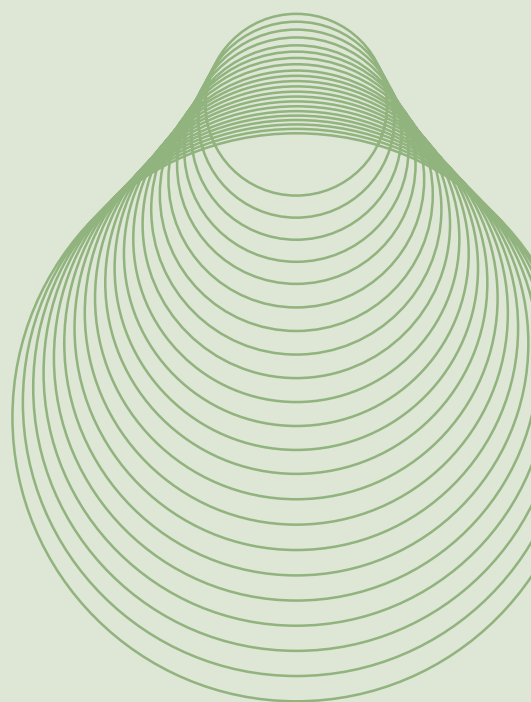




유형의 완성 RPM

대수

정답및풀이



01 지수

교과서 문제 정복하기

본책 007쪽

0001 -8의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = -8$ 이므로

$$x^3 + 8 = 0, \quad (x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1 \pm \sqrt{3}i$$

따라서 -8의 세제곱근 중 실수인 것은 -2이다.

답 -2

0002 81의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 81$ 이므로

$$x^4 - 81 = 0, \quad (x^2 + 9)(x^2 - 9) = 0$$

$$(x^2 + 9)(x+3)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = \pm 3i \text{ 또는 } x = \pm 3$$

따라서 81의 네제곱근 중 실수인 것은 -3, 3이다.

답 -3, 3

0003 0.027의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = 0.027$ 이므로

$$x^3 - 0.027 = 0, \quad (x-0.3)(x^2 + 0.3x + 0.09) = 0$$

$$\therefore x = 0.3 \text{ 또는 } x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{20}$$

따라서 0.027의 세제곱근 중 실수인 것은 0.3이다.

답 0.3

0004 -16의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = -16$

이때 실수 x 에 대하여 $x^4 \geq 0$ 이므로 $x^4 = -16$ 의 실근은 없다.

따라서 -16의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.

답 없다.

0005 $\sqrt[3]{0.008} = \sqrt[3]{0.2^3} = 0.2$

답 0.2

0006 $\sqrt[5]{(-3)^5} = -3$

답 -3

0007 $\sqrt[6]{(-1)^6} = \sqrt[6]{1^6} = 1$

답 1

0008 $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{2}{3}\right)^3} = -\frac{2}{3}$

답 $-\frac{2}{3}$

0009 ㄴ. n 이 홀수일 때, 음수 a 의 n 제곱근 중 실수는 $\sqrt[n]{a}$ 이다. (거짓)

ㄷ. n 이 짝수일 때, 음수 a 의 n 제곱근 중 실수인 것은 없다.

(거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

0010 $\{\sqrt[3]{(-2)^4}\}^3 = (\sqrt[3]{16})^3 = 16$

답 16

0011 $(\sqrt[8]{16})^2 = \sqrt[8]{16^2} = \sqrt[8]{(2^4)^2} = \sqrt[8]{2^8} = 2$

답 2

다른 풀이 $(\sqrt[8]{16})^2 = (\sqrt[8]{2^4})^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$

0012 $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4 \times 16} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

답 4

0013 $\sqrt[4]{\frac{80}{5}} = \sqrt[4]{\frac{16}{1}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

답 2

0014 $\sqrt[3]{\sqrt{729}} \times \sqrt{\sqrt{256}} = \sqrt[6]{729} \times \sqrt[4]{256} = \sqrt[6]{3^6} \times \sqrt[4]{4^4}$
 $= 3 \times 4 = 12$

답 12

0015 **답** 1

0016 **답** 1

0017 $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$

답 $\frac{1}{25}$

0018 $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{9}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{81}} = 81$

답 81

0019 **답** $\frac{1}{4}$

0020 **답** $\frac{4}{5}$

0021 $\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\left[-\frac{2}{3}\right]}$

답 $-\frac{2}{3}$

0022 $\frac{1}{\sqrt[6]{3^{-2}}} = \frac{1}{3^{-\frac{2}{6}}} = \frac{1}{3^{-\frac{1}{3}}} = 3^{\left[\frac{1}{3}\right]}$

답 $\frac{1}{3}$

0023 $(a^{\frac{3}{4}})^2 \times a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{2}} \times a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{2} + \frac{1}{4}} = a^{\frac{7}{4}}$

답 $a^{\frac{7}{4}}$

0024 $(a^3 b^2)^{\frac{1}{12}} \times (a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{4}})^4 = a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{6}} \times a^{\frac{4}{3}} b$
 $= a^{\frac{1}{4} + \frac{4}{3}} b^{\frac{1}{6} + 1}$
 $= a^{\frac{19}{12}} b^{\frac{7}{6}}$

답 $a^{\frac{19}{12}} b^{\frac{7}{6}}$

0025 $(\sqrt{a^3} \times \sqrt[5]{a} \times a^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = (a^{\frac{3}{2}} \times a^{\frac{1}{5}} \times a^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$
 $= (a^{\frac{3}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$
 $= (a^{\frac{6}{5}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{5}}$

답 $a^{\frac{2}{5}}$

0026 $(a^{-\frac{3}{4}})^2 \times \sqrt{a} \div a^{\frac{3}{4}} = a^{-\frac{3}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} \div a^{\frac{3}{4}}$
 $= a^{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}} = a^{-\frac{7}{4}}$

답 $a^{-\frac{7}{4}}$

0027 $(3^{\frac{4}{3}})^{\sqrt{25}} = 3^{\sqrt{100}} = 3^{10}$

답 3^{10}

0028 $8^{-\frac{\sqrt{3}}{6}} \times 2^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = (2^3)^{-\frac{\sqrt{3}}{6}} \times 2^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \times 2^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$
 $= 2^{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2^0 = 1$

답 1

0029 $2^{\sqrt{8}} \times 4^{\sqrt{18}} \div 4^{\sqrt{8}} = 2^{2\sqrt{2}} \times (2^2)^{3\sqrt{2}} \div (2^2)^{2\sqrt{2}}$
 $= 2^{2\sqrt{2}} \times 2^{6\sqrt{2}} \div 2^{4\sqrt{2}}$
 $= 2^{2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2}} = 2^{4\sqrt{2}}$

답 $2^{4\sqrt{2}}$

0030 $(4^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{\sqrt{2}}{3}})^{\sqrt{3}} = \{(2^2)^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{\sqrt{2}}{3}}\}^{\sqrt{3}} = (2^{\frac{2}{6}} \times 3^{\frac{\sqrt{2}}{3}})^{\sqrt{3}}$
 $= 2^{\sqrt{2}} \times 3^{\sqrt{2}} = (2 \times 3)^{\sqrt{2}}$
 $= 6^{\sqrt{2}}$

답 $6^{\sqrt{2}}$

0031 $(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}) = (x^{\frac{1}{2}})^2 - (y^{\frac{1}{2}})^2 = x - y$

답 $x - y$

0032 $(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=(x^{\frac{1}{3}})^3+(y^{\frac{1}{3}})^3=x+y$
답 $x+y$

유형 익히기

• 본책 008~013쪽

0033 ㄱ. 27의 세제곱근 중 실수인 것은 3이다. (거짓)
 ㄴ. $\sqrt{4}=2$ 의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{2}$ 이다. (거짓)
 ㄷ. $(-2)^4=16$ 의 네제곱근 중 실수인 것은 $-2, 2$ 이다. (참)
 ㄹ. $\sqrt{81}=9$ 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4=9$ 이므로
 $x^4-9=0, (x^2+3)(x^2-3)=0$
 $\therefore x=\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$
 따라서 $\sqrt{81}$ 의 네제곱근은 $-\sqrt{3}i, \sqrt{3}i, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$ 이다. (참)
 이상에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다. **답** ③

0034 -64 의 세제곱근 중 실수인 것은 -4 이므로
 $a=-4$
 $\sqrt{256}=16$ 의 네제곱근 중 음의 실수인 것은 -2 이므로
 $b=-2 \therefore ab=8$ **답** 8

0035 5의 제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt{5}, \sqrt{5}$ 의 2개이므로
 $f_2(5)=2$
 4의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{4}$ 의 1개이므로
 $f_3(4)=1$
 -3 의 네제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않으므로
 $f_4(-3)=0$
 $\therefore f_2(5)+f_3(4)+f_4(-3)=2+1+0=3$ **답** ②

RPM 비법 노트

n 이 2 이상의 자연수일 때, 실수 a 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수는 다음과 같다.

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n 이 짝수	2	1	0
n 이 홀수	1	1	1

0036 ① $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$
 ② $\sqrt[3]{2 \times 3 \sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{2 \times 3 \sqrt[3]{2^6}} = \sqrt[3]{2 \times 2^2} = \sqrt[3]{2^3} = 2$
 ③ $\frac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{(-3)^3}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$
 ④ $\left(\sqrt[3]{5} \times \frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^6 = (\sqrt[3]{5})^6 \times \left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)^6 = \sqrt[3]{5^6} \times \frac{1}{\sqrt[3]{5^6}}$
 $= 5^2 \times \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5}$
 ⑤ $\sqrt{2 \times 3 \sqrt[3]{4}} \div \sqrt[3]{4 \sqrt{2}} = \sqrt[3]{2^3 \times 4} \div \sqrt[3]{4^2 \times 2}$
 $= \sqrt[3]{2^5} \div \sqrt[3]{2^5} = 1$ **답** ④

0037 $a = \sqrt{32} \div \sqrt[4]{4} = \sqrt{32} \div \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{32} \div \sqrt{2}$
 $= \sqrt{16} = 4$
 $b = \sqrt[3]{\sqrt[4]{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$
 $\therefore \frac{a}{b} = 2$ **답** 2

0038 $\sqrt[12]{2a^5b^4} \times \sqrt[4]{2ab^2} \div \sqrt[6]{4a^3b} = \frac{\sqrt[12]{2a^5b^4} \times \sqrt[12]{2^3a^3b^6}}{\sqrt[12]{4^2a^6b^2}}$
 $= \sqrt[12]{\frac{16a^8b^{10}}{16a^6b^2}}$
 $= \sqrt[12]{a^2b^8}$
 $= \sqrt[6]{ab^4}$ **답** ③

0039 $\sqrt[3]{\frac{4\sqrt{a}}{5\sqrt{a}}} \div \sqrt[4]{\frac{3\sqrt{a}}{5\sqrt{a}}} \times \sqrt[5]{\frac{3\sqrt{a}}{4\sqrt{a}}} = \frac{\sqrt[3]{4\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{5\sqrt{a}}} \times \frac{\sqrt[4]{3\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{5\sqrt{a}}} \times \frac{\sqrt[5]{3\sqrt{a}}}{\sqrt[5]{4\sqrt{a}}}$
 $= \frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[15]{a}} \times \frac{\sqrt[20]{a}}{\sqrt[12]{a}} \times \frac{\sqrt[15]{a}}{\sqrt[20]{a}}$
 $= 1$ **답** 1

0040 $A = \sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt[4]{5}, B = \sqrt[3]{2}, C = \sqrt[3]{\sqrt{10}} = \sqrt[6]{10}$ 에서
 4, 3, 6의 최소공배수가 12이므로
 $A = \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$
 $B = \sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16}$
 $C = \sqrt[6]{10} = \sqrt[12]{10^2} = \sqrt[12]{100}$
 이때 $\sqrt[12]{16} < \sqrt[12]{100} < \sqrt[12]{125}$ 이므로
 $B < C < A$ **답** ④

다른 풀이 $A^{12} = (\sqrt{\sqrt{5}})^{12} = (\sqrt[4]{5})^{12} = \sqrt[4]{5^{12}} = 5^3 = 125$
 $B^{12} = (\sqrt[3]{2})^{12} = \sqrt[3]{2^{12}} = 2^4 = 16$
 $C^{12} = (\sqrt[3]{\sqrt{10}})^{12} = (\sqrt[6]{10})^{12} = \sqrt[6]{10^{12}} = 10^2 = 100$
 $16 < 100 < 125$ 이므로
 $B < C < A$

참고 $a > 0, b > 0$ 이고 k, m, n 이 2 이상의 자연수일 때
 $(\sqrt[m]{a})^k > (\sqrt[n]{b})^k \iff \sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{b}$

0041 $A = \sqrt[3]{\frac{1}{6}}, B = \sqrt{\frac{1}{5}}, C = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{17}}} = \sqrt[6]{\frac{1}{17}}$ 에서
 3, 2, 6의 최소공배수가 6이므로
 $A = \sqrt[3]{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt[6]{\frac{1}{36}}$
 $B = \sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{5}\right)^3} = \sqrt[6]{\frac{1}{125}}$
 $C = \sqrt[6]{\frac{1}{17}}$
 이때 $\sqrt[6]{\frac{1}{125}} < \sqrt[6]{\frac{1}{36}} < \sqrt[6]{\frac{1}{17}}$ 이므로
 $B < A < C$ **답** ②

0042 $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[3]{\sqrt{7}} = \sqrt[6]{7}$ 에서 2, 3, 4, 6의 최소공배수가 12이므로

$$\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}$$

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$$

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$$

$$\sqrt[6]{7} = \sqrt[12]{7^2} = \sqrt[12]{49}$$

$$\therefore \sqrt[12]{49} < \sqrt[12]{64} < \sqrt[12]{81} < \sqrt[12]{125} \quad \dots \text{1단계}$$

따라서 가장 큰 수는 $\sqrt[12]{125}$, 가장 작은 수는 $\sqrt[12]{49}$ 이므로

$$a = \sqrt[12]{125}, b = \sqrt[12]{49} \quad \dots \text{2단계}$$

$$\therefore a^{12} + b^{12} = (\sqrt[12]{125})^{12} + (\sqrt[12]{49})^{12} = 125 + 49 = 174 \quad \dots \text{3단계}$$

답 174

	채점 요소	비율
1단계	주어진 네 수를 $\sqrt[12]{k}$ 의 꼴로 나타내어 네 수의 대소 관계 판정하기	50 %
2단계	a, b 의 값 구하기	30 %
3단계	$a^{12} + b^{12}$ 의 값 구하기	20 %

0043 $A - B = (3^3\sqrt{5} - \sqrt{3}) - (4^3\sqrt{5} - 2\sqrt{3})$
 $= -^3\sqrt{5} + \sqrt{3} = -^6\sqrt{25} + ^6\sqrt{27} > 0$

$$\therefore A > B$$

$$B - C = (4^3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}) - (5^3\sqrt{5} - 3\sqrt{3})$$

$$= -^3\sqrt{5} + \sqrt{3} = -^6\sqrt{25} + ^6\sqrt{27} > 0$$

$$\therefore B > C$$

$$\therefore C < B < A$$

답 ⑤

RPM비법노트

두 수 또는 두 식의 대소 관계

(1) $A - B$ 의 부호를 조사한다.

$$\Leftrightarrow A - B > 0 \Leftrightarrow A > B$$

(2) $A^2 - B^2$ 의 부호를 조사한다.

$$\Leftrightarrow A > 0, B > 0 \text{ 일 때, } A^2 - B^2 > 0 \Leftrightarrow A > B$$

(3) $\frac{A}{B}$ 와 1의 대소 관계를 조사한다.

$$\Leftrightarrow A > 0, B > 0 \text{ 일 때, } \frac{A}{B} > 1 \Leftrightarrow A > B$$

0044 $\frac{2^{-3} + 4^{-1}}{6} = \frac{2^{-3} + (2^2)^{-1}}{6} = \frac{2^{-3} + 2^{-2}}{6}$
 $= \frac{2^{-3}(1+2)}{6} = \frac{2^{-3}}{2} = 2^{-4}$

$$\frac{10}{3^4 + 27^2} = \frac{10}{3^4 + (3^3)^2} = \frac{10}{3^4 + 3^6}$$

$$= \frac{10}{3^4(1+3^2)} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = 2^{-4} \times 3^{-4} = (2 \times 3)^{-4} = 6^{-4} \quad \text{답 ③}$$

0045 $a^{-8} \times (a^{-3})^{-2} \div a^{-5} = a^{-8} \times a^6 \div a^{-5}$
 $= a^{-8+6-(-5)} = a^3$

$$\therefore k = 3$$

답 3

0046 $(3^{-3} \div 27^{-2})^{-4} \div 9^{-5} = \{3^{-3} \div (3^3)^{-2}\}^{-4} \div (3^2)^{-5}$
 $= (3^{-3} \div 3^{-6})^{-4} \div 3^{-10}$
 $= (3^3)^{-4} \div 3^{-10}$
 $= 3^{-12} \div 3^{-10} = 3^{-2}$

답 ①

0047 $\sqrt{\frac{2+2^3}{5^{-1}+5^{-3}}} \times \sqrt{\frac{5+5^3}{2^{-1}+2^{-3}}}$
 $= \sqrt{\frac{2+2^3}{5^{-1}+5^{-3}}} \times \frac{5+5^3}{2^{-1}+2^{-3}}$
 $= \sqrt{\frac{2^4(2^{-3}+2^{-1})}{5^{-1}+5^{-3}}} \times \frac{5^4(5^{-3}+5^{-1})}{2^{-1}+2^{-3}}$
 $= \sqrt{2^4 \times 5^4} = \sqrt{10^4} = 10^2 = 100$

답 100

0048 $\left\{\left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}} \times \left\{\left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{1}{6}}\right\}^4$
 $= \left[\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^2\right\}^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{2}{3}} \times \left[\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^3\right\}^{-\frac{1}{6}}\right]^4$
 $= \frac{3}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{1-2}$
 $= \left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{3}$

답 $\frac{5}{3}$

0049 (주어진 식) $= a^8 \div a^{2\sqrt{3}} \div (a^{5-2-\sqrt{3}})^2$
 $= a^{8-2\sqrt{3}} \div a^{6-2\sqrt{3}}$
 $= a^{8-2\sqrt{3}-6+2\sqrt{3}}$
 $= a^2$

$$\therefore k = 2$$

답 2

0050 $(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \times (a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{3}{4}})^{-1}$
 $= a^{-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{4}} \times a^{-\frac{4}{3}}b^{\frac{3}{4}}$
 $= a^{-\frac{1}{6}-\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = a^{-\frac{3}{2}}b$
 $= \frac{b}{a\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a^2}$

답 ②

0051 $\left(\frac{1}{2^{12}}\right)^{\frac{1}{n}} = (2^{-12})^{\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{12}{n}}$... 1단계

이때 $2^{-\frac{12}{n}}$ 이 정수이려면 $-\frac{12}{n}$ 가 음이 아닌 정수이어야 한다.

... 2단계

따라서 정수 n 은 $-1, -2, -3, -4, -6, -12$ 의 6개이다.

... 3단계

답 6

	채점 요소	비율
1단계	$\left(\frac{1}{2^{12}}\right)^{\frac{1}{n}}$ 을 지수법칙을 이용하여 간단히 하기	30 %
2단계	$\left(\frac{1}{2^{12}}\right)^{\frac{1}{n}}$ 이 정수가 되도록 하는 조건 구하기	40 %
3단계	정수 n 의 개수 구하기	30 %

$$\begin{aligned}
 0052 \quad \sqrt[4]{a^3} \times \sqrt{a\sqrt{a}\sqrt{a}} &= \sqrt[8]{a^3} \times \sqrt{a} \times \sqrt{\sqrt{a}} \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}} \\
 &= \sqrt[8]{a^3} \times \sqrt{a} \times \sqrt[4]{a} \times \sqrt[8]{a} \\
 &= a^{\frac{3}{8}} \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{8}} \\
 &= a^{\frac{3}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} \\
 &= a^{\frac{5}{4}}
 \end{aligned}$$

답 ④

다른 풀이 $\sqrt[4]{a^3} \times \sqrt{a\sqrt{a}\sqrt{a}}$

$$\begin{aligned}
 &= (a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}} \times \{a \times (a \times a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}} \\
 &= a^{\frac{3}{8}} \times \{a \times (a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{8}} \times (a \times a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}} \\
 &= a^{\frac{3}{8}} \times (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{8}} \times a^{\frac{7}{8}} = a^{\frac{5}{4}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0053 \quad \sqrt{2 \times 3 \sqrt{2 \times 4 \sqrt{2}}} &= \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{2} \\
 &= \sqrt{2} \times \sqrt[6]{2} \times \sqrt[24]{2} \\
 &= 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{1}{24}} \\
 &= 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}} = 2^{\frac{17}{24}}
 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{17}{24} = \frac{n}{24}$ 이므로 $n=17$

답 17

$$\begin{aligned}
 0054 \quad \sqrt{a^2 \times \sqrt{a \times 3 \sqrt{a^4}}} &= \sqrt{a^2} \times \sqrt{\sqrt{a}} \times \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^4}} \\
 &= \sqrt{a^2} \times \sqrt[4]{a} \times \sqrt[12]{a^4} \\
 &= a \times a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{3}} \\
 &= a^{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = a^{\frac{19}{12}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{a^n}}{\sqrt{a^5}}} &= \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^n}}}{\sqrt[3]{\sqrt{a^5}}} = \frac{\sqrt[12]{a^n}}{\sqrt[6]{a^5}} = \frac{a^{\frac{n}{12}}}{a^{\frac{5}{6}}} \\
 &= a^{\frac{n}{12} - \frac{5}{6}} = a^{\frac{n-10}{12}}
 \end{aligned}$$

따라서 $a^{\frac{19}{12}} = a^{\frac{n-10}{12}}$ 이므로

$$19 = n - 10 \quad \therefore n = 29$$

답 29

$$\begin{aligned}
 0055 \quad A &= \sqrt[3]{4\sqrt{4} \times \frac{4}{\sqrt[4]{4}}} = (4 \times 4^{\frac{1}{2}} \times 4 \div 4^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} \\
 &= (4^{1 + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} = (4^{\frac{9}{4}})^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{3}{4}} \\
 &= (2^2)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

따라서 $A^n = (2^{\frac{3}{2}})^n = 2^{\frac{3}{2}n}$ 이 정수가 되려면 $\frac{3}{2}n$ 이 음이 아닌 정수이어야 하므로 자연수 n 의 최솟값은 2이다.

답 2

$$\begin{aligned}
 0056 \quad 5^8 &= a, 8^6 = b \text{에서 } 5 = a^{\frac{1}{8}}, 8 = b^{\frac{1}{6}} \text{이므로} \\
 200^{10} &= (5^2 \times 8)^{10} = 5^{20} \times 8^{10} \\
 &= (a^{\frac{1}{8}})^{20} \times (b^{\frac{1}{6}})^{10} = a^{\frac{5}{2}} b^{\frac{5}{3}}
 \end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned}
 0057 \quad a &= 25^2 = (5^2)^2 = 5^4 \text{에서 } 5 = a^{\frac{1}{4}} \text{이므로} \\
 125^3 &= (5^3)^3 = 5^9 = (a^{\frac{1}{4}})^9 = a^{\frac{9}{4}} \\
 \therefore k &= \frac{9}{4}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{9}{4}$

$$0058 \quad a = \sqrt[3]{2}, b = \sqrt[4]{3} \text{에서 } 2 = a^3, 3 = b^4 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt[12]{6^7} &= 6^{\frac{7}{12}} = (2 \times 3)^{\frac{7}{12}} \\
 &= (a^3 b^4)^{\frac{7}{12}} = a^{\frac{7}{4}} b^{\frac{7}{3}}
 \end{aligned}$$

답 ①

$$0059 \quad a^4 = 2, b^{10} = 8 \text{에서 } a = 2^{\frac{1}{4}}, b = 8^{\frac{1}{10}} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 (\sqrt[6]{a^2 b^5})^k &= (a^2 b^5)^{\frac{k}{6}} = \{(2^{\frac{1}{4}})^2 \times (8^{\frac{1}{10}})^5\}^{\frac{k}{6}} \\
 &= (2^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{2}})^{\frac{k}{6}} = \{2^{\frac{1}{2}} \times (2^3)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{k}{6}} \\
 &= (2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{3}{2}})^{\frac{k}{6}} = (2^2)^{\frac{k}{6}} \\
 &= 2^{\frac{k}{3}}
 \end{aligned}$$

따라서 $(\sqrt[6]{a^2 b^5})^k$, 즉 $2^{\frac{k}{3}}$ 이 자연수가 되려면 $\frac{k}{3}$ 가 음이 아닌 정수이어야 하므로 자연수 k 의 최솟값은 3이다.

