개념원리® | 수학 (하)

정답과 풀이

개념원리 익히기 • 확인체크

Ⅰ. 집합과 명제

1

(2), (3) '큰', '가까운'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

답 **집합:** (1), (4)

(1) **1, 3, 5, 15** (4) **−1, 2**

2

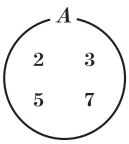
답 (1) $\in$ (2) $\in$ (3) $\notin$ (4) $\in$

3

답 (1) $\boldsymbol{A=\{2, 3, 5, 7\}}$

(2) $\boldsymbol{A=\{x \mid x}$**는 10 이하의 소수**$\boldsymbol{\}}$

(3)



4

$A=\{1, 2, 3, 6\}$, $B=\{9, 18, 27, \cdots\}$, $C=\{2, 3, 4\}$, $D=\varnothing$이므로 A, C, D는 유한집합, B는 무한집합이다. 이때 D는 공집합이다.

답 (1) $\boldsymbol{A, C, D}$ (2) $\boldsymbol{B}$ (3) $\boldsymbol{D}$

5

(2) $x^2+1=0$, 즉 $x^2=-1$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 $A=\varnothing$

$\therefore n(A)=0$

(3) $|x|<2$에서 $-2<x<2$

따라서 정수 x는 $-1, 0, 1$의 3개이므로

$n(A)=3$

답 (1) **10** (2) **0** (3) **3**

6

'작은', '맛있게', '잘하는'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

답 ④, ⑤

7

집합 A의 원소는 $4, 8, 12, 16, \cdots$,

집합 B의 원소는 $1, 2, 4, 8$이므로

① $1 \notin A$ ② $2 \in B$

③ $5 \notin B$ ⑤ $8 \in B$

따라서 옳은 것은 ④이다.

답 ④

8

① $\{3, 5, 7, 9\}$ ② $\{3, 5, 7, 9\}$

③ $\{3, 5, 7\}$ ④ $\{2, 3, 5, 7\}$

⑤ $\{1, 3, 5, 7\}$

답 ③

9

$A=\{2, 4, 6, 8\}$이므로

$x=2$일 때, $3x-2=3\times2-2=4$

$x=4$일 때, $3x-2=3\times4-2=10$

$x=6$일 때, $3x-2=3\times6-2=16$

$x=8$일 때, $3x-2=3\times8-2=22$

$\therefore B=\{4, 10, 16, 22\}$

답 $\boldsymbol{B=\{4, 10, 16, 22\}}$

10

① $10=2^1\times5^1$

② $60=2^2\times3^1\times5^1$

③ $100=2^2\times5^2$

④ $250=2^1\times5^3$

⑤ $400=2^4\times5^2$

따라서 집합 A의 원소가 아닌 것은 ②이다.

답 ②

11

ㄱ. $\{11, 13, 15, 17, \cdots\}$이므로 무한집합이다.

ㄴ. $\varnothing$을 원소로 갖는 집합이므로 유한집합이다.
ㄷ. $1<x<3$인 홀수 x는 없다.
따라서 공집합이므로 유한집합이다.
ㄹ. $n=1$일 때, $x=2\times1=2$
$n=2$일 때, $x=2\times2=4$
$n=3$일 때, $x=2\times3=6$
$\vdots$
즉, $\{2, 4, 6, \cdots\}$이므로 무한집합이다.
따라서 유한집합인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 **ㄴ, ㄷ**

12

$A=\{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$
$x^2=-4$를 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로
$B=\varnothing$
$|x|=4$에서 $x=\pm4$ $\quad\therefore C=\{-4, 4\}$
$\therefore n(A)+n(B)-n(C)=7+0-2=5$ 답 **5**

13

답 (1) $\varnothing$, **{2}, {4}, {2, 4}**
(2) $\varnothing$, **{1}, {3}, {9}, {1, 3}, {1, 9}, {3, 9}, {1, 3, 9}**

14

답 (1) $\subset$ (2) $\not\subset$ (3) $\subset$

15

(1) $\{-1, 1\}$ $\boxed{\neq}$ $\{x|x^2-2x+1=0\}=\{1\}$
(2) $\varnothing$ $\boxed{\neq}$ $\{x|x$는 $2<x<4$인 자연수$\}=\{3\}$
(3) $\{x|x=2^n, n=1, 2, 3\}$에서
$n=1$일 때, $x=2^1=2$
$n=2$일 때, $x=2^2=4$
$n=3$일 때, $x=2^3=8$
즉, $\{2, 4, 8\}$이므로
$\{2, 4, 8\}$ $\boxed{=}$ $\{x|x=2^n, n=1, 2, 3\}$
답 (1) $\neq$ (2) $\neq$ (3) $=$

16

$\{x|x$는 5 이하의 소수$\}=\{2, 3, 5\}$
이므로 주어진 집합의 진부분집합은
$\varnothing$, **{2}, {3}, {5}, {2, 3}, {2, 5}, {3, 5}**
답 **풀이 참조**

17

$A=\{1, 2, 3, 6\}$
(1) $n(A)=4$이므로 집합 A의 부분집합의 개수는
$2^4=16$
(2) 진부분집합의 개수는 집합 A의 부분집합의 개수에서 자기 자신을 제외한 집합의 개수이므로 구하는 진부분집합의 개수는
$2^4-1=15$
(3) 집합 A에서 원소 1, 6을 제외한 집합 $\{2, 3\}$의 부분집합에 원소 1, 6을 넣은 집합과 같으므로 구하는 부분집합의 개수는
$2^{4-2}=2^2=4$
(4) 집합 A에서 원소 3을 제외한 집합 $\{1, 2, 6\}$의 부분집합과 같으므로 구하는 부분집합의 개수는
$2^{4-1}=2^3=8$
답 (1) **16** (2) **15** (3) **4** (4) **8**

18

① 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing\subset A$
② 1은 집합 B의 원소이므로 $1\in B$
③ 3은 집합 A의 원소가 아니므로 $3\notin A$
④ 2는 집합 A의 원소이므로 $\{2\}\subset A$
⑤ 1, 3, 5는 집합 B의 원소이므로 $\{1, 3, 5\}\subset B$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

19

$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$
ㄱ. 5는 집합 A의 원소가 아니므로 $5\notin A$
ㄴ. 6은 집합 A의 원소이므로 $6\in A$
ㄷ. 4, 10은 집합 A의 원소이므로 $\{4, 10\}\subset A$

ㄹ. 집합 A의 원소 10에 대하여

　$10 \notin \{2, 4, 6, 8\}$이므로 $A \not\subset \{2, 4, 6, 8\}$

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

20

집합 S의 원소는 $\varnothing$, 0, $\{0\}$, 1이다.

① $\varnothing$은 집합 S의 원소이므로 $\varnothing \in S$

② 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing \subset S$

③ 1은 집합 S의 원소이므로 $1 \in S$

④ $\{0\}$은 집합 S의 원소이므로 $\{\{0\}\} \subset S$

⑤ 0, $\{0\}$은 집합 S의 원소이므로 $\{0, \{0\}\} \subset S$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

21

$-1 \in A$에서 $-1 \in B$이어야 하므로

$a-2=-1$ 또는 $1-a=-1$

$\therefore a=1$ 또는 $a=2$

(i) $a=1$일 때,

　$A=\{-1, 0\}$, $B=\{-1, 0, 2\}$이므로 $A \subset B$

(ii) $a=2$일 때,

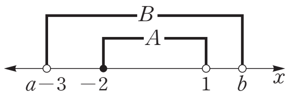
　$A=\{-1, 3\}$, $B=\{-1, 0, 2\}$이므로 $A \not\subset B$

(i), (ii)에서 $A \subset B$를 만족시키는 a의 값은 1이다.

답 1

22

두 집합 A, B에 대하여 $A \subset B$가 성립하도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉, $a-3<-2$, $b \geq 1$이므로

$a<1$, $b \geq 1$

따라서 정수 a의 최댓값은 0, 정수 b의 최솟값은 1이므로 구하는 합은

$0+1=1$ 답 1

23

$A \subset B$이고 $B \subset A$이므로 $A=B$

$4 \in A$에서 $4 \in B$이어야 하므로

$a^2-3a=4$, $a^2-3a-4=0$

$(a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=4$

(i) $a=-1$일 때,

　$A=\{-3, 0, 4\}$, $B=\{2, 4, 5\}$이므로 $A \neq B$

(ii) $a=4$일 때,

　$A=\{2, 4, 5\}$, $B=\{2, 4, 5\}$이므로 $A=B$

(i), (ii)에서 $A=B$를 만족시키는 a의 값은 4이다.

답 4

다른풀이 $2 \in B$, $5 \in B$에서 $2 \in A$, $5 \in A$이어야 하므로

(i) $a+1=2$, $a-2=5$일 때,

　이를 동시에 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a+1=5$, $a-2=2$, 즉 $a=4$일 때,

　$A=\{2, 4, 5\}$, $B=\{2, 4, 5\}$이므로 $A=B$

(i), (ii)에서 $A=B$를 만족시키는 a의 값은 4이다.

24

집합 X는 집합 A의 부분집합 중 3, 5는 반드시 원소로 갖고 9는 원소로 갖지 않는 부분집합이므로 집합 A에서 원소 3, 5, 9를 제외한 집합 $\{1, 7, 11\}$의 부분집합에 원소 3, 5를 넣은 집합과 같다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{6-2-1}=2^3=8$ 답 8

25

집합 A의 부분집합의 개수는

$2^4=16$

집합 A의 부분집합 중 소수 2, 3, 5를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{4-3}=2$

따라서 적어도 한 개의 소수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$16-2=14$ 답 14

26

집합 X는 집합 B의 부분집합 중 0, 1을 반드시 원소로 갖는 부분집합이므로

$\{0, 1\}$, $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 1, 2, 3\}$

따라서 집합 X가 될 수 없는 것은 ④이다. 답 ④

27

$x^2-11x+18=0$에서

$(x-2)(x-9)=0$ $\therefore x=2$ 또는 $x=9$

$\therefore A=\{2, 9\}$

$B=\{x|x$는 18의 양의 약수$\}$이므로

$B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

따라서 집합 X는 집합 B의 부분집합 중 2, 9를 반드시 원소로 갖는 부분집합이므로 집합 X의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$ 답 **16**

28

$A=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B=\{-2, 2\}$이므로 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 -2, 2를 반드시 원소로 갖는 부분집합에서 두 집합 A, B를 제외한 것과 같다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{7-2}-2=32-2=30$ 답 **30**

29

(1) $\boldsymbol{A\cup B=\{a, b, c, d, e\}}$

$\boldsymbol{A\cap B=\{a, c, e\}}$

(2) $A=\{3, 6, 9\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로

$\boldsymbol{A\cup B=\{1, 2, 3, 6, 9\}}$

$\boldsymbol{A\cap B=\{3, 6\}}$

(3) $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{-2, 1\}$이므로

$\boldsymbol{A\cup B=\{-2, 1, 2, 3, 4\}}$

$\boldsymbol{A\cap B=\{1\}}$

답 **풀이 참조**

30

ㄱ. $A\cap B=\varnothing$이므로 두 집합 A, B는 서로소이다.

ㄴ. $A=\{0, 1, 2\}$, $B=\{2\}$이므로

$A\cap B=\{2\}$

따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

ㄷ. $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 3, 9\}$이므로

$A\cap B=\{1\}$

따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다.

ㄹ. 음의 정수이면서 양의 정수인 정수는 없으므로

$A\cap B=\varnothing$

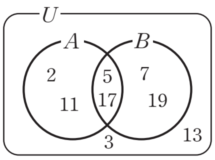
따라서 두 집합 A, B는 서로소이다.

따라서 두 집합 A, B가 서로소인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 **ㄱ, ㄹ**

31

전체집합 $U=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$의 두 부분집합 A, B를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



(1) $A^C=\boldsymbol{\{3, 7, 13, 19\}}$

(2) $B^C=\boldsymbol{\{2, 3, 11, 13\}}$

(3) $A-B=\boldsymbol{\{2, 11\}}$

(4) $B-A=\boldsymbol{\{7, 19\}}$

(5) $(A\cup B)^C=\boldsymbol{\{3, 13\}}$

(6) $(A\cap B)^C=\boldsymbol{\{2, 3, 7, 11, 13, 19\}}$

답 **풀이 참조**

32

② $U-A^C=(A^C)^C=A$

③ $(A^C)^C\cap U=A\cap U=A$

⑤ $(A\cap B)\subset A$이므로 $A\cup(A\cap B)=A$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

33

$A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 2, 4\}$, $C=\{1, 3, 5, 7\}$

③ $A\cup B=\{1, 2, 3, 4\}$이므로

$(A\cup B)\cap C=\{1, 3\}$

④ $B\cap C=\{1\}$이므로

$A\cup(B\cap C)=\{1, 2, 3\}$

⑤ $B\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$이므로

$A\cap(B\cup C)=\{1, 2, 3\}$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

34

전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$의 두 부분집합이

$A=\{1, 2, 4, 8\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$이므로

$A-B=\{1, 4, 8\}$

$\therefore (A-B)^C=\{2, 3, 5, 6, 7\}$

따라서 집합 $(A-B)^C$의 모든 원소의 합은

$2+3+5+6+7=23$

답 **23**

35

① $A=\{1\}$, $B=\{-1, 1\}$이므로

$A\cap B=\{1\}$

② $A=\{-4, 4\}$, $B=\{x\mid x<-8\}$이므로

$A\cap B=\varnothing$

③ $A=\{0, 1, 2, \cdots\}$, $B=\{1, 2, 3, \cdots\}$이므로

$A\cap B=\{1, 2, 3, \cdots\}$

④ $A=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$, $B=\{4, 7, 10, 13, \cdots\}$이므로

$A\cap B=\{4, 10, 16, 22, \cdots\}$

⑤ $A=\{3, 6, 9, \cdots\}$, $B=\{8, 16, 24, \cdots\}$이므로

$A\cap B=\{24, 48, 72, \cdots\}$

따라서 두 집합 A, B가 서로소인 것은 ②이다.

답 ②

36

구하는 집합의 개수는 집합 A의 부분집합 중 a, c를 원소로 갖지 않는 집합의 개수, 즉 집합 $\{b, d\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{4-2}=2^2=4$

답 **4**

37

집합 B와 서로소인 집합은 집합 A의 부분집합 중 집합 B의 원소를 갖지 않는 집합이다.

집합 B의 원소의 개수를 n이라 하면

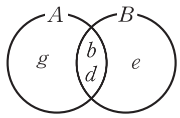
$2^{5-n}=8=2^3$에서

$5-n=3 \qquad \therefore n=2$

답 **2**

38

주어진 조건을 만족시키는 두 집합 A, B를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

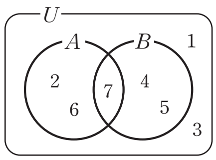


$A=\{b, d, g\}$

답 $\boldsymbol{\{b, d, g\}}$

39

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$과 주어진 조건을 만족시키는 두 부분집합 A, B를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

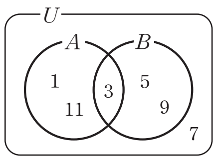


$A\cap B^C=A-B=\{2, 6\}$

답 **{2, 6}**

40

전체집합 $U=\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$과 주어진 조건을 만족시키는 두 부분집합 A, B를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$B=\{3, 5, 9\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$3+5+9=17$

답 **17**

41

$A\cap B=\{1, 5\}$에서 $5\in A$이므로

$a^2+1=5$, $a^2=4 \qquad \therefore a=-2$ 또는 $a=2$

(i) $a=-2$일 때,

$A=\{1, 4, 5\}$, $B=\{-11, -3, 3\}$이므로

$A\cap B=\varnothing$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$일 때,

$A=\{1, 4, 5\}$, $B=\{1, 3, 5\}$이므로

$A\cap B=\{1, 5\}$

(i), (ii)에서 $a=2$ 답 **2**

42

$A-B=\{2, 3\}$에서 $2\in A$이므로

$a^2+1=2$, $a^2=1$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

(i) $a=-1$일 때,

$A=\{1, 2, 3, 5\}$, $B=\{-2, 1, 5\}$이므로

$A-B=\{2, 3\}$

(ii) $a=1$일 때,

$A=\{1, 2, 3, 5\}$, $B=\{0, 1, 7\}$이므로

$A-B=\{2, 3, 5\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $B=\{-2, 1, 5\}$ 답 $\{-2, 1, 5\}$

43

$A\cup B=\{2, 4, 5, 7\}$에서 $4\in A$ 또는 $7\in A$이므로

$a-1=4$ 또는 $a-1=7$

$\therefore a=5$ 또는 $a=8$

(i) $a=5$일 때,

$A=\{2, 4, 5\}$, $B=\{4, 7\}$이므로

$A\cup B=\{2, 4, 5, 7\}$

(ii) $a=8$일 때,

$A=\{2, 5, 7\}$, $B=\{4, 13\}$이므로

$A\cup B=\{2, 4, 5, 7, 13\}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $B=\{4, 7\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$4+7=11$ 답 **11**

44

① $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$

② $(A\cup A^C)\cup B=U\cup B=U$

③ $(U-A^C)\cap B=(A^C)^C\cap B=A\cap B$

④ $(A^C)^C\cap(U-B^C)=A\cap(B^C)^C=A\cap B$

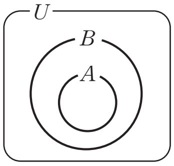
⑤ $(A\cap B)\cup(B\cap B^C)=(A\cap B)\cup\varnothing=A\cap B$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ②이다. 답 ②

45

$B^C\subset A^C$에서 $A\subset B$

이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$A\subset B \Leftrightarrow A\cup B=B$

$\Leftrightarrow A-B=\varnothing$

$\Leftrightarrow A^C\cup B=U$

$\Leftrightarrow A\cap B=A$

따라서 항상 성립한다고 할 수 없는 것은 ④이다.

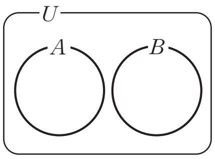
답 ④

46

전체집합 U의 두 부분집합 A, B가 서로소이므로

$A\cap B=\varnothing$

이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $A-B=A$

ㄴ. $A\subset B^C$

ㄷ. $A\cup B^C=B^C$

ㄹ. $B\cap A^C=B-A=B$

ㅁ. $A\cap(B-A)=A\cap B=\varnothing$

ㅂ. $A-(U-B)=A-B^C=A\cap(B^C)^C$

$=A\cap B=\varnothing$

따라서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ, ㅂ이다.

답 **ㄴ, ㄹ, ㅁ, ㅂ**

47

$A\cap X=X$에서 $X\subset A$

$(A\cap B)\cup X=X$에서 $(A\cap B)\subset X$

$\therefore (A\cap B)\subset X\subset A$

이때 $A\cap B=\{4, 5, 6\}$이므로

$\{4, 5, 6\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

따라서 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 4, 5, 6을 반드시 원소로 갖는 부분집합이므로 구하는 집합 X의 개수는

$2^{6-3}=2^3=8$ 답 8

48

$A-X=\varnothing$에서 $A\subset X$

$B-X=B$에서 $B\cap X=\varnothing$

즉, 집합 X는 전체집합 $U=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$의 부분집합 중 집합 A의 원소 2, 7을 반드시 원소로 갖고 집합 B의 원소 3, 13을 원소로 갖지 않는 부분집합이다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{6-2-2}=2^2=4$ 답 **4**

49

$(A\cup X)\subset(B\cup X)$를 만족시키는 집합 U의 부분집합 X는 두 집합 A, B의 공통인 원소 9를 제외한 집합 A의 나머지 원소 1, 5, 13을 반드시 원소로 가져야 한다.

즉, $\{1, 5, 13\}\subset X\subset\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{7-3}=2^4=16$ 답 **16**

50

(1) $(A-B)^C\cup A=(A\cap B^C)^C\cup A$
$=(A^C\cup B)\cup A$
$=(B\cup A^C)\cup A$
$=B\cup(A^C\cup A)$
$=B\cup U$
$=U$

(2) $(A-B)\cap(B-A)=(A\cap B^C)\cap(B\cap A^C)$
$=A\cap(B^C\cap B)\cap A^C$
$=A\cap\varnothing\cap A^C$
$=A\cap A^C$
$=\varnothing$

(3) $\{A\cap(A^C\cup B)\}\cup\{B\cap(B\cup C)\}$
$=\{(A\cap A^C)\cup(A\cap B)\}\cup B$ $\leftarrow B\subset(B\cup C)$
$=\{\varnothing\cup(A\cap B)\}\cup B$
$=(A\cap B)\cup B$
$=B$ $\leftarrow (A\cap B)\subset B$

답 (1) $\boldsymbol{U}$ (2) $\boldsymbol{\varnothing}$ (3) $\boldsymbol{B}$

51

$A-(B\cup C)=A\cap(B\cup C)^C$
$=A\cap(B^C\cap C^C)$
$=(A\cap B^C)\cap C^C$
$=(A\cap B^C)-C$
$=(A-B)-C$ 답 **풀이 참조**

52

주어진 등식의 좌변을 간단히 하면

$(A\cup B)\cap A^C=(A\cap A^C)\cup(B\cap A^C)$
$=\varnothing\cup(B\cap A^C)$
$=B\cap A^C=B-A$

이므로 $B-A=\varnothing$에서 $B\subset A$이다.

ㄱ. $A\cap B=B$

ㄴ. $A\cup B=A$

ㄷ. $A\cup B^C=U$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 **ㄴ, ㄷ**

53

주어진 등식의 좌변을 간단히 하면

$(A\cup B)\cap(B-A)^C=(A\cup B)\cap(B\cap A^C)^C$
$=(A\cup B)\cap(B^C\cup A)$
$=(A\cup B)\cap(A\cup B^C)$
$=A\cup(B\cap B^C)$
$=A\cup\varnothing=A$

이므로 $A=A\cap B$에서 $A\subset B$이다.

이때 $A\subset B$이면

② $B^C\subset A^C$ ③ $A\cap B^C=\varnothing$

④ $A\cup B=B$ ⑤ $A\cap B=A$

따라서 항상 옳은 것은 ①이다. 답 ①

54

(1) 8의 배수는 모두 4의 배수이므로 $A_8 \subset A_4$

9의 배수는 모두 3의 배수이므로 $A_9 \subset A_3$

$\therefore (A_4 \cup A_8) \cap (A_3 \cup A_9) = A_4 \cap A_3$

이때 $A_4 \cap A_3$은 4와 3의 공배수의 집합, 즉 12의 배수의 집합이므로

$(A_4 \cup A_8) \cap (A_3 \cup A_9) = A_{12}$

$\therefore m = 12$

(2) $A_6 \cap A_8$은 6과 8의 공배수의 집합, 즉 24의 배수의 집합이므로

$(A_6 \cap A_8) \cup A_{12} = A_{24} \cup A_{12}$

이때 24의 배수는 모두 12의 배수이므로 $A_{24} \subset A_{12}$

$\therefore (A_6 \cap A_8) \cup A_{12} = A_{12}$

따라서 $A_n \subset A_{12}$를 만족시키는 자연수 n은 12의 배수이므로 n의 최솟값은 12이다.

답 (1) **12** (2) **12**

55

$$
\begin{aligned}
(A \circledcirc B) \circledcirc A &= (B \circledcirc A) \circledcirc A \\
&= B \circledcirc (A \circledcirc A) \\
&= B \circledcirc \{(A - A) \cup (A - A)\} \\
&= B \circledcirc (\varnothing \cup \varnothing) = B \circledcirc \varnothing \\
&= (B - \varnothing) \cup (\varnothing - B) \\
&= B \cup \varnothing \\
&= B
\end{aligned}
$$

답 ②

56

(1) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 10 + 8 - 4 = 14$

(2) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$에서

$10 = 8 + 5 - n(A \cap B)$

$\therefore n(A \cap B) = 3$

(3) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$에서

$13 = 6 + n(B) - 2 \qquad \therefore n(B) = 9$

답 (1) **14** (2) **3** (3) **9**

57

$n(A \cup B \cup C)$

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B)$

$\quad - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

$= 12 + 16 + 17 - 8 - 12 - 7 + 5$

$= 23$

답 **23**

58

(1) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

$= 20 - 8 = 12$

(2) $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$

$= 13 - 8 = 5$

답 (1) **12** (2) **5**

59

(1) $n(A^C) = n(U) - n(A) = 33 - 21 = 12$

(2) $n(B^C) = n(U) - n(B) = 33 - 14 = 19$

(3) $n((A \cap B)^C) = n(U) - n(A \cap B)$

$= 33 - 9 = 24$

(4) $n(A^C \cap B^C) = n((A \cup B)^C)$

$= n(U) - n(A \cup B)$

이때

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 21 + 14 - 9 = 26$

이므로

$n(A^C \cap B^C) = n(U) - n(A \cup B)$

$= 33 - 26 = 7$

답 (1) **12** (2) **19** (3) **24** (4) **7**

60

$n(A^C \cap B^C) = n((A \cup B)^C)$

$= n(U) - n(A \cup B)$

에서

$11 = 32 - n(A \cup B) \qquad \therefore n(A \cup B) = 21$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$에서

$21 = n(A) + n(B) - 4$

$\therefore n(A) + n(B) = 25$

답 **25**

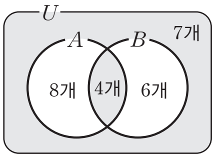
61

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$18=12+10-n(A\cap B)$

$\therefore n(A\cap B)=4$

따라서 각 집합의 원소의 개수를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 색칠한 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수는



$4+7=11$

답 **11**

62

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$15=10+9-n(A\cap B)$ $\quad\therefore n(A\cap B)=4$

$n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)$에서

$11=9+6-n(B\cap C)$ $\quad\therefore n(B\cap C)=4$

또, $A\cap C=\varnothing$이므로 $A\cap B\cap C=\varnothing$

$\therefore n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$\quad -n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

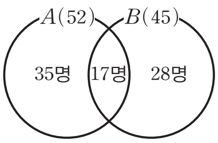
$=10+9+6-4-4-0+0$

$=17$

답 **17**

63

중국어를 신청한 학생의 집합을 A, 일본어를 신청한 학생의 집합을 B라 하면



$n(A)=52$, $n(B)=45$

80명의 학생이 두 과목 중 적어도 한 과목을 신청하였으므로

$n(A\cup B)=80$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$80=52+45-n(A\cap B)$ $\quad\therefore n(A\cap B)=17$

일본어만 신청한 학생의 집합은 $B-A$이므로

$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$

$\qquad\quad =45-17=28$

답 **28**

64

학급 전체 학생의 집합을 U, A포털사이트의 이메일을 이용하는 학생의 집합을 A, B포털사이트의 이메일을 이용하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=40$, $n(A)=25$, $n(B)=20$,

$n(A^C\cap B^C)=5$

이때

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$

$\qquad\qquad\quad =n(U)-n(A\cup B)$

에서

$5=40-n(A\cup B)$

$\therefore n(A\cup B)=35$

두 포털사이트의 이메일을 모두 이용하는 학생의 집합은 $A\cap B$이므로

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$35=25+20-n(A\cap B)$

$\therefore n(A\cap B)=10$

답 **10**

65

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$\qquad\quad =15+26-n(A\cap B)$

$\qquad\quad =41-n(A\cap B)$

(i) $n(A\cup B)$가 최대인 경우는 $n(A\cap B)$가 최소일 때이므로 $n(A\cap B)\geq 7$에서 $n(A\cap B)=7$일 때이다.
따라서 $n(A\cup B)$의 최댓값은 $41-7=34$이다.

(ii) $n(A\cup B)$가 최소인 경우는 $n(A\cap B)$가 최대일 때이므로 $A\subset B$일 때이다.
즉, $n(A\cap B)\leq n(A)$에서 $n(A\cap B)=15$일 때이다.
따라서 $n(A\cup B)$의 최솟값은 $41-15=26$이다.

(i), (ii)에서 $n(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$34+26=60$

답 **60**

다른풀이 $(A\cap B)\subset A$, $(A\cap B)\subset B$이므로

$n(A\cap B)\leq n(A)$, $n(A\cap B)\leq n(B)$

$\therefore n(A\cap B)\leq 15$

또, $n(A\cap B)\geq 7$이므로

$7\leq n(A\cap B)\leq 15$

이때 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$$\begin{aligned} n(A\cap B)&=n(A)+n(B)-n(A\cup B)\\ &=15+26-n(A\cup B) \end{aligned}$$

이므로

$7\le 41-n(A\cup B)\le 15$

$-34\le -n(A\cup B)\le -26$

$\therefore 26\le n(A\cup B)\le 34$

따라서 $n(A\cup B)$의 최댓값은 34, 최솟값은 26이므로 그 합은

$34+26=60$

66

학급 전체 학생의 집합을 U, 설악산에 가 본 학생의 집합을 A, 지리산에 가 본 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=40$, $n(A)=25$, $n(B)=18$

이때 설악산과 지리산에 모두 가 본 학생의 집합은 $A\cap B$이다.

(i) $n(A\cap B)$가 최대일 때는 $B\subset A$일 때이므로

$M=n(B)=18$

(ii) $n(A\cap B)$가 최소일 때는 $A\cup B=U$일 때이므로

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$40=25+18-m$

$\therefore m=3$

(i), (ii)에서 $M+m=21$ 답 **21**

67

①, ② '아름답다', '크다'의 기준이 명확하지 않으므로 명제가 아니다.

③ x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

④ $7-x=2-x$에서 $7=2$이므로 거짓인 명제이다.

⑤ 맞꼭지각의 크기는 서로 같으므로 참인 명제이다.

따라서 명제인 것은 ④, ⑤이다. 답 **④, ⑤**

68

답 (1) $\mathbf{2+6\le 8}$

(2) **17은 소수가 아니다.**

(3) $\boldsymbol{\varnothing\subset\{a, b, c, d\}}$

69

(1) 자연수 전체의 집합에서 8의 약수는 1, 2, 4, 8이므로 조건 p의 진리집합은 $\{1, 2, 4, 8\}$이다.

(2) $x^2-5x-6=0$에서 $(x+1)(x-6)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=6$

그런데 $-1\notin U$이므로 조건 q의 진리집합은 $\{6\}$이다.

답 (1) $\mathbf{\{1, 2, 4, 8\}}$ (2) $\mathbf{\{6\}}$

70

답 (1) $\boldsymbol{x=-7}$ **또는** $\boldsymbol{x=5}$

(2) $\boldsymbol{x\le -4}$ **또는** $\boldsymbol{x\ge 6}$

(3) $\boldsymbol{-2<x\le 3}$

71

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

(1) p: $4x-8=0$에서 $x=2$이므로

조건 p의 진리집합은 $P=\{2\}$

(2) 조건 $\sim p$의 진리집합은 P^C이므로

$P^C=\{1, 3, 4, 5\}$

(3) q: $x^2+1<10$, 즉 $x^2<9$에서 $-3<x<3$이므로

조건 q의 진리집합은 $Q=\{1, 2\}$

(4) 조건 $\sim q$의 진리집합은 Q^C이므로

$Q^C=\{3, 4, 5\}$

답 (1) $\mathbf{\{2\}}$ (2) $\mathbf{\{1, 3, 4, 5\}}$

(3) $\mathbf{\{1, 2\}}$ (4) $\mathbf{\{3, 4, 5\}}$

72

(1) $\sqrt{4}=2$는 유리수이므로 **참인 명제**이다.

(2) x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 **명제가 아니다.**

(3) 직각삼각형은 한 내각의 크기가 90°이고 나머지 두 내각의 크기는 90°보다 작으므로 **참인 명제**이다.

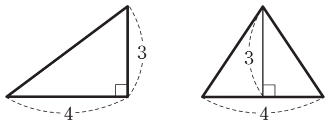
(4) 6과 8의 최소공배수는 24이므로 **거짓인 명제**이다.

답 **풀이 참조**

73

ㄱ. $2^3<3^2$에서 $8<9$이므로 참인 명제이다.

ㄷ.



위의 두 삼각형의 넓이는 6으로 같지만 합동은 아니므로 거짓인 명제이다.

ㄴ, ㄹ. 참인 명제

따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. **답 ㄱ, ㄴ, ㄹ**

74

①, ③, ④, ⑤ 주어진 명제가 참이므로 그 부정은 거짓이다.

② 주어진 명제가 거짓이므로 그 부정은 참이다.

답 ②

75

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{2, 4, 6\}$

q: $x^2-5x+6=0$에서 $(x-2)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=2$ 또는 $x=3$

$\therefore$ $Q=\{2, 3\}$

(1) 조건 $\sim q$의 진리집합은 Q^C이므로

$Q^C=\{1, 4, 5, 6\}$

(2) 조건 'p 또는 q'의 진리집합은 $P\cup Q$이므로

$P\cup Q=\{2, 3, 4, 6\}$

(3) 조건 '$\sim p$ 그리고 q'의 진리집합은 $P^C\cap Q$이므로

$P^C\cap Q=\{1, 3, 5\}\cap\{2, 3\}=\{3\}$

답 (1) $\{1, 4, 5, 6\}$ (2) $\{2, 3, 4, 6\}$ (3) $\{3\}$

76

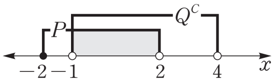
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|-2\leq x<2\}$, $Q=\{x|x\leq -1$ 또는 $x\geq 4\}$

조건 $\sim q$의 진리집합은 Q^C이므로

$Q^C=\{x|-1<x<4\}$

따라서 조건 'p 그리고 $\sim q$'의 진리집합은 $P\cap Q^C$이므로



$P\cap Q^C=\{x|-1<x<2\}$ **답 $\{x|-1<x<2\}$**

77

$-2\leq x<3$에서 $x\geq -2$이고 $x<3$

p: $x\geq 3$에서 $\sim p$: $x<3$이므로

$P^C=\{x|x<3\}$

q: $x<-2$에서 $\sim q$: $x\geq -2$이므로

$Q^C=\{x|x\geq -2\}$

따라서 조건 '$-2\leq x<3$'의 진리집합은

$P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C$ **답 ①**

78

(1) p: $x^2=9$, q: $x^3=27$이라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{-3, 3\}$, $Q=\{3\}$

따라서 $P\not\subset Q$이므로 주어진 명제는 거짓이다.

(2) [반례] $x=0$, $y=2$이면 $xy=0$이지만 $x=0$이고 $y\neq 0$이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

(3) p: $|x|<1$, q: $x<1$이라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|-1<x<1\}$, $Q=\{x|x<1\}$

따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

답 (1) **거짓** (2) **거짓** (3) **참**

79

$P=\{4, 8, 12, 16, 20\}$, $Q=\{1, 2, 4, 8, 16\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 원소는 P에 속하고 Q에 속하지 않아야 하므로

$P-Q=\{12, 20\}$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

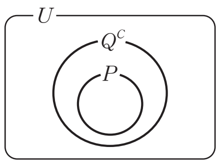
$12+20=32$ **답 32**

80

명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로

$P\subset Q^C$

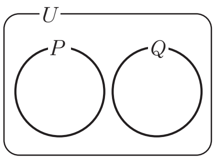
이것을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ $Q\subset P^C$ **답 ③**

81

$P\cap Q=\varnothing$을 만족시키는 두 집합 P, Q를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 $P\subset Q^C$이고 $Q\subset P^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$와 $q \longrightarrow \sim p$가 참이다.

따라서 참인 명제는 ㄷ, ㅁ이다. 답 ㄷ, ㅁ

82

$P\cup Q=P$에서 $Q\subset P$

$Q\cap R=R$에서 $R\subset Q$

$\therefore R\subset Q\subset P$

① $R\subset Q$이므로 명제 $r \longrightarrow q$는 참이다.

② $Q^C\subset R^C$이므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim r$는 참이다.

③ $P^C\subset Q^C$이므로 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$는 참이다.

④ $Q\subset P$이므로 명제 $q \longrightarrow p$는 참이다.

⑤ $R^C\not\subset P^C$이므로 명제 $\sim r \longrightarrow \sim p$는 거짓이다.

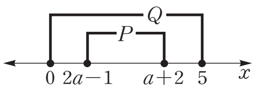
따라서 항상 참이라고 할 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

83

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,2a-1\le x\le a+2\}$, $Q=\{x\,|\,0\le x\le 5\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$2a-1\ge 0$, $a+2\le 5$ $\quad\therefore \frac{1}{2}\le a\le 3$

따라서 구하는 정수 a는 1, 2, 3의 3개이다. 답 **3**

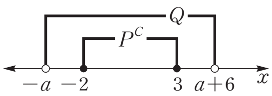
84

p: $x<-2$ 또는 $x>3$에서 $\sim p$: $-2\le x\le 3$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P^C=\{x\,|\,-2\le x\le 3\}$, $Q=\{x\,|\,-a<x<a+6\}$

명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P^C\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-a<-2$, $a+6>3$ $\quad\therefore a>2$ 답 $\boldsymbol{a>2}$

85

① p: $x-2=4$라 하고 조건 p의 진리집합을 P라 하면
$x-2=4$에서 $x=6$ $\quad\therefore P=\{6\}$
따라서 $P\ne\varnothing$이므로 주어진 명제는 참이다.

② p: $\sqrt{2}+x=0$이라 하고 조건 p의 진리집합을 P라 하면 $\sqrt{2}+x=0$에서
$x=-\sqrt{2}$ $\quad\therefore P=\{-\sqrt{2}\}$
따라서 $P\ne\varnothing$이므로 주어진 명제는 참이다.

③ 모든 실수 x에 대하여 $x^2\ge 0$이므로 주어진 명제는 참이다.

④ [반례] $x=0$, $y=0$이면 $x^2+y^2=0$이다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다.

⑤ 모든 자연수 x, y에 대하여 $x\ge 1$, $y\ge 1$이므로 $x+y\ge 2$이다. 따라서 주어진 명제는 참이다.

따라서 거짓인 명제는 ④이다. 답 ④

86

(1) 주어진 명제의 부정은
'모든 실수 x에 대하여 $x^2>0$이다.'
$x=0$이면 $x^2=0$이므로 주어진 명제의 부정은 **거짓**이다.

(2) 주어진 명제의 부정은
'어떤 실수 x에 대하여 $x^2-x+4\le 0$이다.'
이때 모든 실수 x에 대하여
$x^2-x+4=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$이므로 주어진 명제의 부정은 **거짓**이다.

답 **풀이 참조**

87

① $x^3=x$에서 $x^3-x=0$, $x(x+1)(x-1)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
역: $x=0$ 또는 $x=1$이면 $x^3=x$이다. (참)
대우: $x\ne 0$이고 $x\ne 1$이면 $x^3\ne x$이다. (거짓)
[반례] $x=-1$이면 $x\ne 0$이고 $x\ne 1$이지만
$x^3=(-1)^3=-1=x$이다.

② 역: $x>1$이고 $y>1$이면 $xy>1$이다. (참)
대우: $x\le1$ 또는 $y\le1$이면 $xy\le1$이다. (거짓)
[반례] $x=-2$, $y=-1$이면 $x\le1$ 또는 $y\le1$이지만 $xy=2>1$이다.
③ 역: $x=0$이고 $y=0$이면 $|x|+|y|=0$이다. (참)
대우: $x\ne0$ 또는 $y\ne0$이면 $|x|+|y|\ne0$이다. (참)
④ 역: $x^2+y^2>0$이면 $xy<0$이다. (거짓)
[반례] $x=1$, $y=1$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $xy>0$이다.
대우: $x^2+y^2\le0$이면 $xy\ge0$이다. (참)
⑤ 역: 두 삼각형의 넓이가 같으면 두 삼각형은 합동이다. (거짓)
[반례] 밑변의 길이가 5, 높이가 4인 삼각형과 밑변의 길이가 10, 높이가 2인 삼각형의 넓이는 10으로 같지만 합동은 아니다.
대우: 두 삼각형의 넓이가 같지 않으면 두 삼각형은 합동이 아니다. (참)
따라서 역과 대우가 모두 참인 명제는 ③이다.

답 ③

88

ㄱ. 역: xy가 홀수이면 x 또는 y는 홀수이다. (참)
ㄴ. 역: $x+y$가 짝수이면 x, y는 짝수이다. (거짓)
[반례] $x=3$, $y=1$이면 $x+y$가 짝수이지만 x, y는 홀수이다.
ㄷ. 역: $x^2-4x+3=0$이면 $x-3=0$이다. (거짓)
[반례] $x=1$이면 $x^2-4x+3=0$이지만 $x-3\ne0$이다.
따라서 역이 거짓인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

89

주어진 명제가 참이므로 그 대우 '$x-1=0$이면 $x^2-ax+7=0$이다.'도 참이다.
$x=1$을 $x^2-ax+7=0$에 대입하면
$1-a+7=0$ $\quad\therefore a=8$

답 8

90

① 명제 $p\longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q\longrightarrow\sim p$도 참이다.
② 명제 $s\longrightarrow\sim q$가 참이므로 그 대우 $q\longrightarrow\sim s$도 참이다. 따라서 두 명제 $p\longrightarrow q$, $q\longrightarrow\sim s$가 참이므로 명제 $p\longrightarrow\sim s$가 참이다.
④ 명제 $\sim q\longrightarrow\sim r$가 참이므로 그 대우 $r\longrightarrow q$도 참이다. 따라서 두 명제 $r\longrightarrow q$, $q\longrightarrow\sim s$가 참이므로 명제 $r\longrightarrow\sim s$가 참이다.
⑤ 명제 $p\longrightarrow\sim s$가 참이므로 그 대우 $s\longrightarrow\sim p$도 참이다.
따라서 항상 참이라고 할 수 없는 것은 ③이다.

