RPM

핵심 고난도 문제서

# HighQ

QUESTION

# 수학(상)

# 정답과 풀이


Ⅰ 다항식 002

Ⅱ 방정식과 부등식 027

Ⅲ 도형의 방정식 092

# 01 다항식의 연산

## STEP 1 핵심기출 마스터

본문 9~12쪽

**0001** $A-2(X-B)=3A$에서
$A-2X+2B=3A$, $2X=2B-2A$
$\therefore X=B-A$
$=2a^2+ab-b^2-(a^2-2ab-2b^2)$
$=a^2+3ab+b^2$ 답 ③

**0002** $2A-B=2x^2-7xy+y^2$ …… ㉠
$2B-A=-x^2+8xy-2y^2$ …… ㉡
㉠−㉡을 하면
$3A-3B=3x^2-15xy+3y^2$
$\therefore A-B=x^2-5xy+y^2$ 답 ④

**0003** $2A-B=2(x^3+x^2+ax)-(2x^3-bx+1)$
$=2x^2+(2a+b)x-1$ …… ㉠
$2B-C=2(2x^3-bx+1)-(3x^3+bx+a)$
$=x^3-3bx+2-a$ …… ㉡
㉠에서 항이 두 개이려면
$2a+b=0$ $\therefore b=-2a$
㉡에서 항이 두 개이려면 $b\neq0$이므로
$2-a=0$ $\therefore a=2$
$a=2$를 $b=-2a$에 대입하면 $b=-4$
$\therefore a+b=-2$ 답 ②

**0004** $(x^3-5x^2+4x-3)(2x+1)^2$
$=(x^3-5x^2+4x-3)(4x^2+4x+1)$
이 전개식에서 $x^3$항은
$x^3\times1+(-5x^2)\times4x+4x\times4x^2$
$=x^3-20x^3+16x^3=-3x^3$
따라서 $x^3$의 계수는 $-3$이다. 답 $-3$

**0005** $(x^2-x+1)(x^2-x+a)$의 전개식에서 $x^2$항은
$x^2\times a+(-x)\times(-x)+1\times x^2=(a+2)x^2$
이때 $x^2$의 계수가 10이므로
$a+2=10$ $\therefore a=8$
따라서 다항식 $(x^2-x+1)(x^2-x+8)$의 전개식에서 $x$항은
$-x\times8+1\times(-x)=-9x$
이므로 $x$의 계수는 $-9$이다. 답 $-9$

**0006** $(x^3+2x^2+3x+4)^2$
$=(x^3+2x^2+3x+4)(x^3+2x^2+3x+4)$
의 전개식에서 $x^2$항은
$2x^2\times4+3x\times3x+4\times2x^2=25x^2$
$(x^2+2x+3)^2=(x^2+2x+3)(x^2+2x+3)$
의 전개식에서 $x^2$항은
$x^2\times3+2x\times2x+3\times x^2=10x^2$
따라서 $x^2$의 계수는
$25-10=15$ 답 ③

**0007** $(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$
$=\{(x+2)(x^2-2x+4)\}\{(x-2)(x^2+2x+4)\}$
$=(x^3+8)(x^3-8)$
$=x^6-64$ 답 $x^6-64$

**0008** $(x+1)(x-4)(x+2)(x-3)$
$=\{(x+1)(x-3)\}\{(x-4)(x+2)\}$
$=(x^2-2x-3)(x^2-2x-8)$
$x^2-2x=t$로 놓으면
(주어진 식)$=(t-3)(t-8)$
$=t^2-11t+24$
$=(x^2-2x)^2-11(x^2-2x)+24$
$=x^4-4x^3-7x^2+22x+24$
따라서 $a=-4$, $b=22$이므로
$b-a=26$ 답 ③

**0009** $(5+3a)^3=A$, $(5-3a)^3=B$로 놓으면
(주어진 식)$=(A-B)^2-(A+B)^2$
$=-4AB$
$=-4(5+3a)^3(5-3a)^3$
$=-4\{(5+3a)(5-3a)\}^3$
$=-4(25-9a^2)^3$
$=-4(25-9\times3)^3$ ($\because a=\sqrt{3}$)
$=-4\times(-8)=32$ 답 32

**0010** $x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy$이므로
$16=3^2-xy$에서 $xy=-7$
$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=3^3-3\times(-7)\times3=90$ 답 ⑤

**0011** $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$이므로
$7=3^2-2ab$, $2ab=2$ $\therefore ab=1$
$\therefore a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$
$=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2$
$=7^2-2\times1^2=47$ 답 ⑤

**0012** $\left(x-\frac{3}{x}\right)^2+\left(3x+\frac{1}{x}\right)^2=60$에서

$x^2-6+\frac{9}{x^2}+9x^2+6+\frac{1}{x^2}=60$

$10x^2+\frac{10}{x^2}=60$ $\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=6$

이때 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$이므로

$6=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=8$

$\therefore x+\frac{1}{x}=2\sqrt{2}$ ($\because x>0$) 답 $2\sqrt{2}$

**0013** $x>1$이므로 $x^2-4x+1=0$의 양변을 $x$로 나누면

$x-4+\frac{1}{x}=0$ $\therefore x+\frac{1}{x}=4$

이때 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=4^2-4=12$이므로

$x-\frac{1}{x}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ $\left(\because x-\frac{1}{x}>0\right)$

$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=(2\sqrt{3})^3+3\times2\sqrt{3}=30\sqrt{3}$ 답 ⑤

참고 $x>1$에서 $0<\frac{1}{x}<1$이므로 $x-\frac{1}{x}>0$

**0014** $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로

$3^2=a^2+b^2+c^2+2\times(-1)$ $\therefore a^2+b^2+c^2=11$

$\therefore a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)\{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\}+3abc$

$=3\times\{11-(-1)\}+3\times(-3)=27$ 답 ④

**0015** $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$이므로

$0=5+2(xy+yz+zx)$ $\therefore xy+yz+zx=-\frac{5}{2}$

$(xy+yz+zx)^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$이므로

$\left(-\frac{5}{2}\right)^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+0$

$\therefore x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=\frac{25}{4}$ 답 ②

**0016** $a-b=2$, $b-c=-3$을 변끼리 더하면 $a-c=-1$

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\}$

$=\frac{1}{2}\times\{2^2+(-3)^2+(-1)^2\}=7$ 답 **7**

**0017** $(9-1)(9+1)(9^2+1)(9^4+1)(9^8+1)$

$=(9^2-1)(9^2+1)(9^4+1)(9^8+1)$

$=(9^4-1)(9^4+1)(9^8+1)$

$=(9^8-1)(9^8+1)$

$=9^{16}-1=3^{32}-1$

이므로

$(9+1)(9^2+1)(9^4+1)(9^8+1)=\frac{3^{32}-1}{8}$

따라서 $m=32$, $n=8$이므로

$m+n=40$ 답 **40**

**0018** $100=a$라 하면

$101^2+98\times102=(a+1)^2+(a-2)(a+2)$

$=a^2+2a+1+a^2-4$

$=2a^2+2a-3$

$=2\times100^2+2\times100-3$

$=20197$

따라서 주어진 수는 다섯 자리 자연수이므로 $n=5$ 답 **5**

**0019** $(a+b+c)(a+c-b)=(a+b-c)(b+c-a)$에서

$\{(a+c)+b\}\{(a+c)-b\}=\{b+(a-c)\}\{b-(a-c)\}$

$(a+c)^2-b^2=b^2-(a-c)^2$

$a^2+2ac+c^2-b^2=b^2-a^2+2ac-c^2$

$2a^2-2b^2+2c^2=0$ $\therefore a^2+c^2=b^2$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 $b$인 직각삼각형이다.

답 ④

**0020** 두 정사각형의 넓이의 합은 $a^2+(2b)^2$이고 직사각형의 넓이는 $ab$이므로

$a^2+4b^2=5ab$

또, $ab=4$이므로 한 변의 길이가 $a+2b$인 정사각형의 넓이는

$(a+2b)^2=a^2+4ab+4b^2$

$=5ab+4ab$

$=9ab$

$=9\times4=36$ 답 ⑤

**0021** 구멍을 뚫기 전 처음 나무토막의 부피는

$a\times a\times(a-2)=a^2(a-2)$

정육면체 모양의 구멍의 부피는 $(a-2)^3$

따라서 구하는 블록의 부피는

$a^2(a-2)-(a-2)^3=a^3-2a^2-(a^3-6a^2+12a-8)$

$=4a^2-12a+8$ 답 ②

**0022**

$$\begin{array}{r} x-10 \\ x^2+2x-1\overline{)\,x^3-8x^2+7x-2} \\ \underline{x^3+2x^2-x\phantom{+2}} \\ -10x^2+8x-2 \\ \underline{-10x^2-20x+10} \\ 28x-12 \end{array}$$

$\therefore x^3-8x^2+7x-2=(x^2+2x-1)(x-10)+28x-12$

따라서 $Q(x)=x-10$, $R(x)=28x-12$이므로

$Q(2)+R(1)=-8+16=8$ 답 **8**

**00023**

$$\begin{array}{r} 2x+1 \\ x^2-x+1 \overline{)\,2x^3-x^2+ax-b} \\ \underline{2x^3-2x^2+2x\phantom{-b}} \\ x^2+(a-2)x-b \\ \underline{x^2-x+1} \\ (a-1)x-b-1 \end{array}$$

$2x^3-x^2+ax-b$를 $x^2-x+1$로 나누었을 때의 나머지가 0이어야 하므로

$(a-1)x-b-1=0$

즉, $a-1=0$, $-b-1=0$이므로 $a=1$, $b=-1$

$\therefore a^2+b^2=1^2+(-1)^2=2$ 답 ②

**00024** 주어진 등식에서 다항식 $x^4-3x^3-x^2+7x+5$를 $x^2-2x-1$로 나누었을 때의 몫이 $f(x)$, 나머지가 $ax+3$이다.

$$\begin{array}{r} x^2-x-2 \\ x^2-2x-1 \overline{)\,x^4-3x^3-x^2+7x+5} \\ \underline{x^4-2x^3-x^2\phantom{+7x+5}} \\ -x^3+7x+5 \\ \underline{-x^3+2x^2+x\phantom{+5}} \\ -2x^2+6x+5 \\ \underline{-2x^2+4x+2} \\ 2x+3 \end{array}$$

따라서 $f(x)=x^2-x-2$, $a=2$이므로

$f(a)=f(2)=0$ 답 ③

**00025** $f(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $R$이므로

$$\begin{aligned} f(x)&=\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R \\ &=\frac{1}{2}(2x-1)Q(x)+R \\ &=(2x-1)\times\frac{1}{2}Q(x)+R \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{2}Q(x)$, 나머지는 $R$이다. 답 ①

**00026** $f(x)$를 $3x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 6이므로

$f(x)=(3x-1)Q(x)+6$

위의 식의 양변에 $x$를 곱하면

$$\begin{aligned} xf(x)&=x(3x-1)Q(x)+6x \\ &=3x\left(x-\frac{1}{3}\right)Q(x)+6\left(x-\frac{1}{3}\right)+2 \\ &=\left(x-\frac{1}{3}\right)\{3xQ(x)+6\}+2 \end{aligned}$$

따라서 $xf(x)$를 $x-\frac{1}{3}$로 나누었을 때의 몫은 $3xQ(x)+6$, 나머지는 2이다. 답 ②

**00027**

| $-2$ | 3 | $a$ | 0 | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| | | $-6$ | $-2a+12$ | $4a-24$ |
| | 3 | $a-6$ | $-2a+12$ | $4a-24+b$ |

이때 $k=-2$, $d=3$, $a-6=-2$, $-2a+12=4=c$, $4a-24+b=-13$이므로

$a=4$, $b=-5$, $c=4$, $d=3$, $k=-2$ 답 ⑤

**00028**

| $\frac{1}{3}$ | 9 | 0 | $-a$ | 4 |
|---|---|---|---|---|
| | | 3 | 1 | $-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}$ |
| | 9 | 3 | $-a+1$ | 2 |

나머지가 2이므로

$4+\left(-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\right)=2$ $\therefore a=7$

$$\begin{aligned} \therefore 9x^3-7x+4&=\left(x-\frac{1}{3}\right)(9x^2+3x-6)+2 \\ &=(3x-1)(3x^2+x-2)+2 \end{aligned}$$

따라서 $Q(x)=3x^2+x-2$이므로

$Q(2)=3\times2^2+2-2=12$ 답 **12**

## STEP 2 실전 마스터 본문 13~16쪽

**00029** $P(x)=(2A-B)(2B-C)(2C-A)$라 하면

$$\begin{aligned} 2A-B&=2(x^3+x+1)-(x^2-2x-3) \\ &=2x^3-x^2+4x+5 \\ 2B-C&=2(x^2-2x-3)-(2x-1) \\ &=2x^2-6x-5 \\ 2C-A&=2(2x-1)-(x^3+x+1) \\ &=-x^3+3x-3 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} P(x)&=(2x^3-x^2+4x+5)(2x^2-6x-5)(-x^3+3x-3) \\ &=a_8x^8+a_7x^7+a_6x^6+\cdots+a_1x+a_0 \end{aligned}$$

이때 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8$의 값은 $P(1)$과 같으므로

$$\begin{aligned} a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8&=P(1) \\ &=10\times(-9)\times(-1)=90 \end{aligned}$$ 답 ⑤

**00030** 조건 (가)에서 $x$, $y$, $2z$ 중 적어도 하나는 3이므로

$(x-3)(y-3)(2z-3)=0$

이 식의 좌변을 전개하면

$(xy-3x-3y+9)(2z-3)=0$

$2xyz-3xy-6xz+9x-6yz+9y+18z-27=0$

$2xyz-3(xy+2yz+2zx)+9(x+y+2z)-27=0$ …… ㉠

이때 조건 ㈏에서 $3(x+y+2z)=xy+2yz+2zx$이므로
㉠에 대입하면
$2xyz-3(xy+2yz+2zx)+3(xy+2yz+2zx)-27=0$
$2xyz-27=0 \qquad \therefore xyz=\frac{27}{2}$
$\therefore 10xyz=10\times\frac{27}{2}=135$ 답 135

**0031** $ac+bd=1$의 양변을 제곱하면
$a^2c^2+b^2d^2+2abcd=1$ …… ㉠
$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=2\times2=4$이므로
$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=4$ …… ㉡
㉡−㉠을 하면
$a^2d^2+b^2c^2-2abcd=3$, 즉 $(ad-bc)^2=3$
이때 $ad>bc$이므로
$ad-bc=\sqrt{3}$ 답 ②

**0032** $x+y=p$, $xy=q$라 하면
$(x+y)(ax^2+by^2)=ax^3+bxy^2+ax^2y+by^3$
$=ax^3+by^3+xy(ax+by)$
에서 $14p=22+4q$ …… ㉠
$(x+y)(ax^3+by^3)=ax^4+bxy^3+ax^3y+by^4$
$=ax^4+by^4+xy(ax^2+by^2)$
에서 $22p=50+14q$ …… ㉡
$(x+y)(ax^4+by^4)=ax^5+bxy^4+ax^4y+by^5$
$=ax^5+by^5+xy(ax^3+by^3)$
에서 $50p=ax^5+by^5+22q$ …… ㉢
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=1$, $q=-2$
이것을 ㉢에 대입하면
$50\times1=ax^5+by^5+22\times(-2)$
$\therefore ax^5+by^5=50+44=94$ 답 94

**0033** $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab=4^2+4\times2=24$이므로
$a+b=2\sqrt{6}$ ($\because a>0$)
$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=4^2+2\times2=20$
$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=(2\sqrt{6})^3-3\times2\times2\sqrt{6}=36\sqrt{6}$
$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$
$=20^2-2\times2^2=392$
$\therefore (a+a^2+a^3+a^4)+(b+b^2+b^3+b^4)$
$=(a+b)+(a^2+b^2)+(a^3+b^3)+(a^4+b^4)$
$=2\sqrt{6}+20+36\sqrt{6}+392$
$=412+38\sqrt{6}$ 답 $412+38\sqrt{6}$

**0034** $m+n=ax+by+ay+bx$
$=(a+b)(x+y)$
$=1\times2=2$
$mn=(ax+by)(ay+bx)$
$=a^2xy+abx^2+aby^2+b^2xy$
$=xy(a^2+b^2)+ab(x^2+y^2)$
$=xy\{(a+b)^2-2ab\}+ab\{(x+y)^2-2xy\}$
$=3\times(1^2-2\times2)+2\times(2^2-2\times3)=-13$
$\therefore m^3+n^3=(m+n)^3-3mn(m+n)$
$=2^3-3\times(-13)\times2=86$ 답 86

**0035** $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$에서
$x+y=1$, $x-y=\sqrt{5}$, $xy=-1$이므로
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=1^2-2\times(-1)=3$
$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=1\times\sqrt{5}=\sqrt{5}$
$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=3^2-2\times(-1)^2=7$
$x^4-y^4=(x^2+y^2)(x^2-y^2)=3\times\sqrt{5}=3\sqrt{5}$
$ax^5+bx^4=1$에서 $ax+b=\frac{1}{x^4}$ …… ㉠
$ay^5+by^4=1$에서 $ay+b=\frac{1}{y^4}$ …… ㉡
㉠−㉡을 하면
$a(x-y)=\frac{1}{x^4}-\frac{1}{y^4}=\frac{y^4-x^4}{x^4y^4}$
$\sqrt{5}a=\frac{-3\sqrt{5}}{(-1)^4} \qquad \therefore a=-3$
㉠+㉡을 하면
$a(x+y)+2b=\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}=\frac{x^4+y^4}{x^4y^4}$
$(-3)\times1+2b=\frac{7}{(-1)^4} \qquad \therefore b=5$
$\therefore a+b=(-3)+5=2$ 답 ②

**0036** $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=22$에서
$2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)=22$
$\therefore a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=11$ …… ㉠
$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2$에서
$2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=2$
$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=1$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면
$2(a^2+b^2+c^2)=12$, 즉 $a^2+b^2+c^2=6$
㉠−㉡을 하면
$2(ab+bc+ca)=10$, 즉 $ab+bc+ca=5$
이때 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로
$(a+b+c)^2=6+2\times5=16$
그런데 $a$, $b$, $c$가 모두 양수이므로
$a+b+c=4$
$\therefore a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=4\times1+3\times2=10$ 답 ⑤

**037** 조건 (가)에서

$<a, a, a>+<b, b, b>+<c, c, c>$

$=3a^2+3b^2+3c^2=33$

$\therefore a^2+b^2+c^2=11$

조건 (나)에서

$<a, 1, 1>+<1, b, 1>+<1, 1, c>$

$=2a+1+2b+1+2c+1=9$

$\therefore a+b+c=3$

조건 (다)에서

$<a, 2, 0>\times<b, 2, 0>\times<c, 2, 0>$

$=8abc=-8$

$\therefore abc=-1$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$3^2=11+2(ab+bc+ca)$ $\therefore ab+bc+ca=-1$

$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$에서

$(-1)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2\times(-1)\times3$

$\therefore a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=7$

$\therefore <ab, ab, ab>+<bc, bc, bc>+<ca, ca, ca>$

$=3a^2b^2+3b^2c^2+3c^2a^2$

$=3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$=3\times7=21$ 답 **21**

**038** 처음 직육면체의 부피는

$(a+b)^2(a+2b)=(a^2+2ab+b^2)(a+2b)$

$=a^3+4a^2b+5ab^2+2b^3$

이므로 12개의 작은 직육면체의 개수는 각각 다음과 같다.

부피가 $a^3$인 직육면체: 1개 부피가 $a^2b$인 직육면체: 4개

부피가 $ab^2$인 직육면체: 5개 부피가 $b^3$인 직육면체: 2개

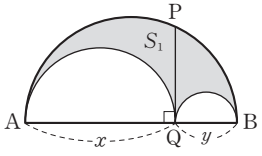
이때 부피가 150인 직육면체가 5개이므로

$ab^2=150=6\times5^2$

$a$, $b$는 서로소인 2 이상의 자연수이므로 $a=6$, $b=5$

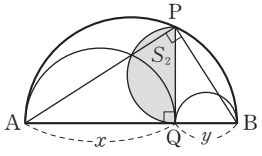
$\therefore a+2b=6+2\times5=16$ 답 **16**

**039** $\overline{AQ}=x$, $\overline{QB}=y$라 하면




$S_1=\frac{\pi}{2}\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{\pi}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^2$

$=\frac{\pi}{4}xy$ ····· ㉠




$\triangle PAB$는 $\angle P=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\triangle AQP\backsim\triangle PQB$ (AA 닮음)에서

$\overline{AQ}:\overline{PQ}=\overline{PQ}:\overline{BQ}$

$\overline{PQ}^2=\overline{AQ}\times\overline{BQ}=xy$

$\therefore S_2=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\overline{PQ}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8}xy$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $S_1-S_2=\frac{\pi}{4}xy-\frac{\pi}{8}xy=\frac{\pi}{8}xy$

이때 $S_1-S_2=2\pi$이므로 $\frac{\pi}{8}xy=2\pi$ $\therefore xy=16$

또한, $\overline{AQ}-\overline{QB}=8\sqrt{3}$이므로

$x-y=8\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AB}^2=(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$

$=(8\sqrt{3})^2+4\times16=256$

$\therefore \overline{AB}=16$ ($\because \overline{AB}>0$) 답 **16**

**040** $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$라 하면

$\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$, $\overline{BC}=\sqrt{b^2+c^2}$, $\overline{CA}=\sqrt{c^2+a^2}$

[그림 1]의 사면체 OABC의 모든 모서리의 길이의 제곱의 합은

$\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$

$=a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)$

$=3(a^2+b^2+c^2)=123$

$\therefore a^2+b^2+c^2=41$ ····· ㉠

[그림 2]의 도형의 겉넓이는

$(\triangle OAB-1)+(\triangle OBC-1)+(\triangle OCA-1)+\triangle ABC+3$

$=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}ca+2\sqrt{34}=20+2\sqrt{34}$

$\therefore ab+bc+ca=40$ ····· ㉡

이때 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$(a+b+c)^2=41+2\times40$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=121$

$\therefore \overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=a+b+c=11$ ($\because a+b+c>0$)

답 **11**

**041**

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x^2-2x+2\,\overline{)\,x^3-x^2+x+1} \\ \underline{x^3-2x^2+2x} \\ x^2-x+1 \\ \underline{x^2-2x+2} \\ x-1 \end{array}$$

따라서

$x^3-x^2+x+1=(x^2-2x+2)(x+1)+(x-1)$

이므로

$f(x)=(x^3-x^2+x+1)^2$

$=\{(x^2-2x+2)(x+1)+(x-1)\}^2$

$=(x^2-2x+2)^2(x+1)^2+2(x^2-2x+2)(x+1)(x-1)+(x-1)^2$

$\therefore f(x)-(x-1)^2$

$=(x^2-2x+2)^2(x+1)^2+2(x^2-2x+2)(x+1)(x-1)$

$=(x^2-2x+2)\{(x^2-2x+2)(x+1)^2+2(x+1)(x-1)\}$

즉, $f(x)-(x-1)^2$은 $x^2-2x+2$로 나누어떨어지므로 $f(x)$와 $(x-1)^2$은 $x^2-2x+2$로 나누었을 때의 나머지가 같다.

$\therefore a=-1$ 답 ②

**다른풀이**

$f(x)=(x^2-2x+2)^2(x+1)^2+2(x^2-2x+2)(x+1)(x-1)+(x-1)^2$

$=(x^2-2x+2)^2(x+1)^2+2(x^2-2x+2)(x+1)(x-1)+x^2-2x+1$

$=(x^2-2x+2)\{(x^2-2x+2)(x+1)^2+2(x+1)(x-1)+1\}-1$

이므로 $f(x)$를 $x^2-2x+2$로 나누었을 때의 나머지는 $-1$이다.

따라서 $(x+a)^2$을 $x^2-2x+2$로 나누었을 때의 나머지도 $-1$

이므로 $(x+a)^2=(x^2-2x+2)\times1-1$

$x^2+ax+a^2=x^2-2x+1$ $\therefore a=-1$

**Lecture**

두 다항식 $f(x)$, $g(x)$를 $x^2-2x+2$로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라 하고 나머지를 $R$라 하면

$f(x)=(x^2-2x+2)Q_1(x)+R$, $g(x)=(x^2-2x+2)Q_2(x)+R$

이므로

$f(x)-g(x)$

$=\{(x^2-2x+2)Q_1(x)+R\}-\{(x^2-2x+2)Q_2(x)+R\}$

$=(x^2-2x+2)\{Q_1(x)-Q_2(x)\}$

즉, $f(x)-g(x)$는 $x^2-2x+2$로 나누어떨어진다.

**042** $A=x^3+2x+3$, $B=2x+3$에서

$A-B=x^3+2x+3-(2x+3)=x^3$

$AB=(x^3+2x+3)(2x+3)$

$=2x^4+3x^3+4x^2+12x+9$

이므로

$A^3-B^3=(A-B)^3+3AB(A-B)$

$=(x^3)^3+3(2x^4+3x^3+4x^2+12x+9)\times x^3$

$=x^9+6x^7+9x^6+12x^5+36x^4+27x^3$

$=x^5(x^4+6x^2+9x+12)+36x^4+27x^3$

따라서 $A^3-B^3$을 $x^5$으로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$와 나머지 $R(x)$는 $Q(x)=x^4+6x^2+9x+12$, $R(x)=36x^4+27x^3$

$\therefore Q(1)+R(-1)=28+9=37$ 답 **37**

**043** $f(x)$를 $g(x)$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $R(x)$이므로

$f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$

(단, ($R(x)$의 차수)<($g(x)$의 차수))

또한, $g(x)$를 $Q(x)$로 나누었을 때의 나머지도 $R(x)$이므로 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$g(x)=Q(x)Q_1(x)+R(x)$

(단, ($R(x)$의 차수)<($Q(x)$의 차수))

$\therefore 2f(x)+g(x)$

$=2\{g(x)Q(x)+R(x)\}+Q(x)Q_1(x)+R(x)$

$=Q(x)\{2g(x)+Q_1(x)\}+3R(x)$

이때 ($R(x)$의 차수)<($Q(x)$의 차수)이므로 $2f(x)+g(x)$를 $Q(x)$로 나누었을 때의 나머지는 $3R(x)$이다. 답 $3R(x)$

**044** 다음과 같이 빈칸을 $p$, $q$, $r$로 놓으면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| | | □ | □ | □ |
| $1$ | $a$ | $p$ | $4$ | $-7$ |
| | | □ | □ | |
| | $a$ | $q$ | $r$ | |

$ax^3+bx^2+cx+d$

$=(x+1)(ax^2+px+4)-7$

$=(x+1)\{(x-1)(ax+q)+r\}-7$

$=(x+1)(x-1)(ax+q)+r(x+1)-7$

$=(x+1)(x-1)(ax+q)+rx+r-7$

$=(x+1)(x-1)(3x+□)+5x+□$

이므로 $a=3$, $r=5$

따라서 조립제법을 완성하면 오른쪽과 같으므로

$a=3$, $b=1$, $c=2$, $d=-3$

$\therefore a+b+c+d=3$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $3$ | $1$ | $2$ | $-3$ |
| | | $-3$ | $2$ | $-4$ |
| $1$ | $3$ | $-2$ | $4$ | $-7$ |
| | | $3$ | $1$ | |
| | $3$ | $1$ | $5$ | |

답 **−3**

**045** 정사각형 $C$의 한 변의 길이를 $f(x)$라 하면

정사각형 $B$의 한 변의 길이는 $x^2+2x-f(x)$

정사각형 $A$의 한 변의 길이는

$2x^2+2x-1-\{x^2+2x-f(x)\}=x^2+f(x)-1$

이때 정사각형 $A$의 한 변의 길이는 주어진 직사각형의 세로의 길이와도 같으므로

$x^2+f(x)-1=x^2+2x$ $\therefore f(x)=2x+1$

(직사각형 $D$의 가로의 길이)

=(정사각형 $B$의 한 변의 길이)−(정사각형 $C$의 한 변의 길이)

$=\{x^2+2x-f(x)\}-f(x)$

$=x^2+2x-2f(x)$

$=x^2+2x-2(2x+1)$

$=x^2-2x-2$

이고, 직사각형 $D$의 세로의 길이는 $f(x)$, 즉 $2x+1$이므로

직사각형 $D$의 넓이는

$(x^2-2x-2)(2x+1)=2x^3-3x^2-6x-2$ 답 ④

**046** $(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+100x^{99})^2$

$=(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+100x^{99})$

$\times(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+100x^{99})$

이 전개식에서 $x^3$항은

$1\times4x^3+2x\times3x^2+3x^2\times2x+4x^3\times1=20x^3$

이므로 $a=20$

또, $x^4$항은

$1\times5x^4+2x\times4x^3+3x^2\times3x^2+4x^3\times2x+5x^4\times1=35x^4$

이므로 $b=35$

$\therefore b-a=15$ 답 ③

**00047** $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{BF}=c$라 하면

직육면체의 겉넓이는 $2(ab+bc+ca)=40$

$\therefore ab+bc+ca=20$

삼각형 BGD의 세 변의 길이의 제곱의 합은

$\overline{DB}^2+\overline{BG}^2+\overline{GD}^2=48$

$(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)=48$

$\therefore a^2+b^2+c^2=24$

이때 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

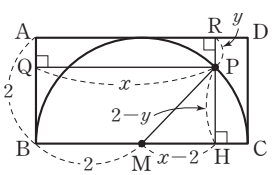
$(a+b+c)^2=24+2\times20=64$

이므로 $a+b+c=8$ ($\because a+b+c>0$)

따라서 모든 모서리의 길이의 합은

$4(a+b+c)=4\times8=32$ 답 **32**

**00048** 오른쪽 그림과 같이 호 BC 위의 한 점 P에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H, $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하자.




$\overline{BC}=4$이므로 $\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=2$

$\overline{PQ}=x$, $\overline{RP}=y$라 하면

직사각형 AQPR의 둘레의 길이가 10이므로

$2(x+y)=10$ $\therefore x+y=5$ …… ㉠

또, $\overline{PH}=2-y$, $\overline{MH}=\overline{QP}-\overline{BM}=x-2$이므로

직각삼각형 PMH에서 $\overline{PM}^2=\overline{MH}^2+\overline{PH}^2$

$2^2=(x-2)^2+(2-y)^2$, $4=x^2+y^2-4(x+y)+8$

$(x+y)^2-2xy-4(x+y)+4=0$

$5^2-2xy-4\times5+4=0$ ($\because$ ㉠)

$-2xy=-9$ $\therefore xy=\frac{9}{2}$

따라서 직사각형 AQPR의 넓이는 $\frac{9}{2}$이다. 답 ②

**00049**

$$\begin{array}{r} 3x^2+x-3 \\ x^2-x-1\overline{)\,3x^4-2x^3-7x^2+2x+5} \\ \underline{3x^4-3x^3-3x^2} \\ x^3-4x^2+2x \\ \underline{x^3-x^2-x} \\ -3x^2+3x+5 \\ \underline{-3x^2+3x+3} \\ 2 \end{array}$$

$\therefore 3x^4-2x^3-7x^2+2x+5$

$=(x^2-x-1)(3x^2+x-3)+2$

$=0\times(3x^2+x-3)+2=2$ 답 **2**

**00050** $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $R$이므로

$f(x)=(x-1)Q(x)+R$

위의 식의 양변에 $x^2+2x+3$을 곱하고 2를 더하면

$(x^2+2x+3)f(x)+2$

$=(x^2+2x+3)(x-1)Q(x)+R(x^2+2x+3)+2$

$=(x^2+2x+3)(x-1)Q(x)+R\{(x-1)(x+3)+6\}+2$

$=(x^2+2x+3)(x-1)Q(x)+R(x-1)(x+3)+6R+2$

$=(x-1)\{(x^2+2x+3)Q(x)+(x+3)R\}+6R+2$

따라서 $(x^2+2x+3)f(x)+2$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫은 $(x^2+2x+3)Q(x)+(x+3)R$, 나머지는 $6R+2$이다.

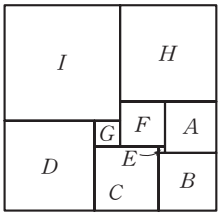
답 ⑤

## STEP 3 상위권 마스터 본문 17쪽

**00051**

TIP 두 정사각형 $A$, $B$의 한 변의 길이가 각각 $x$, $y$이다.

두 정사각형 $A$, $B$의 한 변의 길이가 각각 $x$, $y$이므로




정사각형 $E$의 한 변의 길이는

$y-x$

정사각형 $C$의 한 변의 길이는

$y+(y-x)=2y-x$

정사각형 $F$의 한 변의 길이는

$x-(y-x)=2x-y$

정사각형 $H$의 한 변의 길이는

$x+(2x-y)=3x-y$

따라서 직사각형의 세로의 길이는

$(3x-y)+x+y=4x$ …… ㉠

또, 정사각형 $G$의 한 변의 길이는

$(2y-x)+(y-x)-(2x-y)=4y-4x$

정사각형 $D$의 한 변의 길이는

$(4y-4x)+(2y-x)=6y-5x$

따라서 직사각형의 가로의 길이는

$(6y-5x)+(2y-x)+y=9y-6x$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 직사각형의 넓이는

$4x(9y-6x)=12x(3y-2x)$ 답 ⑤

**00052**

TIP $a$, $b$, $c$ 사이의 관계식을 구한다.

조건 (가)에서 $a=\frac{1}{a'}$, $b=\frac{1}{b'}$, $c=\frac{1}{c'}$이므로

$a'=\frac{1}{a}$, $b'=\frac{1}{b}$, $c'=\frac{1}{c}$

조건 (나)에서 직육면체 $A$의 대각선의 길이가 $\sqrt{13}$이므로

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{13}$ $\therefore a^2+b^2+c^2=13$ …… ㉠

조건 (다)에서 직육면체 $A$의 모든 모서리의 길이의 합이 20이므로

$4(a+b+c)=20$ $\therefore a+b+c=5$

이때 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$5^2=13+2(ab+bc+ca)$ ($\because$ ㉠)

$\therefore ab+bc+ca=6$ …… ㉡

또, 직육면체 $B$의 모든 모서리의 길이의 합이 12이므로

$4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=12$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$

$\frac{ab+bc+ca}{abc}=3$, $\frac{6}{abc}=3$ ($\because$ ㉡)

$\therefore abc=2$ …… ㉢

이때 $(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$에서

$6^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2\times2\times5$ ($\because$ ㉡, ㉢)

$\therefore a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=16$ …… ㉣

따라서 직육면체 $B$의 대각선의 길이는

$$\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{16}{2^2}}\ (\because ㉢, ㉣)$$
$$=\sqrt{4}=2\ (\because \text{(대각선의 길이)}>0)$$

답 ②

## 0053

TIP 네 삼각형 ABC, $L_2BM_2$, $PM_2M_1$, $N_1M_1C$는 모두 닮음이다.

두 사각형 $AL_1M_1N_1$, $AL_2M_2N_2$는 평행사변형이므로

$\overline{AL_1}=a$ ($a>0$)라 하면 $\overline{N_1M_1}=\overline{N_1C}=a$

$\overline{AL_1}\times\overline{BL_2}=1$이므로 $\overline{BL_2}=\frac{1}{a}=\overline{L_2M_2}$

또한, $\overline{L_1L_2}=x$라 하면 $\overline{PM_2}=\overline{PM_1}=x$

평행선의 성질에 의하여

$\angle A=\angle BL_2M_2=\angle M_2PM_1=\angle M_1N_1C$,

$\angle B=\angle PM_2M_1=\angle N_1M_1C$

따라서 네 삼각형 ABC, $L_2BM_2$, $PM_2M_1$, $N_1M_1C$는 모두 닮음이다.

네 삼각형 ABC, $L_2BM_2$, $PM_2M_1$, $N_1M_1C$의 넓이를 각각 $S$, $S_1$, $S_2$, $S_3$라 하면

(i) 두 삼각형 ABC, $L_2BM_2$의 닮음비는 $\overline{AB}:\overline{L_2B}$, 즉 $4:\frac{1}{a}$이고 넓이의 비는 $4^2:\left(\frac{1}{a}\right)^2$이므로

$S:S_1=16:\frac{1}{a^2}$, $16S_1=\frac{S}{a^2}$

$\therefore S_1=\frac{S}{16a^2}$

(ii) 두 삼각형 ABC, $PM_2M_1$의 닮음비는 $\overline{AB}:\overline{PM_2}$, 즉 $4:x$이고 넓이의 비는 $4^2:x^2$이므로

$S:S_2=16:x^2$, $16S_2=x^2S$

$\therefore S_2=\frac{x^2S}{16}$

(iii) 두 삼각형 ABC, $N_1M_1C$의 닮음비는 $\overline{AB}:\overline{N_1M_1}$, 즉 $4:a$이고 넓이의 비는 $4^2:a^2$이므로

$S:S_3=16:a^2$, $16S_3=a^2S$

$\therefore S_3=\frac{a^2S}{16}$

이때 $S=2(S_1+S_2+S_3)$이므로 (i), (ii), (iii)에서

$S=2\left(\frac{S}{16a^2}+\frac{x^2S}{16}+\frac{a^2S}{16}\right)$

$1=\frac{1}{8a^2}+\frac{x^2}{8}+\frac{a^2}{8}$, $a^2+\frac{1}{a^2}+x^2=8$

$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2+x^2=8$

그런데 $\overline{AB}=a+\frac{1}{a}+x=4$에서 $a+\frac{1}{a}=4-x$이므로 이를 위의 식에 대입하면

$(4-x)^2-2+x^2=8$, $x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=3$

이때 $\overline{PM_1}\le2$, 즉 $x\le2$이므로 $x=1$

$\therefore a+\frac{1}{a}=4-1=3$

$\therefore \overline{AL_1}^3+\overline{BL_2}^3=a^3+\frac{1}{a^3}$

$$=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right)$$
$$=3^3-3\times3=18$$

답 18

# 02 항등식과 나머지정리

## STEP 1 핵심기출 마스터

본문 19~22쪽

**0054** 주어진 등식의 좌변을 $x$에 대한 내림차순으로 정리하면
$(a+2)x^2-(a^2+b)x+2a^2+2b=0$
이 등식이 $x$에 대한 항등식이므로
$a+2=0,\ a^2+b=0,\ 2a^2+2b=0$
$\therefore a=-2,\ b=-4$
$\therefore a+b=-6$ 답 ①

다른풀이
$(a+2)x^2+(2-x)a^2+(2-x)b=0$의 양변에
$x=2$를 대입하면 $4(a+2)=0$ $\therefore a=-2$
$x=0$을 대입하면 $2\times(-2)^2+2b=0$ $\therefore b=-4$
$\therefore a+b=-6$

**0055** 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$4=-a$ $\therefore a=-4$
주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$3-5+4=2b$ $\therefore b=1$
주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$3+5+4=2c$ $\therefore c=6$
$\therefore a-b+c=-4-1+6=1$ 답 **1**

**0056** 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$1-a-1+b=0$, 즉 $a-b=0$ …… ㉠
주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면
$16+8a+2+b=0$, 즉 $8a+b=-18$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=-2$
이것을 주어진 등식에 대입하면
$x^4-2x^3+x-2=(x+1)(x-2)f(x)$
양변에 $x=1$을 대입하면
$1-2+1-2=-2f(1)$
$\therefore f(1)=1$ 답 ④

**0057** $\dfrac{x+ay-2b}{2x-y+1}=k$ ($k$는 상수)라 하면
$x+ay-2b=k(2x-y+1)$
$\therefore (1-2k)x+(a+k)y-2b-k=0$
이 등식이 $x,\ y$에 대한 항등식이므로
$1-2k=0,\ a+k=0,\ -2b-k=0$
$\therefore k=\dfrac{1}{2},\ a=-\dfrac{1}{2},\ b=-\dfrac{1}{4}$
$\therefore a+b=-\dfrac{3}{4}$ 답 $-\dfrac{3}{4}$

**0058** 이차방정식 $x^2+(k+1)x+(k-2)m+n=0$의 근이 1이므로
$1+(k+1)+(k-2)m+n=0$
$\therefore (m+1)k+(-2m+n+2)=0$
이 등식이 $k$에 대한 항등식이므로
$m+1=0,\ -2m+n+2=0$
$\therefore m=-1,\ n=-4$
$\therefore mn=4$ 답 **4**

**0059** 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$0=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$ …… ㉠
주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$32=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{10}$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면
$32=2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})$
$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=16$ 답 **16**

**0060** 주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면
$2^{12}-20=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{12}$ …… ㉠
주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$-20=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{12}$ …… ㉡
㉠−㉡을 하면
$2^{12}=2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11})$
$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}=2^{11}=2048$ 답 **2048**

**0061** $x^3+ax^2+bx+3$을 $x^2+1$로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ ($c$는 상수)라 하면
$x^3+ax^2+bx+3=(x^2+1)(x+c)$
$=x^3+cx^2+x+c$
이 등식이 $x$에 대한 항등식이므로
$a=c,\ b=1,\ 3=c$
따라서 $a=3,\ b=1,\ c=3$이므로
$10a+b=31$ 답 **31**

참고 $x^3+ax^2+bx+3$의 최고차항의 계수가 1이고, $x^2+1$의 최고차항의 계수가 1이므로 몫을 $x+c$ ($c$는 상수)로 놓을 수 있다.

**0062** $x^4+ax^2+bx-8$을 $(x+1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $x^2+cx+d$ ($c,\ d$는 상수)라 하면
$x^4+ax^2+bx-8=(x+1)(x+2)(x^2+cx+d)+x-8$
이 등식이 $x$에 대한 항등식이므로
양변에 $x=-1$을 대입하면
$1+a-b-8=-1-8$, 즉 $a-b=-2$ …… ㉠
양변에 $x=-2$를 대입하면
$16+4a-2b-8=-2-8$, 즉 $2a-b=-9$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-7,\ b=-5$
$\therefore a+b=-12$ 답 ①

**0063** $f(x)=x^3+ax^2+3x+b$라 하면 나머지정리에 의하여
$f(1)=6$, $f(2)=10$이므로
$1+a+3+b=6$, $8+4a+6+b=10$
$\therefore a+b=2$, $4a+b=-4$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-2$, $b=4$
$\therefore f(x)=x^3-2x^2+3x+4$
따라서 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는
$f(3)=27-18+9+4=22$ 답 ⑤

**0064** $f(x)=ax^7+bx^5+cx^3+dx+1$이라 하면 나머지정리에 의하여 $f(-1)=8$이므로
$-a-b-c-d+1=8$
$\therefore a+b+c+d=-7$
따라서 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는
$f(1)=a+b+c+d+1=-7+1=-6$ 답 $-6$

**0065** 나머지정리에 의하여
$f(9)=a\times10^4+b\times10^3+c\times10^2+d\times10+e=12321$
이때 $a$, $b$, $c$, $d$, $e$가 한 자리 자연수이므로
$a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=2$, $e=1$
$\therefore f(x)=(x+1)^4+2(x+1)^3+3(x+1)^2+2(x+1)+1$
따라서 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는
$f(-2)=1-2+3-2+1=1$ 답 1

**0066** 나머지정리에 의하여 $f(1)=3$, $f(-1)=7$
다항식 $(x^2-x-1)f(x)$를 $x^2-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ ($a$, $b$는 상수)라 하면
$(x^2-x-1)f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$
$=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$
이 식의 양변에 $x=1$, $x=-1$을 각각 대입하면
$-f(1)=a+b$, $f(-1)=-a+b$
$\therefore a+b=-3$, $-a+b=7$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-5$, $b=2$
따라서 구하는 나머지는 $-5x+2$이다. 답 $-5x+2$

**0067** 나머지정리에 의하여 $f(-1)=2$, $f(2)=-1$
$f(x)$를 $x^2-x-2$로 나누었을 때의 나머지를
$ax+b$ ($a$, $b$는 상수)라 하면
$f(x)=(x^2-x-2)Q(x)+ax+b$
$=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$
이 식의 양변에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면
$f(-1)=-a+b$, $f(2)=2a+b$
$\therefore -a+b=2$, $2a+b=-1$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-1$, $b=1$
$\therefore f(x)=(x+1)(x-2)Q(x)-x+1$
따라서 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는
$f(3)=4Q(3)-2$ 답 ②

**0068** 나머지정리에 의하여
다항식 $P(x)$를 $x-k$로 나누었을 때의 나머지는
$P(k)=k^3+k^2+k+1$
다항식 $P(x)$를 $x+k$로 나누었을 때의 나머지는
$P(-k)=-k^3+k^2-k+1$
이때 나머지의 합이 8이므로
$P(k)+P(-k)=k^3+k^2+k+1+(-k^3+k^2-k+1)$
$=2k^2+2=8$
$2k^2=6$ $\therefore k^2=3$
따라서 $P(x)$를 $x-k^2$, 즉 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는
$P(3)=3^3+3^2+3+1=40$ 답 40

**0069** $x^{47}+x^{23}+x^7+x$를 $x^3-x$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ ($a$, $b$, $c$는 상수)라 하면
$x^{47}+x^{23}+x^7+x=(x^3-x)Q(x)+ax^2+bx+c$
$=x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$
이 식의 양변에 $x=0$, $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면
$c=0$
$-4=a-b+c$ $\therefore a-b=-4$ …… ㉠
$4=a+b+c$ $\therefore a+b=4$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=0$, $b=4$
따라서 $R(x)=4x$이므로
$R(2)=8$ 답 8

**0070** $f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax^2+bx+c$ ($a$, $b$, $c$는 상수)라 하면
$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠
$f(x)$를 $x^2+1$로 나누었을 때의 나머지가 $x+1$이므로 ㉠에서 $ax^2+bx+c$를 $x^2+1$로 나누었을 때의 나머지가 $x+1$이다.
$\therefore ax^2+bx+c=a(x^2+1)+x+1$
이것을 ㉠에 대입하면
$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+a(x^2+1)+x+1$
한편, $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로
$f(1)=2a+2=4$
$\therefore a=1$
따라서 구하는 나머지는
$x^2+1+x+1=x^2+x+2$ 답 $x^2+x+2$

**071** $f(x)$를 $2x^2-5x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(2x^2-5x-3)Q(x)+x+7$

$=(2x+1)(x-3)Q(x)+x+7$ …… ㉠

이때 $f(2x+1)$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2\times1+1)=f(3)$

따라서 ㉠에서 구하는 나머지는

$f(3)=3+7=10$ 답 **10**

다른풀이

$f(x)$를 $2x^2-5x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(2x^2-5x-3)Q(x)+x+7$

$=(2x+1)(x-3)Q(x)+x+7$

양변에 $x$ 대신 $2x+1$을 대입하면

$f(2x+1)=(4x+3)(2x-2)Q(2x+1)+2x+8$

이때 $(4x+3)(2x-2)Q(2x+1)$은 $x-1$로 나누어떨어지므로 $f(2x+1)$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $2x+8$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지와 같다.

따라서 구하는 나머지는 $2\times1+8=10$

**072** $P(x)=(x^2-x-1)(ax+b)+2$ …… ㉠

$P(x+1)$을 $x^2-4$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x+1)=(x^2-4)Q(x)-3$

$=(x+2)(x-2)Q(x)-3$

이 식의 양변에 $x=-2$, $x=2$를 각각 대입하면

$P(-1)=-3$, $P(3)=-3$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$P(-1)=-a+b+2=-3$

$\therefore -a+b=-5$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$P(3)=5(3a+b)+2=-3$

$\therefore 3a+b=-1$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-4$

$\therefore 50a+b=50+(-4)=46$ 답 **46**

**073** $f(x)$를 $x^2-x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $2x+1$이므로

$f(x)=(x^2-x+1)Q(x)+2x+1$ …… ㉠

$Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 1이므로

$Q(x)=(x+1)Q'(x)+1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x^2-x+1)\{(x+1)Q'(x)+1\}+2x+1$

$=(x^3+1)Q'(x)+x^2+x+2$

따라서 $R(x)=x^2+x+2$이므로

$R(2)=4+2+2=8$ 답 ③

**074** $f(x)=2x^{10}+x^9+x-1$이라 하고 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 $R$라 하면

$f(x)=(x+1)Q(x)+R$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=R$ $\therefore R=-1$

$\therefore f(x)=(x+1)Q(x)-1$ …… ㉠

$Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(1)$이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2Q(1)-1$

$3=2Q(1)-1$ $\therefore Q(1)=2$ 답 ⑤

**075** $f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{2n}$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 $R$라 하면

$f(x)=(x-1)Q(x)+R$

양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=R$ $\therefore R=2n+1$

$\therefore f(x)=(x-1)Q(x)+2n+1$ …… ㉠

$Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(-1)$이므로

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=-2Q(-1)+2n+1$

$1=-2Q(-1)+2n+1$

$2Q(-1)=2n$ $\therefore Q(-1)=n$ 답 ②

**076** $79^{100}=(78+1)^{100}$에서 $(x+1)^{100}$을 $x$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R$라 하면

$(x+1)^{100}=xQ(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $R=1$

㉠의 양변에 $x=78$을 대입하면 $79^{100}=78Q(78)+1$

따라서 $79^{100}$을 78로 나누었을 때의 나머지는 1이다. 답 **1**

**077** $17^{23}=(18-1)^{23}$에서 $(x-1)^{23}$을 $x$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$, 나머지를 $R_1$이라 하면

$(x-1)^{23}=xQ_1(x)+R_1$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $R_1=-1$

㉠의 양변에 $x=18$을 대입하면

$17^{23}=18Q_1(18)-1$

$=18\{Q_1(18)-1\}+17$

따라서 $17^{23}$을 18로 나누었을 때의 나머지는 17이다.

$\therefore r_1=17$

한편, $3\times2^{101}=3\times2\times2^{100}=6\times(2^4)^{25}=6\times16^{25}$에서

$6x^{25}$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$, 나머지를 $R_2$라 하면

$6x^{25}=(x+1)Q_2(x)+R_2$ …… ㉡

㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $R_2=-6$

㉡의 양변에 $x=16$을 대입하면

$6\times16^{25}=17Q_2(16)-6$
$=17\{Q_2(16)-1\}+11$
따라서 $6\times16^{25}$, 즉 $3\times2^{101}$을 17로 나누었을 때의 나머지는 11이다.
$\therefore r_2=11$
$\therefore r_1+r_2=17+11=28$ 답 ④

**참고** 다항식의 나눗셈에서는 나머지가 음수일 수 있지만 자연수의 나눗셈에서는 나머지가 0 또는 양수이어야 한다.

**0078** $f(x)=2x^3+ax^2+bx+6$이라 하면 $f(x)$가 $x^2-1$, 즉 $(x+1)(x-1)$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여
$f(-1)=0$, $f(1)=0$
$f(-1)=0$에서 $-2+a-b+6=0$
$\therefore a-b=-4$ …… ㉠
$f(1)=0$에서 $2+a+b+6=0$
$\therefore a+b=-8$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=-2$
$\therefore ab=12$ 답 ④

**다른풀이**
$2x^3+ax^2+bx+6$을 $x^2-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면
$2x^3+ax^2+bx+6=(x^2-1)Q(x)$
$=(x+1)(x-1)Q(x)$
다음과 같이 조립제법을 이용하면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 2 | $a$ | $b$ | 6 |
| | | $-2$ | $-a+2$ | $a-b-2$ |
| 1 | 2 | $a-2$ | $-a+b+2$ | $a-b+4$ |
| | | 2 | $a$ | |
| | 2 | $a$ | $b+2$ | |

따라서 $a-b+4=0$, $b+2=0$이므로
$a=-6$, $b=-2$
$\therefore ab=12$

**0079** $f(x+2)$가 $x-1$로 나누어떨어지므로
$f(1+2)=f(3)=0$
$f(x-2)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로
$f(-1-2)=f(-3)=0$
$f(3)=0$에서 $27+3a+b=0$
$\therefore 3a+b=-27$ …… ㉠
$f(-3)=0$에서 $-27-3a+b=0$
$\therefore -3a+b=27$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-9$, $b=0$
$\therefore f(x)=x^3-9x$
따라서 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는
$f(-2)=-8+18=10$ 답 **10**

**0080** $f(x)+g(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지므로
$f(1)+g(1)=0$ …… ㉠
또한, $f(x)-g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 2이므로
$f(1)-g(1)=2$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $f(1)=1$, $g(1)=-1$
한편, 다항식 $h(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지려면 $h(1)=0$이어야 한다.
ㄱ. $h(x)=x+f(x)$라 하면
$h(1)=1+f(1)=1+1=2$
ㄴ. $h(x)=x+g(x)$라 하면
$h(1)=1+g(1)=1+(-1)=0$
ㄷ. $h(x)=f(x)g(x)+1$이라 하면
$h(1)=f(1)g(1)+1=-1+1=0$
따라서 $x-1$로 나누어떨어지는 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

**0081** $f(x)=x^3+ax^2+bx-1$이라 하면 $f(x)$가 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로 $f(-1)=0$
$-1+a-b-1=0$, $a-b=2$
$\therefore b=a-2$ …… ㉠
$\therefore f(x)=x^3+ax^2+(a-2)x-1$
이때 다음과 같이 조립제법을 이용하면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 1 | $a$ | $a-2$ | $-1$ |
| | | $-1$ | $-a+1$ | 1 |
| | 1 | $a-1$ | $-1$ | 0 |

$\therefore f(x)=(x+1)\{x^2+(a-1)x-1\}$
$f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면
$Q(x)=x^2+(a-1)x-1$
$Q(x)$도 $x+1$로 나누어떨어지므로 $Q(-1)=0$
$1-a=0$ $\therefore a=1$
$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-1$
$\therefore a+b=0$ 답 **0**

**Lecture**
다항식 $f(x)$가 $(x+\alpha)^2$으로 나누어떨어지면
$f(x)=(x+\alpha)^2Q(x)=(x+\alpha)\{(x+\alpha)Q(x)\}$
이므로 $f(x)$를 $x+\alpha$로 나누었을 때의 몫인 $(x+\alpha)Q(x)$는 다시 $x+\alpha$로 나누어떨어진다.

**0082** $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a$, $b$, $c$는 상수, $a\neq0$)라 하면
$f(2-x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 3이므로
$f(2-2)=f(0)=3$ $\therefore c=3$
$x\{f(x)+x\}$가 $x^2-1$, 즉 $(x+1)(x-1)$로 나누어떨어지므로
$-\{f(-1)-1\}=0$, $f(1)+1=0$

즉, $f(-1)=1$, $f(1)=-1$이므로
$a-b+3=1$, $a+b+3=-1$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-3$, $b=-1$
따라서 $f(x)=-3x^2-x+3$이므로
$f(3)=-27-3+3=-27$ 답 ④

## STEP 2 실전 마스터 본문 23~26쪽

**0083** $f\left(x+\frac{1}{x}+1\right)=x^3+2x^2-3x-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}$
$=x^3+\frac{1}{x^3}+2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$
$x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면
$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=t^2-2$
$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=t^3-3t$
이므로
$f(t+1)=t^3-3t+2(t^2-2)-3t$
$=t^3+2t^2-6t-4$
$t+1=y$라 하면 $t=y-1$이므로
$f(y)=(y-1)^3+2(y-1)^2-6(y-1)-4$
$=y^3-y^2-7y+3$
$\therefore f(x)=x^3-x^2-7x+3$
따라서 $a=-1$, $b=-7$, $c=3$이므로
$abc=21$ 답 **21**

**0084** $x+y+z=3$ …… ㉠
$3x-3y-z=5$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면 $4x-2y=8$
$\therefore y=2x-4$ …… ㉢
㉠×3+㉡을 하면 $6x+2z=14$
$\therefore z=-3x+7$ …… ㉣
㉢, ㉣을 $axy+byz+czx=28$에 대입하면
$ax(2x-4)+b(2x-4)(-3x+7)+c(-3x+7)x=28$
$\therefore (2a-6b-3c)x^2+(-4a+26b+7c)x-28b=28$
이 등식이 $x$에 대한 항등식이므로
$2a-6b-3c=0$, $-4a+26b+7c=0$, $-28b=28$
$\therefore a=18$, $b=-1$, $c=14$
$\therefore a+b+c=31$ 답 ①

**0085** $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a$, $b$, $c$는 상수, $a\neq0$)라 하면
$f(x^2)=ax^4+bx^2+c$
$f(x)f(-x)=(ax^2+bx+c)(ax^2-bx+c)$
$=(ax^2+c)^2-(bx)^2$
$=a^2x^4+(2ac-b^2)x^2+c^2$
$f(x^2)=f(x)f(-x)$이므로
$ax^4+bx^2+c=a^2x^4+(2ac-b^2)x^2+c^2$
$\therefore a=a^2$, $b=2ac-b^2$, $c=c^2$
$a=a^2$에서 $a\neq0$이므로 $a=1$
$c=c^2$에서 $c=0$ 또는 $c=1$
(i) $c=0$일 때,
$b=2ac-b^2$에서 $b(b+1)=0$
$\therefore b=0$ 또는 $b=-1$
(ii) $c=1$일 때,
$b=2ac-b^2$에서 $b^2+b-2=0$, $(b+2)(b-1)=0$
$\therefore b=-2$ 또는 $b=1$
(i), (ii)에서 구하는 이차식 $f(x)$의 개수는 4이다. 답 **4**

**0086** ㄱ. 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$2\times(-1)^{10}-1=a_0$, 즉 $a_0=1$
주어진 등식의 우변에서 $x^{10}$의 계수는 $a_{10}$이므로
$a_{10}=2$
$\therefore a_0+a_{10}=1+2=3$
ㄴ. 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$-1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$ …… ㉠
주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면
$2^{11}-1=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{10}$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면
$2^{11}-2=2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})$
$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=2^{10}-1$
이때 $a_0=1$이므로
$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=2^{10}-2$
㉠-㉡을 하면
$-1-(2^{11}-1)=2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)$
$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=-2^{10}$
즉, $2^{10}-2>-2^{10}$이므로
$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}>a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$
ㄷ. $a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=2^{10}-1=1023$이므로 3의 배수이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

**0087** $x^2f(x)+f(2-x)=2x-x^4$
이 등식이 $x$에 대한 항등식이므로 양변에 $x=-1$을 대입하면
$f(-1)+f(3)=-2-1=-3$ …… ㉠

양변에 $x=3$을 대입하면

$9f(3)+f(-1)=6-81=-75$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$f(-1)=6,\ f(3)=-9$

이때 $f(2x+1)-f(2-x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $x=-1$을 대입한 것과 같으므로

$f(-1)-f(3)=6-(-9)=15$ 답 **15**

**0088** $f_n(x)=(ax+b)Q_n(x)+R_n$이므로

$ax^3+b=(ax+b)Q_3(x)+R_3$ …… ㉠

$ax^4+b=(ax+b)Q_4(x)+R_4$ …… ㉡

$x=-\frac{b}{a}$를 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$R_3=-\frac{b^3}{a^2}+b,\ R_4=\frac{b^4}{a^3}+b$ …… ㉢

$R_3=R_4$이므로 $-\frac{b^3}{a^2}+b=\frac{b^4}{a^3}+b$

$-\frac{b^3}{a^2}=\frac{b^4}{a^3},\ -a^3b^3=a^2b^4$

$a^2b^4+a^3b^3=0,\ a^2b^3(a+b)=0$

$\therefore b=-a\ (\because ab\neq0)$

이것을 ㉢에 대입하면 $R_3=R_4=0$

즉, ㉠에서 $ax^3-a=(ax-a)Q_3(x)$이므로

$a(x^3-1)=a(x-1)Q_3(x)$

$\therefore Q_3(2)=\frac{2^3-1}{2-1}=7$

㉡에서 $ax^4-a=(ax-a)Q_4(x)$이므로

$a(x^4-1)=a(x-1)Q_4(x)$

$\therefore Q_4(2)=\frac{2^4-1}{2-1}=15$

$\therefore Q_3(2)+Q_4(2)=7+15=22$ 답 **22**

**0089** $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 $R_1$이라 하면

$f(x)=(x-1)Q_1(x)+R_1$ …… ㉠

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 $R_2$라 하면

$f(x)=(x-2)Q_2(x)+R_2$ …… ㉡

㉡의 양변에 $x=2$를 대입하면 조건 ㈎에서

$f(2)=R_2=Q_2(1)$

$f(x)=(x-2)Q_2(x)+Q_2(1)$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=-Q_2(1)+Q_2(1)=0$

이때 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=R_1=0$

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이므로

$Q_1(x)=x+a$ ($a$는 상수)라 하면 $f(x)=(x-1)(x+a)$

$Q_1(1)=1+a,\ f(2)=2+a=Q_2(1)$이므로 조건 ㈏에서

$Q_1(1)+Q_2(1)=(1+a)+(2+a)$

$=2a+3=6$

$\therefore a=\frac{3}{2},\ f(x)=(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)$

$\therefore f(3)=(3-1)\left(3+\frac{3}{2}\right)=9$ 답 ③

**0090** $f(x)$를 $(x+1)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$f(x)=(x+1)^3Q_1(x)+x^2+4x+2$

$=(x+1)^3Q_1(x)+(x+1)^2+2x+1$

$=(x+1)^2\{(x+1)Q_1(x)+1\}+2x+1$

따라서 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $2x+1$이다.

또, $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$f(x)=(x-2)^2Q_2(x)+4x+6$

$\therefore f(2)=14$ …… ㉠

한편, $f(x)$를 $(x+1)^2(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_3(x)$, 나머지를 $ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수)라 하면

$f(x)=(x+1)^2(x-2)Q_3(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉡

$f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $2x+1$이므로

㉡에서 $ax^2+bx+c=a(x+1)^2+2x+1$

$\therefore f(x)=(x+1)^2(x-2)Q_3(x)+a(x+1)^2+2x+1$

$\therefore f(2)=9a+5$ …… ㉢

㉠, ㉢에서 $9a+5=14$ $\therefore a=1$

따라서 구하는 나머지는

$(x+1)^2+2x+1=x^2+4x+2$ 답 $x^2+4x+2$

**0091** $f(x)$는 삼차다항식이므로 조건 ㈏에서 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $ax+b$ ($a,\ b$는 상수)라 하면 나머지도 $ax+b$이다.

$\therefore f(x)=(x-1)^2(ax+b)+ax+b$ …… ㉠

조건 ㈎에서 $f(1)=2$이므로

$f(1)=a+b=2$ $\therefore b=2-a$

이것을 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x-1)^2\{ax+(2-a)\}+ax+(2-a)$

$=(x-1)^2\{a(x-1)+2\}+a(x-1)+2$

$=a(x-1)^3+2(x-1)^2+a(x-1)+2$

따라서 $f(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 나머지는

$R(x)=2(x-1)^2+a(x-1)+2$

이때 $R(0)=R(3)$이므로

$2-a+2=8+2a+2,\ -3a=6$

$\therefore a=-2$

즉, $R(x)=2(x-1)^2-2(x-1)+2$이므로

$R(5)=2\times4^2-2\times4+2=26$ 답 **26**

**0092** $\{f(x)\}^3=4x^2f(x)+8x^2+6x+1$ …… ㉠

ㄱ. ㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $\{f(0)\}^3=1$이므로

$f(0)=1$

ㄴ. $f(x)$의 차수를 $n$이라 하면 ㉠의 좌변의 차수는 $3n$, 우변의 차수는 $n+2$이므로 $3n=n+2$에서 $n=1$
이때 $f(x)=ax+b$ ($a$, $b$는 상수, $a>0$)라 하면 좌변의 최고차항의 계수는 $a^3$, 우변의 최고차항의 계수는 $4a$이므로
$a^3=4a$, $a(a+2)(a-2)=0$
$\therefore a=2$ ($\because a>0$)
즉, $f(x)$의 최고차항의 계수는 2이다.

ㄷ. ㄱ과 ㄴ에서 $f(x)=2x+1$이므로 $\{f(x)\}^3$을 $x^2-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $cx+d$ ($c$, $d$는 상수)라 하면
$\{f(x)\}^3=(x^2-1)Q(x)+cx+d$
양변에 $x=1$, $x=-1$을 각각 대입하면
$\{f(1)\}^3=c+d$ $\therefore c+d=27$
$\{f(-1)\}^3=-c+d$ $\therefore -c+d=-1$
두 식을 연립하여 풀면 $c=14$, $d=13$
즉, $\{f(x)\}^3$을 $x^2-1$로 나누었을 때의 나머지는 $14x+13$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

**093** $(x-1)P(x-2)=(x-7)P(x)$에서
양변에 $x=1$, $x=7$을 각각 대입하면
$P(1)=0$, $P(5)=0$
$P(x)$를 $x^2+3x-2$로 나누었을 때의 몫을
$ax+b$ ($a$, $b$는 상수, $a\neq0$)라 하면
$P(x)=(x^2+3x-2)(ax+b)-2x+10$
이때 $P(1)=0$에서 $2(a+b)+8=0$
$\therefore a+b=-4$ …… ㉠
$P(5)=0$에서 $38(5a+b)=0$
$\therefore 5a+b=0$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-5$
따라서 $P(x)=(x^2+3x-2)(x-5)-2x+10$이므로
$P(-2)=42$ 답 ②

**094** 조건 (가)에서
$P(x)=(x^2-1)A(x)-x+4$ …… ㉠
조건 (나)에서
$P(x)=(x^3-x)B(x)+x^2-x+3$ …… ㉡
조건 (다)에서 $B(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면
$B(x)=(x+1)Q(x)+1$ …… ㉢
㉠, ㉡에서
$(x^2-1)A(x)-x+4=(x^3-x)B(x)+x^2-x+3$
$(x^2-1)A(x)=(x^3-x)B(x)+x^2-1$
$\therefore (x-1)(x+1)A(x)$
$=x(x-1)(x+1)B(x)+(x-1)(x+1)$
$x\neq\pm1$일 때에도 등식이 성립해야 하므로
$A(x)=xB(x)+1$
이 식에 ㉢을 대입하면
$A(x)=x\{(x+1)Q(x)+1\}+1$
$=x(x+1)Q(x)+x+1$
$=(x^2+x)Q(x)+x+1$
따라서 $A(x)$를 $x^2+x$로 나누었을 때의 나머지는 $x+1$이다.
답 $x+1$

**095** $x^n(x^2+ax+b)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면
$x^n(x^2+ax+b)=(x-2)^2Q(x)+2^n(x-2)$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면
$2^n(4+2a+b)=0$
$\therefore b=-4-2a$ ($\because 2^n\neq0$) …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$x^n(x^2+ax-4-2a)=(x-2)^2Q(x)+2^n(x-2)$
$x^n(x-2)(x+a+2)=(x-2)^2Q(x)+2^n(x-2)$
$\therefore x^n(x+a+2)=(x-2)Q(x)+2^n$ …… ㉢
㉢의 양변에 $x=2$를 대입하면
$2^n(4+a)=2^n$, $4+a=1$ $\therefore a=-3$
$a=-3$을 ㉡에 대입하면 $b=2$
$\therefore ab=(-3)\times2=-6$ 답 $-6$

**096** 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면
$f(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+R(x)$ …… ㉠
ㄱ. ㉠은 $x$에 대한 항등식이므로 $x=a$를 대입하면
$f(a)=R(a)$ $\therefore f(a)-R(a)=0$

ㄴ. $R(x)=x$라 하면
$f(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+x$이므로
$f(a)-R(b)=a-b$
$f(b)-R(a)=b-a$
이때 $a\neq b$이므로
$f(a)-R(b)\neq f(b)-R(a)$

ㄷ. $R(x)=px+q$ ($p$, $q$는 상수)라 하면
$f(a)=pa+q$, $f(b)=pb+q$에서
$af(b)-bf(a)=abp+aq-(abp+bq)$
$=(a-b)q$
이때 $R(0)=q$이므로
$af(b)-bf(a)=(a-b)R(0)$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

**097** $2^n=x$라 하면 $8^{n+1}=8x^3$이므로 $8x^3$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R$라 하면
$8x^3=(x-1)Q(x)+R$
양변에 $x=1$을 대입하면 $R=8$
$\therefore 8^{n+1}=(2^n-1)Q(2^n)+8$

이때 $2^n-1 \le 8$이면 $8^{n+1}$을 $2^n-1$로 나누었을 때의 나머지는 8을 $2^n-1$로 나누었을 때의 나머지와 같다. 즉,

(i) $n=1$이면 $2^1-1=1$이므로
8을 1로 나누었을 때의 나머지는 $r_1=0$

(ii) $n=2$이면 $2^2-1=3$이므로
8을 3으로 나누었을 때의 나머지는 $r_2=2$

(iii) $n=3$이면 $2^3-1=7$이므로
8을 7로 나누었을 때의 나머지는 $r_3=1$

(iv) $n \ge 4$이면 $2^n-1>8$이므로
$8^{n+1}$을 $2^n-1$로 나누었을 때의 나머지는 8이다.

(i)~(iv)에서
$r_1+r_2+r_3+\cdots+r_{10}=0+2+1+8+8+\cdots+8$
$=3+8\times 7=59$ 답 **59**

**0098** $f(x)=2x^2-4x+3$이라 하면 $f(x)$를 $x-a$, $x-b$로 각각 나누었을 때의 나머지가 모두 2이므로
$f(a)=f(b)=2$, 즉 $f(a)-2=f(b)-2=0$
에서 $f(x)-2=2(x-a)(x-b)$
$\therefore f(x)=2(x-a)(x-b)+2$
$=2x^2-2(a+b)x+2ab+2$
즉, $2x^2-4x+3=2x^2-2(a+b)x+2ab+2$에서
$-2(a+b)=-4$, $2ab+2=3$
$\therefore a+b=2$, $ab=\frac{1}{2}$
$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3$
따라서 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는
$f(3)=18-12+3=9$ 답 ④

**0099** 조건 (가), (나)에서 $A(x)=x(x-1)(2x+k)$, $B(x)=(x+1)(ax+3)$ $(a\neq 0)$으로 놓을 수 있다.
이때 $f(x)$와 $g(x)$는 이차식을 공통인수로 가지므로
$a=-3$, $k=2$
$\therefore A(x)=x(x-1)(2x+2)$
$=2x(x-1)(x+1)$
$B(x)=(x+1)(-3x+3)$
$=-3(x+1)(x-1)$
$\therefore A(5)\times\frac{1}{B(3)}=240\times\left(-\frac{1}{24}\right)=-10$ 답 **−10**

**Lecture**
$f(x)$와 $g(x)$는 이차식을 공통인수로 가지므로 $A(x)$와 $B(x)$도 이차식을 공통인수로 갖는다.
즉, $B(x)$의 인수 $x+1$을 $A(x)$도 인수로 가져야 하므로
$A(-1)=(-1)\times(-2)\times(-2+k)=0$에서 $k=2$이다.
또한, $A(x)$의 인수 $x-1$을 $B(x)$도 인수로 가져야 하므로
$B(1)=2(a+3)=0$에서 $a=-3$이다.

**0100** $x^{10}$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 $R$라 하면
$x^{10}=(x-2)(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_9x^9)+R$ ····· ㉠
㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면
$2^{10}=R$ $\therefore R=1024$
$\therefore x^{10}=(x-2)(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_9x^9)+1024$
····· ㉡
㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면
$1=-(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9)+1024$
$\therefore a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9=1023$ ····· ㉢
㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$1=-3(a_0-a_1+a_2-\cdots-a_9)+1024$
$\therefore a_0-a_1+a_2-\cdots-a_9=341$ ····· ㉣
㉢+㉣을 하면
$2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8)=1364$
$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6+a_8=682$
㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면
$0=-2a_0+1024$ $\therefore a_0=512$
$\therefore a_2+a_4+a_6+a_8=(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8)-a_0$
$=682-512=170$ 답 **170**

**0101** $2x^{20}-x^2+4$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$를
$Q(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{19}x^{19}$
$(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{19}$는 상수),
나머지를 $R$라 하면
$2x^{20}-x^2+4=(x-2)(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{19}x^{19})+R$
····· ㉠
㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $R=2^{21}$
$\therefore 2x^{20}-x^2+4=(x-2)(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{19}x^{19})+2^{21}$
····· ㉡
㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면
$5=-(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{19})+2^{21}$
$\therefore a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{19}=2^{21}-5$
따라서 $Q(x)$의 모든 문자의 계수와 상수항의 합은 $2^{21}-5$이다.
답 ②

**0102** $f(x)+g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 3이므로
$f(2)+g(2)=3$
$\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 9이므로
$\{f(2)\}^3+\{g(2)\}^3=9$
$f(x)g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 $f(2)g(2)$이므로
$\{f(2)\}^3+\{g(2)\}^3$
$=\{f(2)+g(2)\}^3-3f(2)g(2)\{f(2)+g(2)\}$
에서 $9=3^3-3f(2)g(2)\times 3$
$\therefore f(2)g(2)=2$ 답 **2**

**0103** $x^{30}-1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ ($a$, $b$는 상수)라 하면

$x^{30}-1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$

$\therefore (x-1)(x^{29}+x^{28}+x^{27}+\cdots+x^2+x+1)$

$=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ ····· ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a+b$ $\therefore b=-a$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(x-1)(x^{29}+x^{28}+x^{27}+\cdots+x^2+x+1)$

$=(x-1)^2Q(x)+ax-a$

$=(x-1)^2Q(x)+a(x-1)$

$=(x-1)\{(x-1)Q(x)+a\}$

$\therefore x^{29}+x^{28}+x^{27}+\cdots+x^2+x+1=(x-1)Q(x)+a$ ····· ㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{30개}=a$ $\therefore a=30$

$a=30$을 ㉡에 대입하면 $b=-30$

따라서 $R(x)=30x-30$이므로

$R(20)=30\times20-30=570$ 답 ④

**0104** $f(x)$를 $x^2-x$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ ($a$, $b$는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-x)Q(x)+ax+b$

$=x(x-1)Q(x)+ax+b$ ····· ㉠

$f(x)=f(1-x)$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=f(1)=2$

㉠의 양변에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면

$f(0)=b$, $f(1)=a+b$

$\therefore b=2$, $a+b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=2$

따라서 구하는 나머지는 2이다. 답 2

**0105** $P(1)=P(-2)=P(3)=k$라 하면

$P(1)-k=P(-2)-k=P(3)-k=0$

이므로 $P(x)-k$는 $x-1$, $x+2$, $x-3$을 인수로 갖는다.

이때 $P(x)$는 $x^3$의 계수가 1인 삼차식이므로

$P(x)-k=(x-1)(x+2)(x-3)$

$\therefore P(x)=(x-1)(x+2)(x-3)+k$

한편, $P(x)$는 $x-2$로 나누어떨어지므로

$P(2)=1\times4\times(-1)+k=0$

$\therefore k=4$

$\therefore P(x)=(x-1)(x+2)(x-3)+4$

따라서 $P(x)$를 $x$로 나누었을 때의 나머지는

$P(0)=(-1)\times2\times(-3)+4=10$ 답 ④

## STEP 3 상위권 마스터 본문 27쪽

**0106**

TIP 반복되는 다항식의 나눗셈을 하나의 식으로 나타낸다.

$x^{100}+1$

$=(x-1)Q_0(x)+a_0$

$=(x-1)\{(x-1)Q_1(x)+a_1\}+a_0$

$=(x-1)^2Q_1(x)+a_1(x-1)+a_0$

$=(x-1)^2\{(x-1)Q_2(x)+a_2\}+a_1(x-1)+a_0$

$=(x-1)^3Q_2(x)+a_2(x-1)^2+a_1(x-1)+a_0$

$\vdots$

$=a_{100}(x-1)^{100}+a_{99}(x-1)^{99}+\cdots+a_1(x-1)+a_0$ ····· ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^{100}+1=a_{100}+a_{99}+a_{98}+\cdots+a_2+a_1+a_0$ ····· ㉡

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$1=a_{100}-a_{99}+a_{98}-a_{97}+\cdots+a_2-a_1+a_0$ ····· ㉢

㉡+㉢을 하면

$2^{100}+2=2(a_{100}+a_{98}+a_{96}+\cdots+a_2+a_0)$

$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{98}+a_{100}=2^{99}+1$ 답 ④

**0107**

TIP 주어진 식의 양변의 최고차항의 계수를 비교해 보면 $f(x)$의 차수를 알 수 있다.

$(x+5)f(3x)=27xf(x+2)$ ····· ㉠

$f(x)$를 $n$차다항식이라 하면 최고차항의 계수가 2이므로

$f(x)=2x^n+ax^{n-1}+\cdots$ ($a$는 상수)

라 할 수 있다.

이때

$f(3x)=2\times(3x)^n+a\times(3x)^{n-1}+\cdots$

$=2\times3^nx^n+a\times3^{n-1}x^{n-1}+\cdots$

$f(x+2)=2(x+2)^n+a(x+2)^{n-1}+\cdots$

$=2x^n+\cdots$

㉠에서 좌변의 최고차항은 $x\times2\times3^nx^n$, 우변의 최고차항은 $27x\times2x^n$이므로

$2\times3^n=27\times2$

즉, $3^n=27$에서 $n=3$이므로 $f(x)$는 삼차식이다.

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$5f(0)=0$ $\therefore f(0)=0$ ····· ㉡

㉠의 양변에 $x=-5$를 대입하면

$0=27\times(-5)\times f(-3)$ $\therefore f(-3)=0$ ····· ㉢

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$3f(-6)=27\times(-2)\times f(0)=0$

$\therefore f(-6)=0$ ····· ㉣

㉡, ㉢, ㉣에서 $f(x)$는 $x$, $x+3$, $x+6$을 인수로 갖는다.

$\therefore f(x)=2x(x+3)(x+6)$

따라서 $f(x)$를 $x^2+3x=x(x+3)$으로 나누었을 때의 몫은 $2x+12$이다. 답 $2x+12$

## 0108

TIP 두 조건 (가), (나)에서 $g(x)$의 차수를 구한다.

조건 (가)에서 $f(x)$는 이차식이므로 조건 (나)에서 $P(x)$를 $f(x)$로 나누었을 때의 나머지인 $g(x)$는 일차식이고, 조건 (다)에서 $P(x)$를 $g(x)$로 나누었을 때의 나머지인 $f(x)-x^2$은 상수이다.