답 3

$$0060 \quad (a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$$

$$\begin{aligned}
 &= \{(a^{\frac{1}{4}})^2 - (b^{\frac{1}{4}})^2\}(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) \\
 &= (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) \\
 &= (a^{\frac{1}{2}})^2 - (b^{\frac{1}{2}})^2 = a - b
 \end{aligned}$$

답 $a-b$

$$0061 \quad (x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{2}{3}})^3 + (x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{2}{3}})^3$$

$$\begin{aligned}
 &= \{(x^{\frac{1}{3}})^3 + 3(x^{\frac{1}{3}})^2 x^{-\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}}(x^{-\frac{2}{3}})^2 + (x^{-\frac{2}{3}})^3\} \\
 &\quad + \{(x^{\frac{1}{3}})^3 - 3(x^{\frac{1}{3}})^2 x^{-\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}}(x^{-\frac{2}{3}})^2 - (x^{-\frac{2}{3}})^3\} \\
 &= (x + 3 + 3x^{-1} + x^{-2}) + (x - 3 + 3x^{-1} - x^{-2}) \\
 &= 2(x + 3x^{-1}) = 2\left(x + \frac{3}{x}\right)
 \end{aligned}$$

$x=2$ 를 대입하면

$$2\left(2 + \frac{3}{2}\right) = 7$$

답 7

$$0062 \quad \frac{1}{1-3^{\frac{1}{8}}} + \frac{1}{1+3^{\frac{1}{8}}} + \frac{2}{1+3^{\frac{1}{4}}} + \frac{4}{1+3^{\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1+3^{\frac{1}{8}}+1-3^{\frac{1}{8}}}{(1-3^{\frac{1}{8}})(1+3^{\frac{1}{8}})} + \frac{2}{1+3^{\frac{1}{4}}} + \frac{4}{1+3^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{2}{1-3^{\frac{1}{4}}} + \frac{2}{1+3^{\frac{1}{4}}} + \frac{4}{1+3^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{2(1+3^{\frac{1}{4}})+2(1-3^{\frac{1}{4}})}{(1-3^{\frac{1}{4}})(1+3^{\frac{1}{4}})} + \frac{4}{1+3^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{4}{1-3^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{1+3^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{4(1+3^{\frac{1}{2}})+4(1-3^{\frac{1}{2}})}{(1-3^{\frac{1}{2}})(1+3^{\frac{1}{2}})} \\
 &= \frac{8}{1-3} = -4
 \end{aligned}$$

답 ②

$$0063 \quad \neg. (a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}) = (a^{\frac{1}{4}})^2 - (b^{\frac{1}{4}})^2$$

$$\begin{aligned}
 &= a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \\
 &= \sqrt{a} - \sqrt{b} \quad (\text{참})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } & (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} + 1)(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} - 1) \\ &= (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 - 1^2 \\ &= (a^{\frac{1}{2}})^2 + 2a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}} + (a^{-\frac{1}{2}})^2 - 1^2 \\ &= a + 2 + a^{-1} - 1 = a + \frac{1}{a} + 1 \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } & (a+b^{-1}) \div (a^{\frac{1}{3}} + b^{-\frac{1}{3}}) \\ &= \{(a^{\frac{1}{3}})^3 + (b^{-\frac{1}{3}})^3\} \div (a^{\frac{1}{3}} + b^{-\frac{1}{3}}) \\ &= (a^{\frac{1}{3}} + b^{-\frac{1}{3}}) \{(a^{\frac{1}{3}})^2 - a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}} + (b^{-\frac{1}{3}})^2\} \div (a^{\frac{1}{3}} + b^{-\frac{1}{3}}) \\ &= a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}} + b^{-\frac{2}{3}} \quad (\text{거짓}) \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

0064 $a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{5}$ 의 양변을 세제곱하면

$$\begin{aligned} a + a^{-1} + 3(a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}) &= 5\sqrt{5} \\ \therefore a + a^{-1} &= 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

답 ⑤

0065 $5^x + 5^{1-x} = 8$ 의 양변을 제곱하면

$$\begin{aligned} 5^{2x} + 2 \times 5^x \times 5^{1-x} + 5^{2(1-x)} &= 64 \\ (5^2)^x + 2 \times 5 + (5^2)^{1-x} &= 64 \\ 25^x + 10 + 25^{1-x} &= 64 \\ \therefore 25^x + 25^{1-x} &= 54 \end{aligned}$$

답 54

다른 풀이 $5^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $5^{1-x} = \frac{5}{t}$ 이므로

$$\begin{aligned} 25^x + 25^{1-x} &= (5^x)^2 + (5^{1-x})^2 = t^2 + \frac{25}{t^2} \\ &= \left(t + \frac{5}{t}\right)^2 - 2 \times 5 = 8^2 - 10 = 54 \end{aligned}$$

0066 $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 3$ 의 양변을 제곱하면

$$x + 2 + \frac{1}{x} = 9, \quad x + \frac{1}{x} = 7$$

$$\therefore x + x^{-1} = 7 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

⑦의 양변을 제곱하면 $x^2 + 2 + x^{-2} = 49$

$$\therefore x^2 + x^{-2} = 47$$

$$\therefore \frac{x^2 + x^{-2} + 7}{x + x^{-1} + 2} = \frac{47 + 7}{7 + 2} = 6$$

... ①단계

... ②단계

... ③단계

답 6

	채점 요소	비율
①단계	$x + x^{-1}$ 의 값 구하기	40 %
②단계	$x^2 + x^{-2}$ 의 값 구하기	40 %
③단계	$\frac{x^2 + x^{-2} + 7}{x + x^{-1} + 2}$ 의 값 구하기	20 %

0067 $x = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}$ 의 양변을 세제곱하면

$$x^3 = 3 - \frac{1}{3} - 3(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}})$$

$$x^3 = \frac{8}{3} - 3x \quad \therefore 3x^3 + 9x = 8$$

$$\therefore 3x^3 + 9x - 10 = 8 - 10 = -2$$

답 ④

0068 $\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ 의 분모, 분자에 각각 a^x 을 곱하면

$$\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{a^x(a^x - a^{-x})}{a^x(a^x + a^{-x})} = \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1}$$

$$= \frac{10 - 1}{10 + 1} = \frac{9}{11}$$

답 $\frac{9}{11}$

다른 풀이 $\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{a^{-x}(a^{2x} - 1)}{a^{-x}(a^{2x} + 1)} = \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1}$

$$= \frac{10 - 1}{10 + 1} = \frac{9}{11}$$

0069 $\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}}$ 의 분모, 분자에 각각 a^x 을 곱하면

$$\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = \frac{a^x(a^x + a^{-x})}{a^x(a^x - a^{-x})} = \frac{a^{2x} + 1}{a^{2x} - 1}$$

$$\text{즉 } \frac{a^{2x} + 1}{a^{2x} - 1} = 3 \text{ 이므로}$$

$$a^{2x} + 1 = 3(a^{2x} - 1), \quad 2a^{2x} = 4$$

$$\therefore a^{2x} = 2$$

답 2

0070 $\frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$ 의 분모, 분자에 각각 3^x 을 곱하면

$$\frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = \frac{3^x(3^x - 3^{-x})}{3^x(3^x + 3^{-x})} = \frac{3^{2x} - 1}{3^{2x} + 1} = \frac{9^x - 1}{9^x + 1}$$

$$\text{즉 } \frac{9^x - 1}{9^x + 1} = \frac{1}{3} \text{ 이므로}$$

$$3(9^x - 1) = 9^x + 1, \quad 2 \times 9^x = 4$$

$$\therefore 9^x = 2$$

$$\therefore 9^x - 9^{-x} = 9^x - (9^x)^{-1} = 2 - 2^{-1}$$

$$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

답 ④

0071 $3^{\frac{1}{x}} = 4$ 에서 $4^x = 3$

$$\therefore 2^{2x} = 3$$

$\frac{8^x + 8^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$ 의 분모, 분자에 각각 2^x 을 곱하면

$$\frac{8^x + 8^{-x}}{2^x - 2^{-x}} = \frac{2^x(2^{3x} + 2^{-3x})}{2^x(2^x - 2^{-x})} = \frac{2^{4x} + 2^{-2x}}{2^{2x} - 1}$$

$$= \frac{(2^{2x})^2 + (2^{2x})^{-1}}{2^{2x} - 1} = \frac{3^2 + \frac{1}{3}}{3 - 1}$$

$$= \frac{14}{3}$$

답 $\frac{14}{3}$

0072 $a^x = 16$ 에서 $a = 16^{\frac{1}{x}} = (2^4)^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{4}{x}}$ ㉠

$b^y = 16$ 에서 $b = 16^{\frac{1}{y}} = (2^4)^{\frac{1}{y}} = 2^{\frac{4}{y}}$ ㉡

㉠ $\times$ ㉡을 하면 $ab = 2^{\frac{4}{x}} \times 2^{\frac{4}{y}} = 2^{\frac{4}{x} + \frac{4}{y}} = 2^{4(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})}$

이때 $ab = 8 = 2^3$ 이므로 $4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 3$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

0073 $2^x=a$ 에서 $2=a^{\frac{1}{x}}$ ㉠
 $3^y=a$ 에서 $3=a^{\frac{1}{y}}$ ㉡
 $5^z=a$ 에서 $5=a^{\frac{1}{z}}$ ㉢
 ㉠×㉡×㉢을 하면
 $30=a^{\frac{1}{x}} \times a^{\frac{1}{y}} \times a^{\frac{1}{z}}=a^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$
 이때 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$ 이므로
 $a^2=30 \quad \therefore a=\sqrt{30} \quad (\because a>0)$ **답 ⑤**

0074 $a^x=27$ 에서 $a=27^{\frac{1}{x}}=(3^3)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{3}{x}}$
 $\therefore a^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{1}{x}}$ ㉠
 $30^y=3$ 에서 $30=3^{\frac{1}{y}}$ ㉡
 $5^z=9$ 에서 $5=9^{\frac{1}{z}}=(3^2)^{\frac{1}{z}}=3^{\frac{2}{z}}$ ㉢
 ㉠÷㉡×㉢을 하면
 $a^{\frac{1}{3}} \div 30 \times 5 = 3^{\frac{1}{x}} \div 3^{\frac{1}{y}} \times 3^{\frac{2}{z}}$
 $\therefore \frac{\sqrt[3]{a}}{6} = 3^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{2}{z}}$
 이때 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{2}{z}=-1$ 이므로
 $\frac{\sqrt[3]{a}}{6}=3^{-1}, \quad \sqrt[3]{a}=2$
 $\therefore a=8$ **답 8**

0075 $8^x=9^y=12^z=k \quad (k>0)$ 라 하면 $xyz \neq 0$ 에서
 $k \neq 1$
 $8^x=k$ 에서 $8=k^{\frac{1}{x}}$
 $9^y=k$ 에서 $9=k^{\frac{1}{y}}$
 $12^z=k$ 에서 $12=k^{\frac{1}{z}}$
 이때 $\frac{a}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$ 이므로 $k^{\frac{a}{x}+\frac{1}{y}}=k^{\frac{2}{z}}$
 $k^{\frac{a}{x}} \times k^{\frac{1}{y}}=k^{\frac{2}{z}}, \quad 8^a \times 9=12^2$
 $8^a=16 \quad \therefore 2^{3a}=2^4$
 따라서 $3a=4$ 이므로
 $a=\frac{4}{3}$ **답 ④**

0076 1회 확대 복사할 때마다 글자 크기가 r 배 커진다고 하면
 5회째의 복사본의 글자 크기는 처음 원본의 글자 크기의 2배이므로
 $r^5=2 \quad \therefore r=2^{\frac{1}{5}}$
 이때 8회째의 복사본의 글자 크기는 4회째의 복사본의 글자 크기의 r^4 배이고
 $r^4=(2^{\frac{1}{5}})^4=2^{\frac{4}{5}}$
 이므로 $m=5, n=4$
 $\therefore m+n=9$ **답 9**

0077 A 지역에서 $H_1=5, H_2=25, V_1=4, V_2=40$ 이므로
 $\frac{40}{4}=\left(\frac{25}{5}\right)^{\frac{2}{2-k}} \quad \therefore 5^{\frac{2}{2-k}}=10$
 B 지역에서 $H_1=4, H_2=100, V_1=a, V_2=b$ 이므로
 $\frac{b}{a}=\left(\frac{100}{4}\right)^{\frac{2}{2-k}}=25^{\frac{2}{2-k}}$
 $=\left(5^2\right)^{\frac{2}{2-k}}=\left(5^{\frac{2}{2-k}}\right)^2$
 $=10^2=100$ **답 100**

0078 1년마다 인구 수가 r 배 증가한다고 하면 2000년 말부터
 2020년 말까지 20년 동안 인구 수는 r^{20} 배 증가하므로
 $r^{20}=676 \div 4=169$
 이때 2000년 말부터 2010년 말까지 10년 동안 인구 수는 r^{10} 배
 증가하고
 $r^{10}=(r^{20})^{\frac{1}{2}}=169^{\frac{1}{2}}=13$
 이므로 2010년 말의 인구는
 $4 \times 13=52$ (만 명) **답 52만 명**

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 014~017쪽

0079 -27의 세제곱근 중 실수인 것은 -3의 1개이므로
 $a=1$
 10의 네제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt[4]{10}, \sqrt[4]{10}$ 의 2개이므로
 $b=2$
 $\therefore a+b=3$ **답 ④**

0080 ① $(-2)^2=4$ 의 제곱근은 -2, 2이다.
 ② 제곱근 9는 $\sqrt{9}=3$ 이다.
 ③ -125의 세제곱근 중 실수인 것은 -5의 1개이다.
 ④ 20의 네제곱근은 4개이다.
 ⑤ n 이 짝수일 때, -36의 n 제곱근 중 실수인 것은 없다.
답 ③

0081 (i) $-n^2+8n-15>0$ 일 때
 n 이 짝수이면 $-n^2+8n-15$ 의 n 제곱근 중에서 음의 실수가
 존재한다.
 $n^2-8n+15<0$ 에서 $(n-3)(n-5)<0$
 $\therefore 3<n<5$
 이때 n 이 짝수이어야 하므로
 $n=4$

(ii) $-n^2+8n-15=0$ 일 때

$-n^2+8n-15$ 의 n 제곱근은 항상 0이므로 음의 실수가 존재하지 않는다.

(iii) $-n^2+8n-15<0$ 일 때

n 이 홀수이면 $-n^2+8n-15$ 의 n 제곱근 중에서 음의 실수가 존재한다.

$n^2-8n+15>0$ 에서 $(n-3)(n-5)>0$

$\therefore n<3$ 또는 $n>5$

이때 $2\leq n\leq 8$ 이고 n 이 홀수이어야 하므로

$n=7$

이상에서 $n=4$ 또는 $n=7$

따라서 모든 n 의 값의 합은

$4+7=11$

답 11

RPM비법노트

실수 a 의 n 제곱근 중에서 음의 실수가 존재할 조건

2 이상의 자연수 n 에 대하여 실수 a 의 n 제곱근 중 음의 실수가 존재하려면 a 가 양수이고 n 이 짝수이거나 a 가 음수이고 n 이 홀수이어야 한다.

0082 $\sqrt[3]{-27} + \sqrt[4]{\frac{48}{3}} + \sqrt[4]{256} = \sqrt[3]{(-3)^3} + \sqrt[4]{\frac{48}{3}} + \sqrt[4]{256}$
 $= -3 + \sqrt[4]{2^4} + \sqrt[4]{2^8}$
 $= -3 + 2 + 2 = 1$

답 ③

0083 $(\sqrt[6]{9} - \sqrt[3]{24} + \sqrt[4]{16} \times \sqrt[9]{27})^6$
 $= (\sqrt[6]{3^2} - \sqrt[3]{2^3 \times 3} + \sqrt[4]{2^4} \times \sqrt[9]{3^3})^6$
 $= (\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{3})^6$
 $= (\sqrt[3]{3})^6 = 3\sqrt[3]{3^6}$
 $= 3^2 = 9$

답 ②

0084 $\sqrt[6]{8a^3b^3} \times \sqrt[16]{256a^6b^4} \div \sqrt[4]{ab}$
 $= \sqrt[6]{2^3a^3b^3} \times \sqrt[16]{2^8a^6b^4} \div \sqrt[4]{2^2ab}$
 $= \sqrt[4]{2ab} \times \sqrt[8]{2^4a^3b^2} \div \sqrt[4]{2^2ab}$
 $= \frac{\sqrt[8]{2^4a^4b^4} \times \sqrt[8]{2^4a^3b^2}}{\sqrt[8]{2^8a^4b^4}}$
 $= \sqrt[8]{\frac{2^8a^7b^6}{2^8a^4b^4}}$
 $= \sqrt[8]{a^3b^2}$

답 ④

다른 풀이 $\sqrt[6]{8a^3b^3} \times \sqrt[16]{256a^6b^4} \div \sqrt[4]{ab}$
 $= (2^3a^3b^3)^{\frac{1}{6}} \times (2^8a^6b^4)^{\frac{1}{16}} \div (2^2ab)^{\frac{1}{4}}$
 $= 2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{8}}b^{\frac{1}{4}} \div 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$
 $= 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1}a^{\frac{1}{2}+\frac{3}{8}-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}$
 $= a^{\frac{3}{8}}b^{\frac{1}{4}} = (a^3b^2)^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{a^3b^2}$

008 정답 및 풀이

0085 ① $\sqrt[3]{\sqrt[3]{30}} = \sqrt[6]{30}$

② $\sqrt[6]{6 \times \sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{6^3 \times \sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{1080} = \sqrt[6]{1080}$

③ $\sqrt[6]{5 \times \sqrt[3]{6}} = \sqrt[6]{5^3 \times \sqrt[3]{6}} = \sqrt[6]{750} = \sqrt[6]{750}$

④ $\sqrt[6]{5\sqrt[3]{6}} = \sqrt[6]{5^3 \times \sqrt[3]{6}} = \sqrt[6]{150} = \sqrt[6]{150}$

⑤ $\sqrt[6]{6\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{6^3 \times \sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{180} = \sqrt[6]{180}$

이때 $\sqrt[6]{30} < \sqrt[6]{150} < \sqrt[6]{180} < \sqrt[6]{750} < \sqrt[6]{1080}$ 이므로

$\sqrt[3]{\sqrt[3]{30}} < \sqrt[3]{5\sqrt[3]{6}} < \sqrt[3]{6\sqrt[3]{5}} < \sqrt[6]{5 \times \sqrt[3]{6}} < \sqrt[6]{6 \times \sqrt[3]{5}}$

따라서 가장 큰 수는 ②이다.

답 ②

0086 $\frac{1}{2^{-4}+1} + \frac{1}{2^{-2}+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^4+1}$
 $= \frac{2^4}{2^4(2^{-4}+1)} + \frac{2^2}{2^2(2^{-2}+1)} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^4+1}$
 $= \frac{2^4}{1+2^4} + \frac{2^2}{1+2^2} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^4+1}$
 $= \frac{2^4+1}{2^4+1} + \frac{2^2+1}{2^2+1}$
 $= 1+1$
 $= 2$

답 ④

다른 풀이 $\frac{1}{2^{-4}+1} + \frac{1}{2^{-2}+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^4+1}$
 $= \left(\frac{1}{2^{-4}+1} + \frac{1}{2^4+1}\right) + \left(\frac{1}{2^{-2}+1} + \frac{1}{2^2+1}\right)$
 $= \frac{2^4+1+2^{-4}+1}{(2^{-4}+1)(2^4+1)} + \frac{2^2+1+2^{-2}+1}{(2^{-2}+1)(2^2+1)}$
 $= \frac{2^4+2^{-4}+2}{1+2^{-4}+2^4+1} + \frac{2^2+2^{-2}+2}{1+2^{-2}+2^2+1}$
 $= 1+1$
 $= 2$

0087 $\frac{a^5+a^4+a^3+a^2+a}{a^{-9}+a^{-8}+a^{-7}+a^{-6}+a^{-5}}$
 $= \frac{a^5+a^4+a^3+a^2+a}{a^{-10}(a+a^2+a^3+a^4+a^5)}$
 $= \frac{1}{a^{-10}} = a^{10}$

이때 $a^5=7$ 이므로

$a^{10} = (a^5)^2 = 7^2 = 49$

답 49

0088 $18^{\frac{3}{2}} \times 24^{\frac{2}{3}} \div 9^{-\frac{3}{4}} = (2 \times 3^2)^{\frac{3}{2}} \times (2^3 \times 3)^{\frac{2}{3}} \div (3^2)^{-\frac{3}{4}}$
 $= 2^{\frac{3}{2}} \times 3^3 \times 2^2 \times 3^{\frac{2}{3}} \div 3^{-\frac{3}{2}}$
 $= 2^{\frac{3}{2}+2} \times 3^{3+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}$
 $= 2^{\frac{7}{2}} \times 3^{\frac{31}{6}}$

따라서 $x = \frac{7}{2}$, $y = \frac{31}{6}$ 이므로

$x+y = \frac{26}{3}$

답 $\frac{26}{3}$

$$\begin{aligned}
 & \text{0089 } \sqrt{\sqrt{a} \times \frac{a}{\sqrt[3]{a}}} \div \frac{\sqrt{\sqrt{a} \times \sqrt[3]{a}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}} \\
 &= (a^{\frac{1}{2}} \times a \div a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} \div \frac{(a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}}{(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}} \\
 &= (a^{\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} \div \frac{a^{\frac{5}{12}}}{a^{\frac{1}{6}}} \\
 &= (a^{\frac{7}{6}})^{\frac{1}{2}} \div a^{\frac{5}{12}-\frac{1}{6}} \\
 &= a^{\frac{7}{12}} \div a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{7}{12}-\frac{1}{4}} \\
 &= a^{\frac{1}{3}}
 \end{aligned}$$

$$\therefore m = \frac{1}{3} \quad \text{답 } \frac{1}{3}$$

$$\text{0090 } (\sqrt[n]{a})^3 = (a^{\frac{1}{n}})^3 = a^{\frac{3}{n}}$$

(i) $a=4$ 일 때, $4^{\frac{3}{n}} = (2^2)^{\frac{3}{n}} = 2^{\frac{6}{n}}$
 $2^{\frac{6}{n}}$ 이 자연수가 되려면 $\frac{6}{n}$ 이 음이 아닌 정수이어야 하므로 n 의 최댓값은 6이다.

$$\therefore f(4) = 6$$

$$(ii) a=27\text{일 때, } 27^{\frac{3}{n}} = (3^3)^{\frac{3}{n}} = 3^{\frac{9}{n}}$$

$3^{\frac{9}{n}}$ 이 자연수가 되려면 $\frac{9}{n}$ 가 음이 아닌 정수이어야 하므로 n 의 최댓값은 9이다.

$$\therefore f(27) = 9$$

$$(i), (ii)\text{에서 } f(4) + f(27) = 6 + 9 = 15 \quad \text{답 } ③$$

$$\text{0091 } a = \sqrt{2}, b = \sqrt[3]{3}\text{에서 } 2 = a^2, 3 = b^3\text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 {}^{12}\sqrt{12} &= 12^{\frac{1}{12}} = (2^2 \times 3)^{\frac{1}{12}} = \{(a^2)^2 b^3\}^{\frac{1}{12}} \\
 &= (a^4 b^3)^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{4}} \quad \text{답 } ③
 \end{aligned}$$

$$\text{0092 } (1+3^2)(1+3)(1+3^{\frac{1}{2}})(1+3^{\frac{1}{4}})(1+3^{\frac{1}{8}})(1-3^{\frac{1}{8}})$$

$$= (1+3^2)(1+3)(1+3^{\frac{1}{2}})(1+3^{\frac{1}{4}})(1-3^{\frac{1}{4}})$$

$$= (1+3^2)(1+3)(1+3^{\frac{1}{2}})(1-3^{\frac{1}{2}})$$

$$= (1+3^2)(1+3)(1-3)$$

$$= (1+3^2)(1-3^2)$$

$$= 1-3^4 = 1-81 = -80 \quad \text{답 } -80$$

$$\begin{aligned}
 \text{0093 } \frac{a^{-1}-\beta^{-1}}{a^{-2}-\beta^{-2}} &= \frac{a^{-1}-\beta^{-1}}{(a^{-1}+\beta^{-1})(a^{-1}-\beta^{-1})} \\
 &= \frac{1}{a^{-1}+\beta^{-1}} = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}} \\
 &= \frac{a\beta}{a+\beta}
 \end{aligned}$$