답 ③

91

① 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{1, 2, 3, 6\}$, $Q=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
$P\subset Q$이고 $Q\not\subset P$이므로 $p\Longrightarrow q$, $q\not\Longrightarrow p$
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
② $p\Longrightarrow q$, $q\not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
[$q\longrightarrow p$의 반례] $x=-1$, $y=-2$이면 $xy>1$이지만 $x<1$, $y<1$이다.
③ $p\Longrightarrow q$, $q\not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
[$q\longrightarrow p$의 반례] $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$이면 $xy=2$는 유리수이지만 x, y는 유리수가 아니다.
④ $p\Longrightarrow q$, $q\not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
[$q\longrightarrow p$의 반례] 등변사다리꼴은 두 대각선의 길이가 같은 사각형이지만 직사각형이 아니다.
⑤ $p\not\Longrightarrow q$, $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
[$p\longrightarrow q$의 반례] $A=\{1, 2\}$, $B=\{3\}$이면
$A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=\{1, 2, 3\}$이므로
$(A\cap B)\subset(A\cup B)$이지만 $A\ne B$이다.
따라서 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ⑤이다.

답 ⑤

92

ㄱ. $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
[$p \longrightarrow q$의 반례] $x=1$, $y=3$이면 $x+y$는 짝수이지만 x, y는 모두 짝수가 아니다.

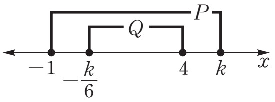
ㄴ. $|x|=|y| \Longleftrightarrow |x|^2=|y|^2 \Longleftrightarrow x^2=y^2$
즉, $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
[$p \longrightarrow q$의 반례] $x=2$, $y=2$, $z=3$이면 $(x-y)(y-z)=0$이지만 $x=y\neq z$이다.

따라서 필요충분조건인 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

93

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x\,|\,-1\le x\le k\}$, $Q=\left\{x \,\middle|\, -\frac{k}{6}\le x\le 4\right\}$
p가 q이기 위한 필요조건이므로 $q \Longrightarrow p$, 즉 $Q\subset P$이고 이를 만족시키도록 두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



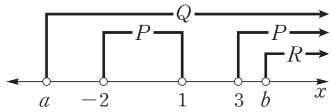
따라서 $-\frac{k}{6}\ge -1$, $k\ge 4$이므로
$4\le k\le 6$ 답 $4\le k\le 6$

94

q: $(x+3)(x-4)^2=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=4$
p가 q이기 위한 필요충분조건이려면 방정식 $x^2-x+a=0$의 해가 $x=-3$ 또는 $x=4$이어야 하므로 근과 계수의 관계에 의하여
$a=-3\times 4=-12$ 답 -12

95

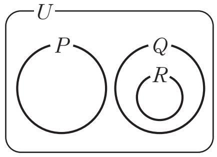
세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면
$P=\{x\,|\,-2<x<1$ 또는 $x>3\}$, $Q=\{x\,|\,x>a\}$,
$R=\{x\,|\,x>b\}$
q는 p이기 위한 필요조건이므로 $p \Longrightarrow q$, 즉 $P\subset Q$
r는 p이기 위한 충분조건이므로 $r \Longrightarrow p$, 즉 $R\subset P$
$\therefore R\subset P\subset Q$
이를 만족시키도록 세 집합 P, Q, R를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore a\le -2$, $b\ge 3$
따라서 a의 최댓값은 -2, b의 최솟값은 3이므로 구하는 곱은
$-2\times 3=-6$ 답 -6

96

$P\cap Q=\varnothing$이고 $Q\cup R=Q$에서 $R\subset Q$이므로 세 집합 P, Q, R를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



(1) $Q\subset P^C$이므로 $q \Longrightarrow \sim p$
따라서 q는 $\sim p$이기 위한 $\boxed{\text{충분}}$조건이다.

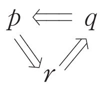
(2) $R\subset Q$에서 $Q^C\subset R^C$이므로 $\sim q \Longrightarrow \sim r$
따라서 $\sim r$는 $\sim q$이기 위한 $\boxed{\text{필요}}$조건이다.

(3) $P\subset R^C$이므로 $p \Longrightarrow \sim r$
따라서 p는 $\sim r$이기 위한 $\boxed{\text{충분}}$조건이다.

답 (1) **충분** (2) **필요** (3) **충분**

97

(가) $p \Longrightarrow r$
(나) $\sim q \Longrightarrow \sim r$에서 $r \Longrightarrow q$
(다) $q \Longrightarrow p$
따라서 $q \Longrightarrow r$, $r \Longrightarrow q$이므로 q는 r이기 위한 필요충분조건이다.



답 **필요충분조건**

98

(1) 주어진 명제의 대우 '실수 x, y에 대하여 $x=0$ 또는 $y=0$이면 $xy=0$이다.'가 참임을 보이면 된다.

$x=0$ 또는 $y=0$이면 $xy=0$이므로 주어진 명제의 대우가 참이다.

따라서 주어진 명제도 참이다.

(2) 주어진 명제의 대우 '실수 x, y에 대하여 $x<1$이고 $y<1$이면 $x+y<2$이다.'가 참임을 보이면 된다.

$x<1$이고 $y<1$이면 $x+y<2$이므로 주어진 명제의 대우가 참이다.

따라서 주어진 명제도 참이다.

(3) 주어진 명제의 대우 '자연수 m에 대하여 m이 짝수이면 m^2도 짝수이다.'가 참임을 보이면 된다.

m이 짝수이면 $m=2k$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있다. 이때

$m^2=(2k)^2=4k^2=2\times 2k^2$

이므로 m^2은 짝수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 (1) **풀이 참조** (2) **풀이 참조** (3) **풀이 참조**

99

(1) $2-\sqrt{3}$이 유리수라 가정하면

$2-\sqrt{3}$과 2는 모두 유리수이므로

$2-(2-\sqrt{3})=\sqrt{3}$도 유리수이다.

그런데 $\sqrt{3}$은 유리수가 아니므로 모순이다.

따라서 $2-\sqrt{3}$은 유리수가 아니다.

(2) n^2이 3의 배수일 때, n이 3의 배수가 아니라고 가정하면

$n=3k-1$ 또는 $n=3k-2$ (k는 자연수)

로 나타낼 수 있다.

(ⅰ) $n=3k-1$일 때,

$n^2=(3k-1)^2=9k^2-6k+1$
$=3(3k^2-2k)+1$

(ⅱ) $n=3k-2$일 때,

$n^2=(3k-2)^2=9k^2-12k+4$
$=3(3k^2-4k+1)+1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 n^2은 3으로 나누면 나머지가 1이므로 n^2이 3의 배수라는 가정에 모순이다.

따라서 자연수 n에 대하여 n^2이 3의 배수이면 n도 3의 배수이다.

(3) $a^2+b^2=0$일 때, $a\neq 0$ 또는 $b\neq 0$이라 가정하자.

(ⅰ) $a\neq 0$일 때,

$a^2>0$, $b^2\geq 0$이므로 $a^2+b^2>0$, 즉 $a^2+b^2\neq 0$이다.

(ⅱ) $b\neq 0$일 때,

$a^2\geq 0$, $b^2>0$이므로 $a^2+b^2>0$, 즉 $a^2+b^2\neq 0$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a^2+b^2\neq 0$이므로 $a^2+b^2=0$이라는 가정에 모순이다.

따라서 실수 a, b에 대하여 $a^2+b^2=0$이면 $a=0$이고 $b=0$이다.

답 (1) **풀이 참조** (2) **풀이 참조** (3) **풀이 참조**

100

(1) $a^2+b^2+1-(ab+a+b)$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2-2ab-2a-2b)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\}$

a, b가 실수이므로

$(a-b)^2\geq 0$, $(a-1)^2\geq 0$, $(b-1)^2\geq 0$

따라서 $a^2+b^2+1-(ab+a+b)\geq 0$이므로

$a^2+b^2+1\geq ab+a+b$

여기서 등호는 $a-b=0$, $a-1=0$, $b-1=0$, 즉 $a=b=1$일 때 성립한다.

(2) (ⅰ) $|a|\geq|b|$일 때,

$|a|-|b|\geq 0$, $|a-b|\geq 0$이므로

$(|a|-|b|)^2\leq|a-b|^2$임을 보이면 된다.

$(|a|-|b|)^2-|a-b|^2$

$=a^2-2|ab|+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

$=-2(|ab|-ab)$

그런데 $|ab| \geq ab$이므로

$-2(|ab|-ab) \leq 0$

$\therefore |a|-|b| \leq |a-b|$

(ii) $|a|<|b|$일 때,

$|a|-|b|<0$, $|a-b|>0$이므로

$|a|-|b|<|a-b|$

(i), (ii)에서 $|a|-|b| \leq |a-b|$

여기서 등호는 $|ab|=ab$, 즉 $ab \geq 0$이고 $|a| \geq |b|$일 때 성립한다.

답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

101

$\{\sqrt{2(a+b)}\}^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$=2(a+b)-(a+2\sqrt{ab}+b)$

$=a-2\sqrt{ab}+b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

a, b가 실수이므로 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$

$\therefore \{\sqrt{2(a+b)}\}^2 \geq (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

이때 $\sqrt{2(a+b)}>0$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$이므로

$\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$

여기서 등호는 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, 즉 $a=b$일 때 성립한다.

답 풀이 참조

102

$3a>0$, $4b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3a+4b \geq 2\sqrt{3a \times 4b}=4\sqrt{3ab}$

그런데 $ab=3$이므로

$3a+4b \geq 4\sqrt{3 \times 3}=12$

여기서 등호는 $3a=4b$일 때 성립하므로 $3a=4b$를 $3a+4b=12$에 대입하면

$3a+3a=12$, $6a=12$ $\quad \therefore a=2$

$a=2$를 $3a=4b$에 대입하면 $b=\dfrac{3}{2}$

따라서 $3a+4b$는 $a=2$, $b=\dfrac{3}{2}$일 때 최솟값 12를 가지므로

$m=12$, $\alpha=2$, $\beta=\dfrac{3}{2}$

$\therefore m+\alpha+\beta=\dfrac{31}{2}$

답 $\dfrac{31}{2}$

103

$9a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$9a^2+b^2 \geq 2\sqrt{9a^2 \times b^2}=6ab$ ($\because a>0$, $b>0$)

그런데 $9a^2+b^2=36$이므로 $36 \geq 6ab$

$\therefore ab \leq 6$ (단, 등호는 $9a^2=b^2$, 즉 $3a=b$일 때 성립)

따라서 ab의 최댓값은 6이다.

답 6

104

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{3x+y}{xy}=\dfrac{6}{xy}$

$3x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3x+y \geq 2\sqrt{3xy}$

그런데 $3x+y=6$이므로 $6 \geq 2\sqrt{3xy}$

$3 \geq \sqrt{3xy}$, $9 \geq 3xy$

$\therefore xy \leq 3$ (단, 등호는 $3x=y$일 때 성립)

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{6}{xy} \geq \dfrac{6}{3}=2$

따라서 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}$의 최솟값은 2이다.

답 2

105

$$(3a+4b)\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)=9+\frac{3a}{b}+\frac{12b}{a}+4$$
$$=\frac{3a}{b}+\frac{12b}{a}+13$$

$\dfrac{3a}{b}>0$, $\dfrac{12b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{3a}{b}+\frac{12b}{a}+13 \geq 2\sqrt{\frac{3a}{b} \times \frac{12b}{a}}+13$$
$$=2 \times 6+13$$
$$=25$$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{3a}{b}=\dfrac{12b}{a}\text{, 즉 } a=2b\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 25이다.

답 25

106

$3x+5+\dfrac{3}{x+2}=3(x+2)+\dfrac{3}{x+2}-1$

$x>-2$에서 $x+2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3(x+2)+\frac{3}{x+2}-1\geq 2\sqrt{3(x+2)\times\frac{3}{x+2}}-1$$
$$=2\times 3-1$$
$$=5$$

$\left(\text{단, 등호는 } 3(x+2)=\frac{3}{x+2}\text{, 즉 } x=-1\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 5이다. 답 **5**

107

(1) a, b가 실수이므로 코시—슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+4^2)(a^2+b^2)\geq(2a+4b)^2$

그런데 $a^2+b^2=10$이므로 $20\times 10\geq(2a+4b)^2$

$\therefore\ -10\sqrt{2}\leq 2a+4b\leq 10\sqrt{2}$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{2}=\frac{b}{4}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $2a+4b$의 최댓값은 $10\sqrt{2}$이다.

(2) a, b가 실수이므로 코시—슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+5^2)(a^2+b^2)\geq(2a+5b)^2$

그런데 $2a+5b=29$이므로 $29(a^2+b^2)\geq 29^2$

$\therefore\ a^2+b^2\geq 29\ \left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{2}=\frac{b}{5}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 a^2+b^2의 최솟값은 29이다.

답 (1) $\mathbf{10\sqrt{2}}$ (2) **29**

108

x, y가 실수이므로 코시—슈바르츠의 부등식에 의하여

$(3^2+2^2)(x^2+y^2)\geq(3x+2y)^2$

그런데 $x^2+y^2=a$이므로 $13a\geq(3x+2y)^2$

$\therefore\ -\sqrt{13a}\leq 3x+2y\leq\sqrt{13a}$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{x}{3}=\frac{y}{2}\text{일 때 성립}\right)$

이때 최댓값 $\sqrt{13a}$와 최솟값 $-\sqrt{13a}$의 차가 26이므로

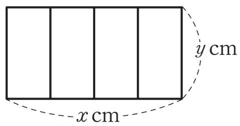
$\sqrt{13a}-(-\sqrt{13a})=26$, $2\sqrt{13a}=26$

$\sqrt{13a}=13$

양변을 제곱하면

$13a=13^2\quad\therefore\ a=13$ 답 **13**

109



오른쪽 그림과 같이 바깥쪽 직사각형의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하면 철사의 전체 길이가 40 cm이므로

$2x+5y=40$

$x>0$, $y>0$에서 $2x>0$, $5y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+5y\geq 2\sqrt{2x\times 5y}=2\sqrt{10xy}$

그런데 $2x+5y=40$이므로 $40\geq 2\sqrt{10xy}$

$\therefore\ \sqrt{10xy}\leq 20$ (단, 등호는 $2x=5y$일 때 성립)

이때 구역 전체의 넓이는 $xy\ \text{cm}^2$이므로

$10xy\leq 400$

$\therefore\ xy\leq 40$

따라서 넓이의 최댓값은 $40\ \text{cm}^2$이다.

또, $2x=5y$일 때 넓이가 최대가 되므로 $2x=5y$를 $2x+5y=40$에 대입하면

$2x+2x=40$

$\therefore\ x=10$

따라서 구하는 가로의 길이는 10 cm이다.

답 **40 cm², 10 cm**

110

직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y라 하면 원의 지름이 직사각형의 대각선이므로

$x^2+y^2=4^2=16$

x, y가 실수이므로 코시—슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(x^2+y^2)\geq(x+y)^2$

그런데 $x^2+y^2=16$이므로

$2\times 16\geq(x+y)^2$, $(x+y)^2\leq 32$

이때 $x+y>0$이므로

$0<x+y\leq 4\sqrt{2}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

직사각형의 둘레의 길이는 $2(x+y)$이므로

$0<2(x+y)\leq 8\sqrt{2}$

따라서 구하는 최댓값은 $8\sqrt{2}$이다. 답 $\mathbf{8\sqrt{2}}$

Ⅱ. 함수

111

(1) 집합 X의 원소 1에 대응하는 집합 Y의 원소가 a, b의 2개이므로 함수가 아니다.

(2) 집합 X의 원소 4에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

(3), (4) 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

답 **함수: (3), (4)**

(3) **정의역: $\{1, 2, 3\}$, 공역: $\{a, b, c\}$, 치역: $\{a, b, c\}$**

(4) **정의역: $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역: $\{a, b, c\}$, 치역: $\{a, b\}$**

112

(1) 함수 $f(x)=-x+1$에 대하여 집합 X의 각 원소의 함숫값을 구하면

$f(-1)=2,\ f(0)=1,\ f(1)=0$

따라서 함수 f의 치역은 $\{0, 1, 2\}$이다.

(2) 함수 $f(x)=x^3+x+1$에 대하여 집합 X의 각 원소의 함숫값을 구하면

$f(-1)=-1,\ f(0)=1,\ f(1)=3$

따라서 함수 f의 치역은 $\{-1, 1, 3\}$이다.

(3) 함수 $f(x)=|x|-1$에 대하여 집합 X의 각 원소의 함숫값을 구하면

$f(-1)=0,\ f(0)=-1,\ f(1)=0$

따라서 함수 f의 치역은 $\{-1, 0\}$이다.

답 (1) $\{0, 1, 2\}$ (2) $\{-1, 1, 3\}$ (3) $\{-1, 0\}$

113

두 함수 f, g의 정의역과 공역은 각각 같으므로 두 함수가 서로 같으려면 정의역의 모든 원소에 대하여 f와 g의 함숫값이 서로 같아야 한다.

ㄱ. $f(-1)=0,\ g(-1)=-2$이므로

$f(-1)\neq g(-1)$

$\therefore f\neq g$

ㄴ. $f(-1)=1,\ g(-1)=-1$이므로

$f(-1)\neq g(-1)$

$\therefore f\neq g$

ㄷ. $f(-1)=g(-1)=-1,\ f(1)=g(1)=1$이므로

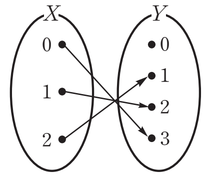
$f=g$

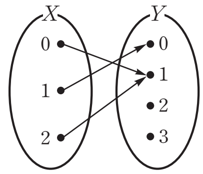
따라서 두 함수 f와 g가 서로 같은 함수인 것은 ㄷ뿐이다.

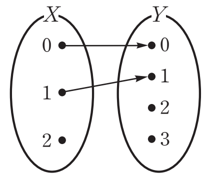
답 ㄷ

114

주어진 집합 X에서 집합 Y로의 대응을 그림으로 나타낸 후, 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하는 것을 찾는다.

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


ㄱ, ㄴ. 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

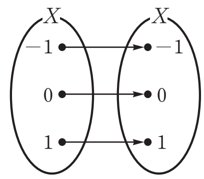
ㄷ. 집합 X의 원소 2에 대응하는 집합 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

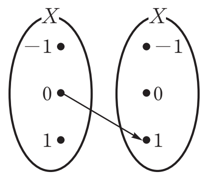
따라서 함수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

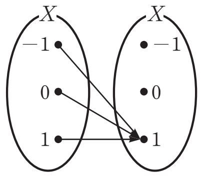
답 ㄱ, ㄴ

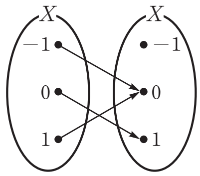
115

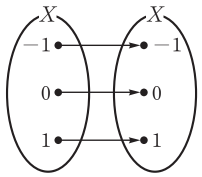
주어진 집합 X에서 집합 X로의 대응을 그림으로 나타낸 후, 집합 X의 각 원소에 집합 X의 원소가 오직 하나씩 대응하지 않는 것을 찾는다.

①


②


③


④


⑤


①, ③, ④, ⑤ 집합 X의 각 원소에 집합 X의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

② 집합 X의 원소 -1, 1에 대응하는 집합 X의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

따라서 함수가 아닌 것은 ②이다.

답 ②

116

3은 유리수이므로

$f(3)=3-2=1$

$\sqrt{3}-1$은 무리수이므로

$f(\sqrt{3}-1)=-(\sqrt{3}-1)=1-\sqrt{3}$

$\therefore f(3)-f(\sqrt{3}-1)=1-(1-\sqrt{3})$

$=\sqrt{3}$

답 $\sqrt{3}$

117

정의역이 $X=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$이므로

$f(-2)=|-2+1|=1$

$f(-1)=|-1+1|=0$

$f(0)=|0+1|=1$

$f(1)=|1+1|=2$

$f(2)=|2+1|=3$

따라서 함수 f의 치역은

$\{0, 1, 2, 3\}$

답 $\{0, 1, 2, 3\}$

118

정의역이 $X=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$이므로

$f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=4$,

$f(3)=4$, $f(4)=1$, $f(5)=0$

따라서 함수 f의 치역은

$\{0, 1, 4\}$

답 $\{0, 1, 4\}$

119

ㄱ. $f(-1)=g(-1)=-1$, $f(0)=g(0)=0$,

$f(1)=g(1)=1$이므로

$f=g$

ㄴ. $f(-1)=-1$, $h(-1)=1$이므로

$f(-1)\neq h(-1)$

$\therefore f\neq h$

ㄷ. $f(-1)=-1$, $p(-1)=\sqrt{(-1)^2}=1$이므로

$f(-1)\neq p(-1)$

$\therefore f\neq p$

따라서 함수 f와 서로 같은 함수인 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

120

$f(0)=g(0)$에서 $b=-3$

$f(1)=g(1)$에서

$2+a-3=1+b$ …… ㉠

$b=-3$을 ㉠에 대입하면

$a-1=-2$ $\quad\therefore a=-1$

$\therefore ab=(-1)\times(-3)=3$

답 3

121

$f(x)=g(x)$를 만족시키는 모든 x의 값은 방정식

$x^3+3x=6x^2-8x+6$의 해와 같으므로

$x^3-6x^2+11x-6=0$, $(x-1)(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 집합 X는 $\{1, 2, 3\}$의 부분집합 중 공집합이 아닌 것이므로

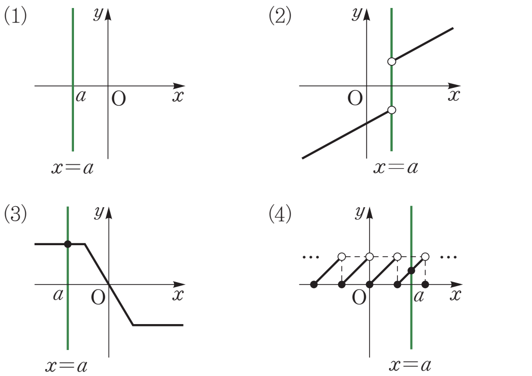
$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$,

$\{1, 2, 3\}$

답 풀이 참조

122

주어진 그래프에 정의역의 각 원소 a에 대하여 직선 $x=a$를 그려서 교점이 1개인 것을 찾는다.



(1), (2) 직선 $x=a$와 만나지 않거나 무수히 많은 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

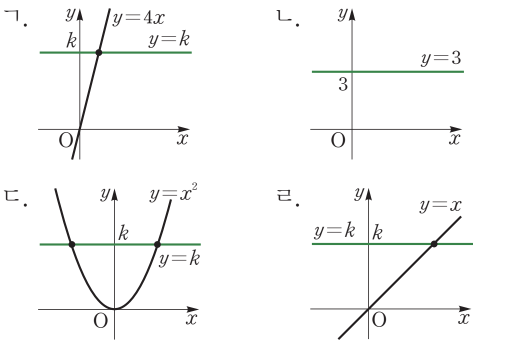
(3), (4) 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.

따라서 함수의 그래프인 것은 (3), (4)이다.

답 (3), (4)

123

보기의 함수의 그래프를 각각 좌표평면에 나타낸 후, 치역의 각 원소 k에 대하여 직선 $y=k$를 그려 교점을 나타내면 다음 그림과 같다.



(1) 일대일대응은 그 그래프가 직선 $y=k$와 오직 한 점에서 만나고 치역과 공역이 같은 함수이므로 ㄱ, ㄹ이다.

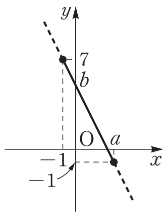
(2) 상수함수는 그 그래프가 x축에 평행한 직선이므로 ㄴ이다.

(3) 항등함수는 그 그래프가 직선 $y=x$인 함수이므로 ㄹ이다.

답 (1) ㄱ, ㄹ (2) ㄴ (3) ㄹ

124

함수 f가 일대일대응이므로 $f(x)=-2x+b$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



이때 (치역)=(공역)이려면 그래프는 두 점 $(-1, 7)$, $(a, -1)$을 지나야 하므로

$f(-1)=7$, $f(a)=-1$

$f(-1)=7$에서 $2+b=7$ ······ ㉠

$f(a)=-1$에서 $-2a+b=-1$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=5$

$\therefore a-b=-2$

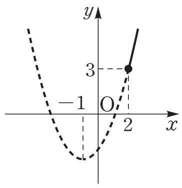
답 -2

125

$f(x)=x^2+2x+a$

$\quad=(x+1)^2+a-1$

이므로 $x\geq2$일 때 함수 f가 일대일대응이 되려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



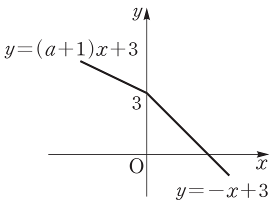
이때 (치역)=(공역)이려면 그래프는 점 $(2, 3)$을 지나야 하므로 $f(2)=3$

즉, $4+4+a=3$에서 $a=-5$

답 -5

126

함수 f가 일대일대응이고 $x\geq0$에서 직선 $y=-x+3$의 기울기가 음수이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $x<0$에서 직선 $y=(a+1)x+3$의 기울기도 음수이어야 하므로

$a+1<0 \qquad \therefore a<-1$

답 $a<-1$

127

함수 f는 항등함수이므로 $f(x)=x$

$\therefore f(5)=5$, $f(7)=7$

함수 g는 상수함수이고 $g(5)=f(5)=5$이므로
$g(x)=5$
$\therefore g(7)=5$
$\therefore f(7)+g(7)=7+5=12$ 답 **12**

128

(i) 집합 X의 각 원소에 대응할 수 있는 집합 Y의 원소는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개씩이므로 함수의 개수는
$5\times5\times5=5^3=125$ $\therefore a=125$

(ii) -1에 대응할 수 있는 원소는 -2, -1, 0, 1, 2 중 하나이므로 5개
0에 대응할 수 있는 원소는 -1에 대응한 것을 제외한 4개
1에 대응할 수 있는 원소는 -1, 0에 대응한 것을 제외한 3개
따라서 일대일함수의 개수는
$5\times4\times3=60$ $\therefore b=60$

(iii) 집합 X의 원소 -1, 0, 1 모두에 대응할 수 있는 집합 Y의 원소는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이므로 상수함수의 개수는 5이다.
$\therefore c=5$

$\therefore a+b+c=125+60+5=190$ 답 **190**

129

(1) $(g\circ f)(5)=g(f(5))=g(c)=4$
(2) $(g\circ f)(6)=g(f(6))=g(d)=7$
(3) $(g\circ f)(7)=g(f(7))=g(b)=4$
(4) $(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(5)=c$
(5) $(f\circ g)(b)=f(g(b))=f(4)=a$
(6) $(f\circ g)(c)=f(g(c))=f(4)=a$

답 (1) **4** (2) **7** (3) **4** (4) $\boldsymbol{c}$ (5) $\boldsymbol{a}$ (6) $\boldsymbol{a}$

130

(1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+3)$
$=-(2x+3)^2$
$=-4x^2-12x-9$

(2) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-x^2)$
$=2\times(-x^2)+3$
$=-2x^2+3$

(3) $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2x+3)$
$=2(2x+3)+3=4x+9$

(4) $(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(-x^2)$
$=-(-x^2)^2=-x^4$

답 (1) $\boldsymbol{(g\circ f)(x)=-4x^2-12x-9}$
(2) $\boldsymbol{(f\circ g)(x)=-2x^2+3}$
(3) $\boldsymbol{(f\circ f)(x)=4x+9}$
(4) $\boldsymbol{(g\circ g)(x)=-x^4}$

131

(1) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-x+5)$
$=(-x+5)^2-2$
$=x^2-10x+23$

이므로
$((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ g)(h(x))$
$=(f\circ g)(2x-1)$
$=(2x-1)^2-10(2x-1)+23$
$=4x^2-24x+34$

(2) $(g\circ h)(x)=g(h(x))=g(2x-1)$
$=-(2x-1)+5$
$=-2x+6$

이므로
$(f\circ(g\circ h))(x)=f((g\circ h)(x))$
$=f(-2x+6)$
$=(-2x+6)^2-2$
$=4x^2-24x+34$

(3) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2-2)$
$=-(x^2-2)+5$
$=-x^2+7$

이므로
$((g\circ f)\circ h)(x)=(g\circ f)(h(x))$
$=(g\circ f)(2x-1)$
$=-(2x-1)^2+7$
$=-4x^2+4x+6$

(4) $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(-x+5)$
$=2(-x+5)-1=-2x+9$
이므로
$(f\circ(h\circ g))(x)=f((h\circ g)(x))$
$=f(-2x+9)$
$=(-2x+9)^2-2$
$=4x^2-36x+79$

답 (1) $((f\circ g)\circ h)(x)=4x^2-24x+34$
(2) $(f\circ(g\circ h))(x)=4x^2-24x+34$
(3) $((g\circ f)\circ h)(x)=-4x^2+4x+6$
(4) $(f\circ(h\circ g))(x)=4x^2-36x+79$

132

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=3$에서
$g(b)=3$이므로 $f(x)=b$
또한, $f(-1)=b$이므로 $x=-1$
따라서 구하는 x의 값은 -1이다. 답 -1

133

$g(2)=-2+3=1$, $f(-1)=2\times(-1)-1=-3$
이므로
$(f\circ g)(2)+(g\circ f)(-1)=f(g(2))+g(f(-1))$
$=f(1)+g(-3)$
$=(2\times1-1)+5$
$=6$ 답 6

134

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=1$이고 $f(2)=3$이므로
$g(3)=1$
$(f\circ g)(1)=f(g(1))=1$이고 $g(1)=3$이므로
$f(3)=1$
두 함수 f, g는 모두 일대일대응이므로
$f(1)=2$, $g(2)=2$
$\therefore f(1)+(g\circ f)(1)=2+g(f(1))$
$=2+g(2)$
$=2+2=4$ 답 4

135

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-x+k)$
$=2(-x+k)+3=-2x+2k+3$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+3)$
$=-(2x+3)+k$
$=-2x-3+k$
$f\circ g=g\circ f$이므로
$-2x+2k+3=-2x-3+k$
$2k+3=-3+k$ $\therefore k=-6$
따라서 $g(x)=-x-6$이므로
$g(-2)=-(-2)-6=-4$ 답 -4

136

$g(3)=-1$에서
$3b+2=-1$ $\therefore b=-1$
따라서 $f(x)=ax-1$, $g(x)=-x+2$에서
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-x+2)$
$=a(-x+2)-1$
$=-ax+2a-1$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax-1)$
$=-(ax-1)+2$
$=-ax+3$
$f\circ g=g\circ f$이므로
$-ax+2a-1=-ax+3$
$2a-1=3$ $\therefore a=2$
$\therefore ab=2\times(-1)=-2$ 답 -2

137

주어진 대응에 의하여
$f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=4$, $f(4)=1$
$f\circ g=g\circ f$이므로 $f(g(x))=g(f(x))$
$x=1$일 때, $f(g(1))=g(f(1))$이고 $g(1)=3$이므로
$f(3)=g(2)$ $\therefore g(2)=4$
$x=2$일 때, $f(g(2))=g(f(2))$
$f(4)=g(3)$ $\therefore g(3)=1$
$x=3$일 때, $f(g(3))=g(f(3))$
$f(1)=g(4)$ $\therefore g(4)=2$
$\therefore g(2)+g(4)=4+2=6$ 답 6

138

(1) $(f\circ h)(x)=f(h(x))=2h(x)-1$이고,

$(f\circ h)(x)=g(x)$이므로

$2h(x)-1=-3x+4$, $2h(x)=-3x+5$

$\therefore$ $\boldsymbol{h(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}}$

(2) $(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(2x-1)$이고,

$(h\circ f)(x)=g(x)$이므로

$h(2x-1)=-3x+4$ ...... ㉠

$2x-1=t$라 하면 $x=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$이므로

㉠에 대입하면

$h(t)=-3\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)+4=-\frac{3}{2}t+\frac{5}{2}$

$\therefore$ $\boldsymbol{h(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}}$

(3) $(h\circ g\circ f)(x)$

$=h(g(f(x)))$

$=h(g(2x-1))$ $g(2x-1)=-3(2x-1)+4$

$=h(-6x+7)$ $=-6x+7$

이고, $(h\circ g\circ f)(x)=g(x)$이므로

$h(-6x+7)=-3x+4$ ...... ㉠

$-6x+7=t$라 하면 $x=-\frac{1}{6}t+\frac{7}{6}$이므로

㉠에 대입하면

$h(t)=-3\left(-\frac{1}{6}t+\frac{7}{6}\right)+4=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$

$\therefore$ $\boldsymbol{h(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$

답 **풀이 참조**

139

$f\left(\frac{x+1}{2}\right)=3x+2$에서 $\frac{x+1}{2}=t$라 하면

$x=2t-1$

$\therefore f(t)=3(2t-1)+2=6t-1$

$\therefore f\left(\frac{1-2x}{3}\right)=6\times\frac{1-2x}{3}-1$

$=-4x+1$

답 $\boldsymbol{f\left(\frac{1-2x}{3}\right)=-4x+1}$

140

$f^1(x)=f(x)=x+2$

$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f(x))=f(x+2)=x+4$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f(x+4)=x+6$

$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))=f(x+6)=x+8$

$\vdots$

$\therefore f^n(x)=x+2n$

따라서 $f^{2019}(x)=x+2\times2019=x+4038$이므로

$f^{2019}(1)=1+4038=4039$

답 **4039**

141

$f^1(x)=f(x)=\frac{x}{3}$

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{x}{3^2}$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f\left(\frac{x}{3^2}\right)=\frac{x}{3^3}$

$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))=f\left(\frac{x}{3^3}\right)=\frac{x}{3^4}$

$\vdots$

$\therefore f^n(x)=\frac{x}{3^n}$

$\therefore f^5(729)+f^4(243)=\frac{729}{3^5}+\frac{243}{3^4}$

$=\frac{3^6}{3^5}+\frac{3^5}{3^4}=6$

답 **6**

142

$f(1)=5$, $f(5)=1$이므로

$f^2(1)=(f\circ f^1)(1)=f(f(1))=f(5)=1$

$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(1)=5$

$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(5)=1$

$\vdots$

즉, $n=1, 2, 3, \cdots$일 때, $f^n(1)$의 값은 5, 1이 이 순서대로 반복된다.

$\therefore$ $f^{100}(1)=1$

$f(3)=7$, $f(7)=3$이므로

$f^2(3)=(f\circ f^1)(3)=f(f(3))=f(7)=3$

$f^3(3)=(f\circ f^2)(3)=f(f^2(3))=f(3)=7$

$f^4(3)=(f\circ f^3)(3)=f(f^3(3))=f(7)=3$

$\vdots$

즉, $n=1, 2, 3, \cdots$일 때, $f^n(3)$의 값은 7, 3이 이 순서대로 반복된다.

$\therefore f^{101}(3)=7$

$\therefore f^{100}(1)+f^{101}(3)=1+7=8$ 답 8

143

함수 $y=f(x)$의 그래프는 $0\le x\le 2$에서 두 점 $(0, -1)$, $(1, 0)$을 지나는 직선이므로

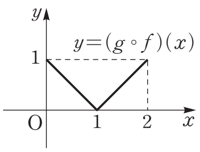
$f(x)=x-1 \ (0\le x\le 2)$

또, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $-1\le x\le 0$에서는 두 점 $(-1, 1)$, $(0, 0)$을 지나는 직선이고, $0\le x\le 1$에서는 두 점 $(0, 0)$, $(1, 1)$을 지나는 직선이므로

$$g(x)=\begin{cases} -x & (-1\le x\le 0) \\ x & (0\le x\le 1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore (g\circ f)(x)&=g(f(x)) \\ &=\begin{cases} -f(x) & (-1\le f(x)\le 0) \\ f(x) & (0\le f(x)\le 1) \end{cases} \\ &=\begin{cases} -(x-1) & (-1\le x-1\le 0) \\ x-1 & (0\le x-1\le 1) \end{cases} \\ &=\begin{cases} -x+1 & (0\le x\le 1) \\ x-1 & (1\le x\le 2) \end{cases} \end{aligned}$$

따라서 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

144

(1), (3) 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

(2) 집합 X의 원소 1, 2가 모두 집합 Y의 원소 b에 대응하므로 일대일대응이 아니다.
따라서 역함수가 존재하지 않는다.

(4) 집합 X의 원소 1, 3이 모두 집합 Y의 원소 a에 대응하므로 일대일대응이 아니다.
따라서 역함수가 존재하지 않는다.

답 (1) **역함수가 존재한다.**
(2) **역함수가 존재하지 않는다.**
(3) **역함수가 존재한다.**
(4) **역함수가 존재하지 않는다.**

145

(1) 함수 $y=4x-2$는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
$y=4x-2$를 x에 대하여 풀면
$4x=y+2 \qquad \therefore x=\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

(2) 함수 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$은 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$을 x에 대하여 풀면
$\frac{1}{2}x=-y+\frac{3}{2} \qquad \therefore x=-2y+3$
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
$y=-2x+3$

답 (1) $\boldsymbol{y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}}$ (2) $\boldsymbol{y=-2x+3}$

146

(1) $f^{-1}(b)=1$

(2) $(f^{-1})^{-1}(2)=f(2)=c$

(3) $(f^{-1}\circ f)(4)=f^{-1}(f(4))=f^{-1}(d)=4$

(4) $(f\circ f^{-1})(a)=f(f^{-1}(a))=f(3)=a$

답 (1) **1** (2) $\boldsymbol{c}$ (3) **4** (4) $\boldsymbol{a}$

147

(1) $f^{-1}(5)=a$에서 $f(a)=5$이므로
$-2a+3=5 \qquad \therefore a=-1$

(2) $f^{-1}(a)=-2$에서 $f(-2)=a$이므로
$f(-2)=-2\times(-2)+3=7 \qquad \therefore a=7$

답 (1) **−1** (2) **7**

148

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$f^{-1}(x)=g(x)$

$g(8)=k$라 하면 $f(k)=8$이므로

$-2k+6=8 \qquad \therefore k=-1$

$\therefore g(8)=-1$

한편, $f^{-1}(x)=g(x)$이므로 $g^{-1}(x)=f(x)$

$\therefore g^{-1}(3)=f(3)=-2\times3+6=0$

$\therefore g(8)+g^{-1}(3)=-1+0=-1$ 답 -1

149

$f^{-1}(3)=2$에서 $f(2)=3$이므로

$2\times2+a=3 \quad \therefore a=-1$

$g^{-1}(4)=-2$에서 $g(-2)=4$이므로

$(-2)\times(-2)+b=4 \quad \therefore b=0$

$\therefore b-a=0-(-1)=1$ 답 1

150

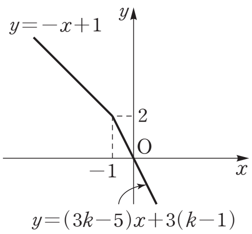
$(f^{-1}\circ g)(a)=f^{-1}(g(a))=1$에서

$g(a)=f(1)$이므로

$a-1=2 \quad \therefore a=3$ 답 3

151

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $x\geq-1$에서 $f(x)=(3k-5)x+3(k-1)$의 그래프의 기울기가 음수이어야 하므로

$3k-5<0 \quad \therefore k<\frac{5}{3}$

따라서 정수 k의 최댓값은 1이다. 답 1

152

함수 $f(x)=3x+2$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 한다.

직선 $y=f(x)$의 기울기가 양수이므로

$f(0)=b,\ f(a)=5$

$f(0)=b$에서 $b=2$

$f(a)=5$에서 $3a+2=5 \quad \therefore a=1$

$\therefore a+b=1+2=3$ 답 3

153

$f(x)=ax+|x-2|+3-2a$에서

(i) $x\geq2$일 때,

$f(x)=ax+(x-2)+3-2a$

$=(a+1)x+1-2a$

(ii) $x<2$일 때,

$f(x)=ax-(x-2)+3-2a$

$=(a-1)x+5-2a$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 두 직선 $y=(a+1)x+1-2a$와 $y=(a-1)x+5-2a$의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

따라서 $(a+1)(a-1)>0$이므로

$a<-1$ 또는 $a>1$ 답 $a<-1$ 또는 $a>1$

154

$y=\frac{1}{3}x+2$를 x에 대하여 풀면

$\frac{1}{3}x=y-2 \quad \therefore x=3y-6$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=3x-6$

따라서 $3x-6=ax+b$이므로

$a=3,\ b=-6$

$\therefore ab=-18$ 답 -18

155

$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=g(-3x+1)$

$=(-3x+1)-2$

$=-3x-1$

$y=-3x-1$로 놓고 x에 대하여 풀면

$3x=-y-1 \quad \therefore x=-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

$\therefore h^{-1}(x)=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$ 　　답 $\boldsymbol{h^{-1}(x)=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}}$

156

$f(3x-2)=6x+1$에서 $3x-2=t$라 하면

$3x=t+2$ 　　$\therefore x=\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}$

이것을 $f(3x-2)=6x+1$에 대입하면

$f(t)=6\left(\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}\right)+1=2t+5$

$\therefore f(x)=2x+5$ 　　← t를 x로 바꾼다.

