타낸다.

(i) $|x| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-3)x^{2n+1} + 3x}{3x^{2n} + 1} = 3x$$

(ii) $x = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = 1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-3)x^{2n+1} + 3x}{3x^{2n} + 1} = \frac{(a-3) + 3}{3 + 1} = \frac{a}{4}$$

(iii) $|x| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x^{2n+1}| = \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-3)x^{2n+1} + 3x}{3x^{2n} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-3)x + \frac{3}{x^{2n-1}}}{3 + \frac{1}{x^{2n}}} = \frac{a-3}{3}x \end{aligned}$$

(iv) $x = -1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = -1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-3)x^{2n+1} + 3x}{3x^{2n} + 1} \\ &= \frac{-(a-3) - 3}{3 + 1} = -\frac{a}{4} \end{aligned}$$

$$\text{이상에서 } f(x) = \begin{cases} 3x & (|x| < 1) \\ \frac{a}{4} & (x = 1) \\ \frac{a-3}{3}x & (|x| > 1) \\ -\frac{a}{4} & (x = -1) \end{cases}$$

따라서 $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f\left(\frac{a}{4}\right)$ 이므로 $\frac{a}{4}$ 의 값의 범위

에 따라 $f\left(\frac{a}{4}\right)$ 의 값을 구하면 다음과 같다.

(v) $\left|\frac{a}{4}\right| < 1$, 즉 $|a| < 4$ 이면 $f\left(\frac{a}{4}\right) = 3 \times \frac{a}{4} = \frac{3}{4}a$

따라서 $\frac{3}{4}a = \frac{5}{6}$ 에서 $a = \frac{10}{9}$

(vi) $\frac{a}{4} = 1$, 즉 $a = 4$ 이면 $f\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{a}{4} = 1$

따라서 $(f \circ f)(1) = \frac{5}{6}$ 를 만족시키지 않는다.

(vii) $\left|\frac{a}{4}\right| > 1$, 즉 $|a| > 4$ 이면

$$f\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{a-3}{3} \times \frac{a}{4} = \frac{a^2-3a}{12}$$

따라서 $\frac{a^2-3a}{12} = \frac{5}{6}$ 에서 $a^2 - 3a - 10 = 0$

$$(a+2)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 5 \quad (\because |a| > 4)$$

(viii) $\frac{a}{4} = -1$, 즉 $a = -4$ 이면 $f\left(\frac{a}{4}\right) = -\frac{a}{4} = 1$

따라서 $(f \circ f)(1) = \frac{5}{6}$ 를 만족시키지 않는다.

이상에서 $(f \circ f)(1) = \frac{5}{6}$ 가 되도록 하는 모든 a 의 값의 합은

$$\frac{10}{9} + 5 = \frac{55}{9}$$

답 $\frac{55}{9}$

0142 **전략** 접선의 기울기와 반지름의 길이를 이용하여 a_n, b_n 을 각각 n 에 대한 식으로 나타낸다.

직선 $y = x$ 의 기울기가 1이므로 두 점 $(n, n), (a_n, b_n)$ 을 지나 는 직선의 기울기는 -1 이다.

따라서 $\frac{b_n - n}{a_n - n} = -1$ 이므로 $b_n - n = -a_n + n$

$$\therefore b_n = -a_n + 2n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 두 점 $(a_n, b_n), (n, n)$ 사이의 거리와 두 점 $(a_n, b_n),$

$(2, 0)$ 사이의 거리가 같으므로

$$\sqrt{(a_n - n)^2 + (b_n - n)^2} = \sqrt{(a_n - 2)^2 + b_n^2}$$

양변을 제곱하면

$$(a_n - n)^2 + (b_n - n)^2 = (a_n - 2)^2 + b_n^2$$

$$\therefore 2(n-2)a_n + 2nb_n - 2n^2 + 4 = 0$$

①을 대입하면

$$2(n-2)a_n + 2n(-a_n + 2n) - 2n^2 + 4 = 0$$

$$-4a_n + 2n^2 + 4 = 0 \quad \therefore a_n = \frac{n^2 + 2}{2}$$

$a_n = \frac{n^2 + 2}{2}$ 를 ①에 대입하면

$$b_n = -\frac{n^2 + 2}{2} + 2n = \frac{-n^2 + 4n - 2}{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 2b_n}{n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2 + 2}{2} + 2 \times \frac{-n^2 + 4n - 2}{2}}{n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2 + 8n - 2}{2n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{8}{n} - \frac{2}{n^2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

02 급수

교과서 문제 정복하기

본책 025쪽

0143 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0144 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\} = 2$ 답 2

0145 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

답 발산

0146 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

답 수렴, 1

0147 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots \\ &\quad + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - 1) = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

답 발산

0148 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{k+1} - \frac{k+1}{k+2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{5} \right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{n+1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $-\frac{1}{2}$ 이다.

답 수렴, $-\frac{1}{2}$

0149 주어진 급수는 첫째항이 -2 , 공차가 3인 등차수열의 합이므로 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -2 + (n-1) \times 3 = 3n - 5$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (3n - 5) = \infty \neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

답 풀이 참조

0150 주어진 급수는 첫째항이 3, 공비가 3인 등비수열의 합이므로 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = \infty \neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

답 풀이 참조

0151 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면 $a_n = 5$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5 \neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

답 풀이 참조

0152 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{n+1}{4n-1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{4n-1} = \frac{1}{4} \neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

답 풀이 참조

0153 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 1 - \left(\frac{1}{7} \right)^n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{7} \right)^n \right\} = 1 \neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

답 풀이 참조

0154 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
 $= 3 + 2 \times (-2) = -1$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{3} - \frac{b_n}{2} \right) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
 $= \frac{1}{3} \times 3 - \frac{1}{2} \times (-2) = 2$

답 (1) -1 (2) 2

0155 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$ 이고, $-1 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로 주어진 등비급수는 수렴한다.

따라서 그 합은 $\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

답 수렴, $\frac{3}{2}$

0156 첫째항이 0.1, 공비가 0.1이고, $-1 < 0.1 < 1$ 이므로 주어진 등비급수는 수렴한다.

따라서 그 합은 $\frac{0.1}{1 - 0.1} = \frac{1}{9}$

답 수렴, $\frac{1}{9}$

0157 공비가 $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ 이고, $-\frac{\sqrt{5}}{2} < -1$ 이므로 주어진 등비급수는 발산한다. 답 발산

0158 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 에서 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{1}{2}$ 이고, $-1 < -\frac{1}{2} < 1$ 이므로 주어진 등비급수는 수렴한다.

따라서 그 합은 $\frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$ 답 수렴, $\frac{2}{3}$

0159 $\sum_{n=1}^{\infty} 2 \times \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$ 에서 공비가 $\frac{5}{3}$ 이고, $\frac{5}{3} > 1$ 이므로 주어진 등비급수는 발산한다. 답 발산

0160 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$
 $= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}}$
 $= 1 + 3 = 4$ 답 4

0161 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5^n} - \frac{3}{7^n}\right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n$
 $= 2 \times \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} - 3 \times \frac{\frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{7}}$
 $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ 답 0

0162 공비가 x 이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면 $-1 < x < 1$ 답 $-1 < x < 1$

0163 공비가 $-2x$ 이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면 $-1 < -2x < 1 \quad \therefore -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ 답 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

0164 $0.\dot{8} = 0.8 + 0.08 + 0.008 + \dots$
 $= \frac{8}{10} + \frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \dots$
 $= \frac{\frac{8}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{8}{9}$ 답 $\frac{8}{9}$

0165 $1.\dot{3}\dot{6} = 1 + 0.36 + 0.0036 + 0.000036 + \dots$
 $= 1 + \frac{36}{100} + \frac{36}{100^2} + \frac{36}{100^3} + \dots$
 $= 1 + \frac{\frac{36}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 1 + \frac{4}{11} = \frac{15}{11}$ 답 $\frac{15}{11}$

유형 익히기

• 본책 026~035쪽

0166 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{1+2+3+\dots+n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

이때 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 2\left\{\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

따라서 주어진 급수의 합은

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 2$$
 답 2

0167 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{2}{4n^2 - 1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

이때 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2n+1}$$

따라서 주어진 급수의 합은

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = 1$$
 답 1

0168 $S_n = \frac{n\{2 \times 3 + (n-1) \times 2\}}{2} = n(n+2)$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots \right.$$

$$\quad \left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$
 답 ③

0169 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n + \beta_n = 2, \alpha_n \beta_n = -(n^2 + n)$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n} = -\frac{2}{n^2 + n}$$

$$= -\frac{2}{n(n+1)}$$

$$= -2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

... 1단계

이때 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left\{ -2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right\} \\ &= -2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= -2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \quad \cdots \text{2단계} \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= -2 \quad \cdots \text{3단계} \\ \text{답 } &-2 \end{aligned}$$

채점 요소	비율
1단계 $\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n}$ 을 n 에 대한 식으로 나타내기	40 %
2단계 부분합 S_n 구하기	40 %
3단계 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right)$ 의 합 구하기	20 %

$$\begin{aligned} \text{0170 } &\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log \frac{2^2}{1 \times 3} + \log \frac{3^2}{2 \times 4} + \log \frac{4^2}{3 \times 5} + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \log \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left\{ \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \right) \times \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \right) \times \left(\frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \right) \times \cdots \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{2(n+1)}{n+2} = \log 2 \quad \text{답 } \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0171 } &\sum_{n=1}^{\infty} \log_3 a_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log_3 a_k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \log_3 a_3 + \cdots + \log_3 a_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_3 (a_1 a_2 a_3 \times \cdots \times a_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_3 \frac{n+5}{9n-2} = \log_3 \frac{1}{9} = -2 \quad \text{답 } \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0172 } &\sum_{n=2}^{\infty} (\log_n 10 - \log_{n+1} 10) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left\{ \frac{1}{\log k} - \frac{1}{\log(k+1)} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 3} \right) + \left(\frac{1}{\log 3} - \frac{1}{\log 4} \right) + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} \right\} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log(n+1)} \right\} = \frac{1}{\log 2} \quad \text{답 } \textcircled{2} \end{aligned}$$

0173 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하자.

$$\begin{aligned} \neg. S_1 &= 2, S_2 = 0, S_3 = 2, S_4 = 0, S_5 = 2, S_6 = 0, \cdots \text{이므로} \\ S_{2n-1} &= 2, S_{2n} = 0 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} &= 2, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 0 \\ \text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} &\neq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} \text{이므로 주어진 급수는 발산한다.} \\ \neg. S_n &= 0 + 0 + \cdots + 0 = 0 \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0 \\ \text{따라서 주어진 급수는 } 0 \text{에 수렴한다.} \\ \text{ㄷ. } S_n &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{3} \\ \text{따라서 주어진 급수는 } \frac{1}{3} \text{에 수렴한다.} \\ \text{이상에서 수렴하는 급수인 것은 } \neg, \text{ㄷ이다.} \quad \text{답 } \textcircled{5} \end{aligned}$$

0174 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_1 &= 1, S_2 = \frac{1}{2}, S_3 = 1, S_4 = \frac{2}{3}, S_5 = 1, S_6 = \frac{3}{4}, \cdots \text{이므로} \\ S_{2n-1} &= 1, S_{2n} = \frac{n}{n+1} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} &= 1, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \\ \text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 1 \text{이므로 주어진 급수는 } 1 \text{에 수렴} \\ \text{한다.} \quad \text{답 } \textcircled{\text{수렴, 1}} \end{aligned}$$

0175 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하자.

$$\begin{aligned} \neg. S_1 &= 1, S_2 = -1, S_3 = 2, S_4 = -2, S_5 = 3, S_6 = -3, \cdots \\ \text{이므로 } S_{2n-1} &= n, S_{2n} = -n \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty \\ \text{따라서 주어진 급수는 발산한다.} \\ \neg. S_n &= \left(2 - \frac{3}{2} \right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1} \right) \\ &= 2 - \frac{n+2}{n+1} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{n+2}{n+1} \right) = 2 - 1 = 1 \\ \text{따라서 주어진 급수는 } 1 \text{에 수렴한다.} \\ \text{ㄷ. } S_1 &= \frac{1}{2}, S_2 = -\frac{1}{6}, S_3 = \frac{1}{2}, S_4 = -\frac{1}{4}, S_5 = \frac{1}{2}, \\ S_6 &= -\frac{3}{10}, \cdots \text{이므로} \\ S_{2n-1} &= \frac{1}{2}, S_{2n} = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{n+2} = -\frac{n}{2(n+2)} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} &= \frac{1}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{n}{2(n+2)} \right\} = -\frac{1}{2} \\ \text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} &\neq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} \text{이므로 주어진 급수는 발산한다.} \\ \text{이상에서 발산하는 급수인 것은 } \neg, \text{ㄷ이다.} \quad \text{답 } \textcircled{4} \end{aligned}$$

0176 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

또 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2S_n + 3a_n}{S_n - 1} = \frac{2 \times 3 + 3 \times 0}{3 - 1} = 3$$

답 3

0177 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n - 6n - 5}{4a_n + 3n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3a_n}{n} - 6 - \frac{5}{n}}{\frac{4a_n}{n} + 3 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{0 - 6 - 0}{0 + 3 + 0} = -2 \end{aligned}$$

답 ④

0178 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 2)$ 가 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2) = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - 3) = 3 \times 2 - 3 = 3$$

답 3

0179 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5a_n - 6}{2a_n + 5}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5a_n - 6}{2a_n + 5} = 0$

$$\frac{5a_n - 6}{2a_n + 5} = b_n \text{으로 놓으면}$$

$$5a_n - 6 = (2a_n + 5)b_n, \quad (5 - 2b_n)a_n = 5b_n + 6$$

$$\therefore a_n = \frac{5b_n + 6}{5 - 2b_n}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5b_n + 6}{5 - 2b_n} = \frac{5 \times 0 + 6}{5 - 2 \times 0} = \frac{6}{5}$$

답 6/5

0180 $\neg, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n+1} = \frac{3}{2} \neq 0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2n+1}$ 은 발산한다.

$$\hookrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\hookrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+3} - \sqrt{k+2})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + (\sqrt{6} - \sqrt{5}) + \dots + (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}) \}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{3}) = \infty$$

이상에서 수렴하는 급수인 것은 $\hookrightarrow$ 뿐이다.

답 ②

0181 ① $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

② $\frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{6 \times 8} + \frac{1}{8 \times 10} + \dots$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{4}$$

③ 주어진 급수의 제 n 항은 $\frac{n+1}{n}$ 이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0$$

이므로 주어진 급수는 발산한다.

④ 주어진 급수의 제 n 항은 $\frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ 이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \infty$$

이므로 주어진 급수는 발산한다.

⑤ 주어진 급수의 제 n 항은 $\log \frac{n}{2n+1}$ 이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{n}{2n+1} = \log \frac{1}{2} \neq 0$$

이므로 주어진 급수는 발산한다.

답 ②

0182 $\neg, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\hookrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2n} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n} + n} \\ &= \frac{2}{1+1} = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+2n} - n)$ 은 발산한다.

이상에서 발산하는 급수인 것은 ㄷ뿐이다.

답 ㄷ

0183 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (5a_n + 3b_n) &= 18 \text{에서} \quad 5 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 3 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 18 \\ \therefore 5\alpha + 3\beta &= 18 \quad \dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2b_n) &= 7 \text{에서} \quad 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 7 \\ \therefore 3\alpha - 2\beta &= 7 \quad \dots\dots \text{㉡} \end{aligned}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha = 3, \beta = 1$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha + \beta = 4$$

답 4

0184 $2a_n + 3b_n = c_n$ 으로 놓으면 $a_n = -\frac{3}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 12$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \right) = -\frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \\ &= -\frac{3}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 12 = 3 \end{aligned}$$

답 ③

0185 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \{ (a_n + b_n) - a_n \} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \beta - \alpha \end{aligned}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 도 수렴한다. (참)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{ (참)}$$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a_n) = 1 \neq 0$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$ 은 발산한다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

0186 ① [반례] $a_n = 2 - \frac{1}{n}$, $b_n = 1 + \frac{1}{n}$ 이면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 2 \neq 0$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 은 발산하지만

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$$

이므로 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 은 모두 수렴한다.

② [반례] $a_n = 0$, $b_n = n$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = 0$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 은 모두 수렴하지만 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 발산한다.

③ [반례] $\{a_n\}: -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$

$\{b_n\}: 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 모두 발산하지만 $a_n + b_n = 0$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 은 0에 수렴한다.

④ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하고 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 발산할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 이 수렴한다고 가정하자.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \{ (a_n + b_n) - a_n \} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \beta - \alpha \end{aligned}$$

즉 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하므로 모순이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 은 발산한다.

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 이 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다.

답 ④

$$\begin{aligned} \text{0187 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+2} - 4^{n+2}}{6^n} &= 25 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6} \right)^n - 16 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n \\ &= 25 \times \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{5}{6}} - 16 \times \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= 25 \times 5 - 16 \times 2 = 93 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned} \text{0188 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n \cos \left(n\pi + \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cos \frac{4}{3}\pi + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cos \frac{7}{3}\pi + \left(\frac{1}{2} \right)^3 \cos \frac{10}{3}\pi + \dots \\ &= -\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^3 - \left(\frac{1}{2} \right)^4 + \dots \\ &= \frac{-\frac{1}{4}}{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

답 ②

$$\text{0189 } 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = \frac{1 \times (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}}{4^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{2}{3}$

0190 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{7} \right)^n - 4 + k \right\} = 0, \quad -4 + k = 0 \quad \therefore k = 4$$

따라서 $a_n = \left(\frac{1}{7} \right)^n$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \times \left(\frac{1}{7} \right)^n \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{7} \right)^n \\ &= \frac{-\frac{1}{7}}{1 - \left(-\frac{1}{7} \right)} = -\frac{1}{8} \end{aligned} \quad \text{답 } -\frac{1}{8}$$

0191 $a_1=1, a_2=0, a_3=1, a_4=0, \dots$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \dots \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{8} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{3}{8}$$

0192 함수 $y=x^2-x-20$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표는 $x^2-x-20=0$ 에서

$$(x+4)(x-5)=0 \quad \therefore x=-4 \text{ 또는 } x=5$$

이때 $\alpha > \beta$ 이므로 $\alpha=5, \beta=-4$... 1단계

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\alpha^n} + \frac{3}{\beta^n} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{4}{5^n} + \frac{3}{(-4)^n} \right\} \\ &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5} \right)^n + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4} \right)^n \\ &= 4 \times \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} + 3 \times \frac{-\frac{1}{4}}{1 - \left(-\frac{1}{4} \right)} \\ &= 4 \times \frac{1}{4} + 3 \times \left(-\frac{1}{5} \right) = \frac{2}{5} \quad \dots \text{2단계} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{2}{5}$$

채점 요소	비율
1단계 α, β 의 값 구하기	30%
2단계 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\alpha^n} + \frac{3}{\beta^n} \right)$ 의 합 구하기	70%

0193 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= 2 \text{에서} \\ \frac{a}{1-r} &= 2 \quad \therefore a = 2(1-r) \quad \dots \text{㉠} \end{aligned}$$

수열 $\{a_n^2\}$ 은 첫째항이 a^2 , 공비가 r^2 인 등비수열이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 &= \frac{4}{3} \text{에서} \\ \frac{a^2}{1-r^2} &= \frac{4}{3} \quad \therefore \frac{a^2}{(1+r)(1-r)} = \frac{4}{3} \quad \dots \text{㉡} \end{aligned}$$

$$\text{㉠을 ㉡에 대입하면} \quad \frac{4(1-r)^2}{(1+r)(1-r)} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1-r}{1+r} = \frac{1}{3}, \quad 3(1-r) = 1+r$$

$$4r = 2 \quad \therefore r = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{1}{2} \text{을 ㉠에 대입하면} \quad a = 1$$

따라서 수열 $\{a_n^3\}$ 은 첫째항이 $a^3=1$, 공비가 $r^3=\frac{1}{8}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{8}{7} \quad \text{답 } \frac{8}{7}$$

0194 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{5}{4}$ 에서

$$\frac{1}{1-r} = \frac{5}{4} \quad \therefore r = \frac{1}{5}$$

따라서 수열 $\{a_n^2\}$ 은 첫째항이 $a_1^2=1$, 공비가 $r^2=\frac{1}{25}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{25}{24} \quad \text{답 } \frac{25}{24}$$

$$\text{0195} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\cos^2 x)^{n-1} = \frac{1}{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{\sin^2 x} = 2 \text{이므로} \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{이므로} \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore x = \frac{\pi}{4} \quad \text{답 } \frac{\pi}{4}$$

0196 두 등비수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= 5 \text{에서} \quad \frac{a_1}{1-r} = 5 \\ \therefore a_1 &= 5(1-r) \quad \dots \text{㉠} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= 10 \text{에서} \quad \frac{b_1}{1-r} = 10 \\ \therefore b_1 &= 10(1-r) \quad \dots \text{㉡} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } b_1 = a_1 + 2 \text{이므로} \quad 10(1-r) = 5(1-r) + 2$$

$$5r = 3 \quad \therefore r = \frac{3}{5}$$

$$r = \frac{3}{5} \text{을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면} \quad a_1 = 2, b_1 = 4$$

따라서 수열 $\{a_n b_n\}$ 은 첫째항이 $a_1 b_1 = 8$, 공비가 $r^2 = \frac{9}{25}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{8}{1 - \frac{9}{25}} = \frac{25}{2} \quad \text{답 } \frac{25}{2}$$

0197 $\frac{(3x+1)^n}{2^{3n}} = \left(\frac{3x+1}{8} \right)^n$ 이므로 주어진 등비급수의 첫째항과 공비는 모두 $\frac{3x+1}{8}$ 이다.

따라서 주어진 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < \frac{3x+1}{8} < 1, \quad -8 < 3x+1 < 8$$

$$-9 < 3x < 7 \quad \therefore -3 < x < \frac{7}{3}$$

즉 정수 x 의 최솟값은 -2 이다.

답 -2

0198 주어진 등비급수의 첫째항과 공비가 모두 $\log_2 x - 2$ 이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < \log_2 x - 2 < 1, \quad 1 < \log_2 x < 3$$

$$\therefore 2 < x < 8$$

답 ④

0199 주어진 등비급수의 첫째항이 $x+2$, 공비가 $\frac{1-x}{3}$ 이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$x+2=0 \text{ 또는 } -1 < \frac{1-x}{3} < 1$$

$$x+2=0 \text{ 에서 } x=-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$-1 < \frac{1-x}{3} < 1 \text{ 에서 } -3 < 1-x < 3$$

$$-4 < -x < 2 \quad \therefore -2 < x < 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 에서 } -2 \leq x < 4$$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0, \dots, 3$ 의 6개이다.

답 6

0200 (i) 등비수열 $\left\{\left(\frac{2x+3}{4}\right)^n\right\}$ 의 첫째항과 공비가 모두 $\frac{2x+3}{4}$ 이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < \frac{2x+3}{4} \leq 1, \quad -4 < 2x+3 \leq 4$$

$$-7 < 2x \leq 1 \quad \therefore -\frac{7}{2} < x \leq \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1} \text{ 단계}$$

(ii) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (-2x+1)^n$ 의 첫째항과 공비가 모두 $-2x+1$ 이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < -2x+1 < 1, \quad -2 < -2x < 0$$

$$\therefore 0 < x < 1 \quad \dots \textcircled{2} \text{ 단계}$$

$$(i), (ii) \text{ 에서 } 0 < x \leq \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{3} \text{ 단계}$$

답 $0 < x \leq \frac{1}{2}$

채점 요소	비율
1단계 $\left\{\left(\frac{2x+3}{4}\right)^n\right\}$ 이 수렴하도록 하는 x 의 값의 범위 구하기	40 %
2단계 $\sum_{n=1}^{\infty} (-2x+1)^n$ 이 수렴하도록 하는 x 의 값의 범위 구하기	40 %
3단계 x 의 값의 범위 구하기	20 %

0201 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 이 수렴하므로 $-1 < r < 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+2}$ 은 공비가 r 인 등비급수이므로 항상 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n-1}$ 은 공비가 r^2 인 등비급수이고 $\textcircled{1}$ 에서 $0 \leq r^2 < 1$ 이므로 항상 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-4r}{3}\right)^n$ 은 공비가 $\frac{1-4r}{3}$ 인 등비급수이고 $\textcircled{1}$ 에서

$$-4 < -4r < 4, \quad -3 < 1-4r < 5$$

$$\therefore -1 < \frac{1-4r}{3} < \frac{5}{3}$$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다고 할 수 없다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^n$ ($r \neq 0$)은 공비가 $\frac{1}{r}$ 인 등비급수이고 $\textcircled{1}$ 에서

$$\frac{1}{r} < -1 \text{ 또는 } \frac{1}{r} > 1$$

따라서 주어진 급수는 항상 발산한다.

이상에서 항상 수렴하는 급수인 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답 ㄱ, ㄴ**

0202 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 이 수렴하므로 $-1 < r < 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

① $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2}\right)^n$ 은 공비가 $\frac{r}{2}$ 인 등비급수이고 $\textcircled{1}$ 에서

$$-\frac{1}{2} < \frac{r}{2} < \frac{1}{2} \text{ 이므로 항상 수렴한다.}$$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r-1}{2}\right)^n$ 은 공비가 $\frac{r-1}{2}$ 인 등비급수이고 $\textcircled{1}$ 에서

$$-2 < r-1 < 0 \quad \therefore -1 < \frac{r-1}{2} < 0$$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r+1}{2}\right)^n$ 은 공비가 $\frac{r+1}{2}$ 인 등비급수이고 $\textcircled{1}$ 에서

$$0 < r+1 < 2 \quad \therefore 0 < \frac{r+1}{2} < 1$$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2}+1\right)^n$ 은 공비가 $\frac{r}{2}+1$ 인 등비급수이고 $\textcircled{1}$ 에서

$$-\frac{1}{2} < \frac{r}{2} < \frac{1}{2} \quad \therefore \frac{1}{2} < \frac{r}{2}+1 < \frac{3}{2}$$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다고 할 수 없다.

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} (-r)^n$ 은 공비가 $-r$ 인 등비급수이고 $\textcircled{1}$ 에서

$$-1 < -r < 1 \text{ 이므로 항상 수렴한다.}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n + (-r)^n}{2}$ 도 항상 수렴한다.

답 ④

0203 $\sum_{n=1}^{\infty} a^n, \sum_{n=1}^{\infty} b^n$ 이 모두 수렴하므로

$$-1 < a < 1, \quad -1 < b < 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} (a+b)^n$ 은 공비가 $a+b$ 인 등비급수이고 $\textcircled{1}$ 에서

$$-2 < a+b < 2 \text{ 이므로 항상 수렴한다고 할 수 없다.}$$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} (ab)^n$ 은 공비가 ab 인 등비급수이고 $\textcircled{1}$ 에서 $-1 < ab < 1$

이므로 항상 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} (|b|-|a|)^n$ 은 공비가 $|b|-|a|$ 인 등비급수이고 $\textcircled{1}$ 에서

$$0 \leq |a| < 1, \quad 0 \leq |b| < 1 \text{ 이므로}$$

$$-1 < |b|-|a| < 1$$

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다.

ㄹ. [반례] $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{5}$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n$ 은 공비가 $\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$ 인 등

비급수이고 $\frac{5}{2} > 1$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n$ 은 발산한다.

따라서 주어진 급수는 항상 수렴한다고 할 수 없다.

이상에서 항상 수렴하는 급수인 것은 ㄴ, ㄷ이다. **답 ㄴ, ㄷ**

0204 $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 \\ &= 2n-1 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $a_1=1$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$\begin{aligned} a_n &= 2n-1 \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \text{답 ⑤}$$

0205 $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 27 \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\} - 27 \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \right\} \\ &= 9 \times \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \\ \therefore a_2 + a_4 + a_6 + \dots \\ &= 9 \times \frac{2}{3} + 9 \times \left(\frac{2}{3} \right)^3 + 9 \times \left(\frac{2}{3} \right)^5 + \dots \\ &= \frac{6}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{54}{5} \end{aligned} \quad \text{답 54}$$

0206 $S_1 = 1 - \frac{1}{2}a_1$ 이므로

$$a_1 = 1 - \frac{1}{2}a_1 \quad \therefore a_1 = \frac{2}{3}$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}a_n \right) - \left(1 - \frac{1}{2}a_{n-1} \right) \\ &= -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}a_{n-1} \end{aligned}$$

즉 $\frac{3}{2}a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$ 이므로

$$a_n = \frac{1}{3}a_{n-1}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{2}{3}$, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 \quad \text{답 ③}$$

0207 $0.\dot{2} = \frac{2}{9}$, $0.0\dot{2}\dot{7} = \frac{1}{36}$ 이므로 공비를 r 라 하면

$$\frac{2}{9}r^3 = \frac{1}{36}, \quad r^3 = \frac{1}{8} \quad \therefore r = \frac{1}{2}$$

따라서 구하는 등비급수의 합은

$$\frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{9}$$

답 ②

0208 $0.\dot{5} = \frac{5}{9}$, $0.\dot{3}\dot{6} = \frac{4}{11}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1 - \frac{5}{9}} = \frac{4}{11}$$

$$\therefore a_1 = \frac{4}{11} \times \frac{9}{9} = \frac{16}{99}$$

답 ③

0209 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 $0.\dot{\alpha} = \frac{\alpha}{9}$, 공비가 $0.\alpha = \frac{\alpha}{10}$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{\alpha}{9}}{1 - \frac{\alpha}{10}} = \frac{10\alpha}{90-9\alpha}$$

... 1단계

따라서 $\frac{10\alpha}{90-9\alpha} = \frac{20}{27}$ 이므로 $27\alpha = 180 - 18\alpha$

$$\therefore \alpha = 4$$

... 2단계

답 4

채점 요소	비율
1단계 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 을 α 에 대한 식으로 나타내기	50 %
2단계 α 의 값 구하기	50 %

0210 $\frac{139}{999} = 0.\dot{1}3\dot{9}$ 이므로

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 9, a_4 = 1, a_5 = 3, a_6 = 9, \dots$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} &= \frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{9}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{3}{3^5} + \frac{9}{3^6} + \dots \\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^7} + \dots \right) + \left(\frac{3}{3^2} + \frac{3}{3^5} + \frac{3}{3^8} + \dots \right) \\ &\quad + \left(\frac{9}{3^3} + \frac{9}{3^6} + \frac{9}{3^9} + \dots \right) \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{27}} + \frac{\frac{3}{3^2}}{1 - \frac{1}{27}} + \frac{\frac{9}{3^3}}{1 - \frac{1}{27}} \\ &= \frac{9}{26} + \frac{9}{26} + \frac{9}{26} = \frac{27}{26} \end{aligned} \quad \text{답 27}$$

다른 풀이 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{9}{3^3} \right) + \left(\frac{1}{3^4} + \frac{3}{3^5} + \frac{9}{3^6} \right) + \dots$

$$\begin{aligned} &= 3 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3^4} + 3 \times \frac{1}{3^7} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^6} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{27}} = \frac{27}{26} \end{aligned}$$

0211 $\overline{OP_1}=1, \overline{P_1P_2}=\frac{3}{4}, \overline{P_2P_3}=\left(\frac{3}{4}\right)^2, \overline{P_3P_4}=\left(\frac{3}{4}\right)^3, \dots$

이므로 점 P_n 이 한없이 가까워지는 점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} & \overline{OP_1}-\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}-\overline{P_6P_7}+\dots \\ &=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^4-\left(\frac{3}{4}\right)^6+\dots \\ &=\frac{1}{1-\left(-\frac{9}{16}\right)}=\frac{16}{25} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{16}{25}$$

0212 $\overline{OA_1}=1, \overline{A_1A_2}=\frac{1}{2}, \overline{A_2A_3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2, \overline{A_3A_4}=\left(\frac{1}{2}\right)^3, \dots$ 이므로

$$\begin{aligned} p &= \overline{OA_1} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_5} + \overline{A_6A_7} + \dots \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \\ q &= \overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_5A_6} + \overline{A_7A_8} + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \dots \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \\ \therefore pq &= \frac{8}{9} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{8}{9}$$

0213 $\overline{OP_1}=1, \overline{P_1P_2}=\frac{1}{2}, \overline{P_2P_3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2, \overline{P_3P_4}=\left(\frac{1}{2}\right)^3, \dots$

이므로

$$\begin{aligned} a &= \overline{OP_1} \cos 45^\circ - \overline{P_1P_2} \cos 45^\circ + \overline{P_2P_3} \cos 45^\circ - \dots \\ &= 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \dots \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \\ b &= \overline{OP_1} \sin 45^\circ + \overline{P_1P_2} \sin 45^\circ + \overline{P_2P_3} \sin 45^\circ + \dots \\ &= 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \dots \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \\ \therefore \frac{b}{a} &= 3 \end{aligned} \quad \text{답 } 3$$

0214 $\angle XOY=30^\circ$ 이므로

$$\overline{P_1P_2} = \overline{OP_1} \sin 30^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$\angle OP_1P_2 = 60^\circ \text{이므로} \quad \overline{P_2P_3} = \overline{P_1P_2} \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\angle P_3P_2P_4 = 60^\circ \text{이므로} \quad \overline{P_3P_4} = \overline{P_2P_3} \sin 60^\circ = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

$\vdots$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \overline{P_nP_{n+1}} = 2 + \sqrt{3} + \frac{3}{2} + \dots$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= 4(2+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

답 ④

0215 $\overline{PQ}=1$ 이고 P_1, Q_1 이 각각 $\overline{OP}, \overline{OQ}$ 의 중점이므로

$$\overline{P_1Q_1} = \frac{1}{2}$$

같은 방법으로 하면

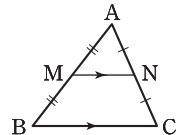
$$\begin{aligned} \overline{P_2Q_2} &= \frac{1}{2} \overline{P_1Q_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2, \overline{P_3Q_3} = \frac{1}{2} \overline{P_2Q_2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3, \dots \\ \therefore \overline{PQ} + \overline{P_1Q_1} + \overline{P_2Q_2} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned} \quad \text{답 } ①$$

RPM 비법 노트

삼각형의 중점연결정리

$\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 의 중점을 각각 M, N 이라 하면

$$\overline{MN} \parallel \overline{BC}, \overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{BC}$$



0216 이차함수 $y=27^n x^2 - (9^n + 2 \times 3^n)x + 2$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 $27^n x^2 - (9^n + 2 \times 3^n)x + 2 = 0$ 에서

$$(3^n x - 1)(9^n x - 2) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{3^n} \text{ 또는 } x = \frac{2}{9^n}$$

따라서 $l_n = \frac{1}{3^n} - \frac{2}{9^n}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} l_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{2}{9^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9} \right)^n \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} - 2 \times \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}} \\ &= \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \end{aligned} \quad \text{답 } ②$$

0217 $\angle A_1OA_2=45^\circ$ 이므로

$$\overline{A_1A_2} = \overline{OA_1} \sin 45^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$\angle A_2OA_3=45^\circ$ 이고 $\overline{OA_2}=\overline{A_1A_2}=\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{A_2A_3} = \overline{OA_2} \sin 45^\circ = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$\angle A_3OA_4=45^\circ$ 이고 $\overline{OA_3}=\overline{A_2A_3}=1$ 이므로

$$\overline{A_3A_4} = \overline{OA_3} \sin 45^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \cdots \\ = \sqrt{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \cdots \\ = \frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2(1 + \sqrt{2}) \end{aligned} \quad \text{답 } 2(1 + \sqrt{2})$$

0218 직선 AP_1 은 직선 $x+y=4$, 즉 $y=-x+4$ 와 수직이므로 기울기가 1이다.

따라서 직선 AP_1 의 방정식은

$$y=x+2$$

이때 점 P_1 은 두 직선 $y=-x+4$, $y=x+2$ 의 교점이므로

$$P_1(1, 3) \quad \therefore \overline{P_1Q_1}=3$$

또 점 Q_1 의 좌표는 $(1, 0)$ 이고 직선 Q_1P_2 의 기울기가 1이므로 직선 Q_1P_2 의 방정식은

$$y=x-1$$

이때 점 P_2 는 두 직선 $y=-x+4$, $y=x-1$ 의 교점이므로

$$P_2\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) \quad \therefore \overline{P_2Q_2}=\frac{3}{2}$$

같은 방법으로 하면 직선 Q_2P_3 의 방정식은 $y=x-\frac{5}{2}$ 이고 점 P_3

은 두 직선 $y=-x+4$, $y=x-\frac{5}{2}$ 의 교점이므로

$$P_3\left(\frac{13}{4}, \frac{3}{4}\right) \quad \therefore \overline{P_3Q_3}=\frac{3}{4}$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \overline{P_nQ_n} &= 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \cdots \\ &= \frac{3}{1 - \frac{1}{2}} = 6 \end{aligned} \quad \text{답 } 6$$

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 $x+y=4$ 가 x 축과 만나는 점을 B, y 축과 만나는 점을 C라 하면

$$\overline{BC}=4\sqrt{2}$$

$$\overline{CP_1} = \overline{AC} \cos 45^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

이므로

$$\overline{BP_1} = \overline{BC} - \overline{CP_1} = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{P_1Q_1} = \overline{BP_1} \sin 45^\circ = 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3$$

$$\overline{P_1P_2} = \overline{P_1Q_1} \cos 45^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ 이므로}$$

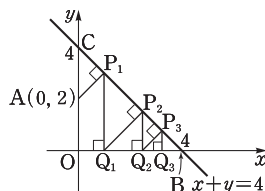
$$\overline{BP_2} = \overline{BP_1} - \overline{P_1P_2} = 3\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \overline{P_2Q_2} = \overline{BP_2} \sin 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\overline{P_2P_3} = \overline{P_2Q_2} \cos 45^\circ = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ 이므로}$$

$$\overline{BP_3} = \overline{BP_2} - \overline{P_2P_3} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \overline{P_3Q_3} = \overline{BP_3} \sin 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{4}$$



0219 $\overline{AB_1} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2}$ 이고 $\triangle AB_1A_1$ 은 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{A_1B_1} = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore l_1 = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

정사각형 $A_nB_nC_nD_n$ 의 한 변의 길이가 정사각형

$A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ 의 대각선의 길이와 같으므로

$$\overline{A_nB_n} = \sqrt{2} \times \overline{A_{n+1}B_{n+1}}$$

$$\therefore \overline{A_{n+1}B_{n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \overline{A_nB_n}$$

이때 $l_n = 4 \overline{A_nB_n}$ 이므로

$$\begin{aligned} l_{n+1} &= 4 \overline{A_{n+1}B_{n+1}} \\ &= 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \overline{A_nB_n} = \frac{\sqrt{2}}{2} l_n \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{l_n\}$ 은 첫째항이 $2\sqrt{2}$, 공비가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{2\sqrt{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 4(1 + \sqrt{2})$$

답 $4(1 + \sqrt{2})$

0220 정사각형 R_n 의 한 변의 길이를 a_n 이라 하면 오른쪽 그림에서

$$a_1 : (1 - a_1) = 1 : 1$$

$$1 - a_1 = a_1$$

$$\therefore a_1 = \frac{1}{2}$$

같은 방법으로 하면 오른쪽 그림에서

$$a_{n+1} : (a_n - a_{n+1}) = 1 : 1$$

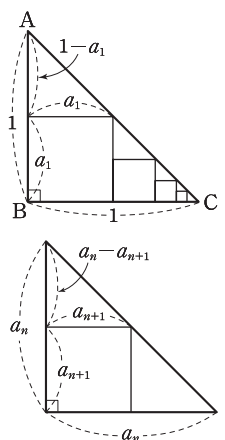
$$a_n - a_{n+1} = a_{n+1}$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{2}$ 이고

공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 모든 정사각형의 둘레의 길이의 합은

$$\begin{aligned} 4a_1 + 4a_2 + 4a_3 + \cdots &= 4(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots) \\ &= 4 \times \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots \right\} \\ &= 4 \times \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 4 \end{aligned} \quad \text{답 } 4$$



0221 원 C_n 의 반지름의 길이를 r_n 이라 하면 $\pi r_1^2 = 4\pi$ 이므로

$$r_1^2 = 4 \quad \therefore r_1 = 2 \quad (\because r_1 > 0)$$

$$\therefore l_1 = 2\pi \times 2 = 4\pi$$

한편 원 C_n 에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이는 원 C_{n+1} 의 지름의 길이와 같으므로 $2r_{n+1}$ 이다.

또 원 C_n 에 내접하는 정사각형의 대각선의 길이는 원 C_n 의 지름의 길이와 같으므로

$$2r_n = \sqrt{2} \times 2r_{n+1} \quad \therefore r_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} r_n$$

이때 $l_n = 2\pi r_n$ 이므로

$$l_{n+1} = 2\pi r_{n+1} = 2\pi \times \frac{\sqrt{2}}{2} r_n = \frac{\sqrt{2}}{2} l_n$$

따라서 수열 $\{l_n\}$ 은 첫째항이 4π 이고 공비가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{4\pi}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 4(2 + \sqrt{2})\pi \quad \text{답 } 4(2 + \sqrt{2})\pi$$

0222 원 C_n 의 넓이를 S_n 이라 하면

$$S_1 = \pi \times 4^2 = 16\pi$$

이때 두 원 C_n 과 C_{n+1} 의 지름의 길이의 비가 $2 : 1$ 이므로

$$S_n : S_{n+1} = 2^2 : 1^2 \quad \therefore S_{n+1} = \frac{1}{4} S_n$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 16π 이고 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로 구하는 넓이의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{16\pi}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{64}{3}\pi \quad \text{답 } ⑤$$

0223 $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$... 1단계

$\triangle A_n B_n C_n$ 과 $\triangle A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}$ 의 닮음비가 $2 : 1$ 이므로

$$S_n : S_{n+1} = 2^2 : 1^2 \quad \therefore S_{n+1} = \frac{1}{4} S_n \quad \text{... 2단계}$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $4\sqrt{3}$ 이고 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{4\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{16\sqrt{3}}{3} \quad \text{... 3단계}$$

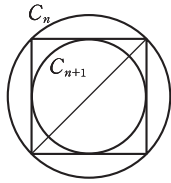
$$\text{답 } \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

채점 요소		비율
1단계	S_1 의 값 구하기	30 %
2단계	S_n 과 S_{n+1} 사이의 관계식 구하기	30 %
3단계	$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값 구하기	40 %

0224 정사각형 R_n 의 한 변의 길이를 a_n 이라 하면

$$\sqrt{2}a_1 = 2 \quad \therefore a_1 = \sqrt{2}$$

$$\therefore S_1 = a_1^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$



한편 정사각형 R_{n+1} 의 대각선의 길이는 정사각형 R_n 의 한 변의 길이와 같으므로

$$\sqrt{2}a_{n+1} = a_n \quad \therefore a_n : a_{n+1} = \sqrt{2} : 1$$

따라서 $S_n : S_{n+1} = (\sqrt{2})^2 : 1^2$ 이므로 $S_{n+1} = \frac{1}{2} S_n$

즉 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 2이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4 \quad \text{답 } 4$$

0225 정사각형 A_n 의 한 변의 길이를 a_n , 넓이를 S_n 이라 하면

$$S_1 = a_1^2 = 2^2 = 4$$

이때 직각이등변삼각형 B_n 의 빗변의 길이가 a_n 이고 빗변이 아닌 변의 길이가 a_{n+1} 이므로

$$a_n : a_{n+1} = \sqrt{2} : 1$$

따라서 $S_n : S_{n+1} = (\sqrt{2})^2 : 1^2$ 이므로

$$S_{n+1} = \frac{1}{2} S_n$$

즉 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 4이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 모든 정사각형의 넓이의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}} = 8$$

한편 직각이등변삼각형 B_n 의 빗변이 아닌 한 변의 길이를 b_n , 넓이를 T_n 이라 하면

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 = \sqrt{2}$$

$$\therefore T_1 = \frac{1}{2} b_1^2 = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^2 = 1$$

이때 $b_n : b_{n+1} = a_{n+1} : a_{n+2} = \sqrt{2} : 1$ 이므로

$$T_n : T_{n+1} = (\sqrt{2})^2 : 1^2 \quad \therefore T_{n+1} = \frac{1}{2} T_n$$

즉 수열 $\{T_n\}$ 은 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 모든 직각이등변삼각형의 넓이의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

따라서 구하는 넓이의 합은 $8 + 2 = 10$

답 ④

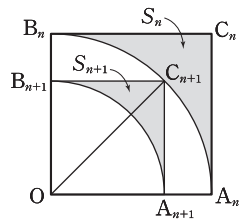
0226 오른쪽 그림과 같이

$\square OA_n C_n B_n$ 에서 사분원 $OA_n B_n$ 을 제외하고 남은 부분의 넓이를 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \overline{OA_n}^2 - \frac{1}{4} \times \pi \times \overline{OA_n}^2 \\ &= \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \times \overline{OA_n}^2 \end{aligned}$$

이때 $\overline{OA_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{OC_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 4 = 2\sqrt{2}$ 이므로

$$S_1 = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \times (2\sqrt{2})^2 = 8 - 2\pi$$



한편 $\overline{OA_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{OC_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{OA_n}$ 이므로

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \times \overline{OA_{n+1}}^2 \\ &= \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \overline{OA_n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \times \overline{OA_n}^2 \right\} = \frac{1}{2} S_n \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $8 - 2\pi$ 이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열
이므로 색칠한 부분의 넓이의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{8-2\pi}{1-\frac{1}{2}} = 16-4\pi \quad \text{답 } 16-4\pi$$

0227 n 번째 재생산되는 종이의 무게를 a_n kg이라 하면 처음
생산된 종이 2000 kg의 80 %가 수거되고 그중 75 %가 재생산
되므로

$$a_1 = 2000 \times \frac{80}{100} \times \frac{75}{100} = 1200$$

또 재생산된 종이의 80 %가 수거되고 그중 75 %가 재생산되므
로

$$a_{n+1} = a_n \times \frac{80}{100} \times \frac{75}{100} = \frac{3}{5} a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1200이고 공비가 $\frac{3}{5}$ 인 등비수열
이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1200}{1-\frac{3}{5}} = 3000$$

즉 재생산되는 종이의 총 무게는 3000 kg이다.

답 3000 kg

0228 $75^\circ = \frac{5}{12}\pi$ 이므로 추가 멈출 때까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned} &24 \times \frac{5}{12}\pi + 24 \times \left(\frac{4}{5} \times \frac{5}{12}\pi\right) \times 2 \\ &+ 24 \times \left\{ \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{5}{12}\pi \right\} \times 2 \\ &+ 24 \times \left\{ \left(\frac{4}{5}\right)^3 \times \frac{5}{12}\pi \right\} \times 2 + \dots \\ &= 10\pi + 16\pi \left\{ 1 + \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \dots \right\} \\ &= 10\pi + 16\pi \times \frac{1}{1-\frac{4}{5}} \\ &= 90\pi \text{ (cm)} \end{aligned}$$

답 90π cm

0229 $a_1 = 20 \times 1.1 \times 0.25 = \frac{11}{2}$

$$\begin{aligned} a_2 &= (20 \times 1.1 \times 0.75) \times 1.1 \times 0.25 \\ &= (20 \times 1.1 \times 0.25) \times 1.1 \times 0.75 \\ &= \frac{11}{2} \times \frac{33}{40} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= (20 \times 1.1 \times 0.75 \times 1.1 \times 0.75) \times 1.1 \times 0.25 \\ &= (20 \times 1.1 \times 0.25) \times (1.1 \times 0.75)^2 \\ &= \frac{11}{2} \times \left(\frac{33}{40}\right)^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{11}{2}$ 이고 공비가 $\frac{33}{40}$ 인 등비수열
이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{11}{2}}{1-\frac{33}{40}} = \frac{220}{7} \quad \text{답 } \frac{220}{7}$$

02

만
나

시험에 꼭 나오는 문제

● 본책 036~039쪽

$$\begin{aligned} \text{0230 } &\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{a_n} - \frac{n+1}{a_{n+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{a_k} - \frac{k+1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{a_1} - \frac{2}{a_2} \right) + \left(\frac{2}{a_2} - \frac{3}{a_3} \right) + \dots + \left(\frac{n}{a_n} - \frac{n+1}{a_{n+1}} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{n+1}{a_{n+1}} \right) \end{aligned}$$

이때 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2 + n \times d = dn + 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{a_n} - \frac{n+1}{a_{n+1}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{n+1}{dn+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{d} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{2} - \frac{1}{d} = \frac{1}{5}$ 이므로 $\frac{1}{d} = \frac{3}{10}$

$$\therefore d = \frac{10}{3} \quad \text{답 } \frac{10}{3}$$

0231 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{(n+1)^2 - 1} = \frac{4}{n(n+2)} \\ &= 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

이때 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= 2 \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

따라서 주어진 급수의 합은

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= 2 \times \frac{3}{2} = 3 \end{aligned}$$

답 3

0232 $\log a_n + \log a_{n+1} + \log b_n = 0$ 에서

$$\log a_n a_{n+1} b_n = 0, \quad a_n a_{n+1} b_n = 1$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1} - a_n} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \end{aligned}$$

이때 $a_{n+1} = a_1 + n \times 2 = a_1 + 2n$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + 2n} \right) = \frac{1}{2a_1}$$

따라서 $\frac{1}{2a_1} = \frac{5}{6}$ 이므로

$$a_1 = \frac{3}{5}$$

답 5

0233 $\sum_{n=2}^{\infty} \log \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \log \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log \frac{1 \times 3}{2^2} + \log \frac{2 \times 4}{3^2} + \cdots + \log \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left\{ \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \right) \times \cdots \times \left(\frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{n+1}{2n} \\ &= \log \frac{1}{2} = -\log 2 \end{aligned}$$

답 2

0234 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n^2} - 1 \right)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n^2} - 1 \right) = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + a_n}{4n^2 - n + a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{a_n}{n^2}}{4 - \frac{1}{n} + \frac{a_n}{n^2}} \\ &= \frac{2+1}{4+1} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

답 5

0235 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{2^n}{2^{n+1} + 3} \right)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{2^n}{2^{n+1} + 3} \right) = 0$$

$$a_n - \frac{2^n}{2^{n+1} + 3} = b_n \text{으로 놓으면} \quad a_n = b_n + \frac{2^n}{2^{n+1} + 3}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b_n + \frac{2^n}{2^{n+1} + 3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{3}{2^n}} \\ &= 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} a_n}{5^n + a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5a_n}{1 + \frac{a_{n+1}}{5^n}} = \frac{5 \times \frac{1}{2}}{1 + 0} = \frac{5}{2} \quad \text{답 3}$$

0236 ㄱ. 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$S_1 = 1, S_2 = \frac{1}{2}, S_3 = 1, S_4 = \frac{3}{4}, S_5 = 1,$$

$$S_6 = \frac{7}{8}, \dots$$

따라서 $S_{2n-1} = 1, S_{2n} = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\} = 1$$

즉 주어진 급수는 1에 수렴한다. (거짓)

ㄴ. 주어진 급수의 제 n 항은 $\frac{3n-2}{3n-1}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{3n-1} = 1 \neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다. (참)

ㄷ. [반례] $a_n = \frac{1}{n}$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이지만

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 2

0237 $\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} \log b_n = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} \log (a_n^2 b_n) = 7$ 에서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (2 \log a_n + \log b_n) &= 7, \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} \log a_n + \sum_{n=1}^{\infty} \log b_n = 7 \\ \therefore 2\alpha + \beta &= 7 \end{aligned} \quad \text{..... ㉠}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{a_n}{b_n} = 2$ 에서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\log a_n - \log b_n) &= 2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log a_n - \sum_{n=1}^{\infty} \log b_n = 2 \\ \therefore \alpha - \beta &= 2 \end{aligned} \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha = 3, \beta = 1$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{b_n^2}{a_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (2 \log b_n - \log a_n) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \log b_n - \sum_{n=1}^{\infty} \log a_n \\ &= 2\beta - \alpha = -1 \end{aligned}$$

답 -1

0238 ① 주어진 급수의 제 n 항은 n 이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \neq 0$$

이므로 주어진 급수는 발산한다.

② 주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$S_1=2, S_2=-2, S_3=4, S_4=-4, S_5=6,$$

$$S_6=-6, \dots$$

$$\text{이므로 } S_{2n-1}=2n, S_{2n}=-2n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n = \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-2n) = -\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

③ 주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$S_1=1, S_2=0, S_3=1, S_4=0, S_5=1, S_6=0, \dots$$

$$\text{이므로 } S_{2n-1}=1, S_{2n}=0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 0$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

$$\textcircled{4} \quad 2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$$

⑤ 주어진 급수의 제 n 항은 $\frac{n}{2n-1}$ 이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

이므로 주어진 급수는 발산한다.

답 ④

$$\textcircled{0239} \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} - \sin^2 \frac{\pi}{6} + \sin^3 \frac{\pi}{6} - \sin^4 \frac{\pi}{6} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}$$

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} + \cos^3 \frac{\pi}{6} + \cos^4 \frac{\pi}{6} + \dots$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 + \dots$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3} + 3$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right) + g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{10}{3} + 2\sqrt{3}$$

답 $\frac{10}{3} + 2\sqrt{3}$

$$\textcircled{0240} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{5^n}$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \frac{4}{5^5} + \frac{1}{5^6} + \dots$$

$$= \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{5^3} + \frac{4}{5^5} + \dots\right) + \left(\frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^6} + \dots\right)$$

$$= \frac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{1}{25}} + \frac{\frac{1}{25}}{1 - \frac{1}{25}}$$

$$= \frac{5}{6} + \frac{1}{24} = \frac{7}{8}$$

답 $\frac{7}{8}$

0241 $\neg$. [반례] $\{a_n\}: 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$

$$\{b_n\}: 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

이때 $a_n b_n = 0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = 0$ 이지만

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ 이다. (거짓)

$\neg$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 제 n 항까지의 부분합을 S_n , $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2}$ 의 제 n 항까지의

부분합을 T_n 이라 하면

$$T_n - S_n = -a_1 - a_2 + a_{n+1} + a_{n+2}$$

$$\therefore T_n = S_n - a_1 - a_2 + a_{n+1} + a_{n+2}$$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+2} = 0$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ (S 는 실수)라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - a_1 - a_2 + a_{n+1} + a_{n+2})$$

$$= S - a_1 - a_2$$

즉 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2}$ 도 수렴한다. (참)

$\neg$. [반례] $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ 이면

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1, \beta = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{이때 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{1}{5} \text{ 이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \neq \alpha \beta \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg$ 뿐이다.

답 ②

$$\textcircled{0242} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 \text{에서 } \frac{a}{1-r} = 2$$

$$\therefore a = 2(1-r) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

수열 $\{a_n^3\}$ 은 첫째항이 a^3 , 공비가 r^3 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = 24 \text{에서 } \frac{a^3}{1-r^3} = 24$$

$$\therefore \frac{a^3}{(1-r)(1+r+r^2)} = 24 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$\frac{8(1-r)^3}{(1-r)(1+r+r^2)} = 24, \quad \frac{r^2-2r+1}{r^2+r+1} = 3$$

$$2r^2+5r+2=0, \quad (2r+1)(r+2)=0$$

$$\therefore r = -\frac{1}{2} \quad (\because -1 < r < 1)$$

$$r = -\frac{1}{2} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } a = 3$$

$$\therefore a+r = \frac{5}{2}$$

답 ⑤

0243 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$a_n = ar^{n-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} a_{2n-1} - a_{2n} &= ar^{2n-2} - ar^{2n-1} \\ &= ar^{2n-2}(1-r) \\ &= a(1-r)(r^2)^{n-1} \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_{2n-1} - a_{2n}\}$ 은 첫째항이 $a(1-r)$, 공비가 r^2 인 등비수열이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n}) = 3$ 에서

$$\frac{a(1-r)}{1-r^2} = 3$$

$$\therefore \frac{a}{1+r} = 3 \quad (\because 1-r \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 수열 $\{a_n^2\}$ 은 첫째항이 a^2 , 공비가 r^2 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 6 \text{에서} \quad \frac{a^2}{1-r^2} = 6$$

$$\therefore \frac{a^2}{(1+r)(1-r)} = 6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$3 \times \frac{a}{1-r} = 6 \quad \therefore \frac{a}{1-r} = 2$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-r} = 2 \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

0244 주어진 등비급수의 첫째항과 공비가 모두 $x^2 + x + 1$ 이므로 이 급수가 수렴하려면

$$-1 < x^2 + x + 1 < 1$$

(i) $x^2 + x + 1 > -1$ 에서 $x^2 + x + 2 > 0$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 부등식이 성립한다.

(ii) $x^2 + x + 1 < 1$ 에서 $x^2 + x < 0$

$$x(x+1) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 0$$

(i), (ii)에서 $-1 < x < 0$ 답 $-1 < x < 0$

0245 주어진 등비급수의 첫째항이 $(x+1)\left(1-\frac{x}{2}\right)$, 공비가

$1-\frac{x}{2}$ 이므로 이 급수가 수렴하려면

$$(x+1)\left(1-\frac{x}{2}\right) = 0 \text{ 또는 } -1 < 1-\frac{x}{2} < 1$$

$(x+1)\left(1-\frac{x}{2}\right) = 0$ 에서

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$-1 < 1-\frac{x}{2} < 1$ 에서 $-2 < -\frac{x}{2} < 0$

$$\therefore 0 < x < 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $x = -1$ 또는 $0 < x < 4$

따라서 정수 x 는 $-1, 1, 2, 3$ 이므로 구하는 합은

$$-1 + 1 + 2 + 3 = 5$$

답 5

0246 $\log_3(S_n + 1) = n$ 에서 $S_n + 1 = 3^n$

$$\therefore S_n = 3^n - 1$$

$n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 2$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = 3^n - 1 - (3^{n-1} - 1) \\ &= 2 \times 3^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때 $a_1 = 2$ 는 ①에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \times 3^{n-1} \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \times 3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

답 ⑤

0247 $0.\dot{2}\dot{9} = \frac{29}{99}$, $0.\dot{x} = \frac{x}{9}$, $2.\dot{6}\dot{3} = \frac{29}{11}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{29}{99}}{1 - \frac{x}{9}} = \frac{29}{11(9-x)}$$

따라서 $\frac{29}{11(9-x)} = \frac{29}{11}$ 이므로

$$9-x=1 \quad \therefore x=8$$

답 8

0248 $\overline{A_1A_2} = 6$ 이므로 $l_1 = \frac{1}{2} \times 6\pi = 3\pi$

$$\overline{A_2A_3} = \frac{3}{4} \overline{A_1A_2} = \frac{3}{4} \times 6 = \frac{9}{2} \text{이므로}$$

$$l_2 = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \pi = \frac{9}{4} \pi$$

$$\overline{A_3A_4} = \frac{3}{4} \overline{A_2A_3} = \frac{3}{4} \times \frac{9}{2} = \frac{27}{8} \text{이므로}$$

$$l_3 = \frac{1}{2} \times \frac{27}{8} \pi = \frac{27}{16} \pi$$

⋮

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n = 3\pi + \frac{9}{4}\pi + \frac{27}{16}\pi + \dots$$

$$= \frac{3\pi}{1 - \frac{3}{4}} = 12\pi$$

답 ③

0249 오른쪽 그림과 같이 반

원 O_n 의 중심을 O , 반지름의 길

이를 r_n , 반원 O_n 에서

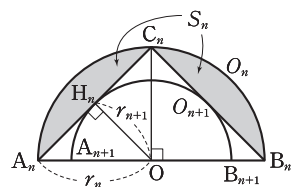
$\triangle A_n B_n C_n$ 을 제외하고 남은 부

$$S_n = \frac{1}{2} \times \pi \times r_n^2 - \frac{1}{2} \times 2r_n \times r_n$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \times r_n^2$$

이때 $r_1 = \frac{1}{2} \overline{A_1B_1} = 3$ 이므로

$$S_1 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \times 3^2 = \frac{9}{2} \pi - 9$$



한편 점 O에서 선분 A_nC_n 에 내린 수선의 발을 H_n 이라 하면 삼각형 A_nOH_n 은 직각이등변삼각형이므로

$$\begin{aligned}\overline{OH_n} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{OA_n} \quad \therefore r_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} r_n \\ \therefore S_{n+1} &= \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \times r_{n+1}^2 \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} r_n\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \times r_n^2 = \frac{1}{2} S_n\end{aligned}$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{9}{2}\pi - 9$ 이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 구하는 넓이의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{9}{2}\pi - 9}{1 - \frac{1}{2}} = 9\pi - 18 \quad \text{답 } 9\pi - 18$$

0250 공이 정지할 때까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned}& 15 + \left(15 \times \frac{1}{3}\right) \times 2 + \left\{15 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2\right\} \times 2 \\ & + \left\{15 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3\right\} \times 2 + \dots \\ & = 15 + 10 \left\{1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots\right\} \\ & = 15 + 10 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 30 \text{ (m)} \quad \text{답 } 30 \text{ m}\end{aligned}$$

0251 직선 $(3n-2)x + (3n+1)y = 1$ 의 x 절편과 y 절편은 각각 $\frac{1}{3n-2}$, $\frac{1}{3n+1}$ 이므로

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3n-2} \times \frac{1}{3n+1} \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) \quad \dots \text{1단계}\end{aligned}$$

이때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right) \\ &= \frac{1}{6} \left\{\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \dots\right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) \quad \dots \text{2단계}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{6} \quad \dots \text{3단계} \\ &\quad \text{답 } \frac{1}{6}\end{aligned}$$

채점 요소	비율
1단계 a_n 구하기	30 %
2단계 부분합 S_n 구하기	40 %
3단계 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 합 구하기	30 %

0252 $\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 5)$ 가 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - 5) = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{5}{3} \quad \dots \text{1단계}$$

따라서 $r = \frac{5}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+2} - 1}{r^n + 2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{n+2} - 1}{\left(\frac{5}{3}\right)^n + 2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{25}{9} - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{1 + 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{25}{9} \quad \dots \text{2단계}\end{aligned}$$

$$\text{답 } \frac{25}{9}$$

채점 요소	비율
1단계 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값 구하기	40 %
2단계 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+2} - 1}{r^n + 2}$ 의 값 구하기	60 %

0253 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_n = ar^{n-1}$$

이때 $a=0$ 또는 $r=0$ 이면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{a_n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{2^n} = \infty$$

이므로 $ar \neq 0$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{a_n + 2^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{ar^{n-1} + 2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{a}{5} \left(\frac{r}{5}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{5}\right)^n} \quad \dots \text{①}\end{aligned}$$

(i) $0 < |r| < 5$ 일 때

①의 극한값이 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $r=5$ 일 때

$$\text{①에서 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{a}{5} \left(\frac{r}{5}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{5}{a}$$

$$\text{즉 } \frac{5}{a} = 10 \text{이므로 } a = \frac{1}{2}$$

(iii) $|r| > 5$ 일 때

$$\text{①에서 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{a}{5} \left(\frac{r}{5}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{5}\right)^n} = 0$$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $r=-5$ 일 때

①의 극한값이 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 $a = \frac{1}{2}$, $r=5$... 1단계

따라서 $a_n = \frac{1}{2} \times 5^{n-1}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{2}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{2} \quad \dots \text{2단계}$$

$$\text{답 } \frac{5}{2}$$

	채점 요소	비율
1단계	등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공비 구하기	60 %
2단계	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 의 값 구하기	40 %

0254 두 점 A_1, B_1 은 각각 두 선분 OA, OB 의 중점이므로

$$\overline{A_1B_1} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

이때 직각삼각형의 외접원의 지름의 길이는 빗변의 길이와 같으므로

$$l_1 = 2\sqrt{2}\pi \quad \dots \text{1단계}$$

한편 $\triangle A_n M_n B_n$ 과 $\triangle A_{n+1} M_{n+1} B_{n+1}$ 의 닮음비는 2 : 1이므로 외접원의 둘레의 길이의 비도 2 : 1이다.

$$\therefore l_{n+1} = \frac{1}{2} l_n \quad \dots \text{2단계}$$

따라서 수열 $\{l_n\}$ 은 첫째항이 $2\sqrt{2}\pi$ 이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{2\sqrt{2}\pi}{1 - \frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}\pi \quad \dots \text{3단계}$$

답 $4\sqrt{2}\pi$

	채점 요소	비율
1단계	l_1 의 값 구하기	20 %
2단계	l_n 과 l_{n+1} 사이의 관계식 구하기	40 %
3단계	$\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 의 값 구하기	40 %

참고 $\triangle A_n M_n B_n$ 은 직각이등변삼각형이므로

$$\triangle A_n M_n B_n \sim \triangle A_{n+1} M_{n+1} B_{n+1}$$

이때 삼각형의 중점연결정리에 의하여 $\overline{A_{n+1}B_{n+1}} = \frac{1}{2} \overline{A_n B_n}$ 이므로

$\triangle A_n M_n B_n$ 과 $\triangle A_{n+1} M_{n+1} B_{n+1}$ 의 닮음비는 2 : 1이다.

0255 **전략** 원의 접선은 접점을 지나는 반지름에 수직이고, 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 서로 같음을 이용한다.

원 $x^2 + (y-n)^2 = 9$ 의 중심을

$D_n(0, n)$ 이라 하면

$$\begin{aligned} \overline{A_n D_n} &= \sqrt{n^2 + (-n)^2} \\ &= \sqrt{2}n \end{aligned}$$

이때 원 $x^2 + (y-n)^2 = 9$ 의 반지름의 길이가 3이므로

$$\overline{B_n D_n} = 3$$

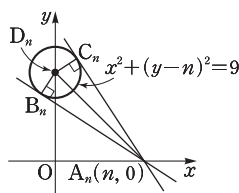
$$\therefore \overline{A_n B_n} = \sqrt{\overline{A_n D_n}^2 - \overline{B_n D_n}^2} = \sqrt{2n^2 - 9}$$

또 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 서로 같으므로

$$\overline{A_n C_n} = \overline{A_n B_n} = \sqrt{2n^2 - 9}$$

따라서 $a_n = \overline{A_n B_n} + \overline{A_n C_n} = 2\sqrt{2n^2 - 9}$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{16}{a_n^2 + 16n + 36} &= \frac{16}{4(2n^2 - 9) + 16n + 36} \\ &= \frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=4}^{\infty} \frac{16}{a_n^2 + 16n + 36} &= \sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=4}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{9}{20} \end{aligned}$$

답 $\frac{9}{20}$

0256 **전략** 직사각형 $A_n B_n C_n D_n$ 과 직사각형 $A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1} D_{n+1}$ 의 닮음비를 이용하여 그림 R_n 에서 새로 색칠한 부분의 넓이와 그림 R_{n+1} 에서 새로 색칠한 부분의 넓이의 비를 구한다.

직각삼각형 $A_1 B_1 D_1$ 에서 $\overline{B_1 D_1} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

따라서 $\overline{D_1 E_1} = \frac{1}{2} \overline{B_1 D_1} = \frac{\sqrt{17}}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} S_1 &= \triangle A_2 D_1 E_1 + \triangle B_2 E_1 C_1 = 2\triangle A_2 D_1 E_1 \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{17}}{2} \times \frac{\sqrt{17}}{2} \right) = \frac{17}{4} \end{aligned}$$

한편 직사각형 $A_n B_n C_n D_n$ 과 직사각형 $A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1} D_{n+1}$ 은 닮음이고, 닮음비는 직사각형 $A_1 B_1 C_1 D_1$ 과 직사각형 $A_2 B_2 C_2 D_2$ 의 닮음비와 같다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 A_2, B_2 에서 선분 $C_1 D_1$ 에 내린 수선의 발을 각각 E, F 라 하고 $\angle A_2 D_1 E = \theta$ 라 하면

$$\angle B_1 D_1 C_1 = \frac{\pi}{2} - \theta$$

이때 직각삼각형 $B_1 D_1 C_1$ 에서

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\sqrt{17}} \quad \therefore \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\therefore \overline{D_1 E} = \overline{A_2 D_1} \cos \theta = \frac{\sqrt{17}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{1}{2}$$

따라서 $\overline{C_1 F} = \overline{D_1 E} = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\overline{A_2 B_2} = \overline{EF} = \overline{C_1 D_1} - (\overline{D_1 E} + \overline{C_1 F}) = 4 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 3$$

즉 직사각형 $A_1 B_1 C_1 D_1$ 과 직사각형 $A_2 B_2 C_2 D_2$ 의 닮음비는 4 : 3이므로 그림 R_n 에서 새로 색칠한 부분의 넓이를 T_n 이라 하면

$$T_n : T_{n+1} = 4^2 : 3^2 \quad \therefore T_{n+1} = \frac{9}{16} T_n$$

따라서 수열 $\{T_n\}$ 은 첫째항이 $T_1 = S_1 = \frac{17}{4}$, 공비가 $\frac{9}{16}$ 인 등비수열이고, $S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \frac{\frac{17}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{68}{7}$$

답 ③

03 지수함수와 로그함수의 미분

교과서문제 정복하기

본책 043쪽

0257 0

0258 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{1+2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1} = \frac{1}{0+1} = 1$ 답 1

0259 $\lim_{x \rightarrow \infty} (3^x - 5^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 5^x \left\{ \left(\frac{3}{5}\right)^x - 1 \right\} = -\infty$ 답 $-\infty$

0260 주어진 식의 분모, 분자에 각각 10^x 을 곱하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10^x + 10^{-x}}{10^x - 10^{-x}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10^{2x} + 1}{10^{2x} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{100^x + 1}{100^x - 1} \quad \leftarrow a > 1 \text{ 일 때 } \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \\ &= \frac{0+1}{0-1} = -1 \end{aligned}$$
 답 -1

0261 $-\infty$

0262 ∞

0263 $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (-\log_3 x) = -\infty$ 답 $-\infty$

0264 $x-4=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 4+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 4+} \log_{\frac{1}{2}}(x-4) = \lim_{t \rightarrow 0+} \log_{\frac{1}{2}} t = \infty$ 답 ∞

0265 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^2 = e^2$ 답 e^2

0266 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}} \right\}^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}$ 답 $e^{\frac{3}{2}}$

0267 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \right\}^2 = e^2$ 답 e^2

0268 $-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \right\}^{-2} \\ &= e^{-2} = \frac{1}{e^2} \end{aligned}$$
 답 $\frac{1}{e^2}$

0269 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times 2 = 1 \times 2 = 2$ 답 2

0270 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times \frac{2}{3}$
 $= 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

0271 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1-2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1-2x)}{-2x} \times (-2)$
 $= \frac{1}{\ln 3} \times (-2) = -\frac{2}{\ln 3}$ 답 $-\frac{2}{\ln 3}$

0272 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{x} \times \frac{1}{3}$
 $= \ln 5 \times \frac{1}{3} = \frac{\ln 5}{3}$ 답 $\frac{\ln 5}{3}$

0273 $y' = 2e^x$

0274 $y' = 1 \times e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$ 답 $y' = (x+2)e^x$

0275 $y' = 3 \times 2^x \ln 2 = 3 \ln 2 \times 2^x$ 답 $y' = 3 \ln 2 \times 2^x$

0276 $y = 5^{x+2} = 5^2 \times 5^x$ 이므로
 $y' = 5^2 \times 5^x \ln 5 = 5^{x+2} \ln 5$ 답 $y' = 5^{x+2} \ln 5$

0277 $y = \ln 3x = \ln 3 + \ln x$ 이므로
 $y' = \frac{1}{x}$ 답 $y' = \frac{1}{x}$

0278 $y' = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$ 답 $y' = \ln x + 1$

0279 $y = \log_2 4x = \log_2 4 + \log_2 x = 2 + \log_2 x$ 이므로
 $y' = \frac{1}{x \ln 2}$ 답 $y' = \frac{1}{x \ln 2}$

0280 $y = x \log_3 2x = x(\log_3 2 + \log_3 x)$ 이므로
 $y' = 1 \times (\log_3 2 + \log_3 x) + x \times \frac{1}{x \ln 3}$
 $= \log_3 2x + \frac{1}{\ln 3}$ 답 $y' = \log_3 2x + \frac{1}{\ln 3}$

유형 익히기

● 본책 044~051쪽

0281 $\lim_{x \rightarrow \infty} (3^x + 4^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[4^x \left\{ \left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 \right\} \right]^{\frac{1}{x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} 4 \left\{ \left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 \right\}^{\frac{1}{x}}$
 $= 4 \times 1 = 4$ 답 ②

0282 주어진 식의 분모, 분자에 각각 2^x 을 곱하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - 2^{-x}}{3^x + 2^{-x}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x \times 3^x - 1}{2^x \times 3^x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6^x - 1}{6^x + 1} \\ &= \frac{0-1}{0+1} = -1\end{aligned}$$

답 -1

0283 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a \times 3^x}{3^{x+1} - 2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{3 - \left(\frac{2}{3}\right)^x} = \frac{a}{3}$... 1단계

따라서 $\frac{a}{3} = 4$ 이므로

$$a = 12$$

... 2단계

답 12

	채점 요소	비율
1단계	주어진 식의 좌변을 간단히 하기	70 %
2단계	a의 값 구하기	30 %

0284 ㄱ. 주어진 식의 분모, 분자에 각각 2^x 을 곱하면

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x}{2^x - 2^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^x}{4^x - 1} = \frac{0}{0-1} = 0$$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{\sqrt{5^x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^x = \infty$

ㄷ. $\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3^{\frac{1}{x}} - 1} = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{1}{3^t - 1} = -\infty$$

ㄹ. $\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow -\infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{1 + 5^{\frac{1}{x}}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + 5^t} = \frac{1}{1+0} = 1$$

이상에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

다른 풀이 ㄱ. $-x = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x}{2^x - 2^{-x}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2^{-t}}{2^{-t} - 2^t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2^{-2t}}{2^{-2t} - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^t}{\left(\frac{1}{4}\right)^t - 1} = \frac{0}{0-1} = 0\end{aligned}$$

0285 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\log_2 \sqrt{2x^2 + x} - \log_2 x)$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{\sqrt{2x^2 + x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \sqrt{2 + \frac{1}{x}}$$

$$= \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0286 $\lim_{x \rightarrow 1} (\log_2 |x^3 - 1| - \log_2 |x^2 - 1|)$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \log_2 \left| \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \log_2 \left| \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} \right|$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \log_2 \left| \frac{x^2+x+1}{x+1} \right|$$

$$= \log_2 \frac{3}{2} = \log_2 3 - 1$$

답 ①

0287 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_3(ax+1) - \log_3(x-1)\}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \frac{ax+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \frac{a + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \log_3 a$$

따라서 $\log_3 a = 3$ 이므로 $a = 3^3 = 27$

답 ④

0288 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \log_3(6^x + 9^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3(6^x + 9^x)^{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \left[9^x \left\{ \left(\frac{2}{3} \right)^x + 1 \right\} \right]^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 9 \left\{ \left(\frac{2}{3} \right)^x + 1 \right\}^{\frac{1}{x}}$$

$$= \log_3(9 \times 1) = 2$$

답 2

0289 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{3x} \right) \left(1 + \frac{1}{2x} \right) \right)^x$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3x} \right)^x \times \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3x} \right)^{-3x} \right\}^{-\frac{1}{3}} \times \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{2x} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= e^{-\frac{1}{3}} \times e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{6}}$$

답 $e^{\frac{1}{6}}$

0290 $A = \lim_{x \rightarrow 0} (1+4x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\}^{12} = e^{12}$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} (1-5x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{(1-5x)^{-\frac{1}{5x}}\}^{-5} = e^{-5} = \frac{1}{e^5}$$

$$\therefore \frac{A}{B} = e^{17}$$

답 ⑤

0291 $x-2=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{\frac{1}{2-x}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-1}$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e}$$

답 $\frac{1}{e}$

0292 $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(1 + \frac{x}{2} \right) (1+ax) \right\}^{\frac{2}{x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(1 + \frac{x}{2} \right)^{\frac{2}{x}} \times (1+ax)^{\frac{2}{x}} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2} \right)^{\frac{2}{x}} \times \lim_{x \rightarrow 0} \{(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\}^{2a}$$

$$= e \times e^{2a} = e^{2a+1}$$

따라서 $e^{2a+1} = e^7$ 이므로

$$2a+1=7 \quad \therefore a=3$$

답 ②

$$\begin{aligned}
 \text{0293 } \lim_{x \rightarrow \infty} & \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{x} \right) \left(1 + \frac{1}{x+1} \right) \left(1 + \frac{1}{x+2} \right) \times \dots \right. \\
 & \left. \times \left(1 + \frac{1}{2x} \right) \right\}^x \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \times \frac{x+1}{x} \times \frac{x+2}{x+1} \times \frac{x+3}{x+2} \times \dots \times \frac{2x+1}{2x} \right)^x \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{2x} \right\}^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

답 $e^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
 \text{0294 } \neg. \lim_{x \rightarrow \infty} & \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-x} \right\}^{-1} \\
 &= e^{-1} = \frac{1}{e}
 \end{aligned}$$

∴ $-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t = e$$

$$\text{∴ } \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+2x)^{\frac{1}{2x}} \right\}^4 = e^4$$

∴ $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

이상에서 극한값이 e 인 것은 ∴, ∴이다.