이때 이차방정식 $x^2+2kx+6=0$ 의 두 근이 a, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+\beta = -2k, a\beta = 6$$

$$\therefore \frac{a^{-1}-\beta^{-1}}{a^{-2}-\beta^{-2}} = \frac{a\beta}{a+\beta} = \frac{6}{-2k} = -\frac{3}{k}$$

따라서 $-\frac{3}{k} = \frac{4}{25}$ 이므로

$$k = -\frac{75}{4} \quad \text{답 } -\frac{75}{4}$$

$$\text{0094 } 2^{\frac{a}{2}} - 2^{-\frac{b}{2}} = 5\text{의 양변을 제곱하면}$$

$$2^a - 2 \times 2^{\frac{a}{2}} \times 2^{-\frac{b}{2}} + 2^{-b} = 25$$

$$\therefore 2^a - 2^{1+\frac{a-b}{2}} + 2^{-b} = 25$$

이때 $a-b=4$ 이므로 $2^a - 2^{1+\frac{4}{2}} + 2^{-b} = 25$

$$2^a - 8 + 2^{-b} = 25$$

$$\therefore 2^a + 2^{-b} = 33 \quad \text{답 } 33$$

$$\text{0095 } \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 4\text{에서}$$

$$x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} = 4 \quad \dots\dots ㉠$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$x^{\frac{2}{3}} + 2 + x^{-\frac{2}{3}} = 16$$

$$\therefore x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{2}{3}} = 14 \quad \dots\dots ㉡$$

㉡의 양변을 제곱하면

$$x^{\frac{4}{3}} + 2 + x^{-\frac{4}{3}} = 196$$

$$\therefore x^{\frac{4}{3}} + x^{-\frac{4}{3}} = 194$$

$$\therefore \sqrt[3]{x^4} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = x^{\frac{4}{3}} + x^{-\frac{4}{3}} = 194 \quad \text{답 } 194$$

$$\text{0096 } x = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2}\text{에서}$$

$$x = 2^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{1}{3}} \quad \dots\dots ㉠$$

㉠의 양변을 세제곱하면

$$x^3 = (2^{\frac{2}{3}})^3 - (2^{\frac{1}{3}})^3 - 3 \times 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} (2^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{1}{3}})$$

$$= 2^2 - 2 - 3 \times 2 \times x = 2 - 6x$$

$$\therefore x^3 + 6x - 2 = 0$$

$$\therefore x^4 + 6x^2 - 2x + 4 = x(x^3 + 6x - 2) + 4$$

$$= x \times 0 + 4$$

$$= 4 \quad \text{답 } 4$$

$$\text{0097 } \frac{5^x-5^{-x}}{5^x+5^{-x}}\text{의 분모, 분자에 각각 } 5^x\text{을 곱하면}$$

$$\frac{5^x-5^{-x}}{5^x+5^{-x}} = \frac{5^x(5^x-5^{-x})}{5^x(5^x+5^{-x})} = \frac{5^{2x}-1}{5^{2x}+1}$$

$$= \frac{25^x-1}{25^x+1}$$

$$\text{즉 } \frac{25^x-1}{25^x+1} = k\text{이므로}$$

$$25^x - 1 = k(25^x + 1), \quad 25^x(1-k) = k+1$$

$$\therefore 25^x = \frac{1+k}{1-k}$$

$$\begin{aligned}\therefore 25^x + 25^{-x} &= \frac{1+k}{1-k} + \frac{1-k}{1+k} \\ &= \frac{(1+k)^2 + (1-k)^2}{(1-k)(1+k)} \\ &= \frac{2(1+k^2)}{1-k^2}\end{aligned}$$

답 ⑤

0098 $\frac{a^{5x}-a^{-5x}}{a^x-a^{-x}}$ 의 분모, 분자에 각각 a^x 을 곱하면

$$\begin{aligned}\frac{a^{5x}-a^{-5x}}{a^x-a^{-x}} &= \frac{a^x(a^{5x}-a^{-5x})}{a^x(a^x-a^{-x})} = \frac{a^{6x}-a^{-4x}}{a^{2x}-1} \\ &= \frac{(a^{2x})^3-(a^{2x})^{-2}}{a^{2x}-1} = \frac{(\sqrt{2})^3-(\sqrt{2})^{-2}}{\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{2\sqrt{2}-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{4\sqrt{2}-1}{2(\sqrt{2}-1)} \\ &= \frac{(4\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{2(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \\ &= \frac{7+3\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{7+3\sqrt{2}}{2}$

0099 $5^x=27$ 에서 $5=27^{\frac{1}{x}}=(3^3)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{3}{x}}$ ㉠

$45^y=81$ 에서 $45=81^{\frac{1}{y}}=(3^4)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{4}{y}}$ ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\frac{1}{9}=3^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}, 3^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}=3^{-2}$

$$\therefore \frac{3}{x}-\frac{4}{y}=-2$$

답 -2

0100 $a^x=27$ 에서 $a=27^{\frac{1}{x}}$ ㉠

$b^y=27$ 에서 $b=27^{\frac{1}{y}}$ ㉡

$c^z=27$ 에서 $c=27^{\frac{1}{z}}$ ㉢

㉠×㉡×㉢을 하면

$$abc=27^{\frac{1}{x}} \times 27^{\frac{1}{y}} \times 27^{\frac{1}{z}} = 27^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = 3^{3(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})}$$

이때 $abc=9=3^2$ 이므로

$$3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=2 \quad \therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0101 $8^x=27^y=k$ ($k>0$)라 하면 $xy \neq 0$ 에서

$$k \neq 1 \quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \text{에서 } xy \neq 0 \end{array} \right.$$

$8^x=k$ 에서 $8=k^{\frac{1}{x}}$ ㉠

$27^y=k$ 에서 $27=k^{\frac{1}{y}}$ ㉡

㉠×㉡을 하면

$$216=k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} \quad \therefore k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=216$$

이때 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$ 이므로 $k^3=216=6^3 \quad \therefore k=6$

즉 $8^x=6$ 이므로 $(2^3)^x=6, (2^x)^3=6 \quad \therefore 2^x=\sqrt[3]{6}$

$27^y=6$ 이므로 $(3^3)^y=6, (3^y)^3=6 \quad \therefore 3^y=\sqrt[3]{6}$

$$\therefore (2^x+3^y)^3=(\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{6})^3=(2 \times \sqrt[3]{6})^3$$

$$=48$$

답 48

0102 바이러스의 개체 수가 한 시간 후 r 배가 된다고 하면 바이러스 한 마리가 8시간 후에 8마리로 늘어나므로

$$r^8=8$$

$$\therefore r^{16}=(r^8)^2=8^2=64$$

따라서 바이러스 한 마리가 16시간 후에는 64마리로 늘어난다.

답 64마리

$$\begin{aligned}0103 \quad n\sqrt[4]{27 \times 3\sqrt[3]{9 \times 4\sqrt[3]{3}}} &= n\sqrt[4]{27} \times n\sqrt[3]{9} \times n\sqrt[3]{4\sqrt[3]{3}} \\ &= n\sqrt[3]{3^3} \times 3n\sqrt[3]{3^2} \times 12n\sqrt[3]{3} \\ &= 3^{\frac{3}{n}} \times 3^{\frac{2}{3n}} \times 3^{\frac{1}{12n}} \\ &= 3^{\frac{3}{n}+\frac{2}{3n}+\frac{1}{12n}} \\ &= 3^{\frac{45}{12n}} = 3^{\frac{15}{4n}}\end{aligned}$$

... 1단계

$$\sqrt[4]{27}=4\sqrt[3]{3}=3^{\frac{3}{4}}$$

... 2단계

$$\text{따라서 } 3^{\frac{15}{4n}}=3^{\frac{3}{4}} \text{이므로 } \frac{15}{4n}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore n=5$$

... 3단계

답 5

채점 요소		비율
1단계	좌변을 3^k 의 꼴로 나타내기	50 %
2단계	우변을 3^k 의 꼴로 나타내기	30 %
3단계	자연수 n 의 값 구하기	20 %

0104 $a^3=5, b^4=11, c^6=13$ 에서

$$a=5^{\frac{1}{3}}, b=11^{\frac{1}{4}}, c=13^{\frac{1}{6}}$$

이므로

$$(abc)^n=(5^{\frac{1}{3}} \times 11^{\frac{1}{4}} \times 13^{\frac{1}{6}})^n=5^{\frac{n}{3}} \times 11^{\frac{n}{4}} \times 13^{\frac{n}{6}} \quad \dots 1\text{단계}$$

따라서 $(abc)^n$ 이 자연수가 되도록 하는 자연수 n 은 3, 4, 6의 공배수이므로 자연수 n 의 최솟값은 12이다.

... 2단계

답 12

채점 요소		비율
1단계	$(abc)^n$ 을 5, 11, 13에 대한 식으로 나타내기	50 %
2단계	자연수 n 의 최솟값 구하기	50 %

0105 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$x+2+x^{-1}=8$$

$$\therefore x+x^{-1}=6$$

... 1단계

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$ 의 양변을 세제곱하면

$$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+3(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})=16\sqrt{2}$$

$$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+6\sqrt{2}=16\sqrt{2}$$

$$\therefore x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=10\sqrt{2}$$

... 2단계

$$\therefore \frac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}}{x+x^{-1}+14}=\frac{10\sqrt{2}}{6+14}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

... 3단계

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

채점 요소	비율
1단계 $x+x^{-1}$ 의 값 구하기	40 %
2단계 $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}$ 의 값 구하기	40 %
3단계 $\frac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}}{x+x^{-1}+14}$ 의 값 구하기	20 %

0106 $\frac{a^{-3x}+a^{3x}}{a^{-x}+a^x}$ 의 분모, 분자에 각각 a^x 을 곱하면

$$\frac{a^{-3x}+a^{3x}}{a^{-x}+a^x} = \frac{a^x(a^{-3x}+a^{3x})}{a^x(a^{-x}+a^x)} = \frac{a^{-2x}+a^{4x}}{1+a^{2x}} \quad \dots \text{1단계}$$

즉 $\frac{a^{-2x}+a^{4x}}{1+a^{2x}}=3$ 이므로 $a^{-2x}=t$ ($t>0$)라 하면

$$\frac{t+\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t}}=3, \quad t+\frac{1}{t^2}=3\left(1+\frac{1}{t}\right)$$

$$\therefore t-3-\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}=0$$

양변에 t^2 을 곱하면

$$t^3-3t^2-3t+1=0, \quad (t+1)(t^2-4t+1)=0$$

$$\therefore t=2\pm\sqrt{3} \quad (\because t>0) \quad \dots \text{2단계}$$

$$\therefore a^{-2x}=2\pm\sqrt{3} \quad \dots \text{3단계}$$

답 $2\pm\sqrt{3}$

채점 요소	비율
1단계 등식의 좌변의 분모, 분자에 각각 a^x 을 곱하기	30 %
2단계 주어진 등식에서 $a^{-2x}=t$ ($t>0$)로 놓고 t 의 값 구하기	60 %
3단계 a^{-2x} 의 값 구하기	10 %

0107 **전략** 실수 a 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수는 n 이 홀수이면 1개, n 이 짝수이면 $a>0$ 일 때 2개, $a=0$ 일 때 1개, $a<0$ 일 때 0개임을 이용한다.

자연수 n 의 값에 관계없이 $(n-2)(n-5)$ 의 제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이므로

$$f(n)=1$$

따라서 $f(n)\geq g(n)$ 에서 $g(n)\leq 1$ 이므로

$$g(n)=0 \text{ 또는 } g(n)=1$$

(i) $g(n)=0$ 일 때

$(n-2)(n-5)$ 의 제곱근 중 실수인 것의 개수가 0이므로

$(n-2)(n-5)$ 는 음수이어야 한다.

$$\text{즉 } (n-2)(n-5)<0 \text{이므로}$$

$$2< n < 5$$

이때 n 은 자연수이므로 $n=3$ 또는 $n=4$

(ii) $g(n)=1$ 일 때

$(n-2)(n-5)$ 의 제곱근 중 실수인 것의 개수가 1이므로

$(n-2)(n-5)$ 는 0이어야 한다.

$$\text{즉 } (n-2)(n-5)=0 \text{이므로}$$

$$n=2 \text{ 또는 } n=5$$

(i), (ii)에서 n 의 값은 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$$2+3+4+5=14$$

답 14

0108 **전략** x 가 a 의 n 제곱근이면 $x^n=a$ 임을 이용하여 주어진 조건을 식으로 나타낸다.

조건 (가)에서 $(\sqrt[3]{a})^m=b$ 이므로

$$a^{\frac{m}{3}}=b \quad \dots\dots \text{㉠}$$

조건 (나)에서 $(\sqrt{b})^n=c$ 이므로

$$b^{\frac{n}{2}}=c \quad \dots\dots \text{㉡}$$

조건 (다)에서 $c^4=a^{12}$ 이므로

$$c=a^3 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$c=(a^{\frac{m}{3}})^{\frac{n}{2}}=a^{\frac{mn}{6}}$$

이때 ㉢에서 $a^{\frac{mn}{6}}=a^3$ 이므로

$$\frac{mn}{6}=3 \quad \therefore mn=18$$

따라서 $mn=18$ 을 만족시키는 1이 아닌 두 자연수 m, n 의 순서쌍 (m, n) 은

$$(2, 9), (3, 6), (6, 3), (9, 2)$$

의 4개이다.

답 ①

0109 **전략** $2^a=x, 2^b=y, 2^c=z$ 로 놓고 주어진 식을 이용하여 $x+y+z, xy+yz+zx$ 의 값을 구한다.

$2^a=x, 2^b=y, 2^c=z$ 라 하면 $a+b+c=-1$ 이므로

$$\begin{aligned} xyz &= 2^a 2^b 2^c = 2^{a+b+c} \\ &= 2^{-1} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

$$2^a+2^b+2^c=\frac{13}{4} \text{이므로}$$

$$x+y+z=\frac{13}{4}$$

$$2^{-a}+2^{-b}+2^{-c}=\frac{11}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{11}{2}$$

$$\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{11}{2}$$

$$2(xy+yz+zx)=\frac{11}{2} \quad (\because \text{㉠})$$

$$\therefore xy+yz+zx=\frac{11}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore 4^a+4^b+4^c &= (2^2)^a+(2^2)^b+(2^2)^c \\ &= (2^a)^2+(2^b)^2+(2^c)^2 \\ &= x^2+y^2+z^2 \\ &= (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx) \\ &= \left(\frac{13}{4}\right)^2-2\times\frac{11}{4} \\ &= \frac{81}{16} \end{aligned}$$

답 $\frac{81}{16}$

02 로그

교과서 문제 정복하기

본책 019쪽

0110 답 $4 = \log_3 81$

0111 답 $-3 = \log_{\frac{1}{2}} 8$

0112 답 $\frac{1}{2} = \log_{25} 5$

0113 답 $0 = \log_7 1$

0114 답 $2^5 = 32$

0115 답 $(\sqrt{3})^4 = 9$

0116 답 $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$

0117 답 $5^0 = 1$

0118 $\log_2 x = 3$ 에서 $x = 2^3 = 8$ 답 8

0119 $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$ 에서 $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$ 답 9

0120 $\log_x 16 = 4$ 에서 $x^4 = 16$
 $\therefore x = 2$ ($\because x > 0$) 답 2

0121 $\log_x 2 = 5$ 에서 $x^5 = 2$
 $\therefore x = \sqrt[5]{2}$ 답 $\sqrt[5]{2}$

0122 진수의 조건에서 $x + 1 > 0$
 $\therefore x > -1$ 답 $x > -1$

0123 밑의 조건에서 $x - 5 > 0$, $x - 5 \neq 1$
 $x > 5$, $x \neq 6$
 $\therefore 5 < x < 6$ 또는 $x > 6$ 답 $5 < x < 6$ 또는 $x > 6$

0124 $\log_3 3 - \log_5 1 = 1 - 0 = 1$ 답 1

0125 $3 \log_2 4 + 2 \log_2 \sqrt{2} = 3 \log_2 2^2 + 2 \log_2 2^{\frac{1}{2}}$
 $= 6 \log_2 2 + \log_2 2$
 $= 6 + 1 = 7$ 답 7

0126 $\log_3 24 + 3 \log_3 \frac{3}{2} = \log_3 24 + \log_3 \left(\frac{3}{2}\right)^3$
 $= \log_3 24 + \log_3 \frac{27}{8}$
 $= \log_3 \left(24 \times \frac{27}{8}\right)$
 $= \log_3 81 = \log_3 3^4$
 $= 4 \log_3 3 = 4$ 답 4

다른 풀이 $\log_3 24 + 3 \log_3 \frac{3}{2}$
 $= \log_3 (2^3 \times 3) + 3(\log_3 3 - \log_3 2)$
 $= 3 \log_3 2 + \log_3 3 + 3 \log_3 3 - 3 \log_3 2$
 $= 4 \log_3 3 = 4$

0127 $\log_2 18 - 2 \log_2 6 = \log_2 18 - \log_2 6^2$
 $= \log_2 18 - \log_2 36$
 $= \log_2 \frac{18}{36} = \log_2 \frac{1}{2}$
 $= \log_2 2^{-1} = -\log_2 2$
 $= -1$ 답 -1

0128 $\log_{10} 12 = \log_{10} (2^2 \times 3)$
 $= 2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3$
 $= 2a + b$ 답 $2a + b$

0129 $\log_{10} \frac{4}{27} = \log_{10} \frac{2^2}{3^3}$
 $= 2 \log_{10} 2 - 3 \log_{10} 3$
 $= 2a - 3b$ 답 $2a - 3b$

0130 $\log_3 16 = \frac{\log_{10} 16}{\log_{10} 3} = \frac{\log_{10} 2^4}{\log_{10} 3}$
 $= \frac{4 \log_{10} 2}{\log_{10} 3} = \frac{4a}{b}$ 답 $\frac{4a}{b}$

0131 $\log_6 9 = \frac{\log_{10} 9}{\log_{10} 6} = \frac{\log_{10} 3^2}{\log_{10} (2 \times 3)}$
 $= \frac{2 \log_{10} 3}{\log_{10} 2 + \log_{10} 3} = \frac{2b}{a + b}$ 답 $\frac{2b}{a + b}$

0132 $\log_3 2 \times \log_2 3 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} \times \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} = 1$ 답 1

0133 $\log_{27} 81 = \log_{3^3} 3^4 = \frac{4}{3} \log_3 3 = \frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$

0134 $\log_4 \frac{1}{8} = \log_{2^2} 2^{-3} = -\frac{3}{2} \log_2 2 = -\frac{3}{2}$ 답 $-\frac{3}{2}$

0135 답 10

0136 $\log 1000 = \log 10^3 = 3$ 답 3

0137 $\log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2$ 답 -2

0138 $\log 0.0001 = \log 10^{-4} = -4$ 답 -4

0139 $\log \sqrt[5]{100} = \log \sqrt[5]{10^2} = \log 10^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}$ 답 $\frac{2}{5}$

0140 답 0.7101

0141 답 0.7007

0142 $\log 15.4 = \log (1.54 \times 10)$
 $= \log 1.54 + \log 10$
 $= 0.1875 + 1 = 1.1875$ 답 1.1875

0143 $\log 1540 = \log (1.54 \times 10^3)$
 $= \log 1.54 + \log 10^3$
 $= 0.1875 + 3 = 3.1875$ 답 3.1875

0144 $\log 0.154 = \log (1.54 \times 10^{-1})$
 $= \log 1.54 + \log 10^{-1}$
 $= 0.1875 - 1 = -0.8125$ 답 -0.8125

0145 $\log 0.0154 = \log (1.54 \times 10^{-2})$
 $= \log 1.54 + \log 10^{-2}$
 $= 0.1875 - 2$
 $= -1.8125$ 답 -1.8125

유형 익히기

• 본책 020~025쪽

0146 $\log_{\sqrt{3}} a = 4$ 에서 $a = (\sqrt{3})^4 = (3^{\frac{1}{2}})^4 = 3^2 = 9$
 $\log_{\frac{1}{9}} b = -\frac{1}{2}$ 에서 $b = \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = (3^{-2})^{-\frac{1}{2}} = 3$
 $\therefore ab = 27$ 답 ②

0147 $\log_a \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$ 에서 $a^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$
 $\therefore a^8 = (a^{\frac{4}{3}})^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$ 답 $\frac{1}{64}$

0148 $\log_7 \{\log_3 (\log_2 x)\} = 0$ 에서
 $\log_3 (\log_2 x) = 7^0 = 1, \quad \log_2 x = 3^1 = 3$
 $\therefore x = 2^3 = 8$ 답 ④

0149 $x = \log_4 (3 - 2\sqrt{2})$ 에서 $4^x = 3 - 2\sqrt{2}$
 $\therefore 4^x + 4^{-x} = 4^x + \frac{1}{4^x} = 3 - 2\sqrt{2} + \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}$
 $= 3 - 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2} = 6$ 답 ⑤

0150 밑의 조건에서 $x - 2 > 0, x - 2 \neq 1$
 $\therefore x > 2, x \neq 3$ ㉠

진수의 조건에서 $-x^2 + 8x - 7 > 0$
 $x^2 - 8x + 7 < 0, \quad (x - 1)(x - 7) < 0$
 $\therefore 1 < x < 7$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
 $2 < x < 3$ 또는 $3 < x < 7$
 따라서 정수 x 는 4, 5, 6의 3개이다. 답 ②

0151 진수의 조건에서
 $x - 1 > 0, x - 2 > 0$
 $\therefore |x - 1| + |x - 2| = (x - 1) + (x - 2) = 2x - 3$ 답 ③

0152 밑의 조건에서 $a - 3 > 0, a - 3 \neq 1$
 $\therefore a > 3, a \neq 4$ ㉢

진수의 조건에서 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + ax + 2a > 0$ 이어야
 하므로 이차방정식 $x^2 + ax + 2a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D = a^2 - 4 \times 1 \times 2a < 0, \quad a(a - 8) < 0$
 $\therefore 0 < a < 8$ ㉣

㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면
 $3 < a < 4$ 또는 $4 < a < 8$
 따라서 정수 a 는 5, 6, 7이므로 구하는 합은
 $5 + 6 + 7 = 18$ 답 18

RPM비법노트

모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 이 성립하려면
 $a > 0, b^2 - 4ac < 0$

0153 밑의 조건에서 $|x - 2| > 0, |x - 2| \neq 1$
 $\therefore x \neq 2, x \neq 3, x \neq 1$ ㉤ ... 1단계

진수의 조건에서 $8 + 2x - x^2 > 0$
 $x^2 - 2x - 8 < 0, \quad (x + 2)(x - 4) < 0$
 $\therefore -2 < x < 4$ ㉥ ... 2단계

㉤, ㉥의 공통 범위를 구하면
 $-2 < x < 1$ 또는 $1 < x < 2$ 또는 $2 < x < 3$ 또는 $3 < x < 4$
 따라서 정수 x 는 -1, 0의 2개이다. ... 3단계
답 2

채점 요소		비율
1단계	밑의 조건을 만족시키는 x 의 값의 범위 구하기	40 %
2단계	진수의 조건을 만족시키는 x 의 값의 범위 구하기	40 %
3단계	정수 x 의 개수 구하기	20 %

0154 $5\log_5 \sqrt[5]{2} + \log_5 \sqrt{10} - \frac{1}{2} \log_5 8$

$$= \log_5 (\sqrt[5]{2})^5 + \log_5 \sqrt{10} - \log_5 \sqrt{8}$$

$$= \log_5 2 + \log_5 \sqrt{10} - \log_5 2\sqrt{2}$$

$$= \log_5 \frac{2 \times \sqrt{10}}{2\sqrt{2}} = \log_5 \sqrt{5}$$

$$= \log_5 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0155 ① $\log_5 9 + 2\log_5 \frac{1}{3} = \log_5 9 + \log_5 \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$$= \log_5 9 + \log_5 \frac{1}{9} = \log_5 \left(9 \times \frac{1}{9}\right)$$

$$= \log_5 1 = 0$$

② $\frac{1}{4} \log_3 27 - \log_3 \sqrt[4]{3} = \frac{1}{4} \log_3 3^3 - \log_3 3^{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

③ $\log_2 \frac{1}{16} \times \log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_2 2^{-4} \times \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$$= -4 \times (-2) = 8$$