$y=2x+5$로 놓고 x에 대하여 풀면

$2x=y-5$ 　　$\therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{5}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

따라서 $\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}=ax+b$이므로

$a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{5}{2}$ 　　답 $\boldsymbol{a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{5}{2}}$

157

$(f^{-1}\circ g)^{-1}(3)=(g^{-1}\circ f)(3)=g^{-1}(f(3))$

$=g^{-1}(5)$ 　　← $f(3)=2\times3-1=5$

$g^{-1}(5)=k$라 하면 $g(k)=5$이므로

$\frac{1}{2}k-1=5$ 　　$\therefore k=12$

$\therefore (f^{-1}\circ g)^{-1}(3)=g^{-1}(5)=12$ 　　답 **12**

158

$(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(x)$

$=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(x)$ 　　← $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

$=(g^{-1}\circ f)(x)$ 　　← $f\circ f^{-1}=I$

$g(x)=x+4$에서 $y=x+4$로 놓고 x에 대하여 풀면

$x=y-4$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=x-4$

$\therefore g^{-1}(x)=x-4$

$\therefore (g^{-1}\circ f)(x)=g^{-1}(f(x))=g^{-1}(-2x+1)$

$=(-2x+1)-4$

$=-2x-3$

따라서 $-2x-3=ax+b$이므로

$a=-2,\ b=-3$ 　　답 $\boldsymbol{a=-2,\ b=-3}$

159

$((f^{-1}\circ g^{-1})\circ f)(a)=(f^{-1}\circ g^{-1})(f(a))$

$=(g\circ f)^{-1}(f(a))$

$=(g\circ f)^{-1}(2a+1)=1$

에서 $(g\circ f)(1)=2a+1$

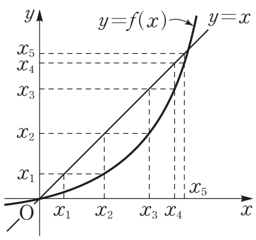
즉, $g(f(1))=g(3)=2a+1$이므로

$-\frac{1}{3}\times3+4=2a+1$

$\therefore a=1$ 　　답 **1**

160

직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$f^{-1}(x_3)=k$라 하면

$f(k)=x_3$이므로 $k=x_4$

$\therefore f^{-1}(x_3)=x_4$

$f^{-1}(x_4)=l$이라 하면 $f(l)=x_4$이므로 $l=x_5$

$\therefore f^{-1}(x_4)=x_5$

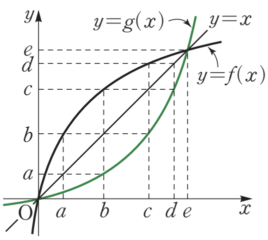
$\therefore (f\circ f)^{-1}(x_3)=(f^{-1}\circ f^{-1})(x_3)$

$=f^{-1}(f^{-1}(x_3))$

$=f^{-1}(x_4)=x_5$ 　　답 $\boldsymbol{x_5}$

161

직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$f^{-1}(c)=k$라 하면

$f(k)=c$이므로 $k=b$

$\therefore f^{-1}(c)=b$

$f^{-1}(b)=l$이라 하면 $f(l)=b$이므로 $l=a$

$\therefore f^{-1}(b)=a$

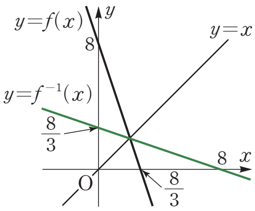
$g^{-1}(a)=m$이라 하면 $g(m)=a$이므로 $m=b$

$\therefore g^{-1}(a)=b$

$$\begin{aligned}\therefore (f\circ f\circ g)^{-1}(c)&=(g^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(c)\\&=g^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(c)))\\&=g^{-1}(f^{-1}(b))\\&=g^{-1}(a)=b\end{aligned}$$

답 b

162



함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$-3x+8=x$에서 $-4x=-8$

$\therefore x=2$

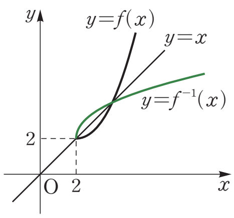
따라서 교점의 좌표는 $(2, 2)$이므로

$p=2, q=2$

$\therefore pq=4$

답 4

163



함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$\frac{1}{2}(x-2)^2+2=x$에서 $x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

따라서 두 교점의 좌표는 $(2, 2)$, $(4, 4)$이므로 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(4-2)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{2}$

답 $2\sqrt{2}$

164

$\frac{2x+y}{5}=\frac{x+2y}{7}=k\ (k\neq0)$로 놓으면

$2x+y=5k,\ x+2y=7k$

두 식을 연립하여 풀면 $x=k,\ y=3k$

$\therefore \frac{xy-x^2}{xy+y^2}=\frac{k\times3k-k^2}{k\times3k+(3k)^2}=\frac{2k^2}{12k^2}=\frac{1}{6}$

답 $\frac{1}{6}$

다른풀이 $\frac{2x+y}{5}=\frac{x+2y}{7}$에서

$7(2x+y)=5(x+2y)$, $14x+7y=5x+10y$

$3y=9x \qquad \therefore y=3x$

$xy\neq0$이므로 $y=3x$를 주어진 식에 대입하면

$\frac{xy-x^2}{xy+y^2}=\frac{x\times3x-x^2}{x\times3x+(3x)^2}=\frac{2x^2}{12x^2}=\frac{1}{6}$

165

(1) $(x+y):(y+z):(z+x)=3:4:5$이므로

$\frac{x+y}{3}=\frac{y+z}{4}=\frac{z+x}{5}=k\ (k\neq0)$로 놓으면

$x+y=3k$ …… ㉠

$y+z=4k$ …… ㉡

$z+x=5k$ …… ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$2(x+y+z)=12k$

$\therefore x+y+z=6k$ …… ㉣

㉣−㉠을 하면 $z=3k$

㉣−㉡을 하면 $x=2k$

㉣−㉢을 하면 $y=k$

$$\begin{aligned}\therefore x:y:z&=2k:k:3k\\&=2:1:3\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\frac{xy-yz+zx}{x^2+y^2+z^2}&=\frac{2k\times k-k\times3k+3k\times2k}{(2k)^2+k^2+(3k)^2}\\&=\frac{5k^2}{14k^2}=\frac{5}{14}\end{aligned}$$

답 (1) **2 : 1 : 3** (2) $\frac{5}{14}$

166

답 (1) ㄷ, ㄹ (2) ㄱ, ㄴ, ㅁ, ㅂ

167

(1) $\dfrac{1}{x^2-3x}=\dfrac{1}{x(x-3)}$이므로

두 식 $\dfrac{1}{x^2-3x}$, $\dfrac{1}{x-3}$을 통분하면

$\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x(x-3)}}$, $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x(x-3)}}$

(2) $\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$,

$\dfrac{3}{x^2+4x+3}=\dfrac{3}{(x+1)(x+3)}$이므로

두 식 $\dfrac{2}{x^2-1}$, $\dfrac{3}{x^2+4x+3}$을 통분하면

$\dfrac{\boldsymbol{2(x+3)}}{\boldsymbol{(x-1)(x+1)(x+3)}}$,

$\dfrac{\boldsymbol{3(x-1)}}{\boldsymbol{(x-1)(x+1)(x+3)}}$

답 풀이 참조

168

(1) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}=\dfrac{(x-2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x-4)}$

$=\dfrac{x-2}{x-4}$

(2) $\dfrac{x^4-y^4}{(x+y)(x^3-y^3)}$

$=\dfrac{(x^2+y^2)\cancel{(x+y)}\cancel{(x-y)}}{\cancel{(x+y)}\cancel{(x-y)}(x^2+xy+y^2)}$

$=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}$

답 (1) $\dfrac{\boldsymbol{x-2}}{\boldsymbol{x-4}}$ (2) $\dfrac{\boldsymbol{x^2+y^2}}{\boldsymbol{x^2+xy+y^2}}$

169

(1) $\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{x+3}=\dfrac{2(x+3)+3(x+2)}{(x+2)(x+3)}$

$=\dfrac{5x+12}{(x+2)(x+3)}$

(2) $1-\dfrac{6}{2x+1}=\dfrac{2x+1-6}{2x+1}=\dfrac{2x-5}{2x+1}$

(3) $\dfrac{x+2}{x^2+3x}\times\dfrac{x+3}{2x}=\dfrac{x+2}{x\cancel{(x+3)}}\times\dfrac{\cancel{x+3}}{2x}$

$=\dfrac{x+2}{2x^2}$

(4) $\dfrac{x^2-1}{x+2}\div\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{x+2}\times\dfrac{x}{\cancel{x+1}}$

$=\dfrac{x(x-1)}{x+2}$

답 (1) $\dfrac{\boldsymbol{5x+12}}{\boldsymbol{(x+2)(x+3)}}$ (2) $\dfrac{\boldsymbol{2x-5}}{\boldsymbol{2x+1}}$

(3) $\dfrac{\boldsymbol{x+2}}{\boldsymbol{2x^2}}$ (4) $\dfrac{\boldsymbol{x(x-1)}}{\boldsymbol{x+2}}$

170

(1) $\dfrac{3x+1}{x^2-1}-\dfrac{2x+3}{x^2+3x+2}+\dfrac{x-2}{x^2+x-2}$

$=\dfrac{3x+1}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{2x+3}{(x+2)(x+1)}$

$+\dfrac{x-2}{(x+2)(x-1)}$

$=\dfrac{(3x+1)(x+2)-(2x+3)(x-1)+(x-2)(x+1)}{(x+2)(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{3x^2+7x+2-(2x^2+x-3)+x^2-x-2}{(x+2)(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{2x^2+5x+3}{(x+2)(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{(2x+3)\cancel{(x+1)}}{(x+2)\cancel{(x+1)}(x-1)}$

$=\dfrac{2x+3}{(x+2)(x-1)}$

(2) $\dfrac{6x^2-x-1}{x^2-9}\times\dfrac{x^2-x-6}{3x^2-2x-1}\div\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2+2x-3}$

$=\dfrac{(2x-1)(3x+1)}{(x-3)(x+3)}\times\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-1)(3x+1)}$

$\div\dfrac{(2x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)}$

$=\dfrac{\cancel{(2x-1)}\cancel{(3x+1)}}{\cancel{(x-3)}\cancel{(x+3)}}\times\dfrac{\cancel{(x-3)}\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x-1)}\cancel{(3x+1)}}$

$\times\dfrac{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+3)}}{\cancel{(2x-1)}\cancel{(x+2)}}$

$=1$

답 (1) $\dfrac{\boldsymbol{2x+3}}{\boldsymbol{(x+2)(x-1)}}$ (2) $\mathbf{1}$

171

주어진 식의 우변을 통분하여 정리하면

$$\frac{a}{x-1}+\frac{bx+a}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{a(x^2+x+1)+(bx+a)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$=\frac{(a+b)x^2+(2a-b)x}{x^3-1}$$

즉, $\frac{3x}{x^3-1}=\frac{(a+b)x^2+(2a-b)x}{x^3-1}$가 x에 대한 항등식이므로

$a+b=0,\ 2a-b=3$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-1$

$\therefore\ ab=-1$ 답 -1

다른풀이 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$이므로 주어진 식의 양변에 $(x-1)(x^2+x+1)$을 곱하면

$3x=a(x^2+x+1)+(bx+a)(x-1)$

$\therefore\ 3x=(a+b)x^2+(2a-b)x$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=0,\ 2a-b=3$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-1$

$\therefore\ ab=-1$

172

주어진 식의 좌변을 통분하여 정리하면

$$\frac{2}{x}+\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}$$
$$=\frac{2(x-1)(x-2)+ax(x-2)+bx(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$
$$=\frac{(2+a+b)x^2+(-6-2a-b)x+4}{x(x-1)(x-2)}$$

즉,

$$\frac{(2+a+b)x^2+(-6-2a-b)x+4}{x(x-1)(x-2)}$$
$$=\frac{-x+4}{x(x-1)(x-2)}$$

가 x에 대한 항등식이므로

$2+a+b=0,\ -6-2a-b=-1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=1$

$\therefore\ a-b=-4$ 답 -4

173

(1) $\frac{x^2-x-3}{x+1}-\frac{x^2-3x+3}{x-1}$

$$=\frac{(x+1)(x-2)-1}{x+1}-\frac{(x-1)(x-2)+1}{x-1}$$
$$=\left(x-2-\frac{1}{x+1}\right)-\left(x-2+\frac{1}{x-1}\right)$$
$$=-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}$$
$$=\frac{-(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\boldsymbol{\frac{-2x}{(x+1)(x-1)}}$$

(2) $\frac{x+3}{x+4}+\frac{x+7}{x+8}-\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+5}{x+6}$

$$=\frac{(x+4)-1}{x+4}+\frac{(x+8)-1}{x+8}-\frac{(x+2)-1}{x+2}-\frac{(x+6)-1}{x+6}$$
$$=\left(1-\frac{1}{x+4}\right)+\left(1-\frac{1}{x+8}\right)-\left(1-\frac{1}{x+2}\right)-\left(1-\frac{1}{x+6}\right)$$
$$=-\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+8}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+6}$$
$$=\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}\right)$$
$$=\frac{x+4-(x+2)}{(x+2)(x+4)}+\frac{x+8-(x+6)}{(x+6)(x+8)}$$
$$=\frac{2}{(x+2)(x+4)}+\frac{2}{(x+6)(x+8)}$$
$$=\frac{2(x+6)(x+8)+2(x+2)(x+4)}{(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)}$$
$$=\boldsymbol{\frac{4(x^2+10x+28)}{(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)}}$$

답 풀이 참조

다른풀이 (1) 분자를 분모로 직접 나누어서 다항식과 분수식의 합으로 나타내어 계산할 수도 있다.

$$\begin{array}{r} x-2 \\ x+1\,\overline{)\,x^2-\ x-3} \\ \underline{x^2+\ x\quad} \\ -2x-3 \\ \underline{-2x-2} \\ -1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x-2 \\ x-1\,\overline{)\,x^2-3x+3} \\ \underline{x^2-\ x\quad} \\ -2x+3 \\ \underline{-2x+2} \\ 1 \end{array}$$

$$\therefore \frac{x^2-x-3}{x+1}=x-2-\frac{1}{x+1} \qquad \therefore \frac{x^2-3x+3}{x-1}=x-2+\frac{1}{x-1}$$

174

(1) $\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{2}{x^2+4x+3}+\dfrac{3}{x^2+9x+18}-\dfrac{6}{x^2+6x}$

$=\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}+\dfrac{3}{(x+3)(x+6)}-\dfrac{6}{x(x+6)}$

$=\left(\cancel{\dfrac{1}{x}}-\cancel{\dfrac{1}{x+1}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{x+1}}-\cancel{\dfrac{1}{x+3}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{x+3}}-\cancel{\dfrac{1}{x+6}}\right)-\left(\cancel{\dfrac{1}{x}}-\cancel{\dfrac{1}{x+6}}\right)$

$=0$

(2) $\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{3\times5}+\dfrac{1}{5\times7}+\dfrac{1}{7\times9}+\dfrac{1}{9\times11}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{9}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{11}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(1-\cancel{\dfrac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{3}}-\cancel{\dfrac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{5}}-\cancel{\dfrac{1}{7}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{7}}-\cancel{\dfrac{1}{9}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{9}}-\dfrac{1}{11}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{11}\right)=\dfrac{5}{11}$

답 (1) **0** (2) $\mathbf{\dfrac{5}{11}}$

175

주어진 식의 좌변을 간단히 하면

$\left(\dfrac{1}{x-2}-\cancel{\dfrac{1}{x}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{x}}-\cancel{\dfrac{1}{x+4}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{x+4}}-\dfrac{1}{x+10}\right)$

$=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+10}$

$=\dfrac{x+10-(x-2)}{(x-2)(x+10)}=\dfrac{12}{(x-2)(x+10)}$

즉, $\dfrac{12}{(x-2)(x+10)}=\dfrac{a}{(x+b)(x+c)}$가 x에 대한 항등식이므로

$a=12,\ b=-2,\ c=10$ 또는 $a=12,\ b=10,\ c=-2$

$\therefore a+b+c=20$

답 **20**

176

(1) $\dfrac{\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}}{\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}}=\dfrac{\dfrac{x+3-(x+2)}{(x+2)(x+3)}}{\dfrac{x+4-(x+3)}{(x+3)(x+4)}}$

$=\dfrac{\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}}{\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}}$

$=\dfrac{\cancel{(x+3)}(x+4)}{(x+2)\cancel{(x+3)}}$

$=\dfrac{x+4}{x+2}$

(2) $\dfrac{1-\dfrac{2x-y}{x+y}}{\dfrac{y}{x+y}-1}=\dfrac{\dfrac{x+y-(2x-y)}{x+y}}{\dfrac{y-(x+y)}{x+y}}$

$=\dfrac{\dfrac{-x+2y}{x+y}}{\dfrac{-x}{x+y}}$

$=\dfrac{(-x+2y)\cancel{(x+y)}}{-x\cancel{(x+y)}}$

$=\dfrac{x-2y}{x}$

(3) $\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{x-3-\dfrac{5}{x+1}}=\dfrac{\dfrac{x+2}{x}}{\dfrac{(x-3)(x+1)-5}{x+1}}$

$=\dfrac{\dfrac{x+2}{x}}{\dfrac{x^2-2x-8}{x+1}}$

$=\dfrac{\cancel{(x+2)}(x+1)}{x\cancel{(x+2)}(x-4)}$

$=\dfrac{x+1}{x(x-4)}$

답 (1) $\mathbf{\dfrac{x+4}{x+2}}$ (2) $\mathbf{\dfrac{x-2y}{x}}$ (3) $\mathbf{\dfrac{x+1}{x(x-4)}}$

177

$$\frac{17}{72}=\frac{1}{\frac{72}{17}}=\frac{1}{4+\frac{4}{17}}=\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{17}{4}}}$$

$$=\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4}}}$$

$\therefore a=4,\ b=4,\ c=4$

$\therefore a+b+c=12$

답 12

178

$2x^2-5x-2=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$2x-5-\frac{2}{x}=0,\ 2x-\frac{2}{x}=5\qquad \therefore x-\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+2=\frac{33}{4}$

$x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=\left(\frac{5}{2}\right)^3+3\times\frac{5}{2}=\frac{185}{8}$

$\therefore 8x^3-4x^2-\frac{4}{x^2}-\frac{8}{x^3}$

$=8\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)-4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$

$=8\times\frac{185}{8}-4\times\frac{33}{4}$

$=152$

답 152

179

$x^2+\frac{1}{x^2}=14$에서

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=14,\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=16$

$\therefore x+\frac{1}{x}=4\ (\because x>0)$

$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=4^3-3\times4$

$=52$

답 52

180

(주어진 식)

$$=\frac{x+y}{(1+x)(1+y)(x+y)}+\frac{x(1+y)}{(x+1)(x+y)(1+y)}+\frac{y(1+x)}{(y+1)(y+x)(1+x)}$$

$$=\frac{x+y+x(1+y)+y(1+x)}{(1+x)(1+y)(x+y)}$$

$$=\frac{2x+2y+2xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$$

$$=\frac{2(x+y+xy)}{(1+x)(1+y)(x+y)}=0$$

답 0

181

(1) **$\{x\,|\,x\neq0$인 실수$\}$**

(2) $x+3=0$에서 $x=-3$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\neq-3$인 실수$\}$

(3) $3x-5=0$에서 $x=\frac{5}{3}$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{5}{3}\text{인 실수}\right\}$

(4) $x^2-4=0$에서 $x=\pm2$

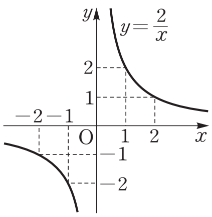
따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x\,|\,x\neq\pm2$인 실수$\}$

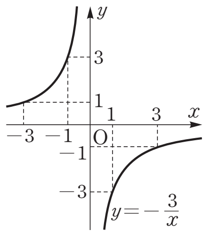
답 풀이 참조

182

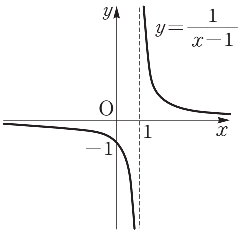
(1) $y=\frac{2}{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, **점근선의 방정식은 $x=0,\ y=0$**이다.



(2) $y=-\frac{3}{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, **점근선의 방정식은 $x=0,\ y=0$**이다.

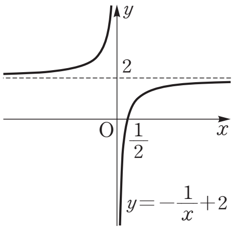


(3) $y=\dfrac{1}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.



따라서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 **점근선의 방정식은 $x=1$, $y=0$**이다.

(4) $y=-\dfrac{1}{x}+2$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.



따라서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 **점근선의 방정식은 $x=0$, $y=2$**이다.

답 풀이 참조

183

(1) $y=\dfrac{4x-15}{x-3}=\dfrac{4(x-3)-3}{x-3}=-\dfrac{3}{x-3}+4$

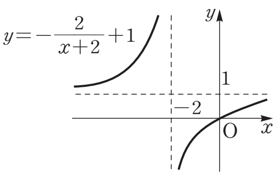
(2) $y=\dfrac{-5x-7}{x+2}=\dfrac{-5(x+2)+3}{x+2}=\dfrac{3}{x+2}-5$

답 (1) $y=-\dfrac{3}{x-3}+4$ (2) $y=\dfrac{3}{x+2}-5$

184

(1) $y=-\dfrac{2}{x+2}+1$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고,



정의역은

$\{x\,|\,x\neq-2$인 실수$\}$,

치역은

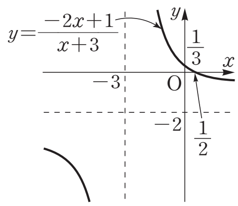
$\{y\,|\,y\neq1$인 실수$\}$,

점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=1$이다.

(2) $y=\dfrac{-2x+1}{x+3}=\dfrac{-2(x+3)+7}{x+3}=\dfrac{7}{x+3}-2$

이므로 주어진 유리함수의 그래프는 $y=\dfrac{7}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고,



정의역은

$\{x\,|\,x\neq-3$인 실수$\}$,

치역은

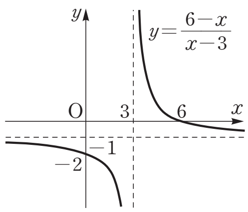
$\{y\,|\,y\neq-2$인 실수$\}$,

점근선의 방정식은 $x=-3$, $y=-2$이다.

(3) $y=\dfrac{6-x}{x-3}=\dfrac{-(x-3)+3}{x-3}=\dfrac{3}{x-3}-1$

이므로 주어진 유리함수의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고,



정의역은

$\{x\,|\,x\neq3$인 실수$\}$,

치역은

$\{y\,|\,y\neq-1$인 실수$\}$,

점근선의 방정식은 $x=3$, $y=-1$이다.

답 풀이 참조

185

$y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\dfrac{3}{x-3}-2=\dfrac{-2x+3}{x-3}$

이 식이 $y=\dfrac{ax+b}{x-c}$와 같아야 하므로

$a=-2,\ b=3,\ c=3$

$\therefore abc=-18$

답 -18

186

ㄱ. $y=\dfrac{x-1}{x-3}=\dfrac{(x-3)+2}{x-3}=\dfrac{2}{x-3}+1$

이므로 $y=\dfrac{x-1}{x-3}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\dfrac{2x+2}{x+2}=\dfrac{2(x+2)-2}{x+2}=-\dfrac{2}{x+2}+2$

이므로 $y=\dfrac{2x+2}{x+2}$의 그래프는 $y=-\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\dfrac{-4x-2}{x+1}=\dfrac{-4(x+1)+2}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}-4$

이므로 $y=\dfrac{-4x-2}{x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 평행이동에 의해 그 그래프가 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 **ㄱ, ㄷ**

187

$y=\dfrac{ax+3}{x+1}=\dfrac{a(x+1)-a+3}{x+1}=\dfrac{-a+3}{x+1}+a$

이므로 $y=\dfrac{ax+3}{x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{-a+3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

이 그래프를 평행이동하면 $y=\dfrac{4}{x}$의 그래프와 겹쳐지므로

$-a+3=4 \qquad \therefore a=-1$

답 **-1**

188

$y=\dfrac{2x+3}{x+2}=\dfrac{2(x+2)-1}{x+2}=-\dfrac{1}{x+2}+2$

이므로 $y=\dfrac{2x+3}{x+2}$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

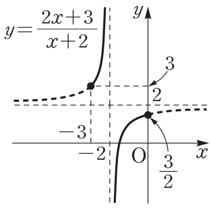
$y=\dfrac{3}{2}$일 때 $x=0$이고,

$y=3$일 때 $x=-3$이므로 오른쪽 그림에서 치역이

$\left\{y \,\middle|\, y\le\dfrac{3}{2}\text{ 또는 }y\ge3\right\}$일 때,

정의역은

$\{x\,|\,-3\le x<-2\text{ 또는 }-2<x\le0\}$



답 **$\{x\,|\,-3\le x<-2$ 또는 $-2<x\le0\}$**

189

$y=\dfrac{2x-3}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-5}{x+1}=-\dfrac{5}{x+1}+2$

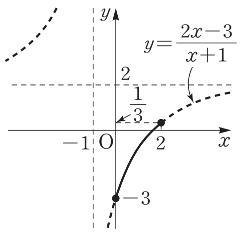
이므로 $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$의 그래프는 $y=-\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0\le x\le2$에서

$y=\dfrac{2x-3}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=2$일 때 최댓값

$\dfrac{4-3}{2+1}=\dfrac{1}{3}$, $x=0$일 때 최솟값 $\dfrac{0-3}{0+1}=-3$을 갖는다.

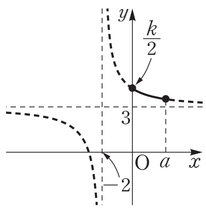


답 **최댓값: $\dfrac{1}{3}$, 최솟값: -3**

190

$y=\dfrac{3x+k}{x+2}=\dfrac{3(x+2)+k-6}{x+2}=\dfrac{k-6}{x+2}+3$

이때 $k>6$에서 $k-6>0$이므로 $0\le x\le a$에서 주어진 유리함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x=0$일 때 최댓값이 5이므로

$5=\dfrac{k}{2} \qquad \therefore k=10$

$x=a$일 때 최솟값이 4이므로

$4=\dfrac{3a+10}{a+2} \qquad \therefore a=2$

$\therefore a+k=2+10=12$

답 **12**

191

$$y=\frac{5x+6}{2x+3}=\frac{\frac{5}{2}(2x+3)-\frac{3}{2}}{2x+3}=\frac{-\frac{3}{2}}{2x+3}+\frac{5}{2}$$

이므로 점근선의 방정식은

$x=-\frac{3}{2}$, $y=\frac{5}{2}$

따라서 주어진 유리함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$에 대하여 대칭이므로

$a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{5}{2}$

$\therefore a+b=1$

답 1

192

$$y=\frac{3x+4}{x+2}=\frac{3(x+2)-2}{x+2}=-\frac{2}{x+2}+3$$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=3$

이때 주어진 유리함수의 그래프가 직선 $y=-x+k$에 대하여 대칭이므로 직선 $y=-x+k$는 두 점근선의 교점 $(-2, 3)$을 지난다. 즉,

$3=-(-2)+k \qquad \therefore k=1$

답 1

193

$$y=\frac{bx+3}{x+a}=\frac{b(x+a)-ab+3}{x+a}=\frac{-ab+3}{x+a}+b$$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=b$

이때 주어진 유리함수의 그래프가 두 직선 $y=x+6$, $y=-x-2$에 대하여 대칭이므로 두 직선은 각각 두 점근선의 교점 $(-a, b)$를 지난다. 즉,

$b=-a+6$, $b=a-2$

두 식을 연립하여 풀면

$a=4$, $b=2$

$\therefore ab=8$

답 8

다른풀이1 $y=\frac{bx+3}{x+a}$의 그래프는 두 직선 $y=x+6$, $y=-x-2$에 대하여 대칭이므로 두 직선의 교점인 $(-4, 2)$에 대하여 대칭이다.

즉, 점근선의 방정식은 $x=-4$, $y=2$이므로 $k\neq0$인 상수 k에 대하여

$$y=\frac{k}{x+4}+2=\frac{2x+8+k}{x+4}=\frac{bx+3}{x+a}$$

따라서 $a=4$, $b=2$, $k=-5$이므로

$ab=8$

다른풀이2 $y=\frac{bx+3}{x+a}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=b$이고, 두 점근선의 교점 $(-a, b)$는 두 직선 $y=x+6$, $y=-x-2$의 교점과 같다.

두 직선 $y=x+6$, $y=-x-2$의 교점이 $(-4, 2)$이므로

$-a=-4$, $b=2$

$\therefore a=4$, $b=2$

$\therefore ab=8$

194

주어진 유리함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=3$, $y=2$이므로 함수의 식을

$$y=\frac{k}{x-3}+2\ (k>0) \quad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(2, 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{2-3}+2 \qquad \therefore k=2$

$k=2$를 ㉠에 대입하면

$$y=\frac{2}{x-3}+2$$

$\therefore a=-3$, $b=2$, $k=2$

$\therefore a+b+k=1$

답 1

195

점근선의 방정식이 $x=2$, $y=3$이므로 함수의 식을

$$y=\frac{k}{x-2}+3\ (k\neq0) \quad \cdots\cdots ㉠$$

으로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(3, 1)$을 지나므로

$1=\frac{k}{3-2}+3 \qquad \therefore k=-2$

$k=-2$를 ㉠에 대입하면

$$y=\frac{-2}{x-2}+3=\frac{-2+3(x-2)}{x-2}=\frac{3x-8}{x-2}$$

$\therefore a=-2,\ b=3,\ c=-8$

답 $\boldsymbol{a=-2,\ b=3,\ c=-8}$

196

주어진 유리함수 $y=\dfrac{bx-7}{x+a}$의 정의역이 $\{x|x\neq-2$인 실수$\}$, 치역이 $\{y|y\neq4$인 실수$\}$이므로 점근선의 방정식은

$x=-2,\ y=4$

함수의 식을 $y=\dfrac{k}{x+2}+4\ (k\neq0)$로 놓으면

$$y=\frac{k}{x+2}+4=\frac{k+4(x+2)}{x+2}=\frac{4x+8+k}{x+2}$$

즉, $\dfrac{bx-7}{x+a}=\dfrac{4x+8+k}{x+2}$이므로

$a=2,\ b=4,\ k=-15$

$\therefore ab=8$

답 8

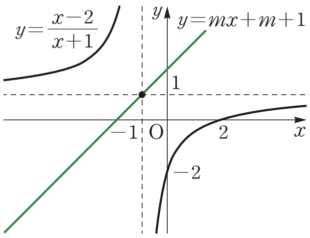
197

$$y=\frac{x-2}{x+1}=\frac{(x+1)-3}{x+1}=-\frac{3}{x+1}+1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이므로 $y=\dfrac{x-2}{x+1}$의 그래프는 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

또, 직선 $y=mx+m+1=m(x+1)+1$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 1)$을 지난다.

이때 ㉠의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$이 만나지 않으려면 다음 그림과 같아야 한다.



$\therefore m\geq0$

답 $\boldsymbol{m\geq0}$

198

유리함수 $y=-\dfrac{3}{x}+3$의 그래프와 직선 $y=3x+a$가 한 점에서 만나려면 $-\dfrac{3}{x}+3=3x+a$에서

$3x^2+(a-3)x+3=0$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=(a-3)^2-4\times3\times3=0$

$a^2-6a-27=0,\ (a+3)(a-9)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=9$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$(-3)+9=6$

답 6

199

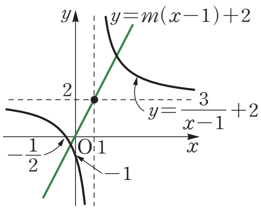
$y=\dfrac{3}{x-1}+2$의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

또, $mx-y-m+2=0$에서

$m(x-1)-y+2=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ 2)$를 지난다.

따라서 오른쪽 그림에서 직선 ㉠의 기울기가 음수이거나 0인 경우에는 교점이 생기지 않으므로 주어진 유리함수의 그래프와 직선 ㉠이 만나려면 직선 ㉠의 기울기가 양수이어야 한다.



$\therefore m>0$

답 $\boldsymbol{m>0}$

200

$f(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$에 대하여

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$$=1-\frac{1}{\frac{x-1}{x}}=1-\frac{x}{x-1}=-\frac{1}{x-1}$$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$

$=1-\dfrac{1}{-\dfrac{1}{x-1}}=1+x-1=x$

$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))=f(x)=1-\dfrac{1}{x}$

$f^5(x)=(f\circ f^4)(x)=f(f^4(x))=f(f(x))$

$=-\dfrac{1}{x-1}$

$f^6(x)=(f\circ f^5)(x)=f(f^5(x))=f(f^2(x))=x$

$\vdots$

따라서 자연수 n에 대하여

$f^1(x)=f^4(x)=f^7(x)=\cdots=f^{3n-2}(x)=1-\dfrac{1}{x}$

$f^2(x)=f^5(x)=f^8(x)=\cdots=f^{3n-1}(x)=-\dfrac{1}{x-1}$

$f^3(x)=f^6(x)=f^9(x)=\cdots=f^{3n}(x)=x$

$\therefore f^{200}(x)=f^{3\times 67-1}(x)=-\dfrac{1}{x-1}$

답 $\boldsymbol{f^{200}(x)=-\dfrac{1}{x-1}}$

201

$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f(x))$

$$=\frac{3\times\dfrac{3x-3}{x-3}-3}{\dfrac{3x-3}{x-3}-3}$$

$$=\frac{\dfrac{3(3x-3)-3(x-3)}{x-3}}{\dfrac{(3x-3)-3(x-3)}{x-3}}$$

$=\dfrac{6x}{6}=x$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))$

$=f(x)=\dfrac{3x-3}{x-3}$

$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))=f(f(x))=x$

$\vdots$

따라서 자연수 n에 대하여

$f^1(x)=f^3(x)=f^5(x)=\cdots=f^{2n-1}(x)=\dfrac{3x-3}{x-3}$

$f^2(x)=f^4(x)=f^6(x)=\cdots=f^{2n}(x)=x$

즉, $f^{2019}(x)=f(x)=\dfrac{3x-3}{x-3}$이므로

$f^{2019}(6)=\dfrac{3\times 6-3}{6-3}=5$

답 **5**

202

주어진 그래프에서 $f^1(1)=f(1)=0$, $f(0)=1$이므로

$f^2(1)=(f\circ f^1)(1)=f(f(1))=f(0)=1$

$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(1)=0$

$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(0)=1$

$\vdots$

따라서 자연수 n에 대하여

$f^1(1)=f^3(1)=f^5(1)=\cdots=f^{2n-1}(1)=0$

$f^2(1)=f^4(1)=f^6(1)=\cdots=f^{2n}(1)=1$

$\therefore f^{500}(1)=f^{2\times 250}(1)=1$

답 **1**

다른풀이 주어진 유리함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=-1$이므로

$f(x)=\dfrac{k}{x+1}-1\ (k>0)$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{k}{2}-1 \quad \therefore k=2$

$k=2$를 ㉠에 대입하면

$f(x)=\dfrac{2}{x+1}-1=\dfrac{-x+1}{x+1}$

$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f(x))$

$$=\frac{-\dfrac{-x+1}{x+1}+1}{\dfrac{-x+1}{x+1}+1}=\frac{\dfrac{x-1+x+1}{x+1}}{\dfrac{-x+1+x+1}{x+1}}=x$$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f(x)=\dfrac{-x+1}{x+1}$

$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))=f(f(x))=x$

$\vdots$

따라서 자연수 n에 대하여

$f^1(x)=f^3(x)=f^5(x)=\cdots=f^{2n-1}(x)=\dfrac{-x+1}{x+1}$

$f^2(x)=f^4(x)=f^6(x)=\cdots=f^{2n}(x)=x$

즉, $f^{500}(x)=f^{2\times 500}(x)=x$이므로

$f^{500}(1)=1$

203

$(f^{-1})^{-1}=f$이므로 $f^{-1}(x)$의 역함수를 구하면 $f(x)$이다.

$y=\dfrac{-x+3}{2x-1}$으로 놓고 x에 대하여 풀면

$y(2x-1)=-x+3$

$(2y+1)x=y+3$

$\therefore x=\dfrac{y+3}{2y+1}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{x+3}{2x+1}$

따라서 $f(x)=\dfrac{x+3}{2x+1}$이므로

$a=1,\ b=3,\ c=1$ 답 $\boldsymbol{a=1,\ b=3,\ c=1}$

204

$(f\circ g)(x)=x$이므로 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$g(3)=k$, 즉 $f^{-1}(3)=k$라 하면 $f(k)=3$이므로

$\dfrac{2k+1}{k-2}=3,\ 2k+1=3k-6$

$\therefore k=7 \qquad \therefore g(3)=7$

$g(7)=l$, 즉 $f^{-1}(7)=l$이라 하면 $f(l)=7$이므로

$\dfrac{2l+1}{l-2}=7,\ 2l+1=7l-14$

$\therefore l=3 \qquad \therefore g(7)=3$

$\therefore (g\circ g)(3)=g(g(3))=g(7)=3$ 답 **3**

다른풀이 $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$로 놓고 x에 대하여 풀면

$y(x-2)=2x+1$

$(y-2)x=2y+1$

$\therefore x=\dfrac{2y+1}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\dfrac{2x+1}{x-2}$

$\therefore g(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$

따라서 $g(3)=\dfrac{6+1}{3-2}=7,\ g(7)=\dfrac{14+1}{7-2}=3$이므로

$(g\circ g)(3)=g(g(3))=g(7)=3$

205

$f(x)=\dfrac{ax+b}{-x+2}$의 그래프가 점 $(3,\ -9)$를 지나므로

$-9=\dfrac{3a+b}{-3+2}$

$\therefore 3a+b=9$ …… ㉠

또, $y=f(x)$의 역함수의 그래프가 점 $(3,\ -9)$를 지나면 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(-9,\ 3)$을 지나므로

$3=\dfrac{-9a+b}{9+2}$

$\therefore -9a+b=33$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=15$ 답 $\boldsymbol{a=-2,\ b=15}$

206

(1) $\sqrt{x+1}$에서 $x+1\ge0 \qquad \therefore x\ge-1$

(2) $\sqrt{x-1}$에서 $x-1\ge0 \qquad \therefore x\ge1$ …… ㉠

$\sqrt{2x-4}$에서 $2x-4\ge0 \qquad \therefore x\ge2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는

$x\ge2$

(3) $\sqrt{x+3}$에서 $x+3\ge0 \qquad \therefore x\ge-3$ …… ㉠

$\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$에서 $2-x>0 \qquad \therefore x<2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는

$-3\le x<2$

(4) $\sqrt{2x-1}$에서 $2x-1\ge0 \qquad \therefore x\ge\dfrac{1}{2}$ …… ㉠

$\sqrt{4-x}$에서 $4-x>0 \qquad \therefore x<4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는

$\dfrac{1}{2}\le x<4$

답 (1) $\boldsymbol{x\ge-1}$ (2) $\boldsymbol{x\ge2}$ (3) $\boldsymbol{-3\le x<2}$ (4) $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\le x<4}$

207

$\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}$

$=\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}$

$=|x-2|+|x-3|$

이때 $2<x<3$이므로 $x-2>0,\ x-3<0$

$\therefore \sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}$
$=|x-2|+|x-3|$
$=(x-2)-(x-3)$
$=1$

답 1

208

(1) $\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}=\dfrac{x(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}$
$=\dfrac{x(\sqrt{x+4}+2)}{x+4-4}$
$=\sqrt{x+4}+2$

(2) $\dfrac{6}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}$
$=\dfrac{6(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3})}{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3})}$
$=\dfrac{6(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3})}{(x+3)-(x-3)}$
$=\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}$

(3) $\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{x-2}+1}$
$=\dfrac{(\sqrt{x-2}-1)^2}{(\sqrt{x-2}+1)(\sqrt{x-2}-1)}$
$=\dfrac{x-2-2\sqrt{x-2}+1}{x-2-1}$
$=\dfrac{x-1-2\sqrt{x-2}}{x-3}$

답 (1) $\sqrt{x+4}+2$ (2) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}$
(3) $\dfrac{x-1-2\sqrt{x-2}}{x-3}$

209

(1) $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$
$=(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x})^2$
$=x+1-x=1$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$
$=\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})-(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$
$=\dfrac{-2\sqrt{y}}{x-y}$

(3) $\dfrac{2x}{2-\sqrt{x+1}}+\dfrac{2x}{2+\sqrt{x+1}}$
$=\dfrac{2x(2+\sqrt{x+1})+2x(2-\sqrt{x+1})}{(2-\sqrt{x+1})(2+\sqrt{x+1})}$
$=\dfrac{4x+2x\sqrt{x+1}+4x-2x\sqrt{x+1}}{4-(x+1)}$
$=\dfrac{8x}{3-x}$

답 (1) 1 (2) $\dfrac{-2\sqrt{y}}{x-y}$ (3) $\dfrac{8x}{3-x}$

210

(1) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$
$=\dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})+(x+\sqrt{x^2-1})}{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}$
$=\dfrac{2x}{x^2-(x^2-1)}=2x$

(2) $\dfrac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}-\dfrac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$
$=\dfrac{x(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})-x(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})}$
$=\dfrac{x\sqrt{x}-x\sqrt{x-1}-x\sqrt{x}-x\sqrt{x-1}}{x-(x-1)}$
$=-2x\sqrt{x-1}$

답 (1) $2x$ (2) $-2x\sqrt{x-1}$

211

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$에서
$x+y=2\sqrt{2}$, $xy=1$, $x-y=2$이므로
$\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$
$=\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$ ← $x>0$, $y>0$이므로 $\sqrt{x}\sqrt{y}=\sqrt{xy}$
$=\dfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{1}}{2}$
$=\sqrt{2}+1$

답 $\sqrt{2}+1$

212

$x=2+\sqrt{3}$에서 $x-2=\sqrt{3}$
양변을 제곱하면 $x^2-4x+4=3$

$\therefore x^2-4x+1=0$

$\therefore x^3-4x^2+x+2=x(x^2-4x+1)+2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad =x\times0+2=2$ 답 **2**

213

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}$$

$$=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(99)$

$=(\cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{3}})$

$\quad+\cdots+(\cancel{\sqrt{99}}-\cancel{\sqrt{98}})+(\sqrt{100}-\cancel{\sqrt{99}})$

$=-\sqrt{1}+\sqrt{100}$

$=9$ 답 **9**

214

ㄴ. $y=-\sqrt{5}x$는 다항함수이다.