답 ④

$$\begin{aligned}
 \text{0295 } \lim_{x \rightarrow \infty} & \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\frac{a}{x}}{1-\frac{a}{x}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\frac{a}{x}}{1-\frac{a}{x}} \right)^x \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{\frac{x}{a}} \right\}^a}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{a}{x} \right)^{-\frac{x}{a}} \right\}^{-a}} \\
 &= \frac{e^a}{e^{-a}} = e^{2a}
 \end{aligned}$$

따라서 $e^{2a} = e^{50}$ 이므로

$$2a = 50 \quad \therefore a = 25$$

답 25

$$\begin{aligned}
 \text{0296 } \lim_{x \rightarrow 0} & \frac{\ln(2x+1)}{3x^2+x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(2x+1)}{2x} \times \frac{2}{3x+1} \right\} \\
 &= 1 \times 2 = 2
 \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}
 \text{0297 } \lim_{x \rightarrow 0} & \frac{\ln(ax+1)}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(ax+1)}{ax} \times \frac{a}{b} \\
 &= 1 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}
 \end{aligned}$$

즉 $\frac{a}{b} = 4$ 이므로 $a = 4b$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{x \rightarrow 0} & \frac{\ln(1-2bx)}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2bx)}{4bx} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2bx)}{-2bx} \times \left(-\frac{1}{2} \right) \\
 &= 1 \times \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned}
 \text{0298 } \lim_{x \rightarrow \infty} & \{ \ln(5x+1) - \ln 5x \} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{5x+1}{5x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{5x} \right)
 \end{aligned}$$

이때 $\frac{1}{5x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{5x} \right) &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+t)}{5t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+t)}{t} \times \frac{1}{5} \\
 &= 1 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{5}$

다른 풀이 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \{ \ln(5x+1) - \ln 5x \}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{5x+1}{5x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{5x} \right)^x \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left\{ \left(1 + \frac{1}{5x} \right)^{5x} \right\}^{\frac{1}{5}} \\
 &= \ln e^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

0299 $y = e^{4x}$ 이라 하면

$$4x = \ln y \quad \therefore x = \frac{1}{4} \ln y$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \frac{1}{4} \ln x$$

즉 $g(x) = \frac{1}{4} \ln x$ 이므로

... 1단계

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x-1} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$$

이때 $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x-1} &= \frac{1}{4} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \\
 &= \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

... 2단계

답 $\frac{1}{4}$

채점 요소		비율
1단계	함수 $g(x)$ 구하기	30%
2단계	극한값 구하기	70%

$$\text{0300 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(3+x) - \log_2 3}{x}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2 \frac{3+x}{3}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2 \left(1 + \frac{x}{3} \right)}{\frac{x}{3}} \times \frac{1}{3} \\
 &= \frac{1}{\ln 2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3 \ln 2}
 \end{aligned}$$

답 ④

$$0301 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_5(1+7x)}{\log_3(1-x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log_5(1+7x)}{7x} \times \frac{-x}{\log_3(1-x)} \times (-7) \right\}$$

$$= \frac{1}{\ln 5} \times \ln 3 \times (-7) = -\frac{7 \ln 3}{\ln 5} = -7 \log_5 3 \quad \text{답 ②}$$

RPM비법노트

로그의 밑의 변환

$a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, c > 0$ 일 때

$$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$$

0302 $x-2=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_2(x-1)}{x-2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+t)}{t} = \frac{1}{\ln 2}$$

답 $\frac{1}{\ln 2}$

$$0303 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)(1+3x)(1+5x)(1+7x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) + \log(1+3x) + \log(1+5x) + \log(1+7x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+3x)}{3x} \times 3$$

$$+ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+5x)}{5x} \times 5 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+7x)}{7x} \times 7$$

$$= \frac{1}{\ln 10} + \frac{1}{\ln 10} \times 3 + \frac{1}{\ln 10} \times 5 + \frac{1}{\ln 10} \times 7$$

$$= \frac{16}{\ln 10} \quad \text{답 } \frac{16}{\ln 10}$$

$$0304 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{2x}{\ln(1+2x)} \times \frac{1}{2} \right\}$$

$$= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{답 ①}$$

$$0305 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{3x} - 1}{3x} \times \frac{3}{x-1} \right)$$

$$= 1 \times (-3) = -3 \quad \text{답 -3}$$

$$0306 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-3x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 + 1 - e^{-3x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times 2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x} - 1}{-3x} \times 3$$

$$= 1 \times 2 + 1 \times 3 = 5 \quad \text{답 ⑤}$$

$$0307 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-ax} - 1}{\ln(1+a^2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{-ax} - 1}{-ax} \times \frac{a^2x}{\ln(1+a^2x)} \times \left(-\frac{1}{a} \right) \right\}$$

$$= 1 \times 1 \times \left(-\frac{1}{a} \right)$$

$$= -\frac{1}{a}$$

따라서 $-\frac{1}{a} = \frac{1}{9}$ 이므로 $a = -9$ 답 -9

$$0308 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 2^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 1 + 1 - 2^x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$$

$$= \ln 8 - \ln 2$$

$$= \ln 4 \quad \text{답 ②}$$

$$0309 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{\log_3(1+x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{3^x - 1}{x} \times \frac{x}{\log_3(1+x)} \right\}$$

$$= \ln 3 \times \ln 3 = (\ln 3)^2 \quad \text{답 } (\ln 3)^2$$

0310 $x+1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{7^{x+1} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{7^{x+1} - 1}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{7^t - 1}{t} \times \frac{1}{t-2} \right)$$

$$= \ln 7 \times \left(-\frac{1}{2} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \ln 7 = \ln \frac{\sqrt{7}}{7}$$

$\therefore a = \frac{\sqrt{7}}{7}$ 답 $\frac{\sqrt{7}}{7}$

$$0311 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{ax} - 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{ax} - 1}{ax} \times \frac{a}{3}$$

$$= \ln 5 \times \frac{a}{3} = \frac{a}{3} \ln 5$$

즉 $\frac{a}{3} \ln 5 = b \ln 5$ 이므로 $\frac{a}{3} = b$

$\therefore a = 3b$ ㉠

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{12x} - 1}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{12x} - 1}{12x} \times \frac{12}{b} = 1 \times \frac{12}{b} = \frac{12}{b}$$

이므로 $\frac{12}{b} = a$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{12}{b} = 3b$

$$b^2 = 4 \quad \therefore b = 2 (\because b > 0)$$

$b = 2$ 를 ㉡에 대입하면 $a = 6$

$\therefore a + b = 8$ 답 8

0312 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} (ax+b)=0$ 이므로

$$a+b=0 \quad \therefore b=-a$$

$b=-a$ 를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax-a}{e^{x-1}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)}{e^{x-1}-1}$$

이때 $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)}{e^{x-1}-1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{at}{e^t-1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t-1} \times a \\ &= 1 \times a = a \end{aligned}$$

따라서 $a=3$ 이므로 $b=-3$

$$\therefore a-b=6$$

답 ③

0313 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{ax+b}-2)=0$ 이므로

$$\sqrt{b}-2=0 \quad \therefore b=4$$

$b=4$ 를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+4}-2}{e^x-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{ax+4}-2)(\sqrt{ax+4}+2)}{(e^x-1)(\sqrt{ax+4}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{(e^x-1)(\sqrt{ax+4}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{e^x-1} \times \frac{a}{\sqrt{ax+4}+2} \right) \\ &= 1 \times \frac{a}{4} = \frac{a}{4} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{4} = \frac{1}{2}$ 이므로 $a=2$

$$\therefore ab=8$$

답 ④

0314 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow -1} \{a \ln(x+2)+b\}=0$ 이므로

$$b=0$$

$b=0$ 을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{a \ln(x+2)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{a \ln(x+2)}{(x+1)(x-1)}$$

이때 $x+1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{a \ln(x+2)}{(x+1)(x-1)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a \ln(t+1)}{t(t-2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(t+1)}{t} \times \frac{a}{t-2} \right\} \\ &= 1 \times \left(-\frac{a}{2} \right) = -\frac{a}{2} \end{aligned}$$

따라서 $-\frac{a}{2} = -3$ 이므로 $a=6$

$$\therefore a+b=6$$

답 6

0315 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{bx+c}-1)=0$ 이므로

$$e^c-1=0 \quad \therefore c=0$$

... 1단계

$c=0$ 을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{e^{bx}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+ax)}{ax} \times \frac{bx}{e^{bx}-1} \times \frac{a}{b} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{b}=7$ 이므로

$$\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} = 7$$

... 2단계

... 3단계

답 7

채점 요소	비율
1단계 c 의 값 구하기	30 %
2단계 주어진 식의 좌변의 극한값을 구하여 $\frac{a}{b}$ 의 값 구하기	60 %
3단계 $\frac{a+c}{b}$ 의 값 구하기	10 %

0316 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이라면 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=f(0)$

이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5x+a)}{x} = b \quad \dots\dots ①$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(5x+a)=0$ 이므로

$$\ln a=0 \quad \therefore a=1$$

$a=1$ 을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5x+1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5x+1)}{5x} \times 5 \\ &= 1 \times 5 = 5 \\ \therefore a+b &= 6 \end{aligned}$$

답 6

0317 함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\frac{1}{2}, \infty)$ 에서 연속이면 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=f(0)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx}{\ln(1+2x)} = 2$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx}{\ln(1+2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\ln(1+2x)} \times \frac{k}{2} \\ &= 1 \times \frac{k}{2} = \frac{k}{2} \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{k}{2} = 2 \quad \therefore k=4$$

답 ④

0318 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(ax+b-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} (e^x+4) = 5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(ax+b-1)}{x} = 5 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$x \rightarrow 0+$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(ax+b-1) = 0$ 이므로

$$\ln(b-1) = 0, \quad b-1 = 1$$

$$\therefore b = 2$$

$b=2$ 를 $\textcircled{7}$ 의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(ax+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(ax+1)}{ax} \times a$$

$$= 1 \times a = a$$

따라서 $a=5$ 이므로 $ab=10$ 답 10

0319 $x \neq 1$ 일 때, $f(x) = \frac{e^{2x-2}-1}{x-1}$... 1단계

이때 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2x-2}-1}{x-1} = f(1) \quad \dots \textcircled{2\text{단계}}$$

$x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$f(1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{2t}-1}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{2t}-1}{2t} \times 2$$

$$= 1 \times 2 = 2 \quad \dots \textcircled{3\text{단계}} \quad \text{답 2}$$

	채점 요소	비율
1단계	$x \neq 1$ 일 때, 함수 $f(x)$ 구하기	20 %
2단계	$f(1)$ 의 값을 극한을 이용하여 나타내기	30 %
3단계	$f(1)$ 의 값 구하기	50 %

0320 $f'(x) = 6 \times e^x + (6x+2)e^x$

$$= (6x+8)e^x$$

$$\therefore f'(0) = 8 \quad \text{답 4}$$

0321 $f(x) = e^{x+\ln 3} = e^x \times e^{\ln 3} = 3e^x$ 이므로

$$f'(x) = 3e^x$$

$$\therefore f(\ln 2) - f'(0) = 6 - 3 = 3 \quad \text{답 3}$$

0322 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, f(0))$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(0)$ 이다.

이때 $f'(x) = 3^x \ln 3 + 4^x \ln 4$ 이므로

$$f'(0) = \ln 3 + \ln 4 = \ln 12$$

따라서 $\ln a = \ln 12$ 이므로

$$a = 12 \quad \text{답 12}$$

042 정답 및 풀이

0323 $f'(x) = e^x(ax^2-1) + e^x \times 2ax$

$$= (ax^2+2ax-1)e^x$$

이므로 $f'(1) = (3a-1)e$

따라서 $(3a-1)e = 8e$ 이므로

$$3a-1=8 \quad \therefore a=3 \quad \text{답 3}$$

0324 $f(x) = e^x \ln 3x = e^x(\ln 3 + \ln x)$ 이므로

$$f'(x) = e^x(\ln 3 + \ln x) + e^x \times \frac{1}{x}$$

$$= \left(\ln 3x + \frac{1}{x} \right) e^x$$

$$\therefore f'\left(\frac{1}{3}\right) = 3e^{\frac{1}{3}} \quad \text{답 } 3e^{\frac{1}{3}}$$

0325 $f(x) = \log_3 x + \log_9 x = \log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x$

$$= \frac{3}{2} \log_3 x$$

이므로 $f'(x) = \frac{3}{2x \ln 3}$

$$\therefore f'(2) = \frac{3}{4 \ln 3}$$

따라서 $\frac{a}{\ln 3} = \frac{3}{4 \ln 3}$ 이므로 $a = \frac{3}{4}$ 답 3

0326 함수 $f(x) = \ln x$ 가 닫힌구간 $[2, 4]$ 에서 연속이고 열린구간 $(2, 4)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 $(2, 4)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = \frac{1}{x}$ 이므로

$$\frac{\ln 4 - \ln 2}{2} = \frac{1}{c}$$

$$\therefore c = \frac{2}{\ln 2} \quad \text{답 } \frac{2}{\ln 2}$$

RPM 비법 노트

평균값 정리

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능할 때

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

0327 $f(1) = 2$ 이므로 $b = 2$

따라서 $f(x) = a^x \ln x + 2x^2$ 이므로

$$f'(x) = a^x \ln a \times \ln x + a^x \times \frac{1}{x} + 4x$$

$$\therefore f'(1) = a + 4$$

즉 $a + 4 = 7$ 이므로 $a = 3$

$$\therefore a + b = 5 \quad \text{답 4}$$

0328 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-2h)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1) + f(1) - f(1-2h)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-2h)}{-2h} \times 2$
 $= f'(1) + 2f'(1) = 3f'(1)$
 이때 $f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} + 3x^2 = \ln x + 3x^2 + 1$ 이므로
 구하는 극한값은
 $3f'(1) = 3 \times 4 = 12$ 답 ⑤

0329 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \frac{1}{x + 1} \right\}$
 $= \frac{1}{2} f'(1)$
 이때 $f(x) = 5^{2x-1} = 5^{2x} \times 5^{-1} = 5^{-1} \times 25^x$ 이므로
 $f'(x) = 5^{-1} \times 25^x \ln 25 = 2 \ln 5 \times 5^{2x-1}$
 따라서 구하는 극한값은
 $\frac{1}{2} f'(1) = \frac{1}{2} \times 10 \ln 5 = 5 \ln 5$ 답 ④

0330 $\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x) + 3e}{x - e} = -10$ 에서 $x \rightarrow e$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$
 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.
 즉 $\lim_{x \rightarrow e} \{f(x) + 3e\} = 0$ 이므로 $f(e) = -3e$
 $(a+b)e = -3e \quad \therefore a+b = -3 \quad \dots\dots ①$
 또 $\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x) + 3e}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = f'(e)$ 이므로
 $f'(e) = -10$
 이때 $f'(x) = a \times \ln x + ax \times \frac{1}{x} + b = a \ln x + a + b$ 이므로
 $f'(e) = 2a + b$
 $\therefore 2a + b = -10 \quad \dots\dots ②$
 ①, ②를 연립하여 풀면 $a = -7, b = 4$
 $\therefore b - a = 11$ 답 11

0331 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속
 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} (5^x - b) = \lim_{x \rightarrow 0-} a(x+1) = f(0)$
 $1 - b = a \quad \therefore b = 1 - a \quad \dots\dots ①$
 따라서 $f(0) = a = 1 - b$ 이므로
 $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{5^h - b - (1 - b)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{5^h - 1}{h} = \ln 5$
 $\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{a(h+1) - a}{h} = a$
 이때 $f'(0)$ 이 존재하므로 $a = \ln 5$
 $a = \ln 5$ 를 ①에 대입하면 $b = 1 - \ln 5$
답 $a = \ln 5, b = 1 - \ln 5$

다른 풀이 $g(x) = a(x+1), h(x) = 5^x - b$ 라 하면
 $g'(x) = a, h'(x) = 5^x \ln 5$
 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로 $g(0) = h(0)$
 $a = 1 - b \quad \therefore b = 1 - a \quad \dots\dots ①$
 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로
 $g'(0) = h'(0) \quad \therefore a = \ln 5$
 $a = \ln 5$ 를 ①에 대입하면 $b = 1 - \ln 5$

0332 함수 $f(x)$ 가 모든 양수 x 에서 미분가능하면 $x=1$ 에서 연속이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1+} b e^{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \ln ax = f(1)$
 $\therefore \ln a = b \quad \dots\dots ①$
 따라서 $f(1) = \ln a = b$ 이므로
 $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{b e^h - b}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{b(e^h - 1)}{h} = b$
 $\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\ln a(1+h) - \ln a}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$
 이때 $f'(1)$ 이 존재하므로 $b = 1$
 $b = 1$ 을 ①에 대입하면 $\ln a = 1 \quad \therefore a = e$
 $\therefore ab = e$ 답 ①

0333 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하면 $x=1$ 에서 연속이
 므로 $\lim_{x \rightarrow 1+} \ln bx = \lim_{x \rightarrow 1-} (ax^2 + 1) = f(1)$
 $\therefore \ln b = a + 1 \quad \dots\dots ① \quad \dots \text{1단계}$
 따라서 $f(1) = a + 1 = \ln b$ 이므로
 $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\ln b(1+h) - \ln b}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$
 $\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{a(1+h)^2 + 1 - (a+1)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0-} (ah + 2a) = 2a$
 이때 $f'(1)$ 이 존재하므로
 $2a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{2} \quad \dots \text{2단계}$
 $a = \frac{1}{2}$ 을 ①에 대입하면
 $\ln b = \frac{3}{2} \quad \therefore b = e^{\frac{3}{2}}$
 $\therefore \frac{b}{a} = 2e^{\frac{3}{2}} \quad \dots \text{3단계}$
답 $2e^{\frac{3}{2}}$

채점 요소		비율
1단계	$x=1$ 에서 연속임을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	30 %
2단계	$f'(1)$ 이 존재함을 이용하여 a 의 값 구하기	50 %
3단계	$\frac{b}{a}$ 의 값 구하기	20 %

0334 $\overline{AB} = e - 1$ 이므로 $S(t) = \frac{1}{2}(e-1) \ln t$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{S(t)}{t-1} = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{(e-1) \ln t}{2(t-1)}$$

$t-1=s$ 로 놓으면 $t \rightarrow 1$ 일 때 $s \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{S(t)}{t-1} &= \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{(e-1) \ln(1+s)}{2s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+s)}{s} \times \frac{e-1}{2} \\ &= 1 \times \frac{e-1}{2} = \frac{e-1}{2} \end{aligned}$$

답 ③

0335 $P(t, 2e^{2t}-2)$ 이므로

$$\overline{PQ} = 2e^{2t}-2, \overline{OQ} = t$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2e^{2t}-2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^{2t}-1}{2t} \times 4 \\ &= 1 \times 4 = 4 \end{aligned}$$

답 ④

0336 $A(t, 3^t), B\left(t, \left(\frac{1}{3}\right)^t\right)$ 이므로

$$\overline{AH} = t, \overline{AB} = 3^t - \left(\frac{1}{3}\right)^t = 3^t - 3^{-t}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{3^t - 3^{-t}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{3^t - 1 + 1 - 3^{-t}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{3^t - 1}{t} + \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{3^{-t} - 1}{-t} \\ &= \ln 3 + \ln 3 = 2 \ln 3 \end{aligned}$$

답 ④

0337 점 P의 좌표를 (t, e^t-1) 이라 하면

$$S_1 = \frac{1}{2} \times e \times t = \frac{e}{2}t$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times 3 \times (e^t-1) = \frac{3}{2}(e^t-1)$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{e}{2}t \times \frac{2}{3(e^t-1)} = \frac{et}{3(e^t-1)}$$

따라서 구하는 극한값은

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{S_1}{S_2} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{et}{3(e^t-1)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{e}{3} \times \frac{t}{e^t-1} \right) \\ &= \frac{e}{3} \times 1 = \frac{e}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{e}{3}$

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 052~054쪽

0338 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 3^{x+a}}{2^x - 3^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3^a}{\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1} = -3^a$

따라서 $-3^a = -\frac{1}{3}$ 이므로

$$3^a = 3^{-1} \quad \therefore a = -1$$

답 -1

0339 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_3(6x+1) + \log_{\frac{1}{3}} 2x\}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_3(6x+1) - \log_3 2x\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \frac{6x+1}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \left(3 + \frac{1}{2x} \right)$$

$$= \log_3 3 = 1$$

답 1

0340 $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \left\{ \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right\}^3$

$$= \log_2 e^3 = 3 \log_2 e$$

$$= \frac{3}{\ln 2}$$

답 ⑤

0341 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{\ln(1+3x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x) - f(0)}{x} \times \frac{3x}{\ln(1+3x)} \times \frac{1}{3} \right\}$$

$$= f'(0) \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{f'(0)}{3}$$

따라서 $\frac{f'(0)}{3} = 2$ 이므로 $f'(0) = 6$

답 ③

0342 $\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x}} \right)^x$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{2}{x} \right)^x}{\left(1 + \frac{2}{x} \right)^x}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{-\frac{x}{2}} \right\}^{-2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{\frac{x}{2}} \right\}^2}$$

$$= \frac{e^{-2}}{e^2} = \frac{1}{e^4} \quad (\text{거짓})$$

$\therefore \frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{3x} = \lim_{t \rightarrow 0+} \ln(1+2t)^{\frac{3}{t}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{3}{t} \ln(1+2t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+2t)}{2t} \times 6$$

$$= 1 \times 6 = 6 \quad (\text{거짓})$$

$\therefore x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t+1} - e}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} \times e$$

$$= 1 \times e = e \quad (\text{참})$$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ㄷ

다른 풀이 ㄱ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{x+2} \right)^x$

$\frac{4}{x+2} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{4}{t} - 2$ 이고 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{x+2} \right)^x \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} (1-t)^{\frac{4}{t}-2} = \lim_{t \rightarrow 0+} \{ (1-t)^{\frac{4}{t}} \times (1-t)^{-2} \} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \{ (1-t)^{-\frac{1}{t}} \}^{-4} \times \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{(1-t)^2} \\ &= e^{-4} \times 1 = \frac{1}{e^4} \text{ (거짓)} \end{aligned}$$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left\{ \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{\frac{x}{2}} \right\}^6$
 $= \ln e^6 = 6$ (거짓)

0343 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x}{e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{nx} - n}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x}{e^x - 1 + e^{2x} - 1 + e^{3x} - 1 + \dots + e^{nx} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12}{\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times 2 + \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times 3 + \dots + \frac{e^{nx} - 1}{nx} \times n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12}{\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times 2 + \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times 3 + \dots + \frac{e^{nx} - 1}{nx} \times n} \\ &= \frac{12}{1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 + \dots + 1 \times n} \\ &= \frac{12}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{24}{n(n+1)} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{24}{n(n+1)} = \frac{1}{10}$ 이므로
 $n(n+1) = 240 \quad \therefore n = 15$ ($\because n$ 은 자연수) **답 ④**

0344 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(8^x - 1) \log_2(1+x)}{x^2}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{8^x - 1}{x} \times \frac{\log_2(1+x)}{x} \right\} \\ &= \ln 8 \times \frac{1}{\ln 2} = 3 \end{aligned}$$

0345 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{2x} - a^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{2x} - 1 + 1 - a^x}{2x}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{2x} - 1}{2x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \times \frac{1}{2} \\ &= \ln a - \ln a \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \ln a \end{aligned}$$

즉 $\frac{1}{2} \ln a = \ln 3$ 이므로 $\ln a = 2 \ln 3$
 $\therefore a = 3^2 = 9$ **답 9**

0346 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} (12^x - 4^x - 3^x + a) = 0$ 이므로

$$-1 + a = 0 \quad \therefore a = 1$$

$a = 1$ 을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12^x - 4^x - 3^x + 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4^x - 1)(3^x - 1)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4^x - 1}{x} \times \frac{3^x - 1}{x} \right) \\ &= \ln 4 \times \ln 3 = 2 \ln 2 \times \ln 3 \end{aligned}$$

따라서 $2 \ln 2 \times \ln 3 = b \ln 2$ 이므로

$$b = 2 \ln 3 = \ln 9$$

$$\therefore e^{ab} = e^{\ln 9} = 9$$

답 ⑤

0347 $x \neq 0$ 일 때, $f(x) = \frac{5^x - 1}{\ln(x+1)}$

함수 $f(x)$ 가 $x > -1$ 에서 연속이면 $x = 0$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{\ln(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{5^x - 1}{x} \times \frac{x}{\ln(x+1)} \right\} \\ &= \ln 5 \times 1 = \ln 5 \end{aligned}$$

답 ln 5

0348 $f'(x) = e^x + (x+a)e^x = (x+a+1)e^x$ 이므로

$$f'(2) = (3+a)e^2$$

따라서 $(3+a)e^2 = 8e^2$ 이므로

$$3+a=8 \quad \therefore a=5$$

답 ⑤

0349 $f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} + a = \ln x + 1 + a$

이므로 $f'(1) = 1 + a$

따라서 $1 + a = 6$ 이므로 $a = 5$

즉 $f(x) = x \ln x + 5x = x(\ln x + 5)$ 이므로

$f(x) = 0$ 에서 $\ln x = -5$ ($\because x > 0$)

$$\therefore x = e^{-5} = \frac{1}{e^5}$$

답 $x = \frac{1}{e^5}$

0350 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1} = 2$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} \{ f(x) - 3 \} = 0$ 이므로 $f(1) = 3$

$$\therefore a + \ln b = 3$$

..... ㉠

또 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$ 이므로

$$f'(1) = 2$$

이때 $f(x) = a + x \ln bx = a + x(\ln b + \ln x)$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (\ln b + \ln x) + x \times \frac{1}{x} \\ &= \ln b + \ln x + 1 = \ln bx + 1 \end{aligned}$$

이므로 $f'(1) = \ln b + 1$

즉 $\ln b + 1 = 2$ 이므로 $\ln b = 1 \quad \therefore b = e$
 $b = e$ 를 ㉠에 대입하면 $a + 1 = 3 \quad \therefore a = 2$
 따라서 $f(x) = 2 + x(1 + \ln x)$ 이므로
 $f(e) = 2e + 2$

답 ⑤

0351 $Q(f(t), 0)$ 이고 $\overline{PQ} = \overline{OQ}$ 에서 $\overline{PQ}^2 = \overline{OQ}^2$ 이므로
 $\{f(t) - t\}^2 + (e^{2t} - 1)^2 = \{f(t)\}^2$
 $\{f(t)\}^2 - 2tf(t) + t^2 + (e^{2t} - 1)^2 = \{f(t)\}^2$
 $2tf(t) = t^2 + (e^{2t} - 1)^2$
 $\therefore f(t) = \frac{t}{2} + \frac{(e^{2t} - 1)^2}{2t}$
 $\therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{(e^{2t} - 1)^2}{2t^2} \right\}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{e^{2t} - 1}{2t} \right)^2 \times 2 \right\}$
 $= \frac{1}{2} + 1^2 \times 2 = \frac{5}{2}$

답 ④

0352 $-\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로
 $\alpha = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \{ \ln(3-x) - \ln(-x) \}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln\left(3 + \frac{1}{t}\right) - \ln \frac{1}{t}}{-t}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln(3t+1)}{-t}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln(3t+1)}{3t} \times (-3)$
 $= 1 \times (-3) = -3$

... 1단계

$3x^2 = s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $s \rightarrow 0$ 이므로

$\beta = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ex^2}{e^{3x^2} - 1} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{e}{3}s}{e^s - 1}$
 $= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{e^s - 1} \times \frac{e}{3}$
 $= 1 \times \frac{e}{3} = \frac{e}{3}$
 $\therefore \alpha\beta = -e$

... 2단계

... 3단계

답 -e

채점 요소	비율
1단계 α 의 값 구하기	50 %
2단계 β 의 값 구하기	40 %
3단계 $\alpha\beta$ 의 값 구하기	10 %

다른 풀이 $-x = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$\alpha = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \{ \ln(3-x) - \ln(-x) \}$
 $= \lim_{t \rightarrow \infty} [-t \times \{ \ln(3+t) - \ln t \}]$
 $= -\lim_{t \rightarrow \infty} t \ln \frac{3+t}{t} = -\lim_{t \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{3}{t} \right)^t$
 $= -\lim_{t \rightarrow \infty} \ln \left\{ \left(1 + \frac{3}{t} \right)^{\frac{t}{3}} \right\}^3$
 $= -\ln e^3 = -3$

0353 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} (e^{x-1} - a) = 0$ 이므로

$$1 - a = 0 \quad \therefore a = 1$$

... 1단계

$a = 1$ 을 주어진 식에 대입하면

$$b = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{(x-1)(x+1)}$$

이때 $x - 1 = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$b = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t(t+2)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^t - 1}{t} \times \frac{1}{t+2} \right)$$

$$= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a + b = \frac{3}{2}$$

... 2단계

... 3단계

답 $\frac{3}{2}$

채점 요소	비율
1단계 a 의 값 구하기	30 %
2단계 b 의 값 구하기	60 %
3단계 $a+b$ 의 값 구하기	10 %

0354 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 에서

$$k = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x + 3x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{e^x + 3x - 1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{e^x - 1}{x} + 3}$$

$$= \frac{2}{1 + 3} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(2k) = f(1) = \frac{2}{e + 2}$$

... 1단계

... 2단계

... 3단계

답 $\frac{2}{e+2}$

채점 요소	비율
1단계 k 의 값을 극한을 이용하여 나타내기	20 %
2단계 k 의 값 구하기	70 %
3단계 $f(2k)$ 의 값 구하기	10 %

0355 함수 $f(x)$ 가 $x = \frac{1}{2}$ 에서 미분가능하면 $x = \frac{1}{2}$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}+} (bx + 1) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}-} (3 + a \ln 2x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{b}{2} + 1 = 3 \quad \therefore b = 4$$

... 1단계

한편 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f\left(\frac{1}{2} + h\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{4\left(\frac{1}{2} + h\right) + 1 - 3}{h} = 4$$

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3+a \ln 2\left(\frac{1}{2}+h\right)-3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{a \ln (1+2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\ln (1+2h)}{2h} \times 2a \\ &= 1 \times 2a = 2a \end{aligned}$$

이때 $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ 이 존재하므로

$$2a=4 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore a+b=6$$

... 2단계

... 3단계

답 6

채점 요소	비율
1단계 $x=\frac{1}{2}$ 에서 연속임을 이용하여 b 의 값 구하기	30 %
2단계 $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ 이 존재함을 이용하여 a 의 값 구하기	60 %
3단계 $a+b$ 의 값 구하기	10 %

0356 전략 $y=2 \ln (x+1)+1$ 로 놓고 x 를 y 에 대한 식으로 나타내어 $g(x)$ 를 구한다.

$y=2 \ln (x+1)+1$ 로 놓으면

$$\ln (x+1)=\frac{y-1}{2}, \quad x+1=e^{\frac{y-1}{2}}$$

$$\therefore x=e^{\frac{y-1}{2}}-1$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y=e^{\frac{x-1}{2}}-1$$

$$\therefore g(x)=e^{\frac{x-1}{2}}-1$$

이때 $f(0)=1, g(1)=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)-f(0)}{g(x)-g(1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln x}{e^{\frac{x-1}{2}}-1}$$

$x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln x}{e^{\frac{x-1}{2}}-1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \ln (1+t)}{e^{\frac{t}{2}}-1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln (1+t)}{t} \times \frac{\frac{t}{2}}{e^{\frac{t}{2}}-1} \times 4 \right\} \\ &= 1 \times 1 \times 4 = 4 \end{aligned}$$

답 4

0357 전략 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 조건을 파악한다.

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고 함수 $g(x)$ 는 $x \neq 0$ 에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0, a, b, c$ 는 상수)라 하면

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)=f(0)g(0)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(ax^2+bx+c)(e^{3x}-1)}{x(2^x-1)} = 5c$$

이때

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(ax^2+bx+c)(e^{3x}-1)}{x(2^x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{3x}-1}{3x} \times \frac{x}{2^x-1} \times \frac{3(ax^2+bx+c)}{x} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(ax^2+bx+c)}{x \ln 2} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(ax^2+bx+c)}{x \ln 2} = 5c \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} 3(ax^2+bx+c)=0$ 이므로 $c=0$

$c=0$ 을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(ax^2+bx)}{x \ln 2} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(ax+b)}{\ln 2} &= 0 \quad \therefore b=0 \end{aligned}$$

따라서 $f(x)=ax^2$ 이고 $f(1)=1$ 이므로

$$a=1$$

즉 $f(x)=x^2$ 이므로

$$f(2)=4$$

답 4

0358 전략 선분 AB의 수직이등분선은 직선 AB에 수직이고, 선분 AB의 중점을 지남을 이용한다.

직선 AB의 기울기는 $\frac{4 \log t}{t-1}$ 이므로 직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1-t}{4 \log t}$ 이다.

또 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+t}{2}, 2 \log t\right)$ 이므로 선분 AB의 수직이등분선의 방정식은

$$\begin{aligned} y-2 \log t &= \frac{1-t}{4 \log t} \left(x-\frac{1+t}{2}\right) \\ \therefore y &= \frac{1-t}{4 \log t} x + \frac{(t+1)(t-1)}{8 \log t} + 2 \log t \end{aligned}$$

즉 $f(t)=\frac{(t+1)(t-1)}{8 \log t}+2 \log t$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \left\{ \frac{(t+1)(t-1)}{8 \log t} + 2 \log t \right\}$$

이때 $t-1=s$ 로 놓으면 $t \rightarrow 1$ 일 때 $s \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 1} f(t) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{s(s+2)}{8 \log (1+s)} + 2 \log (1+s) \right\} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{s}{\log (1+s)} \times \frac{s+2}{8} \right\} + 2 \lim_{s \rightarrow 0} \log (1+s) \\ &= \ln 10 \times \frac{1}{4} + 0 = \frac{\ln 10}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{\ln 10}{4}$

04 삼각함수의 미분

교과서 문제 정복하기

본책 057쪽

0359 $\csc 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}$ 답 $\sqrt{2}$

0360 $\sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 답 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

0361 $\cot 60^\circ = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

0362 $\csc \frac{7}{6}\pi = \frac{1}{\sin \frac{7}{6}\pi} = \frac{1}{\sin(\pi + \frac{\pi}{6})}$
 $= -\frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = -2$ 답 -2

RPM비법노트

$\pi \pm x$ 의 삼각함수(복호동순)

- ① $\sin(\pi \pm x) = \mp \sin x$
- ② $\cos(\pi \pm x) = -\cos x$
- ③ $\tan(\pi \pm x) = \pm \tan x$

0363 $\sec(-\pi) = \frac{1}{\cos(-\pi)} = \frac{1}{\cos \pi} = -1$ 답 -1

0364 $\cot \frac{7}{4}\pi = \frac{1}{\tan \frac{7}{4}\pi} = \frac{1}{\tan(2\pi - \frac{\pi}{4})}$
 $= -\frac{1}{\tan \frac{\pi}{4}} = -1$ 답 -1

0365 $\sin 105^\circ = \sin(45^\circ + 60^\circ)$
 $= \sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ 답 $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

0366 $\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ)$
 $= \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ 답 $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

0367 $\tan \frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}}$
 $= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$
 $= 2 - \sqrt{3}$ 답 $2 - \sqrt{3}$

0368 $\sin 75^\circ \cos 30^\circ - \cos 75^\circ \sin 30^\circ$
 $= \sin(75^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0369 $\cos 50^\circ \cos 100^\circ - \sin 50^\circ \sin 100^\circ$
 $= \cos(50^\circ + 100^\circ) = \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

0370 $\frac{\tan 80^\circ - \tan 50^\circ}{1 + \tan 80^\circ \tan 50^\circ}$
 $= \tan(80^\circ - 50^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

0371 (1) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ 에서 $\sin \alpha > 0$ 이므로
 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$
(2) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$
(3) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{3}{5} \times \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$
(4) $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{24}{7}$
답 (1) $\frac{3}{5}$ (2) $-\frac{3}{4}$ (3) $-\frac{24}{25}$ (4) $-\frac{24}{7}$

다른 풀이 (4) $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{7}{25}$
이므로 $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{-\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = -\frac{24}{7}$

0372 답 $3x, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}$

0373 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{4x} \times \frac{4}{3}$
 $= 1 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$

0374 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{2x}{\tan 2x} \times \frac{1}{2} \right)$
 $= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{0375 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \tan x}{3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2}{3} + \frac{\tan x}{x} \times \frac{1}{3} \right) \\ &= 1 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = 1 \end{aligned} \quad \text{답 1}$$

$$\begin{aligned} \text{0376 } \frac{1}{x} = t \text{로 놓으면 } x \rightarrow \infty \text{일 때 } t \rightarrow 0+ \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin t}{t} = 1 \end{aligned} \quad \text{답 1}$$

$$\begin{aligned} \text{0377 } x - \pi = t \text{로 놓으면 } x \rightarrow \pi \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan x}{x - \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan(\pi + t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{t} = 1 \end{aligned} \quad \text{답 1}$$

$$\text{0378 } \text{답 } y' = -\sin x - \cos x$$

$$\begin{aligned} \text{0379 } y' &= (\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)' \\ &= \cos x \cos x + \sin x (-\sin x) \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x \quad \text{답 } y' = \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

유형 익히기 • 본책 058~067쪽

$$\begin{aligned} \text{0380 } \theta \text{가 제3사분면의 각이므로} \\ \cos \theta &= -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} \\ &= -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5} \quad (\because \cos \theta < 0) \\ \therefore \sec \theta &= \frac{1}{\cos \theta} = -\frac{5}{4}, \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4} \\ \therefore \sec \theta + \tan \theta &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad \text{답 } -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{0381 } &(\text{i}) \csc \theta \sec \theta > 0 \text{에서} \\ &\csc \theta > 0, \sec \theta > 0 \text{일 때, } \theta \text{는 제1사분면의 각이다.} \\ &\csc \theta < 0, \sec \theta < 0 \text{일 때, } \theta \text{는 제3사분면의 각이다.} \\ &(\text{ii}) \cos \theta \tan \theta < 0 \text{에서} \\ &\cos \theta > 0, \tan \theta < 0 \text{일 때, } \theta \text{는 제4사분면의 각이다.} \\ &\cos \theta < 0, \tan \theta > 0 \text{일 때, } \theta \text{는 제2사분면의 각이다.} \\ &(\text{i}), (\text{ii}) \text{에서 } \theta \text{는 제3사분면의 각이다.} \quad \text{답 제3사분면} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0382 } \overline{OP} &= \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13 \text{이므로} \\ \csc \theta &= -\frac{13}{5}, \cot \theta = -\frac{12}{5} \\ \therefore 25 \csc \theta \cot \theta &= 25 \times \left(-\frac{13}{5}\right) \times \left(-\frac{12}{5}\right) = 156 \end{aligned} \quad \text{답 156}$$

$$\begin{aligned} \text{0383 } &\text{이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여} \\ \tan \theta + \cot \theta &= -\frac{a}{12}, \tan \theta \cot \theta = \frac{b}{12} \\ \text{이때 } \tan \theta \cot \theta &= 1 \text{이므로 } \frac{b}{12} = 1 \quad \therefore b = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{한편 } \sin \theta + \cos \theta &= -\frac{1}{5} \text{의 양변을 제곱하면} \\ 1 + 2 \sin \theta \cos \theta &= \frac{1}{25} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{12}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서} \\ \tan \theta + \cot \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -\frac{25}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{이므로 } -\frac{a}{12} &= -\frac{25}{12} \quad \therefore a = 25 \\ \therefore a + b &= 37 \end{aligned} \quad \text{답 ④}$$

$$\begin{aligned} \text{0384 } \frac{1}{1 + \sin \theta} + \frac{1}{1 - \sin \theta} &= \frac{1 - \sin \theta + 1 + \sin \theta}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} \\ &= \frac{2}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta} \\ &= 2 \sec^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{즉 } 2 \sec^2 \theta &= \frac{9}{4} \text{이므로 } \sec^2 \theta = \frac{9}{8} \\ 1 + \tan^2 \theta &= \sec^2 \theta \text{이므로} \\ \tan^2 \theta &= \sec^2 \theta - 1 = \frac{9}{8} - 1 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{이때 } \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{에서 } \tan \theta > 0 \text{이므로} \\ \tan \theta &= \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \therefore \tan \theta + \cot \theta &= \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sqrt{2}}{4} + 2\sqrt{2} = \frac{9\sqrt{2}}{4} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{0385 } \frac{\csc \theta}{\sec \theta - \tan \theta} + \frac{\csc \theta}{\sec \theta + \tan \theta} \\ &= \frac{\csc \theta (\sec \theta + \tan \theta) + \csc \theta (\sec \theta - \tan \theta)}{(\sec \theta - \tan \theta)(\sec \theta + \tan \theta)} \\ &= \frac{2 \csc \theta \sec \theta}{\sec^2 \theta - \tan^2 \theta} = 2 \csc \theta \sec \theta \end{aligned} \quad \text{답 } 2 \csc \theta \sec \theta$$

$$\text{참고 } 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \text{이므로 } \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$\begin{aligned} \text{0386 } \neg. \cot^2 \theta - \cos^2 \theta &= \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - \cos^2 \theta \\ &= \frac{\cos^2 \theta (1 - \sin^2 \theta)}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \times \cos^2 \theta \\ &= \cot^2 \theta \cos^2 \theta \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \tan \theta \sec \theta + \sec^2 \theta \\ &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{\sin \theta + 1}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{\sin \theta + 1}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{1 + \sin \theta}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} \\ &= \frac{1}{1 - \sin \theta} \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \therefore (1-\sin^2\theta)(1-\cos^2\theta)(1+\tan^2\theta)(1+\cot^2\theta) \\ & = \cos^2\theta \times \sin^2\theta \times \sec^2\theta \times \csc^2\theta \\ & = \cos^2\theta \times \sin^2\theta \times \frac{1}{\cos^2\theta} \times \frac{1}{\sin^2\theta} = 1 \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0387 $\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} = 2 + \sqrt{3}$ 에서

$$1 + \tan\theta = (2 + \sqrt{3})(1 - \tan\theta)$$

$$(3 + \sqrt{3})\tan\theta = 1 + \sqrt{3}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{1 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이때 $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ 이므로

$$\sec^2\theta = 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

또 $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \sqrt{3}$ 이고 $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$ 이므로

$$\csc^2\theta = 1 + (\sqrt{3})^2 = 4$$

$$\therefore \sec^2\theta + \csc^2\theta = \frac{16}{3}$$

답 $\frac{16}{3}$

0388 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$ 에서 $\cos\alpha < 0, \sin\beta < 0$ 이므로

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5},$$

$$\sin\beta = -\sqrt{1 - \cos^2\beta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{3} - \left(-\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{5} - 8}{15} \quad \text{답 } \frac{3\sqrt{5} - 8}{15}$$

0389 $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 에서 $\sin\theta < 0$ 이므로

$$\sin\theta = -\sqrt{1 - \cos^2\theta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = -2 \quad \dots \text{1단계}$$

$$\therefore \tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\theta}{1 - \tan\frac{\pi}{4} \tan\theta}$$

$$= \frac{1 + (-2)}{1 - 1 \times (-2)} = -\frac{1}{3} \quad \dots \text{2단계}$$

답 $-\frac{1}{3}$

	채점 요소	비율
1단계	$\tan\theta$ 의 값 구하기	50%
2단계	$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$ 의 값 구하기	50%

0390 $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = \frac{1}{4} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$\cos\alpha + \cos\beta = \frac{3}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta = \frac{9}{4} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠+㉡을 하면

$$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + 2(\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta)$$

$$+ (\sin^2\beta + \cos^2\beta) = \frac{5}{2}$$

$$2 + 2\cos(\alpha - \beta) = \frac{5}{2} \quad \therefore \cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{4} \quad \text{답 } \frac{1}{4}$$

0391 $g\left(\frac{4}{5}\right) = \alpha$ 에서 $f(\alpha) = \frac{4}{5}$, 즉 $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$g\left(\frac{15}{17}\right) = \beta$ 에서 $f(\beta) = \frac{15}{17}$, 즉 $\cos\beta = \frac{15}{17}$

이때 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin x > 0$ 이므로

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{15}{17}\right)^2} = \frac{8}{17}$$

$$\therefore f(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta)$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{15}{17} - \frac{3}{5} \times \frac{8}{17} = \frac{36}{85} \quad \text{답 } \frac{36}{85}$$

0392 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{k}{2}, \tan\alpha\tan\beta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{k}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = k$$

이때 $\tan(\alpha + \beta) = 3$ 이므로 $k = 3$

답 ③

0393 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan\alpha + \tan\beta = 6, \tan\alpha\tan\beta = -1 \quad \dots \text{1단계}$$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \frac{6}{1 - (-1)} = 3 \quad \dots \text{2단계}$$

$$\therefore \sec^2(\alpha + \beta) = 1 + \tan^2(\alpha + \beta)$$

$$= 1 + 3^2 = 10 \quad \dots \text{3단계}$$

답 10

	채점 요소	비율
1단계	이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\tan\alpha + \tan\beta, \tan\alpha\tan\beta$ 의 값 구하기	30%
2단계	$\tan(\alpha + \beta)$ 의 값 구하기	40%
3단계	$\sec^2(\alpha + \beta)$ 의 값 구하기	30%

0394 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan \alpha + \tan \beta = 4a, \tan \alpha \tan \beta = a^2 + 5$$

이때 $\tan(\alpha + \beta) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ 에서

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1, \quad \frac{4a}{1 - (a^2 + 5)} = 1$$

$$4a = -a^2 - 4, \quad a^2 + 4a + 4 = 0$$

$$(a+2)^2 = 0 \quad \therefore a = -2$$

답 ②

0395 두 직선 $y = 3x$, $y = -\frac{1}{2}x$ 가 x 축의 양의 방향과 이루

는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = 3, \tan \beta = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \tan \theta = |\tan(\alpha - \beta)|$$

$$= \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right|$$

$$= \left| \frac{3 - (-\frac{1}{2})}{1 + 3 \times (-\frac{1}{2})} \right| = 7$$

답 7

0396 $x - y + 1 = 0$ 에서 $y = x + 1$

$(2 - \sqrt{3})x + y - \sqrt{3} = 0$ 에서 $y = (\sqrt{3} - 2)x + \sqrt{3}$

두 직선 $x - y + 1 = 0$, $(2 - \sqrt{3})x + y - \sqrt{3} = 0$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하고, 두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$$\tan \alpha = 1, \tan \beta = \sqrt{3} - 2$$

$$\therefore \tan \theta = |\tan(\alpha - \beta)|$$

$$= \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right|$$

$$= \left| \frac{1 - (\sqrt{3} - 2)}{1 + 1 \times (\sqrt{3} - 2)} \right|$$

$$= \left| \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \right| = \sqrt{3}$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\theta = \frac{\pi}{3}$

따라서 두 직선이 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$ 이다.

답 $\frac{\pi}{3}$

0397 $mx - y - 1 = 0$ 에서 $y = mx - 1$

$3x - y + 2 = 0$ 에서 $y = 3x + 2$

두 직선 $mx - y - 1 = 0$, $3x - y + 2 = 0$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = m, \tan \beta = 3$$

이때 두 직선이 이루는 예각의 크기가 45° 이므로

$$|\tan(\alpha - \beta)| = \tan 45^\circ$$

$$\left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| = 1$$

$$\left| \frac{m - 3}{1 + 3m} \right| = 1, \quad \frac{m - 3}{1 + 3m} = \pm 1$$

$$m - 3 = \pm(1 + 3m) \quad \therefore m = \frac{1}{2} (\because m > 0) \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$

0398 두 직선 $y = \frac{1}{2}x$, $y = ax + b$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{1}{2}, \tan \beta = a$$

이때 $\beta - \alpha = 45^\circ$ 이므로

$$\tan(\beta - \alpha) = 1, \quad \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} = 1$$

$$\frac{a - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}a} = 1, \quad a - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}a$$

$$\frac{1}{2}a = \frac{3}{2} \quad \therefore a = 3$$

따라서 직선 $y = ax + b$, 즉 $y = 3x + b$ 가 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$1 = 6 + b \quad \therefore b = -5$$

$$\therefore ab = -15$$

답 ④

0399 점 P가 $\overline{BC}$ 를 2 : 1로 내분하므로

$$\overline{BP} = 12 \times \frac{2}{3} = 8,$$

$$\overline{CP} = 12 \times \frac{1}{3} = 4$$

이때 $\angle APB = \alpha$, $\angle DPC = \beta$ 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{5}{8}, \tan \beta = \frac{5}{4}$$

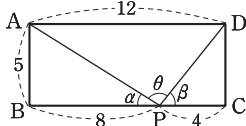
$$\therefore \tan \theta = \tan \{\pi - (\alpha + \beta)\}$$

$$= -\tan(\alpha + \beta)$$

$$= -\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= -\frac{\frac{5}{8} + \frac{5}{4}}{1 - \frac{5}{8} \times \frac{5}{4}} = -\frac{60}{7}$$

답 $-\frac{60}{7}$



0400 $\angle CAB = \alpha$, $\angle EAD = \beta$ 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{3}{2}, \tan \beta = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \tan \theta = \tan(\alpha - \beta)$$

$$= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{3}{2} \times \frac{2}{3}} = \frac{5}{12}$$

또 $\overline{AC} = \overline{AE} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ 이므로

$$\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}, \sin \beta = \frac{2}{\sqrt{13}}, \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\therefore \cos \theta = \cos(\alpha - \beta)$$

$$= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{2}{\sqrt{13}} \times \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{3}{\sqrt{13}} \times \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{12}{13}$$

$$\therefore 12 \tan \theta + 13 \cos \theta = 5 + 12 = 17$$

답 ④

0401 $\triangle ABC$ 는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\angle B = \angle C = \beta$$

따라서 $\alpha + 2\beta = \pi$ 이므로 $\alpha + \beta = \pi - \beta$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \tan(\pi - \beta) = -\tan \beta$$

$$\text{즉 } -\tan \beta = -\frac{4}{3} \text{ 이므로 } \tan \beta = \frac{4}{3}$$

이때 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = -\frac{4}{3}$ 이므로

$$\frac{\tan \alpha + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{3} \tan \alpha} = -\frac{4}{3}$$

$$\tan \alpha + \frac{4}{3} = -\frac{4}{3} \left(1 - \frac{4}{3} \tan \alpha\right)$$

$$\frac{7}{9} \tan \alpha = \frac{8}{3} \quad \therefore \tan \alpha = \frac{24}{7}$$

답 24/7

0402 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos \alpha > 0$ 이므로

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\therefore \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$\therefore \csc 2\alpha = \frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{8\sqrt{15}}{15}$$

답 8√15/15

0403 $3 \sin \theta - 2 \cos \theta = 0$ 에서

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2}{3} \quad \therefore \tan \theta = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \times \frac{2}{3}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{12}{5}$$

답 12/5

0404 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$1 + \sin 2\theta = \frac{1}{9} \quad \therefore \sin 2\theta = -\frac{8}{9}$$

답 ①

0405 $y = \cos 2x + 4 \sin x + 1$

$$= (1 - 2 \sin^2 x) + 4 \sin x + 1$$

$$= -2 \sin^2 x + 4 \sin x + 2$$

$$= -2(\sin x - 1)^2 + 4$$

... 1단계

이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 주어진 함수는 $\sin x = 1$ 일 때 최댓값 4를 갖고, $\sin x = -1$ 일 때 최솟값 -4를 갖는다.

따라서 $M = 4$, $m = -4$ 이므로

$$M - m = 8$$

... 2단계

... 3단계

답 8

	채점 요소	비율
1단계	$\sin x$ 에 대한 함수로 변형하기	60 %
2단계	M , m 의 값 구하기	30 %
3단계	$M - m$ 의 값 구하기	10 %

$$0406 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 ②

$$0407 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$$

답 1/2

$$0408 \lim_{x \rightarrow 0} (\sec x - 1) \cot^2 x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - 1}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - 1}{\sec^2 x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - 1}{(\sec x - 1)(\sec x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sec x + 1} = \frac{1}{2}$$

답 ④

$$0409 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin 4x}{\sin 3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x} - \frac{\sin 4x}{\sin 3x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{2}{3} - \frac{\sin 4x}{4x} \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{4}{3} \right)$$

$$= 1 \times 1 \times \frac{2}{3} - 1 \times 1 \times \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$$

답 -2/3

$$0410 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(g(x))}{g(f(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{\sin 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{2x}{\sin 2x} \right)$$

$$= 1 \times 1 = 1$$

답 ④

$$0411 \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{ (1 - x)^{-\frac{1}{x}} \}^{-\frac{x}{\sin x}}$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e}$$

답 1/e

$$0412 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin 100x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin 2x}{x} + \frac{\sin 3x}{x} + \cdots + \frac{\sin 100x}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times 2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \times 3 + \cdots$$

$$+ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 100x}{100x} \times 100$$

$$= 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 + \cdots + 1 \times 100$$

$$= \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

답 5050

$$\begin{aligned}
 \text{0413 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x + \tan 5x}{1 - e^{3x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 4x + \tan 5x}{x} \times \frac{x}{1 - e^{3x}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\tan 4x}{4x} \times 4 + \frac{\tan 5x}{5x} \times 5 \right) \times \frac{3x}{e^{3x} - 1} \times \left(-\frac{1}{3} \right) \right\} \\
 &= (1 \times 4 + 1 \times 5) \times 1 \times \left(-\frac{1}{3} \right) = -3 \quad \text{답 ②}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{0414 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan 2x)}{\tan 3x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan(\tan 2x)}{\tan 2x} \times \frac{3x}{\tan 3x} \times \frac{\tan 2x}{2x} \times \frac{2}{3} \right\} \\
 &= 1 \times 1 \times 1 \times \frac{2}{3} \\
 &= \frac{2}{3} \quad \text{답 ③}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{0415 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x^2 + x)}{\sin(x^2 + 2x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan(3x^2 + x)}{3x^2 + x} \times \frac{x^2 + 2x}{\sin(x^2 + 2x)} \times \frac{3x^2 + x}{x^2 + 2x} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan(3x^2 + x)}{3x^2 + x} \times \frac{x^2 + 2x}{\sin(x^2 + 2x)} \times \frac{3x + 1}{x + 2} \right\} \\
 &= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \quad \text{답 ①}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{0416 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\tan x)}{\tan f(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x - 2 \tan x}{\tan(x^2 - 2x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(\tan x - 2)}{\tan(x^2 - 2x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan x}{x} \times \frac{x^2 - 2x}{\tan(x^2 - 2x)} \times \frac{\tan x - 2}{x - 2} \right\} \\
 &= 1 \times 1 \times \frac{-2}{-2} \\
 &= 1 \quad \text{답 ③}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{0417 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x \sin 3x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x \sin 3x(\cos x + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x \sin 3x(\cos x + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x \sin 3x(\cos x + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \left\{ -\frac{1}{3(\cos x + 1)} \right\} \right] \\
 &= 1^2 \times 1 \times \left(-\frac{1}{6} \right) \\
 &= -\frac{1}{6} \quad \text{답 ②}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{0418 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x - \cos^2 x - \cos x + 1}{x^4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x(\cos x - 1) - (\cos x - 1)}{x^4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos^2 x - 1)(\cos x - 1)}{x^4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos^2 x - 1)(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x^4(\cos x + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos^2 x - 1)(\cos^2 x - 1)}{x^4(\cos x + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x \times (-\sin^2 x)}{x^4(\cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{x^4(\cos x + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^4 \times \frac{1}{\cos x + 1} \right\} \\
 &= 1^4 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{답 ①}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{0419 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\tan x - \sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos x}{\sin x(1 - \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos x(1 + \cos x)}{\sin x(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos x(1 + \cos x)}{\sin x(1 - \cos^2 x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos x(1 + \cos x)}{\sin^3 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{x}{\sin x} \right)^3 \times \cos x(1 + \cos x) \right\} \\
 &= 1^3 \times 2 = 2 \quad \text{답 2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{0420 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos kx}{4x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos kx)(1 + \cos kx)}{4x^2(1 + \cos kx)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 kx}{4x^2(1 + \cos kx)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 kx}{4x^2(1 + \cos kx)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin kx}{kx} \right)^2 \times \frac{k^2}{4(1 + \cos kx)} \right\} \\
 &= 1^2 \times \frac{k^2}{8} = \frac{k^2}{8} \quad \dots \text{1단계} \\
 &\text{따라서 } \frac{k^2}{8} = \frac{7}{2} \text{ 이므로 } k^2 = 28 \\
 &\therefore k = 2\sqrt{7} \quad (\because k > 0) \quad \dots \text{2단계} \\
 &\text{답 } 2\sqrt{7}
 \end{aligned}$$

채점 요소		비율
1단계	극한값을 k에 대한 식으로 나타내기	70 %
2단계	k의 값 구하기	30 %

0421 $x - \pi = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \pi$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi) \sin x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \cos(\pi + t)}{t \sin(\pi + t)} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{-t \sin t} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos t)(1 + \cos t)}{-t \sin t (1 + \cos t)} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 t}{-t \sin t (1 + \cos t)} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{-t \sin t (1 + \cos t)} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin t}{t} \times \left(-\frac{1}{1 + \cos t} \right) \right\} \\&= 1 \times \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} \quad \text{답 ①}\end{aligned}$$

0422 $x - 2\pi = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2\pi$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin x}{x^2 - 4\pi^2} &= \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin x}{(x + 2\pi)(x - 2\pi)} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(2\pi + t)}{(4\pi + t)t} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{(4\pi + t)t} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \times \frac{1}{4\pi + t} \right) \\&= 1 \times \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \quad \text{답 ①}\end{aligned}$$

0423 $x - 1 = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2-x} - e}{\sin(x-1)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{1-t} - e}{\sin t} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e(e^{-t} - 1)}{\sin t} \\&= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{-t} - 1}{-t} \times \frac{t}{\sin t} \times (-e) \right\} \\&= 1 \times 1 \times (-e) = -e \quad \text{답 ②}\end{aligned}$$

0424 $\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{5}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin 5t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin 5t}{5t} \times 5 \\&= 1 \times 5 = 5 \quad \text{답 5}\end{aligned}$$

0425 $\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{4}{x} \cot \frac{5}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \sin 4t \cot 5t \\&= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin 4t}{\tan 5t} \\&= \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin 4t}{4t} \times \frac{5t}{\tan 5t} \times \frac{4}{5} \right) \\&= 1 \times 1 \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \quad \text{답 } \frac{4}{5}\end{aligned}$$

0426 $\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x^\circ \tan \frac{1}{2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{180} x \tan \frac{1}{2x} \\&= \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{\pi}{180} \times \frac{\tan \frac{t}{2}}{t} \right) \\&= \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{\pi}{360} \times \frac{\tan \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \right) \\&= \frac{\pi}{360} \times 1 = \frac{\pi}{360} \quad \text{답 ④}\end{aligned}$$

0427 $\frac{4}{x-2} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{2t+4}{t}$ 이고, $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{4} \tan \frac{4}{x-2} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{5t+8}{4t} \tan t \\&= \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{5t+8}{4} \times \frac{\tan t}{t} \right) \\&= 2 \times 1 = 2 \quad \text{답 ④}\end{aligned}$$

0428 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(a+3x) = 0$ 이므로

$$\ln a = 0 \quad \therefore a = 1$$

$a=1$ 을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}b &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\tan x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+3x)}{3x} \times \frac{x}{\tan x} \times 3 \right\} \\&= 1 \times 1 \times 3 = 3 \\&\therefore a+b=4 \quad \text{답 ④}\end{aligned}$$

0429 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{ax+b}-1) = 0$ 이므로

$$\sqrt{b}-1=0 \quad \therefore b=1 \quad \dots \text{1단계}$$

$b=1$ 을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{ax+1}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x(\sqrt{ax+1}+1)}{(\sqrt{ax+1}-1)(\sqrt{ax+1}+1)} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x(\sqrt{ax+1}+1)}{ax} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2(\sqrt{ax+1}+1)}{a} \right\} \\&= 1 \times \frac{4}{a} = \frac{4}{a}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{4}{a} = 3$ 이므로 $a = \frac{4}{3}$

$$\therefore ab = \frac{4}{3}$$

... 2단계

... 3단계

$$\text{답 } \frac{4}{3}$$

채점 요소	비율
1단계 b의 값 구하기	30 %
2단계 a의 값 구하기	60 %
3단계 ab의 값 구하기	10 %

0430 $x \rightarrow a$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow a} (3^x - 1) = 0$ 이므로

$$3^a - 1 = 0 \quad \therefore a = 0$$

$a = 0$ 을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{2 \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3^x - 1}{x} \times \frac{x}{\sin x} \times \frac{1}{2} \right) \\ &= \ln 3 \times 1 \times \frac{1}{2} = \ln \sqrt{3} \end{aligned}$$

따라서 $\ln b = \ln \sqrt{3}$ 이므로 $b = \sqrt{3}$

$$\therefore a - b = -\sqrt{3} \quad \text{답 } -\sqrt{3}$$

0431 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} (a - 3 \cos x) = 0$ 이므로

$$a - 3 = 0 \quad \therefore a = 3$$

$a = 3$ 을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3 \cos x}{x \tan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x \tan x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(1 - \cos^2 x)}{x \tan x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin^2 x}{x \tan x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{x}{\tan x} \times \frac{3}{1 + \cos x} \right\} \\ &= 1^2 \times 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \\ \therefore ab &= \frac{9}{2} \quad \text{답 } \frac{9}{2} \end{aligned}$$

0432 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이라면 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \{3(x-1)\}}{x-1} = a$$

이때 $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} a &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t}{3t} \times 3 \\ &= 1 \times 3 = 3 \quad \text{답 } 3 \end{aligned}$$

0433 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 1}{\sin 3x} = 2$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 1}{\sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{kx} - 1}{kx} \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{k}{3} \right) \\ &= 1 \times 1 \times \frac{k}{3} = \frac{k}{3} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \frac{k}{3} = 2$$

$$\therefore k = 6 \quad \text{답 } 6$$

0434 $x \neq 1$ 일 때, $f(x) = \frac{\tan \{\pi(x-1)\}}{x-1}$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \{\pi(x-1)\}}{x-1} = f(1)$$

$x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(1) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan \pi t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan \pi t}{\pi t} \times \pi \\ &= 1 \times \pi = \pi \quad \text{답 } \pi \end{aligned}$$

0435 함수 $f(x)$ 가 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 연속이라면

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - a}{x - \frac{\pi}{2}} = b$$

$x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x - a) = 0$ 이므로

$$1 - a = 0 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore b = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$$

이때 $x - \frac{\pi}{2} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} b &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\cos t - 1)(\cos t + 1)}{t(\cos t + 1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos^2 t - 1}{t(\cos t + 1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 t}{t(\cos t + 1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \times \frac{-\sin t}{\cos t + 1} \right) \\ &= 1 \times 0 = 0 \\ \therefore a + b &= 1 \quad \text{답 } 1 \end{aligned}$$

RPM비법 노트

$\frac{\pi}{2} \pm x$ 의 삼각함수 (복호동순)

$$\textcircled{1} \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x$$

$$\textcircled{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x$$

$$\textcircled{3} \tan\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \frac{1}{\tan x}$$

$$\begin{aligned} 0436 \quad f'(x) &= e^x(3\cos x - 2) + e^x \times (-3\sin x) \\ &= e^x(3\cos x - 3\sin x - 2) \end{aligned}$$

$$\therefore f'(0) = 1 \quad \text{답 ①}$$

$$0437 \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \text{이므로} \quad \frac{\sqrt{3}}{4}a + b = 1$$

$$\therefore b = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4}a \quad \dots\dots ⑦$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= a \cos x \cos x + a \sin x (-\sin x) \\ &= a(\cos^2 x - \sin^2 x) \end{aligned}$$

$$\text{이고 } f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{이므로}$$

$$-\frac{1}{2}a = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore a = \sqrt{3}$$

$$a = \sqrt{3} \text{을 } ⑦ \text{에 대입하면} \quad b = \frac{1}{4}$$

$$\therefore ab = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$0438 \quad f'(x) = \cos x + 3\sin x$$

$$f'(\alpha) = 0 \text{이므로} \quad \cos \alpha + 3\sin \alpha = 0$$

$$\cos \alpha = -3\sin \alpha, \quad \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -3 \quad (\because \sin \alpha \neq 0)$$

$$\therefore \cot \alpha = -3$$

$$\text{이때 } 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha \text{이므로}$$

$$\csc^2 \alpha = 1 + (-3)^2 = 10 \quad \text{답 ⑤}$$

$$0439 \quad f(x) = \sin^2 x = \sin x \sin x \text{이므로}$$

$$f'(x) = \cos x \sin x + \sin x \cos x = 2\sin x \cos x$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f'(x)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2\sin x \cos x}{x - \pi}$$

$$\text{이때 } x - \pi = t \text{로 놓으면 } x \rightarrow \pi \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f'(x)}{x - \pi} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2\sin(\pi + t) \cos(\pi + t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(-\sin t)(-\cos t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2\sin t \cos t}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \times 2\cos t \right) \\ &= 1 \times 2 = 2 \end{aligned} \quad \text{답 ④}$$

$$\begin{aligned} 0440 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi + 2h) - f(\pi)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi + 2h) - f(\pi)}{2h} \times 2 \\ &= 2f'(\pi) \end{aligned}$$

이때

$$f'(x) = \cos x + x(-\sin x) = \cos x - x \sin x$$

이므로 구하는 극한값은

$$2f'(\pi) = 2 \times (-1) = -2 \quad \text{답 ①}$$

$$0441 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi + 3h) - f(\pi - 3h)}{h}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi + 3h) - f(\pi) + f(\pi) - f(\pi - 3h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi + 3h) - f(\pi)}{3h} \times 3 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi) - f(\pi - 3h)}{-3h} \times 3 \\ &= 3f'(\pi) + 3f'(\pi) = 6f'(\pi) \end{aligned}$$

이때

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$$

이므로 구하는 극한값은

$$6f'(\pi) = 6 \times (-e^\pi) = -6e^\pi \quad \text{답 } -6e^\pi$$

$$0442 \quad f(0) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$$

이때

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x(\sin x - \cos x + 1) + e^x(\cos x + \sin x) \\ &= e^x(2\sin x + 1) \end{aligned}$$

이므로 구하는 극한값은

$$f'(0) = 1 \quad \text{답 1}$$

0443 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \sin x &= \lim_{x \rightarrow 0+} (ax + b) = f(0) \\ \therefore b &= 0 \end{aligned}$$

한편 $f(0) = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{ax}{x} = a \end{aligned}$$

이때 $f'(0)$ 이 존재하므로 $a = 1$

$$\therefore a + b = 1 \quad \text{답 1}$$

다른 풀이 $g(x) = ax + b$, $h(x) = \sin x$ 라 하면

$$g'(x) = a, \quad h'(x) = \cos x$$

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$g(0) = h(0) \quad \therefore b = 0$$

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$g'(0) = h'(0) \quad \therefore a = 1$$

0444 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하려면 $x=0$ 에서 연속이어야 하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} (b \sin x + 2x - 1) &= \lim_{x \rightarrow 0+} a e^x = f(0) \\ \therefore a &= -1 \end{aligned}$$

한편 $f(0) = -1$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{b \sin x + 2x - 1 - (-1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin x}{x} \times b + 2 \right) \\ &= b + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-e^x - (-1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} \times (-1) = -1\end{aligned}$$

이때 $f'(0)$ 이 존재해야 하므로

$$b+2=-1 \quad \therefore b=-3$$

$$\therefore ab=3$$

답 ⑤

0445 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (5x^2 + ax + b) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = f(0)$$

$$\therefore b=1$$

... 1단계

한편 $f(0)=1$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5x^2 + ax + 1 - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (5x + a) = a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left\{ \frac{\sin x}{x} \times \left(-\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) \right\} = 1 \times 0 = 0\end{aligned}$$

이때 $f'(0)$ 이 존재하므로 $a=0$

... 2단계

따라서 $f(x) = \begin{cases} \cos x & (x \leq 0) \\ 5x^2 + 1 & (x > 0) \end{cases}$ 이므로

$$f(2)=21$$

... 3단계

답 21

채점 요소	비율
1단계 $x=0$ 에서 연속임을 이용하여 b 의 값 구하기	30 %
2단계 $f'(0)$ 이 존재함을 이용하여 a 의 값 구하기	50 %
3단계 $f(2)$ 의 값 구하기	20 %

0446 원 O 의 반지름의 길이를 r 라 하면 $\triangle ABP$ 는 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{AP} = \overline{AB} \cos \theta = 2r \cos \theta$$

$$\overline{BP} = \overline{AB} \sin \theta = 2r \sin \theta$$

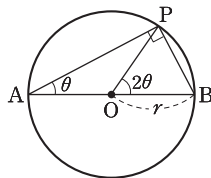
$$\therefore S_1 = \frac{1}{2} \times 2r \cos \theta \times 2r \sin \theta = 2r^2 \sin \theta \cos \theta$$

또 $\angle POB = 2\theta$ 이므로

$$S_2 = \frac{1}{2} r^2 \times 2\theta = r^2 \theta$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S_1}{S_2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{2r^2 \sin \theta \cos \theta}{r^2 \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \times 2 \cos \theta \right) \\ &= 1 \times 2 = 2\end{aligned}$$

답 ③



0447 $\triangle ABC$ 에서

$$\overline{CA} = \overline{AB} \tan 2\theta = \tan 2\theta$$

이때 $\angle CAH = \frac{\pi}{2} - \angle BAH = \angle B = 2\theta$ 이므로 $\triangle CAH$ 에서

$$\overline{CH} = \overline{CA} \sin 2\theta = \tan 2\theta \sin 2\theta$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\overline{CH}}{\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\tan 2\theta \sin 2\theta}{\theta^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\tan 2\theta}{2\theta} \times \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \times 4 \right) \\ &= 1 \times 1 \times 4 = 4\end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이 $\triangle ABC$ 에서

$$\overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{\cos 2\theta} = \frac{1}{\cos 2\theta}$$

$\triangle ABH$ 에서

$$\overline{BH} = \overline{AB} \cos 2\theta = \cos 2\theta$$

따라서 $\overline{CH} = \overline{BC} - \overline{BH} = \frac{1}{\cos 2\theta} - \cos 2\theta$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\overline{CH}}{\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\cos 2\theta} - \cos 2\theta}{\theta^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2 2\theta}{\theta^2 \cos 2\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 2\theta}{\theta^2 \cos 2\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \right)^2 \times \frac{4}{\cos 2\theta} \right\} \\ &= 1^2 \times 4 = 4\end{aligned}$$

0448 $\overline{OH} = \overline{OA} \cos \theta = 6 \cos \theta$ 이므로

$$\overline{BH} = 6 - 6 \cos \theta$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\overline{BH}}{\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{6 - 6 \cos \theta}{\theta^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{6(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{\theta^2(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{6 \sin^2 \theta}{\theta^2(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \times \frac{6}{1 + \cos \theta} \right\} \\ &= 1^2 \times 3 = 3\end{aligned}$$

답 3

0449 $\angle AOB = \frac{2\pi}{n}$ 이므로

$$f(n) = \frac{1}{2} \times r \times r \times \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{r^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n r^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$$

$\frac{1}{n} = t$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0^+$ 이므로

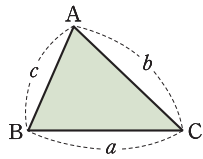
$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n f(n) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{r^2}{2t} \sin 2\pi t \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2\pi t}{2\pi t} \times \pi r^2 \\ &= 1 \times \pi r^2 = \pi r^2\end{aligned}$$

답 πr^2

RPM 비법 노트

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bc \sin A \\ &= \frac{1}{2}ca \sin B \\ &= \frac{1}{2}ab \sin C \end{aligned}$$



0450 $\angle A = \pi - 2\theta$ 이므로

□ADOE에서

$$\angle DOE = \pi - (\pi - 2\theta) = 2\theta$$

한편 점 O에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하고, 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면 $\triangle OHC$ 에서

$$r = \overline{CH} \tan(\angle OCH) = \tan \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore S(\theta) = \frac{1}{2} \times r \times r \times \sin 2\theta = \frac{1}{2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \sin 2\theta$$

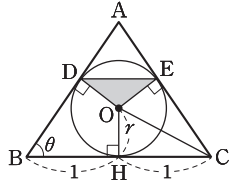
$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\tan^2 \frac{\theta}{2} \sin 2\theta}{2\theta^3}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \left(\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \right)^2 \times \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \times \frac{1}{4} \right\}$$

$$= 1^2 \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

답 ②



시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 068~071쪽

0451 $\csc \theta \sec \theta < 0$ 에서

$\csc \theta > 0$, $\sec \theta < 0$ 일 때, θ 는 제2사분면의 각이다.