④ $\log_5 \frac{4}{5} + 6\log_5 \frac{1}{\sqrt[3]{10}} = \log_5 \frac{4}{5} + \log_5 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{10}}\right)^6$

$$= \log_5 \frac{4}{5} + \log_5 \frac{1}{100}$$

$$= \log_5 \left(\frac{4}{5} \times \frac{1}{100}\right) = \log_5 \frac{1}{125}$$

$$= \log_5 5^{-3} = -3$$

⑤ $\log_3 9\sqrt{5} - \frac{3}{2} \log_3 5 + \log_3 45$

$$= \log_3 9\sqrt{5} - \log_3 5^{\frac{3}{2}} + \log_3 45$$

$$= \log_3 9\sqrt{5} - \log_3 5\sqrt{5} + \log_3 45$$

$$= \log_3 \frac{9\sqrt{5} \times 45}{5\sqrt{5}} = \log_3 81$$

$$= \log_3 3^4 = 4$$

답 ④

0156 $\log_5 x + 2\log_5 \sqrt{y} - 2\log_5 z = 2$ 에서

$$\log_5 x + \log_5 (\sqrt{y})^2 - \log_5 z^2 = 2$$

$$\log_5 x + \log_5 y - \log_5 z^2 = 2$$

$$\log_5 \frac{xy}{z^2} = 2 \quad \therefore \frac{xy}{z^2} = 5^2 = 25$$

답 25

0157 (주어진 식)

$$= \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 \frac{2}{3} + \log_2 \frac{3}{4} + \cdots + \log_2 \frac{31}{32}$$

$$= \log_2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{31}{32}\right) = \log_2 \frac{1}{32}$$

$$= \log_2 2^{-5} = -5$$

답 -5

0158 $\log_3 5 \times \log_5 7 \times \log_7 9 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 7}{\log_2 5} \times \frac{\log_2 9}{\log_2 7}$

$$= \frac{\log_2 9}{\log_2 3} = \log_3 9$$

$$= \log_3 3^2 = 2$$

답 2

0159 $\frac{1}{\log_2 12} + \frac{1}{\log_3 12} + \frac{1}{\log_{24} 12}$

$$= \log_{12} 2 + \log_{12} 3 + \log_{12} 24$$

$$= \log_{12} (2 \times 3 \times 24) = \log_{12} 144$$

$$= \log_{12} 12^2 = 2$$

답 2

0160 $70\log_{\sqrt{ab}} c = \frac{70}{\log_c \sqrt{ab}} = \frac{70}{\log_c (ab)^{\frac{1}{2}}}$

$$= \frac{70}{\frac{1}{2} \log_c ab} = \frac{140}{\log_c a + \log_c b}$$

$$= \frac{140}{\log_c a + \frac{1}{\log_b c}} = \frac{140}{2 + \frac{1}{3}}$$

$$= 60$$

답 60

0161 $\log_a (\log_2 9) + \log_a (\log_7 16) + \log_a (\log_3 49)$

$$= \log_a (\log_2 9 \times \log_7 16 \times \log_3 49)$$

$$= \log_a \left(\frac{\log_{10} 3^2}{\log_{10} 2} \times \frac{\log_{10} 2^4}{\log_{10} 7} \times \frac{\log_{10} 7^2}{\log_{10} 3}\right)$$

$$= \log_a \left(\frac{2\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \times \frac{4\log_{10} 2}{\log_{10} 7} \times \frac{2\log_{10} 7}{\log_{10} 3}\right) = \log_a 16$$

따라서 $\log_a 16 = 2$ 이므로

$$a^2 = 16 \quad \therefore a = 4 \quad (\because a > 0)$$

답 4

0162 $4\log_9 2 + \log_3 4 - \log_3 8 = 4\log_{3^2} 2 + \log_3 2^2 - \log_3 2^3$

$$= 2\log_3 2 + 2\log_3 2 - 3\log_3 2$$

$$= \log_3 2$$

$$\therefore 27^{4\log_9 2 + \log_3 4 - \log_3 8} = 27^{\log_3 2} = 2^{3\log_3 2} = 2^2 = 8$$

답 8

다른 풀이 $27^{4\log_9 2 + \log_3 4 - \log_3 8} = 27^{\log_3 2} = 3^{3\log_3 2}$

$$= 3^{\log_3 2^3} = 2^3 = 8$$

0163 $\log_2 81 + \log_4 9 - \log_8 9 = \log_2 3^4 + \log_2 3^2 - \log_2 3^2$

$$= 4\log_2 3 + \log_2 3 - \frac{2}{3} \log_2 3$$

$$= \frac{13}{3} \log_2 3$$

$$\therefore a = \frac{13}{3}$$

답 ②

0164 $\left(\log_3 5 + \log_9 \frac{1}{5}\right) \left(\log_5 \sqrt{\frac{1}{3}} + \log_{25} 9\right)$

$$= (\log_3 5 + \log_{3^2} 5^{-1}) \left(\log_5 (3^{-1})^{\frac{1}{2}} + \log_5 3^2\right)$$

$$= \left(\log_3 5 - \frac{1}{2} \log_3 5\right) (\log_5 3^{-\frac{1}{2}} + \log_5 3)$$

$$= \frac{1}{2} \log_3 5 \times \left(-\frac{1}{2} \log_5 3 + \log_5 3\right)$$

$$= \frac{1}{2} \log_3 5 \times \frac{1}{2} \log_5 3 = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

$$0165 \quad A = 3^{1-\log_5 2} = 3^{\log_5 3 - \log_5 2} = 3^{\log_5 \frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$B = \log_2 3 \times \log_3 4 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \times \frac{\log_{10} 2^2}{\log_{10} 3} \\ = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \times \frac{2 \log_{10} 2}{\log_{10} 3} = 2$$

$$C = \log_4 2 + \log_9 3 = \log_{2^2} 2 + \log_{3^2} 3 \\ = \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{1}{2} \log_3 3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\therefore C < A < B$$

답 C < A < B

$$0166 \quad \log_{12} \sqrt{24} = \frac{\log_7 \sqrt{24}}{\log_7 12} = \frac{\frac{1}{2} \log_7 24}{\log_7 12} \\ = \frac{\log_7 (2^3 \times 3)}{2 \log_7 (2^2 \times 3)} \\ = \frac{3 \log_7 2 + \log_7 3}{2(2 \log_7 2 + \log_7 3)} \\ = \frac{3a+b}{2(2a+b)}$$

답 ②

$$0167 \quad 10^a = x \text{에서} \quad a = \log_{10} x$$

$$10^b = y \text{에서} \quad b = \log_{10} y$$

$$10^c = z \text{에서} \quad c = \log_{10} z$$

$$\therefore \log_{10} \frac{x^2 z^4}{y^3} = \log_{10} x^2 + \log_{10} z^4 - \log_{10} y^3 \\ = 2 \log_{10} x + 4 \log_{10} z - 3 \log_{10} y \\ = 2a - 3b + 4c$$

답 2a - 3b + 4c

$$0168 \quad \log_5 3 = b \text{에서}$$

$$\frac{\log_2 3}{\log_2 5} = \frac{\log_2 3}{a} = b \quad \therefore \log_2 3 = ab$$

$$\therefore \log_6 45 = \frac{\log_2 45}{\log_2 6} = \frac{\log_2 (3^2 \times 5)}{\log_2 (2 \times 3)} \\ = \frac{2 \log_2 3 + \log_2 5}{1 + \log_2 3} \\ = \frac{2ab + a}{ab + 1}$$

답 $\frac{2ab+a}{ab+1}$

다른 풀이 $\log_2 5 = a \text{에서} \quad \log_5 2 = \frac{1}{\log_2 5} = \frac{1}{a}$

$$\therefore \log_6 45 = \frac{\log_5 45}{\log_5 6} = \frac{\log_5 (3^2 \times 5)}{\log_5 (2 \times 3)} \\ = \frac{2 \log_5 3 + 1}{\log_5 2 + \log_5 3} = \frac{2b + 1}{\frac{1}{a} + b} \\ = \frac{2ab + a}{ab + 1}$$

$$0169 \quad \sqrt{6\sqrt{6}} = \sqrt{6} \times \sqrt{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \times \sqrt[4]{6}$$

$$= 6^{\frac{1}{2}} \times 6^{\frac{1}{4}} = 6^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = 6^{\frac{3}{4}},$$

$$\sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{\sqrt{3}} = \sqrt[3]{3} \times \sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = 3^{\frac{7}{12}}$$

이므로

$$\log_3 \sqrt{6\sqrt{6}} - \log_6 \sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \log_3 6^{\frac{3}{4}} - \log_6 3^{\frac{7}{12}} \\ = \frac{3}{4} (\log_3 6 - \log_6 3) \\ = \frac{3}{4} \left(\frac{\log_2 6}{\log_2 3} - \frac{\log_2 3}{\log_2 6} \right) \\ = \frac{3}{4} \left\{ \frac{\log_2 (2 \times 3)}{\log_2 3} - \frac{\log_2 3}{\log_2 (2 \times 3)} \right\} \\ = \frac{3}{4} \left(\frac{1 + \log_2 3}{\log_2 3} - \frac{\log_2 3}{1 + \log_2 3} \right) \\ = \frac{3}{4} \left(\frac{1+a}{a} - \frac{a}{1+a} \right) \\ = \frac{3}{4} \times \frac{(1+a)^2 - a^2}{a(a+1)} \\ = \frac{3(2a+1)}{4a(a+1)}$$

답 $\frac{3(2a+1)}{4a(a+1)}$

$$0170 \quad 5^x = 2^y = \sqrt{10^z} = k \quad (k > 0, k \neq 1) \text{라 하면}$$

$$5^x = k \text{에서} \quad x = \log_5 k$$

$$2^y = k \text{에서} \quad y = \log_2 k$$

$$\sqrt{10^z} = k \text{에서} \quad 10^{\frac{z}{2}} = k$$

$$\frac{z}{2} = \log_{10} k \quad \therefore z = 2 \log_{10} k$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z} = \frac{1}{\log_5 k} + \frac{1}{\log_2 k} - \frac{2}{2 \log_{10} k} \\ = \log_k 5 + \log_k 2 - \log_k 10 \\ = \log_k \left(\frac{5 \times 2}{10} \right) = \log_k 1 = 0$$

답 0

다른 풀이 $5^x = 2^y = \sqrt{10^z} = k \quad (k > 0, k \neq 1) \text{라 하면}$

$$5^x = k \text{에서} \quad 5 = k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots ㉠$$

$$2^y = k \text{에서} \quad 2 = k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots ㉡$$

$$\sqrt{10^z} = k \text{에서} \quad 10 = k^{\frac{2}{z}} \quad \dots\dots ㉢$$

㉠ $\times$ ㉡ $\div$ ㉢을 하면

$$1 = k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} \div k^{\frac{2}{z}} = k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z}}$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z} = 0$$

$$0171 \quad 108^x = 27 \text{에서}$$

$$x = \log_{108} 27 = \log_{108} 3^3 = 3 \log_{108} 3$$

$$4^y = 81 \text{에서}$$

$$y = \log_4 81 = \log_4 3^4 = 4 \log_4 3$$

$$\therefore \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = \frac{3}{3 \log_{108} 3} - \frac{4}{4 \log_4 3} \\ = \log_3 108 - \log_3 4 \\ = \log_3 \frac{108}{4} = \log_3 27 \\ = \log_3 3^3 = 3$$

답 3

0172 $a^2b^5=1$ 의 양변에 a 를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_a a^2b^5 = \log_a 1, \quad 2+5\log_a b=0$$

$$\therefore \log_a b = -\frac{2}{5}$$

$$\therefore \log_a a^7b^{10} = 7+10\log_a b$$

$$= 7+10 \times \left(-\frac{2}{5}\right) = 3$$

답 3

다른 풀이 $a^2b^5=1$ 에서 $b^5=a^{-2} \quad \therefore b=a^{-\frac{2}{5}}$

$$\therefore \log_a a^7b^{10} = \log_a \{a^7 \times (a^{-\frac{2}{5}})^{10}\} = \log_a a^3 = 3$$

0173 조건 (가)에서 $\sqrt[8]{a}=\sqrt[4]{b}=\sqrt{c}=k (k>0, k \neq 1)$ 라 하면

$$\sqrt[8]{a}=k \text{에서} \quad a^{\frac{1}{8}}=k \quad \therefore a=k^8$$

$$\sqrt[4]{b}=k \text{에서} \quad b^{\frac{1}{4}}=k \quad \therefore b=k^4$$

$$\sqrt{c}=k \text{에서} \quad c=k^2$$

이것을 조건 (나)의 식의 좌변에 대입하면

$$\log_4 a + \log_{16} b + \log_{64} c$$

$$= \log_2 k^8 + \log_2 k^4 + \log_2 k^2$$

$$= 4\log_2 k + \log_2 k + \frac{1}{3}\log_2 k$$

$$= \frac{16}{3}\log_2 k$$

$$\text{이므로} \quad \frac{16}{3}\log_2 k = \frac{8}{3}, \quad \log_2 k = \frac{1}{2}$$

$$\therefore k = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \log_2 abc = \log_2 (k^8 \times k^4 \times k^2) = \log_2 k^{14}$$

$$= \log_2 (\sqrt{2})^{14} = \log_2 2^7 = 7$$

답 7

0174 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_{10} a + \log_{10} b = 6, \quad \log_{10} a \times \log_{10} b = 3$$

$$\therefore \log_a b + \log_b a$$

$$= \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} + \frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}$$

$$= \frac{(\log_{10} a)^2 + (\log_{10} b)^2}{\log_{10} a \times \log_{10} b}$$

$$= \frac{(\log_{10} a + \log_{10} b)^2 - 2\log_{10} a \times \log_{10} b}{\log_{10} a \times \log_{10} b}$$

$$= \frac{6^2 - 2 \times 3}{3} = 10$$

답 ③

0175 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 10, \quad \alpha\beta = 8$$

$$\therefore \log_2 \alpha + \log_2 \beta = \log_2 \alpha\beta = \log_2 8$$

$$= \log_2 2^3 = 3$$

답 3

0176 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2\log_2 3, \quad \alpha\beta = 1$$

$$\therefore 2^{\alpha+\beta-\alpha\beta} = 2^{2\log_2 3-1} = 2^{\log_2 3^2-\log_2 2} = 2^{\log_2 \frac{9}{2}} = \frac{9}{2}$$

... **1단계**

... **2단계**

답 $\frac{9}{2}$

채점 요소		비율
1단계	$\alpha + \beta, \alpha\beta$ 의 값 구하기	30 %
2단계	$2^{\alpha+\beta-\alpha\beta}$ 의 값 구하기	70 %

0177 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a = 1 + \log_3 4, \quad b = 1 \times \log_3 4 = \log_3 4$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{1 + \log_3 4}{\log_3 4} = \frac{\log_3 3 + \log_3 4}{\log_3 4}$$

$$= \frac{\log_3 12}{\log_3 4} = \log_4 12$$

답 ①

0178 $\log 72 = \log (2^3 \times 3^2) = 3\log 2 + 2\log 3$

$$= 3 \times 0.3010 + 2 \times 0.4771$$

$$= 1.8572$$

답 ②

0179 ③ $\log 0.674 = \log (67.4 \times 10^{-2})$

$$= \log 67.4 + \log 10^{-2}$$

$$= 1.8287 - 2 = -0.1713$$

답 ③

0180 상용로그표에서 $\log 7.86 = 0.8954$ 이므로

$$\log \sqrt[3]{78.6} = \log 78.6^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log (7.86 \times 10)$$

$$= \frac{1}{3} (\log 7.86 + \log 10)$$

$$= \frac{1}{3} (0.8954 + 1) = 0.6318$$

답 0.6318

0181 $\log A = -1.7399 = -2 + 0.2601$

$$= \log 10^{-2} + \log 1.82 = \log (10^{-2} \times 1.82)$$

$$= \log 0.0182$$

$$\therefore A = 0.0182$$

답 0.0182

0182 A사, B사에서 출시한 자동차의 소음의 세기를 각각

P_A, P_B 라 하자.

A사에서 출시한 자동차의 소음의 크기가 40 dB이므로

$$40 = 10(\log P_A + 12), \quad 4 = \log P_A + 12$$

$$\therefore \log P_A = -8$$

..... ㉠

B사에서 출시한 자동차의 소음의 크기가 60 dB이므로

$$60 = 10(\log P_B + 12), \quad 6 = \log P_B + 12$$

$$\therefore \log P_B = -6$$

..... ㉡

㉡-㉠을 하면

$$\log P_B - \log P_A = 2, \quad \log \frac{P_B}{P_A} = 2$$

$$\frac{P_B}{P_A} = 100 \quad \therefore P_B = 100P_A$$

따라서 B사에서 출시한 자동차의 소음의 세기는 A사에서 출시한 자동차의 소음의 세기의 100배이다.

답 ④

0183 리히터 규모 7인 지진과 리히터 규모 3인 지진에 의하여 발생하는 에너지를 각각 E_7 , E_3 이라 하면

$$\log 10E_7 = 11.8 + 1.5 \times 7 = 22.3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log 10E_3 = 11.8 + 1.5 \times 3 = 16.3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{7} - \textcircled{3}$ 을 하면

$$\log 10E_7 - \log 10E_3 = 6$$

$$\log \frac{E_7}{E_3} = 6, \quad \frac{E_7}{E_3} = 10^6$$

$$\therefore E_7 = 10^6 E_3$$

따라서 리히터 규모 7인 지진에 의하여 발생하는 에너지는 리히터 규모 3인 지진에 의하여 발생하는 에너지의 10^6 배이다.

$$\therefore k = 6 \quad \text{답 6}$$

0184 지반 A와 지반 B의 유효수직응력을 각각 S_A , S_B , 저항력을 각각 R_A , R_B 라 하면

$$S_A = 2.56 S_B, \quad R_A = 2 R_B$$

지반 B의 상대밀도가 70 %이므로

$$-98 + 66 \log \frac{R_B}{\sqrt{S_B}} = 70 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 지반 A의 상대밀도는

$$-98 + 66 \log \frac{R_A}{\sqrt{S_A}}$$

$$= -98 + 66 \log \frac{2R_B}{\sqrt{2.56 S_B}}$$

$$= -98 + 66 \log \left(\frac{2}{\sqrt{2.56}} \times \frac{R_B}{\sqrt{S_B}} \right)$$

$$= -98 + 66 \log \left(\frac{5}{4} \times \frac{R_B}{\sqrt{S_B}} \right)$$

$$= -98 + 66 \log \frac{5}{4} + 66 \log \frac{R_B}{\sqrt{S_B}}$$

$$= 70 + 66 \log \frac{5}{4} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= 70 + 66 \log \frac{10}{8} = 70 + 66 \times (1 - 3 \log 2)$$

$$= 70 + 66 \times (1 - 3 \times 0.3)$$

$$= 76.6 (\%)$$

$$\therefore a = 76.6 \quad \text{답 76.6}$$

0185 $\log_2 8 < \log_2 15 < \log_2 16$ 이므로

$$3 < \log_2 15 < 4$$

즉 $\log_2 15$ 의 정수 부분은 3이므로

$$a = 3$$

또 소수 부분은

$$\log_2 15 - 3 = \log_2 15 - \log_2 2^3 = \log_2 \frac{15}{8}$$

$$\text{이므로 } b = \log_2 \frac{15}{8}$$

$$\therefore 8(a + 2^b) = 8(3 + 2^{\log_2 \frac{15}{8}}) = 8\left(3 + \frac{15}{8}\right) = 39$$

답 39

0186 $\log a$ 의 정수 부분이 3이므로

$$3 \leq \log a < 4 \quad \therefore 10^3 \leq a < 10^4$$

따라서 자연수 a 의 개수는

$$10^4 - 10^3 = 9000$$

답 ⑤

0187 $\log_5 5 < \log_5 10 < \log_5 25$ 이므로

$$1 < \log_5 10 < 2$$

즉 $\log_5 10$ 의 정수 부분은 1이므로

$$x = 1$$

또 소수 부분은

$$\log_5 10 - 1 = \log_5 10 - \log_5 5 = \log_5 2$$

이므로 $y = \log_5 2$

$$\therefore \frac{5^y - 5^{-y}}{5^x - 5^{-x}} = \frac{5^{\log_5 2} - 5^{-\log_5 2}}{5^1 - 5^{-1}}$$

$$= \frac{2 - \frac{1}{2}}{5 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{16}$$

답 ⑤ $\frac{5}{16}$

0188 $\log A = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 \leq \alpha < 1$)라 하면 이차방정식 $2x^2 - 5x + k - 3 = 0$ 의 두 근이 n , α 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$n + \alpha = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$n\alpha = \frac{k-3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \dots \text{1단계}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } n = 2, \alpha = \frac{1}{2} \quad \dots \text{2단계}$$

이것을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$2 \times \frac{1}{2} = \frac{k-3}{2} \quad \therefore k = 5 \quad \dots \text{3단계}$$

답 5

	채점 요소	비율
①단계	이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\log A$ 의 정수 부분과 소수 부분의 합과 곱 구하기	40 %
②단계	$\log A$ 의 정수 부분과 소수 부분 구하기	40 %
③단계	k 의 값 구하기	20 %

0189 $10 < x < 100$ 에서

$$\log 10 < \log x < \log 100$$

$$\therefore 1 < \log x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\log x$ 의 소수 부분과 $\log \frac{1}{x}$ 의 소수 부분이 같으므로

$$\log x - \log \frac{1}{x} = \log x + \log x = 2 \log x = (\text{정수})$$

이때 $\textcircled{1}$ 에서 $2 < 2 \log x < 4$ 이므로

$$2 \log x = 3, \quad \log x = \frac{3}{2}$$

$$x = 10^{\frac{3}{2}} \quad \therefore x^2 = 10^3$$

답 ③

0190 $\log x^2 - \log \frac{1}{x} = 2\log x + \log x = 3\log x = (\text{정수})$

이때 $\log x$ 의 정수 부분이 1이므로

$$1 \leq \log x < 2$$

즉 $3 \leq 3\log x < 6$ 이므로

$$3\log x = 3 \text{ 또는 } 3\log x = 4 \text{ 또는 } 3\log x = 5$$

$$\log x = 1 \text{ 또는 } \log x = \frac{4}{3} \text{ 또는 } \log x = \frac{5}{3}$$

$$\therefore x = 10 \text{ 또는 } x = 10^{\frac{4}{3}} \text{ 또는 } x = 10^{\frac{5}{3}}$$

따라서 모든 x 의 값의 곱은

$$10 \times 10^{\frac{4}{3}} \times 10^{\frac{5}{3}} = 10^{1+\frac{4}{3}+\frac{5}{3}} = 10^4 \quad \text{답 ③}$$

0191 $\log x$ 의 정수 부분이 2이므로

$$2 \leq \log x < 3 \quad \dots\dots ㉠$$

$\log x$ 의 소수 부분과 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분의 합이 1이므로

$$\log x + \log \sqrt{x} = \log x + \frac{1}{2} \log x = \frac{3}{2} \log x = (\text{정수})$$

이때 ㉠에서 $3 \leq \frac{3}{2} \log x < \frac{9}{2}$ 이므로

$$\frac{3}{2} \log x = 3 \text{ 또는 } \frac{3}{2} \log x = 4$$

$$\therefore \log x = 2 \text{ 또는 } \log x = \frac{8}{3}$$

그런데 $\log x = 2$ 이면 $\log x$ 와 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분의 합은 0이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$\therefore \log x = \frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$$

따라서 $\log x$ 의 소수 부분은 $\frac{2}{3}$ 이다.