ㄷ. $y=\sqrt{(2-x)^2}$은 $x\le2$일 때 $y=2-x$, $x>2$일 때 $y=-2+x$이므로 무리함수가 아니다.

따라서 무리함수는 ㄱ, ㄹ, ㅁ이다. 답 **ㄱ, ㄹ, ㅁ**

215

(1) $-3-x\ge0$에서 $x\le-3$이므로

정의역은 $\{x\,|\,x\le-3\}$

(2) $x+2\ge0$에서 $x\ge-2$이므로

정의역은 $\{x\,|\,x\ge-2\}$

(3) $2x-4\ge0$에서 $x\ge2$이므로

정의역은 $\{x\,|\,x\ge2\}$

(4) $1-x^2\ge0$에서 $x^2-1\le0$

$(x+1)(x-1)\le0 \quad \therefore -1\le x\le1$

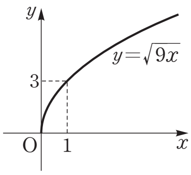
따라서 정의역은 $\{x\,|\,-1\le x\le1\}$

답 (1) $\{x\,|\,x\le-3\}$ (2) $\{x\,|\,x\ge-2\}$

(3) $\{x\,|\,x\ge2\}$ (4) $\{x\,|\,-1\le x\le1\}$

216

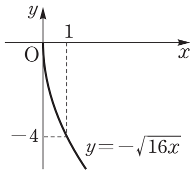
(1) $y=\sqrt{9x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ **정의역:** $\{x\,|\,x\ge0\}$,

치역: $\{y\,|\,y\ge0\}$

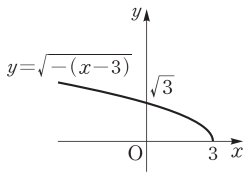
(2) $y=-\sqrt{16x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ **정의역:** $\{x\,|\,x\ge0\}$,

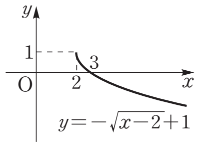
치역: $\{y\,|\,y\le0\}$

(3) $y=\sqrt{-(x-3)}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ **정의역:** $\{x\,|\,x\le3\}$, **치역:** $\{y\,|\,y\ge0\}$

(4) $y=-\sqrt{x-2}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

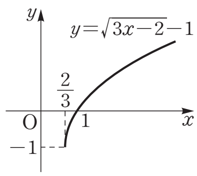


$\therefore$ **정의역:** $\{x\,|\,x\ge2\}$, **치역:** $\{y\,|\,y\le1\}$

답 **풀이 참조**

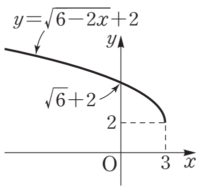
217

(1) $y=\sqrt{3x-2}-1=\sqrt{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{2}{3}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



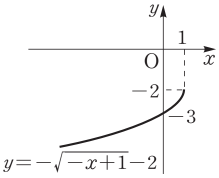
$\therefore$ **정의역:** $\left\{x\,\middle|\,x\ge\frac{2}{3}\right\}$, **치역:** $\{y\,|\,y\ge-1\}$

(2) $y=\sqrt{6-2x}+2=\sqrt{-2(x-3)}+2$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ **정의역:** $\{x\,|\,x\le3\}$, **치역:** $\{y\,|\,y\ge2\}$

(3) $y=-\sqrt{-x+1}-2=-\sqrt{-(x-1)}-2$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ **정의역: $\{x|x\le 1\}$, 치역: $\{y|y\le -2\}$**

답 **풀이 참조**

218

ㄱ. $y=-\sqrt{-x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄴ. $y=\sqrt{-2x+6}=\sqrt{-2(x-3)}$이므로
$y=\sqrt{-2x+6}$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=-\sqrt{4-x}+7=-\sqrt{-(x-4)}+7$이므로
$y=-\sqrt{4-x}+7$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 7만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\sqrt{-x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 **ㄱ, ㄷ**

219

$y=\sqrt{ax-3}+2$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동하면

$y=\sqrt{a(x-b)-3}+2+c$

$\therefore y=\sqrt{ax-ab-3}+2+c$

이 함수의 그래프가 $y=\sqrt{5x+2}$의 그래프와 일치하므로

$a=5,\ -ab-3=2,\ 2+c=0$

따라서 $a=5,\ b=-1,\ c=-2$이므로

$a+bc=5+(-1)\times(-2)=7$

답 **7**

220

$y=\sqrt{-x+2}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면

$y=\sqrt{-(x-1)+2}-2$

$\therefore y=\sqrt{-x+3}-2$

$y=\sqrt{-x+3}-2$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면

$y=\sqrt{-(-x)+3}-2$

$\therefore y=\sqrt{x+3}-2$

따라서 $a=1,\ b=3,\ c=-2$이므로

$a+b+c=2$

답 **2**

221

$y=-\sqrt{4x-4}+3=-\sqrt{4(x-1)}+3$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$y=-1$일 때, $-1=-\sqrt{4x-4}+3$

$\sqrt{4x-4}=4,\ 4x-4=16$

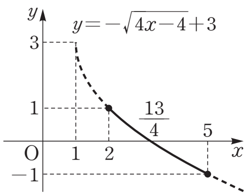
$\therefore x=5$

$y=1$일 때, $1=-\sqrt{4x-4}+3$

$\sqrt{4x-4}=2,\ 4x-4=4$

$\therefore x=2$

따라서 오른쪽 그림에서 치역이 $\{y|-1\le y\le 1\}$일 때, 정의역은 $\{x|2\le x\le 5\}$이다.



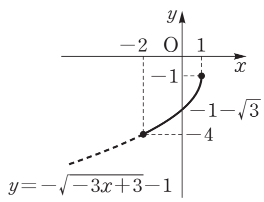
답 $\{x|2\le x\le 5\}$

222

$y=-\sqrt{-3x+3}-1=-\sqrt{-3(x-1)}-1$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-2\le x\le 1$에서 $y=-\sqrt{-3x+3}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=1$일 때 최댓값

$a=-\sqrt{-3+3}-1=-1$,

$x=-2$일 때 최솟값 $b=-\sqrt{6+3}-1=-4$를 갖는다.

$\therefore a-b=-1-(-4)=3$

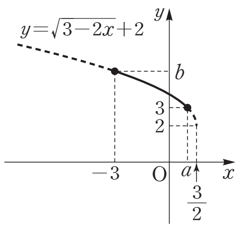
답 **3**

223

$y=\sqrt{3-2x}+2=\sqrt{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)}+2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-3\le x\le a$에서 $y=\sqrt{3-2x}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-3$일 때 최댓값 $b=\sqrt{3+6}+2=5$, $x=a$일 때 최솟값 $\sqrt{3-2a}+2$를 갖는다.



즉, $\sqrt{3-2a}+2=3$이므로

$\sqrt{3-2a}=1$, $3-2a=1$ $\quad\therefore a=1$

$\therefore b-a=5-1=4$

답 **4**

224

주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-ax}\ (a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=\sqrt{-a(x-4)}-1$ $\cdots\cdots$ ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{4a}-1$, $\sqrt{4a}=2$

$4a=4$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{-(x-4)}-1=\sqrt{-x+4}-1$

따라서 $a=1$, $b=4$, $c=-1$이므로

$a+b+c=4$

답 **4**

225

주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=-\sqrt{a(x-1)}+1$ $\cdots\cdots$ ㉠

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(0, 0)$을 지나므로

$0=-\sqrt{-a}+1$, $\sqrt{-a}=1$

$-a=1$ $\quad\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{-(x-1)}+1$

$\therefore f(x)=-\sqrt{-x+1}+1$

이때 $f(k)=-1$을 만족시키는 상수 k의 값은

$-1=-\sqrt{-k+1}+1$에서

$\sqrt{-k+1}=2$, $-k+1=4$

$\therefore k=-3$

답 **-3**

226

$ax+9\ge 0$에서 $ax\ge -9$

이때 주어진 함수의 정의역이 $\{x\,|\,x\ge -3\}$이므로

$a>0$

또, $x\ge -\frac{9}{a}$에서 $-\frac{9}{a}=-3$

$\therefore a=3$

한편, 함수 $y=-\sqrt{3x+9}+b$에서 $\sqrt{3x+9}=b-y$이므로

$b-y\ge 0$ $\quad\therefore y\le b$

즉, 치역이 $\{y\,|\,y\le b\}$이므로 $b=2$

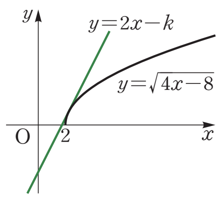
$\therefore ab=3\times 2=6$

답 **6**

227

$y=\sqrt{4x-8}=\sqrt{4(x-2)}$

이므로 주어진 무리함수의 그래프는 $y=\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, $y=2x-k$는 기울기가 2이고 y절편이 $-k$인 직선이다.



$y=\sqrt{4x-8}$의 그래프와 직선 $y=2x-k$가 접하려면

$\sqrt{4x-8}=2x-k$에서 양변을 제곱하면

$4x-8=(2x-k)^2$, $4x-8=4x^2-4kx+k^2$

$\therefore 4x^2-4(k+1)x+k^2+8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4(k+1)^2-4(k^2+8)=0$

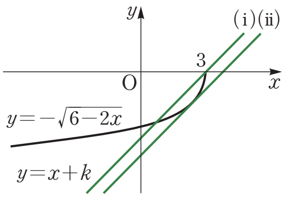
$8k-28=0 \qquad \therefore k=\frac{7}{2}$ 답 $\frac{7}{2}$

228

$y=-\sqrt{6-2x}$

$=-\sqrt{-2(x-3)}$

이므로 주어진 무리함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고,



$y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k인 직선이다.

(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(3, 0)$을 지날 때,

$0=3+k \qquad \therefore k=-3$

(ii) $y=-\sqrt{6-2x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때,

$-\sqrt{6-2x}=x+k$의 양변을 제곱하면

$6-2x=(x+k)^2$, $6-2x=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+2(k+1)x+k^2-6=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(k^2-6)=0$

$2k+7=0 \qquad \therefore k=-\frac{7}{2}$

따라서 주어진 무리함수의 그래프와 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선이 (i)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있어야 하므로

$-\frac{7}{2}<k\le-3$ 답 $-\frac{7}{2}<k\le-3$

229

$y=x^2-8x+10$이라 하면

$y=(x-4)^2-6$ $(x\le4)$에서 치역이 $\{y|y\ge-6\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\ge-6\}$이다.

$y=(x-4)^2-6$에서

$y+6=(x-4)^2$, $x-4=\pm\sqrt{y+6}$

그런데 $x\le4$이므로

$x-4=-\sqrt{y+6} \qquad \therefore x=-\sqrt{y+6}+4$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=-\sqrt{x+6}+4$

$\therefore f^{-1}(x)=-\sqrt{x+6}+4$ $(x\ge-6)$

따라서 $a=1$, $b=6$, $c=4$, $d=-6$이므로

$ab-cd=1\times6-4\times(-6)=30$ 답 30

230

함수 $f(x)=\sqrt{-x+a}+1$의 치역이 $\{y|y\ge1\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\ge1\}$이다.

$y=\sqrt{-x+a}+1$이라 하면 $y-1=\sqrt{-x+a}$

양변을 제곱하면

$(y-1)^2=-x+a$

$\therefore x=-(y-1)^2+a$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-(x-1)^2+a$

$\therefore g(x)=-(x-1)^2+a$ $(x\ge1)$

$g(2)=3$이므로

$-(2-1)^2+a=3 \qquad \therefore a=4$

$\therefore g(1)=-(1-1)^2+4=4$ 답 4

다른풀이 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이고 $g(2)=3$이므로 $f(3)=2$

즉, $f(3)=\sqrt{-3+a}+1=2$이므로

$\sqrt{-3+a}=1$, $-3+a=1 \qquad \therefore a=4$

$\therefore f(x)=\sqrt{-x+4}+1$

$g(1)=k$라 하면 $f(k)=1$

$f(k)=\sqrt{-k+4}+1=1$

$\sqrt{-k+4}=0$, $-k+4=0 \qquad \therefore k=4$

$\therefore g(1)=4$

231

$(g^{-1}\circ f)^{-1}(2)=(f^{-1}\circ g)(2)$

$=f^{-1}(g(2))$

$=f^{-1}(4)$ ← $g(2)=\sqrt{4+5}+1=4$

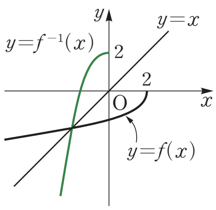
$f^{-1}(4)=k$라 하면 $f(k)=4$이므로

$\sqrt{k+3}=4$, $k+3=16 \qquad \therefore k=13$

$\therefore (g^{-1}\circ f)^{-1}(2)=f^{-1}(4)=13$ 답 13

232

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$-\sqrt{2-x}=x$에서 양변을 제곱하면

$2-x=x^2$

$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

그런데 $x\le 0$이므로 $x=-2$

따라서 교점의 좌표는 $(-2,\ -2)$이므로

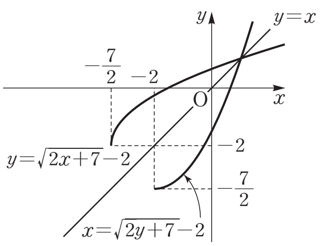
$a=-2$, $b=-2$

$\therefore a+b=-4$ 　　답 $\mathbf{-4}$

233

함수 $y=\sqrt{2x+7}-2$에서 x와 y를 서로 바꾸면 $x=\sqrt{2y+7}-2$이므로 두 함수는 서로 역함수이다.

따라서 두 함수 $y=\sqrt{2x+7}-2$와 $x=\sqrt{2y+7}-2$의 그래프는 다음 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 함수 $y=\sqrt{2x+7}-2$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{2x+7}-2=x$에서 $\sqrt{2x+7}=x+2$

양변을 제곱하면

$2x+7=x^2+4x+4$

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

그런데 $x\ge -2$이므로 $x=1$

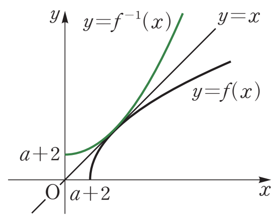
따라서 구하는 교점의 좌표는 $(1,\ 1)$이다. 　　답 $\mathbf{(1,\ 1)}$

234

함수 $y=2\sqrt{x-2}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2\sqrt{x-a-2}$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 접하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$도 접한다.



$2\sqrt{x-a-2}=x$에서 양변을 제곱하면

$4(x-a-2)=x^2$

$\therefore x^2-4x+4a+8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(4a+8)=0$

$-4a-4=0$

$\therefore a=-1$ 　　답 $\mathbf{-1}$

Ⅲ. 경우의 수

235

김밥 4종류 중 한 가지를 택하는 경우는 4가지,
라면 3종류 중 한 가지를 택하는 경우는 3가지,
볶음밥 3종류 중 한 가지를 택하는 경우는 3가지이다.
따라서 구하는 방법의 수는 합의 법칙에 의하여
$4+3+3=10$ 답 **10**

236

(1) 합이 11 이상인 경우는 합이 11, 12인 경우이다. 이때 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면
(ⅰ) 합이 11인 경우는
(5, 6), (6, 5)의 2가지
(ⅱ) 합이 12인 경우는
(6, 6)의 1가지
(ⅰ), (ⅱ)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$2+1=3$

(2) 차가 1 이하인 경우는 차가 0, 1인 경우이다. 이때 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면
(ⅰ) 차가 0인 경우는
(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)의 6가지
(ⅱ) 차가 1인 경우는
(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 5), (5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1)의 10가지
(ⅰ), (ⅱ)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$6+10=16$ 답 (1) **3** (2) **16**

237

모자를 고르는 방법은 4가지이고, 그 각각에 대하여 티셔츠를 고르는 방법은 3가지, 이들 각각에 대하여 바지를 고르는 방법은 5가지이다.
따라서 구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여
$4\times3\times5=60$ 답 **60**

238

집에서 도서관까지 가는 방법은 3가지이고, 그 각각에 대하여 도서관에서 학교까지 가는 방법은 4가지이다.
따라서 구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여
$3\times4=12$ 답 **12**

239

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면
(ⅰ) 나오는 두 눈의 수의 합이 3의 배수일 때,
합이 3인 경우는 (1, 2), (2, 1)의 2가지
합이 6인 경우는 (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지
합이 9인 경우는 (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)의 4가지
합이 12인 경우는 (6, 6)의 1가지
따라서 합이 3의 배수인 경우의 수는
$2+5+4+1=12$
(ⅱ) 나오는 두 눈의 수의 합이 5의 배수일 때,
합이 5인 경우는 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지
합이 10인 경우는 (4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지
따라서 합이 5의 배수인 경우의 수는
$4+3=7$
(ⅰ), (ⅱ)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$12+7=19$ 답 **19**

240

차가 2 이하인 경우는 차가 0, 1, 2인 경우이다. 이때 두 개의 상자에서 꺼낸 공에 적힌 수를 순서쌍으로 나타내면
(ⅰ) 차가 0인 경우는
(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)의 5가지

(ii) 차가 1인 경우는

$(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(4, 3)$, $(3, 2)$, $(2, 1)$의 8가지

(iii) 차가 2인 경우는

$(1, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$, $(4, 2)$, $(3, 1)$의 6가지

(i)~(iii)은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$5+8+6=19$ 답 **19**

241

(i) 5로 나누어떨어지는 수, 즉 5의 배수는

$5, 10, 15, \cdots, 100$의 20개

(ii) 7로 나누어떨어지는 수, 즉 7의 배수는

$7, 14, 21, \cdots, 98$의 14개

(iii) 5와 7로 나누어떨어지는 수, 즉 35의 배수는

$35, 70$의 2개

따라서 구하는 수의 개수는

$20+14-2=32$ 답 **32**

242

x, y, z가 자연수이므로 $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$

$3x+y+2z=12$에서 $3x<12$, 즉 $x<4$이므로

$x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

(i) $x=1$일 때, $y+2z=9$이므로 순서쌍 (y, z)는

$(1, 4)$, $(3, 3)$, $(5, 2)$, $(7, 1)$의 4개

(ii) $x=2$일 때, $y+2z=6$이므로 순서쌍 (y, z)는

$(2, 2)$, $(4, 1)$의 2개

(iii) $x=3$일 때, $y+2z=3$이므로 순서쌍 (y, z)는

$(1, 1)$의 1개

(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$4+2+1=7$ 답 **7**

243

500원짜리 x장, 1000원짜리 y장, 2000원짜리 z장을 합하여 10000원이 되게 산다고 하면

$500x+1000y+2000z=10000$

$\therefore x+2y+4z=20$

그런데 3종류의 우표가 적어도 한 장씩은 포함되어야 하므로 x, y, z는 $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$인 자연수이다.

$x+2y+4z=20$에서 $4z<20$, 즉 $z<5$이므로

$z=1$ 또는 $z=2$ 또는 $z=3$ 또는 $z=4$

(i) $z=1$일 때, $x+2y=16$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(2, 7)$, $(4, 6)$, $(6, 5)$, $(8, 4)$, $(10, 3)$, $(12, 2)$, $(14, 1)$의 7개

(ii) $z=2$일 때, $x+2y=12$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(2, 5)$, $(4, 4)$, $(6, 3)$, $(8, 2)$, $(10, 1)$의 5개

(iii) $z=3$일 때, $x+2y=8$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(2, 3)$, $(4, 2)$, $(6, 1)$의 3개

(iv) $z=4$일 때, $x+2y=4$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(2, 1)$의 1개

(i)~(iv)에서 구하는 방법의 수는

$7+5+3+1=16$ 답 **16**

244

x, y가 자연수이므로 $x \geq 1$, $y \geq 1$

$3x+y \leq 10$에서 $3x<10$, 즉 $x<\frac{10}{3}$이므로

$x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

(i) $x=1$일 때, $y \leq 7$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $\cdots$, $(1, 7)$의 7개

(ii) $x=2$일 때, $y \leq 4$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$의 4개

(iii) $x=3$일 때, $y \leq 1$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(3, 1)$의 1개

(i)~(iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$7+4+1=12$ 답 **12**

245

$(a+b)(c+d)$를 전개하면 a, b에 c, d를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 항의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$2\times2=4$

$(x+y+z)(p-q)$를 전개하면 x, y, z에 p, $-q$를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 항의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times2=6$

이때 곱해지는 각 항이 모두 서로 다른 문자이므로 동류항이 생기지 않는다.
따라서 구하는 항의 개수는 합의 법칙에 의하여
$4+6=10$ 답 **10**

246

십의 자리의 숫자는 홀수이므로 십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
1, 3, 5, 7, 9의 5개
일의 자리의 숫자는 소수이므로 일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
2, 3, 5, 7의 4개
따라서 구하는 자연수의 개수는 곱의 법칙에 의하여
$5\times4=20$ 답 **20**

247

서로 다른 주사위 3개를 동시에 던졌을 때 나오는 세 눈의 수의 곱이 홀수이려면 (홀수)×(홀수)×(홀수), 즉 세 눈의 수가 모두 홀수이어야 한다.
주사위에서 홀수인 눈의 수는 1, 3, 5의 3개이므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$3\times3\times3=27$ 답 **27**

248

(1) 144를 소인수분해하면 $144=2^4\times3^2$
2^4의 양의 약수는 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4의 5개
3^2의 양의 약수는 1, 3, 3^2의 3개
이때 2^4의 양의 약수와 3^2의 양의 약수에서 각각 하나씩 택하여 곱한 것이 모두 144의 양의 약수이므로 144의 양의 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여
$5\times3=15$

(2) 144와 504의 양의 공약수의 개수는 144와 504의 최대공약수의 양의 약수의 개수와 같다.
144와 504의 최대공약수는 72이고 72를 소인수분해하면
$72=2^3\times3^2$
2^3의 양의 약수는 1, 2, 2^2, 2^3의 4개
3^2의 양의 약수는 1, 3, 3^2의 3개
따라서 구하는 양의 공약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여
$4\times3=12$

답 (1) **15** (2) **12**

249

$270=2\times3^3\times5$의 양의 약수 중 홀수인 약수는 3^3과 5의 양의 약수의 곱으로 만들어진다.
3^3의 양의 약수는 1, 3, 3^2, 3^3의 4개
5의 양의 약수는 1, 5의 2개
따라서 구하는 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여
$4\times2=8$ 답 **8**

다른풀이 $270=2\times3^3\times5$에서
2의 양의 약수 중 홀수는 1의 1개
3^3의 양의 약수 중 홀수는 1, 3, 3^2, 3^3의 4개
5의 양의 약수 중 홀수는 1, 5의 2개
따라서 구하는 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여
$1\times4\times2=8$

250

$600=2^3\times3\times5^2$의 양의 약수 중 3의 배수는 3을 소인수로 가지므로 600의 양의 약수 중 3의 배수의 개수는 $2^3\times5^2$의 양의 약수의 개수와 같다.
2^3의 양의 약수는 1, 2, 2^2, 2^3의 4개
5^2의 양의 약수는 1, 5, 5^2의 3개
따라서 구하는 약수의 개수는 곱의 법칙에 의하여
$4\times3=12$ 답 **12**

251

같은 도시를 두 번 이상 지나지 않고 A도시에서 출발하여 D도시로 가는 경우는 다음 네 가지 경우가 있다.
(i) A → B → D로 가는 경우의 수는
$2\times3=6$
(ii) A → C → D로 가는 경우의 수는
$3\times2=6$
(iii) A → B → C → D로 가는 경우의 수는
$2\times2\times2=8$

(iv) A → C → B → D로 가는 경우의 수는

$3\times2\times3=18$

(i)~(iv)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$6+6+8+18=38$ 답 **38**

252

같은 도로를 두 번 이상 지나지 않으면서 A지점에서 출발하여 C지점으로 이동한 후 다시 A지점으로 돌아오는 경우는 다음 네 가지 경우가 있다.

(i) A → C → A로 가는 경우의 수는

$3\times2=6$

(ii) A → B → C → A로 가는 경우의 수는

$2\times2\times3=12$

(iii) A → C → B → A로 가는 경우의 수는

$3\times2\times2=12$

(iv) A → B → C → B → A로 가는 경우의 수는

$2\times2\times1\times1=4$

(i)~(iv)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$6+12+12+4=34$ 답 **34**

참고 (iv)의 경우, 같은 도로를 두 번 이상 지나지 않으려면 A에서 B로 갈 때 지나간 도로는 B에서 A로 올 때 다시 지날 수 없으므로 A → B로 가는 경우의 수는 2, B → A로 오는 경우의 수는 1이다. 마찬가지로 B → C로 가는 경우의 수는 2, C → B로 오는 경우의 수는 1이다.

253

가장 많은 영역과 인접하고 있는 영역 D부터 시작하여 D → A → B → E → C의 순서로 색칠한다.

D에 칠할 수 있는 색은 5가지

A에 칠할 수 있는 색은 D에 칠한 색을 제외한 4가지

B에 칠할 수 있는 색은 A와 D에 칠한 색을 제외한 3가지

E에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한 3가지

C에 칠할 수 있는 색은 A와 D에 칠한 색을 제외한 3가지

따라서 구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$5\times4\times3\times3\times3=540$ 답 **540**

다른풀이 (i) A, E에 같은 색을 칠하는 경우

A, E, D, C, B에 칠할 수 있는 색은 각각 5, 1, 4, 3, 3가지이므로 칠하는 방법의 수는

$5\times1\times4\times3\times3=180$

(ii) A, E에 다른 색을 칠하는 경우

A, E, D, C, B에 칠할 수 있는 색은 각각 5, 4, 3, 3, 2가지이므로 칠하는 방법의 수는

$5\times4\times3\times3\times2=360$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$180+360=540$

254

가장 많은 영역과 인접하고 있는 영역 B부터 시작하여 B → A → C → D의 순서로 색칠한다.

B에 칠할 수 있는 색은 4가지

A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지

C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지

D에 칠할 수 있는 색은 B와 C에 칠한 색을 제외한 2가지

따라서 구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$4\times3\times2\times2=48$ 답 **48**

255

가장 많은 영역과 인접하고 있는 영역 E부터 시작하여 E → B → C → D → A의 순서로 색칠한다.

E에 칠할 수 있는 색은 4가지

B에 칠할 수 있는 색은 E에 칠한 색을 제외한 3가지

C에 칠할 수 있는 색은 B와 E에 칠한 색을 제외한 2가지

D에 칠할 수 있는 색은 C와 E에 칠한 색을 제외한 2가지

A에 칠할 수 있는 색은 B와 E에 칠한 색을 제외한 2가지

따라서 구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$4\times3\times2\times2\times2=96$ 답 **96**

256

(1) 100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개의 3가지
50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지
10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는
$3\times5\times4-1=59$

(2) 100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 100원, 200원의 3가지 ...... ㉠
50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 50원, 100원, 150원, 200원의 5가지 ...... ㉡
10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 10원, 20원, 30원의 4가지
그런데 ㉠, ㉡에서 100원, 200원을 만들 수 있는 경우가 중복되므로 100원짜리 동전 2개를 50원짜리 동전 4개로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 50원짜리 동전 8개, 10원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 50원, 100원, ⋯, 400원의 9가지
10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 10원, 20원, 30원의 4가지
이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는
$9\times4-1=35$

답 (1) **59** (2) **35**

다른풀이 (1) 공식을 직접 이용하면
$(2+1)(4+1)(3+1)-1=59$

257

(i) 지불할 수 있는 방법의 수
500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개의 2가지
100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개, 4개, 5개, 6개, 7개의 8가지
10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는
$2\times8\times4-1=63$ $\therefore a=63$

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수
500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 500원의 2가지 ...... ㉠
100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 100원, 200원, 300원, 400원, 500원, 600원, 700원의 8가지 ...... ㉡
10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 10원, 20원, 30원의 4가지
그런데 ㉠, ㉡에서 500원을 만들 수 있는 경우가 중복되므로 500원짜리 동전 1개를 100원짜리 동전 5개로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 100원짜리 동전 12개, 10원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 100원, 200원, ⋯, 1200원의 13가지
10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 10원, 20원, 30원의 4가지
이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는
$13\times4-1=51$ $\therefore b=51$

$\therefore a+b=63+51=114$

답 **114**

258

(1) ${}_5P_2=5\times4=20$
(2) ${}_4P_0=1$
(3) $4!=4\times3\times2\times1=24$
(4) ${}_6P_2\times3!=(6\times5)\times(3\times2\times1)=180$

답 (1) **20** (2) **1** (3) **24** (4) **180**

259

(1) ${}_6\mathrm{P}_3=\dfrac{6!}{(6-3)!}=\dfrac{6!}{3!}$ $\quad\therefore \square=3$

(2) ${}_9\mathrm{P}_\square=\dfrac{9!}{(9-\square)!}=\dfrac{9!}{4!}$

$9-\square=4 \quad \therefore \square=5$

답 (1) **3** (2) **5**

260

(1) $60=5\times4\times3$이므로 ${}_n\mathrm{P}_3=60$에서

$n(n-1)(n-2)=5\times4\times3$

$\therefore n=5$

(2) $720=6\times5\times4\times3\times2\times1=6!$이므로

${}_n\mathrm{P}_n=n!=6!$에서

$n=6$

(3) $56=8\times7$이므로 ${}_8\mathrm{P}_r=56=8\times7$에서

$r=2$

(4) ${}_{10}\mathrm{P}_r=1$에서 $r=0$

답 (1) **5** (2) **6** (3) **2** (4) **0**

261

(1) 7명의 학생을 일렬로 세우는 방법의 수는

$7!=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=5040$

(2) 5장의 숫자 카드 중 3장을 뽑아 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_5\mathrm{P}_3=5\times4\times3=60$

답 (1) **5040** (2) **60**

262

(1) ${}_{n+2}\mathrm{P}_3=10{}_n\mathrm{P}_2$에서

$(n+2)(n+1)n=10n(n-1)$

이때 $n+2\geq3$, $n\geq2$에서 $n\geq2$이므로 양변을 n으로 나누면

$(n+2)(n+1)=10(n-1)$

$n^2-7n+12=0$, $(n-3)(n-4)=0$

$\therefore n=3$ 또는 $n=4$

(2) $4{}_n\mathrm{P}_3=5{}_{n-1}\mathrm{P}_3$에서

$4n(n-1)(n-2)=5(n-1)(n-2)(n-3)$

이때 $n\geq3$, $n-1\geq3$에서 $n\geq4$이므로 양변을 $(n-1)(n-2)$로 나누면

$4n=5(n-3)$

$4n=5n-15$

$\therefore n=15$

(3) ${}_n\mathrm{P}_3+3{}_n\mathrm{P}_2=5{}_{n+1}\mathrm{P}_2$에서

$n(n-1)(n-2)+3n(n-1)=5(n+1)n$

이때 $n\geq3$, $n\geq2$, $n+1\geq2$에서 $n\geq3$이므로 양변을 n으로 나누면

$(n-1)(n-2)+3(n-1)=5(n+1)$

$n^2-5n-6=0$, $(n+1)(n-6)=0$

$\therefore n=6$ ($\because n\geq3$)

답 (1) **3 또는 4** (2) **15** (3) **6**

263

(1) $n\times{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}=n\times\dfrac{(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$=\dfrac{n!}{(n-r)!}={}_n\mathrm{P}_r$ $\quad\leftarrow n\times(n-1)!=n!$

$\therefore {}_n\mathrm{P}_r=n\times{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$

(2) ${}_{n-1}\mathrm{P}_r+r\times{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$

$=\dfrac{(n-1)!}{\{(n-1)-r\}!}+r\times\dfrac{(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$=\dfrac{(n-1)!}{(n-r-1)!}+r\times\dfrac{(n-1)!}{(n-r)!}$

$=\dfrac{(n-r)\times(n-1)!+r\times(n-1)!}{(n-r)!}$

$=\dfrac{\{(n-r)+r\}\times(n-1)!}{(n-r)!}$

$=\dfrac{n!}{(n-r)!}={}_n\mathrm{P}_r$

$\therefore {}_n\mathrm{P}_r={}_{n-1}\mathrm{P}_r+r\times{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$

답 (1) **풀이 참조** (2) **풀이 참조**

264

서로 다른 7개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_7\mathrm{P}_3=7\times6\times5=210$

답 **210**

265

서로 다른 6개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_6P_3=6\times5\times4=120$ 답 **120**

266

학생 10명 중 n명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수는 서로 다른 10개에서 n개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_{10}P_n=90=10\times9$

$\therefore n=2$ 답 **2**

267

(1) a와 b를 한 묶음으로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $5!=120$

그 각각에 대하여 a와 b가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$120\times2=240$

(2) c, d, e, f를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!=24$

그 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중 2개의 자리에 a, b를 나열하는 방법의 수는 ${}_5P_2=20$

따라서 구하는 방법의 수는

$24\times20=480$

답 (1) **240** (2) **480**

다른풀이 (2) 6개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수에서 a, b가 이웃하도록 나열하는 방법의 수를 빼면 되므로 구하는 방법의 수는

$6!-240=720-240=480$

268

여학생 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$4!=24$

여학생 4명의 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 남학생 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 방법의 수는

$24\times120=2880$ 답 **2880**

269

남학생 3명을 한 사람으로 생각하여 $(n+1)$명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $(n+1)!$

그 각각에 대하여 남학생 3명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$

즉, $(n+1)!\times6=36$이므로

$(n+1)!=6=3!$

$n+1=3 \qquad \therefore n=2$ 답 **2**

270

(1) a를 맨 처음에, b를 맨 마지막에 고정시키고, 나머지 c, d, e, f의 4개의 문자를 일렬로 나열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$4!=24$

(2) a와 b 사이에 나머지 4개의 문자 중 3개를 택하여 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_3=24$

a○○○b를 한 묶음으로 생각하여 2개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $2!=2$

a와 b가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times2\times2=96$

답 (1) **24** (2) **96**

271

5명의 남학생 중 2명을 택하여 양 끝에 세우는 방법의 수는 ${}_5P_2=20$

양 끝에 세운 남학생 2명을 제외한 나머지 7명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $7!=5040$

따라서 구하는 방법의 수는

$20\times5040=100800$ 답 **100800**

272

적어도 2개의 모음이 이웃하도록 나열하는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 모음이 모두 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수를 빼면 된다.

promise의 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $7!=5040$

자음 p, r, m, s를 일렬로 나열한 다음 그 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중 3개의 자리에 모음 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4! \times {}_5P_3 = 1440$

따라서 구하는 경우의 수는

$5040 - 1440 = 3600$

답 **3600**

273

(1) 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지이다.

이 각각에 대하여 십의 자리, 일의 자리에는 백의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중 2개를 택하여 나열하면 되므로 ${}_4P_2 = 12$

따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$4 \times 12 = 48$

(2) 홀수는 일의 자리의 숫자가 홀수이어야 하므로

□□1, □□3의 꼴이다.

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3가지이고, 십의 자리에는 백의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3가지가 올 수 있으므로 구하는 홀수의 개수는

$2 \times (3 \times 3) = 18$

(3) 3의 배수는 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 하므로 0, 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 3개를 택하여 합이 3의 배수가 되는 경우는 0, 1, 2 또는 0, 2, 4 또는 1, 2, 3 또는 2, 3, 4이다.

(i) 0, 1, 2 또는 0, 2, 4일 때,

백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$2 \times (2 \times 2!) = 8$

(ii) 1, 2, 3 또는 2, 3, 4일 때,

만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$2 \times 3! = 12$

(i), (ii)에서 구하는 3의 배수의 개수는

$8 + 12 = 20$

답 (1) **48** (2) **18** (3) **20**

274

홀수인 1, 3, 5, 7 중 2개를 택하여 양 끝에 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$

백의 자리, 십의 자리에 나머지 5개의 숫자 중 2개를 택하여 나열하는 경우의 수는 ${}_5P_2 = 20$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$12 \times 20 = 240$

답 **240**

275

D□□□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $5! = 120$

E□□□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $5! = 120$

FDE□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $3! = 6$

이때 FDIENR는 FDI□□□의 꼴에서 첫 번째에 오는 문자열이므로

$120 + 120 + 6 + 1 = 247$(번째)

답 **247번째**

276

1□□□□의 꼴의 자연수의 개수는 $4! = 24$

2□□□□의 꼴의 자연수의 개수는 $4! = 24$

따라서 50번째에 오는 수는 3□□□□의 꼴의 자연수 중에서 두 번째 수이다.

3으로 시작하는 수를 크기가 작은 수부터 차례로 나열하면 30124, 30142, …이므로 50번째에 오는 수는 30142이다.

답 **30142**

277

5□□□□의 꼴의 자연수의 개수는 $4! = 24$

4□□□□의 꼴의 자연수의 개수는 $4! = 24$

35□□□의 꼴의 자연수의 개수는 $3! = 6$

34□□□의 꼴의 자연수의 개수는 $3! = 6$

따라서 34000보다 큰 자연수의 개수는

$24 + 24 + 6 + 6 = 60$

답 **60**

278

(1) ${}_4C_2 = \frac{{}_4P_2}{2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$

(2) ${}_5C_0 = 1$

(3) ${}_{8}C_{8}=1$

(4) ${}_{15}C_{13}={}_{15}C_{15-13}={}_{15}C_{2}$

$=\frac{{}_{15}P_{2}}{2!}=\frac{15\times14}{2\times1}=105$

답 (1) **6** (2) **1** (3) **1** (4) **105**

279

(1) ${}_{n}C_{3}=35$에서 $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=35$

$n(n-1)(n-2)=7\times6\times5$

$\therefore n=7$

(2) ${}_{6}C_{r}=20$에서 $\frac{6!}{r!(6-r)!}=20$

$6!=20\times r!(6-r)!$

$6\times5\times4\times3\times2\times1=5\times4\times r!(6-r)!$

$3\times2\times1\times3\times2\times1=r!(6-r)!$

$3!\times3!=r!(6-r)!$

$\therefore r=3$

(3) ${}_{2n}C_{2}=45$에서 $\frac{2n(2n-1)}{2\times1}=45$

$2n^2-n-45=0,\ (2n+9)(n-5)=0$

$\therefore n=-\frac{9}{2}$ 또는 $n=5$

이때 $2n\geq2$, 즉 $n\geq1$이므로 $n=5$

답 (1) **7** (2) **3** (3) **5**

280

${}_{10}C_{7}={}_{10}C_{3}=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$ 답 **120**

281

서로 다른 9개에서 2개를 택하는 방법의 수와 같으므로

${}_{9}C_{2}=\frac{9\times8}{2\times1}=36$ 답 **36**

282

11명의 학생 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

${}_{11}C_{3}=\frac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=165$ 답 **165**

283

5개의 원소 중에서 3개를 택하면 되므로 구하는 부분집합의 개수는

${}_{5}C_{3}={}_{5}C_{2}=\frac{5\times4}{2\times1}=10$ 답 **10**

284

(1) ${}_{n}C_{5}={}_{n}C_{n-5}$이므로 ${}_{n}C_{n-5}={}_{n}C_{4}$에서

$n-5=4 \qquad \therefore n=9$

(2) (i) ${}_{10}C_{r}={}_{10}C_{2r+1}$에서 $r=2r+1$

이때 $r\geq0$이므로 이 식을 만족시키는 r의 값은 존재하지 않는다.