$\csc \theta < 0$, $\sec \theta > 0$ 일 때, θ 는 제4사분면의 각이다.

따라서 항상 옳은 것은 ③ $\tan \theta < 0$ 이다.

답 ③

0452 $\tan(\alpha + \beta) = \tan \frac{5}{4}\pi = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

이므로

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1$$

$$\therefore \tan \alpha + \tan \beta = 1 - \tan \alpha \tan \beta$$

$$\therefore (1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta)$$

$$= 1 + \tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \tan \beta$$

$$= 1 + (1 - \tan \alpha \tan \beta) + \tan \alpha \tan \beta$$

$$= 2$$

답 ④

0453 $\overline{PQ} = \sqrt{2}$ 에서 $\overline{PQ}^2 = 2$ 이므로

$$(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = 2$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$+ \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$= 2$$

$$2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = 2$$

$$-2 \cos(\alpha - \beta) = 0 \quad \therefore \cos(\alpha - \beta) = 0$$

이때 $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$ 에서 $-\pi < \alpha - \beta < \pi$ 이므로

$$\alpha - \beta = -\frac{\pi}{2} \quad \text{또는} \quad \alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore |\alpha - \beta| = \frac{\pi}{2}$$

답 $\frac{\pi}{2}$

0454 삼각형 ABC의 세 내각의 크기가 α , β , γ 이므로

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

..... ㉠

이때 α , β , γ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$\alpha + \gamma = 2\beta$$

이 식을 ㉠에 대입하면

$$3\beta = \pi \quad \therefore \beta = \frac{\pi}{3}$$

또 $\cos \alpha$, $2 \cos \beta$, $8 \cos \gamma$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(2 \cos \beta)^2 = \cos \alpha \times 8 \cos \gamma$$

$$4 \cos^2 \frac{\pi}{3} = 8 \cos \alpha \cos \gamma, \quad 1 = 8 \cos \alpha \cos \gamma$$

$$\therefore \cos \alpha \cos \gamma = \frac{1}{8}$$

한편 $\alpha + \gamma = \frac{2}{3}\pi$ 에서 $\cos(\alpha + \gamma) = \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{8} - \sin \alpha \sin \gamma = -\frac{1}{2} \quad \therefore \sin \alpha \sin \gamma = \frac{5}{8}$$

$$\therefore \tan \alpha \tan \gamma = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\cos \alpha \cos \gamma} = 5$$

답 5

0455 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan \alpha + \tan \beta = 4, \quad \tan \alpha \tan \beta = -1$$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{4}{1 - (-1)} = 2$$

$1 + \tan^2(\alpha + \beta) = \sec^2(\alpha + \beta)$ 이므로

$$\sec^2(\alpha + \beta) = 1 + 2^2 = 5$$

이때 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ 에서

$$\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore \sec(\alpha + \beta) = -\sqrt{5} \quad (\because \sec(\alpha + \beta) < 0)$$

$$\therefore \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$$

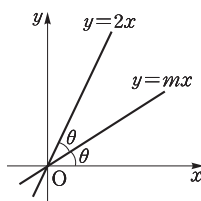
$$= \frac{1}{\sec(\alpha + \beta)} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

답 $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

0456 $\overline{AC} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $\overline{BC} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ 이므로
 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$
 $\therefore \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
 $= \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{10}}$
 $= \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0457 $\angle EAB = \alpha$, $\angle CDB = \beta$, $\overline{BE} = x$ ($0 < x < \frac{1}{2}$)라 하면
 $\overline{AD} = 2x$, $\overline{DB} = 1 - 2x$
 $\therefore \tan \alpha = x$, $\tan \beta = \frac{1}{1 - 2x}$
 이때 $\angle CFE = \angle AFD = \beta - \alpha$ 이므로
 $\tan(\angle CFE) = \tan(\beta - \alpha)$
 $= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha}$
 $= \frac{\frac{1}{1 - 2x} - x}{1 + \frac{1}{1 - 2x} \times x}$
 $= \frac{2x^2 - x + 1}{1 - x}$
 $\therefore \frac{2x^2 - x + 1}{1 - x} = \frac{16}{15}$ 이므로
 $15(2x^2 - x + 1) = 16(1 - x)$
 $30x^2 + x - 1 = 0$, $(5x + 1)(6x - 1) = 0$
 $\therefore x = \frac{1}{6}$ ($\because 0 < x < \frac{1}{2}$)
 $\therefore \tan(\angle CDB) = \frac{1}{1 - 2x} = \frac{3}{2}$ 답 ④

0458 직선 $y = 2x$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 2θ 라 하면
 $\tan 2\theta = 2$
 이때 직선 $y = mx$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 θ 이므로



$\tan \theta = m$
 $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ 에서
 $2 = \frac{2m}{1 - m^2}$, $m^2 + m - 1 = 0$
 $\therefore m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ($\because m > 0$) 답 $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

0459 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면
 $\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$
 $1 - \sin 2\theta = \frac{1}{4}$ $\therefore \sin 2\theta = \frac{3}{4}$

한편 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin \theta - \cos \theta > 0$ 이려면

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \therefore \frac{\pi}{2} < 2\theta < \pi$$

따라서 $\cos 2\theta < 0$ 이므로

$$\cos 2\theta = -\sqrt{1 - \sin^2 2\theta}$$

$$= -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$
 답 $-\frac{\sqrt{7}}{4}$

0460 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2 + 5x)}{5x^2 + 4x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(3x^2 + 5x)}{3x^2 + 5x} \times \frac{3x^2 + 5x}{5x^2 + 4x} \right\}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(3x^2 + 5x)}{3x^2 + 5x} \times \frac{3x + 5}{5x + 4} \right\}$
 $= 1 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$ 답 ②

0461 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x + \tan 2x + \tan 3x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\tan x}{x} + \frac{\tan 2x}{x} + \frac{\tan 3x}{x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\tan x}{x} + \frac{\tan 2x}{2x} \times 2 + \frac{\tan 3x}{3x} \times 3}$
 $= \frac{1}{1 + 1 \times 2 + 1 \times 3} = \frac{1}{6}$ 답 ①

0462 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x)$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ f(x)(1 - \cos 2x) \times \frac{x^2}{1 - \cos 2x} \right\}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ f(x)(1 - \cos 2x) \times \frac{x^2(1 + \cos 2x)}{1 - \cos^2 2x} \right\}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ f(x)(1 - \cos 2x) \times \frac{x^2(1 + \cos 2x)}{\sin^2 2x} \right\}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ f(x)(1 - \cos 2x) \times \left(\frac{2x}{\sin 2x} \right)^2 \times \frac{1 + \cos 2x}{4} \right\}$
 $= 8 \times 1^2 \times \frac{1}{2} = 4$ 답 ③

0463 $x - 3 = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 3$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin\left(\cos \frac{\pi}{2} x\right)}{x - 3}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left\{\cos \frac{\pi}{2}(t + 3)\right\}}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left\{\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{2}t\right)\right\}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\sin \frac{\pi}{2}t\right)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin\left(\sin \frac{\pi}{2}t\right)}{\sin \frac{\pi}{2}t} \times \frac{\sin \frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t} \times \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$= 1 \times 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$
 답 $\frac{\pi}{2}$

0464 $\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\tan \frac{2}{x}\right) \csc \frac{4}{x} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \sin(\tan 2t) \csc 4t \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin(\tan 2t)}{\sin 4t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \frac{\sin(\tan 2t)}{\tan 2t} \times \frac{\tan 2t}{2t} \times \frac{4t}{\sin 4t} \times \frac{1}{2} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \text{답 2}$$

0465 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{ax+b}-2)=0$ 이므로

$$\sqrt{b}-2=0 \quad \therefore b=4$$

$b=4$ 를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+4}-2}{\sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{ax+4}-2)(\sqrt{ax+4}+2)}{\sin 3x(\sqrt{ax+4}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin 3x(\sqrt{ax+4}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{a}{3(\sqrt{ax+4}+2)} \right\} \\ &= 1 \times \frac{a}{12} = \frac{a}{12} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{12}=2$ 이므로 $a=24$

$$\therefore a+b=28 \quad \text{답 4}$$

0466 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이라면 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=f(1)$ 이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1-x} = a$$

이때 $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} a &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \pi(t+1)}{-t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + \pi t)}{-t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin \pi t}{-t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \pi t}{\pi t} \times \pi \\ &= 1 \times \pi = \pi \end{aligned} \quad \text{답 4}$$

0467 $(e^{2x}-1)^2 f(x)=a-4 \cos \frac{\pi}{2} x$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$$0=a-4 \quad \therefore a=4$$

따라서 $x \neq 0$ 일 때

$$f(x) = \frac{4-4 \cos \frac{\pi}{2} x}{(e^{2x}-1)^2}$$

이때 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4-4 \cos \frac{\pi}{2} x}{(e^{2x}-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\left(1-\cos \frac{\pi}{2} x\right)\left(1+\cos \frac{\pi}{2} x\right)}{(e^{2x}-1)^2\left(1+\cos \frac{\pi}{2} x\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2 \frac{\pi}{2} x}{(e^{2x}-1)^2\left(1+\cos \frac{\pi}{2} x\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{\frac{\pi}{2} x} \right)^2 \times \left(\frac{2x}{e^{2x}-1} \right)^2 \times \frac{\frac{\pi^2}{4}}{1+\cos \frac{\pi}{2} x} \right\} \\ &= 1^2 \times 1^2 \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{8} \\ \therefore a \times f(0) &= \frac{\pi^2}{2} \end{aligned} \quad \text{답 5}$$

0468 $f(x)=\sin^2 x-\cos^2 x=\sin x \sin x-\cos x \cos x$

이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \sin x + \sin x \cos x \\ &\quad - \{(-\sin x) \cos x + \cos x(-\sin x)\} \\ &= 4 \sin x \cos x \\ \therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \sqrt{3} \end{aligned} \quad \text{답 4}$$

0469 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 이므로

$$h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$$

이때 $f(x)=\sin x-2 \cos x-x$ 에서

$$f'(x)=\cos x+2 \sin x-1$$

이므로 $f(0)=-2, f'(0)=0$

$$\therefore h'(0)=0 \times g(0)+(-2) \times g'(0)=-2 g'(0)$$

따라서 $-2 g'(0)=10$ 이므로

$$g'(0)=-5 \quad \text{답 3}$$

$$\begin{aligned} 0470 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}-3h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}-3h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-3h} \times (-3) \\ &= -3 f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \times \cos x + \ln x \times (-\sin x) \\ &= \frac{\cos x}{x} - \ln x \sin x \end{aligned}$$

이므로 구하는 극한값은

$$-3 f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3 \times \left(-\ln \frac{\pi}{2}\right) = 3 \ln \frac{\pi}{2} \quad \text{답 } 3 \ln \frac{\pi}{2}$$

0471 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 4인 원의 중심을 O, 반지름의 길이가 r이고 서로 외접하는 두 원의 중심을 각각 O₁, O₂라 하면

$$\overline{OO_1}=4, \overline{O_1O_2}=2r,$$

$$\angle O_1OO_2 = \frac{2\pi}{n}$$

이때 점 O에서 $\overline{O_1O_2}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\angle O_1OH = \frac{\pi}{n}, \overline{O_1H}=r \text{이므로 } \triangle O_1OH \text{에서}$$

$$r = \overline{OO_1} \sin \frac{\pi}{n} = 4 \sin \frac{\pi}{n}$$

$$\therefore f(n) = 2\pi r \times n = 8\pi n \sin \frac{\pi}{n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 8\pi n \sin \frac{\pi}{n}$$

$\frac{1}{n} = t$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{8\pi \sin \pi t}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin \pi t}{\pi t} \times 8\pi^2 \\ &= 1 \times 8\pi^2 = 8\pi^2 \end{aligned}$$

답 ⑤

0472 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ 에서 $\cos \alpha > 0, \sin \beta > 0$ 이므로

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

... 1단계

$$\begin{aligned} \therefore \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{1}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{3} \\ &= \frac{-2 + 2\sqrt{10}}{9} \end{aligned}$$

... 2단계

따라서 $a = -2, b = 10$ 이므로

$$a + b = 8$$

... 3단계

답 8

채점 요소	비율
1단계 $\cos \alpha, \sin \beta$ 의 값 구하기	40 %
2단계 $\sin(\alpha + \beta)$ 의 값 구하기	50 %
3단계 $a + b$ 의 값 구하기	10 %

0473 두 직선 $y = -2x + 1, y = x + 1$ 이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β 라 하면

$$\tan \alpha = -2, \tan \beta = 1$$

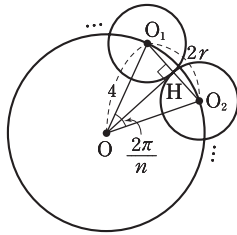
... 1단계

$$\therefore \tan \theta = |\tan(\alpha - \beta)|$$

$$= \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right|$$

$$= \left| \frac{-2 - 1}{1 + (-2) \times 1} \right| = 3$$

... 2단계



이때 $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ 이므로

$$\sec^2 \theta = 1 + 3^2 = 10$$

... 3단계

답 10

채점 요소	비율
1단계 두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β 라 하고 $\tan \alpha, \tan \beta$ 의 값 구하기	20 %
2단계 $\tan \theta$ 의 값 구하기	50 %
3단계 $\sec^2 \theta$ 의 값 구하기	30 %

0474 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재

하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (ax + b) = 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{2}a + b = 0 \quad \therefore b = -\frac{\pi}{2}a \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots \text{1단계}$$

$b = -\frac{\pi}{2}a$ 를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{ax - \frac{\pi}{2}a} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{a\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$$

이때 $x - \frac{\pi}{2} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{a\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)}{at} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{at} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \times \left(-\frac{1}{a}\right) \\ &= 1 \times \left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a} \end{aligned}$$

따라서 $-\frac{1}{a} = \frac{1}{2}$ 이므로 $a = -2$

이것을 ①에 대입하면 $b = \pi$

... 2단계

$$\therefore ab = -2\pi$$

... 3단계

답 -2π

채점 요소	비율
1단계 a, b 사이의 관계식 구하기	30 %
2단계 a, b의 값 구하기	60 %
3단계 ab의 값 구하기	10 %

0475 $S_1 = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \theta = \frac{1}{2}\theta$

... 1단계

또 $\triangle BOC$ 에서 $\overline{BC} = \sin \theta, \overline{OC} = \cos \theta$ 이므로

$$S_2 = \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta$$

... 2단계

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S_1}{S_2} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{2}\theta}{\frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left(\frac{\theta}{\sin \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} \right)$$

$$= 1 \times 1 = 1$$

... 3단계

답 1

채점 요소		비율
1단계	S_1 구하기	20%
2단계	S_2 구하기	30%
3단계	$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S_1}{S_2}$ 의 값 구하기	50%

0476 전략 주어진 식의 일부를 치환하여 $f'(1)$ 을 포함한 식으로 변형한다.

$2 - \cos x = g(x)$ 로 놓으면 $g(0) = 1$ 이므로

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2 - \cos x) - f(1)}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(g(x)) - f(g(0))}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(g(x)) - f(g(0))}{g(x) - g(0)} \times \frac{g(x) - g(0)}{x^2} \right\} \\
 &= f'(g(0)) \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \\
 &= f'(1) \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} \\
 &= 10 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \\
 &= 10 \times \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{1}{1 + \cos x} \right\} \\
 &= 10 \times \left(1^2 \times \frac{1}{2} \right) = 5
 \end{aligned}$$

답 5

0477 전략 $x \neq 0$ 일 때, $f(x)$ 는 첫째항이 x^2 , 공비가 $\frac{1}{1 + \tan^2 x}$ 인 등비급수의 합임을 이용한다.

구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 $x \neq 0$ 일 때 $\tan^2 x > 0$ 이므로

$$0 < \frac{1}{1 + \tan^2 x} < 1$$

따라서 $x \neq 0$ 일 때

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 + \frac{x^2}{1 + \tan^2 x} + \frac{x^2}{(1 + \tan^2 x)^2} + \cdots \\
 &= \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1 + \tan^2 x}} = \frac{x^2(1 + \tan^2 x)}{\tan^2 x}
 \end{aligned}$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이라면 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이어야 하므로

$$\begin{aligned}
 a &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + \tan^2 x)}{\tan^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{x}{\tan x} \right)^2 \times (1 + \tan^2 x) \right\} \\
 &= 1^2 \times 1 = 1
 \end{aligned}$$

답 1

RPM 비법 노트

등비급수의 합

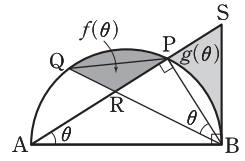
첫째항이 a , 공비가 r ($-1 < r < 1$)인 등비급수의 합은

$$\frac{a}{1-r}$$

0478 전략 넓이가 $f(\theta) + g(\theta)$ 인 도형을 찾는다.

두 호 PQ, PB의 길이가 서로 같으므로

로 $\overline{PQ}$ 와 $\widehat{PQ}$ 로 둘러싸인 도형의 넓이와 $\overline{PB}$ 와 $\widehat{PB}$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 같다.



$$\begin{aligned}
 \therefore f(\theta) + g(\theta) &= \triangle PQR + \triangle SPB \quad \dots\dots ㉠
 \end{aligned}$$

또 $\angle QBP = \angle PAB = \theta$ 이고 $\triangle PAB$ 에서 $\angle PBA = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이므로

따라서

$$\angle SBP = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \theta$$

$\therefore \triangle SPB \cong \triangle RPB$ (ASA 합동)

따라서 $\triangle SPB = \triangle RPB$ 이므로 ㉠에서

$$f(\theta) + g(\theta) = \triangle PQR + \triangle RPB = \triangle PQB$$

이때 $\triangle PAB$ 에서 $\overline{PB} = 2 \sin \theta$ 이므로

$$\overline{PQ} = \overline{PB} = 2 \sin \theta$$

또 $\angle BPQ = \pi - 2\theta$ 이므로

$$\begin{aligned}
 f(\theta) + g(\theta) &= \triangle PQB \\
 &= \frac{1}{2} \times 2 \sin \theta \times 2 \sin \theta \times \sin(\pi - 2\theta) \\
 &= 2 \sin^2 \theta \sin 2\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta) + g(\theta)}{\theta^3} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin^2 \theta \sin 2\theta}{\theta^3} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \times \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \times 4 \right\} \\
 &= 1^2 \times 1 \times 4 = 4
 \end{aligned}$$

답 4

05 여러 가지 미분법

교과서 문제 정복하기

본책 073쪽, 075쪽

0479 $y' = -\frac{(x-3)'}{(x-3)^2} = -\frac{1}{(x-3)^2}$

답 $y' = -\frac{1}{(x-3)^2}$

0480 $y' = -\frac{(e^x+4)'}{(e^x+4)^2} = -\frac{e^x}{(e^x+4)^2}$

답 $y' = -\frac{e^x}{(e^x+4)^2}$

0481 $y' = \frac{(x+1)'(3x-2) - (x+1)(3x-2)'}{(3x-2)^2}$

$= \frac{1 \times (3x-2) - (x+1) \times 3}{(3x-2)^2}$

$= -\frac{5}{(3x-2)^2}$

답 $y' = -\frac{5}{(3x-2)^2}$

0482 $y' = \frac{(\ln x)'x - \ln x \times (x)'}{x^2}$

$= \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2}$

$= \frac{1 - \ln x}{x^2}$

답 $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

0483 $y' = \frac{(1-\cos x)'(1+\cos x) - (1-\cos x)(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$

$= \frac{\sin x(1+\cos x) - (1-\cos x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$

$= \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$

답 $y' = \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$

0484 $y' = 2 \times (-5)x^{-5-1} = -10x^{-6}$

답 $y' = -10x^{-6}$

0485 $y' = 2 \times 2x^{2-1} + (-7)x^{-7-1}$

$= 4x - 7x^{-8}$

답 $y' = 4x - 7x^{-8}$

0486 $y = -\frac{4}{x^3} = -4x^{-3}$ 이므로

$y' = -4 \times (-3)x^{-3-1} = 12x^{-4} = \frac{12}{x^4}$

답 $y' = \frac{12}{x^4}$

0487 $y = \frac{x^6-2}{x^4} = x^2 - 2x^{-4}$ 이므로

$y' = 2x^{2-1} - 2 \times (-4)x^{-4-1}$

$= 2x + 8x^{-5} = 2x + \frac{8}{x^5}$

답 $y' = 2x + \frac{8}{x^5}$

0488 **답** $y' = \sec^2 x - 2 \csc^2 x$

0489 $y' = (\sec x)' \csc x + \sec x (\csc x)'$

$= \sec x \tan x \times \csc x + \sec x \times (-\csc x \cot x)$

$= \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\sin x}$

$- \frac{1}{\cos x} \times \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x}$

$= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = \sec^2 x - \csc^2 x$

답 $y' = \sec^2 x - \csc^2 x$

0490 $y' = \frac{(x)' \tan x - x(\tan x)'}{\tan^2 x}$

$= \frac{\tan x - x \sec^2 x}{\tan^2 x} = \frac{1}{\tan x} - \frac{x \sec^2 x}{\tan^2 x}$

$= \cot x - x \times \frac{1}{\cos^2 x} \times \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$

$= \cot x - \frac{x}{\sin^2 x} = \cot x - x \csc^2 x$

답 $y' = \cot x - x \csc^2 x$

0491 $y' = 6(x+3)^5(x+3)' = 6(x+3)^5 \times 1$

$= 6(x+3)^5$

답 $y' = 6(x+3)^5$

0492 $y' = e^{3x+1}(3x+1)' = 3e^{3x+1}$

답 $y' = 3e^{3x+1}$

0493 $y' = 2^{x^2-x} \ln 2 \times (x^2-x)'$

$= (2x-1)2^{x^2-x} \ln 2$

답 $y' = (2x-1)2^{x^2-x} \ln 2$

0494 $y' = \frac{(3-2x)'}{3-2x} = \frac{2}{2x-3}$

답 $y' = \frac{2}{2x-3}$

0495 $y' = -\sin(3x^2+x) \times (3x^2+x)'$

$= -(6x+1) \sin(3x^2+x)$

답 $y' = -(6x+1) \sin(3x^2+x)$

0496 $y' = 3 \sin^2 x \times (\sin x)' = 3 \sin^2 x \cos x$

답 $y' = 3 \sin^2 x \cos x$

0497 $y' = \frac{(x^2-3)'}{x^2-3} = \frac{2x}{x^2-3}$

답 $y' = \frac{2x}{x^2-3}$

0498 $y' = \frac{(\cos x)'}{\cos x} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

답 $y' = -\tan x$

0499 $y' = \frac{(e^x-1)'}{(e^x-1)\ln 2} = \frac{e^x}{(e^x-1)\ln 2}$

답 $y' = \frac{e^x}{(e^x-1)\ln 2}$

0500 $y = \frac{1}{x\sqrt{x}} = x^{-\frac{3}{2}}$ 이므로

$$y' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$$

답 $y' = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

0501 답 $y' = 3\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$

0502 답 $y' = ex^{e-1}$

0503 $y = \sqrt{2x^2+1}$ 에서 $u = 2x^2+1$ 로 놓으면

$y = \sqrt{u}$ 이므로

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad \frac{du}{dx} = 4x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$$

답 풀이 참조

0504 $x = 3t - 4$ 에서 $t = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

$y = 6t + 7$ 에서 $t = \frac{1}{6}y - \frac{7}{6}$

따라서 $\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} = \frac{1}{6}y - \frac{7}{6}$ 이므로

$$y = 2x + 15$$

답 $y = 2x + 15$

0505 $x = 2\cos t$ 에서 $\cos t = \frac{x}{2}$

$y = 3\sin t$ 에서 $\sin t = \frac{y}{3}$

이때 $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ 이므로

$$\left(\frac{y}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 \quad \therefore \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

답 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

0506 $\frac{dx}{dt} = 2t, \frac{dy}{dt} = 4t^3 - 3t^2$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4t^3 - 3t^2}{2t} = 2t^2 - \frac{3}{2}t \quad (\text{단, } t \neq 0)$$

답 $\frac{dy}{dx} = 2t^2 - \frac{3}{2}t \quad (\text{단, } t \neq 0)$

0507 $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{(t+2)^2}, \frac{dy}{dt} = -9(t+2)^2$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-9(t+2)^2}{-\frac{1}{(t+2)^2}} = 9(t+2)^4$$

답 $\frac{dy}{dx} = 9(t+2)^4$

0508 $\frac{dx}{dt} = 2e^{t+1}, \frac{dy}{dt} = 4e^{4t-3}$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4e^{4t-3}}{2e^{t+1}} = 2e^{3t-4}$$

답 $\frac{dy}{dx} = 2e^{3t-4}$

0509 $\frac{dx}{dt} = 4 - 3\sin t, \frac{dy}{dt} = 5 - 2\cos t$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{5 - 2\cos t}{4 - 3\sin t}$$

답 $\frac{dy}{dx} = \frac{5 - 2\cos t}{4 - 3\sin t}$

0510 $2x^2 + 3y^2 = 5$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$4x + 6y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{3y} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

답 $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{3y} \quad (\text{단, } y \neq 0)$

0511 $xy = x^3 + 2y^2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$y + x \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4y \frac{dy}{dx}$$

$$(x - 4y) \frac{dy}{dx} = 3x^2 - y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y}{x - 4y} \quad (\text{단, } x - 4y \neq 0)$$

답 $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y}{x - 4y} \quad (\text{단, } x - 4y \neq 0)$

0512 $x^2 - \frac{x}{y} + 2 = 0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x - \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2} \times \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{x}{y^2} \times \frac{dy}{dx} = -2x + \frac{1}{y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -2y^2 + \frac{y}{x}$$

답 $\frac{dy}{dx} = -2y^2 + \frac{y}{x}$

0513 $\sin x + \cos y = 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\cos x - \sin y \times \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin y} \quad (\text{단, } \sin y \neq 0)$$

$$\text{답} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin y} \quad (\text{단, } \sin y \neq 0)$$

0514 $\text{답} \quad (가) y^2 + 9 \quad (나) \frac{\sqrt{y^2 + 9}}{y}$

0515 $x = y^3$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = 3y^2 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{3y^2} \quad \text{답} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y^2}$$

참고 $x = y^3$ 에서 $y = \sqrt[3]{x}$ 이므로 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ 로 나타낼 수도 있다.

0516 $x = \cos y$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\sin y} = -\csc y \quad \text{답} \quad \frac{dy}{dx} = -\csc y$$

0517 $y = \sqrt[4]{x-2}$ 에서 $x = y^4 + 2$

양변을 y 에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy} = 4y^3$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{4y^3} = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}}$$

$$\text{답} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}}$$

0518 $y = \sqrt[3]{2x+6}$ 에서 $x = \frac{1}{2}y^3 - 3$

양변을 y 에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{dy} = \frac{3}{2}y^2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{3}{2}y^2} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+6)^2}}$$

$$\text{답} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+6)^2}}$$

0519 (1) $f^{-1}(2) = a$ 라 하면 $f(a) = 2$ 이므로

$$a^3 + a = 2, \quad a^3 + a - 2 = 0$$

$$(a-1)(a^2+a+2) = 0$$

그런데 $a^2 + a + 2 > 0$ 이므로 $a = 1$

$$\therefore f^{-1}(2) = 1$$

(2) $f'(x) = 3x^2 + 1$ 이므로 $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$

$$\text{답} \quad (1) 1 \quad (2) \frac{1}{4}$$

유형 익히기

● 본책 076~082쪽

$$\text{0520} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1)$$

이때 $f'(x) = -\frac{(x^3+2)'}{(x^3+2)^2} = -\frac{3x^2}{(x^3+2)^2}$ 이므로 구하는 극한

$$\text{값은} \quad f'(1) = -\frac{1}{3}$$

답 ③

$$\text{0521} \quad f'(x) = -\frac{(e^x-2)'}{(e^x-2)^2} = -\frac{e^x}{(e^x-2)^2} \text{이므로}$$

$$f'(\ln 3) = -\frac{3}{(3-2)^2} = -3$$

답 -3

$$\text{0522} \quad f'(x) = -\frac{(x^2+kx)'}{(x^2+kx)^2} = -\frac{2x+k}{(x^2+kx)^2}$$

$$f'(1) = \frac{2}{9} \text{이므로} \quad -\frac{2+k}{(1+k)^2} = \frac{2}{9}$$

$$-9(2+k) = 2(1+k)^2, \quad 2k^2 + 13k + 20 = 0$$

$$(2k+5)(k+4) = 0 \quad \therefore k = -4 \quad (\because k \text{는 정수})$$

답 ①

0523 $f(0) = 1$ 이므로

$$\frac{a}{1+b} = 1 \quad \therefore a = b+1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$f'(x) = \frac{ae^x(e^x+b) - ae^x \times e^x}{(e^x+b)^2} = \frac{abe^x}{(e^x+b)^2} \text{이고}$$

$$f'(0) = \frac{1}{2} \text{이므로} \quad \frac{ab}{(b+1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{㉠을 대입하면} \quad \frac{b(b+1)}{(b+1)^2} = \frac{1}{2}, \quad 2b = b+1$$

$$\therefore b = 1$$

$$b = 1 \text{을 ㉠에 대입하면} \quad a = 2$$

$$\therefore ab = 2$$

답 2

$$\text{0524} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{-h}$$

$$= f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

이때

$$f'(x) = \frac{-\sin x(\sin x + \cos x) - \cos x(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\sin x + \cos x)^2} = -\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$$

이므로 구하는 극한값은

$$2f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times (-1) = -2$$

답 -2

$$\begin{aligned} 0525 \quad f'(x) &= \frac{3(x^2+5) - (3x+2) \times 2x}{(x^2+5)^2} \\ &= \frac{-3x^2-4x+15}{(x^2+5)^2} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } f'(x) > 0 \text{에서 } \frac{-3x^2-4x+15}{(x^2+5)^2} > 0$$

$$\begin{aligned} \text{그런데 } (x^2+5)^2 > 0 \text{이므로 } -3x^2-4x+15 > 0 \\ 3x^2+4x-15 < 0, \quad (x+3)(3x-5) < 0 \\ \therefore -3 < x < \frac{5}{3} \end{aligned}$$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0, 1$ 의 4개이다. 답 ④

$$\begin{aligned} 0526 \quad g'(x) &= \frac{(2x+3)\{f(x)-1\} - (x^2+3x)f'(x)}{\{f(x)-1\}^2} \\ \therefore g'(0) &= \frac{3\{f(0)-1\}}{\{f(0)-1\}^2} = \frac{3 \times (-3)}{(-3)^2} = -1 \end{aligned} \quad \text{답 ②}$$

$$\begin{aligned} 0527 \quad f(x) &= \frac{x^2-3x+5}{x} = x-3+5x^{-1} \text{이므로} \\ f'(x) &= 1-5x^{-2} = 1-\frac{5}{x^2} \\ \therefore f'(5) &= \frac{4}{5} \end{aligned} \quad \text{답 ③}$$

$$\begin{aligned} 0528 \quad f(x) &= \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^3} \\ &= \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^3} \\ &= \frac{x^4-1}{x^3} = x-x^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{이므로 } f'(x) &= 1+3x^{-4} = 1+\frac{3}{x^4} \\ \therefore f'(-1) &= 4 \end{aligned} \quad \text{답 ③}$$

$$\begin{aligned} 0529 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h} \times 2 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1)-f(1-h)}{-h} \\ &= 2f'(1) + f'(1) = 3f'(1) \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots + \frac{1}{x^{10}} \\ &= 1 + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + \dots + x^{-10} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } f'(x) = -x^{-2} - 2x^{-3} - 3x^{-4} - \dots - 10x^{-11}$$

따라서 구하는 극한값은

$$\begin{aligned} 3f'(1) &= 3 \times (-1-2-3-\dots-10) \\ &= 3 \times \left(-\frac{10 \times 11}{2}\right) = -165 \end{aligned} \quad \text{답 -165}$$

$$\begin{aligned} 0530 \quad f'(x) &= \frac{\sec^2 x (1+\sec x) - \tan x \sec x \tan x}{(1+\sec x)^2} \\ &= \frac{\sec x (\sec x + \sec^2 x - \tan^2 x)}{(1+\sec x)^2} \\ &= \frac{\sec x (\sec x + 1)}{(1+\sec x)^2} \\ &= \frac{\sec x}{1+\sec x} \\ \therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} 0531 \quad f'(x) &= -\csc x \cot x \times \cot x + \csc x \times (-\csc^2 x) \\ &= -\csc x \cot^2 x - \csc^3 x \\ &= -\frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin^3 x} \\ &= -\frac{\cos^2 x + 1}{\sin^3 x} \\ \therefore g(x) &= \cos^2 x + 1 \end{aligned} \quad \text{답 } g(x) = \cos^2 x + 1$$

$$\begin{aligned} 0532 \quad f'(x) &= 2\sec^2 x + a \sec x \tan x \\ \text{이때 } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 8 \text{이므로} \\ 2 \times (\sqrt{2})^2 + a \times \sqrt{2} \times 1 &= 8 \\ \sqrt{2}a &= 4 \quad \therefore a = 2\sqrt{2} \end{aligned} \quad \text{답 ③}$$

0533 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} 3 \tan x &= \lim_{x \rightarrow 0-} (ae^x + b) = f(0) \\ a+b &= 0 \quad \therefore b = -a \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1} \quad \dots \text{1단계}$$

한편 $f(0)=0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{3 \tan x}{x} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{ae^x + b}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{ae^x - a}{x} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{a(e^x - 1)}{x} = a \end{aligned}$$

이때 $f'(0)$ 이 존재하므로

$$a=3$$

$$a=3 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b = -3 \quad \dots \text{2단계}$$

$$\therefore ab = -9 \quad \dots \text{3단계}$$

답 -9

	채점 요소	비율
1단계	$x=0$ 에서 연속임을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	30 %
2단계	$f'(0)$ 이 존재함을 이용하여 a, b 의 값 구하기	60 %
3단계	ab 의 값 구하기	10 %

다른 풀이 $g(x)=ae^x+b$, $h(x)=3\tan x$ 라 하면

$$g'(x)=ae^x, h'(x)=3\sec^2 x$$

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$g(0)=h(0) \quad \therefore a+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$g'(0)=h'(0) \quad \therefore a=3$$

$a=3$ 을 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$3+b=0 \quad \therefore b=-3$$

$$\begin{aligned} \textbf{0534} \quad f'(x) &= 3 \left(\frac{3x+a}{x-1} \right)^2 \times \frac{3(x-1)-(3x+a) \times 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3(3x+a)^2(-3-a)}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

이때 $f'(0)=-6$ 이므로 $3a^2(-3-a)=-6$

$$a^3+3a^2-2=0, \quad (a+1)(a^2+2a-2)=0$$

$$\therefore a=-1 \quad (\because a \text{는 정수})$$

답 ②

0535 $f(0)=8$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-8}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0)$$

이때

$$f'(x)=3(x^2+2x+2)^2(2x+2)$$

이므로 구하는 극한값은

$$f'(0)=24$$

답 ①

0536 $h(x)=(f \circ g)(x)=f(g(x))$ 이므로

$$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$$

$$\therefore h'(-2)=f'(g(-2))g'(-2)$$

$$=f'(1)g'(-2) \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

이때

$$f'(x)=\frac{4(3x^2+1)-4x \times 6x}{(3x^2+1)^2}=\frac{-12x^2+4}{(3x^2+1)^2}$$

이므로 $f'(1)=-\frac{1}{2}$

또 $g'(x)=3x^2-4$ 이므로 $g'(-2)=8$

따라서 $\textcircled{A}$ 에서

$$h'(-2)=-\frac{1}{2} \times 8 = -4$$

답 -4

0537 $f(2x-3)=x^3-x^2+x-1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2f'(2x-3)=3x^2-2x+1$$

$$\therefore f'(2x-3)=\frac{1}{2}(3x^2-2x+1) \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

이때 $2x-3=1$ 에서 $x=2$

따라서 $\textcircled{A}$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f'(1)=\frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

0538 $h(x)=(f \circ g)(x)=f(g(x))$ 이므로

$$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$$

$$\therefore h'(\pi)=f'(g(\pi))g'(\pi)$$

$$=f'(0)g'(\pi) \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

이때 $f'(x)=2^{3x} \times 3 \ln 2$ 이므로 $f'(0)=3 \ln 2$

또 $g'(x)=2 \cos 2x$ 이므로 $g'(\pi)=2$

따라서 $\textcircled{A}$ 에서

$$h'(\pi)=3 \ln 2 \times 2 = 6 \ln 2$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} \textbf{0539} \quad f'(x) &= 4 \cos^3 2x \times (-2 \sin 2x) \\ &= -8 \cos^3 2x \sin 2x \end{aligned}$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\textbf{0540} \quad y = \ln \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \frac{1}{2} \{ \ln(1-\cos x) - \ln(1+\cos x) \}$$

이므로

$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{1-\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} \right)$$

$$= \frac{\sin x(1+\cos x) + \sin x(1-\cos x)}{2(1-\cos^2 x)}$$

$$= \frac{2 \sin x}{2 \sin^2 x} = \frac{1}{\sin x}$$

따라서 $x=\frac{\pi}{6}$ 에서의 미분계수는 $\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

답 2

0541 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(2x)-1}{5x}=1$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} \{g(2x)-1\}=0$ 이므로 $g(0)=1$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(2x)-1}{5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(2x)-g(0)}{2x} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{2}{5} g'(0) \end{aligned}$$

따라서 $\frac{2}{5} g'(0)=1$ 이므로 $g'(0)=\frac{5}{2}$

이때 $g(x)=e^{f(x)}$ 에서 $g'(x)=e^{f(x)} f'(x)$ 이므로

$g(0)=1$, $g'(0)=\frac{5}{2}$ 에서

$$e^{f(0)}=1, \quad e^{f(0)} f'(0)=\frac{5}{2}$$

$$\therefore f(0)=0, \quad f'(0)=\frac{5}{2}$$

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b 는 상수)로 놓으면 $f(0)=0$ 에서

$$b=0$$

또 $f'(x)=2x+a$ 이므로 $f'(0)=\frac{5}{2}$ 에서 $a=\frac{5}{2}$

따라서 $f(x)=x^2+\frac{5}{2}x$ 이므로

$$f(-2)=-1$$

답 -1

0542 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)+1}{x-2} = 5$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)+1\} = 0$ 이므로 $f(2) = -1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = 5$$

또 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)-2}{x+1} = 3$ 에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극

한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow -1} \{g(x)-2\} = 0$ 이므로 $g(-1) = 2$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)-2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)} = g'(-1) = 3$$

이때 $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ 에서

$$y' = g'(f(x))f'(x)$$

따라서 $x=2$ 에서의 미분계수는

$$g'(f(2))f'(2) = g'(-1)f'(2) = 3 \times 5 = 15 \quad \text{답 15}$$

0543 $y' = 2x\{f(x)\}^3 + x^2 \times 3\{f(x)\}^2 f'(x)$

이므로 $x=3$ 에서의 미분계수는

$$6\{f(3)\}^3 + 27\{f(3)\}^2 f'(3) = 6 \times 1^3 + 27 \times 1^2 \times 3 = 87 \quad \text{답 ③}$$

0544 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 4)$ 에서의 접선의 방정식

이 $y = -3x + 1$ 이므로

$$f(-1) = 4, f'(-1) = -3$$

또 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(-1, -1)$ 에서의 접선의 방정식이

$y = 3x + 2$ 이므로

$$g(-1) = -1, g'(-1) = 3$$

한편 $h(x) = f(g(x))$ 로 놓으면

$$h(-1) = f(g(-1)) = f(-1) = 4 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(g(x))-4}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{h(x)-h(-1)}{x-(-1)} = h'(-1)$$

이때 $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$ 이므로 구하는 극한값은

$$h'(-1) = f'(g(-1))g'(-1) = f'(-1)g'(-1) = -3 \times 3 = -9 \quad \text{답 ③}$$

0545 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3)+f(3)-f(3-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3)-f(3-h)}{-h}$$

$$= f'(3) + f'(3) = 2f'(3)$$

이때 $f'(x) = \frac{2x}{x^2-7}$ 이므로 구하는 극한값은

$$2f'(3) = 2 \times 3 = 6 \quad \text{답 6}$$

0546 $f'(x) = \frac{3\cos^2 \frac{x}{2} \times \left(-\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}\right)}{\cos^3 \frac{x}{2}}$

$$= \frac{-\frac{3}{2} \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$$

$$= -\frac{3}{2} \tan \frac{x}{2}$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{답 } -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

0547 $f'(x) = \frac{4 \times 3}{(3x-1)\ln 3} = \frac{12}{(3x-1)\ln 3}$

이때 $f'(a) = -\frac{6}{\ln 3}$ 이므로

$$\frac{12}{(3a-1)\ln 3} = -\frac{6}{\ln 3}, \quad 3a-1 = -2$$

$$\therefore a = -\frac{1}{3} \quad \text{답 } -\frac{1}{3}$$

0548 $f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ 이므로

$$f'(n) = \frac{2n}{n^2-1}$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2f'(n)}{n}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n}{n(n^2-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n^2-1}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{(n-1)(n+1)}$$

$$= 2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) \right\}$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 2 \times \frac{3}{2}$$

$$= 3 \quad \text{답 3}$$

0549 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$

이때 $f(x) = \sqrt[3]{(2x-1)^5} = (2x-1)^{\frac{5}{3}}$ 이므로

$$f'(x) = \frac{5}{3} (2x-1)^{\frac{2}{3}} \times 2 = \frac{10}{3} \sqrt[3]{(2x-1)^2}$$

따라서 구하는 극한값은

$$f'(1) = \frac{10}{3} \quad \text{답 ⑤}$$

$$\begin{aligned} 0550 \quad f'(x) &= 10(x + \sqrt{1+x^2})^9 \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= 10(x + \sqrt{1+x^2})^9 \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} ab &= f'(1) \times f'(-1) \\ &= 10(1 + \sqrt{2})^9 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times 10(-1 + \sqrt{2})^9 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 100 \times \{(1 + \sqrt{2})(-1 + \sqrt{2})\}^9 \times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 100 \times 1 \times \frac{1}{2} = 50 \end{aligned}$$

답 50

$$\begin{aligned} 0551 \quad f'(x) &= \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \times x - (1 - \sqrt{x^2+1}) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - 1 + \sqrt{x^2+1}}{x^2} = \frac{1 - \sqrt{x^2+1}}{x^2 \sqrt{x^2+1}} \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x^2+1}}{x^2 \sqrt{x^2+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{x^2+1})(1 + \sqrt{x^2+1})}{x^2 \sqrt{x^2+1} (1 + \sqrt{x^2+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{x^2+1} (1 + \sqrt{x^2+1})} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 -1/2

$$0552 \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\tan x + 3}} = (2\tan x + 3)^{-\frac{1}{2}} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2} (2\tan x + 3)^{-\frac{3}{2}} \times 2 \sec^2 x \\ &= -\frac{\sec^2 x}{(2\tan x + 3)\sqrt{2\tan x + 3}} \\ &= f(x) \times \left(-\frac{\sec^2 x}{2\tan x + 3}\right) \end{aligned}$$

따라서 $g(x) = -\frac{\sec^2 x}{2\tan x + 3}$ 이므로

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{(\sqrt{2})^2}{2 \times 1 + 3} = -\frac{2}{5}$$

답 ②

다른 풀이 $f(x) \neq 0$ 이므로 $f'(x) = f(x)g(x)$ 에서

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

이때 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\tan x + 3}}$ 의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln |f(x)| = -\frac{1}{2} \ln |2\tan x + 3|$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{2} \times \frac{2\sec^2 x}{2\tan x + 3} = -\frac{\sec^2 x}{2\tan x + 3}$$

$$\therefore g(x) = -\frac{\sec^2 x}{2\tan x + 3}$$

$$0553 \quad \frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 4t^3 + 6t^2 + 2t \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4t^3 + 6t^2 + 2t}{2t} = 2t^2 + 3t + 1 \quad (\text{단, } t \neq 0)$$

따라서 $t=1$ 일 때의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은 6이다.

답 ③

$$0554 \quad \frac{dx}{d\theta} = \sec^2 \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = -2 \sin \theta \cos \theta \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-2 \sin \theta \cos \theta}{\sec^2 \theta} = -2 \sin \theta \cos^3 \theta$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{dy}{dx} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}} (-2 \sin \theta \cos^3 \theta) = -\frac{1}{2}$$

답 -1/2

$$0555 \quad \frac{dx}{dt} = 3e^{3t}, \quad \frac{dy}{dt} = 2e^{2t} - ae^t \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2e^{2t} - ae^t}{3e^{3t}} = \frac{2e^t - a}{3e^{2t}}$$

... 1단계

$t = \ln 2$ 일 때의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값이 2이므로

$$\frac{2 \times 2 - a}{3 \times 4} = 2 \quad \therefore a = -20$$

... 2단계

답 -20

채점 요소		비율
1단계	$\frac{dy}{dx}$ 구하기	60%
2단계	a 의 값 구하기	40%

$$0556 \quad \frac{dx}{d\theta} = 2 \cos \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \sin \theta \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sin \theta}{2 \cos \theta} = \frac{1}{2} \tan \theta \quad (\text{단, } \cos \theta \neq 0)$$

이때 $\theta = \alpha$ 인 점에서의 접선과 직선 $y = -4x + 3$ 이 수직이므로

$$\frac{1}{2} \tan \alpha \times (-4) = -1 \quad \therefore \tan \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

답 5/4

$$0557 \quad \text{곡선 } x^3 + 2y^3 - axy + b = 0 \text{ 이 점 } (0, -1) \text{ 을 지나므로}$$

$$-2 + b = 0 \quad \therefore b = 2$$

$x^3 + 2y^3 - axy + 2 = 0$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 + 6y^2 \frac{dy}{dx} - ay - ax \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(6y^2 - ax) \frac{dy}{dx} = -3x^2 + ay$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 + ay}{6y^2 - ax} \quad (\text{단, } 6y^2 - ax \neq 0)$$

이때 $x=0, y=-1$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값이 2이므로

$$-\frac{a}{6}=2 \quad \therefore a=-12$$

$$\therefore ab=-24$$

답 ①

0558 $2x-\sqrt{y}-3=0$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2-\frac{1}{2\sqrt{y}}\times\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=4\sqrt{y}$$

따라서 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$4\times 1=4$$

답 4

다른 풀이 $2x-\sqrt{y}-3=0$ 에서

$$y=(2x-3)^2$$

$$\therefore y'=2(2x-3)\times 2=4(2x-3)$$

따라서 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$4\times 1=4$$

0559 $\pi y=x+\sin xy$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$$\pi y=0 \quad \therefore y=0$$

$\pi y=x+\sin xy$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$\pi \frac{dy}{dx}=1+\cos xy\times\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$(\pi-x\cos xy)\frac{dy}{dx}=1+y\cos xy$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1+y\cos xy}{\pi-x\cos xy} \quad (\text{단, } \pi-x\cos xy\neq 0)$$

따라서 $x=0, y=0$ 일 때의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은 $\frac{1}{\pi}$

답 ④

0560 $\ln xy=2x^2-1$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{xy}\times\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=4x$$

$$\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=4x-\frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=4xy-\frac{y}{x}=\frac{4x^2y-y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=0\text{에서 } 4x^2y-y=0$$

$$\therefore y(2x+1)(2x-1)=0$$

이때 $x>0, y>0$ 이므로

$$x=\frac{1}{2}$$

$\ln xy=2x^2-1$ 에 $x=\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$\ln \frac{1}{2}y=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}y=e^{-\frac{1}{2}} \quad \therefore y=2e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{답 } x=\frac{1}{2}, y=2e^{-\frac{1}{2}}$$

0561 $x=\frac{1}{e^y+e^{2y}}$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{e^y+2e^{2y}}{(e^y+e^{2y})^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{(e^y+e^{2y})^2}{e^y+2e^{2y}}$$

한편 $x=\frac{1}{e^y+e^{2y}}$ 에서 $x=\frac{1}{2}$ 일 때

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{e^y+e^{2y}}, \quad e^y+e^{2y}=2$$

$$(e^y)^2+e^y-2=0, \quad (e^y+2)(e^y-1)=0$$

이때 $e^y>0$ 이므로 $e^y=1$

$$\therefore y=0$$

따라서 $x=\frac{1}{2}$ 일 때의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$-\frac{(1+1)^2}{1+2\times 1}=-\frac{4}{3}$$

답 ②

0562 $x=\sqrt[3]{y^2+y}=(y^2+y)^{\frac{1}{3}}$ 을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{3}(y^2+y)^{-\frac{2}{3}}\times(2y+1)$$

$$=\frac{2y+1}{3\sqrt[3]{(y^2+y)^2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{3\sqrt[3]{(y^2+y)^2}}{2y+1}$$

답 ⑤

0563 $x=\tan y$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=\sec^2 y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\sec^2 y}=\cos^2 y$$

한편 $x=\tan y$ 에서 $x=1$ 일 때 $1=\tan y$

$$\therefore y=\frac{\pi}{4} \quad (\because -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2})$$

따라서 $x=1$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0564 $g(2)=k$ 라 하면 $f(k)=2$ 이므로

$$k^3+2k^2+3k-4=2, \quad k^3+2k^2+3k-6=0$$

$$(k-1)(k^2+3k+6)=0$$

$$\therefore k=1 \quad (\because k^2+3k+6>0)$$

따라서 $g(2)=1$ 이고 $f'(x)=3x^2+4x+3$ 이므로

$$g'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{10}$$

답 ③

0565 $f(1)=5$ 에서 $g(5)=1$ 이므로

$$g'(5)=\frac{1}{f'(1)}=3$$

답 3

0566 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-2}{x-1} = 5$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고
극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} \{g(x)-2\} = 0$ 이므로

$$g(1)=2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1) = 5$$

이때 $g(1)=2$ 에서 $f(2)=1$ 이므로

$$f'(2) = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{5} \quad \text{답 ①}$$

0567 $F(x)=f(x)g(x)$ 라 하면 $f(1)=1$ 에서 $g(1)=1$ 이므로

$$F(1)=f(1)g(1)=1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x)-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)-F(1)}{x-1} = F'(1)$$

이때 $F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} F'(1) &= f'(1)g(1)+f(1)g'(1) \\ &= f'(1)+g'(1) \end{aligned}$$

$f'(x)=6x^2$ 에서

$$f'(1)=6, g'(1)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{6}$$

따라서 구하는 극한값은

$$f'(1)+g'(1)=6+\frac{1}{6}=\frac{37}{6} \quad \text{답 37/6}$$

0568 $f(x)=\frac{x(x-2)^2}{x^2+1}$ 의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\begin{aligned} \ln |f(x)| &= \ln \left| \frac{x(x-2)^2}{x^2+1} \right| \\ &= \ln |x| + \ln |x-2|^2 - \ln |x^2+1| \\ &= \ln |x| + 2\ln |x-2| - \ln |x^2+1| \end{aligned}$$

x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} - \frac{2x}{x^2+1} \\ \therefore f'(x) &= f(x) \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} - \frac{2x}{x^2+1} \right) \end{aligned}$$

이때 $f(1)=\frac{1}{2}$ 이므로

$$f'(1) = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$$

답 ③

다른 풀이 함수의 몫의 미분법을 이용하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\{(x-2)^2+x \times 2(x-2)\}(x^2+1)-x(x-2)^2 \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(x-2)(x^3+2x^2+3x-2)}{(x^2+1)^2} \\ \therefore f'(1) &= -1 \end{aligned}$$

0569 $y=x^{\ln x}$ 의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln y = \ln x^{\ln x} = (\ln x)^2$$

x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= 2\ln x \times \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x} \\ \therefore y' &= y \times \frac{2\ln x}{x} = x^{\ln x} \times \frac{2\ln x}{x} \end{aligned}$$

따라서 $x=e$ 에서의 미분계수는

$$e \times \frac{2}{e} = 2 \quad \text{답 ③}$$

0570 $f(2)=4$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$$

한편 $x>0$, $f(x)>0$ 이므로 $f(x)=x^x$ 의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x) = \ln x^x = x \ln x$$

x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1 \\ \therefore f'(x) &= f(x)(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1) \end{aligned}$$

따라서 구하는 극한값은

$$f'(2) = 4(\ln 2 + 1) \quad \text{답 } 4(\ln 2 + 1)$$

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 083~085쪽

$$\begin{aligned} \text{0571 } f'(x) &= \frac{\cos x \cos x - (1 + \sin x) \times (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1 + \sin x}{1 - \sin^2 x} \\ &= \frac{1}{1 - \sin x} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - \sin x} = \frac{1}{2} \quad \text{답 ③}$$

0572 $f(-1)=6$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-6}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = f'(-1)$$

이때 $f(x) = \frac{3x^5-2x^3-5}{x^3} = 3x^2 - 2 - 5x^{-3}$ 이므로

$$f'(x) = 6x + 15x^{-4} = 6x + \frac{15}{x^4}$$

따라서 구하는 극한값은

$$f'(-1) = 9 \quad \text{답 9}$$

0573 $f'(x)$

$$= -e^{-x} \sin ax \cos x + ae^{-x} \cos ax \cos x - e^{-x} \sin ax \sin x$$

따라서 $f'(0) = a$ 이므로

$$a = \pi$$

답 π

0574 $h(x) = g(f(x))$ 에서

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

$$\therefore h'(0) = g'(f(0))f'(0)$$

$$= g'(0)f'(0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{이때 } f'(x) = \frac{3(e^x + 1) - 3x \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{3(e^x + 1 - xe^x)}{(e^x + 1)^2} \text{이므로}$$

$$f'(0) = \frac{3}{2}$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서

$$12 = g'(0) \times \frac{3}{2} \quad \therefore g'(0) = 8$$

답 ④

0575 $f(x) = \ln(e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{100x})$ 이라 하면

$$f(0) = \ln 100$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{100x}}{100}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{100x}) - \ln 100}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

$$\text{이때 } f'(x) = \frac{e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x} + \dots + 100e^{100x}}{e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{100x}} \text{이므로}$$

$$f'(0) = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 100}{100} = \frac{\frac{100 \times 101}{2}}{100} = \frac{101}{2}$$

$$\text{따라서 } A = \frac{101}{2} \text{이므로 } 100A = 5050$$

답 5050

0576 $f(x) + f\left(\frac{1}{2} \sin x\right) = \sin x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분

하면

$$f'(x) + f'\left(\frac{1}{2} \sin x\right) \times \frac{1}{2} \cos x = \cos x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x = \pi$ 를 대입하면

$$f'(\pi) - \frac{1}{2}f'(0) = -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$f'(0) + \frac{1}{2}f'(0) = 1$$

$$\frac{3}{2}f'(0) = 1 \quad \therefore f'(0) = \frac{2}{3}$$

$$f'(0) = \frac{2}{3} \text{를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면}$$

$$f'(\pi) - \frac{1}{3} = -1$$

$$\therefore f'(\pi) = -\frac{2}{3}$$

답 ②

0577 $\frac{1}{n} = h$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $h \rightarrow 0 +$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{\pi}{3} + \frac{3}{n}\right) \right\}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} \left\{ f\left(\frac{\pi}{3} - h\right) - f\left(\frac{\pi}{3} + 3h\right) \right\}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f\left(\frac{\pi}{3} - h\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{3} + 3h\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f\left(\frac{\pi}{3} - h\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{-h} \times (-1)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f\left(\frac{\pi}{3} + 3h\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3h} \times 3$$

$$= -f'\left(\frac{\pi}{3}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{이때 } f'(x) = \frac{\sec^2 x}{\tan x} \text{이므로 구하는 극한값은}$$

$$-4f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4 \times \frac{2^2}{\sqrt{3}} = -\frac{16\sqrt{3}}{3}$$

답 $-\frac{16\sqrt{3}}{3}$

$$0578 \quad f'(x) = \frac{2 \cos x \times (-\sin x)}{2\sqrt{1 + \cos^2 x}}$$

$$= -\frac{\cos x \sin x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{6}$$

답 $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

$$0579 \quad f'(x) = \frac{1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{(x - \sqrt{x^2 + 1}) \ln 10}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{(x - \sqrt{x^2 + 1}) \ln 10}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} \ln 10}$$

$$\therefore f'(-1) = -\frac{1}{\sqrt{2} \ln 10} = -\frac{\sqrt{2}}{2 \ln 10}$$

답 $-\frac{\sqrt{2}}{2 \ln 10}$

$$0580 \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{t}} + a, \quad \frac{dy}{dt} = 2at + \frac{1}{t^2} \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2at + \frac{1}{t^2}}{\frac{1}{\sqrt{t}} + a}$$

$$= \frac{\frac{2at^3 + 1}{t^2}}{\frac{1 + a\sqrt{t}}{\sqrt{t}}}$$

$$= \frac{\sqrt{t}(2at^3 + 1)}{t^2(1 + a\sqrt{t})}$$

이때 $t=1$ 인 점에서의 접선의 기울기가 3이므로

$$\frac{2a+1}{1+a}=3, \quad 2a+1=3+3a$$

$$\therefore a=-2$$

따라서 $x=2\sqrt{t}-2t$, $y=-2t^2-\frac{1}{t}$ 이고 $x=0$ 에서

$$2\sqrt{t}(1-\sqrt{t})=0 \quad \therefore t=1 (\because t>0)$$

$y=-2t^2-\frac{1}{t}$ 에 $t=1$ 을 대입하면 $y=-3$

즉 주어진 곡선은 점 $(0, -3)$ 을 지나므로

$$k=-3$$

답 ①

0581 $x^2+y^2=5^2$, 즉 $x^2+y^2=25$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \quad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

$x^2+y^2=25$ 에 $x=4$ 를 대입하면

$$16+y^2=25, \quad y^2=9 \quad \therefore y=3 (\because y>0)$$

따라서 $x=4$, $y=3$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은 $-\frac{4}{3}$ 이다.

답 $-\frac{4}{3}$

0582 $2x^3-xy^2=6$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$6x^2-y^2-2xy\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{6x^2-y^2}{2xy} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

따라서 점 $(3, 4)$ 에서의 접선의 기울기는

$$m=\frac{6 \times 3^2-4^2}{2 \times 3 \times 4}=\frac{19}{12} \quad \therefore 36m=57$$

답 ③

0583 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(3-h)-f^{-1}(3+h)}{h}$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(3-h)-f^{-1}(3)+f^{-1}(3)-f^{-1}(3+h)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(3-h)-f^{-1}(3)}{-h} \times (-1)$$

$$-\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(3+h)-f^{-1}(3)}{h}$$

$$=-(f^{-1})'(3)-(f^{-1})'(3)=-2(f^{-1})'(3)$$

이때 $f^{-1}(3)=k$ 라 하면 $f(k)=3$ 이므로

$$4\cos^2 k=3 \quad \therefore \cos^2 k=\frac{3}{4}$$

$$0 < k < \frac{\pi}{2} \text{이므로} \quad \cos k=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore k=\frac{\pi}{6}$$

따라서 $f^{-1}(3)=\frac{\pi}{6}$ 이고 $f'(x)=-8\cos x \sin x$ 이므로 구하는 극한값은

$$-2(f^{-1})'(3)=-2 \times \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$=-2 \times \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

0584 $\frac{dx}{dt}=g'(t)+1$, $\frac{dy}{dt}=g'(t)-1$ 이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)-1}{g'(t)+1}$$

이때 $g(3)=k$ 라 하면 $f(k)=3$ 이므로

$$k^3+k+1=3, \quad k^3+k-2=0$$

$$(k-1)(k^2+k+2)=0$$

$$\therefore k=1 (\because k^2+k+2>0)$$

즉 $g(3)=1$ 이고 $f'(x)=3x^2+1$ 이므로

$$g'(3)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{4}$$

따라서 $t=3$ 일 때 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{g'(3)-1}{g'(3)+1}=\frac{\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{4}+1}=-\frac{3}{5}$$

답 ⑤

0585 $x>0$, $y>0$ 이므로 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln y=\ln x^{\sin x}=\sin x \ln x$$

x 에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y}=\cos x \ln x + \sin x \times \frac{1}{x}=\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore y'=y\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

따라서 $x=\frac{\pi}{2}$ 에서의 미분계수는 $\frac{\pi}{2} \times \frac{2}{\pi}=1$

답 1

0586 $f(x)=\frac{kx}{2x-1}$ 에서

$$f'(x)=\frac{k(2x-1)-kx \times 2}{(2x-1)^2}=-\frac{k}{(2x-1)^2} \quad \dots \text{1단계}$$

이때 $f'(3)=\frac{2}{5}$ 이므로

$$-\frac{k}{25}=\frac{2}{5} \quad \therefore k=-10 \quad \dots \text{2단계}$$

따라서 $f(x)=-\frac{10x}{2x-1}$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x \rightarrow 0} \left\{-\frac{10x}{x(2x-1)}\right\}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{10}{2x-1}\right)=10 \quad \dots \text{3단계}$$

답 10

채점 요소		비율
1단계	$f'(x)$ 구하기	40 %
2단계	k 의 값 구하기	30 %
3단계	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 의 값 구하기	30 %

다른 풀이 $f'(x) = \frac{10}{(2x-1)^2}$ 이고 $f(0)=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) = 10$$

0587 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)+2}{x-2} = 5$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고
극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)+2\} = 0$ 이므로 $f(2) = -2$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)+2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = 5 \quad \dots \text{1단계}$$

한편 $h(x) = f(g(x))$ 로 놓으면 $g(1) = 2$ 이므로

$$h(1) = f(g(1)) = f(2) = -2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(g(x))+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = h'(1) \quad \dots \text{2단계}$$

이때 $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$ 이고 $g'(x) = 8x$ 이므로 구하는
극한값은

$$h'(1) = f'(g(1))g'(1) = f'(2)g'(1) = 5 \times 8 = 40 \quad \dots \text{3단계}$$

답 40

채점 요소	비율
1단계 $f(2), f'(2)$ 의 값 구하기	30 %
2단계 $h(x) = f(g(x))$ 로 놓고 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(g(x))+2}{x-1}$ 를 미분계수로 나타내기	30 %
3단계 극한값 구하기	40 %

$$\begin{aligned} \textbf{0588} \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(7+2h)-f(7-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(7+2h)-f(7)+f(7)-f(7-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(7+2h)-f(7)}{2h} \times 2 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(7)-f(7-h)}{-h} \\ &= 2f'(7) + f'(7) \\ &= 3f'(7) \quad \dots \text{1단계} \end{aligned}$$

이때 $\frac{dx}{dt} = 3t^2$, $\frac{dy}{dt} = 6t - 2$ 이므로

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6t-2}{3t^2} \quad (\text{단, } t \neq 0) \quad \dots \text{2단계}$$

$x=7$ 을 만족시키는 t 의 값은 $t^3 - 1 = 7$ 에서
 $t^3 - 8 = 0$, $(t-2)(t^2+2t+4) = 0$
 $\therefore t = 2$ ($\because t^2+2t+4 > 0$)

따라서 구하는 극한값은

$$3f'(7) = 3 \times \frac{6 \times 2 - 2}{3 \times 2^2} = \frac{5}{2} \quad \dots \text{3단계}$$

답 $\frac{5}{2}$

채점 요소	비율
1단계 주어진 극한을 미분계수로 나타내기	30 %
2단계 $f'(x)$ 구하기	40 %
3단계 극한값 구하기	30 %

0589 $f(x) = \frac{(x-3)^2(x+2)}{(x-2)^3}$ 의 양변의 절댓값에 자연로그
를 취하면

$$\begin{aligned} & \ln |f(x)| \\ &= \ln \left| \frac{(x-3)^2(x+2)}{(x-2)^3} \right| \\ &= 2\ln |x-3| + \ln |x+2| - 3\ln |x-2| \quad \dots \text{1단계} \end{aligned}$$

x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+2} - \frac{3}{x-2} \quad \dots \text{2단계}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+2} - \frac{3}{x-2} \right) \\ &= \frac{4}{3} \quad \dots \text{3단계} \end{aligned}$$

답 $\frac{4}{3}$

채점 요소	비율
1단계 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그 취하기	40 %
2단계 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 구하기	40 %
3단계 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{f(x)}$ 의 값 구하기	20 %

0590 **전략** 주어진 조건을 이용하여 $f(1), f'(1)$ 의 값을 구한다.

$(f \circ g)(3) = 3$ 에서

$$f(g(3)) = f(1) = 3$$

또 $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ 이고

$g'(x) = (-2x+3)e^{-x^2+3x}$ 이므로

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(3) &= f'(g(3))g'(3) \\ &= f'(1) \times (-3) = -3f'(1) \end{aligned}$$

즉 $-3f'(1) = 6$ 이므로 $f'(1) = -2$

한편 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,

$R(x) = ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x) = (x-1)^2 Q(x) + ax + b \quad \dots \text{㉠}$$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = a + b \quad \therefore a + b = 3 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x) + a$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f'(1) = a \quad \therefore a = -2$$

$a = -2$ 를 ㉡에 대입하면

$$-2 + b = 3 \quad \therefore b = 5$$

따라서 $R(x) = -2x + 5$ 이므로

$$R(-2) = 9$$

답 9

0591 전략 원점에서 직선 PQ에 내린 수선의 발을 이용하여 $l(\theta)$ 를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 원점 O에서 직선 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle AOH = \theta$, $\overline{OA} = 1$ 이므로 $\triangle AHO$ 에서

$$\overline{OH} = \cos \theta$$

이때 $\overline{OP} = 2\sqrt{2}$ 이므로 $\triangle PHO$ 에서

$$\overline{PH} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{8 - \cos^2 \theta}$$

$$\therefore l(\theta) = \overline{PQ} = 2\overline{PH} = 2\sqrt{8 - \cos^2 \theta}$$

따라서

$$l'(\theta) = \frac{2 \times (-2 \cos \theta) \times (-\sin \theta)}{2\sqrt{8 - \cos^2 \theta}}$$

$$= \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{8 - \cos^2 \theta}}$$

이므로 $l'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{15}{2}}} = \frac{\sqrt{30}}{15}$ 답 $\frac{\sqrt{30}}{15}$

0592 전략 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$ 를 구한다.

곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(0, g(0))$ 에서의 접선이 x 축이므로

$$g(0) = 0, g'(0) = 0$$

이때 $g(x) = f(e^x) + e^x$ 에서 $g(0) = f(1) + 1$ 이므로

$$f(1) + 1 = 0 \quad \therefore f(1) = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

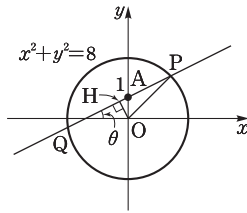
또 $g'(x) = f'(e^x) \times e^x + e^x$ 에서 $g'(0) = f'(1) + 1$ 이므로

$$f'(1) + 1 = 0 \quad \therefore f'(1) = -1$$

한편 함수 $g(x)$ 가 역함수를 가지므로 모든 실수 x 에 대하여

$$g'(x) \geq 0 \text{ 또는 } g'(x) \leq 0$$

이어야 한다.