답 $\frac{2}{3}$

다른 풀이 $\log x$ 의 소수 부분을 α ($0 \leq \alpha < 1$)라 하면

$$\log x = 2 + \alpha$$

$$\therefore \log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x = \frac{1}{2} (2 + \alpha) = 1 + \frac{\alpha}{2}$$

따라서 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분은 $\frac{\alpha}{2}$ 이므로

$$\alpha + \frac{\alpha}{2} = 1, \quad \frac{3}{2} \alpha = 1 \quad \therefore \alpha = \frac{2}{3}$$

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 026~029쪽

0192 $x = \log_3 64$ 에서 $3^x = 64$

$$\therefore 3^{\frac{x}{3}} = (3^x)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3}} = (4^3)^{\frac{1}{3}} = 4 \quad \text{답 4}$$

다른 풀이 $x = \log_3 64$ 이므로

$$\frac{x}{3} = \frac{1}{3} \log_3 64 = \frac{1}{3} \log_3 4^3 = \log_3 4$$

$$\therefore 3^{\frac{x}{3}} = 3^{\log_3 4} = 4$$

0193 밑의 조건에서 $a+2>0, a+2 \neq 1$

$$\therefore a > -2, a \neq -1 \quad \dots\dots ㉠$$

진수의 조건에서 $-a^2 + a + 12 > 0$

$$a^2 - a - 12 < 0, \quad (a+3)(a-4) < 0$$

$$\therefore -3 < a < 4 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$-2 < a < -1 \text{ 또는 } -1 < a < 4$$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$$0 + 1 + 2 + 3 = 6 \quad \text{답 ⑤}$$

0194 $5\log_3 \sqrt{3} + \frac{1}{2} \log_3 2 - \log_3 \sqrt{6}$

$$= \log_3 (\sqrt{3})^5 + \log_3 2^{\frac{1}{2}} - \log_3 \sqrt{6}$$

$$= \log_3 9\sqrt{3} + \log_3 \sqrt{2} - \log_3 \sqrt{6}$$

$$= \log_3 \frac{9\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \log_3 9$$

$$= \log_3 3^2 = 2 \quad \text{답 ②}$$

다른 풀이 $5\log_3 \sqrt{3} + \frac{1}{2} \log_3 2 - \log_3 \sqrt{6}$

$$= 5\log_3 3^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \log_3 2 - \log_3 6^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \log_3 2 - \frac{1}{2} (\log_3 2 + \log_3 3)$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \log_3 2 - \frac{1}{2} \log_3 2 - \frac{1}{2} = 2$$

0195 $\log_3 x + \log_3 2y + \log_3 3z = 1$ 에서

$$\log_3 (x \times 2y \times 3z) = 1, \quad \log_3 6xyz = 1$$

$$6xyz = 3 \quad \therefore xyz = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \{(81^x)^y\}^z = 81^{xyz} = 81^{\frac{1}{2}} = (9^2)^{\frac{1}{2}} = 9 \quad \text{답 ③}$$

0196 $\log_3 45 - \frac{\log_5 35}{\log_5 3} + \frac{\log_{10} 21}{\log_{10} 3}$

$$= \log_3 45 - \log_3 35 + \log_3 21$$

$$= \log_3 \left(\frac{45 \times 21}{35} \right) = \log_3 27$$

$$= \log_3 3^3 = 3 \quad \text{답 3}$$

0197 $\log_{abc} x = \frac{1}{\log_x abc} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b + \log_x c}$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{11}{6}} = \frac{6}{11}$$

답 $\frac{6}{11}$

0198 $(\log_2 3 + \log_{\sqrt[3]{4}} 9) \left(2\log_3 2 + \frac{1}{2} \log_3 4 \right)$

$$= (\log_2 3 + \log_{2^{\frac{2}{3}}} 3^2) \left(2\log_3 2 + \frac{1}{2} \log_3 2^2 \right)$$

$$= (\log_2 3 + 3\log_2 3) (2\log_3 2 + \log_3 2)$$

$$= 4\log_2 3 \times 3\log_3 2 = 12 \quad \text{답 12}$$

$$\begin{aligned} 0199 \text{ (주어진 식)} &= \frac{(5^{\log_5 12})^2}{2^{(\log_3 2 + 2\log_3 2) \times 2\log_3 3}} = \frac{12^2}{2^{3\log_3 2 \times 2\log_3 3}} \\ &= \frac{144}{2^6} = \frac{9}{4} \end{aligned} \quad \text{답 9}$$

0200 두 점 $(2, \log_4 a), (3, \log_2 b)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$\begin{aligned} y - \log_2 b &= \frac{\log_2 b - \log_4 a}{3 - 2}(x - 3) \\ \therefore y &= (\log_2 b - \log_4 a)x - 2\log_2 b + 3\log_4 a \end{aligned}$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$\begin{aligned} 0 &= -2\log_2 b + 3\log_4 a \\ 2\log_2 b &= 3\log_4 a, \quad 2\log_2 b = \frac{3}{2}\log_2 a \\ \frac{\log_2 b}{\log_2 a} &= \frac{3}{4} \quad (\because a \neq 1) \\ \therefore \log_a b &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이 $O(0, 0), A(2, \log_4 a), B(3, \log_2 b)$ 라 하면 세 점 O, A, B 가 한 직선 위에 있으므로 직선 OA 의 기울기와 직선 OB 의 기울기가 같다.

$$\begin{aligned} \text{즉 } \frac{\log_4 a}{2} &= \frac{\log_2 b}{3} \text{ 이므로 } 3\log_4 a = 2\log_2 b \\ \frac{3}{2}\log_2 a &= 2\log_2 b, \quad \frac{\log_2 b}{\log_2 a} = \frac{3}{4} \quad (\because a \neq 1) \\ \therefore \log_a b &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

RPM 비법 노트

두 점을 지나는 직선의 방정식

두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad (\text{단, } x_1 \neq x_2)$$

$$\begin{aligned} 0201 \log_{0.2} 45 &= \frac{\log 45}{\log 0.2} = \frac{\log (3^2 \times 5)}{\log \frac{2}{10}} \\ &= \frac{2\log 3 + \log 5}{\log 2 - 1} \\ &= \frac{2\log 3 + (1 - \log 2)}{\log 2 - 1} \\ &= \frac{2b + 1 - a}{a - 1} \\ &= \frac{a - 2b - 1}{1 - a} \end{aligned} \quad \text{답 4}$$

0202 $2^x = 80$ 에서

$$x = \log_2 80 = \log_2 (2^4 \times 5) = 4 + \log_2 5$$

$5^y = 80$ 에서

$$\begin{aligned} y &= \log_5 80 = \log_5 (2^4 \times 5) = 4\log_5 2 + 1 \\ \therefore (x - 4)(y - 1) &= (4 + \log_2 5 - 4)(4\log_5 2 + 1 - 1) \\ &= \log_2 5 \times 4\log_5 2 = 4 \end{aligned} \quad \text{답 4}$$

0203 $\log_a b = \frac{\log_b c}{2} = \frac{\log_c a}{4} = k$ (k 는 실수)라 하면

$$\log_a b = k, \log_b c = 2k, \log_c a = 4k$$

이때 $\log_a b \times \log_b c \times \log_c a = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} k \times 2k \times 4k &= 1, \quad k^3 = \frac{1}{8} \\ \therefore k &= \frac{1}{2} \quad (\because k \text{는 실수}) \\ \therefore \log_a b + \log_b c + \log_c a &= k + 2k + 4k = 7k \\ &= 7 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \end{aligned} \quad \text{답 ①}$$

$$\begin{aligned} 0204 \quad x^3 &= y^4 \text{에서 } y = x^{\frac{3}{4}} \\ \therefore A &= \log_x y = \log_x x^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^4 &= z^5 \text{에서 } z = y^{\frac{4}{5}} \\ \therefore B &= \log_y z = \log_y y^{\frac{4}{5}} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 &= z^5 \text{에서 } x = z^{\frac{5}{3}} \\ \therefore C &= \log_z x = \log_z z^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3} \\ \therefore A &< B < C \end{aligned} \quad \text{답 ①}$$

0205 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \log_3 a + \log_3 b &= 4, \log_3 a \times \log_3 b = 2 \\ \therefore \log_a \sqrt[3]{b} + \log_b \sqrt[3]{a} &= \frac{1}{3}(\log_a b + \log_b a) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\log_3 b}{\log_3 a} + \frac{\log_3 a}{\log_3 b} \right) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{(\log_3 a)^2 + (\log_3 b)^2}{\log_3 a \times \log_3 b} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{(\log_3 a + \log_3 b)^2 - 2\log_3 a \times \log_3 b}{\log_3 a \times \log_3 b} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{4^2 - 2 \times 2}{2} \\ &= 2 \end{aligned} \quad \text{답 2}$$

0206 $\log \sqrt{x} = 0.612$ 에서 $\frac{1}{2} \log x = 0.612$

$$\begin{aligned} \therefore \log x &= 1.224 \\ \therefore \log x^4 + \log \sqrt[3]{x} &= 4\log x + \frac{1}{3}\log x \\ &= \frac{13}{3}\log x = \frac{13}{3} \times 1.224 \\ &= 5.304 \end{aligned}$$

답 5.304

0207 상용로그표에서 $\log 2.82 = 0.4502, \log 2.60 = 0.4150$ 이므로

$$\begin{aligned} \log (28.2 \times 260) &= \log (2.82 \times 2.60 \times 10^3) \\ &= \log 2.82 + \log 2.60 + \log 10^3 \\ &= 0.4502 + 0.4150 + 3 \\ &= 3.8652 \end{aligned} \quad \text{답 ④}$$

$$\begin{aligned}
 0208 \quad \log y &= -1.5986 = -2 + 0.4014 \\
 &= \log 10^{-2} + \log 2.52 = \log (10^{-2} \times 2.52) \\
 &= \log 0.0252
 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } y = 0.0252$$

한편

$$\begin{aligned}
 \log 2520 &= \log (2.52 \times 10^3) = \log 2.52 + \log 10^3 \\
 &= 0.4014 + 3 = 3.4014
 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 10^4 (\log 2520 - y) &= 10^4 (3.4014 - 0.0252) \\
 &= 33762
 \end{aligned}$$

답 33762

0209 A 지역의 소리의 강도를 P_A , 소리의 크기를 D_A 라 하면

$$D_A = 10 \log \frac{P_A}{k} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

B 지역의 소리의 강도를 P_B , 소리의 크기를 D_B 라 하면

$P_B = 500P_A$ 이므로

$$\begin{aligned}
 D_B &= 10 \log \frac{P_B}{k} = 10 \log \frac{500P_A}{k} \\
 &= 10 \left(\log 500 + \log \frac{P_A}{k} \right) \\
 &= 10 \log 500 + D_A \quad (\because \textcircled{1}) \\
 &= 10 \log \frac{1000}{2} + D_A \\
 &= 10(3 - \log 2) + D_A = 10(3 - 0.3) + D_A \\
 &= 10 \times 2.7 + D_A \\
 &= 27 + D_A
 \end{aligned}$$

따라서 A 지역과 B 지역의 소리의 크기의 차이는 27 dB이다.

답 27 dB

0210 정상적인 비의 수소 이온의 농도를 X_0 이라 하면

$$\begin{aligned}
 -\log X_0 &= 5.6 \\
 \therefore \log X_0 &= -5.6 \quad \dots\dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

pH 4.82인 비의 수소 이온의 농도를 X_1 이라 하면

$$\begin{aligned}
 -\log X_1 &= 4.82 \\
 \therefore \log X_1 &= -4.82 \quad \dots\dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면 $\log X_1 - \log X_0 = 0.78$

$$\therefore \log \frac{X_1}{X_0} = 0.78$$

이때 $\log 2 = 0.30$, $\log 3 = 0.48$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \log \frac{X_1}{X_0} &= 0.78 = 0.30 + 0.48 = \log 2 + \log 3 = \log 6 \\
 \therefore \frac{X_1}{X_0} &= 6
 \end{aligned}$$

따라서 오염 물질의 양은 정상적인 상태의 6배이다.

답 6배

0211 (i) $1 \leq N < 10$ 일 때

$$\begin{aligned}
 \log 1 &\leq \log N < \log 10 \text{에서} \quad 0 \leq \log N < 1 \\
 \text{즉 } \log N \text{의 정수 부분이 } 0 \text{이므로} \\
 f(N) &= 0 \\
 \therefore f(1) &= f(2) = f(3) = \dots = f(9) = 0
 \end{aligned}$$

(ii) $10 \leq N < 100$ 일 때

$$\begin{aligned}
 \log 10 &\leq \log N < \log 100 \text{에서} \quad 1 \leq \log N < 2 \\
 \text{즉 } \log N \text{의 정수 부분이 } 1 \text{이므로} \\
 f(N) &= 1 \\
 \therefore f(10) &= f(11) = f(12) = \dots = f(99) = 1
 \end{aligned}$$

(iii) $100 \leq N < 200$ 일 때

$$\begin{aligned}
 \log 100 &\leq \log N < \log 1000 \text{에서} \quad 2 \leq \log N < 3 \\
 \text{즉 } \log N \text{의 정수 부분이 } 2 \text{이므로} \\
 f(N) &= 2 \\
 \therefore f(100) &= f(101) = f(102) = \dots = f(200) = 2
 \end{aligned}$$

이상에서

$$\begin{aligned}
 f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(199) + f(200) \\
 = 0 \times 9 + 1 \times 90 + 2 \times 101 \\
 = 292
 \end{aligned}$$

답 292

0212 조건 (가)에서 $\log x$ 의 정수 부분이 2이므로

$$2 \leq \log x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서 $\log x^3$ 의 소수 부분과 $\log \frac{1}{x}$ 의 소수 부분이 같으므로

$$\log x^3 - \log \frac{1}{x} = 3 \log x + \log x = 4 \log x = (\text{정수})$$

이때 $\textcircled{1}$ 에서 $8 \leq 4 \log x < 12$ 이므로

$$\begin{aligned}
 4 \log x &= 8 \text{ 또는 } 4 \log x = 9 \text{ 또는 } 4 \log x = 10 \\
 \text{또는 } 4 \log x &= 11 \\
 \log x &= 2 \text{ 또는 } \log x = \frac{9}{4} \text{ 또는 } \log x = \frac{5}{2} \\
 \text{또는 } \log x &= \frac{11}{4}
 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 10^2 \text{ 또는 } x = 10^{\frac{9}{4}} \text{ 또는 } x = 10^{\frac{5}{2}} \text{ 또는 } x = 10^{\frac{11}{4}}$$

따라서 x 의 최댓값은 $10^{\frac{11}{4}}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 k &= 10^{\frac{11}{4}} \\
 \therefore 100 \log k &= 100 \log 10^{\frac{11}{4}} = 100 \times \frac{11}{4} = 275
 \end{aligned}$$

답 275

0213 $\log x$ 의 정수 부분이 3이므로

$$3 \leq \log x < 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분과 $\log^3 \sqrt{x}$ 의 소수 부분의 합이 1이므로

$$\begin{aligned}
 \log \sqrt{x} + \log^3 \sqrt{x} &= \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{3} \log x \\
 &= \frac{5}{6} \log x = (\text{정수})
 \end{aligned}$$

이때 $\textcircled{1}$ 에서 $\frac{5}{2} \leq \frac{5}{6} \log x < \frac{10}{3}$ 이므로

$$\frac{5}{6} \log x = 3 \quad \therefore \log x = \frac{18}{5}$$

따라서

$$\log x^2 = 2 \log x = 2 \times \frac{18}{5} = \frac{36}{5} = 7 + \frac{1}{5}$$

이므로 $\log x^2$ 의 소수 부분은 $\frac{1}{5}$ 이다.

답 ②

0214 $a = \log_9(2 - \sqrt{3})$ 에서 $9^a = 2 - \sqrt{3}$

$$\therefore 3^{2a} = 2 - \sqrt{3}$$

... 1단계

$\frac{27^a - 27^{-a}}{3^a + 3^{-a}}$ 의 분모, 분자에 각각 3^a 를 곱하면

$$\frac{27^a - 27^{-a}}{3^a + 3^{-a}} = \frac{3^a(3^{3a} - 3^{-3a})}{3^a(3^a + 3^{-a})} = \frac{3^{4a} - 3^{-2a}}{3^{2a} + 1}$$

$$= \frac{(3^{2a})^2 - \frac{1}{3^{2a}}}{3^{2a} + 1}$$

... 2단계

$$= \frac{(2 - \sqrt{3})^2 - \frac{1}{2 - \sqrt{3}}}{(2 - \sqrt{3}) + 1}$$

$$= \frac{7 - 4\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})}{3 - \sqrt{3}}$$

$$= \frac{5 - 5\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(5 - 5\sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}$$

$$= -\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

... 3단계

답 $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$

채점 요소	비율
1단계 3^{2a} 의 값 구하기	30 %
2단계 $\frac{27^a - 27^{-a}}{3^a + 3^{-a}}$ 을 3^{2a} 에 대한 식으로 나타내기	40 %
3단계 $\frac{27^a - 27^{-a}}{3^a + 3^{-a}}$ 의 값 구하기	30 %

0215 $\log_2 12 = \log_2(2^2 \times 3) = 2 + \log_2 3$

이므로 주어진 방정식은

$$x^2 + (2 + \log_2 3)x + 2\log_2 3 = 0$$

$$(x + 2)(x + \log_2 3) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = -\log_2 3$$

... 1단계

$$\therefore 2^a + 2^b = 2^{-2} + 2^{-\log_2 3} = \frac{1}{4} + 2^{\log_2 \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

... 2단계

답 $\frac{7}{12}$

채점 요소	비율
1단계 주어진 이차방정식의 해 구하기	70 %
2단계 $2^a + 2^b$ 의 값 구하기	30 %

0216 $\log_a c : \log_b c = 2 : 1$ 에서

$$2\log_b c = \log_a c, \quad \frac{2\log c}{\log b} = \frac{\log c}{\log a}$$

$$2\log a = \log b, \quad \log a^2 = \log b$$

$$\therefore b = a^2$$

... 1단계

$$\therefore \log_a b + \log_b a = \log_a a^2 + \log_{a^2} a$$

$$= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

... 2단계

답 $\frac{5}{2}$

채점 요소	비율
1단계 a, b 사이의 관계식 구하기	60 %
2단계 $\log_a b + \log_b a$ 의 값 구하기	40 %

0217 $\log x$ 의 소수 부분을 β ($0 \leq \beta < 1$)라 하면

$$\log x = 7 + \beta$$

$$\therefore \log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x = \frac{1}{2}(7 + \beta)$$

$$= \frac{7}{2} + \frac{\beta}{2}$$

$$= 3 + \frac{\beta + 1}{2}$$

이때 $\frac{1}{2} \leq \frac{\beta + 1}{2} < 1$ 이므로 $\log \sqrt{x}$ 의 정수 부분은 3, 소수 부분은 $\frac{\beta + 1}{2}$ 이다. ... 1단계

따라서 $\frac{\beta + 1}{2} = 0.8$ 이므로

$$\beta + 1 = 1.6 \quad \therefore \beta = 0.6$$

... 2단계

$$\therefore \log \frac{1}{x} = -\log x = -(7 + 0.6)$$

$$= -7 - 0.6 = (-7 - 1) + (1 - 0.6)$$

$$= -8 + 0.4$$

즉 $\alpha = 0.4$ 이므로

$$10\alpha = 10 \times 0.4 = 4$$

... 3단계

답 4

채점 요소	비율
1단계 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분을 $\log x$ 의 소수 부분으로 나타내기	50 %
2단계 $\log x$ 의 소수 부분 구하기	20 %
3단계 10α 의 값 구하기	30 %

RPM비법노트

$\log \frac{1}{x} = -7.6$ 에서 $\log \frac{1}{x}$ 의 정수 부분이 -7 , 소수 부분이 -0.6 이라고 생각하지 않도록 주의한다.

$0 \leq (\text{소수 부분}) < 1$ 이므로 $\log \frac{1}{x}$ 의 정수 부분은 -8 , 소수 부분은 0.4 이다.

0218 **전략** 조건 (가)에서 로그의 성질을 이용하여 a, b, c, d 사이의 관계식을 구한다.

조건 (가)에서

$$\log_{360} 2^a + \log_{360} 3^b + \log_{360} 5^c = d$$

$$\log_{360} (2^a \times 3^b \times 5^c) = d$$

$$\therefore 2^a \times 3^b \times 5^c = 360^d$$

이때 $360^d = (2^3 \times 3^2 \times 5)^d = 2^{3d} \times 3^{2d} \times 5^d$ 이므로

$$a = 3d, b = 2d, c = d$$

즉 a, b, c 의 최대공약수는 d 이므로 조건 (나)에 의하여

$$d = 3$$

따라서 $a = 9, b = 6, c = 3$ 이므로

$$a + b + c + d = 21$$

답 21

0219 [전략] 먼저 주어진 식에서 로그의 밑을 27로 통일하여 간단히 한다.

$$\begin{aligned}\log_{27} 3n^2 + \frac{1}{3} \log_3 \sqrt{n} &= \log_{27} 3n^2 + \log_{27} \sqrt{n} \\ &= \log_{27} 3n^{\frac{5}{2}}\end{aligned}$$

30 이하의 자연수 k 에 대하여 $\log_{27} 3n^{\frac{5}{2}} = k$ 라 하면

$$\begin{aligned}3n^{\frac{5}{2}} &= 27^k = 3^{3k}, & n^{\frac{5}{2}} &= 3^{3k-1} \\ \therefore n &= 3^{\frac{2}{5} \times (3k-1)}\end{aligned}$$

이때 n 이 자연수이므로 $\frac{2}{5} \times (3k-1)$ 은 음이 아닌 정수이어야 한다.

즉 $3k-1$ 은 0 또는 5의 양의 배수이어야 한다.

$1 \leq k \leq 30$ 에서 $2 \leq 3k-1 \leq 89$ 이므로

$$\begin{aligned}3k-1 &= 5, 10, 15, 20, \dots, 80, 85 \\ \therefore k &= 2, \frac{11}{3}, \frac{16}{3}, 7, \dots, 27, \frac{86}{3}\end{aligned}$$

그런데 k 는 자연수이므로

$$k = 2, 7, 12, 17, 22, 27$$

따라서 자연수 k 의 개수가 6이므로 구하는 자연수 n 의 개수도 6이다.

답 6

참고 $k=2, 7, 12, 17, 22, 27$ 일 때 n 의 값은 각각 $3^2, 3^8, 3^{14}, 3^{20}, 3^{26}, 3^{32}$

0220 [전략] 로그의 정의를 이용하여 주어진 조건을 변형한다.

$$\begin{aligned}a^x &= (\sqrt[3]{b^2})^y = (\sqrt[5]{c})^z = 64 \text{에서} \\ a^x &= 64, b^{\frac{2y}{3}} = 64, c^{\frac{z}{5}} = 64 \\ \therefore x &= \log_a 64, \frac{2y}{3} = \log_b 64, \frac{z}{5} = \log_c 64 \\ \therefore \frac{1}{x} + \frac{3}{2y} - \frac{5}{z} &= \frac{1}{\log_a 64} + \frac{1}{\log_b 64} - \frac{1}{\log_c 64} \\ &= \log_{64} a + \log_{64} b - \log_{64} c \\ &= \log_{64} \frac{ab}{c} \\ &= \log_{2^6} 2^{18} \\ &= 3\end{aligned}$$

답 3

0221 [전략] $f(n)$ 이 각각 0, 1, 2인 경우로 나누어 생각한다.

100 이하의 자연수 n 에 대하여 $0 \leq \log n \leq 2$ 이고 $f(n)$ 은 $\log n$ 의 정수 부분이므로

$$f(n) = 0 \text{ 또는 } f(n) = 1 \text{ 또는 } f(n) = 2$$

(i) $f(n) = 0$ 일 때

$$0 \leq \log n < 1 \text{에서 } 1 \leq n < 10 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\text{이때 } f(2n) = f(n) + 1 = 1 \text{이므로 } 1 \leq \log 2n < 2$$

$$10 \leq 2n < 100 \quad \therefore 5 \leq n < 50 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 자연수 n 은 5, 6, 7, 8, 9의 5개이다.

(ii) $f(n) = 1$ 일 때

$$1 \leq \log n < 2 \text{에서 } 10 \leq n < 100 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\text{이때 } f(2n) = f(n) + 1 = 2 \text{이므로 } 2 \leq \log 2n < 3$$

$$100 \leq 2n < 1000 \quad \therefore 50 \leq n < 500 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 자연수 n 은 50, 51, 52, ..., 99의 50개이다.

(iii) $f(n) = 2$ 일 때

$$f(2n) = f(n) + 1 = 3 \text{이므로 } 3 \leq \log 2n < 4$$

$$1000 \leq 2n < 10000 \quad \therefore 500 \leq n < 5000$$

이때 n 은 100 이하의 자연수이므로 조건을 만족시키는 n 은 존재하지 않는다.