(ii) ${}_{10}C_{r}={}_{10}C_{10-r}$이므로 ${}_{10}C_{10-r}={}_{10}C_{2r+1}$에서

$10-r=2r+1,\ 3r=9 \qquad \therefore r=3$

(i), (ii)에서 $r=3$

(3) ${}_{10}C_{2}+{}_{10}C_{7}={}_{10}C_{2}+{}_{10}C_{3}={}_{11}C_{3}$이고 ${}_{11}C_{3}={}_{11}C_{8}$이므로

$r=3$ 또는 $r=8$

(4) ${}_{n+1}C_{n-1}={}_{n+1}C_{(n+1)-(n-1)}={}_{n+1}C_{2}$이므로

${}_{n+2}C_{3}=2{}_{n}C_{2}+{}_{n+1}C_{2}$에서

$\frac{(n+2)(n+1)n}{3\times2\times1}=2\times\frac{n(n-1)}{2\times1}+\frac{(n+1)n}{2\times1}$

$(n+2)(n+1)n=6n(n-1)+3(n+1)n$

이때 $n\geq2$이므로 양변을 n으로 나누면

$(n+2)(n+1)=6(n-1)+3(n+1)$

$n^2+3n+2=6n-6+3n+3$

$n^2-6n+5=0,\ (n-1)(n-5)=0$

$\therefore n=5\ (\because n\geq2)$

답 (1) **9** (2) **3** (3) **3 또는 8** (4) **5**

285

${}_{n}P_{2}+4{}_{n}C_{2}=9{}_{n-1}C_{3}$에서

$n(n-1)+4\times\frac{n(n-1)}{2\times1}$

$=9\times\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3\times2\times1}$

$3n(n-1)=\frac{3(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$

이때 $n\geq 4$이므로 양변을 $3(n-1)$로 나누면

$n=\frac{(n-2)(n-3)}{2}$, $2n=n^2-5n+6$

$n^2-7n+6=0$, $(n-1)(n-6)=0$

$\therefore n=6$ ($\because n\geq 4$)

답 **6**

286

$$n\times{}_{n-1}C_{r-1}=n\times\frac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$$
$$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$$
$$=r\times\frac{n!}{r!(n-r)!}$$
$$=r\times{}_nC_r$$

$\therefore r\times{}_nC_r=n\times{}_{n-1}C_{r-1}$

답 **풀이 참조**

287

남학생 5명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

여학생 n명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_nC_3$

이때 남학생 2명, 여학생 3명을 뽑는 방법의 수가 560이므로

$10\times{}_nC_3=560$, ${}_nC_3=56$

$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=56$

$n(n-1)(n-2)=56\times6=8\times7\times6$

$\therefore n=8$

답 **8**

288

수학책 5권 중에서 3권을 선택하는 방법의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

영어책 5권 중에서 3권을 선택하는 방법의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

국어책 4권 중에서 3권을 선택하는 방법의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

따라서 구하는 방법의 수는

$10+10+4=24$

답 **24**

289

참석한 회원을 n명이라 하면 악수를 한 횟수는 n명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수와 같으므로

${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2}=105$

$n^2-n-210=0$, $(n+14)(n-15)=0$

$\therefore n=15$ ($\because n\geq 2$)

따라서 참석한 회원의 수는 15이다.

답 **15**

290

(1) A, B, C가 이미 선발되었다고 생각하고 나머지 9명 중에서 2명을 선발하면 되므로 구하는 방법의 수는

${}_9C_2=\frac{9\times8}{2\times1}=36$

(2) C를 제외한 11명의 학생 중 A, B는 이미 선발되었다고 생각하고 나머지 9명 중에서 3명을 선발하면 되므로 구하는 방법의 수는

${}_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

(3) 구하는 방법의 수는 12명 중 5명을 선발하는 방법의 수에서 A, B, C가 모두 선발되지 않는 방법의 수를 뺀 것과 같다.

전체 12명 중에서 5명을 선발하는 방법의 수는

${}_{12}C_5=\frac{12\times11\times10\times9\times8}{5\times4\times3\times2\times1}=792$

A, B, C가 모두 선발되지 않는 방법의 수는 A, B, C를 제외한 9명의 학생 중 5명을 선발하면 되므로

${}_9C_5={}_9C_4=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$

따라서 구하는 방법의 수는

$792-126=666$

답 (1) **36** (2) **84** (3) **666**

291

구하는 방법의 수는 10장의 카드 중 두 장을 뽑는 방법의 수에서 홀수가 적혀 있는 카드만 두 장을 뽑는 방법의 수를 뺀 것과 같다.

10장의 카드 중에서 두 장을 뽑는 방법의 수는

${}_{10}C_2=\frac{10\times9}{2\times1}=45$

홀수가 적혀 있는 5장의 카드 중에서 두 장을 뽑는 방법의 수는

$${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

따라서 구하는 방법의 수는

$45-10=35$ 답 **35**

292

1부터 9까지의 자연수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개, 짝수는 2, 4, 6, 8의 4개이므로 홀수 2개, 짝수 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_5C_2\times{}_4C_2=\frac{5\times4}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}=10\times6=60$$

뽑힌 4개의 자연수를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$60\times24=1440$ 답 **1440**

293

재헌이를 제외한 6명 중 수연이는 이미 뽑았다고 생각하고 나머지 5명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

뽑힌 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$10\times24=240$ 답 **240**

294

8명 중 A, B는 이미 뽑았다고 생각하고 나머지 6명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

$${}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

A, B를 포함한 4명에서 A, B를 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$3!=6$

그 각각에 대하여 A, B가 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$15\times6\times2=180$ 답 **180**

295

(i) 서로 다른 직선의 개수

9개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_9C_2=\frac{9\times8}{2\times1}=36$$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

일직선 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

그런데 일직선 위에 있는 점으로 만들 수 있는 직선은 1개이므로 구하는 직선의 개수 m은

$m=36-6-10+2=22$

(ii) 서로 다른 삼각형의 개수

9개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

일직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

그런데 일직선 위에 있는 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수 n은

$n=84-4-10=70$

(i), (ii)에서 $m+n=92$ 답 **92**

296

9개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

이고, 일직선 위에 4개의 점이 있는 직선이 3개이다.

그런데 일직선 위에 있는 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$84-4\times3=72$ **답 72**

297

구하는 대각선의 개수는 6개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 방법의 수에서 변의 개수인 6을 뺀 것과 같으므로

${}_6C_2-6=\frac{6\times5}{2\times1}-6=9$ **답 9**

KEY Point

n각형의 대각선의 개수는 n개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 선분의 개수에서 변의 개수인 n을 뺀 것과 같으므로

⇨ ${}_nC_2-n$

298

(1) 처음 정사각형의 한 변의 길이를 4라 하면

한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는 $4\times4=16$

한 변의 길이가 2인 정사각형의 개수는 $3\times3=9$

한 변의 길이가 3인 정사각형의 개수는 $2\times2=4$

한 변의 길이가 4인 정사각형의 개수는 1

따라서 구하는 정사각형의 개수는

$16+9+4+1=30$

(2) 가로선 5개 중에서 2개, 세로선 5개 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 만들어지므로 직사각형의 개수는

${}_5C_2\times{}_5C_2=10\times10=100$

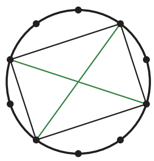
따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$100-30=70$

답 (1) **30** (2) **70**

299

지름에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 오른쪽 그림과 같이 원의 서로 다른 지름 2개가 직사각형의 대각선이 되도록 하는 원 위의 4개의 점을 이으면 직사각형을 만들 수 있다.



따라서 원의 지름 5개 중에서 2개를 택하면 이들을 대각선으로 하는 직사각형이 만들어지므로 구하는 직사각형의 개수는

${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$ **답 10**

300

10권의 책을 5권, 5권씩 두 묶음으로 나누는 방법의 수는

${}_{10}C_5\times{}_5C_5\times\frac{1}{2!}=252\times1\times\frac{1}{2}=126$

소설책으로만 이루어진 묶음이 있도록 나누는 방법의 수는

${}_7C_5\times{}_2C_2=21\times1=21$

따라서 구하는 방법의 수는

$126-21=105$ **답 105**

301

6명의 학생을 2명, 2명, 2명씩 세 조로 나누는 방법의 수는

${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}=15\times6\times1\times\frac{1}{6}=15$

서로 다른 세 곳으로 봉사활동을 가는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$15\times6=90$ **답 90**

302

8개의 학급을 4개의 학급, 4개의 학급씩 두 조로 나누는 방법의 수는

${}_8C_4\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}=70\times1\times\frac{1}{2}=35$

나누어진 두 조를 각각 2개의 학급, 2개의 학급으로 나누는 방법의 수는

$\left({}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\right)\times\left({}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\right)=3\times3=9$

따라서 구하는 방법의 수는

$35\times9=315$ **답 315**

연습문제 · 실력 UP

Ⅰ. 집합과 명제

1

'좋아하는', '가까운'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

ㄱ. $\{12, 14, 16, \cdots\}$

ㄷ. 1보다 작은 자연수는 없으므로 공집합이다.

ㄹ. {부산광역시, 대구광역시, 인천광역시, 광주광역시, 대전광역시, 울산광역시}

따라서 집합인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. **답 ㄱ, ㄷ, ㄹ**

2

$x^2-8x+12<0$에서 $(x-2)(x-6)<0$

$\therefore 2<x<6$

이를 만족시키는 정수 x는 3, 4, 5이므로

$A=\{3, 4, 5\}$

③ $2\notin A$ **답 ③**

3

① $n(\{a, b, c\})=n(\{e, f, g\})=3$

② $n(A)=0$이면 $A=\varnothing$

③ $n(\{3, 5, 7\})-n(\{3, 7\})=3-2=1$

④ $n(\{\varnothing, 1\})=2$

⑤ $n(\{0\})=n(\{2\})=1$

따라서 옳은 것은 ①이다. **답 ①**

4

집합 B는 집합 A의 서로 다른 두 원소 x, y의 합 $x+y$를 원소로 갖는 집합이므로 오른쪽 표에서

x \ y	a	b	c
a		$a+b$	$a+c$
b	$a+b$		$b+c$
c	$a+c$	$b+c$	

$B=\{a+b, a+c, b+c\}$

이때 $a<b<c$라 하면 $a+b<a+c<b+c$이므로

$a+b=6$ …… ㉠

$a+c=9$ …… ㉡

$b+c=11$ …… ㉢

㉡−㉢을 하면 $a-b=-2$ …… ㉣

㉠, ㉣을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=4$

$b=4$를 ㉢에 대입하면 $c=7$

따라서 집합 A의 원소 중 가장 큰 수는 7이다. **답 7**

5

$A=\{1, 2, 3\}$이므로

$a=1$일 때, $2a+1=2\times1+1=3$

$a=2$일 때, $2a+1=2\times2+1=5$

$a=3$일 때, $2a+1=2\times3+1=7$

$\therefore B=\{3, 5, 7\}$

집합 C는 집합 A의 원소 a, 집합 B의 원소 b에 대하여 $b-a$를 원소로 갖는 집합이므로 오른쪽 표에서

a \ b	3	5	7
1	2	4	6
2	1	3	5
3	0	2	4

$C=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

따라서 $n(A)=3$, $n(B)=3$, $n(C)=7$이므로

$n(A)+n(B)+n(C)=13$ **답 13**

6

집합 A의 두 원소 a와 $\dfrac{81}{a}$이 모두 자연수이므로 집합 A의 원소가 될 수 있는 자연수는 81의 양의 약수인 1, 3, 9, 27, 81이다.

이때 $a\in A$이면 $\dfrac{81}{a}\in A$이므로 1과 81, 3과 27은 동시에 집합 A의 원소이거나 원소가 아니다.

원소의 개수에 따라 집합 A를 구해 보면

(i) 원소가 1개일 때, $A=\{9\}$

(ii) 원소가 2개일 때, $A=\{1, 81\}$, $A=\{3, 27\}$

(iii) 원소가 3개일 때, $A=\{1, 9, 81\}$, $A=\{3, 9, 27\}$

(iv) 원소가 4개일 때, $A=\{1, 3, 27, 81\}$
(v) 원소가 5개일 때, $A=\{1, 3, 9, 27, 81\}$
따라서 조건을 만족시키는 집합 A의 개수는 7이다.

답 **7**

7

집합 $A=\{-1, 0, 1\}$의 두 원소 x, y에 대하여 $2x+y$, xy의 값을 구하면 각각 [표 1], [표 2]와 같다.

$2x$ \ y	-1	0	1
-2	-3	-2	-1
0	-1	0	1
2	1	2	3

[표 1]

x \ y	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

[표 2]

따라서 $B=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
$C=\{-1, 0, 1\}$이므로
$A=C\subset B$

답 ③

8

집합 A의 원소는 $\varnothing$, a, b, $\{a, b\}$이다.
ㄱ. $n(A)=4$ ㄴ. $\{\varnothing\}\subset A$
ㄷ. $\{b\}\subset A$ ㅁ. $\{\{a, b\}\}\subset A$
따라서 옳은 것은 ㄹ, ㅂ이다.

답 **ㄹ, ㅂ**

9

$1\in A$에서 $1\in B$이어야 하므로
$-a^2+2=1$ 또는 $-a+8=1$
$\therefore a^2=1$ 또는 $a=7$
(i) $a^2=1$일 때, $a=1$ 또는 $a=-1$
$a=1$이면 $A=\{1, 5\}$, $B=\{1, 3, 7\}$
$a=-1$이면 $A=\{1, 3\}$, $B=\{1, 3, 9\}$
(ii) $a=7$일 때,
$A=\{1, 11\}$, $B=\{-47, 1, 3\}$
(i), (ii)에서 $A\subset B$를 만족시키는 a의 값은 -1이다.

답 **-1**

10

$A\subset B$이고 $B\subset A$이므로 $A=B$
$A=\{1, 3, 5, 15\}$에서 $3\in A$, $5\in A$이므로
$3\in B$, $5\in B$이어야 한다.
즉, $a-2=3$, $b-2=5$ 또는 $a-2=5$, $b-2=3$
$\therefore a=5$, $b=7$ 또는 $a=7$, $b=5$
$\therefore ab=35$

답 ④

11

집합 A의 부분집합의 개수는
$2^5=32$
집합 A의 부분집합 중 홀수 1, 3, 5를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는
$2^{5-3}=2^2=4$
따라서 홀수가 한 개 이상 속해 있는 집합의 개수는
$32-4=28$

답 ④

12

집합 A의 부분집합 중 b 또는 f를 원소로 갖는 부분집합의 개수는 전체 부분집합의 개수에서 원소 b와 f를 제외한 집합 $\{a, c, d, e, g\}$의 부분집합의 개수를 뺀 것과 같다.
따라서 구하는 부분집합의 개수는
$2^7-2^5=128-32=96$

답 **96**

13

집합 X는 집합 A의 부분집합 중 a, b, c를 반드시 원소로 갖는 부분집합에서 집합 A를 제외한 것과 같다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$2^{5-3}-1=2^2-1=3$

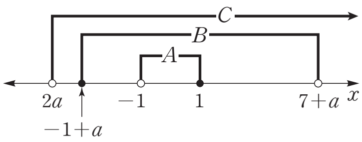
답 **3**

참고 집합 X는 $\{a, b, c\}$, $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c, e\}$의 3개이다.

14

$1<x\le 3$에서 $-1<x-2\le 1$이므로
$A=\{x\,|\,-1<x\le 1\}$로 나타낼 수 있다.
$-1\le x<7$에서 $-1+a\le x+a<7+a$이므로
$B=\{x\,|\,-1+a\le x<7+a\}$로 나타낼 수 있다.

$A \subset B \subset C$를 만족시키도록 세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



(i) $2a < -1+a$에서 $a < -1$

(ii) $-1+a \le -1$에서 $a \le 0$

(iii) $1 < 7+a$에서 $a > -6$

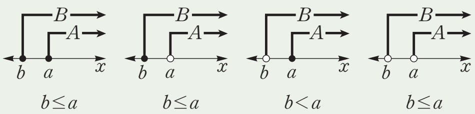
(i)~(iii)에서 $-6 < a < -1$

따라서 정수 a는 -5, -4, -3, -2의 4개이다.

답 ③

KEY Point

수직선에서 $A \subset B$를 만족시키는 미지수의 범위를 구할 때, 등호의 포함 여부에 주의한다.



15

$A=B$이므로 집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합이 같다.

즉, $a+b+c=ab+bc+ca$에서

$ab+bc+ca=-3$

또, $A=B$이므로 집합 A의 모든 원소의 곱과 집합 B의 모든 원소의 곱이 같다.

즉, $abc=ab \times bc \times ca$에서

$abc=(abc)^2$, $abc(abc-1)=0$

$\therefore abc=1$ ($\because abc \ne 0$)

$$\begin{aligned}\therefore a^3+b^3+c^3 &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc \\ &= (a+b+c)\{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\} \\ &\qquad +3abc \\ &= -3\times\{(-3)^2-3\times(-3)\}+3\times 1 \\ &= -3\times 18+3 \\ &= -51\end{aligned}$$

답 -51

16

집합 A는 원소의 개수가 n인 집합이고, 집합 A의 부분집합 중 1, 2는 반드시 원소로 갖고 3, 4는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수가 16이므로

$2^{n-2-2}=16$, 즉 $2^{n-4}=2^4$에서

$n-4=4$

$\therefore n=8$

답 8

17

$x^2-4x+3=0$에서

$(x-1)(x-3)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=3$

$\therefore A=\{1, 3\}$

한편, $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$이므로 $A \subset X \subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수는

$2^{5-2}=2^3=8$

이때 $n(X) \ge 3$이므로 $n(X)=2$, 즉 $X=\{1, 3\}$인 경우를 제외하면 구하는 집합 X의 개수는

$8-1=7$

답 ③

18

집합 A의 공집합이 아닌 부분집합의 원소 중에서 최소인 원소는 2, 3, 4, 5 중 하나이다.

(i) 최소인 원소가 2인 집합은 2를 반드시 원소로 갖는 부분집합이므로 그 개수는
$2^{4-1}=2^3=8$

(ii) 최소인 원소가 3인 집합은 3을 반드시 원소로 갖고 2를 원소로 갖지 않는 부분집합이므로 그 개수는
$2^{4-1-1}=2^2=4$

(iii) 최소인 원소가 4인 집합은 4를 반드시 원소로 갖고 2, 3을 원소로 갖지 않는 부분집합이므로 그 개수는
$2^{4-1-2}=2^1=2$

(iv) 최소인 원소가 5인 집합은 $\{5\}$의 1개이다.

(i)~(iv)에서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15}$

$=2\times 8+3\times 4+4\times 2+5\times 1$

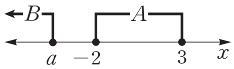
$=16+12+8+5=41$

답 41

연습문제 실력UP

19

두 집합 A, B가 서로소이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

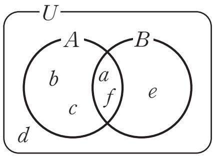


$a<-2$

따라서 정수 a의 최댓값은 -3이다. 답 $\mathbf{-3}$

20

전체집합 U의 두 부분집합 A, B를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

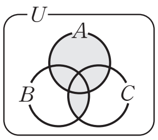


$A\cap B=\{a, f\}$

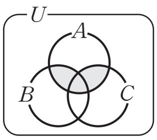
답 $\{a, f\}$

21

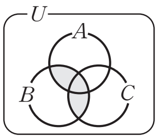
① $A\cup(B\cap C)$



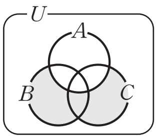
② $A\cap(B\cup C)$



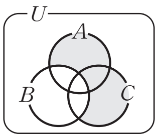
③ $B\cap(A\cup C)$



④ $A^C\cap(B\cup C)$



⑤ $B^C\cap(A\cup C)$



따라서 주어진 벤다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ②이다. 답 ②

22

$B-A=\varnothing$에서 $B\subset A$

$3\in B$에서 $3\in A$이므로

$2a-3=3$ 또는 $a+1=3$

$\therefore a=3$ 또는 $a=2$

(i) $a=3$일 때,

$A=\{-2, 3, 4\}$, $B=\{-7, 3\}$이므로 $B\not\subset A$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$일 때,

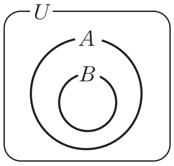
$A=\{-2, 1, 3\}$, $B=\{-2, 3\}$이므로 $B\subset A$

(i), (ii)에서 $a=2$ 답 **2**

23

$B-(A\cap B)=B-A=\varnothing$이므로 $B\subset A$

이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$B\subset A \Rightarrow A\cap B=B$

$\Rightarrow A\cup B=A$

$\Rightarrow A-B\neq\varnothing$

$\Rightarrow A\cup B^C=U$

따라서 항상 성립한다고 할 수 없는 것은 ④이다.

답 ④

24

$A\cup X=X$에서 $A\subset X$

$X\cap B^C=X-B=X$에서 $B\cap X=\varnothing$

즉, 집합 X는 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 부분집합 중 집합 A의 원소 1, 7을 반드시 원소로 갖고 집합 B의 원소 4, 5, 6을 원소로 갖지 않는 부분집합이다.

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{7-2-3}=2^2=4$ 답 **4**

25

$x^3-3x^2+2x=0$에서 $x(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

$\therefore A=\{0, 1, 2\}$

이때 $A-B=\{0, 1\}$이므로 $2\in B$

즉, $x^2+x+a=0$의 한 근이 2이므로

$4+2+a=0 \quad \therefore a=-6$

$B=\{x\,|\,x^2+x-6=0\}=\{x\,|\,(x+3)(x-2)=0\}$

$=\{-3, 2\}$

$\therefore B-A=\{-3\}$ 답 $\{-3\}$

26

집합 A는 원소의 개수가 4이고, 조건 (가)에서

$A\cap B=\{4, 6\}$이므로 $A=\{a, b, 4, 6\}$이라 하면

$B=\{a+k, b+k, 4+k, 6+k\}$

이때 집합 A의 모든 원소의 합이 21이므로

$a+b+4+6=21 \qquad \therefore a+b=11$

한편, 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은 두 집합 A, B 각각의 모든 원소의 합에서 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합을 뺀 것과 같으므로 조건 (나)에서

$40=21+(21+4k)-10 \qquad \therefore k=2$

$\therefore B=\{a+2, b+2, 6, 8\}$

$A\cap B=\{4, 6\}$에서 $4\in B$이므로

$a+2=4$ 또는 $b+2=4$

$a+2=4$이면 $a=2 \qquad \therefore b=9$

$b+2=4$이면 $b=2 \qquad \therefore a=9$

따라서 $A=\{2, 4, 6, 9\}$이므로 집합 A의 모든 원소의 곱은

$2\times4\times6\times9=432$ **답 432**

27

$A\cup B=A$이므로 $B\subset A$

(i) $B=\varnothing$일 때,

방정식 $mx+1=x$의 해가 존재하지 않아야 하므로

$(m-1)x=-1$에서 $m-1=0$

$\therefore m=1$

(ii) $B\neq\varnothing$일 때,

$-1\in B$ 또는 $2\in B$이어야 하므로

$-m+1=-1$ 또는 $2m+1=2$

$\therefore m=2$ 또는 $m=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $m=\frac{1}{2}$ 또는 $m=1$ 또는 $m=2$

따라서 모든 실수 m의 값의 합은

$\frac{1}{2}+1+2=\frac{7}{2}$ **답 ⑤**

28

$U=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, $A=\{1, 2, 3, 6\}$,

$B=\{2, 4, 6, 8\}$이므로 $A-B=\{1, 3\}$

$(A-B)\cap C=\{3\}$에서 집합 C는 3을 반드시 원소로 갖고 1을 원소로 갖지 않는다.

또, $B\cap C=B$에서 $B\subset C$이므로 집합 C는 집합 B의 원소 2, 4, 6, 8을 반드시 원소로 갖는다.

따라서 집합 C는 전체집합 U의 부분집합 중 2, 3, 4, 6, 8을 반드시 원소로 갖고 1을 원소로 갖지 않는 부분집합이므로 구하는 집합 C의 개수는

$2^{8-5-1}=2^2=4$ **답 4**

29

조건 (가)에서 $A-B=\varnothing$이므로 $A\subset B$

이때 조건 (나)에서 집합 B의 모든 원소의 합에서 집합 A의 모든 원소의 합을 뺀 것은 집합 $B-A$의 모든 원소의 합과 같으므로 전체집합 $U=\{2, 3, 5, 7, 11\}$의 부분집합 중

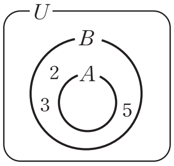
$S(B)-S(A)=S(B-A)=10$

을 만족시키는 집합 $B-A$는

$\{2, 3, 5\}$ 또는 $\{3, 7\}$

(i) $B-A=\{2, 3, 5\}$일 때,

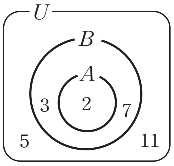
오른쪽 벤다이어그램에서 $A\neq\varnothing$이므로 $S(B)<S(B^C)$를 만족시키는 집합 B는 존재하지 않는다.



(ii) $B-A=\{3, 7\}$일 때,

$S(B)<S(B^C)$를 만족시키려면 오른쪽 벤다이어그램과 같아야 하므로

$B=\{2, 3, 7\}$

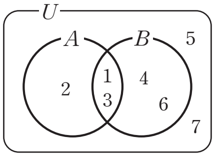


(i), (ii)에서 $B=\{2, 3, 7\}$ **답 {2, 3, 7}**

30

$$\begin{aligned}(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)&=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C\\&=(A\cup B)-(A\cap B)\\&=\{2, 4, 6\}\end{aligned}$$

이고 $A=\{1, 2, 3\}$이므로 주어진 조건을 만족시키는 집합 A, B는 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore B=\{1, 3, 4, 6\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$1+3+4+6=14$ 답 **14**

31

ㄱ. $(A^C\cup B)\cap A=(A^C\cap A)\cup(B\cap A)$

$=\varnothing\cup(B\cap A)=B\cap A$

$=A\cap B$

ㄴ. $(A\cup B)\cap(A^C\cap B^C)=(A\cup B)\cap(A\cup B)^C$

$=\varnothing$

ㄷ. $(A-B)\cup(A-C)=(A\cap B^C)\cup(A\cap C^C)$

$=A\cap(B^C\cup C^C)$

$=A\cap(B\cap C)^C$

$=A-(B\cap C)$

ㄹ. $\{(A\cap B)\cup(A-B)\}\cap B$

$=\{(A\cap B)\cup(A\cap B^C)\}\cap B$

$=\{A\cap(B\cup B^C)\}\cap B$

$=(A\cap U)\cap B$

$=A\cap B$

따라서 항상 성립하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 **ㄱ, ㄴ, ㄷ**

32

$\{(A\cap B)\cup(A\cap B^C)\}\cup\{(A^C\cup B)\cap(A^C\cup B^C)\}$

$=\{A\cap(B\cup B^C)\}\cup\{A^C\cup(B\cap B^C)\}$

$=(A\cap U)\cup(A^C\cup\varnothing)$

$=A\cup A^C$

$=U$ 답 ③

33

주어진 등식의 좌변을 간단히 하면

$(A-B)^C\cap B^C=(A\cap B^C)^C\cap B^C$

$=(A^C\cup B)\cap B^C$

$=(A^C\cap B^C)\cup(B\cap B^C)$

$=(A^C\cap B^C)\cup\varnothing$

$=A^C\cap B^C$

이므로 $A^C\cap B^C=A^C$에서 $A^C\subset B^C$

$\therefore B\subset A$ 답 ②

34

6의 배수는 모두 3의 배수이므로 $A_6\subset A_3$

$\therefore A_5\cap(A_3\cup A_6)=A_5\cap A_3$

이때 $A_5\cap A_3$은 5와 3의 공배수의 집합, 즉 15의 배수의 집합이므로

$A_5\cap(A_3\cup A_6)=A_{15}$

따라서 전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 200\}$의 원소 중 15의 배수는 15, 30, 45, $\cdots$, 195이므로

$n(A_5\cap(A_3\cup A_6))=n(A_{15})=13$ 답 **13**

35

$A⊙B=(A-B)\cup(B-A)$

$=\{3, 4\}\cup\varnothing=\{3, 4\}$

이므로

$(A⊙B)⊙C$

$=\{(A⊙B)-C\}\cup\{C-(A⊙B)\}$

$=\{4\}\cup\{1, 5\}$

$=\{1, 4, 5\}$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$1+4+5=10$ 답 **10**

36

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$

$=n(U)-n(A\cup B)$

에서

$9=24-n(A\cup B)$ $\quad\therefore n(A\cup B)=15$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$15=8+12-n(A\cap B)$

$\therefore n(A\cap B)=5$ 답 **5**

37

전체 학생의 집합을 U, a문제를 푼 학생의 집합을 A, b문제를 푼 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=48$, $n(A)=23$, $n(A\cap B)=10$,

$n(A^C\cap B^C)=5$

이때

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$

$\qquad\qquad=n(U)-n(A\cup B)$

에서

$5=48-n(A\cup B)\qquad \therefore\ n(A\cup B)=43$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$43=23+n(B)-10\qquad \therefore\ n(B)=30$

따라서 b문제를 푼 학생 수는 30이다. **답 30**

38

$A_m\subset(A_4\cap A_6)$에서 $A_4\cap A_6=A_{12}$이므로

$A_m\subset A_{12}$

즉, m은 12의 배수이므로 m의 최솟값은 12이다.

또, $(A_8\cup A_{12})\subset A_n$에서

$A_8\subset A_n$, $A_{12}\subset A_n$

즉, n은 8과 12의 공약수이므로 n의 최댓값은 8과 12의 최대공약수인 4이다.

따라서 m의 최솟값과 n의 최댓값의 합은

$12+4=16$ **답 16**

39

ㄱ. $A^C*B^C=(A^C-B^C)\cup(B^C-A^C)$

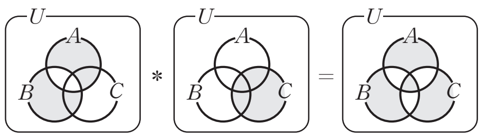
$\qquad=(A^C\cap B)\cup(B^C\cap A)$

$\qquad=(B\cap A^C)\cup(A\cap B^C)$

$\qquad=(B-A)\cup(A-B)$

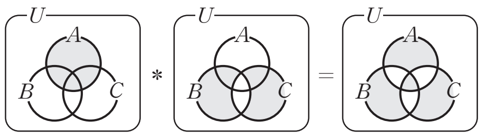
$\qquad=(A-B)\cup(B-A)=A*B$

ㄴ. $(A*B)*C$



$A*B$ $\qquad C \qquad (A*B)*C$

$A*(B*C)$



$A \qquad B*C \qquad A*(B*C)$

$\therefore\ (A*B)*C=A*(B*C)$

ㄷ. $A*(A*B)=(A*A)*B$ (∵ ㄴ)

이때

$A*A=(A-A)\cup(A-A)$

$\qquad=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$

이므로

$A*(A*B)=(A*A)*B=\varnothing*B$

$\qquad=(\varnothing-B)\cup(B-\varnothing)$

$\qquad=\varnothing\cup B=B$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. **답 ㄱ, ㄴ, ㄷ**

40

조건 (나)에서

$A\cap(A^C\cup B)=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)$

$\qquad=\varnothing\cup(A\cap B)$

$\qquad=A\cap B\neq\varnothing$

이므로 $n(A\cap B)\geq 1$

조건 (다)에서 $n(A-B)=11$이므로

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$에서

$n(A)=n(A-B)+n(A\cap B)$

$\qquad\geq 11+1=12$

조건 (가)에서 $n(U)=25$이므로

$n(A)+n(B-A)\leq n(U)$에서

$n(B-A)\leq n(U)-n(A)$

$\qquad\leq 25-12=13$ (∵ $n(A)\geq 12$)

따라서 $n(B-A)$의 최댓값은 13이다. **답 13**

41

전체 학생의 집합을 U, 과학탐구, 프로그램언어, 영화논평의 세 동아리에 가입한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(U)=50$, $n(A)=23$, $n(B)=28$, $n(C)=21$,

$n(A\cap B\cap C)=7$, $n(A^C\cap B^C\cap C^C)=4$

이때

$n(A^C\cap B^C\cap C^C)=n((A\cup B\cup C)^C)$

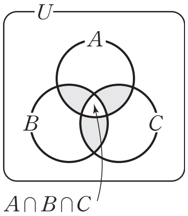
$\qquad=n(U)-n(A\cup B\cup C)$

에서

$4=50-n(A\cup B\cup C)\qquad \therefore\ n(A\cup B\cup C)=46$

$n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$\qquad -n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
에서
$46=23+28+21$
$\qquad -n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+7$
$\therefore\ n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=33$
따라서 세 동아리 중 두 동아리에만 가입한 학생 수는
$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$
$\qquad -3\times n(A\cap B\cap C)$
$=33-3\times 7=12$ **답 12**

참고 과학탐구, 프로그램언어, 영화 논평의 세 동아리에 가입한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면 세 동아리 중 두 동아리에만 가입한 학생의 집합은 오른쪽 벤다이어그램의 색칠한 부분과 같다.



$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$에는 $n(A\cap B\cap C)$가 세 번 더해지므로 두 동아리에만 가입한 학생 수는
$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-3\times n(A\cap B\cap C)$

42

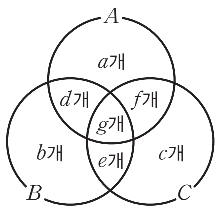
$A_n\cap A_2$는 n과 2의 공배수의 집합이고, A_{2n}은 $2n$의 배수의 집합이다.
$A_n\cap A_2=A_{2n}$에서 n과 2의 공배수의 집합이 $2n$의 배수의 집합과 같으므로 n과 2는 서로소이다.
즉, n은 홀수이다. …… ㉠
$90\in(A_2-A_n)$에서 $90\in A_2$, $90\notin A_n$이므로 90은 n의 배수가 아니다.
즉, n은 90의 약수가 아니다. …… ㉡
㉠, ㉡에서 n은 90 이하의 홀수 중 90의 약수가 아닌 수이다.
따라서 90 이하의 홀수 45개 중 90의 약수는 1, 3, 5, 9, 15, 45의 6개이므로 구하는 n의 개수는
$45-6=39$ **답 39**

43

$A_3\cap(A_4\cup A_6)=(A_3\cap A_4)\cup(A_3\cap A_6)$
$x\in(A_3\cap A_4)$이면 $x-2$는 3과 4의 공배수, 즉 12의 배수이므로
$A_3\cap A_4=A_{12}$
$x\in(A_3\cap A_6)$이면 $x-2$는 3과 6의 공배수, 즉 6의 배수이므로
$A_3\cap A_6=A_6$
$\therefore\ (A_3\cap A_4)\cup(A_3\cap A_6)=A_{12}\cup A_6$
이때 $x\in(A_{12}\cup A_6)$이면 $x-2$는 12의 배수 또는 6의 배수이므로 $x-2$는 6의 배수이다.
즉, $A_{12}\cup A_6=A_6$
따라서 집합 $A_3\cap(A_4\cup A_6)$의 원소의 개수는
$n(A_3\cap(A_4\cup A_6))=n((A_3\cap A_4)\cup(A_3\cap A_6))$
$\qquad =n(A_{12}\cup A_6)$
$\qquad =n(A_6)$
$\qquad =n(\{2,\ 8,\ 14,\ 20,\ \cdots,\ 50\})$
$\qquad =9$ **답 9**

44

오른쪽 그림과 같이 벤다이어그램의 각 부분에 속하는 원소의 개수를 각각 a, b, c, d, e, f, g라 하자.



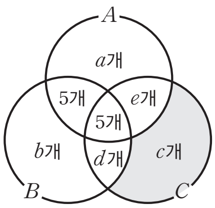
주어진 조건에서
$n(A\cup B\cup C)=75$,
$n(A\triangle B)=45$, $n(B\triangle C)=47$, $n(C\triangle A)=42$이므로
$a+b+c+d+e+f+g=75$ …… ㉠
$a+f+b+e=45$ …… ㉡
$b+d+c+f=47$ …… ㉢
$a+d+c+e=42$ …… ㉣
㉡+㉢+㉣을 하면
$2(a+b+c+d+e+f)=134$
$\therefore\ a+b+c+d+e+f=67$ …… ㉤
㉠−㉤을 하면 $g=8$
$\therefore\ n(A\cap B\cap C)=g=8$ **답 8**

45

$n(A\cap B)=10$, $n(A\cap B\cap C)=5$에서

$n(A\cap B)-n(A\cap B\cap C)=5$

이므로 각 부분에 속하는 집합의 원소의 개수를 오른쪽 그림과 같이 벤다이어그램에 나타내면



$n(C-(A\cup B))=c$

$n(C)=19$에서

$c+d+e+5=19$

$\therefore c=14-(d+e)$

즉, $d+e$가 최대일 때 c는 최소가 된다.

$n(A)=14$에서

$a+e+5+5=14 \qquad \therefore e=4-a$

이때 $a\geq 0$이므로 $0\leq e\leq 4$ ...... ㉠

$n(B)=16$에서

$b+d+5+5=16 \qquad \therefore d=6-b$

이때 $b\geq 0$이므로 $0\leq d\leq 6$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $0\leq d+e\leq 10$

$4\leq 14-(d+e)\leq 14$

$\therefore 4\leq c\leq 14$

따라서 구하는 최솟값은 4이다. **답 4**

46

학급 전체 학생의 집합을 U, 버스를 이용하는 학생의 집합을 A, 지하철을 이용하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=36$, $n(A)=22$, $n(B)=9$

이때 버스와 지하철을 모두 이용하여 등교하는 학생의 집합은 $A\cap B$이므로

$n(A\cap B)\geq 5$ ...... ㉠

버스와 지하철 중 적어도 어느 하나를 이용하는 학생의 집합은 $A\cup B$이므로

$$\begin{aligned}n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\&=22+9-n(A\cap B)\\&=31-n(A\cap B)\end{aligned}$$

(i) $n(A\cup B)$가 최대인 경우는 $n(A\cap B)$가 최소일 때이므로 ㉠에서 $n(A\cap B)=5$일 때이다.

$\therefore a=31-5=26$

(ii) $n(A\cup B)$가 최소인 경우는 $n(A\cap B)$가 최대일 때이므로 $B\subset A$일 때이다.

즉, $n(A\cap B)\leq n(B)$에서 $n(A\cap B)=9$일 때이다.

$\therefore b=31-9=22$

(i), (ii)에서 $a+b=26+22=48$ **답 48**

47

p: $x^2-4x=0$에서 $x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

q: $x^2-2x-3\leq 0$에서 $(x+1)(x-3)\leq 0$

$\therefore -1\leq x\leq 3$

전체집합 $U=\{-4, -3, -2, \cdots, 4\}$에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{0, 4\}$, $Q=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

조건 'p 또는 $\sim q$'의 진리집합은 $P\cup Q^C$이므로

$$\begin{aligned}P\cup Q^C&=\{0, 4\}\cup\{-4, -3, -2, 4\}\\&=\{-4, -3, -2, 0, 4\}\end{aligned}$$

따라서 구하는 원소의 개수는 5이다. **답 5**

48

ㄱ. p: x는 8의 양의 배수, q: x는 4의 양의 배수라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{8, 16, 24, \cdots\}$, $Q=\{4, 8, 12, \cdots\}$

따라서 $P\subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄴ. [반례] $x=1$, $y=0$이면 $xy=0$이지만 $x^2+y^2=1$이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

ㄷ. $x>0$, $y>0$이면 $xy>0$이므로 $|xy|=xy$

따라서 주어진 명제는 참이다.

ㄹ. [반례] $\angle\mathrm{A}=40^\circ$, $\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{C}=70^\circ$이면 삼각형 ABC가 이등변삼각형이지만 $\angle\mathrm{A}\neq\angle\mathrm{B}$이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

따라서 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답 ㄱ, ㄷ**

49

명제 $p \longrightarrow \sim q$가 거짓임을 보이는 원소는 P에 속하고 Q^C에 속하지 않아야 하므로

$P-Q^C=P\cap(Q^C)^C=P\cap Q$ 답 ①

50

① $R\subset P^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim p$는 참이다.

② $P\subset R^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$는 참이다.

③ $R\subset Q$이므로 명제 $r \longrightarrow q$는 참이다.

④ $Q^C\subset R^C$이므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim r$는 참이다.

⑤ $R\not\subset Q^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim q$는 거짓이다.