$g'(x) = f'(e^x) \times e^x + e^x = e^x \{ f'(e^x) + 1 \}$ 에서 $e^x > 0$ 이고 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 1이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(e^x) + 1 \geq 0, \text{ 즉 } f'(e^x) \geq -1$$

이때 $f'(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이고

$f'(1) = -1$ 이므로 $f'(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값 -1 을 갖는다.

$$\therefore f'(x) = 3(x-1)^2 - 1 = 3x^2 - 6x + 2$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (3x^2 - 6x + 2) dx$$

$$= x^3 - 3x^2 + 2x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

①에서 $f(1) = -1$ 이므로 $C = -1$

즉 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ 이므로

$$g(x) = f(e^x) + e^x$$

$$= e^{3x} - 3e^{2x} + 2e^x - 1 + e^x$$

$$= e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1$$

$$= (e^x - 1)^3$$

이때 $h(8) = k$ 라 하면 $g(k) = 8$ 이므로

$$(e^k - 1)^3 = 8, \quad e^k - 1 = 2$$

$$e^k = 3 \quad \therefore k = \ln 3$$

따라서 $h(8) = \ln 3$ 이고 $g'(x) = 3e^x(e^x - 1)^2$ 이므로

$$h'(8) = \frac{1}{g'(\ln 3)} = \frac{1}{36}$$

답 ①

RPM비법노트

함수 $y = x^n$ 의 부정적분

n 이 0 또는 양의 정수일 때

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수이다.})$$

06 도함수의 활용(1)

교과서 문제 정복하기

본책 087쪽, 089쪽

0593 $f(x) = \frac{1}{x-2}$ 이라 하면 $f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$

점 (3, 1)에서의 접선의 기울기는 $f'(3) = -1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-1=-(x-3) \quad \therefore y=-x+4$$

답 $y = -x + 4$

0594 $f(x) = \sqrt{x}$ 라 하면 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = \frac{1}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-1=\frac{1}{2}(x-1) \quad \therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

답 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

0595 $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ 이라 하면 $f'(x) = e^{2x}$

점 $(0, \frac{1}{2})$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(0) = 1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = x + \frac{1}{2}$$

답 $y = x + \frac{1}{2}$

0596 $f(x) = \ln x^2 = 2\ln|x|$ 라 하면 $f'(x) = \frac{2}{x}$

점 (e, 2)에서의 접선의 기울기는 $f'(e) = \frac{2}{e}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-2=\frac{2}{e}(x-e) \quad \therefore y=\frac{2}{e}x$$

답 $y = \frac{2}{e}x$

0597 $f(x) = \sin x$ 라 하면 $f'(x) = \cos x$

점 $(\pi, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(\pi) = -1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=-(x-\pi) \quad \therefore y=-x+\pi$$

답 $y = -x + \pi$

0598 $f(x) = 2\cos x$ 라 하면 $f'(x) = -2\sin x$

점 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(\frac{\pi}{2}) = -2$ 이므로 이 점에

서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \therefore y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}$$

답 $y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}$

0599 $f(x) = -\frac{2}{x}$ 라 하면 $f'(x) = \frac{2}{x^2}$

접점의 좌표를 $(t, -\frac{2}{t})$ 라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$$f'(t) = \frac{2}{t^2} = 2, \quad t^2 = 1 \quad \therefore t = 1 (\because t > 0)$$

따라서 접점의 좌표가 (1, -2)이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y+2=2(x-1) \quad \therefore y=2x-4$$

답 $y = 2x - 4$

0600 $f(x) = 2\sqrt{x+1}$ 이라 하면 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

접점의 좌표를 $(t, 2\sqrt{t+1})$ 이라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$$f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}} = 2$$

$$\sqrt{t+1} = \frac{1}{2}, \quad t+1 = \frac{1}{4} \quad \therefore t = -\frac{3}{4}$$

따라서 접점의 좌표가 $(-\frac{3}{4}, 1)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-1=2\left(x+\frac{3}{4}\right) \quad \therefore y=2x+\frac{5}{2}$$

답 $y = 2x + \frac{5}{2}$

0601 $f(x) = \ln(x-1)$ 이라 하면 $f'(x) = \frac{1}{x-1}$

접점의 좌표를 $(t, \ln(t-1))$ 이라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$$f'(t) = \frac{1}{t-1} = 2, \quad t-1 = \frac{1}{2} \quad \therefore t = \frac{3}{2}$$

따라서 접점의 좌표가 $(\frac{3}{2}, -\ln 2)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y+\ln 2=2\left(x-\frac{3}{2}\right) \quad \therefore y=2x-3-\ln 2$$

답 $y = 2x - 3 - \ln 2$

0602 $f(x) = e^{2x} + 1$ 이라 하면 $f'(x) = 2e^{2x}$

접점의 좌표를 $(t, e^{2t} + 1)$ 이라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$$f'(t) = 2e^{2t} = 2, \quad e^{2t} = 1 \quad \therefore t = 0$$

따라서 접점의 좌표가 (0, 2)이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y = 2x + 2$$

답 $y = 2x + 2$

0603 $f(x) = \tan x$ 라 하면 $f'(x) = \sec^2 x$

접점의 좌표를 $(t, \tan t)$ 라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$$f'(t) = \sec^2 t = 2$$

이때 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sec t = \sqrt{2}$, 즉 $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\therefore t = \frac{\pi}{4}$$

따라서 접점의 좌표가 $(\frac{\pi}{4}, 1)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-1=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \quad \therefore y=2x-\frac{\pi}{2}+1$$

답 $y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1$

0604 $f(x) = \frac{1}{x}$ 이라 하면 $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

접점의 좌표를 $(t, \frac{1}{t})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t) = -\frac{1}{t^2}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{1}{t} = -\frac{1}{t^2}(x - t)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{t^2}x + \frac{2}{t} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(4, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -\frac{4}{t^2} + \frac{2}{t}, \quad -4 + 2t = 0 \quad \therefore t = 2$$

$t = 2$ 를 ①에 대입하면

$$y = -\frac{1}{4}x + 1 \quad \text{답 } y = -\frac{1}{4}x + 1$$

0605 $f(x) = \sqrt{x-3}$ 이라 하면 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{t-3})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

는 $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t-3}}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \sqrt{t-3} = \frac{1}{2\sqrt{t-3}}(x - t)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2\sqrt{t-3}}x + \frac{t-6}{2\sqrt{t-3}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(2, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{1}{\sqrt{t-3}} + \frac{t-6}{2\sqrt{t-3}}, \quad 2+t-6=0 \quad \therefore t=4$$

$t=4$ 를 ①에 대입하면 $y = \frac{1}{2}x - 1$ **답** $y = \frac{1}{2}x - 1$

0606 $f(x) = e^{-x}$ 이라 하면 $f'(x) = -e^{-x}$

접점의 좌표를 (t, e^{-t}) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t) = -e^{-t}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - e^{-t} = -e^{-t}(x - t)$$

$$\therefore y = -e^{-t}x + (t+1)e^{-t} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -e^{-t} + (t+1)e^{-t}, \quad te^{-t} = 0$$

$$\therefore t = 0 \quad (\because e^{-t} > 0)$$

$t=0$ 을 ①에 대입하면 $y = -x + 1$ **답** $y = -x + 1$

0607 $f(x) = \ln x$ 라 하면 $f'(x) = \frac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(t, \ln t)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t) = \frac{1}{t}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \ln t = \frac{1}{t}(x - t)$$

$$\therefore y = \frac{1}{t}x + \ln t - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \ln t - 1 \quad \therefore t = e$$

$t=e$ 를 ①에 대입하면 $y = \frac{1}{e}x$ **답** $y = \frac{1}{e}x$

0608 (1) $\frac{dx}{dt} = 2t, \frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{t^2}$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \frac{1}{t^2}}{2t} = \frac{t^2 - 1}{2t^3}$$

(2) $x = 2^2 - 1 = 3, y = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

(3) $t=2$ 일 때 $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{16}$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y - \frac{5}{2} = \frac{3}{16}(x - 3) \quad \therefore y = \frac{3}{16}x + \frac{31}{16}$$

답 (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{t^2 - 1}{2t^3}$ (2) $x=3, y=\frac{5}{2}$

(3) $y = \frac{3}{16}x + \frac{31}{16}$

0609 (1) $x^2 - 2xy - y^2 + 7 = 0$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2x - 2y - 2x \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2(x+y) \frac{dy}{dx} = 2(x-y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$$

(2) 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $x=1, y=2$ 일 때의 $\frac{dy}{dx}$ 의

값이므로 $\frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}$

(3) $y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 1) \quad \therefore y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

답 (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$ (2) $-\frac{1}{3}$

(3) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

0610 $y' = 3x^2 - 4x$ 이므로

$$y'' = 6x - 4$$

답 $y'' = 6x - 4$

0611 $y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ 이므로

$$y'' = \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x \times 2(x^2+1) \times 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} \quad \text{답 } y'' = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

0612 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = \frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{1}{2}}$ 이므로

$$y'' = -\frac{1}{4}(x+2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4(x+2)\sqrt{x+2}}$$

답 $y'' = -\frac{1}{4(x+2)\sqrt{x+2}}$

0613 $y' = 4e^{4x-1}$ 이므로

$$y'' = 16e^{4x-1}$$

답 $y'' = 16e^{4x-1}$

0614 $y' = \frac{1}{x}$ 이므로 $y'' = -\frac{1}{x^2}$

답 $y'' = -\frac{1}{x^2}$

0615 $y' = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$ 이므로

$y'' = -\frac{1}{4} \cos \frac{x}{2}$ **답** $y'' = -\frac{1}{4} \cos \frac{x}{2}$

0616 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$ 에서 $x \neq 0$ 이고

$f'(x) = x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^3 - 1}{x^2}$

$f'(x) = 0$ 에서 $x^3 - 1 = 0$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0 \quad \therefore x=1 \quad (\because x^2+x+1 > 0)$

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-		-	0	+
$f(x)$	\		\		/

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, 0)$, $(0, 1]$ 에서 감소하고, 구간 $[1, \infty)$ 에서 증가한다. **답** 풀이 참조

0617 $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ 에서 $f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

$f'(x) = 0$ 에서 $2x+1=0 \quad \therefore x = -\frac{1}{2}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간

$(-\infty, -\frac{1}{2}]$ 에서 감소하고,

구간 $[-\frac{1}{2}, \infty)$ 에서 증가한다.

x	...	$-\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\		/

답 풀이 참조

0618 $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ 에서 $x \neq 0$ 이고

$f'(x) = \frac{-e^{-x} \times x - e^{-x} \times 1}{x^2} = -\frac{(x+1)e^{-x}}{x^2}$

$f'(x) = 0$ 에서 $x+1=0 \quad \therefore x = -1$

x	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-		-
$f(x)$	/		\		\

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1]$ 에서 증가하고, 구간 $[-1, 0)$, $(0, \infty)$ 에서 감소한다. **답** 풀이 참조

0619 $f(x) = x \ln x$ 에서 $x > 0$ 이고 $f'(x) = \ln x + 1$

$f'(x) = 0$ 에서 $\ln x = -1 \quad \therefore x = \frac{1}{e}$

x	0	...	$\frac{1}{e}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\		/

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(0, \frac{1}{e}]$ 에서 감소하고, 구간 $[\frac{1}{e}, \infty)$ 에서 증가한다. **답** 풀이 참조

078 정답 및 풀이

0620 $f(x) = \tan x - 2x$ 에서 $f'(x) = \sec^2 x - 2$

$f'(x) = 0$ 에서 $\sec^2 x = 2$

이때 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sec x = \sqrt{2}$, 즉 $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore x = -\frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{\pi}{4}$

x	$-\frac{\pi}{2}$	...	$-\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		/		\		/	

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}]$, $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 에서 증가하고, 구간 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 에서 감소한다. **답** 풀이 참조

0621 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ 에서

$f'(x) = \frac{1 \times (x^2+1) - x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0$ 에서 $1-x^2=0 \quad \therefore x = -1$ 또는 $x = 1$

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	$-\frac{1}{2}$	/	$\frac{1}{2}$	\

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 $\frac{1}{2}$, $x=-1$ 에서 극솟값 $-\frac{1}{2}$ 을 갖는다. **답** 극댓값: $\frac{1}{2}$, 극솟값: $-\frac{1}{2}$

0622 $f(x) = \sqrt{x^2+3}$ 에서

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

$f'(x) = 0$ 에서 $x=0$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서

극솟값 $\sqrt{3}$ 을 갖는다.

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\	$\sqrt{3}$	/

답 극솟값: $\sqrt{3}$

0623 $f(x) = xe^{2x}$ 에서

$f'(x) = e^{2x} + x \times 2e^{2x} = (2x+1)e^{2x}$

$f'(x) = 0$ 에서 $2x+1=0 \quad \therefore x = -\frac{1}{2}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{1}{2}$

에서 극솟값 $-\frac{1}{2e}$ 을 갖는다.

x	...	$-\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\	$-\frac{1}{2e}$	/

답 극솟값: $-\frac{1}{2e}$

0624 $f(x) = \sin x - \cos x$ 에서 $f'(x) = \cos x + \sin x$
 $f'(x) = 0$ 에서 $\sin x = -\cos x$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -1, \quad \tan x = -1$$

$$\therefore x = \frac{3}{4}\pi \quad (\because 0 < x < \pi)$$

x	0	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		/	$\sqrt{2}$	\	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{3}{4}\pi$ 에서 극댓값 $\sqrt{2}$ 를 갖는다.

답 극댓값: $\sqrt{2}$

0625 $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ 이므로
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 2$

이때 $f''(x) = 6x - 6$ 이므로

$$f''(0) = -6 < 0, f''(2) = 6 > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극대이고 $x = 2$ 에서 극소이므로
 극댓값은 $f(0) = -5$, 극솟값은 $f(2) = -9$ 이다.

답 풀이 참조

0626 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ 이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$$x^2 - 1 = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \text{이므로}$$

$$f''(-1) = -2 < 0, f''(1) = 2 > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극대이고 $x = 1$ 에서 극소이므로

$$\text{극댓값은 } f(-1) = -2$$

$$\text{극솟값은 } f(1) = 2$$

답 극댓값: -2 , 극솟값: 2

0627 $f'(x) = e^x - e^{-x}$ 이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$$e^x = e^{-x}, \quad e^{2x} = 1 \quad \therefore x = 0$$

$$f''(x) = e^x + e^{-x} \text{이므로 } f''(0) = 2 > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$f(0) = 2$$

답 극솟값: 2

0628 $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$ 이므로

$$f'(x) = 0 \text{에서 } 2 \ln x + 1 = 0 \quad (\because x > 0)$$

$$\ln x = -\frac{1}{2} \quad \therefore x = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = 2 \ln x + 1 + x \times \frac{2}{x} = 2 \ln x + 3 \text{이므로}$$

$$f''(e^{-\frac{1}{2}}) = 2 > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = e^{-\frac{1}{2}}$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$f(e^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2e}$$

답 극솟값: $-\frac{1}{2e}$

0629 $f'(x) = 1 - 2 \sin 2x$ 이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$0 < 2x < 2\pi \text{이므로 } 2x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } 2x = \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{12} \text{ 또는 } x = \frac{5}{12}\pi$$

$$f''(x) = -4 \cos 2x \text{이므로}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{12}\right) = -2\sqrt{3} < 0, f''\left(\frac{5}{12}\pi\right) = 2\sqrt{3} > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{12}$ 에서 극대이고 $x = \frac{5}{12}\pi$ 에서 극소
 이므로

$$\text{극댓값은 } f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{극솟값은 } f\left(\frac{5}{12}\pi\right) = \frac{5}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 극댓값: $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, 극솟값: $\frac{5}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$

유형 익히기

● 본책 090~099쪽

0630 $f(x) = e^{-x^2+x} - 3$ 이라 하면

$$f'(x) = (-2x+1)e^{-x^2+x}$$

점 $(1, -2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = -1$ 이므로 접선의
 방정식은

$$y+2 = -(x-1) \quad \therefore y = -x-1$$

따라서 $a = -1, b = -1$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 2$$

답 ①

0631 $f(x) = xe^x$ 이라 하면

$$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

점 $(1, e)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 2e$ 이므로 구하는 접
 선의 방정식은

$$y-e = 2e(x-1) \quad \therefore y = 2ex - e \quad \text{답 } y = 2ex - e$$

0632 $f(x) = \sqrt{1+\sin \pi x}$ 라 하면

$$f'(x) = \frac{\pi \cos \pi x}{2\sqrt{1+\sin \pi x}}$$

점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = -\frac{\pi}{2}$ 이므로 접선의
 방정식은

$$y-1 = -\frac{\pi}{2}(x-1)$$

$$\therefore y = -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2} + 1$$

따라서 구하는 y 절편은 $\frac{\pi}{2} + 1$ 이다.

답 ④

0633 $f(x)=3-\ln x^2=3-2\ln|x|$ 라 하면

$$f'(x)=-\frac{2}{x}$$

$f(e)=1, f'(e)=-\frac{2}{e}$ 이므로 x 좌표가 e 인 점에서의 접선의 방정식은

$$y-1=-\frac{2}{e}(x-e) \quad \therefore y=-\frac{2}{e}x+3$$

이 직선이 점 $(k, -5)$ 를 지나므로

$$-5=-\frac{2}{e}k+3, \quad \frac{2}{e}k=8$$

$$\therefore k=4e$$

답 ④

0634 $f(x)=\frac{1}{3x^2+a}$ 이라 하면

$$f'(x)=-\frac{6x}{(3x^2+a)^2}$$

점 $(-1, \frac{1}{a+3})$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=\frac{6}{(a+3)^2}$

이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{a+3}=\frac{6}{(a+3)^2}(x+1)$$

이 직선이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$-\frac{1}{a+3}=\frac{12}{(a+3)^2}, \quad -a-3=12$$

$$\therefore a=-15$$

답 ②

0635 $f(x)=\ln\left(x+\frac{1}{e^2}\right)$ 이라 하면

$$f'(x)=\frac{1}{x+\frac{1}{e^2}}=\frac{e^2}{e^2x+1}$$

이때 $f(0)=-2$ 이고 점 $(0, -2)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(0)=e^2$$

따라서 점 $(0, -2)$ 에서의 접선 l 의 방정식은

$$y=e^2x-2$$

이 직선의 x 절편과 y 절편이 각각 $\frac{2}{e^2}, -2$ 이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{e^2} \times 2 = \frac{2}{e^2}$$

답 $\frac{2}{e^2}$

0636 $f(x)=\frac{3x}{x+4}$ 라 하면

$$f'(x)=\frac{3(x+4)-3x}{(x+4)^2}=\frac{12}{(x+4)^2}$$

점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=\frac{1}{3}$ 이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 -3 이다.

따라서 점 $(2, 1)$ 을 지나고 기울기가 -3 인 직선의 방정식은

$$y-1=-3(x-2) \quad \therefore y=-3x+7$$

즉 $a=-3, b=7$ 이므로

$$a+b=4$$

답 ③

0637 $f(x)=x\ln(2x-5)$ 라 하면

$$f'(x)=\ln(2x-5)+\frac{2x}{2x-5}$$

점 $(3, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=6$ 이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{6}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{6}(x-3) \quad \therefore y=-\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}$$

$$\text{답 } y=-\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}$$

0638 $f(x)=x^2e^{x-2}$ 이라 하면

$$a=f(2)=4$$

... 1단계

이때 $f'(x)=2xe^{x-2}+x^2e^{x-2}=(x^2+2x)e^{x-2}$ 이므로 점

$(2, 4)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(2)=8$$

따라서 점 $(2, 4)$ 에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{8}$ 이다.

점 $(2, 4)$ 를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{8}$ 인 직선의 방정식은

$$y-4=-\frac{1}{8}(x-2) \quad \therefore y=-\frac{1}{8}x+\frac{17}{4} \quad \dots 2\text{단계}$$

이 직선이 점 $(b, 5)$ 를 지나므로

$$5=-\frac{b}{8}+\frac{17}{4} \quad \therefore b=-6 \quad \dots 3\text{단계}$$

$$\therefore a-b=10 \quad \dots 4\text{단계}$$

답 10

	채점 요소	비율
1단계	a 의 값 구하기	20%
2단계	접선과 수직인 직선의 방정식 구하기	40%
3단계	b 의 값 구하기	20%
4단계	$a-b$ 의 값 구하기	20%

0639 $f(x)=\cos 2x$ 라 하면 $f'(x)=-2\sin 2x$

점 $(t, \cos 2t)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2\sin 2t$ 이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2\sin 2t}$ 이다.

따라서 점 $(t, \cos 2t)$ 를 지나고 기울기가 $\frac{1}{2\sin 2t}$ 인 직선의 방정식은

$$y-\cos 2t=\frac{1}{2\sin 2t}(x-t)$$

$$\therefore y=\frac{1}{2\sin 2t}x-\frac{t}{2\sin 2t}+\cos 2t$$

즉 $g(t)=-\frac{t}{2\sin 2t}+\cos 2t$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} g(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{t}{2\sin 2t} + \cos 2t \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{2t}{\sin 2t} \times \left(-\frac{1}{4} \right) + \cos 2t \right\} \\ &= 1 \times \left(-\frac{1}{4} \right) + 1 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{3}{4}$

0640 $f(x) = \ln(x^2+1)$ 이라 하면 $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

접점의 좌표를 $(t, \ln(t^2+1))$ 이라 하면 직선 $x-y+2=0$, 즉 $y=x+2$ 에 평행한 직선의 기울기가 1이므로

$$f'(t) = \frac{2t}{t^2+1} = 1$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0, \quad (t-1)^2 = 0 \quad \therefore t = 1$$

즉 접점의 좌표는 $(1, \ln 2)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \ln 2 = x - 1 \quad \therefore y = x - 1 + \ln 2$$

따라서 구하는 x 절편은 $1 - \ln 2$ 이다.

답 1- $\ln 2$

0641 $f(x) = 2\sin^2 x$ 라 하면

$$f'(x) = 4\sin x \cos x = 2\sin 2x$$

접점의 좌표를 $(t, 2\sin^2 t)$ 라 하면 접선의 기울기가 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ 이므로

$$f'(t) = 2\sin 2t = \sqrt{3} \quad \therefore \sin 2t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 \leq 2t \leq \frac{\pi}{2} \text{이므로} \quad 2t = \frac{\pi}{3} \quad \therefore t = \frac{\pi}{6}$$

즉 접점의 좌표가 $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$ 이므로 직선 l 의 방정식은

$$y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \quad \therefore y = \sqrt{3}x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

$$\text{답 } y = \sqrt{3}x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

0642 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ 이라 하면 $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

접점의 좌표를 $(t, \frac{t-1}{t+1})$ 이라 하면 직선 $y = -2x + 3$ 과 수직인

직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이므로 $f'(t) = \frac{2}{(t+1)^2} = \frac{1}{2}$

$$(t+1)^2 = 4, \quad t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$(t-1)(t+3) = 0 \quad \therefore t = 1 \text{ 또는 } t = -3$$

즉 접점의 좌표는 $(1, 0)$, $(-3, 2)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}(x-1) \text{ 또는 } y - 2 = \frac{1}{2}(x+3)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \text{ 또는 } y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

두 직선의 y 절편은 각각 $-\frac{1}{2}$, $\frac{7}{2}$ 이므로 선분 AB의 길이는

$$\frac{7}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 4$$

답 5

0643 $f(x) = e^{4x} + 2ax$ 라 하면 $f'(x) = 4e^{4x} + 2a$

곡선 $y = f(x)$ 와 x 축의 접점의 x 좌표를 t 라 하면

$$f(t) = 0 \text{에서} \quad e^{4t} + 2at = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\text{또 } f'(t) = 0 \text{에서} \quad 4e^{4t} + 2a = 0 \quad \therefore a = -2e^{4t}$$

$a = -2e^{4t}$ 을 ㉠에 대입하면

$$e^{4t} - 4te^{4t} = 0, \quad e^{4t}(1 - 4t) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{4} (\because e^{4t} > 0) \quad \therefore a = -2e$$

답 2

0644 $f(x) = \frac{e^x}{x}$ 이라 하면 $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$

접점의 좌표를 $(t, \frac{e^t}{t})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = \frac{e^t(t-1)}{t^2} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - \frac{e^t}{t} = \frac{e^t(t-1)}{t^2}(x-t)$$

$$\therefore y = \frac{e^t(t-1)}{t^2}x - \frac{e^t(t-2)}{t} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이 직선이 원점을 지나므로 $0 = -\frac{e^t(t-2)}{t}$

이때 $e^t > 0$ 이므로 $t = 2$

$t = 2$ 를 ㉠에 대입하면 $y = \frac{e^2}{4}x$

이 직선이 점 $(1, k)$ 를 지나므로 $k = \frac{e^2}{4}$

답 5

0645 $f(x) = \sqrt{2x^2+1}$ 이라 하면 $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{2t^2+1})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울

기는 $f'(t) = \frac{2t}{\sqrt{2t^2+1}}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \sqrt{2t^2+1} = \frac{2t}{\sqrt{2t^2+1}}(x-t)$$

$$\therefore y = \frac{2t}{\sqrt{2t^2+1}}x + \frac{1}{\sqrt{2t^2+1}}$$

이 직선이 점 $(\frac{1}{2}, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{t}{\sqrt{2t^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2t^2+1}} \quad \therefore t = -1$$

따라서 접선의 기울기는 $f'(-1) = \frac{-2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

답 1

0646 $f(x) = \frac{2\ln x}{x}$ 라 하면

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x} \times x - 2\ln x \times 1}{x^2} = \frac{2-2\ln x}{x^2}$$

접점의 좌표를 $(t, \frac{2\ln t}{t})$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = \frac{2-2\ln t}{t^2} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - \frac{2\ln t}{t} = \frac{2-2\ln t}{t^2}(x-t)$$

$$\therefore y = \frac{2-2\ln t}{t^2}x + \frac{4\ln t-2}{t}$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0 = \frac{4\ln t-2}{t}, \quad \ln t = \frac{1}{2} \quad \therefore t = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

즉 접점 A의 좌표는 $(\sqrt{e}, \frac{1}{\sqrt{e}})$ 이고 접선의 기울기는

$f'(\sqrt{e}) = \frac{1}{e}$ 이므로 점 A에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-e$ 이다.

따라서 점 A를 지나고 기울기가 $-e$ 인 직선의 방정식은

$$y - \frac{1}{\sqrt{e}} = -e(x - \sqrt{e})$$

$$\therefore y = -ex + e\sqrt{e} + \frac{1}{\sqrt{e}}$$

즉 점 B의 좌표는 $(0, e\sqrt{e} + \frac{1}{\sqrt{e}})$ 이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left(e\sqrt{e} + \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \times \sqrt{e} = \frac{e^2 + 1}{2} \quad \text{답 } \frac{e^2 + 1}{2}$$

0647 $f(x) = (x-1)e^x$ 이라 하면

$$f'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$$

접점의 좌표를 $(t, (t-1)e^t)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = te^t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (t-1)e^t = te^t(x - t)$$

$$\therefore y = te^t x - (t^2 - t + 1)e^t$$

이 직선이 점 $(2, 0)$ 을 지나므로

$$0 = 2te^t - (t^2 - t + 1)e^t, \quad e^t(t^2 - 3t + 1) = 0$$

$$\therefore t^2 - 3t + 1 = 0 \quad (\because e^t > 0)$$

이 이차방정식의 두 근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = 1$$

이때 두 접선의 기울기는 각각 $\alpha e^\alpha, \beta e^\beta$ 이므로 두 접선의 기울기의 곱은

$$\alpha e^\alpha \times \beta e^\beta = \alpha\beta e^{\alpha+\beta} = e^3 \quad \text{답 } e^3$$

0648 $f(x) = e^{2x}, g(x) = \ln\sqrt{x}$ 라 하면

$$f'(x) = 2e^{2x}, \quad g'(x) = \frac{1}{2x}$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 접점의 좌표를 (a, e^{2a}) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a) = 2e^{2a}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - e^{2a} = 2e^{2a}(x - a) \quad \therefore y = 2e^{2a}x + (1 - 2a)e^{2a}$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0 = (1 - 2a)e^{2a} \quad \therefore a = \frac{1}{2} \quad (\because e^{2a} > 0)$$

곡선 $y = g(x)$ 위의 접점의 좌표를 $(b, \ln\sqrt{b})$, 즉 $(b, \frac{1}{2}\ln b)$

라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $g'(b) = \frac{1}{2b}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{1}{2}\ln b = \frac{1}{2b}(x - b) \quad \therefore y = \frac{1}{2b}x + \frac{1}{2}\ln b - \frac{1}{2}$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0 = \frac{1}{2}\ln b - \frac{1}{2}, \quad \ln b = 1 \quad \therefore b = e$$

따라서 $A(\frac{1}{2}, e), B(e, \frac{1}{2})$ 이므로 직선 AB의 방정식은

$$y - e = -\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \therefore y = -x + e + \frac{1}{2}$$

즉 구하는 y절편은 $e + \frac{1}{2}$ 이다.

$$\text{답 } e + \frac{1}{2}$$

0649 $f(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$ 이라 하면

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

접점의 좌표를 $(t, 1 - \frac{1}{t})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = \frac{1}{t^2} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - \left(1 - \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2}(x - t) \quad \therefore y = \frac{1}{t^2}x + 1 - \frac{2}{t}$$

이 직선이 점 $(3, 3)$ 을 지나므로

$$3 = \frac{3}{t^2} + 1 - \frac{2}{t} \quad \therefore 2t^2 + 2t - 3 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 + 6 = 7 > 0$$

따라서 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가지므로 점 $(3, 3)$ 에서 곡

선 $y = \frac{x-1}{x}$ 에 그을 수 있는 접선의 개수는 2이다. 답 2

0650 $f(x) = xe^x$ 이라 하면

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$$

접점의 좌표를 (t, te^t) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = e^t(t+1) \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - te^t = e^t(t+1)(x - t)$$

$$\therefore y = e^t(t+1)x - t^2e^t$$

이 직선이 점 $(k, 0)$ 을 지나므로

$$0 = e^t(t+1)k - t^2e^t$$

$$e^t(t^2 - kt - k) = 0$$

$$\therefore t^2 - kt - k = 0 \quad (\because e^t > 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 점 $(k, 0)$ 에서 곡선 $y = xe^x$ 에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

즉 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = k^2 + 4k > 0, \quad k(k+4) > 0$$

$$\therefore k < -4 \text{ 또는 } k > 0$$

따라서 k 의 값이 될 수 없는 것은 $\textcircled{3}$ 이다. 답 ③

0651 $f(x) = a - 2\sin^2 x, g(x) = 2\cos x$ 라 하면

$$f'(x) = -4\sin x \cos x, \quad g'(x) = -2\sin x$$

두 곡선이 $x=t$ 인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$$f(t) = g(t) \text{에서} \quad a - 2\sin^2 t = 2\cos t \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서} \quad -4\sin t \cos t = -2\sin t$$

이때 $0 < t < \pi$ 에서 $\sin t \neq 0$ 이므로 $\cos t = \frac{1}{2}$

$$\therefore t = \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 < t < \pi)$$

$t = \frac{\pi}{3}$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a - \frac{3}{2} = 1 \quad \therefore a = \frac{5}{2}$$

$$\text{답 } \frac{5}{2}$$

0652 $f(x)=\ln x, g(x)=ax+\frac{b}{x}$ 라 하면

$$f'(x)=\frac{1}{x}, g'(x)=a-\frac{b}{x^2}$$

두 곡선이 $x=e^2$ 인 점에서 공통인 접선을 가지므로
 $f(e^2)=g(e^2)$ 에서

$$ae^2+\frac{b}{e^2}=2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$f'(e^2)=g'(e^2)$ 에서

$$\frac{1}{e^2}=a-\frac{b}{e^4} \quad \therefore a=\frac{1}{e^2}+\frac{b}{e^4} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑧을 ⑦에 대입하면

$$\left(\frac{1}{e^2}+\frac{b}{e^4}\right)e^2+\frac{b}{e^2}=2$$

$$\frac{2b}{e^2}=1 \quad \therefore b=\frac{e^2}{2}$$

$b=\frac{e^2}{2}$ 을 ⑧에 대입하면 $a=\frac{3}{2e^2}$

$$\therefore ab=\frac{3}{4} \quad \text{답 } \frac{3}{4}$$

0653 $g(e)=k$ 라 하면 $f(k)=e$ 이므로

$$e^{2k+3}=e, \quad 2k+3=1$$

$$\therefore k=-1$$

즉 $g(e)=-1$ 이므로

$$g'(e)=\frac{1}{f'(-1)}$$

이때 $f'(x)=2e^{2x+3}$ 이므로 $f'(-1)=2e$

$$\therefore g'(e)=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{1}{2e}$$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(e, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y+1=\frac{1}{2e}(x-e)$$

$$\therefore y=\frac{1}{2e}x-\frac{3}{2}$$

즉 구하는 y 절편은 $-\frac{3}{2}$ 이다. 답 $-\frac{3}{2}$

0654 $g(2)=k$ 라 하면 $f(k)=2$ 이므로

$$\frac{k-2}{k+1}=2, \quad k-2=2k+2$$

$$\therefore k=-4$$

즉 $g(2)=-4$ 이므로

$$g'(2)=\frac{1}{f'(-4)}$$

이때 $f'(x)=\frac{x+1-(x-2)}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}$ 이므로

$$f'(-4)=\frac{1}{3} \quad \therefore g'(2)=\frac{1}{f'(-4)}=3$$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, -4)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y+4=3(x-2) \quad \therefore y=3x-10$$

답 $y=3x-10$

다른 풀이 $y=\frac{x-2}{x+1}$ 라 하면 $xy+y=x-2$

$$x(y-1)=-(y+2) \quad \therefore x=-\frac{y+2}{y-1}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y=-\frac{x+2}{x-1}$

즉 $g(x)=-\frac{x+2}{x-1}$ 이므로 $g'(x)=\frac{3}{(x-1)^2}$

따라서 $g(2)=-4, g'(2)=3$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y+4=3(x-2) \quad \therefore y=3x-10$$

0655 $\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta, \frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$ 이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \quad (\text{단, } \cos\theta \neq 1)$$

$\theta=\frac{\pi}{2}$ 일 때

$$x=\frac{\pi}{2}-1, y=1, \frac{dy}{dx}=1 \rightarrow \text{접점의 좌표: } \left(\frac{\pi}{2}-1, 1\right)$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-1=x-\left(\frac{\pi}{2}-1\right) \quad \therefore y=x+2-\frac{\pi}{2}$$

따라서 구하는 y 절편은 $2-\frac{\pi}{2}$ 이다. 답 $2-\frac{\pi}{2}$

0656 $\frac{dx}{dt}=1-\frac{2}{t^3}, \frac{dy}{dt}=2t+\frac{2}{t^3}$ 이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2t+\frac{2}{t^3}}{1-\frac{2}{t^3}}=\frac{2t^4+2}{t^3-2} \quad (\text{단, } t^3 \neq 2) \quad \dots \text{1단계}$$

$t=1$ 일 때

$$x=2, y=0, \frac{dy}{dx}=-4$$

이므로 접선의 방정식은

$$y=-4(x-2) \quad \therefore y=-4x+8 \quad \dots \text{2단계}$$

이 직선이 점 $(a, -4)$ 를 지나므로

$$-4=-4a+8 \quad \therefore a=3 \quad \dots \text{3단계}$$

답 3

채점 요소		비율
1단계	$\frac{dy}{dx}$ 구하기	40 %
2단계	접선의 방정식 구하기	40 %
3단계	a 의 값 구하기	20 %

0657 $\frac{dx}{dt}=-\frac{a}{t^2}, \frac{dy}{dt}=2t$ 이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2t}{-\frac{a}{t^2}}=-\frac{2}{a}t^3$$

$t=2$ 일 때 $\frac{dy}{dx}=-\frac{16}{a}$ 이므로

$$-\frac{16}{a}=-8 \quad \therefore a=2$$

즉 $x = \frac{2}{t}$ 이므로 $t=2$ 일 때

$$x=1, y=3$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-3=-8(x-1) \quad \therefore y=-8x+11$$

$$\text{답 } y=-8x+11$$

0658 $\frac{dx}{dt} = -3\cos^2 t \sin t, \frac{dy}{dt} = 3\sin^2 t \cos t$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\sin^2 t \cos t}{-3\cos^2 t \sin t} = -\frac{\sin t}{\cos t}$$

곡선 위의 임의의 점 $(\cos^3 \alpha, \sin^3 \alpha)$ 에서의 접선의 기울기는

$-\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \sin^3 \alpha = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (x - \cos^3 \alpha)$$

$$y = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} x + \sin \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$$

$$\therefore y = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} x + \sin \alpha$$

따라서 접선의 x 절편은 $\cos \alpha$, y 절편은 $\sin \alpha$ 이므로 접선과 좌표

축의 교점의 좌표는 $(\cos \alpha, 0), (0, \sin \alpha)$

즉 구하는 길이는 $\sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1$

답 1

0659 $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 7$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{2}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \times \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \quad (\text{단, } xy \neq 0)$$

점 $(4, 9)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2 \times 3}{2} = -3$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-9=-3(x-4) \quad \therefore y=-3x+21$$

이 직선이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -3a + 21 \quad \therefore a = 7$$

답 ④

0660 $x^2 + 3xy^2 - y^2 = -15$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + 3y^2 + 6xy \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(6xy - 2y) \frac{dy}{dx} = -(2x + 3y^2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 3y^2}{6xy - 2y}$$

따라서 점 $(-1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-2 + 12}{-12 - 4} = \frac{5}{8}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-2 = \frac{5}{8}(x+1) \quad \therefore y = \frac{5}{8}x + \frac{21}{8}$$

즉 $a = \frac{5}{8}, b = \frac{21}{8}$ 이므로

$$\frac{b}{a} = \frac{21}{5}$$

답 21/5

0661 $y^2 + y \ln x - 4x = 0$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2y \frac{dy}{dx} + \ln x \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} - 4 = 0$$

$$(2y + \ln x) \frac{dy}{dx} = 4 - \frac{y}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{4 - \frac{y}{x}}{2y + \ln x} = \frac{4x - y}{x(\ln x + 2y)} \quad (\text{단, } \ln x + 2y \neq 0)$$

점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4-2}{1 \times 4} = \frac{1}{2}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-2 = \frac{1}{2}(x-1) \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

따라서 x 절편은 -3 , y 절편은 $\frac{3}{2}$ 이므로 접선과 x 축, y 축으로 둘

려싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

답 9/4

0662 점 $(0, 1)$ 이 곡선 $x^2 + aye^x + y^3 = b$ 위에 있으므로

$$b = a + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x^2 + aye^x + y^3 = b$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + ae^x \frac{dy}{dx} + aye^x + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(ae^x + 3y^2) \frac{dy}{dx} = -(2x + aye^x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + aye^x}{ae^x + 3y^2} \quad (\text{단, } ae^x + 3y^2 \neq 0)$$

이때 점 $(0, 1)$ 에서의 접선의 기울기가 $-\frac{2}{5}$ 이므로

$$-\frac{a}{a+3} = -\frac{2}{5}, \quad 5a = 2a + 6$$

$$\therefore a = 2$$

$a=2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b=3$

$$\therefore ab = 6$$

답 6

0663 $f'(x) = e^{ax+b} + axe^{ax+b} = e^{ax+b}(1+ax)$

$$f''(x) = ae^{ax+b}(1+ax) + e^{ax+b} \times a = ae^{ax+b}(2+ax)$$

$$f'(0) = 7 \text{에서 } e^b = 7 \quad \therefore b = \ln 7$$

$$f''(0) = 14 \text{에서 } 2ae^b = 14$$

$$14a = 14 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore ab = \ln 7$$

답 ⑤

0664 $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\ln x)^2$ 이므로

$$h'(x) = 2 \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}$$

따라서 $h'(1) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h'(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h'(x) - h'(1)}{x-1} = h''(1)$$

이때 $h''(x) = \frac{\frac{2}{x} \times x - 2 \ln x}{x^2} = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2}$ 이므로 구하는 값은

$$h''(1) = 2$$

답 ④

0665 $y' = e^x \cos 2x + e^x \times (-2 \sin 2x)$
 $= e^x (\cos 2x - 2 \sin 2x)$
 $y'' = e^x (\cos 2x - 2 \sin 2x) + e^x (-2 \sin 2x - 4 \cos 2x)$
 $= -e^x (3 \cos 2x + 4 \sin 2x) \quad \dots \text{1단계}$

$y'' + ay' + 5y = 0$ 에서
 $-e^x (3 \cos 2x + 4 \sin 2x) + ae^x (\cos 2x - 2 \sin 2x)$
 $+ 5e^x \cos 2x = 0$
 $e^x \{ (a+2) \cos 2x - (2a+4) \sin 2x \} = 0$
 $\therefore e^x (a+2) (\cos 2x - 2 \sin 2x) = 0 \quad \dots \text{2단계}$

이 등식이 x 의 값에 관계없이 항상 성립하므로
 $a = -2 \quad \dots \text{3단계}$
답 -2

채점 요소	비율
1단계 y', y'' 구하기	60 %
2단계 y, y', y'' 을 $y'' + ay' + 5y = 0$ 에 대입하기	20 %
3단계 a 의 값 구하기	20 %

0666 조건 (나)에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 3} \{ f'(f(x)) - 1 \} = 0$ 이므로 $f'(f(3)) = 1$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(f(x)) - 1}{x - 3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(f(x)) - f'(f(3))}{x - 3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{f'(f(x)) - f'(f(3))}{f(x) - f(3)} \times \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \right\}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{f'(f(x)) - f'(f(3))}{f(x) - f(3)} \times f'(3) \right\}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(f(x)) - f'(2)}{f(x) - 2} \quad (\because \text{조건 (가)})$
 $f(x) = t$ 로 놓으면 $f(3) = 2$ 에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 $t \rightarrow 2$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(f(x)) - f'(2)}{f(x) - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{f'(t) - f'(2)}{t - 2} = f''(2)$
 $\therefore f''(2) = 3 \quad (\because \text{조건 (나)}) \quad \text{답 3}$

0667 $f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \times 2x}{(x^2+1)^2}$
 $= -\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$
 $(x^2+1)^2 > 0$ 이므로 $f'(x) \geq 0$ 에서
 $-2(x^2-1) \geq 0, \quad (x+1)(x-1) \leq 0$
 $\therefore -1 \leq x \leq 1$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[-1, 1]$ 에서 증가하므로
 $\alpha = -1, \beta = 1 \quad \therefore \beta - \alpha = 2 \quad \text{답 2}$

0668 $f'(x) = e^{\sin x} \times \cos x + \cos x = \cos x (e^{\sin x} + 1)$
 $e^{\sin x} > 0$ 이므로 $f'(x) \geq 0$ 에서 $\cos x \geq 0$
 $\therefore 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi \leq x \leq 2\pi \quad (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$ 에서 증가하므로
 증가하는 구간에 속하는 x 의 값이 아닌 것은 ③이다.

답 ③

0669 $f(x) = \ln x - x^2$ 에서 $x > 0$ 이고

$f'(x) = \frac{1}{x} - 2x = \frac{1-2x^2}{x}$
 $f'(x) \leq 0$ 에서 $1-2x^2 \leq 0$
 $x^2 \geq \frac{1}{2} \quad \therefore x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because x > 0)$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ 에서 감소하므로

$a \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

즉 a 의 최솟값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0670 $15 - x^2 \geq 0$ 에서 $x^2 \leq 15$

$\therefore 0 < x \leq \sqrt{15} \quad (\because x > 0)$

이때 $f'(x) = 2 + \frac{-2x}{2\sqrt{15-x^2}} = \frac{2\sqrt{15-x^2} - x}{\sqrt{15-x^2}}$ 이므로

$f'(x) = 0$ 에서 $2\sqrt{15-x^2} = x$
 양변을 제곱하면 $4(15-x^2) = x^2, \quad x^2 = 12$
 $\therefore x = 2\sqrt{3} \quad (\because x > 0)$

x	0	...	$2\sqrt{3}$	...	$\sqrt{15}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(0, 2\sqrt{3}]$ 에서 증가하므로 구하는 모든 정수 x 의 값의 합은

$1 + 2 + 3 = 6$

답 6

0671 $f'(x) = 2 + \frac{6x}{3x^2+a} = \frac{2(3x^2+3x+a)}{3x^2+a}$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이때 $3x^2 + a > 0$ 이므로 $3x^2 + 3x + a \geq 0$

따라서 이차방정식 $3x^2 + 3x + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = 9 - 12a \leq 0 \quad \therefore a \geq \frac{3}{4}$

즉 a 의 최솟값은 $\frac{3}{4}$ 이다.

답 ③

0672 $f'(x) = (2x+k)e^{-x} + (x^2+kx+1) \times (-e^{-x})$
 $= \{-x^2 - (k-2)x + k-1\}e^{-x} \quad \dots \text{1단계}$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

이때 $e^{-x} > 0$ 이므로 $-x^2 - (k-2)x + k-1 \leq 0$

$\therefore x^2 + (k-2)x - k + 1 \geq 0$

$\dots \text{2단계}$

따라서 이차방정식 $x^2 + (k-2)x - k + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = (k-2)^2 - 4(-k+1) \leq 0$
 $k^2 \leq 0 \quad \therefore k=0$

... 3단계
답 0

채점 요소	비율
1단계 $f'(x)$ 구하기	30 %
2단계 $f'(x) \leq 0$ 이어야 함을 이용하여 부등식 세우기	40 %
3단계 k 의 값 구하기	30 %

0673 $f'(x) = k + \frac{2x}{x^2+4} = \frac{kx^2+2x+4k}{x^2+4}$

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 $f(x)$ 가 일대일대응이어야 하므로 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다.
 즉 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 또는 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

이때 $x^2+4 > 0$ 이므로

$$kx^2+2x+4k \geq 0 \text{ 또는 } kx^2+2x+4k \leq 0$$

(i) $kx^2+2x+4k \geq 0$ 이라면 $k > 0$ 이고, 이차방정식

$kx^2+2x+4k=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4} = 1 - 4k^2 \leq 0, \quad k^2 \geq \frac{1}{4}$$

$$\therefore k \geq \frac{1}{2} \quad (\because k > 0)$$

(ii) $kx^2+2x+4k \leq 0$ 이라면 $k < 0$ 이고, 이차방정식

$kx^2+2x+4k=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4} = 1 - 4k^2 \leq 0, \quad k^2 \geq \frac{1}{4}$$

$$\therefore k \leq -\frac{1}{2} \quad (\because k < 0)$$

(i), (ii)에서 $k \leq -\frac{1}{2}$ 또는 $k \geq \frac{1}{2}$

답 $k \leq -\frac{1}{2}$ 또는 $k \geq \frac{1}{2}$

RPM비법노트

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식을 D 라 할 때, 모든 실수 x 에 대하여

① 이차부등식 $ax^2+bx+c \geq 0$ 이 성립하려면 $a > 0, D \leq 0$

② 이차부등식 $ax^2+bx+c \leq 0$ 이 성립하려면 $a < 0, D \leq 0$

0674 $f'(x) = 4 - \frac{a}{x} = \frac{4x-a}{x}$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(3, \infty)$ 에서 증가하려면 $x > 3$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$4x - a \geq 0$$

이때 $g(x) = 4x - a$ 라 하면 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

따라서 $g(3) \geq 0$ 이어야 하므로

$$12 - a \geq 0 \quad \therefore a \leq 12$$

즉 a 의 최댓값은 12이다.

답 5

0675 $f'(x) = a - \cos x$

... 1단계

함수 $f(x)$ 가 구간 $(0, \frac{\pi}{4})$ 에서 증가하려면 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 에서

$f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이때 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 에서 $\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < 1$ 이므로

$$a - 1 < a - \cos x < a - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore a - 1 < f'(x) < a - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

... 2단계

따라서 $a - 1 \geq 0$ 이어야 하므로

$$a \geq 1$$

... 3단계

답 $a \geq 1$

채점 요소	비율
1단계 $f'(x)$ 구하기	20 %
2단계 $f'(x)$ 의 값의 범위 구하기	50 %
3단계 a 의 값의 범위 구하기	30 %

0676 $f'(x) = (2x+a)e^x + (x^2+ax)e^x$
 $= \{x^2 + (a+2)x + a\}e^x$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(1, 2)$ 에서 감소하려면 $1 < x < 2$ 에서

$f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

이때 $e^x > 0$ 이므로

$$x^2 + (a+2)x + a \leq 0$$

$g(x) = x^2 + (a+2)x + a$ 라 하면

오른쪽 그림에서

$$g(1) = 2a + 3 \leq 0 \text{이므로}$$

$$a \leq -\frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

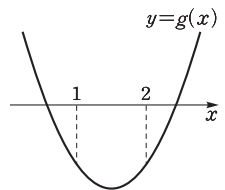
$$g(2) = 3a + 8 \leq 0 \text{이므로}$$

$$a \leq -\frac{8}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a \leq -\frac{8}{3}$

따라서 정수 a 의 최댓값은 -3이다.

답 2



0677 $f(x) = x + \frac{1}{x+3}$ 에서 $x \neq -3$ 이고

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+8}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{(x+4)(x+2)}{(x+3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -4 \text{ 또는 } x = -2$$

x	...	-4	...	-3	...	-2	...
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -4$ 에서 극대, $x = -2$ 에서 극소이므로

$$a = -4, \beta = -2 \quad \therefore a - \beta = -2$$

답 -2

$$\begin{aligned} 0678 \quad f'(x) &= \frac{4(x^2+1)-4x \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-4(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	-2	/	2	\

ㄱ. $f(0)+f'(0)=0+4=4$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 구간 $[-1, 1]$ 에서 증가하므로

$-1 < x_1 < x_2 < 1$ 이면

$f(x_1) < f(x_2)$ (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 2, $x=-1$ 에서 극솟값 -2를 가지므로 극댓값과 극솟값의 곱은

$$2 \times (-2) = -4 \text{ (참)}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

$$\begin{aligned} 0679 \quad f'(x) &= \frac{a(x^2+1)-(ax-b) \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-ax^2+2bx+a}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=-2$ 에서 극솟값 -1을 가지므로

$$f(-2) = -1, f'(-2) = 0$$

$f(-2) = -1$ 에서

$$\frac{-2a-b}{5} = -1 \quad \therefore 2a+b=5 \quad \dots\dots ㉠$$

$f'(-2)=0$ 에서

$$\frac{-3a-4b}{25} = 0 \quad \therefore 3a+4b=0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=4, b=-3$$

$$\therefore a-b=7$$

답 7

$$\begin{aligned} 0680 \quad f(x) &= \frac{x+3}{\sqrt{x+1}} \text{에서 } x > -1 \text{이고} \\ f'(x) &= \frac{\sqrt{x+1} - (x+3) \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} \\ &= \frac{x-1}{2(x+1)\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$

x	-1	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	$2\sqrt{2}$	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값 $2\sqrt{2}$ 를 갖는다.

답 ⑤

$$0681 \quad f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \text{에서 } -1 \leq x \leq 7 \text{이고}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{7-x}} \\ &= \frac{\sqrt{7-x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{(x+1)(7-x)}} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $\sqrt{7-x} = \sqrt{x+1}$

$$7-x=x+1 \quad \therefore x=3$$

x	-1	...	3	...	7
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		/	4	\	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극댓값 4를 가지므로

$$a=3, b=4$$

$$\therefore ab=12$$

답 12

$$\begin{aligned} 0682 \quad f'(x) &= \sqrt{8-x^2} + x \times \frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}} \\ &= \frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}} = \frac{-2(x+2)(x-2)}{\sqrt{8-x^2}} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

x	$-2\sqrt{2}$	...	-2	...	2	...	$2\sqrt{2}$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		\	-4	/	4	\	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값 4, $x=-2$ 에서 극솟값 -4를 가지므로

$$a=4, \beta=-4 \quad \therefore a-\beta=8$$

답 ④

$$0683 \quad f'(x) = (2x-2)e^x + (x^2-2x)e^x = (x^2-2)e^x$$

$f'(x)=0$ 에서 $x^2=2$ ($\because e^x > 0$)

$$\therefore x = -\sqrt{2} \text{ 또는 } x = \sqrt{2}$$

x	...	$-\sqrt{2}$	...	$\sqrt{2}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	극대	\	극소	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-\sqrt{2}$ 에서 극댓값

$$f(-\sqrt{2}) = (2+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}, x=\sqrt{2} \text{에서 극솟값}$$

$$f(\sqrt{2}) = (2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}} \text{을 가지므로 구하는 곱은}$$

$$(2+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} \times (2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}} = -4$$

답 ②

다른 풀이 $f'(x) = (x^2-2)e^x$ 이고 $f'(x)=0$ 에서

$$x = -\sqrt{2} \text{ 또는 } x = \sqrt{2}$$

$$f''(x) = 2xe^x + (x^2-2)e^x = (x^2+2x-2)e^x \text{이므로}$$

$$f''(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}} < 0$$

$$f''(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}} > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-\sqrt{2}$ 에서 극대이고 $x=\sqrt{2}$ 에서 극소이다.

$$\begin{aligned} 0684 \quad f'(x) &= \frac{6x^2 e^{2x} - (2x^3 + 1) \times 2e^{2x}}{(e^{2x})^2} \\ &= \frac{-4x^3 + 6x^2 - 2}{e^{2x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \text{에서} \quad -4x^3 + 6x^2 - 2 = 0 \\ 2x^3 - 3x^2 + 1 &= 0, \quad (2x+1)(x-1)^2 = 0 \\ \therefore x &= -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 1 \end{aligned}$$

x	...	$-\frac{1}{2}$	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$		$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{1}{2}$ 에서 극대이므로 극값을 갖는 x 의 값의 개수는 1이다. 답 1

$$\begin{aligned} 0685 \quad f'(x) &= e^x - 4e^{-x} = \frac{e^{2x} - 4}{e^x} \\ &= \frac{(e^x + 2)(e^x - 2)}{e^x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \text{에서} \quad e^x = 2 \quad (\because e^x > 0) \\ \therefore x &= \ln 2 \end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \ln 2$ 에서 극솟값 4를 가지므로
 $a = \ln 2, b = 4$
 $\therefore e^{ab} = e^{4 \ln 2} = 16$

x	...	$\ln 2$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	4	$\nearrow$

답 16

$$\begin{aligned} 0686 \quad f'(x) &= 2e^{2x} - ae^x = e^x(2e^x - a) \\ f'(x) &= 0 \text{에서} \quad 2e^x = a \quad (\because e^x > 0) \\ e^x &= \frac{a}{2} \quad \therefore x = \ln \frac{a}{2} \end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \ln \frac{a}{2}$ 에서 극솟값 $-\frac{a^2}{4}$ 을 가지므로
 $-\frac{a^2}{4} = -1, \quad a^2 = 4$
 $\therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$

x	...	$\ln \frac{a}{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{a^2}{4}$	$\nearrow$

답 2

$$\begin{aligned} 0687 \quad f(x) &= x \ln x - 4x \text{에서 } x > 0 \text{이고} \\ f'(x) &= \ln x + x \times \frac{1}{x} - 4 = \ln x - 3 \\ f'(x) &= 0 \text{에서} \quad \ln x = 3 \quad \therefore x = e^3 \end{aligned}$$

x	0	...	e^3	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$-e^3$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = e^3$ 에서 극솟값 $-e^3$ 을 갖는다.

답 2

$$\begin{aligned} 0688 \quad f(x) &= \frac{x}{\ln x} \text{에서 } x > 0, \ln x \neq 0 \text{이므로} \\ 0 &< x < 1 \text{ 또는 } x > 1 \end{aligned}$$

이때

$$f'(x) = \frac{\ln x - x \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$$\ln x = 1 \quad \therefore x = e$$

x	0	...	1	...	e	...
$f'(x)$		-		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

ㄱ. 정의역은 $\{x \mid 0 < x < 1 \text{ 또는 } x > 1\}$ 이다. (거짓)

ㄴ. 구간 $(0, 1)$ 에서 감소한다. (참)

ㄷ. 극솟값은 $f(e) = e$ 이고, 극댓값은 없다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 5

$$\begin{aligned} 0689 \quad f'(x) &= 1 + \frac{2x+a}{x^2+ax+b} \\ &= \frac{x^2+(a+2)x+a+b}{x^2+ax+b} \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 가 $x = -1$ 에서 극솟값 -1 을 가지므로

$$f(-1) = -1, \quad f'(-1) = 0$$

$f(-1) = -1$ 에서

$$-1 + \ln(1-a+b) = -1$$

$$\ln(1-a+b) = 0, \quad 1-a+b = 1$$

$$\therefore a = b$$

..... ㉠

$f'(-1) = 0$ 에서

$$\frac{b-1}{1-a+b} = 0 \quad \therefore b = 1$$

$b = 1$ 을 ㉠에 대입하면 $a = 1$

즉 $f(x) = x + \ln(x^2 + x + 1)$ 이고

$$f'(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2+x+1} = \frac{(x+2)(x+1)}{x^2+x+1}$$

이므로 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = -1$

x	...	-2	...	-1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$f(-2) = -2 + \ln 3$$

답 $-2 + \ln 3$

$$\begin{aligned} 0690 \quad f'(x) &= 4 \cos x - 8 \sin x \cos x \\ &= 4 \cos x(1 - 2 \sin x) \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$\cos x = 0 \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{5\pi}{6} \quad (\because 0 < x < \pi)$$

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$		↗	3	↘	2	↗	3	↘	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{\pi}{2}$ 에서 극솟값 2를 가지므로

$$a=\frac{\pi}{2}, b=2 \quad \therefore ab=\pi \quad \text{답 } \pi$$

0691 $f'(x)=1-2\cos x$

$f'(x)=0$ 에서 $\cos x=\frac{1}{2}$

$$\therefore x=\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x=\frac{5}{3}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{5}{3}\pi$	...	2π
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{5}{3}\pi$ 에서 극댓값 $f(\frac{5}{3}\pi)=\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$,

$x=\frac{\pi}{3}$ 에서 극솟값 $f(\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$ 을 가지므로

$$M=\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}, m=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$$

$$\therefore M+m=2\pi \quad \text{답 } 2\pi$$

0692 $f'(x)=2a\cos 2x-b\sin x$

함수 $f(x)$ 가 $x=\frac{7}{6}\pi$ 에서 극댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 을 가지므로

$$f\left(\frac{7}{6}\pi\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}, f'\left(\frac{7}{6}\pi\right)=0$$

$$f\left(\frac{7}{6}\pi\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{에서 } \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore a-b=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'\left(\frac{7}{6}\pi\right)=0 \text{에서}$$

$$a+\frac{1}{2}b=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=1, b=-2$

$$\therefore ab=-2 \quad \text{답 } -2$$

0693 $\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta, \frac{dy}{d\theta}=-\sin\theta$ 이므로

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$\frac{dy}{dx}=0 \text{에서 } \sin\theta=0 \quad \therefore \theta=\pi \quad (\because 0 < \theta < 2\pi)$$

$0 < \theta < \pi$ 일 때 $\frac{dy}{dx} < 0$, $\pi < \theta < 2\pi$ 일 때 $\frac{dy}{dx} > 0$ 이므로 주어진

함수는 $\theta=\pi$ 에서 극소이다.

따라서 구하는 극솟값은

$$\cos\pi=-1 \quad \text{답 } \textcircled{1}$$

0694 $f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+2}+a$

$$=\frac{ax^2+(a+2)x+2a+1}{x^2+x+2}$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식

$ax^2+(a+2)x+2a+1=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

판별식을 D 라 하면

$$D=(a+2)^2-4a(2a+1)>0$$

$$4-7a^2>0, \quad a^2<\frac{4}{7}$$

$$\therefore -\frac{2\sqrt{7}}{7}<a<0 \text{ 또는 } 0<a<\frac{2\sqrt{7}}{7} \quad (\because a\neq 0)$$

$$\text{답 } -\frac{2\sqrt{7}}{7}<a<0 \text{ 또는 } 0<a<\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

0695 $f'(x)=-e^{-x}(x^2+6x+a)+e^{-x}(2x+6)$

$$=-e^{-x}(x^2+4x+a-6)$$

$e^{-x}>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식

$x^2+4x+a-6=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2+4x+a-6=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=4-(a-6)>0 \quad \therefore a<10$$

즉 자연수 a 의 최댓값은 9이다.

답 ③

0696 $f(x)=x-2a\ln x-\frac{3}{x}$ 에서 $x>0$ 이고

$$f'(x)=1-\frac{2a}{x}+\frac{3}{x^2}=\frac{x^2-2ax+3}{x^2}$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $x^2-2ax+3=0$

이 중근 또는 허근을 갖거나 서로 다른 두 음의 실근을 가져야 한다.

(i) $x^2-2ax+3=0$ 이 중근 또는 허근을 갖는 경우

판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-3\leq 0$$

$$\therefore -\sqrt{3}\leq a\leq \sqrt{3}$$

(ii) $x^2-2ax+3=0$ 이 서로 다른 두 음의 실근을 갖는 경우

② 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-3>0$$

$$\therefore a<-\sqrt{3} \text{ 또는 } a>\sqrt{3}$$

⑤ (두 근의 합) <0 에서 $2a<0 \quad \therefore a<0$

⑥ (두 근의 곱) >0 에서 $3>0$

이상에서 $a<-\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 구하는 a 의 값의 범위는

$$a\leq \sqrt{3} \quad \text{답 } a\leq \sqrt{3}$$

0697 $f'(x)=k+3\cos x$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x)\leq 0 \text{ 또는 } f'(x)\geq 0$$

이어야 한다.

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로 $-3 \leq 3 \cos x \leq 3$

$$\therefore k-3 \leq k+3 \cos x \leq k+3$$

즉 $k-3 \leq f'(x) \leq k+3$ 이므로

$$k-3 \geq 0 \text{ 또는 } k+3 \leq 0$$

$$\therefore k \leq -3 \text{ 또는 } k \geq 3$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 3이다.

답 ③

$$\begin{aligned} 0698 \quad f'(x) &= e^x(x^3-9x+a) + e^x(3x^2-9) \\ &= e^x(x^3+3x^2-9x-9+a) \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식 $x^3+3x^2-9x-9+a=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

... 1단계

$g(x) = x^3+3x^2-9x-9+a$ 라 하면

$$g'(x) = 3x^2+6x-9 = 3(x+3)(x-1)$$

$g'(x)=0$ 에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=-3$, $x=1$ 에서 극값을 가지므로

$g(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$$g(-3)g(1) < 0, \quad (a+18)(a-14) < 0$$

$$\therefore -18 < a < 14$$

... 2단계

답 $-18 < a < 14$

	채점 요소	비율
1단계	$f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 조건 파악하기	50%
2단계	a 의 값의 범위 구하기	50%

RPM비법노트

극값을 갖는 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여

① (극댓값) $\times$ (극솟값) < 0

$\Rightarrow f(x)=0$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

② (극댓값) $\times$ (극솟값) $= 0$

$\Rightarrow f(x)=0$ 은 중근과 다른 한 실근을 갖는다.

③ (극댓값) $\times$ (극솟값) > 0

$\Rightarrow f(x)=0$ 은 한 실근과 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$$\begin{aligned} 0699 \quad f'(x) &= 2 \cos 2x - 4 \cos x - a \\ &= 2(2 \cos^2 x - 1) - 4 \cos x - a \\ &= 4 \cos^2 x - 4 \cos x - a - 2 \\ &= 4 \left(\cos x - \frac{1}{2} \right)^2 - a - 3 \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 $f'(x)=0$ 의 실근이 존재하고, 그 실근의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌어야 한다.

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로 함수 $f'(x)$ 는 $\cos x = \frac{1}{2}$ 일 때 최솟값 $-a-3$, $\cos x = -1$ 일 때 최댓값 $-a+6$ 을 갖는다.

따라서 $(-a-3)(-a+6) < 0$ 이어야 하므로

$$(a+3)(a-6) < 0$$

$$\therefore -3 < a < 6$$

즉 정수 a 는 $-2, -1, 0, \dots, 5$ 의 8개이다.

답 8

시험에 꼭 나오는 문제

0700 $f(x) = \sqrt{2x^2+3}$ 이라 하면

$$f'(x) = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+3}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+3}}$$

$f(\sqrt{3})=3$, $f'(\sqrt{3})=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이므로 x 좌표가 $\sqrt{3}$ 인 점에서의 접선의 방정식은

$$y-3 = \frac{2\sqrt{3}}{3}(x-\sqrt{3}) \quad \therefore y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x + 1$$

따라서 $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $b=1$ 이므로

$$a^2 + b^2 = \frac{7}{3}$$

답 ④

0701 $f(x) = \sin 2x$ 라 하면 $f'(x) = 2 \cos 2x$

점 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$ 이므로 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \therefore y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}$$

즉 구하는 y 절편은 $-\frac{\pi}{4}$ 이다.

답 $-\frac{\pi}{4}$

0702 $f(x) = e^{x-1} - 1$ 이라 하면 $f'(x) = e^{x-1}$

이때 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(1, 0)$, $\left(0, \frac{1}{e} - 1\right)$ 이므로 직선 PQ의 기울기는

$$1 - \frac{1}{e}$$

따라서 직선 PQ에 평행한 접선의 접점의 x 좌표를 t 라 하면

$$f'(t) = e^{t-1} = 1 - \frac{1}{e}, \quad e^t = e - 1$$

$$\therefore t = \ln(e-1)$$

즉 구하는 y 좌표는

$$e^{\ln(e-1)-1} - 1 = \frac{e^{\ln(e-1)}}{e} - 1 = \frac{e-1}{e} - 1 = -\frac{1}{e}$$

답 $-\frac{1}{e}$

0703 $f(x) = e^{x-k}$ 이라 하면 $f'(x) = e^{x-k}$

접점의 좌표를 (t, e^{t-k}) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = e^{t-k}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - e^{t-k} = e^{t-k}(x - t)$$

$$\therefore y = e^{t-k}x + (1-t)e^{t-k}$$

..... ㉠

이 직선이 점 $(2, 0)$ 을 지나므로

$$0 = 2e^{t-k} + (1-t)e^{t-k}$$

$$(3-t)e^{t-k} = 0 \quad \therefore t = 3 \quad (\because e^{t-k} > 0)$$

$t=3$ 을 ㉠에 대입하면

$$y=e^{3-k}x-2e^{3-k}$$

이 직선이 점 (5, 6)을 지나므로

$$6=5e^{3-k}-2e^{3-k}, \quad 3e^{3-k}=6$$

$$e^{3-k}=2, \quad 3-k=\ln 2$$

$$\therefore k=3-\ln 2$$

답 3- $\ln 2$

0704 $f(x)=e^{|x|}=\begin{cases} e^x & (x \geq 0) \\ e^{-x} & (x < 0) \end{cases}$ 이라 하면

$$f'(x)=\begin{cases} e^x & (x > 0) \\ -e^{-x} & (x < 0) \end{cases}$$

$x > 0$ 일 때, 점점의 좌표를 (t, e^t) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=e^t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-e^t=e^t(x-t)$$

$$\therefore y=e^tx-e^t(t-1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 원점을 지나므로 $0=-e^t(t-1)$

$$\therefore t=1 \quad (\because e^t > 0)$$

$t=1$ 을 ㉠에 대입하면 $y=ex$

또 $x < 0$ 일 때, 점점의 좌표를 (s, e^{-s}) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(s)=-e^{-s}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-e^{-s}=-e^{-s}(x-s)$$

$$\therefore y=-e^{-s}x+e^{-s}(s+1) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이 직선이 원점을 지나므로 $0=e^{-s}(s+1)$

$$\therefore s=-1 \quad (\because e^{-s} > 0)$$

$s=-1$ 을 ㉡에 대입하면 $y=-ex$

이때 두 직선 $y=ex, y=-ex$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β 라 하면

$$\tan \alpha = e, \tan \beta = -e$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan \theta &= |\tan(\beta - \alpha)| = \left| \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \right| \\ &= \left| \frac{-e - e}{1 + (-e) \times e} \right| = \frac{2e}{e^2 - 1} \end{aligned} \quad \text{답 ④}$$

0705 $f(x)=(x-a)e^{-x}$ 이라 하면

$$f'(x)=e^{-x}-(x-a)e^{-x}=e^{-x}(1+a-x)$$

점점의 좌표를 $(t, (t-a)e^{-t})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=e^{-t}(1+a-t)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(t-a)e^{-t}=e^{-t}(1+a-t)(x-t)$$

$$\therefore y=e^{-t}(1+a-t)x+e^{-t}(t^2-at-a)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0=e^{-t}(t^2-at-a)$$

$$\therefore t^2-at-a=0 \quad (\because e^{-t} > 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원점에서 곡선 $y=(x-a)e^{-x}$ 에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

즉 이차방정식 ㉠의 판별식을 D 라 하면

$$D=a^2+4a > 0, \quad a(a+4) > 0$$

$$\therefore a < -4 \text{ 또는 } a > 0 \quad \text{답 } a < -4 \text{ 또는 } a > 0$$

0706 $f(x)=\ln(2x+3), g(x)=a-\ln x$ 라 하면

$$f'(x)=\frac{2}{2x+3}, g'(x)=-\frac{1}{x}$$

점 P의 x 좌표를 t 라 하면 $f(t)=g(t)$ 에서

$$\ln(2t+3)=a-\ln t$$

$$\therefore a=\ln(2t+3)+\ln t=\ln t(2t+3) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 P에서의 두 곡선의 접선이 서로 수직이므로

$$f'(t)g'(t)=-1 \text{에서} \quad \frac{2}{2t+3} \times \left(-\frac{1}{t}\right)=-1$$

$$\therefore t(2t+3)=2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=\ln 2$

답 ③

0707 $f(x)=\ln x, g(x)=a\sqrt{x}$ 라 하면

$$f'(x)=\frac{1}{x}, g'(x)=\frac{a}{2\sqrt{x}}$$

두 곡선의 점점의 x 좌표를 t 라 하면

$$f(t)=g(t) \text{에서} \quad \ln t=a\sqrt{t} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(t)=g'(t) \text{에서}$$

$$\frac{1}{t}=\frac{a}{2\sqrt{t}} \quad \therefore a=\frac{2}{\sqrt{t}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉡을 ㉠에 대입하면 $\ln t=2 \quad \therefore t=e^2$

$t=e^2$ 을 ㉡에 대입하면 $a=\frac{2}{e}$

답 ②

0708 $g(3\pi)=\frac{3}{2}\pi$ 이므로 $g'(3\pi)=\frac{1}{f'(\frac{3}{2}\pi)}$

이때 $f'(x)=2-\sin x$ 이므로 $f'(\frac{3}{2}\pi)=3$

$$\therefore g'(3\pi)=\frac{1}{f'(\frac{3}{2}\pi)}=\frac{1}{3}$$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(3\pi, \frac{3}{2}\pi)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-\frac{3}{2}\pi=\frac{1}{3}(x-3\pi) \quad \therefore y=\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{2}$$

$y=0$ 을 대입하면 $\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{2}=0 \quad \therefore x=-\frac{3}{2}\pi$

즉 구하는 x 절편은 $-\frac{3}{2}\pi$ 이다. 답 $-\frac{3}{2}\pi$

0709 $\frac{dx}{dt}=\frac{2}{2t+1}, \frac{dy}{dt}=2t-1$ 이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2t-1}{\frac{2}{2t+1}}=\frac{4t^2-1}{2}$$

$x=\ln(2t+1)+4=4$ 에서

$$\ln(2t+1)=0, \quad 2t+1=1 \quad \therefore t=0$$

$t=0$ 일 때 $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-3=-\frac{1}{2}(x-4) \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x+5$$

따라서 A(10, 0), B(0, 5)이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5} \quad \text{답 } 5\sqrt{5}$$

0710 $\frac{dx}{d\theta} = a \sec^2 \theta$, $\frac{dy}{d\theta} = b \sec \theta \tan \theta$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \sec \theta \tan \theta}{a \sec^2 \theta} = \frac{b \tan \theta}{a \sec \theta} = \frac{b}{a} \sin \theta$$

따라서 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 일 때

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{2}{\sqrt{3}}b, \frac{dy}{dx} = \frac{b}{2a}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{2}{\sqrt{3}}b = \frac{b}{2a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{3}}\right) \quad \therefore y = \frac{b}{2a}x + \frac{\sqrt{3}}{2}b$$

이 직선이 직선 $y = 2x + 2$ 와 일치하므로

$$\frac{b}{2a} = 2, \frac{\sqrt{3}}{2}b = 2 \quad \therefore a = \frac{\sqrt{3}}{3}, b = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore ab = \frac{4}{3}$$

답 ④

0711 $x^2 + 5xy - 2y^2 + 11 = 0$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + 5y + 5x \frac{dy}{dx} - 4y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 5y}{5x - 4y}$$

점 (1, 4)에서의 접선의 기울기는 $\frac{dy}{dx} = -\frac{2+20}{5-16} = 2$

따라서 점 (1, 4)에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이

므로 직선 l 의 방정식은

$$y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 1) \quad \therefore x + 2y - 9 = 0$$

즉 원점과 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{|-9|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

답 $\frac{9\sqrt{5}}{5}$

0712 $f'(x) = 3e^{3x} \sin x + e^{3x} \cos x$
 $= e^{3x}(3 \sin x + \cos x)$

$$f''(x) = 3e^{3x}(3 \sin x + \cos x) + e^{3x}(3 \cos x - \sin x)$$

$$= 2e^{3x}(4 \sin x + 3 \cos x)$$

$x = \theta$ 가 $f''(x) = 0$ 의 해이므로

$$2e^{3\theta}(4 \sin \theta + 3 \cos \theta) = 0$$

그런데 $e^{3\theta} > 0$ 이므로 $4 \sin \theta + 3 \cos \theta = 0$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서 $\cos \theta \neq 0$ 이므로 양변을 $\cos \theta$ 로 나누면

$$\frac{4 \sin \theta}{\cos \theta} + 3 = 0, \quad 4 \tan \theta = -3$$

$$\therefore \tan \theta = -\frac{3}{4}$$

답 ③

0713 $\neg. f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right)$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \times \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\therefore f'(\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \text{ (거짓)}$$

$$\neg. f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \text{이므로}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \times 2x = -x(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\therefore (x^2 + 1)f''(x) + xf'(x)$$

$$= (x^2 + 1)\{-x(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}}\} + x(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -x(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} + x(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} = 0 \text{ (참)}$$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf''(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}}}{(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{x^2}{x^2 + 1}\right) = -1 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ⑤

0714 $f'(x) = \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x^2 + 3) - e^{\frac{x}{2}} \times 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{e^{\frac{x}{2}}(x^2 - 4x + 3)}{2(x^2 + 3)^2}$

$e^{\frac{x}{2}} > 0$, $(x^2 + 3)^2 > 0$ 이므로 $f'(x) \leq 0$ 에서

$$x^2 - 4x + 3 \leq 0, \quad (x - 1)(x - 3) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq x \leq 3$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[1, 3]$ 에서 감소하므로

$$\alpha = 1, \beta = 3 \quad \therefore \beta - \alpha = 2$$

답 2

0715 $f'(x) = k + 3 \sin 3x$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

이때 $-1 \leq \sin 3x \leq 1$ 이므로 $-3 \leq 3 \sin 3x \leq 3$

$$\therefore k - 3 \leq k + 3 \sin 3x \leq k + 3$$

따라서 $k + 3 \leq 0$ 이어야 하므로

$$k \leq -3$$

답 $k \leq -3$

0716 $f'(x) = \frac{e^x(ax^2 + 3) - e^x \times 2ax}{(ax^2 + 3)^2}$

$$= \frac{e^x(ax^2 - 2ax + 3)}{(ax^2 + 3)^2}$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 에서 감소하려면 $\frac{1}{2} < x < 1$ 에서

$f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

이때 $e^x > 0$, $(ax^2 + 3)^2 > 0$ 이므로

$$ax^2 - 2ax + 3 \leq 0$$

$a > 0$ 이므로 $g(x) = ax^2 - 2ax + 3$ 이라

하면 오른쪽 그림에서

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}a + 3 \leq 0 \text{이므로}$$

$$a \geq 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

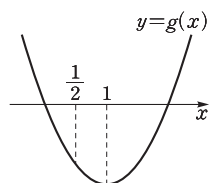
$$g(1) = -a + 3 \leq 0 \text{이므로}$$

$$a \geq 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 $a \geq 4$

따라서 a 의 최솟값은 4이다.