즉, $f(x)-x^2=a$ ($a$는 상수)라 하면

$f(x)=x^2+a$

조건 (나)에서 $P(x)$를 $f(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$2x^3-4x^2+3x-6=(x^2+a)Q_1(x)+g(x)$

이때 $2x^3-4x^2+3x-6$을 $x^2+a$로 직접 나누어 보면

$$\begin{array}{r} 2x-4 \\ x^2+a \,\overline{)\, 2x^3-4x^2+3x-6} \\ \underline{2x^3\qquad +2ax} \\ -4x^2+(3-2a)x-6 \\ \underline{-4x^2\qquad\qquad -4a} \\ (3-2a)x-6+4a \end{array}$$

$2x^3-4x^2+3x-6=(x^2+a)(2x-4)+(3-2a)x-6+4a$

$\therefore g(x)=(3-2a)x-6+4a$

$=(3-2a)(x-2)$

조건 (다)에서 $P(x)$를 $g(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$2x^3-4x^2+3x-6=g(x)Q_2(x)+f(x)-x^2$

$=(3-2a)(x-2)Q_2(x)+a$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$16-16+6-6=a \qquad \therefore a=0$

따라서 $f(x)=x^2$, $g(x)=3(x-2)$이므로

$f(1)+g(1)=1+(-3)=-2$ 답 $-2$

## 0109

TIP $f(x)+g(x)=-h(x)$임을 이용한다.

$f(x)+g(x)=(2x^2+x)+(x^2-3x-1)$

$=3x^2-2x-1$

$=-h(x)$

이므로 등식

$\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3+\{h(x)\}^3=(\underbrace{3x^2-2x-1}_{=-h(x)})Q(x)$

의 좌변을 정리하면

$\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3+\{h(x)\}^3$

$=\{f(x)+g(x)\}^3-3f(x)g(x)\{f(x)+g(x)\}+\{h(x)\}^3$

$=\{-h(x)\}^3+3f(x)g(x)h(x)+\{h(x)\}^3$

$=3f(x)g(x)h(x)$

즉, $3f(x)g(x)h(x)=-h(x)Q(x)$이므로

$Q(x)=-3f(x)g(x)$

$=-3(2x^2+x)(x^2-3x-1)$

따라서 $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$Q(1)=(-3)\times 3\times(-3)=27$ 답 ③

# 03 인수분해

## STEP 1 핵심기출 마스터

본문 29~31쪽

**0110** $a^4+a^2b^2-b^2c^2-c^4$
$=(a^4-c^4)+b^2(a^2-c^2)$
$=(a^2+c^2)(a^2-c^2)+b^2(a^2-c^2)$
$=(a^2-c^2)(a^2+b^2+c^2)$
$=(a+c)(a-c)(a^2+b^2+c^2)$
따라서 인수인 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ②

**0111** $64x^3-27y^6=(4x)^3-(3y^2)^3$
$=(4x-3y^2)\{(4x)^2+4x\times3y^2+(3y^2)^2\}$
$=(4x-3y^2)(16x^2+12xy^2+9y^4)$
따라서 $64x^3-27y^6$의 인수는 $4x-3y^2$, $16x^2+12xy^2+9y^4$이므로
$p=12$, $q=9$
$\therefore p+q=21$ 답 ⑤

**0112** $x^2-x=t$로 놓으면
$(x^2-x)^2+2x^2-2x-15=(x^2-x)^2+2(x^2-x)-15$
$=t^2+2t-15$
$=(t+5)(t-3)$
$=(x^2-x+5)(x^2-x-3)$
따라서 $a=-1$, $b=5$, $c=-3$ 또는 $a=-1$, $b=-3$, $c=5$이므로
$a+b+c=1$ 답 ④

**0113** $(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)+k$
$=\{(x-1)(x+4)\}\{(x+1)(x+2)\}+k$
$=(x^2+3x-4)(x^2+3x+2)+k$
이때 $x^2+3x=t$로 놓으면
$(x^2+3x-4)(x^2+3x+2)+k$
$=(t-4)(t+2)+k$
$=t^2-2t-8+k$ …… ㉠
주어진 식이 $x$에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해되려면 ㉠이 $t$에 대한 완전제곱식으로 인수분해되어야 하므로
$-8+k=1$ $\therefore k=9$ 답 ④

**0114** $(x^2-3x+2)(x^2-7x+12)-8$
$=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-8$
$=\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}-8$
$=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)-8$
이때 $x^2-5x=t$로 놓으면
$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)-8=(t+4)(t+6)-8$
$=t^2+10t+16$
$=(t+2)(t+8)$
$=(x^2-5x+2)(x^2-5x+8)$
(i) $f(x)=x^2-5x+2$, $g(x)=x^2-5x+8$일 때,
$f(0)=2$, $g(1)=4$이므로
$f(0)+g(1)=6$
(ii) $f(x)=x^2-5x+8$, $g(x)=x^2-5x+2$일 때,
$f(0)=8$, $g(1)=-2$이므로
$f(0)+g(1)=6$
(i), (ii)에서 $f(0)+g(1)=6$ 답 ③

**0115** $x^4+5x^2y^2+9y^4=x^4+6x^2y^2+9y^4-x^2y^2$
$=(x^2+3y^2)^2-(xy)^2$
$=(x^2+xy+3y^2)(x^2-xy+3y^2)$
따라서 $a=1$, $b=3$ 또는 $a=-1$, $b=3$이므로
$a^2+b^2=10$ 답 ⑤

**0116** $x-1=X$로 놓으면
$(x-1)^4-20(x-1)^2+4$
$=X^4-20X^2+4$
$=(X^4-4X^2+4)-16X^2$
$=(X^2-2)^2-(4X)^2$
$=(X^2-4X-2)(X^2+4X-2)$
$=\{(x-1)^2-4(x-1)-2\}\{(x-1)^2+4(x-1)-2\}$
$=(x^2-6x+3)(x^2+2x-5)$
따라서 $a=-6$, $b=3$, $c=2$이므로
$a+b+c=-1$ 답 ③

**0117** $z$에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2-y^2-zx+yz+2y-z-1$
$=(y-x-1)z+x^2-y^2+2y-1$
$=(y-x-1)z+x^2-(y-1)^2$
$=-(x-y+1)z+(x+y-1)(x-y+1)$
$=(x-y+1)(x+y-z-1)$
따라서 $a=-1$, $b=-1$이므로
$ab=1$ 답 ①

**0118** $x$에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2+xy-6y^2+ax+11y-3$
$=x^2+(y+a)x-6y^2+11y-3$
$=x^2+(y+a)x-(3y-1)(2y-3)$
주어진 다항식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면
$(3y-1)-(2y-3)=y+a$
$\therefore a=2$ 답 ④

**0119** $a$에 대하여 내림차순으로 정리하면

$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

$=a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=(a-b)(b-c)(a-c)$

따라서 인수가 아닌 것은 ③ $a+b$이다. 답 ③

참고 $b$ 또는 $c$에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해해도 그 결과는 같다.

**0120** $[a, b, c]+[b, c, a]+[c, a, b]$

$=a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

$a$에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

$=ab^2-ac^2+bc^2-ba^2+ca^2-cb^2$

$=(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc^2-b^2c$

$=(c-b)a^2-(c+b)(c-b)a+bc(c-b)$

$=(c-b)\{a^2-(c+b)a+bc\}$

$=(c-b)(a-b)(a-c)$

$=(a-b)(b-c)(c-a)$ 답 $(a-b)(b-c)(c-a)$

**0121** $z$에 대하여 내림차순으로 정리하면

$xyz+x^2y-xy+x+z-1$

$=(xy+1)z+x^2y-xy+x-1$

$=(xy+1)z+xy(x-1)+(x-1)$

$=(xy+1)z+(x-1)(xy+1)$

$=(xy+1)(z+x-1)$

이때 $x+y+z=1$이므로 $z+x=1-y$

$\therefore (xy+1)(z+x-1)=(xy+1)(1-y-1)$

$=-y(xy+1)$ 답 ④

다른풀이

$x+y+z=1$에서 $z=1-x-y$이므로

$xyz+x^2y-xy+x+z-1$

$=xy(1-x-y)+x^2y-xy+x+1-x-y-1$

$=xy-x^2y-xy^2+x^2y-xy-y$

$=-xy^2-y=-y(xy+1)$

**0122** $f(x)=x^3+3x^2+8x+6$이라 하면

$f(-1)=-1+3-8+6=0$

이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 1 | 3 | 8 | 6 |
| | | $-1$ | $-2$ | $-6$ |
| | 1 | 2 | 6 | 0 |

$\therefore x^3+3x^2+8x+6=(x+1)(x^2+2x+6)$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=6$이므로

$a+b+c=9$ 답 ⑤

**0123** $f(x)=x^3+x^2-5x+3$이라 하면

$f(1)=1+1-5+3=0$

이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | $-5$ | 3 |
| | | 1 | 2 | $-3$ |
| | 1 | 2 | $-3$ | 0 |

$\therefore x^3+x^2-5x+3=(x-1)(x^2+2x-3)$

$=(x-1)^2(x+3)$

이때 직원기둥의 밑면인 원의 반지름을 $r$, 높이를 $h$라 하면 직원기둥의 부피는

$\pi r^2h=(x^3+x^2-5x+3)\pi$

$=(x-1)^2(x+3)\pi$

이므로 $r=x-1$, $h=x+3$

따라서 직원기둥의 겉넓이는

$2\pi r^2+2\pi rh$

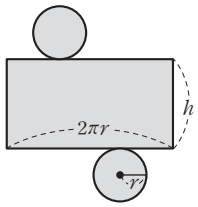
$=2\pi(x-1)^2+2\pi(x-1)(x+3)$

$=2(x-1)\{(x-1)+(x+3)\}\pi$

$=2(x-1)(2x+2)\pi$

$=4(x-1)(x+1)\pi$

$=4(x^2-1)\pi$ 답 ②




**0124** $x^4-x^3-8x^2+12x=x(x^3-x^2-8x+12)$에서

$h(x)=x^3-x^2-8x+12$라 하면

$h(2)=8-4-16+12=0$

이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 $h(x)$를 인수분해하면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | $-1$ | $-8$ | 12 |
| | | 2 | 2 | $-12$ |
| | 1 | 1 | $-6$ | 0 |

$\therefore x^3-x^2-8x+12=(x-2)(x^2+x-6)$

$=(x-2)^2(x+3)$

즉, $x^4-x^3-8x^2+12x=x(x-2)^2(x+3)$

이때 $f(x)$, $g(x)$는 각각 이차식이고 $f(-3)\neq0$, $g(0)\neq0$이므로 $f(x)$는 $x+3$을 인수로 갖지 않고, $g(x)$는 $x$를 인수로 갖지 않는다. 즉,

$f(x)=x(x-2)$, $g(x)=(x-2)(x+3)$

$\therefore g(5)=3\times8=24$ 답 **24**

**0125** $f(x)=2x^4+ax^3+bx^2+4$라 하면 $f(x)$가 $(x-2)^2P(x)$로 인수분해되므로 $f(x)$는 $(x-2)^2$을 인수로 갖는다. 즉,

$f(2)=32+8a+4b+4=0$

$\therefore b=-2a-9$ ····· ㉠

따라서 $f(x)=2x^4+ax^3+(-2a-9)x^2+4$이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | $a$ | $-2a-9$ | 0 | 4 |
| | | 4 | $2a+8$ | $-2$ | $-4$ |
| 2 | 2 | $a+4$ | $-1$ | $-2$ | 0 |
| | | 4 | $2a+16$ | $4a+30$ | |
| | 2 | $a+8$ | $2a+15$ | $4a+28$ | |

이때 $4a+28=0$에서 $a=-7$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=5$

$\therefore 2x^4-7x^3+5x^2+4=(x-2)^2(2x^2+x+1)$

즉, $P(x)=2x^2+x+1$이므로 $P(1)=4$

$\therefore a+b+P(1)=-7+5+4=2$ 답 **2**

**126** $b^4-a^2b^2-c^4-c^2a^2=0$에서

$(b^4-c^4)-(a^2b^2+c^2a^2)=0$

$(b^2-c^2)(b^2+c^2)-a^2(b^2+c^2)=0$

$(b^2+c^2)(b^2-c^2-a^2)=0$

이때 $b^2+c^2>0$이므로 $b^2-c^2-a^2=0$

$\therefore b^2=a^2+c^2$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 $b$인 직각삼각형이다. 답 ④

**개념 Plus**

**세 변의 길이에 따른 삼각형의 모양**

삼각형 ABC의 세 변의 길이를 $a$, $b$, $c$라 하면

(1) $c^2=a^2+b^2$ ⇨ 직각삼각형

(2) $a=b=c$ ⇨ 정삼각형

(3) $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ ⇨ 이등변삼각형

**127** $a^3+b^3+c^3-3abc=0$에서

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

$\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$

$\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}=0$

$\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

이때 $a+b+c>0$이므로

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\therefore a=b=c$

즉, 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 정삼각형이다.

이때 이 정삼각형의 둘레의 길이가 12이므로

$a+b+c=3a=12$

$\therefore a=4$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2=4\sqrt{3}$ 답 ②

**128** $998=x$로 놓으면

$$\frac{998^3+8}{998\times 996+4}=\frac{x^3+2^3}{x(x-2)+4}$$
$$=\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^2-2x+4}$$
$$=x+2=998+2=1000$$ 답 ③

**129** $P(-1)=0$, $P(3)=0$이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 1 | $-8$ | 18 | 0 | $-27$ |
| | | $-1$ | 9 | $-27$ | 27 |
| 3 | 1 | $-9$ | 27 | $-27$ | 0 |
| | | 3 | $-18$ | 27 | |
| | 1 | $-6$ | 9 | 0 | |

$\therefore P(x)=(x+1)(x-3)(x^2-6x+9)$

$=(x+1)(x-3)^3$

$\therefore P(13)=14\times 10^3=14000$ 답 ③

**130** $100=x$로 놓으면

$99\times 97\times 95\times 93+a$

$=(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+a$

$=\{(x-1)(x-7)\}\{(x-3)(x-5)\}+a$

$=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+a$

이때 $x^2-8x=t$로 놓으면

$(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+a$

$=(t+7)(t+15)+a$

$=t^2+22t+105+a$

$=(t+11)^2-16+a$ …… ㉠

주어진 등식이 성립하려면 ㉠이 완전제곱식이어야 하므로

$a=16$

즉,

$\sqrt{99\times 97\times 95\times 93+a}=\sqrt{(t+11)^2}=t+11$

$=x^2-8x+11$

이므로 $n=100^2-8\times 100+11=9211$

$\therefore a+n=16+9211=9227$ 답 ④

## STEP 2 실전 마스터 본문 32~34쪽

**131** $(x-2)^2-3y(2x-3y-k)$

$=x^2-2(3y+2)x+9y^2+3ky+4$ …… ㉠

이 식이 $x$에 대한 완전제곱식이 되려면

$(3y+2)^2=9y^2+3ky+4$

$9y^2+12y+4=9y^2+3ky+4$

즉, $12=3k$에서 $k=4$

이것을 ㉠에 대입하면

$x^2-2(3y+2)x+9y^2+12y+4$

$=x^2-2(3y+2)x+(3y+2)^2$

$=\{x-(3y+2)\}^2$

$=(x-3y-2)^2$

따라서 $a=1$, $b=-3$, $c=-2$이므로

$abc+k=1\times(-3)\times(-2)+4=10$ 답 ③

**132** $\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$

$=\{f(x)+g(x)\}[\{f(x)\}^2-f(x)g(x)+\{g(x)\}^2]$

$=(2x^2-x-1)h(x)$

$f(x)+g(x)=(x^2+x)+(x^2-2x-1)$

$=2x^2-x-1$

이므로

$h(x)=\{f(x)\}^2-f(x)g(x)+\{g(x)\}^2$

이때 $h(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $h(1)$이고

$f(1)=1+1=2$, $g(1)=1-2-1=-2$이므로

$h(1)=\{f(1)\}^2-f(1)g(1)+\{g(1)\}^2$

$=2^2-2\times(-2)+(-2)^2=12$ 답 ⑤

**133** $a^3-b^3+(a^2-b^2)c+ab(a-b)$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2)+c(a+b)(a-b)+ab(a-b)$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2+ca+bc+ab)$

$=(a-b)\{(a+b)^2+c(a+b)\}$

$=(a-b)(a+b)(a+b+c)=221$

이때 $221=13\times17$이고 $a-b<a+b<a+b+c$이므로

$a-b=1$, $a+b=13$, $a+b+c=17$

세 식을 연립하여 풀면

$a=7$, $b=6$, $c=4$

$\therefore a^2+b^2+c^2=7^2+6^2+4^2=101$ 답 **101**

**134** $P(n)=n^3+7n^2+14n+8$이라 하면

$P(-1)=-1+7-14+8=0$

다음과 같이 조립제법을 이용하여 $P(n)$을 인수분해하면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 1 | 7 | 14 | 8 |
| | | $-1$ | $-6$ | $-8$ |
| | 1 | 6 | 8 | 0 |

$P(n)=(n+1)(n^2+6n+8)$

$=(n+1)(n+2)(n+4)$

한편, $n^2+4n+3=(n+1)(n+3)$이므로 한 변의 길이가 $n+1$인 정사각형 모양의 타일이 가로 방향으로 $(n+2)(n+4)$개, 세로 방향으로 $(n+3)$개 필요하다.

따라서 필요한 타일의 개수는

$(n+2)(n+3)(n+4)$ 답 ⑤

**135** $x(x-1)(x-2)(x-3)-5x(x-3)-4$

$=\{x(x-3)\}\{(x-1)(x-2)\}-5x(x-3)-4$

$=(x^2-3x)(x^2-3x+2)-5(x^2-3x)-4$

이때 $x^2-3x=t$로 놓으면

$(x^2-3x)(x^2-3x+2)-5(x^2-3x)-4$

$=t(t+2)-5t-4$

$=t^2-3t-4$

$=(t+1)(t-4)$

$=(x^2-3x+1)(x^2-3x-4)$

$=(x^2-3x+1)(x+1)(x-4)$

따라서 인수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

**136** $p=n^4-11n^2+25$

$=n^4-10n^2+25-n^2$

$=(n^2-5)^2-n^2$

$=(n^2+n-5)(n^2-n-5)$

이때 $p$는 소수이고 $n^2-n-5<n^2+n-5$이므로

$n^2-n-5=1$ ····· ㉠

$n^2+n-5=p$ ····· ㉡

㉠에서 $n^2-n-6=0$

$(n+2)(n-3)=0$ $\therefore n=3$ ($\because n$은 자연수)

$n=3$을 ㉡에 대입하면 $p=7$

$\therefore n+p=3+7=10$ 답 ④

**137** $(a+b)^2(a-b)^2+c^4=2c^2(a^2+b^2)$에서

$(a+b)^2(a-b)^2+c^4-2c^2(a^2+b^2)=0$

$(a^2-b^2)^2+c^4-2c^2(a^2+b^2)=0$

$(a^2+b^2)^2-2c^2(a^2+b^2)+c^4-4a^2b^2=0$ ← $(a^2-b^2)^2=(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$

$(a^2+b^2-c^2)^2-(2ab)^2=0$

$(a^2+b^2-c^2+2ab)(a^2+b^2-c^2-2ab)=0$

$\{(a+b)^2-c^2\}\{(a-b)^2-c^2\}=0$

$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)=0$

$\therefore a+b+c=0$ 또는 $a+b=c$ 또는 $a+c=b$ 또는 $b+c=a$

따라서 세 수의 합이 0이거나 두 수의 합이 나머지 한 수와 같아야 하므로 조건을 만족시키는 순서쌍은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

**138**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | $-2$ |
| | | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 |
| | | 2 | 6 | 16 | |
| | 1 | 3 | 8 | 18 | |

위의 조립제법에서

$n^4+n^2-2=(n-1)(n^3+n^2+2n+2)$

$=(n-1)\{(n-2)(n^2+3n+8)+18\}$

$=(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)+18(n-1)$

이때 $(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)$은 $(n-1)(n-2)$로 나누어떨어지므로 $n^4+n^2-2$가 $(n-1)(n-2)$의 배수가 되려면 $18(n-1)$이 $(n-1)(n-2)$의 배수이어야 한다.

즉, $18(n-1)=(n-1)(n-2)k$ ($k$는 자연수)이므로

$18=(n-2)k$

$k$가 가장 작은 값을 가질 때 $n$이 가장 큰 값을 가지므로 $k=1$일 때 $n$이 가장 크다.

따라서 구하는 $n$의 값은 20이다. 답 **20**

**139** $f(x)=2x^3-10x^2+30x-54$라 하면

$f(3)=54-90+90-54=0$

이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | −10 | 30 | −54 |
| | | 6 | −12 | 54 |
| | 2 | −4 | 18 | 0 |

$\therefore 2x^3-10x^2+30x-54=(x-3)(2x^2-4x+18)$

$=2(x-3)(x^2-2x+9)$

따라서 주어진 식은

$$n=\frac{2x^3-10x^2+30x-54}{x^2-5x+6}$$

$$=\frac{2(x-3)(x^2-2x+9)}{(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{2(x^2-2x+9)}{x-2}=\frac{2\{x(x-2)+9\}}{x-2}$$

$$=2x+\frac{18}{x-2}$$

이때 $2x$는 자연수이므로 $n$이 자연수가 되려면 $\frac{18}{x-2}$도 자연수이어야 한다. $x>4$에서 $x-2>2$이므로

$x-2=3, 6, 9, 18$ $\therefore x=5, 8, 11, 20$

따라서 모든 자연수 $x$의 값의 합은

$5+8+11+20=44$ 답 ②

**140** $f(x)=x^4-x^3-3x^2+5x-2$에서

$f(1)=1-1-3+5-2=0$,

$f(-2)=16+8-12-10-2=0$

이므로 다항식 $f(x)$는 $x-1$과 $x+2$를 모두 인수로 갖는다.

다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | −1 | −3 | 5 | −2 |
| | | 1 | 0 | −3 | 2 |
| −2 | 1 | 0 | −3 | 2 | 0 |
| | | −2 | 4 | −2 | |
| | 1 | −2 | 1 | 0 | |

$\therefore f(x)=(x-1)(x+2)(x^2-2x+1)$

$=(x-1)^3(x+2)$

이때 다항식 $f(x)$가 $x+a$로 나누어떨어지므로 $a$의 값이 될 수 있는 것은 $-1$, 2이다.

또한, 다항식 $f(x)$를 $x+a$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$이므로 $Q(2a)$의 값은 $a$의 값에 따라 다음과 같다.

(i) $a=-1$일 때,

$f(x)=(x-1)Q(x)=(x-1)(x-1)^2(x+2)$

즉, $Q(x)=(x-1)^2(x+2)$이므로

$Q(2a)=Q(-2)=0$

(ii) $a=2$일 때,

$f(x)=(x+2)Q(x)=(x+2)(x-1)^3$

즉, $Q(x)=(x-1)^3$이므로

$Q(2a)=Q(4)=27$

(i), (ii)에서 $Q(2a)$의 값은 0, 27이므로 그 합은

$0+27=27$ 답 **27**

**141** $f(x)=x^3-(b+c)x^2-(b^2+c^2)x+(b+c)(b^2+c^2)$이라 하면 $f(x)$는 $x-a$로 나누어떨어지므로 $f(a)=0$

$\therefore f(a)=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+(b+c)(b^2+c^2)$

$=a^2(a-b-c)-(b^2+c^2)(a-b-c)$

$=(a-b-c)(a^2-b^2-c^2)$

즉, $(a-b-c)(a^2-b^2-c^2)=0$이고 $a-b-c\neq0$이므로

$a^2-b^2-c^2=0$ $\therefore a^2=b^2+c^2$

이때 이 삼각형은 빗변의 길이가 $a$인 직각삼각형이므로

$b+c=17$, $b^2+c^2=13^2$에서

$$bc=\frac{1}{2}\{(b+c)^2-(b^2+c^2)\}=\frac{1}{2}(17^2-13^2)=60$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}\times60=30$$ 답 **30**

**142** 주어진 식의 좌변을 $a$에 대하여 내림차순으로 정리하면

$b^3-b^2c+bc^2-a^2b-c^3+ca^2$

$=(c-b)a^2+b^3-b^2c+bc^2-c^3$

$=(c-b)a^2-b^2(c-b)-c^2(c-b)$

$=(c-b)(a^2-b^2-c^2)$

이므로 $(c-b)(a^2-b^2-c^2)=0$ …… ㉠

ㄱ. $a=b$이면 ㉠에서 $(c-b)\times(-c^2)=0$이고

$-c^2<0$이므로 $c-b=0$ $\therefore b=c$

즉, $a=b=c$이므로 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

ㄴ. $b>a$이면 $a^2-b^2-c^2\neq0$이므로 ㉠에서

$c-b=0$ $\therefore b=c$

따라서 주어진 삼각형은 $b=c$인 이등변삼각형이다.

ㄷ. $c>b$이면 $c-b\neq0$이므로 ㉠에서

$a^2-b^2-c^2=0$ $\therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 $a$인 직각삼각형이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

**0143** $15=x$로 놓으면

$15^3+5\times15^2+2\times15-8=x^3+5x^2+2x-8$

$f(x)=x^3+5x^2+2x-8$이라 하면

$f(1)=1+5+2-8=0$

이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 5 | 2 | −8 |
| | | 1 | 6 | 8 |
| | 1 | 6 | 8 | 0 |

$\therefore x^3+5x^2+2x-8=(x-1)(x^2+6x+8)$

$=(x-1)(x+2)(x+4)$

$x=15$를 대입하면

$15^3+5\times15^2+2\times15-8=(15-1)(15+2)(15+4)$

$=14\times17\times19$

$=2\times7\times17\times19$

$\therefore a+b+c+d=2+7+17+19=45$ 답 **45**

**0144** ㄱ. $1000027=1000000+27$

$=100^3+3^3$

$=(100+3)(100^2-100\times3+3^2)$

$=103\times9709$

따라서 1000027은 소수가 아니다.

ㄴ. $n^3-8=(n-2)(n^2+2n+4)$가 소수가 되려면

$n-2=1$ 또는 $n^2+2n+4=1$

$n^2+2n+4=1$, 즉 $n^2+2n+3=0$을 만족시키는 자연수 $n$의 값은 존재하지 않으므로

$n-2=1$ $\therefore n=3$

따라서 $n^3-8$이 소수가 되도록 하는 자연수 $n$의 값은 1개이다.

ㄷ. $n^3+8=(n+2)(n^2-2n+4)$에서 $n^3+8$이 소수가 되려면

$n+2=1$ 또는 $n^2-2n+4=1$

그런데 위의 식을 만족시키는 자연수 $n$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 $n^3+8$이 소수가 되도록 하는 자연수 $n$의 값은 없다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

**0145** $x^3-(ab+1)x+n$이 $(x-1)(x+a)(x-b)$의 꼴로 인수분해되려면

$x^3-(ab+1)x+n$

$=(x-1)(x+a)(x-b)$

$=x^3+\{(a-b)-1\}x^2+\{-ab-(a-b)\}x+ab$

이므로

$a-b=1$, $n=ab$

$a-b=1$에서 $b=a-1$

이것을 $n=ab$에 대입하면 $n=a(a-1)$

즉, $n$은 연속하는 두 자연수의 곱이어야 한다.

100 이하의 자연수 중에서 연속하는 두 자연수의 곱으로 나타낼 수 있는 수는

2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90

따라서 구하는 다항식의 개수는 9이다. 답 **9**

**0146** 네 블록 A, B, C, D의 부피는 각각 $x^3$, $x^2$, $x$, 1이므로 A블록 2개, B블록 9개, C블록 13개, D블록 6개를 모두 빈틈없이 붙여서 만든 직육면체의 부피는

$2x^3+9x^2+13x+6$

$f(x)=2x^3+9x^2+13x+6$이라 하면

$f(-1)=-2+9-13+6=0$

이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| −1 | 2 | 9 | 13 | 6 |
| | | −2 | −7 | −6 |
| | 2 | 7 | 6 | 0 |

$\therefore 2x^3+9x^2+13x+6=(x+1)(2x^2+7x+6)$

$=(x+1)(x+2)(2x+3)$

$x>0$이므로 $x+1<x+2<2x+3$

따라서 가장 긴 모서리의 길이는 $2x+3$이다. 답 ④

**0147** $6=n$으로 놓으면

$6^6-1=n^6-1=(n^3-1)(n^3+1)$

$=(n-1)(n^2+n+1)(n+1)(n^2-n+1)$

$=5\times43\times7\times31$

$=31\times35\times43$

$\therefore a+b+c=31+35+43=109$ 답 ⑤

## STEP 3 상위권 마스터

본문 35쪽

**0148**

TIP 계수가 대칭인 사차식이므로 $x^2$으로 묶어내어 인수분해한다.

$x^4+2nx^3+(2n+1)x^2+2nx+1$

$=x^2\left(x^2+2nx+2n+1+\frac{2n}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2n\left(x+\frac{1}{x}\right)+2n-1\right\}$

$=x^2\left(x+\frac{1}{x}+2n-1\right)\left(x+\frac{1}{x}+1\right)$

$=\{x^2+(2n-1)x+1\}(x^2+x+1)$

즉, $f(x)=x^2+(2n-1)x+1$, $g(x)=x^2+x+1$ 또는 $f(x)=x^2+x+1$, $g(x)=x^2+(2n-1)x+1$

따라서 $P(n)=2n-1+1=2n$이므로

$P(3)+P(4)+P(5)+\cdots+P(10)$

$=6+8+10+\cdots+20=104$ 답 **104**

**개념 Plus**

**계수가 대칭인 사차식의 인수분해**

(i) 가운데 항이 상수가 되도록 $x^2$으로 묶어낸다.

(ii) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$임을 이용하여 $x+\frac{1}{x}$ 또는 $x-\frac{1}{x}$에 대한 이차식으로 정리하여 인수분해한다.

(iii) 각 인수에 $x$를 곱하여 다항식이 되도록 한다.

## 0149

TIP $P(x)$를 조립제법을 이용하여 인수분해한 후 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 세 개의 다항식의 곱이 되도록 하는 자연수 $a$의 값을 구한다.

다항식 $P(x)$가 $x-a$를 인수로 가지므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

| $a$ | 1 | 0 | $-290$ | 0 | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $a$ | $a^2$ | $a^3-290a$ | $a^4-290a^2$ |
| | 1 | $a$ | $a^2-290$ | $a^3-290a$ | $a^4-290a^2+b$ |

$P(x)=(x-a)\{x^3+ax^2+(a^2-290)x+a^3-290a\}$

$+a^4-290a^2+b$

이때 $a^4-290a^2+b=0$에서 $b=a^2(290-a^2)$

$b$가 자연수이므로 $290-a^2>0$, 즉 $a^2<290$

이를 만족시키는 자연수 $a$의 값은

$1, 2, 3, \cdots, 17$ ····· ㉠

$Q(x)=x^3+ax^2+(a^2-290)x+a^3-290a$라 하면

$Q(-a)=-a^3+a^3-(a^2-290)a+a^3-290a=0$

이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 $Q(x)$를 인수분해하면

| $-a$ | 1 | $a$ | $a^2-290$ | $a^3-290a$ |
|---|---|---|---|---|
| | | $-a$ | 0 | $-a^3+290a$ |
| | 1 | 0 | $a^2-290$ | 0 |

$Q(x)=(x+a)(x^2+a^2-290)$

$\therefore P(x)=(x-a)(x+a)(x^2+a^2-290)$

이때 $P(x)$는 서로 다른 세 개의 다항식의 곱으로 인수분해되어야 하므로 $x^2+a^2-290$이 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 두 개의 일차식의 곱으로 인수분해되는 경우는 제외한다.

$x^2+a^2-290=x^2-(290-a^2)$

에서 $290-a^2$이 제곱수인 경우는

$290-a^2=289, 169, 121, 1$

즉, $a=1, 11, 13, 17$이므로 ㉠에서 조건을 만족시키는 자연수 $a$의 값의 개수는

$17-4=13$

이고, 조건을 만족시키는 모든 다항식 $P(x)$의 개수도 13이다.

$b=a^2(290-a^2)=-(a^2-145)^2+145^2$

이고 $a$가 자연수이므로 $a=12$일 때 $b$는 최댓값

$12^2\times(290-12^2)$을 갖는다.

따라서 $p=13$, $q=12^2\times(290-12^2)$이므로

$$\frac{q}{(p-1)^2}=\frac{12^2\times(290-12^2)}{(13-1)^2}$$

$=290-144=146$ 답 **146**

## 0150

TIP 먼저 조립제법을 이용하여 주어진 다항식을 인수분해한다.

$f(x)=2x^3+(a+4)x^2+2(a+3)x+12$라 하면

$f(-2)=-16+4(a+4)-4(a+3)+12=0$

이므로 다음과 같이 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

| $-2$ | 2 | $a+4$ | $2a+6$ | 12 |
|---|---|---|---|---|
| | | $-4$ | $-2a$ | $-12$ |
| | 2 | $a$ | 6 | 0 |

$\therefore 2x^3+(a+4)x^2+2(a+3)x+12$

$=(x+2)(2x^2+ax+6)$

이때 자연수 $m$, $n$에 대하여

$2x^2+ax+6=(2x+m)(x+n)$

이라 하면 $a=m+2n$, $mn=6$

$mn=6$을 만족시키는 순서쌍 $(m, n)$은

$(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$

이므로 $m+2n$의 값을 구해 보면 13, 8, 7, 8

따라서 $a$의 값이 될 수 있는 것은 7, 8, 13이므로 그 합은

$7+8+13=28$ 답 ③

# 04 복소수

## STEP 1 핵심기출 마스터

본문 39~41쪽

**0151** $z=\frac{1+\sqrt{2}i}{3}$에서 $3z-1=\sqrt{2}i$

양변을 제곱하면 $9z^2-6z+1=-2$

$9z^2-6z=-3$ $\therefore 3z^2-2z=-1$

$\therefore 6z^2-4z+1=2(3z^2-2z)+1$

$=2\times(-1)+1=-1$ 답 $-1$

**0152** $\alpha=\frac{1+i}{2i}$에서 $\alpha^2=\frac{2i}{-4}=-\frac{i}{2}$

$\beta=\frac{1-i}{2i}$에서 $\beta^2=\frac{-2i}{-4}=\frac{i}{2}$

$\therefore (2\alpha^2+3)(2\beta^2+3)=(-i+3)(i+3)=10$ 답 ②

다른풀이

$\alpha+\beta=\frac{1+i}{2i}+\frac{1-i}{2i}=\frac{2}{2i}=\frac{1}{i}=-i$

$\alpha\beta=\frac{1+i}{2i}\times\frac{1-i}{2i}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$

이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-i)^2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

$\therefore (2\alpha^2+3)(2\beta^2+3)=4\alpha^2\beta^2+6\alpha^2+6\beta^2+9$

$=4\alpha^2\beta^2+6(\alpha^2+\beta^2)+9$

$=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+6\times0+9=10$

**0153** $f(3,1)=\frac{3+i}{3-i}$, $f(6,2)=\frac{6+2i}{6-2i}=\frac{3+i}{3-i}$,

$f(9,3)=\frac{9+3i}{9-3i}=\frac{3+i}{3-i}$, …, $f(30,10)=\frac{30+10i}{30-10i}=\frac{3+i}{3-i}$

이때 $\frac{3+i}{3-i}=\frac{(3+i)^2}{(3-i)(3+i)}=\frac{4+3i}{5}$이므로

$f(3,1)+f(6,2)+f(9,3)+\cdots+f(30,10)$

$=10\times\frac{4+3i}{5}=8+6i$ 답 $8+6i$

다른풀이

$f(a,b)=\frac{a+bi}{a-bi}$에서 $a=3b$ $(ab\neq0)$이면

$f(3b,b)=\frac{3b+bi}{3b-bi}=\frac{3+i}{3-i}=\frac{4+3i}{5}$이므로

$f(3,1)=f(6,2)=f(9,3)=\cdots=f(30,10)=\frac{4+3i}{5}$

$\therefore f(3,1)+f(6,2)+f(9,3)+\cdots+f(30,10)$

$=10\times\frac{4+3i}{5}=8+6i$

**0154** $z=(1+2i)a-3a+6-4i$

$=(-2a+6)+(2a-4)i$

이 복소수가 순허수가 되려면

$-2a+6=0$, $2a-4\neq0$ $\therefore a=3$

$\therefore a=3$

$a=3$을 $z=(-2a+6)+(2a-4)i$에 대입하면

$\beta=2i$

$\therefore \alpha-\beta^2=3-(2i)^2=3-(-4)=7$ 답 7

**0155** $z=(1+i)x^2-(2+i)x-3(1+2i)$

$=(x^2-2x-3)+(x^2-x-6)i$

이 복소수가 0이 아닌 실수가 되려면

$x^2-2x-3\neq0$, $x^2-x-6=0$

$x^2-2x-3\neq0$에서 $(x+1)(x-3)\neq0$

$\therefore x\neq-1$, $x\neq3$ …… ㉠

$x^2-x-6=0$에서 $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x=-2$ 답 ①

**0156** $z=(3+ai)(2-i)$

$=(a+6)+(2a-3)i$

$z^2$이 양의 실수가 되려면 $z$는 0이 아닌 실수이어야 하므로

$a+6\neq0$, $2a-3=0$

$\therefore a=\frac{3}{2}$ 답 ④

**0157** $z=(a+3i)(1-2i)+a(i-a)$

$=(-a^2+a+6)+(-a+3)i$

$z^2$이 음의 실수가 되려면 $z$는 순허수이어야 하므로

$-a^2+a+6=0$, $-a+3\neq0$

$-a^2+a+6=0$에서

$a^2-a-6=0$, $(a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=3$ …… ㉠

$-a+3\neq0$에서 $a\neq3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-2$ 답 $-2$

**0158** $\frac{x}{1+i}+\frac{y}{1-i}=\frac{x(1-i)+y(1+i)}{(1+i)(1-i)}$

$=\frac{(x+y)+(-x+y)i}{2}$

즉, $\frac{(x+y)+(-x+y)i}{2}=4+3i$이므로

$(x+y)+(-x+y)i=8+6i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=8$, $-x+y=6$

두 식을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=7$

$\therefore x^2+y^2=50$ 답 50

**159** $(2x+i)(1+2i)-y(1+3i)=\overline{2-5i}$에서

$(2x-y-2)+(4x-3y+1)i=2+5i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2x-y-2=2$, $4x-3y+1=5$

두 식을 연립하여 풀면

$x=4$, $y=4$

$\therefore x+y=8$ 답 ⑤

**160** $(3+2i)x^2-5(2y+i)x=8+12i$에서

$(3x^2-10xy)+(2x^2-5x)i=8+12i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3x^2-10xy=8$, $2x^2-5x=12$

$2x^2-5x=12$에서 $2x^2-5x-12=0$

$(2x+3)(x-4)=0$ $\therefore x=4$ ($\because x$는 정수)

$x=4$를 $3x^2-10xy=8$에 대입하면

$48-40y=8$ $\therefore y=1$

$\therefore x+y=4+1=5$ 답 ⑤

**161** $a+bi=\dfrac{x+2i}{x-2i}=\dfrac{(x+2i)^2}{(x-2i)(x+2i)}$

$=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}+\dfrac{4x}{x^2+4}i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$, $b=\dfrac{4x}{x^2+4}$

$\therefore a^2+b^2=\left(\dfrac{x^2-4}{x^2+4}\right)^2+\left(\dfrac{4x}{x^2+4}\right)^2$

$=\dfrac{x^4+8x^2+16}{(x^2+4)^2}=\dfrac{(x^2+4)^2}{(x^2+4)^2}=1$ 답 **1**

**162** $\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=\overline{\alpha}(\alpha+\beta)+\overline{\beta}(\alpha+\beta)$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$

이때 $\alpha=-4+i$, $\beta=3+2i$이므로

$\alpha+\beta=-1+3i$, $\overline{\alpha+\beta}=-1-3i$

$\therefore \alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$

$=(-1+3i)(-1-3i)$

$=10$ 답 ④

**163** $\alpha\overline{\alpha}=4$, $\beta\overline{\beta}=4$에서 $\alpha=\dfrac{4}{\overline{\alpha}}$, $\beta=\dfrac{4}{\overline{\beta}}$

이를 $\alpha+\beta=10i$에 대입하면 $\dfrac{4}{\overline{\alpha}}+\dfrac{4}{\overline{\beta}}=10i$

$\dfrac{4(\overline{\alpha}+\overline{\beta})}{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}}=10i$, $\dfrac{4(\overline{\alpha+\beta})}{\overline{\alpha\beta}}=10i$

즉, $4(\overline{\alpha+\beta})=10i\overline{\alpha\beta}$에서

$4\times(-10i)=10i\overline{\alpha\beta}$, $\overline{\alpha\beta}=-4$

$\therefore \alpha\beta=-4$

$\therefore \dfrac{2}{\alpha}+\dfrac{2}{\beta}=\dfrac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\dfrac{2\times 10i}{-4}=-5i$ 답 $-5i$

**164** $z=a+bi$ ($a\neq 0$, $b\neq 0$)에 대하여 $iz=\overline{z}$이므로

$i(a+bi)=a-bi$

즉, $-b+ai=a-bi$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-b$

$\therefore z=-b+bi$

ㄱ. $z+\overline{z}=(-b+bi)+(-b-bi)=-2b$

ㄴ. $i\overline{z}=i(-b-bi)=b-bi$

$=-(-b+bi)=-z$

ㄷ. $\dfrac{\overline{z}}{z}+\dfrac{z}{\overline{z}}=\dfrac{z^2+\overline{z}^2}{z\overline{z}}=\dfrac{(-b+bi)^2+(-b-bi)^2}{(-b+bi)(-b-bi)}$

$=\dfrac{-2b^2i+2b^2i}{2b^2}=0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

다른풀이

ㄴ. $iz=\overline{z}$의 양변에 $i$를 곱하면

$i^2z=i\overline{z}$, $-z=i\overline{z}$

$\therefore i\overline{z}=-z$

ㄷ. ㄴ에서 $i\overline{z}=-z$이므로

$(i\overline{z})^2=(-z)^2$ $\therefore -\overline{z}^2=z^2$

$\therefore \dfrac{\overline{z}}{z}+\dfrac{z}{\overline{z}}=\dfrac{\overline{z}^2+z^2}{z\overline{z}}=\dfrac{\overline{z}^2+(-\overline{z}^2)}{z\overline{z}}=0$

**165** $z=a+bi$ ($a$, $b$는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$(3+i)z+2i\overline{z}=-1+3i$에서

$(3+i)(a+bi)+2i(a-bi)=-1+3i$

$\therefore (3a+b)+(3a+3b)i=-1+3i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3a+b=-1$, $3a+3b=3$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=2$

$\therefore z=-1+2i$ 답 ③

**166** $z=a+bi$ ($a$, $b$는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$z+\overline{z}=8$에서 $(a+bi)+(a-bi)=8$

$2a=8$ $\therefore a=4$

$z\overline{z}=25$, $a=4$에서 $(4+bi)(4-bi)=25$

$16+b^2=25$, $b^2=9$ $\therefore b=\pm 3$

$\therefore z=4\pm 3i$ 답 $4\pm 3i$

**167** 음이 아닌 정수 $k$에 대하여

$i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$, $i^{4k+4}=1$이므로

$i+2i^2+3i^3+\cdots+50i^{50}$
$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)$
$\quad+\cdots+(45i-46-47i+48)+(49i-50)$
$=(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)+(49i-50)$
$=12(2-2i)+49i-50$
$=-26+25i=a+bi$
따라서 $a=-26$, $b=25$이므로
$a+b=-1$ 답 $-1$

**168** 음이 아닌 정수 $k$에 대하여
$i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$, $i^{4k+4}=1$이므로
$\frac{1}{i}+\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}+\cdots+\frac{2019}{i^{2019}}$
$=(-i-2+3i+4)+(-5i-6+7i+8)$
$\quad+\cdots+(-2013i-2014+2015i+2016)$
$\quad+(-2017i-2018+2019i)$
$=504(2+2i)-2018+2i$
$=-1010+1010i$ 답 ③

**169** $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}i}$에서
$z^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}i}\right)^2=\frac{2i}{-2}=-i$
$z^4=(z^2)^2=(-i)^2=-1$
$\therefore z^8=(-1)^2=1$
따라서 구하는 자연수 $n$의 최솟값은 8이다. 답 ④

**170** $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$,
$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$이므로
$f(n)=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{4n}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n}$
$=(-i)^{4n}+i^{2n}$
$=1+(-1)^n$
$=\begin{cases}0 & (n\text{은 홀수})\\ 2 & (n\text{은 짝수})\end{cases}$
$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$
$=0+2+0+2+\cdots+0+2$
$=2\times50=100$ 답 100

**171** $\sqrt{5}\sqrt{-20}+\sqrt{-2}\sqrt{-8}-\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}+\frac{\sqrt{-72}}{\sqrt{-2}}$
$=\sqrt{5}\times2\sqrt{5}i+\sqrt{2}i\times2\sqrt{2}i-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}+\frac{6\sqrt{2}i}{\sqrt{2}i}$
$=10i-4+3i+6$
$=2+13i=a+bi$
따라서 $a=2$, $b=13$이므로 $a+b=15$ 답 15

**172** $a\neq0$, $b\neq0$이고 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이므로
$a>0$, $b<0$
① $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
② $-a<0$, $-b>0$이므로 $\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{ab}$
③ $a>0$, $b^2>0$이므로
$\sqrt{ab^2}=\sqrt{a}\sqrt{b^2}=|b|\sqrt{a}=-b\sqrt{a}$
④ $a^2>0$, $b<0$이므로
$\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\sqrt{b}=|a|\sqrt{b}=a\sqrt{b}$
⑤ $a>0$, $b<0$이므로 $\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$
따라서 항상 옳은 것은 ④이다. 답 ④

**173** $0<a<b$에서 $a-b<0$, $b-a>0$이므로
$\sqrt{\frac{a-b}{b-a}}-\sqrt{b-a}\sqrt{a-b}+\frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{a-b}}$
$=\sqrt{\frac{a-b}{b-a}}-\sqrt{(b-a)(a-b)}-\sqrt{\frac{b-a}{a-b}}$
$=\sqrt{-1}-\sqrt{-(b-a)^2}-\sqrt{-1}$
$=i-(b-a)i-i$
$=(a-b)i$ 답 ①

## STEP 2 실전 마스터 본문 42~44쪽

**174** $z^2=1-3i$에서 $z^2-1=-3i$
양변을 제곱하면 $z^4-2z^2+1=-9$
$\therefore z^4-2z^2+10=0$
이 식의 양변을 $z$로 나누면
$z^3-2z+\frac{10}{z}=0$
$\therefore z^4+z^3-5z^2-2z+\frac{10}{z}$
$=(z^4-2z^2+10)+\left(z^3-2z+\frac{10}{z}\right)-3(z^2-1)-13$
$=-3\times(-3i)-13$
$=-13+9i$ 답 ③

**175** 조건 (가)의 식의 양변에 $i$를 곱하면
$-(z_2^2-z_1^2)=2iz_1z_2$
$z_2^2-z_1^2+2iz_1z_2=0$, $z_2^2+2\times z_2\times iz_1+(iz_1)^2=0$
$(z_2+iz_1)^2=0$ $\therefore z_2=-iz_1$
$\therefore z_2=-i(a+bi)=b-ai$, $\overline{z_2}=b+ai$
$z_1$, $\overline{z_2}$를 조건 (나)의 식에 대입하면
$a+bi-2(b+ai)=2b+5i$
$(a-2b)+(b-2a)i=2b+5i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a-2b=2b$, $b-2a=5$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{20}{7}$, $b=-\frac{5}{7}$

따라서 $z_1=-\frac{20}{7}-\frac{5}{7}i$, $z_2=-\frac{5}{7}+\frac{20}{7}i$이므로

$z_1+z_2=-\frac{25}{7}+\frac{15}{7}i$ 답 $\boldsymbol{-\frac{25}{7}+\frac{15}{7}i}$

**176** $z=a+bi$ ($a$, $b$는 실수)라 하면

$z^2+zi=z\overline{z}+\overline{z}^2$에서

$(a+bi)^2+(a+bi)i=(a+bi)(a-bi)+(a-bi)^2$

$a^2-b^2+2abi+ai-b=a^2+b^2+a^2-b^2-2abi$

$\therefore\ (a^2+b^2+b)-(a+4ab)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\begin{cases} a^2+b^2+b=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ a+4ab=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $a(1+4b)=0$ $\therefore\ a=0$ 또는 $b=-\frac{1}{4}$

(i) $a=0$일 때,

$a=0$을 ㉠에 대입하면 $b^2+b=0$

$b(b+1)=0$ $\therefore\ b=0$ 또는 $b=-1$

$\therefore\ z=-i$ ($\because\ z\neq0$)

(ii) $b=-\frac{1}{4}$일 때,

$b=-\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면 $a^2+\frac{1}{16}-\frac{1}{4}=0$

$a^2=\frac{3}{16}$ $\therefore\ a=-\frac{\sqrt{3}}{4}$ 또는 $a=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\therefore\ z=-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i$ 또는 $z=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i$

(i), (ii)에서 구하는 곱은

$(-i)\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i\right)=\frac{i}{4}$ 답 $\boldsymbol{\frac{i}{4}}$

**177** 조건 ㈏에서

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{1}{\gamma}$ $\therefore\ \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{1}{\gamma}$

조건 ㈎에서 $\alpha+\beta=-\gamma$이므로 위의 식에 대입하면

$\frac{-\gamma}{\alpha\beta}=-\frac{1}{\gamma}$ $\therefore\ \alpha\beta=\gamma^2$ $\cdots\cdots ㉠$

같은 방법으로

$\beta\gamma=\alpha^2$ $\cdots\cdots ㉡$

또, 조건 ㈐에서 $\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=0$이므로

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$

이 식에 ㉠, ㉡을 대입하면 $\gamma^2+\alpha\gamma+\alpha^2=0$ $\cdots\cdots ㉢$

㉢의 양변을 $\alpha^2$으로 나누면

$\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+\frac{\gamma}{\alpha}+1=0$

$\therefore\ \frac{\gamma}{\alpha}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

한편, ㉡에서 $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$이므로

$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\overline{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}$

$\therefore\ \frac{\gamma}{\alpha}+\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\gamma}{\alpha}+\overline{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}=-1$ 답 ②

**178** $z=a+bi$ ($a$, $b$는 실수)라 하면 조건 ㈏에서

$z^2+\overline{z}^2=(a+bi)^2+(a-bi)^2=2(a^2-b^2)<0$

$\therefore\ a^2<b^2$

조건 ㈎에서 $a=2x-3$, $b=7-2x$이므로

$(2x-3)^2<(7-2x)^2$

$4x^2-12x+9<49-28x+4x^2$

$16x<40$ $\therefore\ x<\frac{5}{2}$

따라서 구하는 자연수 $x$는 1, 2의 2개이다. 답 ②

**179** $z_0=0$, $z_{n+1}=\overline{z_n}-1+i$이므로

$z_1=-1+i$

$z_2=\overline{z_1}-1+i=(-1-i)-1+i=-2$

$z_3=\overline{z_2}-1+i=(-2)-1+i=-3+i$

$z_4=\overline{z_3}-1+i=(-3-i)-1+i=-4$

$z_5=\overline{z_4}-1+i=(-4)-1+i=-5+i$

⋮

이와 같이 계속되므로

(i) $n$이 홀수일 때,

$z_n=-n+i$이므로 $z_n\overline{z_n}=(-n+i)(-n-i)=n^2+1$

(ii) $n$이 짝수일 때,

$z_n=-n$이므로 $z_n\overline{z_n}=(-n)\times(-n)=n^2$

이때 $z_m\overline{z_m}=170$에서 170은 어떤 자연수의 제곱수가 아니므로

$m$은 홀수이고

$z_m\overline{z_m}=170=m^2+1$ ($\because$ (i))

$m^2=169$ $\therefore\ m=13$ ($\because\ m$은 자연수) 답 **13**

**180** $\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$ ($a$, $b$, $c$, $d$는 실수)라 하면

$\alpha\overline{\alpha}=25$에서 $a^2+b^2=25$ $\cdots\cdots ㉠$

$\beta\overline{\beta}=13$에서 $c^2+d^2=13$ $\cdots\cdots ㉡$

$\alpha+\overline{\beta}=2i$에서 $a+bi+(c-di)=2i$

$\therefore\ (a+c)+(b-d)i=2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\begin{cases} a+c=0 & \therefore\ c=-a \quad \cdots\cdots ㉢ \\ b-d=2 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면 $a^2-c^2+b^2-d^2=12$이므로

$a^2-c^2+b^2-d^2=a^2-(-a)^2+b^2-d^2$ ($\because$ ㉢)

$=b^2-d^2$

$=(b-d)(b+d)$

$=2(b+d)=12$ ($\because$ ㉣)

$\therefore b+d=6$ ····· ㉤

㉢, ㉤을 연립하여 풀면 $b=4$, $d=2$

$b=4$를 ㉠에 대입하면

$a^2+4^2=25$ $\therefore a^2=9$

$\therefore \alpha-\beta=(a+bi)-(c+di)$

$=(a-c)+(b-d)i=2a+2i$

$\therefore (\alpha-\beta)^2(\overline{\alpha-\beta})^2=(2a+2i)^2(2a-2i)^2$

$=\{(2a+2i)(2a-2i)\}^2$

$=(4a^2+4)^2=(36+4)^2=1600$

답 **1600**

**0181** $x=c+di$, $y=e+fi$ ($c$, $d$, $e$, $f$는 실수)라 하면

$a+b=xz+y\bar{z}$에서

$a+b=(c+di)(a+bi)+(e+fi)(a-bi)$

$=(ac-bd+ae+bf)+(ad+bc+af-be)i$

$=a(c+e)+b(f-d)+\{a(d+f)+b(c-e)\}i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\begin{cases} a+b=a(c+e)+b(f-d) \\ 0=a(d+f)+b(c-e) \end{cases}$

이때 $a$, $b$는 임의의 실수이므로

$\begin{cases} c+e=1,\ c-e=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ f-d=1,\ d+f=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 두 식을 연립하여 풀면 $c=\frac{1}{2}$, $e=\frac{1}{2}$

㉡의 두 식을 연립하여 풀면 $d=-\frac{1}{2}$, $f=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$, $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

$\therefore x^2+y^2=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2=0$

답 **0**

**0182** $f(n)=i^n-\frac{2}{(-i)^n}$

ㄱ. $f(1)=i-\frac{2}{-i}=i-2i=-i$

$f(3)=i^3-\frac{2}{(-i)^3}=-i+2i=i$

$\therefore f(1)f(3)=(-i)\times i=1$

ㄴ. 음이 아닌 정수 $k$에 대하여 $i^n=i^{n+4k}$, $(-i)^n=(-i)^{n+4k}$

이므로

$f(n)=f(n+4k)$ ····· ㉠

㉠에 $n=100-2k$ ($k=1, 2, 3, \cdots, 49$)를 대입하면

$f(100-2k)=f(100+2k)$

ㄷ. $f(1)=-i$, $f(2)=i^2-\frac{2}{(-i)^2}=-1+2=1$,

$f(3)=i$, $f(4)=i^4-\frac{2}{(-i)^4}=1-2=-1$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=(-i)+1+i+(-1)=0$

이때 $999=4\times249+3$이고 ㉠이 성립하므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(999)$

$=\underbrace{0+0+0+\cdots+0}_{249개}+f(997)+f(998)+f(999)$

$=f(1)+f(2)+f(3)=-i+1+i=1$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

**0183** $z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$에서 $z^2=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1-2i-1}{2}=-i$,

$z^4=(z^2)^2=(-i)^2=-1$이므로

$z^{4n+1}=(z^4)^n\times z=(-1)^n\times z$ (단, $n$은 자연수)

한편, $\bar{z}^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1+2i-1}{2}=i$,

$\bar{z}^3=\bar{z}^2\times\bar{z}=i\times\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$,

$\bar{z}^4=(\bar{z}^2)^2=i^2=-1$이므로

$\bar{z}^{4m+3}=(\bar{z}^4)^m\times\bar{z}^3=(-1)^m\times\bar{z}^3$ (단, $m$은 자연수)

$\therefore z-\bar{z}^3+z^5-\bar{z}^7+z^9-\bar{z}^{11}+\cdots+z^{97}-\bar{z}^{99}$

$=(z-\bar{z}^3)+(-z+\bar{z}^3)+(z-\bar{z}^3)+(-z+\bar{z}^3)$

$+\cdots+(z-\bar{z}^3)+(-z+\bar{z}^3)+(z-\bar{z}^3)$

$=z-\bar{z}^3$

$=\frac{1-i}{\sqrt{2}}-\frac{-1+i}{\sqrt{2}}=\frac{2-2i}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

답 ①

**0184** 두 복소수 $\alpha$, $\beta$를 $\alpha=1-\sqrt{3}i$, $\beta=-1+\sqrt{3}i$라 하면

$(1-\sqrt{3}i)^n=2^m(-1+\sqrt{3}i)$, 즉 $\alpha^n=2^m\beta$를 만족시키는 자연수 $m$, $n$의 순서쌍 $(m, n)$을 찾아야 한다.

$n=1, 2, 3, \cdots$일 때 $\alpha^n$을 구해 보면

$\alpha^1=1-\sqrt{3}i$

$\alpha^2=(1-\sqrt{3}i)^2=2(-1-\sqrt{3}i)$

$\alpha^3=\alpha^2\alpha=2(-1-\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=-8=2^2\times(-2)$

$\alpha^4=\alpha^3\alpha=-8(1-\sqrt{3}i)=2^3(-1+\sqrt{3}i)=2^3\beta$

$\alpha^5=\alpha^4\alpha=2^3(-1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=2^4(1+\sqrt{3}i)$

$\alpha^6=\alpha^5\alpha=2^4(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=64=2^5\times2$

$\alpha^7=\alpha^6\alpha=2^5\times2(1-\sqrt{3}i)=2^6\alpha$

$\alpha^8=\alpha^7\alpha=2^6\alpha^2$

⋮

즉, $\alpha^{6k+1}=2^{6k}\times\alpha$ ($k$는 음이 아닌 정수)이고 $\alpha^4=2^3\beta$이므로

$\alpha^n=2^m\beta$를 만족시키는 자연수 $m$, $n$의 순서쌍 $(m, n)$은

$(3, 4)$, $(3+6, 4+6)$, $(3+12, 4+12)$, $\cdots$

이때 $m$, $n$은 모두 100 이하의 자연수이므로

$(m, n)=(3, 4), (9, 10), (15, 16), \cdots, (93, 94), (99, 100)$

따라서 순서쌍 $(m, n)$의 개수는 17이다.

답 **17**

**0185** $\alpha=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$에서

$\alpha^2=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2=\frac{3+2\sqrt{3}i-1}{4}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\beta$

$\therefore \alpha^m\times\beta^n=\alpha^m\times(\alpha^2)^n=\alpha^{m+2n}$

또, $\alpha^3=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^3=i$이므로

$\alpha^{12}=(\alpha^3)^4=i^4=1$

$\therefore \alpha^3=\alpha^{12}\times\alpha^3=\alpha^{24}\times\alpha^3=\alpha^{36}\times\alpha^3=\cdots=i$

따라서 $\alpha^{m+2n}=i$를 만족시키는 $m+2n$의 값이 될 수 있는 수는

3, 15, 27, 39, …

그런데 $m$, $n$은 모두 10 이하의 자연수이므로

$m+2n\le 30$

따라서 구하는 최댓값은 27이다. 답 **27**

**0186** $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

이때 $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$이므로 $k$, $s$가 자연수일 때,

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m=\begin{cases} i & (m=4k-3)\\ -1 & (m=4k-2)\\ -i & (m=4k-1)\\ 1 & (m=4k)\end{cases}$$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n=\begin{cases} -i & (n=4s-3)\\ -1 & (n=4s-2)\\ i & (n=4s-1)\\ 1 & (n=4s)\end{cases}$$

즉, $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$이 허수가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) $m=4k-3$일 때,
$n=4s-2$ 또는 $n=4s-1$ 또는 $n=4s$

(ii) $m=4k-2$일 때,
$n=4s-3$ 또는 $n=4s-1$

(iii) $m=4k-1$일 때,
$n=4s-3$ 또는 $n=4s-2$ 또는 $n=4s$

(iv) $m=4k$일 때,
$n=4s-3$ 또는 $n=4s-1$

따라서 구하는 20 이하의 두 자연수 $m$, $n$의 순서쌍 $(m, n)$의 개수는

$5\times(15+10+15+10)=250$ 답 **250**

**0187** $a-b>b-c$에서 $a+c>2b$, $a+b+c>3b$

$b-c>c-a$에서 $a+b>2c$, $a+b+c>3c$

$a-b>c-a$에서 $2a>b+c$, $3a>a+b+c$

즉, $a>b$, $a>c$이고 $b$와 $c$의 대소 관계는 알 수 없다.

ㄱ. $b-c<0$인 경우에는 성립하지만 $b-c>0$인 경우에는 성립하지 않는다.

ㄴ. $c-a<0$이고 $b-a<0$이므로

$\sqrt{(b-a)^2(c-a)}=|b-a|\sqrt{-(a-c)}$

$=(a-b)\sqrt{a-c}i$

ㄷ. $a-c>0$이므로 $\sqrt{\frac{b-c}{a-c}}=\frac{\sqrt{b-c}}{\sqrt{a-c}}$

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

**0188** $z$가 허수이므로 $z=a+bi$ ($a$, $b$는 실수, $b\neq 0$)라 하면

$\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}=a-bi+\frac{1}{a-bi}$

$=a-bi+\frac{a+bi}{(a-bi)(a+bi)}$

$=a-bi+\frac{a+bi}{a^2+b^2}$

$=a-bi+\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{bi}{a^2+b^2}$

$=a\left(1+\frac{1}{a^2+b^2}\right)+b\left(-1+\frac{1}{a^2+b^2}\right)i$ …… ㉠

$\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}$이 실수이므로 $b\left(-1+\frac{1}{a^2+b^2}\right)=0$

이때 $b\neq 0$이므로 $-1+\frac{1}{a^2+b^2}=0$

$\therefore a^2+b^2=1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}=a\left(1+\frac{1}{1}\right)+b\times 0i=2a$

$\therefore (z-1)(\bar{z}-1)+\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}$

$=z\bar{z}-(z+\bar{z})+1+\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}$

$=(a+bi)(a-bi)-(a+bi+a-bi)+1+2a$

$=a^2+b^2-2a+1+2a$

$=a^2+b^2+1=2$ ($\because$ ㉡) 답 **2**

**0189** $\frac{1}{i}+\frac{3}{i^2}+\frac{5}{i^3}+\cdots+\frac{2n-1}{i^n}$

$=\left(\frac{1}{i}-\frac{3}{1}-\frac{5}{i}+\frac{7}{1}\right)+\left(\frac{9}{i}-\frac{11}{1}-\frac{13}{i}+\frac{15}{1}\right)$

$+\left(\frac{17}{i}-\frac{19}{1}-\frac{21}{i}+\frac{23}{1}\right)+\cdots+\frac{2n-1}{i^n}$

$=(4+4i)+(4+4i)+(4+4i)+\cdots+\frac{2n-1}{i^n}$

이때 $48+48i=12(4+4i)$이므로

$n=12\times 4=48$ 답 **48**

**0190** $w=a+bi$ ($a$, $b$는 실수, $b\neq 0$)라 하면

$z+\bar{w}=0$에서 $z=-\bar{w}$

$\therefore z=-(a-bi)=-a+bi$

ㄱ. $\bar{w}-z=(a-bi)-(-a+bi)=2a-2bi$
이때 $b\neq 0$이므로 $\bar{w}-z$는 허수이다.

ㄴ. $i^9(z+w)=i^9(-a+bi+a+bi)=i\times 2bi=-2b$
즉, $i^9(z+w)$는 실수이다.

ㄷ. $\overline{zw}=(-a-bi)(a+bi)=-a^2-2abi+b^2$
$=(b^2-a^2)-2abi$
그런데 $a=0$이면 $\overline{zw}$는 실수이므로 항상 허수인 것은 아니다.

ㄹ. $\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{1}{-a+bi}+\frac{1}{a+bi}=\frac{-a-bi}{a^2+b^2}+\frac{a-bi}{a^2+b^2}$
$=\frac{-2b}{a^2+b^2}i$
이때 $b\neq0$이므로 $\frac{1}{z}+\frac{1}{w}$은 허수이다.

따라서 항상 허수인 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ②

(i) $x_1, x_2, x_3, x_4$가 모두 1 또는 $-1$인 경우
$1^{50}=(-1)^{50}=1$이므로
$x_1^{50}+x_2^{50}+x_3^{50}+x_4^{50}=1+1+1+1=4$

(ii) $x_1, x_2, x_3, x_4$ 중 두 수가 각각 $i$, $-i$이고 나머지 두 수는 1 또는 $-1$인 경우
$1^{50}=(-1)^{50}=1$, $i^{50}=(i^4)^{12}\times i^2=i^2=-1$,
$(-i)^{50}=\{(-i)^4\}^{12}\times(-i)^2=i^2=-1$이므로
$x_1^{50}+x_2^{50}+x_3^{50}+x_4^{50}=1+1+(-1)+(-1)=0$

(iii) $x_1, x_2, x_3, x_4$ 중 두 수는 $i$이고 나머지 두 수는 $-i$인 경우
$i^{50}=(-i)^{50}=-1$이므로
$x_1^{50}+x_2^{50}+x_3^{50}+x_4^{50}=-1-1-1-1=-4$

(i), (ii), (iii)에서 $x_1^{50}+x_2^{50}+x_3^{50}+x_4^{50}$의 값이 될 수 있는 수는 $-4$, 0, 4의 3개이다. 답 3

## STEP 3 상위권 마스터 본문 45쪽

### 191

TIP $\beta^{51}$을 공통인수로 묶어내어 식을 변형한다.

$\alpha\beta^{50}+\alpha^2\beta^{49}+\alpha^3\beta^{48}+\alpha^4\beta^{47}+\cdots+\alpha^{49}\beta^2+\alpha^{50}\beta$
$=\beta^{51}\left\{\frac{\alpha}{\beta}+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3+\cdots+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{50}\right\}$ ····· ㉠

이때 $\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$에서
$\beta^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2=i$이므로
$\beta^4=(\beta^2)^2=i^2=-1$, $\beta^8=(\beta^4)^2=(-1)^2=1$
$\therefore \beta^{51}=\beta^{8\times6+3}=(\beta^8)^6\times\beta^3=\beta^3$

또, $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-i$

따라서 ㉠에서
$\alpha\beta^{50}+\alpha^2\beta^{49}+\alpha^3\beta^{48}+\alpha^4\beta^{47}+\cdots+\alpha^{49}\beta^2+\alpha^{50}\beta$
$=\beta^3\{(-i)+(-i)^2+(-i)^3+\cdots+(-i)^{50}\}$
$=i\beta\{(-i)+(-1)+i+1+\cdots+(-i)+(-1)\}$
$=i\beta(-1-i)$
$=i\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\times(-1-i)=\sqrt{2}$ 답 ④

### 192

TIP $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3$의 값이 실수인 경우를 나누어 생각한다.

$1^3=1$, $(-1)^3=-1$, $i^3=-i$, $(-i)^3=i$이고 $i^3+(-i)^3=0$이므로 $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3$의 값이 실수가 되려면 네 수 $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$가 모두 1 또는 $-1$이거나 네 수 중 두 수가 각각 $i$, $-i$이고 나머지 두 수는 1 또는 $-1$이거나 네 수 중 두 수는 $i$, 나머지 두 수는 $-i$이어야 한다.

### 193

TIP $n=3k$, $n=3k+1$, $n=3k+2$일 때로 나누어 $f(n)$을 구한다.

$z=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$에서 $2z+1=\sqrt{3}i$
양변을 제곱하면
$4z^2+4z+1=-3$ $\therefore z^2+z+1=0$
또, $\overline{z}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$에서 $2\overline{z}+1=-\sqrt{3}i$
양변을 제곱하면
$4\overline{z}^2+4\overline{z}+1=-3$ $\therefore \overline{z}^2+\overline{z}+1=0$
즉, $z+z^2+z^3=0$, $\overline{z}+\overline{z}^2+\overline{z}^3=0$
음이 아닌 정수 $k$에 대하여

(i) $n=3k+1$일 때,
$f(n)$
$=n\times\{(z+z^2+z^3)+\cdots+(z^{n-3}+z^{n-2}+z^{n-1})+z^n\}$
$\times\{(\overline{z}+\overline{z}^2+\overline{z}^3)+\cdots+(\overline{z}^{n-3}+\overline{z}^{n-2}+\overline{z}^{n-1})+\overline{z}^n\}$
$=nz^n\overline{z}^n=n(z\overline{z})^n=n\times1^n=n$

(ii) $n=3k+2$일 때,
$f(n)$
$=n\times\{(z+z^2+z^3)+\cdots$
$+(z^{n-4}+z^{n-3}+z^{n-2})+z^{n-1}+z^n\}$
$\times\{(\overline{z}+\overline{z}^2+\overline{z}^3)+\cdots$
$+(\overline{z}^{n-4}+\overline{z}^{n-3}+\overline{z}^{n-2})+\overline{z}^{n-1}+\overline{z}^n\}$
$=n(z^{n-1}+z^n)(\overline{z}^{n-1}+\overline{z}^n)$
$=n\times z^{n-1}(1+z)\times\overline{z}^{n-1}(1+\overline{z})$
$=nz^{n-1}\overline{z}^{n-1}(1+z)(1+\overline{z})$
$=n(z\overline{z})^{n-1}(1+z+\overline{z}+z\overline{z})$
$=n\times1^{n-1}\times(1-1+1)=n$

(iii) $n=3k+3$일 때,

$f(n)=n\times\{(z+z^2+z^3)+\cdots+(z^{n-2}+z^{n-1}+z^n)\}$

$\times\{(\bar{z}+\bar{z}^2+\bar{z}^3)+\cdots+(\bar{z}^{n-2}+\bar{z}^{n-1}+\bar{z}^n)\}$

$=0$

ㄱ. $4=3\times1+1$이므로 (i)에 의하여 $f(4)=4$

ㄴ. $m$이 자연수이면 (iii)에 의하여 $f(3m)=0$

ㄷ. $m=3k+1$일 때 (i), (ii)에 의하여

$f(m)+f(m+1)=m+(m+1)=6k+3$

이때 $6k+3=99$이면 $k=16$, $m=49$

$m=3k+2$일 때 (ii), (iii)에 의하여

$f(m)+f(m+1)=m+0=3k+2$

이때 $3k+2=99$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $k$는 존재하지 않는다.

$m=3k+3$일 때 (i), (iii)에 의하여

$f(m)+f(m+1)=0+m+1=3k+4$

이때 $3k+4=99$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $k$는 존재하지 않는다.

즉, $f(m)+f(m+1)=99$인 자연수 $m$의 값은 49의 1개이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④



# 05 이차방정식

## STEP 1 핵심기출 마스터

본문 47~51쪽

**0194** $-2(x+1)^2=x^2+5x-5$에서

$-2x^2-4x-2=x^2+5x-5$, $3x^2+9x-3=0$

$x^2+3x-1=0$

$\therefore x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times(-1)}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$ 답 ①

**0195** 이차방정식 $x^2+(-a+1)x-6a=0$의 한 근이 $-3$이므로

$(-3)^2+(-a+1)\times(-3)-6a=0$, $-3a+6=0$

$\therefore a=2$

이차방정식 $kx^2-(k+3)x-k+2=0$의 한 근이 $a$, 즉 2이므로

$k\times2^2-(k+3)\times2-k+2=0$, $k-4=0$

$\therefore k=4$

$\therefore a+k=2+4=6$ 답 6

**0196** 이차방정식 $kx^2+(a+1)x+2(2k-1)b=0$이 $x=-4$를 근으로 가지므로

$k\times(-4)^2+(a+1)\times(-4)+2(2k-1)b=0$

$\therefore(16+4b)k-4a-2b-4=0$

이 식이 $k$의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$16+4b=0$, $-4a-2b-4=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-4$

$\therefore ab=-4$ 답 −4

**0197** 처음 토지의 한 변의 길이를 $x$ m라 하면 길을 제외한 토지의 넓이는 $(x-2)(x-3)$ m$^2$이다.

길을 제외한 토지의 넓이가 처음 토지의 넓이의 $\frac{5}{8}$이므로

$(x-2)(x-3)=\dfrac{5}{8}x^2$, $8(x-2)(x-3)=5x^2$

$3x^2-40x+48=0$, $(3x-4)(x-12)=0$

$\therefore x=\dfrac{4}{3}$ 또는 $x=12$

이때 $x-2>0$, $x-3>0$에서 $x>3$이므로

$x=12$

따라서 처음 토지의 한 변의 길이는 12 m이므로 그 넓이는

$12\times12=144$(m$^2$) 답 ②

**198** $x^2-|5x-3|-3=0$에서

(i) $x\geq\frac{3}{5}$일 때, $x^2-(5x-3)-3=0$

$x^2-5x=0$, $x(x-5)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=5$

그런데 $x\geq\frac{3}{5}$이므로 $x=5$

(ii) $x<\frac{3}{5}$일 때, $x^2+(5x-3)-3=0$

$x^2+5x-6=0$, $(x+6)(x-1)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=1$

그런데 $x<\frac{3}{5}$이므로 $x=-6$

(i), (ii)에서 방정식 $x^2-|5x-3|-3=0$의 근은

$x=5$ 또는 $x=-6$

따라서 구하는 모든 근의 합은

$5+(-6)=-1$ 답 ③

**199** $\sqrt{(x-2)^2}+6=x^2+\sqrt{x^2}+2$에서

$|x-2|+6=x^2+|x|+2$

(i) $x<0$일 때, $-(x-2)+6=x^2-x+2$, $x^2=6$

$\therefore x=-\sqrt{6}$ 또는 $x=\sqrt{6}$

그런데 $x<0$이므로 $x=-\sqrt{6}$

(ii) $0\leq x<2$일 때, $-(x-2)+6=x^2+x+2$, $x^2+2x-6=0$

$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-1\times(-6)}}{1}=-1\pm\sqrt{7}$

그런데 $0\leq x<2$이므로 $x=-1+\sqrt{7}$

(iii) $x\geq2$일 때, $(x-2)+6=x^2+x+2$, $x^2=2$

$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

그런데 $x\geq2$이므로 해는 없다.

(i), (ii), (iii)에서 방정식 $\sqrt{(x-2)^2}+6=x^2+\sqrt{x^2}+2$의 근은

$x=-\sqrt{6}$ 또는 $x=-1+\sqrt{7}$ 답 ①

**200** $x^2-6x-[x]=0$에서

(i) $6\leq x<7$일 때, $[x]=6$이므로

$x^2-6x-6=0$

$\therefore x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-1\times(-6)}}{1}=3\pm\sqrt{15}$

그런데 $6\leq x<7$이므로 $x=3+\sqrt{15}$

(ii) $7\leq x<8$일 때, $[x]=7$이므로

$x^2-6x-7=0$, $(x+1)(x-7)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=7$

그런데 $7\leq x<8$이므로 $x=7$

(i), (ii)에서 방정식 $x^2-6x-[x]=0$의 근은

$x=3+\sqrt{15}$ 또는 $x=7$ 답 $x=3+\sqrt{15}$ 또는 $x=7$

**201** 이차방정식 $x^2+(2k+1)x+k^2+3=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=(2k+1)^2-4(k^2+3)>0$, $4k-11>0$

$4k>11$ $\therefore k>\frac{11}{4}$

따라서 정수 $k$의 최솟값은 3이다. 답 ⑤

**202** 이차방정식 $3x^2-4x+k+2=0$의 판별식을 $D_1$이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-2)^2-3(k+2)>0$, $-3k-2>0$

$-3k>2$ $\therefore k<-\frac{2}{3}$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+(k+3)x+3k+4=0$의 판별식을 $D_2$라 하면

$D_2=(k+3)^2-4(3k+4)=0$

$k^2-6k-7=0$, $(k+1)(k-7)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=7$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k=-1$ 답 $-1$

**203** $(m^2-4)x^2+6(m-2)x+3=0$이 $x$에 대한 이차방정식이므로

$m^2-4\neq0$, $(m+2)(m-2)\neq0$

$\therefore m\neq-2$, $m\neq2$ …… ㉠

이차방정식 $(m^2-4)x^2+6(m-2)x+3=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=\{3(m-2)\}^2-3(m^2-4)=0$

$m^2-6m+8=0$, $(m-2)(m-4)=0$

$\therefore m=2$ 또는 $m=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $m=4$ 답 ⑤

**204** 이차방정식 $x^2+(a+2)x+2a+b=0$의 판별식을 $D_1$이라 하면

$D_1=(a+2)^2-4(2a+b)=0$

$a^2+4a+4-8a-4b=0$, $a^2-4a+4-4b=0$

$\therefore (a-2)^2=4b$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+(a-2)x-b^2-2=0$의 판별식을 $D_2$라 하면

$D_2=(a-2)^2-4(-b^2-2)$

$=4b+4b^2+8$ ($\because$ ㉠)

$=4\left(b+\frac{1}{2}\right)^2+7>0$

따라서 이차방정식 $x^2+(a-2)x-b^2-2=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 답 서로 다른 두 실근

**205** $x$에 대한 이차방정식 $3x^2-(5a-1)x+2a^2-a+3=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$D=\{-(5a-1)\}^2-4\times3(2a^2-a+3)=0$

$a^2+2a-35=0$, $(a+7)(a-5)=0$

$\therefore a=5$ ($\because a>0$)

이때 주어진 이차식은 $3x^2-24x+48$이고,

$3x^2-24x+48=3(x^2-8x+16)$

$=3(x-4)^2$

으로 인수분해되므로 $k=-4$

$\therefore ak=5\times(-4)=-20$ 답 $-20$

**206** 이차식 $2x^2-2(a+b)x+ab+\frac{c^2}{2}$이 완전제곱식이므로 이차방정식 $2x^2-2(a+b)x+ab+\frac{c^2}{2}=0$은 중근을 갖는다. 즉, 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+b)\}^2-2\left(ab+\frac{c^2}{2}\right)=0$

$a^2+2ab+b^2-2ab-c^2=0$

$\therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 $a$, $b$, $c$를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 $c$인 직각삼각형이다. 답 ⑤

**207** 이차식 $2x^2+xy+my^2-5x+11y-3$을 $x$에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2+(y-5)x+my^2+11y-3$ …… ㉠

㉠이 두 일차식의 곱으로 인수분해되므로 이차방정식 $2x^2+(y-5)x+my^2+11y-3=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=(y-5)^2-4\times2(my^2+11y-3)$

$=(1-8m)y^2-98y+49$

는 $y$에 대한 완전제곱식이어야 한다.

즉, $y$에 대한 이차방정식 $(1-8m)y^2-98y+49=0$은 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 $D'$이라 하면

$\frac{D'}{4}=(-49)^2-49(1-8m)=0$

$49-(1-8m)=0$, $8m+48=0$

$\therefore m=-6$ 답 ①

**Lecture**

**이차식이 두 일차식의 곱으로 인수분해될 조건**

$x$, $y$에 대한 이차식이 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때

(i) 이차식을 $x$ 또는 $y$에 대하여 내림차순으로 정리한다.