따라서 항상 참이라고 할 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

51

p: $|x-a|\le 1$에서 $-1\le x-a\le 1$

$\therefore -1+a\le x\le 1+a$

q: $x^2-2x-8>0$에서 $\sim q$: $x^2-2x-8\le 0$이므로

$(x+2)(x-4)\le 0$

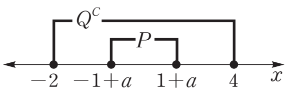
$\therefore -2\le x\le 4$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,-1+a\le x\le 1+a\}$,

$Q^C=\{x\,|\,-2\le x\le 4\}$

명제 $p \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 $P\subset Q^C$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-2\le -1+a$, $1+a\le 4$

$\therefore -1\le a\le 3$

따라서 구하는 실수 a의 최댓값은 3이다. 답 ③

52

① 명제 $\sim s \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow s$도 참이다.

② 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow s$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow s$가 참이다.

③ 두 명제 $q \longrightarrow s$, $s \longrightarrow r$가 참이므로 명제 $q \longrightarrow r$가 참이다.

⑤ 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow r$가 참이다. 따라서 명제 $p \longrightarrow r$가 참이므로 그 대우 $\sim r \longrightarrow \sim p$도 참이다.

따라서 항상 참이라고 할 수 없는 것은 ④이다. 답 ④

53

'$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$'의 부정은

'$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\neq 0$'

이때 x, y, z는 모두 실수이므로

$(x-y)^2\neq 0$ 또는 $(y-z)^2\neq 0$ 또는 $(z-x)^2\neq 0$에서

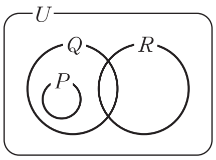
$x-y\neq 0$ 또는 $y-z\neq 0$ 또는 $z-x\neq 0$

$\therefore x\neq y$ 또는 $y\neq z$ 또는 $z\neq x$

즉, x, y, z 중 적어도 두 수는 서로 다르다. 답 ⑤

54

$P\subset(Q-R)$를 만족시키는 세 집합 P, Q, R를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$P\subset R^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$가 참이다.

또, $R\subset P^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim p$가 참이다.

답 ①, ④

55

q: $4x-1=27$에서 $4x=28$ $\therefore x=7$

r: $x^2-3x-4=0$에서

$(x+1)(x-4)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

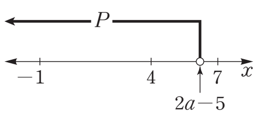
세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x\,|\,x<2a-5\}$, $Q=\{7\}$, $R=\{-1, 4\}$

명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이고, 명제 $r \longrightarrow p$는 참이므로

$Q\not\subset P$, $R\subset P$

이를 만족시키는 집합 P는 오른쪽 그림과 같으므로 $4<2a-5\le 7$



$9<2a\le 12$ $\therefore \frac{9}{2}<a\le 6$

따라서 정수 a는 5, 6의 2개이다. 답 **2**

56

p: $|x+2|\geq k$에서 $x+2\leq -k$ 또는 $x+2\geq k$

$\therefore$ $x\leq -k-2$ 또는 $x\geq k-2$

q: $|x+3|<4$에서 $\sim q$: $|x+3|\geq 4$이므로

$x+3\leq -4$ 또는 $x+3\geq 4$

$\therefore$ $x\leq -7$ 또는 $x\geq 1$

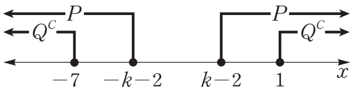
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,x\leq -k-2$ 또는 $x\geq k-2\}$,

$Q^C=\{x\,|\,x\leq -7$ 또는 $x\geq 1\}$

명제 $p \longrightarrow \sim q$의 역, 즉 $\sim q \longrightarrow p$가 참이 되려면

$Q^C\subset P$가 성립해야 한다.



위의 그림에서 $-k-2\geq -7$, $k-2\leq 1$이므로

$k\leq 5$, $k\leq 3$ $\qquad\therefore$ $0<k\leq 3$ ($\because$ $k>0$)

따라서 구하는 실수 k의 최댓값은 3이다. **답 3**

57

명제 $q \longrightarrow \sim p$가 참이므로 그 대우 $p \longrightarrow \sim q$도 참이다.

또, 명제 $\sim r \longrightarrow s$가 참이므로 그 대우 $\sim s \longrightarrow r$도 참이다.

두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim s \longrightarrow r$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow r$가 참이 되려면 명제 $\sim q \longrightarrow \sim s$가 참이어야 한다.

명제 $\sim q \longrightarrow \sim s$와 그 대우 $s \longrightarrow q$는 참, 거짓이 같으므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim s$가 참이면 $s \longrightarrow q$도 참이다.

따라서 명제 $p \longrightarrow r$가 참임을 보이기 위해서는 명제 $s \longrightarrow q$가 참이어야 한다. **답 ④**

58

주어진 명제의 부정은

'모든 실수 x에 대하여 $x^2-2kx+k+6\geq 0$이다.'

즉, 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$x^2-2kx+k+6\geq 0$이 성립해야 하므로 이차방정식

$x^2-2kx+k+6=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k+6)=k^2-k-6\leq 0$$

$(k+2)(k-3)\leq 0$ $\qquad\therefore$ $-2\leq k\leq 3$

따라서 주어진 명제의 부정이 참이 되도록 하는 정수 k의 최솟값은 -2이다. **답 -2**

59

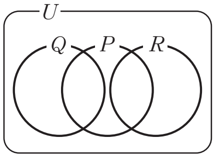
조건 ㈎에서 어떤 $x\in P$에 대하여 $x\notin Q$이므로 집합 P에 속하는 어떤 원소가 집합 Q에는 속하지 않는다.

즉, $P\not\subset Q$

조건 ㈏에서 모든 $x\in Q$에 대하여 $x\notin R$이므로

$Q\cap R=\varnothing$

조건 ㈎, ㈏를 만족시키는 세 집합 P, Q, R를 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같은 경우가 있다.



ㄱ. 명제 $q \longrightarrow p$가 참이려면 $Q\subset P$이어야 하므로 위의 벤다이어그램의 경우에 성립하지 않는다. (거짓)

ㄴ. 명제 $r \longrightarrow \sim q$가 참이려면 $R\subset Q^C$이어야 하므로 조건 ㈏의 $Q\cap R=\varnothing$에 의해 성립한다. (참)

ㄷ. 명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이려면 $Q^C\subset P$이어야 하므로 위의 벤다이어그램의 경우에 성립하지 않는다. (거짓)

따라서 항상 참인 명제는 ㄴ뿐이다. **답 ㄴ**

60

ㄱ. 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow r$가 참이다.

즉, $P\subset Q$, $Q\subset R$이므로 $P\subset R$이다.

ㄴ. $P\subset R$이고 $Q\subset R$이므로

$(P\cup Q)\subset R$

ㄷ. 드모르간의 법칙에 의하여

$P^C\cap R^C=(P\cup R)^C=R^C$ ($\because$ $P\subset R$)

그런데 $Q\subset R$이므로 $R^C\subset Q^C$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답 ③**

61

명제 (가), (나)에서

p: 잘 웃는 사람, q: 명랑한 사람

r: 인상이 좋은 사람, s: 호감을 주는 사람

이라 하면 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이고 명제 $r \longrightarrow s$가 참이다. 또한, 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow p$도 참이다.

이때 명제 $q \longrightarrow s$가 참이 되는 경우는 다음과 같이 세 가지 경우가 있다.

(i) 명제 $p \longrightarrow s$가 참이거나
 그 대우인 명제 $\sim s \longrightarrow \sim p$가 참

(ii) 명제 $q \longrightarrow r$가 참이거나
 그 대우인 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$가 참

(iii) 명제 $p \longrightarrow r$가 참이거나
 그 대우인 명제 $\sim r \longrightarrow \sim p$가 참

따라서 필요한 명제로 가능한 것은

③ 명랑한 사람은 인상이 좋은 사람이다.

⑤ 인상이 좋지 않은 사람은 잘 웃지 않는 사람이다.

답 ③, ⑤

62

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

ㄱ. p: $|x+3|=2$에서 $x+3=-2$ 또는 $x+3=2$
 $\therefore x=-5$ 또는 $x=-1$
 즉, $P=\{-5, -1\}$, $Q=\{-1\}$
 $P \not\subset Q$이고 $Q \subset P$이므로 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$
 따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄴ. p: $|x|<1$에서 $-1<x<1$
 즉, $P=\{x|-1<x<1\}$, $Q=\{x|x<1\}$
 $P \subset Q$이고 $Q \not\subset P$이므로 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$
 따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄷ. $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
 [$p \longrightarrow q$의 반례] $x=-2$, $y=1$이면 $x^2>y^2$이지만 $x<0$이고 $y>0$이다.

따라서 조건 p가 조건 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

63

p: $x^3-4x^2-x+4=0$에서

$x^2(x-4)-(x-4)=0$, $(x^2-1)(x-4)=0$

$(x+1)(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=4$

q: $2x+a=0$에서 $x=-\dfrac{a}{2}$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{-1, 1, 4\}$, $Q=\left\{-\dfrac{a}{2}\right\}$

p가 q이기 위한 필요조건이려면 $q \Longrightarrow p$, 즉 $Q \subset P$이어야 하므로

$-\dfrac{a}{2}=-1$ 또는 $-\dfrac{a}{2}=1$ 또는 $-\dfrac{a}{2}=4$

$\therefore a=2$ 또는 $a=-2$ 또는 $a=-8$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$2+(-2)+(-8)=-8$

답 -8

64

p: $|x+1| \le 3$에서 $-3 \le x+1 \le 3$

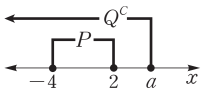
$\therefore -4 \le x \le 2$

q: $x>a$에서 $\sim q$: $x \le a$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|-4 \le x \le 2\}$, $Q^C=\{x|x \le a\}$

$\sim q$가 p이기 위한 필요조건이므로 $p \Longrightarrow \sim q$, 즉 $P \subset Q^C$이고 이를 만족시키도록 두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $a \ge 2$이므로 a의 최솟값은 2이다.

답 2

65

① $P \not\subset R$, $R \not\subset P$이므로 p는 r이기 위한 아무 조건도 아니다.

② $Q \subset P$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

③ $Q \subset R^C$이므로 q는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.

④ $R \subset Q^C$이므로 r는 $\sim q$이기 위한 충분조건이다.

⑤ $P^C \subset Q^C$이므로 $\sim q$는 $\sim p$이기 위한 필요조건이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

66

p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이므로

$p \Longrightarrow \sim r$

r는 q이기 위한 필요조건이므로

$q \Longrightarrow r$에서 $\sim r \Longrightarrow \sim q$

따라서 $p \Longrightarrow \sim r$, $\sim r \Longrightarrow \sim q$이므로

$p \Longrightarrow \sim q$ 답 ③

67

p: $|x|>a$에서 $x<-a$ 또는 $x>a$

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x|x<-a$ 또는 $x>a\}$,

$Q=\{x|x>b\}$,

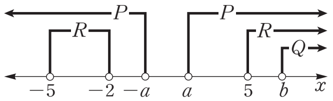
$R=\{x|-5<x<-2$ 또는 $x>5\}$

p는 r이기 위한 필요조건이므로 $R\subset P$

q는 r이기 위한 충분조건이므로 $Q\subset R$

$\therefore Q\subset R\subset P$

이를 만족시키도록 세 집합 P, Q, R를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 $-a\geq-2$, $a\leq 5$이고 $b\geq 5$이어야 하므로

$0<a\leq 2$, $b\geq 5$

따라서 a의 최댓값은 2, b의 최솟값은 5이므로 구하는 합은

$2+5=7$ 답 7

68

p는 $\sim r$이기 위한 필요조건이므로

$R^C\subset P$ ...... ㉠

r는 q이기 위한 충분조건이므로

$R\subset Q$ $\quad\therefore Q^C\subset R^C$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $Q^C\subset R^C\subset P$

ㄱ. $R\subset Q$

ㄴ. $Q^C\subset R^C\subset P$에서 $Q^C\subset P$이므로

$P-Q=P\cap Q^C=Q^C$

ㄷ. $R^C\subset P$이므로

$P-R=P\cap R^C=R^C$

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

69

p는 q이기 위한 필요조건이므로 $q \Longrightarrow p$

q는 r이기 위한 필요조건이므로 $r \Longrightarrow q$

r는 s이기 위한 충분조건이므로 $r \Longrightarrow s$

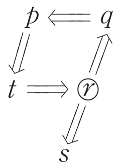
$\sim r$는 $\sim t$이기 위한 충분조건이므로

$\sim r \Longrightarrow \sim t$에서 $t \Longrightarrow r$

t는 p이기 위한 필요조건이므로

$p \Longrightarrow t$

따라서 $p \Longleftrightarrow q \Longleftrightarrow r \Longleftrightarrow t$이므로 r이기 위한 필요충분조건인 것은 p, q, t의 3개이다.



답 3

70

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$

$\therefore a^2=4$ 또는 $b=4$

r는 p이기 위한 필요조건이므로 $P\subset R$

(i) $a^2=4$일 때,

$a=\pm 2$이고 $P\subset R$이므로 $ab=4$

따라서 $a=-2$, $b=-2$ 또는 $a=2$, $b=2$이므로 $a+b$의 값은 -4 또는 4이다.

(ii) $b=4$일 때,

$P\subset R$이므로 $a-1=4$ 또는 $ab=4$

$\therefore a=5$ 또는 $a=1$

따라서 $a+b$의 값은 9 또는 5이다.

(i), (ii)에서 $a+b$의 최댓값은 9이다. 답 9

71

p: $|a|+|b|=0$에서 $a=0$, $b=0$

q: $a^2-2ab+b^2=0$에서 $(a-b)^2=0$

$\therefore a=b$

r: $|a+b|=|a-b|$에서

$a+b=a-b$ 또는 $a+b=-(a-b)$

$\therefore a=0$ 또는 $b=0$

ㄱ. $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $\sim p$: $a\neq 0$ 또는 $b\neq 0$, $\sim r$: $a\neq 0$, $b\neq 0$

따라서 $\sim p \not\Longrightarrow \sim r$, $\sim r \Longrightarrow \sim p$이므로 $\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. q이고 r는 $a=b=0$

따라서 (q이고 r) $\Longleftrightarrow p$이므로 q이고 r는 p이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. **답** ⑤

72

mn이 $\boxed{\text{(가) 홀수}}$라 가정하면 m, n은 모두 $\boxed{\text{(나) 홀수}}$이어야 하므로

$m=2k-1$, $n=2l-1$ (k, l은 자연수)

로 나타낼 수 있다. 이때

$$m^2+n^2=(2k-1)^2+(2l-1)^2$$
$$=2(2k^2-2k+2l^2-2l+1)$$

이므로 m^2+n^2은 $\boxed{\text{(다) 짝수}}$이다.

그런데 이것은 m^2+n^2이 $\boxed{\text{(라) 홀수}}$라는 가정에 모순이다.

따라서 자연수 m, n에 대하여 m^2+n^2이 홀수이면 mn은 짝수이다.

답 (가) 홀수 (나) 홀수 (다) 짝수 (라) 홀수

73

$$A-B=\frac{a}{1+2a}-\frac{b}{1+2b}$$
$$=\frac{a(1+2b)-b(1+2a)}{(1+2a)(1+2b)}$$
$$=\frac{a-b}{(1+2a)(1+2b)}$$

$a>b>0$에서 $a-b>0$, $1+2a>0$, $1+2b>0$이므로

$$\frac{a-b}{(1+2a)(1+2b)}>0$$

$\therefore A>B$ **답** $A>B$

74

$2x>0$, $5y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+5y\geq 2\sqrt{2x\times 5y}=2\sqrt{10xy}$

그런데 $2x+5y=10$이므로

$10\geq 2\sqrt{10xy}$, $5\geq \sqrt{10xy}$

양변을 제곱하면

$25\geq 10xy \qquad \therefore xy\leq \frac{5}{2}$

여기서 등호는 $2x=5y$일 때 성립하므로 $2x=5y$를 $2x+5y=10$에 대입하면

$2x+2x=10 \qquad \therefore x=\frac{5}{2}$

$x=\frac{5}{2}$를 $2x=5y$에 대입하면 $y=1$

따라서 xy는 $x=\frac{5}{2}$, $y=1$일 때 최댓값 $\frac{5}{2}$를 가지므로

$a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{5}{2}$, $c=1$

$\therefore a+b+c=6$ **답** 6

75

$$\left(4-\frac{9b}{a}\right)\left(1-\frac{a}{b}\right)=4-\frac{4a}{b}-\frac{9b}{a}+9$$
$$=13-\left(\frac{4a}{b}+\frac{9b}{a}\right)$$

이때 $\frac{4a}{b}>0$, $\frac{9b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{4a}{b}+\frac{9b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{4a}{b}\times\frac{9b}{a}}$$
$$=2\times 6=12$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{4a}{b}=\frac{9b}{a}\text{, 즉 } 2a=3b\text{일 때 성립}\right)$

$$\therefore \left(4-\frac{9b}{a}\right)\left(1-\frac{a}{b}\right)=13-\left(\frac{4a}{b}+\frac{9b}{a}\right)$$
$$\leq 13-12=1$$

따라서 부등식 $\left(4-\frac{9b}{a}\right)\left(1-\frac{a}{b}\right)\leq m$이 항상 성립하도록 하는 실수 m의 값의 범위는

$m\geq 1$ **답** $m\geq 1$

76

$x^2+\frac{49}{x^2-9}=x^2-9+\frac{49}{x^2-9}+9$

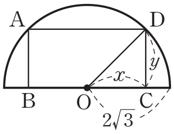
$x>3$에서 $x^2-9=(x+3)(x-3)>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2-9+\frac{49}{x^2-9}+9\geq 2\sqrt{(x^2-9)\times\frac{49}{x^2-9}}+9$$
$$=2\times7+9=23$$

$\left(\text{단, 등호는 } x^2-9=\frac{49}{x^2-9}\text{, 즉 } x=4\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 23이다. 답 **23**

77



오른쪽 그림과 같이 $\overline{OC}=x$, $\overline{CD}=y$라 하면 직각삼각형 OCD에서

$x^2+y^2=(2\sqrt{3})^2=12$

$x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2\times y^2}=2xy$ ($\because$ $x>0$, $y>0$)

그런데 $x^2+y^2=12$이므로 $12\geq 2xy$

$\therefore$ $xy\leq 6$

여기서 등호는 $x^2=y^2$, 즉 $x=y$일 때 성립하므로 $x^2+y^2=12$에 대입하면

$2x^2=12$, $x^2=6$

$\therefore$ $x=\sqrt{6}$, $y=\sqrt{6}$ ($\because$ $x>0$, $y>0$)

따라서 직사각형의 넓이가 최대일 때의 직사각형의 둘레의 길이는

$4x+2y=4\sqrt{6}+2\sqrt{6}=6\sqrt{6}$ 답 **$6\sqrt{6}$**

78

ㄱ. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-(\sqrt{a-b})^2$

$=a-2\sqrt{ab}+b-(a-b)$

$=2(b-\sqrt{ab})$

$=2\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a})$

그런데 $\sqrt{b}>0$, $\sqrt{b}-\sqrt{a}<0$이므로

$2\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a})<0$

$\therefore$ $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<(\sqrt{a-b})^2$

이때 $\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$, $\sqrt{a-b}>0$이므로

$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$

ㄴ. $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

그런데 $a+b+c>0$이고

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geq 0$

이므로

$a^3+b^3+c^3-3abc\geq 0$

$\therefore$ $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$

여기서 등호는 $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$, 즉 $a=b=c$일 때 성립한다.

ㄷ. $(|a|+|b|)^2-(|a-b|)^2$

$=a^2+2|ab|+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

$=2(|ab|+ab)\geq 0$ ($\because$ $|ab|\geq -ab$)

$\therefore$ $(|a|+|b|)^2\geq(|a-b|)^2$

이때 $|a|+|b|\geq 0$, $|a-b|\geq 0$이므로

$|a|+|b|\geq|a-b|$

여기서 등호는 $|ab|=-ab$, 즉 $ab\leq 0$일 때 성립한다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 **ㄴ, ㄷ**

79

$3x>0$, $2y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3x+2y\geq 2\sqrt{3x\times 2y}=2\sqrt{6xy}$

그런데 $3x+2y=16$이므로

$2\sqrt{6xy}\leq 16$ (단, 등호는 $3x=2y$일 때 성립)

이때

$(\sqrt{3x}+\sqrt{2y})^2=3x+2y+2\sqrt{6xy}$

$=16+2\sqrt{6xy}$

$\leq 16+16=32$

즉, $(\sqrt{3x}+\sqrt{2y})^2\leq 32$이므로

$0<\sqrt{3x}+\sqrt{2y}\leq\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

따라서 $\sqrt{3x}+\sqrt{2y}$의 최댓값은 $4\sqrt{2}$이다. 답 **$4\sqrt{2}$**

80

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(1+\frac{2b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{2c}\right)$$
$$=\left(1+\frac{c}{b}+\frac{2b}{a}+\frac{2c}{a}\right)\left(1+\frac{a}{2c}\right)$$
$$=1+\frac{c}{b}+\frac{2b}{a}+\frac{2c}{a}+\frac{a}{2c}+\frac{a}{2b}+\frac{b}{c}+1$$
$$=\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{2b}{a}+\frac{a}{2b}\right)+\left(\frac{2c}{a}+\frac{a}{2c}\right)+2$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{c}{b}\times\frac{b}{c}}+2\sqrt{\frac{2b}{a}\times\frac{a}{2b}}+2\sqrt{\frac{2c}{a}\times\frac{a}{2c}}+2$$
$$=2\times1+2\times1+2\times1+2=8$$

(단, 등호는 $a^2=4b^2=4c^2$, 즉 $a=2b=2c$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 8이다. 답 8

81

이차방정식 $x^2-2x+a=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-a<0 \qquad \therefore a>1$$

$a-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+\frac{4}{a-1}=(a-1)+\frac{4}{a-1}+1$$
$$\geq 2\sqrt{(a-1)\times\frac{4}{a-1}}+1$$
$$=2\times2+1=5$$

여기서 등호는 $a-1=\frac{4}{a-1}$일 때 성립하므로

$(a-1)^2=4$, $a-1=2$ ($\because a-1>0$)

$\therefore a=3$

따라서 $a+\frac{4}{a-1}$는 $a=3$일 때 최솟값 5를 가지므로

$m=5$, $n=3$ $\qquad \therefore m+n=8$ 답 8

82

a, b, c가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2+2^2+3^2)(a^2+b^2+c^2)\geq(a+2b+3c)^2$$

그런데 $a^2+b^2+c^2=2$이므로

$14\times2\geq(a+2b+3c)^2$

$\therefore -2\sqrt{7}\leq a+2b+3c\leq 2\sqrt{7}$

$\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{b}{2}=\frac{c}{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $a+2b+3c$의 최솟값은 $-2\sqrt{7}$이다.

답 $-2\sqrt{7}$

83

이차함수 $f(x)=x^2-2ax$의 그래프와 직선 $g(x)=\frac{1}{a}x$의 교점의 x좌표는

$x^2-2ax=\frac{1}{a}x$에서

$x^2-\left(2a+\frac{1}{a}\right)x=0$, $x\left\{x-\left(2a+\frac{1}{a}\right)\right\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2a+\frac{1}{a}$

$\therefore \mathrm{A}\left(2a+\frac{1}{a},\ 2+\frac{1}{a^2}\right)$

또, 이차함수 $f(x)=x^2-2ax=(x-a)^2-a^2$의 그래프의 꼭짓점 B의 좌표는

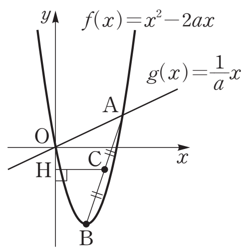
$\mathrm{B}(a,\ -a^2)$

따라서 선분 AB의 중점 C의 좌표는

$\mathrm{C}\left(\frac{1}{2}\left(2a+\frac{1}{a}+a\right),\ \frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{a^2}-a^2\right)\right)$

$\therefore \mathrm{C}\left(\frac{3}{2}a+\frac{1}{2a},\ 1+\frac{1}{2a^2}-\frac{a^2}{2}\right)$

오른쪽 그림에서 선분 CH의 길이는 점 C의 x좌표와 같으므로



$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{3}{2}a+\frac{1}{2a}$

이때 $a>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{3}{2}a+\frac{1}{2a}\geq 2\sqrt{\frac{3}{2}a\times\frac{1}{2a}}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

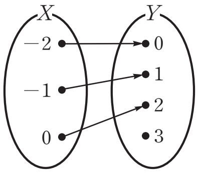
$\left(\text{단, 등호는 } \frac{3}{2}a=\frac{1}{2a}\text{, 즉 } a=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{일 때 성립}\right)$

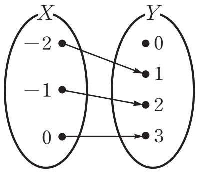
따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{3}$이다. 답 ①

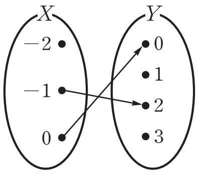
Ⅱ. 함수

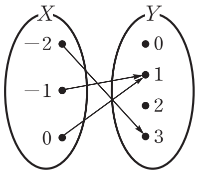
84

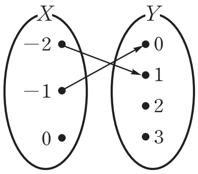
주어진 집합 X에서 집합 Y로의 대응을 그림으로 나타낸 후, 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하지 않는 것을 찾는다.

①


②


③


④


⑤


따라서 X에서 Y로의 함수가 아닌 것은 ③, ⑤이다.

답 ③, ⑤

85

2는 유리수이므로

$f(2)=-2\times2=-4$

$\sqrt{3}+2$는 무리수이므로

$f(\sqrt{3}+2)=(\sqrt{3}+2)-3=\sqrt{3}-1$

$\therefore f(2)+\sqrt{3}f(\sqrt{3}+2)=-4+\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$

$=-1-\sqrt{3}$

답 $-1-\sqrt{3}$

86

(i) 5의 양의 약수 1, 5 중 소수는 5이므로 $f(5)=1$

(ii) 6의 양의 약수 1, 2, 3, 6 중 소수는 2, 3이므로

$f(6)=2$

(iii) 7의 양의 약수 1, 7 중 소수는 7이므로

$f(7)=1$

(iv) 8의 양의 약수 1, 2, 4, 8 중 소수는 2이므로

$f(8)=1$

(v) 9의 양의 약수 1, 3, 9 중 소수는 3이므로

$f(9)=1$

(i)~(v)에서 구하는 함수 f의 치역은

$\{1, 2\}$

답 $\{1, 2\}$

87

$f(1)=g(1)$에서

$1+7a+2b=3a+b$

$\therefore 4a+b=-1$ ······ ㉠

$f(3)=g(3)$에서

$9+21a+2b=9a+b$

$\therefore 12a+b=-9$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=3$

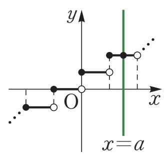
$\therefore f(x)=x^2-7x+6$, $g(x)=-3x+3$

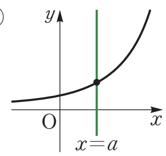
이때 $g(1)=0$, $g(3)=-6$이므로 함수 g의 치역은 $\{-6, 0\}$이고 치역의 모든 원소의 합은 -6이다.

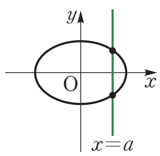
답 -6

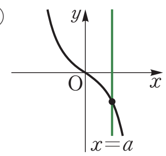
88

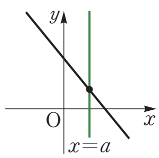
주어진 그래프에 정의역의 각 원소 a에 대하여 직선 $x=a$를 그려서 교점이 없거나 2개 이상인 것을 찾는다.

①


②


③


④


⑤


따라서 함수의 그래프가 아닌 것은 ③이다.

답 ③

89

집합 X의 각 원소의 함숫값을 구하면

$f(-1)=a-(a+1)+2=1$, $f(0)=2$

$f(1)=a+(a+1)+2=2a+3$

이므로 $f(1)$의 값은 1, 2, 3 중 하나이다.

(i) $f(1)=1$일 때, $2a+3=1$ $\quad\therefore a=-1$

(ii) $f(1)=2$일 때, $2a+3=2$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}$

(iii) $f(1)=3$일 때, $2a+3=3$ $\quad\therefore a=0$

(i)~(iii)에서 모든 a의 값의 합은

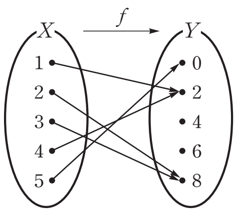
$-1+\left(-\frac{1}{2}\right)+0=-\frac{3}{2}$ 답 $-\frac{3}{2}$

90

집합 X의 각 원소의 함숫값을 구하면

$f(1)=2$, $f(2)=8$, $f(3)=8$, $f(4)=2$, $f(5)=0$

이므로 이 함수의 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



$f(a)=2$에서 함숫값이 2인 정의역 X의 원소는 1과 4이므로

$a=1$ 또는 $a=4$

$f(b)=8$에서 함숫값이 8인 정의역 X의 원소는 2와 3이므로

$b=2$ 또는 $b=3$

이때 a, b의 순서쌍 (a, b)로 가능한 것은

$(1, 2)$, $(1, 3)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$이므로 $a+b$의 값은

3, 4, 6, 7

따라서 $a+b$의 최댓값은 7이다. 답 ③

91

$f(a+b)=f(a)+f(b)+4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠에 $a=0$, $b=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+4$ $\quad\therefore f(0)=-4$

㉠에 $a=4$, $b=-4$를 대입하면

$f(0)=f(4)+f(-4)+4$

$\therefore f(4)+f(-4)=f(0)-4=-8$ 답 -8

92

$f(-2)=g(-2)=0$, $f(0)=g(0)=0$이므로

$f=g$이려면 $f(a)=g(a)$가 되어야 한다. 즉,

$a^2+2a=a^3-4a$, $a^3-a^2-6a=0$

$a(a^2-a-6)=0$, $a(a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=-2$ 또는 $a=3$

그런데 $a\neq-2$, $a\neq0$이므로 $a=3$ 답 3

93

조건 (가)에 의하여

$$\begin{aligned} f(2019)&=f\left(4\times\frac{2019}{4}\right)\\ &=4f\left(\frac{2019}{4}\right)\\ &=4^2f\left(\frac{2019}{4^2}\right)\\ &\ \vdots\\ &=4^5f\left(\frac{2019}{4^5}\right)\end{aligned}$$

이때 $1<\frac{2019}{4^5}<2$이므로 조건 (나)에 의하여

$f\left(\frac{2019}{4^5}\right)=\left|3-\frac{2019}{4^5}\right|-1=2-\frac{2019}{4^5}$

$$\begin{aligned}\therefore f(2019)&=4^5f\left(\frac{2019}{4^5}\right)=4^5\left(2-\frac{2019}{4^5}\right)\\ &=4^5\times2-2019\\ &=2048-2019=29\end{aligned}$$

답 29

94

$f(x)=3$이려면 $x=4k+3$ (k는 음이 아닌 정수)이어야 한다.

따라서 함수 f의 정의역 X는

$\{x\,|\,x=4k+3,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 6\}$, 즉

$\{3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19,\ 23,\ 27\}$의 부분집합 중 공집합이 아닌 것이어야 하므로 구하는 정의역 X의 개수는

$2^7-1=127$ 답 127

95

ㄱ. 치역의 각 원소 k에 대하여 주어진 그래프와 직선 $y=k$가 오직 한 점에서 만나고 (치역)=(공역)이므로 일대일대응이다.

ㄴ. 치역의 각 원소 k에 대하여 주어진 그래프와 직선 $y=k$가 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이다. 그러나 치역이 $\{y|y<0\}$이므로 일대일대응이 아니다.

ㄷ. 치역의 각 원소 k에 대하여 주어진 그래프와 직선 $y=k$가 오직 한 점에서 만나고 (치역)=(공역)이므로 일대일대응이다.

ㄹ. 치역의 각 원소 k에 대하여 주어진 그래프와 직선 $y=k$가 2개 이상의 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

따라서 일대일함수이지만 일대일대응이 아닌 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

96

함수 f가 항등함수이려면 $f(-1)=-1$, $f(0)=0$, $f(1)=1$이어야 한다.

④ $f(-1)=1$, $f(0)=0$, $f(1)=1$이므로 항등함수가 아니다.

답 ④

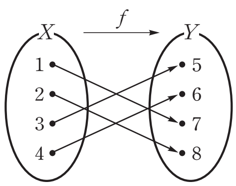
97

$f(2)-f(3)=3$에서

$f(2)=8$, $f(3)=5$

이때 $f(1)=7$이고 함수 f가 일대일대응이므로

$f(4)=6$



$\therefore f(3)+f(4)=5+6=11$

답 ①

98

두 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{4, 5, 6, 7, 8\}$에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow Y$가 상수함수이므로

$f(1)=f(2)=f(3)=a$ $(a\in Y)$라 하면

$f(1)+f(2)+f(3)$의 최댓값은 $a=8$일 때이므로

$f(1)+f(2)+f(3)=8+8+8=24$

또, $f(1)+f(2)+f(3)$의 최솟값은 $a=4$일 때이므로

$f(1)+f(2)+f(3)=4+4+4=12$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$24+12=36$

답 36

99

함수 f는 $f(1)=a$, $f(2)=d$를 만족시키므로 집합 X의 원소 1, 2에 대응하는 집합 Y의 원소가 각각 a, d로 정해져 있다. 즉, 집합 X의 나머지 두 원소 3, 4의 경우에 대해서만 살펴보면 된다.

이때 3, 4에 대응할 수 있는 집합 Y의 원소는 각각 a, b, c, d의 4개씩이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$4\times4=16$

답 16

100

함수 $f(x)=a|x+2|-4x$에서

(i) $x<-2$일 때,

$f(x)=a(-x-2)-4x=-(a+4)x-2a$

(ii) $x\geq-2$일 때,

$f(x)=a(x+2)-4x=(a-4)x+2a$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} -(a+4)x-2a & (x<-2) \\ (a-4)x+2a & (x\geq-2) \end{cases}$$

이때 함수 f가 일대일대응이 되려면 두 직선 $y=-(a+4)x-2a$와 $y=(a-4)x+2a$의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

즉, $-(a+4)(a-4)>0$에서

$(a+4)(a-4)<0$ $\quad\therefore -4<a<4$

따라서 정수 a는 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3의 7개이다.

답 7

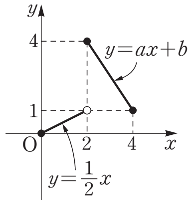
101

$0 \le x < 2$에서 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x$의 치역은

$\{y \mid 0 \le y < 1\}$

따라서 X에서 Y로의 함수 f가 일대일대응이 되려면 공역이 $Y=\{y \mid 0 \le y \le 4\}$이므로 $2 \le x \le 4$에서 함수 $f(x)=ax+b$의 치역이 $\{y \mid 1 \le y \le 4\}$이어야 한다.

그런데 $a<0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $f(2)=4$, $f(4)=1$이므로

$2a+b=4$, $4a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{3}{2}$, $b=7$

따라서 $2 \le x \le 4$에서 $f(x)=-\frac{3}{2}x+7$이므로

$f(3)=-\frac{3}{2}\times 3+7=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

102

$f(x)=x^3+x^2-x$가 항등함수가 되려면 정의역의 각 원소 x에 대하여 $f(x)=x$를 만족시켜야 한다.

즉, $x^3+x^2-x=x$에서

$x^3+x^2-2x=0$, $x(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 집합 X가 될 수 있는 것은 $\{-2, 0, 1\}$의 부분집합 중 공집합이 아닌 것이므로 구하는 집합 X의 개수는

$2^3-1=7$ 답 7

103

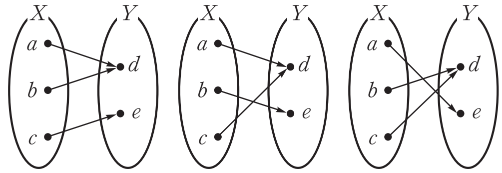
집합 X의 각 원소에 대응할 수 있는 집합 Y의 원소는 d, e의 2개씩이므로 X에서 Y로의 함수의 개수는

$2\times2\times2=2^3=8$

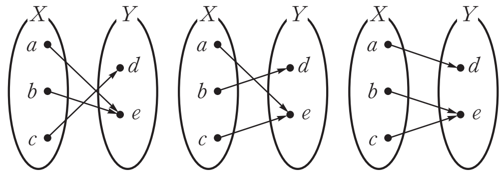
한편, 치역이 $\{d\}$ 또는 $\{e\}$인 함수의 개수는 2이므로 치역과 공역이 같은 함수의 개수는

$8-2=6$ 답 6

다른풀이 (i) Y의 원소 d에 X의 원소가 2개 대응할 때,



(ii) Y의 원소 e에 X의 원소가 2개 대응할 때,



(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$3+3=6$

104

함수 f가 항등함수이므로 정의역의 각 원소 x에 대하여 $f(x)=x$이다.

(i) $x<-2$일 때,

$f(x)=-4$이므로 $x=-4$

(ii) $-2 \le x \le 1$일 때,

$f(x)=x$에서 $2x+1=x$ $\therefore x=-1$

(iii) $x>1$일 때,

$f(x)=3$이므로 $x=3$

(i)~(iii)에서 $X=\{-4, -1, 3\}$

$\therefore a+b+c=-4+(-1)+3$

$=-2$ 답 -2

105

함수 f가 집합 $X=\{-3, -1, 0, 1, 3\}$에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로 $f(-3)=f(3)$, $f(-1)=f(1)$이어야 한다.

$f(-3)$의 값이 될 수 있는 것은 $-3, -1, 0, 1, 3$ 중 하나이므로 5개

$f(-3)=f(3)$이므로 $f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(-3)$의 값과 같은 1개

$f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은 $-3, -1, 0, 1, 3$ 중 하나이므로 5개

$f(-1)=f(1)$이므로 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(-1)$의 값과 같은 1개

$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은 $-3, -1, 0, 1, 3$ 중 하나이므로 5개

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$5\times1\times5\times1\times5=125$ 답 **125**

106

$(g\circ f)(a)+(g\circ f)(b)=g(f(a))+g(f(b))$

$=g(y)+g(x)$

$=4+6=10$ 답 **10**

107

$(f\circ f\circ g\circ g)(\sqrt{2})$

$=f(f(g(g(\sqrt{2}))))$

$=f(f(g(-\sqrt{2})))$ ← $g(\sqrt{2})=-\sqrt{2}$

$=f(f(\sqrt{2}))$ ← $g(-\sqrt{2})=\sqrt{2}$

$=f(-2)$ ← $f(\sqrt{2})=-(\sqrt{2})^2=-2$

$=(-2)^2=4$ 답 **4**

108

$(f\circ(g\circ h))(x)=((f\circ g)\circ h)(x)$

$=(f\circ g)(h(x))$

$=(f\circ g)(x-1)$

$=(x-1)^2+4$

$(f\circ(g\circ h))(x)=20$에서

$(x-1)^2+4=20,\ (x-1)^2=16$

$x-1=4$ 또는 $x-1=-4$

$\therefore x=5$ 또는 $x=-3$

따라서 구하는 x의 값의 합은 $5+(-3)=2$ 답 **2**

109

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(3x+4)$

$=-a(3x+4)+b$

$=-3ax-4a+b$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-ax+b)$

$=3(-ax+b)+4$

$=-3ax+3b+4$

$f\circ g=g\circ f$이므로

$-3ax-4a+b=-3ax+3b+4$

$-4a+b=3b+4,\ -2b=4a+4$

$\therefore b=-2a-2$

$f(x)=-ax+b$에 $b=-2a-2$를 대입하면

$f(x)=-ax-2a-2$

$=(-x-2)a-2$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 점 $(-2, -2)$를 지나므로

$m=-2,\ n=-2$

$\therefore m+n=-4$ 답 **-4**

110

$(f\circ h)(x)=f(h(x))=g(x)$에서

$f(h(3))=g(3)$

$h(3)=k$라 하면 $f(k)=g(3)$

이때 $g(3)=-3^2+5=-4$이므로 $f(k)=-4$

$\frac{1}{2}k+1=-4,\ \frac{1}{2}k=-5$

$\therefore k=-10$

$\therefore h(3)=-10$ 답 ①

다른풀이 $(f\circ h)(x)=f(h(x))=\frac{1}{2}h(x)+1$이고,

$(f\circ h)(x)=g(x)$이므로

$\frac{1}{2}h(x)+1=-x^2+5 \quad \therefore h(x)=-2x^2+8$

$\therefore h(3)=-2\times3^2+8=-10$

111

$(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(-2)=-2+a$

$(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(a)$

(i) $a<2$일 때,

$g(a)=a-2$이므로

$(f\circ g)(0)+(g\circ f)(0)=(-2+a)+(a-2)$

즉, $2a-4=10 \quad \therefore a=7$

그런데 $a<2$이므로 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a \ge 2$일 때,

$g(a)=a^2$이므로

$(f \circ g)(0)+(g \circ f)(0)=(-2+a)+a^2$

즉, $a^2+a-2=10$

$a^2+a-12=0$, $(a+4)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a \ge 2$)

(i), (ii)에서 $a=3$ 답 **3**

112

$h(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a \ne 0$)라 하면

$$\begin{aligned}(h \circ g \circ f)(x)&=h(g(f(x)))\\&=h(g(-x))\\&=h(-2x-1)\\&=a(-2x-1)+b\\&=-2ax-a+b\end{aligned}$$

$h \circ g \circ f=f$이므로

$-2ax-a+b=-x$

즉, $-2a=-1$, $-a+b=0$이므로

$a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$

$\therefore h(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

따라서 $h(k)=4$에서

$\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}=4 \qquad \therefore k=7$ 답 **7**

다른풀이 $(h \circ g \circ f)(x)=f(x)$에서

$h(-2x-1)=-x$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-4$를 대입하면

$h(7)=4$

$\therefore k=7$

113

$f^1(3)=f(3)=2$

$f^2(3)=f(f(3))=f(2)=1$

$f^3(3)=f(f^2(3))=f(1)=5$

$f^4(3)=f(f^3(3))=f(5)=4$

$f^5(3)=f(f^4(3))=f(4)=3$

$f^6(3)=f(f^5(3))=f(3)=2$

⋮

즉, $n=1, 2, 3, \cdots$일 때, $f^n(3)$의 값은 2, 1, 5, 4, 3이 이 순서대로 반복된다.