답 ④



$$\begin{aligned} 0717 \quad f'(x) &= \frac{(2x+2)(x^2+2) - (x^2+2x+1) \times 2x}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{-2x^2+2x+4}{(x^2+2)^2} = \frac{-2(x+1)(x-2)}{(x^2+2)^2} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		\	0	/	$\frac{3}{2}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값 $\frac{3}{2}$, $x=-1$ 에서 극솟값 0

을 가지므로 $A(2, \frac{3}{2})$, $B(-1, 0)$

즉 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+(-1)}{2}, \frac{\frac{3}{2}+0}{2} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right) \quad \text{답 } \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} 0718 \quad f'(x) &= 2x \times e^{-x} + (x^2-3) \times (-e^{-x}) \\ &= -(x^2-2x-3)e^{-x} = -(x+1)(x-3)e^{-x} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		\	$-2e$	/	$6e^{-3}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극댓값 $6e^{-3}$, $x=-1$ 에서 극솟값 $-2e$ 를 가지므로 $a=6e^{-3}$, $b=-2e$

$$\therefore a \times b = -12e^{-2} = -\frac{12}{e^2} \quad \text{답 } ④$$

$$0719 \quad f'(x) = e^{ax+b} + x \times a e^{ax+b} = e^{ax+b}(1+ax)$$

함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 극솟값 $-\frac{1}{e}$ 을 가지므로

$$f'(-1)=0, f(-1)=-\frac{1}{e}$$

$$f'(-1)=0 \text{에서 } e^{-a+b}(1-a)=0$$

$$e^{-a+b}>0 \text{이므로 } 1-a=0 \quad \therefore a=1$$

$$f(-1)=-\frac{1}{e} \text{에서 } -e^{-1+b}=-\frac{1}{e} = -e^{-1}$$

$$-1+b=-1 \quad \therefore b=0$$

$$\therefore a+b=1 \quad \text{답 } ①$$

$$0720 \quad f(x) = \frac{x-\ln x}{x} \text{에서 } x>0 \text{이고}$$

$$f'(x) = \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)x - (x-\ln x)}{x^2} = \frac{\ln x - 1}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \ln x - 1 = 0 \quad \therefore x=e$$

x	0	...	e	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	$\frac{e-1}{e}$	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=e$ 에서 극솟값 $\frac{e-1}{e}$ 을 가지므로

$$a=e, b=\frac{e-1}{e} \quad \therefore ab=e-1 \quad \text{답 } e-1$$

$$\begin{aligned} 0721 \quad f'(x) &= \cos^2 x - (1+\sin x)\sin x \\ &= (1-\sin^2 x) - \sin x - \sin^2 x \\ &= -2\sin^2 x - \sin x + 1 \\ &= -(\sin x + 1)(2\sin x - 1) \end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \sin x = -1 \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi \quad (\because 0 < x < \pi)$$

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		/	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	\	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	/	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{\pi}{6}$ 에서 극댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $x=\frac{5}{6}\pi$ 에서 극솟값 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 을 가지므로

$$M = \frac{3\sqrt{3}}{4}, m = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore M - m = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{답 } \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$0722 \quad f'(x) = 1 + |k| \sin x$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x) \leq 0 \text{ 또는 } f'(x) \geq 0$$

이어야 한다.

$$\text{이때 } -1 \leq \sin x \leq 1 \text{이므로 } -|k| \leq |k| \sin x \leq |k|$$

$$\therefore 1 - |k| \leq 1 + |k| \sin x \leq 1 + |k|$$

따라서 $1 - |k| \geq 0$ 또는 $1 + |k| \leq 0$ 이어야 하므로

$$|k| \leq 1 \quad \therefore -1 \leq k \leq 1$$

즉 $\alpha = -1$, $\beta = 1$ 이므로

$$\alpha\beta = -1 \quad \text{답 } ①$$

$$0723 \quad f(x) = \tan x \text{라 하면 } f'(x) = \sec^2 x$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(0)=1 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y=x \quad \therefore k=1 \quad \dots \text{ 1단계}$$

$$g(x) = \sin x \text{라 하면 } g'(x) = \cos x$$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(\pi, \sin \pi)$, 즉 $(\pi, 0)$ 에서의 접

선의 기울기는 $g'(\pi) = -1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = -(x - \pi) \quad \therefore y = -x + \pi \quad \dots \text{ 2단계}$$

즉 $a = -1$, $b = \pi$ 이므로

$$ab = -\pi \quad \dots \text{ 3단계}$$

$$\text{답 } -\pi$$

채점 요소	비율
1단계 k 의 값 구하기	40%
2단계 곡선 $y=\sin x$ 의 접선의 방정식 구하기	50%
3단계 ab 의 값 구하기	10%

0724 $f(x)=e^x$ 이라 하면

$$f'(x)=e^x$$

점 $(1, e)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=e$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-e=e(x-1)$$

$$\therefore y=ex$$

이때 직선 $y=ex$ 가 곡선 $y=2\sqrt{x-k}$ 에 접하므로 방정식

$2\sqrt{x-k}=ex$ 에서 양변을 제곱하면

$$4(x-k)=e^2x^2$$

$$\therefore e^2x^2-4x+4k=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=4-4ke^2=0$$

$$\therefore k=\frac{1}{e^2}$$

... 1단계

... 2단계

$$\text{답 } \frac{1}{e^2}$$

채점 요소	비율
1단계 점 $(1, e)$ 에서의 접선의 방정식 구하기	40%
2단계 k 의 값 구하기	60%

$$\begin{aligned} 0725 \quad f'(x) &= (4x-a)e^x + (2x^2-ax)e^x \\ &= e^x\{2x^2+(4-a)x-a\} \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극솟값을 가지므로 $f'(1)=0$ 에서

$$e(6-2a)=0 \quad \therefore a=3$$

즉 $f(x)=(2x^2-3x)e^x$ 이고

$$f'(x)=e^x(2x^2+x-3)=e^x(2x+3)(x-1)$$

이므로 $f'(x)=0$ 에서

$$x=-\frac{3}{2} \text{ 또는 } x=1$$

x	...	$-\frac{3}{2}$	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-\frac{3}{2}$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=9e^{-\frac{3}{2}}$$

... 1단계

... 2단계

$$\text{답 } 9e^{-\frac{3}{2}}$$

채점 요소	비율
1단계 a 의 값 구하기	40%
2단계 극댓값 구하기	60%

0726 $f(x)=\ln 3x+\frac{a}{x}-2x$ 에서 $x>0$ 이고

$$f'(x)=\frac{3}{3x}-\frac{a}{x^2}-2=\frac{-2x^2+x-a}{x^2}$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식

$$-2x^2+x-a=0, \text{ 즉 } 2x^2-x+a=0$$

이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

... 1단계

(i) 이차방정식 $2x^2-x+a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=1-8a>0 \quad \therefore a<\frac{1}{8}$$

(ii) (두 근의 합) $=\frac{1}{2}>0$

(iii) (두 근의 곱) $=\frac{a}{2}>0 \quad \therefore a>0$

이상에서 $0<a<\frac{1}{8}$

... 2단계

$$\text{답 } 0<a<\frac{1}{8}$$

채점 요소	비율
1단계 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 조건 파악하기	40%
2단계 a 의 값의 범위 구하기	60%

0727 전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(k, f(k))$ 에서의 접선의 기울기가 $f'(k)$ 임을 이용한다.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

원점에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를

$(x_1, \frac{\ln x_1}{x_1})$ 이라 하면 접선의 방정식은

$$y-\frac{\ln x_1}{x_1}=\frac{1-\ln x_1}{x_1^2}(x-x_1)$$

$$\therefore y=\frac{1-\ln x_1}{x_1^2}x-\frac{1-2\ln x_1}{x_1}$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0=-\frac{1-2\ln x_1}{x_1}, \quad \ln x_1=\frac{1}{2}$$

$$\therefore x_1=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

따라서 원점에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선의 기울기는

$$a=f'(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$$

한편 기울기가 t ($t>0$)인 직선이 곡선 $y=f(x)$ 에 접할 때의 접점의 좌표를 $(k, f(k))$ 라 하면

$$f'(k)=t \quad \therefore \frac{1-\ln k}{k^2}=t$$

이때 $g(t)=k$ 이므로

$$g\left(\frac{1-\ln k}{k^2}\right)=k$$

양변을 k 에 대하여 미분하면

$$g'\left(\frac{1-\ln k}{k^2}\right) \times \frac{-\frac{1}{k} \times k^2 - (1-\ln k) \times 2k}{k^4} = 1$$

$$\therefore g'\left(\frac{1-\ln k}{k^2}\right) = \frac{k^3}{2\ln k - 3}$$

양변에 $k=\sqrt{e}$ 를 대입하면

$$g'\left(\frac{1}{2e}\right)=-\frac{e\sqrt{e}}{2}$$

$$\therefore a \times g'(a) = \frac{1}{2e} \times g'\left(\frac{1}{2e}\right) = -\frac{\sqrt{e}}{4} \quad \text{답 ②}$$

0728 **전략** 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구한다.

$$\frac{dx}{d\theta} = 2\cos\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = -2\sin 2\theta \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sin 2\theta}{2\cos\theta} = \frac{-4\sin\theta\cos\theta}{2\cos\theta}$$

$$= -2\sin\theta \quad (\text{단, } \cos\theta \neq 0)$$

따라서 $P(2\sin\alpha, \cos 2\alpha)$ 라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $-2\sin\alpha$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \cos 2\alpha = -2\sin\alpha(x - 2\sin\alpha)$$

$$\therefore y = -2\sin\alpha \times x + 4\sin^2\alpha + \cos 2\alpha$$

즉 $a = -2\sin\alpha$, $b = 4\sin^2\alpha + \cos 2\alpha$ 이므로

$$a+b = -2\sin\alpha + 4\sin^2\alpha + \cos 2\alpha$$

$$= -2\sin\alpha + 4\sin^2\alpha + (1 - 2\sin^2\alpha)$$

$$= 2\sin^2\alpha - 2\sin\alpha + 1$$

$$= 2\left(\sin\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

따라서 $a+b$ 는 $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ 일 때 최솟값 $\frac{1}{2}$ 을 갖는다.

답 $\frac{1}{2}$

0729 **전략** $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값을 구하고 a_n 의 규칙을 찾는다.

$$f'(x) = -2\sin 2x + 2\sin x$$

$$= -4\sin x \cos x + 2\sin x$$

$$= -2\sin x(2\cos x - 1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad \sin x=0 \text{ 또는 } \cos x=\frac{1}{2}$$

$x>0$ 이므로

$$x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi, 2\pi, \frac{7}{3}\pi, 3\pi, \dots$$

이때

$$f''(x) = -2\cos x(2\cos x - 1) - 2\sin x \times (-2\sin x)$$

$$= 4\sin^2 x - 4\cos^2 x + 2\cos x$$

$$= 4(1 - \cos^2 x) - 4\cos^2 x + 2\cos x$$

$$= -8\cos^2 x + 2\cos x + 4$$

이므로

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{2} + 4 = 3 > 0$$

$$f''(\pi) = -8 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) + 4 = -6 < 0$$

$$f''\left(\frac{5}{3}\pi\right) = -8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{2} + 4 = 3 > 0$$

$$f''(2\pi) = -8 \times 1^2 + 2 \times 1 + 4 = -2 < 0$$

$$f''\left(\frac{7}{3}\pi\right) = -8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{2} + 4 = 3 > 0$$

$$f''(3\pi) = -8 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) + 4 = -6 < 0$$

⋮

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ 에서 극댓값을 갖고,

$x=\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi, \frac{7}{3}\pi, \dots$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$\therefore a_1 = \frac{\pi}{3}, a_2 = \frac{5}{3}\pi, a_3 = \frac{7}{3}\pi, a_4 = \frac{11}{3}\pi, \dots$$

따라서 $a_{2n-1} = \frac{6n-5}{3}\pi$, $a_{2n} = \frac{6n-1}{3}\pi$ (n 은 자연수)이므로

$$a_5 = \frac{13}{3}\pi, a_{22} = \frac{65}{3}\pi$$

$$\therefore \frac{a_{22}}{a_5} = 5$$

답 5

06

도함수의 활용 (1)

07 도함수의 활용 (2)

교과서 문제 정복하기

본책 105쪽, 107쪽

0730 $f'(x)=4x^3+8x$, $f''(x)=12x^2+8$
따라서 모든 실수 x 에 대하여 $f''(x)>0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 아래로 볼록하다. **답 풀이 참조**

0731 $f'(x)=e^{2x}+x \times 2e^{2x}=(2x+1)e^{2x}$
 $f''(x)=2e^{2x}+(2x+1) \times 2e^{2x}=4(x+1)e^{2x}$
따라서 $x<-1$ 에서 $f''(x)<0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1)$ 에서 위로 볼록하다. **답 풀이 참조**

0732 $f(x)=x^4-2x^3+4x-5$ 라 하면
 $f'(x)=4x^3-6x^2+4$,
 $f''(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$
 $f''(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=1$
 $0<x<1$ 에서 $f''(x)<0$
 $x<0$ 또는 $x>1$ 에서 $f''(x)>0$
따라서 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(0, 1)$ 에서 위로 볼록하고, 구간 $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$ 에서 아래로 볼록하다. **답 풀이 참조**

0733 $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ 이라 하면
 $f'(x)=2x-\frac{1}{x^2}$,
 $f''(x)=2+\frac{2}{x^3}=\frac{2x^3+2}{x^3}=\frac{2(x+1)(x^2-x+1)}{x^3}$
 $f''(x)=0$ 에서 $x+1=0 \quad \therefore x=-1$
 $-1<x<0$ 에서 $f''(x)<0$
 $x<-1$ 또는 $x>0$ 에서 $f''(x)>0$
따라서 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(-1, 0)$ 에서 위로 볼록하고, 구간 $(-\infty, -1)$, $(0, \infty)$ 에서 아래로 볼록하다. **답 풀이 참조**

0734 $f(x)=(x^2-x)e^x$ 이라 하면
 $f'(x)=(2x-1)e^x+(x^2-x)e^x=(x^2+x-1)e^x$,
 $f''(x)=(2x+1)e^x+(x^2+x-1)e^x$
 $= (x^2+3x)e^x=x(x+3)e^x$
 $f''(x)=0$ 에서 $x=-3$ 또는 $x=0$
 $-3<x<0$ 에서 $f''(x)<0$
 $x<-3$ 또는 $x>0$ 에서 $f''(x)>0$
따라서 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(-3, 0)$ 에서 위로 볼록하고, 구간 $(-\infty, -3)$, $(0, \infty)$ 에서 아래로 볼록하다. **답 풀이 참조**

0735 $f(x)=\ln(x^2+1)$ 이라 하면

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1},$$

$$f''(x)=\frac{2(x^2+1)-2x \times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$f''(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x<-1$ 또는 $x>1$ 에서 $f''(x)<0$

$-1<x<1$ 에서 $f''(x)>0$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ 에서 위로 볼록하고, 구간 $(-1, 1)$ 에서 아래로 볼록하다. **답 풀이 참조**

0736 $f(x)=x+2\sin x$ 라 하면

$$f'(x)=1+2\cos x, f''(x)=-2\sin x$$

$f''(x)=0$ 에서 $x=\pi (\because 0<x<2\pi)$

$0<x<\pi$ 에서 $f''(x)<0$

$\pi<x<2\pi$ 에서 $f''(x)>0$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(0, \pi)$ 에서 위로 볼록하고, 구간 $(\pi, 2\pi)$ 에서 아래로 볼록하다. **답 풀이 참조**

0737 $f(x)=x^4-6x^2+6$ 이라 하면

$$f'(x)=4x^3-12x,$$

$$f''(x)=12x^2-12=12(x+1)(x-1)$$

$f''(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

이때 $x=-1$, $x=1$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$(-1, 1)$, $(1, 1)$

답 $(-1, 1)$, $(1, 1)$

0738 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ 라 하면

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)-x \times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2},$$

$$f''(x)=\frac{-2x(x^2+1)^2-(-x^2+1) \times 2(x^2+1) \times 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$f''(x)=0$ 에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

이때 $x=-\sqrt{3}$, $x=0$, $x=\sqrt{3}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$, $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$

답 $(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$, $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$

0739 $f(x)=e^x-e^{-x}+2$ 라 하면

$$f'(x)=e^x+e^{-x}, f''(x)=e^x-e^{-x}$$

$f''(x)=0$ 에서 $x=0$

이때 $x=0$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(0, 2)$ **답** $(0, 2)$

0740 $f(x)=x^2-2x\ln x$ 라 하면 $x>0$ 이고

$$f'(x)=2x-2\ln x-2, f''(x)=2-\frac{2}{x}=\frac{2(x-1)}{x}$$

$f''(x)=0$ 에서 $x=1$

이때 $x=1$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

(1, 1)

답 (1, 1)

0741 $f(x)=x+\cos x$ 라 하면

$$f'(x)=1-\sin x, f''(x)=-\cos x$$

$f''(x)=0$ 에서 $x=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0<x<\pi$)

이때 $x=\frac{\pi}{2}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

답 $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

0742 (1) 함수 $f(x)$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

(2) $f(-x)=e^{-x^2}=f(x)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

(3) $f'(x)=-2xe^{-x^2}$

$$f''(x)=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=2(2x^2-1)e^{-x^2}$$

$$f'(x)=0\text{에서 } x=0$$

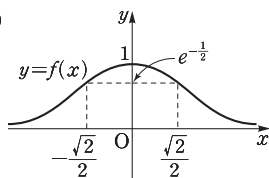
$$f''(x)=0\text{에서 } 2x^2-1=0$$

$$\therefore x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	...	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	↗	$e^{-\frac{1}{2}}$	↘	1	↘	$e^{-\frac{1}{2}}$	↗

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=0$ 이므로 점근선은 x 축이다.

(5)



답 풀이 참조

0743 함수 $f(x)$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이고

$f(0)=0$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점을 지난다.

$$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$$

$$f''(x)=12x^2-24x=12x(x-2)$$

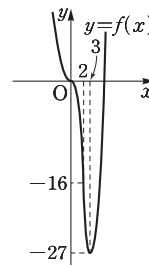
$$f'(x)=0\text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

$$f''(x)=0\text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

x	...	0	...	2	...	3	...
$f'(x)$	-	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-	0	+	+	+
$f(x)$	↖	0	↘	-16	↘	-27	↗

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조



0744 함수 $f(x)$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이고 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2+3}=\frac{1}{x^2+3}=f(x)$$

이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

$$f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x)=-\frac{2 \times (x^2+3)^2 - 2x \times 2(x^2+3) \times 2x}{(x^2+3)^4}$$

$$=\frac{6x^2-6}{(x^2+3)^3}=\frac{6(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$$

$$f'(x)=0\text{에서 } x=0$$

$$f''(x)=0\text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

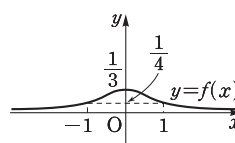
x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	$\frac{1}{3}$	↘	$\frac{1}{4}$	↗

이때 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=0$

이므로 점근선은 x 축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0745 함수 $f(x)$ 의 정의역은 $x \geq 0$ 인 실수 전체의 집합이고

$f(0)=0$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점을 지난다.

$$f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f''(x)=\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=0\text{에서}$$

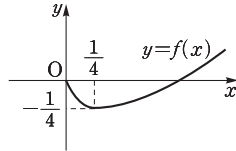
$$x=\frac{1}{4}$$

x	0	...	$\frac{1}{4}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f''(x)$		+	+	+
$f(x)$	0	↖	$-\frac{1}{4}$	↗

$f''(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0746 함수 $f(x)$ 의 정의역은 $x>0$ 인 실수 전체의 집합이다.

$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1, f''(x) = \frac{1}{x} \text{ 이므로}$$

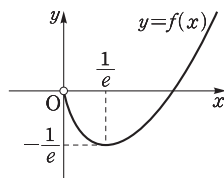
$$f'(x)=0 \text{에서 } \ln x = -1 \quad \therefore x = \frac{1}{e}$$

$f''(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

x	0	...	$\frac{1}{e}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f''(x)$		+	+	+
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{e}$	↗

이때 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

RPM비법노트

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ 에서 $\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0^+$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{1}{t} = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

0747 함수 $f(x)$ 의 정의역은 $\{x | -\pi \leq x \leq \pi\}$ 이고 $f(0)=0$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점을 지난다.

또 $-\pi \leq x \leq \pi$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x) = -x - \sin(-x) = -x + \sin x = -f(x)$$

이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$$f'(x) = 1 - \cos x, f''(x) = \sin x \text{ 이므로}$$

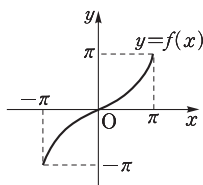
$$f'(x)=0 \text{에서 } \cos x = 1 \quad \therefore x = 0 \quad (\because -\pi \leq x \leq \pi)$$

$$f''(x)=0 \text{에서}$$

$$x = -\pi \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = \pi \quad (\because -\pi \leq x \leq \pi)$$

x	$-\pi$	...	0	...	π
$f'(x)$		+	0	+	
$f''(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$-\pi$	↗	0	↗	π

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

$$\mathbf{0748} \quad f'(x) = \frac{(2x+3)(x-3) - (x^2+3x+7)}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 6x - 16}{(x-3)^2} = \frac{(x+2)(x-8)}{(x-3)^2}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=8 \quad (\because 4 \leq x \leq 9)$$

x	4	...	8	...	9
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	35	↘	19	↗	$\frac{115}{6}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 최댓값 35, $x=8$ 에서 최솟값 19를 갖는다.

답 최댓값: 35, 최솟값: 19

$$\mathbf{0749} \quad f'(x) = \sqrt{4-x^2} + x \times \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } 4-2x^2=0, \quad x^2=2$$

$$\therefore x = -\sqrt{2} \text{ 또는 } x = \sqrt{2}$$

x	-2	...	$-\sqrt{2}$	...	$\sqrt{2}$	...	2
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	2	↘	0

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\sqrt{2}$ 에서 최댓값 2, $x=-\sqrt{2}$ 에서 최솟값 -2를 갖는다.

답 최댓값: 2, 최솟값: -2

$$\mathbf{0750} \quad f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1$$

x	-1	...	1	...	3
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-e$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{3}{e^3}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 $\frac{1}{e}$, $x=-1$ 에서 최솟값 $-e$ 를 갖는다.

답 최댓값: $\frac{1}{e}$, 최솟값: $-e$

$$\mathbf{0751} \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \ln x = 1 \quad \therefore x = e$$

x	1	...	e	...	$3e$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{1+\ln 3}{3e}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=e$ 에서 최댓값 $\frac{1}{e}$, $x=1$ 에서 최솟값 0을 갖는다.

답 최댓값: $\frac{1}{e}$, 최솟값: 0

0752 $f'(x)=1-2\sin x$

$f'(x)=0$ 에서 $\sin x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ ($\because 0\leq x\leq\pi$)

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	2	↗	$\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$	↘	$\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$	↗	$\pi-2$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{\pi}{6}$ 에서 최댓값 $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$, $x=\frac{5}{6}\pi$ 에서 최솟값 $\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$ 을 갖는다.

답 최댓값: $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$, 최솟값: $\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$

0753 $f(x)=x^2-\frac{1}{x^2+1}$ 이라 하면

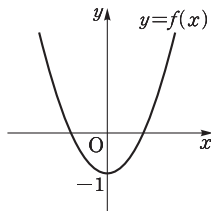
$f'(x)=2x+\frac{2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x(x^4+2x^2+2)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ ($\because x^4+2x^2+2>0$)

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	-1	↗

이때 $\lim_{x\rightarrow\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\rightarrow-\infty}f(x)=\infty$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점이 2개이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



답 2

0754 $f(x)=2x-\sqrt{x}-1$ 이라 하면 $x\geq 0$ 이고

$f'(x)=2-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{4\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$

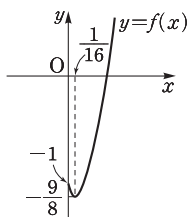
$f'(x)=0$ 에서 $4\sqrt{x}-1=0$

$\sqrt{x}=\frac{1}{4} \therefore x=\frac{1}{16}$

x	0	...	$\frac{1}{16}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	-1	↘	$-\frac{9}{8}$	↗

이때 $\lim_{x\rightarrow\infty}f(x)=\infty$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점이 1개이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



답 1

0755 $f(x)=e^x-x$ 라 하면

$f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$ 에서

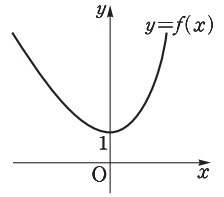
$x=0$

이때 $\lim_{x\rightarrow\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\rightarrow-\infty}f(x)=\infty$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축이 만나지 않으므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 0이다.

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	1	↗



답 0

0756 $x-2=\ln x$ 에서 $\ln x-x+2=0$

$f(x)=\ln x-x+2$ 라

하면 $x>0$ 이고

$f'(x)=\frac{1}{x}-1$

$f'(x)=0$ 에서

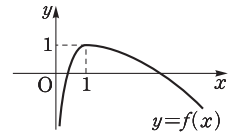
$x=1$

이때 $\lim_{x\rightarrow 0^+}f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\rightarrow\infty}f(x)=-\infty$ 이므로 함수 $y=f(x)$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점이 2개이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



답 2

0757 $x+\sin x=\frac{1}{2}$ 에서 $x+\sin x-\frac{1}{2}=0$

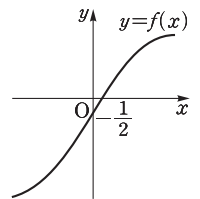
$f(x)=x+\sin x-\frac{1}{2}$ 이라 하면 $f'(x)=1+\cos x$

$f'(x)\geq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

이때 $f(0)=-\frac{1}{2}$ 이고 $\lim_{x\rightarrow\infty}f(x)=\infty$,

$\lim_{x\rightarrow-\infty}f(x)=-\infty$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점이 1개이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



답 1

0758 $e^x\geq 2x-1$ 에서 $e^x-2x+1\geq 0$

$f(x)=e^x-2x+1$ 이라 하면

$f'(x)=e^x-2$

$f'(x)=0$ 에서 $x=\ln 2$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\ln 2$

에서 최솟값 $3-2\ln 2$ 를 가지므로

$f(x)\geq 0$, 즉 $e^x-2x+1\geq 0$

즉 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $e^x\geq 2x-1$ 이 성립한다.

x	...	$\ln 2$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$3-2\ln 2$	↗

답 풀이 참조

0759 $f(x)=x-\ln(x-1)$ 이라 하면

$$f'(x)=1-\frac{1}{x-1}=\frac{x-2}{x-1}$$

$f'(x)=0$ 에서

$$x=2$$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$x=2$ 에서 최솟값 2를

가지므로

$$f(x)>0, \text{ 즉 } x-\ln(x-1)>0$$

즉 $x>1$ 일 때, 부등식 $x-\ln(x-1)>0$ 이 성립한다.

답 풀이 참조

0760 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v=f'(t)=e^t-2, a=f''(t)=e^t$$

따라서 $t=3$ 에서의 점 P의

속도는 e^3-2

가속도는 e^3

답 속도: e^3-2 , 가속도: e^3

0761 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v=f'(t)=3-2\cos 2t, a=f''(t)=4\sin 2t$$

따라서 $t=\frac{\pi}{6}$ 에서의 점 P의

속도는 $3-2\times\frac{1}{2}=2$

가속도는 $4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

답 속도: 2, 가속도: $2\sqrt{3}$

0762 $\frac{dx}{dt}=3, \frac{dy}{dt}=2t^2$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는

$$(3, 2t^2)$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 속도는 $(3, 8)$

또 $\frac{d^2x}{dt^2}=0, \frac{d^2y}{dt^2}=4t$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 가속도는

$$(0, 4t)$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 가속도는 $(0, 8)$

답 속도: $(3, 8)$, 가속도: $(0, 8)$

0763 $\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{t^2}, \frac{dy}{dt}=e^t-e^{-t}$ 이므로 시각 t 에서의 점 P

의 속도는

$$\left(-\frac{1}{t^2}, e^t-e^{-t}\right)$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 속도는 $\left(-\frac{1}{4}, e^2-\frac{1}{e^2}\right)$

또 $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{2}{t^3}, \frac{d^2y}{dt^2}=e^t+e^{-t}$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 가속도는

$$\left(\frac{2}{t^3}, e^t+e^{-t}\right)$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 가속도는 $\left(\frac{1}{4}, e^2+\frac{1}{e^2}\right)$

답 속도: $\left(-\frac{1}{4}, e^2-\frac{1}{e^2}\right)$, 가속도: $\left(\frac{1}{4}, e^2+\frac{1}{e^2}\right)$

0764 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{dy}{dt}=\frac{2}{t}$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는

$$\left(\frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{2}{t}\right)$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 속도는

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$$

또 $\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{1}{2t\sqrt{t}}, \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{2}{t^2}$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 가속도는

$$\left(-\frac{1}{2t\sqrt{t}}, -\frac{2}{t^2}\right)$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 가속도는

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}, -\frac{1}{2}\right)$$

답 속도: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, 가속도: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}, -\frac{1}{2}\right)$

0765 $\frac{dx}{dt}=\pi\cos\pi t, \frac{dy}{dt}=1+\pi\sin\pi t$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는

$$(\pi\cos\pi t, 1+\pi\sin\pi t)$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 속도는 $(\pi, 1)$

또 $\frac{d^2x}{dt^2}=-\pi^2\sin\pi t, \frac{d^2y}{dt^2}=\pi^2\cos\pi t$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 가속도는

$$(-\pi^2\sin\pi t, \pi^2\cos\pi t)$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 가속도는 $(0, \pi^2)$

답 속도: $(\pi, 1)$, 가속도: $(0, \pi^2)$

유형 익히기

• 본책 108~117쪽

0766 $f(x)=e^x\sin x$ 라 하면

$$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$$

$$f''(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)$$

$$=2e^x\cos x$$

곡선 $y=f(x)$ 가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$ 이어야 하므로

$$2e^x\cos x<0$$

이때 $e^x>0$ 이므로 $\cos x<0$

$$\therefore \frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi \quad (\because 0<x<2\pi)$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 가 위로 볼록한 구간은 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ 이다.

답 ④

0767 $f(x)=x^2(\ln x-2)$ 라 하면 $x>0$ 이고

$$f'(x)=2x(\ln x-2)+x^2 \times \frac{1}{x}=x(2\ln x-3)$$

$$f''(x)=2\ln x-3+x \times \frac{2}{x}=2\ln x-1$$

곡선 $y=f(x)$ 가 아래로 볼록하려면 $f''(x)>0$ 이어야 하므로

$$2\ln x-1>0, \quad \ln x>\frac{1}{2} \quad \therefore x>e^{\frac{1}{2}}$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(e^{\frac{1}{2}}, \infty)$ 에서 아래로 볼록하므로

$$a \geq e^{\frac{1}{2}}$$

즉 a 의 최솟값은 $e^{\frac{1}{2}}$ 이다. 답 $e^{\frac{1}{2}}$

0768 $f(x)=4x^4-4ax^3+6ax^2+5a$ 라 하면

$$f'(x)=16x^3-12ax^2+12ax$$

$$f''(x)=48x^2-24ax+12a \\ =12(4x^2-2ax+a)$$

이때 곡선 $y=f(x)$ 가 구간 $(1, 3)$ 에서 위로 볼록하려면

$1<x<3$ 에서 $f''(x)<0$ 이어야 한다.

$$f''(1) \leq 0 \text{에서} \quad 4-a \leq 0 \quad \therefore a \geq 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f''(3) \leq 0 \text{에서} \quad 36-5a \leq 0 \quad \therefore a \geq \frac{36}{5} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서} \quad a \geq \frac{36}{5}$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 8이다. 답 $\textcircled{5}$

0769 $f(x)=\ln(x^2+4)^2=2\ln(x^2+4)$ 에서

$$f'(x)=2 \times \frac{2x}{x^2+4} = \frac{4x}{x^2+4}$$

$$f''(x)=\frac{4(x^2+4)-4x \times 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-4(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}$$

$$f''(x)=0 \text{에서} \quad x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

이때 $x=-2, x=2$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$$(-2, \ln 64), (2, \ln 64)$$

따라서 두 변곡점 사이의 거리는

$$2-(-2)=4 \quad \text{답 } 4$$

0770 $f(x)=x+3\cos x (0 \leq x \leq 2\pi)$ 라 하면

$$f'(x)=1-3\sin x$$

$$f''(x)=-3\cos x \quad \dots \text{1단계}$$

$$f''(x)=0 \text{에서} \quad \cos x=0$$

$$\therefore x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

이때 $x=\frac{\pi}{2}, x=\frac{3}{2}\pi$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변

$$\text{곡점의 } x\text{좌표는} \quad \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \quad \dots \text{2단계}$$

따라서 모든 변곡점의 x 좌표의 합은

$$\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi = 2\pi \quad \dots \text{3단계}$$

답 2π

채점 요소		비율
1단계	$f''(x)$ 구하기	30%
2단계	변곡점의 x 좌표 구하기	50%
3단계	모든 변곡점의 x 좌표의 합 구하기	20%

0771 $f(x)=xe^{-x}$ 이라 하면

$$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$$

$$f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=e^{-x}(x-2)$$

$$f''(x)=0 \text{에서} \quad x=2$$

이때 $x=2$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$$\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$$

따라서 변곡점에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=-\frac{1}{e^2}$ 이므로 구

하는 접선의 방정식은

$$y-\frac{2}{e^2}=-\frac{1}{e^2}(x-2)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}$$

$$\text{답 } y=-\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}$$

0772 $f(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{4}{x}+2$ 라 하면 $x \neq 0$ 이고

$$f'(x)=x+\frac{4}{x^2}$$

$$f''(x)=1-\frac{8}{x^3}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$$

$$f''(x)=0 \text{에서} \quad x=2 \quad (\because x^2+2x+4>0)$$

이때 $x=2$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$$(2, 2)$$

따라서 변곡점과 원점 사이의 거리는

$$\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

답 $\textcircled{4}$

0773 $f'(x)=6x^2+2ax+b$

$$f''(x)=12x+2a$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극소이므로 $f'(1)=0$ 에서

$$6+2a+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 좌표가 $(-1, 6)$ 이므로

$$f(-1)=6 \text{에서}$$

$$-2+a-b+c=6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$f''(-1)=0 \text{에서}$$

$$-12+2a=0 \quad \therefore a=6$$

$a=6$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$18+b=0 \quad \therefore b=-18$$

$a=6, b=-18$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$22+c=6 \quad \therefore c=-16$$

$$\therefore a+b+c=-28$$

답 -28

0774 $f(x) = (ax^2 + bx)e^x$ 이라 하면

$$f'(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx)e^x$$

$$= \{ax^2 + (2a + b)x + b\}e^x$$

$$f''(x) = (2ax + 2a + b)e^x + \{ax^2 + (2a + b)x + b\}e^x$$

$$= \{ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b\}e^x$$

이때 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점의 좌표가 $(-4, 12e^{-4})$ 이므로

$$f(-4) = 12e^{-4} \text{에서 } (16a - 4b)e^{-4} = 12e^{-4}$$

$$\therefore 4a - b = 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f''(-4) = 0 \text{에서 } 2a - 2b = 0$$

$$\therefore a - b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 1$

$$\therefore a + b = 2 \quad \text{답 2}$$

0775 $f(x) = \left(\ln \frac{1}{ax}\right)^2 = (-\ln ax)^2 = (\ln ax)^2$ 이라 하면

$x > 0$ 이고

$$f'(x) = 2 \ln ax \times \frac{a}{ax} = \frac{2 \ln ax}{x}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{2a}{ax} \times x - 2 \ln ax}{x^2} = \frac{2(1 - \ln ax)}{x^2}$$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } \ln ax = 1$$

$$ax = e \quad \therefore x = \frac{e}{a}$$

이때 $x = \frac{e}{a}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌

표는 $\left(\frac{e}{a}, 1\right)$

따라서 점 $\left(\frac{e}{a}, 1\right)$ 이 직선 $y = 5x$ 위에 있으므로

$$1 = \frac{5e}{a} \quad \therefore a = 5e \quad \text{답 5e}$$

0776 $f'(x) = 2ax + 3 + \sin x$

$$f''(x) = 2a + \cos x$$

곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점이 존재하려면 방정식 $f''(x) = 0$ 이 실근을 갖고, 이 실근의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌어야 한다.

$$f''(x) = 0 \text{에서 } \cos x = -2a$$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$-1 \leq -2a \leq 1 \quad \therefore -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$$

$$a = -\frac{1}{2} \text{이면 } f''(x) = -1 + \cos x \leq 0$$

$$a = \frac{1}{2} \text{이면 } f''(x) = 1 + \cos x \geq 0$$

즉 $a = -\frac{1}{2}$ 또는 $a = \frac{1}{2}$ 이면 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로

곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점이 존재하지 않는다.

따라서 구하는 a 의 값의 범위는

$$-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2} \quad \text{답 } -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$$

다른 풀이 곡선 $y = f(x)$ 가 변곡점을 가지려면

$$(f''(x) \text{의 최솟값}) < 0 < (f''(x) \text{의 최댓값})$$

이어야 한다.

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$2a - 1 \leq 2a + \cos x \leq 2a + 1$$

$$\therefore 2a - 1 \leq f''(x) \leq 2a + 1$$

따라서 $2a - 1 < 0, 2a + 1 > 0$ 이어야 하므로

$$-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$$

0777 구간 $(a, c), (d, e)$ 에서 $f'(x)$ 가 증가하므로

$$f''(x) > 0$$

따라서 $y = f(x)$ 의 그래프는 구간 $(a, c), (d, e)$ 에서 아래로 볼록하다.

답 ②

참고 구간 $[0, f]$ 에서 $f''(x)$ 의 부호를 조사하면 다음과 같다.

x	0	...	a	...	b	...	c	...	d	...	e	...	f
$f''(x)$		-	0	+	+	+	0	-	0	+	0	-	

0778 $\neg$. $f'(0) = 0, f'(d) = 0$ 이고 $x = 0, x = d$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x = 0, x = d$ 에서 극소이다.

또 $f'(b) = 0$ 이고 $x = b$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x = b$ 에서 극대이다.

따라서 함수 $f(x)$ 가 극값을 갖는 x 의 값은 0, b, d 의 3개이다. (참)

$\cup$. 구간 (c, e) 에서 $f'(x)$ 가 증가하므로 $f''(x) > 0$

따라서 $y = f(x)$ 의 그래프는 구간 (c, e) 에서 아래로 볼록하다. (거짓)

$\cap$. $f''(a) = 0, f''(c) = 0$ 이고 $x = a, x = c$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 $y = f(x)$ 의 그래프의 변곡점은 2개이다. (참)

이상에서 옳은 것은 $\neg, \cap$ 이다. **답 ④**

0779 함수 $f(x)$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이고 $f(0) = 0$ 이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 원점을 지난다.

또 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x) = \frac{-2x}{x^2 + 3} = -f(x)$$

이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$$f'(x) = \frac{2(x^2 + 3) - 2x \times 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-2(x^2 - 3)}{(x^2 + 3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4x(x^2 + 3)^2 + 2(x^2 - 3) \times 2(x^2 + 3) \times 2x}{(x^2 + 3)^4}$$

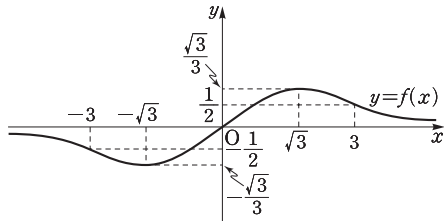
$$= \frac{4x^3 - 36x}{(x^2 + 3)^3} = \frac{4x(x + 3)(x - 3)}{(x^2 + 3)^3}$$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad x=-\sqrt{3} \text{ 또는 } x=\sqrt{3}$$

$$f''(x)=0 \text{에서} \quad x=-3 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

x	...	-3	...	$-\sqrt{3}$	...	0	...	$\sqrt{3}$	...	3	...
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

이때 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 구간 $(0, 3)$ 에서 위로 볼록하고 구간 $(3, \infty)$ 에서 아래로 볼록하다. (거짓)

ㄴ. 점근선의 방정식은 $y=0$ 이다. (거짓)

ㄷ. $f''(-3)=0$, $f''(0)=0$, $f''(3)=0$ 이고 $x=-3$, $x=0$, $x=3$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점은 점 $(-3, -\frac{1}{2})$, $(0, 0)$, $(3, \frac{1}{2})$ 의 3개이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

0780 함수 $f(x)$ 의 정의역은 $\{x|0 \leq x \leq \pi\}$ 이고 $f(0)=0$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점을 지난다.

$$f'(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x)$$

$$f''(x) = -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x)$$

$$= -2e^{-x} \cos x$$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad \cos x = \sin x$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4} \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

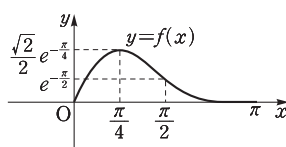
$$f''(x)=0 \text{에서} \quad \cos x = 0$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

x	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	-	-	
$f''(x)$		-	-	-	0	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$	$\searrow$	$e^{-\frac{\pi}{2}}$	$\searrow$	0

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ. $x = \frac{\pi}{4}$ 에서 극댓값 $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$ 을 갖는다. (거짓)



ㄴ. $y=f(x)$ 의 그래프는 구간 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 에서 아래로 볼록하다.

(참)

ㄷ. $f''(\frac{\pi}{2})=0$ 이고 $x=\frac{\pi}{2}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프의 변곡점의 좌표는 $(\frac{\pi}{2}, e^{-\frac{\pi}{2}})$ 이다.

(거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

$$\mathbf{0781} \quad f'(x) = \frac{(2x-3)(x-3)-(x^2-3x+1)}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2} = \frac{(x-2)(x-4)}{(x-3)^2}$$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad x=2 \quad (\because -2 \leq x < 3)$$

x	-2	...	2	...	3
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\frac{11}{5}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 1을 갖는다.

답 1

$$\mathbf{0782} \quad f'(x) = \frac{5(x^2+x+1)-(5x-3)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{-5x^2+6x+8}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= -\frac{(5x+4)(x-2)}{(x^2+x+1)^2}$$

... 1단계

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad x = -\frac{4}{5} \text{ 또는 } x=2$$

x	-1	...	$-\frac{4}{5}$	...	2	...
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$	-8	$\searrow$	$-\frac{25}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 1을 가지므로

$$a=2, b=1$$

... 2단계

$$\therefore a^2+b^2=5$$

... 3단계

답 5

채점 요소	비율
1단계 $f'(x)$ 구하기	30 %
2단계 a, b 의 값 구하기	60 %
3단계 a^2+b^2 의 값 구하기	10 %

$$\mathbf{0783} \quad f'(x) = \frac{a(x^2-x+2)-(ax+b)(2x-1)}{(x^2-x+2)^2}$$

$$= \frac{-ax^2-2bx+2a+b}{(x^2-x+2)^2}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=0$ 이므로 미분가능한 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극소이면서 최소이다.

$$f'(-1)=0 \text{에서} \quad \frac{a+3b}{16}=0$$

$$\therefore a+3b=0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$f(-1)=-1 \text{에서} \quad \frac{-a+b}{4}=-1$$

$$\therefore a-b=4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면

$$a=3, b=-1$$

$$\therefore ab=-3$$

답 ②

0784 $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ 에서 $-1 \leq x \leq 1$ 이고

$$f'(x)=\sqrt{1-x^2}+\frac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad 2x^2=1$$

$$\therefore x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	-1	...	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	1
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 최댓값 $\frac{1}{2}$, $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 최

솟값 $-\frac{1}{2}$ 을 가지므로

$$M=\frac{1}{2}, m=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore M-m=1$$

답 ③

0785 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{6-x}$ 에서 $0 \leq x \leq 6$ 이고

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{6-x}}=\frac{\sqrt{6-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{6-x}}$$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad \sqrt{6-x}=\sqrt{x}$$

양변을 제곱하면

$$6-x=x \quad \therefore x=3$$

x	0	...	3	...	6
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$\sqrt{6}$	$\nearrow$	$2\sqrt{3}$	$\searrow$	$\sqrt{6}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값 $2\sqrt{3}$ 을 가지므로

$$a=3, b=2\sqrt{3}$$

$$\therefore ab=6\sqrt{3}$$

답 $6\sqrt{3}$

0786 $f'(x)=\sqrt{a^2-x^2}+(x+a) \times \frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}$

$$=\frac{-2x^2-ax+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=-\frac{(x+a)(2x-a)}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad x=\frac{a}{2} \quad (\because 0 \leq x \leq a)$$

x	0	...	$\frac{a}{2}$	...	a
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	a^2	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$	$\searrow$	0

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{a}{2}$ 에서 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ 을 가지므로

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad a^2=\frac{4}{9}$$

$$\therefore a=\frac{2}{3} \quad (\because a>0)$$

답 $\frac{2}{3}$

0787 $f'(x)=(2x-3)e^x+(x^2-3x+1)e^x$

$$=(x^2-x-2)e^x=(x+1)(x-2)e^x$$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

x	-2	...	-1	...	2	...	3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$\frac{11}{e^2}$	$\nearrow$	$\frac{5}{e}$	$\searrow$	$-e^2$	$\nearrow$	e^3

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값 e^3 , $x=2$ 에서 최솟값 $-e^2$ 을 가지므로

$$M=e^3, m=-e^2$$

$$\therefore Mm=-e^5$$

답 $-e^5$

0788 $f'(x)=-2xe^{4x}-x^2 \times 4e^{4x}=-2x(1+2x)e^{4x}$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad x=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=0$$

x	-1	...	$-\frac{1}{2}$	...	0
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$-\frac{1}{e^4}$	$\searrow$	$-\frac{1}{4e^2}$	$\nearrow$	0

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-\frac{1}{2}$ 에서 최솟값 $-\frac{1}{4e^2}$ 을 가지므로

$$a=-\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{4e^2}$$

$$\therefore \frac{a}{b}=2e^2$$

답 $2e^2$

0789 $f(x)=\frac{kx^2}{e^x}=kx^2e^{-x}$ 에서

$$f'(x)=2kxe^{-x}+kx^2 \times (-e^{-x})=kx(2-x)e^{-x}$$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad x=0 \text{ 또는 } x=2$$

x	0	...	2	...	4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4k}{e^2}$	$\searrow$	$\frac{16k}{e^4}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 $\frac{4k}{e^2}$ 를 가지므로

$$\frac{4k}{e^2}=8 \quad \therefore k=2e^2$$

답 $2e^2$

0790 $f'(x) = (2x+a)e^{-x} + (x^2+ax+a) \times (-e^{-x})$
 $= -\{x^2 + (a-2)x\}e^{-x}$
 $= -x(x+a-2)e^{-x}$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2-a$

x	...	$2-a$	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2-a$ 에서 극소이므로

$g(a) = f(2-a)$
 $= \{(2-a)^2 + a(2-a) + a\}e^{a-2}$
 $= (4-a)e^{a-2}$
 $\therefore g'(a) = -e^{a-2} + (4-a)e^{a-2}$
 $= (3-a)e^{a-2}$

$g'(a)=0$ 에서 $a=3$

a	2	...	3	...
$g'(a)$		+	0	-
$g(a)$		$\nearrow$	e	$\searrow$

따라서 함수 $g(a)$ 는 $a=3$ 에서 최댓값 e 를 갖는다.

답 ④

0791 $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+4}$

$f'(x)=0$ 에서 $x=\frac{1}{2}$

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$\ln 4$	$\searrow$	$\ln \frac{15}{4}$	$\nearrow$	$\ln 6$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 $\ln 6$, $x=\frac{1}{2}$ 에서 최솟값

$\ln \frac{15}{4}$ 를 가지므로

$a=2, b=\frac{1}{2}$

$\therefore a-b=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

0792 $f(x) = x \ln \frac{1}{x} = -x \ln x$ 에서 $x>0$ 이고

$f'(x) = -\ln x - 1$

$f'(x)=0$ 에서 $\ln x = -1 \quad \therefore x = \frac{1}{e}$

x	0	...	$\frac{1}{e}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{1}{e}$ 에서 최댓값 $\frac{1}{e}$ 을 갖는다.

답 $\frac{1}{e}$

0793 $f(x) = \log_3(3-x) + 2\log_3(x+3)$ 에서 $-3 < x < 3$ 이고

$f'(x) = \frac{-1}{(3-x)\ln 3} + \frac{2}{(x+3)\ln 3}$
 $= \frac{x+3+2(x-3)}{(x-3)(x+3)\ln 3}$
 $= \frac{3(x-1)}{(x-3)(x+3)\ln 3}$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$

x	-3	...	1	...	3
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	$5\log_3 2$	$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 $5\log_3 2$ 를 가지므로

$a=1, b=5\log_3 2$

$\therefore ab = 5\log_3 2$

답 $5\log_3 2$

0794 $f(x) = x \ln x - 2x + k$ 에서 $x>0$ 이고

$f'(x) = \ln x + 1 - 2 = \ln x - 1$

$f'(x)=0$ 에서 $\ln x = 1 \quad \therefore x = e$

x	0	...	e	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$-e+k$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=e$ 에서 최솟값 $-e+k$ 를 가지므로

$-e+k=0 \quad \therefore k=e$

답 ⑤

0795 $f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $\cos x = 0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0 \leq x \leq 2\pi$)

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}\pi$	$\nearrow$	1

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{\pi}{2}$ 에서 최댓값 $\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3}{2}\pi$ 에서 최솟

값 $-\frac{3}{2}\pi$ 를 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은

$\frac{\pi}{2} + \left(-\frac{3}{2}\pi\right) = -\pi$

답 ①

0796 $f'(x) = \frac{\sin x \sin x - (2 - \cos x) \cos x}{\sin^2 x}$
 $= \frac{1 - 2 \cos x}{\sin^2 x}$

$f'(x)=0$ 에서 $1 - 2 \cos x = 0, \quad \cos x = \frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 < x < \pi)$

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	π
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{\pi}{3}$ 에서 최솟값 $\sqrt{3}$ 을 갖는다. **답 ③**

$$\begin{aligned} 0797 \quad f'(x) &= \sin x \cos x + (2 - \cos x)(-\sin x) \\ &= 2 \sin x (\cos x - 1) \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서

$$\sin x = 0 \text{ 또는 } \cos x = 1$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\pi \text{ 또는 } x=2\pi \quad (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

x	0	...	π	...	2π
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 또는 $x=2\pi$ 에서 최댓값 1, $x=\pi$ 에서 최솟값 -3을 가지므로

$$M=1, m=-3$$

$$\therefore M-m=4$$

답 4

다른 풀이 $f(x) = (2 - \cos x) \cos x$
 $= -\cos^2 x + 2 \cos x$

이때 $\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고, 함수 $f(x)$ 를 t 에 대한 함수 $g(t)$ 로 나타내면

$$g(t) = -t^2 + 2t = -(t-1)^2 + 1$$

$-1 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는

$$t=1 \text{에서 최댓값 } 1, t=-1 \text{에서 최솟값 } -3$$

$$\text{을 가지므로 } M=1, m=-3$$

0798 $f'(x) = a(1 - 2 \cos 2x)$ **... 1단계**

$$f'(x)=0 \text{에서 } \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 \leq 2x \leq \pi) \quad \therefore x = \frac{\pi}{6}$$

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}a$

이때 $a > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{\pi}{6}$ 에서 최댓값 $\frac{\pi}{2}a$, $x=\frac{\pi}{6}$

에서 최솟값 $\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$ 를 갖는다. **... 2단계**

$$\text{즉 } \frac{\pi}{2}a = \pi \text{이므로 } a=2$$

따라서 구하는 최솟값은

$$\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 2 = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$$

... 3단계

답 $\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$

	채점 요소	비율
1단계	$f'(x)$ 구하기	20%
2단계	$f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 a 에 대한 식으로 나타내기	50%
3단계	최솟값 구하기	30%

$$\begin{aligned} 0799 \quad f(x) &= \cos x \sin^2 x + 3 \\ &= \cos x (1 - \cos^2 x) + 3 \\ &= -\cos^3 x + \cos x + 3 \end{aligned}$$

이때 $\cos x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓고 함수 $f(x)$ 를 t 에 대한 함수 $g(t)$ 로 나타내면

$$g(t) = -t^3 + t + 3$$

$$\therefore g'(t) = -3t^2 + 1$$

$$g'(t)=0 \text{에서 } t^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore t = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 또는 } t = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

t	-1	...	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	...	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	...	1
$g'(t)$		-	0	+	0	-	
$g(t)$	3	$\searrow$	$3 - \frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	$3 + \frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	3

따라서 함수 $g(t)$ 는 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 최댓값 $3 + \frac{2\sqrt{3}}{9}$, $t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 에

서 최솟값 $3 - \frac{2\sqrt{3}}{9}$ 을 가지므로

$$M = 3 + \frac{2\sqrt{3}}{9}, m = 3 - \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$\therefore M+m=6$$

답 ④

$$\begin{aligned} 0800 \quad f(x) &= 27^x - 2 \times 3^{x+1} + 4 \\ &= (3^x)^3 - 6 \times 3^x + 4 \end{aligned}$$

이때 $3^x = t$ ($t > 0$)로 놓고 함수 $f(x)$ 를 t 에 대한 함수 $g(t)$ 로 나타내면

$$g(t) = t^3 - 6t + 4$$

$$\therefore g'(t) = 3t^2 - 6$$

$$g'(t)=0 \text{에서 } t^2 = 2 \quad \therefore t = \sqrt{2} \quad (\because t > 0)$$

t	0	...	$\sqrt{2}$	...
$g'(t)$		-	0	+
$g(t)$		$\searrow$	$4(1 - \sqrt{2})$	$\nearrow$

따라서 함수 $g(t)$ 는 $t=\sqrt{2}$ 에서 최솟값 $4(1 - \sqrt{2})$ 를 갖는다.

답 ④

$$\begin{aligned} 0801 \quad f(x) &= (\log_2 x)^3 - 6 \log_4 x - 5 \\ &= (\log_2 x)^3 - 3 \log_2 x - 5 \end{aligned}$$

이때 $\log_2 x = t$ ($-2 \leq t \leq 1$)로 놓고 함수 $f(x)$ 를 t 에 대한 함수 $g(t)$ 로 나타내면

$$g(t) = t^3 - 3t - 5$$

$$\therefore g'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t+1)(t-1)$$

$g'(t)=0$ 에서 $t=-1$ 또는 $t=1$

t	-2	...	-1	...	1
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$	-7	↗	-3	↘	-7

따라서 함수 $g(t)$ 는 $t=-1$ 에서 최댓값 -3 , $t=-2$ 또는 $t=1$ 에서 최솟값 -7 을 가지므로

$$M=-3, m=-7$$

$$\therefore M-m=4$$

답 4

0802 $\ln x - x - a = 0$ 에서

$$\ln x - x = a$$

이 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y = \ln x - x$ 와 직선 $y = a$ 가 두 점에서 만나야 한다.

$f(x) = \ln x - x$ 라 하면 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$

x	0	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	-1	↘

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$,

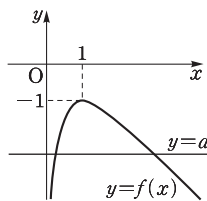
$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ 이므로 함수 $y = f(x)$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 두 점에서 만나려면

$$a < -1$$

답 ③



0803 방정식 $e^x - 3x = k$ 가 실근을 가지려면 곡선 $y = e^x - 3x$ 와 직선 $y = k$ 가 만나야 한다.

$f(x) = e^x - 3x$ 라 하면 $f'(x) = e^x - 3$

$f'(x)=0$ 에서 $e^x = 3 \therefore x = \ln 3$

x	...	$\ln 3$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$3-3\ln 3$	↗

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ 이므로 함수

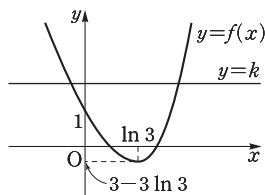
$y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 만나려면

$$k \geq 3-3\ln 3$$

즉 k 의 최솟값은 $3-3\ln 3$ 이다.

답 $3-3\ln 3$



0804 $\frac{3}{x} = -x^3 + k$ 에서 $x^3 + \frac{3}{x} = k$

이 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y = x^3 + \frac{3}{x}$ 과 직선 $y = k$ 가 두 점에서 만나야 한다.

$f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$ 이라 하면 $x \neq 0$ 이고

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - \frac{3}{x^2} = \frac{3x^4 - 3}{x^2} \\ &= \frac{3(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x^2} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f(x)$	↗	-4	↘		↘	4	↗

이때 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x) = -x^3 - \frac{3}{x} = -f(x)$$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ 이다.

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

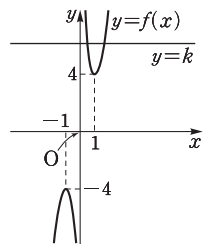
함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 두 점에서 만나려면

$$k < -4 \text{ 또는 } k > 4$$

즉 $\alpha = -4$, $\beta = 4$ 이므로

$$\beta - \alpha = 8$$

답 ④



0805 방정식 $2x^2 = a \ln x$ 의 실근의 개수는 두 곡선 $y = 2x^2$, $y = a \ln x$ 의 교점의 개수와 같다.

$f(x) = 2x^2$, $g(x) = a \ln x$ 라 하면

$$f'(x) = 4x, g'(x) = \frac{a}{x}$$

두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 가 접할 때의 접점의 x 좌표를

t ($t > 0$)라 하면

$$f(t) = g(t) \text{에서 } 2t^2 = a \ln t \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f'(t) = g'(t)$ 에서

$$4t = \frac{a}{t} \therefore a = 4t^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

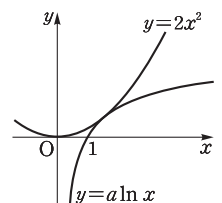
$$2t^2 = 4t^2 \ln t, \quad \ln t = \frac{1}{2} \therefore t = e^{\frac{1}{2}}$$

$t = e^{\frac{1}{2}}$ 을 ②에 대입하면

$$a = 4e$$

따라서 $a > 0$ 에서 방정식 $2x^2 = a \ln x$ 의 실근은

- (i) $0 < a < 4e$ 일 때, 0개
- (ii) $a = 4e$ 일 때, 1개
- (iii) $a > 4e$ 일 때, 2개



- ㄱ. (i)에서 $a=2e$ 이면 실근을 갖지 않는다. (참)
 ㄴ. (ii)에서 $a=4e$ 이면 오직 한 개의 실근을 갖는다. (참)
 ㄷ. (iii)에서 $a=6e$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)
 이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0806 방정식 $e^x=ax$ 가 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=e^x$ 과 직선 $y=ax$ 가 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=e^x, g(x)=ax$ 라 하면

$$f'(x)=e^x, g'(x)=a$$

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 가 접할 때의 접점의 x 좌표를 t 라 하면

$f(t)=g(t)$ 에서

$$e^t=at \quad \dots\dots ㉠$$

$f'(t)=g'(t)$ 에서

$$e^t=a \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$e^t=e^t t \quad \therefore t=1 (\because e^t>0)$$

$t=1$ 을 ㉡에 대입하면 $a=e$

따라서 곡선 $y=e^x$ 과 직선 $y=ax$ 가 두 점에서 만나려면

$$a>e$$

답 $a>e$

다른 풀이 $e^x=ax$ 에서 $x \neq 0$ 이므로 $\frac{e^x}{x}=a$

이 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=\frac{e^x}{x}$ 과 직선 $y=a$ 가 두 점에서 만나야 한다.

$$f(x)=\frac{e^x}{x} \text{이라 하면 } f'(x)=\frac{e^x \times x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$

x	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	e	$\nearrow$

이때 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$,

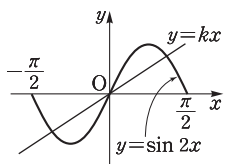
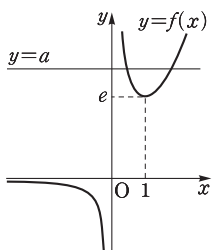
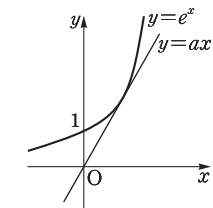
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의

그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 두 점에서 만나려면

$$a>e$$



0807 방정식 $\sin 2x=kx$ 가 구간

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 에서 서로 다른 세 실근을

가지려면 오른쪽 그림과 같이

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 곡선 $y=\sin 2x$ 와

직선 $y=kx$ 가 세 점에서 만나야 한다.

$$y=\sin 2x \text{에서 } y'=2\cos 2x$$

즉 곡선 $y=\sin 2x$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 기울기가

$2\cos 0=2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y=2x$$

따라서 곡선 $y=\sin 2x$ 와 직선 $y=kx$ 가 세 점에서 만나려면

$$0 \leq k < 2$$

답 $0 \leq k < 2$

0808 $e^{2x}-2x \geq k$ 에서

$$e^{2x}-2x-k \geq 0$$

$f(x)=e^{2x}-2x-k$ 라 하면

$$f'(x)=2e^{2x}-2=2(e^{2x}-1)$$

$f'(x)=0$ 에서 $e^{2x}=1 \quad \therefore x=0$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최

솟값 $1-k$ 를 가지므로 모든 실

수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성

립하려면

$$1-k \geq 0 \quad \therefore k \leq 1$$

따라서 k 의 최댓값은 1이다.

답 ③

0809 $3x+k \geq \ln(x+1)$ 에서

$$3x+k-\ln(x+1) \geq 0$$

$f(x)=3x+k-\ln(x+1)$ 이라 하면

$$f'(x)=3-\frac{1}{x+1}=\frac{3x+2}{x+1}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-\frac{2}{3}$

x	-1	$\dots$	$-\frac{2}{3}$	$\dots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-2+k+\ln 3$	$\nearrow$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=-\frac{2}{3}$ 에서 최솟값 $-2+k+\ln 3$ 을 가지므

로 $x>-1$ 일 때, $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$-2+k+\ln 3 \geq 0$$

$$\therefore k \geq 2-\ln 3$$

따라서 k 의 최솟값은 $2-\ln 3$ 이다.

답 $2-\ln 3$

0810 $\sin 2x < 2x+k$ 에서

$$\sin 2x-2x-k < 0$$

$f(x)=\sin 2x-2x-k$ 라 하면

$$f'(x)=2\cos 2x-2=2(\cos 2x-1)$$

이때 $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ 이므로

$$-4 \leq 2(\cos 2x-1) \leq 0$$

$$\therefore f'(x) \leq 0$$

즉 함수 $f(x)$ 는 구간 $[0, \infty)$ 에서 감소하므로 $x \geq 0$ 일 때,

$f(x) < 0$ 이 성립하려면

$$f(0)=-k < 0 \quad \therefore k > 0$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 1이다.

답 1

0811 $(\ln x)^2 - 2\ln x \geq k$ 에서

$$(\ln x)^2 - 2\ln x - k \geq 0$$

$f(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x - k$ 라 하면

$$f'(x) = 2\ln x \times \frac{1}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2(\ln x - 1)}{x}$$

... 1단계

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad \ln x = 1 \quad \therefore x = e$$

x	0	...	e	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	$-1-k$	/

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=e$ 에서 최솟값 $-1-k$ 를 갖는다.

... 2단계

따라서 $x > 0$ 일 때, $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$-1-k \geq 0 \quad \therefore k \leq -1$$

즉 k 의 최댓값은 -1 이다.

... 3단계

답 -1

채점 요소		비율
1단계	$f(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x - k$ 라 하고 $f'(x)$ 구하기	30 %
2단계	$f(x)$ 의 최솟값 구하기	40 %
3단계	k 의 최댓값 구하기	30 %

0812 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$e^{2x} \geq kx$ 가 성립하려면 오른쪽 그림과

같이 곡선 $y = e^{2x}$ 이 직선 $y = kx$ 보다 위쪽에 있거나 직선과 접해야 한다.

$f(x) = e^{2x}$, $g(x) = kx$ 라 하면

$$f'(x) = 2e^{2x}, g'(x) = k$$

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = g(x)$ 가 접할 때의 접점의 x 좌표를 t 라 하면

$$f(t) = g(t) \text{에서} \quad e^{2t} = kt \quad \dots\dots ①$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서} \quad 2e^{2t} = k \quad \dots\dots ②$$

①을 ②에 대입하면

$$e^{2t} = 2e^{2t}t, \quad 2t = 1 \quad (\because e^{2t} > 0)$$

$$\therefore t = \frac{1}{2}$$

$t = \frac{1}{2}$ 을 ②에 대입하면

$$k = 2e$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 양수 k 의 값의 범위는

$$0 < k \leq 2e$$

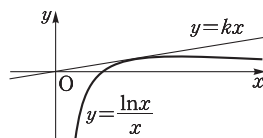
즉 k 의 최댓값은 $2e$ 이다.

답 ⑤

0813 $x > 0$ 일 때 부등식

$f(x) \leq g(x)$, 즉 $\frac{\ln x}{x} \leq kx$ 가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선

$y = \frac{\ln x}{x}$ 가 직선 $y = kx$ 보다 아래쪽에 있거나 직선과 접해야 한다.



$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, $g'(x) = k$ 이고 곡선 $y = f(x)$ 와 직선

$y = g(x)$ 가 접할 때의 접점의 x 좌표를 t ($t > 0$)라 하면

$$f(t) = g(t) \text{에서} \quad \frac{\ln t}{t} = kt \quad \dots\dots ①$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서} \quad \frac{1-\ln t}{t^2} = k \quad \dots\dots ②$$

①을 ②에 대입하면

$$\frac{\ln t}{t} = \frac{1-\ln t}{t}, \quad \ln t = \frac{1}{2} \quad \therefore t = e^{\frac{1}{2}}$$

$t = e^{\frac{1}{2}}$ 을 ②에 대입하면 $k = \frac{1}{2e}$

따라서 부등식 $f(x) \leq g(x)$ 가 성립하도록 하는 k 의 값의 범위는

$$k \geq \frac{1}{2e} \quad \text{답 } k \geq \frac{1}{2e}$$

0814 $x \geq 0$ 일 때, 부등식

$3x \geq a \sin 2x$ 가 성립하려면 오른쪽

그림과 같이 직선 $y = 3x$ 가 곡선

$y = a \sin 2x$ 보다 위쪽에 있거나 곡선

과 접해야 한다.

$f(x) = 3x$, $g(x) = a \sin 2x$ 라 하면

$$f'(x) = 3, g'(x) = 2a \cos 2x$$

이때 직선 $y = f(x)$ 와 곡선 $y = g(x)$ 가 접하려면 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선이 직선 $y = f(x)$ 이어야 하므로

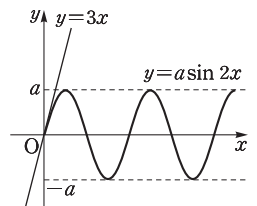
$$g'(0) = 3, \quad 2a = 3 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 양수 a 의 값의 범위는

$$0 < a \leq \frac{3}{2}$$

즉 a 의 최댓값은 $\frac{3}{2}$ 이다.

답 ③



0815 시간 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 6 - 2a \cos 2t$$

$t = \frac{\pi}{6}$ 에서의 점 P의 속도가 2이므로

$$6 - a = 2 \quad \therefore a = 4$$

따라서 $x = 6t - 4 \sin 2t$ 이므로 $t = \frac{\pi}{6}$ 에서의 점 P의 위치는

$$\pi - 2\sqrt{3} \quad \text{답 } \pi - 2\sqrt{3}$$

0816 시간 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = p\pi \cos \pi t - q\pi \sin \pi t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -p\pi^2 \sin \pi t - q\pi^2 \cos \pi t$$

$t = 3$ 에서의 점 P의 속도가 -4π 이므로

$$-p\pi = -4\pi \quad \therefore p = 4$$

$t = 3$ 에서의 점 P의 가속도가 $-2\pi^2$ 이므로

$$q\pi^2 = -2\pi^2 \quad \therefore q = -2$$

$$\therefore p - q = 6$$

답 ⑤

0817 점 P의 시간 t 에서의 속도를 $v(t)$ 라 하면

$$v(t) = f'(t) = -2te^t - t^2e^t + 8e^t \\ = -e^t(t+4)(t-2)$$

$v(t)=0$ 에서 $t=2$ ($\because 0 \leq t \leq 3$)

t	0	...	2	...	3
$v(t)$		+	0	-	
$f(t)$	10	$\nearrow$	$4e^2+2$	$\searrow$	$-e^3+2$

따라서 $|f(t)|$ 는 $t=2$ 에서 최댓값 $4e^2+2$ 를 가지므로 점 P와 원점 사이의 거리의 최댓값은 $4e^2+2$ 이다. **답 4e²+2**

0818 $\frac{dx}{dt} = -2\sin 2t, \frac{dy}{dt} = 1+2\cos 2t$

이므로 시간 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{(-2\sin 2t)^2 + (1+2\cos 2t)^2} = \sqrt{4\cos 2t+5}$$

이때 $-1 \leq \cos 2t \leq 1$ 이므로 점 P의 속력의 최댓값은

$$\sqrt{4 \times 1 + 5} = 3$$

답 3

0819 $\frac{dx}{dt} = 2, \frac{dy}{dt} = 1-t^2$

이므로 시간 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{2^2 + (1-t^2)^2} = \sqrt{t^4 - 2t^2 + 5}$$

이때 점 P의 속력이 $\sqrt{13}$ 이라면

$$\sqrt{t^4 - 2t^2 + 5} = \sqrt{13}, \quad t^4 - 2t^2 + 5 = 13$$

$$t^4 - 2t^2 - 8 = 0, \quad (t^2+2)(t^2-4) = 0$$

$$t^2 = 4 \quad \therefore t = 2 (\because t > 0)$$

답 2

0820 $\frac{dx}{dt} = 3, \frac{dy}{dt} = t-2$

이므로 시간 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{3^2 + (t-2)^2} = \sqrt{(t-2)^2 + 9}$$

따라서 점 P의 속력은 $t=2$ 일 때 최솟값 3을 갖는다.