(ii) (이차식)$=0$의 판별식 $D$가 완전제곱식이어야 한다.

(iii) $D=0$의 판별식 $D'=0$임을 이용한다.

**208** 이차방정식 $x^2+4x-3=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=-3$

① $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-4)^2-2\times(-3)=22$

② $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$

③ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-4)^3-3\times(-3)\times(-4)=-100$

④ $|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-4)^2-4\times(-3)=28$

이므로 $|\alpha-\beta|=2\sqrt{7}$ ($\because |\alpha-\beta|>0$)

⑤ $|\alpha^3-\beta^3|=|(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)|$

$=|\alpha-\beta||\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2|$

$=2\sqrt{7}\times\{22+(-3)\}$ ($\because$ ①, ④)

$=38\sqrt{7}$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다. 답 ③

**209** 이차방정식 $x^2+5x-2=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-5$

또, $\alpha$는 이차방정식 $x^2+5x-2=0$의 근이므로

$\alpha^2+5\alpha-2=0$에서 $\alpha^2=-5\alpha+2$

$\therefore \alpha^2-5\beta=-5\alpha+2-5\beta=-5(\alpha+\beta)+2$

$=-5\times(-5)+2=27$ 답 27

**210** 이차방정식 $x^2+5x-4=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로

$\alpha^2+5\alpha-4=0$에서 $\alpha^2+6\alpha-2=\alpha+2$

$\beta^2+5\beta-4=0$에서 $\beta^2+6\beta-2=\beta+2$

또한, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=-4$

$\therefore (\alpha^2+6\alpha-2)(\beta^2+6\beta-2)=(\alpha+2)(\beta+2)$

$=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4$

$=(-4)+2\times(-5)+4$

$=-10$ 답 ④

**211** 이차방정식 $4x^2+5mx-4m+5=0$의 두 근을 $k$, $4k$ ($k\neq0$)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$k+4k=-\frac{5}{4}m$ $\therefore k=-\frac{1}{4}m$ …… ㉠

$4k^2=\frac{-4m+5}{4}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4\left(-\frac{1}{4}m\right)^2=\frac{-4m+5}{4}$, $\frac{1}{4}m^2=\frac{-4m+5}{4}$

$m^2+4m-5=0$, $(m+5)(m-1)=0$

$\therefore m=1$ ($\because m>0$) 답 ⑤

**212** 이차방정식 $x^2+(2k-1)x+3k=0$의 두 근을 $\alpha$, $\alpha+7$이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+7)=-(2k-1)$ $\therefore \alpha=-k-3$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+7)=3k$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(-k-3)(-k+4)=3k$

$\underbrace{k^2-4k-12=0}_{(*)}$, $(k+2)(k-6)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=6$

따라서 모든 실수 $k$의 값의 합은

$(-2)+6=4$ 답 **4**

**참고** $(*)$에서 $k$에 대한 이차방정식 $k^2-4k-12=0$은 실근을 갖는 방정식이므로 모든 실수 $k$의 값의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 4이다.

**213** 이차방정식 $x^2+(3k+1)x+9k+6=0$의 두 근을 $n$, $n+1$ ($n$은 정수)이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$n+(n+1)=-(3k+1)$ $\therefore n=-\frac{3}{2}k-1$ …… ㉠

$n(n+1)=9k+6$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\left(-\frac{3}{2}k-1\right)\times\left(-\frac{3}{2}k\right)=9k+6$

$3k^2-10k-8=0$, $(3k+2)(k-4)=0$

$\therefore k=4$ ($\because k>0$) 답 ⑤

**214** 두 근을 $2\alpha$, $3\alpha$ ($\alpha\neq0$)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+3\alpha=5(k-1)$ $\therefore \alpha=k-1$ …… ㉠

$2\alpha\times3\alpha=8k$ $\therefore 3\alpha^2=4k$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$3(k-1)^2=4k$, $3k^2-10k+3=0$

$(3k-1)(k-3)=0$ $\therefore k=\frac{1}{3}$ 또는 $k=3$

따라서 자연수 $k$의 값은 3이다. 답 **3**

**215** 이차방정식 $x^2-(k-1)x-3k+7=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k-1$, $\alpha\beta=-3k+7$

이때 $\alpha+\beta>0$이므로 $k-1>0$

$\therefore k>1$

또, $\alpha^2+\beta^2=8$에서

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(k-1)^2-2(-3k+7)$

$=k^2+4k-13=8$

$k^2+4k-21=0$, $(k+7)(k-3)=0$

$\therefore k=3$ ($\because k>1$) 답 ④

**216** 이차방정식 $x^2-(3k+2)x+k+1=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3k+2$, $\alpha\beta=k+1$

$\therefore \alpha^2\beta+\alpha\beta^2-3\alpha\beta+2\alpha+2\beta=\alpha\beta(\alpha+\beta-3)+2(\alpha+\beta)$

$=(k+1)(3k-1)+2(3k+2)$

$=3k^2+8k+3$

이때 $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-3\alpha\beta+2\alpha+2\beta=14$이므로

$3k^2+8k+3=14$

$3k^2+8k-11=0$, $(3k+11)(k-1)=0$

$\therefore k=1$ ($\because k$는 정수) 답 **1**

**217** 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-(a+b)x-3a+3=0$의 두 근이 $\alpha+2$, $\beta+2$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+2)+(\beta+2)=a+b$, $(\alpha+2)(\beta+2)=-3a+3$

$\therefore \alpha+\beta+4=a+b$, $\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4=-3a+3$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-a+4=a+b$, $b-2a+4=-3a+3$

$\therefore 2a+b=4$, $a+b=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=-6$

$\therefore ab=-30$ 답 **−30**

**218** 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 두 근이 $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\beta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=-b$, $\frac{\beta}{\alpha}\times\frac{\alpha}{\beta}=a$

이때 $a=1$이고

$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=-b$ …… ㉡

$a=1$과 ㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{1-2b}{b}=-b$, $1-2b=-b^2$, $b^2-2b+1=0$

$(b-1)^2=0$ $\therefore b=1$

$\therefore a^2+b^2=1^2+1^2=2$ 답 ①

**219** 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=-\frac{a}{b}$, $\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{b}$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2+\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}=0$ $\therefore bx^2+ax+1=0$ 답 ③

**220** 이차방정식 $x^2-6x+7=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=7$

$$\therefore \frac{3+\alpha}{3-\beta}+\frac{3+\beta}{3-\alpha}=\frac{(3+\alpha)(3-\alpha)+(3+\beta)(3-\beta)}{(3-\beta)(3-\alpha)}$$

$$=\frac{9-\alpha^2+9-\beta^2}{\alpha\beta-3\alpha-3\beta+9}$$

$$=\frac{18-\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}}{\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9}$$

$$=\frac{18-(6^2-2\times7)}{7-3\times6+9}=2$$

$$\frac{3+\alpha}{3-\beta}\times\frac{3+\beta}{3-\alpha}=\frac{9+3\alpha+3\beta+\alpha\beta}{9-3\alpha-3\beta+\alpha\beta}$$

$$=\frac{9+3(\alpha+\beta)+\alpha\beta}{9-3(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$$

$$=\frac{9+3\times6+7}{9-3\times6+7}=-17$$

따라서 $\frac{3+\alpha}{3-\beta}$, $\frac{3+\beta}{3-\alpha}$를 두 근으로 하고 $x^2$의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-2x-17=0$ 답 $x^2-2x-17=0$

**221** $\overline{AH}=\alpha$, $\overline{AE}=\beta$라 하면

$\overline{PG}=10-\alpha$, $\overline{PF}=10-\beta$

직사각형 PFCG의 둘레의 길이가 28이므로

$2(10-\alpha)+2(10-\beta)=28$

$\therefore \alpha+\beta=6$ …… ㉠

직사각형 PFCG의 넓이가 46이므로

$(10-\alpha)(10-\beta)=46$

$\alpha\beta-10\alpha-10\beta+100=46$, $\alpha\beta-10(\alpha+\beta)=-54$

$\alpha\beta-10\times6=-54$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \alpha\beta=6$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha$, $\beta$를 두 근으로 하고 $x^2$의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-6x+6=0$ 답 ②

**222** 윤주는 $a$와 $c$를 바르게 보고 풀었으므로

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근의 곱은

$\frac{c}{a}=(-8)\times3=-24$

$\therefore c=-24a$ …… ㉠

현이는 $a$와 $b$를 바르게 보고 풀었으므로

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근의 합은

$-\frac{b}{a}=(1+\sqrt{21})+(1-\sqrt{21})=2$

$\therefore b=-2a$ …… ㉡

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2-2ax-24a=0$

$a\neq0$이므로 양변을 $a$로 나누면

$x^2-2x-24=0$, $(x+4)(x-6)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=6$

따라서 올바른 두 근 중 양수인 근은 6이다. 답 6

참고 $ax^2+bx+c=0$이 $x$에 대한 이차방정식이므로 $a\neq0$이다.

**223** $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(3x-5)=0$이려면

$3x-5=\alpha$ 또는 $3x-5=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha+5}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta+5}{3}$

따라서 이차방정식 $f(3x-5)=0$의 두 근의 합은

$\frac{\alpha+5}{3}+\frac{\beta+5}{3}=\frac{\alpha+\beta+10}{3}=\frac{8+10}{3}=6$ 답 ④

**224** 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{-6}{2}=3$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(x-2)=0$이려면

$x-2=\alpha$ 또는 $x-2=\beta$

$\therefore x=\alpha+2$ 또는 $x=\beta+2$

따라서 이차방정식 $f(x-2)=0$의 두 근의 합은

$(\alpha+2)+(\beta+2)=(\alpha+\beta)+4=3+4=7$ 답 7

**225** $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(-2x+3)=0$이려면

$-2x+3=\alpha$ 또는 $-2x+3=\beta$

$\therefore x=\frac{-\alpha+3}{2}$ 또는 $x=\frac{-\beta+3}{2}$

따라서 이차방정식 $f(-2x+3)=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{-\alpha+3}{2}\times\frac{-\beta+3}{2}=\frac{(-\alpha+3)(-\beta+3)}{4}$$

$$=\frac{\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9}{4}$$

$$=\frac{-1-3\times(-4)+9}{4}=5$$ 답 5

**226** 이차방정식 $f(6x+1)=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면

$\alpha+\beta=-1$, $f(6\alpha+1)=0$, $f(6\beta+1)=0$

즉, 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근은

$x=6\alpha+1$ 또는 $x=6\beta+1$

따라서 두 근의 합은

$(6\alpha+1)+(6\beta+1)=6(\alpha+\beta)+2$

$=6\times(-1)+2=-4$ 답 ③

**227** $a$, $b$가 실수이므로 이차방정식

$x^2+(a-1)x+3b+1=0$의 한 근이 $-1+ai$이면 $-1-ai$도 근이다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1+ai)+(-1-ai)=-(a-1)$

$-2=-a+1$ $\therefore a=3$

$(-1+ai)(-1-ai)=3b+1$, $1+a^2=3b+1$

$10=3b+1$ ($\because a=3$) $\therefore b=3$

$\therefore ab=3\times3=9$ 답 ③

**0228** $\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=\frac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}=3+2\sqrt{2}$

$a$, $b$가 유리수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $3+2\sqrt{2}$이면 $3-2\sqrt{2}$도 근이다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=-a$

$6=-a$ $\therefore a=-6$

$(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=b$ $\therefore b=1$

따라서 이차방정식 $x^2+bx+a=0$, 즉 $x^2+x-6=0$에서

$(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$ 답 $x=-3$ 또는 $x=2$

**0229** $a$, $b$가 실수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2+2i$이면 $2-2i$도 근이다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+2i)+(2-2i)=-a$

$4=-a$ $\therefore a=-4$

$(2+2i)(2-2i)=b$ $\therefore b=8$

즉, $\frac{b}{a}=-2$, $\frac{a}{b}=-\frac{1}{2}$을 두 근으로 하고 $x^2$의 계수가 2인 이차방정식은

$2(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$ $\therefore 2x^2+5x+2=0$

따라서 $m=5$, $n=2$이므로

$mn=10$ 답 **10**

## STEP 2 실전 마스터 본문 52~55쪽

**0230** 공이 점 O를 출발한 후 $x$분 동안 움직인 거리는 $\left(x^2+\frac{5}{2}x\right)$ m이고, 점 O를 출발한 후 처음 한 바퀴 도는 데 5분이 걸렸으므로 처음 한 바퀴를 도는 5분 동안 움직인 거리는

$5^2+\frac{5}{2}\times5=\frac{75}{2}$(m)

즉, 이 공이 점 O를 출발하여 두 바퀴를 도는 동안 움직이는 거리는 75 m이므로 두 바퀴를 도는 데 $t$분이 걸렸다고 하면

$t^2+\frac{5}{2}t=75$

$2t^2+5t-150=0$, $(2t-15)(t+10)=0$

$\therefore t=\frac{15}{2}=7.5$ ($\because t>0$)

따라서 두 바퀴를 도는 데 7분 30초가 걸리므로 구하는 시간은 처음 한 바퀴를 도는 데 걸리는 5분을 뺀 2분 30초이다.

답 ②

**0231** 이차방정식 $ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이므로 $a(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{3}b(2+\sqrt{3})+c=0$

$\therefore (7a+3b+c)+(4a+2b)\sqrt{3}=0$

이때 $a$, $b$, $c$가 유리수이므로

$7a+3b+c=0$, $4a+2b=0$

$\therefore c=-7a-3b$, $b=-2a$

$b=-2a$를 $c=-7a-3b$에 대입하면

$c=-7a-3\times(-2a)=-a$

즉, 이차방정식 $ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$에서

$ax^2-2\sqrt{3}ax-a=0$ $\therefore x^2-2\sqrt{3}x-1=0$ ($\because a\neq0$)

따라서 이차방정식 $x^2-2\sqrt{3}x-1=0$의 근은

$x=\frac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{12+4}}{2}=\sqrt{3}\pm2$

이므로 $\beta=-2+\sqrt{3}$

$\therefore \alpha+\frac{1}{\beta}=(2+\sqrt{3})+\frac{1}{-2+\sqrt{3}}$

$=(2+\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})=0$ 답 ③

다른풀이1

$t=\sqrt{3}x$로 놓으면 $x=\frac{t}{\sqrt{3}}$이므로 주어진 이차방정식은

$\frac{a}{3}t^2+bt+c=0$, 즉 $at^2+3bt+3c=0$ ……㉠

이고 이차방정식의 두 근은 $\sqrt{3}\alpha$, $\sqrt{3}\beta$이다.

이때 $\sqrt{3}\alpha=\sqrt{3}\times(2+\sqrt{3})=3+2\sqrt{3}$이고 이차방정식 ㉠의 계수가 모두 유리수이므로 다른 한 근 $\sqrt{3}\beta$는 $3-2\sqrt{3}$이다.

따라서 $\beta=\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=-2+\sqrt{3}$이므로

$\alpha+\frac{1}{\beta}=(2+\sqrt{3})+\frac{1}{-2+\sqrt{3}}=0$

다른풀이2

이차방정식 $x^2-2\sqrt{3}x-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=-1$이므로

$\alpha+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha\beta+1}{\beta}=\frac{-1+1}{\beta}=0$

**0232** $[2x]^2-[x]-5=0$에서

(i) $n\le x<n+\frac{1}{2}$ ($n$은 정수)일 때,

$2n\le2x<2n+1$이므로 $[2x]=2n$, $[x]=n$

즉, $(2n)^2-n-5=0$에서 $4n^2-n-5=0$

$(n+1)(4n-5)=0$ $\therefore n=-1$ ($\because n$은 정수)

(ii) $n+\frac{1}{2}\le x<n+1$ ($n$은 정수)일 때,

$2n+1\le2x<2n+2$이므로 $[2x]=2n+1$, $[x]=n$

즉, $(2n+1)^2-n-5=0$에서 $4n^2+3n-4=0$

$\therefore n=\frac{-3\pm\sqrt{73}}{8}$

그런데 $n$은 정수이므로 해가 없다.

(i), (ii)에서 구하는 $x$의 값의 범위는

$-1\le x<-\frac{1}{2}$ 답 $-1\le x<-\frac{1}{2}$

**233** $|x^2+(a-3)x+1|=2$에서

$x^2+(a-3)x+1=2$ 또는 $x^2+(a-3)x+1=-2$

(i) $x^2+(a-3)x+1=2$, 즉 $x^2+(a-3)x-1=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-(a-3)$

(ii) $x^2+(a-3)x+1=-2$, 즉 $x^2+(a-3)x+3=0$의 두 근을 $\gamma$, $\delta$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\gamma+\delta=-(a-3)$

방정식 $|x^2+(a-3)x+1|=2$의 모든 근의 합이 0이므로

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-(a-3)-(a-3)=0$

$-2a+6=0$ $\therefore a=3$ 답 ③

**234** 이차방정식 $ax^2+2bx+2c=bx^2+4cx+a$, 즉 $(a-b)x^2+2(b-2c)x+2c-a=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(b-2c)^2-(a-b)(2c-a)$ …… ㉠

ㄱ. $2c<b<a$이면 $(b-2c)^2>0$, $a-b>0$, $2c-a<0$이므로 ㉠에서 $D>0$

즉, 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. $a<b<2c$이면 $(b-2c)^2>0$, $a-b<0$, $2c-a>0$이므로 ㉠에서 $D>0$

즉, 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. $b=2c$이면 $b-2c=0$이므로

$\frac{D}{4}=-(a-2c)(2c-a)=(2c-a)^2\geq 0$

즉, 주어진 이차방정식은 중근 또는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

**235** 이차방정식 $\{\sqrt{n(n+1)}+n\}x^2-\sqrt{n}x-5=0$의 두 근이 $\alpha_n$, $\beta_n$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\alpha_n+\beta_n&=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}+n}\\&=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\\&=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\&=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}\\&=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\end{aligned}$$

$\therefore (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{99})+(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\cdots+\beta_{99})$

$=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)+(\alpha_3+\beta_3)+\cdots+(\alpha_{99}+\beta_{99})$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots$

$+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$

$=\sqrt{100}-1=9$ 답 **9**

**236** 이차방정식 $x^2+2ax-9a=0$ $(a>0)$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2a$, $\alpha\beta=-9a$

이때 $a>0$이므로 $\alpha\beta<0$ …… ㉠

$|\alpha|+|\beta|=12$의 양변을 제곱하면

$|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2=12^2$, $\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2=144$

$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=144$ ($\because$ ㉠), $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=144$

$(-2a)^2-4\times(-9a)=144$, $4a^2+36a-144=0$

$4(a+12)(a-3)=0$ $\therefore a=3$ ($\because a>0$)

따라서 $\alpha+\beta=-6$, $\alpha\beta=-27$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-6)^2-2\times(-27)=90$ 답 **90**

**237** 이차방정식 $x^2+(a-4)x-1=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-(a-4)$ …… ㉠

$\alpha\beta=-1$ …… ㉡

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\alpha$, $\gamma$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\gamma=-a$ …… ㉢

$\alpha\gamma=b$ …… ㉣

㉠−㉢을 하면 $\beta-\gamma=4$

이때 $2\alpha=\beta-\gamma$이므로 $2\alpha=4$ $\therefore \alpha=2$

$\alpha=2$를 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣에 대입하여 풀면

$\beta=-\frac{1}{2}$, $\gamma=-\frac{9}{2}$, $a=\frac{5}{2}$, $b=-9$

$\therefore 2a-b=14$ 답 **14**

**238** 이차방정식 $x^2+(m+1)x+2m-1=0$의 판별식을 $D$라 하면

$x=\frac{-(m+1)\pm\sqrt{D}}{2}$

이므로 두 근이 정수가 되기 위해서는 판별식 $D$가 제곱수이거나 0이어야 한다.

$D=(m+1)^2-4(2m-1)$

$=m^2-6m+5$

$=(m-3)^2-4$

즉, $D$는 제곱수가 아니므로 0이어야 한다.

이때 $m^2-6m+5=0$에서 $(m-1)(m-5)=0$

$\therefore m=1$ 또는 $m=5$

(i) $m=1$일 때,

$x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$ $\therefore x=-1$

즉, 주어진 이차방정식의 근은 정수이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $m=5$일 때,

$x^2+6x+9=0$, $(x+3)^2=0$ $\therefore x=-3$

즉, 주어진 이차방정식의 근은 정수이므로 조건을 만족시킨다.

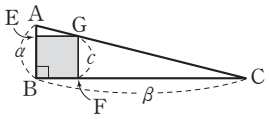
(i), (ii)에서 $m=1$ 또는 $m=5$이므로 그 합은

$1+5=6$ 답 ①

**239** 이차방정식 $x^2-6x+3=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$ $(\alpha<\beta)$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=3$

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC에 내접하는 정사각형 EBFG의 한 변의 길이를 $c$라 하면 $\triangle ABC=\triangle AEG+\square EBFG+\triangle GFC$에서




$$\frac{1}{2}\alpha\beta=\frac{1}{2}c(\alpha-c)+c^2+\frac{1}{2}c(\beta-c)$$

$$=\frac{1}{2}c(\alpha+\beta)$$

즉, $\alpha\beta=c(\alpha+\beta)$이므로

$$c=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

따라서 정사각형 EBFG의 넓이는 $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, 둘레의 길이는 $4\times\frac{1}{2}=2$이므로 이차방정식 $4x^2+mx+n=0$의 두 근이 $\frac{1}{4}$, 2이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{4}+2=-\frac{m}{4}$ $\therefore m=-9$

$\frac{1}{4}\times2=\frac{n}{4}$ $\therefore n=2$

$\therefore m+n=-7$ 답 $-7$

다른풀이

$\frac{1}{4}$, 2를 두 근으로 하고 $x^2$의 계수가 4인 이차방정식은

$4\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-2)=0$ $\therefore 4x^2-9x+2=0$

따라서 $m=-9$, $n=2$이므로

$m+n=-7$

**240** 이차방정식 $x^2-(a^2-2a-3)x-b+5=0$의 두 근의 절댓값이 같고 부호가 반대이므로 두 근을 $\alpha$, $-\alpha$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$\alpha+(-\alpha)=a^2-2a-3$, $(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

즉, 정수 $a$의 최댓값은 3이므로 $p=3$

또, 두 근의 곱은 $\alpha\times(-\alpha)=-b+5$

$-\alpha^2=-b+5$

이때 $-\alpha^2<0$이므로 $-b+5<0$ $\therefore b>5$

즉, 정수 $b$의 최솟값은 6이므로 $q=6$

$a=3$, $b=6$일 때, 주어진 이차방정식은

$x^2-1=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

즉, $\alpha=-1$, $\beta=1$ 또는 $\alpha=1$, $\beta=-1$이므로

$\alpha^2+\beta^2=1^2+(-1)^2=2$ $\therefore r=2$

$\therefore p+q+r=3+6+2=11$ 답 ④

**241** 이차방정식 $x^2-x-8=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-8$ …… ㉠

이차식 $f(x)$에 대하여 $f(0)=8$이므로

$f(x)=ax^2+bx+8$ $(a\neq0)$로 놓을 수 있다.

이때 $f(\alpha)=f(\beta)=-8$이므로 $\alpha$, $\beta$는 방정식 $f(x)=-8$, 즉 $f(x)+8=0$의 두 근이다.

$f(x)+8=ax^2+bx+16=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{16}{a}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{b}{a}=1$, $-8=\frac{16}{a}$

$\therefore a=-2$, $b=2$

따라서 $f(x)=-2x^2+2x+8$이므로

$f\left(\alpha+\beta+\frac{1}{4}\alpha\beta\right)=f(-1)=-2-2+8=4$ 답 4

**242** 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면

$\alpha+\beta=-5$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f\left(\frac{1}{x}\right)=0$이려면

$\frac{1}{x}=\alpha$ 또는 $\frac{1}{x}=\beta$ $\therefore x=\frac{1}{\alpha}$ 또는 $x=\frac{1}{\beta}$

$f\left(\frac{1}{x}\right)=0$의 두 근의 곱이 $-2$이므로

$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=-2$ $\therefore \alpha\beta=-\frac{1}{2}$

또, $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f\left(\frac{1}{2x-3}\right)=0$이 되려면

$\frac{1}{2x-3}=\alpha$ 또는 $\frac{1}{2x-3}=\beta$

$2x-3=\frac{1}{\alpha}$ 또는 $2x-3=\frac{1}{\beta}$

$\therefore x=\frac{1}{2\alpha}+\frac{3}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2\beta}+\frac{3}{2}$

따라서 $f\left(\frac{1}{2x-3}\right)=0$의 두 근의 합은

$\left(\frac{1}{2\alpha}+\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{1}{2\beta}+\frac{3}{2}\right)=\frac{\beta+\alpha}{2\alpha\beta}+3=\frac{-5}{-1}+3=8$ 답 8

**243** $f(q+2i)=2p$이므로 $q+2i$는 방정식 $f(x)=2p$, 즉 $f(x)-2p=0$의 근이다.

이때 $p$, $q$가 실수이므로 이차방정식 $f(x)-2p=0$, 즉 $x^2+px+q-2p=0$의 한 근이 $q+2i$이면 $q-2i$도 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(q+2i)+(q-2i)=-p$ $\therefore p=-2q$

$(q+2i)(q-2i)=q-2p$, $q^2+4=q-2p$

$q^2+4=q+4q$ $(\because p=-2q)$, $q^2-5q+4=0$

$(q-1)(q-4)=0$ $\therefore q=4$ $(\because q>1)$

$\therefore f(x)=x^2-8x+4$

따라서 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는
$f(1)=1-8+4=-3$ 답 ③

**244** $m$, $n$이 실수이므로 이차방정식 $x^2-2mx+n=0$의 한 허근이 $\alpha$이면 $\overline{\alpha}$도 근이다.
이때 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\overline{\alpha}=2m$ …… ㉠
$\alpha\overline{\alpha}=n$ …… ㉡
또, $m$, $n$이 실수이므로 이차방정식 $x^2-2nx+m+1=0$의 한 허근이 $\alpha+1$이면 $\overline{\alpha+1}=\overline{\alpha}+1$도 근이다.
이때 근과 계수의 관계에 의하여
$(\alpha+1)+(\overline{\alpha}+1)=2n$
$\alpha+\overline{\alpha}+2=2n$, $2m+2=2n$ ($\because$ ㉠), $m+1=n$
$\therefore m-n=-1$ …… ㉢
$(\alpha+1)(\overline{\alpha}+1)=m+1$
$\alpha\overline{\alpha}+\alpha+\overline{\alpha}+1=m+1$, $n+2m+1=m+1$ ($\because$ ㉠, ㉡)
$\therefore m+n=0$ …… ㉣
㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{2}$이므로
$mn=-\frac{1}{4}$ 답 ②

**245** 계수가 실수인 이차방정식 $f(x)=0$의 한 근이 $\alpha=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$이므로 $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$도 근이다.
이때 근과 계수의 관계에 의하여
(두 근의 합)$=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=1$
(두 근의 곱)$=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\times\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=1$
이므로 $f(x)=a(x^2-x+1)$ ($a\neq0$)로 놓을 수 있다.
이때 $f(\alpha)=0$이므로 $\alpha^2-\alpha+1=0$ …… ㉠
㉠의 양변에 $\alpha+1$을 곱하면
$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$, $\alpha^3+1=0$ $\therefore \alpha^3=-1$
$\therefore f(\alpha^5+\alpha^4+\alpha)=f(-\alpha^2-\alpha+\alpha)=f(-\alpha^2)$
$=a(\alpha^4+\alpha^2+1)=a(-\alpha+\alpha^2+1)$
$=0$ ($\because$ ㉠) 답 ②

**246** 이차방정식 $x^2-px+p+3=0$이 허근 $\alpha$를 가지므로
$\alpha^2-p\alpha+p+3=0$ $\therefore \alpha^2=p\alpha-(p+3)$ …… ㉠
㉠의 양변에 $\alpha$를 곱하면
$\alpha^3=p\alpha^2-(p+3)\alpha$
$=p\{p\alpha-(p+3)\}-(p+3)\alpha$ ($\because$ ㉠)
$=(p^2-p-3)\alpha-p^2-3p$
이때 $\alpha$는 허수이므로 $\alpha^3$이 실수가 되려면 $p^2-p-3=0$이어야 한다.
따라서 모든 실수 $p$의 값의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 $-3$이다. 답 ②

**247** 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 $D$라 하면
$D=b^2-4ac$
이때 $b^2\geq0$이고, $a$와 $c$의 부호가 다르면 $ac<0$이므로
$-4ac>0$ $\therefore D>0$
따라서 $a$와 $c$의 부호가 다르면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다. 답 **풀이 참조**

**248** 이차방정식
$x^2-2(a+b)x+(a-b)^2+3ab-a-5b=0$
이 중근을 가지므로 판별식을 $D$라 하면
$\frac{D}{4}=\{-(a+b)\}^2-\{(a-b)^2+3ab-a-5b\}=0$
$ab+a+5b=0$, $ab+a+5b+5=5$
$\therefore (a+5)(b+1)=5$
$a+5$, $b+1$이 정수이므로
(i) $a+5=-1$, $b+1=-5$이면 $a=-6$, $b=-6$
$\therefore ab=36$
(ii) $a+5=-5$, $b+1=-1$이면 $a=-10$, $b=-2$
$\therefore ab=20$
(iii) $a+5=1$, $b+1=5$이면 $a=-4$, $b=4$
$\therefore ab=-16$
(iv) $a+5=5$, $b+1=1$이면 $a=0$, $b=0$
$\therefore ab=0$
(i)~(iv)에서 $ab$의 최댓값은 36이다. 답 **36**

**249** 이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로
$\alpha^2-4\alpha+2=0$, $\beta^2-4\beta+2=0$
$\therefore \alpha^2-\alpha+2=3\alpha$, $\beta^2-\beta+2=3\beta$ …… ㉠
또, 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$ …… ㉡
$\therefore \frac{\beta-\alpha}{\alpha^3-\alpha^2+2\alpha}+\frac{\alpha-\beta}{\beta^3-\beta^2+2\beta}$
$=\frac{\beta-\alpha}{\alpha(\alpha^2-\alpha+2)}+\frac{\alpha-\beta}{\beta(\beta^2-\beta+2)}$
$=\frac{\beta-\alpha}{\alpha\times3\alpha}+\frac{\alpha-\beta}{\beta\times3\beta}$ ($\because$ ㉠)
$=\frac{\beta-\alpha}{3\alpha^2}+\frac{\alpha-\beta}{3\beta^2}$
$=\frac{\beta^2(\beta-\alpha)+\alpha^2(\alpha-\beta)}{3\alpha^2\beta^2}$
$=\frac{(\alpha-\beta)(\alpha^2-\beta^2)}{3(\alpha\beta)^2}$
$=\frac{(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)}{3(\alpha\beta)^2}$
$=\frac{\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}(\alpha+\beta)}{3(\alpha\beta)^2}$
$=\frac{(4^2-4\times2)\times4}{3\times2^2}$ ($\because$ ㉡)
$=\frac{8}{3}$ 답 ③

**0250** 이차방정식 $x^2+kx+3k-9=0$의 두 근의 절댓값의 비가 1 : 3이고 $k<0$에서 두 근의 곱이 $3k-9<-9<0$이므로 두 근의 부호가 서로 다르다.

두 근을 $\alpha$, $-3\alpha$라 할 때, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-3\alpha)=-k$ $\quad\therefore \alpha=\frac{k}{2}$ …… ㉠

$\alpha\times(-3\alpha)=3k-9$ $\quad\therefore \alpha^2=-k+3$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\left(\frac{k}{2}\right)^2=-k+3$, $k^2+4k-12=0$

$(k+6)(k-2)=0$

$\therefore k=-6$ 또는 $k=2$

그런데 $k<0$이므로 $k=-6$

따라서 이차방정식 $x^2-kx+3k+1=0$, 즉 $x^2+6x-17=0$의 두 근의 곱은 $-17$이다. 답 $-17$

**0251** 이차방정식 $x^2-px+q=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=p$, $\alpha\beta=q$

조건 (나)에서 자연수 $\alpha$, $\beta$의 양의 약수가 각각 3개이므로 $\alpha$, $\beta$는 소수의 제곱수이다.

이때 조건 (가)에서 $\alpha+\beta\le100$, $\alpha\beta\le100$이므로 $\alpha$, $\beta$는 $2^2$, $3^2$, $5^2$ 중 하나이고, 가능한 순서쌍 $(\alpha, \beta)$는

$(2^2, 3^2)$, $(2^2, 5^2)$, $(3^2, 2^2)$, $(5^2, 2^2)$

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 $(p, q)$는

$(13, 36)$, $(29, 100)$의 2개이다. 답 ②

**0252** 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로

$\alpha^2+\alpha+1=0$, $\beta^2+\beta+1=0$ …… ㉠

또, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$ $\quad\therefore \alpha=-\beta-1$, $\beta=-\alpha-1$ …… ㉡

이때 ㉠에서 $\alpha^2=-\alpha-1$, $\beta^2=-\beta-1$이므로

$\alpha^2=-\alpha-1=\beta$, $\beta^2=-\beta-1=\alpha$ …… ㉢

㉡, ㉢을 $f(\alpha^2)=-4\alpha$, $f(\beta^2)=-4\beta$에 대입하면

$f(\beta)=-4(-\beta-1)$, $f(\alpha)=-4(-\alpha-1)$

즉, $\alpha$, $\beta$는 방정식 $f(x)=-4(-x-1)$, 즉 $f(x)-4x-4=0$의 두 근이다.

따라서 $\alpha$, $\beta$가 방정식 $x^2+px+q-4x-4=0$, 즉 $x^2+(p-4)x+q-4=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-(p-4)=-1$ $\quad\therefore p=5$

$\alpha\beta=q-4=1$ $\quad\therefore q=5$

$\therefore p+q=10$ 답 10

다른풀이

$f(x)-4x-4=0$은 최고차항의 계수가 1인 이차방정식이고,

$f(x)-4x-4=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로

$f(x)-4x-4=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+x+1$

따라서 $f(x)=x^2+5x+5$이므로 $p=5$, $q=5$

$\therefore p+q=10$

## STEP 3 상위권 마스터

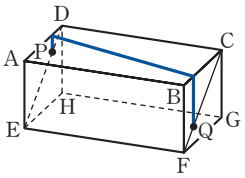
본문 56~57쪽

**0253**

TIP $\overline{AD}$, $\overline{BC}$를 지나는 경우와 $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BF}$를 지나는 경우로 나누어 최단거리를 구한다.

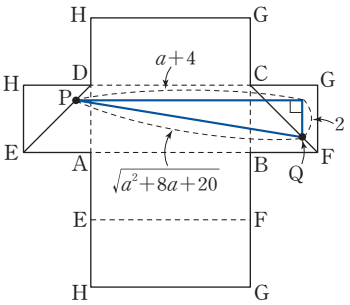
점 P에서 직육면체의 겉면을 따라 점 Q까지 최단거리로 가는 경로는 다음과 같다.

(i) $\overline{AD}$, $\overline{BC}$를 지나는 경우

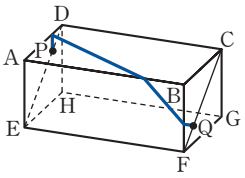



전개도는 다음 그림과 같으므로 최단거리는

$\overline{PQ}=\sqrt{(a+4)^2+2^2}=\sqrt{a^2+8a+20}$

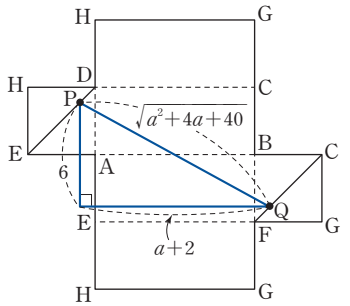



(ii) $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BF}$를 지나는 경우




전개도는 다음 그림과 같으므로 최단거리는

$\overline{PQ}=\sqrt{(a+2)^2+6^2}=\sqrt{a^2+4a+40}$



(i), (ii)에서

$(a^2+4a+40)-(a^2+8a+20)=-4a+20<0$ ($\because a>5$)

이므로 최단거리는 $\sqrt{a^2+4a+40}$이다.

즉, $\sqrt{a^2+4a+40}=2\sqrt{34}$에서

$a^2+4a+40=136$, $a^2+4a-96=0$

$(a+12)(a-8)=0$ $\therefore a=8$ ($\because a>5$)

$\therefore 30a=240$ 답 **240**

**Lecture**

직육면체 ABCD−EFGH의 두 면 AEHD, BFGC는 정사각형이고 $\overline{PD}=\overline{QF}$이므로 점 P에서 직육면체의 겉면을 따라 점 Q에 도달할 때,

(i) 두 모서리를 지나는 경우

$\overline{AD}$, $\overline{BC}$를 지나는 경우
$\overline{DH}$, $\overline{CG}$를 지나는 경우
$\overline{EH}$, $\overline{FG}$를 지나는 경우
$\overline{AE}$, $\overline{BF}$를 지나는 경우
⇨ 최단거리는 모두 같다.

(ii) 세 모서리를 지나는 경우

$\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BF}$를 지나는 경우
$\overline{DH}$, $\overline{HG}$, $\overline{GF}$를 지나는 경우
⇨ 최단거리는 모두 같다.

## 254

TIP 두 근의 부호가 다르면 두 근의 곱이 음수임을 이용한다.

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$ …… ㉠

또, 이차방정식 $x^2+(2a+b)x-8b=0$의 두 근이 $|\alpha|+|\beta|$, $|\alpha||\beta|$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(|\alpha|+|\beta|)+|\alpha||\beta|=-(2a+b)$ …… ㉡

$(|\alpha|+|\beta|)\times|\alpha||\beta|=-8b$ …… ㉢

이때 $\alpha$, $\beta$의 부호가 서로 다르므로

$|\alpha||\beta|=-\alpha\beta=-b$

즉, ㉢에서 $(|\alpha|+|\beta|)\times(-b)=-8b$

$\therefore |\alpha|+|\beta|=8$ …… ㉣

㉣과 $|\alpha||\beta|=-b$를 ㉡에 대입하면

$8-b=-2a-b$ $\therefore a=-4$

㉣의 양변을 제곱하면 $(|\alpha|+|\beta|)^2=8^2$

$\alpha^2+\beta^2+2|\alpha\beta|=64$, $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2\alpha\beta=64$

$a^2-4b=64$ ($\because$ ㉠)

에서 $a=-4$이므로 $b=-12$

$\therefore a+b=-16$ 답 **−16**

## 255

TIP $2x$의 값이 정수가 되는 $x$의 값과 $x-2$의 값이 0이 되는 $x$의 값을 기준으로 범위를 나누어 생각한다.

(i) $1\le x<\frac{3}{2}$일 때,

$[2x]=2$, $|x-2|=-(x-2)$이므로

$x^2-2=-x(x-2)$에서

$2x^2-2x-2=0$, $x^2-x-1=0$

$\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

그런데 $1\le x<\frac{3}{2}$이므로 이를 만족시키는 $x$의 값은 없다.

(ii) $\frac{3}{2}\le x<2$일 때,

$[2x]=3$, $|x-2|=-(x-2)$이므로

$x^2-3=-x(x-2)$에서

$2x^2-2x-3=0$

$\therefore x=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ $\left(\because \frac{3}{2}\le x<2\right)$

(iii) $2\le x<\frac{5}{2}$일 때,

$[2x]=4$, $|x-2|=x-2$이므로

$x^2-4=x(x-2)$에서

$-4=-2x$ $\therefore x=2$

(iv) $\frac{5}{2}\le x<3$일 때,

$[2x]=5$, $|x-2|=x-2$이므로

$x^2-5=x(x-2)$에서

$-5=-2x$ $\therefore x=\frac{5}{2}$

(i)~(iv)에서 주어진 방정식을 만족시키는 $x$의 값은

$\frac{1+\sqrt{7}}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$의 3개이다. 답 **3**

## 256

TIP 곱이 소수 $p$인 두 자연수는 1, $p$임을 이용한다.

이차방정식 $x^2-ax+p=0$의 두 근이 서로 다른 자연수이므로 두 근을 $\alpha$, $\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 자연수, $\alpha<\beta$)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=p$

이때 $p$는 소수이므로 $\alpha\beta=p$에서 $\alpha=1$, $\beta=p$이다.

ㄱ. $a=\alpha+\beta=1+p$가 소수이면 연속한 두 자연수 $p$, $p+1$이 모두 소수이므로 $p=2$이다.

ㄴ. $a=1+p>3$이면 $p>2$

2보다 큰 소수 $p$는 모두 홀수이므로 $a=1+p$는 항상 짝수이다.

ㄷ. $a+p=(1+p)+p=1+2p$가 9의 배수이려면

$1+2p=9k$ ($k$는 자연수)이어야 한다. 즉, $p=\frac{9k-1}{2}$이고, $9k-1$은 짝수이어야 하므로 $9k$는 홀수이어야 한다.

따라서 $k$는 홀수이고 $p\le50$이므로

$\frac{9k-1}{2}\le50$, $9k-1\le100$

$9k\le101$ $\therefore k\le\frac{101}{9}$

$k$는 자연수이므로 $k=1, 3, 5, 7, 9, 11$

이때 $\frac{9k-1}{2}$의 값은 4, 13, 22, 31, 40, 49이므로 소수 $p$의 값이 될 수 있는 것은 13, 31의 2개이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

## 257

TIP 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

조건 (가)에서 $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=7$

$\therefore \frac{f(a)}{a-b}+\frac{f(b)}{b-a}=7$

조건 (나)에서 $\frac{f(a)}{a-b}\times\frac{f(b)}{a-b}=-12$

$\therefore \frac{f(a)}{a-b}\times\frac{f(b)}{b-a}=12$

이때 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근이 $\frac{f(a)}{a-b}$, $\frac{f(b)}{b-a}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-p=\frac{f(a)}{a-b}+\frac{f(b)}{b-a}=7$ $\therefore p=-7$

$q=\frac{f(a)}{a-b}\times\frac{f(b)}{b-a}=12$ $\therefore q=12$

즉, $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)=0$에서

$x=3$ 또는 $x=4$이므로

$\frac{f(a)}{a-b}=3, \frac{f(b)}{b-a}=4$ 또는 $\frac{f(a)}{a-b}=4, \frac{f(b)}{b-a}=3$ …… ㉠

한편, 조건 (다)에서

$\frac{f(a)+f(b)}{a-b}<0$ ($\because a>b$에서 $a-b>0$)

$\frac{f(a)}{a-b}-\frac{f(b)}{b-a}<0$ $\therefore \frac{f(a)}{a-b}<\frac{f(b)}{b-a}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{f(a)}{a-b}=3, \frac{f(b)}{b-a}=4$

$\therefore \frac{qf(a)+pf(b)}{a-b}=q\times\frac{f(a)}{a-b}-p\times\frac{f(b)}{b-a}$

$=12\times3-(-7)\times4$

$=64$ 답 64

## 258

TIP 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로

$\alpha^2+\alpha+1=0, \beta^2+\beta+1=0$

이때 두 식의 양변에 각각 $\alpha-1$, $\beta-1$을 곱하면

$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0, (\beta-1)(\beta^2+\beta+1)=0$

$\alpha^3-1=0, \beta^3-1=0$ $\therefore \alpha^3=1, \beta^3=1$

또, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1, \alpha\beta=1$

$\therefore \frac{1+\beta^n}{1+\alpha^n}+\frac{1+\alpha^n}{1+\beta^n}$

$=\frac{(1+\beta^n)^2+(1+\alpha^n)^2}{(1+\alpha^n)(1+\beta^n)}$

$=\frac{(1+2\beta^n+\beta^{2n})+(1+2\alpha^n+\alpha^{2n})}{1+\alpha^n+\beta^n+\alpha^n\beta^n}$

$=\frac{2+2(\alpha^n+\beta^n)+(\alpha^n+\beta^n)^2-2\alpha^n\beta^n}{1+\alpha^n+\beta^n+(\alpha\beta)^n}$

$=\frac{2+2(\alpha^n+\beta^n)+(\alpha^n+\beta^n)^2-2(\alpha\beta)^n}{1+\alpha^n+\beta^n+(\alpha\beta)^n}$

$=\frac{2(\alpha^n+\beta^n)+(\alpha^n+\beta^n)^2}{\alpha^n+\beta^n+2}$ ($\because \alpha\beta=1$)

$=\frac{(\alpha^n+\beta^n)(\alpha^n+\beta^n+2)}{\alpha^n+\beta^n+2}$

$=\alpha^n+\beta^n$ …… ㉠

이때 $n$은 자연수이므로

$n=1$일 때, $\alpha+\beta=-1$

$n=2$일 때, $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\times1=-1$

$n=3$일 때, $\alpha^3+\beta^3=1+1=2$

$n=4$일 때, $\alpha^4+\beta^4=\alpha+\beta=-1$

⋮

$\therefore \alpha^n+\beta^n=\begin{cases}-1 & (n\text{이 3의 배수가 아닐 때})\\ 2 & (n\text{이 3의 배수일 때})\end{cases}$ …… ㉡

한편, $\frac{1+\beta^n}{1+\alpha^n}\times\frac{1+\alpha^n}{1+\beta^n}=1$ …… ㉢

(i) $n$이 3의 배수가 아닐 때

㉠, ㉡, ㉢에서 구하는 이차방정식은 $x^2+x+1=0$

(ii) $n$이 3의 배수일 때

㉠, ㉡, ㉢에서 구하는 이차방정식은 $x^2-2x+1=0$

답 $x^2+x+1=0$ 또는 $x^2-2x+1=0$

# 06 이차방정식과 이차함수

## STEP 1 핵심기출 마스터

본문 59~62쪽

**0259** 이차함수 $y=-2x^2+ax+b$의 그래프와 $x$축의 교점의 $x$좌표가 1, 3이므로 1, 3은 이차방정식 $-2x^2+ax+b=0$의 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$1+3=\frac{a}{2}$, $1\times3=-\frac{b}{2}$

$\therefore a=8$, $b=-6$

이차함수 $y=x^2+bx+a$, 즉 $y=x^2-6x+8$의 그래프와 $x$축이 만나는 점의 $x$좌표는 이차방정식 $x^2-6x+8=0$의 두 근이므로

$(x-2)(x-4)=0$ $\therefore x=2$ 또는 $x=4$

따라서 이차함수 $y=x^2-6x+8$의 그래프와 $x$축은 두 점 $(2, 0)$, $(4, 0)$에서 만나므로 두 점 사이의 거리는 2이다.

답 2

**0260** 이차함수 $y=x^2+ax+5$의 그래프가 $x$축과 만나는 두 점의 $x$좌표는 이차방정식 $x^2+ax+5=0$의 두 근이다.

두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=5$ …… ㉠

이때 주어진 이차함수의 그래프가 $x$축과 만나는 두 점 사이의 거리가 4이므로

$|\alpha-\beta|=4$

양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=16$

$\therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $a^2-20=16$

$a^2=36$ $\therefore a=6$ ($\because a>0$)

답 ⑤

다른풀이

이차함수 $y=x^2+ax+5$의 그래프가 $x$축과 만나는 두 점의 $x$좌표는 이차방정식 $x^2+ax+5=0$의 두 근이다.

두 근을 $\alpha$, $\alpha+4$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\alpha+4=-a$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+4)=5$ …… ㉡

㉡에서 $\alpha^2+4\alpha-5=0$, $(\alpha+5)(\alpha-1)=0$

$\therefore \alpha=-5$ 또는 $\alpha=1$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$a=-6$ 또는 $a=6$

따라서 양수 $a$의 값은 6이다.

**0261** 이차함수 $y=x^2+2(m+1)x+m^2+3$의 그래프가 $x$축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2+2(m+1)x+m^2+3=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(m+1)^2-(m^2+3)>0$, $2m-2>0$

$2m>2$ $\therefore m>1$

따라서 정수 $m$의 최솟값은 2이다.

답 2

**0262** 이차함수 $y=2x^2-kx+k+6$의 그래프가 $x$축과 한 점에서 만나므로 이차방정식 $2x^2-kx+k+6=0$의 판별식을 $D_1$이라 하면

$D_1=(-k)^2-4\times2\times(k+6)=0$

$k^2-8k-48=0$, $(k+4)(k-12)=0$

$\therefore k=-4$ 또는 $k=12$ …… ㉠

또, 이차함수 $y=-x^2+2x+k$의 그래프가 $x$축과 만나지 않으므로 이차방정식 $-x^2+2x+k=0$의 판별식을 $D_2$라 하면

$\frac{D_2}{4}=1^2-(-1)\times k<0$

$\therefore k<-1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k=-4$

답 $-4$

**0263** 주어진 이차함수의 그래프가 $x$축에 접하므로 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+(k-2)^2+b=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(k-a)^2-(k-2)^2-b=0$

$k^2-2ak+a^2-k^2+4k-4-b=0$

$\therefore (4-2a)k+a^2-4-b=0$

이 식이 $k$의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4-2a=0$, $a^2-4-b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=0$

$\therefore a+b=2$

답 ②

**0264** 이차함수 $y=x^2-3x+2a^2$의 그래프와 직선 $y=ax+10$의 두 교점의 $x$좌표가 $\alpha$, $\beta$이므로 $\alpha$, $\beta$는 이차방정식 $x^2-3x+2a^2=ax+10$, 즉 $x^2-(3+a)x+2a^2-10=0$의 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3+a$, $\alpha\beta=2a^2-10$

이때 $\alpha^2+\beta^2=32$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(3+a)^2-2(2a^2-10)$

$=-3a^2+6a+29=32$

$3a^2-6a+3=0$, $3(a-1)^2=0$

$\therefore a=1$

답 1

**0265** 이차함수 $y=x^2+px+q$의 그래프와 직선 $y=2x+1$의 교점의 $x$좌표가 $1+\sqrt{5}$이므로 $1+\sqrt{5}$는 이차방정식 $x^2+px+q=2x+1$, 즉 $x^2+(p-2)x+q-1=0$의 한 근이다.

이 이차방정식의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $1+\sqrt{5}$이므로 $1-\sqrt{5}$도 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})=-(p-2)$ $\therefore p=0$

$(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})=q-1$ $\therefore q=-3$

$\therefore p-q=3$ 답 ②

**0266** 이차함수 $y=x^2-4x-3$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $-3$만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-2=(x+3)^2-4(x+3)-3$

$\therefore y=x^2+2x-4$

이 그래프가 직선 $y=mx$와 두 점 P, Q에서 만나므로 두 점 P, Q의 $x$좌표를 $\alpha$, $\beta$라 하면 $\alpha$, $\beta$는 이차방정식

$x^2+2x-4=mx$, 즉 $x^2+(2-m)x-4=0$의 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m-2$

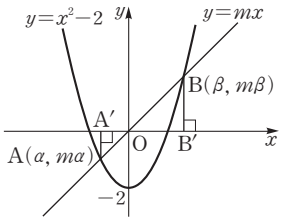
이때 두 점 P, Q의 $x$좌표의 합이 0이므로

$m-2=0$ $\therefore m=2$ 답 **2**

**0267** 원점을 지나고 기울기가 $m$인 직선의 방정식은

$y=mx$ $(m>0)$

오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=x^2-2$의 그래프와 직선 $y=mx$의 교점을 $\mathrm{A}(\alpha, m\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta, m\beta)$ $(\alpha<0<\beta)$라 하면 두 점 A, B의 $x$좌표인 $\alpha$, $\beta$는 이차방정식 $x^2-2=mx$, 즉 $x^2-mx-2=0$의 두 근이다.




근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m$ …… ㉠

또, $m>0$이고 $\alpha<0<\beta$이므로

$\overline{\mathrm{AA'}}=-m\alpha$, $\overline{\mathrm{BB'}}=m\beta$

따라서 선분 AA′과 선분 BB′의 길이의 차는

$|m\beta-(-m\alpha)|=|m(\alpha+\beta)|$

$=|m^2|$ ($\because$ ㉠)

$=m^2$ ($\because m^2>0$)

이때 선분 AA′과 선분 BB′의 길이의 차가 16이므로

$m^2=16$ $\therefore m=4$ ($\because m>0$) 답 **4**

**0268** 이차함수 $y=(m-1)x^2+2mx-1$의 그래프와 직선 $y=x-m$이 만나지 않아야 하므로 이차방정식

$(m-1)x^2+2mx-1=x-m$, 즉

$(m-1)x^2+(2m-1)x-1+m=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=(2m-1)^2-4(m-1)^2<0$

$4m^2-4m+1-4m^2+8m-4<0$

$4m-3<0$ $\therefore m<\frac{3}{4}$ 답 ④

**0269** 이차함수 $y=-2x^2+5x$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 적어도 한 점에서 만나려면 이차방정식

$-2x^2+5x=2x+k$, 즉 $2x^2-3x+k=0$이 중근 또는 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $2x^2-3x+k=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=(-3)^2-4\times2\times k\geq0$

$9-8k\geq0$ $\therefore k\leq\frac{9}{8}$

따라서 실수 $k$의 최댓값은 $\frac{9}{8}$이다. 답 ③

**0270** 구하는 직선이 직선 $y=3x-5$에 평행하므로 구하는 직선의 방정식을

$y=3x+b$ ($b$는 실수)

로 놓을 수 있다.

이 직선이 이차함수 $y=x^2-x+5$의 그래프와 접하므로 이차방정식 $x^2-x+5=3x+b$, 즉 $x^2-4x+5-b=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=4-(5-b)=0$ $\therefore b=1$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=3x+1$ 답 $\boldsymbol{y=3x+1}$

**0271** 점 $(1, 3)$을 지나는 직선의 방정식을

$y=a(x-1)+3$ ($a$는 실수, $a\neq0$)

으로 놓을 수 있다.

이 직선이 이차함수 $y=-2x^2+x+1$의 그래프와 접하므로 이차방정식 $-2x^2+x+1=a(x-1)+3$, 즉

$2x^2+(a-1)x+2-a=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=(a-1)^2-8(2-a)=0$

$\therefore a^2+6a-15=0$

$a$에 대한 이 이차방정식의 두 실근을 $\alpha$, $\beta$라 하면 $\alpha$, $\beta$는 구하는 두 직선의 기울기이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=-15$ 답 $\boldsymbol{-15}$

**참고** 이차방정식 $a^2+6a-15=0$의 판별식을 $D'$이라 하면

$\frac{D'}{4}=3^2-(-15)=24>0$

따라서 $a^2+6a-15=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

**0272** 이차함수 $y=ax^2+bx+4$가 $x=-1$에서 최댓값 5를 가지므로

$y=ax^2+bx+4=a(x+1)^2+5$

$=ax^2+2ax+a+5$ ($a<0$)

따라서 $b=2a$, $4=a+5$이므로 $a=-1$, $b=-2$

$\therefore ab=2$ 답 ④

**0273** $f(-1)=f(3)$, 즉 $x=-1$, $x=3$에서의 함숫값이 서로 같으므로 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프의 축의 방정식은

$x=\dfrac{-1+3}{2}=1$

또한, 이차함수 $f(x)$의 최솟값이 $-1$이므로

$f(x)=a(x-1)^2-1\ (a>0)$

로 놓을 수 있다.

$f(-1)=3$에서 $3=a(-1-1)^2-1$

$4a-1=3 \qquad \therefore a=1$

$\therefore f(x)=(x-1)^2-1=x^2-2x$

따라서 $a=1$, $b=-2$, $c=0$이므로

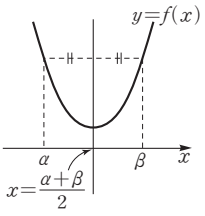
$a-2b+c=1+4+0=5$ 답 ⑤

**개념 Plus**

**이차함수의 그래프의 대칭성**

(1) 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q\ (a\neq 0)$의 그래프는 직선 $x=p$에 대하여 대칭이다.

(2) 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=f(\beta)$이면 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$에 대하여 대칭이다.




**274** $y=x^2-2kx-4k+1=(x-k)^2-k^2-4k+1$

이므로 주어진 이차함수는 $x=k$에서 최솟값 $-k^2-4k+1$을 갖는다.

$\therefore m=-k^2-4k+1$

$\quad=-(k+2)^2+5$

따라서 $m$은 $k=-2$에서 최댓값 5를 갖는다. 답 **5**

**275** 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 $x=2$에서 최솟값 3을 가지므로 $a>0$이고

$f(x)=a(x-2)^2+3$

방정식 $f(x)-1=0$에서 $a(x-2)^2+3-1=0$

$\therefore ax^2-4ax+4a+2=0$

이 이차방정식의 두 근의 곱이 5이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{4a+2}{a}=5$, $4a+2=5a \qquad \therefore a=2$

따라서 $f(x)=2(x-2)^2+3$이므로 $f(1)=5$ 답 **5**

**276** $f(x)=2x^2-4x+k$

$\quad=2(x-1)^2-2+k$

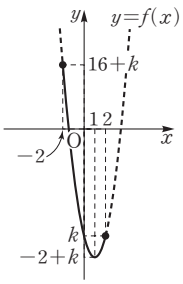
이므로 $|x|\leq 2$, 즉 $-2\leq x\leq 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이차함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 $16+k$를 가지므로

$16+k=6 \qquad \therefore k=-10$

따라서 $|x|\leq 2$에서 $f(x)$의 최솟값은

$f(1)=-2+k=-2+(-10)=-12$ 답 ④




**277** $f(x)=-x^2+4x+3$이라 하면

$f(x)=-(x-2)^2+7$

이때 $f(2)=7$이므로 $a>2$

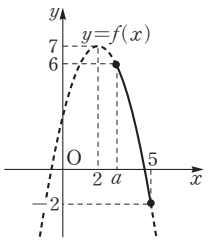
즉, $a\leq x\leq 5$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 이차함수 $f(x)$는 $x=5$에서 최솟값 $f(5)=-2$를 갖고, $x=a$에서 최댓값 $f(a)=6$을 가지므로

$-a^2+4a+3=6$에서

$a^2-4a+3=0$, $(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>2)$ 답 ①




**278** 조건 (가)에서

$f(x)=a(x+2)(x-4)$ ($a$는 실수, $a\neq 0$)로 놓을 수 있다.

$\therefore f(x)=a(x^2-2x-8)$

$\quad=a(x-1)^2-9a$ ($a$는 실수, $a\neq 0$)

조건 (나)에서

(i) $a>0$일 때, $x=8$에서 최댓값 80을 가지므로

$f(8)=40a=80 \qquad \therefore a=2$

(ii) $a<0$일 때, $x=5$에서 최댓값 80을 가지므로

$f(5)=7a=80 \qquad \therefore a=\dfrac{80}{7}$

그런데 $a<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=2$

따라서 $f(x)=2(x+2)(x-4)$이므로

$f(-5)=2\times(-3)\times(-9)=54$ 답 **54**

**279** $f(x)=x^2-4kx$라 하면

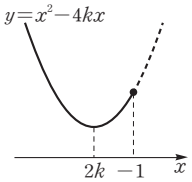
$f(x)=(x-2k)^2-4k^2$

(i) $2k\leq -1$, 즉 $k\leq -\dfrac{1}{2}$일 때,

꼭짓점의 $x$좌표가 주어진 범위 $x\leq -1$에 속하므로 주어진 함수는 $x=2k$에서 최솟값 $f(k)=-4k^2$을 갖는다. 즉, $-4k^2=-4$에서

$k^2=1 \qquad \therefore k=\pm 1$

그런데 $k\leq -\dfrac{1}{2}$이므로 $k=-1$

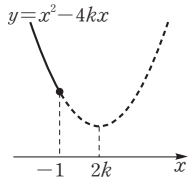



(ii) $2k>-1$, 즉 $k>-\dfrac{1}{2}$일 때,

꼭짓점의 $x$좌표가 주어진 범위에 속하지 않으므로 주어진 함수는 $x=-1$에서 최솟값 $f(-1)=1+4k$를 갖는다.

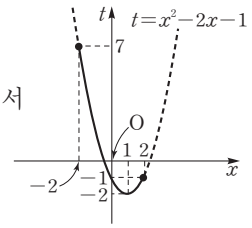
즉, $1+4k=-4$에서 $k=-\dfrac{5}{4}$

그런데 $k>-\dfrac{1}{2}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.




(i), (ii)에서 $k=-1$ 답 **−1**

**0280** $x^2-2x-1=t$로 놓으면




$t=(x-1)^2-2$

이때 $-2\le x\le 2$이므로 오른쪽 그림에서

$-2\le t\le 7$

즉, 주어진 함수는

$y=t^2-2t-4$

$=(t-1)^2-5\ (-2\le t\le 7)$

따라서 $t=1$일 때 최솟값은 $m=-5$이고, $t=7$일 때 최댓값은 $M=31$이므로

$M+m=26$ 답 **26**

**0281** $x^2-4x+5=t$로 놓으면

$t=(x-2)^2+1$ $\quad\therefore t\ge 1$

즉, 주어진 함수는

$y=-3t^2+6(t-5)+k+30$

$=-3t^2+6t+k$

$=-3(t-1)^2+3+k\ (t\ge 1)$

따라서 $t=1$일 때 최댓값은 $3+k$이므로

$3+k=8$ $\quad\therefore k=5$ 답 ①

**0282** 주어진 이차식을 완전제곱식을 포함한 꼴로 변형하면

$x^2+2y^2+2x-12y+27$

$=(x^2+2x+1)+2(y^2-6y+9)-1-18+27$

$=(x+1)^2+2(y-3)^2+8$

이때 $x$, $y$가 실수이므로

$(x+1)^2\ge 0$, $(y-3)^2\ge 0$

$\therefore x^2+2y^2+2x-12y+27\ge 8$

따라서 $x=-1$, $y=3$일 때 주어진 식의 최솟값은 8이다. 답 8

**0283** 점 P가 직선 $x+y=3$ 위에 있으므로

$y=-x+3$

$\therefore 2x^2+y^2=2x^2+(-x+3)^2$

$=3x^2-6x+9$

$=3(x-1)^2+6$

따라서 $x=1$일 때 $2x^2+y^2$의 최솟값은 6이다. 답 ②

**0284** 두 점 A$(-2, 1)$, B$(1, -5)$를 잇는 선분 AB를 나타내는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{-5-1}{1+2}(x+2)$ $\quad\therefore y=-2x-3\ (-2\le x\le 1)$

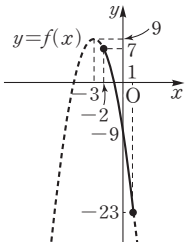
$\therefore 2x^2-y^2=2x^2-(-2x-3)^2$

$=-2x^2-12x-9$

$=-2(x+3)^2+9$

이때 $f(x)=-2(x+3)^2+9$라 하면

$-2\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




따라서 $x=-2$일 때 $f(x)$의 최댓값은 $f(-2)=7$이므로 $2x^2-y^2$의 최댓값은 7이다. 답 ④

**0285** 점 B의 좌표를 $(a, 0)$ $(0<a<\sqrt{6})$이라 하면

C$(a, -a^2+6)$

$\therefore \overline{AB}=2a$, $\overline{BC}=-a^2+6$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 $l$이라 하면

$l=2\times 2a+2(-a^2+6)$

$=-2a^2+4a+12$

$=-2(a-1)^2+14$

$0<a<\sqrt{6}$이므로 $a=1$일 때 $l$의 최댓값은 14이다.

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 14이다. 답 **14**

참고 이차함수 $y=-x^2+6$의 그래프와 $x$축의 교점의 $x$좌표는 $-x^2+6=0$에서 $x=\sqrt{6}$ 또는 $x=-\sqrt{6}$이므로 점 B의 $x$좌표 $a$의 값의 범위는 $0<a<\sqrt{6}$이다.

**0286** 물받이의 높이를 $x$ cm, 색칠한 단면의 넓이를 $S$ cm$^2$라 하면

$S=x(20-2x)$

$=-2x^2+20x$

$=-2(x-5)^2+50$

$0<x<10$이므로 $x=5$일 때 $S$의 최댓값은 50이다.

따라서 물받이의 높이를 5 cm로 해야 한다. 답 **5 cm**

**0287** $\overline{BQ}=a$, $\overline{BR}=b$라 하면

$\triangle ABC\backsim\triangle PRC$ (AA 닮음)이므로

$8:6=a:(6-b)$

$6a=8(6-b)$ $\quad\therefore a=8-\frac{4}{3}b$

사각형 PQBR의 넓이를 $S$라 하면

$S=ab=\left(8-\frac{4}{3}b\right)b$

$=-\frac{4}{3}b^2+8b$

$=-\frac{4}{3}(b-3)^2+12$

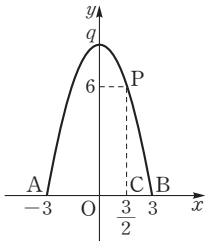
$0<b<6$이므로 $b=3$일 때 $S$의 최댓값은 12이다.

따라서 직사각형 PQBR의 넓이가 최대가 되는 것은

$b=3$, $a=8-\frac{4}{3}\times 3=4$일 때이므로

$\overline{AP}=\sqrt{3^2+4^2}=5$ 답 **5**

**0288** 오른쪽 그림과 같이 지면을 $x$축, 포물선의 축을 $y$축, A 지점을 점 $(-3, 0)$, B 지점을 점 $(3, 0)$으로 하는 좌표평면을 생각하면




$C\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $P\left(\frac{3}{2}, 6\right)$

이때 세 점 A, P, B를 지나는 포물선을 포함하는 그래프를 이차함수 $y=ax^2+q$ $(a<0)$의 그래프라 하면 이 그래프가 점 B$(3, 0)$을 지나므로

$0=a\times3^2+q$ $\therefore 9a+q=0$ …… ㉠

또, 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프는 점 $P\left(\frac{3}{2}, 6\right)$을 지나므로

$6=a\times\left(\frac{3}{2}\right)^2+q$ $\therefore \frac{9}{4}a+q=6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{8}{9}$, $q=8$

즉, 이차함수 $y=-\frac{8}{9}x^2+8$은 $x=0$일 때 최댓값 8을 갖는다.

따라서 공이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이는 8 m이다. 답 ②

## STEP 2 실전 마스터 본문 63~65쪽

**0289** $\overline{OA}=2\overline{OB}$이므로 $A(-2a, 0)$, $B(a, 0)$ $(a>0)$으로 놓으면 두 수 $-2a$, $a$는 이차방정식 $f(x)=0$의 근이다.

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 $-2$이므로

$-2a+a=-a=-2$ $\therefore a=2$

즉, 이차방정식 $f(x)=0$의 두 실근은 $-4$, 2이므로

$A(-4, 0)$, $B(2, 0)$

한편, 이차방정식 $f(2x-k)=0$의 두 근은

$2x-k=-4$ 또는 $2x-k=2$에서

$x=\frac{k-4}{2}$ 또는 $x=\frac{k+2}{2}$

이때 이차방정식 $f(2x-k)=0$의 두 근의 합이 3이므로

$\frac{k-4}{2}+\frac{k+2}{2}=3$

$2k-2=6$, $2k=8$

$\therefore k=4$ 답 **4**

**0290** $y=2x^2-2ax=2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{2}$이므로 이 함수의 그래프의 꼭짓점은 $A\left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{2}\right)$이다.

한편, $2x^2-2ax=0$에서

$2x(x-a)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=a$

$\therefore B(a, 0)$

또한, 선분 BC의 길이가 3이므로 $C(a+3, 0)$이다.

즉, 이차함수 $y=f(x)$의 최고차항의 계수가 $-1$이므로

$f(x)=-(x-a)(x-a-3)$으로 놓을 수 있다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $A\left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{2}\right)$을 지나므로

$-\frac{a^2}{2}=-\left(\frac{a}{2}-a\right)\left(\frac{a}{2}-a-3\right)$

$a^2-6a=0$, $a(a-6)=0$ $\therefore a=6$ $(\because a>0)$

$\therefore A(3, -18)$, $B(6, 0)$, $C(9, 0)$

따라서 삼각형 ACB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times18=27$ 답 **27**

**0291** 이차함수 $y=x^2+(1-2m)x-(m+1)$의 그래프가 $x$축과 만나는 서로 다른 두 점의 $x$좌표를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면 $\alpha$, $\beta$는 이차방정식 $x^2+(1-2m)x-(m+1)=0$의 서로 다른 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2m-1$, $\alpha\beta=-(m+1)$

이때 두 점 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ 사이의 거리는

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$
$$=\sqrt{(2m-1)^2+4(m+1)}$$
$$=\sqrt{4m^2+5}$$

따라서 $m=0$일 때 $x$축과 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리가 최소가 된다. 답 **0**

참고 이차방정식 $x^2+(1-2m)x-(m+1)=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=(1-2m)^2+4(m+1)=4m^2+5>0$

이므로 주어진 이차함수의 그래프는 $x$축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

**0292** $y=-x^2+4ax-8a+5$에서

$(4x-8)a-x^2+5-y=0$

위 등식이 $a$에 대한 항등식이므로

$4x-8=0$ …… ㉠

$-x^2+5-y=0$ …… ㉡

㉠에서 $x=2$이고 이를 ㉡에 대입하면

$-4+5-y=0$ $\therefore y=1$

즉, 이차함수 $y=-x^2+4ax-8a+5$의 그래프는 실수 $a$의 값에 관계없이 점 P$(2, 1)$을 지난다.

한편, $y=-x^2+4ax-8a+5=-(x-2a)^2+4a^2-8a+5$

이므로 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(2a, 4a^2-8a+5)$

$2a=2$ $\therefore a=1$

즉, 이차함수 $y=-x^2+4ax-8a+5$는

$y=-x^2+4x-3=-(x-1)(x-3)$

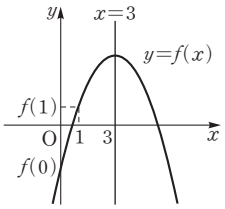
이고 $-(x-1)(x-3)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

$\therefore A(1, 0)$, $B(3, 0)$ 또는 $A(3, 0)$, $B(1, 0)$

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times1=1$ 답 **1**

**293** 조건 (가)에서




$f(x)=f(6-x)$에 $x$ 대신 $3+x$를 대입하면 $f(3+x)=f(3-x)$

즉, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.

또한, 조건 (나)에서 $f(0)<0$, $f(1)>0$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같아야 한다.

$f(x)=a(x-3)^2+k$ ($k$는 실수)로 놓으면

$f(x)=ax^2-6ax+9a+k$

이차방정식 $f(x)=0$의 두 실근을 $\alpha$, $\beta$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-\dfrac{-6a}{a}=6$, $\alpha\beta=\dfrac{9a+k}{a}$이므로 두 실근의 차는

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$
$$=\sqrt{6^2-4\times\frac{9a+k}{a}}=\sqrt{\frac{36a-36a-4k}{a}}$$
$$=\sqrt{\frac{-4k}{a}}$$

$\sqrt{\dfrac{-4k}{a}}=5$의 양변을 제곱하면

$\dfrac{-4k}{a}=25$ $\quad\therefore k=-\dfrac{25}{4}a$

$\therefore f(x)=ax^2-6ax+9a-\dfrac{25}{4}a=ax^2-6ax+\dfrac{11}{4}a$

따라서 $b=-6a$, $c=\dfrac{11}{4}a$이므로

$\dfrac{b+4c}{a}=\dfrac{-6a+11a}{a}=5$ 답 **5**

**294** 이차함수 $y=\dfrac{1}{4}(x+k)^2$의 그래프와 직선 $y=akx$가 접하므로 이차방정식 $\dfrac{1}{4}(x+k)^2=akx$, 즉

$x^2+2k(1-2a)x+k^2=0$의 판별식을 $D$라 하면

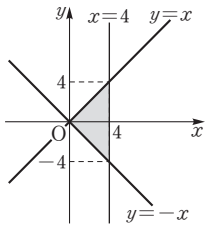
$\dfrac{D}{4}=k^2(1-2a)^2-k^2=0$

$4a^2k^2-4ak^2=0$ $\quad\therefore 4ak^2(a-1)=0$

이때 $ak\neq0$이므로 $a=1$

따라서 두 직선 $y=x$, $y=-x$와 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 어두운 부분과 같으므로 그 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times8\times4=16$




답 ③

**295** 일차함수 $y=l(x)$의 그래프가 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 두 점 $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, g(\beta))$에서 각각 접하므로 방정식 $f(x)-l(x)=0$은 중근 $\alpha$를 갖고, 방정식 $g(x)-l(x)=0$은 중근 $\beta$를 갖는다.

즉, 조건 (가)에서

$f(x)-l(x)=2(x-\alpha)^2$ ····· ㉠

$g(x)-l(x)=(x-\beta)^2$ ····· ㉡

㉠−㉡을 하면 $f(x)-g(x)=2(x-\alpha)^2-(x-\beta)^2$

$f(x)-g(x)=2(x-\alpha)^2-(x+2\alpha)^2$ ($\because$ 조건 (나))

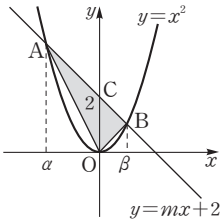
$\therefore f(x)-g(x)=x^2-8\alpha x-2\alpha^2$

이때 조건 (다)에서 방정식 $f(x)-g(x)=0$, 즉 $x^2-8\alpha x-2\alpha^2=0$의 두 실근의 합이 24이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $8\alpha=24$ $\quad\therefore\alpha=3$

$\therefore -2\alpha^2=-2\times3^2=-18$

따라서 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 두 교점의 $x$좌표의 곱은 $-18$이다. 답 ④

**296** 직선 $y=mx+2$가 $y$축과 만나는 점을 C라 하면 점 C의 좌표는 $(0, 2)$이고 삼각형 AOB의 넓이는 두 삼각형 AOC, COB의 넓이의 합과 같다. 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=mx+2$가 만나는 서로 다른 두 점 A, B의 $x$좌표를 각각 $\alpha$, $\beta$ ($\alpha<0<\beta$)라 하면 삼각형 AOB의 넓이가 3이므로




$\dfrac{1}{2}\times2\times(-\alpha)+\dfrac{1}{2}\times2\times\beta=3$

$\therefore\beta-\alpha=3$ ····· ㉢

이때 두 수 $\alpha$, $\beta$는 이차방정식 $x^2=mx+2$, 즉 $x^2-mx-2=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=-2$

$\therefore(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=m^2+8$

㉢에서 $m^2+8=9$이므로 $m^2=1$

$\therefore m=-1$ ($\because m<0$) 답 **−1**

**297** 이차함수 $y=2-x^2$의 그래프와 직선 $y=ax+\dfrac{9}{4}$가 접하므로 이차방정식 $2-x^2=ax+\dfrac{9}{4}$, 즉 $x^2+ax+\dfrac{1}{4}=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=a^2-4\times\dfrac{1}{4}=0$ $\quad\therefore a^2=1$ ····· ㉠

이때 이차함수 $y=2-x^2$의 그래프와 직선 $y=ax+\dfrac{9}{4}$가 제2사분면에서 접하려면 $a>0$이어야 하므로 ㉠에서 $a=1$

한편, 이차함수 $y=2-x^2$의 그래프와 직선 $y=ax$, 즉 $y=x$의 교점의 $x$좌표 $\alpha$, $\beta$는 이차방정식 $2-x^2=x$의 두 실근이다.

따라서 이차방정식 $x^2+x-2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$ 답 **−1**

**298** 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 $(a, ka)$라 하면 이차항의 계수가 1이므로

$f(x)=(x-a)^2+ka$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=kx+5$가 만나는 두 점의 $x$좌표 $\alpha$, $\beta$는 이차방정식 $(x-a)^2+ka=kx+5$, 즉 $x^2-(2a+k)x+a^2+ka-5=0$의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a+k$ …… ㉠

$\alpha\beta=a^2+ka-5$ …… ㉡

또, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{4}$이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{4}=a$ $\therefore \alpha+\beta=2a+\frac{1}{2}$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $2a+\frac{1}{2}=2a+k$ $\therefore k=\frac{1}{2}$

$k=\frac{1}{2}$을 ㉡에 대입하면

$\alpha\beta=a^2+\frac{1}{2}a-5$

$\therefore |\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}$

$=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$=\sqrt{\left(2a+\frac{1}{2}\right)^2-4\left(a^2+\frac{1}{2}a-5\right)}$

$=\sqrt{\frac{81}{4}}=\frac{9}{2}$

답 ④

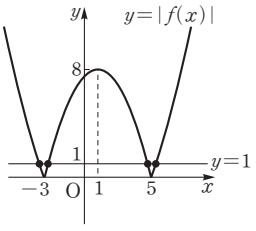
**0299** 조건 ㈎에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $f(x)=a(x-1)^2+b$ $(a\neq0)$로 놓을 수 있다.

(i) $a>0$일 때, 조건 ㈏에서 $f(5)=0$, $f(1)=-8$이므로

$16a+b=0$, $b=-8$ $\therefore a=\frac{1}{2}$, $b=-8$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2-8$

이때 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점은 4개이다.

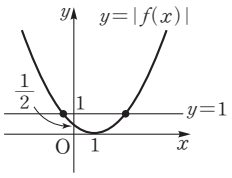



(ii) $a<0$일 때, 조건 ㈏에서 $f(1)=0$, $f(5)=-8$이므로

$b=0$, $16a+b=-8$ $\therefore a=-\frac{1}{2}$, $b=0$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2$

이때 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점은 2개이므로 조건 ㈐를 만족시키지 않는다.

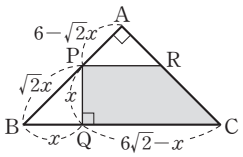



(i), (ii)에서 $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2-8$

$\therefore f(3)=\frac{1}{2}(3-1)^2-8=-6$

답 $-6$

**0300** 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BQ}=x$ $(0<x<3\sqrt{2})$라 하면 $\overline{PQ}=x$, $\overline{BP}=\sqrt{2}x$




이때 $\overline{AB}=6$이므로 $\overline{AP}=6-\sqrt{2}x$

또한, $\overline{PR}=\sqrt{2}\times\overline{AP}=\sqrt{2}(6-\sqrt{2}x)=6\sqrt{2}-2x$이고

$\overline{QC}=\overline{BC}-\overline{BQ}=6\sqrt{2}-x$이므로 사각형 PQCR의 넓이를 $y$라 하면

$y=\frac{1}{2}x\{(6\sqrt{2}-2x)+(6\sqrt{2}-x)\}$

$=6\sqrt{2}x-\frac{3}{2}x^2$

$=-\frac{3}{2}(x-2\sqrt{2})^2+12$ $(0<x<3\sqrt{2})$

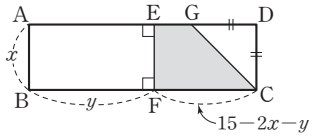
따라서 $x=2\sqrt{2}$일 때 $y$의 최댓값은 12이므로 사각형 PQCR의 넓이의 최댓값은 12이다.