이때 $2022=5 \times 404+2$이므로

$f^{2022}(3)=f^2(3)=1$ 답 **1**

114

$f(x)=\begin{cases}-2x+4 & (0 \le x < 2)\\ x-2 & (2 \le x \le 4)\end{cases}$이므로

$f^1(1)=f(1)=2$

$f^2(1)=f(f(1))=f(2)=0$

$f^3(1)=f(f^2(1))=f(0)=4$

$f^4(1)=f(f^3(1))=f(4)=2$

⋮

즉, $n=1, 2, 3, \cdots$일 때, $f^n(1)$의 값은 2, 0, 4가 이 순서대로 반복된다.

이때 $100=3 \times 33+1$이므로

$f^{100}(1)=f^1(1)=2$ 답 **2**

115

$f(x)=\begin{cases}2x & \left(0 \le x \le \frac{1}{2}\right)\\ 2-2x & \left(\frac{1}{2} \le x \le 1\right)\end{cases}$이므로

$(f \circ f)(x)=\begin{cases}2f(x) & \left(0 \le f(x) \le \frac{1}{2}\right)\\ 2-2f(x) & \left(\frac{1}{2} \le f(x) \le 1\right)\end{cases}$

(i) $0 \le x \le \frac{1}{4}$일 때, $0 \le f(x) \le \frac{1}{2}$이므로

$(f \circ f)(x)=2f(x)=2 \times 2x=4x$

(ii) $\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2}$일 때, $\frac{1}{2} \le f(x) \le 1$이므로

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x)&=2-2f(x)=2-2 \times 2x\\&=2-4x\end{aligned}$$

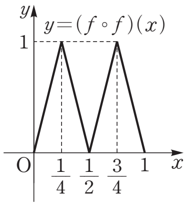
(iii) $\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4}$일 때, $\frac{1}{2} \le f(x) \le 1$이므로

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x)&=2-2f(x)=2-2(2-2x)\\&=4x-2\end{aligned}$$

(iv) $\frac{3}{4} \le x \le 1$일 때, $0 \le f(x) \le \frac{1}{2}$이므로

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x)&=2f(x)=2(2-2x)\\&=4-4x\end{aligned}$$

(i)~(iv)에서 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

116

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\begin{cases} -x+3 & (x<0) \\ 2x^2-4ax+3 & (x\geq 0) \end{cases}$$

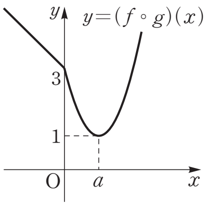
그런데 $a\leq 0$이면 함수

$y=2x^2-4ax+3=2(x-a)^2-2a^2+3$

의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 0 또는 음수이므로 합성함수 $f\circ g$의 치역이 $\{y|y\geq 3\}$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore a>0$

이때 함수 $f\circ g$의 치역이 $\{y|y\geq 1\}$이려면 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=2(x-a)^2-2a^2+3$의 그래프의 꼭짓점의 y좌표가 1이어야 한다.



따라서 $-2a^2+3=1$이므로

$a^2=1 \qquad \therefore a=1\ (\because a>0)$

답 **1**

117

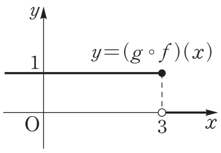
(i) $x\leq 3$일 때, $f(x)=1$이므로

$y=(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(1)=1$

(ii) $x>3$일 때, $f(x)=4$이므로

$y=(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(4)=0$

(i), (ii)에서 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

118

$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(9)=27$

한편, $f^{-1}(-6)=a$라 하면 $f(a)=-6$

(i) $a\geq 2$일 때,

$f(a)=3a$이므로

$3a=-6 \qquad \therefore a=-2$

그런데 $a\geq 2$이므로 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a<2$일 때,

$f(a)=-a^2+5a$이므로

$-a^2+5a=-6,\ a^2-5a-6=0$

$(a+1)(a-6)=0 \qquad \therefore a=-1\ (\because a<2)$

(i), (ii)에서 $a=-1$이므로 $f^{-1}(-6)=-1$

$\therefore (f\circ f)(3)+f^{-1}(-6)=27+(-1)=26$

답 **26**

119

$g^{-1}(1)=3$이므로 $g(3)=1$

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=2$이고 $f(2)=1$이므로

$g(1)=2$

또한, 함수 g의 역함수가 존재하므로 함수 g는 일대일 대응이다.

$\therefore g(4)=4$

$g(4)=4$이므로 $g^{-1}(4)=4$

$\therefore g^{-1}(4)+(f\circ g)(2)=4+f(g(2))=4+f(3)$

$=4+3=7$

답 **7**

120

$f=f^{-1}$이므로 $(f\circ f)(x)=x$

$f(x)=ax+1$에서

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+1)$

$=a(ax+1)+1$

$=a^2x+a+1$

따라서 $a^2x+a+1=x$이므로

$a^2=1,\ a+1=0$

$\therefore a=-1$

답 **−1**

121

$((f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f)(-2)$

$=(g^{-1}\circ f\circ f)(-2)$

$=g^{-1}(f(f(-2)))$

$=g^{-1}(f(-1)) \qquad \leftarrow f(-2)=-1$

$=g^{-1}(0) \qquad \leftarrow f(-1)=0$

이때 $g^{-1}(0)=k$라 하면 $g(k)=0$이므로

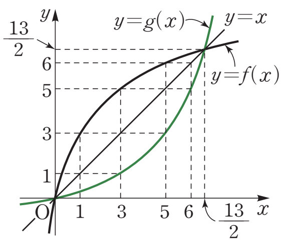
$k+1=0$ $\quad\therefore k=-1$

$\therefore g^{-1}(0)=-1$

$\therefore ((f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f)(-2)=g^{-1}(0)=-1$ 답 -1

122

직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$f^{-1}(6)=k$라 하면

$f(k)=6$이므로 $k=5$

$\therefore f^{-1}(6)=5$

$\therefore (g\circ f^{-1})(6)=g(f^{-1}(6))=g(5)=3$

또, $f^{-1}(3)=l$이라 하면 $f(l)=3$이므로 $l=1$

$\therefore f^{-1}(3)=1$

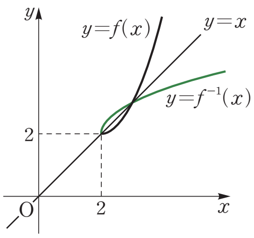
$\therefore (f^{-1}\circ g)(5)=f^{-1}(g(5))=f^{-1}(3)=1$

$\therefore (g\circ f^{-1})(6)+(f^{-1}\circ g)(5)=3+1$

$=4$ 답 4

123

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나고, 그 교점이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$x^2-4x+6=x$에서 $x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=2$ 또는 $x=3$

따라서 두 교점의 좌표는 $(2,\ 2)$, $(3,\ 3)$이므로 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(3-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$ 답 $\sqrt{2}$

124

$g^{-1}(40)=k$라 하면 $g(k)=40$

(i) $k<25$일 때, $g(k)=2k$이므로

$2k=40$ $\quad\therefore k=20$

(ii) $k\geq 25$일 때, $g(k)=k+25$이므로

$k+25=40$ $\quad\therefore k=15$

그런데 $k\geq 25$이므로 k의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $k=20$, 즉 $g^{-1}(40)=20$이므로

$f(g^{-1}(40))=f(20)=5\times 20+20=120$

또, $f^{-1}(65)=l$이라 하면 $f(l)=65$이므로

$5l+20=65$ $\quad\therefore l=9$

$\therefore f^{-1}(65)=9$

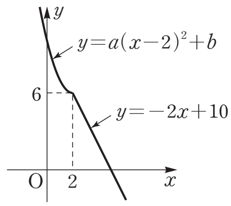
$\therefore f^{-1}(g(40))=f^{-1}(65)=9$

$\therefore f(g^{-1}(40))+f^{-1}(g(40))=120+9$

$=129$ 답 129

125

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, 곡선 $y=a(x-2)^2+b$가 점 $(2,\ 6)$을 지나야 하므로 $b=6$

또, $x\geq 2$일 때 직선 $y=-2x+10$의 기울기가 음수이므로 $x<2$일 때 곡선 $y=a(x-2)^2+b$의 모양이 아래로 볼록이어야 한다.

$\therefore a>0$

따라서 정수 a의 최솟값은 1이므로 $a+b$의 최솟값은 7이다. 답 ④

126

$(h^{-1}\circ g^{-1}\circ f^{-1})(1)=(h^{-1}\circ(f\circ g)^{-1})(1)$

$=h^{-1}((f\circ g)^{-1}(1))$

$(f\circ g)^{-1}(1)=k$라 하면 $(f\circ g)(k)=1$이므로

$2k-3=1$ $\quad\therefore k=2$

$\therefore (f\circ g)^{-1}(1)=2$

$h^{-1}(2)=l$이라 하면 $h(l)=2$이므로

$l+1=2 \qquad \therefore l=1$

$\therefore (h^{-1}\circ g^{-1}\circ f^{-1})(1)=h^{-1}((f\circ g)^{-1}(1))$

$=h^{-1}(2)=1$ 답 **1**

다른풀이 $h^{-1}\circ g^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ g\circ h)^{-1}$이고

$(f\circ g)(x)=2x-3$, $h(x)=x+1$이므로

$(f\circ g\circ h)(x)=(f\circ g)(h(x))=(f\circ g)(x+1)$

$=2(x+1)-3=2x-1$

이때 $(f\circ g\circ h)^{-1}(1)=k$라 하면 $(f\circ g\circ h)(k)=1$

이므로 $2k-1=1 \qquad \therefore k=1$

$\therefore (f\circ g\circ h)^{-1}(1)=1$

$\therefore (h^{-1}\circ g^{-1}\circ f^{-1})(1)=(f\circ g\circ h)^{-1}(1)=1$

127

$f^{-1}(3)=-1$에서 $f(-1)=3$이므로

$-a+b=3$ ...... ㉠

$(f\circ g)^{-1}(2x+1)=x$에서 $(f\circ g)(x)=2x+1$이므로

$f(g(x))=f(x+c)=a(x+c)+b$

$=ax+ac+b$

따라서 $ax+ac+b=2x+1$이므로

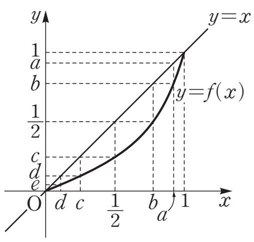
$a=2$, $ac+b=1$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$, $b=5$, $c=-2$

$\therefore a+b+c=5$ 답 **5**

128

직선 $y=x$를 이용하여 x축과 점선이 만나는 점의 x좌표를 구하면 오른쪽 그림과 같다.



$g\left(\frac{1}{2}\right)=f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=k$라 하면 $f(k)=\frac{1}{2}$이므로

$k=b \qquad \therefore g\left(\frac{1}{2}\right)=b$

$g(b)=f^{-1}(b)=l$이라 하면 $f(l)=b$이므로

$l=a \qquad \therefore g(b)=a$

$\therefore (g\circ g)\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)=g(b)=a$ 답 $\boldsymbol{a}$

129

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 방정식 $f(x)=g(x)$가 실근을 가지면 방정식 $f(x)=x$도 실근을 갖는다.

$\frac{1}{2}x^2+a=x$에서 $x^2-2x+2a=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 실근을 가지려면

$\frac{D}{4}=1-2a\geq 0 \qquad \therefore a\leq\frac{1}{2}$ 답 $\boldsymbol{a\leq\frac{1}{2}}$

130

$S=\{n\,|\,1\leq n\leq 100,\ n$은 9의 배수$\}$

$=\{9, 18, 27, \cdots, 90, 99\}$

이므로

$f(9)=f(72)=2$

$f(18)=f(81)=4$

$f(27)=f(90)=6$

$f(36)=f(99)=1$

$f(45)=3$, $f(54)=5$, $f(63)=0$

함수 $f(n)$의 역함수가 존재하려면 $f(n)$이 일대일대응이어야 하므로

$f^{-1}(0)=63$, $f^{-1}(3)=45$, $f^{-1}(5)=54$이고

$f^{-1}(1)=36$ 또는 $f^{-1}(1)=99$

$f^{-1}(2)=9$ 또는 $f^{-1}(2)=72$

$f^{-1}(4)=18$ 또는 $f^{-1}(4)=81$

$f^{-1}(6)=27$ 또는 $f^{-1}(6)=90$

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2\times2\times2\times2=16$ 답 **16**

131

$f^{-1}(2)=1$에서 $f(1)=2$이므로

$-1+k=2 \qquad \therefore k=3$

$\therefore f(x)=-x|x|+3$

$(g^{-1}\circ f)^{-1}(2)=(f^{-1}\circ g)(2)=f^{-1}(g(2))$

$=f^{-1}(5)$ ← $g(2)=2\times2+1=5$

이때 $f^{-1}(5)=a$라 하면 $f(a)=5$이므로

$-a|a|+3=5$

(i) $a\geq 0$일 때,

$-a^2+3=5$, $a^2=-2$이므로 $a\geq 0$인 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a<0$일 때,

$a^2+3=5$, $a^2=2$

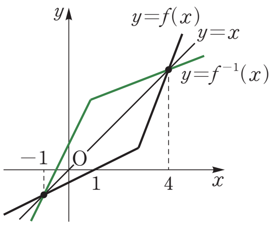
$\therefore a=-\sqrt{2}$ ($\because a<0$)

(i), (ii)에서 $a=-\sqrt{2}$, 즉 $f^{-1}(5)=-\sqrt{2}$

$\therefore (g^{-1}\circ f)^{-1}(2)=f^{-1}(5)=-\sqrt{2}$ 답 $-\sqrt{2}$

132

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\{f(x)\}^2=f(x)f^{-1}(x)$에서

$\{f(x)\}^2-f(x)f^{-1}(x)=0$, $f(x)\{f(x)-f^{-1}(x)\}=0$

$\therefore f(x)=0$ 또는 $f(x)=f^{-1}(x)$

(i) $f(x)=0$을 만족시키는 실수 x의 값은 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표이므로

$x=1$

(ii) $f(x)=f^{-1}(x)$를 만족시키는 실수 x의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이므로

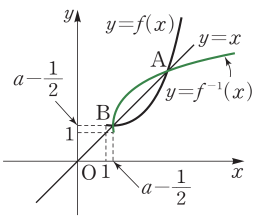
$x=-1$ 또는 $x=4$

(i), (ii)에서 모든 실수 x의 값의 합은

$1+(-1)+4=4$ 답 ④

133

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같으므로

$\frac{1}{2}x^2-x+a=x$에서 $\frac{1}{2}x^2-2x+a=0$

$\therefore x^2-4x+2a=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 두 근을 α, β $(\alpha>\beta)$라 하면 두 교점은 $A(\alpha, \alpha)$, $B(\beta, \beta)$이고 두 점 A, B 사이의 거리가 2이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}$

$=\sqrt{2(\alpha-\beta)^2}=2$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=2$

이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2a$

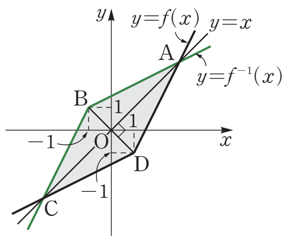
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$2=16-8a$

$\therefore a=\frac{7}{4}$ 답 $\frac{7}{4}$

134

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

이 교점을 각각 A, C라 하면

(i) $x\geq 1$일 때,

$2x-3=x$에서 $x=3$ $\therefore A(3, 3)$

(ii) $x<1$일 때,

$\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=x$에서 $x=-3$ $\therefore C(-3, -3)$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{(3+3)^2+(3+3)^2}=6\sqrt{2}$

또한, 위의 그림에서 $B(-1, 1)$, $D(1, -1)$이므로

$\overline{BD}=\sqrt{(1+1)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형은 마름모이므로 그 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BD}}=\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=12$ 답 **12**

135

(주어진 식)

$$=\frac{2+x+2-x}{(2-x)(2+x)}+\frac{4}{4+x^2}+\frac{32}{16+x^4}$$

$$=\frac{4}{4-x^2}+\frac{4}{4+x^2}+\frac{32}{16+x^4}$$

$$=\frac{4(4+x^2)+4(4-x^2)}{(4-x^2)(4+x^2)}+\frac{32}{16+x^4}$$

$$=\frac{32}{16-x^4}+\frac{32}{16+x^4}$$

$$=\frac{32(16+x^4)+32(16-x^4)}{(16-x^4)(16+x^4)}$$

$$=\frac{1024}{256-x^8}$$

답 $\mathbf{\frac{1024}{256-x^8}}$

136

주어진 식의 좌변을 정리하면

$$\frac{2x+3}{x+1}-\frac{3x+7}{x+2}+\frac{3x+10}{x+3}-\frac{2x+9}{x+4}$$

$$=\frac{2(x+1)+1}{x+1}-\frac{3(x+2)+1}{x+2}+\frac{3(x+3)+1}{x+3}-\frac{2(x+4)+1}{x+4}$$

$$=\left(2+\frac{1}{x+1}\right)-\left(3+\frac{1}{x+2}\right)+\left(3+\frac{1}{x+3}\right)-\left(2+\frac{1}{x+4}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right)$$

$$=\frac{x+2-(x+1)}{(x+1)(x+2)}+\frac{x+4-(x+3)}{(x+3)(x+4)}$$

$$=\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}$$

$$=\frac{(x+3)(x+4)+(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

$$=\frac{2x^2+10x+14}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

따라서 $a=2$, $b=10$, $c=14$이므로

$ab+c=34$ 답 **34**

137

$$f(x)=\frac{4x^2-1}{3}$$

$$=\frac{(2x-1)(2x+1)}{3}$$

이므로

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{3}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(20)}$$

$$=\frac{3}{2}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{39}}-\frac{1}{41}\right)\right\}$$

$$=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{41}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\times\frac{40}{41}=\frac{60}{41}$$

답 $\mathbf{\frac{60}{41}}$

138

$<A,\ B>=\frac{A-B}{AB}=\frac{1}{B}-\frac{1}{A}$이므로 주어진 식의 좌변을 정리하면

$$<x+2,\ x>+<x+4,\ x+2>+<x+6,\ x+4>$$

$$=\left(\frac{1}{x}-\cancel{\frac{1}{x+2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{x+2}}-\cancel{\frac{1}{x+4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{x+4}}-\frac{1}{x+6}\right)$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+6}$$

주어진 식의 우변은

$$<x+a,\ x>=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+a}$$

따라서 $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+6}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+a}$이므로

$a=6$ 답 ⑤

연습문제 실력 UP

139

$$\frac{\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+3}}{\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3}}+\frac{\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-3}}{\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-3}}$$

$$=\frac{\frac{x+3-(x-2)}{(x-2)(x+3)}}{\frac{x+3+x-2}{(x-2)(x+3)}}+\frac{\frac{x-3-(x+2)}{(x+2)(x-3)}}{\frac{x-3+x+2}{(x+2)(x-3)}}$$

$$=\frac{5}{2x+1}+\frac{-5}{2x-1}$$

$$=\frac{5(2x-1)-5(2x+1)}{(2x+1)(2x-1)}$$

$$=\frac{-10}{(2x+1)(2x-1)}$$

답 $\boldsymbol{\frac{-10}{(2x+1)(2x-1)}}$

140

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$에서 $\frac{ab+bc+ca}{abc}=0$

$\therefore\ ab+bc+ca=0$

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+a)(b+c)}+\frac{c^2}{(c+b)(c+a)}+\frac{3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{a^2(b+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}+\frac{b^2(c+a)}{(b+a)(b+c)(c+a)}+\frac{c^2(a+b)}{(c+b)(c+a)(a+b)}+\frac{3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

(분자)

$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$

$=a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b+3abc$

$=(a^2b+b^2a+abc)+(b^2c+c^2b+abc)+(a^2c+c^2a+abc)$

$=ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ca(a+b+c)$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$\therefore$ (주어진 식)$=\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

$=0$

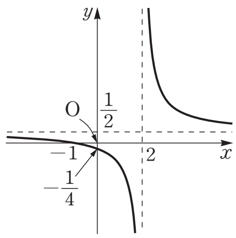
답 **0**

141

$$y=\frac{x+1}{2x-4}=\frac{\frac{1}{2}(2x-4)+3}{2x-4}=\frac{3}{2x-4}+\frac{1}{2}$$

이므로 $y=\frac{x+1}{2x-4}$의 그래프는 $y=\frac{3}{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

이때 점근선의 방정식은 $x=2,\ y=\frac{1}{2}$이고, 정의역은 $\{x\,|\,x\neq 2$인 실수$\}$, 치역은 $\left\{y\,\middle|\,y\neq\frac{1}{2}\text{인 실수}\right\}$이다.



④ 주어진 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$을 지나고 기울기가 ±1인 직선에 대하여 대칭이다.

점 $\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$을 지나고 기울기가 ±1인 직선의 방정식은 $y-\frac{1}{2}=\pm(x-2)$

즉, 두 직선 $y=x-\frac{3}{2},\ y=-x+\frac{5}{2}$에 대하여 대칭이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

142

$$y=\frac{ax+3}{2x+1}=\frac{\frac{a}{2}(2x+1)-\frac{a}{2}+3}{2x+1}$$

$$=\frac{-\frac{a}{2}+3}{2x+1}+\frac{a}{2}$$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{a}{2}$

$$y=\frac{x-2}{3x+b}=\frac{\frac{1}{3}(3x+b)-\frac{1}{3}b-2}{3x+b}$$

$$=-\frac{\frac{1}{3}b+2}{3x+b}+\frac{1}{3}$$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-\frac{b}{3},\ y=\frac{1}{3}$

따라서 $-\frac{1}{2}=-\frac{b}{3}$, $\frac{a}{2}=\frac{1}{3}$이므로

$a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore ab=1$ **답 1**

143

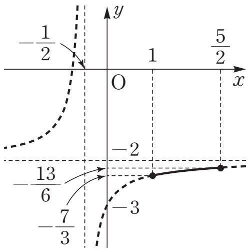
$y=\frac{-3-4x}{2x+1}=\frac{-2(2x+1)-1}{2x+1}=-\frac{1}{2x+1}-2$

이므로 $y=\frac{-3-4x}{2x+1}$의 그래프는 $y=-\frac{1}{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $1\le x\le\frac{5}{2}$에서

$y=\frac{-3-4x}{2x+1}$의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로



$x=\frac{5}{2}$일 때 최댓값

$\frac{-3-10}{5+1}=-\frac{13}{6}$,

$x=1$일 때 최솟값 $\frac{-3-4}{2+1}=-\frac{7}{3}$을 갖는다.

따라서 $a=-\frac{13}{6}$, $b=-\frac{7}{3}$이므로

$a+b=-\frac{9}{2}$ **답 $-\frac{9}{2}$**

144

$y=\frac{-2x+5}{x-1}=\frac{-2(x-1)+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}-2$

이므로 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=-2$

이때 주어진 유리함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(1,\ -2)$를 지나고 기울기가 1 또는 -1인 직선에 대하여 대칭이므로

$a=1$, $c=-1$ ($\because a>c$)

즉, 두 직선 $y=x+b$, $y=-x+d$가 각각 점 $(1,\ -2)$를 지나므로

$-2=1+b$, $-2=-1+d$

$\therefore b=-3$, $d=-1$

$\therefore a+2b+c+3d=1-6-1-3=-9$ **답 -9**

145

직선 $x=2$가 유리함수 $f(x)=\frac{x+b}{x-a}$의 그래프의 한 점근선이므로 $a=2$

$\therefore f(x)=\frac{x+b}{x-2}$

또한, 유리함수 $f(x)=\frac{x+b}{x-2}$의 그래프가 점 $(3,\ 7)$을 지나므로

$7=\frac{3+b}{3-2}$ $\quad\therefore b=4$

$\therefore a+b=2+4=6$ **답 ①**

146

$(g^{-1}\circ f)^{-1}(2)=(f^{-1}\circ g)(2)=f^{-1}(g(2))=k$

이때 $g(2)=\frac{3\times2-1}{2}=\frac{5}{2}$이므로

$f^{-1}(g(2))=f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)=k$

즉, $f(k)=\frac{5}{2}$이므로

$\frac{2k}{k+1}=\frac{5}{2}$, $4k=5k+5$

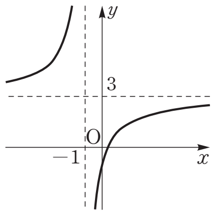
$\therefore k=-5$ **답 -5**

147

$y=\frac{3x+k-10}{x+1}=\frac{3(x+1)+k-13}{x+1}=\frac{k-13}{x+1}+3$

이므로 $y=\frac{3x+k-10}{x+1}$의 그래프는 $y=\frac{k-13}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

이 함수의 그래프가 제4사분면을 지나기 위해서는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $k-13<0$이어야 하므로

$k<13$

(ii) $x=0$일 때 y의 값이 0보다 작아야 하므로

$k-10<0 \qquad \therefore k<10$

(i), (ii)에서 $k<10$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, $\cdots$, 9의 9개이다. 답 ③

148

$$y=\frac{bx+c}{ax-1}=\frac{\frac{b}{a}(ax-1)+\frac{b}{a}+c}{ax-1}$$

$$=\frac{\frac{b}{a}+c}{ax-1}+\frac{b}{a}$$

이므로 점근선의 방정식은

$x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{b}{a}$

주어진 그래프에서 $\frac{1}{a}>0$, $\frac{b}{a}>0$이므로

$a>0$, $b>0$

또, $x=0$일 때 y의 값이 0보다 크므로

$-c>0 \qquad \therefore c<0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

149

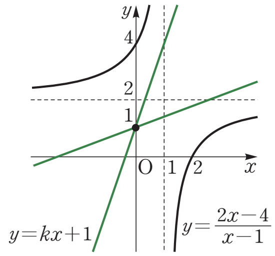
$A\cap B=\varnothing$이므로 $y=\frac{2x-4}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=kx+1$은 만나지 않는다.

$$y=\frac{2x-4}{x-1}=\frac{2(x-1)-2}{x-1}=-\frac{2}{x-1}+2 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이므로 $y=\frac{2x-4}{x-1}$의 그래프는 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

또, 직선 $y=kx+1$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 1)$을 지난다.

이때 ㉠의 그래프와 직선 $y=kx+1$이 만나지 않으려면 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $k=0$일 때,

㉠의 그래프와 직선 $y=1$은 한 점에서 만나므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k\neq0$일 때,

함수 $y=\frac{2x-4}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=kx+1$이 만나지 않으려면 $\frac{2x-4}{x-1}=kx+1$에서

$kx^2-(k+1)x+3=0$

이 이차방정식의 실근이 존재하지 않아야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=(k+1)^2-4\times k\times3<0$

$k^2-10k+1<0$

$\therefore 5-2\sqrt{6}<k<5+2\sqrt{6}$

(i), (ii)에서 구하는 k의 값의 범위는

$5-2\sqrt{6}<k<5+2\sqrt{6}$

답 $5-2\sqrt{6}<k<5+2\sqrt{6}$

150

유리함수 $y=\frac{2x+13}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=x-1$이 만나는 점의 x좌표는 $\frac{2x+13}{x-1}=x-1$에서

$(x-1)^2=2x+13$

$x^2-4x-12=0$, $(x+2)(x-6)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=6$

따라서 두 교점의 좌표는 $(-2, -3)$, $(6, 5)$이므로 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{\{6-(-2)\}^2+\{5-(-3)\}^2}=8\sqrt{2}$ 답 $8\sqrt{2}$

151

$(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$$=\frac{\frac{x+2}{x-1}+2}{\frac{x+2}{x-1}-1}=\frac{\frac{3x}{x-1}}{\frac{3}{x-1}}=\frac{3x}{3}=x$$

즉, $(f\circ f)(x)$가 항등함수이므로

$(f\circ f\circ f)(x)=f((f\circ f)(x))=f(x)$

$$=\frac{x+2}{x-1}=\frac{(x-1)+3}{x-1}$$

$$=\frac{3}{x-1}+1$$

따라서 함수 $y=(f\circ f\circ f)(x)$의 그래프는 두 점근선 $x=1$, $y=1$의 교점 $(1, 1)$에 대하여 대칭이므로

$a=1$, $b=1$

$\therefore a+b=2$

답 **2**

152

$y=\frac{4x+1}{x-1}$로 놓고 x에 대하여 풀면

$y(x-1)=4x+1$, $(y-4)x=y+1$

$\therefore x=\frac{y+1}{y-4}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{x+1}{x-4}$

$\therefore g(x)=\frac{x+1}{x-4}=\frac{(x-4)+5}{x-4}=\frac{5}{x-4}+1$

이때 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면

$y=\frac{5}{x-m-4}+n+1$

이 그래프가 $y=f(x)$의 그래프와 겹쳐지므로

$f(x)=\frac{4x+1}{x-1}=\frac{4(x-1)+5}{x-1}=\frac{5}{x-1}+4$에서

$-m-4=-1$, $n+1=4$

$\therefore m=-3$, $n=3$

$\therefore n-m=6$

답 **6**

153

$y=\frac{2x-3}{x-a}=\frac{2(x-a)+2a-3}{x-a}=\frac{2a-3}{x-a}+2$

의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=2$

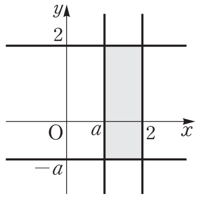
$y=\frac{-ax+2}{x-2}=\frac{-a(x-2)-2a+2}{x-2}=\frac{-2a+2}{x-2}-a$

의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$, $y=-a$

양수 a의 값의 범위에 따라 점근선으로 둘러싸인 부분의 넓이가 달라진다.

(i) $0<a<2$일 때,

점근선으로 둘러싸인 직사각형의 넓이는



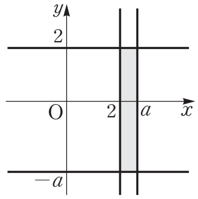
$(2-a)(2+a)=3$

$4-a^2=3$, $a^2=1$

$\therefore a=1$ ($\because 0<a<2$)

(ii) $a>2$일 때,

점근선으로 둘러싸인 직사각형의 넓이는



$(a-2)(2+a)=3$

$a^2-4=3$, $a^2=7$

$\therefore a=\sqrt{7}$ ($\because a>2$)

(i), (ii)에서 $a=1$ 또는 $a=\sqrt{7}$

따라서 모든 a의 값의 곱은 $1\times\sqrt{7}=\sqrt{7}$

답 $\sqrt{7}$

154

제1사분면에 있는 유리함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프 위의 점 A의 좌표를 $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ $(a>0)$이라 하면 $\mathrm{B}\left(ak, \frac{1}{a}\right)$, $\mathrm{C}\left(a, \frac{k}{a}\right)$이고 $k>1$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=ak-a=a(k-1)$, $\overline{\mathrm{AC}}=\frac{k}{a}-\frac{1}{a}=\frac{k-1}{a}$

$\therefore \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}$

$$=\frac{1}{2}\times a(k-1)\times\frac{k-1}{a}$$

$$=\frac{1}{2}(k-1)^2$$

즉, $\frac{1}{2}(k-1)^2=50$이므로

$(k-1)^2=100$, $k-1=\pm10$

$\therefore k=11$ ($\because k>1$)

답 **11**

155

$f(x)=\dfrac{2x+b}{x-a}=\dfrac{2(x-a)+2a+b}{x-a}=\dfrac{2a+b}{x-a}+2$

이므로 $f(x)=\dfrac{2x+b}{x-a}$의 그래프는 $y=\dfrac{2a+b}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

즉, 조건 (나)에서

$2a+b=3$ …… ㉠

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=2$이고 두 점근선의 교점은 점 $(a, 2)$이다.

또한, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a, 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점과 일치하므로 점 $(2, a)$이다.

조건 (가)에서 함수 $y=f(x-4)-4$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프와 일치하므로 $y=f(x-4)-4$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a+4, -2)$이다.

점 $(2, a)$와 점 $(a+4, -2)$가 같으므로

$a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$-4+b=3$ $\quad \therefore b=7$

$\therefore a+b=(-2)+7=5$

답 ⑤

다른풀이 $y=\dfrac{2x+b}{x-a}$로 놓고 x에 대하여 풀면

$y(x-a)=2x+b$, $(y-2)x=ay+b$

$\therefore x=\dfrac{ay+b}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{ax+b}{x-2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{ax+b}{x-2}$

조건 (가)에서 함수 $y=f(x-4)-4$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프이므로

$y=\dfrac{2(x-4)+b}{x-4-a}-4=\dfrac{-2x+8+4a+b}{x-4-a}$

이 식이 $f^{-1}(x)=\dfrac{ax+b}{x-2}$와 같아야 하므로

$a=-2$

따라서 $f(x)=\dfrac{2x+b}{x+2}=\dfrac{b-4}{x+2}+2$이므로

조건 (나)에서 $b-4=3$ $\quad \therefore b=7$

$\therefore a+b=(-2)+7=5$

156

$f(x)=\dfrac{3x+k}{x+4}=\dfrac{3(x+4)+k-12}{x+4}=\dfrac{k-12}{x+4}+3$

이므로 유리함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면

$y-3=\dfrac{k-12}{(x+2)+4}+3$

$\therefore g(x)=\dfrac{k-12}{x+6}+6$

곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식은 $x=-6$, $y=6$이므로 두 점근선의 교점은 점 $(-6, 6)$이다.

점 $(-6, 6)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$\dfrac{3\times(-6)+k}{-6+4}=6$

$-18+k=-12$

$\therefore k=6$

답 ⑤

다른풀이 $f(x)=\dfrac{3x+k}{x+4}=\dfrac{k-12}{x+4}+3$

이므로 점근선의 방정식은 $x=-4$, $y=3$이고 두 점근선의 교점은 점 $(-4, 3)$이다.

곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 곡선 $y=g(x)$의 두 점근선의 교점은 점 $(-4, 3)$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점 $(-6, 6)$과 같다.

점 $(-6, 6)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$\dfrac{3\times(-6)+k}{-6+4}=6$

$-18+k=-12$ $\quad \therefore k=6$

157

유리함수 $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-2}$의 그래프 위의 임의의 한 점 P의 좌표를 $\left(a, \dfrac{2a-3}{a-2}\right)$ $(a>2)$이라 하면

$\overline{PA}=\dfrac{2a-3}{a-2}$, $\overline{PB}=a$

$\therefore \overline{PA}+\overline{PB}=\dfrac{2a-3}{a-2}+a=\dfrac{2(a-2)+1}{a-2}+a$

$=\dfrac{1}{a-2}+a+2$

$a>2$이므로 $a-2>0$

따라서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\dfrac{1}{a-2}+a+2=\dfrac{1}{a-2}+a-2+4$

$\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{a-2}\times(a-2)}+4$

$=2+4=6$

$\therefore m=6$

이때 등호는 $\dfrac{1}{a-2}=a-2$일 때 성립하므로

$(a-2)^2=1,\ a-2=\pm 1$

$\therefore a=3\ (\because a>2)$

$\therefore p=3$

$\therefore m+p=6+3=9$ 답 **9**

158

주어진 무리식의 값이 실수가 되려면

(근호 안의 식의 값)≥ 0, (분모)$\neq 0$

이어야 하므로

$6-2x\geq 0,\ x+3\geq 0,\ 4-x\neq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 3$

따라서 x의 최댓값 $M=3$, 최솟값 $m=-3$이므로

$M+m=0$ 답 **0**

159

$f(x)=\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}$에서

$\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}$

$=\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})}$

$=\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{(2x+1)-(2x-1)}$

$=\dfrac{1}{2}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})$

$\therefore \dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)}+\dfrac{1}{f(3)}+\cdots+\dfrac{1}{f(24)}$

$=\dfrac{1}{2}\{(\cancel{\sqrt{3}}-\sqrt{1})+(\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{3}})+(\cancel{\sqrt{7}}-\cancel{\sqrt{5}})$

$+\cdots+(\sqrt{49}-\cancel{\sqrt{47}})\}$

$=\dfrac{1}{2}(-\sqrt{1}+\sqrt{49})$

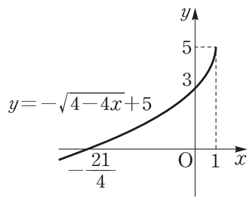
$=\dfrac{1}{2}(-1+7)=3$ 답 **3**

160

ㄱ. $y=-\sqrt{4-4x}+5=-\sqrt{-4(x-1)}+5$이므로 이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동하면 $y=-\sqrt{-4x}$의 그래프와 일치한다.

ㄴ. $4-4x\geq 0$에서 $x\leq 1$이므로 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\leq 1\}$이다. 또한, $-\sqrt{4-4x}\leq 0$에서 $y=-\sqrt{4-4x}+5\leq 5$이므로 치역은 $\{y|y\leq 5\}$이다.

ㄷ. $y=-\sqrt{4-4x}+5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 4 사분면을 지나지 않는다.

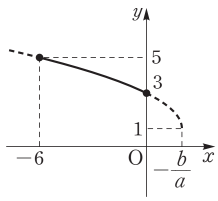


따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 **ㄱ, ㄴ**

161

$y=\sqrt{ax+b}+1=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}+1$

이고 $a<0$이므로 $-6\leq x\leq 0$에서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, $x=-6$일 때 최댓값 5, $x=0$일 때 최솟값 3을 가지므로

$\sqrt{-6a+b}+1=5$ ······ ㉠

$\sqrt{b}+1=3$ ······ ㉡

㉡에서 $\sqrt{b}=2$ $\quad\therefore b=4$

$b=4$를 ㉠에 대입하면

$\sqrt{-6a+4}+1=5,\ \sqrt{-6a+4}=4$

$-6a+4=16$ $\quad\therefore a=-2$

따라서 $a=-2$, $b=4$이므로

$ab=-8$ **답** -8

162

주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$a=2$, $b=-1$

$\therefore f(x)=\sqrt{x+2}-1$

$\therefore f(7)=\sqrt{9}-1=2$ **답** ②

163

$f^{-1}(4)=a$에서 $f(a)=4$이므로

$\dfrac{a+2}{a-1}=4$, $a+2=4a-4$ $\quad\therefore a=2$

$(f\circ(g\circ f)^{-1})(2)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1})(2)$

$\qquad\qquad\qquad=g^{-1}(2)=b$

에서 $g(b)=2$이므로

$\sqrt{2b-1}=2$, $2b-1=4$ $\quad\therefore b=\dfrac{5}{2}$

$\therefore ab=2\times\dfrac{5}{2}=5$ **답** 5

164

$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$에서 $2x+1=\sqrt{5}$

양변을 제곱하면 $4x^2+4x+1=5$

$\therefore x^2+x-1=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x^4+x^3-2x^2+x+3$을 x^2+x-1로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면

$$\begin{array}{r}
x^2-1\\
x^2+x-1\,\overline{)\,x^4+x^3-2x^2+x+3}\\
\underline{x^4+x^3-x^2}\\
-x^2+x+3\\
\underline{-x^2-x+1}\\
2x+2
\end{array}$$

$\therefore x^4+x^3-2x^2+x+3$

$\quad=(x^2+x-1)(x^2-1)+2x+2$

$\quad=2x+2$ ($\because$ ㉠)

x^3-x+1을 x^2+x-1로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면

$$\begin{array}{r}
x-1\\
x^2+x-1\,\overline{)\,x^3-x+1}\\
\underline{x^3+x^2-x}\\
-x^2+1\\
\underline{-x^2-x+1}\\
x
\end{array}$$

$\therefore x^3-x+1=(x^2+x-1)(x-1)+x=x$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \dfrac{x^4+x^3-2x^2+x+3}{x^3-x+1}$

$\quad=\dfrac{2x+2}{x}=2+\dfrac{2}{x}$

$\quad=2+\dfrac{2}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ $\quad\leftarrow x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$을 대입

$\quad=2+\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$

$\quad=2+\dfrac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$

$\quad=2+\sqrt{5}+1$

$\quad=3+\sqrt{5}$ **답** $3+\sqrt{5}$

다른풀이 $x^2+x-1=0$에서

$x^2=1-x$, $x^3=x\times x^2=x(1-x)=x-x^2=2x-1$

$x^4=(x^2)^2=(1-x)^2=x^2-2x+1=-3x+2$

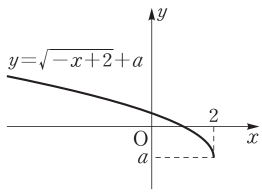
$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{2x+2}{x}=2+\dfrac{2}{x}$

165

$y=\sqrt{-x+2}+a=\sqrt{-(x-2)}+a$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

이때 이 함수의 그래프가 제4사분면은 지나고 제3사분면은 지나지 않으려면 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $a<0$

(ii) $x=0$일 때, $y\geq 0$이어야 하므로

$\sqrt{2}+a\geq 0 \qquad \therefore a\geq -\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 $-\sqrt{2}\leq a<0$

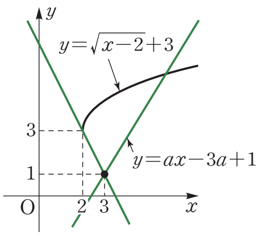
따라서 구하는 정수 a의 값은 -1이다. 답 **-1**

166

$y=\sqrt{x-2}+3$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, $y=ax-3a+1=a(x-3)+1$은 a의 값에 관계없이 점 $(3, 1)$을 지나는 직선이다.