이때 $t=2$ 에서의 점 P의 위치는 $(4, -2)$ 이므로 점 P의 속력이 최소일 때의 점 P와 원점 사이의 거리는

$$\sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$$

답 ③

0821 $\frac{dx}{dt} = -2t + \frac{a}{t}, \frac{dy}{dt} = 3$

이므로 시간 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(-2t + \frac{a}{t}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{4t^2 + \frac{a^2}{t^2} - 4a + 9}$$

... 1단계

$t=1$ 에서의 점 P의 속력이 5이므로

$$\sqrt{4+a^2-4a+9} = 5, \quad a^2-4a+13=25$$

$$a^2-4a-12=0, \quad (a+2)(a-6)=0$$

$$\therefore a=6 (\because a>0)$$

... 2단계

답 6

채점 요소		비율
1단계	시간 t 에서의 점 P의 속력 구하기	50%
2단계	a 의 값 구하기	50%

0822 $\frac{dx}{dt} = \sqrt{15}, \frac{dy}{dt} = 3t^2-2$

이므로 시간 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{(\sqrt{15})^2 + (3t^2-2)^2} = \sqrt{9t^4 - 12t^2 + 19}$$

이때 점 P의 속력이 8이라면

$$\sqrt{9t^4 - 12t^2 + 19} = 8$$

$$9t^4 - 12t^2 + 19 = 64, \quad 3t^4 - 4t^2 - 15 = 0$$

$$(3t^2+5)(t^2-3) = 0, \quad t^2 = 3$$

$$\therefore t = \sqrt{3} (\because t > 0)$$

한편 $\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \frac{d^2y}{dt^2} = 6t$ 이므로 시간 t 에서의 점 P의 가속도는 $(0, 6t)$

따라서 $t=\sqrt{3}$ 에서의 가속도는 $(0, 6\sqrt{3})$ 이므로 가속도의 크기는

$$\sqrt{0^2 + (6\sqrt{3})^2} = 6\sqrt{3}$$

답 ④

0823 $\frac{dx}{dt} = -\frac{3}{4}\pi \sin \frac{\pi}{4}t, \frac{dy}{dt} = \frac{3}{4}\pi \cos \frac{\pi}{4}t$ 이므로

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{3}{16}\pi^2 \cos \frac{\pi}{4}t, \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{3}{16}\pi^2 \sin \frac{\pi}{4}t$$

따라서 시간 t 에서의 점 P의 가속도의 크기는

$$\sqrt{\left(-\frac{3}{16}\pi^2 \cos \frac{\pi}{4}t\right)^2 + \left(-\frac{3}{16}\pi^2 \sin \frac{\pi}{4}t\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3}{16}\pi^2\right)^2 (\sin^2 \frac{\pi}{4}t + \cos^2 \frac{\pi}{4}t)}$$

$$= \frac{3}{16}\pi^2$$

답 $\frac{3}{16}\pi^2$

0824 $\frac{dx}{dt} = 2t+8, \frac{dy}{dt} = 3at^2-3$ 이므로

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2, \frac{d^2y}{dt^2} = 6at$$

따라서 시간 t 에서의 점 P의 가속도의 크기는

$$\sqrt{2^2 + (6at)^2}$$

이때 $t=1$ 에서의 가속도의 크기가 $2\sqrt{10}$ 이므로

$$\sqrt{2^2 + (6a)^2} = 2\sqrt{10}, \quad 4 + 36a^2 = 40$$

$$a^2 = 1 \quad \therefore a = 1 (\because a > 0)$$

답 ①

0825 $P(t, e^{-t}) (t>0)$ 이라 하면 $\overline{PR}=t, \overline{PQ}=e^{-t}$

이때 $\square OQPR$ 의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = te^{-t}$$

$$\therefore S'(t) = e^{-t} - te^{-t} = e^{-t}(1-t)$$

$S'(t)=0$ 에서 $t=1$

t	0	...	1	...
$S'(t)$		+	0	-
$S(t)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 $S(t)$ 는 $t=1$ 일 때 극대이면서 최대이므로 $\square OQPR$ 의 넓이의 최댓값은

$$S(1) = \frac{1}{e}$$

답 ①

0826 상자의 밑면의 한 변의 길이를 x , 높이를 h 라 하면 부피가 64이므로

$$x^2h=64 \quad \therefore h=\frac{64}{x^2}$$

이때 상자의 겉넓이를 $f(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 4x \times \frac{64}{x^2} = 2x^2 + \frac{256}{x} \\ \therefore f'(x) &= 4x - \frac{256}{x^2} = \frac{4(x^3 - 64)}{x^2} \\ &= \frac{4(x-4)(x^2+4x+16)}{x^2} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=4$ ($\because x^2+4x+16>0$)

x	0	...	4	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	극소	/

따라서 $f(x)$ 는 $x=4$ 일 때 극소이면서 최소이므로 구하는 높이는

$$\frac{64}{4^2}=4$$

답 ③

0827 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, D에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하면

$$\begin{aligned} \overline{AH} &= 2\sin\theta, \\ \overline{BH} &= \overline{CH'} = 2\cos\theta \end{aligned}$$

이므로

$$\overline{BC} = 2 \times 2\cos\theta + 2 = 4\cos\theta + 2$$

이때 사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하면

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2} \times (2 + 4\cos\theta + 2) \times 2\sin\theta \\ &= 4(1 + \cos\theta)\sin\theta \\ \therefore S'(\theta) &= 4(-\sin\theta)\sin\theta + 4(1 + \cos\theta)\cos\theta \\ &= -4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta + 4\cos\theta \\ &= -4(1 - \cos^2\theta) + 4\cos^2\theta + 4\cos\theta \\ &= 8\cos^2\theta + 4\cos\theta - 4 \\ &= 4(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) \end{aligned}$$

$S'(\theta)=0$ 에서 $\cos\theta = -1$ 또는 $\cos\theta = \frac{1}{2}$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$

θ	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		+	0	-	
$S(\theta)$		/	극대	\	

따라서 $S(\theta)$ 는 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때 극대이면서 최대이므로 사다리꼴 ABCD의 넓이의 최댓값은

$$S\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}$$

답 $3\sqrt{3}$

0828 $f(x)=2e^{-x}$ 이라 하면

$$f'(x) = -2e^{-x}$$

이때 $P(t, 2e^{-t})$ ($t>0$)이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = -2e^{-t}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - 2e^{-t} = -2e^{-t}(x - t)$$

$$\therefore y = -2e^{-t}x + (2t+2)e^{-t}$$

이 직선의 x 절편은 $t+1$, y 절편은 $(2t+2)e^{-t}$ 이므로 점 P에서의 접선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \times (t+1) \times (2t+2)e^{-t} \\ &= (t+1)^2 e^{-t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore S'(t) &= 2(t+1)e^{-t} + (t+1)^2 \times (-e^{-t}) \\ &= -(t+1)(t-1)e^{-t} \end{aligned}$$

$S'(t)=0$ 에서 $t=1$ ($\because t>0$)

t	0	...	1	...
$S'(t)$		+	0	-
$S(t)$		/	극대	\

따라서 $S(t)$ 는 $t=1$ 일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 삼각형의 넓이의 최댓값은

$$S(1) = \frac{4}{e}$$

답 ④

0829 $\angle BOD = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)라

하면

$$\angle COD = \pi - 2\theta$$

이때 세 선분 OB, OC, CD와 호

BD로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하면

$$S(\theta) = (\text{부채꼴 BOD의 넓이}) + (\triangle COD \text{의 넓이})$$

$$= \frac{1}{2} \times 6^2 \times \theta + \frac{1}{2} \times 6^2 \times \sin(\pi - 2\theta)$$

$$= 18(\theta + \sin 2\theta)$$

$$\therefore S'(\theta) = 18(1 + 2\cos 2\theta)$$

$S'(\theta)=0$ 에서 $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$

$$2\theta = \frac{2}{3}\pi \quad (\because 0 < 2\theta < \pi) \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

θ	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		+	0	-	
$S(\theta)$		/	극대	\	

따라서 $S(\theta)$ 는 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때 극대이면서 최대이므로 구하는 도형의 넓이의 최댓값은

$$S\left(\frac{\pi}{3}\right) = 18\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\pi + 9\sqrt{3}$$

답 $6\pi + 9\sqrt{3}$

0830 $f(x) = (x^2 + a)e^{-x}$ 이라 하면

$$f'(x) = 2xe^{-x} + (x^2 + a) \times (-e^{-x})$$

$$= -e^{-x}(x^2 - 2x + a)$$

$$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 2x + a) - e^{-x}(2x - 2)$$

$$= e^{-x}(x^2 - 4x + a + 2)$$

이때 구간 $(-1, 1)$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 가 위로 볼록하려면

$-1 < x < 1$ 에서 $f''(x) < 0$ 이어야 하므로

$$x^2 - 4x + a + 2 < 0 \quad (\because e^{-x} > 0)$$

$g(x) = x^2 - 4x + a + 2$ 라 하면

$$g(-1) \leq 0 \text{에서} \quad a + 7 \leq 0 \quad \therefore a \leq -7 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$g(1) \leq 0 \text{에서} \quad a - 1 \leq 0 \quad \therefore a \leq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서} \quad a \leq -7 \quad \text{답 } a \leq -7$$

0831 $f(x) = xe^{-2x}$ 이라 하면

$$f'(x) = e^{-2x} + x \times (-2e^{-2x}) = (1 - 2x)e^{-2x}$$

$$f''(x) = -2e^{-2x} + (1 - 2x) \times (-2e^{-2x})$$

$$= 4(x - 1)e^{-2x}$$

$$f''(x) = 0 \text{에서} \quad x = 1 \quad (\because e^{-2x} > 0)$$

이때 $x = 1$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점 A의

좌표는 $(1, e^{-2})$

따라서 점 A에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = -e^{-2}$ 이므로 점선의 방정식은

$$y - e^{-2} = -e^{-2}(x - 1)$$

$$\therefore y = -e^{-2}x + 2e^{-2}$$

$$y = 0 \text{을 대입하면} \quad 0 = -e^{-2}x + 2e^{-2} \quad \therefore x = 2$$

즉 B(2, 0)이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times e^{-2} = e^{-2} \quad \text{답 } \textcircled{1}$$

0832 $f'(x) = 2x + a - \frac{b}{x}$

$$f''(x) = 2 + \frac{b}{x^2}$$

함수 $f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 극값을 가지므로 $f'(1) = 0$ 에서

$$2 + a - b = 0 \quad \therefore a = b - 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점의 x 좌표가 $\frac{1}{2}$ 이므로 $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ 에서

$$2 + 4b = 0 \quad \therefore b = -\frac{1}{2}$$

$$b = -\frac{1}{2} \text{을 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면} \quad a = -\frac{5}{2}$$

$$\therefore a + b = -3 \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

0833 $f'(x) = ax + 2\cos x + 3$

$$f''(x) = a - 2\sin x$$

곡선 $y = f(x)$ 가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x) = 0$ 이 실근을 갖고, 이 실근의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌어야 한다.

$$f''(x) = 0 \text{에서} \quad a - 2\sin x = 0 \quad \therefore \sin x = \frac{a}{2}$$

이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로

$$-1 \leq \frac{a}{2} \leq 1 \quad \therefore -2 \leq a \leq 2$$

$$a = -2 \text{이면} \quad f''(x) = -2 - 2\sin x \leq 0$$

$$a = 2 \text{이면} \quad f''(x) = 2 - 2\sin x \geq 0$$

즉 $a = -2$ 또는 $a = 2$ 이면 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점이 존재하지 않는다.

따라서 변곡점을 갖도록 하는 a 의 값의 범위는

$$-2 < a < 2$$

이므로 정수 a 는 $-1, 0, 1$ 의 3개이다.

답 3

0834 $f''(d) = 0, f''(e) = 0, f''(f) = 0$ 이고 $x = d, x = e, x = f$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점의 개수는 3이다.

답 3

0835 $f(x) = ex - \ln x$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = e - \frac{1}{x}, f''(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad \frac{1}{x} = e \quad \therefore x = \frac{1}{e}$$

$f''(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값이 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

x	0	...	$\frac{1}{e}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f''(x)$		+	+	+
$f(x)$		↘	2	↗

$$\text{이때} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

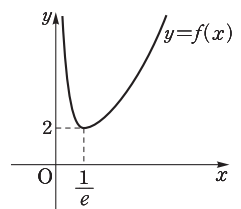
$$\neg. f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right) = 2 \quad (\text{참})$$

ㄴ. 곡선 $y = f(x)$ 의 점근선은 y 축이다. (참)

ㄷ. 곡선 $y = f(x)$ 는 아래로 볼록하다. (참)

이상에서 $\neg, \text{ㄴ}, \text{ㄷ}$ 모두 옳다.

답 ⑤



$$\begin{aligned} \text{0836 } f'(x) &= \frac{3(x^2 + 1) - (3x - 4) \times 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= -\frac{(3x + 1)(x - 3)}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad x = 3 \quad (\because 1 \leq x \leq 4)$$

x	1	...	3	...	4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{8}{17}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값 $\frac{1}{2}$, $x=1$ 에서 최솟값 $-\frac{1}{2}$ 을 가지므로

$$M = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2} \quad \therefore M - m = 1 \quad \text{답 ④}$$

0837 $f(x) = 2x + \sqrt{5-x^2}$ 에서 $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$ 이고

$$f'(x) = 2 + \frac{-2x}{2\sqrt{5-x^2}} = \frac{2\sqrt{5-x^2} - x}{\sqrt{5-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad 2\sqrt{5-x^2} = x$$

$$\text{양변을 제곱하면} \quad 4(5-x^2) = x^2, \quad 5x^2 = 20$$

$$x^2 = 4 \quad \therefore x = 2 (\because x \geq 0)$$

x	$-\sqrt{5}$	$\dots$	2	$\dots$	$\sqrt{5}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-2\sqrt{5}$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$2\sqrt{5}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 5, $x=-\sqrt{5}$ 에서 최솟값 $-2\sqrt{5}$ 를 가지므로

$$\alpha = 2, \beta = -\sqrt{5} \quad \therefore \alpha\beta = -2\sqrt{5} \quad \text{답 ②}$$

0838 $f(x) = \frac{x^2-3}{e^x} = (x^2-3)e^{-x}$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-x} + (x^2-3) \times (-e^{-x}) \\ &= -(x^2-2x-3)e^{-x} \\ &= -(x+1)(x-3)e^{-x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad x = -1 (\because -2 \leq x \leq 2)$$

x	-2	$\dots$	-1	$\dots$	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	e^2	$\searrow$	$-2e$	$\nearrow$	$\frac{1}{e^2}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 최댓값 e^2 , $x=-1$ 에서 최솟값 $-2e$ 를 가지므로

$$M = e^2, m = -2e \quad \therefore Mm = -2e^3 \quad \text{답 } -2e^3$$

0839 $f(x) = a\sqrt{2-x^2}e^x$ 에서 $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ 이고

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2ax}{2\sqrt{2-x^2}}e^x + a\sqrt{2-x^2}e^x \\ &= \frac{-axe^x + a(2-x^2)e^x}{\sqrt{2-x^2}} \\ &= \frac{a(x+2)(x-1)e^x}{\sqrt{2-x^2}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad x = 1 (\because -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2})$$

x	$-\sqrt{2}$	$\dots$	1	$\dots$	$\sqrt{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	ae	$\searrow$	0

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 ae 를 가지므로

$$ae = e \quad \therefore a = 1 \quad \text{답 ②}$$

0840 $f(x) = x(2 - \ln x) + k$ 에서 $x > 0$ 이고

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \ln x + x \times \left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= 1 - \ln x \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$\ln x = 1 \quad \therefore x = e$$

x	0	$\dots$	e	$\dots$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$	$e+k$	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=e$ 에서 최댓값 $e+k$ 를 가지므로

$$e+k = e+2 \quad \therefore k=2$$

$$\text{즉 } f(x) = x(2 - \ln x) + 2 \text{이므로}$$

$$f(1) = 4$$

답 ⑤

0841 $f'(x) = -\sin x \sin x + (1 + \cos x) \cos x$

$$\begin{aligned} &= -\sin^2 x + \cos x + \cos^2 x \\ &= -(1 - \cos^2 x) + \cos x + \cos^2 x \\ &= 2\cos^2 x + \cos x - 1 \\ &= (2\cos x - 1)(\cos x + 1) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{또는} \quad \cos x = -1$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{3} \quad \text{또는} \quad x = \pi (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

x	0	$\dots$	$\frac{\pi}{3}$	$\dots$	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{3}$ 에서 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 을 갖는다. 답 ④

0842 $f'(x) = a(1 + 2\cos 2x)$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$2x = -\frac{2}{3}\pi \quad \text{또는} \quad 2x = \frac{2}{3}\pi (\because -\pi \leq 2x \leq \pi)$$

$$\therefore x = -\frac{\pi}{3} \quad \text{또는} \quad x = \frac{\pi}{3}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\dots$	$-\frac{\pi}{3}$	$\dots$	$\frac{\pi}{3}$	$\dots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}a$	$\searrow$	$\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$	$\nearrow$	$\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}a$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{3}$ 에서 최댓값 $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$ 를 가지므로

$$\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a = 4\pi + 6\sqrt{3} \quad \therefore a = 12 \quad \text{답 12}$$

0843 $f(x) = \sin^3 x + 2\cos^2 x + 1$
 $= \sin^3 x + 2(1 - \sin^2 x) + 1$
 $= \sin^3 x - 2\sin^2 x + 3$

이때 $\sin x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓고 함수 $f(x)$ 를 t 에 대한 함수 $g(t)$ 로 나타내면

$g(t) = t^3 - 2t^2 + 3$
 $\therefore g'(t) = 3t^2 - 4t = t(3t - 4)$

$g'(t) = 0$ 에서 $t = 0$ ($\because -1 \leq t \leq 1$)

t	-1	...	0	...	1
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	2

따라서 함수 $g(t)$ 는 $t=0$ 에서 최댓값 3, $t=-1$ 에서 최솟값 0을 가지므로

$M=3, m=0$

$\therefore M+m=3$

답 3

0844 방정식 $x^2 - 5x + 2\ln x = t$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 곡선 $y = x^2 - 5x + 2\ln x$ 와 직선 $y = t$ 가 두 점에서 만나야 한다.

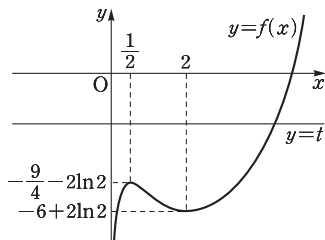
$f(x) = x^2 - 5x + 2\ln x$ 라 하면 $x > 0$ 이고

$f'(x) = 2x - 5 + \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x}$
 $= \frac{(2x-1)(x-2)}{x}$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = \frac{1}{2}$ 또는 $x = 2$

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...	2	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		$\nearrow$	$-\frac{9}{4} - 2\ln 2$	$\searrow$	$-6 + 2\ln 2$	$\nearrow$

이때 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = t$ 가 두 점에서 만나려면

$t = -\frac{9}{4} - 2\ln 2$ 또는 $t = -6 + 2\ln 2$

이므로 모든 실수 t 의 값의 합은

$-\frac{9}{4} - 2\ln 2 + (-6 + 2\ln 2) = -\frac{33}{4}$

답 ②

0845 $ae^{2x} - e^x + 1 = 0$ 에서 $ae^{2x} = e^x - 1$

이 방정식이 한 개의 실근을 가지려면 두 곡선 $y = ae^{2x}$, $y = e^x - 1$ 이 한 점에서 만나야 한다.

$f(x) = ae^{2x}$, $g(x) = e^x - 1$ 이라 하면

$f'(x) = 2ae^{2x}$, $g'(x) = e^x$

$a > 0$ 이므로 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 가 접할 때의 접점의 x 좌표를 t 라 하면

$f(t) = g(t)$ 에서

$ae^{2t} = e^t - 1$ ㉠

$f'(t) = g'(t)$ 에서

$2ae^{2t} = e^t$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $2(e^t - 1) = e^t$

$e^t = 2 \quad \therefore t = \ln 2$

$t = \ln 2$ 를 ㉠에 대입하면 $4a = 1$

$\therefore a = \frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

다른 풀이 $ae^{2x} - e^x + 1 = 0$ 에서 $a = \frac{e^x - 1}{e^{2x}}$

이 방정식이 한 개의 실근을 가지려면 곡선 $y = \frac{e^x - 1}{e^{2x}}$ 과 직선 $y = a$ 가 한 점에서 만나야 한다.

$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^{2x}}$ 이라 하면

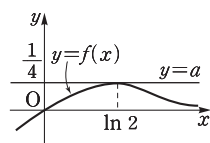
$f'(x) = \frac{e^x \times e^{2x} - (e^x - 1) \times 2e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{2 - e^x}{e^{2x}}$

$f'(x) = 0$ 에서 $e^x = 2 \quad \therefore x = \ln 2$

x	...	$\ln 2$	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 한 점에서 만나려면

$a = \frac{1}{4}$ ($\because a > 0$)

0846 $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x + k$ 라 하면

$f'(x) = e^x - x - 1$, $f''(x) = e^x - 1$

$x > 0$ 일 때 $f''(x) > 0$ 이므로 $x > 0$ 에서 $f'(x)$ 는 증가한다.

이때 $f'(0) = 0$ 이므로 $x > 0$ 에서

$f'(x) > f'(0) = 0$

즉 함수 $f(x)$ 는 $x > 0$ 에서 증가한다.

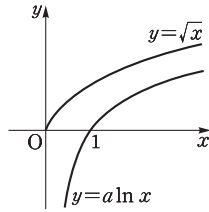
따라서 $x > 0$ 일 때, $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$f(0) = 1 + k \geq 0 \quad \therefore k \geq -1$

즉 k 의 최솟값은 -1 이다.

답 ②

0847 $x > 0$ 일 때, 부등식 $a \ln x < \sqrt{x}$ 가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{x}$ 가 곡선 $y = a \ln x$ 보다 위쪽에 있어야 한다.



$f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = a \ln x$ 라 하면

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, g'(x) = \frac{a}{x}$$

두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 가 접할 때의 접점의 x 좌표를 t ($t > 0$)라 하면

$$f(t) = g(t) \text{에서 } \sqrt{t} = a \ln t \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서 } \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{a}{t} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{t}}{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$\sqrt{t} = \frac{\sqrt{t}}{2} \ln t, \quad \ln t = 2 \quad \therefore t = e^2$$

$t = e^2$ 을 ②에 대입하면 $a = \frac{e}{2}$

따라서 주어진 부등식이 성립하도록 하는 양수 a 의 값의 범위는

$$0 < a < \frac{e}{2} \quad \text{답 } 0 < a < \frac{e}{2}$$

0848 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 1 + \sin t$$

$t = a$ 에서의 점 P의 속도를 0이라 하면

$$1 + \sin a = 0, \quad \sin a = -1$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \frac{11}{2}\pi, \dots$$

따라서 점 P의 속도가 처음으로 0이 되는 시각은 $\frac{3}{2}\pi$ 이다.

$$\text{답 } \frac{3}{2}\pi$$

0849 $\frac{dx}{dt} = \ln t + t \times \frac{1}{t} = \ln t + 1,$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4 \times \ln t - 4t \times \frac{1}{t}}{(\ln t)^2} = \frac{4 \ln t - 4}{(\ln t)^2}$$

이므로 시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{(\ln t + 1)^2 + \left\{ \frac{4 \ln t - 4}{(\ln t)^2} \right\}^2}$$

따라서 시각 $t = e^2$ 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \quad \text{답 } \textcircled{4}$$

0850 $\frac{dx}{dt} = 20 \cos \theta, \frac{dy}{dt} = 20 \sin \theta - 10t$

공이 1초 후에 최고 높이에 도달하므로 $t = 1$ 일 때 $\frac{dy}{dt} = 0$ 이다.

$$\text{즉 } 20 \sin \theta - 10 = 0 \text{이므로 } \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

따라서

$$\frac{dx}{dt} = 10\sqrt{3}, \frac{dy}{dt} = 10 - 10t$$

이므로 t 초 후의 공의 속력은

$$\sqrt{(10\sqrt{3})^2 + (10 - 10t)^2} = 10\sqrt{t^2 - 2t + 4}$$

한편 $y = 10t - 5t^2$ 이고 공이 지면에 떨어질 때 $y = 0$ 이므로

$$10t - 5t^2 = 0, \quad t(t - 2) = 0$$

$$\therefore t = 2 \quad (\because t > 0)$$

즉 2초 후에 공이 지면에 떨어지므로 구하는 속력은

$$10 \times \sqrt{4} = 20 \quad \text{답 } 20$$

0851 $\frac{dx}{dt} = e^t \cos \pi t - \pi e^t \sin \pi t = e^t (\cos \pi t - \pi \sin \pi t),$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \sin \pi t + \pi e^t \cos \pi t = e^t (\sin \pi t + \pi \cos \pi t)$$

이므로 시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{e^{2t} (\cos \pi t - \pi \sin \pi t)^2 + e^{2t} (\sin \pi t + \pi \cos \pi t)^2}$$

$$= \sqrt{\pi^2 + 1} e^t$$

따라서 점 P의 속력이 $\sqrt{\pi^2 + 1} e$ 이려면

$$t = 1$$

또

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^t (\cos \pi t - \pi \sin \pi t) + e^t (-\pi \sin \pi t - \pi^2 \cos \pi t)$$

$$= e^t (-2\pi \sin \pi t + \cos \pi t - \pi^2 \cos \pi t),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = e^t (\sin \pi t + \pi \cos \pi t) + e^t (\pi \cos \pi t - \pi^2 \sin \pi t)$$

$$= e^t (2\pi \cos \pi t + \sin \pi t - \pi^2 \sin \pi t)$$

이므로 $t = 1$ 에서의 점 P의 가속도는

$$(e(\pi^2 - 1), -2\pi e)$$

따라서 $a = e(\pi^2 - 1), b = -2\pi e$ 이므로

$$a + b = e(\pi^2 - 2\pi - 1) \quad \text{답 } e(\pi^2 - 2\pi - 1)$$

0852 $f(x) = x - 2 \cos x$ 라 하면

$$f'(x) = 1 + 2 \sin x, f''(x) = 2 \cos x \quad \dots \text{1단계}$$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } x = \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

이때 $x = \frac{\pi}{2}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌

표는

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \quad \dots \text{2단계}$$

따라서 직선 $y = ax + \pi$ 가 점 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ 를 지나므로

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}a + \pi \quad \therefore a = -1 \quad \dots \text{3단계}$$

$$\text{답 } -1$$

채점 요소	비율
1단계 $f''(x)$ 구하기	20 %
2단계 변곡점의 좌표 구하기	50 %
3단계 a 의 값 구하기	30 %

0853 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln kx$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x} = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)}{2x}$$

... 1단계

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 1$ ($\because x > 0$)

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln k$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값 $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln k$ 를 가지므로

... 2단계

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln k = -\frac{3}{4}$$

$$\ln k = 2 \quad \therefore k = e^2$$

... 3단계

답 e^2

채점 요소	비율
1단계 $f'(x)$ 구하기	20 %
2단계 $f(x)$ 의 최솟값을 k 에 대한 식으로 나타내기	50 %
3단계 k 의 값 구하기	30 %

0854 두 방정식 $e^x = kx$, $\ln x = kx$ 가 모두 실근을 갖지 않으려면 직선 $y = kx$ 가 두 곡선 $y = e^x$, $y = \ln x$ 와 모두 만나지 않아야 한다.

... 1단계

(i) 직선 $y = kx$ 가 곡선 $y = e^x$ 에 접하는 경우

$$y = e^x \text{에서 } y' = e^x$$

접점의 x 좌표를 t 라 하면

$$e^t = kt, e^t = k \quad \therefore t = 1, k = e$$

... 2단계

(ii) 직선 $y = kx$ 가 곡선 $y = \ln x$ 에 접하는 경우

$$y = \ln x \text{에서 } y' = \frac{1}{x}$$

접점의 x 좌표를 s 라 하면

$$\ln s = ks, \frac{1}{s} = k \quad \therefore s = e, k = \frac{1}{e}$$

... 3단계

(i), (ii)에서 직선 $y = kx$ 가 두 곡선 $y = e^x$, $y = \ln x$ 와 모두 만나지 않으려면

$$\frac{1}{e} < k < e$$

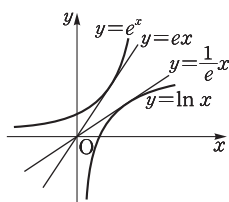
따라서 $\alpha = \frac{1}{e}$, $\beta = e$ 이므로

$$\alpha\beta = 1$$

... 4단계

답 1

채점 요소	비율
1단계 두 방정식이 모두 실근을 갖지 않을 조건 파악하기	20 %
2단계 직선 $y = kx$ 가 곡선 $y = e^x$ 에 접할 때의 k 의 값 구하기	30 %
3단계 직선 $y = kx$ 가 곡선 $y = \ln x$ 에 접할 때의 k 의 값 구하기	30 %
4단계 $\alpha\beta$ 의 값 구하기	20 %



0855 $f(x) \geq g(x)$ 에서 $x^2 - x + 3 \geq ke^{-x}$

이때 $e^x > 0$ 이므로 양변에 e^x 을 곱하면

$$(x^2 - x + 3)e^x \geq k \quad \therefore (x^2 - x + 3)e^x - k \geq 0$$

$h(x) = (x^2 - x + 3)e^x - k$ 라 하면

$$h'(x) = (2x - 1)e^x + (x^2 - x + 3)e^x$$

$$= e^x(x^2 + x + 2) = e^x \left\{ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \right\} > 0$$

이므로 함수 $h(x)$ 는 구간 $(0, \infty)$ 에서 증가한다.

... 1단계

따라서 $x > 0$ 일 때, $h(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$h(0) = 3 - k \geq 0 \quad \therefore k \leq 3$$

즉 k 의 최댓값은 3이다.

... 2단계

답 3

채점 요소	비율
1단계 $h(x) = (x^2 - x + 3)e^x - k$ 로 놓고, $h(x)$ 가 구간 $(0, \infty)$ 에서 증가함을 알기	70 %
2단계 k 의 최댓값 구하기	30 %

0856 전략 주어진 조건을 만족시키려면 구간 $(0, 1)$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 위로 볼록해야 함을 파악한다.

구간 $(0, 1)$ 의 서로 다른 두 실수 a, b 에 대하여

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 를 만족시키려면 구간 $(0, 1)$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 위로 볼록해야 하므로 $f''(x) < 0$ 이어야 한다.

ㄱ. $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$ 이므로 구간 $(0, 1)$ 에서

$$f''(x) < 0$$

ㄴ. $f'(x) = \ln x + 1$, $f''(x) = \frac{1}{x}$ 이므로 구간 $(0, 1)$ 에서

$$f''(x) > 0$$

ㄷ. $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$,

$$f''(x) = -e^{-x}(1-x) + e^{-x} \times (-1) = e^{-x}(x-2)$$

이므로 구간 $(0, 1)$ 에서 $f''(x) < 0$

이상에서 구간 $(0, 1)$ 에서 주어진 조건을 만족시키는 함수는

ㄱ, ㄷ이다.

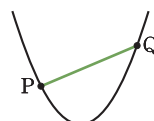
답 ㄱ, ㄷ

RPM 비법 노트

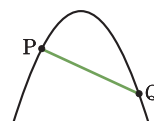
두 점 $P(a, f(a))$, $Q(b, f(b))$ 에 대하여 $\overline{PQ}$ 의 중점의 y 좌표인 $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ 가 $x = \frac{a+b}{2}$ 에서의 함수값 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 보다 크려면

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 [그림 1]과 같이 아래로 볼록해야 한다.

또 $\overline{PQ}$ 의 중점의 y 좌표인 $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ 가 $x = \frac{a+b}{2}$ 에서의 함수값 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 보다 작으려면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 [그림 2]와 같이 위로 볼록해야 한다.



[그림 1]



[그림 2]

0857 [전략] 함수 $g(x)$ 의 최댓값과 최솟값은 모두 $g(x)$ 의 극값임을 이용한다.

함수 $f(x)$ 가 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이면 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$ 이므로 함수 $g(x)$ 의 최댓값이 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 음수인 이차함수이고 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ 이므로 함수 $g(x)$ 의 최댓값과 최솟값은 모두 $g(x)$ 의 극값이다.

이때 조건 ㉞, ㉜에서

$$g'(a) = 0, g'(b) = 0, g'(b+6) = 0$$

한편

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{f(x)} + \{f(x)+2\}e^{f(x)} \times f'(x) \\ &= f'(x)\{f(x)+3\}e^{f(x)} \end{aligned}$$

이므로 $g'(x) = 0$ 에서

$$f'(x) = 0 \text{ 또는 } f(x)+3=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉜의 해가 $x=a, x=b, x=b+6$ 이고, 조건 ㉞에서 $f(a)=6$ 이므로

$$f'(a) = 0, f(b)+3=0, f(b+6)+3=0$$

따라서 이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 $k(k < 0)$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(x)+3 &= k(x-b)(x-b-6) \\ \therefore f(x) &= k(x-b)(x-b-6)-3 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

이때 $f'(x) = k(x-b-6) + k(x-b) = 2k(x-b-3)$ 이므로 $f'(a) = 0$ 에서

$$a-b-3=0 \quad \therefore b=a-3$$

이를 ㉜에 대입하면

$$f(x) = k(x-a+3)(x-a-3)-3$$

$f(a)=6$ 이므로

$$-9k-3=6 \quad \therefore k=-1$$

따라서

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x-a+3)(x-a-3)-3 \\ &= -x^2+2ax-a^2+6 \end{aligned}$$

이므로 $f(x)=0$ 에서

$$x^2-2ax+a^2-6=0$$

이 이차방정식의 서로 다른 두 실근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= 2a, \alpha\beta = a^2-6 \\ \therefore (\alpha-\beta)^2 &= (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \\ &= (2a)^2-4(a^2-6) = 24 \end{aligned}$$

답 24

다른 풀이 $f(x) = -(x-a+3)(x-a-3)-3$
 $= -(x-a)^2+6$

이므로 $f(x)=0$ 에서

$$-(x-a)^2+6=0, \quad (x-a)^2=6$$

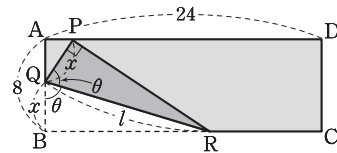
$$\therefore x=a \pm \sqrt{6}$$

$$\therefore (\alpha-\beta)^2 = \{(a+\sqrt{6})-(a-\sqrt{6})\}^2 = 24$$

0858 [전략] 삼각비를 이용하여 선분 PQ와 QR의 길이 사이의 관계식을 구한다.

$\overline{QR}=l, \overline{BQ}=x$ ($4 < x \leq 8$), $\angle BQR = \theta$ 라 하면

$$\overline{PQ}=x, \angle PQR = \theta$$



이때 $\triangle QRB$ 에서 $\cos \theta = \frac{x}{l}$ ㉜

또 $\angle PQA = \pi - 2\theta, \overline{AQ} = 8-x$ 이므로 $\triangle PAQ$ 에서

$$\cos(\pi - 2\theta) = \frac{8-x}{x}$$

$$-\cos 2\theta = \frac{8-x}{x}, \quad -(2\cos^2 \theta - 1) = \frac{8-x}{x}$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{x-4}{x} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉜을 ㉜에 대입하면 $\frac{x^2}{l^2} = \frac{x-4}{x}$

$$\therefore l^2 = \frac{x^3}{x-4}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x-4} \text{이라 하면}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x-4)-x^3}{(x-4)^2} = \frac{2x^3-12x^2}{(x-4)^2} \\ &= \frac{2x^2(x-6)}{(x-4)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=6 \quad (\because 4 < x \leq 8)$$

x	4	...	6	...	8
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$			↘	↗	

따라서 $f(x)$ 는 $x=6$ 일 때 극소이면서 최소이므로 선분 QR의 길이가 최소가 될 때의 선분 PQ의 길이는 6이다.

답 6

08 여러 가지 함수의 적분

교과서 문제 정복하기

본책 125쪽

$$\begin{aligned} \text{0859} \quad \int \frac{1}{x^4} dx &= \int x^{-4} dx = -\frac{1}{3} x^{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C \\ &\quad \text{답} \quad -\frac{1}{3x^3} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0860} \quad \int \sqrt[5]{x^3} dx &= \int x^{\frac{3}{5}} dx = \frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}} + C = \frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}} \sqrt[5]{x^3} + C \\ &\quad \text{답} \quad \frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}} \sqrt[5]{x^3} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0861} \quad \int \frac{x^3 + x^2 + 2}{x^3} dx &= \int \left(1 + \frac{1}{x} + 2x^{-3} \right) dx \\ &= x + \ln |x| - x^{-2} + C \\ &= x + \ln |x| - \frac{1}{x^2} + C \\ &\quad \text{답} \quad x + \ln |x| - \frac{1}{x^2} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0862} \quad \int \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x}} dx &= \int (x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}) dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C \\ &\quad \text{답} \quad \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0863} \quad \int (2e^x + 5^x) dx &= 2 \int e^x dx + \int 5^x dx \\ &= 2e^x + \frac{5^x}{\ln 5} + C \\ &\quad \text{답} \quad 2e^x + \frac{5^x}{\ln 5} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0864} \quad \int e^{x+4} dx &= \int e^x \times e^4 dx = e^4 \int e^x dx \\ &= e^4 \times e^x + C = e^{x+4} + C \\ &\quad \text{답} \quad e^{x+4} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0865} \quad \int (\sin x + 3 \cos x) dx &= \int \sin x dx + 3 \int \cos x dx \\ &= -\cos x + 3 \sin x + C \\ &\quad \text{답} \quad -\cos x + 3 \sin x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0866} \quad \int \csc x (\csc x + \cot x) dx \\ &= \int (\csc^2 x + \csc x \cot x) dx \\ &= -\cot x - \csc x + C \\ &\quad \text{답} \quad -\cot x - \csc x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0867} \quad \int (2 - \tan x) \cos x dx \\ &= \int (2 \cos x - \tan x \cos x) dx = 2 \int \cos x dx - \int \sin x dx \\ &= 2 \sin x + \cos x + C \\ &\quad \text{답} \quad 2 \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0868} \quad \int \frac{\sin^3 x - 1}{\sin^2 x} dx &= \int (\sin x - \csc^2 x) dx \\ &= -\cos x + \cot x + C \\ &\quad \text{답} \quad -\cos x + \cot x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0869} \quad \int \frac{\tan x - \sec x}{\cos x} dx &= \int (\tan x \sec x - \sec^2 x) dx \\ &= \sec x - \tan x + C \\ &\quad \text{답} \quad \sec x - \tan x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0870} \quad 1 + \tan^2 x &= \sec^2 x \text{에서 } \tan^2 x = \sec^2 x - 1 \text{이므로} \\ \int \tan^2 x dx &= \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C \\ &\quad \text{답} \quad \tan x - x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0871} \quad \int_0^8 \sqrt[3]{x} dx &= \int_0^8 x^{\frac{1}{3}} dx = \left[\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \right]_0^8 = 12 \\ &\quad \text{답} \quad 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0872} \quad \int_1^6 \frac{1}{x} dx &= [\ln |x|]_1^6 = \ln 6 \\ &\quad \text{답} \quad \ln 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0873} \quad \int_0^{\ln 2} e^x dx &= [e^x]_0^{\ln 2} = 2 - 1 = 1 \\ &\quad \text{답} \quad 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0874} \quad \int_0^3 3^x dx &= \left[\frac{3^x}{\ln 3} \right]_0^3 = \frac{27}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} = \frac{26}{\ln 3} \\ &\quad \text{답} \quad \frac{26}{\ln 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0875} \quad \int_0^\pi \sin x dx &= [-\cos x]_0^\pi = 1 - (-1) = 2 \\ &\quad \text{답} \quad 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0876} \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx &= [\sin x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ &\quad \text{답} \quad \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0877} \quad \int_0^4 (\sqrt{x} - 1) dx + \int_0^4 (\sqrt{x} + 1) dx \\ &= \int_0^4 (\sqrt{x} - 1 + \sqrt{x} + 1) dx = \int_0^4 2\sqrt{x} dx \\ &= \left[\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{32}{3} \\ &\quad \text{답} \quad \frac{32}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0878} \quad \int_{-1}^0 (e^x + 1) dx + \int_0^{-1} (e^{-x} + 1) dx \\ &= \int_{-1}^0 (e^x + 1) dx - \int_{-1}^0 (e^{-x} + 1) dx \\ &= \int_{-1}^0 \{e^x + 1 - (e^{-x} + 1)\} dx = \int_{-1}^0 (e^x - e^{-x}) dx \\ &= \left[e^x - \frac{(e^{-1})^x}{\ln e^{-1}} \right]_{-1}^0 = [e^x + e^{-x}]_{-1}^0 \\ &= 2 - (e^{-1} + e) = 2 - e - \frac{1}{e} \\ &\quad \text{답} \quad 2 - e - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

RPM 비법 노트

0이 아닌 상수 a 에 대하여

$$\begin{aligned}\int e^{ax} dx &= \int (e^a)^x dx \\ &= \frac{(e^a)^x}{\ln e^a} + C = \frac{1}{a} e^{ax} + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0879 \quad & \int_0^1 (2^x - 1) dx + \int_1^3 (2^x - 1) dx \\ &= \int_0^3 (2^x - 1) dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} - x \right]_0^3 \\ &= \left(\frac{8}{\ln 2} - 3 \right) - \frac{1}{\ln 2} = \frac{7}{\ln 2} - 3\end{aligned}$$

답 $\frac{7}{\ln 2} - 3$

$$\begin{aligned}0880 \quad & \int_0^\pi (\cos x - x) dx + \int_{2\pi}^\pi (x - \cos x) dx \\ &= \int_0^\pi (\cos x - x) dx + \int_\pi^{2\pi} (\cos x - x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos x - x) dx \\ &= \left[\sin x - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{2\pi} = -2\pi^2\end{aligned}$$

답 $-2\pi^2$

$$\begin{aligned}0881 \quad & f(x) = \sqrt{|x|} \text{로 놓으면} \\ & f(-x) = \sqrt{|-x|} = \sqrt{|x|} = f(x) \\ & \text{이므로 } f(x) \text{는 우함수이다.} \\ & \therefore \int_{-9}^9 \sqrt{|x|} dx = 2 \int_0^9 \sqrt{x} dx = 2 \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^9 \\ & \quad = 2 \times 18 = 36\end{aligned}$$

답 36

$$\begin{aligned}0882 \quad & f(x) = e^x + e^{-x} \text{으로 놓으면} \\ & f(-x) = e^{-x} + e^x = f(x) \\ & \text{이므로 } f(x) \text{는 우함수이다.} \\ & \therefore \int_{-3}^3 (e^x + e^{-x}) dx = 2 \int_0^3 (e^x + e^{-x}) dx \\ & \quad = 2 \left[e^x - e^{-x} \right]_0^3 \\ & \quad = 2 \left(e^3 - \frac{1}{e^3} \right)\end{aligned}$$

답 $2 \left(e^3 - \frac{1}{e^3} \right)$

$$\begin{aligned}0883 \quad & f(x) = \sin x, g(x) = \cos x \text{로 놓으면} \\ & f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x), \\ & g(-x) = \cos(-x) = \cos x = g(x) \\ & \text{이므로 } f(x) \text{는 기함수, } g(x) \text{는 우함수이다.} \\ & \therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx \\ & \quad = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ & \quad = 0 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ & \quad = 2 \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \times 1 = 2\end{aligned}$$

답 2

유형 익히기

• 본책 126~131쪽

$$\begin{aligned}0884 \quad & f(x) = \int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \int \left(\sqrt{x} - 2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int (x^{\frac{1}{2}} - 2 + x^{-\frac{1}{2}}) dx \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2x + 2x^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3} x\sqrt{x} - 2x + 2\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

$$\text{이때 } f(1) = \frac{5}{3} \text{이므로 } \frac{2}{3} + C = \frac{5}{3} \quad \therefore C = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{2}{3} x\sqrt{x} - 2x + 2\sqrt{x} + 1 \text{이므로}$$

$$f(4) = \frac{7}{3}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}0885 \quad & F(x) = \int (x\sqrt{x} - 2) dx = \int (x^{\frac{3}{2}} - 2) dx \\ &= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - 2x + C = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} - 2x + C \\ &\therefore F(1) - F(0) = \left(-\frac{8}{5} + C \right) - C = -\frac{8}{5}\end{aligned}$$

답 ③

$$0886 \quad \text{조건 (가)에서 } f'(x) = \frac{1+x^4}{x^2} = x^{-2} + x^2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}f(x) &= \int f'(x) dx = \int (x^{-2} + x^2) dx \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{3} x^3 + C\end{aligned}$$

... 1단계

$$\text{조건 (나)에서 } f(-1) = 0 \text{이므로}$$

$$\frac{2}{3} + C = 0 \quad \therefore C = -\frac{2}{3}$$

$$\text{따라서 } f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3} x^3 - \frac{2}{3} \text{이므로}$$

... 2단계

$$f(1) = -\frac{4}{3}$$

... 3단계

답 $-\frac{4}{3}$

	채점 요소	비율
1단계	$f(x)$ 를 적분상수를 이용하여 나타내기	60 %
2단계	$f(x)$ 구하기	30 %
3단계	$f(1)$ 의 값 구하기	10 %

$$\begin{aligned}0887 \quad & f(x) = \int \frac{(x+2)^2 - 2}{x^2} dx = \int \frac{x^2 + 4x + 2}{x^2} dx \\ &= \int \left(1 + \frac{4}{x} + 2x^{-2} \right) dx \\ &= x + 4 \ln |x| - \frac{2}{x} + C\end{aligned}$$

$$\text{이때 곡선 } y=f(x) \text{가 점 } (1, 0) \text{을 지나므로 } f(1) = 0$$

$$-1 + C = 0 \quad \therefore C = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = x + 4 \ln |x| - \frac{2}{x} + 1 \text{이므로}$$

$$f(2) = 2 + 4 \ln 2$$

답 $2 + 4 \ln 2$

0888 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C_1$$

이때 $f(1) = 0$ 이므로 $\frac{3}{2} + C_1 = 0 \quad \therefore C_1 = -\frac{3}{2}$

따라서 $f(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}$ 이므로 $f(x)$ 의 부정적분은

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \left(\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} \right) dx = \frac{9}{10} x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2} x + C \\ &= \frac{9}{10} x^3 \sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{2} x + C \end{aligned}$$

답 $\frac{9}{10} x^3 \sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{2} x + C$

0889 $F(x) = xf(x) - 2 \ln x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - \frac{2}{x}$$

$$xf'(x) = \frac{2}{x} \quad \therefore f'(x) = \frac{2}{x^2} \quad (\because x > 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{2}{x^2} dx \\ &= \int 2x^{-2} dx = -\frac{2}{x} + C \end{aligned}$$

이때 $f(1) = 0$ 이므로 $-2 + C = 0 \quad \therefore C = 2$

따라서 $f(x) = -\frac{2}{x} + 2$ 이므로 $f(k) = -1$ 에서

$$-\frac{2}{k} + 2 = -1, \quad \frac{2}{k} = 3$$

$$\therefore k = \frac{2}{3}$$

답 ③

0890 $f_n(x) = \int x^{\frac{1}{n+1}} dx = \frac{1}{\frac{1}{n+1} + 1} x^{\frac{1}{n+1} + 1} + C$

$$= \frac{n+1}{n+2} x^{\frac{n+2}{n+1}} + C$$

이때 $f_n(0) = 0$ 이므로 $C = 0$

따라서 $f_n(x) = \frac{n+1}{n+2} x^{\frac{n+2}{n+1}}$ 이므로

$$\begin{aligned} f_1(1) \times f_2(1) \times f_3(1) \times \cdots \times f_{10}(1) \\ = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{11}{12} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

답 ④

0891 $f(x) = \int \frac{1-e^{2x}}{1+e^x} dx = \int \frac{(1+e^x)(1-e^x)}{1+e^x} dx$

$$= \int (1-e^x) dx = x - e^x + C$$

이때 $f(0) = 3$ 이므로 $-1 + C = 3 \quad \therefore C = 4$

따라서 $f(x) = x - e^x + 4$ 이므로

$$f(1) = 5 - e$$

답 $5 - e$

0892 $f(x) = \int f'(x) dx = \int (e^x - 2x + 1) dx$

$$= e^x - x^2 + x + C_1$$

이때 $f(0) = 1$ 이므로 $1 + C_1 = 1 \quad \therefore C_1 = 0$

따라서 $f(x) = e^x - x^2 + x$ 이므로

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx = \int (e^x - x^2 + x) dx \\ &= e^x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + C \end{aligned}$$

$$\therefore F(1) - F(0) = \left(e + \frac{1}{6} + C \right) - (1 + C) = e - \frac{5}{6}$$

답 $e - \frac{5}{6}$

0893 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ 이므로

$$f'(x) = e^{x+2} + 4x$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (e^{x+2} + 4x) dx \\ &= e^2 \int e^x dx + 4 \int x dx = e^2 \times e^x + 4 \times \frac{1}{2} x^2 + C \\ &= e^{x+2} + 2x^2 + C \end{aligned}$$

이때 $f(0) = e^2 - e^3$ 이므로

$$e^2 + C = e^2 - e^3 \quad \therefore C = -e^3$$

따라서 $f(x) = e^{x+2} + 2x^2 - e^3$ 이므로

$$f(1) = 2$$

답 2

0894 $f(g(x)) = x$ 이므로 $g(x) = f^{-1}(x)$

$y = \ln x - 1$ 이라 하면

$$y + 1 = \ln x \quad \therefore x = e^{y+1}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = e^{x+1}$

즉 $g(x) = e^{x+1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int g(x) dx &= \int e^{x+1} dx = e \int e^x dx \\ &= e \times e^x + C = e^{x+1} + C \end{aligned}$$

답 ③

0895 $\int \frac{8^x + 1}{2^x + 1} dx = \int \frac{(2^x + 1)(4^x - 2^x + 1)}{2^x + 1} dx$

$$= \int (4^x - 2^x + 1) dx$$

$$= \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{2^x}{\ln 2} + x + C$$

따라서 $\ln a = \ln 4$, $\ln b = -\ln 2 = \ln \frac{1}{2}$ 이므로

$$a = 4, b = \frac{1}{2} \quad \therefore ab = 2$$

답 ④

0896 $f'(x) = 5^{2x} \ln 25$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int 5^{2x} \ln 25 dx \\ &= \ln 25 \int 25^x dx = 25^x + C \end{aligned}$$

이때 곡선 $y = f(x)$ 가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$f(0) = 1 \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = 25^x$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25^n} = \frac{\frac{1}{25}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{1}{24}$$

답 ②

0897 조건 (가)에서

$$f'(x) + g'(x) = 3^x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서

$$f'(x) - g'(x) = 3^{-x} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3^x + 3^{-x}}{2}, \quad g'(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{2} \\ \therefore f(x) &= \int \frac{3^x + 3^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2} \int \{3^x + (3^{-1})^x\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{(3^{-1})^x}{\ln 3^{-1}} \right\} + C_1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^{-x}}{\ln 3} \right) + C_1 \\ g(x) &= \int \frac{3^x - 3^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2} \int \{3^x - (3^{-1})^x\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{(3^{-1})^x}{\ln 3^{-1}} \right\} + C_2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{3^{-x}}{\ln 3} \right) + C_2 \end{aligned}$$

이때 조건 (다)에서 $f(0) = 0$ 이므로 $C_1 = 0$

또 $g(0) = \frac{1}{\ln 3}$ 이므로

$$\frac{1}{\ln 3} + C_2 = \frac{1}{\ln 3} \quad \therefore C_2 = 0$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^{-x}}{\ln 3} \right)$, $g(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{3^{-x}}{\ln 3} \right)$ 이

므로

$$f(1) + g(-1) = \frac{4}{3\ln 3} + \frac{5}{3\ln 3} = \frac{3}{\ln 3} \quad \text{답 } \frac{3}{\ln 3}$$

$$\begin{aligned} 0898 \quad f(x) &= \int \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} dx \\ &= \int \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} dx \\ &= \int (1 + \cos x) dx = x + \sin x + C \end{aligned}$$

이때 $f(\pi) = \pi + 3$ 이므로

$$\pi + C = \pi + 3 \quad \therefore C = 3$$

따라서 $f(x) = x + \sin x + 3$ 이므로

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{3}{2}\pi + 2 \quad \text{답 } \textcircled{4}$$

$$\begin{aligned} 0899 \quad f(x) &= \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 \\ &= \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \\ &= 1 + \sin x \\ \therefore F(x) &= \int f(x) dx = \int (1 + \sin x) dx \\ &= x - \cos x + C \end{aligned}$$

이때 $F(0) = 0$ 이므로 $-1 + C = 0 \quad \therefore C = 1$

따라서 $F(x) = x - \cos x + 1$ 이므로

$$F(\pi) = \pi + 2 \quad \text{답 } \pi + 2$$

RPM비법 노트

배각의 공식

$$\textcircled{1} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\textcircled{2} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\textcircled{3} \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\begin{aligned} 0900 \quad f(x) &= \int \frac{1}{1 + \sin x} dx \\ &= \int \frac{1 - \sin x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} dx \\ &= \int \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} \right) dx \\ &= \int (\sec^2 x - \sec x \tan x) dx \\ &= \tan x - \sec x + C \\ \therefore f\left(-\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= (-\sqrt{3} - 2 + C) - (\sqrt{3} - 2 + C) \\ &= -2\sqrt{3} \quad \text{답 } -2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0901 \quad f(x) &= \int \frac{\cos^3 x - 2 \sin^3 x + 2 \sin x - 1}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{\cos^3 x - 2 \sin x (\sin^2 x - 1) - 1}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{\cos^3 x + 2 \sin x \cos^2 x - 1}{\cos^2 x} dx \\ &= \int (\cos x + 2 \sin x - \sec^2 x) dx \\ &= \sin x - 2 \cos x - \tan x + C \end{aligned}$$

이때 $f(0) = 2$ 이므로 $-2 + C = 2 \quad \therefore C = 4$

따라서 $f(x) = \sin x - 2 \cos x - \tan x + 4$ 이므로

$$f(\pi) = 6 \quad \text{답 } \textcircled{5}$$

0902 $x > 0$ 일 때

$$f(x) = \int (2 \sin x - \cos x) dx = -2 \cos x - \sin x + C_1$$

이때 $f(\pi) = 0$ 이므로 $2 + C_1 = 0 \quad \therefore C_1 = -2$

$x < 0$ 일 때

$$f(x) = \int (1 - \cos x) dx = x - \sin x + C_2$$

따라서

$$f(x) = \begin{cases} -2 \cos x - \sin x - 2 & (x > 0) \\ x - \sin x + C_2 & (x < 0) \end{cases}$$

이고 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$ 에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} (-2 \cos x - \sin x - 2) &= \lim_{x \rightarrow 0-} (x - \sin x + C_2) \\ \therefore C_2 &= -4 \end{aligned}$$

즉 $x < 0$ 일 때 $f(x) = x - \sin x - 4$ 이므로

$$f(-\pi) = -\pi - 4 \quad \text{답 } -\pi - 4$$

0903 조건 (나)에서 $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \{f(x) - 3\sqrt{3}\} = 0 \text{ 이므로 } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{f(x) - 3\sqrt{3}}{3x - \pi} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3\left(x - \frac{\pi}{3}\right)} \\ &= \frac{1}{3} f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12$$

이때 조건 (가)에서 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4a$ 이므로

$$4a = 12 \quad \therefore a = 3$$

즉 $f'(x) = 3\sec^2 x$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 3\sec^2 x dx = 3\tan x + C$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$3\sqrt{3} + C = 3\sqrt{3} \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = 3\tan x$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \quad \text{답 ④}$$

$$\begin{aligned} \text{0904 } & \int_1^9 \frac{4x-1}{2\sqrt{x}+1} dx + \int_1^9 \frac{4x-1}{2\sqrt{x}-1} dx \\ &= \int_1^9 \frac{(2\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}+1} dx + \int_1^9 \frac{(2\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}-1} dx \\ &= \int_1^9 (2\sqrt{x}-1) dx + \int_1^9 (2\sqrt{x}+1) dx \\ &= 4 \int_1^9 \sqrt{x} dx = 4 \int_1^9 x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= 4 \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^9 = 4 \times \frac{52}{3} = \frac{208}{3} \quad \text{답 ⑤} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0905 } & \int_1^2 (5x+6)\sqrt{x} dx = \int_1^2 (5x\sqrt{x} + 6\sqrt{x}) dx \\ &= \int_1^2 (5x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}}) dx \\ &= \left[2x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 \\ &= 16\sqrt{2} - 6 \quad \text{답 } 16\sqrt{2} - 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0906 } & \int_1^e \frac{(1+x)^3}{x^2} dx - \int_1^e \frac{(1-x)^3}{x^2} dx \\ &= \int_1^e \frac{1+3x+3x^2+x^3}{x^2} dx - \int_1^e \frac{1-3x+3x^2-x^3}{x^2} dx \\ &= \int_1^e \frac{6x+2x^3}{x^2} dx = \int_1^e \left(\frac{6}{x} + 2x \right) dx \\ &= \left[6\ln|x| + x^2 \right]_1^e = e^2 + 5 \end{aligned}$$

답 $e^2 + 5$

$$\begin{aligned} \text{0907 } & \int_1^9 \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x} dx \\ &= \int_1^9 \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x} dx = \int_1^9 \left(1+2x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \left[x+4x^{\frac{1}{2}} + \ln|x| \right]_1^9 = \ln 9 + 16 = 2\ln 3 + 16 \\ &\text{따라서 } a=2, b=16 \text{ 이므로 } a+b=18 \quad \text{답 ④} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0908 } & \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx + \int_{\ln 2}^0 \frac{1}{e^t+1} dt \\ &= \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx - \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x+1} dx \\ &= \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1} dx \\ &= \int_0^{\ln 2} (e^x-1) dx = \left[e^x - x \right]_0^{\ln 2} = 1 - \ln 2 \quad \text{답 ②} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0909 } & \int_0^1 (e^x + e^{-x})^2 dx \\ &= \int_0^1 (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} + 2x - \frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^1 \\ &= \frac{e^2}{2} + 2 - \frac{1}{2e^2} \quad \text{답 } \frac{e^2}{2} + 2 - \frac{1}{2e^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0910 } & \int_{-1}^1 \sqrt{e^{2x} + 2e^x + 1} dx \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{(e^x+1)^2} dx = \int_{-1}^1 (e^x+1) dx \quad (\because e^x+1 > 0) \\ &= \left[e^x + x \right]_{-1}^1 = e - \frac{1}{e} + 2 \quad \text{답 ④} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{0911 } & \int_0^1 (3^x-1)(9^x+3^x+1) dx \\ &= \int_0^1 (27^x-1) dx \quad \dots \text{1단계} \\ &= \left[\frac{27^x}{\ln 27} - x \right]_0^1 = \frac{26}{\ln 27} - 1 = \frac{26}{3\ln 3} - 1 \quad \dots \text{2단계} \\ &\text{따라서 } a=26, b=1 \text{ 이므로} \\ &a-b=25 \quad \dots \text{3단계} \end{aligned}$$

답 25

채점 요소		비율
1단계	피적분함수를 간단히 하기	30 %
2단계	정적분의 값 구하기	50 %
3단계	$a-b$ 의 값 구하기	20 %

$$\begin{aligned} \text{0912 } & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin^2 x}{1+\sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1+\sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x) dx = \left[x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \quad \text{답 } \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{0913 } & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2 dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\sin x - \cos x)^2 dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)^2 dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2\} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 dx = \left[2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi
 \end{aligned}$$

답 π

$$\begin{aligned}
 \text{0914 } & \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+3\sin^3 x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} + 3\sin x \right) dx \\
 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\csc^2 x + 3\sin x) dx \\
 &= \left[-\cot x - 3\cos x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\
 &= \frac{13}{6}\sqrt{3} - \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

따라서 $a = \frac{13}{6}$, $b = -\frac{3}{2}$ 이므로

$$a + b = \frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}
 \text{0915 } & \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\tan^2 x + \cot^2 x) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (k - \sec^2 t) dt \\
 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\tan^2 x + \cot^2 x) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (k - \sec^2 x) dx \\
 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\tan^2 x + \cot^2 x + k - \sec^2 x) dx \\
 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\csc^2 x + k - 2) dx = \left[-\cot x + (k-2)x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\
 &= \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{k-2}{6}\pi \\
 &\approx \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{k-2}{6}\pi = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \quad \frac{k-2}{6} = \frac{1}{2} \\
 &\quad k-2=3 \quad \therefore k=5
 \end{aligned}$$

답 ③

참고 $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$, $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$ 이므로
 $\tan^2 x - \sec^2 x = -1$, $\cot^2 x - \csc^2 x = -1$

$$\begin{aligned}
 \text{0916 } & \int_{-1}^{\pi} f(x) dx = \int_{-1}^0 (e^{-x} - 1) dx + \int_0^{\pi} \sin x dx \\
 &= \left[-e^{-x} - x \right]_{-1}^0 + \left[-\cos x \right]_0^{\pi} \\
 &= (e-2) + 2 \\
 &= e
 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}
 \text{0917 } & \int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 2^x dx + \int_1^2 \frac{2}{x} dx \\
 &= \left[\frac{2^x}{\ln 2} \right]_{-1}^1 + 2 \left[\ln |x| \right]_1^2 \\
 &= \frac{3}{2\ln 2} + 2 \times \ln 2 \\
 &= 2\ln 2 + \frac{3}{2\ln 2}
 \end{aligned}$$

답 $2\ln 2 + \frac{3}{2\ln 2}$

0918 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=0$ 에서 연속
 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (\cos x + k) = \lim_{x \rightarrow 0-} \sin x = 1 + k$$

$$1 + k = 0 \quad \therefore k = -1$$

따라서 $f(x) = \begin{cases} \sin x & (x < 0) \\ \cos x - 1 & (x \geq 0) \end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^0 \sin x dx + \int_0^{\pi} (\cos x - 1) dx \\
 &= \left[-\cos x \right]_{-\pi}^0 + \left[\sin x - x \right]_0^{\pi} \\
 &= -2 + (-\pi) \\
 &= -\pi - 2
 \end{aligned}$$

답 ①

$$\text{0919 } |\sin x - \cos x| = \begin{cases} \cos x - \sin x & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}) \\ \sin x - \cos x & (\frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\pi} |\sin x - \cos x| dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx \\
 &= \left[\sin x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\cos x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\
 &= (\sqrt{2} - 1) + (1 + \sqrt{2}) \\
 &= 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

답 ②

$$\text{0920 } |e^x - 1| = \begin{cases} 1 - e^x & (x \leq 0) \\ e^x - 1 & (x \geq 0) \end{cases} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx &= \int_{-1}^0 (1 - e^x) dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx \\
 &= \left[x - e^x \right]_{-1}^0 + \left[e^x - x \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{e} + (e - 2) = e + \frac{1}{e} - 2
 \end{aligned}$$

답 $e + \frac{1}{e} - 2$

0921 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(\frac{\pi}{2}, 2)$ 를 지나므로

$$2 = a \sin \frac{\pi}{2} \quad \therefore a = 2$$

따라서 $f(x) = 2 \sin x$ 이므로

$$f'(x) = 2 \cos x$$

$$\begin{aligned}
 & \therefore \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} |f'(x)| dx \\
 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} |2 \cos x| dx \\
 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} (-2 \cos x) dx \\
 &= \left[2 \sin x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \left[-2 \sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \\
 &= 1 + 1 = 2
 \end{aligned}$$

답 2

0922 $\left|\frac{1}{x}-1\right|=\begin{cases}\frac{1}{x}-1 & (0<x\leq 1) \\ 1-\frac{1}{x} & (x\geq 1)\end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^a \left|\frac{1}{x}-1\right| dx &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{x}-1\right) dx + \int_1^a \left(1-\frac{1}{x}\right) dx \\ &= \left[\ln|x|-x\right]_{\frac{1}{2}}^1 + \left[x-\ln|x|\right]_1^a \\ &= \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) + (a - \ln a - 1) \\ &= a - \frac{3}{2} + \ln \frac{2}{a}\end{aligned}$$

즉 $a - \frac{3}{2} + \ln \frac{2}{a} = \frac{1}{2}$ 이므로 $a - 2 + \ln \frac{2}{a} = 0$
 $\therefore a = 2$

답 2

0923 $f(x) = (1-x)\cos x = \cos x - x\cos x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - x\cos x) dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx\end{aligned}$$

이때 $g(x) = \cos x$, $h(x) = x\cos x$ 라 하면

$$\begin{aligned}g(-x) &= \cos(-x) = \cos x = g(x), \\ h(-x) &= -x\cos(-x) = -x\cos x = -h(x)\end{aligned}$$

이므로 $g(x)$ 는 우함수, $h(x)$ 는 기함수이다.

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - 0 = 2 \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \times 1 = 2\end{aligned}$$

답 2

RPM비법노트

x 는 기함수, $\cos x$ 는 우함수이고 기함수와 우함수의 곱은 기함수
 이므로 $x\cos x$ 는 기함수이다.

일반적으로 우함수와 기함수에 대하여 다음이 성립한다.

- ① (우함수) $\times$ (우함수) = (우함수)
- ② (기함수) $\times$ (기함수) = (우함수)
- ③ (우함수) $\times$ (기함수) = (기함수)

0924 $y = |\cos x|$ 는 주기가 π 인 주기함수이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} |\cos x| dx &= \int_{\pi}^{2\pi} |\cos x| dx = \int_{2\pi}^{3\pi} |\cos x| dx \\ &= \int_{3\pi}^{4\pi} |\cos x| dx \\ \therefore \int_0^{4\pi} |\cos x| dx &= 4 \int_0^{\pi} |\cos x| dx \\ &= 4 \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) dx \right\} \\ &= 4 \left(\left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) \\ &= 4 \times (1+1) = 8\end{aligned}$$

답 8

0925 $f(x) = \sin(\cos x)$ 에서

$$f(-x) = \sin\{\cos(-x)\} = \sin(\cos x) = f(x)$$

이므로 $f(x)$ 는 우함수이다.

... 1단계

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-2}^2 f(x) dx \\ &= 2 \int_0^1 f(x) dx + 2 \int_0^2 f(x) dx \\ &= 2A + 2B\end{aligned}$$

... 2단계

답 2A+2B

	채점 요소	비율
1단계	$f(x)$ 가 우함수임을 파악하기	60%
2단계	정적분 $\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-2}^2 f(x) dx$ 의 값을 A, B 를 사용하여 나타내기	40%

0926 조건 (가)에 의하여

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = 2$$

이때 조건 (나)에 의하여

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx = \int_{2\pi}^{3\pi} f(x) dx = \dots = 2$$

이고 $\int_0^a f(x) dx = 10 = 5 \times 2$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x) dx &= \int_0^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx + \int_{2\pi}^{3\pi} f(x) dx \\ &\quad + \int_{3\pi}^{4\pi} f(x) dx + \int_{4\pi}^{5\pi} f(x) dx \\ &= \int_0^{5\pi} f(x) dx\end{aligned}$$

$$\therefore a = 5\pi$$

답 5π

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 132~133쪽

0927 $x \neq 0$ 일 때

$$f(x) = \int (e^x + 2ex) dx = e^x + ex^2 + C$$

이때 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + ex^2 + C) = 0$$

$$1 + C = 0 \quad \therefore C = -1$$

따라서 $f(x) = e^x + ex^2 - 1$ 이므로

$$f(1) = 2e - 1$$

답 2e-1

0928 $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = 2^x + e$ 에서

$$f(x) = 2^x + e$$

따라서 $f(x)$ 의 부정적분은

$$\int f(x) dx = \int (2^x + e) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + ex + C$$

답 ①

$$\begin{aligned} 0929 \quad \neg. \int \frac{x+1}{x^2} dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{x} + C \text{ (거짓)} \end{aligned}$$

$$\neg. \int (e^x - 1) dx = e^x - x + C \text{ (참)}$$

$$\begin{aligned} \neg. \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \tan x - x + C \text{ (참)} \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

답 ④

0930 $f(x) = 1 - \cos x + \cos^2 x - \cos^3 x + \dots$ 는 첫째항이 1, 공비가 $-\cos x$ 인 등비급수이다.

이때 $0 < x < \pi$ 에서 $-1 < -\cos x < 1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1 - (-\cos x)} = \frac{1}{1 + \cos x} \\ \therefore \int f(x) dx &= \int \frac{1}{1 + \cos x} dx \\ &= \int \frac{1 - \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} dx \\ &= \int \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x} \right) dx \\ &= \int (\csc^2 x - \csc x \cot x) dx \\ &= -\cot x + \csc x + C \end{aligned}$$

답 ②

0931 조건 (가)에 의하여 $x < 0$ 일 때

$$f(x) = \int (\cos x + k) dx = \sin x + kx + C_1$$

$x > 0$ 일 때

$$f(x) = \int \frac{1 - \cos x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C_2$$

이때 조건 (나)에서 $f(-\pi) = 0$, $f(\pi) = \pi$ 이므로

$$-k\pi + C_1 = 0, \quad \frac{1}{2}\pi + C_2 = \pi$$

$$\therefore C_1 = k\pi, \quad C_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \sin x + kx + k\pi & (x < 0) \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{\pi}{2} & (x > 0) \end{cases}$$

조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{\pi}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\sin x + kx + k\pi)$$

$$\frac{\pi}{2} = k\pi \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} 0932 \quad \int_2^4 \frac{3x^2 + x}{x^2} dx + 3 \int_2^4 \frac{x-1}{x^2} dx \\ = \int_2^4 \frac{3x^2 + 4x - 3}{x^2} dx = \int_2^4 \left(3 + \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} \right) dx \\ = \left[3x + 4 \ln|x| + \frac{3}{x} \right]_2^4 = 4 \ln 2 + \frac{21}{4} \end{aligned}$$

따라서 $a=4$, $b=\frac{21}{4}$ 이므로

$$ab = 21$$

답 21

$$\begin{aligned} 0933 \quad \int_1^4 \sqrt[3]{x} dx + \int_2^8 \sqrt[3]{x} dx - \int_2^4 \sqrt[3]{x} dx \\ = \int_1^4 \sqrt[3]{x} dx - \int_2^4 \sqrt[3]{x} dx + \int_2^8 \sqrt[3]{x} dx \\ = \int_1^4 \sqrt[3]{x} dx + \int_4^2 \sqrt[3]{x} dx + \int_2^8 \sqrt[3]{x} dx \\ = \int_1^2 \sqrt[3]{x} dx + \int_2^8 \sqrt[3]{x} dx \\ = \int_1^8 \sqrt[3]{x} dx = \int_1^8 x^{\frac{1}{3}} dx \\ = \left[\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \right]_1^8 = \frac{45}{4} \end{aligned}$$

답 $\frac{45}{4}$

$$\begin{aligned} 0934 \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx \\ = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx \\ = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 x + \csc^2 x) dx \\ = \left[\tan x - \cot x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned} 0935 \quad \int_0^\pi f(x) dx \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 2) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (3 \sin x - 1) dx \\ = \left[\sin x + 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-3 \cos x - x \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\ = (1 + \pi) + \left(3 - \frac{\pi}{2} \right) \\ = \frac{\pi}{2} + 4 \end{aligned}$$

답 $\frac{\pi}{2} + 4$

$$0936 \quad e^{|x-2|} = \begin{cases} e^{-x+2} & (x \leq 2) \\ e^{x-2} & (x \geq 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_1^4 f(x) dx &= \int_1^2 e^{-x+2} dx + \int_2^4 e^{x-2} dx \\ &= \int_1^2 e^{-x+2} dx + \int_2^4 e^{x-2} dx \\ &= e^2 \int_1^2 e^{-x} dx + e^{-2} \int_2^4 e^x dx \\ &= e^2 \left[-e^{-x} \right]_1^2 + e^{-2} \left[e^x \right]_2^4 \\ &= e^2 (-e^{-2} + e^{-1}) + e^{-2} (e^4 - e^2) \\ &= e^2 + e - 2 \end{aligned}$$

답 $e^2 + e - 2$

0937 $f(-x) = e^{-x} + e^x = f(x)$,

$g(-x) = \tan(-x) = -\tan x = -g(x)$

이므로 $f(-x)g(-x) = -f(x)g(x)$

따라서 $f(x)g(x)$ 는 기함수이므로

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = 0$$

답 0

0938 $\cos x = \cos\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$

이므로 $2\cos^2 \frac{x}{2} = \cos x + 1$

$$\therefore \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}$$

따라서 $f'(x) = \frac{1}{2}\cos x$ 이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$$\cos x = 0 \quad \therefore x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	

즉 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 극댓값을 갖고, $x = \frac{3}{2}\pi$ 에서 극솟값 $\frac{1}{2}$ 을 갖는다. ... 1단계

이때

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{1}{2}\cos x dx = \frac{1}{2}\sin x + C$$

이므로 $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{1}{2}$ 에서

$$-\frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \quad \therefore C = 1$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2}\sin x + 1$ 이므로 구하는 극댓값은 ... 2단계

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2} \quad \dots 3단계$$

답 $\frac{3}{2}$

채점 요소	비율
1단계 $f(x)$ 가 극값을 갖는 x 의 값 구하기	60 %
2단계 $f(x)$ 구하기	30 %
3단계 극댓값 구하기	10 %

0939 $f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$... 1단계

$y = \ln x + 1$ 이라 하면 $\ln x = y - 1 \quad \therefore x = e^{y-1}$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = e^{x-1}$

즉 $g(x) = e^{x-1}$ 이므로 ... 2단계

$$\int_1^4 g(x)dx = \int_1^4 e^{x-1}dx = e^{-1} \int_1^4 e^x dx$$

$$= \frac{1}{e} \left[e^x \right]_1^4 = \frac{1}{e} (e^4 - e)$$

$$= e^3 - 1$$

... 3단계

답 $e^3 - 1$

채점 요소	비율
1단계 $f'(x)$ 구하기	30 %
2단계 $g(x)$ 구하기	30 %
3단계 정적분 $\int_1^4 g(x)dx$ 의 값 구하기	40 %

0940 전략 주어진 등식에 x 대신 $\frac{1}{x}$ 을 대입한 후 식을 변형하여 $f(x)$ 를 구한다.

$$x^2 f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x - x^2 \quad \dots \textcircled{7}$$

⑦에 x 대신 $\frac{1}{x}$ 을 대입하면

$$\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

양변에 $2x^2$ 을 곱하면

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) + 4x^2 f(x) = 2x - 2 \quad \dots \textcircled{8}$$

⑦-⑧을 하면

$$-3x^2 f(x) = -x^2 - x + 2$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3x} - \frac{2}{3x^2}$$

$$\therefore \int_1^4 f(x)dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3x} - \frac{2}{3x^2} \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\ln|x| + \frac{2}{3x} \right]_1^4$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\ln 2$$

답 $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\ln 2$

0941 전략 피적분함수가 기함수이면 정적분의 값이 0임을 이용한다.