답 **12**

**0301** $\overline{AB}=x$, $\overline{BF}=y$ $(x>0, y>0)$라 하면 직사각형 ABFE의 넓이는 $xy$이다.

조건 ㈏에서 $2x+y+\overline{FC}=15$이므로

$\overline{FC}=15-2x-y$




즉, 사다리꼴 EFCG의 넓이는

$\square EFCD-\triangle GCD=x(15-2x-y)-\frac{1}{2}x^2$

$=x\left(15-\frac{5}{2}x-y\right)$

이때 조건 ㈐에서 $xy=2\times x\left(15-\frac{5}{2}x-y\right)$이므로

$xy=x(30-5x-2y)$, $y=30-5x-2y$ $(\because x>0)$

$3y=30-5x$ $\therefore y=10-\frac{5}{3}x$

따라서 사다리꼴 EFCG의 넓이는

$x\left(15-\frac{5}{2}x-y\right)=x\left(15-\frac{5}{2}x-10+\frac{5}{3}x\right)$

$=x\left(5-\frac{5}{6}x\right)$

$=-\frac{5}{6}x^2+5x$

$=-\frac{5}{6}(x-3)^2+\frac{15}{2}$

따라서 $\overline{AB}=3$, $\overline{BF}=5$일 때 사다리꼴 EFCG의 넓이의 최댓값은 $\frac{15}{2}$이다.

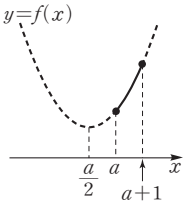
답 ④

**0302** ㄱ. 이차함수 $f(x)=x^2-ax+b$의 그래프가 $x$축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=(-a)^2-4b=a^2-4b>0$

ㄴ. $f(x)=x^2-ax+b=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$

이때 꼭짓점의 $x$좌표 $\frac{a}{2}$가 $a\le x\le a+1$에 포함되지 않으므로 이차함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최솟값 $f(a)=a^2-a^2+b=b$를 갖는다.




ㄷ. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{a}{2}$에 대하여 대칭이므로

$f\left(\frac{a}{2}+x\right)=f\left(\frac{a}{2}-x\right)$

$x$ 대신 $\frac{b}{2}$를 대입하면 $f\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)=f\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)$

$\therefore f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a-b}{2}\right)$ …… ㉠

한편, $\frac{a+b}{2}$, $\frac{b-a}{2}$에 대하여

$\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}=a>0$ $\therefore \frac{a+b}{2}>\frac{b-a}{2}$

또한, $\frac{a}{2}$, $\frac{b-a}{2}$에 대하여

$\frac{a}{2}-\frac{b-a}{2}=\frac{2a-b}{2}<0$ ($\because b>2a$)

$\therefore \frac{a}{2}<\frac{b-a}{2}$

즉, $\frac{a}{2}<\frac{b-a}{2}<\frac{a+b}{2}$이므로

$f\left(\frac{a}{2}\right)<f\left(\frac{b-a}{2}\right)<f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f\left(\frac{a-b}{2}\right)>f\left(\frac{b-a}{2}\right)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ④

**0303** 이차방정식 $x^2+2(a-2)x+a^2+a-1=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-(a^2+a-1)>0$

$-5a+5>0$ $\therefore a<1$

또한, 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2(a-2)$, $\alpha\beta=a^2+a-1$

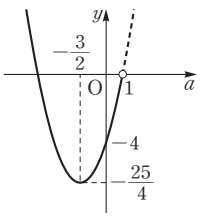
$\therefore (1-\alpha)(1-\beta)=1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta$

$=1+2(a-2)+a^2+a-1$

$=a^2+3a-4$

$=\left(a+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$

$a<1$에서 이차함수 $y=\left(a+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




따라서 $a=-\frac{3}{2}$일 때, $(1-\alpha)(1-\beta)$의 최솟값은 $-\frac{25}{4}$이다.

답 $-\frac{25}{4}$

**0304** 점 A는 이차함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프와 $y$축의 교점이므로 A(0, 2)

두 점 B, C는 이차함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프와 $x$축의 교점이므로 이차방정식 $x^2-3x+2=0$에서

$(x-1)(x-2)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=2$

$\therefore$ B(1, 0), C(2, 0)

한편, 점 P($a$, $b$)가 이차함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프 위의 점이므로 $b=a^2-3a+2$

이때 점 P가 점 A(0, 2)에서 점 C(2, 0)까지 움직이므로

$0\le a\le 2$

$\therefore a+b+3=a+(a^2-3a+2)+3$

$=a^2-2a+5$

$=(a-1)^2+4$ $(0\le a\le 2)$

따라서 $a+b+3$은 $a=0$ 또는 $a=2$일 때 최댓값 5를 갖고, $a=1$일 때 최솟값 4를 가지므로 구하는 합은

$5+4=9$ 답 **9**

**0305** 이 상품의 현재 판매가격을 $a$, 하루 동안의 판매량을 $b$라 하면 이 상품의 판매가격을 $x$ % 올린 가격은 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$이고 이때의 판매량은 $0.6x$ % 감소하므로 $b\left(1-\frac{0.6x}{100}\right)$이다.

이때의 판매금액을 $y$라 하면

$y=a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{0.6x}{100}\right)$

$=\frac{ab}{10^4}(100+x)\left(100-\frac{3}{5}x\right)$

$=\frac{ab}{10^4}\left(-\frac{3}{5}x^2+40x+10000\right)$

$=\frac{ab}{10^4}\left\{-\frac{3}{5}\left(x^2-\frac{200}{3}x\right)+10000\right\}$

$=\frac{ab}{10^4}\left\{-\frac{3}{5}\left(x-\frac{100}{3}\right)^2+\frac{3}{5}\times\frac{10000}{9}+10000\right\}$

따라서 $x=\frac{100}{3}$일 때 $y$의 값은 최대가 된다. 답 $\frac{100}{3}$

## STEP 3 상위권 마스터

본문 66~67쪽

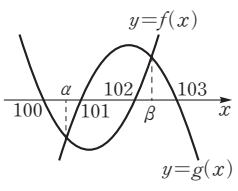
**0306**

TIP 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 $x$좌표이므로 그래프를 그려 생각해 본다.

$f(x)=a(x-100)(x-102)$,

$g(x)=-b(x-101)(x-103)$

이라 하면 주어진 방정식의 서로 다른 두 실근 $\alpha$, $\beta$는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 $x$좌표이므로 오른쪽 그림과 같다.



즉, $100<\alpha<101$, $102<\beta<103$이므로

$[\alpha]=100$, $[\beta]=102$

한편, $a(x-100)(x-102)=-b(x-101)(x-103)$에서

$(a+b)x^2-(202a+204b)x+100\times102a+101\times103b=0$

이고 $\alpha$, $\beta$는 이 이차방정식의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{202a+204b}{a+b}=\frac{202(a+b)+2b}{a+b}$$

$$=202+\frac{2b}{a+b} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $0<a<b$이므로 $a+b<2b<2a+2b$

각 변을 $a+b$로 나누면

$$\frac{a+b}{a+b}<\frac{2b}{a+b}<\frac{2a+2b}{a+b} \qquad \therefore 1<\frac{2b}{a+b}<2$$

따라서 ㉠에서 $202+1<\alpha+\beta<202+2$, 즉

$203<\alpha+\beta<204$이므로

$[\alpha+\beta]=203$

$\therefore [\alpha+\beta]+[\alpha]+[\beta]=203+100+102=405$

답 **405**

## 307

TIP 두 점 A, B의 $x$좌표를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하고 $\alpha$, $\beta$를 이용하여 각 점의 좌표 및 삼각형의 변의 길이를 나타낸다.

두 점 A, B의 $x$좌표를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면

$A(\alpha, 2\alpha+k)$, $B(\beta, 2\beta+k)$, $A_1(\alpha, 0)$, $B_1(\beta, 0)$, $C\left(-\frac{k}{2}, 0\right)$

또, $\alpha$, $\beta$는 이차방정식 $-x^2+1=2x+k$, 즉

$x^2+2x+k-1=0$의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=k-1$ $\cdots\cdots ㉠$

두 삼각형 $ACA_1$, $BCB_1$의 넓이를 각각 $S_1$, $S_2$라 하면

$$S_1=\frac{1}{2}(-2\alpha-k)\left(-\frac{k}{2}-\alpha\right)$$

$$=\left(\alpha+\frac{k}{2}\right)^2$$

$$S_2=\frac{1}{2}(2\beta+k)\left(\beta+\frac{k}{2}\right)$$

$$=\left(\beta+\frac{k}{2}\right)^2$$

두 삼각형 $ACA_1$과 $BCB_1$의 넓이의 합이 $\frac{3}{2}$이므로

$$\left(\alpha+\frac{k}{2}\right)^2+\left(\beta+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$$

$$(\alpha^2+\beta^2)+k(\alpha+\beta)+\frac{k^2}{2}=\frac{3}{2}$$

$\therefore 2(\alpha^2+\beta^2)+2k(\alpha+\beta)+k^2-3=0$ $\cdots\cdots ㉡$

이때 ㉠에서

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$=4-2(k-1)$$

$$=-2k+6$$

이므로 ㉠과 $\alpha^2+\beta^2=-2k+6$을 ㉡에 대입하면

$2(-2k+6)+2k\times(-2)+k^2-3=0$

$k^2-8k+9=0$ $\qquad \therefore k=4\pm\sqrt{7}$

이때 $-2<k<2$이므로 $k=4-\sqrt{7}$

따라서 $p=4$, $q=-1$이므로

$10p+q=40-1=39$

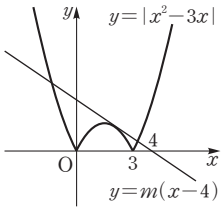
답 **39**

## 308

TIP 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 $x$좌표임을 이용한다.

$|x^2-3x|-m(x-4)=0$에서

$|x^2-3x|=m(x-4)$이므로 주어진 방정식의 실근은 두 함수 $y=|x^2-3x|$, $y=m(x-4)$의 그래프의 교점의 $x$좌표이다.




이때 직선 $y=m(x-4)$는 $m$의 값에 관계없이 항상 점 $(4, 0)$을 지나므로 주어진 방정식이 서로 다른 4개의 실근을 가지려면 직선의 기울기 $m$의 값이 0보다 작고 이차함수 $y=-x^2+3x$ $(0\le x\le3)$의 그래프에 접할 때보다 커야 한다.

이차함수 $y=-x^2+3x$ $(0\le x\le3)$의 그래프와 직선 $y=m(x-4)$가 접할 때, 방정식 $-x^2+3x=m(x-4)$, 즉 $x^2+(m-3)x-4m=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=(m-3)^2+16m=0$

$m^2+10m+9=0$, $(m+9)(m+1)=0$

$\therefore m=-9$ 또는 $m=-1$

그런데 $0\le x\le3$에서 접하는 것은 $m=-1$일 때이다.

따라서 조건을 만족시키는 실수 $m$의 값의 범위는

$-1<m<0$

답 $\boldsymbol{-1<m<0}$

## 309

TIP 이차함수의 그래프의 축의 위치에 따라 최솟값을 구해 본다.

$f(x)=x^2-4ax+4a^2+b$라 하면

$f(x)=(x-2a)^2+b$

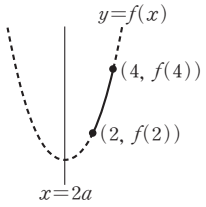
$2\le x\le4$에서 이차함수 $f(x)$의 최솟값은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축 $x=2a$의 위치에 따라 달라진다.

(i) $2a<2$, 즉 $a<1$일 때,

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=2$에서 최솟값은

$f(2)=(2-2a)^2+b=4$

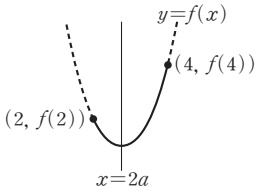
$\therefore b=-4(a-1)^2+4$




(ii) $2\le2a<4$, 즉 $1\le a<2$일 때,

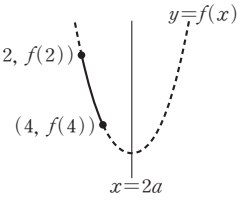
$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=2a$에서 최솟값은

$b=4$



(iii) $2a \geq 4$, 즉 $a \geq 2$일 때,

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=4$에서 최솟값은




$f(4)=(4-2a)^2+b=4$

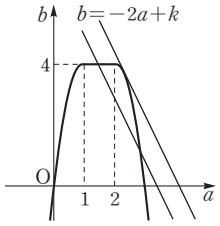
$\therefore b=-4(a-2)^2+4$

(i), (ii), (iii)에서

$$b=\begin{cases} -4(a-1)^2+4 & (a<1) \\ 4 & (1 \leq a<2) \\ -4(a-2)^2+4 & (a \geq 2) \end{cases}$$

$2a+b=k$로 놓으면

$b=-4(a-2)^2+4$의 그래프와 직선 $b=-2a+k$가 접할 때 $k$는 최댓값을 갖는다.




이차방정식

$-4(a-2)^2+4=-2a+k$, 즉

$4a^2-18a+k+12=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=81-4(k+12)=0$

$4k=33 \qquad \therefore k=\frac{33}{4}$

따라서 $M=\frac{33}{4}$이므로 $4M=33$ 답 **33**

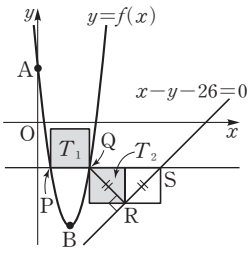
## 310

TIP 대각선의 길이가 같은 정사각형은 합동임을 이용한다.

점 Q의 좌표를 $(c, b)$라 하면 이차함수 $f(x)=x^2-10x+9$, 즉 $f(x)=(x-5)^2-16$의 그래프는 축 $x=5$에 대하여 대칭이므로

$\frac{a+c}{2}=5 \qquad \therefore c=10-a$

오른쪽 그림과 같이 점 P를 지나고 $x$축에 평행한 직선이 직선 $x-y-26=0$과 만나는 점을 S라 하면 선분 QR와 직선 $x-y-26=0$은 수직이고, 직선 $x-y-26=0$의 기울기가 1이므로 선분 RS를 대각선으로 하는 정사각형과 정사각형 $T_2$는 합동이다.




점 S의 좌표를 $(d, b)$라 하면 점 S는 직선 $x-y-26=0$ 위의 점이므로

$d-b-26=0 \qquad \therefore d=b+26$

$\therefore l_1=4(c-a)=4(10-a-a)=40-8a$

$l_2=4\times\frac{d-c}{2}=2(b+26-10+a)=2a+2b+32$

또한, 점 $P(a, b)$는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$b=a^2-10a+9$

$\therefore 2l_2-l_1=2(2a+2b+32)-(40-8a)$

$=12a+4b+24$

$=12a+4(a^2-10a+9)+24$

$=4a^2-28a+60$

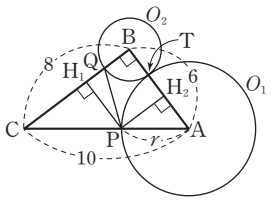
$=4\left(a-\frac{7}{2}\right)^2+11 \ (0<a<5)$

따라서 $a=\frac{7}{2}$일 때 $2l_2-l_1$의 최솟값은 11이다. 답 **11**

## 311

TIP $\overline{PQ}$를 빗변으로 하는 직각삼각형을 만든다.

다음 그림과 같이 두 원의 접점을 T, 점 P에서 $\overline{BC}$, $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 각각 $H_1$, $H_2$라 하고 원 $O_1$의 반지름의 길이를 $r \ (0<r<6)$라 하자.




$\triangle AH_2P \backsim \triangle ABC$ (AA 닮음)이므로

$r : 10=\overline{PH_2} : 8 \qquad \therefore \overline{PH_2}=\frac{4}{5}r$

이때 $\overline{BH_1}=\overline{PH_2}=\frac{4}{5}r$, $\overline{BQ}=\overline{BT}=6-r$이므로

$\overline{QH_1}=|\overline{BH_1}-\overline{BQ}|$

$=\left|\frac{4}{5}r-(6-r)\right|=\left|\frac{9}{5}r-6\right|$ ····· ㉠

$\triangle PH_1C \backsim \triangle ABC$ (AA 닮음)이고 $\overline{CP}=10-r$이므로

$(10-r) : 10=\overline{PH_1} : 6$

$\therefore \overline{PH_1}=\frac{3}{5}(10-r)$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{PQ}^2=\overline{PH_1}^2+\overline{QH_1}^2$

$=\left\{\frac{3}{5}(10-r)\right\}^2+\left(\frac{9}{5}r-6\right)^2$

$=\frac{18}{5}(r^2-8r+20)$

$=\frac{18}{5}(r-4)^2+\frac{72}{5}$

즉, $\overline{PQ}^2$은 $r=4$일 때 최솟값 $\frac{72}{5}$를 갖는다.

따라서 $a=5$, $b=72$이므로

$ab=5\times72=360$ 답 **360**

# 07 여러 가지 방정식

## STEP 1 핵심기출 마스터

본문 69~73쪽

**0312** $x^3-3x^2-x+3=0$에서
$x^2(x-3)-(x-3)=0$, $(x-3)(x^2-1)=0$
$(x+1)(x-1)(x-3)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$
따라서 $\alpha=-1$, $\beta=1$, $\gamma=3$이므로
$\alpha+2\beta+3\gamma=-1+2+9=10$ 답 ②

**0313** $f(x)=x^4-2x^2+3x-2$로 놓으면
$f(-2)=0$, $f(1)=0$
이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2$ | 1 | 0 | $-2$ | 3 | $-2$ |
| | | $-2$ | 4 | $-4$ | 2 |
| 1 | 1 | $-2$ | 2 | $-1$ | 0 |
| | | 1 | $-1$ | 1 | |
| | 1 | $-1$ | 1 | 0 | |

$\therefore f(x)=(x+2)(x-1)(x^2-x+1)$
이때 방정식 $f(x)=0$의 두 허근 $\alpha$, $\beta$는 방정식 $x^2-x+1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=1$
$\therefore (\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1$
$=1+1+1=3$ 답 3

**0314** 주어진 방정식의 두 근이 $-1$, 1이므로
$-1-a-b+2+2b=0$에서 $-a+b=-1$ …… ㉠
$1-a+b-2+2b=0$에서 $-a+3b=1$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$
따라서 주어진 방정식은
$x^3-2x^2-x+2=0$
$f(x)=x^3-2x^2-x+2$로 놓으면
$f(-1)=0$, $f(1)=0$
이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 1 | $-2$ | $-1$ | 2 |
| | | $-1$ | 3 | $-2$ |
| | 1 | $-3$ | 2 | 0 |

$\therefore f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$
즉, 주어진 방정식은 $(x+1)(x-1)(x-2)=0$이므로 나머지 한 근은 2이다. 답 2

**0315** $x^4-x^3+ax^2+x+6=0$의 한 근이 $-2$이므로
$16+8+4a-2+6=0$ $\therefore a=-7$
따라서 주어진 방정식은 $x^4-x^3-7x^2+x+6=0$
$f(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$으로 놓으면
$f(-2)=0$, $f(-1)=0$, $f(1)=0$
이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2$ | 1 | $-1$ | $-7$ | 1 | 6 |
| | | $-2$ | 6 | 2 | $-6$ |
| $-1$ | 1 | $-3$ | $-1$ | 3 | 0 |
| | | $-1$ | 4 | $-3$ | |
| | 1 | $-4$ | 3 | 0 | |

$\therefore f(x)=(x+2)(x+1)(x-1)(x-3)$
즉, 주어진 방정식은
$(x+2)(x+1)(x-1)(x-3)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$
따라서 가장 큰 근은 3이므로 $b=3$
$\therefore a+b=-4$ 답 ④

**0316** $(x^2+x-1)(x^2+x+3)-5=0$에서 $x^2+x=t$로 놓으면
$(t-1)(t+3)-5=0$, $t^2+2t-8=0$
$(t+4)(t-2)=0$
즉, $(x^2+x+4)(x^2+x-2)=0$에서
$(x^2+x+4)(x+2)(x-1)=0$
$\therefore x^2+x+4=0$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$
이때 이차방정식 $x^2+x+4=0$의 판별식을 $D$라 하면
$D=1-16=-15<0$에서 이 이차방정식은 두 허근 $\alpha$, $\beta$를 가지므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha\beta=4$
한편, 이차방정식 $x^2+x+4=0$의 계수가 모두 실수이므로 $\alpha$가 근이면 $\overline{\alpha}$도 근이다.
따라서 $\overline{\alpha}=\beta$, $\overline{\beta}=\alpha$이므로
$\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}=\alpha\beta+\beta\alpha=2\alpha\beta$
$=2\times4=8$ 답 ⑤

**0317** $x^4-31x^2+9=0$에서
$(x^4-6x^2+9)-25x^2=0$, $(x^2-3)^2-(5x)^2=0$
$(x^2+5x-3)(x^2-5x-3)=0$
방정식 $x^2+5x-3=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$, 방정식 $x^2-5x-3=0$의 두 근을 $\gamma$, $\delta$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=-3$, $\gamma+\delta=5$, $\gamma\delta=-3$
$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}$
$=\frac{-5}{-3}+\frac{5}{-3}=0$ 답 ③

**0318** 방정식 $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$의 양변을 $x^2$으로 나누면

$x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$, $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$

이때 $x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+2X-3=0$, $(X+3)(X-1)=0$

$\therefore X=-3$ 또는 $X=1$

(i) $X=-3$, 즉 $x+\frac{1}{x}=-3$일 때

$x^2+3x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 $D_1$이라 하면

$D_1=3^2-4\times1\times1=5>0$

이므로 이 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $X=1$, 즉 $x+\frac{1}{x}=1$일 때

$x^2-x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 $D_2$라 하면

$D_2=(-1)^2-4\times1\times1=-3<0$

이므로 이 방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 $\alpha$는 방정식 $x^2+3x+1=0$의 한 실근이므로

$\alpha^2+3\alpha+1=0$

양변을 $\alpha$ $(\alpha\neq0)$로 나누면

$\alpha+3+\frac{1}{\alpha}=0$ $\therefore \alpha+\frac{1}{\alpha}=-3$ 답 ①

**0319** $f(x)=2x^3-(a+2)x^2+a$로 놓으면

$f(1)=2-(a+2)+a=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | $-(a+2)$ | 0 | $a$ |
| | | 2 | $-a$ | $-a$ |
| | 2 | $-a$ | $-a$ | 0 |

$\therefore f(x)=(x-1)(2x^2-ax-a)$

이때 방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지려면

(i) 방정식 $2x^2-ax-a=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우

$2-a-a=0$ $\therefore a=1$

(ii) 방정식 $2x^2-ax-a=0$이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$D=a^2+8a=0$, $a(a+8)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=-8$

(i), (ii)에서 구하는 $a$의 값의 합은

$1+0+(-8)=-7$ 답 ④

**0320** $f(x)=x^3+x^2-(k+3)x-2k-2$로 놓으면

$f(-2)=-8+4+2(k+3)-2k-2=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-2$ | 1 | 1 | $-(k+3)$ | $-2k-2$ |
| | | $-2$ | 2 | $2k+2$ |
| | 1 | $-1$ | $-k-1$ | 0 |

$\therefore f(x)=(x+2)(x^2-x-k-1)$

ㄱ. 방정식 $f(x)=0$에서 $x=-2$는 근이므로 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. 방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2-x-k-1=0$이 $x=-2$를 중근으로 갖는 경우

이때 $(x+2)^2\neq x^2-x-k-1$이므로 $x=-2$를 중근으로 가질 수 없다.

(ii) 방정식 $x^2-x-k-1=0$이 서로 다른 두 허근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$D=1-4(-k-1)<0$ $\therefore k<-\frac{5}{4}$

(i), (ii)에서 $k<-\frac{5}{4}$이므로 정수 $k$의 최댓값은 $-2$이다.

ㄷ. 방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2-x-k-1=0$이 $x=-2$를 근으로 갖는 경우

$4+2-k-1=0$ $\therefore k=5$

(ii) 방정식 $x^2-x-k-1=0$이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$D=1-4(-k-1)=0$ $\therefore k=-\frac{5}{4}$

(i), (ii)에서 $k$의 값의 합은 $5+\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{15}{4}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

**0321** $f(x)=x^3+(8-a)x^2-7ax-a^2$으로 놓으면

$f(a)=a^3+a^2(8-a)-7a^2-a^2=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | $8-a$ | $-7a$ | $-a^2$ |
| | | $a$ | $8a$ | $a^2$ |
| | 1 | 8 | $a$ | 0 |

$f(x)=(x-a)(x^2+8x+a)$

이때 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 방정식 $x^2+8x+a=0$이 $x\neq a$인 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

방정식 $x^2+8x+a=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=16-a>0$에서 $a<16$ …… ㉠

또, $x=a$는 방정식 $x^2+8x+a=0$의 근이 아니어야 하므로

$a^2+8a+a\neq0$, $a(a+9)\neq0$

$\therefore a\neq0$, $a\neq-9$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 자연수 $a$는 1, 2, 3, …, 15의 15개이다. 답 15

**322** 삼차방정식 $x^3+2x^2-3x+4=0$의 세 근이 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3$, $\alpha\beta\gamma=-4$

$\therefore (3+\alpha)(3+\beta)(3+\gamma)$

$=27+9(\alpha+\beta+\gamma)+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\alpha\beta\gamma$

$=27+9\times(-2)+3\times(-3)-4$

$=-4$ 답 ②

다른풀이

삼차방정식 $x^3+2x^2-3x+4=0$의 세 근이 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$이므로

$x^3+2x^2-3x+4=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

위의 식의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$\{(-3)^3+2\times(-3)^2-3\times(-3)+4\}$

$=(-3-\alpha)(-3-\beta)(-3-\gamma)$

$\therefore (3+\alpha)(3+\beta)(3+\gamma)=-4$

**323** 삼차방정식 $x^3+x^2-4x+4=0$의 세 근이 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-4$, $\alpha\beta\gamma=-4$

$\therefore \frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$

$=\frac{-1-\alpha}{\alpha}+\frac{-1-\beta}{\beta}+\frac{-1-\gamma}{\gamma}$

$=-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-3$

$=-\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}-3$

$=-1-3=-4$ 답 $-4$

**324** 삼차방정식 $x^3-2x^2+5x+k=0$의 세 근이 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=5$, $\alpha\beta\gamma=-k$

$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(2-\gamma)(2-\alpha)(2-\beta)$

$=8-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=8-4\times2+2\times5-(-k)=10+k$

따라서 $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=-3\alpha\beta\gamma$에서

$10+k=3k$, $2k=10$ $\therefore k=5$ 답 ④

**325** 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-64=0$의 세 근을 $\alpha$, $2\alpha$, $4\alpha$ ($\alpha\neq0$인 실수)라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha+4\alpha=-a$ $\therefore a=-7\alpha$ …… ㉠

$\alpha\times2\alpha+2\alpha\times4\alpha+4\alpha\times\alpha=b$ $\therefore b=14\alpha^2$ …… ㉡

$\alpha\times2\alpha\times4\alpha=64$ $\therefore \alpha^3=8$ …… ㉢

㉢에서 $\alpha$는 실수이므로 $\alpha=2$

이것을 ㉠, ㉡에 대입하면

$a=-14$, $b=56$

$\therefore a+b=42$ 답 42

**326** 삼차방정식 $x^3+2x^2-3x-2=0$의 세 근이 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3$, $\alpha\beta\gamma=2$

$\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하는 삼차방정식에서

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{3}{2}$

$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\times\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-2}{2}=-1$

$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 삼차방정식은

$2\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-x-\frac{1}{2}\right)=0$

$\therefore 2x^3+3x^2-2x-1=0$ 답 $2x^3+3x^2-2x-1=0$

**327** $P(-1)=P(0)=P(1)=1$에서

$P(-1)-1=P(0)-1=P(1)-1=0$

이므로 삼차방정식 $P(x)-1=0$의 세 근은 $-1$, $0$, $1$이다.

이때 $-1$, $0$, $1$을 세 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(-1+0+1)x^2+\{(-1)\times0+0\times1+1\times(-1)\}x$

$-(-1)\times0\times1=0$

$\therefore x^3-x=0$

즉, $P(x)-1=x^3-x$이므로

$P(x)=x^3-x+1$

이때 삼차방정식 $P(x)=0$에서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$, $\alpha\beta\gamma=-1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=0-2\times(-1)=2$ 답 ②

**328** 주어진 삼차방정식의 계수가 모두 유리수이므로 한 근이 $-1-\sqrt{3}$이면 $-1+\sqrt{3}$도 근이다.

즉, 주어진 방정식의 세 근이 2, $-1-\sqrt{3}$, $-1+\sqrt{3}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+(-1-\sqrt{3})+(-1+\sqrt{3})=-a$

$2(-1-\sqrt{3})+(-1-\sqrt{3})(-1+\sqrt{3})+2(-1+\sqrt{3})=b$

$2(-1-\sqrt{3})(-1+\sqrt{3})=-c$

따라서 $a=0$, $b=-6$, $c=4$이므로

$a+b+c=-2$ 답 $-2$

**329** 주어진 삼차방정식의 계수가 모두 실수이므로 한 근이 $2+i$이면 $2-i$도 근이다.

나머지 한 근을 $\alpha$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha(2+i)(2-i)=5$, $5\alpha=5$ $\therefore \alpha=1$

따라서 나머지 한 근이 1이므로
$1+(2+i)+(2-i)=-a$에서 $a=-5$
$1\times(2+i)+(2+i)(2-i)+(2-i)\times1=b$에서 $b=9$
$\therefore 2a+b=-1$ 답 ③

**330** $x^3=1$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로
$\omega$는 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.
즉, $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$
$\therefore (\omega+1)(\omega^2+1)(\omega^3+1)(\omega^4+1)(\omega^5+1)$
$=(\omega+1)(\omega^2+1)(1+1)(\omega+1)(\omega^2+1)$
$=2(\omega+1)^2(\omega^2+1)^2$
$=2(-\omega^2)^2(-\omega)^2$
$=2\omega^6=2$ 답 2

**331** $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로
$\alpha$, $\beta$는 방정식 $x^2-x+1=0$의 두 허근이다.
ㄱ. $\alpha^2-\alpha+1=0$이므로 $\alpha^2-\alpha=-1$
ㄴ. $\alpha$, $\beta$는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 허근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=1$
$\therefore (\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=1+1+1=3$
ㄷ. $\alpha^2-\alpha+1=0$, $\alpha^3=-1$, $\beta^2-\beta+1=0$, $\beta^3=-1$이므로
$(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha^3+\beta^3)+(\alpha^4+\beta^4)$
$=\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\beta^2+\beta^3+\beta^4$
$=\alpha^2-1-\alpha+\beta^2-1-\beta=-4$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

**332** $x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$을 곱하면
$(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x^3-1=0$ $\therefore x^3=1$
즉, $\omega$는 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로
$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$
ㄱ. $\omega^3=1$이므로 $x=1$을 $x^5-x^4-1=0$에 대입하면
$1^5-1^4-1=-1\neq0$
ㄴ. $x=-\omega^2$을 $x^5-x^4-1=0$에 대입하면
$-\omega^{10}-\omega^8-1=-\omega-\omega^2-1$ ($\because \omega^3=1$)
$=-(\omega^2+\omega+1)=0$
ㄷ. $\omega^3=1$에서 $\frac{1}{\omega}=\omega^2$
$x=\omega^2$을 $x^5-x^4-1=0$에 대입하면
$\omega^{10}-\omega^8-1=\omega-\omega^2-1$ ($\because \omega^3=1$)
$=2\omega\neq0$
따라서 근이 될 수 있는 것은 ㄴ이다. 답 ②

**333** $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 $\omega$는 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.
$\therefore \omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$
이때
$f(1)=\frac{\omega}{1+\omega^2}=\frac{\omega}{-\omega}=-1$
$f(2)=\frac{\omega^2}{1+\omega^4}=\frac{\omega^2}{1+\omega}=\frac{\omega^2}{-\omega^2}=-1$
$f(3)=\frac{\omega^3}{1+\omega^6}=\frac{1}{2}$
$f(4)=\frac{\omega^4}{1+\omega^8}=\frac{\omega}{1+\omega^2}=f(1)$
$f(5)=\frac{\omega^5}{1+\omega^{10}}=\frac{\omega^2}{1+\omega^4}=f(2)$
$f(6)=\frac{\omega^6}{1+\omega^{12}}=\frac{\omega^3}{1+\omega^6}=f(3)$
$\vdots$
이므로
$f(1)=f(4)=f(7)=\cdots=f(16)=f(19)=-1$
$f(2)=f(5)=f(8)=\cdots=f(17)=f(20)=-1$
$f(3)=f(6)=f(9)=\cdots=f(18)=\frac{1}{2}$
$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(20)$
$=\left(-1-1+\frac{1}{2}\right)\times6-1-1=-11$ 답 ①

**334** $\begin{cases}x-y=2 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2+3y^2=28 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$
㉠에서 $x=y+2$ ····· ㉢
㉢을 ㉡에 대입하면 $(y+2)^2+3y^2=28$
$y^2+y-6=0$, $(y+3)(y-2)=0$
$\therefore y=-3$ 또는 $y=2$
이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는
$\begin{cases}x=-1\\ y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=4\\ y=2\end{cases}$
따라서 $\alpha=4$, $\beta=2$ ($\because \alpha>0$, $\beta>0$)이므로
$\alpha\beta=8$ 답 8

**335** $\begin{cases}x^2+y^2=40 & \cdots\cdots ㉠\\ 4x^2+y^2=4xy & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$
㉡에서 $(2x-y)^2=0$이므로
$y=2x$ ····· ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면
$x^2+4x^2=40$, $x^2=8$
$\therefore x=\pm2\sqrt{2}$
이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는
$\begin{cases}x=-2\sqrt{2}\\ y=-4\sqrt{2}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\sqrt{2}\\ y=4\sqrt{2}\end{cases}$
따라서 $\alpha=\pm2\sqrt{2}$, $\beta=\pm4\sqrt{2}$ (복부호동순)이므로
$|\alpha-\beta|=2\sqrt{2}$ 답 ④

**0336** $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=4 \\ x+y-xy=1 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} (x+y)^2-2xy+x+y=4 \\ x+y-xy=1 \end{cases}$

에서 $x+y=a$, $xy=b$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} a^2+a-2b=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ a-b=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $b=a-1$ $\cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$a^2+a-2(a-1)=4$

$a^2-a-2=0$, $(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

이것을 ㉢에 대입하면

$a=-1$, $b=-2$ 또는 $a=2$, $b=1$

(i) $a=-1$, $b=-2$, 즉 $x+y=-1$, $xy=-2$일 때

$x$, $y$는 이차방정식 $t^2+t-2=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t-1)=0$ $\therefore t=-2$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

(ii) $a=2$, $b=1$, 즉 $x+y=2$, $xy=1$일 때

$x$, $y$는 이차방정식 $t^2-2t+1=0$의 두 근이므로

$(t-1)^2=0$ $\therefore t=1$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 $(x, y)$는

$(-2, 1)$, $(1, -2)$, $(1, 1)$

답 $(-2, 1)$, $(1, -2)$, $(1, 1)$

**0337** $\begin{cases} x+y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+y^2=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+a$

이것을 ㉡에 대입하면

$2x^2+(-x+a)^2=6$

$\therefore 3x^2-2ax+a^2-6=0$

이를 만족시키는 $x$의 값이 오직 한 개 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-3(a^2-6)=0$

$-2a^2+18=0$, $a^2=9$

$\therefore a=\pm 3$

따라서 모든 실수 $a$의 값의 곱은

$3\times(-3)=-9$ 답 ①

**0338** $\begin{cases} 4x+y=k & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2x+y=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-4x+k$

이것을 ㉡에 대입하면 $x^2+2x+(-4x+k)=0$

$\therefore x^2-2x+k=0$

이를 만족시키는 실수 $x$의 값이 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-k\geq 0$ $\therefore k\leq 1$

따라서 정수 $k$의 최댓값은 1이다. 답 ④

**0339** $4x^2(x-1)=192$이므로

$x^3-x^2-48=0$

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | −1 | 0 | −48 |
| | | 4 | 12 | 48 |
| | 1 | 3 | 12 | 0 |

$(x-4)(x^2+3x+12)=0$

$\therefore x=4$ ($\because x$는 실수) 답 **4**

**0340** 잘라 낸 정사각형의 한 변의 길이를 $x$ cm라 하면 네 귀퉁이를 잘라 내어 만든 상자의 부피가 1000 $cm^3$이므로

$(30-2x)(20-2x)x=1000$

$\therefore x^3-25x^2+150x-250=0$

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 1 | −25 | 150 | −250 |
| | | 5 | −100 | 250 |
| | 1 | −20 | 50 | 0 |

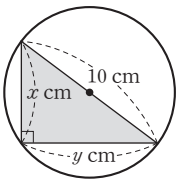
$(x-5)(x^2-20x+50)=0$

$\therefore x=5$ ($\because x$는 자연수)

따라서 잘라 낸 정사각형의 한 변의 길이는 5 cm이다.

답 **5 cm**

**0341** 오른쪽 그림과 같이 직각삼각형의 두 변의 길이를 각각 $x$ cm, $y$ cm라 하면




직각삼각형의 빗변의 길이가 10 cm이므로

$x^2+y^2=100$

또, 직각삼각형의 넓이가 24 $cm^2$이므로

$\frac{1}{2}xy=24$, 즉 $xy=48$ $\cdots\cdots ㉠$

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$

$=100+2\times 48=196$

$\therefore x+y=14$ ($\because x>0$, $y>0$) $\cdots\cdots ㉡$

㉡에서 $y=14-x$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$x(14-x)=48$, $x^2-14x+48=0$

$(x-6)(x-8)=0$ $\therefore x=6$ 또는 $x=8$

따라서 가장 짧은 변의 길이는 6 cm이다. 답 **6 cm**

**0342** 두 삼각형 ABC, DBA에서

$\angle BCA=\angle BAD$, $\angle B$는 공통이므로

$\triangle ABC\backsim\triangle DBA$ (AA 닮음)

$\overline{CD}=x$, $\overline{AC}=x-1$, $\overline{AB}=y$라 하면

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{DB}:\overline{DA}$이므로 $y:(x-1)=8:6$

$\therefore x=\frac{3}{4}y+1$ ····· ㉠

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DB}:\overline{BA}$이므로 $y:(8+x)=8:y$

$\therefore y^2=8x+64$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $y^2=8\left(\frac{3}{4}y+1\right)+64$

$y^2-6y-72=0$, $(y+6)(y-12)=0$

$\therefore y=12$ ($\because y>0$)

$y=12$를 ㉠에 대입하면 $x=10$

$\therefore \overline{AB}=12$, $\overline{BC}=8+10=18$, $\overline{CA}=10-1=9$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$12+18+9=39$ 답 39

**0343** 두 이차방정식의 공통근이 $\alpha$이므로

$\alpha^2+(k+2)\alpha-(k+6)=0$ ····· ㉠

$\alpha^2-\alpha+k=0$ ····· ㉡

㉠−㉡을 하면

$(k+3)\alpha-2(k+3)=0$, $(k+3)(\alpha-2)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $\alpha=2$

이때 $k=-3$이면 두 이차방정식은 $x^2-x-3=0$으로 일치하므로 공통근이 2개이다.

즉, 오직 하나의 공통근을 갖는다는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 두 이차방정식이 오직 하나의 공통근을 가지려면 $\alpha=2$이어야 하므로 $\alpha=2$를 ㉡에 대입하면

$4-2+k=0$ $\therefore k=-2$

$\therefore \alpha^2+k^2=2^2+(-2)^2=8$ 답 8

**0344** $xy-2x+3y-13=0$에서

$x(y-2)+3(y-2)-7=0$ $\therefore (x+3)(y-2)=7$

$x$, $y$가 양의 정수이므로 $x+3=7$, $y-2=1$

따라서 $x=4$, $y=3$이므로

$x+y=7$ 답 ④

**0345** $2x^2+4xy+5y^2-4x+2y+5=0$에서

$(x^2+4xy+4y^2)+(x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)=0$

$(x+2y)^2+(x-2)^2+(y+1)^2=0$

이때 $x$, $y$가 실수이므로

$x+2y=0$, $x-2=0$, $y+1=0$

따라서 $x=2$, $y=-1$이므로

$x-y=3$ 답 3

다른풀이

주어진 방정식을 $x$에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2+4(y-1)x+5y^2+2y+5=0$ ····· ㉠

$x$가 실수이므로 $x$에 대한 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉠의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=\{2(y-1)\}^2-2(5y^2+2y+5)\geq 0$

$6y^2+12y+6\leq 0$, $(y+1)^2\leq 0$

이때 $y$도 실수이므로 $y=-1$

$y=-1$을 ㉠에 대입하면 $2x^2-8x+8=0$

$(x-2)^2=0$ $\therefore x=2$

$\therefore x-y=3$

## STEP 2 실전 마스터

본문 74~77쪽

**0346** $x^4-(k+2)x^2+k^2=0$ ····· ㉠

에서 $x^2=t$로 놓으면

$t^2-(k+2)t+k^2=0$ ····· ㉡

방정식 ㉠이 서로 다른 네 실근을 가지므로 방정식 ㉡이 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.

방정식 ㉡의 두 양의 실근을 $\alpha$, $\beta$ ($\alpha>\beta$)라 하면 방정식 ㉠의 서로 다른 네 실근을 작은 것부터 크기순으로 나열하면

$-\sqrt{\alpha}$, $-\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\alpha}$

$\therefore a=-\sqrt{\alpha}$, $b=-\sqrt{\beta}$, $c=\sqrt{\beta}$, $d=\sqrt{\alpha}$

$2(c-b)=d-a$에서

$2(\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta})=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha}$, $2\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha}$

$\therefore \alpha=4\beta$

이차방정식 ㉡에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5\beta=k+2$, 즉 $\beta=\frac{k+2}{5}$ ····· ㉢

$\alpha\beta=4\beta^2=k^2$

여기에 ㉢을 대입하면 $4\left(\frac{k+2}{5}\right)^2=k^2$

$4k^2+16k+16=25k^2$, $21k^2-16k-16=0$

$(7k+4)(3k-4)=0$

$\therefore k=\frac{4}{3}$ ($\because k>0$) 답 ②

**0347** $f(3x+1)=27x^3-9x$에서 $3x+1=t$라 하면

$x=\frac{t-1}{3}$이므로

$f(t)=27\left(\frac{t-1}{3}\right)^3-9\times\frac{t-1}{3}=t^3-3t^2+2$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$는 삼차방정식 $f(t)=0$의 근이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$, $\alpha\beta\gamma=-2$

$\therefore \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)^2-2\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}\right)$

$=\left(\frac{\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}\right)^2-2\times\frac{\gamma+\alpha+\beta}{\alpha\beta\gamma}$

$=0^2-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=3$ 답 ③

**0348** $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=-c$

$x^3-2x^2+3x-1=0$의 세 근이 $\frac{1}{\alpha\beta}$, $\frac{1}{\beta\gamma}$, $\frac{1}{\gamma\alpha}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{a}{c}=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\frac{1}{\alpha\beta}\times\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\times\frac{1}{\gamma\alpha}+\frac{1}{\gamma\alpha}\times\frac{1}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{1}{\alpha\beta^2\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2\beta\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{(\alpha\beta\gamma)^2}$$

$$=\frac{b}{c^2}=3 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$$\frac{1}{\alpha\beta}\times\frac{1}{\beta\gamma}\times\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{1}{(\alpha\beta\gamma)^2}=\frac{1}{c^2}=1 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉢에서 $c^2=1$

㉠에서 $a=2c$이므로 $a^2=4c^2$ $\therefore a^2=4$

㉡에서 $b=3c^2$이므로 $b^2=9c^4$ $\therefore b^2=9$

$\therefore a^2+b^2+c^2=14$ 답 ①

**0349** 삼차방정식 $x^3-13x^2+(m-6)x-m=0$의 세 근을 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ $(\alpha\geq\beta\geq\gamma)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=13$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=m-6$, $\alpha\beta\gamma=m$

이때

$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$

$=\{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1\}(\gamma-1)$

$=\alpha\beta\gamma-\alpha\gamma-\beta\gamma+\gamma-\alpha\beta+\alpha+\beta-1$

$=\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)+(\alpha+\beta+\gamma)-1$

$=m-(m-6)+13-1$

$=18$

이고, 자연수 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$에 대하여 $\alpha-1$, $\beta-1$, $\gamma-1$은 음이 아닌 정수이므로 $\alpha-1$, $\beta-1$, $\gamma-1$의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha-1$ | 18 | 9 | 6 | 3 |
| $\beta-1$ | 1 | 2 | 3 | 3 |
| $\gamma-1$ | 1 | 1 | 1 | 2 |

이때 $\alpha+\beta+\gamma=13$을 만족시키는 순서쌍 $(\alpha, \beta, \gamma)$는 $(7, 4, 2)$ 뿐이다.

따라서 $\alpha=7$, $m=\alpha\beta\gamma=7\times4\times2=56$이므로

$\alpha+m=63$ 답 ③

**0350** 삼차방정식 $x^3+x^2+px+q=0$에서 계수인 $p$, $q$가 실수이므로 서로 다른 두 허근 $\alpha$, $-\alpha^2$은 서로 켤레근이다.

$\alpha=a+bi$ $(a, b$는 실수, $b\neq0)$로 놓으면 $-\alpha^2=a-bi$이므로

$-(a+bi)^2=a-bi$

$-a^2+b^2-2abi=a-bi$

따라서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$-a^2+b^2=a$, $2ab=b$

$2ab=b$에서 $a=\frac{1}{2}$ $(\because b\neq0)$

$-a^2+b^2=a$에서 $b^2=\frac{3}{4}$, 즉 $b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \alpha=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

즉, 주어진 삼차방정식의 두 근이 $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$이므로 나머지 한 근을 $\beta$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}+\beta=-1$ $\therefore \beta=-2$

$\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{1-\sqrt{3}i}{2}+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\times(-2)+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\times(-2)=p$

$\therefore p=-1$

$\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\times(-2)=-q$ $\therefore q=2$

$\therefore p+q=1$ 답 ③

**다른풀이**

두 근이 $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$이고 $x^2$의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-x+1=0$이므로 삼차방정식 $x^3+x^2+px+q=0$의 한 실근을 $\beta$라 하면

$x^3+x^2+px+q=(x-\beta)(x^2-x+1)$

$=x^3-(1+\beta)x^2+(1+\beta)x-\beta$

즉, $1=-(1+\beta)$에서 $\beta=-2$이므로

$p=1+\beta=-1$, $q=-\beta=2$

$\therefore p+q=1$

**0351** 조건 ㈎에서 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 가지므로 1은 방정식 $f(x)=0$의 한 근이다.

조건 ㈏에서 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}i$이고, 계수가 모두 실수이므로 $1-\sqrt{2}i$도 방정식 $f(x)=0$의 근이다.

즉, 방정식 $f(2x-1)=0$에서

$2x-1=1$ 또는 $2x-1=1+\sqrt{2}i$ 또는 $2x-1=1-\sqrt{2}i$이므로

$x=1$ 또는 $x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ 또는 $x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

따라서 구하는 모든 근의 곱은

$1\times\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\times\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{3}{2}$ 답 ④

**Lecture**

**삼차방정식의 근의 변형**

삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근이 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$이면

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$, $f(\gamma)=0$

즉, $f(ax+b)=0$ $(a\neq0)$의 세 근은

$ax+b=\alpha$, $ax+b=\beta$, $ax+b=\gamma$에서

$x=\frac{\alpha-b}{a}$ 또는 $x=\frac{\beta-b}{a}$ 또는 $x=\frac{\gamma-b}{a}$

**0352** $x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 $\alpha$, $\beta$는 $x^2+x+1=0$의 두 허근이다.
이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이 $\alpha$, $\beta$이므로
$\alpha^2+\alpha+1=0$, $\beta^2+\beta+1=0$
또, 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-1$
$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)$
$=(\alpha+\beta)+(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha^3+\beta^3)+(\alpha^4+\beta^4)$
$+(\alpha^5+\beta^5)+(\alpha^6+\beta^6)+(\alpha^7+\beta^7)$
$=(\alpha+\beta)+(\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6+\alpha^7)$
$+(\beta^2+\beta^3+\beta^4+\beta^5+\beta^6+\beta^7)$
$=(\alpha+\beta)+\alpha^2(1+\alpha+\alpha^2)+\alpha^5(1+\alpha+\alpha^2)$
$+\beta^2(1+\beta+\beta^2)+\beta^5(1+\beta+\beta^2)$
$=-1$ 답 ②

**0353** $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 $\omega$는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.
$\therefore \omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$
또, $\omega$의 켤레복소수 $\overline{\omega}$는 $x^3=1$의 한 허근이므로
$\overline{\omega}^3=1$, $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$, $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$
ㄱ. $\overline{\omega}^3=1$
ㄴ. $\frac{1}{\omega}+\left(\frac{1}{\omega}\right)^2=\frac{\omega+1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$
$\frac{1}{\overline{\omega}}+\left(\frac{1}{\overline{\omega}}\right)^2=\frac{\overline{\omega}+1}{\overline{\omega}^2}=\frac{-\overline{\omega}^2}{\overline{\omega}^2}=-1$
$\therefore \frac{1}{\omega}+\left(\frac{1}{\omega}\right)^2=\frac{1}{\overline{\omega}}+\left(\frac{1}{\overline{\omega}}\right)^2$
ㄷ. $(-\omega-1)^n=(\omega^2)^n$
$\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n=(-\overline{\omega})^n=\left(-\frac{1}{\omega}\right)^n$
$=(-1)^n\times\left(\frac{1}{\omega}\right)^n$
$=(-1)^n\times(\omega^2)^n$
$(-\omega-1)^n=\left(\frac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n$에서 $(\omega^2)^n=(-1)^n\times(\omega^2)^n$
$\therefore 1=(-1)^n$
이를 만족시키는 자연수 $n$은 짝수이다.
즉, 100 이하의 짝수 $n$의 개수는 50이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

**0354** $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, 즉 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 $\omega$는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이고, 다른 한 허근은 $\overline{\omega}$이다.
이차방정식 $x^2-x+1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여
$\omega+\overline{\omega}=1$ …… ㉠
한편, $(x-1)^3=-27$에서 양변을 27로 나누면
$\left(\frac{x-1}{3}\right)^3=-1$
이때 방정식 $x^3=-1$의 세 근이 $-1$, $\omega$, $\overline{\omega}$이므로
$\frac{x-1}{3}=-1$ 또는 $\frac{x-1}{3}=\omega$ 또는 $\frac{x-1}{3}=\overline{\omega}$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=3\omega+1$ 또는
$x=3\overline{\omega}+1=3(1-\omega)+1=-3\omega+4$ ($\because$ ㉠)
$\therefore a+b+c+d=3+1+(-3)+4=5$ 답 ⑤

**0355** $x^{2n}+1+(x+1)^{2n}$을 $x^2+x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면
$x^{2n}+1+(x+1)^{2n}=(x^2+x+1)Q(x)$ …… ㉠
이때 $x^2+x+1=0$의 한 허근을 $\omega$라 하면
$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$
㉠의 양변에 $x=\omega$를 대입하면
$\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=0$ …… ㉡
이때 $\omega+1=-\omega^2$이므로
$\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=\omega^{2n}+1+(-\omega^2)^{2n}=\omega^{4n}+\omega^{2n}+1$
(i) $n=3k$ ($k=1, 2, 3, \cdots$)일 때
$\omega^{4n}+\omega^{2n}+1=(\omega^3)^{4k}+(\omega^3)^{2k}+1=3$
(ii) $n=3k+1$ ($k=0, 1, 2, \cdots$)일 때
$\omega^{4n}+\omega^{2n}+1=\omega^{12k+4}+\omega^{6k+2}+1=\omega^4+\omega^2+1$
$=\omega^2+\omega+1=0$
(iii) $n=3k+2$ ($k=0, 1, 2, \cdots$)일 때
$\omega^{4n}+\omega^{2n}+1=\omega^{12k+8}+\omega^{6k+4}+1=\omega^8+\omega^4+1$
$=\omega^2+\omega+1=0$
(i), (ii), (iii)에서 ㉡을 만족시키려면 $n$은 3의 배수가 아니어야 한다. 이때 $n$은 100보다 작은 자연수이므로 구하는 $n$의 개수는
$99-33=66$ 답 **66**

**0356** $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{12} \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} (x+y)^2-2xy=25 \\ \frac{x+y}{xy}=\frac{7}{12} \end{cases}$
에서 $x+y=a$, $xy=b$로 놓으면 주어진 연립방정식은
$\begin{cases} a^2-2b=25 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{a}{b}=\frac{7}{12} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉡에서 $b=\frac{12}{7}a$ …… ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면 $a^2-\frac{24}{7}a=25$
$7a^2-24a-175=0$, $(7a+25)(a-7)=0$
$\therefore a=7$ ($\because x, y$는 자연수)
$a=7$일 때, $b=\frac{12}{7}\times7=12$이므로 $x$, $y$는 이차방정식
$t^2-7t+12=0$의 두 근이다.
$(t-3)(t-4)=0$ $\therefore t=3$ 또는 $t=4$
따라서 주어진 연립방정식을 만족시키는 두 자연수 $x$, $y$는
$x=3$, $y=4$ 또는 $x=4$, $y=3$
답 $x=3, y=4$ 또는 $x=4, y=3$

**0357** $\begin{cases} x^2+y^2=a+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y=b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$이므로 ㉠, ㉡을 대입하면

$b^2=a+1+2xy$

$\therefore xy=\frac{1}{2}(b^2-a-1)$ ····· ㉢

㉡, ㉢에서 $x$, $y$는 $t$에 대한 이차방정식

$t^2-bt+\frac{1}{2}(b^2-a-1)=0$

의 두 근이고, 이 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 판별식을 $D$라 하면

$D=b^2-4\times\frac{1}{2}(b^2-a-1)\geq 0$

$-b^2+2a+2\geq 0$ $\therefore a\geq\frac{1}{2}b^2-1$

이때 실수 $a$의 최솟값이 $\frac{7}{2}$이므로

$\frac{1}{2}b^2-1=\frac{7}{2}$, $b^2=9$

$\therefore b=3$ ($\because b>0$) 답 **3**

**0358** (i) $x>y$일 때, $<x, y>=x$, $<-x, -y>=-y$이므로 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} x^2-xy=x & \cdots\cdots ㉠ \\ -y^2+xy=-y & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $x^2-y^2=x-y$

$(x-y)(x+y-1)=0$

이때 $x\neq y$이므로

$x+y-1=0$ $\therefore y=1-x$

이것을 ㉠에 대입하면

$x^2-x(1-x)=x$, $x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

이것을 $y=1-x$에 대입하면

$x=0$, $y=1$ 또는 $x=1$, $y=0$

그런데 $x>y$이므로 주어진 연립방정식의 해는

$x=1$, $y=0$

(ii) $x<y$일 때, $<x, y>=y$, $<-x, -y>=-x$이므로 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} x^2-xy=y & \cdots\cdots ㉢ \\ -y^2+xy=-x & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢+㉣을 하면 $x^2-y^2=y-x$

$(x-y)(x+y+1)=0$

이때 $x\neq y$이므로

$x+y+1=0$ $\therefore y=-x-1$

이것을 ㉢에 대입하면

$x^2-x(-x-1)=-x-1$

$2x^2+2x+1=0$ $\therefore x=\frac{-1\pm i}{2}$

$x$는 실수이어야 하므로 주어진 연립방정식의 해는 없다.

(i), (ii)에서 $\alpha=1$, $\beta=0$이므로

$\alpha-2\beta=1$ 답 ④

**0359** $\begin{cases} 2x-y=n & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=m & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=2x-n$ ····· ㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$5x^2-4nx+n^2-m=0$

이를 만족시키는 $x$의 값이 오직 한 개 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(-2n)^2-5(n^2-m)=0$

$n^2=5m$

$\therefore n=\sqrt{5m}$ ($\because n>0$)

이때 $n$은 자연수이므로 자연수 $m$의 최솟값은 5이고, 그때의 $n$의 값은 5이다.

따라서 구하는 값은 $5+5=10$ 답 ①

**0360** $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$가 이 순서대로 네 개의 연속된 짝수이므로 $\overline{AD}=2n$ ($n$은 자연수)이라 하면

$\overline{AC}=2n+2$, $\overline{BC}=2n+4$, $\overline{AB}=2n+6$

$\overline{BD}=x$, $\overline{CD}=y$라 하면 $\overline{BD}+\overline{CD}=\overline{BC}$이므로

$x+y=2n+4$ ····· ㉠

두 삼각형 ABD, ADC는 각각 두 원 $O_1$, $O_2$의 지름을 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2$, $\overline{AD}^2+\overline{CD}^2=\overline{AC}^2$이므로

$\overline{AB}^2-\overline{BD}^2=\overline{AC}^2-\overline{CD}^2$

$(2n+6)^2-x^2=(2n+2)^2-y^2$

$4n^2+24n+36-x^2=4n^2+8n+4-y^2$

$16n+32=(x-y)(x+y)$

$8(2n+4)=(x-y)(2n+4)$ ($\because$ ㉠)

$\therefore x-y=8$ ····· ㉡

㉠−㉡을 하면

$2y=2n-4$ $\therefore y=n-2$ ····· ㉢

이때 직각삼각형 ADC에서 $\overline{AD}^2+\overline{CD}^2=\overline{AC}^2$이므로

$(2n)^2+y^2=(2n+2)^2$

$4n^2+(n-2)^2=(2n+2)^2$ ($\because$ ㉢)

$n^2-12n=0$, $n(n-12)=0$

$\therefore n=12$ ($\because n$은 자연수)

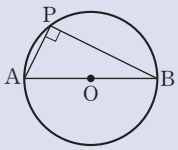
따라서 $\overline{AB}=30$, $\overline{AC}=26$이므로 두 원 $O_1$, $O_2$의 넓이의 합 $S$는

$S=\pi\times\left(\frac{30}{2}\right)^2+\pi\times\left(\frac{26}{2}\right)^2=225\pi+169\pi=394\pi$

$\therefore \frac{S}{\pi}=394$ 답 **394**

**Lecture**

반원의 호에 대한 원주각의 크기는 90°이다.
즉, 선분 AB가 원의 지름이면
$\angle APB=90^\circ$




**0361** (남아 있는 입체도형의 겉넓이)
$=2\{($정육면체의 밑면의 넓이$)-($원기둥의 밑면의 넓이$)\}$
$\quad+4($정육면체의 옆면의 넓이$)+($원기둥의 옆면의 넓이$)$
$=2(a^2-\pi b^2)+4a^2+2\pi ab$
$=6a^2-2\pi b^2+2\pi ab$
$=6a^2+2\pi(ab-b^2)$
$=216+16\pi$
이때 $a$, $b$가 유리수이므로
$6a^2=216$, $ab-b^2=8$
$\therefore a=6$, $6b-b^2=8$
$b^2-6b+8=0$에서 $(b-2)(b-4)=0$
$\therefore b=2$ 또는 $b=4$
$\therefore b=2$ ($\because a>2b$)
$\therefore 15(a-b)=60$ 답 **60**

**0362** 두 이차방정식 $x^2+ax+\frac{1}{a}=0$, $x^2+bx+\frac{1}{b}=0$의 공통근이 $\alpha$이므로
$\alpha^2+a\alpha+\frac{1}{a}=0$ ····· ㉠
$\alpha^2+b\alpha+\frac{1}{b}=0$ ····· ㉡
㉠−㉡을 하면
$(a-b)\alpha+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=0$, $(a-b)\alpha-\frac{a-b}{ab}=0$
$(a-b)\left(\alpha-\frac{1}{ab}\right)=0$
$\therefore \alpha=\frac{1}{ab}$ ($\because a\neq b$)
이때 $a+b=2$에서 $b=2-a$이므로
$\alpha=\frac{1}{a(2-a)}$
이것을 ㉠에 대입하면
$\frac{1}{a^2(2-a)^2}+\frac{1}{2-a}+\frac{1}{a}=0$
$a\neq0$, $b\neq0$이므로 위의 식의 양변에 $a^2(2-a)^2$을 곱하면
$1+a^2(2-a)+a(2-a)^2=0$
$1+2a^2-a^3+4a-4a^2+a^3=0$
$-2a^2+4a+1=0$, $-a^2+2a=-\frac{1}{2}$
$\therefore a(2-a)=-\frac{1}{2}$
$\therefore \alpha=\frac{1}{a(2-a)}=-2$ 답 **−2**

**0363** $x^2-2mx-1+m+m^2=0$에서
$x=m\pm\sqrt{m^2-(-1+m+m^2)}=m\pm\sqrt{1-m}$
근이 모두 정수이므로
$1-m\geq0$ $\therefore m\leq1$
즉, 음이 아닌 정수 $m$의 값은 0 또는 1이다.
(i) $m=0$일 때, 주어진 방정식은
$x^2-1=0$ $\therefore x=\pm1$
따라서 근이 모두 정수이다.
(ii) $m=1$일 때, 주어진 방정식은
$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$ $\therefore x=1$
따라서 근이 모두 정수이다.
(i), (ii)에서 주어진 조건을 만족시키는 정수 $m$은 0, 1의 2개이다. 답 **2**

**0364** $f(x)=x^3-3x^2+2(k-2)x+2k$로 놓으면
$f(-1)=-1-3-2(k-2)+2k=0$
이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $1$ | $-3$ | $2(k-2)$ | $2k$ |
| | | $-1$ | $4$ | $-2k$ |
| | $1$ | $-4$ | $2k$ | $0$ |

$\therefore f(x)=(x+1)(x^2-4x+2k)$
이때 방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근을 갖기 위해서는 방정식 $x^2-4x+2k=0$이 실근을 갖지 않거나 $x=-1$을 중근으로 가져야 한다.
(i) 이차방정식 $x^2-4x+2k=0$이 실근을 갖지 않는 경우
이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면
$\frac{D}{4}=4-2k<0$ $\therefore k>2$
(ii) 이차방정식 $x^2-4x+2k=0$이 $x=-1$을 중근으로 갖는 경우
$1+4+2k=0$ $\therefore k=-\frac{5}{2}$
그런데 $x^2-4x+2k=0$, 즉 $x^2-4x-5=0$에서
$(x+1)(x-5)=0$이므로 중근을 갖지 않는다.
(i), (ii)에서 $k>2$
따라서 정수 $k$의 최솟값은 3이다. 답 **3**

**0365** 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-4=0$의 세 근을 $-1$, $\alpha$, $\beta$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-1+\alpha+\beta=-a$ $\therefore a=1-(\alpha+\beta)$ ····· ㉠
$-\alpha-\beta+\alpha\beta=b$ $\therefore b=-(\alpha+\beta)+\alpha\beta$ ····· ㉡
$-1\times\alpha\times\beta=4$ $\therefore \alpha\beta=-4$

이때 $\alpha^2+\beta^2=33$이므로

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=33$, $(\alpha+\beta)^2-2\times(-4)=33$

$(\alpha+\beta)^2=25$

$\therefore \alpha+\beta=-5$ 또는 $\alpha+\beta=5$

(i) $\alpha+\beta=-5$일 때

㉠에서 $a=1-(-5)=6$

㉡에서 $b=-(-5)-4=1$

(ii) $\alpha+\beta=5$일 때

㉠에서 $a=1-5=-4<0$이므로 $a>0$을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $ab=6$ 답 **6**

**366** 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 $x$ cm라 하면 원기둥의 높이는 $(x+2)$ cm이므로 용기의 전체 부피는

(반원의 부피)+(원기둥의 부피)

$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi x^3+\pi x^2(x+2)$

$=\frac{64}{3}\pi(\text{cm}^3)$

즉, $\frac{2}{3}\pi x^3+\pi x^2(x+2)=\frac{64}{3}\pi$이므로

$\frac{2}{3}x^3+x^2(x+2)=\frac{64}{3}$, $2x^3+3x^2(x+2)=64$

$5x^3+6x^2-64=0$, $(x-2)(5x^2+16x+32)=0$

$\therefore x=2$ ($\because x$는 자연수)

따라서 밑면의 반지름의 길이는 2 cm이다. 답 ②

**367** 한 모서리의 길이가 $x$ cm인 정육면체 4개를 쌓은 입체도형이므로

$A=4x^3$

정육면체 4개의 겉넓이의 합은 $6x^2\times4=24x^2(\text{cm}^2)$이고, 겹쳐진 면의 넓이의 합은 $2x^2\times3=6x^2(\text{cm}^2)$이므로

$B=24x^2-6x^2=18x^2$

$B-2A=8$이므로 $18x^2-8x^3=8$

$\therefore 4x^3-9x^2+4=0$

$f(x)=4x^3-9x^2+4$로 놓으면 $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | −9 | 0 | 4 |
| | | 8 | −2 | −4 |
| | 4 | −1 | −2 | 0 |

$\therefore f(x)=(x-2)(4x^2-x-2)$

방정식 $f(x)=0$에서 $x=2$ ($\because x$는 자연수) 답 ②

## STEP 3 상위권 마스터 본문 78~79쪽

**368**

TIP 이차방정식의 해 중 하나는 삼차방정식의 중근이다.

$x^2-(n+1)x+n=0$에서 $(x-1)(x-n)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=n$

즉, 삼차방정식 $x^3+px^2+qx+16=0$의 해가 $x=1$, $x=n$뿐이므로

$x^3+px^2+qx+16=(x-1)^2(x-n)$ 또는

$x^3+px^2+qx+16=(x-1)(x-n)^2$

(i) $x^3+px^2+qx+16=(x-1)^2(x-n)$인 경우

양변의 상수항을 비교하면 $16=-n$

$\therefore n=-16$

(ii) $x^3+px^2+qx+16=(x-1)(x-n)^2$인 경우

양변의 상수항을 비교하면 $16=-n^2$

$\therefore n^2=-16$

이를 만족시키는 실수 $n$은 없다.

(i), (ii)에서 $n=-16$이므로

$x^3+px^2+qx+16=(x-1)^2(x+16)$

$=(x^2-2x+1)(x+16)$

$=x^3+14x^2-31x+16$

$\therefore p=14$, $q=-31$

한편, 다항식 $x^3+14x^2-31x+16$을 다항식 $x^2+(n+1)x+n$, 즉 $x^2-15x-16$으로 나누면

$$\begin{array}{r} x+29 \\ x^2-15x-16\overline{)\,x^3+14x^2-31x+16} \\ \underline{x^3-15x^2-16x} \\ 29x^2-15x+16 \\ \underline{29x^2-435x-464} \\ 420x+480 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=x+29$이므로 $Q(5)=34$

$\therefore p+q+Q(5)=14+(-31)+34=17$ 답 **17**

참고 이차방정식의 해 $a$, $b$만을 해로 가지므로 삼차방정식은 $(x-a)^2(x-b)$의 꼴이다.

**369**

TIP 삼차방정식의 세 근 중 직각삼각형의 빗변의 길이가 될 수 있는 것을 찾는다.

$f(x)=2x^3-5x^2+(k+3)x-k$로 놓으면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | −5 | $k+3$ | $-k$ |
| | | 2 | −3 | $k$ |
| | 2 | −3 | $k$ | 0 |

$\therefore f(x)=(x-1)(2x^2-3x+k)$

즉, 삼차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 세 실근은 1과 이차방정식 $2x^2-3x+k=0$의 두 근이다.

이차방정식 $2x^2-3x+k=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$ $(\alpha>\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{3}{2}$, $\alpha\beta=\frac{k}{2}$

1, $\alpha$, $\beta$가 직각삼각형의 세 변의 길이가 되는 경우는 다음과 같이 나눌 수 있다.

(i) 빗변의 길이가 1인 경우

$\alpha^2+\beta^2=1$이므로 $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1$에서

$\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\times\frac{k}{2}=1$ $\therefore k=\frac{5}{4}$

그런데 이차방정식 $2x^2-3x+\frac{5}{4}=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=9-4\times2\times\frac{5}{4}=-1<0$이므로 $\alpha$, $\beta$는 실수가 아니다.

즉, 1, $\alpha$, $\beta$는 직각삼각형의 세 변의 길이가 될 수 없다.

(ii) 빗변의 길이가 $\alpha$인 경우

$1+\beta^2=\alpha^2$이므로 $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=1$

이때 $\alpha+\beta=\frac{3}{2}$이므로 $\alpha-\beta=\frac{2}{3}$

두 식을 연립하여 풀면 $\alpha=\frac{13}{12}$, $\beta=\frac{5}{12}$

$\therefore k=2\alpha\beta=\frac{65}{72}$

(i), (ii)에서 $k=\frac{65}{72}$ 답 $\frac{65}{72}$

## 370

TIP $\alpha$, $\beta$, $\gamma$를 세 근으로 하고 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식은 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$

$f(x)=x^3+3x^2+4x+6$으로 놓으면

$f(x)=(x^2+x+1)(x+2)+x+4$

$\therefore x^2+x+1=\frac{f(x)-(x+4)}{x+2}$ ····· ㉠

방정식 $f(x)=0$의 세 근이 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$이므로

$f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=0$

㉠에 $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$를 각각 대입하면

$\alpha^2+\alpha+1=-\frac{\alpha+4}{\alpha+2}$, $\beta^2+\beta+1=-\frac{\beta+4}{\beta+2}$,

$\gamma^2+\gamma+1=-\frac{\gamma+4}{\gamma+2}$이므로

$(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)(\gamma^2+\gamma+1)$

$=\left(-\frac{\alpha+4}{\alpha+2}\right)\times\left(-\frac{\beta+4}{\beta+2}\right)\times\left(-\frac{\gamma+4}{\gamma+2}\right)$

$=-\frac{(\alpha+4)(\beta+4)(\gamma+4)}{(\alpha+2)(\beta+2)(\gamma+2)}$ ····· ㉡

한편, $f(x)=x^3+3x^2+4x+6=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$에서

$f(-2)=-8+12-8+6=2$이므로

$(-2-\alpha)(-2-\beta)(-2-\gamma)=2$

$\therefore (\alpha+2)(\beta+2)(\gamma+2)=-2$ ····· ㉢

$f(-4)=-64+48-16+6=-26$이므로

$(-4-\alpha)(-4-\beta)(-4-\gamma)=-26$

$\therefore (\alpha+4)(\beta+4)(\gamma+4)=26$ ····· ㉣

따라서 ㉢, ㉣을 ㉡에 대입하면 구하는 식의 값은

$-\frac{(\alpha+4)(\beta+4)(\gamma+4)}{(\alpha+2)(\beta+2)(\gamma+2)}=-\frac{26}{-2}=13$ 답 **13**

## 371

TIP $\omega$는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 $\omega$는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.

$\therefore \omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$

조건 ㈎에서

$(1+\omega)^a=(-\omega^2)^a=(-1)^a\omega^{2a}=\omega$

즉, $a$는 짝수이고 $2a=3k_1+1$ $(k_1=0, 1, 2, \cdots)$의 꼴이므로

$a=2, 8, 14, \cdots$ ····· ㉠

조건 ㈏에서

$(1+\omega)^b=(-\omega^2)^b=(-1)^b\omega^{2b}=-\omega^2$

즉, $b$는 홀수이고 $2b=3k_2+2$ $(k_2=0, 1, 2, \cdots)$의 꼴이므로

$b=1, 7, 13, \cdots$ ····· ㉡

조건 ㈐에서 $10<a+b<16$이므로 ㉠, ㉡에서 조건을 만족시키는 $a$, $b$의 순서쌍 $(a, b)$를 모두 찾으면

$(2, 13)$, $(8, 7)$, $(14, 1)$

따라서 $ab$의 최댓값은 $M=56$, 최솟값은 $m=14$이므로

$M-m=56-14=42$ 답 ④

## 372

TIP 공통근과 나머지 한 근을 이차방정식 $P(x)=0$, $Q(x)=0$의 근으로 놓고 근과 계수의 관계를 이용한다.

두 방정식 $P(x)=0$, $Q(x)=0$의 공통근을 $\alpha$라 하면

$P(\alpha)=0$, 즉 $\alpha^2+p\alpha+2q=0$ ····· ㉠

$Q(\alpha)=0$, 즉 $\alpha^2+q\alpha+2p=0$ ····· ㉡

㉠−㉡을 하면 $(p-q)\alpha+2(q-p)=0$

$(p-q)(\alpha-2)=0$ $\therefore p=q$ 또는 $\alpha=2$

그런데 $p=q$이면 두 방정식이 일치하므로 서로 다른 두 이차식이라는 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore \alpha=2$

두 방정식 $P(x)=0$과 $Q(x)=0$의 근 중 공통근이 아닌 두 근의 비가 2 : 1이므로 두 근을 각각 $2\beta$, $\beta$라 하자.

방정식 $x^2+px+2q=0$의 근은 2와 $2\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+2\beta=-p$, $2\times2\beta=2q$

$\therefore p=-2\beta-2$, $q=2\beta$

방정식 $x^2+qx+2p=0$의 근은 2와 $\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+\beta=-q$, $2\times\beta=2p$

$\therefore q=-\beta-2$, $p=\beta$

즉, $q=2\beta=-\beta-2$에서 $\beta=-\frac{2}{3}$

따라서 $p=-\frac{2}{3}$, $q=-\frac{4}{3}$이므로

$\frac{q}{p}=2$ 답 ⑤

## 373

TIP 삼차방정식의 서로 다른 세 정수인 근을 구한 후 $a$, $b$의 관계를 생각한다.

$f(x)=ax^3+2bx^2+4bx+8a$로 놓으면 $f(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-2$ | $a$ | $2b$ | $4b$ | $8a$ |
| | | $-2a$ | $4(a-b)$ | $-8a$ |
| | $a$ | $-2(a-b)$ | $4a$ | $0$ |

$\therefore f(x)=(x+2)\{ax^2-2(a-b)x+4a\}$

이때 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 정수를 근으로 가지려면 이차방정식 $ax^2-2(a-b)x+4a=0$은 $x\neq-2$인 서로 다른 두 정수를 근으로 가져야 한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=\frac{2(a-b)}{a}$, (두 근의 곱)$=\frac{4a}{a}=4$

곱이 4인 서로 다른 두 정수인 근은

$x=1$, $x=4$ 또는 $x=-1$, $x=-4$

(i) 두 근이 $x=1$, $x=4$일 때

두 근의 합은 5이므로 $\frac{2(a-b)}{a}=5$

$\therefore 2b=-3a$

즉, 자연수 $k$에 대하여 $|a|=2k$, $|b|=3k$이고 부호가 서로 반대이므로 $|a|\le50$, $|b|\le50$을 만족시키는 순서쌍 $(a, b)$는

$(2, -3)$, $(4, -6)$, $(6, -9)$, …, $(32, -48)$,

$(-2, 3)$, $(-4, 6)$, $(-6, 9)$, …, $(-32, 48)$

의 32개이다.

(ii) 두 근이 $x=-1$, $x=-4$일 때

두 근의 합은 $-5$이므로 $\frac{2(a-b)}{a}=-5$

$\therefore 2b=7a$

즉, 자연수 $k'$에 대하여 $|a|=2k'$, $|b|=7k'$이고 부호가 같으므로 $|a|\le50$, $|b|\le50$을 만족시키는 순서쌍 $(a, b)$는

$(2, 7)$, $(4, 14)$, $(6, 21)$, …, $(14, 49)$,

$(-2, -7)$, $(-4, -14)$, $(-6, -21)$, …,

$(-14, -49)$

의 14개이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a, b)$의 개수는

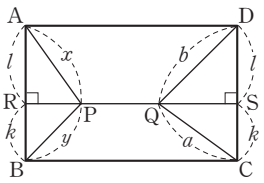
$32+14=46$ 답 **46**

## 374

TIP $\overline{PQ}$의 연장선을 그어 △APR, △BPR, △DQS, △CQS에서 피타고라스 정리를 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{PQ}$의 연장선이 변 AB와 만나는 점을 R, 변 CD와 만나는 점을 S라 하자.

$\overline{PA}=x$, $\overline{PB}=y$, $\overline{RA}=l$, $\overline{RB}=k$라 하면




두 직각삼각형 APR, BPR에서

$\overline{PR}^2=x^2-l^2=y^2-k^2$ …… ㉠

두 직각삼각형 DQS, CQS에서

$\overline{QS}^2=b^2-l^2=a^2-k^2$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$x^2-b^2=y^2-a^2$, $x^2-y^2=b^2-a^2$

$\therefore (x+y)(x-y)=8$ ($\because b^2-a^2=8$)

이때 $x$, $y$가 자연수이므로 $x+y$는 자연수이고

$(x+y)(x-y)=8$에서 $x-y$도 자연수이다.

또한, $x-y<x+y$이므로

$\begin{cases}x-y=1\\x+y=8\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x-y=2\\x+y=4\end{cases}$

두 연립방정식을 각각 연립하여 풀면

$x=\frac{9}{2}$, $y=\frac{7}{2}$ 또는 $x=3$, $y=1$

$x$, $y$가 자연수이므로 $x=3$, $y=1$

따라서 $\overline{PA}=3$, $\overline{PB}=1$이므로

$\overline{PA}\times\overline{PB}=3$ 답 **3**

# 08 연립일차부등식

## STEP 1 핵심기출 마스터

본문 81~83쪽

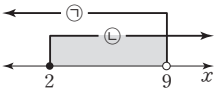
**0375** $2x<x+9$에서

$x<9$ …… ㉠

$x+5\le 5x-3$에서

$-4x\le -8$ $\therefore x\ge 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면




$2\le x<9$

따라서 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 $x$는 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 7개이다. 답 ⑤

**0376** $3x+y=7$에서 $y=-3x+7$이므로 이것을 주어진 부등식에 대입하면

$\frac{1}{3}(-3x+7+2)<x-3x+7-1<33-(-3x+7)$

$\therefore -x+3<-2x+6<3x+26$

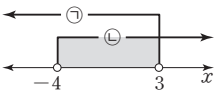
$-x+3<-2x+6$에서

$x<3$ …… ㉠

$-2x+6<3x+26$에서

$5x>-20$ $\therefore x>-4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면




$-4<x<3$

이때 $x$는 자연수이므로 1, 2의 2개이다.