이때 $A\cap B\neq\varnothing$이므로 $y=\sqrt{x-2}+3$의 그래프와 직선 $y=ax-3a+1$이 만나야 한다.

따라서 오른쪽 그림에서 무리함수의 그래프와 직선이 만나려면 직선의 기울기 a가 0보다 크거나 점 $(2, 3)$을 지날 때보다 작거나 같아야 한다.



직선 $y=ax-3a+1$이 점 $(2, 3)$을 지날 때,

$3=2a-3a+1 \qquad \therefore a=-2$

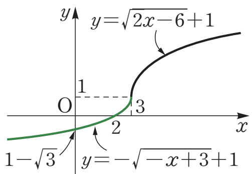
$\therefore a\leq -2$ 또는 $a>0$ 답 **$a\leq -2$ 또는 $a>0$**

167

$x\geq 3$에서 $f(x)=\sqrt{2x-6}+1$ …… ㉠

$x<3$에서 $f(x)=-\sqrt{-x+3}+1$ …… ㉡

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f^{-1}(3)=a$라 하면

$f(a)=3$

오른쪽 그림에서

$f(a)=3$을 만족시키는 함수의 식은 ㉠이므로

$\sqrt{2a-6}+1=3,\ \sqrt{2a-6}=2$

$2a-6=4 \qquad \therefore a=5$

$\therefore f^{-1}(3)=5$

$f^{-1}(-2)=b$라 하면 $f(b)=-2$

앞의 그림에서 $f(b)=-2$를 만족시키는 함수의 식은 ㉡이므로

$-\sqrt{-b+3}+1=-2,\ \sqrt{-b+3}=3$

$-b+3=9 \qquad \therefore b=-6$

$\therefore f^{-1}(-2)=-6$

$\therefore f^{-1}(3)+f^{-1}(-2)=5+(-6)=-1$ 답 **-1**

168

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2, 3)$이므로 함수의 식을

$f(x)=a(x-2)^2+3\ (a>0)$으로 놓을 수 있다.

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(3, 4)$를 지나므로

$a+3=4 \qquad \therefore a=1$

$\therefore f(x)=(x-2)^2+3\ (x\geq 2)$

$y=(x-2)^2+3$으로 놓고 x에 대하여 풀면

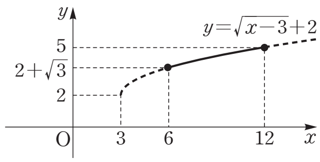
$(x-2)^2=y-3$

$x-2=\sqrt{y-3}\ (\because x\geq 2)$

$\therefore x=\sqrt{y-3}+2$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\sqrt{x-3}+2$

따라서 $f^{-1}(x)=\sqrt{x-3}+2$이고 $6\leq x\leq 12$에서 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=12$일 때 최댓값 $\sqrt{12-3}+2=5$를 갖는다. 답 **5**

169

곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 점 $(1, 3)$에서 만나므로

$f(1)=3,\ g(1)=3$

이때 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$g(1)=3$, 즉 $f^{-1}(1)=3$에서 $f(3)=1$

$f(1)=3$에서 $\sqrt{a+b}+1=3$

$\therefore a+b=4$ …… ㉠

$f(3)=1$에서 $\sqrt{3a+b}+1=1$

$\therefore 3a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=6$

$\therefore f(x)=\sqrt{-2x+6}+1$

$g(5)=k$, 즉 $f^{-1}(5)=k$라 하면 $f(k)=5$이므로

$\sqrt{-2k+6}+1=5$

$\sqrt{-2k+6}=4$, $-2k+6=16$

$\therefore k=-5$

$\therefore g(5)=-5$

답 ①

170

주어진 유리함수의 그래프의 모양에서

$b<0$

유리함수 $y=\dfrac{b}{x+a}+c$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=c$이므로

$-a>0$, $c>0$

$\therefore a<0$, $c>0$

$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}+c$이므로 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a<0$, $-\dfrac{b}{a}<0$, $c>0$이므로 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ④이다.

답 ④

171

$f(x)=\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{1}{5}k$는 $x\geq0$에서 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{1}{5}k$로 놓고 x에 대하여 풀면

$\dfrac{1}{5}x^2=y-\dfrac{1}{5}k$, $x^2=5y-k$

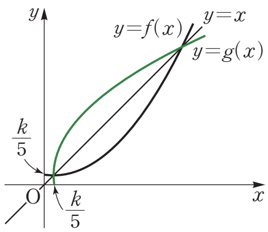
$\therefore x=\sqrt{5y-k}$ $(\because x\geq0)$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\sqrt{5x-k}$

즉, 함수 $y=g(x)$는 함수 $y=f(x)$의 역함수이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{1}{5}k=x$에서 $x^2-5x+k=0$ …… ㉠

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4k>0$

$-4k>-25$

$\therefore k<\dfrac{25}{4}$ …… ㉡

또한, 이차방정식 ㉠은 음이 아닌 실근을 가져야 하므로

$k\geq0$ …… ㉢

㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$0\leq k<\dfrac{25}{4}$

따라서 정수 k는 0, 1, 2, ⋯, 6의 7개이다.

답 ②

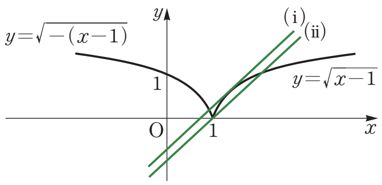
172

$y=\sqrt{|x-1|}$에서

$x\geq1$일 때, $y=\sqrt{x-1}$

$x<1$일 때, $y=\sqrt{-(x-1)}$

이므로 주어진 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) $y=\sqrt{x-1}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때,
$\sqrt{x-1}=x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면
$x^2+(2k-1)x+k^2+1=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(2k-1)^2-4(k^2+1)=0$
$-4k-3=0 \qquad \therefore\ k=-\dfrac{3}{4}$

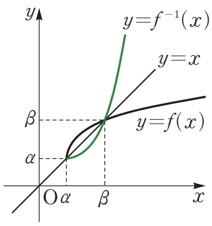
(ii) 직선 $y=x+k$가 점 $(1,\ 0)$을 지날 때,
$0=1+k \qquad \therefore\ k=-1$

따라서 함수 $y=\sqrt{|x-1|}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 직선이 (i)과 (ii) 사이에 있어야 하므로

$-1<k<-\dfrac{3}{4}$ 답 $\boldsymbol{-1<k<-\dfrac{3}{4}}$

173

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{2x-a}+2=x$에서 $\sqrt{2x-a}=x-2$
양변을 제곱하여 정리하면
$x^2-6x+4+a=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠
이차방정식 ㉠의 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 두 교점의 좌표는 $(\alpha,\ \alpha)$, $(\beta,\ \beta)$이고 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$이므로
$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=2\sqrt{2}$
$2(\alpha-\beta)^2=8 \qquad \therefore\ (\alpha-\beta)^2=4$
이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=4+a$
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로
$4=36-4(4+a)$
$-4a+20=4 \qquad \therefore\ a=4$ 답 **4**

Ⅲ. 경우의 수

174

x, y가 음이 아닌 정수이므로 $x\ge0$, $y\ge0$

$2x+3y\le9$에서 $3y\le9$, 즉 $y\le3$이므로

$y=0$ 또는 $y=1$ 또는 $y=2$ 또는 $y=3$

(i) $y=0$일 때,

$2x\le9$, 즉 $x\le\frac{9}{2}$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$, $(4, 0)$의 5개

(ii) $y=1$일 때,

$2x\le6$, 즉 $x\le3$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$의 4개

(iii) $y=2$일 때,

$2x\le3$, 즉 $x\le\frac{3}{2}$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(0, 2)$, $(1, 2)$의 2개

(iv) $y=3$일 때,

$2x\le0$, 즉 $x\le0$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(0, 3)$의 1개

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$5+4+2+1=12$ 답 **12**

175

$(a+b+c)^2(x+y)$

$=(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)(x+y)$

위의 식에서 a^2, b^2, c^2, $2ab$, $2bc$, $2ca$에 x, y를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 구하는 항의 개수는

$6\times2=12$ 답 **12**

176

300과 420의 최대공약수는 60이므로 300과 420의 양의 공약수 중에서 5의 배수의 개수는 60의 양의 약수 중에서 5의 배수의 개수와 같다.

$60=2^2\times3\times5$의 양의 약수 중 5의 배수는 5를 소인수로 가지므로 60의 양의 약수 중 5의 배수의 개수는 $2^2\times3$의 양의 약수의 개수와 같다.

2^2의 양의 약수는 1, 2, 2^2의 3개

3의 양의 약수는 1, 3의 2개

따라서 구하는 약수의 개수는

$3\times2=6$ 답 ①

177

(i) 강남 → 시청 → 청량리로 가는 경우의 수는

$3\times3=9$

(ii) 강남 → 잠실 → 청량리로 가는 경우의 수는

$2\times2=4$

(iii) 강남 → 시청 → 잠실 → 청량리로 가는 경우의 수는

$3\times2\times2=12$

(iv) 강남 → 잠실 → 시청 → 청량리로 가는 경우의 수는

$2\times2\times3=12$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$9+4+12+12=37$ 답 **37**

178

(i) B와 C에 같은 색을 칠하는 경우

B에 칠할 수 있는 색은 4가지

A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지

C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지

D에 칠할 수 있는 색은 B와 C에 칠한 색을 제외한 3가지

따라서 칠하는 방법의 수는

$4\times3\times1\times3=36$

(ii) B와 C에 다른 색을 칠하는 경우

B에 칠할 수 있는 색은 4가지

A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지

C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지

D에 칠할 수 있는 색은 B와 C에 칠한 색을 제외한 2가지

따라서 칠하는 방법의 수는

$4\times3\times2\times2=48$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$36+48=84$ 답 **84**

참고 두 영역 A와 D, 두 영역 B와 C는 각각 서로 인접한 영역이 아니므로 두 영역 B와 C에 같은 색을 칠하는 경우와 다른 색을 칠하는 경우에 두 영역 A와 D에 칠할 수 있는 색의 가짓수가 달라진다. 따라서 두 영역 B와 C에 같은 색을 칠하는 경우와 다른 색을 칠하는 경우로 나누어 생각해야 한다.

179

(i) 지불할 수 있는 방법의 수

10000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법은

0장, 1장, 2장의 3가지

5000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장의 4가지

1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장, 4장의 5가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는

$3\times4\times5-1=59$ $\therefore a=59$

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

5000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액과 10000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 10000원짜리 지폐 2장을 5000원짜리 지폐 4장으로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 5000원짜리 지폐 7장, 1000원짜리 지폐 4장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

5000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 금액은

0원, 5000원, 10000원, ⋯, 35000원의 8가지

1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 금액은

0원, 1000원, 2000원, 3000원, 4000원의 5가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는

$8\times5-1=39$ $\therefore b=39$

$\therefore a-b=59-39=20$

답 20

180

(i) 3으로 나누어떨어지는 수, 즉 3의 배수는

3, 6, 9, ⋯, 99의 33개

(ii) 5로 나누어떨어지는 수, 즉 5의 배수는

5, 10, 15, ⋯, 100의 20개

(iii) 3과 5로 나누어떨어지는 수, 즉 15의 배수는

15, 30, 45, ⋯, 90의 6개

따라서 3 또는 5로 나누어떨어지는 자연수의 개수는

$33+20-6=47$

이므로 3과 5로 모두 나누어떨어지지 않는 자연수의 개수는

$100-47=53$

답 53

181

이차방정식 $x^2+2ax+b=0$의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식이 실근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-b\geq0$, 즉 $a^2\geq b$

(i) $a=1$일 때,

$b\leq1$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$의 1개

(ii) $a=2$일 때,

$b\leq4$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$의 4개

(iii) $a=3$일 때,

$b\leq9$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$, ⋯, $(3, 6)$의 6개

(iv) $a=4$일 때,

$b\leq16$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$, ⋯, $(4, 6)$의 6개

(v) $a=5$일 때,

$b\leq25$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(5, 1)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$, ⋯, $(5, 6)$의 6개

(vi) $a=6$일 때,

$b\leq36$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(6, 1)$, $(6, 2)$, $(6, 3)$, ⋯, $(6, 6)$의 6개

(i)~(vi)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$1+4+6+6+6+6=29$

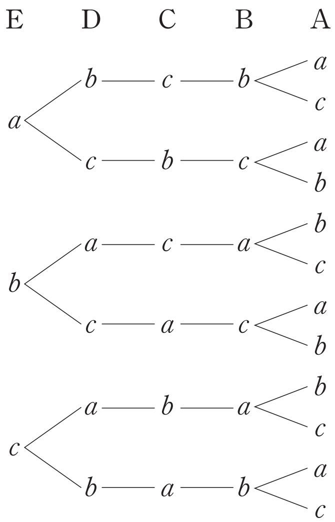
답 29

182

A, B, C, D, E의 영역의 넓이는 각각

π, $4\pi-\pi=3\pi$, $9\pi-4\pi=5\pi$, $16\pi-9\pi=7\pi$, $25\pi-16\pi=9\pi$이다.

이때 물감 1통으로 색칠할 수 있는 영역의 넓이는 π이고 각 물감은 10통 이하만 사용할 수 있으므로 영역 A, B, C, D, E를 색칠하는 데 필요한 물감의 양은 각각 1통, 3통, 5통, 7통, 9통이다.
3가지 색을 각각 a, b, c라 하고 넓이가 넓은 순서대로 색칠할 색을 수형도로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 문양의 개수는 12이다. 답 ②

다른풀이 이웃한 영역은 다른 색을 칠해야 하므로 같은 색을 칠할 수 있는 두 영역은 A와 C, A와 D, A와 E, B와 D, B와 E, C와 E이다.
그런데 영역 A, B, C, D, E의 넓이는 각각 π, 3π, 5π, 7π, 9π이고 물감은 종류별로 10통 이하로 사용할 수 있으므로 이 중에서 같은 색을 칠할 수 있는 두 영역은 A와 C, A와 D, A와 E, B와 D이다.
또한, 영역 E에 칠하는 물감은 단독으로 사용하거나 두 영역 A, E에 같은 색을 칠하는 경우만 가능하므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) A와 E, B와 D에 각각 같은 색을 칠하는 경우
A와 E에 칠할 수 있는 색은 3가지
B와 D에 칠할 수 있는 색은 A와 E에 칠한 색을 제외한 2가지
C에 칠할 수 있는 색은 A와 E, B와 D에 칠한 색을 제외한 1가지
따라서 칠하는 방법의 수는
$3\times2\times1=6$

(ii) A와 C, B와 D에 각각 같은 색을 칠하는 경우
A와 C에 칠할 수 있는 색은 3가지
B와 D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 2가지
E에 칠할 수 있는 색은 A와 C, B와 D에 칠한 색을 제외한 1가지
따라서 칠하는 방법의 수는
$3\times2\times1=6$

(i), (ii)에서 서로 다르게 색칠된 문양의 수는
$6+6=12$

183

A지점과 C지점을 연결하는 도로를 x개 추가한다고 하면 한 번 지나간 지점은 다시 지나지 않고 A지점에서 출발하여 D지점으로 가는 방법은 다음과 같다.

(i) A → B → D로 가는 방법의 수는
$3\times3=9$

(ii) A → C → D로 가는 방법의 수는
$x\times2=2x$

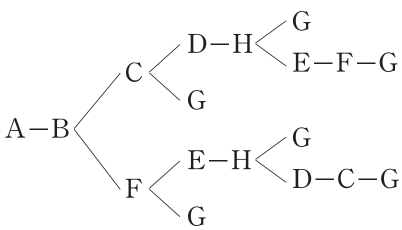
(iii) A → B → C → D로 가는 방법의 수는
$3\times2\times2=12$

(iv) A → C → B → D로 가는 방법의 수는
$x\times2\times3=6x$

(i)~(iv)에서 A지점에서 D지점으로 가는 방법의 수는
$9+2x+12+6x=53$
$8x=32$ $\quad\therefore x=4$
따라서 추가해야 하는 도로의 개수는 4이다. 답 4

184

주어진 정육면체의 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 B로 움직인 후 꼭짓점 G에 도착하는 경우를 수형도를 그려서 구해 보면 다음과 같이 6가지가 있다.



같은 방법으로 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 D 또는 E로 움직인 후 꼭짓점 G에 도착하는 경우도 각각 6가지씩이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times3=18$ 답 **18**

185

${}_6P_{2r+1}\le4\,{}_6P_{2r}$에서

$\dfrac{6!}{\{6-(2r+1)\}!}\le4\times\dfrac{6!}{(6-2r)!}$

$\dfrac{6!}{(5-2r)!}\le4\times\dfrac{6!}{(6-2r)!}$

$(6-2r)!\le4\times(5-2r)!$

$6-2r\le4$ ← $(6-2r)!=(6-2r)\times(5-2r)!$

$-2r\le-2$ $\quad\therefore r\ge1$

그런데 $6\ge2r+1$에서 $r\le\frac{5}{2}$이므로 $1\le r\le\frac{5}{2}$

따라서 구하는 자연수 r는 1, 2의 2개이다. 답 **2**

186

서로 다른 셔츠 3개 중 2개를 택하여 두 인형 A, B에게 입히는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$
서로 다른 바지 3개 중 2개를 택하여 두 인형 A, B에게 입히는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$
A 인형의 셔츠와 바지의 색이 서로 다르므로 색을 정하는 경우는 (빨강, 초록), (초록, 빨강)의 2가지
B 인형의 셔츠와 바지의 색도 서로 다르므로 색을 정하는 경우는 (빨강, 초록), (초록, 빨강)의 2가지
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times6\times2\times2=144$ 답 ④

187

남학생 3명을 한 사람, 여학생 5명을 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4!=24$
남학생 3명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$
여학생 5명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $5!=120$
따라서 구하는 방법의 수는
$24\times6\times120=17280$ 답 **17280**

188

rainbow의 7개의 문자 중 모음은 a, i, o로 3개이고 자음은 r, n, b, w로 4개이다.
모음 3개 중 2개를 택하여 양 끝에 나열하는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$
나머지 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$5!=120$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times120=720$ 답 **720**

189

6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$6!=720$
이때 b와 e를 한 묶음으로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$5!=120$
그 각각에 대하여 b와 e가 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$
즉, b와 e가 서로 이웃하도록 나열하는 경우의 수는
$120\times2=240$
따라서 b와 e 사이에 적어도 1개의 문자가 들어가는 경우의 수는
$720-240=480$ 답 **480**

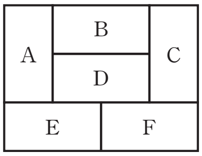
190

A□□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $4!=24$
B□□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $4!=24$
C□□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $4!=24$
DA□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $3!=6$
DB□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $3!=6$
이때 $24+24+24+6+6=84$이고, DC로 시작하는 문자열은 순서대로 DCABE, DCAEB, …이므로 86번째에 오는 문자열은 DCAEB이다.
따라서 구하는 문자는 B이다. 답 **B**

연습문제 실력 UP

191

오른쪽 그림과 같이 6개 지역을 각각 A, B, C, D, E, F라 하면 서로 이웃한 2개 지역을 택하는 경우의 수는



(A, B), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (C, D), (C, F), (D, E), (D, F), (E, F)

의 10이다.

서로 이웃한 2개 지역을 담당하는 조사원을 정하는 경우의 수는 ${}_5P_1=5$

남은 4개 지역을 담당하는 조사원을 정하는 경우의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times5\times24=1200$ 답 ⑤

192

A, B, C, D, E, F의 6명을 일렬로 세울 때, A를 맨 앞에 세우고 B는 A와 이웃하지 않게 세우는 경우는 다음과 같다.

A□B□□□인 경우: $4!=24$

A□□B□□인 경우: $4!=24$

A□□□B□인 경우: $4!=24$

A□□□□B인 경우: $4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$4\times24=96$ 답 **96**

다른풀이 A를 맨 앞에 세우고 나머지 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $5!=120$

A를 맨 앞에 세우고 B와 A를 이웃하게 세우는 방법의 수는 $4!=24$ ← AB□□□□

따라서 구하는 방법의 수는

$120-24=96$

193

(i) (짝, 홀, 짝, 홀, 짝)인 경우

3개의 짝수를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3!=6$

짝수 사이사이에 4개의 홀수 중 2개의 홀수를 택하여 나열하는 방법의 수는 ${}_4P_2=12$

$\therefore 6\times12=72$

(ii) (홀, 짝, 홀, 짝, 홀)인 경우

4개의 홀수 중 3개의 홀수를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수는 ${}_4P_3=24$

홀수 사이사이에 3개의 짝수 중 2개의 짝수를 택하여 나열하는 방법의 수는 ${}_3P_2=6$

$\therefore 24\times6=144$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$72+144=216$ 답 **216**

194

6개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $6!=720$

이때 서로 다른 한 자리 자연수 6개 중에서 짝수의 개수를 n이라 하면 양 끝에 짝수가 오는 경우의 수는

${}_nP_2\times4!$

따라서 적어도 한쪽 끝에 홀수가 오는 경우의 수는

$720-{}_nP_2\times4!=432$

${}_nP_2\times4!=288$, ${}_nP_2=12$

$n(n-1)=4\times3$

$\therefore n=4$

따라서 홀수의 개수는

$6-4=2$ 답 **2**

195

(i) 2□□□□의 꼴의 자연수 중 짝수의 개수

일의 자리의 숫자는 4 또는 6이고 그 각각에 대하여 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에는 나머지 3개의 숫자를 일렬로 나열하면 되므로

$2\times3!=12$

(ii) 3□□□□의 꼴의 자연수 중 짝수의 개수

일의 자리의 숫자는 2 또는 4 또는 6이고 그 각각에 대하여 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에는 나머지 3개의 숫자를 일렬로 나열하면 되므로

$3\times3!=18$

(iii) 4□□□□의 꼴의 자연수 중 짝수의 개수

일의 자리의 숫자는 2 또는 6이고 그 각각에 대하여 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에는 나머지 3개의 숫자를 일렬로 나열하면 되므로

$2\times3!=12$

(iv) 52□□□의 꼴의 자연수 중 짝수의 개수

일의 자리의 숫자는 4 또는 6이고 그 각각에 대하여 백의 자리, 십의 자리에는 나머지 2개의 숫자를 일렬로 나열하면 되므로

$2\times2!=4$

(v) 53□□□의 꼴의 자연수 중 짝수의 개수

일의 자리의 숫자는 2 또는 4 또는 6이고 그 각각에 대하여 백의 자리, 십의 자리에는 나머지 2개의 숫자를 일렬로 나열하면 되므로

$3\times2!=6$

(i)~(v)에서 54000보다 작은 짝수의 개수는

$12+18+12+4+6=52$ 답 **52**

196

GYRNMEA는 G□□□□□□의 꼴의 문자열 중 마지막 문자열이고 NGEAMRY는 NGE□□□□의 꼴의 문자열 중 첫 번째 문자열이다.

M□□□□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $6!=720$

NA□□□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $5!=120$

NE□□□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $5!=120$

NGA□□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $4!=24$

따라서 GYRNMEA와 NGEAMRY 사이에 있는 문자열의 개수는

$720+120+120+24=984$ 답 **984**

197

(i) ㄴ과 ㄹ이 서로 이웃하는 경우

ㄴ과 ㄹ을 한 묶음으로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!=24$

그 각각에 대하여 ㄴ과 ㄹ이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

$\therefore 24\times2=48$

(ii) ㄹ과 ㅁ이 서로 이웃하는 경우

ㄹ과 ㅁ을 한 묶음으로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!=24$

그 각각에 대하여 ㄹ과 ㅁ이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

$\therefore 24\times2=48$

(iii) ㄴ과 ㄹ, ㄹ과 ㅁ이 모두 서로 이웃하는 경우

ㄴㄹㅁ의 순서로 이웃하는 경우의 수는 ㄴㄹㅁ을 한 묶음으로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수이므로 $3!=6$

ㅁㄹㄴ의 순서로 이웃하는 경우의 수도 $3!=6$

$\therefore 6+6=12$

(i)~(iii)에서 구하는 경우의 수는

$48+48-12=84$ 답 **84**

198

(i) A와 B가 2인용 소파에 앉는 경우

A와 B가 앉는 방법의 수는 $2!=2$

C, D, E가 3인용 소파에 앉는 방법의 수는 $3!=6$

$\therefore 2\times6=12$

(ii) A와 B가 3인용 소파에 앉는 경우

A와 B를 묶어서 한 사람으로 보고 2명이 자리에 앉는 방법의 수는 $2!=2$

A와 B 두 사람이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

나머지 자리에 C, D, E가 앉는 방법의 수는 $3!=6$

$\therefore 2\times2\times6=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$12+24=36$ 답 **36**

199

8개의 자연수 1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14를 네 개씩 합이 같은 두 묶음으로 나누려면 한 묶음의 합이 총합 60의 절반인 30이 되어야 한다.

이렇게 두 묶음으로 나누는 경우를 따져 보면

1, 3, 12, 14와 5, 7, 8, 10 또는

1, 5, 10, 14와 3, 7, 8, 12 또는

1, 7, 8, 14와 3, 5, 10, 12 또는

1, 7, 10, 12와 3, 5, 8, 14의 4가지이다.

각 경우에 대하여 앞쪽 묶음의 4개의 자연수는 왼쪽 세로줄에, 뒤쪽 묶음의 4개의 자연수는 오른쪽 세로줄에 각각 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4!\times4!=576$

왼쪽 줄과 오른쪽 줄을 서로 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times(576\times2)=4608$ 답 **4608**

200

세 자리의 자연수 중 각 자리의 수의 곱이 10의 배수가 되려면 세 자리 중 한 자리에는 반드시 5가 들어가야 하고, 나머지 두 자리 중 적어도 한 자리에는 2의 배수, 즉 2, 4, 6, 8 중 하나가 들어가야 한다.

(i) 5□□의 꼴의 경우

십의 자리에 2, 4, 6, 8 중 하나, 일의 자리에 1, 3, 7, 9 중 하나가 들어가는 경우의 수는

${}_4P_1\times{}_4P_1=16$

십의 자리에 1, 3, 7, 9 중 하나, 일의 자리에 2, 4, 6, 8 중 하나가 들어가는 경우의 수는

${}_4P_1\times{}_4P_1=16$

십의 자리와 일의 자리에 2, 4, 6, 8 중 두 개의 숫자가 들어가는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

$\therefore\ 16+16+12=44$

(ii) □5□, □□5의 꼴의 경우

(i)과 같은 방법으로 구할 수 있으므로 각 경우의 자연수의 개수는 44이다.

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$44+44+44=132$ 답 ④

201

(i) 네 자리 자연수 중 같은 숫자가 없는 경우

1, 2, 3, 4, 5 중 서로 다른 4개를 택하여 나열하면 되므로

${}_5P_4=120$

(ii) 네 자리 자연수 중 같은 숫자가 두 쌍 있는 경우

2323, 3232의 2개

(iii) 네 자리 자연수 중 같은 숫자가 한 쌍 있는 경우

㉠ 같은 숫자가 2인 경우

2□2□, □2□2, 2□□2의 꼴의 3가지 경우가 있고 각각에 대하여 □의 자리에 1, 3, 4, 5 중 서로 다른 2개를 택하여 나열하면 되므로

$3\times{}_4P_2=36$

㉡ 같은 숫자가 3인 경우

㉠과 같은 방법으로 구하면 네 자리 자연수의 개수는

$3\times{}_4P_2=36$

(i)~(iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$120+2+36+36=194$ 답 **194**

202

${}_nC_3+{}_nP_2=5{}_{n-1}C_2$에서

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}+n(n-1)=5\times\frac{(n-1)(n-2)}{2\times1}$$

양변에 6을 곱하면

$n(n-1)(n-2)+6n(n-1)=15(n-1)(n-2)$

이때 $n\ge3$이므로 양변을 $n-1$로 나누면

$n(n-2)+6n=15(n-2)$

$n^2-2n+6n=15n-30,\ n^2-11n+30=0$

$(n-5)(n-6)=0 \qquad \therefore\ n=5$ 또는 $n=6$

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$5+6=11$ 답 **11**

203

1학년 6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

2학년 4명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times4=60$ 답 **60**

204

세 수의 합이 홀수가 되는 경우는

(홀수)+(홀수)+(홀수) 또는 (홀수)+(짝수)+(짝수)

일 때이다.

1부터 15까지의 자연수 중 홀수는 8개, 짝수는 7개이므로

(ⅰ) (홀수)+(홀수)+(홀수)인 경우

홀수 8개 중 3개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

$${}_{8}C_{3}=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

(ⅱ) (홀수)+(짝수)+(짝수)인 경우

홀수 8개 중 1개를 뽑고, 짝수 7개 중 2개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

$${}_{8}C_{1}\times{}_{7}C_{2}=8\times\frac{7\times6}{2\times1}=168$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$56+168=224$ 답 **224**

205

구하는 방법의 수는 10명 중 4명을 뽑는 방법의 수에서 남자만 4명을 뽑는 방법의 수와 여자만 4명을 뽑는 방법의 수를 뺀 것과 같다.

전체 10명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는

$${}_{10}C_{4}=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$$

남자만 4명을 뽑는 방법의 수는

$${}_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

여자만 4명을 뽑는 방법의 수는

${}_{4}C_{4}=1$

따라서 구하는 방법의 수는

$210-(15+1)=194$ 답 **194**

206

5를 이미 택했다고 생각하고 나머지 7개의 자연수 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_{7}C_{2}=\frac{7\times6}{2\times1}=21$$

택한 3개의 자연수를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$21\times6=126$ 답 **126**

207

(ⅰ) 직각삼각형의 개수

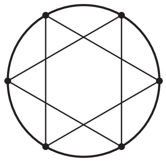
지름에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 직각삼각형을 만들려면 삼각형의 한 변이 원의 지름이어야 한다.

원 위의 6개의 점 중 두 점을 이어 만들 수 있는 지름은 3개이고 나머지 4개의 점 중에서 1개를 택하는 방법의 수는 ${}_{4}C_{1}$이므로 구하는 직각삼각형의 개수 a는

$a=3\times{}_{4}C_{1}=12$

(ⅱ) 정삼각형의 개수

정삼각형은 오른쪽 그림과 같이 2개 만들 수 있으므로



$b=2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a-b=12-2=10$ 답 **10**

208

이차방정식 ${}_{n}C_{4}\,x^{2}-{}_{n}C_{5}\,x+{}_{n}C_{3}=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{{}_{n}C_{5}}{{}_{n}C_{4}},\ \alpha\beta=\frac{{}_{n}C_{3}}{{}_{n}C_{4}}$$

이때 $\alpha\beta=1$이므로

$$\frac{{}_{n}C_{3}}{{}_{n}C_{4}}=1 \qquad \therefore\ {}_{n}C_{3}={}_{n}C_{4}$$

${}_{n}C_{3}={}_{n}C_{n-3}$이므로 ${}_{n}C_{n-3}={}_{n}C_{4}$에서

$n-3=4 \qquad \therefore\ n=7$

$$\therefore\ \alpha+\beta=\frac{{}_{7}C_{5}}{{}_{7}C_{4}}=\frac{{}_{7}C_{2}}{{}_{7}C_{3}}=\frac{\frac{7\times6}{2\times1}}{\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}}=\frac{3}{5}$$

답 $\mathbf{\frac{3}{5}}$

209

여학생이 적어도 한 명 포함되도록 뽑는 방법의 수는 전체 방법의 수에서 남학생만 뽑는 방법의 수를 빼면 된다.

전체 15명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$${}_{15}C_{3}=\frac{15\times14\times13}{3\times2\times1}=455$$

남학생을 x $(x \geq 3)$명이라 하면 남학생만 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_xC_3$

이때 여학생이 적어도 한 명 포함되도록 뽑는 방법의 수가 445이므로

$455 - {}_xC_3 = 445$, ${}_xC_3 = 10$

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

$x(x-1)(x-2) = 60 = 5 \times 4 \times 3$ $\quad \therefore x = 5$

따라서 남학생 수는 5이다. 답 **5**

210

26명 중에서 악수할 2명을 뽑는 방법의 수는

$${}_{26}C_2 = \frac{26 \times 25}{2 \times 1} = 325$$

남편들이 자신의 부인과 악수하는 방법의 수는 13

부인 13명 중에서 악수할 2명을 뽑는 방법의 수는

$${}_{13}C_2 = \frac{13 \times 12}{2 \times 1} = 78$$

따라서 악수한 총 횟수는

$325 - (13 + 78) = 234$(회) 답 **234회**

211

$f(1) < f(2) < f(3) < f(4) = 6 < f(5)$에서

$f(1) < f(2) < f(3) < 6$이므로 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중 3개를 택한 후 작은 수부터 차례대로 집합 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.

$$\therefore {}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

또한, $6 < f(5)$이므로 집합 Y의 원소 7, 8 중 하나를 택한 후 집합 X의 원소 5에 대응시키면 된다.

$\therefore {}_2C_1 = 2$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$10 \times 2 = 20$ 답 **20**

KEY Point

두 집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, n $(m \leq n)$이고, X에서 Y로의 함수 f가 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$를 만족시킬 때, 함수 f의 개수는

⇨ 서로 다른 n개에서 m개를 택하는 조합의 수

⇨ ${}_nC_m$

212

(i) 서로 다른 직선의 개수

10개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_{10}C_2 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

이고, 일직선 위에 4개의 점이 있는 직선이 5개이다.

그런데 일직선 위에 있는 점으로 만들 수 있는 직선은 1개이므로 구하는 직선의 개수 m은

$m = 45 - 6 \times 5 + 5 = 20$

(ii) 서로 다른 삼각형의 개수

10개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$

이고, 일직선 위에 4개의 점이 있는 직선이 5개이다.

그런데 일직선 위에 있는 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수 n은

$n = 120 - 4 \times 5 = 100$

(i), (ii)에서 $m + n = 120$ 답 **120**

213

2층, 3층, 4층, 5층의 4개의 층 중 사람이 내리는 2개의 층을 택하는 방법의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

5명을 2명, 3명씩 2개의 조로 나누는 방법의 수는

$${}_5C_2 \times {}_3C_3 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 1 = 10$$

2개의 조를 2개의 층에 배열하는 방법의 수는

$2! = 2$

따라서 구하는 방법의 수는

$6 \times 10 \times 2 = 120$ 답 **120**

214

서로 다른 5개의 바구니 중 3개에 빨간색 공을 1개씩 넣는 방법의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

모든 바구니에 공이 적어도 하나씩 들어가야 하므로 빨간색 공을 넣지 않은 빈 바구니에 파란색 공을 각각 1개씩 넣는다.

남은 4개의 파란색 공을 서로 다른 5개의 바구니에 각각 2개 이하로 넣는 방법의 수는 다음과 같다.

(i) 파란색 공을 2개, 2개로 넣는 방법의 수

5개의 바구니 중 파란색 공을 넣을 2개의 바구니를 택하면 되므로

${}_5C_2=10$

(ii) 파란색 공을 2개, 1개, 1개로 넣는 방법의 수

5개의 바구니 중 파란색 공을 넣을 3개의 바구니를 택한 후 3개의 바구니 중 파란색 공을 2개 넣을 바구니를 택하면 되므로

${}_5C_3\times{}_3C_1=10\times3=30$

(iii) 파란색 공을 1개, 1개, 1개, 1개로 넣는 방법의 수

5개의 바구니 중 파란색 공을 넣을 4개의 바구니를 택하면 되므로

${}_5C_4={}_5C_1=5$

따라서 구하는 경우의 수는

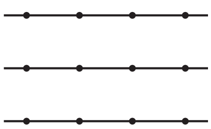
$10\times(10+30+5)=450$ 답 **450**

215

12개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_{12}C_2=\frac{12\times11}{2\times1}=66$

(i) 일직선 위에 4개의 점이 있는 경우

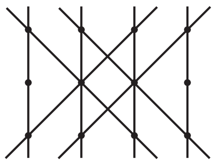


4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_2=6$

일직선 위에 4개의 점이 있는 경우는 3가지이므로 이 경우 만들 수 있는 직선은 3개이다.

(ii) 일직선 위에 3개의 점이 있는 경우



3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

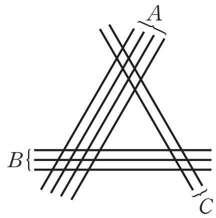
일직선 위에 3개의 점이 있는 경우는 8가지이므로 이 경우 만들 수 있는 직선은 8개이다.

따라서 구하는 직선의 개수는

$66-6\times3-3\times8+3+8=35$ 답 **35**

216

오른쪽 그림과 같이 평행한 직선들의 집합을 각각 A, B, C라 하면 평행사변형이 아닌 사다리꼴이 만들어지는 경우는 다음과 같다.



(i) A에서 2개, B에서 1개, C에서 1개의 직선을 택하는 경우

${}_4C_2\times{}_3C_1\times{}_2C_1=6\times3\times2=36$

(ii) B에서 2개, A에서 1개, C에서 1개의 직선을 택하는 경우

${}_3C_2\times{}_4C_1\times{}_2C_1=3\times4\times2=24$

(iii) C에서 2개, A에서 1개, B에서 1개의 직선을 택하는 경우

${}_2C_2\times{}_4C_1\times{}_3C_1=1\times4\times3=12$

(i) ~ (iii)에서 평행사변형이 아닌 사다리꼴의 개수는

$36+24+12=72$ 답 **72**

217

주어진 삼각형을 포함하는 사각형은 네 꼭짓점을 다음과 같이 택하여 만들 수 있다.

(i) 원점 $(0, 0)$

(ii) x축 위의 점 $(4, 0)$, $(8, 0)$ 중 한 점

(iii) y축 위의 점 $(0, 4)$, $(0, 8)$ 중 한 점

(iv) 제1사분면 위의 점 $(4, 4)$, $(4, 8)$, $(8, 4)$, $(8, 8)$ 중 한 점

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 사각형의 꼭짓점이 될 4개의 점을 택하는 방법의 수는

$1\times{}_2C_1\times{}_2C_1\times{}_4C_1=1\times2\times2\times4=16$

그런데 네 점 $(0,\ 0)$, $(8,\ 0)$, $(4,\ 4)$, $(0,\ 8)$을 택하는 경우는 사각형을 만들 수 없으므로 구하는 사각형의 개수는

$16-1=15$ 답 ②

218

치역과 공역이 같으려면 집합 B의 원소 1, 2, 3은 각각 집합 A의 한 개 이상의 원소에 대응시켜야 한다.

따라서 집합 A의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6을 3개의 조로 나누어 각 조를 집합 B의 원소에 하나씩 대응시키면 된다.

집합 A의 원소 6개를 3개의 조로 나누는 방법은 (4개, 1개, 1개), (3개, 2개, 1개), (2개, 2개, 2개)의 3가지가 있다.

(i) (4개, 1개, 1개)로 나누는 경우

$${}_6C_4\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\frac{1}{2!}=15\times2\times1\times\frac{1}{2}=15$$

(ii) (3개, 2개, 1개)로 나누는 경우

$${}_6C_3\times{}_3C_2\times{}_1C_1=20\times3\times1=60$$

(iii) (2개, 2개, 2개)로 나누는 경우

$${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}=15\times6\times1\times\frac{1}{6}=15$$

(i)~(iii)에서 나누는 방법의 수는

$15+60+15=90$

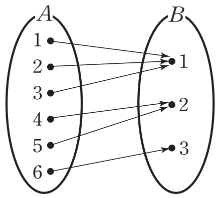
이때 3개의 조를 집합 B의 세 원소에 하나씩 대응시키는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 함수의 개수는

$90\times6=540$ 답 540

참고 치역과 공역이 같은 함수 중 하나는 집합 A의 원소를 3개의 조 (1, 2, 3), (4, 5), (6)으로 나눈 후



$(1,\ 2,\ 3)\to1$

$(4,\ 5)\to2$

$(6)\to3$

으로 대응시킨 것과 같다.