ㄱ. $\sin f(-x) = \sin\{-f(x)\} = -\sin f(x)$

이므로 $\sin f(x)$ 는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin f(x)dx = 0$$

ㄴ. $\cos f(-x) = \cos\{-f(x)\} = \cos f(x)$

이므로 $\cos f(x)$ 는 우함수이다.

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} \cos f(x)dx = 2 \int_0^{\pi} \cos f(x)dx$$

ㄷ. $f(-x)\sin(-x) = -f(x) \times (-\sin x) = f(x)\sin x$

이므로 $f(x)\sin x$ 는 우함수이다.

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx = 2 \int_0^{\pi} f(x)\sin x dx$$

ㄹ. $f(-x)\cos(-x) = -f(x)\cos x$

이므로 $f(x)\cos x$ 는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x dx = 0$$

이상에서 정적분의 값이 항상 0인 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄹ

09 치환적분법과 부분적분법

교과서 문제 정복하기

본책 135쪽

0942 $3x+1=t$ 로 놓으면 $3=\frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int (3x+1)^4 dx &= \int t^4 \times \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int t^4 dt \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} t^5 + C = \frac{1}{15} t^5 + C \\ &= \frac{1}{15} (3x+1)^5 + C\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{15} (3x+1)^5 + C$

0943 $\sin x=t$ 로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos x dx &= \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C \\ &= \frac{1}{3} \sin^3 x + C\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{3} \sin^3 x + C$

0944 $\ln x=t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x} dx &= \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C \\ &= \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$

0945 $(x^2-x+1)'=2x-1$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \frac{6x-3}{x^2-x+1} dx &= 3 \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx = 3 \int \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1} dx \\ &= 3 \ln(x^2-x+1) + C \quad (\because x^2-x+1 > 0)\end{aligned}$$

답 $3 \ln(x^2-x+1) + C$

0946 $(x+\cos x)'=1-\sin x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x} dx &= \int \frac{(x+\cos x)'}{x+\cos x} dx \\ &= \ln|x+\cos x| + C\end{aligned}$$

답 $\ln|x+\cos x| + C$

0947 답 (가) $2x-3$ (나) x^2-3x

0948 답 (가) $x-2$ (나) $\ln|x-2|$ (다) $\frac{x-2}{x-1}$

0949 $x^2-1=t$ 로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$

$x=0$ 일 때 $t=-1$, $x=2$ 일 때 $t=3$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2 x(x^2-1)^2 dx &= \int_{-1}^3 t^2 \times \frac{1}{2} dt \\ &= \left[\frac{1}{6} t^3 \right]_{-1}^3 = \frac{14}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{14}{3}$

0950 $x+2=t$ 로 놓으면 $1=\frac{dt}{dx}$

$x=0$ 일 때 $t=2$, $x=6$ 일 때 $t=8$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^6 \sqrt{x+2} dx &= \int_2^8 \sqrt{t} dt = \int_2^8 t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_2^8 = \frac{28\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{28\sqrt{2}}{3}$

0951 $3x^2+1=t$ 로 놓으면 $6x=\frac{dt}{dx}$

$x=1$ 일 때 $t=4$, $x=3$ 일 때 $t=28$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{x}{3x^2+1} dx &= \int_4^{28} \frac{1}{t} \times \frac{1}{6} dt = \left[\frac{1}{6} \ln|t| \right]_4^{28} \\ &= \frac{1}{6} \ln 28 - \frac{1}{6} \ln 4 \\ &= \frac{1}{6} \ln 7\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{6} \ln 7$

0952 $x^3=t$ 로 놓으면 $3x^2=\frac{dt}{dx}$

$x=0$ 일 때 $t=0$, $x=3$ 일 때 $t=27$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^3 x^2 e^{x^3} dx &= \int_0^{27} e^t \times \frac{1}{3} dt \\ &= \left[\frac{1}{3} e^t \right]_0^{27} = \frac{e^{27}-1}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{e^{27}-1}{3}$

0953 $\cos x=t$ 로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$

$x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=0$, $x=\pi$ 일 때 $t=-1$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3 x \sin x dx &= \int_0^{-1} t^3 \times (-1) dt = \int_{-1}^0 t^3 dt \\ &= \left[\frac{1}{4} t^4 \right]_{-1}^0 = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 $-\frac{1}{4}$

0954 $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$$\begin{aligned}f'(x) &= 1, g(x) = e^x \\ \therefore \int x e^x dx &= x e^x - \int 1 \times e^x dx \\ &= x e^x - e^x + C\end{aligned}$$

답 $x e^x - e^x + C$

0955 $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}f'(x) &= 1, g(x) = -\cos x \\ \therefore \int x \sin x dx &= x \times (-\cos x) - \int 1 \times (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

답 $-x \cos x + \sin x + C$

0956 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{x}, g(x) = x \\ \therefore \int_1^e \ln x dx &= \left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times x dx \\ &= e - \left[x \right]_1^e = e - (e-1) = 1\end{aligned}$$

답 1

0957 $f(x)=x, g'(x)=e^{2x}$ 으로 놓으면

$$f'(x)=1, g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^1 xe^{2x}dx &= \left[\frac{1}{2}xe^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}e^{2x} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$

유형 익히기

• 본책 136~146쪽

0958 $x^2+2x-1=t$ 로 놓으면 $2x+2=\frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\begin{aligned}f(x) &= \int (x+1)(x^2+2x-1)^3 dx \\ &= \int t^3 \times \frac{1}{2} dt = \frac{1}{8}t^4 + C \\ &= \frac{1}{8}(x^2+2x-1)^4 + C\end{aligned}$$

이때 $f(0)=1$ 이므로

$$\frac{1}{8} + C = 1 \quad \therefore C = \frac{7}{8}$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{8}(x^2+2x-1)^4 + \frac{7}{8}$ 이므로

$$f(1) = \frac{23}{8}$$

답 $\frac{23}{8}$

0959 $2x-5=t$ 로 놓으면 $2=\frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int (2x-5)^5 dx &= \int t^5 \times \frac{1}{2} dt = \frac{1}{12}t^6 + C \\ &= \frac{1}{12}(2x-5)^6 + C\end{aligned}$$

따라서 $a=12, b=6$ 이므로

$$ab=72$$

답 72

0960 $x^3+2=t$ 로 놓으면 $3x^2=\frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\begin{aligned}f(x) &= \int x^2(x^3+2)^5 dx = \int t^5 \times \frac{1}{3} dt \\ &= \frac{1}{18}t^6 + C = \frac{1}{18}(x^3+2)^6 + C\end{aligned}$$

이때 $f(0)=4$ 이므로

$$\frac{32}{9} + C = 4 \quad \therefore C = \frac{4}{9}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{18}(x^3+2)^6 + \frac{4}{9}$$

따라서 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$$f(-1) = \frac{1}{2}$$

답 ②

0961 $ax-2=t$ 로 놓으면 $a=\frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\begin{aligned}f(x) &= \int (ax-2)^8 dx = \int t^8 \times \frac{1}{a} dt \\ &= \frac{1}{9a}t^9 + C \\ &= \frac{1}{9a}(ax-2)^9 + C\end{aligned}$$

... 1단계

이때 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 3^6 이므로

$$\frac{1}{9a} \times a^9 = 3^6, \quad a^8 = 3^8$$

$$\therefore a=3 \quad (\because a>0)$$

... 2단계

답 3

	채점 요소	비율
1단계	부정적분 구하기	60 %
2단계	a의 값 구하기	40 %

0962 $4-3x^2=t$ 로 놓으면 $-6x=\frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{\sqrt{4-3x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{t}} \times \left(-\frac{1}{3}\right) dt = -\frac{1}{3} \int t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= -\frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}} + C \\ &= -\frac{2}{3}\sqrt{4-3x^2} + C\end{aligned}$$

$$\therefore a = -\frac{2}{3}$$

답 $-\frac{2}{3}$

0963 $x^2-x+1=t$ 로 놓으면 $2x-1=\frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int (2x-1)^3 \sqrt{x^2-x+1} dx &= \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + C \\ &= \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x^2-x+1)^4} + C\end{aligned}$$

답 ④

0964 $\sqrt{x+2}=t$ 로 놓으면 $x+2=t^2$ 이므로

$$\begin{aligned}1 &= 2t \frac{dt}{dx} \\ \therefore f(x) &= \int \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx = \int \frac{t^2-2}{t} \times 2t dt \\ &= 2 \int (t^2-2) dt = \frac{2}{3}t^3 - 4t + C \\ &= \frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2} - 4\sqrt{x+2} + C \\ &= \frac{2}{3}(x-4)\sqrt{x+2} + C\end{aligned}$$

이때 $f(4)=0$ 이므로

$$C=0$$

따라서 $f(x) = \frac{2}{3}(x-4)\sqrt{x+2}$ 이므로

$$f(2) = -\frac{8}{3}$$

답 $-\frac{8}{3}$

0965 $f'(x) = (x+2)\sqrt{x+1}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (x+2)\sqrt{x+1} dx \\ \sqrt{x+1} &= t \text{로 놓으면 } x+1 = t^2 \text{이므로} \\ 1 &= 2t \frac{dt}{dx} \\ \therefore f(x) &= \int (x+2)\sqrt{x+1} dx \\ &= \int (t^2+1)t \times 2t dt \\ &= \int (2t^4+2t^2) dt \\ &= \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C \\ &= \frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1} + \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + C \end{aligned}$$

이때 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로 $f(0)=1$

$$\frac{16}{15} + C = 1 \quad \therefore C = -\frac{1}{15}$$

따라서 $f(x) = \frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1} + \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} - \frac{1}{15}$ 이므로

$$f(-1) = -\frac{1}{15} \quad \text{답 } -\frac{1}{15}$$

0966 $e^x+3=t$ 로 놓으면 $e^x = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{t} + C \\ &= 2\sqrt{e^x+3} + C \end{aligned}$$

이때 $f(0)=1$ 이므로

$$4+C=1 \quad \therefore C=-3$$

따라서 $f(x) = 2\sqrt{e^x+3} - 3$ 이므로

$$f(\ln 6) = 3 \quad \text{답 } 3$$

0967 $x^2+3=t$ 로 놓으면 $2x = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int x \times 4^{x^2+3} dx &= \int 4^t \times \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \times \frac{4^t}{\ln 4} + C \\ &= \frac{4^{x^2+3}}{\ln 16} + C \end{aligned}$$

$$\therefore a=16 \quad \text{답 } 16$$

0968 $e^x+1=t$ 로 놓으면 $e^x = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int 4e^x(e^x+1)^3 dx \\ &= \int 4t^3 dt = t^4 + C \\ &= (e^x+1)^4 + C \end{aligned}$$

이때 $f(0)=16$ 이므로

$$16+C=16 \quad \therefore C=0$$

따라서 $f(x) = (e^x+1)^4$ 이므로

$$f(\ln 2) = 81 \quad \text{답 } 81$$

0969 조건 (가)에서

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + f(x) - f(x-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{-h} \\ &= f'(x) + f'(x) = 2f'(x) \end{aligned}$$

즉 $2f'(x) = 8xe^{x^2}$ 이므로 $f'(x) = 4xe^{x^2}$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int 4xe^{x^2} dx$$

$x^2=t$ 로 놓으면 $2x = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$f(x) = \int 4xe^{x^2} dx = \int e^t \times 2 dt = 2e^t + C = 2e^{x^2} + C$$

한편 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이므로 조건 (나)에서

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e + 2$$

즉 $2+C=e+2$ 이므로 $C=e$

따라서 $f(x) = 2e^{x^2} + e$ 이므로

$$f(-1) = 3e \quad \text{답 } 4$$

0970 $\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int t^2 dt \\ &= \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + C \end{aligned}$$

이때 $f(e) = \frac{4}{3}$ 이므로 $\frac{1}{3} + C = \frac{4}{3} \quad \therefore C=1$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + 1$$

따라서 $f(k) = 10$ 에서 $\frac{1}{3}(\ln k)^3 + 1 = 10$

$$(\ln k)^3 = 27, \quad \ln k = 3$$

$$\therefore k = e^3 \quad \text{답 } 4$$

0971 $\ln x + 7 = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x+7}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\ &= 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln x+7} + C \end{aligned}$$

... 1단계

이때 $f(e^2) = 4$ 이므로 $6+C=4 \quad \therefore C=-2$

따라서 $f(x) = 2\sqrt{\ln x+7} - 2$ 이므로

... 2단계

$$f\left(\frac{1}{e^3}\right) = 2$$

... 3단계

답 2

채점 요소		비율
1단계	부정적분 구하기	50 %
2단계	$f(x)$ 구하기	30 %
3단계	$f\left(\frac{1}{e^3}\right)$ 의 값 구하기	20 %

0972 $\log x = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x \ln 10} = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$F(x) = \int F'(x) dx = \int \frac{\log x}{x} dx = \int t \ln 10 dt$$

$$= \frac{\ln 10}{2} t^2 + C = \frac{\ln 10}{2} (\log x)^2 + C$$

이때 $F(1) = 0$ 이므로 $C = 0$

따라서 $F(x) = \frac{\ln 10}{2} (\log x)^2$ 이므로

$$F(10) = \frac{\ln 10}{2} \quad \text{답 } \frac{\ln 10}{2}$$

0973 $F(x) = xf(x) - x \ln x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f(x) = f(x) + xf'(x) - \ln x - 1$

$$xf'(x) = \ln x + 1 \quad \therefore f'(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$$

$\ln x + 1 = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{\ln x + 1}{x} dx = \int t dt$$

$$= \frac{1}{2} t^2 + C = \frac{1}{2} (\ln x + 1)^2 + C$$

이때 $f(e) = 2$ 이므로 $2 + C = 2 \quad \therefore C = 0$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2} (\ln x + 1)^2$ 이므로

$$f(1) = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$

0974 $f(x) = \int (\sec^2 x + \sin 3x) dx$

$$= \tan x - \frac{1}{3} \cos 3x + C$$

이때 $f(0) = 1$ 이므로 $-\frac{1}{3} + C = 1 \quad \therefore C = \frac{4}{3}$

따라서 $f(x) = \tan x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{4}{3}$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + \frac{5}{3} \quad \text{답 } \sqrt{3} + \frac{5}{3}$$

0975 $\int (\sin x - 1)^2 dx = \int (\sin^2 x - 2 \sin x + 1) dx$

이때 $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ 에서 $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ 이므로

$$\int (\sin x - 1)^2 dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} - 2 \sin x + 1 \right) dx$$

$$= \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x - 2 \sin x + \frac{3}{2} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{4} \sin 2x + 2 \cos x + \frac{3}{2} x + C$$

따라서 $a = -\frac{1}{4}, b = 2, c = \frac{3}{2}$ 이므로

$$abc = -\frac{3}{4} \quad \text{답 } -\frac{3}{4}$$

 RPM 비법 노트

$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$ 에서

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

0976 $f'(x) = 0$ 에서 $\sin 2x - \cos 2x = 0$

$$\sin 2x = \cos 2x \quad \therefore \tan 2x = 1$$

$0 < 2x < 2\pi$ 이므로 $2x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $2x = \frac{5}{4}\pi$

$$\therefore x = \frac{\pi}{8} \text{ 또는 } x = \frac{5}{8}\pi$$

x	0	...	$\frac{\pi}{8}$	...	$\frac{5}{8}\pi$	...	π
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		\	극소	/	극대	\	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{8}$ 에서 극솟값 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 를 갖고, $x = \frac{5}{8}\pi$ 에서 극댓값을 갖는다.

이때

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (\sin 2x - \cos 2x) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

이므로 $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore C = \sqrt{2}$$

즉 $f(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x + \sqrt{2}$ 이므로 구하는 극댓값

$$\text{은 } f\left(\frac{5}{8}\pi\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{답 } \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

0977 조건 (나)에서 $x \rightarrow \pi$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = 0$ 이므로 $f(\pi) = 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = f'(\pi) = a - 1$$

이때 조건 (가)에서 $f'(\pi) = \frac{1}{2}a$ 이므로

$$\frac{1}{2}a = a - 1 \quad \therefore a = 2$$

즉 $f'(x) = 2 \cos \frac{x}{3}$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 2 \cos \frac{x}{3} dx = 6 \sin \frac{x}{3} + C$$

$f(\pi) = 0$ 이므로 $3\sqrt{3} + C = 0 \quad \therefore C = -3\sqrt{3}$

따라서 $f(x) = 6 \sin \frac{x}{3} - 3\sqrt{3}$ 이므로

$$af(3\pi) = 2 \times (-3\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} \quad \text{답 } -6\sqrt{3}$$

0978 $1 - \cos x = t$ 로 놓으면 $\sin x = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$f(x) = \int (1 - \cos x)^3 \sin x dx$$

$$= \int t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 + C$$

$$= \frac{1}{4} (1 - \cos x)^4 + C$$

이때 $f(0) = 0$ 이므로 $C = 0$

따라서 $f(x) = \frac{1}{4}(1 - \cos x)^4$ 이고 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 에서
 $0 \leq 1 - \cos x \leq 2$ 이므로 $f(x)$ 의 최댓값은
 $\frac{1}{4} \times 2^4 = 4$ 답 ①

0979 $\cos x = t$ 로 놓으면 $-\sin x = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\int \sin x \cos^2 x dx = \int t^2 \times (-1) dt = -\frac{1}{3}t^3 + C$$

$$= -\frac{1}{3} \cos^3 x + C$$
답 $-\frac{1}{3} \cos^3 x + C$

0980 $\tan x = t$ 로 놓으면 $\sec^2 x = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \sec^2 x \tan x dx = \int t dt$$

$$= \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2} \tan^2 x + C$$
 이때 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{1}{2} + C = -\frac{1}{2} \quad \therefore C = -1$
 따라서 $f(x) = \frac{1}{2} \tan^2 x - 1$ 이므로
 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5}{6}$ 답 $-\frac{5}{6}$

0981 $f(x) = \int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \times \cos x dx$

$$= \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx$$
 $\sin x = t$ 로 놓으면 $\cos x = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$f(x) = \int (1 - t^2) dt = -\frac{1}{3}t^3 + t + C$$

$$= -\frac{1}{3} \sin^3 x + \sin x + C$$
 이때 $f(0) = 0$ 이므로 $C = 0$
 따라서 $f(x) = -\frac{1}{3} \sin^3 x + \sin x$ 이므로
 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ 답 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

0982 $f(x) = \int \frac{3x^2}{x^3+1} dx = \int \frac{(x^3+1)'}{x^3+1} dx$

$$= \ln |x^3+1| + C$$
 이때 $f(0) = 1$ 이므로 $C = 1$
 따라서 $f(x) = \ln |x^3+1| + 1$ 이므로
 $f(1) = \ln 2 + 1$ 답 ④

0983 $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+5) + C \quad (\because x^2+4x+5 > 0)$$

이때 $f(-2) = 0$ 이므로 $C = 0$
 $\therefore f(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+5)$
답 $f(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+5)$

0984 $F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{e^x}{3e^x+1} dx$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{(3e^x+1)'}{3e^x+1} dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln(3e^x+1) + C \quad (\because 3e^x+1 > 0)$$

$$\therefore F(\ln 5) - F(0) = \left(\frac{1}{3} \ln 16 + C\right) - \left(\frac{1}{3} \ln 4 + C\right)$$

$$= \frac{4}{3} \ln 2 - \frac{2}{3} \ln 2$$

$$= \frac{2}{3} \ln 2$$
 답 ②

0985 $f'(x) = 3f(x)$ 에서
 $\frac{f'(x)}{f(x)} = 3 \quad (\because f(x) > 0)$
 즉 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int 3 dx$ 이므로
 $\ln f(x) = 3x + C \quad \therefore f(x) = e^{3x+C}$
 한편 $f'(0) = 3f(0)$ 이고 $f'(0) = 3e$ 이므로 $f(0) = e$
 즉 $e^C = e$ 이므로 $C = 1$
 따라서 $f(x) = e^{3x+1}$ 이므로
 $f(1) = e^4$ 답 ⑤

0986 $f(x) = \int f'(x) dx = \int \tan x dx$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx$$

$$= -\ln(\cos x) + C \quad (\because \cos x > 0)$$
 이때 $f(0) = 0$ 이므로 $C = 0$
 $\therefore f(x) = -\ln(\cos x)$
 한편 $g(\ln 2) = k$ 라 하면 $f(k) = \ln 2$ 이므로
 $-\ln(\cos k) = \ln 2, \quad \cos k = \frac{1}{2}$
 $\therefore k = \frac{\pi}{3} \quad \left(\because 0 \leq k < \frac{\pi}{2}\right)$
 즉 $g(\ln 2) = \frac{\pi}{3}$ 이므로
 $g'(\ln 2) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 답 ②

RPM비법노트

미분가능한 함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이고 $f(a) = b$, 즉 $g(b) = a$ 이면

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} \quad (\text{단, } f'(a) \neq 0)$$

$$\begin{aligned} 0987 \quad f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{2x^2+x+2}{x-1} dx \\ &= \int \left(2x+3+\frac{5}{x-1} \right) dx \\ &= x^2+3x+5\ln|x-1|+C \end{aligned}$$

이때 $f(0)=0$ 이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=x^2+3x+5\ln|x-1|$ 이므로

$$f(2)=10$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} 0988 \quad f(x) &= \int \frac{4-x}{x+2} dx = \int \left(-1+\frac{6}{x+2} \right) dx \\ &= -x+6\ln|x+2|+C \end{aligned}$$

... 1단계

이때 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(-1, 0)$ 을 지나므로

$$f(-1)=0, \quad 1+C=0 \quad \therefore C=-1$$

따라서 $f(x)=-x+6\ln|x+2|-1$ 이므로

$$k=f(-3)=2$$

... 2단계

... 3단계

답 2

	채점 요소	비율
1단계	부정적분 구하기	50%
2단계	$f(x)$ 구하기	30%
3단계	k 의 값 구하기	20%

$$0989 \quad \frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{x+5}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

(A, B 는 상수)라 하면

$$\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{(A+B)x-A+2B}{(x+2)(x-1)}$$

이 등식은 x 에 대한 항등식이므로

$$A+B=1, \quad -A+2B=5 \quad \therefore A=-1, B=2$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx &= \int \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{2}{x-1} \right) dx \\ &= -\ln|x+2|+2\ln|x-1|+C \\ &= \ln \frac{(x-1)^2}{|x+2|} + C \end{aligned}$$

따라서 $a=2, b=-1$ 이므로 $a+b=1$

답 ②

$$0990 \quad \frac{1}{x^2+3x} = \frac{1}{x(x+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \right) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+3x} dx &= \int \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} (\ln|x| - \ln|x+3|) + C \\ &= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C \end{aligned}$$

답 ⑤

$$0991 \quad \frac{x+2}{x^2+2x-3} = \frac{x+2}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1}$$

(A, B 는 상수)라 하면

$$\frac{x+2}{x^2+2x-3} = \frac{(A+B)x-A+3B}{(x+3)(x-1)}$$

이 등식은 x 에 대한 항등식이므로

$$A+B=1, \quad -A+3B=2 \quad \therefore A=\frac{1}{4}, B=\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int \frac{x+2}{x^2+2x-3} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{x+3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{x-1} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \ln|x+3| + \frac{3}{4} \ln|x-1| + C \end{aligned}$$

이때 $f(0)=0$ 이므로

$$\frac{1}{4} \ln 3 + C = 0 \quad \therefore C = -\frac{1}{4} \ln 3$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{4} \ln|x+3| + \frac{3}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln 3$ 이므로

$$f(-2) = \frac{3}{4} \ln 3 - \frac{1}{4} \ln 3 = \frac{1}{2} \ln 3 = \ln \sqrt{3}$$

$$\therefore e^{f(-2)} = e^{\ln \sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

답 $\sqrt{3}$

$$0992 \quad x^2+2x+2=t \text{로 놓으면} \quad 2x+2 = \frac{dt}{dx}$$

$x=0$ 일 때 $t=2$, $x=1$ 일 때 $t=5$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx &= \int_2^5 \frac{1}{t} \times \frac{1}{2} dt \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln|t| \right]_2^5 \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$

$$\begin{aligned} \text{다른 풀이} \quad \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln(x^2+2x+2) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$0993 \quad \frac{3}{x^2+5x+4} = \frac{3}{(x+1)(x+4)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4}$$

이므로

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{3}{x^2+5x+4} dx &= \int_0^3 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4} \right) dx \\ &= \left[\ln|x+1| - \ln|x+4| \right]_0^3 \\ &= \ln \frac{16}{7} \end{aligned}$$

따라서 $k = \frac{16}{7}$ 이므로 $7k=16$

답 ④

$$0994 \quad x^2+1=t \text{로 놓으면} \quad 2x = \frac{dt}{dx}$$

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=a$ 일 때 $t=a^2+1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx &= \int_1^{a^2+1} \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{2} dt \\ &= \int_1^{a^2+1} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \left[\sqrt{t} \right]_1^{a^2+1} = \sqrt{a^2+1} - 1 \end{aligned}$$

즉 $\sqrt{a^2+1} - 1 = 1$ 이므로 $\sqrt{a^2+1} = 2$

$$a^2+1=4, \quad a^2=3$$

$$\therefore a=\sqrt{3} \quad (\because a>0)$$

... 3단계

답 $\sqrt{3}$

채점 요소	비율
1단계 치환하여 피적분함수를 변형하기	40%
2단계 정적분의 값을 a 에 대한 식으로 나타내기	40%
3단계 a 의 값 구하기	20%

0995 $\sqrt{x-2}=t$ 로 놓으면 $x-2=t^2$ 이므로

$$1=2t \frac{dt}{dx}$$

$x=6$ 일 때 $t=2$, $x=11$ 일 때 $t=3$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_6^{11} \frac{1}{(x-3)\sqrt{x-2}} dx &= \int_2^3 \frac{1}{(t^2-1)t} \times 2t dt \\ &= \int_2^3 \frac{2}{t^2-1} dt \\ &= \int_2^3 \frac{2}{(t-1)(t+1)} dt \\ &= \int_2^3 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \left[\ln|t-1| - \ln|t+1| \right]_2^3 \\ &= \ln \frac{3}{2} \end{aligned} \quad \text{답 } \ln \frac{3}{2}$$

0996 $1-x^2=t$ 로 놓으면 $-2x=\frac{dt}{dx}$

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=1$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{1-x^2} dx &= \int_1^0 e^t \times \left(-\frac{1}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^t dt \\ &= \frac{1}{2} \left[e^t \right]_0^1 = \frac{1}{2} (e-1) \end{aligned} \quad \text{답 } ①$$

0997 $1+\ln x=t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$

$x=1$ 일 때 $t=1$, $x=e$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\int_1^e \frac{1}{x(1+\ln x)^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$

0998 $\int_{-2}^0 \frac{e^x}{e^x+1} dx + \int_0^2 \frac{e^x}{e^x+1} dx$

$$\begin{aligned} &= \int_{-2}^2 \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int_{-2}^2 \frac{(e^x+1)'}{e^x+1} dx \\ &= \left[\ln(e^x+1) \right]_{-2}^2 = \ln \frac{e^2+1}{e^{-2}+1} \\ &= \ln e^2 = 2 \end{aligned} \quad \text{답 } ③$$

0999 $\ln x=t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$

$x=1$ 일 때 $t=0$, $x=k$ 일 때 $t=\ln k$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^k \frac{(\ln x)^3}{x} dx &= \int_0^{\ln k} t^3 dt \\ &= \left[\frac{1}{4} t^4 \right]_0^{\ln k} = \frac{1}{4} (\ln k)^4 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{4} (\ln k)^4 = 4$ 이므로 $(\ln k)^4 = 16$

$$\ln k = 2 \quad (\because k > 1) \quad \therefore k = e^2 \quad \text{답 } e^2$$

1000 $1+\cos x=t$ 로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$

$x=0$ 일 때 $t=2$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx &= \int_2^1 \frac{1}{t} \times (-1) dt = \int_1^2 \frac{1}{t} dt \\ &= \left[\ln|t| \right]_1^2 = \ln 2 \end{aligned} \quad \text{답 } \ln 2$$

1001 $\sin x=t$ 로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$

$x=-\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=-1$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx &= \int_{-1}^1 f(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 e^t dt = \left[e^t \right]_{-1}^1 \\ &= e - \frac{1}{e} \end{aligned} \quad \text{답 } ②$$

1002 $\cos x=t$ 로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=\pi$ 일 때 $t=-1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (1-\cos^3 x) \cos x \sin x dx &= \int_1^{-1} (1-t^3) t \times (-1) dt \\ &= \int_{-1}^1 (t-t^4) dt = 2 \int_0^1 (-t^4) dt \\ &= 2 \left[-\frac{1}{5} t^5 \right]_0^1 = 2 \times \left(-\frac{1}{5} \right) = -\frac{2}{5} \end{aligned} \quad \text{답 } -\frac{2}{5}$$

1003 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cot^2 x) \cos x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \csc^2 x \cos x dx$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$

$\sin x=t$ 로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$

$x=\frac{\pi}{4}$ 일 때 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\frac{\pi}{3}$ 일 때 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

따라서 $a=1$, $b=-\frac{2}{3}$ 이므로

$$a-b = \frac{5}{3} \quad \text{답 } \frac{5}{3}$$

다른 풀이 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cot^2 x) \cos x dx$

$$\begin{aligned} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \csc^2 x \cos x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \csc x \cot x dx = \left[-\csc x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

1004 $u(x)=x, v'(x)=\cos 2x$ 로 놓으면

$$u'(x)=1, v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int x \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{2}x \sin 2x - \int \frac{1}{2} \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C\end{aligned}$$

이때 $f(0)=\frac{5}{4}$ 이므로 $\frac{1}{4}+C=\frac{5}{4} \quad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + 1$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}+1 \quad \text{답 } \frac{\pi}{8}+1$$

1005 $u(x)=x-2, v'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$$u'(x)=1, v(x)=e^x$$

$$\begin{aligned}\therefore \int (x-2)e^x dx &= (x-2)e^x - \int e^x dx \\ &= (x-2)e^x - e^x + C \\ &= (x-3)e^x + C\end{aligned}$$

따라서 $f(x)=x-3$ 이므로

$$f(8)=5 \quad \text{답 } 5$$

1006 조건 ㉞에서

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(x-2h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-2h)-f(x)}{-2h} \times 2 \\ &= 2f'(x) = \ln x\end{aligned}$$

즉 $f'(x)=\frac{1}{2}\ln x$ 이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\frac{1}{2}\int \ln x dx$$

$u(x)=\ln x, v'(x)=1$ 로 놓으면

$$u'(x)=\frac{1}{x}, v(x)=x$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \frac{1}{2}\left(x \ln x - \int \frac{1}{x} \times x dx\right) \\ &= \frac{1}{2}x \ln x - \frac{1}{2}x + C\end{aligned}$$

이때 조건 ㉞에서 $f(1)=1$ 이므로

$$-\frac{1}{2}+C=1 \quad \therefore C=\frac{3}{2}$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x \ln x - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 이므로 $f(x)$ 의 상수항은

$$\frac{3}{2} \text{이다.} \quad \text{답 } \frac{3}{2}$$

1007 $F(\pi)=\pi$ 이므로

$$\pi=\pi f(\pi) \quad \therefore f(\pi)=1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$F(x)=x f(x)-x^2 \sin x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+x f'(x)-2x \sin x-x^2 \cos x$$

$$x f'(x)=2x \sin x+x^2 \cos x$$

$$\therefore f'(x)=2 \sin x+x \cos x (\because x>0)$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int (2 \sin x+x \cos x)dx$$

$$=-2 \cos x+\int x \cos x dx$$

$\int x \cos x dx$ 에서 $u(x)=x, v'(x)=\cos x$ 로 놓으면

$$u'(x)=1, v(x)=\sin x$$

$$\begin{aligned}\therefore \int x \cos x dx &= x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= -2 \cos x + x \sin x + \cos x + C \\ &= x \sin x - \cos x + C\end{aligned}$$

이때 ㉠에서 $1+C=1 \quad \therefore C=0$

따라서 $f(x)=x \sin x - \cos x$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2} \quad \text{답 } \frac{\pi}{2}$$

1008 $f(x)=x, g'(x)=e^{1-x}$ 으로 놓으면

$$f'(x)=1, g(x)=-e^{1-x}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^1 x e^{1-x} dx &= \left[-x e^{1-x}\right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{1-x}) dx \\ &= -1 + \left[-e^{1-x}\right]_0^1 \\ &= -1 + (-1 + e) \\ &= e - 2\end{aligned}$$

답 ①

1009 $f(x)=\ln x, g'(x)=\frac{1}{x^2}$ 로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{x}, g(x)=-\frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_1^3 \frac{\ln x}{x^2} dx &= \left[-\frac{1}{x} \ln x\right]_1^3 - \int_1^3 \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= -\frac{1}{3} \ln 3 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 \\ &= -\frac{1}{3} \ln 3 + \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3}(2 - \ln 3)\end{aligned}$$

따라서 $a=\frac{1}{3}, b=2$ 이므로

$$\frac{b}{a}=6 \quad \text{답 } 6$$

1010 $\int_{-3\pi}^{\pi} f(x)dx - \int_{2\pi}^{\pi} f(x)dx + \int_{2\pi}^{3\pi} f(x)dx$

$$= \int_{-3\pi}^{\pi} f(x)dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx + \int_{2\pi}^{3\pi} f(x)dx$$

$$= \int_{-3\pi}^{2\pi} f(x)dx + \int_{2\pi}^{3\pi} f(x)dx = \int_{-3\pi}^{3\pi} f(x)dx$$

$$= \int_{-3\pi}^{3\pi} (x \cos x + x \sin x)dx$$

이때 $g(x)=x \cos x, h(x)=x \sin x$ 라 하면

$$g(-x)=-x \cos(-x)=-x \cos x=-g(x),$$

$$h(-x)=-x \sin(-x)=x \sin x=h(x)$$

이므로 $g(x)$ 는 기함수, $h(x)$ 는 우함수이다.

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-3\pi}^{3\pi} (x \cos x + x \sin x) dx &= 2 \int_0^{3\pi} x \sin x dx \\ u(x) &= x, v'(x) = \sin x \text{로 놓으면} \\ u'(x) &= 1, v(x) = -\cos x \\ \therefore 2 \int_0^{3\pi} x \sin x dx &= 2 \left(\left[-x \cos x \right]_0^{3\pi} + \int_0^{3\pi} \cos x dx \right) \\ &= 2 \left(3\pi + \left[\sin x \right]_0^{3\pi} \right) \\ &= 2 \times 3\pi = 6\pi \end{aligned}$$

답 6π

1011 $a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$ 에서 $f(x) = \cos x, g'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x, g(x) = e^x \\ \text{이므로} \\ a &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx \\ &= \left[e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = -1 + b \\ \therefore a - b &= -1 \\ b &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx \text{에서 } u(x) = \sin x, v'(x) = e^x \text{으로 놓으면} \\ u'(x) &= \cos x, v(x) = e^x \\ \text{이므로} \\ b &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx \\ &= \left[e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - a \\ \therefore a + b &= e^{\frac{\pi}{2}} \\ \therefore (a+b)^2 + (a-b)^2 &= e^{\pi} + 1 \end{aligned}$$

답 ④

1012 $f(x) = e^x + \int_0^1 x f(t) dt = e^x + x \int_0^1 f(t) dt$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) dt &= k \text{ (} k \text{는 상수)로 놓으면} \\ f(x) &= e^x + kx \\ \therefore k &= \int_0^1 (e^t + kt) dt = \left[e^t + \frac{1}{2} kt^2 \right]_0^1 = e + \frac{1}{2} k - 1 \\ \text{즉 } \frac{1}{2} k &= e - 1 \text{이므로} \\ k &= 2(e - 1) \\ \text{따라서 } f(x) &= e^x + 2(e - 1)x \text{이므로} \\ f(1) &= 3e - 2 \\ \therefore a - b &= 3 - (-2) = 5 \end{aligned}$$

답 ⑤

1013 $\int_0^{\pi} f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x + k \\ \therefore k &= \int_0^{\pi} (\cos t + k) dt = \left[\sin t + kt \right]_0^{\pi} = k\pi \\ \text{즉 } k(\pi - 1) &= 0 \text{이므로 } k = 0 \\ \text{따라서 } f(x) &= \cos x \text{이므로} \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 1/2

1014 $\int_0^1 f'(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x - 2x + k \\ \text{이므로 } f'(x) &= e^x - 2 \\ \therefore k &= \int_0^1 (e^t - 2) dt = \left[e^t - 2t \right]_0^1 = e - 3 \\ \text{따라서 } f(x) &= e^x - 2x + e - 3 \text{이므로} \\ f(1) &= 2e - 5 \end{aligned}$$

답 2e-5

1015 $\int_1^e f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x + k \\ \therefore k &= \int_1^e (\ln t + k) dt \\ u(t) &= \ln t + k, v'(t) = 1 \text{로 놓으면} \\ u'(t) &= \frac{1}{t}, v(t) = t \\ \therefore \int_1^e (\ln t + k) dt &= \left[t \ln t + kt \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{t} \times t dt \\ &= e + ke - k - \left[t \right]_1^e \\ &= e + ke - k - (e - 1) \\ &= ke - k + 1 \end{aligned}$$

즉 $ke - k + 1 = k$ 이므로

$$(2 - e)k = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{2 - e}$$

$$\therefore f(x) = \ln x + \frac{1}{2 - e}$$

답 $f(x) = \ln x + \frac{1}{2 - e}$

1016 $\int_0^x f(t) dt = e^{2x} + ae^x$ ㉠

㉠의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$0 = 1 + a \quad \therefore a = -1$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f(x) &= 2e^{2x} + ae^x = 2e^{2x} - e^x \\ \therefore f(\ln 2) &= 2 \times 4 - 2 = 6 \end{aligned}$$

답 6

1017 $\int_{\ln 9}^x e^t f(t) dt = e^{2x} - ae^x + 9$ ㉡

㉡의 양변에 $x = \ln 9$ 를 대입하면

$$0 = 81 - 9a + 9, \quad 9a = 90$$

$$\therefore a = 10$$

㉡의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} e^x f(x) &= 2e^{2x} - ae^x, \text{ 즉 } e^x f(x) = 2e^{2x} - 10e^x \\ \therefore f(x) &= 2e^x - 10 \\ \therefore f(0) &= -8 \end{aligned}$$

... 2단계
... 3단계
답 -8

채점 요소		비율
1단계	a의 값 구하기	40%
2단계	f(x) 구하기	40%
3단계	f(0)의 값 구하기	20%

1018 $f(x) = 2 \int_0^x e^t f(t) dt + 1$ ㉠

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 2e^x f(x) \quad \text{..... ㉡}$$

㉡의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2e^x f(x) + 2e^x f'(x) \\ &= 2e^x f(x) + 2e^x \times 2e^x f(x) \quad (\because \text{㉡}) \\ &= 2e^x (1 + 2e^x) f(x) \end{aligned}$$

이때 ㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $f(0)=1$ 이므로

$$f''(0) = 6f(0) = 6 \quad \text{답 ㉡}$$

1019 $xf(x) = x^2 \ln x + \int_1^x f(t) dt$ ㉢

㉢의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f(x) + xf'(x) &= 2x \ln x + x + f(x) \\ xf'(x) &= 2x \ln x + x \\ \therefore f'(x) &= 2 \ln x + 1 \quad (\because x > 0) \\ \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (2 \ln x + 1) dx \end{aligned}$$

$u(x) = 2 \ln x + 1$, $v'(x) = 1$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{2}{x}, v(x) = x \\ \therefore f(x) &= x(2 \ln x + 1) - \int \frac{2}{x} \times x dx \\ &= x(2 \ln x + 1) - 2x + C \\ &= 2x \ln x - x + C \end{aligned}$$

한편 ㉢의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = 0$$

즉 $-1 + C = 0$ 이므로 $C = 1$

따라서 $f(x) = 2x \ln x - x + 1$ 이므로

$$f(e) = e + 1 \quad \text{답 } e + 1$$

1020 주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0 = 1 + a \quad \therefore a = -1$$

따라서 $\int_0^x (x-t)f(t) dt = e^x - x - 1$ 에서

$$x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt = e^x - x - 1$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) &= e^x - 1 \\ \therefore \int_0^x f(t) dt &= e^x - 1 \end{aligned}$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \quad \therefore f(1) = e \\ \therefore a + f(1) &= e - 1 \end{aligned} \quad \text{답 } e - 1$$

1021 $f(x) = \int_0^x (x-t) \sin t dt$
 $= x \int_0^x \sin t dt - \int_0^x t \sin t dt$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^x \sin t dt + x \sin x - x \sin x \\ &= \int_0^x \sin t dt = [-\cos t]_0^x \\ &= -\cos x + 1 \\ \therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 \end{aligned} \quad \text{답 1}$$

1022 $\int_1^x (x-t)f(t) dt = x \ln x + 2ax + b$ 에서

$$x \int_1^x f(t) dt - \int_1^x t f(t) dt = x \ln x + 2ax + b \quad \text{..... ㉣}$$

㉣의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} \int_1^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) &= \ln x + x \times \frac{1}{x} + 2a \\ \therefore \int_1^x f(t) dt &= \ln x + 1 + 2a \end{aligned}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = 1 + 2a \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

㉣의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = 2a + b \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \frac{5}{4} \quad \text{답 ㉤}$$

1023 $\int_0^x (x-t)f'(t) dt = \frac{1}{2} \sin 2x - x$ 에서

$$x \int_0^x f'(t) dt - \int_0^x t f'(t) dt = \frac{1}{2} \sin 2x - x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} \int_0^x f'(t) dt + xf'(x) - xf'(x) &= \cos 2x - 1 \\ \int_0^x f'(t) dt &= \cos 2x - 1 \\ \left[f(t) \right]_0^x &= \cos 2x - 1 \\ \therefore f(x) - f(0) &= \cos 2x - 1 \end{aligned}$$

이때 $f(0) = 1$ 이므로

$$f(x) = \cos 2x$$

답 $f(x) = \cos 2x$

1024 $f(x) = \int_0^x (\sin t - \cos 2t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin x - \cos 2x = \sin x - (1 - 2 \sin^2 x) \\ &= 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = (\sin x + 1)(2 \sin x - 1) \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$\sin x = -1 \quad \text{또는} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \quad \text{또는} \quad x = \frac{5}{6}\pi \quad (\because 0 < x < \pi)$$

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	π
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{\pi}{6}$ 에서 극소, $x=\frac{5}{6}\pi$ 에서 극대이므로
구하는 극댓값은

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5}{6}\pi\right) &= \int_0^{\frac{5}{6}\pi} (\sin t - \cos 2t) dt \\ &= \left[-\cos t - \frac{1}{2} \sin 2t\right]_0^{\frac{5}{6}\pi} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} + 1 \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{3\sqrt{3}}{4} + 1$$

1025 $f(x) = \int_{\ln 2}^x e^t(e^t - 1)^3 dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = e^x(e^x - 1)^3$$

$f'(x)=0$ 에서

$$e^x = 1 \quad \therefore x = 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이므로

$$k = f(0) = \int_{\ln 2}^0 e^t(e^t - 1)^3 dt$$

이때 $e^t - 1 = s$ 로 놓으면 $e^t = \frac{ds}{dt}$

$t = \ln 2$ 일 때 $s = 1$, $t = 0$ 일 때 $s = 0$ 이므로

$$k = \int_1^0 s^3 ds = \left[\frac{1}{4}s^4\right]_1^0 = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} k^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \frac{-\frac{1}{4}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = -\frac{1}{5} \end{aligned} \quad \text{답 } -\frac{1}{5}$$

1026 $f(x) = \int_0^x t \cos t dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = x \cos x$$

$f'(x)=0$ 에서 $\cos x = 0 \quad \therefore x = \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 < x < \pi)$

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt$$

$u(t) = t, v(t) = \sin t$ 로 놓으면

$$u'(t) = 1, v(t) = \sin t$$

$$\begin{aligned} \therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \left[t \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt \\ &= \frac{\pi}{2} - \left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

즉 $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{2} - 1$ 이므로

$$\alpha - \beta = 1$$

답 ③

1027 $f(x) = \int_{-1}^x \frac{kt}{t^2+1} dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \frac{kx}{x^2+1}$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극솟값 $-\ln 2$ 를 가지므로

$$f'(a) = 0, f(a) = -\ln 2$$

$$f'(a) = 0 \text{에서 } \frac{ka}{a^2+1} = 0$$

$$\therefore a = 0 \quad (\because k \neq 0)$$

따라서 $f(0) = -\ln 2$ 이고

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_{-1}^0 \frac{kt}{t^2+1} dt = \frac{k}{2} \int_{-1}^0 \frac{(t^2+1)'}{t^2+1} dt \\ &= \frac{k}{2} \left[\ln(t^2+1) \right]_{-1}^0 = \frac{k}{2} \times (-\ln 2) \\ &= -\frac{k}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } -\frac{k}{2} \ln 2 = -\ln 2 \quad \therefore k = 2$$

$$\therefore k + a = 2$$

답 ②

1028 $f(x) = \int_0^x (1-t)e^t dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = (1-x)e^x$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에

서 극대이면서 최대이므로 최대값은

$$f(1) = \int_0^1 (1-t)e^t dt$$

$u(t) = 1-t, v(t) = e^t$ 로 놓으면

$$u'(t) = -1, v(t) = e^t$$

$$\begin{aligned} \therefore f(1) &= \left[(1-t)e^t\right]_0^1 + \int_0^1 e^t dt \\ &= -1 + \left[e^t\right]_0^1 \\ &= -1 + (e-1) = e-2 \end{aligned}$$

답 $e-2$

1029 $f(x) = \int_0^x (1-2\cos t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 1 - 2\cos x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \cos x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 < x < \frac{\pi}{2})$$

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{3}$ 에서 극소이면서 최소이므로 최소값은

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-2\cos t) dt \\ &= \left[t - 2\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \end{aligned}$$

답 ①

1030 $f(x) = \int_x^{x+1} \left(t + \frac{6}{t}\right) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= x+1 + \frac{6}{x+1} - \left(x + \frac{6}{x}\right) \\ &= 1 + \frac{6}{x+1} - \frac{6}{x} \\ &= \frac{x^2+x-6}{x(x+1)} = \frac{(x+3)(x-2)}{x(x+1)} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=2$ ($\because x>0$)

x	0	...	2	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$$\begin{aligned} f(2) &= \int_2^3 \left(t + \frac{6}{t}\right) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 + 6\ln|t| \right]_2^3 = \frac{5}{2} + 6\ln \frac{3}{2} \end{aligned} \quad \text{답 ②}$$

1031 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+2h} f(t) dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+2h) - F(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+2h) - F(1)}{2h} \times 2 \\ &= 2F'(1) = 2f(1) \\ &= 2e \end{aligned} \quad \text{답 ③}$$

1032 $f(t) = e^{2t}(\cos t - \sin t)$ 라 하고 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면 주어진 식은

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\pi-h}^{\pi+h} f(t) dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\pi+h) - F(\pi-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\pi+h) - F(\pi) + F(\pi) - F(\pi-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\pi+h) - F(\pi)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\pi) - F(\pi-h)}{-h} \\ &= F'(\pi) + F'(\pi) = 2F'(\pi) \\ &= 2f(\pi) = -2e^{2\pi} \end{aligned} \quad \text{답 } -2e^{2\pi}$$

1033 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2-1} \int_1^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x^3) - F(1)}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{F(x^3) - F(1)}{x^3-1} \times \frac{x^3-1}{x^2-1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{F(x^3) - F(1)}{x^3-1} \times \frac{x^2+x+1}{x+1} \right\} \\ &= \frac{3}{2} F'(1) = \frac{3}{2} f(1) \\ &= \frac{3}{2} (e+1) \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{3}{2}(e+1)$$

1034 $f(t) = \cos t - \sin t$ 라 하고 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면 주어진 식의 좌변은

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x-a} \\ &= F'(a) = f(a) \\ &= \cos a - \sin a \end{aligned} \quad \dots \text{1단계}$$

즉 $\cos a - \sin a = 0$ 이므로

$$\cos a = \sin a \quad \therefore a = \frac{\pi}{4} \quad (\because 0 \leq a \leq \pi) \quad \dots \text{2단계}$$

답 $\frac{\pi}{4}$

채점 요소		비율
1단계	주어진 식의 좌변을 간단히 하기	60%
2단계	a 의 값 구하기	40%

1035 $x = 2 \sin \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$)로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = 2 \cos \theta$
 $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=1$ 일 때 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2 \theta}} \times 2 \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{4 \cos^2 \theta}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} \end{aligned} \quad \text{답 ②}$$

1036 $x = \sqrt{3} \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$)로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta} = \sqrt{3} \sec^2 \theta$$

$x=1$ 일 때 $\theta = \frac{\pi}{6}$, $x=3$ 일 때 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{3}{x^2+3} dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{3 \tan^2 \theta + 3} \times \sqrt{3} \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\sqrt{3} \sec^2 \theta}{3 \sec^2 \theta} d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{3} d\theta \\ &= \left[\sqrt{3} \theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \pi \end{aligned}$$

따라서 $k = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 이므로 $k^2 = \frac{1}{12}$ 답 $\frac{1}{12}$

1037 $x = a \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$)로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta} = a \sec^2 \theta$$

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=a$ 일 때 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{1}{a^2+x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a^2+a^2 \tan^2 \theta} \times a \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a \sec^2 \theta}{a^2 \sec^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a} d\theta \\ &= \left[\frac{1}{a} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4a} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{\pi}{4a} = b$ 이므로 $4ab = \pi$ 답 π

1038 $x = a \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta} = a \cos \theta$$

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=a$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} \times a \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} \times a \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

이때 $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ 에서 $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 \theta d\theta &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= a^2 \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= a^2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{a^2}{4} \pi \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a^2}{4} \pi = \pi$ 이므로 $a^2 = 4$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

답 ③

1039 $u(x) = (\ln x)^2$, $v'(x) = x$ 로 놓으면

$$u'(x) = \frac{2 \ln x}{x}, v(x) = \frac{1}{2} x^2$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int x (\ln x)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^2 - \int x \ln x dx \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$\int x \ln x dx$ 에서 $p(x) = \ln x$, $q'(x) = x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} p'(x) &= \frac{1}{x}, q(x) = \frac{1}{2} x^2 \\ \therefore \int x \ln x dx &= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C_1 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

①을 ②에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^2 - \left(\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C_1 \right) \\ &= \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^2 - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C \end{aligned}$$

이때 $f(1) = -1$ 이므로 $\frac{1}{4} + C = -1 \quad \therefore C = -\frac{5}{4}$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^2 - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 - \frac{5}{4}$ 이므로

$$f(e) = \frac{1}{4} (e^2 - 5) \quad \text{답 ②}$$

1040 $u(x) = x^2 - 2x$, $v'(x) = e^x$ 로 놓으면

$$u'(x) = 2x - 2, v(x) = e^x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int (x^2 - 2x) e^x dx \\ = (x^2 - 2x) e^x - \int (2x - 2) e^x dx \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$\int (2x - 2) e^x dx$ 에서 $p(x) = 2x - 2$, $q'(x) = e^x$ 로 놓으면

$$p'(x) = 2, q(x) = e^x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int (2x - 2) e^x dx &= (2x - 2) e^x - \int 2e^x dx \\ &= (2x - 2) e^x - 2e^x + C_1 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

①을 ②에 대입하면

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 2x) e^x dx &= (x^2 - 2x) e^x - \{ (2x - 2) e^x - 2e^x + C_1 \} \\ &= (x^2 - 4x + 4) e^x + C \quad \dots\dots 1단계 \\ \therefore f(x) &= x^2 - 4x + 4 \quad \dots\dots 2단계 \end{aligned}$$

따라서 $f(x) = 4$ 에서

$$x^2 - 4x = 0, \quad x(x - 4) = 0$$

$$\therefore x = 4 \quad (\because x > 0) \quad \dots\dots 3단계$$

답 4

채점 요소		비율
1단계	부정적분 구하기	70 %
2단계	$f(x)$ 구하기	10 %
3단계	$f(x) = 4$ 를 만족시키는 양수 x 의 값 구하기	20 %

1041 $u(x) = \sin x$, $v'(x) = e^x$ 로 놓으면

$$u'(x) = \cos x, v(x) = e^x$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int e^x \sin x dx \\ &= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$\int e^x \cos x dx$ 에서 $p(x) = \cos x$, $q'(x) = e^x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} p'(x) &= -\sin x, q(x) = e^x \\ \therefore \int e^x \cos x dx &= e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \\ &= e^x \cos x + f(x) + C_1 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

①을 ②에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \sin x - \{ e^x \cos x + f(x) + C_1 \} \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - f(x) - C_1 \\ 2f(x) &= e^x (\sin x - \cos x) - C_1 \\ \therefore f(x) &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C \end{aligned}$$

이때 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ 이므로

$$C = 0$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$ 이므로

$$f(\pi) = \frac{e^\pi}{2} \quad \text{답 ④}$$

1042 $f(x) = x^2$, $g'(x) = \cos x$ 로 놓으면

$$f'(x) = 2x, g(x) = \sin x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx &= \left[x^2 \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x dx \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \text{에서 } u(x)=x, v'(x)=\sin x \text{로 놓으면}$$

$$u'(x)=1, v(x)=-\cos x$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \left[-x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$= \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \quad \dots \textcircled{㉔}$$

㉔을 ㉓에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = \frac{\pi^2}{4} - 2 \quad \text{답 } \frac{\pi^2}{4} - 2$$

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 147~150쪽

1043 $x^2-1=t$ 로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int x(x^2-1)^4 dx$$

$$= \int t^4 \times \frac{1}{2} dt = \frac{1}{10} t^5 + C = \frac{1}{10} (x^2-1)^5 + C$$

이때 $f(1)=0$ 이므로 $C=0$

따라서 $f(x) = \frac{1}{10} (x^2-1)^5$ 이므로

$$f(0) = -\frac{1}{10} \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

1044 $f(x) = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C_1$

이때 $f(0)=0$ 이므로 $-1+C_1=0 \quad \therefore C_1=1$

따라서 $f(x) = -e^{-x} + 1$ 이므로

$$f(1) = 1 - \frac{1}{e}$$

$g(x) = \int x e^{-x^2} dx$ 에서 $-x^2=t$ 로 놓으면 $-2x=\frac{dt}{dx}$ 이므로

$$g(x) = \int x e^{-x^2} dx$$

$$= \int e^t \times \left(-\frac{1}{2}\right) dt = -\frac{1}{2} e^t + C_2$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C_2$$

이때 $g(0)=0$ 이므로 $-\frac{1}{2} + C_2 = 0 \quad \therefore C_2 = \frac{1}{2}$

따라서 $g(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + \frac{1}{2}$ 이므로

$$g(1) = -\frac{1}{2e} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$h(x) = \int x^2 e^{-x^3} dx$ 에서 $-x^3=s$ 로 놓으면 $-3x^2=\frac{ds}{dx}$ 이므로

$$h(x) = \int x^2 e^{-x^3} dx$$

$$= \int e^s \times \left(-\frac{1}{3}\right) ds = -\frac{1}{3} e^s + C_3$$

$$= -\frac{1}{3} e^{-x^3} + C_3$$

이때 $h(0)=0$ 이므로 $-\frac{1}{3} + C_3 = 0 \quad \therefore C_3 = \frac{1}{3}$

따라서 $h(x) = -\frac{1}{3} e^{-x^3} + \frac{1}{3}$ 이므로

$$h(1) = -\frac{1}{3e} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$\therefore h(1) < g(1) < f(1)$$

답 ⑤

1045 $\ln x=t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$ 이므로

$$f(x) = \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \sin t dt$$

$$= -\cos t + C = -\cos(\ln x) + C$$

이때 $f(1)=1$ 이므로 $-1+C=1 \quad \therefore C=2$

따라서 $f(x) = -\cos(\ln x) + 2$ 이므로

$$f(e^\pi) = 3$$

답 ③

1046 $f'(x) = \sin^2 x \cos x$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \sin^2 x \cos x dx$$

$\sin x=t$ 로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$ 이므로

$$f(x) = \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C$$

$$= \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

이때 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 을 지나므로 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

$$\frac{1}{3} + C = 0 \quad \therefore C = -\frac{1}{3}$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{3}$ 이므로

$$f(\pi) = -\frac{1}{3} \quad \text{답 } -\frac{1}{3}$$

1047 $f(x) = \int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{(\ln x)'}{\ln x} dx$

$$= \ln |\ln x| + C$$

이때 $f(e)=e$ 이므로 $C=e$

따라서 $f(x) = \ln |\ln x| + e$ 이므로

$$f(e^2) = \ln 2 + e$$

답 ①

1048 $\frac{2}{4x^2-1} = \frac{2}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1}$

이므로

$$\int \frac{2}{4x^2-1} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln |2x-1| - \frac{1}{2} \ln |2x+1| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2x-1}{2x+1} \right| + C$$

$$\text{답 } \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2x-1}{2x+1} \right| + C$$

1049 $\left| \frac{x-2}{x+2} \right| = \begin{cases} \frac{x-2}{x+2} & (x < -2 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -\frac{x-2}{x+2} & (-2 < x < 2) \end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^3 \left| \frac{x-2}{x+2} \right| dx \\ &= \int_{-1}^{-2} \left(-\frac{x-2}{x+2} \right) dx + \int_{-2}^2 \frac{x-2}{x+2} dx \\ &= \int_{-1}^{-2} \left(-1 + \frac{4}{x+2} \right) dx + \int_{-2}^2 \left(1 - \frac{4}{x+2} \right) dx \\ &= \left[-x + 4 \ln |x+2| \right]_{-1}^{-2} + \left[x - 4 \ln |x+2| \right]_{-2}^2 \\ &= (4 \ln 4 - 3) + (1 - 4 \ln 5 + 4 \ln 4) \\ &= 16 \ln 2 - 4 \ln 5 - 2 \end{aligned}$$

따라서 $a=16, b=-4, c=-2$ 이므로
 $a+b-c=14$

답 14

1050 $\int_1^e \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right) \ln x dx - \int_1^e \frac{2}{x^2} \ln x dx = \int_1^e \frac{3}{x} \ln x dx$

$\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$

$x=1$ 일 때 $t=0, x=e$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\int_1^e \frac{3}{x} \ln x dx = \int_0^1 3t dt = \left[\frac{3}{2} t^2 \right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

답 ③

1051 $x+1=t$ 로 놓으면 $1 = \frac{dt}{dx}$

$x=-1$ 일 때 $t=0, x=1$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\int_{-1}^1 e^x f(x+1) dx = \int_0^2 e^{t-1} f(t) dt$$

이때 $0 \leq t \leq 2$ 에서 $f(t)=2$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^2 e^{t-1} f(t) dt &= \int_0^2 e^{t-1} \times 2 dt = 2 \left[e^{t-1} \right]_0^2 \\ &= 2 \left(e - \frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$

답 $2 \left(e - \frac{1}{e} \right)$

다른 풀이 $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & (-1 \leq x \leq 0) \\ 2 & (0 \leq x \leq 2) \end{cases}$ 이므로

$$f(x+1) = \begin{cases} 2x+4 & (-2 \leq x \leq -1) \\ 2 & (-1 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-1}^1 e^x f(x+1) dx &= \int_{-1}^1 e^x \times 2 dx \\ &= 2 \left[e^x \right]_{-1}^1 = 2 \left(e - \frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$

1052 $\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$

$x=1$ 일 때 $t=0, x=e$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{\sin(\pi \ln x)}{x} dx &= \int_0^1 \sin \pi t dt \\ &= \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_0^1 = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

즉 $\frac{2}{\pi} = \frac{k}{\pi}$ 이므로 $k=2$

답 ⑤

1053 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \sin x dx$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \sin x dx$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-\sin x = \frac{dt}{dx}$

$x=0$ 일 때 $t=1, x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \sin x dx &= \int_1^0 (1 - t^2) \times (-1) dt \\ &= \int_0^1 (1 - t^2) dt \\ &= \left[t - \frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

답 ⑤

1054 $\int_2^4 f(x) dx - \int_3^4 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$

$$= \int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx - \int_3^4 f(x) dx$$

$$= \int_1^4 f(x) dx + \int_4^3 f(x) dx$$

$$= \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 2x \ln x dx$$

$u(x) = \ln x, v'(x) = 2x$ 로 놓으면

$$u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = x^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_1^3 2x \ln x dx &= \left[x^2 \ln x \right]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{x} \times x^2 dx \\ &= 9 \ln 3 - \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^3 \\ &= 9 \ln 3 - 4 \end{aligned}$$

답 $9 \ln 3 - 4$

1055 $\int_0^2 t f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = e^x - k$$

$$\therefore k = \int_0^2 t(e^t - k) dt = \int_0^2 t e^t dt - \int_0^2 k t dt$$

$\int_0^2 t e^t dt$ 에서 $u(t) = t, v'(t) = e^t$ 로 놓으면

$$u'(t) = 1, v(t) = e^t$$

이므로

$$\begin{aligned} \int_0^2 t e^t dt &= \left[t e^t \right]_0^2 - \int_0^2 e^t dt = 2e^2 - \left[e^t \right]_0^2 \\ &= 2e^2 - (e^2 - 1) = e^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore k = \int_0^2 t e^t dt - \int_0^2 k t dt$$

$$= e^2 + 1 - \left[\frac{1}{2} k t^2 \right]_0^2$$

$$= e^2 + 1 - 2k$$

즉 $3k = e^2 + 1$ 이므로

$$\int_0^2 3x f(x) dx = 3 \int_0^2 x f(x) dx = 3k = e^2 + 1$$

답 $e^2 + 1$

1056 $\int_1^x f(t)dt = xf(x) + x^2e^{-x}$ ㉠

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) + 2xe^{-x} - x^2e^{-x}$$

$$xf'(x) = x^2e^{-x} - 2xe^{-x}$$

$$\therefore f'(x) = xe^{-x} - 2e^{-x} = (x-2)e^{-x} \quad (\because x > 0)$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x)dx = \int (x-2)e^{-x}dx$$

이때 $u(x) = x-2$, $v'(x) = e^{-x}$ 으로 놓으면

$$u'(x) = 1, v(x) = -e^{-x}$$

$$\therefore f(x) = -(x-2)e^{-x} + \int e^{-x}dx$$

$$= -(x-2)e^{-x} - e^{-x} + C$$

$$= (1-x)e^{-x} + C$$

한편 ㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = f(1) + \frac{1}{e} \quad \therefore f(1) = -\frac{1}{e}$$

즉 $C = -\frac{1}{e}$ 이므로

$$f(x) = (1-x)e^{-x} - \frac{1}{e}$$

$$\therefore f(2) = -\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e} \quad \text{답} -\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e}$$

1057 $\int_{\pi}^x (x-t)f(t)dt = \sin x + ax + b$ 에서

$$x \int_{\pi}^x f(t)dt - \int_{\pi}^x tf(t)dt = \sin x + ax + b \quad \text{..... ㉡}$$

㉡의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_{\pi}^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \cos x + a$$

$$\therefore \int_{\pi}^x f(t)dt = \cos x + a$$

양변에 $x=\pi$ 를 대입하면

$$0 = -1 + a \quad \therefore a = 1$$

㉡의 양변에 $x=\pi$ 를 대입하면

$$0 = a\pi + b \quad \therefore b = -\pi$$

$$\therefore ab = -\pi \quad \text{답} -\pi$$

1058 $f(x) = \int_0^x (1-\sin t)\cos t dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = (1-\sin x)\cos x$$

$f'(x)=0$ 에서

$$\sin x = 1 \text{ 또는 } \cos x = 0$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 극대, $x = \frac{3}{2}\pi$ 에서 극소이므로

$$a = f\left(\frac{\pi}{2}\right), b = f\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

한편 $f(x) = \int f'(x)dx = \int (1-\sin x)\cos x dx$ 에서

$$1-\sin x = u \text{로 놓으면} \quad -\cos x = \frac{du}{dx}$$

$$\therefore f(x) = \int u \times (-1)du = -\frac{1}{2}u^2 + C$$

$$= -\frac{1}{2}(1-\sin x)^2 + C$$

이때 $f(0)=0$ 이므로

$$-\frac{1}{2} + C = 0 \quad \therefore C = \frac{1}{2}$$

따라서 $f(x) = -\frac{1}{2}(1-\sin x)^2 + \frac{1}{2}$ 이므로

$$a = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}, b = f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore a^2 - b^2 = -2$$

답 -2

1059 $f(x) = \int_0^x (t\sqrt{t} - 6t + 5\sqrt{t}) dt$ 의 양변을 x 에 대하여

미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= x\sqrt{x} - 6x + 5\sqrt{x} = \sqrt{x}(x - 6\sqrt{x} + 5) \\ &= \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 5) \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서

$$\sqrt{x} = 0 \text{ 또는 } \sqrt{x} = 1 \text{ 또는 } \sqrt{x} = 5$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 25$$

x	0	...	1	...	25	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	0	↗	극대	↘	극소	↗

이때

$$\begin{aligned} f(25) &= \int_0^{25} (t\sqrt{t} - 6t + 5\sqrt{t}) dt \\ &= \left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - 3t^2 + \frac{10}{3}t^{\frac{3}{2}} \right]_0^{25} \\ &= -\frac{625}{3} \end{aligned}$$

이므로 구하는 최솟값은 $-\frac{625}{3}$ 이다.

답 $-\frac{625}{3}$

1060 $f(t) = (\cos \pi t + \ln t)e^t$ 이라 하고 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면 주어진 식은

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t)dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x^2) - F(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{F(x^2) - F(1)}{x^2-1} \times (x+1) \right\} \\ &= 2F'(1) = 2f(1) \\ &= -2e \end{aligned}$$

답 ①

1061 $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{9x^2+1} dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{3x}{9x^2+1} dx - \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{9x^2+1} dx$
 이때

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{3x}{9x^2+1} dx = \frac{1}{6} \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{(9x^2+1)'}{9x^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{6} \left[\ln(9x^2+1) \right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{\ln 2}{6}$$

이고 $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{9x^2+1} dx$ 에서 $x = \frac{1}{3} \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으

면 $\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{3} \sec^2 \theta$

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=\frac{1}{3}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{9x^2+1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \times \frac{1}{3} \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{3 \sec^2 \theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3} d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{3} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{12}$$

$$\therefore \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{9x^2+1} dx = \frac{\ln 2}{6} - \frac{\pi}{12}$$

따라서 $a=6$, $b=-12$ 이므로

$$a+b=-6$$

답 ③

1062 $\{xf(x)\}' = f(x) + xf'(x)$ 이므로

$$\{xf(x)\}' = (\ln x)^2$$

$$\therefore xf(x) = \int (\ln x)^2 dx \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$u(x) = (\ln x)^2$, $v'(x) = 1$ 로 놓으면

$$u'(x) = \frac{2 \ln x}{x}, v(x) = x$$

$$\therefore \int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int \frac{2 \ln x}{x} \times x dx$$

$$= x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\int \ln x dx$ 에서 $p(x) = \ln x$, $q'(x) = 1$ 로 놓으면

$$p'(x) = \frac{1}{x}, q(x) = x$$

$$\therefore \int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \times x dx$$

$$= x \ln x - x + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

②을 ②에 대입하면

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x + C_1)$$

$$= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$$

따라서 ①에서

$$xf(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = 2 + C, \quad 2 = 2 + C$$

$$\therefore C=0$$

즉 $xf(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$ 이므로

$$f(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln x + 2 \quad (\because x > 0)$$

$$\therefore f(e) = 1$$

답 ①

1063 $f(x) = \cos x$, $g'(x) = e^{-x}$ 으로 놓으면

$$f'(x) = -\sin x, g(x) = -e^{-x}$$

$$\therefore \int_0^{\pi} e^{-x} \cos x dx$$

$$= \left[-e^{-x} \cos x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx$$

$$= \frac{1}{e^{\pi}} + 1 - \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx$ 에서 $u(x) = \sin x$, $v'(x) = e^{-x}$ 으로 놓으면

$$u'(x) = \cos x, v(x) = -e^{-x}$$

$$\therefore \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx$$

$$= \left[-e^{-x} \sin x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-x} \cos x dx$$

$$= \int_0^{\pi} e^{-x} \cos x dx \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하면

$$\int_0^{\pi} e^{-x} \cos x dx = \frac{1}{e^{\pi}} + 1 - \int_0^{\pi} e^{-x} \cos x dx$$

$$2 \int_0^{\pi} e^{-x} \cos x dx = \frac{1}{e^{\pi}} + 1$$

$$\therefore \int_0^{\pi} e^{-x} \cos x dx = \frac{1+e^{\pi}}{2e^{\pi}}$$

답 ⑤

1064 $e^x + 1 = t$ 로 놓으면 $e^x = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$f(x) = \int e^x \sqrt{e^x + 1} dx = \int \sqrt{t} dt$$

$$= \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3} (e^x + 1) \sqrt{e^x + 1} + C \quad \dots \textcircled{1}$$

한편 $f'(x) = e^x \sqrt{e^x + 1} > 0$ 에서 $f(x)$ 는 증가함수이므로

$0 \leq x \leq \ln 3$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 최솟값, $x=\ln 3$ 일 때 최댓값을 갖는다.

$$\text{즉 } f(0) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{이므로 } \frac{4\sqrt{2}}{3} + C = \frac{4\sqrt{2}}{3} \quad \therefore C=0$$

$$\therefore f(x) = \frac{2}{3} (e^x + 1) \sqrt{e^x + 1} \quad \dots \textcircled{2}$$

따라서 구하는 최댓값은

$$f(\ln 3) = \frac{16}{3} \quad \dots \textcircled{3}$$

답 16/3

채점 요소		비율
①단계	부정적분 구하기	40 %
②단계	$f(x)$ 구하기	40 %
③단계	$f(x)$ 의 최댓값 구하기	20 %

1065 $x^2+k=t$ 로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int x e^{x^2+k} dx = \int e^t \times \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2+k} + C \end{aligned} \quad \dots \text{1단계}$$

따라서 직선 PQ의 기울기는

$$\begin{aligned} \frac{f(1)-f(0)}{1-0} &= \left(\frac{1}{2} e^{1+k} + C \right) - \left(\frac{1}{2} e^k + C \right) \\ &= \frac{e^k(e-1)}{2} \end{aligned} \quad \dots \text{2단계}$$

$$\text{즉 } \frac{e^k(e-1)}{2} = \frac{e-1}{2e^5} \text{ 이므로}$$

$$k = -5 \quad \dots \text{3단계}$$

답 -5

채점 요소	비율
1단계 부정적분 구하기	50 %
2단계 직선 PQ의 기울기를 k에 대한 식으로 나타내기	30 %
3단계 k의 값 구하기	20 %

1066 $f'(x) = (x-2)\ln x$ 이므로 $f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=2$

x	0	...	1	...	2	...
f'(x)		+	0	-	0	+
f(x)		↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 $\frac{3}{4}$ 을 갖고, $x=2$ 에서 극솟값을 갖는다. ... **1단계**

이때 $f(x) = \int f'(x) dx = \int (x-2)\ln x dx$ 에서

$u(x) = \ln x$, $v'(x) = x-2$ 로 놓으면

$$u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x \right) \ln x - \int \frac{1}{x} \times \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x \right) dx \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x \right) \ln x - \int \left(\frac{1}{2}x - 2 \right) dx \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x \right) \ln x - \frac{1}{4}x^2 + 2x + C \end{aligned}$$

$$f(1) = \frac{3}{4} \text{ 이므로 } \frac{7}{4} + C = \frac{3}{4}$$

$$\therefore C = -1$$

$$\therefore f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x \right) \ln x - \frac{1}{4}x^2 + 2x - 1 \quad \dots \text{2단계}$$

따라서 $f(x)$ 의 극솟값은

$$f(2) = -2\ln 2 + 2 \quad \dots \text{3단계}$$

답 -2ln2+2

채점 요소	비율
1단계 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 갖는 x의 값 구하기	30 %
2단계 $f(x)$ 구하기	50 %
3단계 $f(x)$ 의 극솟값 구하기	20 %

1067 $f(x) = e^{-x} + x + \int_0^x f'(t)e^{-t} dt$ ㉠

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = -e^{-x} + 1 + f'(x)e^{-x}$$

$$(-e^{-x} + 1)f'(x) = -e^{-x} + 1$$

$$\therefore f'(x) = 1$$

... **1단계**

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int 1 dx = x + C$$

이때 ㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $f(0)=1$

따라서 $C=1$ 이므로 $f(x)=x+1$

... **2단계**

답 $f(x)=x+1$

채점 요소	비율
1단계 $f'(x)$ 구하기	40 %
2단계 $f(x)$ 구하기	60 %

1068 전략 치환적분법을 이용하여 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ 와 $\int_{-\pi}^{\pi} f(-x) dx$ 사이의 관계식을 구한다.