이상에서 구하는 자연수 n 의 개수는

$$5 + 50 = 55$$

답 55

다른 풀이 100 이하의 자연수 n 에 대하여 $\log n$ 의 소수 부분을

$$\alpha \ (0 \leq \alpha < 1) \text{라 하면 } \log n = f(n) + \alpha$$

$$\therefore \log 2n = \log 2 + \log n = \log 2 + \{f(n) + \alpha\}$$

$$= \{f(n) + 1\} + \alpha + \log 2 - 1$$

$$= \{f(n) + 1\} + \alpha - \log 5$$

따라서 $f(2n) = f(n) + 1$ 이라면 $\log 2n$ 의 소수 부분이 $\alpha - \log 5$ 이어야 하므로

$$0 \leq \alpha - \log 5 < 1 \quad \therefore \log 5 \leq \alpha < 1 \ (\because 0 \leq \alpha < 1)$$

$$\text{즉 } f(n) = 0 \text{일 때, } \log 5 \leq \log n < 1 \quad \therefore 5 \leq n < 10$$

$$f(n) = 1 \text{일 때, } 1 + \log 5 \leq \log n < 2 \quad \therefore 50 \leq n < 100$$

따라서 구하는 자연수 n 의 개수는

$$(10 - 5) + (100 - 50) = 55$$

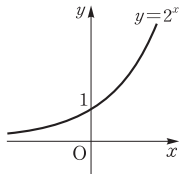
03 지수함수

교과서문제 정복하기

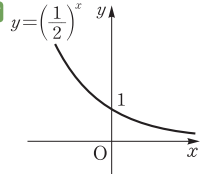
본책 031쪽

0222 **답** 가, 라, 마

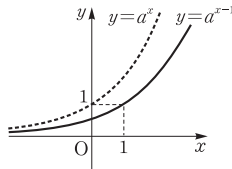
0223 **답**



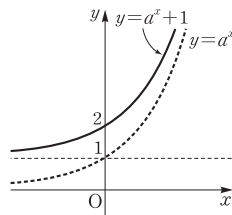
0224 **답**



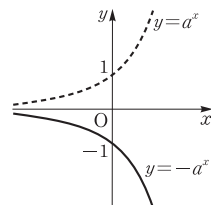
0225 (1) $y = a^{x-1}$ 의 그래프는 $y = a^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



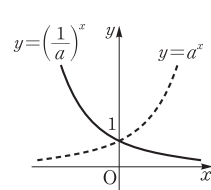
(2) $y = a^x + 1$ 의 그래프는 $y = a^x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



(3) $y = -a^x$ 의 그래프는 $y = a^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



(4) $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ 의 그래프는 $y = a^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0226 **답** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} - 2$

0227 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad \therefore y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x \quad \text{답 } y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

0228 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} \quad \therefore y = 3^x \quad \text{답 } y = 3^x$$

0229 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} \quad \therefore y = -3^x \quad \text{답 } y = -3^x$$

0230 함수 $y = 5^x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로 $-1 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $y = 5^x$ 은

$$x=1 \text{에서 최댓값 } 5^1=5,$$

$$x=-1 \text{에서 최솟값 } 5^{-1}=\frac{1}{5}$$

을 갖는다.

답 최댓값: 5, 최솟값: $\frac{1}{5}$

0231 함수 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로 $-2 \leq x \leq 2$ 일 때, 함수 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 은

$$x=-2 \text{에서 최댓값 } \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=16,$$

$$x=2 \text{에서 최솟값 } \left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$$

을 갖는다.

답 최댓값: 16, 최솟값: $\frac{1}{16}$

0232 함수 $y = 3^{2x-1}$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로 $0 \leq x \leq 2$ 일 때, 함수 $y = 3^{2x-1}$ 은

$$x=2 \text{에서 최댓값 } 3^3=27,$$

$$x=0 \text{에서 최솟값 } 3^{-1}=\frac{1}{3}$$

을 갖는다.

답 최댓값: 27, 최솟값: $\frac{1}{3}$

0233 $f(x) = x^2 + 2x + 3$ 으로 놓으면

$$f(x) = (x+1)^2 + 2 \geq 2$$

이때 주어진 함수는 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 이고 밑이 1보다 작은 양수이므로 최솟값을 갖지 않고,

$$x=-1 \text{에서 최댓값 } \left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

을 갖는다.

답 최댓값: $\frac{1}{4}$, 최솟값: 없다.

0234 $2^x = 128$ 에서 $2^x = 2^7$

$$\therefore x = 7$$

답 $x = 7$

0235 $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 3\sqrt{3}$ 에서 $3^{-2x} = 3^{\frac{3}{2}}$

$$-2x = \frac{3}{2} \quad \therefore x = -\frac{3}{4}$$

답 $x = -\frac{3}{4}$

03

지수함수

0236 (2) $t^2 - 6t + 8 = 0$ 에서 $(t-2)(t-4) = 0$

$\therefore t = 2$ 또는 $t = 4$

(3) $2^x = 2$ 또는 $2^x = 4$ 이므로

$x = 1$ 또는 $x = 2$

답 (1) $t^2 - 6t + 8 = 0$ (2) $t = 2$ 또는 $t = 4$

(3) $x = 1$ 또는 $x = 2$

0237 $3^{2x+1} < 3^x$ 에서 밑이 1보다 크므로

$2x+1 < x \quad \therefore x < -1$

답 $x < -1$

0238 $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{5}\right)^3$ 에서 밑이 1보다 작은 양수이므로

$2x > 3 \quad \therefore x > \frac{3}{2}$

답 $x > \frac{3}{2}$

0239 (2) $t^2 - 10t + 9 \leq 0$ 에서 $(t-1)(t-9) \leq 0$

$\therefore 1 \leq t \leq 9$

(3) $1 \leq 3^x \leq 9$ 이므로 $3^0 \leq 3^x \leq 3^2$

밑이 1보다 크므로 $0 \leq x \leq 2$

답 (1) $t^2 - 10t + 9 \leq 0$ (2) $1 \leq t \leq 9$ (3) $0 \leq x \leq 2$

유형 익히기

• 본책 032~040쪽

0240 ④ $a > 1$ 이면 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가하고,

$0 < a < 1$ 이면 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소한다.

답 ④

0241 ㄷ. 함수 $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ 에서 밑이 1보다 작은 양수이므로

x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

따라서 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$ 이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

0242 임의의 실수 a, b 에 대하여 $a < b$ 일 때, $f(a) < f(b)$ 를 만족시키는 함수 $y = f(x)$ 는 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가한다.

① $f(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

② $f(x) = 0.1^x = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

③ $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 3^x$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ③이다.

답 ③

0243 함수 $y = a^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y = a^{-x}$ ㉠

㉠의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -5 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y = a^{-(x-4)} - 5$ ㉡

㉡의 그래프가 점 $(2, 11)$ 을 지나므로

$11 = a^2 - 5, \quad a^2 = 16$

$\therefore a = 4 (\because a > 0)$

답 4

0244 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ ㉢

㉢의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x-2}, \quad y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{-(x+2)}$

$\therefore y = -2^{x+2}$ ㉣

㉣의 그래프가 점 $(1, k)$ 를 지나므로

$k = -2^3 = -8$

답 -8

0245 ㄱ. $y = \sqrt{2} \times 2^x = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^x = 2^{x+\frac{1}{2}}$

이므로 $y = \sqrt{2} \times 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동하면 $y = 2^x$ 의 그래프와 겹쳐진다.

ㄴ. $y = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$ 이므로 $y = \frac{1}{2^x}$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면 $y = 2^x$ 의 그래프와 겹쳐진다.

따라서 그래프를 평행이동하여 $y = 2^x$ 의 그래프와 겹쳐질 수 없다.

ㄷ. $y = -2^x + 3$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 $y = 2^x$ 의 그래프와 겹쳐진다.

따라서 그래프를 평행이동하여 $y = 2^x$ 의 그래프와 겹쳐질 수 없다.

이상에서 그래프를 평행이동하여 $y = 2^x$ 의 그래프와 겹쳐질 수 있는 함수인 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

0246 $y = a^{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y = a^{3(x-1)} + 2 = a^{3x-3} + 2$ ㉤

㉤이 a 의 값에 관계없이 항상 성립하려면 a 의 지수가 0이어야 한다.

즉 $3x-3=0$ 에서 $x=1$

㉤에 $x=1$ 을 대입하면 $y=3$

따라서 ㉤의 그래프는 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 3)$ 을 지난다.

즉 $a=1, \beta=3$ 이므로

$a+\beta=4$

답 4

다른 풀이 $y = a^{3x}$ 의 그래프는 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 1)$ 을 지나므로 ㉤의 그래프는 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(0+1, 1+2)$, 즉 $(1, 3)$ 을 지난다.

0247 $y=2^x$ 의 그래프가 점 $(0, 1)$ 을

지나므로 $a=1$

직선 $y=x$ 가 점 $(b, 1)$ 을 지나므로

$$b=1$$

$y=2^x$ 의 그래프가 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$c=2$$

이때 직선 $y=x$ 는 점 $(2, 2)$ 를 지나고, $y=2^x$ 의 그래프는 점 $(2, 4)$ 를 지난다.

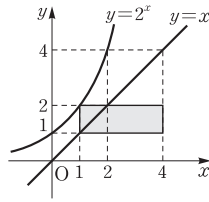
따라서 직선 $y=x$ 가 점 $(4, 4)$ 를 지나므로

$$d=4$$

즉 색칠한 부분의 넓이는

$$(4-1) \times (2-1)=3$$

답 3



0248 $y=4^x$ 의 그래프가 점 $(1, 4)$ 를 지나므로

$$a=4$$

또 점 $(b, 64)$ 를 지나므로

$$64=4^b \quad \therefore b=3$$

$$\therefore a+b=7$$

답 2

0249 $y=a^x$ 의 그래프가 점 $(-1, 3)$ 을 지나므로

$$3=a^{-1} \quad \therefore a=\frac{1}{3}$$

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지나므로 $b=1$

$$\therefore 3(a+b)=3 \times \left(\frac{1}{3}+1\right)=4$$

답 4

0250 함수 $y=2^x$ 의 그래프가 직선

$y=8$ 과 만나는 점 A의 x 좌표는

$$2^x=8=2^3 \text{에서} \quad x=3$$

$$\therefore A(3, 8)$$

... 1단계

함수 $y=4^x$ 의 그래프가 직선 $y=8$ 과 만

나는 점 B의 x 좌표는 $4^x=8$ 에서

$$2^{2x}=2^3, \quad 2x=3$$

$$\therefore x=\frac{3}{2} \quad \therefore B\left(\frac{3}{2}, 8\right)$$

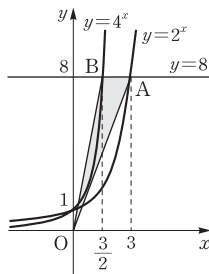
... 2단계

따라서 $\overline{AB}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ 이므로

$$\triangle OAB=\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 8=6$$

... 3단계

답 6



채점 요소		비율
1단계	점 A의 좌표 구하기	40%
2단계	점 B의 좌표 구하기	40%
3단계	삼각형 OAB의 넓이 구하기	20%

0251 $y=25 \times \left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$

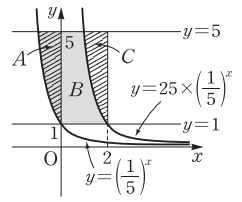
이므로 $y=25 \times \left(\frac{1}{5}\right)^x$ 의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 오른쪽 그림에서 $A=C$ 이므로

구하는 넓이는

$$\begin{aligned} A+B &= B+C \\ &= 2 \times (5-1)=8 \end{aligned}$$

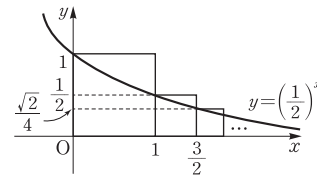
답 4



0252 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 과 y 축의 교점의 좌표가 $(0, 1)$ 이므로 첫 번째로 그린 정사각형의 한 변의 길이는 1

곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 이 점 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 을 지나므로 두 번째로 그린 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{1}{2}$

곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 이 점 $\left(1+\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{2}}\right)$, 즉 $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ 를 지나므로 세 번째로 그린 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{4}$



따라서 구하는 넓이는 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}$

답 2

0253 $A=8^{\frac{1}{4}}=(2^3)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{4}}$, $B=\sqrt[3]{16}=16^{\frac{1}{3}}=(2^4)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{3}}$, $C=\sqrt[5]{32}=32^{\frac{1}{5}}=(2^5)^{\frac{1}{5}}=2^1$

이때 $\frac{3}{4} < 1 < \frac{4}{3}$ 이고 함수 $y=2^x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$$2^{\frac{3}{4}} < 2^1 < 2^{\frac{4}{3}} \quad \therefore A < C < B$$

답 2

0254 $A=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $B=0.25^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}=(2^{-2})^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$, $C=\sqrt[5]{8}=8^{\frac{1}{5}}=(2^3)^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{3}{5}}$

이때 $\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$ 이고 함수 $y=2^x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$$2^{\frac{1}{2}} < 2^{\frac{3}{5}} < 2^{\frac{2}{3}} \quad \therefore A < C < B$$

답 2

0255 $A=\frac{1}{3^2}=\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $B=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}=\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$, $C=\sqrt[5]{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$

이때 $\frac{1}{5} < \frac{1}{3} < 2$ 이고 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5}} \quad \therefore A < B < C$$

답 A < B < C

0256 $a < b$ 이고 함수 $y = a^x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로 $a^a > a^b$

또 $a < b$ 이고 함수 $y = b^x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로 $b^a > b^b$

한편 $a > 0, b > 0$ 이고 $a < b$ 이므로 $a^a < b^a, a^b < b^b$

따라서 가장 작은 수는 a^b 이고, 가장 큰 수는 b^a 이다. **답 ②**

참고 $a^b < a^a < b^a$ 이고 $a^b < b^b < b^a$ 이다.

0257 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = 2^{x+1} - 2$$

즉 $f(x) = 2^{x+1} - 2$ 이고 함수 $y = f(x)$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로 $-3 \leq x \leq 1$ 일 때, $y = f(x)$ 는

$$x = 1 \text{에서 최댓값 } 2^2 - 2 = 2,$$

$$x = -3 \text{에서 최솟값 } 2^{-2} - 2 = -\frac{7}{4}$$

을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $2 + \left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{1}{4}$ **답 ②**

0258 $y = 3^x \times 4^{-x} - 1 = \left(\frac{3}{4}\right)^x - 1$ 이므로 함수

$y = 3^x \times 4^{-x} - 1$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

따라서 $0 \leq x \leq 2$ 일 때, 함수 $y = 3^x \times 4^{-x} - 1$ 은

$$x = 0 \text{에서 최댓값 } 3^0 \times 4^0 - 1 = 0,$$

$$x = 2 \text{에서 최솟값 } 3^2 \times 4^{-2} - 1 = -\frac{7}{16}$$

을 갖는다.

따라서 함수 $y = 3^x \times 4^{-x} - 1$ ($0 \leq x \leq 2$)의 치역은

$$\left\{y \mid -\frac{7}{16} \leq y \leq 0\right\}$$

이므로 $M = 0, m = -\frac{7}{16}$

$$\therefore 80(M + m) = 80 \times \left(0 - \frac{7}{16}\right) = -35 \quad \text{답 } -35$$

0259 $f(x) = 3^{a-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-a}$ 이므로 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이

증가하면 $f(x)$ 의 값은 감소한다.

따라서 $-2 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 최댓값 27을 가지므로

$$f(-2) = 3^{a+2} = 27 = 3^3$$

$$a + 2 = 3 \quad \therefore a = 1$$

즉 $f(x) = 3^{1-x}$ 은

$$x = 3 \text{에서 최솟값 } f(3) = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

을 갖는다.

... 1단계

... 2단계

답 $\frac{1}{9}$

채점 요소	비율
1단계 a 의 값 구하기	60 %
2단계 최솟값 구하기	40 %

0260 (i) $0 < a < 1$ 일 때

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(-1)$, 최솟값은 $f(2)$ 이므로

$$f(-1) = 27f(2)$$

$$a^{-1} = 27a^2, \quad a^3 = \frac{1}{27}$$

$$\therefore a = \frac{1}{3}$$

(ii) $a > 1$ 일 때

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(2)$, 최솟값은 $f(-1)$ 이므로

$$f(2) = 27f(-1)$$

$$a^2 = 27a^{-1}, \quad a^3 = 27$$

$$\therefore a = 3$$

(i), (ii)에서 모든 양수 a 의 값의 합은

$$\frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$$

답 $\frac{10}{3}$

0261 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 으로 놓으면

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x+3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$$

이 함수는 $f(x)$ 가 최대일 때 최솟값, $f(x)$ 가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

이때 $f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$ 이므로 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)$ 는

$$x = 1 \text{일 때 최솟값 } 2, \quad x = -1 \text{일 때 최댓값 } 6$$

을 갖는다.

따라서 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 은

$$x = 1 \text{에서 최댓값 } \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$x = -1 \text{에서 최솟값 } \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

을 가지므로

$$M = \frac{1}{4}, \quad m = \frac{1}{64}$$

$$\therefore \frac{m}{M} = \frac{1}{16}$$

답 ②

0262 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2^{g(x)}$

이 함수는 $g(x)$ 가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

이때 $g(x) = x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$ 이므로 $g(x)$ 는

$$x = -1 \text{에서 최솟값 } 4$$

를 갖는다.

따라서 함수 $(f \circ g)(x)$ 는

$$x = -1 \text{에서 최솟값 } 2^4 = 16$$

을 가지므로 $a = -1, m = 16$

$$\therefore a + m = 15$$

답 15

0263 $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ 로 놓으면

$$y = a^{-x^2+2x+2} = a^{f(x)}$$

$0 < a < 1$ 이므로 이 함수는 $f(x)$ 가 최대일 때 최솟값을 갖는다.

이때 $f(x) = -x^2 + 2x + 2 = -(x-1)^2 + 3$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 3을 갖는다.

따라서 함수 $y = a^{-x^2+2x+2}$ 은

$$x=1 \text{에서 최솟값 } a^3$$

$$\text{을 가지므로 } a^3 = \frac{1}{64} \quad \therefore a = \frac{1}{4}$$

답 ③

0264 $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ 으로 놓으면

$$y = a^{-x^2+4x-3} = a^{f(x)}$$

$0 < a < 1$ 이므로 이 함수는 $f(x)$ 가 최대일 때 최솟값, $f(x)$ 가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

이때 $f(x) = -x^2 + 4x - 3 = -(x-2)^2 + 1$ 이므로 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x)$ 는

$$x=2 \text{일 때 최댓값 } 1, x=0 \text{일 때 최솟값 } -3$$

을 갖는다.

따라서 함수 $y = a^{-x^2+4x-3}$ 은

$$x=0 \text{에서 최댓값 } a^{-3}$$

$$\text{을 가지므로 } a^{-3} = 125 \quad \therefore a = \frac{1}{5}$$

즉 주어진 함수는 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2+4x-3}$ 이고

$$x=2 \text{에서 최솟값 } \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{1}{5}$$

$$\text{을 가지므로 치역은 } \left\{y \mid \frac{1}{5} \leq y \leq 125\right\}$$

$$\therefore m = \frac{1}{5}$$

답 $\frac{1}{5}$

0265 $y = 3^{x+1} - 9^x = 3 \times 3^x - (3^x)^2$

$3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$y = 3t - t^2 = -\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

이때 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $3^{-1} \leq 3^x \leq 3^1$ 이므로 $\frac{1}{3} \leq t \leq 3$

따라서 $\frac{1}{3} \leq t \leq 3$ 일 때, 함수 $y = -\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$ 는

$$t = \frac{3}{2} \text{에서 최댓값 } \frac{9}{4}, t = 3 \text{에서 최솟값 } 0$$

$$\text{을 가지므로 } M = \frac{9}{4}, m = 0$$

$$\therefore M + m = \frac{9}{4}$$

답 ⑤

0266 $y = 4^x - 2^{x+a} + b = (2^x)^2 - 2^a \times 2^x + b$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$y = t^2 - 2^a \times t + b \quad \dots\dots ①$$

이때 ①은 $x=1$, 즉 $t=2^1=2$ 일 때 최솟값 -3 을 가지므로

$$y = (t-2)^2 - 3 = t^2 - 4t + 1$$

과 일치한다.

따라서 $2^a = 4, b = 1$ 이므로 $a = 2, b = 1$

$$\therefore a + b = 3$$

답 3

0267 $y = 4^{-x} - 2^{1-x} + 3 = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$y = t^2 - 2t + 3 = (t-1)^2 + 2$$

이때 $-2 \leq x \leq 1$ 에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \leq t \leq 4$$

따라서 $\frac{1}{2} \leq t \leq 4$ 일 때, 함수 $y = (t-1)^2 + 2$ 는

$$t=1 \text{에서 최솟값 } 2, t=4 \text{에서 최댓값 } 11$$

을 갖는다.

이때 $t=1$, 즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$ 에서 $x=0$

$t=4$, 즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$ 에서 $x=-2$

따라서 $a=0, b=2, c=-2, d=11$ 이므로

$$ab - cd = 0 \times 2 - (-2) \times 11 = 22$$

답 22

0268 $y = 9^x - 2 \times 3^{x+1} + k = (3^x)^2 - 6 \times 3^x + k$

$3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$y = t^2 - 6t + k = (t-3)^2 - 9 + k$$

이때 $1 \leq x \leq 2$ 에서 $3^1 \leq 3^x \leq 3^2$ 이므로 $3 \leq t \leq 9$

따라서 $3 \leq t \leq 9$ 일 때, 함수 $y = (t-3)^2 - 9 + k$ 는

$$t=9 \text{에서 최댓값 } k+27$$

$$\text{을 가지므로 } k+27=18 \quad \therefore k=-9$$

답 -9

0269 $4^x > 0, 4^{-x+3} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} f(x) &= 4^x + 4^{-x+3} \\ &\geq 2\sqrt{4^x \times 4^{-x+3}} = 2 \times 8 = 16 \end{aligned}$$

이때 등호는 $4^x = 4^{-x+3}$ 일 때 성립하므로

$$x = -x + 3 \quad \therefore x = \frac{3}{2}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{3}{2}$ 에서 최솟값 16을 가지므로

$$a = \frac{3}{2}, b = 16 \quad \therefore ab = 24$$

답 24

0270 $2^x > 0, \left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) + g(x) + 4 = 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x + 4 \\ &\geq 2\sqrt{2^x \times \left(\frac{1}{2}\right)^x} + 4 \\ &= 2 + 4 = 6 \quad (\text{단, 등호는 } x=0 \text{일 때 성립}) \end{aligned}$$

따라서 $h(x)$ 의 최솟값은 6이다.

답 6

0271 $3^x + 3^{-x} = t$ 로 놓으면 $3^x > 0$, $3^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t = 3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \times 3^{-x}} = 2$$

(단, 등호는 $x=0$ 일 때 성립)

이때 $9^x + 9^{-x} = (3^x + 3^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$ 이므로 주어진 함수는

$$\begin{aligned} y &= 6(3^x + 3^{-x}) - (9^x + 9^{-x}) \\ &= 6t - (t^2 - 2) = -t^2 + 6t + 2 \\ &= -(t-3)^2 + 11 \end{aligned}$$

따라서 $t \geq 2$ 일 때, 함수 $y = -(t-3)^2 + 11$ 은 $t=3$ 에서 최댓값 11을 갖는다. **답 ③**

0272 $\sqrt{2^x} + \sqrt{2^{-x}} = 2^{\frac{x}{2}} + 2^{-\frac{x}{2}} = t$ 로 놓으면 $2^{\frac{x}{2}} > 0$, $2^{-\frac{x}{2}} > 0$

이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t = 2^{\frac{x}{2}} + 2^{-\frac{x}{2}} \geq 2\sqrt{2^{\frac{x}{2}} \times 2^{-\frac{x}{2}}} = 2$$

(단, 등호는 $x=0$ 일 때 성립)

이때 $2^x + 2^{-x} = (2^{\frac{x}{2}} + 2^{-\frac{x}{2}})^2 - 2 = t^2 - 2$ 이므로 주어진 함수는

$$\begin{aligned} y &= 2^x + 2^{-x} - (\sqrt{2^x} + \sqrt{2^{-x}}) \\ &= t^2 - 2 - t = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \end{aligned}$$

따라서 $t \geq 2$ 일 때, 함수 $y = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ 는 $t=2$ 에서 최솟값 0을 갖는다. **답 0**

0273 $\left(\frac{1}{9}\right)^x \times 27^x = \sqrt{3}$ 에서 $3^{-2x} \times 3^{3x} = 3^{\frac{1}{2}}$

$$3^{-2x+3x} = 3^{\frac{1}{2}}, \quad -2x+3x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 4x^2 - 6x + 1 = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 합은 $\frac{3}{2}$ 이다. **답 ③**

0274 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-4}$ 에서 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-(3x-4)}$

$$x^2 = -(3x-4), \quad x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x+4)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 1$$

답 $x = -4$ 또는 $x = 1$

0275 $3^{x^2-10x} - 27^{-2x+a} = 0$ 에서 $3^{x^2-10x} = 27^{-2x+a}$

$$3^{x^2-10x} = 3^{3(-2x+a)}, \quad x^2 - 10x = 3(-2x+a)$$

$$\therefore x^2 - 4x - 3a = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

방정식 ①의 한 근이 -2 이므로

$$(-2)^2 - 4 \times (-2) - 3a = 0$$

$$3a = 12 \quad \therefore a = 4$$

... 1단계

즉 ①에서 $x^2 - 4x - 12 = 0$ 이므로

$$(x+2)(x-6) = 0 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 6$$

따라서 다른 한 근은 6이다.