$x=1$일 때 $y=-3\times 1+7=4$, $x=2$일 때 $y=-3\times 2+7=1$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

따라서 주어진 부등식의 자연수인 해의 개수는 2이다. 답 ③

**0377** $2x+3>6(x+1)$에서

$2x+3>6x+6$, $4x<-3$

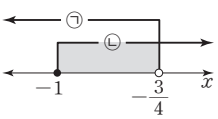
$\therefore x<-\frac{3}{4}$ …… ㉠

$\frac{x+5}{3}+\frac{1}{6}\ge\frac{1-2x}{2}$에서

$2(x+5)+1\ge 3(1-2x)$, $2x+11\ge 3-6x$

$8x\ge -8$ $\therefore x\ge -1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



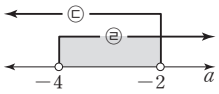

$-1\le x<-\frac{3}{4}$

즉, $M=-1$이므로 $\frac{a}{2}<-1<\frac{a+1}{3}$

$\frac{a}{2}<-1$에서 $a<-2$ …… ㉢

$-1<\frac{a+1}{3}$에서 $a>-4$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면




$-4<a<-2$

따라서 구하는 정수 $a$의 값은 $-3$이다.

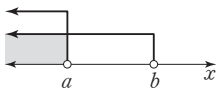
답 $-3$

**0378** $a<b$이므로 $-b<-a$

ㄱ. 오른쪽 그림과 같으므로 해는 없다.



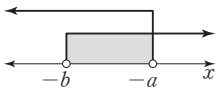

ㄴ. 오른쪽 그림과 같으므로 해는 $x<a$




ㄷ. 오른쪽 그림과 같으므로 해는 없다.




ㄹ. 오른쪽 그림과 같으므로 해는 $-b<x<-a$




따라서 해가 없는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

**0379** $3(2x-1)<4x+1$에서

$6x-3<4x+1$, $2x<4$

$\therefore x<2$ …… ㉠

$5(x+1)\ge x+a$에서

$5x+5\ge x+a$, $4x\ge a-5$

$\therefore x\ge\frac{a-5}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{a-5}{4}\le x<2$

주어진 연립부등식의 해가 $1\le x<b$이므로

$\frac{a-5}{4}=1$, $2=b$ $\therefore a=9$, $b=2$

$\therefore a-b=7$

답 7

**0380** $2x+a-2b<x+3$에서

$x<3-a+2b$ …… ㉠

$x+3<b(x-1)$에서

$(b-1)x>b+3$ …… ㉡

주어진 부등식의 해가 $2<x<3$이므로 ㉠의 해는 $x<3$이 되어야 하고 ㉡의 해는 $x>2$가 되어야 한다.

즉, ㉡에서 $b-1>0$이고 $x>\frac{b+3}{b-1}$ …… ㉢

㉠, ㉢의 공통부분이 $2<x<3$이므로

$\frac{b+3}{b-1}=2$, $3-a+2b=3$

$\frac{b+3}{b-1}=2$에서 $b+3=2(b-1)$ $\therefore b=5$

$3-a+2b=3$에서 $3-a+10=3$ $\therefore a=10$

$\therefore a+b=15$

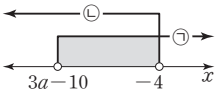
답 15

**0381** $\frac{3(x+a)}{2}<2x+5$에서

$3x+3a<4x+10$ $\therefore x>3a-10$ ····· ㉠

$2x+5<x+1$에서 $x<-4$ ····· ㉡

주어진 부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림과 같이 ㉠, ㉡의 공통부분이 존재해야 하므로




$3a-10<-4$, $3a<6$

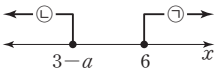
$\therefore a<2$ 답 $a<2$

**0382** $\frac{x}{2}+\frac{2(3-x)}{3}\le 1$에서

$3x+4(3-x)\le 6$ $\therefore x\ge 6$ ····· ㉠

$3-x\ge a$에서 $x\le 3-a$ ····· ㉡

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 ㉠, ㉡의 공통부분이 존재하지 않아야 하므로




$3-a<6$ $\therefore a>-3$

따라서 정수 $a$의 최솟값은 $-2$이다. 답 ③

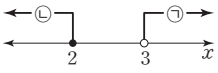
**0383** $7x+3>3x+k$에서

$4x>k-3$ $\therefore x>\frac{k-3}{4}$ ····· ㉠

$\frac{x+2}{2}\le\frac{x+4}{3}$에서

$3(x+2)\le 2(x+4)$ $\therefore x\le 2$ ····· ㉡

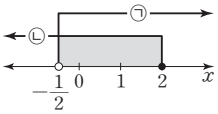
ㄱ. $k=15$이면 $\frac{k-3}{4}=3$이므로 주어진 연립부등식은 해를 갖지 않는다.



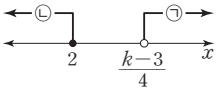

ㄴ. $k=1$이면 $\frac{k-3}{4}=-\frac{1}{2}$이므로

$-\frac{1}{2}<x\le 2$

즉, 주어진 연립부등식을 만족시키는 자연수는 1, 2의 2개이다.




ㄷ. 주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



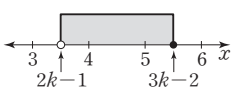

$\frac{k-3}{4}\ge 2$ $\therefore k\ge 11$

즉, $k$의 최솟값은 11이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

참고 주어진 연립부등식이 해를 가지려면 $\frac{k-3}{4}<2$, 즉 $k<11$이어야 한다.

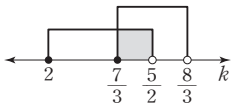
**0384** 주어진 부등식을 만족시키는 정수 $x$가 4와 5뿐이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로




$3\le 2k-1<4$, $5\le 3k-2<6$

을 동시에 만족시켜야 한다.

즉, $2\le k<\frac{5}{2}$, $\frac{7}{3}\le k<\frac{8}{3}$이므로 오른쪽 그림에서




$\frac{7}{3}\le k<\frac{5}{2}$ 답 ④

**0385** 컵의 개수를 $x$라 하면 접시의 개수는 $(10-x)$이므로

$\begin{cases}150x+100(10-x)\le 1200\\ 4x+8(10-x)\le 72\end{cases}$

$150x+100(10-x)\le 1200$에서

$50x+1000\le 1200$, $50x\le 200$

$\therefore x\le 4$ ····· ㉠

$4x+8(10-x)\le 72$에서

$-4x+80\le 72$, $4x\ge 8$

$\therefore x\ge 2$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$2\le x\le 4$

따라서 컵은 최대 4개까지 만들 수 있다. 답 4개

**0386** 빵의 개수를 $x$라 하면 음료의 개수는 $(22-x)$이므로

$\begin{cases}x\le 22-x\\ 800x+1000(22-x)\le 20400\end{cases}$

$x\le 22-x$에서

$2x\le 22$ $\therefore x\le 11$ ····· ㉠

$800x+1000(22-x)\le 20400$에서

$-200x+22000\le 20400$, $200x\ge 1600$

$\therefore x\ge 8$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$8\le x\le 11$

따라서 빵은 8개 이상 11개 이하로 살 수 있다. 답 ③

**0387** 12 %의 소금물 300 g에 들어 있는 소금의 양은

$\frac{12}{100}\times 300=36$(g)

35 %의 소금물의 양을 $x$ g이라 하면

35 %의 소금물 $x$ g에 들어 있는 소금의 양은

$\left(\frac{35}{100}\times x\right)$ g

두 소금물을 섞어서 20 % 이상 23 % 이하의 소금물을 만들므로

$\frac{20}{100}\times(300+x)\le 36+\frac{35}{100}\times x\le\frac{23}{100}\times(300+x)$

$\therefore 20(300+x)\le 3600+35x\le 23(300+x)$

$20(300+x)\le 3600+35x$에서

$6000+20x\le 3600+35x$, $15x\ge 2400$

$\therefore x\ge 160$ ····· ㉠

$3600+35x\le 23(300+x)$에서

$3600+35x\le 6900+23x$, $12x\le 3300$

$\therefore x\le 275$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$160 \le x \le 275$

따라서 섞어야 하는 35 %의 소금물의 양은 160 g 이상 275 g 이하이다. 답 **160 g 이상 275 g 이하**

**0388** $|x-a|<2$에서

$-2<x-a<2 \quad \therefore a-2<x<a+2$ …… ㉠

이때 $a$가 자연수이므로 ㉠을 만족시키는 정수 $x$는

$a-1,\ a,\ a+1$

이들의 합이 33이므로

$(a-1)+a+(a+1)=33$

$3a=33 \quad \therefore a=11$ 답 ①

**0389** $|5x+2| \le 1$에서

$-1 \le 5x+2 \le 1,\ -3 \le 5x \le -1$

$\therefore 1 \le -5x \le 3$ …… ㉠

$|y-3| \le 2$에서

$-2 \le y-3 \le 2,\ 1 \le y \le 5$

$\therefore 3 \le 3y \le 15$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $4 \le 3y-5x \le 18$이므로 $M=18,\ m=4$

$\therefore M+m=22$ 답 ②

**개념 Plus**

실수 $x$, $y$에 대하여 $a \le x \le b,\ c \le y \le d$일 때

(1) $a+c \le x+y \le b+d$

(2) $a-d \le x-y \le b-c$

**0390** $|ax+2|>b$의 해가 $x<3$ 또는 $x>5$이므로 $b>0$

$|ax+2|>b$에서 $ax+2<-b$ 또는 $ax+2>b$

(i) $ax+2<-b$에서 $ax<-b-2$

이때 $a<0$이므로 $x>\dfrac{-b-2}{a}$

(ii) $ax+2>b$에서 $ax>b-2$

이때 $a<0$이므로 $x<\dfrac{b-2}{a}$

(i), (ii)에서 부등식의 해는 $x<\dfrac{b-2}{a}$ 또는 $x>\dfrac{-b-2}{a}$

그런데 주어진 부등식의 해가 $x<3$ 또는 $x>5$이므로

$\dfrac{b-2}{a}=3,\ \dfrac{-b-2}{a}=5$

$3a-b=-2,\ 5a+b=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore b-a=1$ 답 **1**

**0391** $3|x-2|>2x+1$에서

(i) $x-2<0$, 즉 $x<2$일 때

$-3(x-2)>2x+1,\ -5x>-5 \quad \therefore x<1$

그런데 $x<2$이므로 $x<1$

(ii) $x-2 \ge 0$, 즉 $x \ge 2$일 때

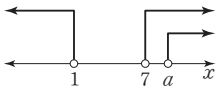
$3(x-2)>2x+1 \quad \therefore x>7$

그런데 $x \ge 2$이므로 $x>7$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $x<1$ 또는 $x>7$

이때 주어진 부등식의 해가 $x>a$를 포함하려면 오른쪽 그림에서

$a \ge 7$




따라서 실수 $a$의 최솟값은 7이다. 답 **7**

**0392** $|2x-1|-3>a$에서 $|2x-1|>a+3$

이 부등식의 해가 모든 실수가 되려면

$a+3<0 \quad \therefore a<-3$ 답 $a<-3$

**0393** $|x+1|+|2x-3| \le 6$에서

(i) $x<-1$일 때

$-(x+1)-(2x-3) \le 6,\ -x-1-2x+3 \le 6$

$-3x+2 \le 6,\ -3x \le 4 \quad \therefore x \ge -\dfrac{4}{3}$

그런데 $x<-1$이므로 $-\dfrac{4}{3} \le x<-1$

(ii) $-1 \le x<\dfrac{3}{2}$일 때

$(x+1)-(2x-3) \le 6,\ x+1-2x+3 \le 6$

$-x+4 \le 6 \quad \therefore x \ge -2$

그런데 $-1 \le x<\dfrac{3}{2}$이므로 $-1 \le x<\dfrac{3}{2}$

(iii) $x \ge \dfrac{3}{2}$일 때

$(x+1)+(2x-3) \le 6,\ 3x-2 \le 6$

$3x \le 8 \quad \therefore x \le \dfrac{8}{3}$

그런데 $x \ge \dfrac{3}{2}$이므로 $\dfrac{3}{2} \le x \le \dfrac{8}{3}$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-\dfrac{4}{3} \le x \le \dfrac{8}{3}$

따라서 정수 $x$는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$의 4개이다. 답 ②

**0394** $|x-1|+\sqrt{x^2+4x+4}<x+3$에서

$|x-1|+\sqrt{(x+2)^2}<x+3$

$\therefore |x-1|+|x+2|<x+3$ …… ㉠

(i) $x<-2$일 때

$-(x-1)-(x+2)<x+3$

$-2x-1<x+3,\ 3x>-4 \quad \therefore x>-\dfrac{4}{3}$

그런데 $x<-2$이므로 해는 없다.

(ii) $-2 \le x<1$일 때

$-(x-1)+(x+2)<x+3 \quad \therefore x>0$

그런데 $-2 \le x<1$이므로 $0<x<1$

(iii) $x \geq 1$일 때

$(x-1)+(x+2)<x+3$

$2x+1<x+3$ $\therefore x<2$

그런데 $x \geq 1$이므로 $1 \leq x<2$

(i), (ii), (iii)에서 부등식 ㉠의 해는 $0<x<2$

한편, $|4x+k|<4$에서

$-4<4x+k<4$, $-4-k<4x<4-k$

$\therefore \frac{-4-k}{4}<x<\frac{4-k}{4}$

따라서 $\frac{-4-k}{4}=0$, $\frac{4-k}{4}=2$이므로

$k=-4$ 답 ①

**0395** $||x-1|-3| \leq 5$에서

$-5 \leq |x-1|-3 \leq 5$

$\therefore -2 \leq |x-1| \leq 8$

그런데 $|x-1| \geq 0$이므로

$0 \leq |x-1| \leq 8$

$-8 \leq x-1 \leq 8$ $\therefore -7 \leq x \leq 9$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 모든 정수 $x$의 값의 합은

$(-7)+(-6)+\cdots+(-1)+0+1+2+\cdots+7+8+9$

$=8+9=17$ 답 **17**

다른풀이

$||x-1|-3| \leq 5$에서

(i) $x<1$일 때

$|-(x-1)-3| \leq 5$, $|-x-2| \leq 5$

$-5 \leq -x-2 \leq 5$, $-3 \leq -x \leq 7$

$\therefore -7 \leq x \leq 3$

그런데 $x<1$이므로 $-7 \leq x<1$

(ii) $x \geq 1$일 때

$|x-1-3| \leq 5$, $|x-4| \leq 5$

$-5 \leq x-4 \leq 5$

$\therefore -1 \leq x \leq 9$

그런데 $x \geq 1$이므로 $1 \leq x \leq 9$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-7 \leq x \leq 9$

## STEP 2 실전 마스터 본문 84~86쪽

**0396** $k^2(x+1)-2<k(x-1)$에서

$(k^2-k)x<-k^2-k+2$

$\therefore k(k-1)x<-(k-1)(k+2)$ ····· ㉠

부등식 ㉠의 해가 모든 실수가 되려면 $0 \times x<$(양수)의 꼴, 즉

$k(k-1)=0$, $-(k-1)(k+2)>0$이어야 하므로

$k=0$ $\therefore a=0$

부등식 ㉠의 해가 존재하지 않으려면 $0 \times x<$(0 또는 음수)의 꼴, 즉 $k(k-1)=0$, $-(k-1)(k+2) \leq 0$이어야 하므로

$k=1$ $\therefore b=1$

$\therefore a+b=1$ 답 **1**

**0397** $x+4y=-12$에서

$x=-12-4y$ ····· ㉠

$3y+2z=4$에서

$2z=4-3y$ ····· ㉡

부등식 $x<2y<4z+16$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$-12-4y<2y<2(4-3y)+16$

$-12-4y<2y$에서

$6y>-12$ $\therefore y>-2$ ····· ㉢

$2y<2(4-3y)+16$에서

$2y<8-6y+16$, $8y<24$ $\therefore y<3$ ····· ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $-2<y<3$ 답 ②

**0398** $f(x)=ax+b$ ($a$, $b$는 실수)로 놓으면

함수 $y=f(x)$의 그래프의 기울기가 양수이므로

$a>0$

또한, $-1 \leq x \leq 2$에서 함수 $y=f(x)$의 최댓값은 5이고 최솟값은 $-4$이므로 $f(-1)=-4$, $f(2)=5$

$f(-1)=-a+b=-4$ ····· ㉠

$f(2)=2a+b=5$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-1$

$\therefore f(x)=3x-1$

이때 $\begin{cases} f(2x)<x+29 \\ f(x)-f(-x)>5x-2 \end{cases}$에서

$\begin{cases} 6x-1<x+29 \\ (3x-1)-(-3x-1)>5x-2 \end{cases}$

$6x-1<x+29$에서

$5x<30$ $\therefore x<6$ ····· ㉢

$(3x-1)-(-3x-1)>5x-2$에서

$6x>5x-2$ $\therefore x>-2$ ····· ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$-2<x<6$

따라서 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 $x$는

$-1$, $0$, $1$, $\cdots$, $5$의 7개이다. 답 ④

**0399** 주어진 연립부등식의 해가 $x>-\frac{3}{2}$이므로 각 부등식의 해의 공통부분이 $x>-\frac{3}{2}$이다.

$ax+8 \geq 2x+4a$에서

$(a-2)x \geq 4(a-2)$ ····· ㉠

(i) $a>2$일 때

$a-2>0$이므로 부등식 ㉠의 해는 $x\geq 4$이고 이때 주어진 연립부등식의 해는 $x>-\frac{3}{2}$이 될 수 없다.

(ii) $a=2$일 때

$0\times x\geq 0$이므로 부등식 ㉠의 해는 모든 실수이고 이때 주어진 연립부등식의 해는 $x>-\frac{3}{2}$이 될 수 있다.

(iii) $a<2$일 때

$a-2<0$이므로 부등식 ㉠의 해는 $x\leq 4$이고 이때 주어진 연립부등식의 해는 $x>-\frac{3}{2}$이 될 수 없다.

(i), (ii), (iii)에서 $a=2$

$a=2$를 $bx-3>x-3a$에 대입하면

$bx-3>x-6$, $(b-1)x>-3$

이 부등식의 해가 $x>-\frac{3}{2}$이어야 하므로

$b-1>0$이고 $x>-\frac{3}{b-1}$

즉, $-\frac{3}{b-1}=-\frac{3}{2}$이므로 $b-1=2$

$\therefore b=3$

$\therefore b-a=1$ 답 ③

**400** $ax+3\geq 2x+2$에서 $(a-2)x\geq -1$

(i) $a-2>0$일 때

$x\geq\frac{-1}{a-2}$이므로 $\frac{-1}{a-2}=-1$

$a-2=1$ $\therefore a=3$

이것은 $a-2>0$을 만족시킨다.

$a=3$을 $bx+1\leq ax+b$에 대입하면

$bx+1\leq 3x+b$, $(b-3)x\leq b-1$

이 부등식의 해가 $x\leq 2$이어야 하므로

$b-3>0$이고 $x\leq\frac{b-1}{b-3}$

즉, $\frac{b-1}{b-3}=2$이므로 $2b-6=b-1$ $\therefore b=5$

이것은 $b-3>0$을 만족시킨다.

(ii) $a-2<0$일 때

$x\leq\frac{-1}{a-2}$이므로 $\frac{-1}{a-2}=2$

$2a-4=-1$, $2a=3$ $\therefore a=\frac{3}{2}$

이것은 $a-2<0$을 만족시킨다.

$a=\frac{3}{2}$을 $bx+1\leq ax+b$에 대입하면

$bx+1\leq\frac{3}{2}x+b$, $\left(b-\frac{3}{2}\right)x\leq b-1$

이 부등식의 해가 $x\geq -1$이어야 하므로

$b-\frac{3}{2}<0$이고 $x\geq\frac{b-1}{b-\frac{3}{2}}$

즉, $\frac{b-1}{b-\frac{3}{2}}=-1$이므로 $-b+\frac{3}{2}=b-1$

$-2b=-\frac{5}{2}$ $\therefore b=\frac{5}{4}$

이것은 $b-\frac{3}{2}<0$을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=3$, $b=5$ 또는 $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{5}{4}$이므로

$a+b=8$ 또는 $a+b=\frac{11}{4}$ 답 $8, \frac{11}{4}$

**401** $4x+a\leq 3x+b$에서

$x\leq b-a$

$-x+3<3x+b$에서

$-4x<b-3$ $\therefore x>\frac{-b+3}{4}$

이때 해가 $-1<x\leq 2$이므로

$\frac{-b+3}{4}=-1$, $b-a=2$

$\therefore a=5$, $b=7$

이것을 원래 부등식에 대입하면

$4x+5\leq -x+3<3x+7$

$4x+5\leq -x+3$에서

$5x\leq -2$ $\therefore x\leq -\frac{2}{5}$ …… ㉠

$-x+3<3x+7$에서

$-4x<4$ $\therefore x>-1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1<x\leq -\frac{2}{5}$ 답 $\mathbf{-1<x\leq -\frac{2}{5}}$

**402** $x^3-3x+2=0$에서

$(x-1)^2(x+2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-2$

한편, $4x+a<3x+6$에서

$x<6-a$ …… ㉠

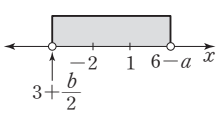
$3x+6<5x-b$에서

$2x>6+b$ $\therefore x>3+\frac{b}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$3+\frac{b}{2}<x<6-a$ …… ㉢

이때 $x=1$과 $x=-2$가 주어진 부등식을 만족시키므로 ㉢은 오른쪽 그림과 같아야 한다.




즉, $3+\frac{b}{2}<-2$, $1<6-a$이므로

$a<5$, $b<-10$

따라서 $a=4$, $b=-11$일 때 $a+b$의 값은 최대이므로 구하는 최댓값은

$4+(-11)=-7$ 답 ②

**403** $\frac{a}{b}$를 소숫점 아래 첫째 자리에서 반올림하면 5이므로

$4.5 \le \frac{a}{b} < 5.5$ $\therefore 45b \le 10a < 55b$ ($\because b>0$) …… ㉠

이때 $2a-5b=23$에서 $a=\frac{5b+23}{2}$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$45b \le 10\times\frac{5b+23}{2} < 55b$ $\therefore 45b \le 25b+115 < 55b$

$45b \le 25b+115$에서

$20b \le 115$ $\therefore b \le \frac{23}{4}$ …… ㉡

$25b+115 < 55b$에서

$30b > 115$ $\therefore b > \frac{23}{6}$ …… ㉢

㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$\frac{23}{6} < b \le \frac{23}{4}$

따라서 위의 부등식을 만족시키는 자연수 $b$는 4, 5이다.

(i) $b=4$일 때

$a=\frac{5\times4+23}{2}=\frac{43}{2}$

그런데 $a$는 자연수가 아니므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $b=5$일 때

$a=\frac{5\times5+23}{2}=24$

즉, $a$는 자연수이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=24$, $b=5$

$\therefore ab=120$ 답 **120**

**404** $A$의 십의 자리의 숫자를 $a$ ($1 \le a \le 9$)라 하면 일의 자리의 숫자는 $(10-a)$이므로

$A=10a+(10-a)=9a+10$

$B=10(10-a)+a=100-9a$

이때 $B$는 $A$의 2배 이상 3배 이하이므로

$2(9a+10) \le 100-9a \le 3(9a+10)$

$2(9a+10) \le 100-9a$에서

$18a+20 \le 100-9a$, $27a \le 80$

$\therefore a \le \frac{80}{27}$ …… ㉠

$100-9a \le 3(9a+10)$에서

$100-9a \le 27a+30$, $36a \ge 70$

$\therefore a \ge \frac{35}{18}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{35}{18} \le a \le \frac{80}{27}$

그런데 $a$는 $1 \le a \le 9$인 자연수이므로

$a=2$

$\therefore A=9a+10=9\times2+10=28$ 답 **28**

**405** 수박의 원가를 $a$원이라 할 때,

원가에 25 %의 이익을 붙이면 판매 가격은

$a\left(1+\frac{25}{100}\right)=\frac{5}{4}a$(원)

처음 판매 가격에서 $x$ % 할인하였다면 판매 가격은

$\frac{5}{4}a\left(1-\frac{x}{100}\right)$원

이때 원가의 10 % 이상 15 % 이하의 이익만 남기고 팔기로 하였으므로

$a\left(1+\frac{10}{100}\right) \le \frac{5}{4}a\left(1-\frac{x}{100}\right) \le a\left(1+\frac{15}{100}\right)$

$\frac{11}{10} \le \frac{5}{4}\left(1-\frac{x}{100}\right) \le \frac{23}{20}$

$440 \le 500-5x \le 460$, $-60 \le -5x \le -40$

$\therefore 8 \le x \le 12$

따라서 8 % 이상 12 % 이하로 할인하여 판매해야 한다.

답 **8 % 이상 12 % 이하**

**406** 전체 일의 양을 1이라 하면 A급 기술자들은 한 사람당 하루에 $\frac{1}{10}$의 일을 하고, B급 기술자들은 한 사람당 하루에 $\frac{1}{30}$의 일을 한다.

B급 기술자의 인원수를 $x$ ($0 \le x \le 12$)라 하면

A급 기술자의 인원수는 $(12-x)$이다.

이때 A급 기술자들과 B급 기술자들 총 12명이 함께 하루 동안 하는 일의 양은

$(12-x)\times\frac{1}{10}+x\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}-\frac{1}{15}x$

A급 기술자들과 B급 기술자들 총 12명이 함께 일을 하면 하루만에는 완성할 수 없지만 2일 만에는 완성할 수 있으므로

$\frac{1}{2} \le \frac{6}{5}-\frac{1}{15}x < 1$ $\therefore 15 \le 36-2x < 30$

$15 \le 36-2x$에서 $2x \le 21$

$\therefore x \le \frac{21}{2}$ …… ㉠

$36-2x < 30$에서 $2x > 6$

$\therefore x > 3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$3 < x \le \frac{21}{2}$

따라서 B급 기술자는 최대 10명이다. 답 ④

참고 어떤 일을 완성하는 데 $n$일이 걸리면 이 일을 하루에 $\frac{1}{n}$만큼 할 수 있다.

**407** $b<0$이면 $|ax+1| \le b$의 해는 없고

$b=0$이면 $|ax+1| \le b$의 해는 $x=-\frac{1}{a}$이므로

$b>0$이어야 한다.

즉, $|ax+1| \le b$에서 $-b \le ax+1 \le b$

$\therefore -b-1 \le ax \le b-1$

(i) $a>0$일 때

$\frac{-b-1}{a} \le x \le \frac{b-1}{a}$

주어진 부등식의 해가 $-1 \le x \le 3$이므로

$\frac{-b-1}{a}=-1$ …… ㉠

$\frac{b-1}{a}=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=-2$

이것은 $a>0$, $b>0$을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때

$\frac{b-1}{a} \le x \le \frac{-b-1}{a}$

주어진 부등식의 해가 $-1 \le x \le 3$이므로

$\frac{b-1}{a}=-1$ …… ㉢

$\frac{-b-1}{a}=3$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=2$

이것은 $a<0$, $b>0$을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=-1$, $b=2$이므로

$ab=-2$

답 $-2$

**0408** $|x+1|+|x-2| \ge 5$에서

(i) $x<-1$일 때

$-(x+1)-(x-2) \ge 5$

$-2x \ge 4$ $\therefore x \le -2$

그런데 $x<-1$이므로 $x \le -2$

(ii) $-1 \le x<2$일 때

$(x+1)-(x-2) \ge 5$ $\therefore 0 \times x \ge 2$

따라서 해가 없다.

(iii) $x \ge 2$일 때

$(x+1)+(x-2) \ge 5$

$2x \ge 6$ $\therefore x \ge 3$

그런데 $x \ge 2$이므로 $x \ge 3$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$x \le -2$ 또는 $x \ge 3$ …… ㉠

한편, 부등식 $|x-a| \ge b$에서

$x-a \le -b$ 또는 $x-a \ge b$

$\therefore x \le a-b$ 또는 $x \ge a+b$ …… ㉡

㉠과 ㉡은 같아야 하므로

$a-b=-2$, $a+b=3$

두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{5}{2}$

$\therefore 2a+4b=2 \times \frac{1}{2}+4 \times \frac{5}{2}=11$

답 ②

**0409** $\overline{AP}=|x-3|$, $\overline{BP}=|x-7|$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP} \le 8$에서 $|x-3|+|x-7| \le 8$

(i) $x<3$일 때

$-(x-3)-(x-7) \le 8$ $\therefore x \ge 1$

그런데 $x<3$이므로 $1 \le x<3$

(ii) $3 \le x<7$일 때

$(x-3)-(x-7) \le 8$ $\therefore 4 \le 8$

따라서 해는 모든 실수이다.

그런데 $3 \le x<7$이므로 $3 \le x<7$

(iii) $x \ge 7$일 때

$(x-3)+(x-7) \le 8$ $\therefore x \le 9$

그런데 $x \ge 7$이므로 $7 \le x \le 9$

(i), (ii), (iii)에서 $1 \le x \le 9$

따라서 선분 OP의 길이의 최댓값은 9, 최솟값은 1이므로 그 합은

$9+1=10$

답 ④

**0410** $|x+3|+|2x-1| \le k$에서

(i) $x<-3$일 때

$-(x+3)-(2x-1) \le k$, $-3x-2 \le k$

$-3x \le k+2$ $\therefore x \ge -\frac{k+2}{3}$

$x<-3$인 범위에서 해가 존재하려면

$-\frac{k+2}{3}<-3$ $\therefore k>7$ …… ㉠

(ii) $-3 \le x<\frac{1}{2}$일 때

$(x+3)-(2x-1) \le k$, $-x+4 \le k$

$\therefore x \ge 4-k$

$-3 \le x<\frac{1}{2}$인 범위에서 해가 존재하려면

$4-k<\frac{1}{2}$ $\therefore k>\frac{7}{2}$ …… ㉡

(iii) $x \ge \frac{1}{2}$일 때

$(x+3)+(2x-1) \le k$, $3x+2 \le k$

$3x \le k-2$ $\therefore x \le \frac{k-2}{3}$

$x \ge \frac{1}{2}$인 범위에서 해가 존재하려면

$\frac{k-2}{3} \ge \frac{1}{2}$ $\therefore k \ge \frac{7}{2}$ …… ㉢

주어진 부등식의 해가 존재하려면 ㉠ 또는 ㉡ 또는 ㉢을 만족시켜야 하므로 실수 $k$의 값의 범위는 $k \ge \frac{7}{2}$

따라서 $k$의 값으로 적당하지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

**411** $-3<x<4$이므로 부등식

$|x-2|+|x+3|+|x-4|\geq k$에서

(i) $-3<x<2$일 때

$-(x-2)+(x+3)-(x-4)\geq k$

$-x+9\geq k$ $\therefore x\leq 9-k$

그런데 $-3<x<2$이므로 주어진 부등식이 항상 성립하려면 $2\leq 9-k$ $\therefore k\leq 7$

(ii) $2\leq x<4$일 때

$(x-2)+(x+3)-(x-4)\geq k$

$x+5\geq k$ $\therefore x\geq k-5$

그런데 $2\leq x<4$이므로 주어진 부등식이 항상 성립하려면

$k-5\leq 2$ $\therefore k\leq 7$

(i), (ii)에서 $k\leq 7$

따라서 $k$의 최댓값은 7이다. 답 ④

**412** $-2x+a<\frac{x+1}{3}$에서

$-6x+3a<x+1$, $-7x<1-3a$

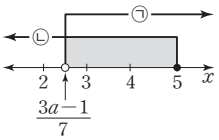
$\therefore x>\frac{3a-1}{7}$ ····· ㉠

$\frac{x+1}{3}\leq\frac{x+3}{4}$에서

$4(x+1)\leq 3(x+3)$, $4x+4\leq 3x+9$

$\therefore x\leq 5$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분에 정수 $x$가 3개 포함되도록 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




즉, $2\leq\frac{3a-1}{7}<3$이므로

$14\leq 3a-1<21$, $15\leq 3a<22$

$\therefore 5\leq a<\frac{22}{3}$ 답 $\mathbf{5\leq a<\frac{22}{3}}$

**413** 학생 수를 $x$라 하면 사과의 개수는 $5(x-6)$이므로

$4x+1\leq 5(x-6)\leq 4x+10$

$4x+1\leq 5(x-6)$에서

$4x+1\leq 5x-30$ $\therefore x\geq 31$ ····· ㉠

$5(x-6)\leq 4x+10$에서

$5x-30\leq 4x+10$ $\therefore x\leq 40$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$31\leq x\leq 40$

이때 $x$는 자연수이고 $5(x-6)$이 10의 배수이어야 하므로

$x=32, 34, 36, 38, 40$

따라서 최대 학생 수는 40이다. 답 **40**

참고 사과가 한 상자에 10개 들어 있으므로 한 명이 4개씩 먹었을 때 남는 사과는 1개 이상 12개 이하이다.

## STEP 3 상위권 마스터

본문 87쪽

**414**

TIP 어머니와 철수가 만난 층수를 $x$층이라 하면 어머니는 엘리베이터가 $x$층에 머무르는 동안 철수와 만나야 한다.

어머니와 철수가 만나는 층수를 $x$층이라 하면

철수가 $x$층까지 내려가는 데 걸리는 시간은 $10(10-x)$초

엘리베이터가 $x$층까지 내려가는 데 걸리는 시간은 $2(10-x)$초

엘리베이터가 각 층에 머무른 시간의 합은

$2(10-x-1)=2(9-x)$(초)

따라서 어머니는 엘리베이터가 $x$층에 머무르는 시간인

$\{2(10-x)+2(9-x)\}$초와

$\{2(10-x)+2(9-x)+2\}$초 사이에 철수와 만나야 하므로

$30+\{2(10-x)+2(9-x)\}\leq 10(10-x)$

$\leq 30+\{2(10-x)+2(9-x)+2\}$

$\therefore 68-4x\leq 100-10x\leq 70-4x$

$68-4x\leq 100-10x$에서

$6x\leq 32$ $\therefore x\leq\frac{16}{3}$ ····· ㉠

$100-10x\leq 70-4x$에서

$-6x\leq -30$ $\therefore x\geq 5$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$5\leq x\leq\frac{16}{3}$

따라서 어머니와 철수는 5층에서 만난다. 답 **5층**

**415**

TIP 양수 $r$에 대하여 $|px+q|<r$이면 $-r<px+q<r$임을 이용한다.

$|x-a[a]|<b[b]$에서 $-b[b]<x-a[a]<b[b]$

$\therefore a[a]-b[b]<x<a[a]+b[b]$

이때 주어진 부등식의 해가 $8<x<30$이므로

$a[a]-b[b]=8$, $a[a]+b[b]=30$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a[a]=19$, $b[b]=11$

(i) $a[a]=19$일 때

$[a]=n$ ($n$은 양의 정수)이라 하면

$n\leq a<n+1$

$n^2\leq a[a]<n^2+n$

$\therefore n^2\leq 19<n^2+n$

$n=4$일 때, $16\leq 19<20$이므로

$n=[a]=4$

이것을 $a[a]=19$에 대입하면

$a=\frac{19}{4}$

(ii) $b[b]=11$일 때

$[b]=m$ ($m$은 양의 정수)이라 하면

$m\le b<m+1$

$m^2\le b[b]<m^2+m$

$\therefore m^2\le 11<m^2+m$

$m=3$일 때, $9\le m<12$이므로

$m=[b]=3$

이것을 $b[b]=11$에 대입하면

$b=\frac{11}{3}$

(i), (ii)에서 $8a+9b=8\times\frac{19}{4}+9\times\frac{11}{3}=71$ 답 **71**

## 416

TIP $|x|\le|y|$이면 $x^2\le y^2$이다.

$|x-a|\le|x-b|$의 양변을 제곱하면

$(x-a)^2\le(x-b)^2$

$x^2-2ax+a^2\le x^2-2bx+b^2$

$2(a-b)x\ge a^2-b^2$

$\therefore 2(a-b)x\ge(a+b)(a-b)$ ····· ㉠

주어진 부등식의 해가 $x\le 6$이므로 ㉠에서

$a-b<0$, 즉 $a<b$이고

$x\le\frac{a+b}{2}$

따라서 $\frac{a+b}{2}=6$이므로 $a+b=12$ 답 ②

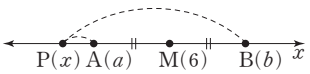
다른풀이

수직선 위의 세 점 A($a$), B($b$), P($x$)에 대하여

$|x-a|=\overline{PA}$, $|x-b|=\overline{PB}$이므로

$|x-a|\le|x-b|$는 $\overline{PA}\le\overline{PB}$, 즉 점 P는 점 B보다 점 A에 가까움을 의미하는 부등식이다.

주어진 부등식의 해가 $x\le 6$이므로 $a\le b$이고 $\overline{AB}$의 중점을 M이라 하면 M(6)이다.




따라서 $\frac{a+b}{2}=6$이므로 $a+b=12$

## 417

TIP $x<-2$, $-2\le x<4$, $x\ge 4$로 구간을 나누어 부등식을 푼다.

$2|x+2|+|x-4|\le a$에서

(i) $x<-2$일 때

$-2(x+2)-(x-4)\le a$

$-3x\le a$ $\therefore x\ge-\frac{a}{3}$

그런데 $x<-2$이고, $a\ge 12$이면 $-\frac{a}{3}\le-4$이므로

$-\frac{a}{3}\le x<-2$

(ii) $-2\le x<4$일 때

$2(x+2)-(x-4)\le a$

$\therefore x\le a-8$

그런데 $-2\le x<4$이고, $a\ge 12$이면 $a-8\ge 4$이므로

$-2\le x<4$

(iii) $x\ge 4$일 때

$2(x+2)+(x-4)\le a$

$3x\le a$ $\therefore x\le\frac{a}{3}$

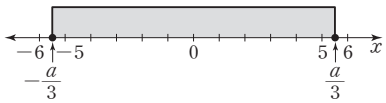
그런데 $x\ge 4$이고, $a\ge 12$이면 $\frac{a}{3}\ge 4$이므로

$4\le x\le\frac{a}{3}$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$-\frac{a}{3}\le x\le\frac{a}{3}$

이 부등식을 만족시키는 정수 $x$의 개수가 11이므로 다음 그림과 같다.




즉, $5\le\frac{a}{3}<6$이므로 $15\le a<18$

따라서 구하는 자연수 $a$의 값은 15, 16, 17이므로 그 합은

$15+16+17=48$ 답 **48**

# 09 이차부등식과 연립이차부등식

## STEP 1 핵심기출 마스터

본문 89~93쪽

**418** $f(x)g(x)>0$에서
$f(x)>0$, $g(x)>0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)<0$
(i) $f(x)>0$, $g(x)>0$을 만족시키는 $x$의 값의 범위는
$c<x<e$
(ii) $f(x)<0$, $g(x)<0$을 만족시키는 $x$의 값의 범위는
$a<x<0$
(i), (ii)에서 부등식 $f(x)g(x)>0$의 해는
$a<x<0$ 또는 $c<x<e$ 답 ⑤

**419** $ax^2+(b-m)x+c-n\geq 0$에서
$ax^2+bx+c-(mx+n)\geq 0$
$\therefore ax^2+bx+c\geq mx+n$
부등식 $ax^2+bx+c\geq mx+n$의 해는 이차함수
$y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 위쪽에 있거나 만나는 부분의 $x$의 값의 범위이므로
$x\leq 1$ 또는 $x\geq 4$ 답 $x\leq 1$ 또는 $x\geq 4$

**420** $x^2-5x+1\geq(2x+1)(2x-1)$에서
$x^2-5x+1\geq 4x^2-1$, $3x^2+5x-2\leq 0$
$(x+2)(3x-1)\leq 0$ $\therefore -2\leq x\leq \frac{1}{3}$
따라서 주어진 부등식을 만족시키는 모든 정수 $x$는 $-2$, $-1$, $0$이므로 그 합은
$(-2)+(-1)+0=-3$ 답 $-3$

**421** ㄱ. $a>0$이므로 주어진 부등식의 양변을 $a$로 나누면
$x^2+6x+11\geq 0$
이때 $x^2+6x+11=(x+3)^2+2\geq 2$이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.
ㄴ. $a=0$이므로 주어진 부등식은
$0\geq 0$
이 부등식은 모든 실수 $x$에 대하여 성립하므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.
ㄷ. $a<0$이므로 주어진 부등식의 양변을 $a$로 나누면
$x^2+6x+11\leq 0$
이때 $x^2+6x+11=(x+3)^2+2\geq 2$이므로 주어진 부등식의 해는 없다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

**422** 이차부등식 $ax^2+bx-3\leq 0$의 해가 $-3\leq x\leq \frac{1}{2}$이므로 $a>0$
해가 $-3\leq x\leq \frac{1}{2}$이고 $x^2$의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)\leq 0$ $\therefore x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\leq 0$
$a>0$이므로 양변에 $a$를 곱하면
$ax^2+\frac{5}{2}ax-\frac{3}{2}a\leq 0$
이 부등식이 $ax^2+bx-3\leq 0$과 같으므로
$-\frac{3}{2}a=-3$에서 $a=2$, $\frac{5}{2}a=b$에서 $b=5$
$\therefore a+b=7$ 답 7

다른풀이
이차방정식 $ax^2+bx-3=0$의 두 근이 $-3$, $\frac{1}{2}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-3+\frac{1}{2}=-\frac{b}{a}$, $-3\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{a}$
따라서 $a=2$, $b=5$이므로 $a+b=7$

**423** 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}$이므로 $a<0$
해가 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}$이고 $x^2$의 계수가 1인 이차부등식은
$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)<0$ $\therefore x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}<0$
$a<0$이므로 양변에 $a$를 곱하면
$ax^2+\frac{1}{6}ax-\frac{1}{6}a>0$
이 부등식이 $ax^2+bx+c>0$과 같으므로
$b=\frac{1}{6}a$, $c=-\frac{1}{6}a$
이것을 $cx^2+bx+a<0$에 대입하면
$-\frac{1}{6}ax^2+\frac{1}{6}ax+a<0$
$a<0$에서 $-\frac{1}{6}a>0$이므로 양변을 $-\frac{1}{6}a$로 나누면
$x^2-x-6<0$, $(x+2)(x-3)<0$
$\therefore -2<x<3$
따라서 구하는 정수 $x$는 $-1$, $0$, $1$, $2$의 4개이다. 답 4

**424** $f(x)<0$의 해가 $-1<x<1$이므로
$f(x)=a(x+1)(x-1)$ $(a>0)$로 놓을 수 있다.
$\therefore f(1000-x)=a(1000-x+1)(1000-x-1)$
$=a(-x+1001)(-x+999)$
$=a(x-1001)(x-999)$
부등식 $f(1000-x)>0$, 즉 $a(x-1001)(x-999)>0$에서 $a>0$이므로

$(x-1001)(x-999)>0$

$\therefore x<999$ 또는 $x>1001$

따라서 $x$의 값이 될 수 없는 것은 ②이다. 답 ②

**425** $x^2-2x-5<|x-1|$에서

(i) $x\geq 1$일 때, $x^2-2x-5<x-1$

$x^2-3x-4<0$, $(x+1)(x-4)<0$

$\therefore -1<x<4$

그런데 $x\geq 1$이므로 $1\leq x<4$

(ii) $x<1$일 때, $x^2-2x-5<-(x-1)$

$x^2-x-6<0$, $(x+2)(x-3)<0$

$\therefore -2<x<3$

그런데 $x<1$이므로 $-2<x<1$

(i), (ii)에서 $-2<x<4$

따라서 구하는 정수 $x$는 $-1$, 0, 1, 2, 3의 5개이다. 답 ②

다른풀이

$x^2-2x-5=x^2-2x+1-6$

$=(x-1)^2-6$

$=|x-1|^2-6$ ($\because |x-1|^2=(x-1)^2$)

즉, 주어진 부등식 $x^2-2x-5<|x-1|$에서

$|x-1|^2-6<|x-1|$

$|x-1|^2-|x-1|-6<0$

$(|x-1|-3)(|x-1|+2)<0$

이때 $|x-1|+2>0$이므로 $|x-1|-3<0$

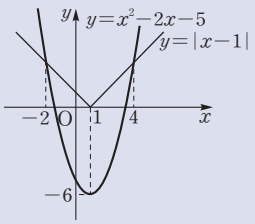
$|x-1|<3$, $-3<x-1<3$

$\therefore -2<x<4$

따라서 구하는 정수 $x$는 $-1$, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

**Lecture**

$y=x^2-2x-5$와 $y=|x-1|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




**426** 부등식 $x^2-3|x|\leq 0$에서

(i) $x\geq 0$일 때, $x^2-3x\leq 0$

$x(x-3)\leq 0$ $\therefore 0\leq x\leq 3$

그런데 $x\geq 0$이므로 $0\leq x\leq 3$

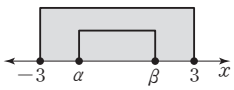
(ii) $x<0$일 때, $x^2+3x\leq 0$

$x(x+3)\leq 0$ $\therefore -3\leq x\leq 0$

그런데 $x<0$이므로 $-3\leq x<0$

(i), (ii)에서 부등식의 해는 $-3\leq x\leq 3$

주어진 조건이 성립하려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로




$-3\leq\alpha\leq\beta\leq 3$

따라서 $\beta-\alpha$의 최댓값은

$3-(-3)=6$ 답 6

**427** $2[x]^2-[x]-6<0$에서

$(2[x]+3)([x]-2)<0$ $\therefore -\frac{3}{2}<[x]<2$

이때 $[x]$의 값은 정수이므로 $[x]=-1$, 0, 1

$[x]=-1$에서 $-1\leq x<0$

$[x]=0$에서 $0\leq x<1$

$[x]=1$에서 $1\leq x<2$

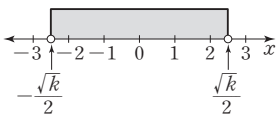
따라서 주어진 부등식의 해는

$-1\leq x<2$ 답 ③

**428** $4x^2-k<0$에서 $(2x+\sqrt{k})(2x-\sqrt{k})<0$

$\therefore -\frac{\sqrt{k}}{2}<x<\frac{\sqrt{k}}{2}$

이때 $-\frac{\sqrt{k}}{2}<x<\frac{\sqrt{k}}{2}$를 만족시키는 정수 $x$가 5개이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로




$2<\frac{\sqrt{k}}{2}\leq 3$

$4<\sqrt{k}\leq 6$ $\therefore 16<k\leq 36$

따라서 자연수 $k$는 17, 18, 19, …, 36의 20개이다. 답 ①

**429** 부등식 $(m+2)x^2-2(m+2)x-4\geq 0$의 해가 오직 한 개 존재하려면

$m+2<0$ $\therefore m<-2$ …… ㉠

또, 이차방정식 $(m+2)x^2-2(m+2)x-4=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(m+2)^2+4(m+2)=0$

$(m+2)(m+2+4)=0$, $(m+2)(m+6)=0$

$\therefore m=-2$ 또는 $m=-6$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $m=-6$ 답 −6

**430** (i) $a>0$일 때

이차함수 $y=ax^2+2ax-5$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a=0$일 때

$0\times x^2+0\times x-5=-5<0$이므로 주어진 부등식을 만족시키는 $x$는 존재하지 않는다.

(iii) $a<0$일 때

주어진 부등식의 해가 존재하려면 이차방정식 $ax^2+2ax-5=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=a^2+5a>0$

$a(a+5)>0$ $\therefore a<-5$ 또는 $a>0$

그런데 $a<0$이므로 $a<-5$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해가 존재하도록 하는 $a$의 값의 범위는

$a<-5$ 또는 $a>0$

따라서 $a$의 값이 아닌 것은 ③이다. 답 ③

**431** 이차함수 $y=x^2-2(k-2)x-k^2+5k-3$의 그래프는 아래로 볼록하므로 모든 실수 $x$에 대하여 $y\geq0$이려면 이차함수의 그래프가 $x$축에 접하거나 만나지 않아야 한다.

즉, $x^2-2(k-2)x-k^2+5k-3=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(-k^2+5k-3)\leq0$

$2k^2-9k+7\leq0$, $(k-1)(2k-7)\leq0$

$\therefore 1\leq k\leq\frac{7}{2}$

따라서 구하는 정수 $k$의 값은 1, 2, 3이므로 그 합은

$1+2+3=6$ 답 ③

다른풀이

$x^2-2(k-2)x-k^2+5k-3\geq0$에서

$x^2-2(k-2)x+(k-2)^2-(k-2)^2-k^2+5k-3\geq0$

$\therefore \{x-(k-2)\}^2-2k^2+9k-7\geq0$

이 부등식이 모든 실수 $x$에 대하여 성립하려면

$-2k^2+9k-7\geq0$

$2k^2-9k+7\leq0$, $(k-1)(2k-7)\leq0$

$\therefore 1\leq k\leq\frac{7}{2}$

따라서 구하는 정수 $k$의 값은 1, 2, 3이므로 그 합은 6이다.

**432** 모든 실수 $x$에 대하여 이차부등식 $ax^2+2ax+k<0$이 성립해야 하므로

$a<0$ ····· ㉠

이차방정식 $ax^2+2ax+k=0$의 판별식을 $D$라 하면

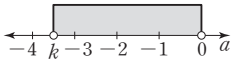
$\frac{D}{4}=a^2-ak=a(a-k)<0$

이때 ㉠에서 $a<0$이므로

$a-k>0$ $\therefore a>k$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $k<a<0$

이를 만족시키는 정수 $a$의 개수가 3이므로 오른쪽 그림에서




$-4\leq k<-3$

따라서 구하는 정수 $k$의 값은 $-4$이다. 답 ①

**433** 이차부등식 $x^2-(m-4)x+\frac{m}{2}<0$이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 $x$에 대하여 $x^2-(m-4)x+\frac{m}{2}\geq0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-(m-4)x+\frac{m}{2}=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=(m-4)^2-4\times\frac{m}{2}\leq0$

$m^2-10m+16\leq0$, $(m-2)(m-8)\leq0$

$\therefore 2\leq m\leq8$

따라서 $m$의 최댓값은 8, 최솟값은 2이므로 최댓값과 최솟값의 합은 $8+2=10$ 답 **10**

**434** 부등식 $(a+3)x^2-2(a+3)x-3>0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 $x$에 대하여

$(a+3)x^2-2(a+3)x-3\leq0$ ····· ㉠

이 성립해야 한다.

(i) $a+3=0$, 즉 $a=-3$일 때

$0\times x^2-0\times x-3=-3<0$이므로 ㉠은 모든 실수 $x$에 대하여 성립한다.

(ii) $a+3\neq0$, 즉 $a\neq-3$일 때

모든 실수 $x$에 대하여 ㉠이 성립하려면

$a+3<0$ $\therefore a<-3$ ····· ㉡

또, 이차방정식 $(a+3)x^2-2(a+3)x-3=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(a+3)^2+3(a+3)\leq0$

$a^2+9a+18\leq0$, $(a+3)(a+6)\leq0$

$\therefore -6\leq a\leq-3$ ····· ㉢

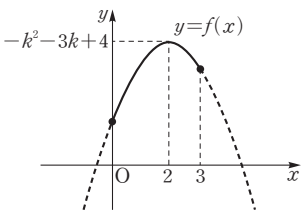
㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $-6\leq a<-3$

(i), (ii)에서 $-6\leq a\leq-3$ 답 $-6\leq a\leq-3$

**435** $f(x)=-x^2+4x-k^2-3k$라 하면

$f(x)=-(x-2)^2-k^2-3k+4$

$0\leq x\leq3$에서 $f(x)\geq0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.




즉, $f(0)=-k^2-3k\geq0$에서

$k^2+3k\leq0$, $k(k+3)\leq0$

$\therefore -3\leq k\leq0$

답 ②

참고 $f(x)=-(x-2)^2-k^2-3k+4$에서 직선 $x=2$가 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이므로 $0\leq x\leq3$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(0)$이다.

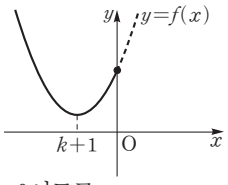
**436** $f(x)=x^2-2(k+1)x+k-5$라 하면

$f(x)=\{x-(k+1)\}^2-k^2-k-6$

$x\leq0$에서 $f(x)>0$이어야 하므로

(i) $k+1<0$, 즉 $k<-1$일 때

$x\le 0$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




$f(k+1)=-k^2-k-6>0$

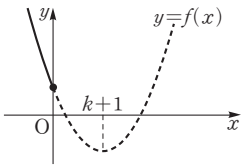
에서 $k^2+k+6<0$

그런데 $k^2+k+6=\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}>0$이므로

$k^2+k+6<0$을 만족시키는 실수 $k$의 값은 없다.

(ii) $k+1\ge 0$, 즉 $k\ge -1$일 때

$x\le 0$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




$f(0)=k-5>0$에서 $k>5$

(i), (ii)에서 $k>5$

답 $k>5$

**0437** 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 직선 $y=x-4$보다 아래쪽에 있는 부분의 $x$의 값의 범위는 부등식

$x^2+ax+b<x-4$, 즉 $x^2+(a-1)x+b+4<0$ …… ㉠

의 해이다.

해가 $1<x<5$이고 $x^2$의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-5)<0$ $\therefore x^2-6x+5<0$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$a-1=-6$, $b+4=5$

따라서 $a=-5$, $b=1$이므로

$3b-a=8$

답 8

**0438** 이차함수 $y=ax^2+4x+4$의 그래프가 직선 $y=2ax+3$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $ax^2+4x+4>2ax+3$, 즉 $ax^2+2(2-a)x+1>0$이 성립해야 하므로

$a>0$ …… ㉠

이차방정식 $ax^2+2(2-a)x+1=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(2-a)^2-a<0$

$a^2-5a+4<0$, $(a-1)(a-4)<0$

$\therefore 1<a<4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $1<a<4$

따라서 정수 $a$의 값은 2, 3이므로 그 합은

$2+3=5$

답 ②

**0439** 함수 $f(x)=-x^2-2ax$의 그래프가 함수 $g(x)=ax^2+2x+1$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $-x^2-2ax<ax^2+2x+1$, 즉 $(a+1)x^2+2(1+a)x+1>0$이 성립해야 한다.

(i) $a+1=0$, 즉 $a=-1$일 때

$0\times x^2+0\times x+1=1>0$이므로 모든 실수 $x$에 대하여 부등식이 성립한다.

(ii) $a+1>0$, 즉 $a>-1$일 때

이차방정식 $(a+1)x^2+2(1+a)x+1=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(a+1)^2-(a+1)<0$

$a^2+a<0$, $a(a+1)<0$

$\therefore -1<a<0$

(i), (ii)에서 구하는 $a$의 값의 범위는 $-1\le a<0$

답 ①

**0440** $3x^2-7x-11<x^2+3x+1$에서

$2x^2-10x-12<0$, $x^2-5x-6<0$

$(x+1)(x-6)<0$ $\therefore -1<x<6$ …… ㉠

$x^2+3x+1\le 2x^2+4x-5$에서

$x^2+x-6\ge 0$, $(x+3)(x-2)\ge 0$

$\therefore x\le -3$ 또는 $x\ge 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2\le x<6$

따라서 정수 $x$는 2, 3, 4, 5의 4개이다.

답 ③

**0441** $2|x|+1<|x-3|$에서

(i) $x<0$일 때

$-2x+1<-(x-3)$ $\therefore x>-2$

그런데 $x<0$이므로 $-2<x<0$

(ii) $0\le x<3$일 때

$2x+1<-(x-3)$, $3x<2$ $\therefore x<\frac{2}{3}$

그런데 $0\le x<3$이므로 $0\le x<\frac{2}{3}$

(iii) $x\ge 3$일 때

$2x+1<x-3$ $\therefore x<-4$

그런데 $x\ge 3$이므로 해는 없다.

(i), (ii), (iii)에서 $-2<x<\frac{2}{3}$ …… ㉠

$3x^2+8x-3\le 0$에서

$(x+3)(3x-1)\le 0$ $\therefore -3\le x\le \frac{1}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-2<x\le \frac{1}{3}$

답 $-2<x\le\frac{1}{3}$

**0442** 이차부등식 $x^2-x-6<0$에서

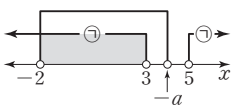
$(x+2)(x-3)<0$ $\therefore -2<x<3$

즉, 주어진 연립부등식의 해는 $-2<x<3$이다.

$x^2-8x+15>0$에서

$(x-3)(x-5)>0$ $\therefore x<3$ 또는 $x>5$ …… ㉠

따라서 ㉠과 $(x+2)(x+a)<0$의 해의 공통부분이 $-2<x<3$이므로 오른쪽 그림에서 $3\le -a\le 5$




$\therefore -5\le a\le -3$

답 $-5\le a\le -3$

참고 $a\ge 2$이면 주어진 연립부등식의 해 $-2<x<3$을 만족시키는 실수 $x$는 존재하지 않으므로 $a<2$이다.

따라서 부등식 $(x+2)(x+a)<0$의 해는 $-2<x<-a$이다.

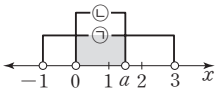
**443** $x^2-2x-3<0$에서

$(x+1)(x-3)<0$ $\therefore -1<x<3$ …… ㉠

$x^2-ax<0$에서 $x(x-a)<0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 $x$가 한 개이므로 오른쪽 그림에서

$1<a\le 2$




답 $1<a\le 2$

**참고** $a\le 0$이면 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 $x$는 존재하지 않으므로 $a>0$이다.
따라서 부등식 $x(x-a)<0$의 해는 $0<x<a$이다.

**444** $x^2-x-2>0$에서

$(x+1)(x-2)>0$ $\therefore x<-1$ 또는 $x>2$ …… ㉠

$2x^2+(5+2m)x+5m<0$에서

$(2x+5)(x+m)<0$

(i) $-m<-\frac{5}{2}$, 즉 $m>\frac{5}{2}$일 때

$(2x+5)(x+m)<0$의 해는

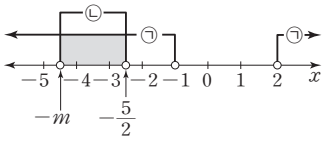
$-m<x<-\frac{5}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 $x$가 2개이므로 오른쪽 그림에서

$-5\le -m<-4$

$\therefore 4<m\le 5$

그런데 $m>\frac{5}{2}$이므로 $4<m\le 5$




(ii) $-m=-\frac{5}{2}$, 즉 $m=\frac{5}{2}$일 때

$(2x+5)(x+m)=(2x+5)^2\ge 0$

즉, $(2x+5)(x+m)<0$을 만족시키는 $x$의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $-m>-\frac{5}{2}$, 즉 $m<\frac{5}{2}$일 때

$(2x+5)(x+m)<0$의 해는

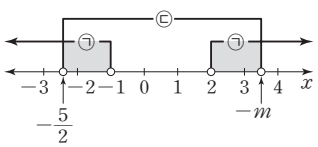
$-\frac{5}{2}<x<-m$ …… ㉢

㉠, ㉢을 동시에 만족시키는 정수 $x$가 2개이므로 오른쪽 그림에서

$3<-m\le 4$

$\therefore -4\le m<-3$

그런데 $m<\frac{5}{2}$이므로 $-4\le m<-3$




(i), (ii), (iii)에서 실수 $m$의 값의 범위는

$-4\le m<-3$ 또는 $4<m\le 5$

따라서 실수 $m$의 최댓값은 5, 최솟값은 $-4$이므로 최댓값과 최솟값의 합은 $5+(-4)=1$ 답 ③

**445** 커피 한 잔 가격을 $100x$원 할인할 때, 하루 판매량은 $10x$잔 늘어나므로 하루 판매액이 16만 원 이상이 되려면

$(2000-100x)(60+10x)\ge 160000$

$x^2-14x+40\le 0$, $(x-4)(x-10)\le 0$

$\therefore 4\le x\le 10$

이때 $400\le 100x\le 1000$이므로 할인할 수 있는 금액의 범위는 400원 이상 1000원 이하이다.

따라서 할인할 수 있는 금액의 최댓값은 1000원이다. 답 ④

**446** 주어진 그림에서 길의 넓이는

$60\times 40-(60-2x)(40-2x)=-4x^2+200x(\text{m}^2)$

길의 넓이가 384 $\text{m}^2$ 이상 564 $\text{m}^2$ 이하이어야 하므로

$384\le -4x^2+200x\le 564$

$-4x^2+200x\ge 384$에서

$x^2-50x+96\le 0$, $(x-2)(x-48)\le 0$

$\therefore 2\le x\le 48$

그런데 $0<x<20$이므로 $2\le x<20$ …… ㉠

$-4x^2+200x\le 564$에서

$x^2-50x+141\ge 0$, $(x-47)(x-3)\ge 0$

$\therefore x\le 3$ 또는 $x\ge 47$

그런데 $0<x<20$이므로 $0<x\le 3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2\le x\le 3$

따라서 $M=3$, $m=2$이므로

$M-m=1$ 답 ②

**447** 이차방정식 $x^2+2(a+1)x+3(a^2-1)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 $D_1$이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(a+1)^2-3(a^2-1)>0$

$a^2-a-2<0$, $(a+1)(a-2)<0$

$\therefore -1<a<2$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+ax+a+3=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 $D_2$라 하면

$D_2=a^2-4(a+3)<0$

$a^2-4a-12<0$, $(a+2)(a-6)<0$

$\therefore -2<a<6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-1<a<2$

따라서 정수 $a$는 0, 1의 2개이다. 답 2

**448** 이차방정식 $x^2-4kx-k^2+ak-1=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 $D_1$이라 하면

$\frac{D_1}{4}=4k^2-(-k^2+ak-1)\ge 0$

$\therefore 5k^2-ak+1\ge 0$ …… ㉠

㉠이 실수 $k$의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 $k$에 대한 이차방정식 $5k^2-ak+1=0$의 판별식을 $D_2$라 하면

$D_2=a^2-20\le 0$

$\therefore -2\sqrt{5}\le a\le 2\sqrt{5}$

따라서 $a$의 값이 될 수 없는 것은 ①이다. 답 ①

**0449** 이차방정식 $x^2+(m+2)x+m+5=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하고 판별식을 $D$라 할 때, 두 근이 모두 양수이려면

(i) $D=(m+2)^2-4(m+5)\ge 0$

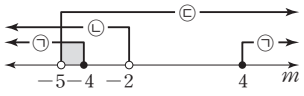
$m^2-16\ge 0$, $(m+4)(m-4)\ge 0$

$\therefore m\le -4$ 또는 $m\ge 4$ …… ㉠

(ii) $\alpha+\beta=-(m+2)>0$

$m+2<0$ $\therefore m<-2$ …… ㉡

(iii) $\alpha\beta=m+5>0$ $\therefore m>-5$ …… ㉢




(i), (ii), (iii)에서 $-5<m\le -4$

따라서 실수 $m$의 최댓값은 $-4$이다. 답 $-4$

**0450** 이차방정식 $x^2+(k^2-3k-10)x+k^2+3k-18=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=k^2+3k-18<0$

$(k+6)(k-3)<0$ $\therefore -6<k<3$ …… ㉠

음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 크므로

$\alpha+\beta=-(k^2-3k-10)<0$

$k^2-3k-10>0$, $(k+2)(k-5)>0$

$\therefore k<-2$ 또는 $k>5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-6<k<-2$

답 $-6<k<-2$

**개념 Plus**

**근의 절댓값에 대한 조건**

이차방정식의 두 근이 서로 다른 부호일 때

① (양수인 근)=|(음수인 근)|

⇨ (두 근의 합)=0, (두 근의 곱)<0

② (양수인 근)>|(음수인 근)|

⇨ (두 근의 합)>0, (두 근의 곱)<0

③ (양수인 근)<|(음수인 근)|

⇨ (두 근의 합)<0, (두 근의 곱)<0

**0451** $f(x)=x^2-2kx+k^2-2k-4$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 $-1$보다 작으므로

(i) $f(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(k^2-2k-4)\ge 0$

$2k+4\ge 0$ $\therefore k\ge -2$ …… ㉠

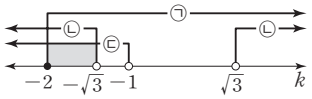
(ii) $f(-1)=1+2k+k^2-2k-4>0$에서

$k^2-3>0$, $(k+\sqrt{3})(k-\sqrt{3})>0$

$\therefore k<-\sqrt{3}$ 또는 $k>\sqrt{3}$ …… ㉡

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$이므로

$k<-1$ …… ㉢




(i), (ii), (iii)에서 $-2\le k<-\sqrt{3}$

따라서 실수 $k$의 최솟값은 $-2$이다. 답 $-2$

**0452** $f(x)=3x^2+6kx-(3k+1)$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 $-1$과 1 사이에 있으므로

(i) $f(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=9k^2+3(3k+1)$

$=9k^2+9k+3$

$=9\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}\ge 0$

이므로 항상 성립한다.

(ii) $f(-1)=3-6k-3k-1>0$에서

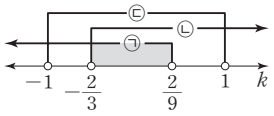
$-9k+2>0$ $\therefore k<\frac{2}{9}$ …… ㉠

$f(1)=3+6k-3k-1>0$에서

$3k+2>0$ $\therefore k>-\frac{2}{3}$ …… ㉡

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-k$이므로

$-1<-k<1$ $\therefore -1<k<1$ …… ㉢



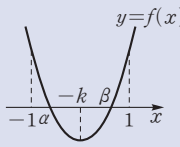

(i), (ii), (iii)에서 $-\frac{2}{3}<k<\frac{2}{9}$ 답 $-\frac{2}{3}<k<\frac{2}{9}$

**Lecture**

$f(x)=3x^2+6kx-(3k+1)$

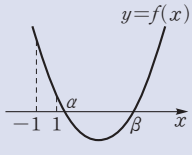
$=3(x+k)^2-3k^2-3k-1$

에서 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.




두 근이 $-1$과 1 사이에 있으므로 $f(x)=0$의 판별식 $D$에 대하여 $D\ge 0$이고, $f(-1)>0$, $f(1)>0$이며 축이 두 직선 $x=-1$과 $x=1$ 사이에 있음을 따져 본다.

특히, $D\ge 0$, $f(-1)>0$, $f(1)>0$을 만족시키는 경우 중에는 그래프가 오른쪽 그림과 같은 경우도 있으므로 축에 대한 조건을 빠뜨리지 않도록 유의한다.



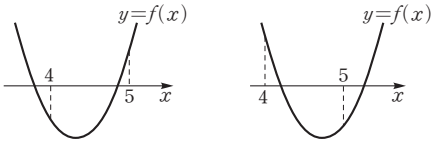
**453** $x^2-9x+20=0$에서

$(x-4)(x-5)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=5$

즉, $x^2+kx-8=0$의 한 근만이 4와 5 사이에 있어야 한다.

$f(x)=x^2+kx-8$이라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.




따라서 $f(4)f(5)<0$에서

$(8+4k)(17+5k)<0$

$\therefore -\frac{17}{5}<k<-2$ 답 $\boldsymbol{-\frac{17}{5}<k<-2}$

## STEP 2 실전 마스터 본문 94~97쪽

**454** $\{f(x)\}^2g(x)-f(x)\{g(x)\}^2\geq 0$에서

$f(x)g(x)\{f(x)-g(x)\}\geq 0$

(i) $f(x)\geq 0$, $g(x)\geq 0$, $f(x)-g(x)\geq 0$을 만족시키는 $x$의 값의 범위는

$1\leq x\leq 2$, $x=5$

(ii) $f(x)\geq 0$, $g(x)\leq 0$, $f(x)-g(x)\leq 0$을 만족시키는 $x$의 값은

$x=5$

(iii) $f(x)\leq 0$, $g(x)\geq 0$, $f(x)-g(x)\leq 0$을 만족시키는 $x$의 값의 범위는

$3\leq x\leq 5$

(iv) $f(x)\leq 0$, $g(x)\leq 0$, $f(x)-g(x)\geq 0$을 만족시키는 $x$의 값은

$x=5$

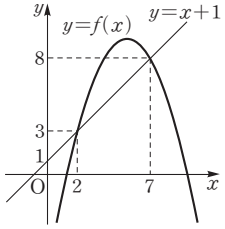
(i)~(iv)에서 주어진 부등식의 해는

$1\leq x\leq 2$ 또는 $3\leq x\leq 5$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 $x$는 1, 2, 3, 4, 5이므로 그 합은 15이다. 답 ⑤

**455** 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+1$의 교점의 $y$좌표가 3과 8이므로 교점의 $x$좌표는 2와 7이다.

이때 $y=f(x)$의 이차항의 계수가 음수이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




$f(x)-x-1>0$에서 $f(x)>x+1$

즉, 주어진 이차부등식의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x+1$보다 위쪽에 있는 부분의 $x$의 값의 범위이므로

$2<x<7$

따라서 정수 $x$는 3, 4, 5, 6이므로 그 합은 18이다. 답 ⑤

**456** $2x^3-4x^2-5x+1=2x(x^2+x)-6(x^2+x)+x+1$

$=(x^2+x)(2x-6)+x+1$

이므로 $Q(x)=2x-6$, $R(x)=x+1$

부등식 $Q(x)R(x)\leq 0$에서

$(2x-6)(x+1)\leq 0$, $2(x-3)(x+1)\leq 0$

$\therefore -1\leq x\leq 3$

따라서 구하는 정수 $x$는 $-1$, 0, 1, 2, 3의 5개이다. 답 ⑤

**457** 모든 실수 $x$에 대하여 $\sqrt{(k+1)x^2-2(k+1)x+3}$이 실수가 되려면 모든 실수 $x$에 대하여 부등식

$(k+1)x^2-2(k+1)x+3\geq 0$ …… ㉠

이 성립해야 한다.

(i) $k=-1$일 때

$0\times x^2-0\times x+3>0$이므로 ㉠은 모든 실수 $x$에 대하여 성립한다.

(ii) $k\neq -1$일 때

모든 실수 $x$에 대하여 ㉠이 성립하려면

$k+1>0$ $\therefore k>-1$ …… ㉡

또, 이차방정식 $(k+1)x^2-2(k+1)x+3=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-3(k+1)\leq 0$

$k^2-k-2\leq 0$, $(k+1)(k-2)\leq 0$

$\therefore -1\leq k\leq 2$ …… ㉢

㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $-1<k\leq 2$

(i), (ii)에서 $-1\leq k\leq 2$

따라서 구하는 정수 $k$는 $-1$, 0, 1, 2의 4개이다. 답 ②

**458** 조건 (나)에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x$축과 점 (3, 0)에서 접하고 아래로 볼록하므로

$f(x)=a(x-3)^2$ $(a>0)$으로 놓을 수 있다.

조건 (가)에서 $f(0)=9a=9$이므로 $a=1$

즉, $f(x)=(x-3)^2$이므로 이차부등식 $f(x)<4$에서

$(x-3)^2<4$

$x^2-6x+5<0$, $(x-1)(x-5)<0$

$\therefore 1<x<5$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=5$이므로

$10\alpha+\beta=15$ 답 **15**

**459** 주어진 조건에 따라 $f(x)=(x+3)(x-1)$이므로

$$f(x)+|f(x)|=\begin{cases}2f(x) & (f(x)\geq 0)\\ 0 & (f(x)<0)\end{cases}$$

(i) $f(x)\geq 0$, 즉 $x\leq -3$ 또는 $x\geq 1$일 때

$f(x)+|f(x)|\leq 10$에서 $2f(x)\leq 10$

$2(x+3)(x-1)\leq 10$

$x^2+2x-8\leq 0$, $(x+4)(x-2)\leq 0$

$\therefore -4\leq x\leq 2$

그런데 $x\leq -3$ 또는 $x\geq 1$이므로

$-4\leq x\leq -3$ 또는 $1\leq x\leq 2$

(ii) $f(x)<0$, 즉 $-3<x<1$일 때

$f(x)+|f(x)|\leq 10$에서 $0\leq 10$이므로 항상 성립한다.

$\therefore -3<x<1$

(i), (ii)에서 $-4\leq x\leq 2$

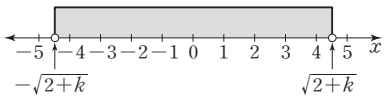
따라서 $\alpha=-4$, $\beta=2$이므로

$(\beta-\alpha)^2=(2+4)^2=36$ 답 **36**

**460** 주어진 조건에 따라 $f(x)=(x+1)(x-2)$, 즉 $f(x)=x^2-x-2$이므로 부등식 $f(x)<-x+k$에서

$x^2-x-2<-x+k$, $x^2<2+k$

$\therefore -\sqrt{2+k}<x<\sqrt{2+k}$




부등식을 만족시키는 정수 $x$가 9개이므로 위의 그림에서

$4<\sqrt{2+k}\leq 5$, $16<2+k\leq 25$ $\therefore 14<k\leq 23$

따라서 자연수 $k$의 최댓값은 23, 최솟값은 15이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$23+15=38$ 답 ⑤

**461** 부등식 $f(x)-2g(x)\leq 5a^2$에서

$x^2+2ax+2a^2-2\left\{-\frac{a}{2}(x-a)\right\}\leq 5a^2$

$x^2+3ax-4a^2\leq 0$, $(x+4a)(x-a)\leq 0$

$\therefore -4a\leq x\leq a$ ($\because a$는 자연수이므로 $-4a<a$)

따라서 이를 만족시키는 정수 $x$의 개수는

$a-(-4a)+1=21$

$\therefore a=4$ 답 ④

**참고** 정수 $m$, $n$에 대하여 $m\leq x\leq n$을 만족시키는 정수 $x$의 개수는 $n-m+1$이다.

**462** $x^2-2nx+n^2-9\leq 0$에서

$x^2-2nx+(n+3)(n-3)\leq 0$

$\{x-(n-3)\}\{x-(n+3)\}\leq 0$

$\therefore n-3\leq x\leq n+3$

이때 주어진 부등식을 만족시키는 정수 $x$는

$n-3$, $n-2$, $n-1$, $n$, $n+1$, $n+2$, $n+3$

이들의 합이 24 이상 48 이하이려면

$24\leq 7n\leq 48$

따라서 $\frac{24}{7}\leq n\leq \frac{48}{7}$이므로 주어진 조건을 만족시키는 자연수 $n$은 4, 5, 6의 3개이다. 답 ①

**463** 조건 (가)에서 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $kx^2-kx+3>0$이 성립하므로

(i) $k=0$일 때

$3>0$이므로 모든 실수 $x$에 대하여 성립한다.

(ii) $k\neq 0$일 때

모든 실수 $x$에 대하여 성립하려면 $k>0$

또, 이차방정식 $kx^2-kx+3=0$의 판별식을 $D_1$이라 하면

$D_1=k^2-12k<0$

$k(k-12)<0$ $\therefore 0<k<12$

(i), (ii)에서 $0\leq k<12$ …… ㉠

조건 (나)에서 이차방정식 $x^2-2kx+2k^2-10k+16=0$의 판별식을 $D_2$라 하면

$\frac{D_2}{4}=k^2-(2k^2-10k+16)\leq 0$

$k^2-10k+16\geq 0$, $(k-2)(k-8)\geq 0$

$\therefore k\leq 2$ 또는 $k\geq 8$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $0\leq k\leq 2$ 또는 $8\leq k<12$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수 $k$는 0, 1, 2, 8, 9, 10, 11의 7개이다. 답 **7**

**464** (i) $[x-1]=[x]-1$이므로

$[x-1]^2-[x]-5\leq 0$에서

$([x]-1)^2-[x]-5\leq 0$

$[x]^2-3[x]-4\leq 0$, $([x]-4)([x]+1)\leq 0$

$\therefore -1\leq [x]\leq 4$

이때 $[x]$의 값은 정수이므로

$[x]=-1, 0, 1, 2, 3, 4$

$[x]=-1$에서 $-1\leq x<0$

$[x]=0$에서 $0\leq x<1$

⋮

$[x]=4$에서 $4\leq x<5$

따라서 주어진 부등식의 해는

$-1\leq x<5$

(ii) $x|x|-4\geq 0$에서

$x\geq 0$이면 $x^2-4\geq 0$ $\therefore x\geq 2$ …… ㉠

$x<0$이면 $-x^2-4\geq 0$, $x^2+4\leq 0$

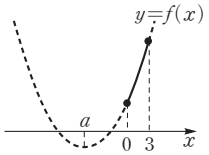
$\therefore$ 해가 없다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x\geq 2$

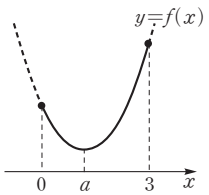
(i), (ii)에서 $2\leq x<5$ 답 ⑤

**465** $f(x)=x^2-5x-6$, $g(x)=-x^2+3x+4$라 하면 두 점 A, B의 $y$좌표는 각각 $f(k)$, $g(k)$이다.
즉, $\overline{AB}=|f(k)-g(k)|\le 14$에서
$|(k^2-5k-6)-(-k^2+3x+4)|\le 14$
$|2k^2-8k-10|\le 14$, $|k^2-4k-5|\le 7$
$\therefore -7\le k^2-4k-5\le 7$
$k^2-4k-5\ge -7$에서
$k^2-4k+2\ge 0$, $(k-2-\sqrt{2})(k-2+\sqrt{2})\ge 0$
$\therefore k\le 2-\sqrt{2}$ 또는 $k\ge 2+\sqrt{2}$ …… ㉠
$k^2-4k-5\le 7$에서
$k^2-4k-12\le 0$, $(k+2)(k-6)\le 0$
$\therefore -2\le x\le 6$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$-2\le k\le 2-\sqrt{2}$ 또는 $2+\sqrt{2}\le k\le 6$
따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수 $k$는 $-2$, $-1$, 0, 4, 5, 6의 6개이다. 답 ④

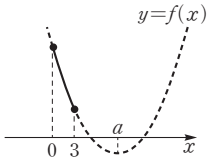
**466** $x^2-2x-3\le 0$에서
$(x+1)(x-3)\le 0$ $\therefore -1\le x\le 3$ …… ㉠
$x(x-4)\le 0$에서 $0\le x\le 4$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 연립부등식의 해는 $0\le x\le 3$
한편, $f(x)=x^2-2ax+3a+4$라 하면
$f(x)=(x-a)^2-a^2+3a+4$
$0\le x\le 3$에서 $f(x)>0$이어야 하므로 $0\le x\le 3$에서 $f(x)$의 최솟값이 0보다 커야 한다.
(i) $a<0$일 때, $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로
$f(0)=3a+4>0$
$\therefore a>-\frac{4}{3}$
그런데 $a<0$이므로 $-\frac{4}{3}<a<0$




(ii) $0\le a<3$일 때, $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로
$-a^2+3a+4>0$, $a^2-3a-4<0$
$(a+1)(a-4)<0$
$\therefore -1<a<4$
그런데 $0\le a<3$이므로 $0\le a<3$




(iii) $a\ge 3$일 때, $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로
$f(3)=-3a+13>0$
$\therefore a<\frac{13}{3}$
그런데 $a\ge 3$이므로 $3\le a<\frac{13}{3}$




(i), (ii), (iii)에서 $-\frac{4}{3}<a<\frac{13}{3}$
따라서 정수 $a$의 최댓값은 4이다. 답 ④

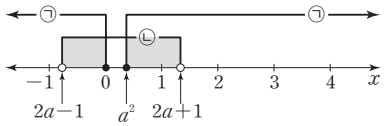
**467** 모든 실수 $x$에 대하여 이차부등식
$-x^2+3x+2\le mx+n$, 즉 $x^2+(m-3)x+n-2\ge 0$
이 성립하므로 이차방정식 $x^2+(m-3)x+n-2=0$의 판별식을 $D_1$이라 하면
$D_1=(m-3)^2-4(n-2)\le 0$
$m^2-6m-4n+17\le 0$
$\therefore 4n\ge m^2-6m+17$ …… ㉠
또, 모든 실수 $x$에 대하여 이차부등식
$mx+n\le x^2-x+4$, 즉 $x^2-(m+1)x+4-n\ge 0$
이 성립하므로 이차방정식 $x^2-(m+1)x+4-n=0$의 판별식을 $D_2$라 하면
$D_2=\{-(m+1)\}^2-4(4-n)\le 0$
$m^2+2m+4n-15\le 0$
$\therefore 4n\le -m^2-2m+15$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$m^2-6m+17\le 4n\le -m^2-2m+15$ …… ㉢
즉, $m^2-6m+17\le -m^2-2m+15$이므로
$2m^2-4m+2\le 0$, $2(m-1)^2\le 0$
$\therefore m=1$
이것을 ㉢에 대입하면
$12\le 4n\le 12$, $3\le n\le 3$ $\therefore n=3$
$\therefore m^2+n^2=10$ 답 ②

**468** 연립부등식 $\begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$의 해가 $-1<x\le 2$이므로
$f(-1)=0$, $g(2)=0$
즉, $f(-1)=1-a+b=0$에서
$a-b=1$ …… ㉠
$g(2)=4+2(a+b)-3a+1=0$에서
$a-2b=5$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-4$
따라서 $f(x)=x^2-3x-4$, $g(x)=x^2-7x+10$이므로
부등식 $2f(x)<g(x)-2x$에서
$2(x^2-3x-4)<x^2-7x+10-2x$
$x^2+3x-18<0$, $(x+6)(x-3)<0$
$\therefore -6<x<3$
따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 $x$는 $-5$, $-4$, $-3$, $-2$, $-1$, 0, 1, 2의 8개이다. 답 ⑤

**469** $x^2-a^2x\ge 0$에서
$x(x-a^2)\ge 0$
$\therefore x\le 0$ 또는 $x\ge a^2$ ($\because a^2\ge 0$) …… ㉠
$x^2-4ax+4a^2-1<0$에서
$\{x-(2a-1)\}\{x-(2a+1)\}<0$
$\therefore 2a-1<x<2a+1$ …… ㉡

(i) $0<a<\frac{1}{2}$일 때

$-1<2a-1<0$, $1<2a+1<2$, $0<a^2<\frac{1}{4}$이므로




연립부등식의 해는 $2a-1<x\le 0$ 또는 $a^2\le x<2a+1$이고 정수 $x$는 0, 1의 2개이다.