$y=2\cos x-1$ 은 우함수이므로

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) + f(-x)\} dx = \int_{-\pi}^{\pi} (2\cos x - 1) dx$$

$$= 2 \int_0^{\pi} (2\cos x - 1) dx$$

$$= 2 \left[2\sin x - x \right]_0^{\pi} = -2\pi$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(-x) dx = -2\pi \quad \dots \dots \text{㉠}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(-x) dx \text{에서 } -x=t \text{로 놓으면 } -1 = \frac{dt}{dx}$$

$x=-\pi$ 일 때 $t=\pi$, $x=\pi$ 일 때 $t=-\pi$ 이므로

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(-x) dx = \int_{\pi}^{-\pi} f(t) \times (-1) dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad \dots \dots \text{㉡}$$

$$\text{㉡을 ㉠에 대입하면 } 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = -2\pi$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = -\pi$$

답 $-\pi$

다른 풀이 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx$

$$\int_{-\pi}^0 f(x) dx \text{에서 } x=-t \text{로 놓으면 } 1 = -\frac{dt}{dx}$$

$x=-\pi$ 일 때 $t=\pi$, $x=0$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\int_{-\pi}^0 f(x) dx = \int_{\pi}^0 f(-t) \times (-1) dt$$

$$= \int_0^{\pi} f(-t) dt = \int_0^{\pi} f(-x) dx$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} f(-x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$= \int_0^{\pi} \{f(-x) + f(x)\} dx$$

$$= \int_0^{\pi} (2\cos x - 1) dx$$

$$= \left[2\sin x - x \right]_0^{\pi} = -\pi$$

1069 [전략] 함수 $f(x)$ 가 우함수이고 주기가 2인 주기함수임을 이용한다.

$$\int_{-1}^5 f(x)(x + \cos 2\pi x) dx = \frac{47}{2} \text{에서}$$

$$\int_{-1}^5 xf(x) dx + \int_{-1}^5 f(x) \cos 2\pi x dx = \frac{47}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^5 xf(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 xf(x) dx + \int_1^3 xf(x) dx + \int_3^5 xf(x) dx \\ & \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

이고 조건 (가)에서 $y=f(x)$ 는 우함수, $y=x$ 는 기함수이므로 $y=xf(x)$ 는 기함수이다.

$$\therefore \int_{-1}^1 xf(x) dx = 0$$

$$\text{또 } \int_1^3 xf(x) dx \text{에서 } x-2=t \text{로 놓으면 } 1 = \frac{dt}{dx}$$

$x=1$ 일 때 $t=-1$, $x=3$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^3 xf(x) dx &= \int_{-1}^1 (t+2)f(t+2) dt \\ &= \int_{-1}^1 (t+2)f(t) dt \quad (\because \text{조건 (가)}) \\ &= \int_{-1}^1 tf(t) dt + 2 \int_{-1}^1 f(t) dt \\ &= 0 + 2 \times 2 \int_0^1 f(t) dt = 4 \int_0^1 f(t) dt \\ &= 4 \times 2 = 8 \end{aligned}$$

$$\int_3^5 xf(x) dx \text{에서 } x-4=s \text{로 놓으면 } 1 = \frac{ds}{dx}$$

$x=3$ 일 때 $s=-1$, $x=5$ 일 때 $s=1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_3^5 xf(x) dx &= \int_{-1}^1 (s+4)f(s+4) ds \\ &= \int_{-1}^1 (s+4)f(s) ds \quad (\because \text{조건 (가)}) \\ &= \int_{-1}^1 sf(s) ds + 4 \int_{-1}^1 f(s) ds \\ &= 0 + 4 \times 2 \int_0^1 f(s) ds = 8 \int_0^1 f(s) ds \\ &= 8 \times 2 = 16 \end{aligned}$$

따라서 ㉠에서

$$\int_{-1}^5 xf(x) dx = 0 + 8 + 16 = 24$$

한편 조건 (나)에서 $y=f(x)$ 는 주기가 2인 주기함수이고

$y=\cos 2\pi x$ 는 주기가 1인 주기함수이므로

$y=f(x)\cos 2\pi x$ 는 주기가 2인 주기함수이다.

즉

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) \cos 2\pi x dx &= \int_1^3 f(x) \cos 2\pi x dx \\ &= \int_3^5 f(x) \cos 2\pi x dx \end{aligned}$$

이므로

$$\int_{-1}^5 f(x) \cos 2\pi x dx = 3 \int_{-1}^1 f(x) \cos 2\pi x dx$$

이때 $y=\cos 2\pi x$ 는 우함수이므로 $y=f(x)\cos 2\pi x$ 는 우함수이다.

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-1}^5 f(x) \cos 2\pi x dx &= 3 \times 2 \int_0^1 f(x) \cos 2\pi x dx \\ &= 6 \int_0^1 f(x) \cos 2\pi x dx \end{aligned}$$

따라서 ㉠에서

$$\begin{aligned} 24 + 6 \int_0^1 f(x) \cos 2\pi x dx &= \frac{47}{2} \\ \therefore \int_0^1 f(x) \cos 2\pi x dx &= -\frac{1}{12} \\ \therefore \int_0^1 f'(x) \sin 2\pi x dx \\ &= \left[f(x) \sin 2\pi x \right]_0^1 - \int_0^1 f(x) \times 2\pi \cos 2\pi x dx \\ &= 0 - 2\pi \int_0^1 f(x) \cos 2\pi x dx \\ &= -2\pi \times \left(-\frac{1}{12} \right) \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

답 ①

1070 [전략] 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분한다.

$$2xf(x) - x = \int_1^x \{f(t) - 1\} dt \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$2f(1) - 1 = 0 \quad \therefore f(1) = \frac{1}{2}$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} 2f(x) + 2xf'(x) - 1 &= f(x) - 1 \\ 2xf'(x) &= -f(x) \\ \therefore \frac{f'(x)}{f(x)} &= -\frac{1}{2x} \end{aligned}$$

따라서 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \left(-\frac{1}{2x} \right) dx$ 이므로

$$\ln f(x) = -\frac{1}{2} \ln x + C \quad (\because x > 0, f(x) > 0)$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$\ln f(1) = C \quad \therefore C = \ln \frac{1}{2}$$

$$\text{즉 } \ln f(x) = -\frac{1}{2} \ln x + \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{이므로}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \therefore f(4) = \frac{1}{4}$$

답 ①

10 정적분의 활용

교과서 문제 정복하기

본책 153쪽, 155쪽

$$\begin{aligned}
 1071 \quad S_n &= \left[\frac{1}{n} \right] \times \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \left[\frac{1}{n} \right] \times \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \cdots \\
 &\quad + \left[\frac{1}{n} \right] \times \left(\frac{n}{n} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) \\
 &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) \\
 \therefore S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{6} \times 1 \times 2 = \left[\frac{1}{3} \right]
 \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, k^2, 2, \frac{1}{3}$

1072 각 직사각형의 가로의 길이는 $\frac{1}{n}$ 이고 세로의 길이는 각각 $\left(\frac{1}{n}\right)^3, \left(\frac{2}{n}\right)^3, \left(\frac{3}{n}\right)^3, \dots, \left(\frac{n-1}{n}\right)^3$ 이므로 이 직사각형의 넓이의 합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n} \right)^3 + \frac{1}{n} \times \left(\frac{2}{n} \right)^3 + \frac{1}{n} \times \left(\frac{3}{n} \right)^3 + \cdots \\
 &\quad + \frac{1}{n} \times \left(\frac{n-1}{n} \right)^3 \\
 &= \frac{1}{n^4} \times \{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3\} \\
 &= \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \frac{1}{n^4} \times \left\{ \frac{n(n-1)}{2} \right\}^2 \\
 &= \frac{n^2 - 2n + 1}{4n^2}
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 1}{4n^2} = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

1073 $\frac{2k}{n}$ 를 x 로, $\frac{2}{n}$ 를 dx 로 놓으면

$k=1$ 일 때 $n \rightarrow \infty$ 이면 $x=0$, $k=n$ 이면 $x=2$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n} \right)^2 \times \frac{2}{n} &= \int_0^2 x^2 dx \\
 &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{8}{3}$

1074 $4 + \frac{k}{n}$ 를 x 로, $\frac{1}{n}$ 을 dx 로 놓으면

$k=1$ 일 때 $n \rightarrow \infty$ 이면 $x=4$, $k=n$ 이면 $x=5$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(4 + \frac{k}{n} \right) \times \frac{1}{n} &= \int_4^5 x dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_4^5 = \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{9}{2}$

참고 $\frac{k}{n}$ 를 x 로, $\frac{1}{n}$ 을 dx 로 놓으면

$k=1$ 일 때 $n \rightarrow \infty$ 이면 $x=0$, $k=n$ 이면 $x=1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(4 + \frac{k}{n} \right) \times \frac{1}{n} = \int_0^1 (4+x) dx = \left[4x + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{9}{2}$$

이와 같이 무엇을 적분변수로 정하는지에 따라 하나의 급수를 여러 가지 정적분으로 나타낼 수 있다.

$$1075 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \left\{ \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 + \left(\frac{n+2}{n} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{n+n}{n} \right)^2 \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n+k}{n} \right)^2$$

$$= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right)^2 \times \frac{1}{n}$$

$1 + \frac{k}{n}$ 를 x 로, $\frac{1}{n}$ 을 dx 로 놓으면

$k=1$ 일 때 $n \rightarrow \infty$ 이면 $x=1$, $k=n$ 이면 $x=2$ 이므로

$$\begin{aligned}
 (\text{주어진 식}) &= 3 \int_1^2 x^2 dx = 3 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^2 \\
 &= 3 \times \frac{7}{3} = 7
 \end{aligned}$$

답 7

$$1076 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n}$$

$\frac{k\pi}{n}$ 를 x 로, $\frac{\pi}{n}$ 를 dx 로 놓으면

$k=1$ 일 때 $n \rightarrow \infty$ 이면 $x=0$, $k=n$ 이면 $x=\pi$ 이므로

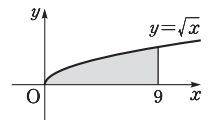
$$(\text{주어진 식}) = \int_0^\pi \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^\pi = 2$$

답 2

1077 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^9 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^9 = 18$$

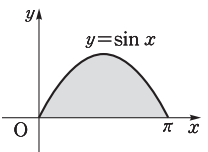
답 18



1078 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^\pi \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^\pi = 2$$

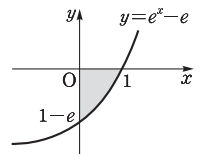
답 2



1079 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \{ -(e^x - e) \} dx &= - \left[e^x - ex \right]_0^1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

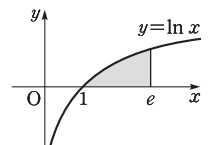
답 1



1080 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}
 \int_1^e \ln x dx &= \left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e dx \\
 &= e - \left[x \right]_1^e \\
 &= e - (e - 1) = 1
 \end{aligned}$$

답 1



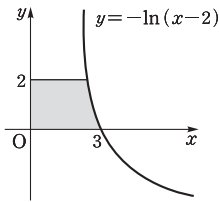
1081 $\int_{-2}^0 \{-(y^2+2y)\}dy = -\left[\frac{1}{3}y^3+y^2\right]_{-2}^0 = \frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$

1082 $y = -\ln(x-2)$ 에서

$$x-2=e^{-y} \quad \therefore x=e^{-y}+2$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^2 (e^{-y}+2)dy \\ &= \left[-e^{-y}+2y\right]_0^2 \\ &= -\frac{1}{e^2}+5 \end{aligned}$$

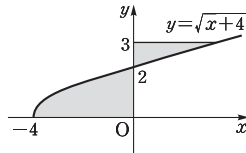


답 $-\frac{1}{e^2}+5$

1083 $y = \sqrt{x+4}$ 에서 $x = y^2 - 4$ ($y \geq 0$)

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^2 \{-(y^2-4)\}dy \\ &+ \int_2^3 (y^2-4)dy \\ &= -\left[\frac{1}{3}y^3-4y\right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}y^3-4y\right]_2^3 \\ &= \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3} \end{aligned}$$



답 $\frac{23}{3}$

1084 곡선 $y = \frac{2}{x}$ 와 직선 $y = -x+3$ 의 교점의 x 좌표는

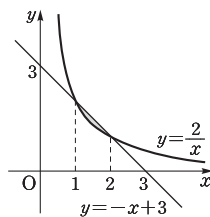
$$\frac{2}{x} = -x+3 \text{에서}$$

$$x^2-3x+2=0, \quad (x-1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left\{(-x+3) - \frac{2}{x}\right\}dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2+3x-2\ln|x|\right]_1^2 \\ &= \frac{3}{2}-2\ln 2 \end{aligned}$$



답 $\frac{3}{2}-2\ln 2$

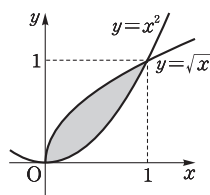
1085 두 곡선 $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$ 의 교점의 x 좌표는 $\sqrt{x} = x^2$ 에서

$$x^4-x=0, \quad x(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1 \quad (\because x^2+x+1 > 0)$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$



답 $\frac{1}{3}$

1086 $\int_0^6 (x+1)^2 dx = \left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_0^6 = 114 \text{ (cm}^3\text{)}$

답 114 cm^3

1087 $\int_0^4 (e^{2x}+x+2)dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^4$
 $= \frac{1}{2}e^8 + \frac{31}{2} \text{ (cm}^3\text{)}$

답 $\left(\frac{1}{2}e^8 + \frac{31}{2}\right) \text{ cm}^3$

1088 밑면으로부터의 높이가 x 인 지점에서 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이가

$$(\sqrt{2x+4})^2 = 2x+4$$

이므로 구하는 부피는

$$\int_0^{10} (2x+4)dx = \left[x^2+4x\right]_0^{10} = 140$$

답 140

1089 (1) $0 + \int_0^t (e^t-1)dt = \left[e^t-t\right]_0^t = e^t-t-1$

(2) $\int_0^4 |e^t-1|dt = \int_0^4 (e^t-1)dt = \left[e^t-t\right]_0^4 = e^4-5$

답 (1) e^t-t-1 (2) e^4-5

1090 (1) $0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t)dt = \left[-\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -1$

(2) $\int_0^{\pi} (-\cos t)dt = \left[-\sin t\right]_0^{\pi} = 0$

(3) $\int_0^{\pi} |-\cos t|dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos t)dt$
 $= \left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$
 $= 1+1=2$

답 (1) -1 (2) 0 (3) 2

1091 $\frac{dx}{dt} = 4t$, $\frac{dy}{dt} = -3t$ 이므로 구하는 거리는

$$\int_0^2 \sqrt{(4t)^2 + (-3t)^2} dt = \int_0^2 5t dt = \left[\frac{5}{2}t^2\right]_0^2 = 10$$

답 10

1092 $\frac{dx}{dt} = 2t^{\frac{1}{2}}$, $\frac{dy}{dt} = t-1$ 이므로 구하는 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{(2t^{\frac{1}{2}})^2 + (t-1)^2} dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{t^2+2t+1} dt = \int_0^2 \sqrt{(t+1)^2} dt \\ &= \int_0^2 (t+1) dt = \left[\frac{1}{2}t^2+t\right]_0^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

답 4

1093 $\frac{dx}{dt} = -2 \sin 2t$, $\frac{dy}{dt} = -2 \cos 2t$ 이므로 구하는 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \sqrt{(-2 \sin 2t)^2 + (-2 \cos 2t)^2} dt \\ &= \int_0^2 2 dt = \left[2t \right]_0^2 = 4 \end{aligned} \quad \text{답 4}$$

1094 $\frac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t)$,

$$\frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t)$$

이므로 구하는 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \sqrt{\{e^t (\cos t - \sin t)\}^2 + \{e^t (\sin t + \cos t)\}^2} dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{e^{2t} (1 - 2 \sin t \cos t) + e^{2t} (1 + 2 \sin t \cos t)} dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{2} e^t dt = \sqrt{2} \left[e^t \right]_0^2 \\ &= \sqrt{2} (e^2 - 1) \end{aligned} \quad \text{답 } \sqrt{2} (e^2 - 1)$$

1095 $\frac{dx}{dt} = 6t$, $\frac{dy}{dt} = -2t$ 이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \sqrt{(6t)^2 + (-2t)^2} dt = \int_0^2 2\sqrt{10} t dt = \left[\sqrt{10} t^2 \right]_0^2 = 4\sqrt{10} \\ & \text{답 } 4\sqrt{10} \end{aligned}$$

1096 $\frac{dx}{dt} = 2 \cos t$, $\frac{dy}{dt} = 2 \sin t$ 이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sqrt{(2 \cos t)^2 + (2 \sin t)^2} dt = \int_0^\pi 2 dt = \left[2t \right]_0^\pi = 2\pi \\ & \text{답 } 2\pi \end{aligned}$$

1097 $\frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{x} - \frac{1}{4\sqrt{x}}$ 이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} & \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{4\sqrt{x}} \right)^2} dx \\ &= \int_0^4 \sqrt{x + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x}} dx = \int_0^4 \sqrt{\left(\sqrt{x} + \frac{1}{4\sqrt{x}} \right)^2} dx \\ &= \int_0^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{4\sqrt{x}} \right) dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} \right]_0^4 \\ &= \frac{19}{3} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{19}{3}$$

1098 $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2} \left[e^x - e^{-x} \right]_{-1}^1 \\ &= e - \frac{1}{e} \end{aligned} \quad \text{답 } e - \frac{1}{e}$$

유형 익히기

1099 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \left(1 + \frac{2k}{n} \right)$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \left(1 + \frac{2k}{n} \right) \times \frac{2}{n}$$

$1 + \frac{2k}{n}$ 를 x 로, $\frac{2}{n}$ 를 dx 로 놓으면

$k=1$ 일 때 $n \rightarrow \infty$ 이면 $x=1$, $k=n$ 이면 $x=3$ 이므로

$$\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \left(1 + \frac{2k}{n} \right) \times \frac{2}{n} = \frac{1}{2} \int_1^3 \sin x dx$$

따라서 $a = \frac{1}{2}$, $b=1$, $c=3$ 이므로

$$abc = \frac{3}{2} \quad \text{답 } \frac{3}{2}$$

1100 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k e^{\frac{k}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} e^{\frac{k}{n}}$

$\frac{k}{n}$ 를 x 로, $\frac{1}{n}$ 을 dx 로 놓으면

$k=1$ 일 때 $n \rightarrow \infty$ 이면 $x=0$, $k=n$ 이면 $x=1$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} e^{\frac{k}{n}} &= \int_0^1 x e^x dx \\ &= \left[x \times \left(\frac{1}{x} \right) e^x \right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{x} \right) e^x dx \\ &= e - \left[e^x \right]_0^1 = e - (e - 1) \\ &= \left(\frac{1}{x} \right) 1 \end{aligned} \quad \text{답 풀이 참조}$$

1101 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2}{n} f \left(1 + \frac{3k}{n} \right) = \frac{2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f \left(1 + \frac{3k}{n} \right) \times \frac{3}{n}$

$1 + \frac{3k}{n}$ 를 x 로, $\frac{3}{n}$ 을 dx 로 놓으면

$k=1$ 일 때 $n \rightarrow \infty$ 이면 $x=1$, $k=n$ 이면 $x=4$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f \left(1 + \frac{3k}{n} \right) \times \frac{3}{n} &= \frac{2}{3} \int_1^4 f(x) dx = \frac{2}{3} \times 12 = 8 \\ & \text{답 ④} \end{aligned}$$

1102 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} + \cdots + \sqrt{n+n})$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{n+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{n+k}{n}} \times \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{k}{n}} \times \frac{1}{n} = \int_1^2 \sqrt{x} dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1) \quad \text{답 } \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

1103 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{3}{n}} + \cdots + e^{\frac{n}{n}})$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 e^x dx$$

$$= \left[e^x \right]_0^1 = e - 1 \quad \text{답 ②}$$

$$\begin{aligned}
 1104 \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3+1^3} + \frac{2^2}{n^3+2^3} + \frac{3^2}{n^3+3^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3+n^3} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+k^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3} \times \frac{1}{n} \\
 &= \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{(1+x^3)'}{1+x^3} dx \\
 &= \frac{1}{3} \left[\ln |1+x^3| \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{3} \quad \text{답 } \frac{\ln 2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1105 \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n^2} \left\{ f\left(\frac{1}{n}\right) + 2f\left(\frac{2}{n}\right) + 3f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + nf\left(\frac{n}{n}\right) \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n^2} \sum_{k=1}^n k f\left(\frac{k}{n}\right) = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{k}{n} \times f\left(\frac{k}{n}\right) \times \frac{1}{n} \right\} \\
 &= \pi \int_0^1 x f(x) dx = \pi \int_0^1 x \sin \pi x dx \\
 &= \pi \left[\left[-\frac{1}{\pi} x \cos \pi x \right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{\pi} \cos \pi x \right) dx \right] \\
 &= \pi \times \left(\frac{1}{\pi} - \left[-\frac{1}{\pi^2} \sin \pi x \right]_0^1 \right) = \pi \times \frac{1}{\pi} = 1 \quad \text{답 } 1
 \end{aligned}$$

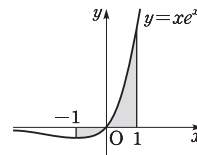
$$\begin{aligned}
 1106 \quad & 2 \sin x = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=\pi \left(\because 0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi \right) \\
 & \text{따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이} \\
 & \text{이는} \\
 & \int_0^\pi 2 \sin x dx \\
 & + \int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} (-2 \sin x) dx \\
 &= \left[-2 \cos x \right]_0^\pi + \left[2 \cos x \right]_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \\
 &= 4 + 2 = 6 \quad \text{답 } 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1107 \quad & \sqrt{x+2} = 0 \text{에서 } x=-2 \\
 & \text{따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는} \\
 & \int_{-2}^0 \sqrt{x+2} dx \\
 &= \left[\frac{2}{3} (x+2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-2}^0 \\
 &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \quad \text{답 } \frac{4\sqrt{2}}{3}
 \end{aligned}$$

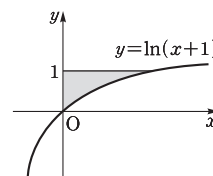
$$\begin{aligned}
 1108 \quad & \text{오른쪽 그림에서 색칠} \\
 & \text{한 도형의 넓이는} \\
 & \int_2^a \frac{1}{x-1} dx \\
 &= \left[\ln |x-1| \right]_2^a \\
 &= \ln(a-1) \quad \cdots \text{1단계} \\
 & \text{따라서 } \ln(a-1)=3 \text{이므로 } a-1=e^3 \\
 & \therefore a=e^3+1 \quad \cdots \text{2단계} \\
 & \text{답 } e^3+1
 \end{aligned}$$

채점 요소	비율
1단계 도형의 넓이를 a 에 대한 식으로 나타내기	70 %
2단계 a 의 값 구하기	30 %

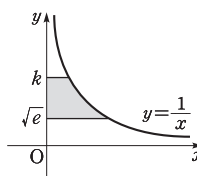
$$\begin{aligned}
 1109 \quad & xe^x = 0 \text{에서 } x=0 \\
 & \text{이때 } -1 \leq x \leq 0 \text{에서 } xe^x \leq 0, 0 \leq x \leq 1 \\
 & \text{에서 } xe^x \geq 0 \text{이므로 구하는 넓이는} \\
 & \int_{-1}^0 (-xe^x) dx + \int_0^1 xe^x dx \\
 &= -\left([xe^x]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 e^x dx \right) \\
 & \quad + [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\
 &= -\left(\frac{1}{e} - [e^x]_{-1}^0 \right) + e - [e^x]_0^1 \\
 &= -\left\{ \frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{e} \right) \right\} + e - (e-1) \\
 &= 2 - \frac{2}{e} \quad \text{답 } ②
 \end{aligned}$$



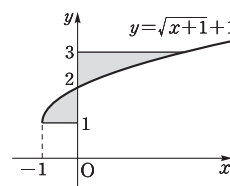
$$\begin{aligned}
 1110 \quad & y = \ln(x+1) \text{에서} \\
 & x+1=e^y \quad \therefore x=e^y-1 \\
 & \text{따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는} \\
 & \int_0^1 (e^y-1) dy = [e^y-y]_0^1 \\
 &= e-2 \quad \text{답 } ①
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 1111 \quad & y = \frac{1}{x} \text{에서 } x = \frac{1}{y} \\
 & \text{따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 도형의} \\
 & \text{넓이는} \\
 & \int_{\sqrt{e}}^k \frac{1}{y} dy = [\ln |y|]_{\sqrt{e}}^k = \ln k - \frac{1}{2} \\
 & \text{즉 } \ln k - \frac{1}{2} = 3 \text{이므로} \\
 & \ln k = \frac{7}{2} \quad \therefore k = e^{\frac{7}{2}} \quad \text{답 } ④
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 1112 \quad & y = \sqrt{x+1} + 1 \text{에서} \\
 & y-1 = \sqrt{x+1}, \quad (y-1)^2 = x+1 \\
 & \therefore x = y^2 - 2y \quad (y \geq 1) \\
 & \text{따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는} \\
 & \int_1^3 \{ -(y^2-2y) \} dy \\
 &= \int_1^3 (y^2-2y) dy \\
 &= \left[-\frac{1}{3} y^3 + y^2 \right]_1^3 + \left[\frac{1}{3} y^3 - y^2 \right]_2^3 \\
 &= \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \\
 &= 2 \quad \text{답 } 2
 \end{aligned}$$

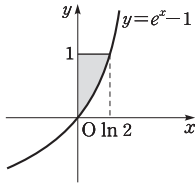


1113 $y=e^x-1$ 에서

$$e^x=y+1 \quad \therefore x=\ln(y+1)$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \ln(y+1) dy \\ &= \left[y \ln(y+1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{y}{y+1} dy \\ &= \ln 2 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{y+1} \right) dy \\ &= \ln 2 - \left[y - \ln(y+1) \right]_0^1 \\ &= \ln 2 - (1 - \ln 2) = 2\ln 2 - 1 \end{aligned}$$



답 $2\ln 2 - 1$

다른 풀이 위의 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \ln 2 \times 1 - \int_0^{\ln 2} (e^x - 1) dx &= \ln 2 - \left[e^x - x \right]_0^{\ln 2} \\ &= \ln 2 - (1 - \ln 2) \\ &= 2\ln 2 - 1 \end{aligned}$$

1114 곡선 $y=\frac{x}{x^2+2}$ 와 직선 $y=\frac{1}{3}x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2+2} &= \frac{1}{3}x \text{에서} \quad 3x = x^3 + 2x \\ x^3 - x &= 0, \quad x(x+1)(x-1) = 0 \\ \therefore x &= -1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1 \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{3}x - \frac{x}{x^2+2} \right) dx + \int_0^1 \left(\frac{x}{x^2+2} - \frac{1}{3}x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2} \ln(x^2+2) \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+2) - \frac{1}{6}x^2 \right]_0^1 \\ &= \left(-\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \ln 3 \right) + \left(\frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) \\ &= \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

답 ①

1115 $xy=4$ 에서 $y=\frac{4}{x}$

$$x+y=5 \text{에서} \quad y=-x+5$$

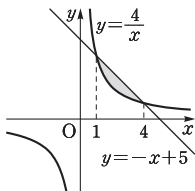
곡선 $y=\frac{4}{x}$ 와 직선 $y=-x+5$ 의 교점의

x 좌표는 $\frac{4}{x}=-x+5$ 에서

$$\begin{aligned} 4 &= -x^2 + 5x, \quad x^2 - 5x + 4 = 0 \\ (x-1)(x-4) &= 0 \\ \therefore x &= 1 \text{ 또는 } x=4 \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_1^4 \left((-x+5) - \frac{4}{x} \right) dx &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 5x - 4\ln|x| \right]_1^4 \\ &= \frac{15}{2} - 4\ln 4 \\ &= \frac{15}{2} - 8\ln 2 \end{aligned}$$



답 ③

1116 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 과 직선 $y=x$ 의 교

점의 x 좌표는 $\frac{1}{x}=x$ 에서

$$x^2=1 \quad \therefore x=1 (\because x>0)$$

또 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 과 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 의 교점의

x 좌표는 $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}x$ 에서

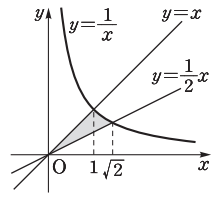
$$x^2=2 \quad \therefore x=\sqrt{2} (\because x>0)$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}x \right) dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^2 \right]_0^1 + \left[\ln x - \frac{1}{4}x^2 \right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{4} + \left(\ln \sqrt{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

... 1단계

답 $\frac{1}{2} \ln 2$



채점 요소		비율
1단계	곡선과 두 직선의 교점의 x 좌표 구하기	40 %
2단계	도형의 넓이 구하기	60 %

1117 곡선 $y=a\sqrt{x}$ 와 직선 $y=x$ 의

교점의 x 좌표는 $a\sqrt{x}=x$ 에서

$$\begin{aligned} a^2x &= x^2, \quad x(x-a^2) = 0 \\ \therefore x &= 0 \text{ 또는 } x=a^2 \end{aligned}$$

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

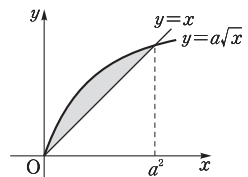
$$\int_0^{a^2} (a\sqrt{x} - x) dx = \left[\frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{a^2} = \frac{1}{6}a^4$$

$$\text{즉 } \frac{1}{6}a^4 = \frac{8}{3} \text{이므로} \quad a^4 - 16 = 0$$

$$(a^2+4)(a+2)(a-2) = 0$$

$$\therefore a=2 (\because a>0)$$

답 2



1118 두 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 과 $y=\sqrt{x}$ 의 교

점의 x 좌표는 $\frac{1}{x}=\sqrt{x}$ 에서

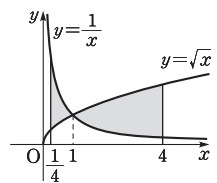
$$\frac{1}{x^2}=x, \quad x^3-1=0$$

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\therefore x=1 (\because x^2+x+1>0)$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(\frac{1}{x} - \sqrt{x} \right) dx + \int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \left[\ln|x| - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{1}{4}}^1 + \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \ln|x| \right]_1^4 \\ &= \left(-\frac{7}{12} - \ln \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{14}{3} - \ln 4 \right) \\ &= \frac{49}{12} \end{aligned}$$



답 $\frac{49}{12}$

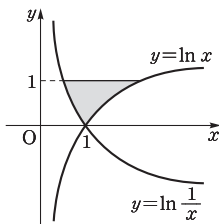
1119 $y = \ln x$ 에서 $x = e^y$

$y = \ln \frac{1}{x}$ 에서 $-y = \ln x$

$$\therefore x = e^{-y}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^1 (e^y - e^{-y}) dy &= [e^y + e^{-y}]_0^1 \\ &= e + \frac{1}{e} - 2 \end{aligned}$$



답 $e + \frac{1}{e} - 2$

1120 두 곡선 $y = \sin x$ 와

$y = \cos x$ 의 교점의 x 좌표는

$\sin x = \cos x$ 에서

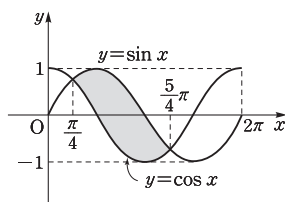
$$\tan x = 1$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{5}{4}\pi$$

$$(\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (\sin x - \cos x) dx = [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} = 2\sqrt{2}$$



답 $2\sqrt{2}$

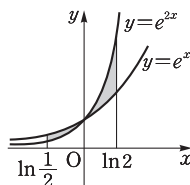
1121 두 곡선 $y = e^x$ 과 $y = e^{2x}$ 의 교점의

x 좌표는 $e^x = e^{2x}$ 에서

$$e^x = 1 \quad \therefore x = 0$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_{\ln \frac{1}{2}}^0 (e^x - e^{2x}) dx \\ &+ \int_0^{\ln 2} (e^{2x} - e^x) dx \\ &= \left[e^x - \frac{1}{2} e^{2x} \right]_{\ln \frac{1}{2}}^0 + \left[\frac{1}{2} e^{2x} - e^x \right]_0^{\ln 2} \\ &= \left\{ \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \right) \right\} + \left\{ \left(\frac{1}{2} \times 4 - 2 \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$



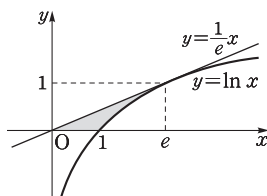
답 ⑤

1122 $y = \ln x$ 에서 $y' = \frac{1}{x}$ 이므로 곡선 위의 점 $(e, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \quad \therefore y = \frac{1}{e}x$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \times e \times 1 - \int_1^e \ln x dx \\ &= \frac{1}{2}e - \left([x \ln x]_1^e - \int_1^e dx \right) \\ &= \frac{1}{2}e - \left(e - [x]_1^e \right) \\ &= -\frac{1}{2}e + (e - 1) = \frac{1}{2}e - 1 \end{aligned}$$



답 ①

다른 풀이 $y = \ln x$ 에서 $x = e^y$

$y = \frac{1}{e}x$ 에서 $x = ey$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1 (e^y - ey) dy = \left[e^y - \frac{e}{2}y^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}e - 1$$

1123 $y = 3\sqrt{x-1}$ 에서 $y' = \frac{3}{2\sqrt{x-1}}$ 이므로 곡선 위의 점 $(10, 9)$ 에서의 접선의 방정식은

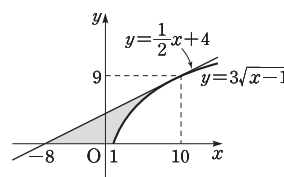
$$y - 9 = \frac{1}{2}(x - 10)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + 4$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는

넓이는

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \times 18 \times 9 \\ &- \int_1^{10} 3\sqrt{x-1} dx \\ &= 81 - \left[2(x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^{10} \\ &= 81 - 54 = 27 \end{aligned}$$



답 ③

1124 $y = e^x$ 에서 $y' = e^x$ 이므로 접점의 좌표를 (t, e^t) 이라 하면 접선의 방정식은

$$y - e^t = e^t(x - t)$$

$$\therefore y = e^t x + e^t(1 - t)$$

이 직선이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = e^t + e^t(1 - t), \quad e^t(2 - t) = 0$$

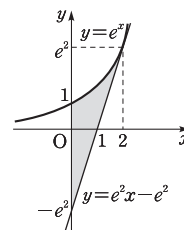
$$\therefore t = 2 (\because e^t > 0)$$

즉 곡선 $y = e^x$ 위의 점 $(2, e^2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = e^2 x - e^2$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \{e^x - (e^2 x - e^2)\} dx \\ &= \left[e^x - \frac{e^2}{2}x^2 + e^2 x \right]_0^2 \\ &= e^2 - 1 \end{aligned}$$



답 $e^2 - 1$

1125 $y = x \sin 2x$ 에서 $y' = \sin 2x + 2x \cos 2x$ 이므로 곡선 위의 점 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{4} \quad \therefore y = x$$

곡선 $y = x \sin 2x$ 와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표는

$x \sin 2x = x$ 에서

$$x(\sin 2x - 1) = 0$$

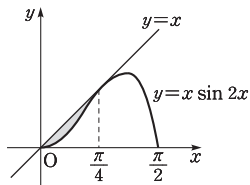
$$x = 0 \text{ 또는 } \sin 2x = 1$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{4} (\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

이때 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 $x \sin 2x \leq x$ 이

므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x - x \sin 2x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left(\left[-\frac{1}{2} x \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cos 2x dx \right) \\ &= \frac{\pi^2}{32} - \left[\frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$



1126 $\int_0^1 (x\sqrt{x}-a)dx=0$ 이므로

$$\begin{aligned} \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - ax \right]_0^1 &= 0, \quad \frac{2}{5} - a = 0 \\ \therefore a &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

답 ③

1127 $\int_0^2 (\sqrt{x}+k)dx=0$ 이므로

$$\begin{aligned} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + kx \right]_0^2 &= 0, \quad \frac{4\sqrt{2}}{3} + 2k = 0 \\ \therefore k &= -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

답 $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

1128 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - k)dx=0$ 이므로

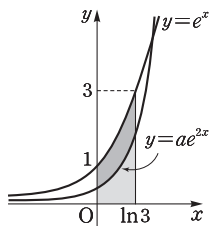
$$\begin{aligned} \left[-\cos x - kx \right]_0^{\frac{\pi}{2}} &= 0, \quad -\frac{\pi}{2}k + 1 = 0 \\ \therefore k &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

답 $\frac{2}{\pi}$

1129 곡선 $y=e^x$ 과 x 축 및 두 직선 $x=0$, $x=\ln 3$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이가 곡선 $y=ae^{2x}$ 에 의하여 이등분되므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 3} e^x dx &= 2 \int_0^{\ln 3} ae^{2x} dx \\ \left[e^x \right]_0^{\ln 3} &= 2 \left[\frac{1}{2} ae^{2x} \right]_0^{\ln 3} \\ 2 &= 2 \times 4a \quad \therefore a = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

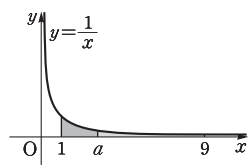
답 $\frac{1}{4}$



1130 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 과 x 축 및 두 직선 $x=1$, $x=9$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 직선 $x=a$ 에 의하여 이등분되므로

$$\begin{aligned} \int_1^9 \frac{1}{x} dx &= 2 \int_1^a \frac{1}{x} dx \\ \left[\ln |x| \right]_1^9 &= 2 \left[\ln |x| \right]_1^a \\ \ln 9 &= 2 \ln a, \quad a^2 = 9 \\ \therefore a &= 3 \quad (\because 1 < a < 9) \end{aligned}$$

답 ①



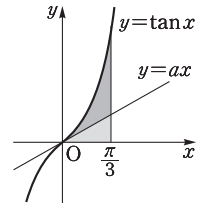
1131 곡선 $y=\tan x$ 와 x 축 및 직선

$x=\frac{\pi}{3}$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 직선

$y=ax$ 에 의하여 이등분되므로

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} \times \frac{\pi}{3} a \right) \\ & \left[-\ln |\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi^2}{9} a \\ \ln 2 &= \frac{\pi^2}{9} a \quad \therefore a = \frac{9 \ln 2}{\pi^2} \end{aligned}$$

답 $\frac{9 \ln 2}{\pi^2}$



1132 물의 깊이가 x cm일 때의 수면의 넓이를 $S(x)$ cm²라 하면

$$S(x) = (e^{-\frac{x}{2}})^2 = e^{-x}$$

따라서 구하는 물의 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^8 S(x) dx &= \int_0^8 e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^8 = 1 - \frac{1}{e^8} \text{ (cm}^3\text{)} \\ & \text{답 } \left(1 - \frac{1}{e^8} \right) \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

1133 높이가 x 인 지점에서 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \pi \times (\sqrt{16-x^2})^2 = \pi(16-x^2)$$

따라서 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^4 S(x) dx &= \int_0^4 \pi(16-x^2) dx \\ &= \pi \left[16x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^4 = \frac{128}{3} \pi \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \frac{128}{3} \pi = \frac{k}{3} \pi \text{ 이므로}$$

$$k = 128$$

답 128

1134 주어진 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^a \ln(x+1) dx &= \left[x \ln(x+1) \right]_0^a - \int_0^a \frac{x}{x+1} dx \\ &= a \ln(a+1) - \int_0^a \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= a \ln(a+1) - \left[x - \ln |x+1| \right]_0^a \\ &= a \ln(a+1) - \{ a - \ln(a+1) \} \\ &= (a+1) \ln(a+1) - a \end{aligned}$$

따라서 $(a+1) \ln(a+1) - a = 6 \ln 6 - 5$ 이므로

$$a = 5$$

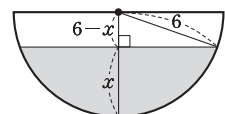
답 5

1135 물의 깊이가 x 일 때의 수면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면 수면의 반지름의 길이는

$$\sqrt{6^2 - (6-x)^2} = \sqrt{-x^2 + 12x}$$

이므로

$$S(x) = \pi \times (\sqrt{-x^2 + 12x})^2 = \pi(-x^2 + 12x)$$



따라서 구하는 물의 부피는

$$\begin{aligned}\int_0^4 S(x)dx &= \int_0^4 \pi(-x^2+12x)dx \\ &= \pi\left[-\frac{1}{3}x^3+6x^2\right]_0^4 = \frac{224}{3}\pi \quad \text{답 } \frac{224}{3}\pi\end{aligned}$$

1136 오른쪽 그림과 같이 곡선

$y=\sqrt{4-x^2}$ 위의 점 $P(x, \sqrt{4-x^2})$ 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{PH}=\sqrt{4-x^2}$$

점 P 를 지나고 x 축에 수직인 평면으

로 주어진 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\times\sqrt{4-x^2}\times\sqrt{4-x^2}=\frac{1}{2}(4-x^2)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned}\int_0^2 S(x)dx &= \int_0^2 \frac{1}{2}(4-x^2)dx \\ &= \frac{1}{2}\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{16}{3}=\frac{8}{3} \quad \text{답 } \frac{8}{3}\end{aligned}$$

1137 오른쪽 그림과 같이 곡

선 $y=2\sqrt{\sin x}$ 위의 점

$P(x, 2\sqrt{\sin x})$ 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{PH}=2\sqrt{\sin x}$$

점 P 를 지나고 x 축에 수직인 평면으로 주어진 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{\sin x})^2=\sqrt{3}\sin x \quad \dots \text{1단계}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned}\int_0^\pi S(x)dx &= \int_0^\pi \sqrt{3}\sin x dx \\ &= \left[-\sqrt{3}\cos x\right]_0^\pi = 2\sqrt{3} \quad \dots \text{2단계} \\ &\quad \text{답 } 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

	채점 요소	비율
1단계	단면의 넓이를 x 에 대한 식으로 나타내기	40 %
2단계	입체도형의 부피 구하기	60 %

1138 오른쪽 그림과 같이 곡선

$y=e^{\sqrt{x+1}}$ 위의 점 $P(x, e^{\sqrt{x+1}})$ 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{PH}=e^{\sqrt{x+1}}$$

점 P 를 지나고 x 축에 수직인 평면으로

주어진 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x)=(e^{\sqrt{x+1}})^2=e^{2\sqrt{x+1}}$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^3 S(x)dx = \int_0^3 e^{2\sqrt{x+1}} dx$$

이때 $\sqrt{x+1}=t$ 로 놓으면 $x+1=t^2$ 이므로 $1=2t \frac{dt}{dx}$

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=3$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^3 S(x)dx &= \int_1^2 2te^{2t} dt = \left[te^{2t}\right]_1^2 - \int_1^2 e^{2t} dt \\ &= 2e^4 - e^2 - \left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_1^2 \\ &= 2e^4 - e^2 - \left(\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^2\right) \\ &= \frac{3}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^2 \quad \text{답 } \frac{3}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^2\end{aligned}$$

1139 $\int_0^3 |e^t - e| dt = \int_0^1 (e - e^t) dt + \int_1^3 (e^t - e) dt$

$$\begin{aligned}&= \left[et - e^t\right]_0^1 + \left[e^t - et\right]_1^3 \\ &= 1 + (e^3 - 3e) = e^3 - 3e + 1\end{aligned}$$

답 $e^3 - 3e + 1$

1140 시각 $t=0$ 에서 $t=a$ 까지 점 P 가 움직인 거리가 6이므로

$$\int_0^a |\sin t| dt = 6$$

이때 $y=|\sin t|$ 는 주기가 π 인 주기함수이고

$$\int_0^\pi |\sin t| dt = \int_0^\pi \sin t dt = \left[-\cos t\right]_0^\pi = 2$$

이므로

$$\begin{aligned}\int_0^a |\sin t| dt &= 6 = 3 \times 2 = 3 \int_0^\pi |\sin t| dt \\ &= \int_0^\pi |\sin t| dt + \int_\pi^{2\pi} |\sin t| dt + \int_{2\pi}^{3\pi} |\sin t| dt \\ &= \int_0^{3\pi} |\sin t| dt\end{aligned}$$

$$\therefore a=3\pi$$

답 ③

1141 시각 $t=k$ ($0 < k < 10$)에서의 점 P 의 위치는

$$0 + \int_0^k \sin \pi t dt = \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi t\right]_0^k = \frac{1}{\pi}(1 - \cos k\pi)$$

$$\frac{1}{\pi}(1 - \cos k\pi) = 0 \text{에서 } \cos k\pi = 1$$

$$\therefore k=2, 4, 6, 8 (\because 0 < k < 10)$$

따라서 점 P 는 원점을 4번 지난다.

답 4

1142 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v(t)=0$ 에서

$$\cos 2t - \cos t = 0, \quad (2\cos^2 t - 1) - \cos t = 0$$

$$(2\cos t + 1)(\cos t - 1) = 0$$

$$\cos t = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos t = 1$$

$$\therefore t = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi, \frac{8}{3}\pi, \dots$$

즉 처음으로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t = \frac{2}{3}\pi$ 이므로 구하는
거리는

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2}{3}\pi} |\cos 2t - \cos t| dt &= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (\cos t - \cos 2t) dt \\ &= \left[\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

답 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

RPM 비법노트

$$\begin{aligned}v(t) &= \cos 2t - \cos t = 2\cos^2 t - \cos t - 1 \\ &= (2\cos t + 1)(\cos t - 1)\end{aligned}$$

이고 $0 \leq t \leq \frac{2}{3}\pi$ 이면 $-\frac{1}{2} \leq \cos t \leq 1$ 이므로
 $v(t) \leq 0$, 즉 $\cos 2t - \cos t \leq 0$

따라서 $0 \leq t \leq \frac{2}{3}\pi$ 일 때, $|\cos 2t - \cos t| = \cos t - \cos 2t$ 이다.

1143 $\frac{dx}{dt} = 2$, $\frac{dy}{dt} = e^t - e^{-t}$ 이므로 시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{2^2 + (e^t - e^{-t})^2} dt &= \int_0^3 \sqrt{e^{2t} + 2 + e^{-2t}} dt \\ &= \int_0^3 \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} dt \\ &= \int_0^3 (e^t + e^{-t}) dt \\ &= [e^t - e^{-t}]_0^3 \\ &= e^3 - \frac{1}{e^3}\end{aligned}$$

답 $e^3 - \frac{1}{e^3}$

1144 $\frac{dx}{dt} = \sqrt{3} \cos t - \sin t$, $\frac{dy}{dt} = -\sqrt{3} \sin t - \cos t$

이므로 시각 $t=0$ 에서 $t=a$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{(\sqrt{3} \cos t - \sin t)^2 + (-\sqrt{3} \sin t - \cos t)^2} dt \\ = \int_0^a \sqrt{4(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt \\ = \int_0^a 2 dt = [2t]_0^a \\ = 2a\end{aligned}$$

즉 $2a = 2\pi$ 이므로
 $a = \pi$

답 π

1145 $\frac{dx}{dt} = -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t = -e^{-t}(\sin t - \cos t)$,

$$\frac{dy}{dt} = -e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t = -e^{-t}(\sin t + \cos t)$$

이므로 시각 $t=0$ 에서 $t=a$ 까지 점 P가 움직인 거리 L 은

$$\begin{aligned}L &= \int_0^a \sqrt{e^{-2t}(\sin t - \cos t)^2 + e^{-2t}(\sin t + \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^a \sqrt{2e^{-2t}} dt = \int_0^a \sqrt{2} e^{-t} dt \\ &= \sqrt{2} \left[-e^{-t} \right]_0^a = \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{e^a} \right) \\ \therefore \lim_{a \rightarrow \infty} L &= \lim_{a \rightarrow \infty} \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{e^a} \right) = \sqrt{2}\end{aligned}$$

답 $\sqrt{2}$

1146 $\frac{dx}{dt} = 2 \sin t \cos t$, $\frac{dy}{dt} = -2 \cos t \sin t$

이므로 시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\begin{aligned}\sqrt{(2 \sin t \cos t)^2 + (-2 \cos t \sin t)^2} \\ = 2\sqrt{2} |\sin t \cos t|\end{aligned}$$

$2\sqrt{2} |\sin t \cos t| = 0$ 에서 $\sin t \cos t = 0$

$\sin t = 0$ 또는 $\cos t = 0$

$$\therefore t = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, \dots$$

즉 점 P의 속력이 처음으로 0이 되는 시각은 $t = \frac{\pi}{2}$ 이므로 구하는
거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{2} \sin t \cos t dt$$

이때 $\sin t = s$ 로 놓으면 $\cos t = \frac{ds}{dt}$

$t=0$ 일 때 $s=0$, $t=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $s=1$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{2} \sin t \cos t dt &= \int_0^1 2\sqrt{2} s ds \\ &= 2\sqrt{2} \left[\frac{1}{2} s^2 \right]_0^1 \\ &= 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

답 ②

다른 풀이 구하는 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{2} \sin t \cos t dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \sin 2t dt \\ &= \sqrt{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}\end{aligned}$$

1147 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{t^2} \right)$, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$ 이므로 구하는 곡선의 길
이는

$$\begin{aligned}\int_1^e \sqrt{\left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) \right\}^2 + \left(\frac{1}{t} \right)^2} dt \\ = \int_1^e \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{4t^4}} dt \\ = \int_1^e \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2t^2} \right)^2} dt \\ = \int_1^e \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt \\ = \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{t} \right]_1^e = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right)\end{aligned}$$

답 ①

1148 $\frac{dy}{dx} = x - \frac{1}{4x}$

... 1단계

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} & \int_1^e \sqrt{1 + \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2} dx \\ &= \int_1^e \sqrt{x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}} dx \\ &= \int_1^e \sqrt{\left(x + \frac{1}{4x}\right)^2} dx = \int_1^e \left(x + \frac{1}{4x}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4} \ln |x| \right]_1^e \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

... 2단계

답 $\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}$

채점 요소	비율
1단계 $\frac{dy}{dx}$ 구하기	30 %
2단계 곡선의 길이 구하기	70 %

1149 $\frac{dx}{dt} = 4t, \frac{dy}{dt} = 3t^2$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^1 \sqrt{(4t)^2 + (3t^2)^2} dt = \int_0^1 t\sqrt{16+9t^2} dt$$

이때 $16+9t^2=u$ 로 놓으면

$$18t = \frac{du}{dt}$$

$t=0$ 일 때 $u=16$, $t=1$ 일 때 $u=25$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t\sqrt{16+9t^2} dt = \int_{16}^{25} \frac{1}{18}\sqrt{u} du \\ &= \left[\frac{1}{27} u^{\frac{3}{2}} \right]_{16}^{25} = \frac{61}{27} \end{aligned}$$

답 $\frac{61}{27}$

1150 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x})$ 이므로 주어진 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} & \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x})\right)^2} dx \\ &= \int_0^a \sqrt{\frac{1}{4}e^{4x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-4x}} dx \\ &= \int_0^a \sqrt{\left(\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right)^2} dx \\ &= \int_0^a \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) dx \\ &= \frac{1}{4} \left[e^{2x} - e^{-2x} \right]_0^a \\ &= \frac{1}{4}(e^{2a} - e^{-2a}) \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{4}(e^{2a} - e^{-2a}) = \frac{15}{16}$ 이므로 $e^{2a} = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$\frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{t}\right) = \frac{15}{16}, \quad 4t^2 - 15t - 4 = 0$$

$$(4t+1)(t-4) = 0 \quad \therefore t = 4 \quad (\because t > 0)$$

즉 $e^{2a} = 4$ 이므로 $2a = \ln 4$

$$\therefore a = \ln 2$$

답 $\ln 2$

1151 $A_k\left(\frac{k}{n}, 0\right), B_k\left(\frac{k}{n}, \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$ 이므로

$$\overline{A_k B_k} = \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \overline{A_k B_k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \int_0^1 x^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{3}$

1152 $\overline{BC} = \overline{AB} = 1$ 이므로

$$\overline{B_k C_k} = \overline{AB_k} = \frac{k}{n}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \overline{B_k C_k}^3 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^3 \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^3 \times \frac{1}{n} \\ &= 2 \int_0^1 x^3 dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 \\ &= 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

1153 부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로

$$\angle AOP_k = \frac{\pi}{2} \times \frac{k}{n} = \frac{k\pi}{2n}$$

따라서 $\triangle P_k O Q_k$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{P_k Q_k} &= \overline{OP_k} \sin(\angle AOP_k) = 2 \sin \frac{k\pi}{2n} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \overline{P_k Q_k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} 2 \sin \frac{k\pi}{2n} \\ &= \frac{4}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} \times \frac{\pi}{2n} \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &= \frac{4}{\pi} \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

답 $\frac{4}{\pi}$

1154 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$

는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의

$$x$$
좌표는 $\sqrt{3x-2}=x$ 에서 $3x-2=x^2$

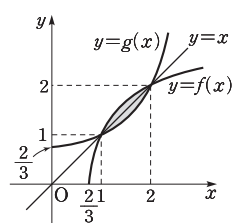
$$x^2-3x+2=0, \quad (x-1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} 2 \int_1^2 (\sqrt{3x-2} - x) dx &= 2 \left[\frac{2}{9} (3x-2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 \\ &= 2 \times \frac{1}{18} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{9}$



시험에 꼭 나오는 문제

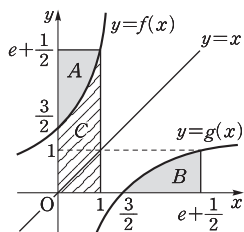
1155 $f(0)=\frac{3}{2}$, $f(1)=e+\frac{1}{2}$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 두 점 $(0, \frac{3}{2})$, $(1, e+\frac{1}{2})$ 을 지난다.

이때 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른 쪽 그림에서

(A의 넓이)=(B의 넓이)

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^1 f(x)dx + \int_{\frac{3}{2}}^{e+\frac{1}{2}} g(x)dx \\ = (C\text{의 넓이}) + (B\text{의 넓이}) \\ = (C\text{의 넓이}) + (A\text{의 넓이}) \\ = 1 \times \left(e + \frac{1}{2}\right) = e + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 $e + \frac{1}{2}$



1156 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 좌표는 $\sqrt{kx}=x$ 에서

$$kx=x^2, \quad x(x-k)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=k$$

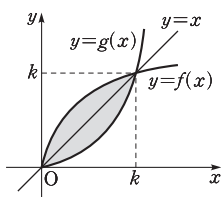
따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} 2 \int_0^k (\sqrt{kx} - x) dx &= 2 \left[\frac{2\sqrt{k}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^k \\ &= 2 \times \frac{1}{6} k^2 \\ &= \frac{1}{3} k^2 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \frac{1}{3} k^2 = \frac{49}{3} \text{ 이므로 } k^2 = 49$$

$$\therefore k=7 \quad (\because k>0)$$

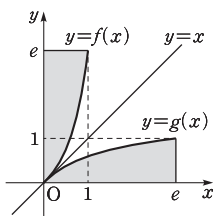
답 7



1157 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 $\int_0^e g(x)dx$ 의 값은 곡선 $y=f(x)$ 와 y 축 및 직선 $y=e$ 로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^e g(x)dx \\ = 1 \times e - \int_0^1 f(x)dx \\ = e - \int_0^1 x e^x dx \\ = e - \left(x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right) \\ = e - \left(e - \left[e^x \right]_0^1 \right) = e - 1 \end{aligned}$$

답 $e-1$



$$\mathbf{1158} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{ak^2}{n^2} \times \frac{4}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{a}{16} \times \left(\frac{4k}{n} \right)^2 \times \frac{4}{n} \right\}$$

$\frac{4k}{n}$ 를 x 로, $\frac{4}{n}$ 를 dx 로 놓으면

$k=1$ 일 때 $n \rightarrow \infty$ 이면 $x=0$, $k=n$ 이면 $x=4$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{a}{16} \times \left(\frac{4k}{n} \right)^2 \times \frac{4}{n} \right\} = \int_0^4 \frac{a}{16} x^2 dx$$

따라서 $\int_0^4 \frac{a}{16} x^2 dx = \int_0^4 (-3x)^2 dx = \int_0^4 9x^2 dx$ 이므로

$$\frac{a}{16} = 9 \quad \therefore a = 144$$

$$\text{또 } b = \int_0^4 9x^2 dx = \left[3x^3 \right]_0^4 = 192 \text{ 이므로}$$

$$a+b=336$$

답 336

$$\mathbf{1159} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{n^2} \left(\cos \frac{\pi}{n} + 2 \cos \frac{2\pi}{n} + 3 \cos \frac{3\pi}{n} + \dots + n \cos \frac{n\pi}{n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k \cos \frac{k\pi}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n} \times \frac{\pi}{n}$$

$$= \int_0^\pi x \cos x dx$$

$$= \left[x \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx$$

$$= - \left[-\cos x \right]_0^\pi$$

$$= -2$$

답 ②

1160 $x\sqrt{1+x}=0$ 에서

$$x=-1 \text{ 또는 } x=0$$

이때 $-1 \leq x \leq 0$ 에서 $x\sqrt{1+x} \leq 0$ 이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^0 (-x\sqrt{1+x}) dx$$

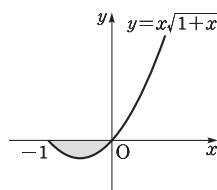
$\sqrt{1+x}=t$ 로 놓으면 $1+x=t^2$ 이므로

$$1=2t \frac{dt}{dx}$$

$x=-1$ 일 때 $t=0$, $x=0$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (-x\sqrt{1+x}) dx &= \int_0^1 (1-t^2) \times t \times 2t dt \\ &= 2 \int_0^1 (t^2 - t^4) dt \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{5} t^5 \right]_0^1 \\ &= 2 \times \frac{2}{15} \\ &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

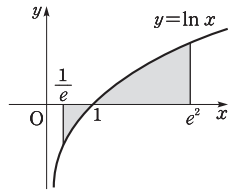
답 ①



1161 $\ln x=0$ 에서 $x=1$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{e}}^1 (-\ln x) dx + \int_1^{e^2} \ln x dx \\ &= -\left([x \ln x]_{\frac{1}{e}}^1 - \int_{\frac{1}{e}}^1 dx \right) \\ & \quad + \left[x \ln x \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} dx \\ &= -\left(\frac{1}{e} - \left[x \right]_{\frac{1}{e}}^1 \right) + 2e^2 - [x]_1^{e^2} \\ &= -\frac{1}{e} + \left(1 - \frac{1}{e} \right) + 2e^2 - (e^2 - 1) \\ &= e^2 - \frac{2}{e} + 2 \end{aligned}$$



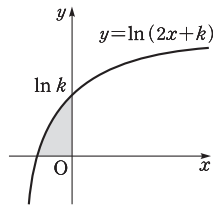
답 $e^2 - \frac{2}{e} + 2$

1162 $y = \ln(2x+k)$ 에서 $2x+k=e^y$

$$\therefore x = \frac{1}{2}(e^y - k)$$

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\ln k} \left\{ -\frac{1}{2}(e^y - k) \right\} dy \\ &= -\frac{1}{2} [e^y - ky]_0^{\ln k} \\ &= \frac{1}{2} (k \ln k - k + 1) \end{aligned}$$



$$\text{즉 } \frac{1}{2} (k \ln k - k + 1) = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } k \ln k - k + 1 = 1$$

$$k(\ln k - 1) = 0 \quad \therefore k = e \quad (\because k > 1)$$

답 e

1163 곡선 $y = xe^x$ 과 직선 $y = ex$ 의 교점의 x 좌표는

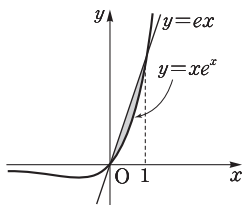
$$xe^x = ex \text{에서 } x(e^x - e) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

이때 $0 \leq x \leq 1$ 에서 $xe^x \leq ex$ 이므로

구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (ex - xe^x) dx \\ &= \int_0^1 x(e - e^x) dx \\ &= \left[x(ex - e^x) \right]_0^1 - \int_0^1 (ex - e^x) dx \\ &= -\left[\frac{e}{2}x^2 - e^x \right]_0^1 = \frac{e}{2} - 1 \end{aligned}$$



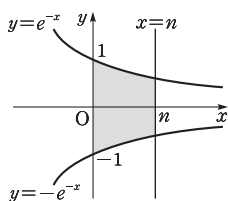
답 ①

1164 $S_n = \int_0^n \{e^{-x} - (-e^{-x})\} dx$

$$= \int_0^n 2e^{-x} dx = [-2e^{-x}]_0^n$$

$$= -\frac{2}{e^n} + 2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{e^n} + 2 \right) = 2$$



답 2

1165 두 곡선 $y = \cos x$ 와 $y = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin x \text{에서 } \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3}$$

$$\tan x = \sqrt{3} \quad \therefore x = \frac{\pi}{3} \quad \left(\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

따라서

$$\begin{aligned} S_A &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin x \right) dx \\ &= \left[\sin x + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_B &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - S_A \\ &= \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$

1166 오른쪽 그림에서 색칠한 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^{e-1} \{ \ln(x+1) - k \} dx = 0$$

$$\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx - \int_0^{e-1} k dx$$

$$= 0$$

$$\left[x \ln(x+1) \right]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x}{x+1} dx - [kx]_0^{e-1} = 0$$

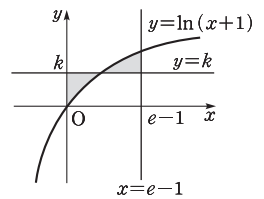
$$e-1 - \int_0^{e-1} \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx - k(e-1) = 0$$

$$e-1 - \left[x - \ln|x+1| \right]_0^{e-1} - k(e-1) = 0$$

$$e-1 - (e-2) - k(e-1) = 0, \quad k(e-1) = 1$$

$$\therefore k = \frac{1}{e-1}$$

답 $\frac{1}{e-1}$



1167 물의 높이가 x 일 때의 수면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \{ \sqrt{\ln(2x+1)} \}^2 = \ln(2x+1)$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^{\frac{e-1}{2}} S(x) dx = \int_0^{\frac{e-1}{2}} \ln(2x+1) dx$$

$$= \left[x \ln(2x+1) \right]_0^{\frac{e-1}{2}} - \int_0^{\frac{e-1}{2}} \frac{2x}{2x+1} dx$$

$$= \frac{e-1}{2} - \int_0^{\frac{e-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2x+1} \right) dx$$

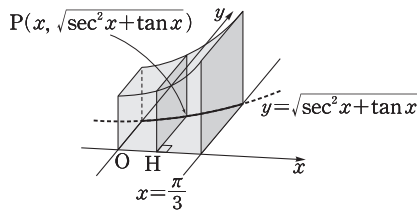
$$= \frac{e-1}{2} - \left[x - \frac{1}{2} \ln|2x+1| \right]_0^{\frac{e-1}{2}}$$

$$= \frac{e-1}{2} - \left(\frac{e-1}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

1168 다음 그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{\sec^2 x + \tan x}$ 위의 점 $P(x, \sqrt{\sec^2 x + \tan x})$ 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{PH} = \sqrt{\sec^2 x + \tan x}$



점 P를 지나고 x 축에 수직인 평면으로 주어진 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

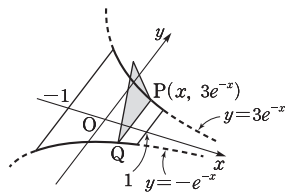
$$S(x) = (\sqrt{\sec^2 x + \tan x})^2 = \sec^2 x + \tan x$$

따라서 구하는 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} S(x) dx &= \int_0^{\pi/3} (\sec^2 x + \tan x) dx \\ &= \left[\tan x - \ln |\cos x| \right]_0^{\pi/3} \\ &= \sqrt{3} - \ln \frac{1}{2} \\ &= \sqrt{3} + \ln 2 \end{aligned}$$

답 ④

1169 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y = 3e^{-x}$ 위의 점 $P(x, 3e^{-x})$ 을 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y = -e^{-x}$ 과 만나는 점을 Q라 하면



$$\overline{PQ} = 3e^{-x} - (-e^{-x}) = 4e^{-x}$$

점 P를 지나고 x 축에 수직인 평면으로 주어진 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (4e^{-x})^2 = 4\sqrt{3}e^{-2x}$$

따라서 구하는 부피는

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 S(x) dx &= \int_{-1}^1 4\sqrt{3}e^{-2x} dx \\ &= \left[-2\sqrt{3}e^{-2x} \right]_{-1}^1 \\ &= 2\sqrt{3} \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right) \end{aligned}$$

답 $2\sqrt{3} \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right)$

1170 $\frac{dx}{dt} = \sqrt{2}e^t(\cos t - \sin t)$, $\frac{dy}{dt} = \sqrt{2}e^t(\sin t + \cos t)$

이므로 시각 $t=0$ 에서 $t=\pi$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sqrt{\{\sqrt{2}e^t(\cos t - \sin t)\}^2 + \{\sqrt{2}e^t(\sin t + \cos t)\}^2} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{4e^{2t}} dt = \int_0^\pi 2e^t dt \\ &= \left[2e^t \right]_0^\pi = 2e^\pi - 2 \end{aligned}$$

답 ③

1171 $\frac{dx}{dt} = e^{2t} - a$, $\frac{dy}{dt} = 2\sqrt{a}e^t$ 이므로 시각 $t=0$ 에서 $t=1$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{(e^{2t} - a)^2 + (2\sqrt{a}e^t)^2} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{e^{4t} + 2ae^{2t} + a^2} dt = \int_0^1 \sqrt{(e^{2t} + a)^2} dt \\ &= \int_0^1 (e^{2t} + a) dt = \left[\frac{1}{2}e^{2t} + at \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}e^2 + a - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e^2 + 2a - 1) \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{2}(e^2 + 2a - 1) = \frac{1}{2}(3e^2 - 1)$ 이므로

$$e^2 + 2a - 1 = 3e^2 - 1 \quad \therefore a = e^2$$

답 e^2

1172 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \times \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 x f(1+x) dx = \int_0^1 x \ln(1+x) dx \quad \dots \text{1단계} \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|1+x| \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2} + \ln 2 \right) = \frac{1}{4} \quad \dots \text{2단계} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{4}$

채점 요소	비율
1단계 주어진 식을 정적분으로 나타내기	50 %
2단계 정적분의 값 구하기	50 %

1173 높이가 x 인 지점에서 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \tan^2 x \quad \dots \text{1단계}$$

따라서 구하는 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} S(x) dx &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{3}}{4} \tan^2 x dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\tan x - x \right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \quad \dots \text{2단계} \end{aligned}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$

채점 요소	비율
1단계 단면의 넓이를 x 에 대한 식으로 나타내기	30 %
2단계 입체도형의 부피 구하기	70 %

1174 $\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x}{\cos x}$

... 1단계

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx \end{aligned}$$

... 2단계

이때 $\sin x = t$ 로 놓으면 $\cos x = \frac{dt}{dx}$

$x=0$ 일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{6}$ 일 때 $t=\frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[-\ln|1-t| + \ln|1+t| \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \ln 3 \end{aligned}$$

... 3단계

답 $\frac{1}{2} \ln 3$

채점 요소	비율
1단계 $\frac{dy}{dx}$ 구하기	20 %
2단계 곡선의 길이를 정적분으로 나타내기	30 %
3단계 치환적분법을 이용하여 곡선의 길이 구하기	50 %

1175 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$

는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고

$x=e$ 인 점에서 접하므로 곡선

$y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 는 $x=e$ 인 점에서 접한다.

따라서 $f(e)=e$ 이므로

$$e^{ae} = e, \quad ae=1 \quad \therefore a = \frac{1}{e}$$

... 1단계

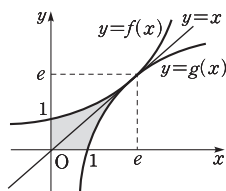
이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 y 축 및 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^e \{f(x) - x\} dx \\ &= 2 \int_0^e (e^{\frac{x}{e}} - x) dx = 2 \left[e \times e^{\frac{x}{e}} - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^e \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2} e^2 - e \right) = e^2 - 2e \end{aligned}$$

... 2단계

답 $e^2 - 2e$

채점 요소	비율
1단계 a 의 값 구하기	40 %
2단계 도형의 넓이 구하기	60 %



1176 **전략** $y=|\cos x|$ 는 주기가 π 인 주기함수임을 이용한다.

$$S_n = \int_{(n-\frac{1}{2})\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos x \, dx = \left(\frac{1}{2}\right)^n \int_{(n-\frac{1}{2})\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} |\cos x| \, dx$$

이때 $y=|\cos x|$ 는 주기가 π 인 주기함수이므로 임의의 자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} \int_{(n-\frac{1}{2})\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} |\cos x| \, dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \left[\sin x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 \\ \therefore S_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

답 2

1177 **전략** 주어진 조건에 의하여 $\int_0^{\pi} (x^2-a)\sin x \, dx=0$ 임을 이용한다.

곡선 $y=(x^2-a)\sin x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

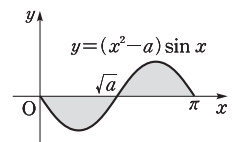
$$(x^2-a)\sin x=0 \text{에서 } x^2-a=0 \text{ 또는 } \sin x=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\sqrt{a} \text{ 또는 } x=\pi \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

따라서 오른쪽 그림에서 색칠한 두 도형

의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^{\pi} (x^2-a)\sin x \, dx=0$$



$$\left[-(x^2-a)\cos x \right]_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} x \cos x \, dx = 0$$

$$\pi^2 - 2a + 2 \left(\left[x \sin x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx \right) = 0$$

$$\pi^2 - 2a - 2 \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = 0, \quad \pi^2 - 2a - 4 = 0$$

$$2a = \pi^2 - 4 \quad \therefore a = \frac{\pi^2}{2} - 2$$

답 $\frac{\pi^2}{2} - 2$

1178 **전략** 입체도형의 밑면을 좌표평면 위에 놓고 x 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 밑면의 중심을 원점,

원기둥을 자른 평면과 밑면의 교선을 x 축

으로 정하자.

점 $P(x, 0)$ ($-2 \leq x \leq 2$)을 지나고

x 축에 수직인 평면으로 주어진 입체도형

을 자른 단면을 $\triangle PQR$ 라 하면 $\triangle POQ$

에서

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{OQ}^2 - \overline{OP}^2} = \sqrt{4-x^2}$$

$$\text{또 } \triangle PQR \text{에서 } \overline{RQ} = \overline{PQ} \tan 60^\circ = \sqrt{3}(4-x^2)$$

$$\therefore \triangle PQR = \frac{1}{2} \times \sqrt{4-x^2} \times \sqrt{3}(4-x^2) = \frac{\sqrt{3}}{2} (4-x^2)$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_{-2}^2 \frac{\sqrt{3}}{2} (4-x^2) \, dx = \sqrt{3} \int_0^2 (4-x^2) \, dx$$

$$= \sqrt{3} \left[4x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^2$$

$$= \sqrt{3} \times \frac{16}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{16\sqrt{3}}{3}$



A series of horizontal lines for writing, spanning the width of the page.