... 2단계

답 6

	채점 요소	비율
1단계	a 의 값 구하기	60 %
2단계	다른 한 근 구하기	40 %

0276 $\frac{2^{x^2+1}}{2^{x-1}} = 16$ 에서 $2^{x^2+1-(x-1)} = 2^4$

$$2^{x^2-x+2} = 2^4, \quad x^2 - x + 2 = 4$$

$$x^2 - x - 2 = 0, \quad (x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 $\alpha = -1$, $\beta = 2$ 또는 $\alpha = 2$, $\beta = -1$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = 5$$

답 ②

다른 풀이 이차방정식 $x^2 - x - 2 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -2$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1^2 - 2 \times (-2) = 5$$

0277 $9^x + 27^x = 10 \times 3^{x+2}$ 에서

$$(3^x)^2 + (3^x)^3 = 90 \times 3^x$$

이때 $3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 + t^3 = 90t, \quad t^3 + t^2 - 90t = 0$$

$$t(t+10)(t-9) = 0$$

$$\therefore t = 9 \quad (\because t > 0)$$

즉 $3^x = 9$ 이므로 $x = 2$

따라서 $\alpha = 2$ 이므로 $2^\alpha = 2^2 = 4$

답 ②

0278 $5^{x+1} - 5^{-x} = 4$ 에서

$$5 \times 5^x - \frac{1}{5^x} - 4 = 0$$

이때 $5^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$5t - \frac{1}{t} - 4 = 0, \quad 5t^2 - 4t - 1 = 0$$

$$(5t+1)(t-1) = 0 \quad \therefore t = 1 \quad (\because t > 0)$$

즉 $5^x = 1$ 이므로 $x = 0$

답 $x = 0$

0279 $4^{-x} - 5 \times 2^{-x+1} + 16 = 0$ 에서

$$(2^{-x})^2 - 10 \times 2^{-x} + 16 = 0$$

이때 $2^{-x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 10t + 16 = 0, \quad (t-2)(t-8) = 0$$

$$\therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 8$$

즉 $2^{-x} = 2$ 또는 $2^{-x} = 8$ 이므로

$$-x = 1 \text{ 또는 } -x = 3$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = -3$$

따라서 $\alpha = -3$, $\beta = -1$ 이므로

$$\beta - \alpha = 2$$

답 ②

0280 $a^{2x} - a^x = 6$ 에서 $(a^x)^2 - a^x - 6 = 0$

이때 $a^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - t - 6 = 0, \quad (t+2)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = 3 \quad (\because t > 0)$$

즉 $a^x=3$ 이므로 $x=\frac{1}{4}$ 을 대입하면

$$a^{\frac{1}{4}}=3 \quad \therefore a=3^4=81$$

답 81

0281 (i) $x+7=4$ 에서 $x=-3$

(ii) $x+1=0$, 즉 $x=-1$ 이면 $6^0=4^0$ 이므로 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $x=-3$ 또는 $x=-1$

따라서 모든 근의 합은

$$-3+(-1)=-4$$

답 -4

0282 (i) $x^2-8=2x+7$ 에서 $x^2-2x-15=0$

$$(x+3)(x-5)=0 \quad \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=5$$

그런데 $x>0$ 이므로 $x=5$

(ii) $x=1$ 이면 $1^{-7}=1^9$ 이므로 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=5$

답 $x=1$ 또는 $x=5$

0283 $2^x=X$, $3^y=Y$ ($X>0$, $Y>0$)로 놓으면 주어진 연립 방정식은

$$\begin{cases} X+2Y=26 \\ 2X-Y=7 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면 $X=8$, $Y=9$

즉 $2^x=8$, $3^y=9$ 이므로 $x=3$, $y=2$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=2$ 이므로

$$\alpha+\beta=5$$

답 5

0284 $3^x=X$, $3^y=Y$ ($X>0$, $Y>0$)로 놓으면 주어진 연립 방정식은

$$\begin{cases} X+Y=\frac{28}{3} \\ XY=3 \end{cases}$$

..... ㉠

..... ㉡

㉠에서 $Y=\frac{28}{3}-X$ 이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$$X\left(\frac{28}{3}-X\right)=3$$

$$3X^2-28X+9=0, \quad (3X-1)(X-9)=0$$

$$\therefore X=\frac{1}{3}, Y=9 \text{ 또는 } X=9, Y=\frac{1}{3}$$

즉 $3^x=\frac{1}{3}$, $3^y=9$ 또는 $3^x=9$, $3^y=\frac{1}{3}$ 이므로

$$x=-1, y=2 \text{ 또는 } x=2, y=-1$$

$$\therefore \alpha^2+\beta^2=(-1)^2+2^2=5$$

답 5

0285 $9^x-5 \times 3^{x+1}+27=0$ 에서

$$(3^x)^2-15 \times 3^x+27=0 \quad \text{..... ㉠}$$

이때 $3^x=t$ ($t>0$)로 놓으면

$$t^2-15t+27=0 \quad \text{..... ㉡}$$

방정식 ㉠의 두 근이 α , β 이므로 이차방정식 ㉡의 두 근은 3^α , 3^β 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$3^\alpha \times 3^\beta=27, \quad 3^{\alpha+\beta}=3^3$$

$$\therefore \alpha+\beta=3$$

답 3

0286 $3^{2x}-4 \times 3^x-k=0$ 에서

$$(3^x)^2-4 \times 3^x-k=0 \quad \text{..... ㉠}$$

이때 $3^x=t$ ($t>0$)로 놓으면

$$t^2-4t-k=0 \quad \text{..... ㉡}$$

방정식 ㉠의 두 근을 α , β 라 하면 이차방정식 ㉡의 두 근은 3^α , 3^β 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$3^\alpha \times 3^\beta=-k \quad \therefore 3^{\alpha+\beta}=-k$$

이때 $\alpha+\beta=-1$ 이므로

$$3^{-1}=-k \quad \therefore k=-\frac{1}{3} \quad \text{답 } -\frac{1}{3}$$

0287 $4^x-2^{x+4}+12=0$ 에서

$$(2^x)^2-16 \times 2^x+12=0 \quad \text{..... ㉠}$$

이때 $2^x=t$ ($t>0$)로 놓으면

$$t^2-16t+12=0 \quad \text{..... ㉡}$$

방정식 ㉠의 두 근이 α , β 이므로 이차방정식 ㉡의 두 근은 2^α , 2^β 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2^\alpha+2^\beta=16, \quad 2^\alpha \times 2^\beta=12 \quad \dots \text{1단계}$$

$$\therefore 2^{2\alpha}+2^{2\beta}=(2^\alpha)^2+(2^\beta)^2=(2^\alpha+2^\beta)^2-2 \times 2^\alpha \times 2^\beta$$

$$=16^2-2 \times 12=232 \quad \dots \text{2단계}$$

답 232

채점 요소		비율
1단계	$2^\alpha+2^\beta$, $2^\alpha \times 2^\beta$ 의 값 구하기	50 %
2단계	$2^{2\alpha}+2^{2\beta}$ 의 값 구하기	50 %

0288 $2^x+2^{1-x}+3=a$ 에서

$$2^x+\frac{2}{2^x}+3=a \quad \text{..... ㉠}$$

이때 $2^x=t$ ($t>0$)로 놓으면 $t+\frac{2}{t}+3=a$

양변에 t 를 곱하면 $t^2+2+3t=at$

$$\therefore t^2+(3-a)t+2=0 \quad \text{..... ㉡}$$

방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ㉡이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

즉 이차방정식 ㉡의 판별식을 D 라 하면

$$D=(3-a)^2-4 \times 1 \times 2>0, \quad a^2-6a+1>0$$

$$\therefore a<3-2\sqrt{2} \text{ 또는 } a>3+2\sqrt{2} \quad \text{..... ㉢}$$

또 이차방정식 ㉡의 두 근의 합과 곱이 모두 양수이어야 하므로

$$-(3-a)>0 \quad \therefore a>3 \quad \text{..... ㉣}$$

㉢, ㉣에서 $a>3+2\sqrt{2}$

따라서 정수 a 의 최솟값은 6이다.

답 ⑤

03

지수함수

RPM비법노트

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 서로 다른 두 실근을 α, β , 판별식을 D 라 할 때, 두 실근이 모두 양수이려면
 $D>0, \alpha+\beta>0, \alpha\beta>0$
 이어야 한다.

0289 $5^x \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{x-6}$ 에서 $5^x \leq 5^{6-x}$

밑이 1보다 크므로 $x^2 \leq 6-x$
 $x^2+x-6 \leq 0, (x+3)(x-2) \leq 0$
 $\therefore -3 \leq x \leq 2$

따라서 정수 x 는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ 이므로 구하는 합은
 $-3+(-2)+(-1)+0+1+2=-3$ **답 -3**

0290 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} < \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-x}$ 에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{x}{2}}$

밑이 1보다 작은 양수이므로
 $2x+1 > -\frac{x}{2}, \frac{5}{2}x > -1$
 $\therefore x > -\frac{2}{5}$ **답 $x > -\frac{2}{5}$**

0291 $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \geq \frac{1}{64}$ 에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^6$

밑이 1보다 작은 양수이므로
 $3x \leq 6 \therefore x \leq 2$
 $\therefore A = \{x | x \leq 2\}$
 $27^{x^2-5x-8} < 9^{x^2-5x-8}$ 에서 $3^{3(x^2-5x-8)} < 3^{2(x^2-5x-8)}$
 밑이 1보다 크므로
 $3(x^2-5x-8) < 2(x^2-5x-8), x^2-5x-24 < 0$
 $(x+3)(x-8) < 0 \therefore -3 < x < 8$
 $\therefore B = \{x | -3 < x < 8\}$

따라서 $A \cap B = \{x | -3 < x \leq 2\}$ 이므로 집합 $A \cap B$ 의 원소 중 정수인 것은 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다. **답 5**

0292 $\left(\frac{1}{10}\right)^{f(x)} \leq \left(\frac{1}{10}\right)^{g(x)}$ 에서 밑이 1보다 작은 양수이므로

$f(x) \geq g(x)$
 따라서 주어진 부등식의 해는 곡선 $y=f(x)$ 가 직선 $y=g(x)$ 보다 위쪽에 있거나 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 가 만날 때의 x 의 값의 범위이므로
 $x \leq a$ 또는 $0 \leq x \leq c$ **답 ②**

0293 $4^{-x} - 9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 32 < 0$ 에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - 18 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 32 < 0$
 이때 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $t^2 - 18t + 32 < 0, (t-2)(t-16) < 0$
 $\therefore 2 < t < 16$

즉 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$ 이고 밑이 1보다 작은 양수이므로
 $-4 < x < -1$

따라서 $\alpha = -4, \beta = -1$ 이므로 $\alpha + \beta = -5$ **답 -5**

0294 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} + 1$ 에서

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 + \frac{1}{9} \times \left(\frac{1}{3}\right)^x > 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$
 이때 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $t^2 + \frac{1}{9}t > 9t + 1, 9t^2 - 80t - 9 > 0$
 $(9t+1)(t-9) > 0 \therefore t > 9$ ($\because t > 0$)
 즉 $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ 이고 밑이 1보다 작은 양수이므로
 $x < -2$
 따라서 정수 x 의 최댓값은 -3 이다. **답 -3**

0295 (i) $2^{2x+2} - 65 \times 2^{x-2} \leq -1$ 에서

$4 \times (2^x)^2 - \frac{65}{4} \times 2^x + 1 \leq 0$
 이때 $2^x = a$ ($a > 0$)로 놓으면
 $4a^2 - \frac{65}{4}a + 1 \leq 0, 16a^2 - 65a + 4 \leq 0$
 $(16a-1)(a-4) \leq 0 \therefore \frac{1}{16} \leq a \leq 4$
 즉 $2^{-4} \leq 2^x \leq 2^2$ 이고 밑이 1보다 크므로
 $-4 \leq x \leq 2$
 (ii) $9^x + 3^x > 12$ 에서 $(3^x)^2 + 3^x - 12 > 0$
 이때 $3^x = b$ ($b > 0$)로 놓으면
 $b^2 + b - 12 > 0, (b+4)(b-3) > 0$
 $\therefore b > 3$ ($\because b > 0$)
 즉 $3^x > 3^1$ 이고 밑이 1보다 크므로
 $x > 1$

(i), (ii)에서 주어진 연립부등식의 해는 $1 < x \leq 2$
 따라서 $\alpha = 1, \beta = 2$ 이므로 $\alpha + \beta = 3$ **답 3**

0296 $4^{x+1} + a \times 2^x + b \leq 0$ 에서

$4 \times (2^x)^2 + a \times 2^x + b \leq 0$ ㉠

이때 $2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $4t^2 + at + b \leq 0$ ㉡

한편 부등식 ㉠의 해가 $-3 \leq x \leq 2$ 이므로

$2^{-3} \leq 2^x \leq 2^2$, 즉 $\frac{1}{8} \leq t \leq 4$
 t^2 의 계수가 4이고 해가 $\frac{1}{8} \leq t \leq 4$ 인 이차부등식은
 $4\left(t - \frac{1}{8}\right)(t-4) \leq 0 \therefore 4t^2 - \frac{33}{2}t + 2 \leq 0$
 이 부등식이 ㉡과 일치하므로 $a = -\frac{33}{2}, b = 2$
 $\therefore ab = -33$ **답 -33**

RPM **비법 노트**

이차부등식의 작성

(1) 해가 $x < \alpha$ 또는 $x > \beta$ ($\alpha < \beta$)이고 x^2 의 계수가 k ($k > 0$)인 이차부등식은

$$k(x-\alpha)(x-\beta) > 0$$

(2) 해가 $\alpha < x < \beta$ 이고 x^2 의 계수가 k ($k > 0$)인 이차부등식은

$$k(x-\alpha)(x-\beta) < 0$$

0297 $x^{x-1} \geq x^{-x+5}$ 에서

(i) $0 < x < 1$ 일 때, 밑이 1보다 작은 양수이므로

$$x-1 \leq -x+5 \quad \therefore x \leq 3$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 $0 < x < 1$

(ii) $x=1$ 일 때

$1^0 \geq 1^4$ 이므로 부등식이 성립한다.

(iii) $x > 1$ 일 때, 밑이 1보다 크므로

$$x-1 \geq -x+5 \quad \therefore x \geq 3$$

이상에서 $0 < x \leq 1$ 또는 $x \geq 3$ **답 0 < x ≤ 1 또는 x ≥ 3**

0298 $x > -1$ 이므로 $x+2 > 1$

즉 $(x+2)^{x^2+3} < (x+2)^{4x}$ 에서 밑이 1보다 크므로

$$x^2+3 < 4x, \quad x^2-4x+3 < 0$$

$$(x-1)(x-3) < 0 \quad \therefore 1 < x < 3$$

답 ①

0299 $x^{3x+1} > x^{x+5}$ 에서

(i) $0 < x < 1$ 일 때, 밑이 1보다 작은 양수이므로

$$3x+1 < x+5 \quad \therefore x < 2$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 $0 < x < 1$

(ii) $x=1$ 일 때, $1^4 > 1^6$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x > 1$ 일 때, 밑이 1보다 크므로

$$3x+1 > x+5 \quad \therefore x > 2$$

이상에서 $0 < x < 1$ 또는 $x > 2$

따라서 주어진 부등식의 해가 아닌 것은 ② $\frac{3}{2}$ 이다. **답 ②**

0300 $x^{2x^2-5x} > \frac{1}{x^2}$ 에서 $x^{2x^2-5x} > x^{-2}$

(i) $0 < x < 1$ 일 때, 밑이 1보다 작은 양수이므로

$$2x^2-5x < -2, \quad 2x^2-5x+2 < 0$$

$$(2x-1)(x-2) < 0 \quad \therefore \frac{1}{2} < x < 2$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 $\frac{1}{2} < x < 1$

(ii) $x=1$ 일 때, $1^{-3} > 1^{-2}$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x > 1$ 일 때, 밑이 1보다 크므로

$$2x^2-5x > -2, \quad 2x^2-5x+2 > 0$$

$$(2x-1)(x-2) > 0 \quad \therefore x < \frac{1}{2} \text{ 또는 } x > 2$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $x > 2$

이상에서 주어진 부등식의 해는 $\frac{1}{2} < x < 1$ 또는 $x > 2$ 이므로

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1, \gamma = 2$$

$$\therefore \alpha\beta\gamma = 1$$

답 1

0301 $2^{2x} - 2^{x+1} + k > 0$ 에서

$$(2^x)^2 - 2 \times 2^x + k > 0$$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 2t + k > 0$$

$$\therefore (t-1)^2 - 1 + k > 0$$

..... ①

$t > 0$ 에서 이차부등식 ①이 항상 성립하려면

$$-1 + k > 0 \quad \therefore k > 1$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 2이다. **답 ③**

0302 $4^x - 2^{x+3} + 2a - 6 \geq 0$ 에서

$$(2^x)^2 - 8 \times 2^x + 2a - 6 \geq 0$$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 8t + 2a - 6 \geq 0$$

$$\therefore (t-4)^2 + 2a - 22 \geq 0$$

..... ①

$t > 0$ 에서 이차부등식 ①이 항상 성립하려면

$$2a - 22 \geq 0 \quad \therefore a \geq 11$$

따라서 실수 a 의 최솟값은 11이다. **답 ②**

0303 $9^x - 3^x + k > 0$ 에서

$$(3^x)^2 - 3^x + k > 0$$

$3^x = t$ 로 놓으면 $x > 0$ 에서 $3^x > 3^0$, 즉 $t > 1$ 이고

$$t^2 - t + k > 0$$

$$\therefore \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + k - \frac{1}{4} > 0$$

..... ①

... 1단계

$t > 1$ 에서 이차부등식 ①이 항상 성립하려면

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + k - \frac{1}{4} \geq 0$$

$$\therefore k \geq 0$$

... 2단계

답 k ≥ 0

	채점 요소	비율
1단계	$3^x = t$ 로 놓고 주어진 부등식을 t 에 대한 부등식으로 변형하기	50 %
2단계	k 의 값의 범위 구하기	50 %

0304 1024 g에서 $\frac{1}{4}$ g으로 감소하는 데 x 년이 걸린다고 하면

$$1024 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{50}} = \frac{1}{4}$$

$$2^{10 - \frac{x}{50}} = 2^{-2}, \quad 10 - \frac{x}{50} = -2$$

$$\frac{x}{50} = 12 \quad \therefore x = 600$$

따라서 1024 g에서 $\frac{1}{4}$ g으로 감소하는 데에는 600년이 걸린다.

답 600년

0305 세균 A 10마리가 2시간 후 90마리가 되었으므로

$$10a^2=90, \quad a^2=9$$

$$\therefore a=3 \quad (\because a>0)$$

따라서 세균 A 10마리가 t 시간 후 7290마리 이상이 된다고 하면

$$10 \times 3^t \geq 7290, \quad 3^t \geq 729$$

$$3^t \geq 3^6 \quad \therefore t \geq 6$$

즉 세균 A 10마리가 7290마리 이상이 되는 것은 최소 6시간 후
이므로

$$n=6$$

답 6

0306 두 배양기 A, B에 넣은 박테리아의 수를 각각 a 라 하면 t 시간 후 두 배양기 A, B에 있는 박테리아의 수는 각각

$$a \times 2^t, \quad a \times 4^{\frac{t}{3}}$$

따라서 두 배양기 A, B에 있는 박테리아의 수의 합이 처음 넣은 박테리아의 수의 합의 40배가 되려면

$$a \times 2^t + a \times 4^{\frac{t}{3}} = 40(a+a)$$

$$a>0 \text{이므로} \quad 2^t + 2^{\frac{2}{3}t} = 80$$

$$\text{이때 } 2^{\frac{t}{3}} = X \quad (X>0) \text{로 놓으면}$$

$$X^3 + X^2 = 80, \quad X^3 + X^2 - 80 = 0$$

$$(X-4)(X^2+5X+20)=0$$

$$\therefore X=4 \quad (\because X^2+5X+20>0)$$

$$\text{즉 } 2^{\frac{t}{3}}=4 \text{에서} \quad 2^{\frac{t}{3}}=2^2$$

$$\frac{t}{3}=2 \quad \therefore t=6$$

따라서 두 배양기에 있는 박테리아의 수의 합이 처음 넣은 박테리아의 수의 합의 40배가 되는 것은 6시간 후이다.

답 6시간

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 041~044쪽

0307 함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$g(a)=-1 \text{에서} \quad f(-1)=a$$

$$\therefore a=\left(\frac{1}{2}\right)^0-3=1-3=-2$$

$$g(b)=1 \text{에서} \quad f(1)=b$$

$$\therefore b=\left(\frac{1}{2}\right)^2-3=-\frac{11}{4}$$

$$\therefore ab=\frac{11}{2}$$

답 ④

RPM 비법 노트

함수 $y=f(x)$ 의 역함수를 $y=g(x)$ 라 할 때

$$(1) f(g(x))=x$$

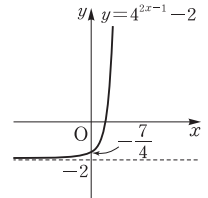
$$(2) f(a)=b \iff g(b)=a$$

$$0308 \quad y=4^{2x-1}-2=4^{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}-2=16^{x-\frac{1}{2}}-2$$

따라서 $y=4^{2x-1}-2$ 의 그래프는 $y=16^x$

의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼, y 축

의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



① 정의역은 $\{x|x \text{는 실수}\}$, 치역은 $\{y|y>-2\}$ 이다.

② x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

③ 함수 $y=4^{2x-1}-2$ 의 그래프의 점근선은 직선 $y=-2$ 이므로 그래프는 직선 $y=-2$ 와 만나지 않는다.

④ 함수 $y=4^{2x-1}-2$ 의 그래프는 $y=16^x$ 의 그래프를 평행이동한 것이므로 그래프를 평행이동하여 $y=4^x$ 의 그래프와 겹쳐지지 않는다.

⑤ 그래프는 제 2 사분면을 지나지 않는다.

답 ③

0309 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y=\left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \therefore y=-2^{-x} \quad \dots\dots ㉠$$

㉠의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=-2^{-(x-a)}+b$$

이 그래프가 점 $(-1, -1)$ 을 지나므로

$$-1=-2^{1+a}+b \quad \dots\dots ㉡$$

또 점 $(-2, -9)$ 를 지나므로

$$-9=-2^{2+a}+b \quad \dots\dots ㉢$$

㉡-㉢을 하면

$$8=-2^{1+a}+2^{2+a}, \quad 2^3=2^{1+a}$$

$$3=1+a \quad \therefore a=2$$

㉡에 $a=2$ 를 대입하면

$$-1=-2^3+b \quad \therefore b=7$$

$$\therefore a+b=9$$

답 9

0310 $y=2^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y=2^{-x} \quad \dots\dots ㉠$$

㉠의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=2^{-(x-a)}+b \quad \dots\dots ㉡$$

㉔의 그래프의 점근선이 직선 $y=b$ 이므로

$$b=-2$$

또 ㉔의 그래프가 원점을 지나므로

$$0=2^a-2, \quad 2^a=2 \quad \therefore a=1$$

$$\therefore a-b=3$$

답 3

0311 $y=2^{-2x+2}+n=2^{-2(x-1)}+n$ 에서

$$y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}+n$$

..... ㉔

㉔의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로 $x=0$ 일 때 $y \leq 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉 } \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}+n \leq 0 \text{ 이므로}$$

$$n \leq -4$$

따라서 n 의 최댓값은 -4 이다.

답 -4

0312 $y=a^x$ 의 그래프가 두 점 $(p, 2)$, $(q, 5)$ 를 지나므로

$$a^p=2, \quad a^q=5$$

$$\therefore f\left(\frac{p+q}{2}\right)=a^{\frac{p+q}{2}}=(a^{p+q})^{\frac{1}{2}}$$

$$=(a^p \times a^q)^{\frac{1}{2}}=(2 \times 5)^{\frac{1}{2}}$$

$$=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$$

답 $\sqrt{10}$

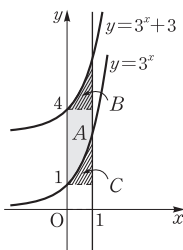
0313 $y=3^x+3$ 의 그래프는 $y=3^x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 오른쪽 그림에서 $B=C$ 이므로 구하는 넓이는

$$A+B=A+C$$

$$=1 \times (4-1)=3$$

답 3



0314 $A=\sqrt[3]{0.25}=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

$$B=2^{-\frac{3}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$C=\sqrt[4]{32^{-1}}=\sqrt[4]{\frac{1}{32}}=\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4}}$$

이때 $\frac{2}{3} < \frac{5}{4} < \frac{3}{2}$ 이고 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore B < C < A$$

답 ③

0315 함수 $f(x)=4^x$ 에서 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값도 증가하므로 $-2 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는

$$x=3 \text{에서 최댓값 } 4^3=64$$

를 갖는다.

$$\therefore M=64$$

또 함수 $g(x)=\left(\frac{1}{8}\right)^{x-2}$ 에서 x 의 값이 증가하면 $g(x)$ 의 값은 감소하므로 $-2 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $g(x)$ 는

$$x=3 \text{에서 최솟값 } \left(\frac{1}{8}\right)^1=\frac{1}{8}$$

을 갖는다.

$$\therefore m=\frac{1}{8} \quad \therefore Mm=8$$

답 8

0316 $f(x)=x^2-4x$ 로 놓으면

$$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}$$

이 함수는 밑이 1보다 작은 양수이므로 $f(x)$ 가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

이때 $f(x)=x^2-4x=(x-2)^2-4$ 이므로 $f(x)$ 는

$$x=2 \text{에서 최솟값 } -4$$

를 갖는다.