(ii) $a=\frac{1}{2}$일 때

㉠에서 $x\le 0$ 또는 $x\ge\frac{1}{4}$

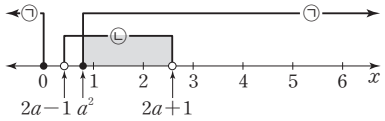
㉡에서 $0<x<2$

즉, 연립부등식의 해는 $\frac{1}{4}\le x<2$이므로 정수 $x$는 1의 1개이다.

(iii) $\frac{1}{2}<a<1$일 때

$\frac{1}{4}<a^2<1$, $0<2a-1<1$, $2<2a+1<3$이고

$a^2-(2a-1)=(a-1)^2\ge 0$에서 $a^2\ge 2a-1$이므로




연립부등식의 해는 $a^2\le x<2a+1$이고 정수 $x$는 1, 2의 2개이다.

(iv) $a=1$일 때

㉠에서 $x\le 0$ 또는 $x\ge 1$

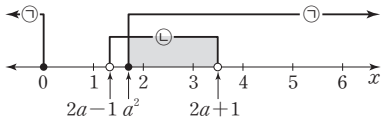
㉡에서 $1<x<3$

즉, 연립부등식의 해는 $1<x<3$이므로 정수 $x$는 2의 1개이다.

(v) $1<a<\sqrt{2}$일 때

$1<a^2<2$, $1<2a-1<2\sqrt{2}-1$, $3<2a+1<2\sqrt{2}+1$이고

$a^2\ge 2a-1$이므로




연립부등식의 해는 $a^2\le x<2a+1$이고 정수 $x$는 2, 3의 2개이다.

(i)~(v)에서 정수 $x$가 1개 존재하는 경우는

$a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$

따라서 모든 실수 $a$의 값의 합은 $\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ 답 ①

**0470** 보관창고가 A지점에서 $x$ km 떨어져 있다고 하면 보관창고와 B지점 사이의 거리는 $(10+x)$ km, 보관창고와 C지점 사이의 거리는 $(20-x)$ km이다.

이때 $\overline{AC}=20$ km이므로 $0<x<20$ …… ㉠

공장과 보관창고와의 거리가 $x$ km일 때, 제품 한 개당 운송비는 $x^2$원이므로 A지점의 공장에서 하루에 생산된 제품 100개의 운송비는

$100x^2$원

B지점의 공장에서 하루에 생산된 제품 200개의 운송비는

$200(10+x)^2$원

C지점의 공장에서 하루에 생산된 제품 300개의 운송비는

$300(20-x)^2$원

하루 운송비가 155000원 이하가 되어야 하므로

$100x^2+200(10+x)^2+300(20-x)^2\le 155000$

$3x^2-40x-75\le 0$, $(3x+5)(x-15)\le 0$

$\therefore -\frac{5}{3}\le x\le 15$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $0<x\le 15$

따라서 보관창고는 A지점에서 최대 15 km 떨어진 지점까지 지을 수 있다. 답 ④

**0471** $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+2(k-1)X-k+7=0$ …… ㉠

이때 주어진 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠의 두 근이 모두 양수이어야 한다.

즉, ㉠의 판별식을 $D$라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(k-1)^2-(-k+7)>0$에서

$k^2-k-6>0$, $(k-3)(k+2)>0$

$\therefore k<-2$ 또는 $k>3$

(ii) (두 근의 합)$=-2(k-1)>0$ $\therefore k<1$

(iii) (두 근의 곱)$=-k+7>0$ $\therefore k<7$

(i), (ii), (iii)에서 $k<-2$ 답 $k<-2$

**0472** 조건 (가)에서 $f(a)=0$이므로

$a^3+(4-a)a^2+(a^2-4a)a+b=0$

$\therefore b=-a^3$ …… ㉠

$\therefore f(x)=x^3+(4-a)x^2+(a^2-4a)x-a^3$

즉, 방정식 $f(x)=0$에서

$x^3+(4-a)x^2+(a^2-4a)x-a^3=0$ …… ㉡

$(x-a)(x^2+4x+a^2)=0$

$\therefore x=a$ 또는 $x^2+4x+a^2=0$

조건 (나)에서 ㉡이 하나의 양의 실근과 서로 다른 두 음의 실근을 가지므로 이차방정식 $x^2+4x+a^2=0$이 $x=a$가 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) $x=a$가 이차방정식 $x^2+4x+a^2=0$의 근이 아니므로

$a^2+4a+a^2\ne 0$, $2a(a+2)\ne 0$

$\therefore a\ne 0$ 또는 $a\ne -2$

(ii) 이차방정식 $x^2+4x+a^2=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-a^2>0$

$(a+2)(a-2)<0$ $\therefore -2<a<2$

즉, 이때 이차방정식 $x^2+4x+a^2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합이 음수이고, 두 근의 곱이 양수이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 음의 실근을 가진다.

(i), (ii)에서 주어진 조건을 만족시키는 정수 $a$는 양수이어야 하므로

$a=1$, $b=-1^3=-1$ ($\because$ ㉠)

$\therefore a+b=0$ 답 **0**

**473** 함수 $f(x)=x^2+2ax+2a$의 그래프와 직선 $y=x+2$가 $-2\le x\le 2$인 부분에서 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식

$x^2+2ax+2a=x+2$, 즉 $x^2+(2a-1)x+2(a-1)=0$

의 서로 다른 두 근이 $-2$와 2 사이에 있어야 한다.

$g(x)=x^2+(2a-1)x+2(a-1)$이라 할 때,

(i) $g(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=(2a-1)^2-8(a-1)>0$

$4a^2-12a+9>0$, $(2a-3)^2>0$

즉, $a\ne\frac{3}{2}$인 모든 실수이다.

(ii) $g(-2)=4-2(2a-1)+2a-2\ge 0$에서

$-2a+4\ge 0$ $\therefore a\le 2$ …… ㉠

$g(2)=4+2(2a-1)+2a-2\ge 0$에서

$6a\ge 0$ $\therefore a\ge 0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $0\le a\le 2$

(iii) 이차함수 $y=g(x)$의 그래프의 축의 방정식이

$x=-\frac{2a-1}{2}$이므로

$-2<-\frac{2a-1}{2}<2$, $-4<2a-1<4$

$\therefore -\frac{3}{2}<a<\frac{5}{2}$

(i), (ii), (iii)에서 $0\le a<\frac{3}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}<a\le 2$

답 $\mathbf{0\le a<\frac{3}{2}}$ **또는** $\mathbf{\frac{3}{2}<a\le 2}$

**474** 가격을 올리기 전의 판매 가격을 $x$원, 판매량을 $y$개라 하자.

다음 달 제품 A의 총 판매 금액이 이번 달 제품 A의 총 판매 금액 이상이 되어야 하므로

$x\left(1+\frac{n}{100}\right)\times y\left(1-\frac{4n}{500}\right)\ge xy$

$\left(1+\frac{n}{100}\right)\left(1-\frac{n}{125}\right)\ge 1$ ($\because xy\ge 0$)

$n^2-25n\le 0$, $n(n-25)\le 0$

$\therefore 0\le n\le 25$

따라서 $n$의 최댓값은 25이다. 답 **25**

**475** $\overline{QC}=n$ $(0<n<6)$이므로 $\overline{BQ}=6-n$

이때 $\triangle PBQ\sim\triangle ABC$ (AA 닮음)이므로

$(6-n):6=\overline{PQ}:8$

$\therefore \overline{PQ}=\frac{8(6-n)}{6}=8-\frac{4}{3}n$

따라서 직사각형 PQCR의 넓이는 $n\left(8-\frac{4}{3}n\right)$이므로

$n\left(8-\frac{4}{3}n\right)\ge\frac{20}{3}$에서 $n^2-6n+5\le 0$

$(n-1)(n-5)\le 0$

$\therefore 1\le n\le 5$

따라서 구하는 자연수 $n$의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로 그 합은

$1+2+3+4+5=15$ 답 **15**

**476** 두 이차함수 $f(x)=(x-a)(x-c)$와 $g(x)=(x-b)(x-c)$의 그래프가 만나는 점의 $x$좌표가 3이므로 $c=3$

이때 $f(-2)=0$, $g(1)=0$ 또는 $f(1)=0$, $g(-2)=0$이므로

$a=-2$, $b=1$ 또는 $a=1$, $b=-2$

(i) $a=-2$, $b=1$일 때

주어진 연립부등식은 $\begin{cases}(x-a)(x-c)>0\\(x-b)(x-c)<0\end{cases}$, 즉

$\begin{cases}(x+2)(x-3)>0\\(x-1)(x-3)<0\end{cases}$

$(x+2)(x-3)>0$에서 $x<-2$ 또는 $x>3$ …… ㉠

$(x-1)(x-3)<0$에서 $1<x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.

(ii) $a=1$, $b=-2$일 때

주어진 연립부등식은 $\begin{cases}(x-a)(x-c)>0\\(x-b)(x-c)<0\end{cases}$, 즉

$\begin{cases}(x-1)(x-3)>0\\(x+2)(x-3)<0\end{cases}$

$(x-1)(x-3)>0$에서 $x<1$ 또는 $x>3$ …… ㉢

$(x+2)(x-3)<0$에서 $-2<x<3$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $-2<x<1$

(i), (ii)에서 연립부등식의 해가 존재하려면 $a=1$, $b=-2$이어야 한다.

한편, 이차부등식 $x^2+bx+a\le0$, 즉 $x^2-2x+1\le0$에서

$(x-1)^2\le0$ $\therefore x=1$

따라서 주어진 이차부등식을 만족시키는 정수 $x$는 1의 1개이다.

답 **1**

## STEP 3 상위권 마스터

본문 98~99쪽

### 477

TIP 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$를 상수 $a$, $b$, $p$로 나타낸다.

조건 (가)에서 최고차항의 계수가 각각 $\frac{1}{2}$, 2인 두 이차함수 $y=f(x)$, $g(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=p$이므로

$f(x)=\frac{1}{2}(x-p)^2+a$, $g(x)=2(x-p)^2=b$

(단, $a$, $b$는 상수)

라 할 수 있다.

조건 (나)의 부등식 $f(x)\ge g(x)$, 즉 $g(x)-f(x)\le0$에서

$$g(x)-f(x)=2(x-p)^2+b-\left\{\frac{1}{2}(x-p)^2+a\right\}$$
$$=\frac{3}{2}(x-p)^2+b-a$$
$$=\frac{3}{2}x^2-3px+\frac{3}{2}p^2+b-a \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, 해가 $-1\le x\le5$이고 $x^2$의 계수가 $\frac{3}{2}$인 이차부등식은

$\frac{3}{2}(x+1)(x-5)\le0$, 즉 $\frac{3}{2}x^2-6x-\frac{15}{2}\le0$

위의 이차부등식이 ㉠과 일치해야 하므로

$-3p=-6$, $\frac{3}{2}p^2+b-a=-\frac{15}{2}$

$\therefore p=2$, $a-b=\frac{27}{2}$

즉, $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2+a$, $g(x)=2(x-2)^2+b$이므로

$p\times\{f(2)-g(2)\}=p\times(a-b)$

$=2\times\frac{27}{2}=27$

답 **27**

### 478

TIP $f(x+f(x))\le0$에서 $x+f(x)=t$로 치환하여 $f(t)\le0$의 해를 먼저 구한다.

$\overline{BC}=3$이고 삼각형 ABC의 넓이가 6이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{OA}=6$

$\frac{1}{2}\times3\times\overline{OA}=6$ $\therefore \overline{OA}=4$

즉, 점 A의 좌표는 $(0, 4)$이므로

$f(0)=b=4$ $\therefore f(x)=x^2-ax+4$

한편, 점 B의 좌표를 $(\alpha, 0)$이라 하면 $\overline{BC}=3$이므로 점 C의 좌표는 $(\alpha+3, 0)$이다.

이차방정식 $x^2-ax+4=0$의 두 근이 $\alpha$, $\alpha+3$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\begin{cases}\alpha+(\alpha+3)=a & \cdots\cdots ㉠\\ \alpha(\alpha+3)=4 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉡에서 $\alpha^2+3\alpha-4=0$

$(\alpha+4)(\alpha-1)=0$ $\therefore \alpha=-4$ 또는 $\alpha=1$

(i) $\alpha=-4$일 때

㉠에서 $-4+(-1)=a$ $\therefore a=-5$

그런데 $a>0$이어야 하므로 $\alpha\ne-4$

(ii) $\alpha=1$일 때

㉠에서 $1+4=a$ $\therefore a=5$

(i), (ii)에서 $a=5$이므로 B(1, 0), C(4, 0)이다.

$\therefore f(x)=x^2-5x+4$

부등식 $f(x)\le0$의 해는 $1\le x\le4$이므로

부등식 $f(x+f(x))\le0$에서

$1\le x+f(x)\le4$

$x+f(x)\ge1$에서

$x^2-4x+3\ge0$, $(x-1)(x-3)\ge0$

$\therefore x\le1$ 또는 $x\ge3$ $\cdots\cdots ㉢$

$x+f(x)\le4$에서

$x^2-4x\le0$, $x(x-4)\le0$

$\therefore 0\le x\le4$ $\cdots\cdots ㉣$

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$0\le x\le1$ 또는 $3\le x\le4$

따라서 부등식 $f(x+f(x))\le0$을 만족시키는 정수 $x$는 0, 1, 3, 4의 4개이므로 $c=4$

$\therefore abc=5\times4\times4=80$

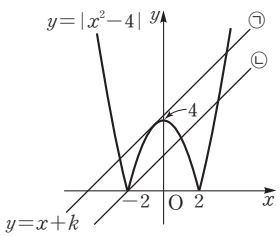
답 **80**

### 479

TIP 방정식 $|x^2-4|-x-k=0$의 해는 함수 $y=|x^2-4|$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 교점의 $x$좌표이다.

방정식 $|x^2-4|-x-k=0$, 즉 $|x^2-4|=x+k$가 서로 다른 세 실근을 가지면 함수 $y=|x^2-4|$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 세 점에서 만난다.

즉, 직선 $y=x+k$가 오른쪽 그림의 ㉠ 또는 ㉡이 되어야 한다.




이때 ㉠은 $y=-(x^2-4)$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접하는 경우로, 서로 다른 두 음의 실근과 하나의 양의 실근을 가지는 경우이다. 즉, 조건에 맞지 않다.

㉡은 직선 $y=x+k$가 점 $(-2, 0)$을 지나는 경우로, 하나의 음의 실근과 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.

이때 $0=-2+k$이므로 $k=2$

따라서 부등식 $|x^2-4|-x-k<0$, 즉 $|x^2-4|-x-2<0$에서

(i) $x<-2$ 또는 $x>2$일 때

$x^2-4-x-2<0$, $x^2-x-6<0$

$(x-3)(x+2)<0$ $\therefore -2<x<3$

그런데 $x<-2$ 또는 $x>2$이므로

$2<x<3$

(ii) $-2\le x\le 2$일 때

$-x^2+4-x-2<0$, $x^2+x-2>0$

$(x+2)(x-1)>0$ $\therefore x<-2$ 또는 $x>1$

그런데 $-2\le x\le 2$이므로

$1<x\le 2$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$1<x<3$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=3$이므로 $\alpha+\beta=4$ 답 ①

## 480

TIP 정수 $m$, $n$에 대하여 $m\le x<n$ 또는 $m<x\le n$을 만족시키는 정수 $x$의 개수는 $n-m$이다.

$x^2<(3n+1)x$에서

$x^2-(3n+1)x<0$, $x(x-3n-1)<0$

$\therefore 0<x<3n+1$ ($\because 3n+1>0$) …… ㉠

$x^2-3nx+2n^2\ge 0$에서

$(x-n)(x-2n)\ge 0$

$\therefore x\le n$ 또는 $x\ge 2n$ ($\because 2n>n$) …… ㉡

이때 $3n+1-2n=n+1>0$ ($\because n$은 자연수)이므로

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$0<x\le n$ 또는 $2n\le x<3n+1$

따라서 이를 만족시키는 정수 $x$의 개수는

$(n-0)+\{(3n+1)-2n\}=2n+1$

즉, $f(n)=2n+1$이므로 $a=2$, $b=1$

$\therefore a^2+b^2=2^2+1^2=5$ 답 ①

## 481

TIP 부등식 $ax\ge b$는 $a=0$, $b\le 0$일 때, 모든 실수 $x$에 대하여 성립한다.

$-6\le(a+4)x+2b$에서

$(a+4)x\ge -6-2b$

이 부등식이 모든 실수 $x$에 대하여 성립하므로

$a+4=0$, $-6-2b\le 0$

$\therefore a=-4$, $b\ge -3$ …… ㉠

$(a+4)x+2b\le 3x^2+12x+18$에서

$3x^2+(8-a)x+18-2b\ge 0$

$3x^2+12x+18-2b\ge 0$ ($\because$ ㉠)

이 부등식이 모든 실수 $x$에 대하여 성립하므로 이차방정식

$3x^2+12x+18-2b=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=36-3(18-2b)\le 0$에서

$6b\le 18$ $\therefore b\le 3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-3\le b\le 3$

따라서 점 $(a, b)$가 나타내는 선분의 양 끝점을 A, B라 하면

A$(-4, -3)$, B$(-4, 3)$ 또는 A$(-4, 3)$, B$(-4, -3)$

따라서 삼각형 OAB의 둘레의 길이는

$\overline{AB}+\overline{OA}+\overline{OB}$

$=|-3-3|+\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}+\sqrt{(-4)^2+3^2}$

$=6+5+5=16$ 답 ⑤

## 482

TIP $x^2-2x=t$로 놓고 네 근이 모두 실수일 조건을 찾는다.

$x^2-2x=t$로 놓으면

$t=x^2-2x=(x-1)^2-1\ge -1$ $\therefore t\ge -1$

이때 $(x^2-2x)^2+k(x^2-2x)+1=0$에서

$t^2+kt+1=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 할 때 주어진 방정식의 근이 모두 실수가 되려면 두 이차방정식 $x^2-2x=\alpha$, $x^2-2x=\beta$의 네 근이 모두 실수가 되어야 하므로 $\alpha\ge -1$, $\beta\ge -1$이어야 한다.

이때 $f(t)=t^2+kt+1$이라 하고 이차방정식 ㉠의 판별식을 $D$라 하면

(i) $D=k^2-4\ge 0$에서 $(k+2)(k-2)\ge 0$

$\therefore k\le -2$ 또는 $k\ge 2$

(ii) $f(-1)=1-k+1\ge 0$ $\therefore k\le 2$

(iii) 축의 방정식이 $t=-\frac{k}{2}$이므로

$-\frac{k}{2}\ge -1$ $\therefore k\le 2$

(i), (ii), (iii)에서 $k\le -2$ 또는 $k=2$

답 $k\le -2$ 또는 $k=2$

## 483

TIP $a$의 값에 따라 범위를 나누고 연립부등식을 만족시키는 정수 $x$가 존재할 조건을 찾는다.

부등식 $x^2-2|x|\le 0$에서

$x\ge 0$일 때, $x^2-2x\le 0$, $x(x-2)\le 0$ $\therefore 0\le x\le 2$

$x<0$일 때, $x^2+2x\le 0$, $x(x+2)\le 0$ $\therefore -2\le x<0$

즉, 부등식 $x^2-2|x|\le 0$의 해는 $-2\le x\le 2$ …… ㉠

또, $x^2-(2a+1)x+a^2+a\le 0$에서

$(x-a)(x-a-1)\le 0$ $\therefore a\le x\le a+1$ …… ㉡

연립부등식을 만족시키는 정수 $x$가 존재하려면 ㉠, ㉡의 공통부분 안에 정수가 있어야 한다.

(i) $a<-3$ 또는 $a>2$일 때

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.

(ii) $a=-3$일 때

주어진 연립부등식의 해는 $x=-2$이므로

$x^2-3x+b=0$에서

$(-2)^2-3\times(-2)+b=0$ $\therefore b=-10$

(iii) $-2\le a\le 1$일 때

주어진 연립부등식의 해는 $a\le x\le a+1$

이 중 정수인 해는 $a$, $a+1$

두 수 $a$, $a+1$이 이차방정식 $x^2-3x+b=0$의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a+(a+1)=3$, $a(a+1)=b$

$\therefore a=1$, $b=2$

(iv) $a=2$일 때

주어진 연립부등식의 해는 $x=2$

$x^2-3x+b=0$에서

$2^2-3\times2+b=0$ $\therefore b=2$

(i)~(iv)에서 정수 $a$, $b$의 순서쌍 $(a, b)$는 $(-3, -10)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$의 3개이다. 답 ③

## 0484

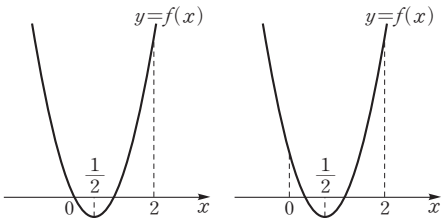
TIP 한 근만이 0과 2 사이에 있는 경우와 두 근이 모두 0과 2 사이에 있는 경우로 나누어 생각한다.

$f(x)=x^2-x-k+1$이라 하면

$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-k+\frac{3}{4}$

(i) 한 근만이 0과 2 사이에 있는 경우

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.




즉, $f(0)\le 0$, $f(2)>0$이므로

$f(0)=-k+1\le 0$ $\therefore k\ge 1$ ····· ㉠

$f(2)=4-2-k+1>0$ $\therefore k<3$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$1\le k<3$

(ii) 두 근이 모두 0과 2 사이에 있는 경우

이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=1-4(-k+1)\ge 0$ $\therefore k\ge\frac{3}{4}$ ····· ㉢

$f(0)=-k+1>0$ $\therefore k<1$ ····· ㉣

$f(2)=4-2-k+1>0$ $\therefore k<3$ ····· ㉤

이때 축의 방정식은 $x=\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<2$이므로 조건을 만족시킨다.

㉢, ㉣, ㉤의 공통부분을 구하면

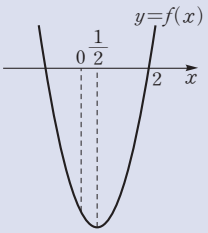
$\frac{3}{4}\le k<1$

(i), (ii)에서 $\frac{3}{4}\le k<3$ 답 $\frac{3}{4}\le k<3$

**Lecture**

$f(2)=0$이면 $f(2)=4-2-k+1=0$에서 $k=3$이므로 $f(0)=-2<0$

즉, 오른쪽 그림과 같이 이차방정식 $f(x)=0$의 근이 0과 2 사이에 존재하지 않는다.



# 10 평면좌표

## STEP 1 핵심기출 마스터

본문 103~106쪽

**0485** $\overline{AB}=\sqrt{5}$이므로
$\sqrt{(a+2-5)^2+\{1-(a-1)\}^2}=\sqrt{5}$
양변을 제곱하면
$(a-3)^2+(a-2)^2=5$
$a^2-5a+4=0$, $(a-1)(a-4)=0$
$\therefore a=1$ 또는 $a=4$
따라서 구하는 모든 실수 $a$의 값의 합은
$1+4=5$ 답 ③

**0486** $\overline{AB}\le 4$이므로
$\sqrt{(k+1-8)^2+(3-k)^2}\le 4$
양변을 제곱하면
$(k-7)^2+(k-3)^2\le 16$
$k^2-10k+21\le 0$, $(k-3)(k-7)\le 0$
$\therefore 3\le k\le 7$
따라서 정수 $k$는 3, 4, 5, 6, 7의 5개이다. 답 ⑤

**0487** $\overline{AB}=\sqrt{\{-5-(-k+1)\}^2+\{(k+1)-5\}^2}$
$=\sqrt{(k-6)^2+(k-4)^2}$
$=\sqrt{2k^2-20k+52}$
$=\sqrt{2(k-5)^2+2}$
따라서 $\overline{AB}\ge\sqrt{2}$이므로 $\overline{AB}$의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.
답 ②

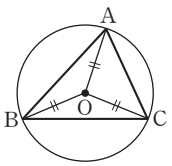
**0488** 출발한 지 $t$초 후의 두 점 A, B의 좌표는 각각
$(-6+2t, 0)$, $(0, 2+t)$
이때 두 점 A, B 사이의 거리는
$\overline{AB}=\sqrt{(6-2t)^2+(2+t)^2}$
$=\sqrt{5t^2-20t+40}$
$=\sqrt{5(t-2)^2+20}$
즉, $\overline{AB}$는 $t=2$일 때 최솟값 $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$를 갖는다.
따라서 두 점 A, B 사이의 거리의 최솟값은 $2\sqrt{5}$이다. 답 $2\sqrt{5}$

**0489** $P(a, 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$(a-2)^2+(-4)^2=(a-3)^2+1^2$
$a^2-4a+20=a^2-6a+10$
$2a=-10$ $\therefore a=-5$
$\therefore P(-5, 0)$
또, $Q(0, b)$라 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로
$(-2)^2+(b-4)^2=(-3)^2+(b+1)^2$
$b^2-8b+20=b^2+2b+10$
$10b=10$ $\therefore b=1$
$\therefore Q(0, 1)$
$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$ 답 ③

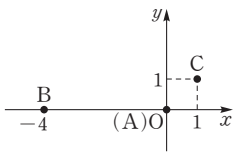
**0490** 점 $P(a, b)$가 직선 $y=x-2$ 위의 점이므로
$b=a-2$ …… ㉠
또, $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$(a-3)^2+(b+4)^2=(a+1)^2+(b-2)^2$
$a^2-6a+b^2+8b+25=a^2+2a+b^2-4b+5$
$\therefore 2a-3b=5$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-1$
$\therefore a^2+b^2=2$ 답 2

**0491** $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$이므로 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$
$\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$에서 $(a-1)^2+(b-1)^2=(a+2)^2+b^2$
$a^2-2a+b^2-2b+2=a^2+4a+b^2+4$
$\therefore 3a+b=-1$ …… ㉠
$\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$에서 $(a-5)^2+(b+1)^2=(a+2)^2+b^2$
$a^2-10a+b^2+2b+26=a^2+4a+b^2+4$
$\therefore 7a-b=11$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-4$
$\therefore a-b=5$ 답 ②

**개념 Plus**
삼각형의 외심에서 각 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.
⇨ 점 O가 △ABC의 외심일 때,
$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$




**0492** 오른쪽 그림과 같이 A 지점이 원점, B 지점이 $x$축 위에 오도록 좌표평면을 정하면
$A(0, 0)$, $B(-4, 0)$, $C(1, 1)$




물류창고를 지으려는 지점을 $P(a, b)$라 하면
$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$이므로 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$
$\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서 $a^2+b^2=(a+4)^2+b^2$
$a^2+b^2=a^2+8a+b^2+16$
$8a=-16$ $\therefore a=-2$ …… ㉠
$\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$에서 $a^2+b^2=(a-1)^2+(b-1)^2$
$a^2+b^2=a^2-2a+b^2-2b+2$
$\therefore a+b=1$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하여 풀면 $b=3$
따라서 $P(-2, 3)$이므로 구하는 거리는
$\overline{AP}=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$ (km) 답 ②

**493** $\overline{AB}^2=(-a-1)^2+1^2=a^2+2a+2$

$\overline{BC}^2=(2a+1)^2+1^2=4a^2+4a+2$

$\overline{CA}^2=(-a)^2+(-1-1)^2=a^2+4$

삼각형 ABC가 $\angle A=90^\circ$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$, $\overline{AB}=\overline{CA}$

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$에서

$4a^2+4a+2=(a^2+2a+2)+(a^2+4)$

$a^2+a-2=0$, $(a+2)(a-1)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=1$

그런데 $a=-2$이면 $\overline{AB}\neq\overline{CA}$이므로 $a=1$ 답 **1**

**494** 삼각형 ABC가 이등변삼각형이 되려면 $\overline{AB}=\overline{BC}$ 또는 $\overline{BC}=\overline{CA}$ 또는 $\overline{CA}=\overline{AB}$이어야 한다.

(i) $\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$1^2+(5-2)^2=(a-1)^2+(1-5)^2$

$10=(a-1)^2+16$ $\therefore (a-1)^2=-6$ …… ㉠

그런데 $(a-1)^2\geq 0$이므로 ㉠을 만족시키는 실수 $a$의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $\overline{BC}=\overline{CA}$에서 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이므로

$(a-1)^2+(1-5)^2=(-a)^2+(2-1)^2$

$a^2-2a+17=a^2+1$, $2a=16$ $\therefore a=8$

(iii) $\overline{CA}=\overline{AB}$에서 $\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$이므로

$(-a)^2+(2-1)^2=1^2+(5-2)^2$

$a^2+1=10$, $a^2=9$ $\therefore a=\pm 3$

(i), (ii), (iii)에서 모든 실수 $a$의 값의 곱은

$8\times 3\times(-3)=-72$ 답 **−72**

**495** P(3, 2), Q(x, y), R(4, −1)이라 하면

$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\overline{PQ}$, $\sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2}=\overline{QR}$

이므로

$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2}$

$=\overline{PQ}+\overline{QR}$

$\geq\overline{PR}=\sqrt{(4-3)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{10}$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{10}$이다. 답 $\sqrt{10}$

**496** P(a, a+1)이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(a-2)^2+(a+2)^2+(a-4)^2+(a-8)^2$

$=4a^2-24a+88$

$=4(a-3)^2+52$

따라서 $a=3$일 때 주어진 식의 최솟값이 52이므로 점 P의 $x$좌표는 3이다. 답 ③

**497** P(a, b)라 하면

$\overline{OP}^2+\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=a^2+b^2+(a-3)^2+b^2+a^2+(b-6)^2$

$=3a^2-6a+3b^2-12b+45$

$=3(a-1)^2+3(b-2)^2+30$

따라서 $a=1$, $b=2$일 때 구하는 최솟값은 30이다. 답 ⑤

**498** $\overline{AB}$를 3 : 1로 외분하는 점의 좌표가 (5, 9)이므로

$\frac{3\times 4-(a+1)}{3-1}=5$, $\frac{3(b+2)-1\times 0}{3-1}=9$

$11-a=10$, $3b+6=18$ $\therefore a=1$, $b=4$

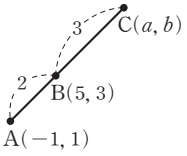
$\therefore$ B(4, 6), C(−1, 1)

따라서 $\overline{BC}$를 1 : 4로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times(-1)+4\times 4}{1+4}, \frac{1\times 1+4\times 6}{1+4}\right)$, 즉 (3, 5) 답 **(3, 5)**

**499** $3\overline{AB}=2\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=2:3$

이때 점 C는 $\overline{AB}$의 연장선 위에 있고 $a>0$이므로 세 점 A, B, C의 위치는 오른쪽 그림과 같다.

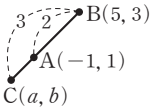



즉, 점 C는 $\overline{AB}$를 5 : 3으로 외분하는 점이므로

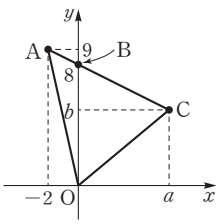
$a=\frac{5\times 5-3\times(-1)}{5-3}=14$, $b=\frac{5\times 3-3\times 1}{5-3}=6$

$\therefore a+b=20$ 답 **20**

**참고** 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}:\overline{BC}=2:3$일 때, 점 C가 $\overline{AB}$를 1 : 3으로 외분하는 점인 경우도 있다. 이때 $a<0$이다.




**500** $a>0$이므로 점 C의 위치는 오른쪽 그림과 같고




$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times 8\times 2=8$

$\therefore \triangle OBC=\triangle OAC-\triangle OAB$

$=32-8=24$

즉, $\triangle OAB:\triangle OBC=8:24=1:3$

이므로

$\overline{AB}:\overline{BC}=1:3$

따라서 점 C는 $\overline{AB}$를 4 : 3으로 외분하는 점이므로

$a=\frac{4\times 0-3\times(-2)}{4-3}=6$, $b=\frac{4\times 8-3\times 9}{4-3}=5$

$\therefore a+b=11$ 답 ①

**501** $\overline{AB}$를 $t:(1-t)$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{t\times 4+(1-t)\times(-2)}{t+(1-t)}, \frac{t\times 7+(1-t)\times(-1)}{t+(1-t)}\right)$

즉, $(6t-2, 8t-1)$

이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$6t-2<0$, $8t-1>0$

$\therefore \frac{1}{8}<t<\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{8}<t<\frac{1}{3}$

**0502** $\overline{AB}$를 $k:4$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{5k-12}{k-4}, \frac{-k+8}{k-4}\right)$

이 점이 직선 $y=x-2$ 위에 있으므로

$\frac{-k+8}{k-4}=\frac{5k-12}{k-4}-2$, $\frac{6k-20}{k-4}=2$

$6k-20=2k-8$, $4k=12$ $\therefore k=3$ 답 **3**

**0503** 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(1, -2)$이므로

$\frac{4+(a-1)+b}{3}=1$, $\frac{-2+(-b+3)+(3a+1)}{3}=-2$

$\therefore a+b=0$, $3a-b=-8$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=2$

$\therefore ab=-4$ 답 **−4**

**0504** 세 점 D, E, F는 각각 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$D\left(\frac{2\times(-4)+1\times5}{2+1}, \frac{2\times10+1\times4}{2+1}\right)$, 즉 $D(-1, 8)$

$E\left(\frac{2\times8+1\times(-4)}{2+1}, \frac{2\times(-2)+1\times10}{2+1}\right)$, 즉 $E(4, 2)$

$F\left(\frac{2\times5+1\times8}{2+1}, \frac{2\times4+1\times(-2)}{2+1}\right)$, 즉 $F(6, 2)$

따라서 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-1+4+6}{3}, \frac{8+2+2}{3}\right)$, 즉 $(3, 4)$ 답 **(3, 4)**

다른풀이

삼각형 DEF의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{5-4+8}{3}, \frac{4+10-2}{3}\right)$, 즉 $(3, 4)$

**0505** $B(p, q)$, $C(r, s)$라 하면

변 AB의 중점이 $M(x_1, y_1)$이므로

$\frac{1+p}{2}=x_1$, $\frac{6+q}{2}=y_1$ …… ㉠

또, 변 AC의 중점이 $N(x_2, y_2)$이므로

$\frac{1+r}{2}=x_2$, $\frac{6+s}{2}=y_2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 $x_1+x_2=2$, $y_1+y_2=4$에 대입하면

$x_1+x_2=\frac{1+p}{2}+\frac{1+r}{2}=\frac{2+(p+r)}{2}=2$

$\therefore p+r=2$ …… ㉢

$y_1+y_2=\frac{6+q}{2}+\frac{6+s}{2}=\frac{12+(q+s)}{2}=4$

$\therefore q+s=-4$ …… ㉣

$A(1, 6)$이므로 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{1+p+r}{3}, \frac{6+q+s}{3}\right)$

이때 ㉢, ㉣에서 $\left(\frac{1+2}{3}, \frac{6-4}{3}\right)$, 즉 $\left(1, \frac{2}{3}\right)$이다. 답 ③

**0506** $B(a, b)$라 하면 변 AB의 중점의 좌표가 $(1, 1)$이므로

$\frac{-1+a}{2}=1$, $\frac{5+b}{2}=1$ $\therefore a=3$, $b=-3$

$\therefore B(3, -3)$

$C(c, d)$라 하면 변 BC의 중점의 좌표가 $(6, -6)$이므로

$\frac{3+c}{2}=6$, $\frac{-3+d}{2}=-6$ $\therefore c=9$, $d=-9$

$\therefore C(9, -9)$

$D(x, y)$라 하면 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\frac{-1+9}{2}=\frac{3+x}{2}$, $\frac{5-9}{2}=\frac{-3+y}{2}$

$\therefore x=5$, $y=-1$

$\therefore D(5, -1)$ 답 **(5, −1)**

**0507** 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로 중점의 $x$좌표는 $\frac{a+6}{2}=\frac{-3+b}{2}$ $\therefore b=a+9$ …… ㉠

또, $\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(-3-a)^2+(-1-8)^2=(6+3)^2+(-4+1)^2$

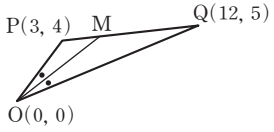
$a^2+6a=0$, $a(a+6)=0$

$\therefore a=-6$ ($\because a<0$)

$a=-6$을 ㉠에 대입하면 $b=3$

$\therefore a+b=-3$ 답 **−3**

**0508** $\angle POQ$의 이등분선과 $\overline{PQ}$의 교점을 M이라 하면 각의 이등분선의 성질에 의하여




$\overline{OP}:\overline{OQ}=\overline{PM}:\overline{MQ}$

이때 $\overline{OP}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overline{OQ}=\sqrt{12^2+5^2}=13$이므로

$\overline{PM}:\overline{MQ}=\overline{OP}:\overline{OQ}=5:13$

즉, 점 M은 $\overline{PQ}$를 $5:13$으로 내분하므로 점 M의 $x$좌표는

$\frac{b}{a}=\frac{5\times12+13\times3}{5+13}=\frac{11}{2}$

따라서 $a=2$, $b=11$이므로

$a+b=13$ 답 **13**

**0509** 높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같으므로 $\triangle ABD:\triangle ACD=p:q$에서

$\overline{BD}:\overline{CD}=p:q$

또한, $\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(-7-1)^2+(1-5)^2}=4\sqrt{5}$,

$\overline{AC}=\sqrt{(2-1)^2+(3-5)^2}=\sqrt{5}$이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=4\sqrt{5}:\sqrt{5}=4:1$

따라서 $p=4$, $q=1$이므로

$p-q=3$ 답 **3**

**0510** $\overline{AD}$는 $\angle A$의 외각의 이등분선이므로

$\overline{AO} : \overline{AB} = \overline{OD} : \overline{BD}$

이때 $\overline{AO} = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$,

$\overline{AB} = \sqrt{(2-3)^2+(-4-3)^2} = 5\sqrt{2}$

이므로

$\overline{OD} : \overline{BD} = \overline{AO} : \overline{AB} = 3\sqrt{2} : 5\sqrt{2} = 3 : 5$

따라서 점 D는 $\overline{OB}$를 3 : 5로 외분하는 점이므로

$a = \dfrac{3\times 2 - 5\times 0}{3-5} = -3$, $b = \dfrac{3\times(-4) - 5\times 0}{3-5} = 6$

$\therefore ab = -18$ 답 ②

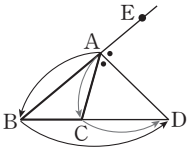
**개념 Plus**

**삼각형의 외각의 이등분선의 성질**

오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서 $\angle CAD = \angle EAD$이면

⇨ $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$

⇨ 점 D는 $\overline{BC}$를 $\overline{AB} : \overline{AC}$로 외분하는 점이다.




**0511** 두 점 A, B에서 같은 거리에 있는 점을 P$(x, y)$라 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$이므로

$(x+1)^2+(y-1)^2 = (x-4)^2+y^2$

$\therefore 5x - y - 7 = 0$ 답 $5x-y-7=0$

참고 두 점 A, B에서 같은 거리에 있는 점의 자취는 선분 AB의 수직이등분선이다.

**0512** B$(a, b)$라 하면 점 B는 직선 $3x-y+6=0$ 위의 점이므로 $3a-b+6=0$ …… ㉠

$\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표를 $(x, y)$라 하면

$x = \dfrac{2a+2}{3}$, $y = \dfrac{2b-3}{3}$

$\therefore a = \dfrac{3x-2}{2}$, $b = \dfrac{3y+3}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $3\times\dfrac{3x-2}{2} - \dfrac{3y+3}{2} + 6 = 0$

$\therefore 3x - y + 1 = 0$ 답 $3x-y+1=0$

## STEP 2 실전 마스터 본문 107~109쪽

**0513** A$(0, -1)$, P$(x-2, y)$, Q$(x, 0)$, B$(5, -3)$이라 하면

$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} = \overline{AP}$, $\sqrt{4+y^2} = \overline{PQ}$,

$\sqrt{(x-5)^2+9} = \overline{QB}$

이고 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB} \geq \overline{AB}$이므로

$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{4+y^2}+\sqrt{(x-5)^2+9}$

$= \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$

$\geq \overline{AB}$

$= \sqrt{5^2+(-3+1)^2} = \sqrt{29}$

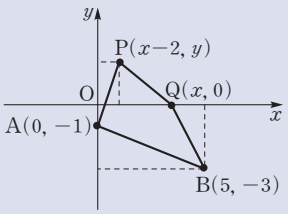
따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{29}$이다. 답 $\sqrt{29}$

**Lecture**

$2<x<5$, $y>0$일 때, 네 점 A, P, Q, B를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

즉, $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB} \geq \overline{AB}$

이때 $2<x<5$, $y>0$ 이외의 범위에서도 위의 부등식이 성립한다.




**0514** 이차함수 $y=x^2-ax$의 그래프와 직선 $y=x+1$의 서로 다른 두 교점을 P$(\alpha, \alpha+1)$, Q$(\beta, \beta+1)$이라 하면 $\alpha$, $\beta$는 이차방정식 $x^2-ax=x+1$, 즉 $x^2-(a+1)x-1=0$의 서로 다른 두 실근이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta = a+1$, $\alpha\beta = -1$

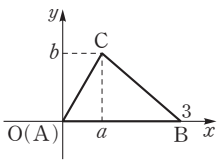
$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{(\beta+1)-(\alpha+1)\}^2}$

$= \sqrt{2(\beta-\alpha)^2} = \sqrt{2\{(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta\}}$

$= \sqrt{2\{(a+1)^2+4\}} = \sqrt{2(a+1)^2+8}$

따라서 $a=-1$일 때 $\overline{PQ}$의 길이는 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$로 최소이므로 두 교점 사이의 거리가 최소가 되도록 하는 실수 $a$의 값은 $-1$이다. 답 ④

**0515** 점 A를 원점, 직선 AB를 $x$축으로 하고 점 C가 제1사분면 위에 놓이도록 삼각형 ABC를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




이때 점 C의 좌표를 $(a, b)$라 하면

$\overline{CA} = \sqrt{a^2+b^2} = 2$에서

$a^2+b^2 = 4$ …… ㉠

또, B$(3, 0)$이므로 $\overline{BC} = \sqrt{(a-3)^2+b^2} = \sqrt{7}$에서

$a^2-6a+9+b^2 = 7$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4-6a+9=7$ $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$1+b^2=4$ $\therefore b=\sqrt{3}$ $(\because b>0)$

$\therefore$ C$(1, \sqrt{3})$

점 P는 변 AB 위의 점이므로 P$(k, 0)$ $(0 \leq k \leq 3)$이라 하면

$\overline{AP} = k$이고 $\overline{CP} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$이므로

$\sqrt{(k-1)^2+(-\sqrt{3})^2} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$

양변을 제곱하면

$k^2-2k+4=\frac{7}{2}$, $2k^2-4k+1=0$

$\therefore k=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

따라서 모든 $\overline{AP}$의 길이의 합은

$\frac{2-\sqrt{2}}{2}+\frac{2+\sqrt{2}}{2}=2$ 답 **2**

주의 $2k^2-4k+1=0$에서 근과 계수의 관계를 이용하여 바로 두 근의 합이 2라는 것을 알 수도 있으나 이와 같이 풀 때는 $k$에 대한 이차방정식의 두 근이 모두 $0\le k\le 3$을 만족시키는지 확인하는 것이 필요하다.

**516** 편의점 C는 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점에 위치하므로 $\overline{AC}=3\overline{BC}$

세 편의점을 수직선 위에 놓고 그 위치를 각각 $A(0)$, $B(2a)$, $C(3a)$ $(a>0)$라 하고, 본사의 위치를 $P(x)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=x^2+(x-2a)^2+(x-3a)^2$

$=3x^2-10ax+13a^2$

$=3\left(x-\frac{5}{3}a\right)^2+\frac{14}{3}a^2$

즉, $x=\frac{5}{3}a$일 때 배달 비용이 최소가 된다.

이때 $\overline{AP}=\left|\frac{5}{3}a-0\right|=\frac{5}{3}a$, $\overline{BP}=\left|\frac{5}{3}a-2a\right|=\frac{1}{3}a$,

$\overline{CP}=\left|\frac{5}{3}a-3a\right|=\frac{4}{3}a$이므로 본사의 위치 P는 $\overline{AB}$를 5 : 1로 내분하는 점, $\overline{BC}$를 1 : 4로 외분하는 점, $\overline{AC}$를 5 : 4로 내분하는 점이다. 답 ④

**517** A(0, 3), B(−5, −9), C(4, 0)이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(-5)^2+(-9-3)^2}=13$

$\overline{AC}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

$\therefore \overline{AD}=\overline{AC}=5$

이때 선분 AP와 선분 DC가 평행하므로

$\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{AB}:\overline{AD}=13:5$

따라서 점 P는 선분 BC를 13 : 5로 외분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$\left(\frac{13\times4-5\times(-5)}{13-5},\ \frac{13\times0-5\times(-9)}{13-5}\right)$, 즉 $\left(\frac{77}{8},\ \frac{45}{8}\right)$

답 ⑤

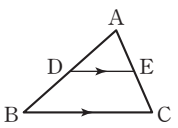
**개념 Plus**

**평행선 사이의 선분의 길이의 비**

△ABC에서 두 점 D, E가 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 위의 점일 때, $\overline{BC}/\!/\overline{DE}$이면

① $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}=\overline{BC}:\overline{DE}$

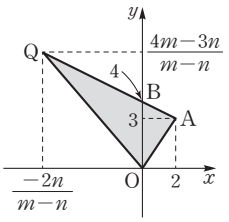
② $\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{EC}$




**518** 두 점 A(2, 3), B(0, 4)에 대하여 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{-2n}{m-n},\ \frac{4m-3n}{m-n}\right)$

이때 $m>n>0$이므로 삼각형 OAQ는 오른쪽 그림과 같다.




이때 삼각형 OAQ의 넓이가 16이고, 삼각형 OAB의 넓이가

$\frac{1}{2}\times4\times2=4$

이므로 삼각형 OBQ의 넓이는 16−4=12

삼각형 OBQ의 밑변을 선분 OB로 하면 $\overline{OB}=4$이므로 삼각형 OBQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times\left|\frac{-2n}{m-n}\right|=12$

즉, $\left|\frac{-2n}{m-n}\right|=6$에서 $\frac{-2n}{m-n}=-6$ $(\because m>n>0)$

$-2n=-6m+6n$ $\therefore 3m=4n$

$\therefore \frac{n}{m}=\frac{3}{4}$ 답 ④

다른풀이

삼각형 OAQ의 넓이가 16, 삼각형 OAB의 넓이가 4이므로 삼각형 OBQ의 넓이는 12이다.

두 삼각형 OAB와 OBQ의 밑변을 각각 선분 AB, 선분 BQ로 하면 두 삼각형의 높이가 같으므로 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

즉, $\overline{AB}:\overline{BQ}=4:12=1:3$이므로

$\overline{AQ}:\overline{BQ}=4:3=m:n$

$\therefore \frac{n}{m}=\frac{3}{4}$

**519** 세 점 A(a, 1), B(b, 7), C(−3, ab)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{a+b-3}{3},\ \frac{1+7+ab}{3}\right)$

이때 삼각형 ABC의 무게중심의 $y$좌표가 $x$좌표의 2배이므로

$\frac{a+b-3}{3}=k$, $\frac{1+7+ab}{3}=2k$라 하면

$a+b=3k+3$, $ab=6k-8$

$\therefore (a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

$=(3k+3)^2-4(6k-8)$

$=9k^2-6k+41$

즉, $9k^2-6k+41=44$에서 $9k^2-6k-3=0$

$3k^2-2k-1=0$, $(3k+1)(k-1)=0$

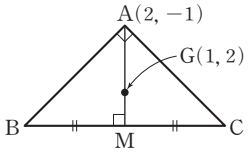
$\therefore k=-\frac{1}{3}$ 또는 $k=1$

이때 삼각형 ABC의 무게중심은 제1사분면 위의 점이므로

$k=1$

따라서 구하는 무게중심의 좌표는 (1, 2)이다. 답 **(1, 2)**

**0520** 삼각형 ABC의 무게중심을 G, 선분 BC의 중점을 M이라 하자.




$\overline{AG}:\overline{GM}=2:1$에서

$\overline{AG}:\overline{AM}=2:3$이고

$\overline{AG}=\sqrt{(1-2)^2+(2+1)^2}=\sqrt{10}$이므로

$\overline{AM}=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$

이때 $\angle B=\angle C=45^\circ$이므로 $\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}$

$\therefore \overline{BC}=\overline{BM}+\overline{CM}=2\overline{AM}=2\times\dfrac{3\sqrt{10}}{2}=3\sqrt{10}$

또, $\overline{AM}:\overline{AB}=1:\sqrt{2}$이므로 $\overline{AB}=\overline{AC}=3\sqrt{5}$

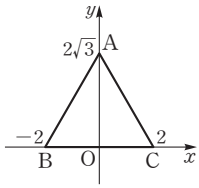
따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$3\sqrt{10}+6\sqrt{5}$ 답 ③

**0521** 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC의 높이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times4=2\sqrt{3}$

즉, 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 $x$축으로 하고 변 BC의 중점이 원점에 오도록 정삼각형 ABC를 좌표평면 위에 나타내면




$A(0, 2\sqrt{3})$, $B(-2, 0)$, $C(2, 0)$

좌표평면 위의 임의의 점 $P(x, y)$에 대하여

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=x^2+(y-2\sqrt{3})^2+(x+2)^2+y^2+(x-2)^2+y^2$

$=3x^2+3y^2-4\sqrt{3}y+20$

$=3x^2+3\left(y-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+16$

따라서 $x=0$, $y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$일 때, 즉 점 P의 좌표가 $\left(0, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$일 때 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값은 최소가 되고 최솟값은 16이다.

답 **16**

다른풀이

점 P가 $\triangle ABC$의 무게중심일 때, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값은 최소가 된다.

정삼각형의 높이를 $h$라 하면

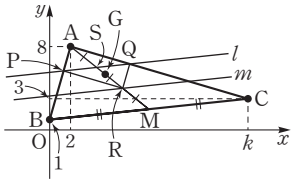
$\overline{PA}=\dfrac{2}{3}h$이고 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$이므로

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=3\overline{PA}^2=3\times\left(\dfrac{2}{3}h\right)^2=\dfrac{4}{3}h^2$

이때 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times4=2\sqrt{3}$이므로 $\dfrac{4}{3}h^2=\dfrac{4}{3}(2\sqrt{3})^2=16$

따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 최솟값은 16이다.

**0522** 다음 그림과 같이 직선 $l$이 선분 AM과 만나는 점을 S라 하고 삼각형 PQR의 무게중심을 G라 하면 점 S는 $\overline{PQ}$의 중점이므로 점 G는 $\overline{AM}$을 4 : 5로 내분하는 점이다.




점 M은 $\overline{BC}$의 중점이므로

$M\left(\dfrac{0+k}{2}, \dfrac{1+3}{2}\right)$, 즉 $M\left(\dfrac{k}{2}, 2\right)$

즉, $\overline{AM}$을 4 : 5로 내분하는 점 G의 좌표는

$\left(\dfrac{4\times\frac{k}{2}+5\times2}{4+5}, \dfrac{4\times2+5\times8}{4+5}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{2k+10}{9}, \dfrac{16}{3}\right)$

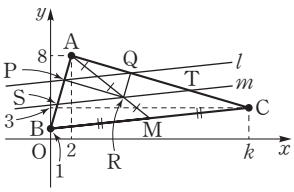
이때 점 G의 $x$좌표와 $y$좌표가 서로 같으므로

$\dfrac{2k+10}{9}=\dfrac{16}{3}$

$\therefore k=19$ 답 **19**

다른풀이

다음 그림과 같이 두 변 AB, AC가 직선 $m$과 만나는 점을 각각 S, T라 하면 세 점 P, Q, R는 각각 삼각형 AST의 세 변의 중점이므로 삼각형 PQR의 무게중심은 삼각형 AST의 무게중심과 일치한다.




점 S는 $\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$S\left(\dfrac{2\times0+1\times2}{2+1}, \dfrac{2\times1+1\times8}{2+1}\right)$, 즉 $S\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$

점 T는 $\overline{AC}$를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$T\left(\dfrac{2\times k+1\times2}{2+1}, \dfrac{2\times3+1\times8}{2+1}\right)$, 즉 $T\left(\dfrac{2k+2}{3}, \dfrac{14}{3}\right)$

즉, 삼각형 AST의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{2+\frac{2}{3}+\frac{2k+2}{3}}{3}, \dfrac{8+\frac{10}{3}+\frac{14}{3}}{3}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{2k+10}{9}, \dfrac{16}{3}\right)$

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는 $\left(\dfrac{2k+10}{9}, \dfrac{16}{3}\right)$이고 $x$좌표와 $y$좌표가 서로 같으므로

$\dfrac{2k+10}{9}=\dfrac{16}{3}$ $\therefore k=19$

**0523** $\overline{OC}$는 $\angle AOB$의 이등분선이므로

$\overline{OA}:\overline{OB}=\overline{AC}:\overline{BC}$

이때 $\overline{OA}=\sqrt{a^2+3^2}$, $\overline{OB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$이므로

$\overline{AC}:\overline{BC}=\sqrt{a^2+9}:5$

즉, 점 C는 $\overline{AB}$를 $\sqrt{a^2+9}:5$로 내분하는 점이므로

$C\left(\dfrac{3\sqrt{a^2+9}+5a}{\sqrt{a^2+9}+5}, \dfrac{4\sqrt{a^2+9}+15}{\sqrt{a^2+9}+5}\right)$

이때 점 C의 $x$좌표가 $\frac{9}{8}$이므로

$\frac{3\sqrt{a^2+9}+5a}{\sqrt{a^2+9}+5}=\frac{9}{8}$

$24\sqrt{a^2+9}+40a=9\sqrt{a^2+9}+45$

$3\sqrt{a^2+9}=9-8a$

양변을 제곱하면

$9a^2+81=64a^2-144a+81$

$55a^2-144a=0$

$a(55a-144)=0$ $\therefore a=0$ ($\because a$는 정수)

따라서 점 C의 $y$좌표는

$\frac{12+15}{3+5}=\frac{27}{8}$ 답 $\frac{27}{8}$

**524** 9 이하의 자연수 $n$에 대하여 점 $P_n$은 선분 AB를 $n:(10-n)$으로 내분하는 점이므로

$P_n\left(\frac{n\times 20+(10-n)\times(-20)}{n+(10-n)}, \frac{n\times 0+(10-n)\times 20}{n+(10-n)}\right)$

즉, $P_n(4n-20, 20-2n)$

$\therefore \overline{OP_n}=\sqrt{(4n-20)^2+(20-2n)^2}$

$=\sqrt{20n^2-240n+800}$

$=\sqrt{20(n-6)^2+80}$

한편, $1\le n\le 9$에서 $n$에 대한 이차함수 $y=20(n-6)^2+80$은 $n=6$일 때 최솟값 80을 갖고, $n=1$일 때 최댓값 580을 갖는다.

따라서 가장 짧은 선분은 $\overline{OP_6}$이므로 $a=\overline{OP_6}=\sqrt{80}$,

가장 긴 선분은 $\overline{OP_1}$이므로 $b=\overline{OP_1}=\sqrt{580}$

$\therefore a^2+b^2=80+580=660$ 답 **660**

**525** $\overline{AC}=\overline{BC}$이므로

$\sqrt{(a+16)^2+b^2}=\sqrt{a^2+(b-8)^2}$

양변을 제곱하면

$32a+256=-16b+64$, $2a+b=-12$

$\therefore b=-2a-12$ ····· ㉠

두 점 D, E는 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$를 각각 1 : 3으로 내분하는 점이므로

$D\left(\frac{a+3\times(-16)}{1+3}, \frac{b+3\times 0}{1+3}\right)$, 즉 $D\left(\frac{a}{4}-12, \frac{b}{4}\right)$

$E\left(\frac{a+3\times 0}{1+3}, \frac{b+3\times 8}{1+3}\right)$, 즉 $E\left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}+6\right)$

따라서 삼각형 CDE의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{a+\frac{a}{4}-12+\frac{a}{4}}{3}, \frac{b+\frac{b}{4}+\frac{b}{4}+6}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{a}{2}-4, \frac{b}{2}+2\right)$

이때 선분 CG의 길이가 $2\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{\left\{a-\left(\frac{a}{2}-4\right)\right\}^2+\left\{b-\left(\frac{b}{2}+2\right)\right\}^2}=2\sqrt{5}$

$\sqrt{\left(\frac{a}{2}+4\right)^2+\left(\frac{b}{2}-2\right)^2}=2\sqrt{5}$

이 식에 ㉠을 대입하면

$\sqrt{\left(\frac{a}{2}+4\right)^2+(-a-8)^2}=2\sqrt{5}$

양변을 제곱하면

$\frac{5}{4}a^2+20a+60=0$, $a^2+16a+48=0$

$(a+4)(a+12)=0$ $\therefore a=-4$ 또는 $a=-12$

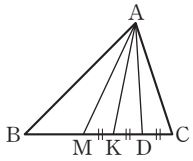
㉠에서 $a=-4$일 때 $b=-4$, $a=-12$일 때 $b=12$

이때 점 C는 제2사분면 위의 점이므로

$a=-12$, $b=12$

$\therefore 3a+b=-24$ 답 ③

**526** 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}=4\overline{CD}$인 변 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{BD}$의 중점을 M, $\overline{MD}$의 중점을 K라 하면




$\overline{MD}=2\overline{CD}$, $\overline{KD}=\overline{CD}$

삼각형 ABD에서 중선정리에 의하여

$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{MD}^2)$

$=2(\overline{AM}^2+4\overline{CD}^2)$ ····· ㉡

삼각형 AMD에서 중선정리에 의하여

$\overline{AM}^2+\overline{AD}^2=2(\overline{AK}^2+\overline{KD}^2)$

$=2(\overline{AK}^2+\overline{CD}^2)$ ····· ㉢

삼각형 AKC에서 중선정리에 의하여

$\overline{AK}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{CD}^2)$

$\therefore \overline{AK}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2-\overline{AC}^2$

이것을 ㉢에 대입하여 정리하면

$\overline{AM}^2=3\overline{AD}^2+6\overline{CD}^2-2\overline{AC}^2$ ····· ㉣

㉣을 ㉡에 대입하여 정리하면

$\overline{AB}^2+4\overline{AC}^2=5\overline{AD}^2+20\overline{CD}^2$

$=5(\overline{AD}^2+4\overline{DC}^2)$

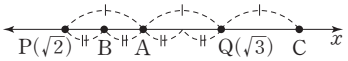
$\therefore k=5$ 답 **5**

**527** $A\left(\frac{1\times\sqrt{2}+1\times\sqrt{3}}{1+1}\right)$이므로 점 A는 선분 PQ의 중점이다.

$B\left(\frac{1\times\sqrt{3}+3\times\sqrt{2}}{1+3}\right)$이므로 점 B는 선분 PQ를 1 : 3으로 내분하는 점이다.

$C\left(\frac{3\times\sqrt{3}-1\times\sqrt{2}}{3-1}\right)$이므로 점 C는 선분 PQ를 3 : 1로 외분하는 점이다.

따라서 세 점 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같으므로 세 점의 위치를 왼쪽부터 순서대로 나열하면 B, A, C이다.




답 ③

**0528** $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$

$=\{(a-1)^2+(b-4)^2\}+\{(a+2)^2+(b+1)^2\}$

$\quad+\{(a-4)^2+(b+2)^2\}+\{(a-5)^2+(b-3)^2\}$

$=4a^2-16a+4b^2-8b+76$

$=4(a^2-4a+4)+4(b^2-2a+1)+56$

$=4(a-2)^2+4(b-1)^2+56$

이때 $a$, $b$가 모두 실수 이므로

$(a-2)^2\geq 0$, $(b-1)^2\geq 0$

따라서 $a=2$, $b=1$일 때 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$의 값이 최소가 되므로 점 P의 좌표는 (2, 1)이다. 답 **(2, 1)**

**0529** 삼각형 OAC의 넓이가 삼각형 OAB의 넓이의 3배이므로 점 B는 $\overline{AC}$를 1 : 2로 내분하는 점이다.

$C(a, b)$라 하면 $\frac{a-4}{3}=1$, $\frac{b+2}{3}=4$

$\therefore a=7$, $b=10$

$\therefore C(7, 10)$

또, 삼각형 DAC의 넓이가 삼각형 OAC의 넓이의 2배이므로 원점 O는 $\overline{AD}$의 중점이다.

$D(c, d)$라 하면 $\frac{-2+c}{2}=0$, $\frac{1+d}{2}=0$

$\therefore c=2$, $d=-1$

$\therefore D(2, -1)$

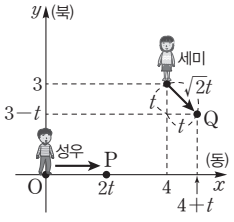
$\therefore \overline{CD}^2=(2-7)^2+(-1-10)^2=146$ 답 **146**

## STEP 3 상위권 마스터 본문 110~111쪽

**0530**

TIP 성우와 세미의 위치를 좌표평면 위에 나타내어 본다.

오른쪽 그림과 같이 성우의 처음 위치를 원점으로 하고, 동쪽을 $x$축의 양의 방향, 북쪽을 $y$축의 양의 방향으로 하는 좌표평면을 정하면 세미의 처음 위치의 좌표는 (4, 3)이다.




$t$초 후의 성우와 세미의 위치를 각각 P, Q라 하면 $P(2t, 0)$, $Q(4+t, 3-t)$이므로 두 사람 사이의 거리는

$\overline{PQ}=\sqrt{(4+t-2t)^2+(3-t)^2}$

$=\sqrt{2t^2-14t+25}$

$=\sqrt{2\left(t-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$

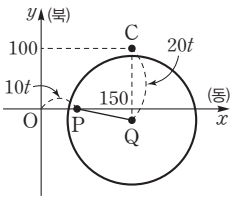
따라서 두 사람이 출발한 지 $\frac{7}{2}$초 후에 두 사람 사이의 거리는 최소가 되고, 그때의 거리의 최솟값은 $\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$(m)

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ m

**0531**

TIP 배가 태풍의 영향권 내에 있으려면 배와 태풍의 중심 사이의 거리가 100 km 이하이어야 한다.

오른쪽 그림과 같이 배의 현재 위치를 원점, 동쪽을 $x$축의 양의 방향, 북쪽을 $y$축의 양의 방향으로 하는 좌표평면을 정하고 태풍의 중심의 현재 위치를 C라 하면 C(150, 100)이다.




$t$시간 후의 배와 태풍의 중심의 위치를 각각 P, Q라 하면

$P(10t, 0)$, $Q(150, 100-20t)$

배가 태풍의 영향권 내에 있으려면 $\overline{PQ}\leq 100$이어야 하므로

$\sqrt{(150-10t)^2+(100-20t)^2}\leq 100$

양변을 제곱하면

$(10t-150)^2+(20t-100)^2\leq 10000$

$t^2-14t+45\leq 0$, $(t-5)(t-9)\leq 0$

$\therefore 5\leq t\leq 9$

즉, 배는 5시간 후에 태풍의 영향권 내에 진입하고 9시간 후에 태풍의 영향권에서 벗어난다.

따라서 배가 태풍의 영향권 내에서 항해하는 데 걸리는 시간은 4시간이다. 답 ①

**0532**

TIP 높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

삼각형 ABC에서 점 D는 $\overline{BC}$를 1 : 3으로 내분하므로

$\overline{BD}:\overline{DC}=1:3$

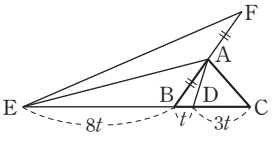
점 E는 $\overline{BC}$를 2 : 3으로 외분하므로

$\overline{EB}:\overline{EC}=2:3$ $\therefore \overline{EB}:\overline{BC}=2:1$

점 F는 $\overline{AB}$를 1 : 2로 외분하므로

$\overline{FA}:\overline{FB}=1:2$ $\therefore \overline{FA}:\overline{AB}=1:1$

즉, 삼각형 ABC와 세 점 D, E, F를 나타내면 오른쪽 그림과 같다. (단, $t$는 실수)




이때 $\overline{BD}:\overline{EB}=1:8$이므로

삼각형 AEB의 넓이는 삼각형 ABD의 넓이의 8배이다.

또, $\overline{BF}:\overline{AB}=2:1$이므로 삼각형 FEB의 넓이는 삼각형 AEB의 넓이의 2배이다.

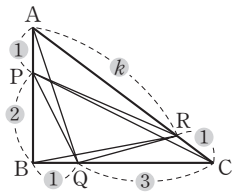
따라서 삼각형 FEB의 넓이는 삼각형 ABD의 넓이의 16배이므로

$k=16$ 답 **16**

## 533

TIP 선분의 길이의 비를 이용하여 각 삼각형의 넓이를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 선분 PC를 그으면 삼각형 APC에서




$\overline{AR} : \overline{RC} = k : 1$이므로

$\triangle APR = \frac{k}{k+1}\triangle APC$

삼각형 ABC에서

$\overline{AP} : \overline{PB} = 1 : 2$이므로

$\triangle APC = \frac{1}{3}\triangle ABC$

이때 삼각형 ABC의 넓이는 36이므로

$\triangle APR = \frac{k}{k+1}\times\frac{1}{3}\triangle ABC$

$= \frac{k}{k+1}\times\frac{1}{3}\times 36 = \frac{12k}{k+1}$

같은 방법으로 두 삼각형 PBQ, RQC의 넓이를 구하면

$\triangle PBQ = \frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\triangle ABC = \frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times 36 = 6$

$\triangle RQC = \frac{3}{4}\times\frac{1}{k+1}\triangle ABC = \frac{3}{4}\times\frac{1}{k+1}\times 36 = \frac{27}{k+1}$

이때 삼각형 PQR의 넓이는 15이므로

$\triangle PQR = \triangle ABC - (\triangle APR + \triangle PBQ + \triangle RQC)$에서

$15 = 36 - \left(\frac{12k}{k+1} + 6 + \frac{27}{k+1}\right)$

$\frac{12k+27}{k+1} = 15$, $12k+27 = 15k+15$

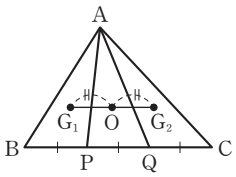
$\therefore k = 4$

답 4

## 534

TIP 두 삼각형 ABP, AQC의 무게중심을 각각 $G_1$, $G_2$라 하면 선분 $G_1G_2$의 중점은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치한다.

오른쪽 그림과 같이 두 삼각형 ABP, AQC의 무게중심을 각각 $G_1$, $G_2$라 하면 선분 $G_1G_2$의 중점은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치한다.




즉, 두 점 $G_1\left(\frac{16}{9}, -\frac{2}{9}\right)$, $G_2(\alpha, \beta)$에 대하여 $\overline{G_1G_2}$의 중점이 원점이므로

$\frac{\frac{16}{9}+\alpha}{2} = 0$, $\frac{-\frac{2}{9}+\beta}{2} = 0$ $\quad\therefore \alpha = -\frac{16}{9}$, $\beta = \frac{2}{9}$

$\therefore 9(\alpha+\beta) = 9\left(-\frac{16}{9}+\frac{2}{9}\right) = -14$

답 ②

다른풀이

두 점 B, C의 좌표를 각각 $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$라 하자.

삼각형 ABC의 무게중심은 원점이므로

$\frac{2+b_1+c_1}{3} = 0$, $\frac{1+b_2+c_2}{3} = 0$

$\therefore b_1+c_1 = -2$, $b_2+c_2 = -1$ …… ㉠

점 P는 $\overline{BC}$를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$P\left(\frac{c_1+2b_1}{3}, \frac{c_2+2b_2}{3}\right)$

삼각형 ABP의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{16}{9}, -\frac{2}{9}\right)$이므로

$\frac{2+b_1+\frac{c_1+2b_1}{3}}{3} = \frac{16}{9}$, $\frac{1+b_2+\frac{c_2+2b_2}{3}}{3} = -\frac{2}{9}$

$\therefore 5b_1+c_1 = 10$, $5b_2+c_2 = -5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$b_1 = 3$, $b_2 = -1$, $c_1 = -5$, $c_2 = 0$

$\therefore B(3, -1)$, $C(-5, 0)$

점 Q는 $\overline{BC}$를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$Q\left(\frac{2\times(-5)+1\times 3}{3}, \frac{2\times 0+1\times(-1)}{3}\right)$

즉, $Q\left(-\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

삼각형 AQC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{2-\frac{7}{3}-5}{3}, \frac{1-\frac{1}{3}+0}{3}\right)$, 즉 $\left(-\frac{16}{9}, \frac{2}{9}\right)$

따라서 $\alpha = -\frac{16}{9}$, $\beta = \frac{2}{9}$이므로

$9(\alpha+\beta) = -14$

## 535

TIP 선분 AB의 중점을 M이라 하면 삼각형 PAB에서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2 = 2(\overline{PM}^2+\overline{AM}^2)$이 성립함을 이용한다.

선분 AB의 중점을 M이라 하면

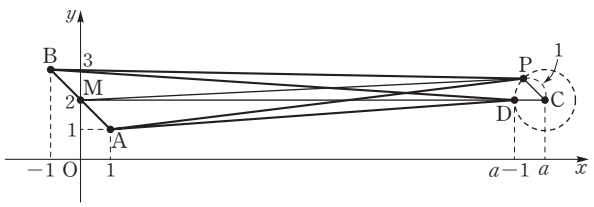
$M\left(\frac{1-1}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$, 즉 $M(0, 2)$

이때 중선정리에 의하여

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2 = 2(\overline{PM}^2+\overline{AM}^2)$

$= 2\overline{PM}^2+4$ ($\because \overline{AM}^2 = 2$)

즉, $\overline{PM}$의 길이가 최소일 때 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 값이 최소가 된다.




위의 그림과 같이 $\overline{PM}$의 길이가 최소가 되려면 점 P는 선분 MC 위에 있어야 한다.

$M(0, 2)$, $C(a, 2)$, $\overline{PC} = 1$이므로 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 D의 좌표는 $(a-1, 2)$

이때 삼각형 ABD의 무게중심의 좌표가 $(5, 2)$이므로 $x$좌표는

$\frac{1-1+a-1}{3} = 5$ $\quad\therefore a = 16$

답 16

**0536**

TIP 선분 AP의 내분점의 좌표를 구하고 점 P가 직선 $x-3y+3=0$ 위의 점임을 이용하여 도형 $l$의 방정식을 구한다.

점 $P(a, b)$는 직선 $x-3y+3=0$ 위의 점이므로

$a-3b+3=0$ …… ㉠

$\overline{AP}$를 $t:(1-t)$로 내분하는 점의 좌표를 $(x, y)$라 하면

$x=ta+3(1-t)$, $y=tb$

$\therefore a=\dfrac{x+3t-3}{t}$, $b=\dfrac{y}{t}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{x+3t-3}{t}-\dfrac{3y}{t}+3=0$

$\therefore y=\dfrac{1}{3}x+2t-1$

즉, 도형 $l$은 직선 $y=\dfrac{1}{3}x+2t-1$이다.

이때 도형 $l$과 이차함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프가 접하므로

이차방정식 $x^2-3x+2=\dfrac{1}{3}x+2t-1$, 즉

$3x^2-10x-6t+9=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-5)^2-3(-6t+9)=0$

$\therefore t=\dfrac{1}{9}$ 답 ⑤



# 11 직선의 방정식

## STEP 1 핵심기출 마스터

본문 113~116쪽

**0537** 꼭짓점 C의 좌표를 $(a, b)$라 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 G(0, 2)이므로

$\dfrac{-4+3+a}{3}=0$, $\dfrac{2+0+b}{3}=2$ $\therefore a=1$, $b=4$

따라서 두 점 C(1, 4), G(0, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$y=\dfrac{2-4}{0-1}x+2$ $\therefore y=2x+2$ 답 $\boldsymbol{y=2x+2}$

**0538** 직선 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1$의 $x$절편이 3이므로 P(3, 0)

직선 $\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{5}=2$, 즉 $\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{10}=1$의 $y$절편이 $-10$이므로

Q(0, $-10$)

따라서 직선 PQ의 방정식은 $\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{10}=1$ 답 ③

**0539** 점 $(-1, 2)$를 지나고 기울기가 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$인 직선의 방정식은 $y-2=\sqrt{3}(x+1)$

$\therefore \sqrt{3}x-y+2+\sqrt{3}=0$

따라서 $a=-1$, $b=2+\sqrt{3}$이므로

$a+b=1+\sqrt{3}$ 답 ④

**0540** 직선 AC의 방정식은 $y=\dfrac{5-0}{2-8}(x-8)$

$\therefore y=-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{20}{3}$ …… ㉠

직선 OB의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=5$, $y=\dfrac{5}{2}$

따라서 두 대각선의 교점의 좌표는 $\left(5, \dfrac{5}{2}\right)$이다. 답 $\boldsymbol{\left(5, \dfrac{5}{2}\right)}$

**0541** 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AC의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\dfrac{4-a}{2-1}=\dfrac{4-(-5)}{2-(-a)}$ …… ㉠

$(4-a)(2+a)=9$, $a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0$ $\therefore a=1$

㉠에서 직선 $l$은 기울기가 $\dfrac{4-1}{2-1}=3$이고 점 A(1, 1)을 지나므로 직선 $l$의 방정식은

$y-1=3(x-1)$ $\therefore y=3x-2$ 답 $\boldsymbol{y=3x-2}$

**542** 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있어야 하므로 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기가 같아야 한다.

$\frac{2-4}{k+1-(-1)}=\frac{-k-4}{11-(-1)}$

$-2\times12=(-k-4)(k+2)$, $k^2+6k-16=0$

$(k+8)(k-2)=0$ $\therefore k=-8$ 또는 $k=2$

따라서 모든 실수 $k$의 값의 합은

$-8+2=-6$ 답 ②

**543** 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2, -4)$이므로 이차함수의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

점 B의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면 이차함수의 그래프와 $x$축의 교점의 $x$좌표는 0, $a$이고, 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$\frac{0+a}{2}=2$, 즉 $a=4$ $\therefore$ B$(4, 0)$

이때 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하는 직선 $y=mx$는 선분 AB의 중점을 지나야 하므로 중점의 좌표를 구하면

$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-4+0}{2}\right)$, 즉 $(3, -2)$

$x=3$, $y=-2$를 $y=mx$에 대입하면

$-2=3m$ $\therefore m=-\frac{2}{3}$ 답 ④

다른풀이

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2, -4)$이므로 $f(x)=a(x-2)^2-4$라 하자.

이 이차함수의 그래프가 원점을 지나므로

$0=4a-4$ $\therefore a=1$

즉, $f(x)=(x-2)^2-4$이므로 $(x-2)^2-4=0$에서

$x^2-4x=0$, $x(x-4)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=4$

따라서 원점이 아닌 점 B의 좌표는 $(4, 0)$이다.

이때 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하는 직선 $y=mx$는 선분 AB의 중점을 지나야 하므로 중점의 좌표를 구하면

$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-4+0}{2}\right)$, 즉 $(3, -2)$

$x=3$, $y=-2$를 $y=mx$에 대입하면

$-2=3m$ $\therefore m=-\frac{2}{3}$

**544** 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 각 직사각형의 대각선의 교점을 모두 지나야 한다.

두 직사각형의 대각선의 교점의 좌표는 각각

$\left(\frac{-3-1}{2}, \frac{0-4}{2}\right)$, $\left(\frac{2+6}{2}, \frac{1+5}{2}\right)$

$\therefore (-2, -2)$, $(4, 3)$

이때 직선 $ax+by-2=0$이 두 점 $(-2, -2)$, $(4, 3)$을 지나야 하므로 $-2a-2b-2=0$, $4a+3b-2=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=-6$

$\therefore a-b=11$ 답 **11**

**545** 삼각형 ABD와 삼각형 ACD의 넓이의 비가 2 : 3이므로 점 D는 $\overline{BC}$를 2 : 3으로 내분하는 점이다.

D$\left(\frac{2\times7+3\times(-3)}{2+3}, \frac{2\times(-1)+3\times4}{2+3}\right)$, 즉 D$(1, 2)$

따라서 두 점 A$(3, 10)$, D$(1, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-10=\frac{2-10}{1-3}(x-3)$ $\therefore y=4x-2$

답 $y=4x-2$

**546** $ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $ac<0$, $bc>0$이므로 $ab<0$

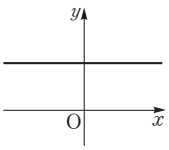
따라서 (기울기) $=-\frac{a}{b}>0$, ($y$절편) $=-\frac{c}{b}<0$이므로 직선의 개형은 ④이다. 답 ④

**547** $ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이면

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

ㄱ. $a=0$, $bc<0$이면 $-\frac{a}{b}=0$, $-\frac{c}{b}>0$

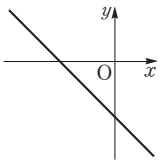
즉, 오른쪽 그림과 같이 제1, 2사분면을 지난다.




ㄴ. $ac>0$, $bc>0$에서 $ab>0$이므로

$-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}<0$

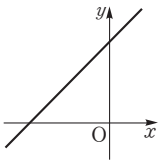
즉, 오른쪽 그림과 같이 제2, 3, 4사분면을 지난다.




ㄷ. $ab<0$, $ac>0$에서 $bc<0$이므로

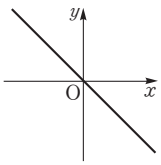
$-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}>0$

즉, 오른쪽 그림과 같이 제4사분면을 지나지 않는다.




ㄹ. $ab>0$, $c=0$이면 $-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}=0$

즉, 오른쪽 그림과 같이 제2, 4사분면을 지난다.




따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

**548** ㄱ. 주어진 직선의 방정식을 $k$에 대하여 정리하면

$(x+4y-2)k+(-x+4y-6)=0$

이 식이 $k$의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+4y-2=0$, $-x+4y-6=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=1$

따라서 직선 $l$은 $k$의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, 1)$을 지난다.

ㄴ. $k=1$이면 직선 $l$의 방정식은 $8y-8=0$ $\therefore y=1$

따라서 직선 $y=1$은 $y$축에 수직이다.

ㄷ. $(k-1)x+4(k+1)y-2k-6=0$에서 $k\neq-1$이면

$y=\frac{1-k}{4(k+1)}x+\frac{2k+6}{4(k+1)}$

이때 직선 $l$의 기울기가 $-\frac{1}{4}$이면

$\frac{1-k}{4(k+1)}=-\frac{1}{4}$, $-4(1-k)=4(k+1)$

$\therefore 0\times k=8$

이를 만족시키는 실수 $k$의 값은 존재하지 않으므로 직선 $l$은 기울기가 $-\frac{1}{4}$인 직선이 될 수 없다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

**0549** 직선 $5x+y-1=0$이 점 $(a, b)$를 지나므로

$5a+b-1=0$ $\therefore b=-5a+1$

$b=-5a+1$을 $2ax+by=4$에 대입하면

$2ax+(-5a+1)y=4$

이 식을 $a$에 대하여 정리하면

$(2x-5y)a+y-4=0$

이 식이 $a$의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x-5y=0$, $y-4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=10$, $y=4$

따라서 직선 $2ax+by=4$는 항상 점 $(10, 4)$를 지나므로

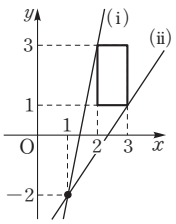
$p=10$, $q=4$ $\therefore pq=40$ 답 **40**

**0550** $kx-y-k-2=0$에서

$(x-1)k-(y+2)=0$ …… ㉠

직선 ㉠은 $k$의 값에 관계없이 항상 점 $(1, -2)$를 지난다.

오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 직사각형과 만나도록 움직여 보면




(i) 직선 ㉠이 점 $(2, 3)$을 지날 때

$k-5=0$ $\therefore k=5$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(3, 1)$을 지날 때

$2k-3=0$ $\therefore k=\frac{3}{2}$

(i), (ii)에서 직선 ㉠이 직사각형과 만나도록 하는 $k$의 값의 범위는

$\frac{3}{2}\leq k\leq 5$

따라서 $M=5$, $m=\frac{3}{2}$이므로

$Mm=\frac{15}{2}$ 답 $\frac{15}{2}$

**0551** $kx+y+3k-5=0$에서

$(x+3)k+(y-5)=0$ …… ㉠

직선 ㉠은 $k$의 값에 관계없이 항상 점 $(-3, 5)$를 지난다.

즉, 직선 ㉠이 점 A를 항상 지나므로 직선 ㉠이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 $\overline{BC}$의 중점 M$(-1, 1)$을 지나야 한다.

따라서 $2k-4=0$이므로 $k=2$ 답 **2**

**0552** 직선 $3x-ay+10=0$과 직선 $3x+(b-9)y-2=0$이 평행하므로

$\frac{3}{3}=\frac{-a}{b-9}\neq\frac{10}{-2}$, $-a=b-9$

$\therefore a+b=9$

또, 직선 $3x-ay+10=0$과 직선 $2x+by-6=0$이 수직이므로

$3\times2+(-a)\times b=0$

$\therefore ab=6$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=9^2-2\times6=69$ 답 **69**

**0553** 주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $ax+3y=5$와 직선 $2x-y=1$이 평행할 때

$\frac{a}{2}=\frac{3}{-1}\neq\frac{5}{1}$ $\therefore a=-6$

(ii) 직선 $ax+3y=5$와 직선 $x+y=2$가 평행할 때

$\frac{a}{1}=\frac{3}{1}\neq\frac{5}{2}$ $\therefore a=3$

(iii) 직선 $ax+3y=5$가 두 직선 $2x-y=1$, $x+y=2$의 교점 $(1, 1)$을 지날 때

$a+3=5$ $\therefore a=2$

(i), (ii), (iii)에서 모든 실수 $a$의 값의 합은

$-6+3+2=-1$ 답 ③

**0554** 직선 $x-3y-6=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x-2$의 기울기가 $\frac{1}{3}$이므로 직선 AH의 기울기는 $-3$이다.

또, 직선 AH는 점 A$(1, 5)$를 지나므로 직선 AH의 방정식은

$y-5=-3(x-1)$

$\therefore 3x+y-8=0$

$x-3y-6=0$, $3x+y-8=0$을 연립하여 풀면

$x=3$, $y=-1$

따라서 점 H의 좌표는 $(3, -1)$이다. 답 **(3, −1)**

**0555** $\angle OAB=\angle OCA$이므로

$\angle BAC=\angle OAB+\angle OAC=\angle OCA+\angle OAC=90^\circ$

즉, 두 직선 $l_1$, $l_2$는 서로 수직이다.

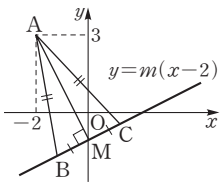
이때 직선 $l_1$의 기울기는 $\frac{0-2}{3-0}=-\frac{2}{3}$이므로 직선 $l_2$의 기울기는 $\frac{3}{2}$이다.

따라서 직선 $l_2$의 방정식은

$y=\frac{3}{2}(x-3)$

$\therefore y=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}$ 답 $y=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}$

**0556** $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하면 점 M은 직선 $y=m(x-2)$와 $y$축의 교점이므로 $M(0, -2m)$




삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로 두 선분 BC, AM은 서로 수직이다.

이때 직선 BC의 기울기가 $m$, 직선 AM의 기울기가 $\frac{-2m-3}{2}$이므로

$m\times\frac{-2m-3}{2}=-1,\ 2m^2+3m-2=0$

$(m+2)(2m-1)=0$

$\therefore m=\frac{1}{2}\ (\because m>0)$ 답 ③

**0557** $\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $\left(3, \frac{a+b}{2}\right)$

직선 $2x-y-5=0$이 이 점을 지나므로

$6-\frac{a+b}{2}-5=0 \qquad \therefore a+b=2$ …… ㉠

또, 직선 $2x-y-5=0$과 직선 AB는 수직이므로

$2\times\frac{b-a}{7-(-1)}=-1 \qquad \therefore b-a=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-1$

$\therefore ab=-3$ 답 **−3**

**0558** 직선 $x+2y-7=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$에 수직인 직선의 기울기는 2이므로 구하는 직선의 방정식을 $y=2x+a$, 즉 $2x-y+a=0$ ($a$는 상수)으로 놓을 수 있다.

원점과 이 직선 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{|a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5},\ |a|=5 \qquad \therefore a=\pm5$

따라서 제2사분면을 지나지 않는 직선의 방정식은 $y=2x-5$이다. 답 $y=2x-5$

**0559** 두 직선이 평행하므로

$\frac{1}{a}=\frac{1-a}{-2}\neq\frac{2a}{4-3a}$

$\frac{1}{a}=\frac{1-a}{-2}$에서 $-2=a(1-a)$

$a^2-a-2=0,\ (a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1\ (\because a<0)$

따라서 두 직선의 방정식은 $x+2y-2=0$, $x+2y-7=0$이므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $x+2y-2=0$ 위의 한 점 $(0, 1)$과 직선 $x+2y-7=0$ 사이의 거리와 같다.

$\therefore \frac{|2-7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

**0560** $\overline{AB}=\sqrt{(-4-2)^2+(-3-5)^2}=\sqrt{100}=10$

직선 AB의 방정식은

$y-5=\frac{-3-5}{-4-2}(x-2) \qquad \therefore 4x-3y+7=0$

점 C와 직선 AB 사이의 거리는

$\frac{|4a+7|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|4a+7|}{5}$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 11이므로

$\frac{1}{2}\times10\times\frac{|4a+7|}{5}=11$

$|4a+7|=11,\ 4a+7=\pm11$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$ 답 ①

**0561** $x+5y-6+k(x-y)=0$에서

$(1+k)x+(5-k)y-6=0$

원점과 이 직선 사이의 거리 $f(k)$는

$f(k)=\frac{|-6|}{\sqrt{(1+k)^2+(5-k)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2k^2-8k+26}}$

따라서 $\sqrt{2k^2-8k+26}=\sqrt{2(k-2)^2+18}$이 최소일 때, 즉 $k=2$일 때 $f(k)$가 최대이므로 구하는 최댓값은

$f(2)=\frac{6}{\sqrt{18}}=\frac{6}{3\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ 답 $\sqrt{2}$

**0562** 삼각형 OAB의 무게중심 G의 좌표는 $\left(\frac{0+8+7}{3}, \frac{0+4+a}{3}\right)$, 즉 $\left(5, \frac{4+a}{3}\right)$이므로

$b=\frac{4+a}{3}$ …… ㉠

한편, 직선 OA의 방정식은

$y=\frac{4-0}{8-0}x \qquad \therefore x-2y=0$

이때 점 $G(5, b)$와 직선 $x-2y=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{|5-2b|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5},\ |5-2b|=5$

$5-2b=\pm5 \qquad \therefore b=0$ 또는 $b=5$

$a>0$이므로 ㉠에서 $b>\frac{4}{3}$

따라서 $b=5$, $a=11$이므로 $a+b=16$ 답 ①

**0563** 두 직선 $x+2y+3=0$, $2x-y+3=0$이 이루는 각의 이등분선 위의 한 점의 좌표를 $(x, y)$라 하면 점 $(x, y)$에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|x+2y+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2x-y+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$

$x+2y+3=\pm(2x-y+3)$

$\therefore x-3y=0$ 또는 $3x+y+6=0$

이 중에서 기울기가 음수인 것은 $3x+y+6=0$이므로

$a=3,\ b=1 \qquad \therefore ab=3$ 답 ③

**0564** P$(x, y)$라 하면 $\overline{PR}=2\overline{PS}$이므로

$$\frac{|3x-4y-1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2\times\frac{|4x+3y-1|}{\sqrt{4^2+3^2}}$$

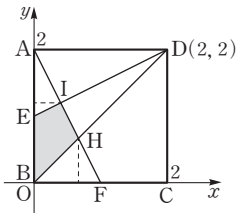
$3x-4y-1=\pm2(4x+3y-1)$

$\therefore 5x+10y-1=0$ 또는 $11x+2y-3=0$

답 $5x+10y-1=0$ 또는 $11x+2y-3=0$

## STEP 2 실전 마스터 본문 117~120쪽

**0565** 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 B를 원점으로 하고 직선 BC를 $x$축, 직선 AB를 $y$축으로 나타내면




E$(0, 1)$, F$(1, 0)$

이때 직선 BD의 방정식은

$y=x$

직선 ED의 방정식은

$y=\frac{2-1}{2-0}x+1$ $\therefore y=\frac{1}{2}x+1$

직선 AF의 방정식은

$y=\frac{0-2}{1-0}x+2$ $\therefore y=-2x+2$

점 H는 두 직선 $y=x$, $y=-2x+2$의 교점이므로

$\mathrm{H}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

점 I는 두 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$, $y=-2x+2$의 교점이므로

$\mathrm{I}\left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right)$

$\therefore \square\mathrm{BHIE}=\triangle\mathrm{ABF}-\triangle\mathrm{AEI}-\triangle\mathrm{BFH}$

$=\frac{1}{2}\times1\times2-\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{3}$

$=\frac{7}{15}$

답 $\frac{7}{15}$

**0566** 점 C는 직선 $x-2=0$ 위에 있으므로 C$(2, p)$라 하고, 점 B의 좌표를 $(q, r)$라 하자.

무게중심 G는 두 직선 $x-2y=0$, $x-2=0$의 교점이므로 점 G의 좌표는 $(2, 1)$

즉, $\frac{-2+q+2}{3}=2$, $\frac{-1+r+p}{3}=1$

$\therefore q=6$, $r+p=4$ …… ㉠

한편, 직선 BC의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로

$\frac{r-p}{6-2}=-\frac{1}{2}$ $\therefore r-p=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$r=1$, $p=3$ $\therefore$ B$(6, 1)$

따라서 직선 AB의 방정식은

$y+1=\frac{1-(-1)}{6-(-2)}(x+2)$

$\therefore y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$

답 $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$

**0567** $x^2+4xy+ay^2+3x+7y+2=0$의 좌변을 $x$에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+(4y+3)x+ay^2+7y+2=0$ …… ㉠

근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-(4y+3)\pm\sqrt{(4y+3)^2-4(ay^2+7y+2)}}{2}$$

이때 주어진 방정식이 두 직선을 나타내려면 근호 안의 식 $(4y+3)^2-4(ay^2+7y+2)$가 완전제곱식이 되어야 한다.

방정식 $(4y+3)^2-4(ay^2+7y+2)=0$, 즉

$(16-4a)y^2-4y+1=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(16-4a)=0$

$-12+4a=0$ $\therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$x^2+(4y+3)x+3y^2+7y+2=0$

$x^2+(4y+3)x+(y+2)(3y+1)=0$

$(x+y+2)(x+3y+1)=0$

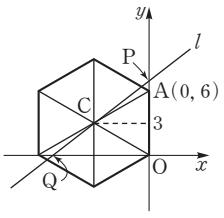
$\therefore x+y+2=0$ 또는 $x+3y+1=0$

이때 두 직선 $x+y+2=0$, $x+3y+1=0$의 기울기는 각각 $-1$, $-\frac{1}{3}$이므로 두 직선의 기울기의 곱은

$(-1)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

**0568** 직선 $l$이 정육각형의 넓이를 이등분하므로 직선 $l$은 정육각형의 마주 보는 꼭짓점을 연결한 세 대각선의 교점을 지난다.




한 변의 길이가 6인 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=3\sqrt{3}$이므로 정육각형의 마주 보는 꼭짓점을 연결한 세 대각선의 교점을 C라 하면

C$(-3\sqrt{3}, 3)$

즉, 직선 $l$은 두 점 P$(0, 7)$, C$(-3\sqrt{3}, 3)$을 지나므로 직선 $l$의 방정식은

$y-7=\frac{3-7}{-3\sqrt{3}}x$ $\therefore y=\frac{4\sqrt{3}}{9}x+7$

이 직선이 점 Q$(\sqrt{3}a, 0)$을 지나므로

$0=\frac{4\sqrt{3}}{9}\times\sqrt{3}a+7$ $\therefore a=-\frac{21}{4}$

답 $-\frac{21}{4}$

**569** $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

$bx+ay+c=0$에서 $y=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$

$bx+cy+a=0$에서 $y=-\frac{b}{c}x-\frac{a}{c}$

주어진 그림에서 세 직선 중 두 직선의 기울기는 음수이고

$-\frac{a}{b}$와 $-\frac{b}{a}$의 부호는 같으므로

$-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{b}{a}<0$, $-\frac{b}{c}>0$

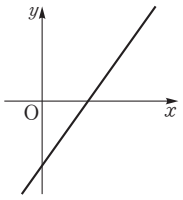
$\therefore ab>0$, $bc<0$ $\quad\therefore ac<0$

또, $cx+ay+b=0$에서 $y=-\frac{c}{a}x-\frac{b}{a}$

이때 $ab>0$, $ac<0$이므로

$-\frac{c}{a}>0$, $-\frac{b}{a}<0$

따라서 직선 $cx+ay+b=0$은 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지나지 않는다.




답 제2사분면

**570** 주어진 세 직선이 좌표평면을 6개의 영역으로 나누는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $x+ay=3$이 직선 $x-y=1$ 또는 $x+2y=4$와 평행할 때

$\frac{1}{1}=\frac{a}{-1}\neq\frac{3}{1}$ 또는 $\frac{1}{1}=\frac{a}{2}\neq\frac{3}{4}$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

(ii) 세 직선이 한 점에서 만날 때

직선 $x+ay=3$이 두 직선 $x-y=1$, $x+2y=4$의 교점 $(2, 1)$을 지나야 하므로

$2+a=3$ $\quad\therefore a=1$

(i), (ii)에서 모든 실수 $a$의 값의 합은

$-1+2+1=2$

답 ④

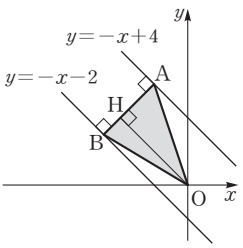
**571** 직선 $y=-x+4$ 위의 한 점 $(0, 4)$와 직선 $y=-x-2$, 즉 $x+y+2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$ $\quad\therefore \overline{AB}=3\sqrt{2}$

오른쪽 그림과 같이 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 OAB의 넓이가 12이므로

$\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\overline{OH}=12$

$\therefore \overline{OH}=4\sqrt{2}$




이때 직선 AB는 두 직선 $y=-x+4$, $y=-x-2$와 수직이므로 직선 AB의 방정식을 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ ($k$는 상수)으로 놓을 수 있다.

이 직선과 원점 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$이므로

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=4\sqrt{2}$ $\quad\therefore k=8$ ($\because k>0$)

따라서 직선 AB의 방정식은

$y=x+8$

답 $y=x+8$

**572** $x+\frac{y}{a}=\frac{1}{a^2}$에서 $a^2x+ay-1=0$ …… ㉠

$x-\frac{y}{a}=\frac{1}{a^2}$에서 $a^2x-ay-1=0$ …… ㉡

ㄱ. ㉠, ㉡에서 $\frac{a^2}{a^2}\neq\frac{a}{-a}$, 즉 $1\neq-1$이므로 두 직선은 만난다.

ㄴ. 두 직선이 수직이려면 $a^2\times a^2+a\times(-a)=0$이어야 한다.

$a^4-a^2=0$, $a^2(a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a\geq1$)

따라서 두 직선은 $a=1$일 때만 서로 수직이다.

ㄷ. $d_1=\frac{|-1|}{\sqrt{(a^2)^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^4+a^2}}$,

$d_2=\frac{|-1|}{\sqrt{(a^2)^2+(-a)^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^4+a^2}}$

이므로

$d_1d_2=\frac{1}{\sqrt{a^4+a^2}}\times\frac{1}{\sqrt{a^4+a^2}}=\frac{1}{a^4+a^2}$

$a^2=t$라 하면 $t\geq1$이므로 $a^4+a^2=t^2+t\geq2$

$\therefore d_1d_2=\frac{1}{a^4+a^2}\leq\frac{1}{2}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

**573** ㄱ. $t=1$일 때, 점 P의 좌표는 $(1, 0)$이므로 직선 AP의 기울기는 $\frac{0-1}{1-0}=-1$이다.

이때 직선 AP와 직선 $l$이 수직이므로 직선 $l$의 기울기는 1이다.

ㄴ. 직선 AP의 기울기는 $\frac{0-1}{t-0}=-\frac{1}{t}$이므로 직선 $l$의 기울기는 $t$이고, 직선 $l$이 점 $P(t, 0)$을 지나므로 직선 $l$의 방정식은 $y=t(x-t)$ …… ㉠

직선 $l$이 점 $(3, 2)$를 지나므로 ㉠에 $x=3$, $y=2$를 대입하면

$2=t(3-t)$, $t^2-3t+2=0$

$(t-1)(t-2)=0$ $\quad\therefore t=1$ 또는 $t=2$

즉, 점 $(3, 2)$를 지나는 직선 $l$의 개수는 2이다.

ㄷ. 부등식 $y\leq ax^2$에 ㉠을 대입하면

$t(x-t)\leq ax^2$

$\therefore ax^2-tx+t^2\geq0$ …… ㉡

부등식 ㉡이 모든 실수 $x$에 대하여 성립하므로 $a>0$이고, 이차방정식 $ax^2-tx+t^2=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=t^2-4at^2=t^2(1-4a)\leq0$

$t^2>0$이므로

$1-4a\leq0$ $\quad\therefore a\geq\frac{1}{4}$

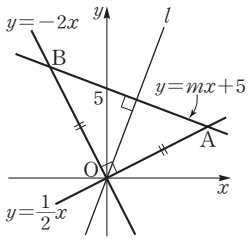
즉, 실수 $a$의 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

**574** 두 직선 $y=-2x$, $y=\frac{1}{2}x$의 기울기의 곱이 $-1$이므로 두 직선은 서로 수직이다.

즉, 직선 $y=mx+5$가 두 직선 $y=\frac{1}{2}x$, $y=-2x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하면 $\triangle AOB$는 $\angle AOB=90^\circ$인 직각이등변삼각형이다.




위의 그림과 같이 원점을 지나고 $\angle AOB$를 이등분하는 직선을 $l$이라 하면 직선 $l$은 직선 $y=mx+5$와 수직이고, 직선 $l$ 위의 점 $(x, y)$에서 두 직선 $y=-2x$, 즉 $2x+y=0$과 $y=\frac{1}{2}x$, 즉 $x-2y=0$까지의 거리는 같다.

$\frac{|2x+y|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|x-2y|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$에서

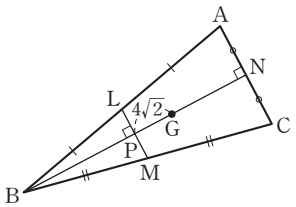
$|2x+y|=|x-2y|$, $2x+y=\pm(x-2y)$

$\therefore y=-\frac{1}{3}x$ 또는 $y=3x$

그런데 $m<0$에서 직선 $l$의 기울기가 양수이므로

$l : y=3x$ $\quad\therefore m=-\frac{1}{3}$ 답 ①

**575**




직선 BN과 직선 LM의 교점을 P라 할 때, 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의하여 직선 LM과 직선 AC는 평행하므로 직선 BN과 직선 AC는 서로 수직이다.

즉, 직선 BN이 선분 AC의 수직이등분선이므로 점 P는 선분 LM의 중점이다.

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{2+4}{2}, \frac{1-1}{2}\right)$, 즉 $(3, 0)$

$\triangle ABC$의 무게중심 G에 대하여

$\overline{BG} : \overline{GN}=2 : 1$이고 $\overline{BP}=\overline{NP}$이므로

$(\overline{NP}+4\sqrt{2}) : (\overline{NP}-4\sqrt{2})=2 : 1$

$\therefore \overline{NP}=12\sqrt{2}$

이때 $\overline{NP}^2=(a-3)^2+b^2$이므로

$(a-3)^2+b^2=(12\sqrt{2})^2$ ····· ㉠

한편, 직선 LM과 직선 NP는 서로 수직이므로

$\frac{-1-1}{4-2}\times\frac{b}{a-3}=-1$ $\quad\therefore b=a-3$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(a-3)^2+(a-3)^2=(12\sqrt{2})^2$, $(a-3)^2=144$

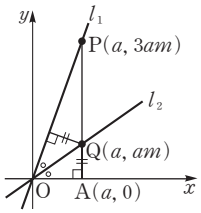
$a-3=\pm12$ $\quad\therefore a=15$ 또는 $a=-9$

이때 무게중심 G가 제1사분면 위에 있으므로

$a=15$, $b=12$ $(\because$ ㉡$)$

$\therefore ab=180$ 답 ⑤

**576** 직선 $l_2$의 방정식을 $y=mx$ $(m>0)$라 하면 직선 $l_1$의 방정식은 $y=3mx$




오른쪽 그림과 같이 $x$축 위의 한 점 $A(a, 0)$ $(a>0)$을 잡고 직선 $x=a$와 두 직선 $l_1$, $l_2$가 만나는 점을 각각 P, Q라 하면

$P(a, 3am)$, $Q(a, am)$

이때 직선 $l_2$는 직선 $l_1$과 $x$축이 이루는 각의 이등분선이므로 점 Q에서 직선 $l_1$과 $x$축에 이르는 거리는 같다.

즉, 점 $Q(a, am)$에서 두 직선 $3mx-y=0$, $y=0$에 이르는 거리가 같으므로

$\frac{|3am-am|}{\sqrt{(3m)^2+(-1)^2}}=am$, $\sqrt{9m^2+1}=2$

양변을 제곱하면

$9m^2+1=4$, $m^2=\frac{1}{3}$ $\quad\therefore m=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $(\because m>0)$

따라서 직선 $l_1$의 기울기는

$3m=3\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$ 답 ⑤

다른풀이

$\triangle OAP$에서 $\overline{OQ}$는 $\angle AOP$의 이등분선이므로

$\overline{OA} : \overline{OP}=\overline{AQ} : \overline{PQ}$

$a : \sqrt{a^2+(3am)^2}=am : 2am$

$1 : \sqrt{1+9m^2}=1 : 2$, $\sqrt{1+9m^2}=2$

양변을 제곱하면

$1+9m^2=4$, $m^2=\frac{1}{3}$ $\quad\therefore m=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $(\because m>0)$

따라서 직선 $l_1$의 기울기는 $3m=3\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$

**577** $\overline{AB}=\sqrt{(1-0)^2+(1+3)^2}=\sqrt{17}$

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$y+3=\frac{1+3}{1-0}x$ $\quad\therefore 4x-y-3=0$

점 $C(5, 2)$에서 직선 $4x-y-3=0$에 이르는 거리는

$\frac{|20-2-3|}{\sqrt{16+1}}=\frac{15}{\sqrt{17}}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\sqrt{17}\times\frac{15}{\sqrt{17}}=\frac{15}{2}$

또, 삼각형 ABC의 무게중심 G는

$G\left(\frac{1+0+5}{3}, \frac{1-3+2}{3}\right)$, 즉 G(2, 0)이고

선분 BC를 2 : 1로 외분하는 점 D는

$D\left(\frac{2\times5-1\times0}{2-1}, \frac{2\times2-1\times(-3)}{2-1}\right)$, 즉 D(10, 7)

이므로 두 점 G, D를 지나는 직선의 방정식은

$y-0=\frac{7-0}{10-2}(x-2)$ $\therefore 7x-8y-14=0$

점 C(5, 2)에서 직선 $7x-8y-14=0$에 이르는 거리는

$\frac{|35-16-14|}{\sqrt{49+64}}=\frac{5}{\sqrt{113}}$

이때 $\overline{GP}=a$라 하면 $\triangle GCP=\frac{1}{5}\triangle ABC$에서

$\frac{1}{2}\times a\times\frac{5}{\sqrt{113}}=\frac{1}{5}\times\frac{15}{2}$ $\therefore a=\frac{3\sqrt{113}}{5}$

$\overline{GD}=\sqrt{(10-2)^2+(7-0)^2}=\sqrt{113}$이므로

$\overline{GP}:\overline{PD}=3:2$, 즉 점 P는 $\overline{GD}$를 3 : 2로 내분하는 점이다.

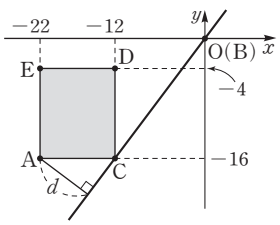
따라서 점 P의 좌표는

$\left(\frac{3\times10+2\times2}{3+2}, \frac{3\times7+2\times0}{3+2}\right)$, 즉 $\left(\frac{34}{5}, \frac{21}{5}\right)$

$\therefore a=\frac{34}{5}, b=\frac{21}{5}$

$\therefore a+b=11$ 답 **11**

**0578** 오른쪽 그림과 같이 B지점을 원점으로 하여 매점을 좌표평면 위에 나타내면 A지점의 좌표는 (−22, −16)이다.



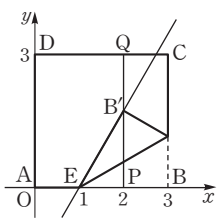

A지점에 있는 사람이 B지점에 있는 식수대를 보기 위해 이동해야 하는 거리의 최솟값은 점 A와 직선 OC 사이의 거리이다.

이때 직선 OC의 방정식은 $4x-3y=0$이므로

점 A(−22, −16)과 직선 OC 사이의 거리는

$\frac{|-88+48|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{40}{5}=8(\text{m})$ 답 **8**

**0579** 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 A를 원점으로 하고 직선 AB를 $x$축, 직선 AD를 $y$축으로 나타내면




$\overline{EB'}=2$이므로

$\overline{B'P}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

따라서 B′(2, $\sqrt{3}$)이므로 직선 EB′의 방정식은

$y=\frac{\sqrt{3}-0}{2-1}(x-1)$ $\therefore \sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$

세 점 B(3, 0), C(3, 3), D(0, 3)과 직선 $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$ 사이의 거리를 각각 $d_1$, $d_2$, $d_3$이라 하면

$d_1=\frac{|3\sqrt{3}-\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}$

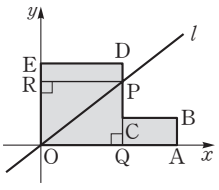
$d_2=\frac{|3\sqrt{3}-3-\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$

$d_3=\frac{|-3-\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

$\therefore d_1+d_2+d_3=\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}-3}{2}+\frac{3+\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

답 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

**0580** 직선 $l$과 선분 CD의 교점을 P라 하고 점 P에서 $x$축, $y$축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하면 삼각형 OQP의 넓이와 삼각형 OPR의 넓이가 서로 같으므로 사각형 ABCQ의 넓이와 사각형 DERP의 넓이가 서로 같다.




즉, $3\times\overline{ER}=2\times1$에서 $\overline{ER}=\frac{2}{3}$이므로 $P\left(3, \frac{7}{3}\right)$

따라서 직선 $l$의 기울기는 $\frac{\frac{7}{3}-0}{3-0}=\frac{7}{9}$이므로 $p=9$, $q=7$

$\therefore p+q=16$ 답 ②

**0581** 점 P에서 직선 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 $\overline{AD}$ 위에 있으므로 $\overline{PH}$가 구하는 최솟값이다.

즉, 직선 AD의 방정식은 $3x+2y-6=0$이므로

$\overline{PH}=\frac{|3\times4+2\times3-6|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{12}{\sqrt{13}}=\frac{12\sqrt{13}}{13}$

$\therefore m=\frac{12\sqrt{13}}{13}$

점 P에서 마름모 ABCD 위의 점까지의 거리의 최댓값은 점 P에서 선분 BC 위의 점까지의 거리의 최댓값과 같다. 이때

$\overline{PB}=\sqrt{\{4-(-2)\}^2+(3-0)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$,

$\overline{PC}=\sqrt{(4-0)^2+\{3-(-3)\}^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

이므로 $M=2\sqrt{13}$

$\therefore Mm=2\sqrt{13}\times\frac{12\sqrt{13}}{13}=24$ 답 **24**

**0582** 직선 $y=x+k$가 $y$축과 만나는 점을 P라 하면 P(0, $k$)

직선 AB의 방정식은 $y=-\frac{2}{3}x+6$이므로 직선 AB와 직선 $y=x+k$의 교점을 Q라 하면 $Q\left(\frac{18-3k}{5}, \frac{18+2k}{5}\right)$

따라서 삼각형 PAQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(6-k)\times\frac{18-3k}{5}=\frac{3}{10}(6-k)^2$

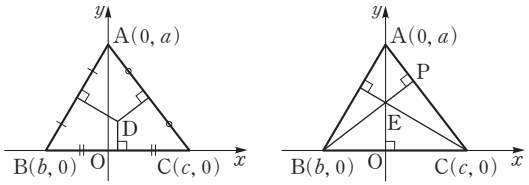
한편, 삼각형 OAB의 넓이는 18이므로

$\frac{3}{10}(6-k)^2=9 \qquad \therefore k=6\pm\sqrt{30}$

그런데 직선 $y=x+k$가 두 점 A, B 사이를 지나야 하므로

$0<k<6 \qquad \therefore k=6-\sqrt{30}$ 답 $6-\sqrt{30}$

## 583




위의 그림과 같이 좌표평면 위에 세 점 $A(0, a)$, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 만들면 직선 AB의 기울기는 $-\frac{a}{b}$이고 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)$이므로 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 $\frac{b}{a}$이고 점 $\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)$를 지나는 직선이다.

즉, $y=\frac{b}{a}\left(x-\frac{b}{2}\right)+\frac{a}{2}$이므로 이를 정리하면 선분 AB의 수직이등분선의 방정식은 $y=\frac{b}{a}x+\boxed{\frac{a^2-b^2}{2a}}$이고 선분 BC의 수직이등분선의 방정식은 $x=\frac{b+c}{2}$이므로 삼각형 ABC의 세 변의 수직이등분선의 교점 D는 두 직선 $y=\frac{b}{a}x+\frac{a^2-b^2}{2a}$, $x=\frac{b+c}{2}$의 교점이므로 $D\left(\frac{b+c}{2}, \boxed{\frac{a^2+bc}{2a}}\right)$이다.

또, 점 B에서 대변 AC에 내린 수선의 발을 P라 하면 직선 BP는 직선 AC와 수직이고 직선 AC의 기울기가 $-\frac{a}{c}$이므로 직선 BP는 기울기가 $\frac{c}{a}$이고 점 $(b, 0)$을 지나는 직선이다.

따라서 직선 BP의 방정식은 $y=\frac{c}{a}x-\frac{bc}{a}$이고 $y$축은 점 A에서 대변 BC에 그은 수선이므로 삼각형 ABC의 세 꼭짓점에서 각각의 대변에 그은 수선의 교점 E는 두 직선 $y=\frac{c}{a}x-\frac{bc}{a}$, $x=0$의 교점이다.

$\therefore E\left(0, -\frac{bc}{a}\right)$

또, 삼각형 ABC의 무게중심 F의 좌표는 $\left(\frac{b+c}{3}, \frac{a}{3}\right)$이다.

이때 직선 DF의 기울기는 $\frac{\frac{a^2+bc}{2a}-\frac{a}{3}}{\frac{b+c}{2}-\frac{b+c}{3}}=\boxed{\frac{a^2+3bc}{a(b+c)}}$이고

직선 EF의 기울기는 $\frac{\frac{a}{3}-\left(-\frac{bc}{a}\right)}{\frac{b+c}{3}-0}=\boxed{\frac{a^2+3bc}{a(b+c)}}$이므로 서로 같다.

따라서 세 점 D, E, F는 한 직선 위에 있다. 답 ①

# STEP 3 상위권 마스터

본문 121쪽

## 584

TIP 사각형 OABC의 두 대각선의 교점을 이용하여 $\overline{PO}+\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$가 최소가 되는 점 P의 좌표를 구한다.

선분 OB와 선분 AC의 교점을 P′이라 하면

$\overline{OP}+\overline{BP}\geq\overline{OB}=\overline{OP'}+\overline{BP'}$

$\overline{AP}+\overline{CP}\geq\overline{AC}=\overline{AP'}+\overline{CP'}$

따라서 $\overline{PO}+\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는 사각형 OABC의 두 대각선 OB, AC의 교점이다.

두 점 O, B를 지나는 직선의 방정식은

$y=x$ …… ㉠

두 점 A, C를 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1 \qquad \therefore y=-3x+6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{3}{2}$이므로

$a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{3}{2}$

$\therefore y=mx-ma+b+k=m(x-a)+b+k$

$=m\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}+k$

이 직선은 기울기 $m$의 값에 관계없이 점 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}+k\right)$를 지난다.

따라서 원점에서 직선 $y=m\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}+k$까지의 거리가 최대가 되도록 하는 $m$의 값은 $-\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+k}$이고 이 값이 $-\frac{1}{2}$이므로

$-\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+k}=-\frac{1}{2}$에서 $k=\frac{3}{2}$

$\therefore a+b+2k=6$ 답 6

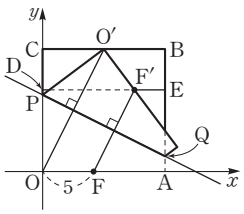
참고 점 $A(\alpha, \beta)$를 지나는 직선이 원점 O로부터 가장 멀리 떨어져 있기 위해서는 직선 OA에 수직이어야 하므로 기울기가 $-\frac{\alpha}{\beta}$이어야 한다.

## 585

TIP 두 직선 OO′과 FF′이 직선 PQ와 수직임을 이용한다.

좌표평면 위의 점 O, A, B, C, F의 좌표는 각각 $(0, 0)$, $(12, 0)$, $(12, 12)$, $(0, 12)$, $(5, 0)$이다.

점 O′은 선분 BC 위의 점이므로 점 O′의 좌표를 $(a, 12)$ $(0\leq a\leq 12)$라 할 수 있다.




또, 점 F′은 선분 DE 위의 점이고, 두 점 D, E는 각각 두 선분 OC, AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로 점 F′의 좌표를 $(b, 8)$ $(0\leq b\leq 12)$이라 할 수 있다.

직선 OO′과 직선 FF′은 모두 직선 PQ와 수직이므로 직선 OO′과 직선 FF′은 서로 평행하다.

따라서 두 직선의 기울기가 같으므로

$\frac{12-0}{a-0}=\frac{8-0}{b-5}$

$\therefore 2a=3b-15$ …… ㉠

또, $\overline{O'F'}=\overline{OF}=5$이므로

$\sqrt{(b-a)^2+(8-12)^2}=5$

$\therefore (b-a)^2=9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=6$, $b=9$ ($\because 0\le a\le 12$, $0\le b\le 12$)

직선 PQ는 선분 OO′의 중점 (3, 6)과 선분 FF′의 중점 (7, 4)를 지나므로 직선 PQ의 방정식은

$y-6=\frac{6-4}{3-7}(x-3)$

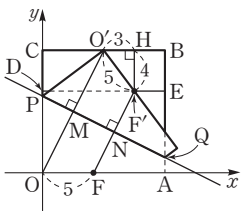
$\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}$

따라서 $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{15}{2}$이므로

$m+n=7$ 답 ⑤

**다른풀이**

좌표평면 위의 점 O, A, B, C, F의 좌표는 각각 (0, 0), (12, 0), (12, 12), (0, 12), (5, 0)이다.




점 O′은 선분 BC 위의 점이므로 점 O′의 좌표를 $(a, 12)$ $(0\le a\le 12)$라 할 수 있다.

점 F′에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{O'F'}=\overline{OF}=5$이고 $\overline{HF'}=4$이므로

$\overline{O'H}=\sqrt{\overline{O'F'}^2-\overline{HF'}^2}=3$

따라서 점 F′의 좌표를 $(a+3, 8)$이라 할 수 있다.

선분 OO′의 중점을 M, 선분 FF′의 중점을 N이라 하면

$M\left(\frac{a}{2}, 6\right)$, $N\left(\frac{a+8}{2}, 4\right)$

이고, 두 점 M, N은 직선 PQ 위의 점이므로 직선 PQ의 기울기는

$\frac{4-6}{\frac{a+8}{2}-\frac{a}{2}}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

직선 OO′과 직선 PQ는 서로 수직이므로 직선 OO′의 기울기는 2이다.

$\frac{12-0}{a-0}=\frac{12}{a}=2$에서 $a=6$

$\therefore M(3, 6)$

따라서 직선 PQ의 방정식은

$y-6=-\frac{1}{2}(x-3)$ $\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}$

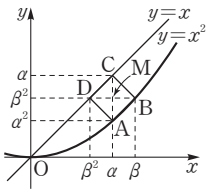
즉, $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{15}{2}$이므로

$m+n=7$

## 586

TIP 정사각형 ABCD에서 대변은 평행하고, 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분함을 이용한다.

점 A의 좌표를 $(\alpha, \alpha^2)$, 점 B의 좌표를 $(\beta, \beta^2)$이라 하면 사각형 ABCD는 정사각형이므로 점 C의 좌표는 $(\alpha, \alpha)$, 점 D의 좌표는 $(\beta^2, \beta^2)$이다.




직선 AB와 직선 CD의 기울기가 같으므로

$\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}=1$, $\alpha+\beta=1$ ($\because \alpha\ne\beta$)

$\therefore \alpha=1-\beta$ …… ㉠

이때 사각형 ABCD의 두 대각선 BD와 AC의 교점을 M이라 하면 사각형 ABCD는 정사각형이므로 $\overline{BD}=2\overline{BM}$이다. 즉,

$\beta-\beta^2=2(\beta-\alpha)$, $\beta^2+\beta-2\alpha=0$

이 식에 ㉠을 대입하면

$\beta^2+3\beta-2=0$ $\therefore \beta=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ ($\because \beta>0$)

정사각형 ABCD의 대각선의 길이는

$\beta-\beta^2=\beta(1-\beta)=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\times\frac{5-\sqrt{17}}{2}$

$=2\sqrt{17}-8$

따라서 $a=17$, $b=-8$이므로

$a+b=9$ 답 9

# 12 원의 방정식

## STEP 1 핵심기출 마스터

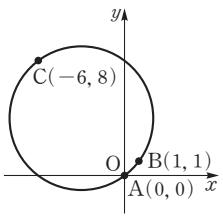
본문 123~127쪽

**0587** 원의 중심의 좌표를 $(a, a+1)$, 반지름의 길이를 $r$라 하면 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-a-1)^2=r^2$
이 원이 점 $(1, 6)$을 지나므로
$(1-a)^2+(5-a)^2=r^2$ …… ㉠
또, 이 원이 점 $(-3, 2)$를 지나므로
$(-3-a)^2+(1-a)^2=r^2$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=1$, $r^2=4^2$
따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 4이다. 답 ⑤

**0588** $\overline{AB}$의 중점이 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 중심이므로
$a=\frac{2+(-4)}{2}=-1$, $b=\frac{-3+1}{2}=-1$
또, $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는
$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{\{2-(-4)\}^2+(-3-1)^2}=\sqrt{13}$
즉, $r=\sqrt{13}$이므로 $r^2=13$
$\therefore ab+r^2=(-1)\times(-1)+13=14$ 답 **14**

**0589** 선분 AB를 외분하는 점 C의 좌표를 $(x, y)$라 하면
$x=\frac{3\times2-2\times1}{3-2}=4$, $y=\frac{3\times1-2\times3}{3-2}=-3$
이므로 C$(4, -3)$
선분 BC의 중점이 선분 BC를 지름으로 하는 원의 중심이므로
$a=\frac{2+4}{2}=3$, $b=\frac{1+(-3)}{2}=-1$
$\therefore a+b=2$ 답 ②

**0590** A학교를 원점으로 하고, 두 학교 B, C를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.




도서관의 위치는 세 점 A, B, C를 지나는 원의 중심이고, 고등학교로부터 도서관까지의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로 원의 방정식 $x^2+y^2+ax+by+c=0$에 세 점 A$(0, 0)$, B$(1, 1)$, C$(-6, 8)$의 좌표를 각각 대입하면
$c=0$
$1+1+a+b+c=0$에서 $a+b+c=-2$
$36+64-6a+8b+c=0$에서 $3a-4b-\frac{1}{2}c=50$
이므로 $a=6$, $b=-8$, $c=0$
즉, $x^2+y^2+6x-8y=0$이므로
$(x+3)^2+(y-4)^2=5^2$
따라서 반지름의 길이가 5이므로 고등학교로부터 도서관까지의 거리는 5 km이다. 답 **5 km**

**0591** $x^2+y^2-2(k+1)x+2ky+3k^2-2=0$에서
$\{x-(k+1)\}^2+(y+k)^2=-k^2+2k+3$
이 방정식이 원을 나타내려면 $-k^2+2k+3>0$이어야 하므로
$k^2-2k-3<0$, $(k+1)(k-3)<0$
$\therefore -1<k<3$
따라서 구하는 자연수 $k$는 1, 2의 2개이다. 답 ②

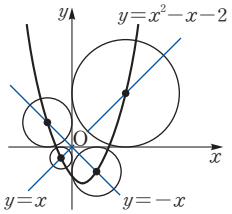
**0592** $x^2+y^2-8x-6y-2k+33=0$에서
$(x-4)^2+(y-3)^2=2k-8$
이 방정식이 원을 나타내려면 $2k-8>0$
$\therefore k>4$ …… ㉠
이 원이 제1사분면 위에 있으려면 원의 반지름의 길이가 3보다 작아야 하므로
$\sqrt{2k-8}<3$
$2k-8<9$ $\therefore k<\frac{17}{2}$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $4<k<\frac{17}{2}$
따라서 실수 $k$의 값이 될 수 없는 것은 ① 4이다. 답 ①

**0593** $x^2+y^2-2kx+4ky+6k^2-k-2=0$에서
$(x-k)^2+(y+2k)^2=-k^2+k+2$
이 방정식이 원을 나타내려면 $-k^2+k+2>0$
$k^2-k-2<0$, $(k+1)(k-2)<0$
$\therefore -1<k<2$
원의 넓이가 최대이려면 반지름의 길이가 최대이어야 하므로
$-k^2+k+2=-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$
따라서 $-1<k<2$에서 $k=\frac{1}{2}$일 때 반지름의 길이가 최대이고, 그때의 반지름의 길이는 $\frac{3}{2}$이다. 답 $\frac{3}{2}$

**0594** $x^2+y^2-6x+2ay+4=0$에서
$(x-3)^2+(y+a)^2=a^2+5$
원의 중심 $(3, -a)$가 제4사분면 위의 점이므로
$-a<0$ $\therefore a>0$
또, 원이 $y$축에 접하므로
$\sqrt{a^2+5}=3$, $a^2+5=9$
$a^2=4$
$\therefore a=2$ ($\because a>0$) 답 **2**

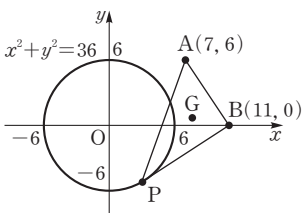
**0595** 점 $(1, -2)$를 지나고 $x$축, $y$축에 동시에 접하는 원의 중심은 제4사분면 위에 있으므로 원의 방정식을
$(x-a)^2+(y+a)^2=a^2$ $(a>0)$이라 하면
이 원이 점 $(1, -2)$를 지나므로
$(1-a)^2+(-2+a)^2=a^2$
$a^2-6a+5=0$, $(a-1)(a-5)=0$
$\therefore a=1$ 또는 $a=5$
따라서 두 원의 중심의 좌표는 $(1, -1)$, $(5, -5)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는
$\sqrt{(5-1)^2+\{-5-(-1)\}^2}=4\sqrt{2}$ 답 ④

**0596** $x$축과 $y$축에 동시에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.
따라서 구하는 원의 중심은 곡선 $y=x^2-x-2$와 직선 $y=x$ 또는 $y=-x$의 교점이다.




(i) $x^2-x-2=x$에서
$x^2-2x-2=0$
$\therefore x=1-\sqrt{3}$ 또는 $x=1+\sqrt{3}$
(ii) $x^2-x-2=-x$에서 $x^2-2=0$
$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$
(i), (ii)에서 $m=4$
또, 네 원의 중심의 좌표는 각각
$(1-\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$, $(1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
이고 반지름의 길이는 각각 $\sqrt{3}-1$, $1+\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$이다.
따라서 네 원의 넓이의 합은
$\pi(\sqrt{3}-1)^2+\pi(1+\sqrt{3})^2+\pi(\sqrt{2})^2+\pi(\sqrt{2})^2$
$=(4-2\sqrt{3})\pi+(4+2\sqrt{3})\pi+2\pi+2\pi=12\pi$
이므로 $n=12$
$\therefore m+n=4+12=16$ 답 ④

**0597** 삼각형 ABP의 무게중심을 $G(x, y)$, 원 위의 점을 $P(a, b)$라 하면

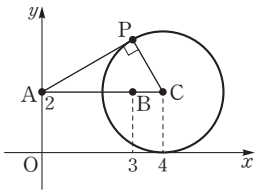



$x=\dfrac{7+11+a}{3}$,
$y=\dfrac{6+0+b}{3}$
$\therefore a=3x-18$, $b=3y-6$ …… ㉠
또, 점 P는 원 $x^2+y^2=36$ 위의 점이므로
$a^2+b^2=36$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $(3x-18)^2+(3y-6)^2=36$
$\therefore (x-6)^2+(y-2)^2=4$
따라서 점 G가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(6, 2)$, 반지름의 길이가 2인 원이므로 구하는 길이는
$2\pi\times2=4\pi$ 답 ①

**0598** 주어진 조건을 만족시키는 점을 $P(x, y)$라 하면
$\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$이므로
$2\overline{AP}=3\overline{BP}$, $4\overline{AP}^2=9\overline{BP}^2$
$4\{(x+1)^2+y^2\}=9\{(x-4)^2+y^2\}$
$x^2+y^2-16x+28=0$
$\therefore (x-8)^2+y^2=36$
따라서 원의 반지름의 길이는 6이다. 답 **6**

다른풀이
구하는 원은 두 점 $A(-1, 0)$, $B(4, 0)$을 이은 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점 $P(2, 0)$, $3:2$로 외분하는 점 $Q(14, 0)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원이다.
따라서 선분 PQ의 중점 $M(8, 0)$이 원의 중심이고, 원의 반지름의 길이는 $\dfrac{1}{2}\overline{PQ}=6$이다.

**0599** $P(x, y)$라 하면 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$이므로
$\overline{AP}=2\overline{BP}$, $\overline{AP}^2=4\overline{BP}^2$
$x^2+(y-2)^2=4\{(x-3)^2+(y-2)^2\}$
$\therefore (x-4)^2+(y-2)^2=4$
따라서 점 P는 중심의 좌표가 $(4, 2)$이고 반지름의 길이가 2인 원 위를 움직인다.

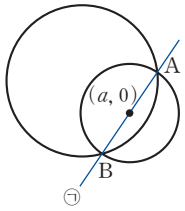



$\angle PAB$의 크기가 최대가 되는 것은 오른쪽 그림과 같이 직선 AP가 원에 접할 때이므로 원의 중심을 C라 하면 직각삼각형 PAC에서
$\overline{AP}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$ 답 ①

**0600** 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$x^2+y^2-2x-2y-3+k(x^2+y^2+2x)=0$ $(k\neq-1)$
…… ㉠
원 ㉠이 점 $(1, 1)$을 지나므로
$-5+4k=0$ $\therefore k=\dfrac{5}{4}$
이것을 ㉠에 대입하여 정리하면
$x^2+y^2+\dfrac{2}{9}x-\dfrac{8}{9}y-\dfrac{4}{3}=0$
$\therefore \left(x+\dfrac{1}{9}\right)^2+\left(y-\dfrac{4}{9}\right)^2=\dfrac{125}{81}$
따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\dfrac{5\sqrt{5}}{9}$이다. 답 ②

**0601** 두 원 $x^2+y^2=20$과 $(x-a)^2+y^2=4$의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x^2+y^2-20-\{(x-a)^2+y^2-4\}=0$
$\therefore 2ax-a^2-16=0$ …… ㉠

오른쪽 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B라 하면 공통인 현 AB의 길이는 직선 ㉠이 작은 원의 중심 $(a, 0)$을 지날 때 최대가 된다.




즉, 직선 ㉠이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$2a^2-a^2-16=0$, $a^2=16$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

답 **4**

**0602** 두 원 $x^2+y^2-2x-2y-2=0$, $x^2+y^2+2x+2y-6=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x^2+y^2-2x-2y-2)-(x^2+y^2+2x+2y-6)=0$

$-4x-4y+4=0$

$\therefore x+y-1=0$ …… ㉠

원 $x^2+y^2-2x-2y-2=0$에서 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$

즉, 중심의 좌표는 $(1, 1)$이다.

원 $x^2+y^2+2x+2y-6=0$에서 $(x+1)^2+(y+1)^2=8$

즉, 중심의 좌표는 $(-1, -1)$이다.

두 원의 중심 $(1, 1)$, $(-1, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y+1=\frac{1+1}{1+1}(x+1)$ $\therefore y=x$ …… ㉡

선분 PQ의 중점의 좌표는 두 직선 ㉠, ㉡의 교점이므로 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$이다.

답 ④

**0603** 두 원의 두 교점을 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 것은 두 원의 공통인 현을 지름으로 하는 원이다.

두 원 $x^2+y^2-2y=0$, $x^2+y^2+2x-4=0$의 공통인 현의 방정식은

$(x^2+y^2-2y)-(x^2+y^2+2x-4)=0$

$\therefore y=-x+2$ …… ㉠

㉠을 $x^2+y^2-2y=0$에 대입하면

$x^2+(-x+2)^2-2(-x+2)=0$

$x(x-1)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 차례로 대입하면 $y=2$ 또는 $y=1$

따라서 두 원의 교점의 좌표는 $(0, 2)$, $(1, 1)$이므로 구하는 원은 이 두 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원이다.

즉, 두 점 $(0, 2)$, $(1, 1)$을 이은 선분의 중점이 구하는 원의 중심이므로 넓이가 최소인 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$이다.

따라서 반지름의 길이는

$\sqrt{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+\left(\frac{3}{2}-2\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이므로 구하는 원의 넓이의 최솟값은

$\pi\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}$

답 $\frac{\pi}{2}$

**0604** 원의 반지름의 길이를 $r$라 하면

$\pi r^2=8\pi$ $\therefore r=2\sqrt{2}$

원의 중심 $(1, 3)$과 직선 $x+y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1+3+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|4+k|}{\sqrt{2}}$

이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|4+k|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

$|4+k|=4$ $\therefore k=0$ 또는 $k=-8$

따라서 모든 실수 $k$의 값의 합은

$0+(-8)=-8$

답 ②

**0605** 원 $(x-2)^2+y^2=4$의 중심 $(2, 0)$과 직선 $y=mx+1$, 즉 $mx-y+1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 만나려면

$\frac{|2m+1|}{\sqrt{m^2+1}}\le 2$

$|2m+1|\le 2\sqrt{m^2+1}$, $4m^2+4m+1\le 4m^2+4$

$4m\le 3$ $\therefore m\le\frac{3}{4}$

또, 원 $(x-4)^2+y^2=1$의 중심 $(4, 0)$과 직선 $y=mx+1$, 즉 $mx-y+1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|4m+1|}{\sqrt{m^2+1}}>1$

$|4m+1|>\sqrt{m^2+1}$, $16m^2+8m+1>m^2+1$

$m(15m+8)>0$ $\therefore m<-\frac{8}{15}$ 또는 $m>0$

따라서 구하는 양수 $m$의 값의 범위는

$0<m\le\frac{3}{4}$

이므로 $a=0$, $b=\frac{3}{4}$

$\therefore a+b=\frac{3}{4}$

답 $\frac{3}{4}$

**다른풀이**

원 $(x-2)^2+y^2=4$와 직선 $y=mx+1$이 만나려면

$(x-2)^2+(mx+1)^2=4$

$(m^2+1)x^2+2(m-2)x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 $D_1$이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(m-2)^2-(m^2+1)\ge 0$

$-4m+3\ge 0$

$\therefore m\le\frac{3}{4}$

원 $(x-4)^2+y^2=1$이 직선 $y=mx+1$과 만나지 않으려면

$(x-4)^2+(mx+1)^2=1$

$(m^2+1)x^2+2(m-4)x+16=0$

이 이차방정식의 판별식을 $D_2$라 하면

$\frac{D_2}{4}=(m-4)^2-16(m^2+1)<0$

$m(15m+8)>0$

$\therefore m<-\frac{8}{15}$ 또는 $m>0$

따라서 구하는 양수 $m$의 값의 범위는

$0<m\le\frac{3}{4}$

이므로 $a=0$, $b=\frac{3}{4}$

$\therefore a+b=\frac{3}{4}$

**0606** 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$의 넓이를 이등분하려면 직선은 원의 중심 $(1, 1)$을 지나야 한다.

따라서 구하는 직선의 기울기를 $m$이라 하면 이 직선이 점 $(1, 1)$을 지나므로 직선의 방정식은

$y-1=m(x-1)$, $y=mx-m+1$

$\therefore mx-y-m+1=0$ …… ㉠

이 직선이 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$과 접하므로 원의 중심 $(-1, 1)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는 반지름의 길이 1과 같아야 한다. 즉,

$\frac{|-m-1-m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|-2m|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

$|-2m|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$4m^2=m^2+1$, $3m^2=1$

$\therefore m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 모든 직선의 기울기의 곱은

$\frac{\sqrt{3}}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{1}{3}$ 답 ②

**0607** 중심이 제2사분면 위에 있고, $x$축, $y$축에 동시에 접하는 원의 방정식을

$(x+a)^2+(y-a)^2=a^2$ $(a>0)$

이라 하면 원의 중심 $(-a, a)$와 직선 $3x-4y+12=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|-3a-4a+12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=a$

$|12-7a|=5a$, $12-7a=\pm5a$

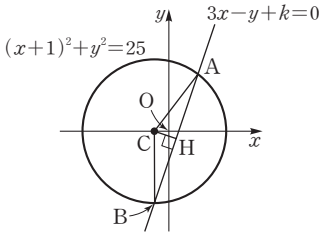
$\therefore a=1$ 또는 $a=6$

따라서 두 원의 중심은 $C(-1, 1)$, $C'(-6, 6)$이므로

$\overline{CC'}=\sqrt{\{-6-(-1)\}^2+(6-1)^2}=5\sqrt{2}$ 답 ④

**0608** 원 $(x+1)^2+y^2=25$의 중심을 C라 하자.

오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하고 원의 중심 C에서 직선 $3x-y+k=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면




$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$

직각삼각형 CAH에서

$\overline{CH}=\sqrt{5^2-\left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

또, 원의 중심 $C(-1, 0)$과 직선 $3x-y+k=0$ 사이의 거리는

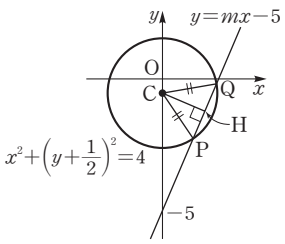
$\overline{CH}=\frac{|-3+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|-3+k|}{\sqrt{10}}$

즉, $\frac{|-3+k|}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$이므로 $|-3+k|=5$

$-3+k=\pm5$

$\therefore k=-2$ ($\because k<0$) 답 ①

**0609** 오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=4$와 직선 $y=mx-5$의 두 교점 P, Q와 원의 중심 $C\left(0, -\frac{1}{2}\right)$을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 CPQ를 좌표평면 위에 나타내면 $\overline{CP}$, $\overline{CQ}$는 원의 반지름이므로




$\overline{CP}=\overline{CQ}=2$

따라서 삼각형 CPQ가 정삼각형이려면 $\overline{PQ}=2$이어야 한다.

원의 중심 C에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PH}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=1$

직각삼각형 CPH에서

$\overline{CH}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

또, 원의 중심 $C\left(0, -\frac{1}{2}\right)$과 직선 $mx-y-5=0$ 사이의 거리는

$\overline{CH}=\frac{\left|\frac{1}{2}-5\right|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{m^2+1}}$

즉, $\frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{3}$이므로

$\sqrt{3}\sqrt{m^2+1}=\frac{9}{2}$

양변을 제곱하면

$3m^2+3=\frac{81}{4}$, $m^2=\frac{23}{4}$

$\therefore m=\frac{\sqrt{23}}{2}$ ($\because m>0$) 답 $\frac{\sqrt{23}}{2}$

**0610** 원의 중심이 C(1, −2)이므로

$\overline{PC}=\sqrt{\{1-(-2)\}^2+(-2-3)^2}$

$=\sqrt{34}$

직각삼각형 ACP에서 $\overline{CA}=4$이므로

$\overline{AP}=\sqrt{(\sqrt{34})^2-4^2}$

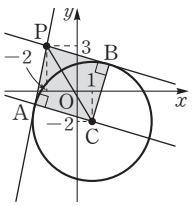
$=3\sqrt{2}$

이때 △ACP≡△BCP (RHS 합동)이므로

□PACB=2△ACP

$=2\times\left(\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times4\right)$

$=12\sqrt{2}$




답 ⑤

**0611** 원 $(x-2)^2+(y-2)^2=5$의 중심이 C(2, 2)이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로

$\overline{BC}=\sqrt{5}$,

$\overline{PC}=\sqrt{(6-2)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{5}$

직각삼각형 PBC에서

$\overline{PB}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{15}$

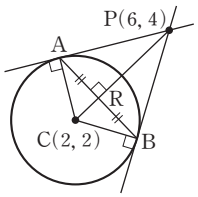
$\overline{AB}$와 $\overline{PC}$의 교점을 R라 하면 $\overline{AB}\perp\overline{PC}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{PB}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times\overline{PC}\times\overline{RB}$

$\frac{1}{2}\times\sqrt{15}\times\sqrt{5}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\overline{RB}$

$\therefore\ \overline{RB}=\frac{\sqrt{15}}{2}$

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{RB}=\sqrt{15}$




답 ④

**0612** $x^2+y^2-2x+2y-7=0$에서

$(x-1)^2+(y+1)^2=9$

원의 중심 (1, −1)과 직선 $x+y+8=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1-1+8|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

원의 반지름의 길이가 3이므로

$M=4\sqrt{2}+3$, $m=4\sqrt{2}-3$

$\therefore\ Mm=(4\sqrt{2}+3)(4\sqrt{2}-3)=23$

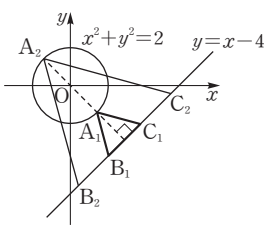
답 ②

**0613** 원 위를 움직이는 점 A와 직선 사이의 거리는 구하려는 정삼각형의 높이이다.

원점과 직선 $x-y-4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$

위의 그림에서




정삼각형의 넓이가 최소일 때는 삼각형 $A_1B_1C_1$이고 이때 정삼각형의 높이는

$2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$

정삼각형의 넓이가 최대일 때는 삼각형 $A_2B_2C_2$이고 이때 정삼각형의 높이는

$2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

따라서 두 삼각형 $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$의 닮음비가

$\sqrt{2}:3\sqrt{2}=1:3$이므로 넓이의 비는 1 : 9이다.

답 ③

**0614** 두 점 A(−3, −2), B(2, −3)을 지나는 직선의 방정식은

$y+2=\frac{-3+2}{2+3}(x+3)$

$\therefore\ x+5y+13=0$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=\frac{|13|}{\sqrt{1^2+5^2}}=\frac{\sqrt{26}}{2}$

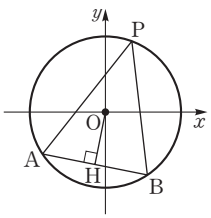
즉, 점 P와 $\overline{AB}$ 사이의 거리의 최댓값은 $\overline{OH}+\overline{OP}=\frac{\sqrt{26}}{2}+\sqrt{13}$이고

$\overline{AB}=\sqrt{26}$이므로 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\sqrt{26}\times\left(\frac{\sqrt{26}}{2}+\sqrt{13}\right)=\frac{13}{2}(1+\sqrt{2})$

따라서 $p=2$, $q=13$이므로

$pq=26$




답 **26**

**0615** 직선 $y=2x+3$에 평행한 직선의 기울기는 2이고, 원 $x^2+y^2=16$의 반지름의 길이는 4이므로 접선의 방정식은

$y=2x\pm4\sqrt{2^2+1}$ $\therefore\ y=2x\pm4\sqrt{5}$

따라서 두 직선이 $y$축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(0, 4\sqrt{5})$, $(0, -4\sqrt{5})$이므로

$\overline{PQ}=8\sqrt{5}$

답 ④

**0616** 접선의 기울기를 $m$이라 하면 기울기가 $m$이고 점 (5, 4)를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=m(x-5)$

$\therefore\ mx-y-5m+4=0$

원 $(x-1)^2+(y-2)^2=10$의 중심의 좌표는 (1, 2), 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다.

원과 직선이 접하려면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이와 같아야 하므로

$\frac{|m-2-5m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$, $\frac{|-4m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$

$|-4m+2|=\sqrt{10}\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$16m^2-16m+4=10m^2+10$

$6m^2-16m-6=0$

$2(3m+1)(m-3)=0$

$\therefore m=-\frac{1}{3}$ 또는 $m=3$

따라서 기울기가 양수인 접선의 기울기는 3이다. 답 **3**

**0617** $x^2+y^2-6x+2y+8=0$에서

$(x-3)^2+(y+1)^2=2$

점 $(4, -2)$에서의 접선은 원의 중심 $(3, -1)$과 점 $(4, -2)$를 지나는 직선과 수직이다.

원의 중심 $(3, -1)$과 점 $(4, -2)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-2-(-1)}{4-3}=-1$

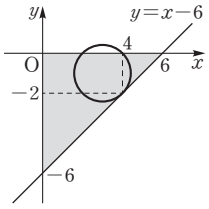
이므로 점 $(4, -2)$에서의 접선의 기울기는 1이다.

기울기가 1이고 점 $(4, -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+2=x-4$ $\therefore y=x-6$

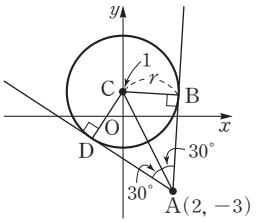
이 직선이 $x$축과 만나는 점의 좌표는 $(6, 0)$, $y$축과 만나는 점의 좌표는 $(0, -6)$이므로 접선과 $x$축, $y$축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times6\times6=18$




답 ⑤

**0618** 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C, 점 A에서 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 B, D라 하면 두 접선이 이루는 각의 크기가 60°이므로 $\angle BAC=\angle DAC=30°$




$\triangle BAC$는 직각삼각형이고 $r>0$이므로 $\overline{BC}=r$, $\overline{AC}=2r$

이때 $\overline{AC}=\sqrt{(0-2)^2+\{1-(-3)\}^2}=2\sqrt{5}$이므로

$2r=2\sqrt{5}$ $\therefore r=\sqrt{5}$

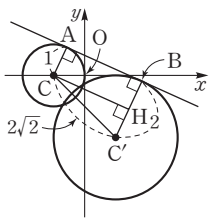
$\therefore \overline{AB}=\sqrt{3}r=\sqrt{15}$ 답 $\sqrt{15}$

**0619** 두 원 $(x+1)^2+y^2=1$, $(x-1)^2+(y+2)^2=4$의 중심을 각각 C, C′이라 하면

C$(-1, 0)$, C′$(1, -2)$

$\therefore \overline{CC'}=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(-2-0)^2}$

$=2\sqrt{2}$




점 C에서 $\overline{C'B}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

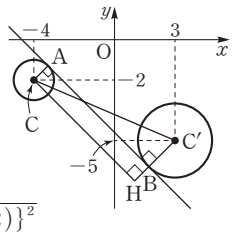
$\overline{C'H}=2-1=1$

직각삼각형 CC′H에서

$\overline{AB}=\overline{CH}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1^2}=\sqrt{7}$ 답 ④

**0620** 두 원 $(x+4)^2+(y+2)^2=r^2$, $(x-3)^2+(y+5)^2=4$의 중심을 각각 C, C′이라 하면

C$(-4, -2)$, C′$(3, -5)$




$\therefore \overline{CC'}=\sqrt{\{3-(-4)\}^2+\{-5-(-2)\}^2}$

$=\sqrt{58}$

점 C에서 $\overline{C'B}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면

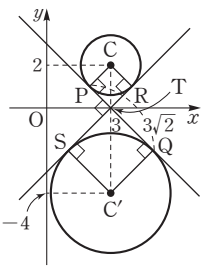
$\overline{C'H}=2+r$ ($\because r>0$)

직각삼각형 CHC′에서 $\overline{CH}=\overline{AB}=7$이므로

$2+r=\sqrt{(\sqrt{58})^2-7^2}=3$

$\therefore r=1$ 답 ①

**0621** 오른쪽 그림과 같이 두 원에 동시에 접하는 두 접선의 교점을 T라 하면 두 접선이 수직이므로 두 사각형 CPTR, C′QTS는 모두 정사각형이다.



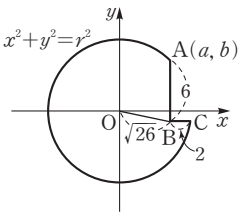

따라서 선분 PQ의 길이는 두 원의 반지름의 길이의 합과 같으므로

$3\sqrt{2}=\sqrt{2}+\sqrt{k}$, $\sqrt{k}=2\sqrt{2}$

$\therefore k=8$ 답 ②

## STEP 2 실전 마스터 본문 128~131쪽

**0622** 점 A의 좌표를 $(a, b)$라 하면 점 A는 제1사분면 위의 점이므로 $a>0$, $b>0$




B$(a, b-6)$, C$(a+2, b-6)$

이때 $\overline{OA}^2=\overline{OC}^2=r^2$이므로

$a^2+b^2=r^2$ …… ㉠

$(a+2)^2+(b-6)^2=r^2$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면 $4a-12b+40=0$

$a-3b+10=0$ $\therefore a=3b-10$ …… ㉢

$\overline{OB}^2=26$이므로

$a^2+(b-6)^2=26$ …… ㉣

㉢을 ㉣에 대입하면 $(3b-10)^2+(b-6)^2=26$

$5b^2-36b+55=0$, $(5b-11)(b-5)=0$

$\therefore b=\frac{11}{5}$ 또는 $b=5$

이것을 ㉢에 대입하면

$b=\frac{11}{5}$일 때 $a=-\frac{17}{5}$, $b=5$일 때 $a=5$

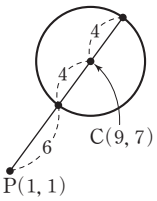
$\therefore a=5$ ($\because a>0$)

따라서 $a=5$, $b=5$이므로

$r^2=5^2+5^2=50$ ($\because$ ㉠)

답 **50**

**0623** 원의 중심을 C라 하면 C(9, 7)이므로 $\overline{PC}=\sqrt{8^2+6^2}=10$




원의 반지름의 길이가 4이므로 원 위의 점에서 점 P(1, 1)에 이르는 거리의 최솟값은 $10-4=6$, 최댓값은 $10+4=14$이다. 즉, 원 위의 점에서 점 P까지의 거리를 $d$라 하면 $6\le d\le 14$이다.

위의 그림과 같이 $d$의 값이 6과 14가 되도록 하는 점은 하나씩만 존재하고 $d$의 값이 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13이 되도록 하는 점은 두 개씩 존재하므로 $d$가 정수인 점의 개수는

$2+2\times 7=16$

답 **16**

**0624** 원 $x^2+(y-1)^2=1$의 중심 (0, 1)과 이차함수 $y=-x^2+4$의 그래프 위의 점 $B(a, -a^2+4)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{a^2+(-a^2+3)^2}=\sqrt{a^4-5a^2+9}$$
$$=\sqrt{\left(a^4-5a^2+\frac{25}{4}\right)-\frac{25}{4}+9}$$
$$=\sqrt{\left(a^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}$$

이므로 $a^2=\frac{5}{2}$일 때 최솟값 $\sqrt{\frac{11}{4}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$을 갖는다.

따라서 원 $x^2+(y-1)^2=1$ 위의 점 A와 이차함수 $y=-x^2+4$의 그래프 위의 점 B 사이의 거리의 최솟값은

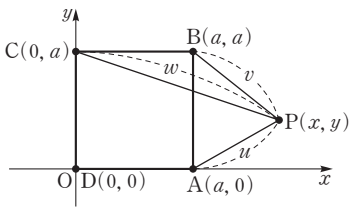
$\frac{\sqrt{11}}{2}-1$

이므로 $p=11$, $q=-1$

$\therefore p+q=10$

답 ②

**0625** 오른쪽 그림과 같이 정사각형 ABCD의 점 D를 원점, $\overline{AD}$, $\overline{DC}$를 포함하는 직선을 각각 $x$축, $y$축으로 하는 좌표평면을 설정하고 점 P의 좌표를 $(x, y)$라 하면 $u^2+v^2=w^2$에서

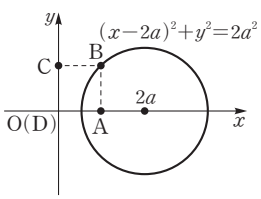



$(x-a)^2+y^2+(x-a)^2+(y-a)^2=x^2+(y-a)^2$

$x^2-4ax+2a^2+y^2=0$

$\therefore (x-2a)^2+y^2=(\sqrt{2}a)^2$

점 P의 자취는 중심의 좌표가 $(2a, 0)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}a$인 원이므로 점 D(0, 0)에서 가장 먼 점의 좌표는 $(2a+\sqrt{2}a, 0)$이고 가장 가까운 점의 좌표는 $(2a-\sqrt{2}a, 0)$이다.




즉, 점 P에서 점 D에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값의 차는

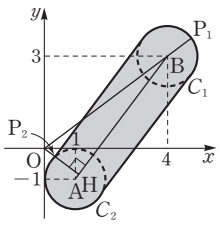
$(2a+\sqrt{2}a)-(2a-\sqrt{2}a)=2\sqrt{2}a=4$

$\therefore a=\sqrt{2}$

답 ①

**참고** 점 P에서 점 D에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값의 차는 원 $(x-2a)^2+y^2=(\sqrt{2}a)^2$의 지름의 길이와 같다.

**0626** 원의 중심 P가 나타내는 영역은 점 B(4, 3)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 $C_1$의 둘레와 그 내부, 점 A(1, −1)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 $C_2$의 둘레와 그 내부, 선분 AB와 거리가 1인 두 선분으로 둘러싸인 영역의 경계와 그 내부의 공통부분이다.




직선 OB와 원 $C_1$의 두 교점 중에서 원점에서 멀리 떨어져 있는 점을 $P_1$이라 하면 점 P가 점 $P_1$의 위치에 있을 때, 선분 OP의 길이는 최대가 된다.

$\therefore M=\overline{OB}+1$

$=\sqrt{4^2+3^2}+1=6$

원점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고, 직선 OH와 원 $C_2$의 두 교점 중에서 원점에 가까이 있는 점을 $P_2$라 하면 점 P가 점 $P_2$의 위치에 있을 때, 선분 OP의 길이는 최소가 된다.

이때 직선 AB의 방정식은

$y-(-1)=\frac{3-(-1)}{4-1}(x-1)$

$y=\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}$ $\quad\therefore 4x-3y-7=0$

원점 O와 직선 AB 사이의 거리는

$\overline{OH}=\frac{|-7|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{7}{5}$

$\therefore m=\overline{OH}-1=\frac{7}{5}-1=\frac{2}{5}$

$\therefore M+m=6+\frac{2}{5}=\frac{32}{5}$

답 ④

**0627** 주어진 원은 $y$축에 접하면서 반지름의 길이가 3이고 중심이 $x$축 위에 있으므로 $(x-3)^2+y^2=9$

이때 $x$축에 접하면서 반지름의 길이가 3이고 중심이 (4, 3)인 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y-3)^2=9$

즉, $\overline{AB}$는 두 원 $(x-3)^2+y^2=9$, $(x-4)^2+(y-3)^2=9$의 공통인 현이므로 직선 AB의 방정식은

$x^2+y^2-6x-(x^2+y^2-8x-6y+16)=0$

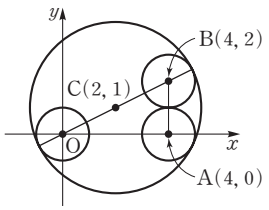
$\therefore x+3y-8=0$

따라서 $a=3$, $b=-8$이므로 $a+b=-5$

답 **−5**

**0628** 세 원 $x^2+y^2=1$, $(x-4)^2+y^2=1$, $(x-4)^2+(y-2)^2=1$을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.

A(4, 0), B(4, 2)로 놓으면 세 원을 모두 포함하는 가장 작은 원은 중심이 선분 OB의 중점 C(2, 1)이고, 반지름의 길이가 $1+\overline{OC}$이다.




$\therefore 1+\overline{OC}=1+\sqrt{2^2+1^2}=1+\sqrt{5}$

따라서 세 원을 모두 포함하는 가장 작은 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-1)^2=6+2\sqrt{5}$

두 원 $(x-2)^2+(y-1)^2=6+2\sqrt{5}$와 $(x-4)^2+(y-2)^2=4$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$\{(x-2)^2+(y-1)^2-6-2\sqrt{5}\}$

$-\{(x-4)^2+(y-2)^2-4\}=0$

$y=0$을 대입하여 풀면

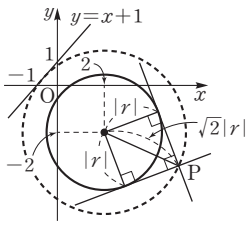
$x=\dfrac{17+2\sqrt{5}}{4}$

답 ③

**0629** 오른쪽 그림과 같이 두 접선이 직교하면서 만나는 점 P의 자취는 점 (2, −2)를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}|r|$인 원이므로

$(x-2)^2+(y+2)^2=(\sqrt{2}|r|)^2$

이 원과 직선 $y=x+1$이 접하므로




원의 중심 (2, −2)와 직선 $x-y+1=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

$\dfrac{|2+2+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}|r|$, $|r|=\dfrac{5}{2}$

$r^2=\dfrac{25}{4}$ $\therefore 4r^2=25$

답 **25**

**0630** 점 C$(a, b)$는 이차함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프 위의 점이므로

$b=a^2-2a-3$

이것을 $2a-b+9>0$에 대입하면

$2a-(a^2-2a-3)+9>0$, $-a^2+4a+12>0$ ····· ㉠

$a^2-4a-12<0$, $(a-6)(a+2)<0$

$\therefore -2<a<6$

이차함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프 위의 점 C$(a, a^2-2a-3)$을 중심으로 하는 원이 직선 $y=2x+9$에 접하므로 원의 중심 C와 직선 $y=2x+9$, 즉 $2x-y+9=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

이때 원의 반지름의 길이를 $r$라 하면

$r=\dfrac{|2a-(a^2-2a-3)+9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|-a^2+4a+12|}{\sqrt{5}}$

$=\dfrac{-a^2+4a+12}{\sqrt{5}}$ ($\because$ ㉠)

$=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}(a-2)^2+\dfrac{16}{\sqrt{5}}$ $(-2<a<6)$

따라서 반지름의 길이 $r$는 $a=2$일 때 최댓값 $\dfrac{16}{\sqrt{5}}$을 가지므로

원의 넓이의 최댓값은 $\pi\times\left(\dfrac{16}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{256}{5}\pi$

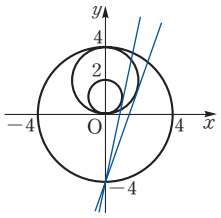
$\therefore p=5$, $q=256$

$\therefore p+q=261$

답 ③

**0631** 직선 $y=mx-4$는 $m$의 값에 관계없이 항상 점 (0, −4)를 지나므로 직선 $y=mx-4$가 세 원과 서로 다른 네 점에서 만나려면 오른쪽 그림의 두 직선 사이에 있어야 한다.

($\because m>0$)




(i) 직선 $mx-y-4=0$과 점 (0, 2) 사이의 거리가 2보다 작아야 하므로

$\dfrac{|0-2-4|}{\sqrt{m^2+1}}<2$, $\sqrt{m^2+1}>3$

$m^2+1>9$ $\therefore m^2>8$

(ii) 직선 $mx-y-4=0$과 점 (0, 1) 사이의 거리가 1보다 커야 하므로

$\dfrac{|0-1-4|}{\sqrt{m^2+1}}>1$, $\sqrt{m^2+1}<5$

$m^2+1<25$ $\therefore m^2<24$

(i), (ii)에서 $8<m^2<24$

따라서 구하는 모든 자연수 $m$의 값은 3, 4이므로 그 합은

$3+4=7$

답 **7**

**0632** 점 $(k, 3)$으로부터의 거리가 $3\sqrt{2}$인 점들이 나타내는 도형은 중심이 $(k, 3)$이고 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$인 원이다.

(i) 도형 $A$가 직선 $x-y+6=0$과 만나려면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이보다 작거나 같아야 한다. 즉,

$\dfrac{|k-3+6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\le 3\sqrt{2}$

$|k+3|\le 6$, $-6\le k+3\le 6$

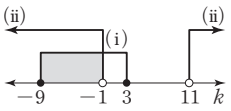
$\therefore -9\le k\le 3$

(ii) 도형 $A$가 직선 $x+y-8=0$과 만나지 않으려면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이보다 커야 한다. 즉,

$\dfrac{|k+3-8|}{\sqrt{1^2+1^2}}>3\sqrt{2}$

$|k-5|>6$, $k-5<-6$ 또는 $k-5>6$

$\therefore k<-1$ 또는 $k>11$



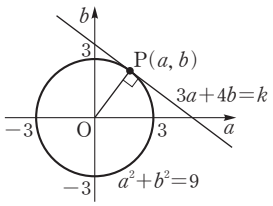

(i), (ii)에서 $-9 \le k < -1$

따라서 정수 $k$는 $-9, -8, \cdots, -2$의 8개이다. 답 8

**0633** 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 P의 좌표를 $(a, b)$라 하면

$$\begin{aligned}2\overline{PA}^2+\overline{PB}^2&=2\{(a-2)^2+(b-5)^2\}+(a-5)^2+(b-2)^2\\&=3(a^2+b^2)-18a-24b+87\\&=114-6(3a+4b)\ (\because a^2+b^2=9)\end{aligned}$$

$2\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 값이 최소가 되려면 $3a+4b$의 값이 최대가 되어야 한다. 즉, 오른쪽 그림과 같이 직선 $3a+4b=k$가 제1사분면에 있는 원 $a^2+b^2=9$ 위의 점 $P(a, b)$에서의 접선이 되는 경우이다.




원의 중심과 직선 $3a+4b=k$ 사이의 거리는 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3,\ |-k|=15 \qquad \therefore k=15\ (\because k>0)$$

$$\begin{aligned}\therefore 2\overline{PA}^2+\overline{PB}^2&=114-6(3a+4b)\\&\ge 114-6\times 15=24\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 24이다. 답 24

**0634** 원의 중심이 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(n, n^2)$이라 하면 이 원이 $y$축에 접하므로 반지름의 길이는 $|n|$이다.

원의 중심 $(n, n^2)$과 직선 $\sqrt{3}x-y-2=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|\sqrt{3}n-n^2-2|}{\sqrt{3+1}}=|n|,\ n^2-\sqrt{3}n+2=\pm 2n$$

이때 실근을 갖는 이차방정식은

$n^2-(2+\sqrt{3})n+2=0$

이 이차방정식의 두 근이 $a$, $b$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $ab=2$

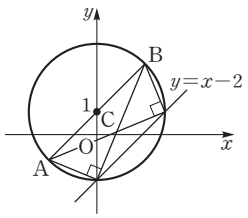
$\therefore 100ab=200$ 답 200

**0635** $\angle APB=\angle AQB=90^\circ$이므로 두 점 P, Q는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위에 있다.

이 원의 중심을 C라 하면 점 C는 두 점 $A(-\sqrt{5}, -1)$, $B(\sqrt{5}, 3)$의 중점인 $(0, 1)$이고 반지름의 길이는

$\overline{CA}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(1+1)^2}=3$이므로 원의 방정식은

$x^2+(y-1)^2=9$




원 $x^2+(y-1)^2=9$와 직선 $y=x-2$의 교점 P, Q의 $x$좌표는

$x^2+(x-3)^2=9$

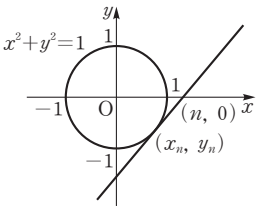
$2x^2-6x=0,\ 2x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

따라서 $P(0, -2)$, $Q(3, 1)$ 또는 $P(3, 1)$, $Q(0, -2)$이므로

$l^2=\overline{PQ}^2=(3-0)^2+(1+2)^2=18$ 답 18

**0636** 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 $(x_n, y_n)$에서의 접선의 방정식은 $x_nx+y_ny=1$




접선이 점 $(n, 0)$을 지나므로

$nx_n=1 \qquad \therefore x_n=\frac{1}{n}$

이때 점 $(x_n, y_n)$은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$x_n^2+y_n^2=1$에서

$$\begin{aligned}y_n^2&=1-x_n^2=1-\left(\frac{1}{n}\right)^2\\&=\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}\end{aligned}$$

$$\therefore y_n=\pm\sqrt{\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}}$$

접점이 제4사분면 위에 있으므로

$$y_n=-\sqrt{\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}}$$

$$\begin{aligned}\therefore y_3\times y_4\times\cdots\times y_{12}&=\left(-\sqrt{\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}}\right)\times\left(-\sqrt{\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}}\right)\times\cdots\times\left(-\sqrt{\frac{11}{12}\times\frac{13}{12}}\right)\\&=\sqrt{\frac{2}{3}\times\frac{13}{12}}=\sqrt{\frac{26}{36}}=\frac{\sqrt{26}}{6}\end{aligned}$$

답 $\frac{\sqrt{26}}{6}$

**0637** $x^2+y^2-4x+2y-15=0$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2=20$ ····· ㉠

이므로 중심이 $(2, -1)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$인 원이다.

점 A(2, 4)를 지나는 직선의 기울기를 $m$이라 하면 직선의 방정식은

$y=m(x-2)+4$

$\therefore mx-y-2m+4=0$ ····· ㉡

직선 ㉡이 원에 접하려면 원의 중심 $(2, -1)$과 직선 ㉡ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $2\sqrt{5}$와 같아야 하므로

$$\frac{|2m-(-1)-2m+4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$$

$$m^2=\frac{1}{4} \qquad \therefore m=\pm\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 두 접선의 방정식은 각각

$$y=\frac{1}{2}(x-2)+4=\frac{1}{2}x+3,$$

$$y=-\frac{1}{2}(x-2)+4=-\frac{1}{2}x+5$$

두 점 B, C의 좌표를 구하면

$y=\frac{1}{2}x+3$에서 $x=2y-6$

이것을 ㉠에 대입하면

$(2y-8)^2+(y+1)^2=20$, $y^2-6y+9=0$

$(y-3)^2=0$ $\therefore y=3$

$\therefore (0, 3)$

또한, $y=-\frac{1}{2}x+5$에서 $x=10-2y$

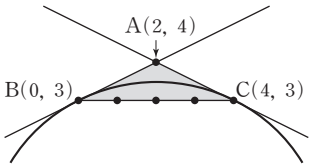
이것을 ㉠에 대입하면

$(8-2y)^2+(y+1)^2=20$, $y^2-6y+9=0$

$(y-3)^2=0$ $\therefore y=3$

$\therefore (4, 3)$

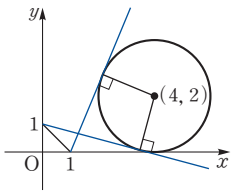
즉, B(0, 3), C(4, 3)이라 하고 이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.




따라서 삼각형 ABC의 내부 또는 둘레에 있는 점 중에서 $x$좌표와 $y$좌표가 모두 정수인 점의 개수는 6이다. 답 **6**

**0638** $\frac{b-d}{a-c}=k$라 하면 $k$는 두 점 $P(a, b)$와 $Q(c, d)$를 지나는 직선의 기울기이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 점 (1, 0)을 지나는 원의 접선 중 제1사분면에서 접점을 갖는 것의 기울기가 가장 크고, 점 (0, 1)을 지나는 원의 접선 중 제1사분면에서 접점을 갖는 것의 기울기가 가장 작음을 알 수 있다.




점 (1, 0)을 지나는 접선의 방정식을 $y=k(x-1)$, 즉 $kx-y-k=0$이라 하면 원 $(x-4)^2+(y-2)^2=4$의 중심 (4, 2)와 이 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2와 같으므로

$2=\frac{|4k-2-k|}{\sqrt{k^2+1}}$, $2\sqrt{k^2+1}=|3k-2|$

양변을 제곱하면

$5k^2-12k=k(5k-12)=0$에서 $k=0$ 또는 $k=\frac{12}{5}$

그런데 $k>0$이므로 $k=\frac{12}{5}$ $\therefore M=\frac{12}{5}$

한편, 점 (0, 1)을 지나는 접선의 방정식을 $y-1=kx$, 즉 $kx-y+1=0$이라 하면 원 $(x-4)^2+(y-2)^2=4$의 중심 (4, 2)와 이 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2와 같으므로

$2=\frac{|4k-2+1|}{\sqrt{k^2+1}}$, $2\sqrt{k^2+1}=|4k-1|$

양변을 제곱하면

$12k^2-8k-3=0$에서 $k=\frac{2\pm\sqrt{13}}{6}$

그런데 $k<0$이므로 $k=\frac{2-\sqrt{13}}{6}$ $\therefore m=\frac{2-\sqrt{13}}{6}$

$\therefore 30(M+m)=30\left(\frac{12}{5}+\frac{2-\sqrt{13}}{6}\right)=82-5\sqrt{13}$

$\therefore p+q=82+(-5)=77$ 답 **77**

**0639** 원 $x^2+y^2-10x+16=0$에서 $(x-5)^2+y^2=3^2$

즉, 원의 중심을 C라 하면 C(5, 0)이고 반지름의 길이가 3이다.

점 P의 좌표를 $(x, y)$라 하면

$\overline{PA}^2=(x-1)^2+(y-a)^2$

$\overline{PT}^2=\overline{PC}^2-\overline{CT}^2=(x-5)^2+y^2-3^2$

$=x^2+y^2-10x+16$

$\overline{PT}=\overline{PA}$이므로 $\overline{PT}^2=\overline{PA}^2$

$x^2+y^2-10x+16=(x-1)^2+(y-a)^2$

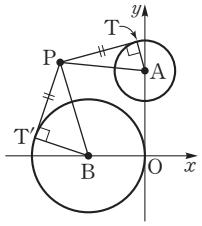
$\therefore 8x-2ay+a^2-15=0$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 직선 $8x-2ay+a^2-15=0$이고 이 직선이 점 $\left(-\frac{1}{8}, 0\right)$을 지나므로

$-1+a^2-15=0$ $\therefore a^2=16$ 답 ②

**0640** 오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+(y-3)^2=1$, $(x+2)^2+y^2=4$의 중심을 각각 A, B라 하고, 점 P에서 두 원에 그은 접선의 접점을 각각 T, T′이라 하면 $\overline{PT}=\overline{PT'}$이므로

$\overline{PT}^2=\overline{PT'}^2$




이때 $\overline{PT}^2=\overline{AP}^2-\overline{AT}^2$, $\overline{PT'}^2=\overline{PB}^2-\overline{BT'}^2$이므로

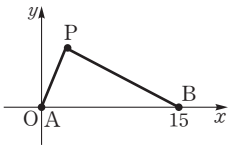
$\overline{AP}^2-1=\overline{PB}^2-4$

따라서 점 P의 좌표를 $(x, y)$라 하면

$x^2+(y-3)^2-1=(x+2)^2+y^2-4$

$\therefore 2x+3y-4=0$ 답 $\boldsymbol{2x+3y-4=0}$

**0641** 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 A를 원점으로 하고 직선 AB를 $x$축, 점 A를 지나고 직선 AB에 수직인 직선을 $y$축으로 나타내면 B(15, 0)이다.




두 대형마트로부터 배송 비용이 동일한 지점을 $P(x, y)$라 하면 1 km당 배송 비용은 A 대형마트가 B 대형마트보다 2배 비싸므로 $2\overline{AP}=\overline{BP}$

양변을 제곱하면 $4\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$

이때 $\overline{AP}^2=x^2+y^2$, $\overline{BP}^2=(x-15)^2+y^2$이므로

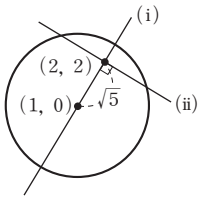
$4(x^2+y^2)=(x-15)^2+y^2$

$x^2+y^2+10x-75=0$ $\therefore (x+5)^2+y^2=100$

따라서 두 대형마트 A, B로부터 배송 비용이 동일한 지점은 원 $(x+5)^2+y^2=100$ 위에 위치한 지점이므로 자취가 그리는 도형의 넓이는 $10^2\pi=100\pi(\text{km}^2)$ 답 $100\pi$ km$^2$

**0642** 등대의 위치를 좌표평면에서 원점이라 하면 등대가 빛을 비추는 영역은 원 $x^2+y^2=16$의 경계와 그 내부이다.
배는 점 $(-5, 0)$에서 출발하여 점 $(0, a)$를 지나가므로 배의 이동 경로를 나타내는 직선의 방정식은 $y=\frac{a}{5}x+a$이다.
원점과 직선 $ax-5y+5a=0$ 사이의 거리는
$\frac{|5a|}{\sqrt{a^2+25}}=\frac{5a}{\sqrt{a^2+25}}$ ($\because a>0$)이고 원의 반지름의 길이가 4이므로 원과 직선이 만나서 생기는 현의 길이는
$2\sqrt{16-\frac{25a^2}{a^2+25}}$이다.
따라서 배가 등대의 불빛이 비추는 영역을 지나간 길이는 현의 길이와 같으므로
$2\sqrt{16-\frac{25a^2}{a^2+25}}=6$
$\frac{25a^2}{a^2+25}=7$, $a^2=\frac{175}{18}$
$\therefore a=\frac{5\sqrt{7}}{3\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{14}}{6}$ ($\because a>0$) 답 $\frac{5\sqrt{14}}{6}$

**0643** 직선 $y=kx-2k+2$, 즉 $y=k(x-2)+2$는 $k$의 값에 관계없이 항상 점 $(2, 2)$를 지난다.
오른쪽 그림에서




(i) 직선 $y=kx-2k+2$가 원 $(x-1)^2+y^2=16$의 중심 $(1, 0)$을 지날 때, 선분 AB의 길이는 최대가 되므로
$M=2\times4=8$
(ii) 직선 $y=kx-2k+2$가 (i)의 직선과 수직일 때, 선분 AB의 길이는 최소가 되므로
$m=2\sqrt{4^2-(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{11}$
(i), (ii)에서 $Mm=8\times2\sqrt{11}=16\sqrt{11}$ 답 $16\sqrt{11}$

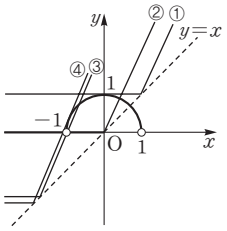
**0644** 원 $x^2+y^2=5$와 직선 $x+y-k=0$의 교점을 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$라 하면 $x_1$, $x_2$는 이차방정식 $x^2+(-x+k)^2=5$, 즉 $2x^2-2kx+k^2-5=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$x_1+x_2=\frac{2k}{2}=k$ …… ㉠
또, 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$는 직선 $x+y-k=0$ 위의 점이므로
$x_1+y_1-k=0$, $x_2+y_2-k=0$
위의 두 식의 각 변을 더하여 정리하면
$y_1+y_2=-(x_1+x_2)+2k=-k+2k=k$ ($\because$ ㉠) …… ㉡
한편, 원 $x^2+y^2=5$ 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에서의 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=5$, $x_2x+y_2y=5$
이고 두 접선의 교점의 좌표가 $(a, b)$이므로
$ax_1+by_1=5$, $ax_2+by_2=5$
위의 두 식의 각 변을 더하면
$a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)=10$
$ak+bk=10$ ($\because$ ㉠, ㉡)
$k(a+b)=10$, $10k=10$ ($\because a+b=10$)
$\therefore k=1$ 답 1

## STEP 3 상위권 마스터 본문 132~133쪽

**0645**

TIP $x\ge k$ 또는 $x<k$인 경우로 나누어 $y=x+|x-k|$의 그래프를 그리고 두 도형의 위치 관계를 알아본다.

$y=x+|x-k|$
$=\begin{cases}2x-k & (x\ge k)\\ k & (x<k)\end{cases}$
의 그래프가 곡선 $x^2+y^2=1$ $(y>0)$과 서로 다른 두 점에서 만나려면 오른쪽 그림의 ①과 ② 사이 또는 ③과 ④ 사이에 있어야 한다.

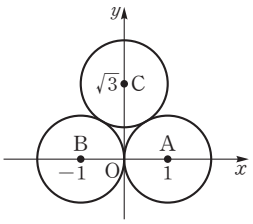



$y=x+|x-k|$의 그래프가
①일 때, $k=1$
②일 때, $k=0$
③일 때, 직선 $y=2x-k$가 점 $(-1, 0)$을 지나는 경우이므로
$0=-2-k$ $\therefore k=-2$
④일 때, 직선 $y=2x-k$, 즉 $2x-y-k=0$과 원 $x^2+y^2=1$이 접하는 경우이므로 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $2x-y-k=0$ 사이의 거리가 1이다. 즉,
$\frac{|-k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=1$, $|k|=\sqrt{5}$
$\therefore k=-\sqrt{5}$ ($\because k<0$)
따라서 두 도형이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 $k$의 값의 범위는
$-\sqrt{5}<k<-2$ 또는 $0<k<1$
이므로 $a=-\sqrt{5}$, $b=-2$, $c=0$, $d=1$
$\therefore ac+bd=(-\sqrt{5})\times0+(-2)\times1=-2$ 답 ③

## 0646

TIP 세 원에 동시에 접하는 직선을 좌표평면에 나타낸다.

세 점 A(1, 0), B(−1, 0), C(0, $\sqrt{3}$)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $s$인 세 원을 각각 $A$, $B$, $C$라 하자.

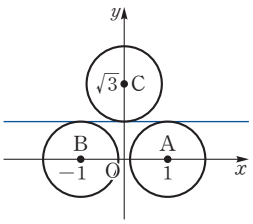



$s=1$일 때, 세 원 $A$, $B$, $C$는 서로 외접하고, 세 원에 동시에 접하는 직선은 존재하지 않는다.

또한, $s>1$일 때, 세 원 $A$, $B$, $C$는 서로 만나고, 세 원에 동시에 접하는 직선은 존재하지 않는다.

따라서 세 원에 동시에 접하는 직선은 $s<1$일 때 존재한다.

(i) 두 원 $A$, $B$의 공통외접선에 원 $C$가 접할 때, 두 원 $A$, $B$의 공통외접선은 $x$축에 평행하다.

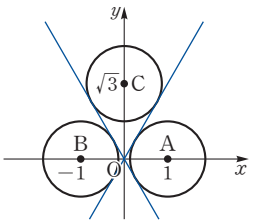



공통외접선의 방정식을 $y=s$라 하면 직선 $y=s$와 원 $C$가 접하므로

$\sqrt{3}-s=s$, $s=\frac{\sqrt{3}}{2}$

즉, 접선의 방정식은 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 기울기는 0이다.

(ii) 두 원 $A$, $B$의 공통내접선에 원 $C$가 접할 때, 두 원 $A$, $B$의 공통내접선은 원점을 지난다.




공통내접선의 방정식을 $y=mx$ $(m\neq 0)$라 하면 세 원 $A$, $B$, $C$의 중심과 직선 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$ 사이의 거리는 모두 $s$이므로

$$\frac{|m|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|-m|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|\sqrt{3}|}{\sqrt{m^2+1}}=s$$

즉, $|m|=\sqrt{3}$이므로 $m=\pm\sqrt{3}$

즉, 접선의 방정식은 $y=\pm\sqrt{3}x$이므로 기울기는 $\sqrt{3}$ 또는 $-\sqrt{3}$이다.

(i), (ii)에서 $p^2+q^2+r^2=0^2+(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{3})^2=6$ 답 **6**

## 0647

TIP 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같음을 이용한다.

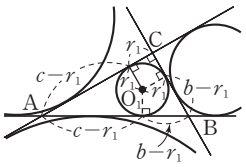
$\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CA}=c$라 하면 직각삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{15}{2}$이고, $r_1=1$이므로

$\triangle ABC=\triangle O_1AB+\triangle O_1BC+\triangle O_1CA$에서

$$\frac{15}{2}=\frac{1}{2}\times a\times 1+\frac{1}{2}\times b\times 1+\frac{1}{2}\times c\times 1$$

$\therefore a+b+c=15$ …… ㉠

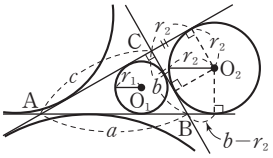
(i) 세 점 A, B, C에서 원 $O_1$에 그은 두 접선의 접점까지의 길이는 각각 같으므로




$a=(b-r_1)+(c-r_1)$

$\therefore r_1=\frac{-a+b+c}{2}$

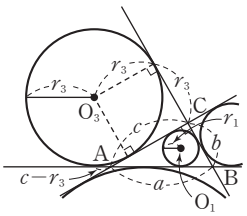
(ii) 점 A에서 원 $O_2$에 그은 두 접선의 접점까지의 길이는 같으므로




$c+r_2=a+(b-r_2)$

$\therefore r_2=\frac{a+b-c}{2}$

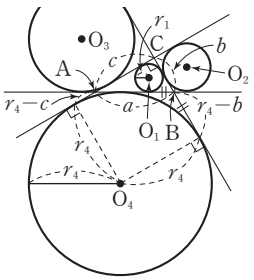
(iii) 점 B에서 원 $O_3$에 그은 두 접선의 접점까지의 길이는 같으므로




$b+r_3=a+(c-r_3)$

$\therefore r_3=\frac{a-b+c}{2}$

(iv) 두 점 A, B에서 원 $O_4$에 그은 두 접선의 접점까지의 길이는 각각 같으므로




$(r_4-b)+(r_4-c)=a$

$\therefore r_4=\frac{a+b+c}{2}$

(i)~(iv)에서

$r_1+r_2+r_3+r_4=a+b+c$

$=15$ ($\because$ ㉠)

$\therefore r_2+r_3+r_4=(r_1+r_2+r_3+r_4)-r_1$

$=15-1=14$ 답 **14**

## 0648

TIP 두 직선 $p$, $q$가 $m$의 값에 관계없이 지나는 점의 좌표를 구한다.

직선 $p$ : $x+y=mx+3$에서 $mx+(-x-y+3)=0$이므로 직선 $p$는 $m$의 값에 관계없이 점 A(0, 3)을 지난다.

직선 $q$ : $(1-m)y=x-5+5m$에서

$m(-y-5)+(y-x+5)=0$이므로 직선 $q$는 $m$의 값에 관계없이 점 B(0, −5)를 지난다.

직선 $p$의 기울기는 $m-1$, 직선 $q$의 기울기는 $\frac{1}{1-m}$이므로

$$(m-1)\times\frac{1}{1-m}=-1$$

즉, 두 직선 $p$, $q$는 서로 수직이므로 점 P의 자취는 두 직선이 $m$의 값에 관계없이 각각 지나는 두 점 A(0, 3), B(0, −5)를 지름의 양 끝점으로 하는 원이다.

ㄱ. 점 P의 자취는 선분 AB를 지름으로 하는 원이므로 이 원의 중심은 $\left(0, \frac{3+(-5)}{2}\right)$, 즉 (0, −1)

ㄴ. 점 P의 자취는 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{AB}=4$인 원이므로 그 넓이는 $\pi\times4^2=16\pi$

ㄷ. 점 P의 자취는 중심이 점 $(0, -1)$, 반지름의 길이가 4인 원이므로 원의 방정식은 $x^2+(y+1)^2=16$

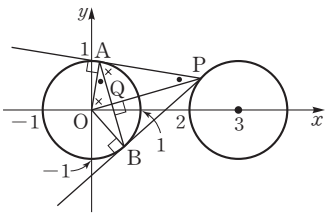
$x=3$, $y=1$을 대입하면 $3^2+2^2=13\neq16$

즉, 점 $(3, 1)$은 점 P의 자취 위에 있지 않다.

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

## 0649

TIP 도형의 닮음을 이용한다.




위의 그림에서 $\overline{OA}=\overline{OB}$, $\overline{PA}=\overline{PB}$

즉, $\overline{AB}$의 중점 Q는 두 직선 AB와 OP의 교점이고 $\overline{OP}\perp\overline{AB}$

$\triangle OAQ\backsim\triangle OPA$ (AA 닮음)이므로

$\overline{OQ}:\overline{OA}=\overline{OA}:\overline{OP}$

$\therefore \overline{OP}\times\overline{OQ}=\overline{OA}^2=1$ …… ㉠

$\overline{OP}$와 $\overline{OQ}$는 같은 직선 위에 있으므로 $Q(x, y)$라 하면

$x=ka$, $y=kb$ $(k>0)$ …… ㉡

㉠에서 $\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}=1$

$\therefore (a^2+b^2)(x^2+y^2)=1$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$k^2(a^2+b^2)^2=1$ $\quad\therefore k=\frac{1}{a^2+b^2}$ $(\because k>0)$

㉡에서 $x=\frac{a}{a^2+b^2}$, $y=\frac{b}{a^2+b^2}$ …… ㉣

이므로 $Q\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2}\right)$

㉢, ㉣에서 $a=(a^2+b^2)x=\frac{x}{x^2+y^2}$ …… ㉤

$b=(a^2+b^2)y=\frac{y}{x^2+y^2}$ …… ㉥

점 $P(a, b)$가 원 $(x-3)^2+y^2=1$ 위를 움직이므로

$(a-3)^2+b^2=1$에 ㉤, ㉥을 대입하면

$\left(\frac{x}{x^2+y^2}-3\right)^2+\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2=1$

$\{x-3(x^2+y^2)\}^2+y^2=(x^2+y^2)^2$

$x^2-6x(x^2+y^2)+8(x^2+y^2)^2+y^2=0$

$(x^2+y^2)\{1-6x+8(x^2+y^2)\}=0$

이때 $x^2+y^2\neq0$이므로 $1-6x+8(x^2+y^2)=0$

$\therefore x^2+y^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}=0$

따라서 점 Q의 자취의 방정식은

$x^2+y^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}=0$이다. 답 $\boldsymbol{x^2+y^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}=0}$

## 0650

TIP $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$의 관계를 생각한다.

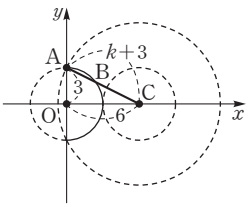
$\overline{OA}=\overline{BC}=3$이므로 두 점 A, B는 중심이 각각 O, C이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 점이다.

$\overline{AB}+\overline{BC}\geq\overline{AC}$가 항상 성립하고

$\overline{AB}=k$, $\overline{BC}=3$이므로

$k+3\geq\overline{AC}$, 즉 선분 AC의 길이의 최댓값은 $k+3$이므로 점 A는 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $k+3$인 원 밖에 존재할 수 없다.

그런데 $\overline{OA}=3$이므로 점 A는 반지름의 길이가 3인 원 위의 점이고 반지름의 길이가 3인 원의 둘레의 길이는 $6\pi$이다. 즉, 점 A의 자취의 길이가 $3\pi$이기 위해서는 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $k+3$인 원이 위의 그림과 같이 점 $(0, 3)$을 지나야 한다.




따라서 $(k+3)^2=3^2+6^2$이므로

$k=-3+3\sqrt{5}$ $(\because k>0)$ 답 $\boldsymbol{-3+3\sqrt{5}}$

# 13 도형의 이동

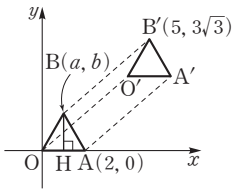
## STEP 1 핵심기출 마스터

본문 135~138쪽

**0651** 점 $(5, 2)$를 $x$축의 방향으로 $3k$만큼, $y$축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(5+3k, 2-k)$
이 점이 직선 $y=-2x+7$ 위에 있으므로
$2-k=-2(5+3k)+7$
$2-k=-6k-3$, $5k=-5$
$\therefore k=-1$ 답 ②

**0652** 주어진 평행이동을 $(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$이라 하면
$a+m=3$, $-1+n=2$, $4+m=-1$, $b+n=5$
$\therefore m=-5$, $n=3$, $a=8$, $b=2$
따라서 점 $(-a, 2b)$, 즉 점 $(-8, 4)$가 주어진 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x-5, y+3)$에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는
$(-8-5, 4+3)$, 즉 $(-13, 7)$ 답 $\mathbf{(-13, 7)}$

**0653** 도형을 평행이동해도 그 모양은 변하지 않으므로 $\triangle O'A'B'$이 정삼각형이면 $\triangle OAB$도 정삼각형이다.
오른쪽 그림과 같이 점 B에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{OA}=2$이므로 $\overline{OH}=1$
또, $\triangle OAB$에서 $\overline{BH}=\sqrt{3}$이므로
점 B의 좌표는 $(1, \sqrt{3})$
이때 $B'(5, 3\sqrt{3})$이므로
$1+m=5$, $\sqrt{3}+n=3\sqrt{3}$ $\therefore m=4$, $n=2\sqrt{3}$
$\therefore mn=8\sqrt{3}$ 답 $\mathbf{8\sqrt{3}}$




**0654** 점 $(-1, 4)$를 점 $(3, -2)$로 옮기는 평행이동을 $(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$이라 하면
$-1+m=3$, $4+n=-2$ $\therefore m=4$, $n=-6$
직선 $x+ay+b=0$을 $x$축의 방향으로 4만큼, $y$축의 방향으로 $-6$만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$(x-4)+a(y+6)+b=0$ $\therefore x+ay+6a+b-4=0$
이 직선이 직선 $x+2y+10=0$과 일치하므로
$a=2$, $6a+b-4=10$
따라서 $a=2$, $b=2$이므로
$ab=4$ 답 ①

**0655** 직선 $l$은 직선 $y=ax+b$를 주어진 평행이동에 의하여 옮겨진 것이므로 직선 $l$의 방정식은
$y+3=a(x-2)+b$ $\therefore y=ax-2a+b-3$
이 직선이 직선 $y=\frac{1}{4}x+6$과 $y$축 위의 점에서 수직으로 만나므로 직선 $l$의 기울기는 $-4$이고, $y$절편은 6이다.
즉, $a=-4$, $-2a+b-3=6$이므로 $a=-4$, $b=1$
$\therefore a+b=-3$ 답 $\mathbf{-3}$

**0656** $x^2+y^2-4x+2y+a=0$에서
$(x-2)^2+(y+1)^2=5-a$
이 원을 주어진 평행이동에 의하여 옮긴 원의 방정식은
$(x-3-2)^2+(y-1+1)^2=5-a$
$\therefore (x-5)^2+y^2=5-a$
따라서 중심의 좌표가 $(5, 0)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{5-a}$이므로
$b=0$, $\sqrt{5-a}=2$ $\therefore a=1$, $b=0$
$\therefore a-b=1$ 답 ④

**0657** $y=x^2+6x+3$에서 $y=(x+3)^2-6$
이 포물선을 $x$축의 방향으로 $m$만큼, $y$축의 방향으로 $n$만큼 평행이동한 포물선의 방정식은
$y-n=(x-m+3)^2-6$ $\therefore y=(x-m+3)^2+n-6$
이 포물선이 포물선 $y=x^2+4x+1$, 즉 $y=(x+2)^2-3$과 일치하려면
$-m+3=2$, $n-6=-3$ $\therefore m=1$, $n=3$
직선 $l: x-2y=0$을 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선 $l'$의 방정식은
$(x-1)-2(y-3)=0$ $\therefore x-2y+5=0$
따라서 두 직선 $l$, $l'$ 사이의 거리는 직선 $l$ 위의 점 $(0, 0)$과 직선 $l'$ 사이의 거리와 같으므로
$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$ 답 $\mathbf{\sqrt{5}}$

다른풀이
포물선 $y=x^2+6x+3$, 즉 $y=(x+3)^2-6$의 꼭짓점의 좌표는 $(-3, -6)$이고, 이 점을 $x$축의 방향으로 $m$만큼, $y$축의 방향으로 $n$만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(-3+m, -6+n)$
이 점이 포물선 $y=x^2+4x+1$, 즉 $y=(x+2)^2-3$의 꼭짓점의 좌표인 $(-2, -3)$과 일치해야 하므로
$-3+m=-2$, $-6+n=-3$ $\therefore m=1$, $n=3$

**0658** 원 $C$의 방정식은
$(x-3+1)^2+(y-a+2)^2=9$
$\therefore (x-2)^2+(y-a+2)^2=9$
이때 직선 $3x+4y-7=0$이 원 $C$의 넓이를 이등분하려면 직선 $3x+4y-7=0$이 원 $C$의 중심 $(2, a-2)$를 지나야 하므로
$3\times2+4(a-2)-7=0$ $\therefore a=\frac{9}{4}$ 답 ⑤

**0659** 점 $P(a, b)$가 직선 $y=2x$ 위의 점이므로

$b=2a$ …… ㉠

즉, 점 P의 좌표는 $(a, 2a)$이므로

$Q(a, -2a)$, $R(-a, 2a)$

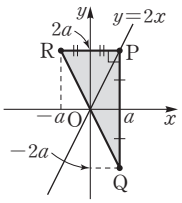
삼각형 PQR의 넓이가 36이므로

$\triangle PQR=\frac{1}{2}\times 2a\times 4a=36$

$4a^2=36$, $a^2=9$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$), $b=6$ ($\because$ ㉠)

$\therefore a+b=9$ 답 ③




**0660** 점 $(a, b)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(b, a)$

이 점이 제4사분면 위의 점이므로

$b>0$, $a<0$ …… ㉠

점 $(ab, b-a)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-ab, a-b)$

이 점을 $y$축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(ab, a-b)$

이때 ㉠에서 $ab<0$, $a-b<0$이므로 점 $(ab, a-b)$는 제3사분면 위에 있다. 답 **제3사분면**

**0661** 주어진 규칙에 따라 점 $P_2$, $P_3$, $P_4$, …의 좌표를 구하면

$P_1(3, 2)\longrightarrow P_2(2, 3)\longrightarrow P_3(2, -3)\longrightarrow P_4(-2, -3)$

$\longrightarrow P_5(-3, -2)\longrightarrow P_6(-3, 2)\longrightarrow P_7(3, 2)$

$\longrightarrow P_8(2, 3)\longrightarrow\cdots$

이므로 자연수 $n$에 대하여 두 점 $P_n$, $P_{n+6}$이 일치한다.

이때 $50=6\times 8+2$이므로 점 $P_{50}$은 점 $P_2$와 일치한다.

즉, 점 $P_{50}$의 좌표는 $(2, 3)$이므로 $x_{50}=2$, $y_{50}=3$

$\therefore 10x_{50}+y_{50}=10\times 2+3=23$ 답 **23**

**0662** 직선 $y=5x+1$을 $x$축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=5x+1$ $\therefore y=-5x-1$

이 직선과 평행한 직선의 기울기는 $-5$이므로 기울기가 $-5$이고 점 $(2, -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-(-3)=-5(x-2)$ $\therefore y=-5x+7$

따라서 구하는 $y$절편은 7이다. 답 **7**

**0663** 직선 $(k+1)x+(3-2k)y-5=0$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$(k+1)\times(-y)+(3-2k)\times(-x)-5=0$

$\therefore (2x-y)k+(-3x-y-5)=0$ …… ㉠

㉠이 $k$의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x-y=0$, $-3x-y-5=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=-2$

따라서 직선 ㉠은 $k$의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, -2)$를 지나므로

$a=-1$, $b=-2$

$\therefore ab=2$ 답 **2**

**0664** 포물선 $y=x^2-2ax+4$를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=(-x)^2-2a\times(-x)+4$

$\therefore y=-x^2-2ax-4$

$=-(x+a)^2+a^2-4$

이 포물선의 꼭짓점 $(-a, a^2-4)$가 직선 $y=2x+4$ 위에 있으므로

$a^2-4=2\times(-a)+4$, $a^2+2a-8=0$

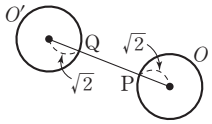
$(a+4)(a-2)=0$ $\therefore a=2$ ($\because a>0$) 답 ②

**0665** 원 $O: (x-1)^2+(y+2)^2=2$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원 $O'$의 방정식은

$(y-1)^2+(x+2)^2=2$ $\therefore (x+2)^2+(y-1)^2=2$

$\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 두 원의 중심 $(1, -2)$, $(-2, 1)$을 이은 선분의 길이에서 두 원의 반지름의 길이의 합을 뺀 것과 같으므로 구하는 최솟값은

$\sqrt{(-2-1)^2+(1+2)^2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$ 답 $\sqrt{2}$




**0666** $x^2+y^2-8x+6y=0$에서

$(x-4)^2+(y+3)^2=25$

이 원을 $y$축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-4)^2+(y+3)^2=25$ $\therefore (x+4)^2+(y+3)^2=25$

이 원이 직선 $x-2y+k=0$과 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 $(-4, -3)$과 직선 $x-2y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이보다 작아야 하므로

$\frac{|-4+6+k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}<5$, $|2+k|<5\sqrt{5}$

$-5\sqrt{5}<2+k<5\sqrt{5}$ $\therefore -2-5\sqrt{5}<k<-2+5\sqrt{5}$

따라서 $a=-2-5\sqrt{5}$, $b=-2+5\sqrt{5}$이므로

$b-a=10\sqrt{5}$ 답 $10\sqrt{5}$

**0667** 직선 $l$의 기울기를 $a$라 하면 직선 $l$의 방정식은

$y-(-2)=a(x-1)$ $\therefore y=ax-a-2$

직선 $y=ax-a-2$를 $x$축의 방향으로 $-5$만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=a(x+5)-a-2$ $\therefore y=ax+4a-2$

직선 $y=ax+4a-2$를 $x$축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=ax+4a-2$ $\therefore y=-ax-4a+2$

이 직선이 점 $(-2, 10)$을 지나므로

$10=2a-4a+2$, $2a=-8$

$\therefore a=-4$ 답 $-4$

**0668** 포물선 $y=x^2-4x+a$를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=(-x)^2-4\times(-x)+a$ $\therefore y=-x^2-4x-a$

포물선 $y=-x^2-4x-a$를 $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-2=-x^2-4x-a$ $\therefore y=-x^2-4x-a+2$

이 포물선이 $x$축에 접하므로 이차방정식

$-x^2-4x-a+2=0$, 즉 $x^2+4x+a-2=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-(a-2)=0$

$4-a+2=0$ $\therefore a=6$ 답 **6**

다른풀이

포물선 $y=-x^2-4x-a+2$, 즉 $y=-(x+2)^2-a+6$의 꼭짓점의 좌표는 $(-2, -a+6)$

이때 포물선이 $x$축에 접하면 꼭짓점의 $y$좌표가 0이므로

$-a+6=0$ $\therefore a=6$

**0669** 원 $O_1$의 방정식은 $(x-4)^2+(y-2)^2=4$

원 $O_1$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

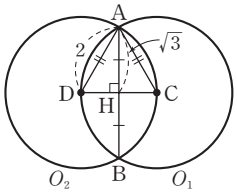
$(y-4)^2+(x-2)^2=4$ $\therefore (x-2)^2+(y-4)^2=4$

원 $(x-2)^2+(y-4)^2=4$를 $y$축의 방향으로 $a$만큼 평행이동한 원 $O_2$의 방정식은

$(x-2)^2+(y-a-4)^2=4$

원 $O_1$과 원 $O_2$의 중심을 각각 C(4, 2), D(2, $a+4$)라 하면 두 원의 두 교점을 이은 선분 AB는 선분 CD에 의하여 수직이등분된다.

오른쪽 그림과 같이 두 선분 AB, CD의 교점을 H라 하면




$\overline{AH}=\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{3}$

두 원 $O_1$, $O_2$의 반지름의 길이가 모두 2이므로

$\overline{AC}=\overline{AD}=2$

$\triangle ACH$와 $\triangle ADH$에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{CH}=\overline{DH}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$ $\therefore \overline{CD}=2$

즉, $\overline{CD}=\sqrt{(2-4)^2+(a+4-2)^2}=2$에서

$(a+2)^2=0$ $\therefore a=-2$ 답 ②

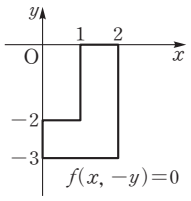
**0670** 방정식 $f(x+1, 2-y)=0$에서

$f(x+1, -(y-2))=0$

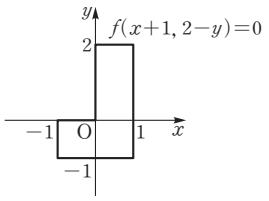
$f(x, y)=0 \longrightarrow f(x, -y)=0 \longrightarrow f(x+1, -(y-2))=0$

과 같이 이동시킨다고 하면 방정식 $f(x+1, -(y-2))=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 $x$축에 대하여 대칭이동한 후 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 $x$축에 대하여 대칭이동하면 [그림 1]과 같고, 이것을 다시 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 [그림 2]와 같다.




[그림 1]




[그림 2]

따라서 방정식 $f(x+1, 2-y)=0$이 좌표평면에 나타내는 도형은 ②이다. 답 ②

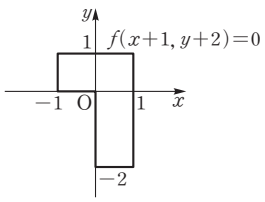
다른풀이

$f(x, y)=0 \longrightarrow f(x+1, y+2)=0$

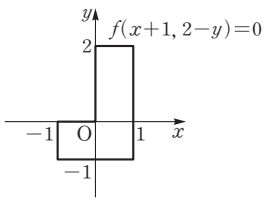
$\longrightarrow f(x+1, -y+2)=0$

과 같이 이동시킨다고 하면 방정식 $f(x+1, 2-y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동한 후 $x$축에 대하여 대칭이동한 것이다.

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 $x$축의 방향으로 $-1$만큼, $y$축의 방향으로 $-2$만큼 평행이동하면 [그림 1]과 같고, 이것을 다시 $x$축에 대하여 대칭이동하면 [그림 2]와 같다.



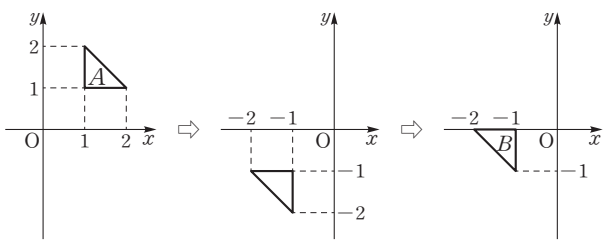

[그림 1]




[그림 2]

따라서 방정식 $f(x+1, 2-y)=0$이 좌표평면에 나타내는 도형은 ②이다.

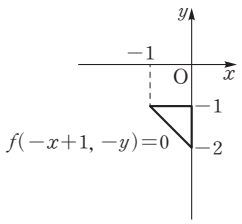
**0671** 다음 그림과 같이 도형 $B$는 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형 $A$를 원점에 대하여 대칭이동한 후 $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

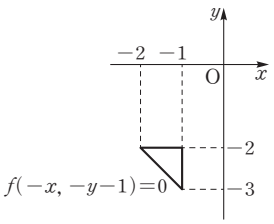


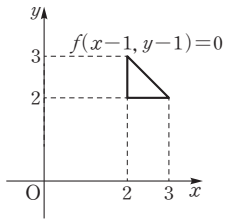
방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동하면 $f(-x, -y)=0$이고, 이것을 다시 $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $f(-x, -(y-1))=0$

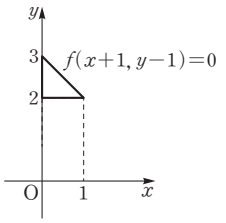
$\therefore f(-x, -y+1)=0$ 답 ③

**참고** 주어진 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형 $A$에 대하여 각 방정식이 나타내는 도형은 다음 그림과 같다.

① 


② 


④ 


⑤ 


**0672** 포물선 $y=x^2-6x+5$, 즉 $y=(x-3)^2-4$의 꼭짓점의 좌표는 $(3, -4)$

포물선 $y=-x^2-2x+9$, 즉 $y=-(x+1)^2+10$의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 10)$

두 포물선이 점 $(a, b)$에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점 $(a, b)$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 꼭짓점을 이은 선분의 중점이 점 $(a, b)$이므로

$a=\frac{3+(-1)}{2}=1$, $b=\frac{-4+10}{2}=3$

$\therefore a+b=4$ 답 ④

**0673** $x^2+y^2+8x+4y+11=0$에서

$(x+4)^2+(y+2)^2=9$

즉, 원의 중심의 좌표는 $(-4, -2)$이고 반지름의 길이는 3이다.

원의 중심 $(-4, -2)$를 점 $(1, -3)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(a, b)$이므로

$\frac{-4+a}{2}=1$, $\frac{-2+b}{2}=-3$ $\therefore a=6, b=-4$

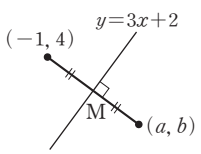
또, 원은 대칭이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로

$r=3$

$\therefore a+b+r=5$ 답 **5**

**0674** 두 점 $(-1, 4)$, $(a, b)$를 이은 선분의 중점을 M이라 하면

$\mathrm{M}\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{4+b}{2}\right)$




점 M이 직선 $y=3x+2$ 위의 점이므로

$\frac{4+b}{2}=3\times\frac{-1+a}{2}+2$ $\therefore 3a-b=3$ …… ㉠

또, 두 점 $(-1, 4)$, $(a, b)$를 지나는 직선이 직선 $y=3x+2$와 수직이므로

$\frac{b-4}{a-(-1)}=-\frac{1}{3}$ $\therefore a+3b=11$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$

$\therefore ab=6$ 답 ④

**0675** 원 $x^2+(y-1)^2=9$와 원 $x^2+y^2-4x-6y+c=0$, 즉 $(x-2)^2+(y-3)^2=13-c$의 반지름의 길이는 같으므로

$13-c=9$ $\therefore c=4$

두 원의 중심 $(0, 1)$, $(2, 3)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{0+2}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$, 즉 $(1, 2)$

이 점이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$2=a+b$ …… ㉠

또, 두 원의 중심 $(0, 1)$, $(2, 3)$을 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$와 수직이므로

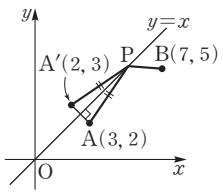
$\frac{3-1}{2-0}\times a=-1$ $\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=3$

$\therefore abc=-12$ 답 **−12**

**0676** 점 A(3, 2)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

A′(2, 3)




이때 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}$

$\geq\overline{\mathrm{A'B}}$

$=\sqrt{(7-2)^2+(5-3)^2}$

$=\sqrt{29}$

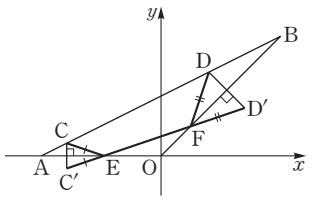
따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\sqrt{29}$이다. 답 $\sqrt{29}$

**0677** 점 C$(-8, 1)$을 $x$축에 대하여 대칭이동한 점을 C′이라 하면

C′$(-8, -1)$

점 D$(4, 7)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 D′이라 하면

D′$(7, 4)$




이때 $\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{C'E}}$, $\overline{\mathrm{DF}}=\overline{\mathrm{D'F}}$이므로

$\overline{\mathrm{CE}}+\overline{\mathrm{EF}}+\overline{\mathrm{FD}}=\overline{\mathrm{C'E}}+\overline{\mathrm{EF}}+\overline{\mathrm{D'F}}$

$\geq\overline{\mathrm{C'D'}}$

즉, $\overline{\mathrm{CE}}+\overline{\mathrm{EF}}+\overline{\mathrm{FD}}$의 값이 최소가 되는 것은 두 점 E, F가 직선 C′D′ 위에 있을 때이다.

직선 C′D′의 방정식은

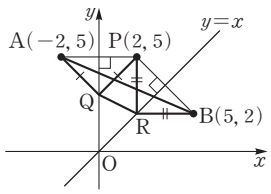
$y-4=\frac{4-(-1)}{7-(-8)}(x-7)$ $\therefore y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

따라서 이 직선의 $x$절편이 $-5$이므로 점 E의 $x$좌표는 $-5$이다.

답 ①

**0678** 점 P(2, 5)를 $y$축에 대하여 대칭이동한 점을 A, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하면

A(−2, 5), B(5, 2)




이때 $\overline{PQ}=\overline{AQ}$, $\overline{PR}=\overline{BR}$이므로

삼각형 PQR의 둘레의 길이는

$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{PR}=\overline{AQ}+\overline{QR}+\overline{BR}$

$\geq\overline{AB}$

$=\sqrt{(5+2)^2+(2-5)^2}=\sqrt{58}$

즉, $m=\sqrt{58}$이므로 $m^2=(\sqrt{58})^2=58$

답 58

## STEP 2 실전 마스터 본문 139~141쪽

**0679** ㄱ. 원을 평행이동해도 반지름의 길이는 변하지 않으므로 원 $C$의 반지름의 길이는 원 $x^2+(y-1)^2=9$의 반지름의 길이인 3과 같다.

ㄴ. 원 $C$의 방정식은 $(x-m)^2+(y-n-1)^2=9$

이 원의 중심의 좌표는 $(m, n+1)$이고 $x$축에 접하려면

$|n+1|=3$ $\therefore n=-4$ 또는 $n=2$

즉, 실수 $n$의 값은 2개이다.

ㄷ. $m\neq0$일 때, $x=m$, $y=n+1$을 $y=\frac{n+1}{m}x$에 대입하면

$n+1=\frac{n+1}{m}\times m$

즉, 등식이 성립하므로 직선 $y=\frac{n+1}{m}x$는 원 $C$의 중심 $(m, n+1)$을 지나고 원 $C$의 넓이를 이등분한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

**0680** 세 원 $C_1$, $C_2$, $C_3$의 중심을 각각 $C_1$, $C_2$, $C_3$이라 하면

$C_1(2, 0)$, $C_2(2+a, 0)$, $C_3(2+b, c)$

두 원 $C_1$, $C_2$가 외접하므로

$|(2+a)-2|=1+1$ $\therefore |a|=2$ …… ㉠

두 원 $C_1$, $C_3$이 외접하므로

$\sqrt{\{(2+b)-2\}^2+(c-0)^2}=1+1$

$\sqrt{b^2+c^2}=2$ $\therefore b^2+c^2=4$ …… ㉡

두 원 $C_2$, $C_3$이 외접하므로

$\sqrt{\{(2+b)-(2+a)\}^2+(c-0)^2}=1+1$

$\sqrt{(b-a)^2+c^2}=2$ $\therefore (b-a)^2+c^2=4$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $|a|=2$, $|b|=1$, $|c|=\sqrt{3}$

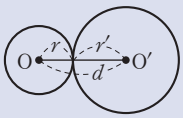
$\therefore |abc|=|a||b||c|=2\sqrt{3}$

답 $2\sqrt{3}$

**Lecture**

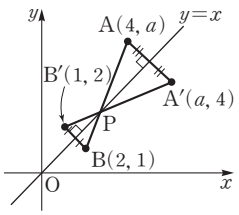
두 원 $O$, $O'$의 반지름의 길이가 각각 $r$, $r'$이고 중심 사이의 거리가 $d$일 때, 두 원이 외접하면

⇨ $r+r'=d$




**0681** 두 점 A(4, $a$), B(2, 1)을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 각각 A′($a$, 4), B′(1, 2)이다.

이때 두 직선 AA′, BB′은 각각 직선 $y=x$와 서로 수직이므로 두 직선 AA′, BB′은 서로 평행하다. 즉, 두 삼각형 APA′, BPB′은 서로 닮음이다.




그런데 두 삼각형 APA′, BPB′의 넓이의 비가 9 : 4이므로 두 삼각형 APA′, BPB′의 닮음비는 3 : 2이다.

$\therefore \overline{AA'}:\overline{BB'}=3:2$

$\overline{AA'}=\sqrt{(a-4)^2+(4-a)^2}=\sqrt{2}(a-4)$ ($\because a>4$)

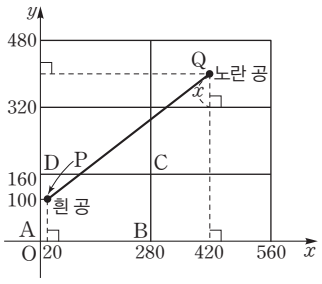
$\overline{BB'}=\sqrt{(1-2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$

즉, $\overline{AA'}:\overline{BB'}=3:2$에서 $\sqrt{2}(a-4):\sqrt{2}=3:2$

$2(a-4)=3$ $\therefore a=\frac{11}{2}$

답 ②

**0682** 점 A를 원점, 직선 AB를 $x$축, 직선 AD를 $y$축으로 하는 좌표평면을 잡고 직사각형 ABCD를 변 CD, BC에 대하여 대칭이동하면 다음 그림과 같다.




위의 그림에서 점 P의 좌표는 (20, 100), 점 Q의 좌표는 (420, 320+$x$)이고 흰 공이 움직인 거리는 $\overline{PQ}$의 길이와 같으므로

$\overline{PQ}=\sqrt{(420-20)^2+(320+x-100)^2}=500$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+440x-41600=0$, $(x-80)(x+520)=0$

$\therefore x=80$ ($\because x>0$)

답 80

**0683** $C_1 : x^2+y^2-2x+2y+1=0$에서

$C_1 : (x-1)^2+(y+1)^2=1$

원 $C_1$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원 $C_2$의 방정식은

$(y-1)^2+(x+1)^2=1$

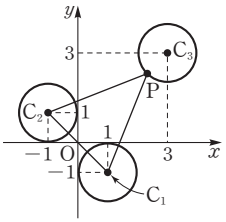
$\therefore C_2 : (x+1)^2+(y-1)^2=1$

원 $C_2$를 $x$축의 방향으로 4만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원 $C_3$의 방정식은

$(x-4+1)^2+(y-2-1)^2=1$

$\therefore C_3 : (x-3)^2+(y-3)^2=1$

즉, 세 원 $C_1$, $C_2$, $C_3$의 중심의 좌표는 각각 $C_1(1, -1)$, $C_2(-1, 1)$, $C_3(3, 3)$이다.




오른쪽 그림에서 $\triangle C_1C_2P$의 넓이가 최소가 되는 것은 점 P와 직선 $C_1C_2$ 사이의 거리가 최소일 때이다.

이때 직선 $C_1C_2$의 방정식은 $y=-x$, 즉 $x+y=0$이므로 점 $C_3(3, 3)$과 직선 $x+y=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|3+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$

원 $C_3$의 반지름의 길이가 1이므로 점 P와 직선 $C_1C_2$ 사이의 거리의 최솟값은 $3\sqrt{2}-1$

또한, $\overline{C_1C_2}=\sqrt{(-1-1)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{2}$이므로 $\triangle C_1C_2P$의 넓이의 최솟값은

$\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times(3\sqrt{2}-1)=6-\sqrt{2}$ 답 $6-\sqrt{2}$

**0684** 주어진 규칙에 따라 점 $P_2$, $P_3$, $P_4$, …의 좌표를 구하면

$P_1(0, 0) \longrightarrow P_2(1, 0) \longrightarrow P_3(0, 1)$

$\longrightarrow P_4(1, 1) \longrightarrow P_5(2, 1) \longrightarrow P_6(1, 2)$

$\longrightarrow P_7(2, 2) \longrightarrow P_8(3, 2) \longrightarrow P_9(2, 3) \longrightarrow \cdots$

이므로 자연수 $n$에 대하여

$P_{3n-2}(n-1, n-1)$, $P_{3n-1}(n, n-1)$, $P_{3n}(n-1, n)$

ㄱ. 점 $P_{3n}$의 좌표는 $(n-1, n)$이다.

ㄴ. $P_2(1, 0)$, $P_4(1, 1)$, $P_{25}(8, 8)$, $P_{27}(8, 9)$이므로

$\overline{P_2P_4}=1$, $\overline{P_{25}P_{27}}=1$

$\therefore \overline{P_2P_4}=\overline{P_{25}P_{27}}$

ㄷ. $P_{14}(5, 4)$, $P_{15}(4, 5)$이므로 두 점 $P_{14}$, $P_{15}$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, 선분 $P_{14}P_{15}$와 직선 $y=x$는 서로 수직이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

**0685** 중심의 좌표가 $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$이고 반지름의 길이가 1인 원 $O_1$의 방정식은

$O_1 : \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=1$

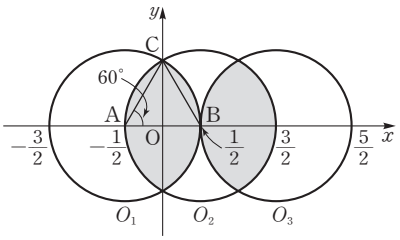
원 $O_1$을 $y$축에 대하여 대칭이동한 원 $O_2$의 방정식은

$\left(-x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=1$ $\therefore O_2 : \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=1$

원 $O_1$을 $x$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원 $O_3$의 방정식은

$\left(x-2+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=1$ $\therefore O_3 : \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=1$

따라서 원 $O_1$의 내부와 원 $O_2$의 내부의 공통부분, 원 $O_2$의 내부와 원 $O_3$의 내부의 공통부분은 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.




이때 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이므로

$\angle CAB=60^\circ$, $\triangle ABC=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$,

(부채꼴 ABC의 넓이)$=\pi\times 1^2\times\dfrac{60}{360}=\dfrac{\pi}{6}$

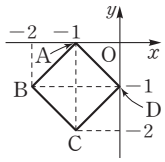
따라서 구하는 넓이는 $4\left\{\dfrac{\pi}{6}+\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)\right\}=\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$ 답 ③

**0686** 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동하면 $f(-x, -y)=0$

이것을 다시 $x$축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$f(-(x-1), -y)=0$ $\therefore f(1-x, -y)=0$

따라서 방정식 $f(1-x, -y)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 후 $x$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.




이 도형 위의 점과 원점 사이의 거리의 최댓값은 원점과 점 B 또는 점 C 사이의 거리이므로

$M=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

또, 최솟값은 원점과 직선 AD 사이의 거리이고 직선 AD의 방정식은 $x+y+1=0$이므로

$m=\dfrac{|1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore Mm=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ 답 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

**0687** 두 점 A(−2, 3), B(5, −4)를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+5}{2}, \dfrac{3-4}{2}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

직선 AB의 기울기가 $\dfrac{-4-3}{5-(-2)}=-1$이므로 종이를 접어 생긴 선의 방정식은

$y-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=x-\dfrac{3}{2}$ $\therefore y=x-2$

즉, 두 점 A와 B, C(1, 3)과 D($a$, $b$)는 각각 직선 $y=x-2$에 대하여 대칭이다.

두 점 C, D를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{1+a}{2}, \frac{3+b}{2}\right)$가 직선 $y=x-2$ 위의 점이므로

$\frac{3+b}{2}=\frac{1+a}{2}-2$ $\therefore a-b=6$ ····· ㉠

또, 두 점 C, D를 지나는 직선이 직선 $y=x-2$와 수직이므로

$\frac{b-3}{a-1}=-1$ $\therefore a+b=4$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=5$, $b=-1$

$\therefore a-2b=7$ 답 **7**

**0688** 두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$가 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이므로

$\overline{OA}=\overline{OD}$, $\overline{OB}=\overline{OC}$

또, 원점 O가 선분 CA를 1 : 2로 내분하는 점이므로 $\overline{OC}=k$라 하면 $\overline{OB}=k$, $\overline{OA}=\overline{OD}=2k$

$\therefore \square ABCD=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}$

$=\frac{1}{2}(2k+k)(2k+k)$

$=\frac{9}{2}k^2$

이때 □ABCD의 넓이가 18이므로

$\frac{9}{2}k^2=18$, $k^2=4$ $\therefore k=2$ ($\because k>0$)

$\therefore$ A(4, 0), B(0, 2), C(−2, 0), D(0, −4)

즉, 직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$ $\therefore y=-\frac{1}{2}x+2$

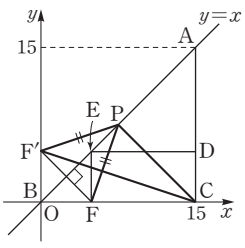
또한, 직선 CD의 방정식은

$\frac{x}{-2}+\frac{y}{-4}=1$ $\therefore y=-2x-4$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=2$, $c=-2$, $d=-4$이므로

$ad-bc=\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-4)-2\times(-2)=6$ 답 **6**

**0689** 오른쪽 그림과 같이 점 B가 원점, 선분 BC가 $x$축 위에 오도록 삼각형 ABC를 좌표평면 위에 놓으면 A(15, 15), C(15, 0)




직선 AB의 방정식은 $y=x$이고 점 E는 직선 AB 위에 있으므로 점 E의 좌표를 ($a$, $a$)라 하면 $2\overline{EF}=\overline{FC}$에서

$2a=15-a$, $a=5$ $\therefore$ F(5, 0)

점 F를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 F′이라 하면 F′(0, 5)이고, $\overline{PF}=\overline{PF'}$이므로

$\overline{PF}+\overline{PC}=\overline{PF'}+\overline{PC}$

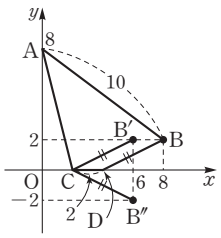
$\geq\overline{F'C}$

$=\sqrt{15^2+(-5)^2}=5\sqrt{10}$

따라서 구하는 최솟값은 $5\sqrt{10}$이다. 답 **$5\sqrt{10}$**

**0690** $\overline{CD}=2$, $\overline{AB}=\sqrt{(8-0)^2+(2-8)^2}=10$으로 일정하므로 $\overline{AC}+\overline{DB}$의 값이 최소일 때 사각형 ACDB의 둘레의 길이도 최소가 된다.

점 B(8, 2)를 $x$축의 방향으로 −2만큼 평행이동한 점을 B′, 점 B′을 $x$축에 대하여 대칭이동한 점을 B″이라 하면




B′(6, 2), B″(6, −2)이고

$\overline{DB}=\overline{CB'}=\overline{CB''}$

$\therefore \overline{AC}+\overline{DB}=\overline{AC}+\overline{CB''}$

$\geq\overline{AB''}$

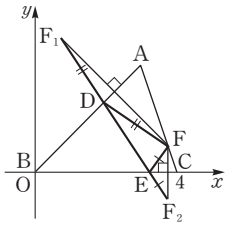
$=\sqrt{(6-0)^2+(-2-8)^2}=2\sqrt{34}$

따라서 사각형 ACDB의 둘레의 길이의 최솟값은

$\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{AB''}=10+2+2\sqrt{34}$

$=12+2\sqrt{34}$ 답 **$12+2\sqrt{34}$**

**0691** 오른쪽 그림과 같이 점 B가 원점, 선분 BC가 $x$축 위에 오도록 삼각형 ABC를 좌표평면 위에 놓으면 C(4, 0)




제1사분면 위의 점 A의 좌표를 ($a$, $b$)라 하면

$\overline{AB}^2=a^2+b^2=18$, $\overline{AC}^2=(a-4)^2+b^2=10$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=3$

$\therefore$ A(3, 3)

두 점 A(3, 3), C(4, 0)을 지나는 직선 AC의 방정식은

$y=-3x+12$

이때 점 F는 직선 AC 위의 점이므로 점 F의 좌표를 ($c$, $d$) ($3<c<4$)라 하면 $d=-3c+12$ ·····㉠

또, 직선 AB의 방정식은 $y=x$이므로 점 F를 직선 AB와 $x$축에 대하여 대칭이동한 점을 각각 $F_1$, $F_2$라 하면

$F_1(d, c)$, $F_2(c, -d)$

이때 $\overline{DF}=\overline{DF_1}$, $\overline{EF}=\overline{EF_2}$이므로

(삼각형 DEF의 둘레의 길이)

$=\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{DF}=\overline{DE}+\overline{EF_2}+\overline{DF_1}$

$\geq\overline{F_1F_2}$

$=\sqrt{(c-d)^2+(-d-c)^2}$

$=\sqrt{2c^2+2d^2}$

$=\sqrt{2c^2+2(-3c+12)^2}$ ($\because$ ㉠)

$=\sqrt{20\left(c-\frac{18}{5}\right)^2+\frac{144}{5}}$

따라서 $c=\frac{18}{5}$일 때, 삼각형 DEF의 둘레의 길이의 최솟값은

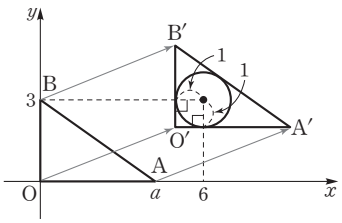
$\sqrt{\frac{144}{5}}=\frac{12}{5}\sqrt{5}$이므로

$p=5,\ q=12 \qquad \therefore\ p+q=17$ 답 **17**

**0692** $x^2+y^2-12x-6y+44=0$에서

$(x-6)^2+(y-3)^2=1$

즉, 삼각형 O′A′B′의 내접원의 중심의 좌표는 (6, 3)이고 반지름의 길이는 1이다.




위의 그림에서 점 O′의 좌표는 $(6-1,\ 3-1)$, 즉 (5, 2)이므로 삼각형 OAB를 삼각형 O′A′B′으로 옮기는 평행이동을

$(x,\ y)\longrightarrow(x+m,\ y+n)$이라 하면

$m=5,\ n=2$

즉, 삼각형 O′A′B′은 삼각형 OAB를 $x$축의 방향으로 5만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 삼각형 OAB의 내접원의 방정식은

$(x+5-6)^2+(y+2-3)^2=1$

$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$ ····· ㉠

또, 직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{a}+\frac{y}{3}=1 \qquad \therefore\ 3x+ay-3a=0$

이때 원 ㉠의 중심 (1, 1)과 직선 $3x+ay-3a=0$ 사이의 거리가 1이므로

$\frac{|3+a-3a|}{\sqrt{3^2+a^2}}=1,\ |3-2a|=\sqrt{9+a^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$3a^2-12a=0,\ a(a-4)=0$

$\therefore\ a=4\ (\because\ a>0)$

따라서 A(4, 0)이므로 점 A′의 좌표는

$(4+5,\ 0+2)$, 즉 (9, 2) 답 ②

**0693** 주어진 규칙에 따라 점 $P_1$, $P_2$, $P_3$, …의 좌표를 구하면

$P(a,\ b)\longrightarrow P_1(a,\ -b)\longrightarrow P_2(-a,\ -b)\longrightarrow P_3(-b,\ -a)$

$\longrightarrow P_4(b,\ a)\longrightarrow P_5(b,\ -a)\longrightarrow P_6(-b,\ -a)$

$\longrightarrow P_7(-a,\ -b)\longrightarrow P_8(a,\ b)\longrightarrow P_9(a,\ -b)\longrightarrow\ \cdots$

이므로 자연수 $n$에 대하여 두 점 $P_n$, $P_{n+8}$이 일치한다.

한편, $a_5+b_5=3$, $a_6+a_7=7$에서

$b+(-a)=3,\ -b+(-a)=7$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-5,\ b=-2$

따라서 $43=8\times5+3$에서 점 $P_{43}$은 점 $P_3$과 일치하므로

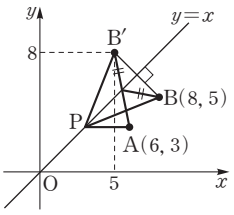
점 $P_{43}$의 좌표는 $(-b,\ -a)$, 즉 (2, 5) 답 ①

**0694** 오른쪽 그림과 같이 점 B(8, 5)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

B′(5, 8)

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}\geq\overline{AB'}$에서

$\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $\overline{AB'}$의 길이와 같다.

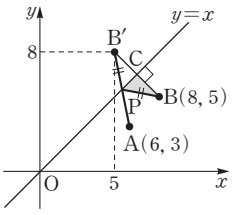



이때 직선 AB′의 방정식은

$y-3=\frac{8-3}{5-6}(x-6) \qquad \therefore\ y=-5x+33$

$\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소일 때의 점 P는 직선 AB′과 직선 $y=x$의 교점이므로 $-5x+33=x$에서 $x=\frac{11}{2}$

즉, 점 P의 좌표는 $\left(\frac{11}{2},\ \frac{11}{2}\right)$이다.




또한, 점 C는 선분 BB′의 중점이므로 점 C의 좌표는

$\left(\frac{8+5}{2},\ \frac{5+8}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{13}{2},\ \frac{13}{2}\right)$

따라서

$\overline{PC}=\sqrt{\left(\frac{13}{2}-\frac{11}{2}\right)^2+\left(\frac{13}{2}-\frac{11}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$,

$\overline{BC}=\sqrt{\left(\frac{13}{2}-8\right)^2+\left(\frac{13}{2}-5\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

이므로 삼각형 BPC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

## STEP 3 상위권 마스터 본문 142쪽

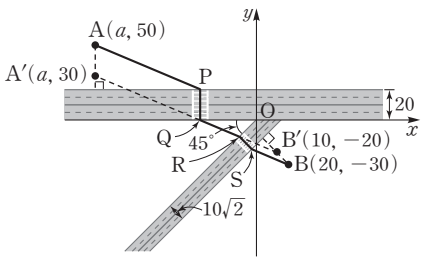
**0695**

TIP 두 점 A, B를 도로의 폭만큼 평행이동한 점을 이용하여 최단거리를 구한다.

다음 그림과 같이 각 횡단보도의 양쪽 끝 지점을 P, Q, R, S라 하면 횡단보도의 폭은 $\overline{PQ}=20$, $\overline{RS}=10\sqrt{2}$로 일정하므로 두 횡단보도를 거쳐 A 지점에서 B 지점까지 가는 최단거리는

$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RS}+\overline{BS}$

$=\overline{AP}+\overline{QR}+\overline{BS}+20+10\sqrt{2}$ ····· ㉠



점 A에서 폭이 20인 도로 쪽으로 도로의 폭만큼 평행이동한 점을 A′이라 하면 A′$(a, 30)$이다.
같은 방법으로 점 B에서 폭이 $10\sqrt{2}$인 도로 쪽으로 도로의 폭만큼 평행이동한 점을 B′이라 하면 점 B′은 점 B를 $x$축의 방향으로 $-10$만큼, $y$축의 방향으로 10만큼 평행이동한 점이므로 B′$(10, -20)$이다.
이때 $\overline{AP}=\overline{A'Q}$, $\overline{BS}=\overline{B'R}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{QR}+\overline{BS}&=\overline{A'Q}+\overline{QR}+\overline{B'R}\\&=\overline{A'B'}\\&=\sqrt{(a-10)^2+50^2}\end{aligned}$$

따라서 ㉠에서 최단거리는
$\sqrt{(a-10)^2+50^2}+20+10\sqrt{2}=b+10\sqrt{2}$
즉, $\sqrt{(a-10)^2+50^2}=b-20$에서
$(a-10)^2+50^2=(b-20)^2$
$\therefore -(a-10)^2+(b-20)^2=50^2$ 답 ①

## 0696

TIP 일치하는 점이 2개, 3개, 4개인 경우로 나누어 생각한다.

원 $C$ : $x^2+y^2=1$과 직선 $y=-\sqrt{3}x$의 두 교점을 각각 A, C라 하고 원 $C$와 직선 $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$의 두 교점을 각각 B, D라 하자.

(i) 옮기기 전의 점들과 일치하는 점이 2개인 경우
네 점 A, B, C, D 중 두 점은 자기 자신으로, 나머지 두 점은 처음 네 점이 아닌 점으로 옮겨져야 한다.
대칭이동에 의해 자기 자신으로 옮겨지는 두 점이 A, B가 되려면 직선 $l$은 직선 AB가 되어야 한다.
같은 방법으로 생각하면 직선 BC, 직선 CD, 직선 DA도 직선 $l$이 될 수 있다.
즉, 이 경우 직선 $l$이 될 수 있는 직선은 4개이다.

(ii) 옮기기 전의 점들과 일치하는 점이 3개인 경우
원 $C$를 직선 $l$에 대하여 대칭이동한 원을 $C'$이라 하면 네 점 A, B, C, D 중 세 점이 원 $C'$ 위의 점이어야 한다.
그런데 사각형 ABCD는 원 $C$에 내접하는 정사각형이므로 네 점 A, B, C, D 중 어느 세 점만을 지나면서 원 $C$와 합동인 원 $C'$은 존재하지 않는다.
즉, 이 경우 직선 $l$이 될 수 있는 직선은 없다.

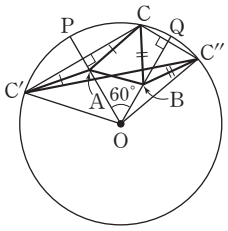
(iii) 옮기기 전의 점들과 일치하는 점이 4개인 경우
직선에 대한 대칭이동에 의해 네 점이 모두 자기 자신으로 대칭이동되는 경우는 없다.
즉, 네 점 중 두 점은 자기 자신으로, 나머지 두 점은 서로 상대방으로 대칭이동되거나 두 점씩 짝 지어 서로 상대방으로 대칭이동되는 경우가 가능하다.
네 점 중 두 점은 자기 자신으로, 나머지 두 점은 서로 상대방으로 대칭이동되도록 하는 직선은 직선 AC, 직선 BD, 즉 직선 $y=-\sqrt{3}x$와 $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$의 2개이다.
또한, 두 점씩 짝 지어 서로 상대방으로 대칭이동되도록 하는 직선은 원점을 지나면서 두 직선 $y=-\sqrt{3}x$와 $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$가 이루는 각을 이등분하는 직선으로 2개이다.
즉, 이 경우 직선 $l$이 될 수 있는 직선은 모두 4개이다.

(i), (ii), (iii)에서 주어진 조건을 만족시키는 직선 $l$의 개수는
$4+4=8$ 답 8

## 0697

TIP 점 C를 $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$에 대하여 대칭이동한 점을 각각 C′, C″이라 한 후 $\overline{AC}=\overline{AC'}$, $\overline{BC}=\overline{BC''}$임을 이용한다.

점 C를 선분 OP, OQ에 대하여 대칭이동한 점을 각각 C′, C″이라 하면
$\overline{AC}=\overline{AC'}$, $\overline{BC}=\overline{BC''}$이므로




$$\begin{aligned}&\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}\\&=\overline{AB}+\overline{BC''}+\overline{AC'}\\&\geq\overline{C'C''}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$의 최솟값은 $\overline{C'C''}$의 길이와 같다.
이때 $\angle POQ=60^\circ$이므로
$\angle C'OC''=2\angle POQ=120^\circ$
$\overline{OC'}=\overline{OC''}$에서 $\triangle OC'C''$은 $\angle C'OC''=120^\circ$인 이등변삼각형이므로

$$\overline{C'C''}=2\times r\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$$

$\therefore r=10$ 답 10

## Take a Break

### 인간의 네 유형

어느 철학자는 인간의 유형을 곤충의 습성과 비교하여 다음과 같이 네 부류로 나누었답니다.

첫째, 개미형. 개미는 지금 자신의 주위에서 무슨 일이 일어나든 자신의 먹이를 준비하기 위해 땀 흘리며 열심히 일만 합니다.

자신의 발전과 행복을 위해서만 일하며 살아가는 이기주의자라고 할 수 있겠죠. 이들은 이웃의 어려움이나 사회의 일에 무관심하며, 심한 경우 가족들의 희생도 은근히 강요한답니다.

둘째, 매미형. 매미는 다른 사람들이 열심히 일하는 동안 시원한 나무 그늘 아래서 낮잠을 자고, 노래를 부르는 등 하루종일 빈둥거립니다.

앞에 닥쳐올 미래야 어찌 되든간에 현재의 편안함과 쾌락을 추구하는 사람이죠. 이들 또한 자신의 즐거움 외엔 관심이 없기 때문에 자신은 물론 주위 사람들까지도 위험에 빠뜨릴 수 있답니다.

셋째, 꿀벌형. 꿀벌은 자신이 열심히 일해서 만든 꿀을 다른 이들에게 제공하여 맛을 즐기게 하고 건강을 유지하는데 도움을 줍니다.

희생과 봉사로 타인의 행복을 위해 노력하는 사람들이죠. 세상에 이런 사람들이 많다면 환경 오염 문제라든지 사람들을 두려움에 떨게 하는 범죄는 없어질 것입니다.

넷째, 거미형. 거미는 일도 하지 않고, 노래도 부르지 않으면서 거미줄에 먹이가 걸리기만을 숨어서 기다립니다. 요즘 들어 늘고 있는 온갖 범죄자, 상식과 법을 지키지 않는 파렴치한들이죠.

우리 자신은 과연 어디에 속하는 유형일까요?

memo

memo

memo