따라서 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x}$ 은

$$x=2 \text{에서 최댓값 } \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=81$$

을 가지므로 $a=2, b=81$

$$\therefore a+b=83$$

답 83

0317 $y=4^x-2^{x+1}+k=(2^x)^2-2 \times 2^x+k$

$2^x=t$ ($t>0$)로 놓으면

$$y=t^2-2t+k=(t-1)^2-1+k$$

이때 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $2^0 \leq 2^x \leq 2^3$ 이므로

$$1 \leq t \leq 8$$

따라서 $1 \leq t \leq 8$ 일 때, 함수 $y=(t-1)^2-1+k$ 는

$$t=8 \text{에서 최댓값 } k+48$$

을 가지므로 $k+48=50$

$$\therefore k=2$$

답 ②

0318 $3^{a+x} > 0, 3^{a-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$y=3^{a+x}+3^{a-x} \geq 2\sqrt{3^{a+x} \times 3^{a-x}}$$

$$=2 \times 3^a \quad (\text{단, 등호는 } x=0 \text{일 때 성립})$$

따라서 함수 $y=3^{a+x}+3^{a-x}$ 의 최솟값은 2×3^a 이므로

$$2 \times 3^a=54, \quad 3^a=27=3^3$$

$$\therefore a=3$$

답 3

0319 $2^x+2^{-x}=t$ 로 놓으면 $2^x > 0, 2^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t=2^x+2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \times 2^{-x}}=2$$

(단, 등호는 $x=0$ 일 때 성립)

03

지수함수

이때 $4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$ 이므로 주어진 함수는

$$\begin{aligned} y &= 4^x + 4^{-x} + 6(2^x + 2^{-x}) + 3 \\ &= t^2 - 2 + 6t + 3 = t^2 + 6t + 1 \\ &= (t+3)^2 - 8 \end{aligned}$$

따라서 $t \geq 2$ 일 때, 함수 $y = (t+3)^2 - 8$ 은 $t=2$ 에서 최솟값 17을 갖는다.

답 ④

0320 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3x} = 3^{x^2-4}$ 에서 $3^{3x} = 3^{x^2-4}$

$$\begin{aligned} 3x &= x^2 - 4, & x^2 - 3x - 4 &= 0 \\ (x+1)(x-4) &= 0 & \therefore x &= -1 \text{ 또는 } x=4 \end{aligned}$$

따라서 모든 실근의 곱은

$$-1 \times 4 = -4$$

답 ③

0321 $\begin{cases} 3 \times 2^x - 2 \times 3^y = 18 \\ 2^{x-2} - 3^{y-1} = 1 \end{cases}$ 에서

$$\begin{cases} 3 \times 2^x - 2 \times 3^y = 18 \\ \frac{1}{4} \times 2^x - \frac{1}{3} \times 3^y = 1 \end{cases}$$

이때 $2^x = X$, $3^y = Y$ ($X > 0$, $Y > 0$)로 놓으면

$$\begin{cases} 3X - 2Y = 18 \\ \frac{1}{4}X - \frac{1}{3}Y = 1 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면 $X=8$, $Y=3$

즉 $2^x=8$, $3^y=3$ 이므로

$$x=3, y=1$$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=1$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = 10$$

답 10

0322 $a^{2x} - 8 \times a^x + 5 = 0$ 에서

$$(a^x)^2 - 8 \times a^x + 5 = 0$$

$a^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 8t + 5 = 0 \quad \dots\dots ①$$

주어진 방정식의 두 근을 α , β 라 하면 이차방정식 ①의 두 근은 a^α , a^β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a^\alpha \times a^\beta = 5 \quad \therefore a^{\alpha+\beta} = 5$$

이때 $\alpha + \beta = 3$ 이므로 $a^3 = 5$

$$\therefore a = \sqrt[3]{5}$$

답 ①

0323 $4^x - k \times 2^{x+1} + 64 = 0$ 에서

$$(2^x)^2 - 2k \times 2^x + 64 = 0$$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 2kt + 64 = 0 \quad \dots\dots ①$$

주어진 방정식이 오직 하나의 실근 α 를 가지려면 이차방정식 ①의 양의 실근은 2^α 뿐이어야 한다.

이때 이차방정식 ①의 두 근의 곱이 양수이므로 ①은 2^α 을 중근으로 가져야 한다.

034 정답 및 풀이

따라서 이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - 64 = 0$$

$$k^2 = 64 \quad \therefore k = 8 \quad (\because k > 0)$$

즉 ①에서 $t^2 - 16t + 64 = 0$, $(t-8)^2 = 0 \quad \therefore t = 8$

따라서 $2^\alpha = 8$ 이므로 $\alpha = 3$

$$\therefore k + \alpha = 11$$

답 ③

참고 $k \leq 0$ 이면 이차방정식 ①의 두 근의 합 $2k$ 가 0 또는 음수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

0324 $\left(\frac{1}{8}\right)^{2x+1} < 32 < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-9}$ 에서

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3(2x+1)} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-9}$$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$3x - 9 < -5 < 3(2x+1)$$

(i) $3x - 9 < -5$ 에서 $3x < 4 \quad \therefore x < \frac{4}{3}$

(ii) $-5 < 3(2x+1)$ 에서 $-5 < 6x+3$

$$6x > -8 \quad \therefore x > -\frac{4}{3}$$

(i), (ii)에서 $-\frac{4}{3} < x < \frac{4}{3}$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x 는 $-1, 0, 1$ 의 3개이다.

답 ③

0325 $4^x - 2^{x+1} - 8 < 0$ 에서 $(2^x)^2 - 2 \times 2^x - 8 < 0$

이때 $2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 2t - 8 < 0, \quad (t+2)(t-4) < 0$$

$$\therefore 0 < t < 4 \quad (\because t > 0)$$

즉 $0 < 2^x < 2^2$ 이므로 $x < 2$

$$\therefore A = \{x \mid x < 2\}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}$ 에서 밑이 1보다 작은 양수이므로

$$x^2 < 2x+3, \quad x^2 - 2x - 3 < 0$$

$$(x+1)(x-3) < 0 \quad \therefore -1 < x < 3$$

$$\therefore B = \{x \mid -1 < x < 3\}$$

$$\therefore B - A = \{x \mid 2 \leq x < 3\}$$

답 $\{x \mid 2 \leq x < 3\}$

0326 $x^{x^2-5} < x^{4x}$ 에서

(i) $0 < x < 1$ 일 때, 밑이 1보다 작은 양수이므로

$$x^2 - 5 > 4x, \quad x^2 - 4x - 5 > 0$$

$$(x+1)(x-5) > 0 \quad \therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 5$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $x=1$ 일 때, $1^{-4} < 1^4$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x > 1$ 일 때, 밑이 1보다 크므로

$$x^2 - 5 < 4x, \quad x^2 - 4x - 5 < 0$$

$$(x+1)(x-5) < 0 \quad \therefore -1 < x < 5$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x < 5$

이상에서 $1 < x < 5$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=5$ 이므로 $\alpha + \beta = 6$

답 6

0327 $3^t = a$ ($a > 0$)로 놓으면 주어진 부등식은

$$3x^2 - (a+3)x + (a+3) > 0$$

이 이차부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식 $3x^2 - (a+3)x + (a+3) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = \{-(a+3)\}^2 - 4 \times 3 \times (a+3) < 0$$

$$a^2 - 6a - 27 < 0, \quad (a+3)(a-9) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 9 \quad (\because a > 0)$$

$$\text{즉 } 0 < 3^t < 3^2 \text{이므로 } t < 2$$

답 ④

0328 살충제를 살포하기 전의 해충 수를 a ($a > 0$)라 하고 살충제를 살포한 직후부터 x 시간 후의 해충 수가 처음의 $\frac{1}{32}$ 이 된다고 하면

$$a \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{6}} = \frac{1}{32}a$$

$$\text{이때 } a > 0 \text{이므로 } \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{6}} = \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$\frac{x}{6} = 5 \quad \therefore x = 30$$

따라서 해충 수가 처음의 $\frac{1}{32}$ 이 되기까지는 30시간이 걸린다.

답 30시간

0329 자동차의 중고가는 구입 후 1년마다 20 %씩 떨어지므로 중고가는 1년 전의 중고가의 $\frac{4}{5}$ 가 된다.

n 년 후 자동차의 중고가가 1024만 원 이하가 된다고 하면

$$2500 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n \leq 1024, \quad \left(\frac{4}{5}\right)^n \leq \frac{256}{625}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^4 \quad \therefore n \geq 4$$

따라서 자동차의 중고가가 1024만 원 이하가 되는 것은 구입한 날로부터 최소 4년 후이다.

답 4년

0330 정사각형 ACDB의 넓이가 4이므로

$$\overline{AC} = \overline{AB} = 2$$

... 1단계

따라서 점 A의 좌표를 $(a, 2)$ 라 하면 점 B의 좌표는 $(a+2, 2)$

이므로

... 2단계

$$2 = 3^a$$

..... ㉠

$$2 = k \times 3^{a+2} = 9k \times 3^a$$

..... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$$2 = 9k \times 2 \quad \therefore k = \frac{1}{9}$$

... 3단계

답 $\frac{1}{9}$

	채점 요소	비율
1단계	정사각형 ACDB의 한 변의 길이 구하기	20 %
2단계	점 A의 x 좌표를 a 라 하고, 두 점 A, B의 좌표를 a 에 대한 식으로 나타내기	30 %
3단계	k 의 값 구하기	50 %

0331 이차함의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 가 $x = -2$ 에서 최솟값 -1 을 가지므로

$$f(x) = (x+2)^2 - 1$$

... 1단계

한편 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 은 밑이 1보다 작은 양수이므로 $f(x)$ 가 최대일 때 최솟값을 갖는다.

이때 $-4 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 는

$$x = 1 \text{일 때 최댓값 } 8$$

을 갖는다.

... 2단계

$$\text{따라서 함수 } y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} \text{은}$$

$$x = 1 \text{에서 최솟값 } \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$$

을 갖는다.

... 3단계

답 $\frac{1}{256}$

	채점 요소	비율
1단계	$f(x)$ 의 식 구하기	30 %
2단계	$f(x)$ 의 최댓값 구하기	30 %
3단계	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 의 최솟값 구하기	40 %

0332 $\left(\frac{1}{4}\right)^x - m \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + n < 0$ 에서

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - m \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + n < 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - mt + n < 0$$

..... ㉠

... 1단계

한편 주어진 부등식의 해가 $-3 < x < -1$ 이므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}, \text{ 즉 } 2 < t < 8$$

... 2단계

t^2 의 계수가 1이고 해가 $2 < t < 8$ 인 이차부등식은

$$(t-2)(t-8) < 0 \quad \therefore t^2 - 10t + 16 < 0$$

이 부등식이 ㉠과 일치하므로 $m = 10, n = 16$

$$\therefore mn = 160$$

... 3단계

답 160

	채점 요소	비율
1단계	$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ 로 놓고 주어진 부등식을 t 에 대한 부등식으로 변형하기	30 %
2단계	t 에 대한 부등식의 해 구하기	30 %
3단계	mn 의 값 구하기	40 %

0333 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+3k} \leq 4^{2-kx}$ 에서

$$2^{-x^2-3k} \leq 2^{4-2kx}$$

밑이 1보다 크므로

$$-x^2 - 3k \leq 4 - 2kx$$

$$\therefore x^2 - 2kx + 3k + 4 \geq 0$$

..... ㉠

... 1단계

모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 ㉠이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2 - 2kx + 3k + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - (3k + 4) \leq 0$$

$$k^2 - 3k - 4 \leq 0, \quad (k+1)(k-4) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq k \leq 4$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 4이다.

... 2단계

... 3단계

답 4

	채점 요소	비율
1단계	x 에 대한 이차부등식 세우기	40 %
2단계	k 의 값의 범위 구하기	50 %
3단계	k 의 최댓값 구하기	10 %

0334 전략 a 에 3, 4, 5, ...를 차례대로 대입하여 선분 AB 의 길이를 구해 본다.

두 점 A, B 의 좌표는 각각

$$(a, 2^a), \left(a, 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^a\right)$$

$$\text{이므로 } \overline{AB} = 2^a - 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^a \quad (\because a > 2)$$

이때 a 는 2보다 큰 자연수이므로

$$(i) a=3 \text{ 일 때, } \overline{AB} = 2^3 - 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{27}{4}$$

$$(ii) a=4 \text{ 일 때, } \overline{AB} = 2^4 - 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{123}{8}$$

$$(iii) a=5 \text{ 일 때, } \overline{AB} = 2^5 - 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{507}{16}$$

$$(iv) a=6 \text{ 일 때, } \overline{AB} = 2^6 - 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{2043}{32}$$

$$(v) a=7 \text{ 일 때, } \overline{AB} = 2^7 - 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{8187}{64}$$

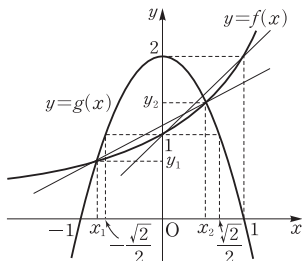
이상에서 $\overline{AB} < 100$ 을 만족시키는 자연수 a 는 3, 4, 5, 6의 4개이다.

답 4

0335 전략 두 곡선 $y=2^x$ 과 $y=-2x^2+2$ 의 위치 관계를 이용한다.

$f(x)=2^x, g(x)=-2x^2+2$ 라 하면 두 곡선 $y=f(x),$

$y=g(x)$ 는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 위의 그래프에서 $x_1 < x < x_2$ 일 때 $f(x) < g(x)$ 이고, $x < x_1$ 또는 $x > x_2$ 일 때 $f(x) > g(x)$ 이다.

$$\text{이때 } f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}, g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) < g\left(\frac{1}{2}\right) \quad \therefore x_2 > \frac{1}{2} \text{ (참)}$$

ㄴ. 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 의 교점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

두 점 $(0, 1), (1, 2)$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{2-1}{1-0} = 1$$

이때 위의 그래프에서 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 1$ 이므로

$$y_2 - y_1 < x_2 - x_1 \quad (\because x_2 > x_1) \text{ (참)}$$

ㄷ. $y_1 = f(x_1) = 2^{x_1}, y_2 = f(x_2) = 2^{x_2}$ 이므로

$$y_1 y_2 = 2^{x_1} \times 2^{x_2} = 2^{x_1 + x_2}$$

한편 직선 $y=1$ 이 곡선 $y=g(x)$ 와 만나는 점의 x 좌표는

$$g(x)=1 \text{ 에서 } -2x^2 + 2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 ㄱ에서 $x_2 > \frac{1}{2}$ 이고 $y_1 < 1, y_2 > 1$ 이므로

$$-1 < x_1 < -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} < x_2 < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{즉 } -\frac{1}{2} < x_1 + x_2 < 0 \text{ 이므로 } 2^{-\frac{1}{2}} < 2^{x_1 + x_2} < 2^0$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1 \text{ (참)}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 5

0336 전략 $a > 1$ 인 경우와 $0 < a < 1$ 인 경우로 나누어 생각한다.

$-1 \leq x \leq 2$ 에서

$$-2 \leq x-1 \leq 1, \quad 0 \leq |x-1| \leq 2$$

$$\therefore 2 \leq |x-1| + 2 \leq 4$$

따라서 $f(x) = |x-1| + 2$ 로 놓으면 $2 \leq f(x) \leq 4$ 이고

$$y = a^{|x-1|+2} = a^{f(x)}$$

(i) $a > 1$ 일 때

함수 $y=a^{f(x)}$ 은 밑이 1보다 크므로 $f(x)$ 가 최대일 때 최댓값을 갖는다.

즉 $y=a^{f(x)}$ 은 $f(x)=4$ 일 때 최댓값 a^4 을 가지므로

$$a^4 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because a > 0)$$

그런데 $a > 1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $0 < a < 1$ 일 때

함수 $y=a^{f(x)}$ 은 밑이 1보다 작은 양수이므로 $f(x)$ 가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

즉 $y=a^{f(x)}$ 은 $f(x)=2$ 일 때 최댓값 a^2 을 가지므로

$$a^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore a = \frac{1}{2} \quad (\because a > 0)$$

(i), (ii)에서 $a = \frac{1}{2}$

따라서 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 은 $f(x)=4$ 일 때 최솟값 $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ 을 갖

는다.

답 $\frac{1}{16}$

04 로그함수

교과서문제 정복하기

본책 047쪽

0337 $y=10^x$ 에서 $x=\log y$
 x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
 $y=\log x$

답 $y=\log x$

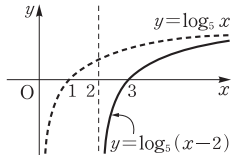
0338 $y=3 \times 2^{x-1}$ 에서 $2^{x-1}=\frac{y}{3}$
 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$x-1=\log_2 \frac{y}{3} \quad \therefore x=\log_2 \frac{y}{3}+1$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는
 $y=\log_2 \frac{x}{3}+1$

답 $y=\log_2 \frac{x}{3}+1$

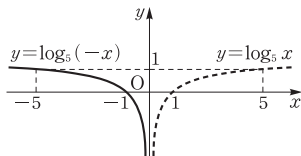
0339 (1) 함수 $y=\log_5(x-2)$ 의 그래프는 함수 $y=\log_5 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



이때 정의역은 $\{x|x>2\}$

점근선의 방정식은 $x=2$

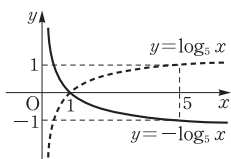
(2) 함수 $y=\log_5(-x)$ 의 그래프는 함수 $y=\log_5 x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



이때 정의역은 $\{x|x<0\}$

점근선의 방정식은 $x=0$

(3) 함수 $y=-\log_5 x$ 의 그래프는 함수 $y=\log_5 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



이때 정의역은 $\{x|x>0\}$

점근선의 방정식은 $x=0$

풀이 참조

0340 $2\log_2 3=\log_2 3^2=\log_2 9$
 함수 $y=\log_2 x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로
 $\log_2 10>\log_2 9 \quad \therefore \log_2 10>2\log_2 3$

답 $\log_2 10>2\log_2 3$

0341 $\frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}} 27=\log_{\frac{1}{2}} (3^3)^{\frac{1}{3}}=\log_{\frac{1}{2}} 3$

$$\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 7=\log_{\frac{1}{2}} 7^{\frac{1}{2}}=\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{7}$$

이때 $3>\sqrt{7}$ 이고 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로

$$\log_{\frac{1}{2}} 3<\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{7} \quad \therefore \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}} 27<\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 7$$

$$\text{답 } \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}} 27<\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 7$$

0342 $\log_9 16=\log_{3^2} 4^2=\log_3 4$

이때 $2<4$ 이고 함수 $y=\log_3 x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$$\log_3 2<\log_3 4 \quad \therefore \log_3 2<\log_9 16$$

답 $\log_3 2<\log_9 16$

0343 함수 $y=\log_2 x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로 $1 \leq x \leq 64$ 일 때, 함수 $y=\log_2 x$ 는

$$x=64 \text{에서 최댓값 } \log_2 64=6,$$

$$x=1 \text{에서 최솟값 } \log_2 1=0$$

을 갖는다.

답 최댓값: 6, 최솟값: 0

0344 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 7$ 일 때, 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ 은

$$x=-\frac{1}{2} \text{에서 최댓값 } \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}=1,$$

$$x=7 \text{에서 최솟값 } \log_{\frac{1}{2}} 8=-3$$

을 갖는다.

답 최댓값: 1, 최솟값: -3

0345 함수 $y=-\log_5(x-2)+3$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로 $7 \leq x \leq 127$ 일 때, 함수 $y=-\log_5(x-2)+3$ 은

$$x=7 \text{에서 최댓값 } -\log_5 5+3=2,$$

$$x=127 \text{에서 최솟값 } -\log_5 125+3=0$$

을 갖는다.

답 최댓값: 2, 최솟값: 0

0346 $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=-2$ 에서 $x+1=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

$$\therefore x=8$$

답 $x=8$

0347 밑의 조건에서 $x+1>0, x+1 \neq 1$

$$\therefore -1< x < 0 \text{ 또는 } x>0$$

..... ㉠

$$\log_{x+1} 9=2 \text{에서 } (x+1)^2=9$$

$$x+1=3 \text{ 또는 } x+1=-3$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=-4$$

이때 ㉠에서 $x=2$

답 $x=2$

0348 진수의 조건에서

$$x-1>0, 2x-3>0 \quad \therefore x>\frac{3}{2}$$

..... ㉡

$$\log_2(x-1)=\log_2(2x-3)\text{에서}$$

$$x-1=2x-3 \quad \therefore x=2$$

이때 $x=2$ 는 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

답 $x=2$

0349 진수의 조건에서

$$x>0, x-3>0 \quad \therefore x>3 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\log x + \log(x-3)=1\text{에서}$$

$$\log x(x-3)=\log 10$$

$$x(x-3)=10, \quad x^2-3x-10=0$$

$$(x+2)(x-5)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=5$$

$$\text{이때 ㉠에서 } x=5$$

답 $x=5$

0350 (2) $t^2-4t+3=0$ 에서

$$(t-1)(t-3)=0 \quad \therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

(3) $\log_3 x=1$ 또는 $\log_3 x=3$ 이므로

$$x=3 \text{ 또는 } x=27$$

$$\text{답 (1) } t^2-4t+3=0 \quad (2) t=1 \text{ 또는 } t=3$$

$$(3) x=3 \text{ 또는 } x=27$$

0351 진수의 조건에서

$$x+4>0 \quad \therefore x>-4 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\log_2(x+4)<3\text{에서}$$

$$\log_2(x+4)<\log_2 8$$

밑이 1보다 크므로

$$x+4<8 \quad \therefore x<4 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } -4<x<4$$

답 $-4<x<4$

0352 진수의 조건에서

$$x-1>0 \quad \therefore x>1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>2\text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$x-1<\frac{1}{9} \quad \therefore x<\frac{10}{9} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } 1<x<\frac{10}{9}$$

답 $1<x<\frac{10}{9}$

0353 진수의 조건에서

$$2x-1>0, 3x+1>0 \quad \therefore x>\frac{1}{2} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)\geq\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)$ 에서 밑이 1보다 작은 양수이므로

$$2x-1\leq 3x+1 \quad \therefore x\geq -2 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } x>\frac{1}{2}$$

답 $x>\frac{1}{2}$

0354 진수의 조건에서

$$x>0, 7-x>0 \quad \therefore 0<x<7 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\log x + \log(7-x)<1\text{에서}$$

$$\log x(7-x)<\log 10$$

밑이 1보다 크므로

$$x(7-x)<10, \quad x^2-7x+10>0$$

$$(x-2)(x-5)>0$$

$$\therefore x<2 \text{ 또는 } x>5 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } 0<x<2 \text{ 또는 } 5<x<7$$

답 $0<x<2$ 또는 $5<x<7$

0355 (2) $t^2-3t-4\leq 0$ 에서 $(t+1)(t-4)\leq 0$

$$\therefore -1\leq t\leq 4$$

(3) $-1\leq \log_2 x\leq 4$ 에서

$$\log_2 \frac{1}{2}\leq \log_2 x\leq \log_2 16$$

밑이 1보다 크므로

$$\frac{1}{2}\leq x\leq 16$$

$$\text{답 (1) } t^2-3t-4\leq 0 \quad (2) -1\leq t\leq 4$$

$$(3) \frac{1}{2}\leq x\leq 16$$

유형 익히기

• 본책 048~057쪽

0356 $f(1)=3$ 이므로 $\log_a 4+1=3$

$$\log_a 4=2, \quad a^2=4$$

$$\therefore a=2 \quad (\because a>0)$$

따라서 $f(x)=\log_2(3x+1)+1$ 이므로

$$f(0)=\log_2 1+1=0+1=1$$

$$f(5)=\log_2 16+1=4+1=5$$

$$\therefore f(0)+f(5)=1+5=6$$

답 ③

0357 $(g\circ f)(-4)=g(f(-4))=g(3^{-4})$

$$=\log_{\frac{1}{9}} 3^{-4}=\log_{3^{-2}} 3^{-4}$$

$$=2$$

답 ⑤

참고 함수 $f(x)=3^x$ 의 치역(양의 실수 전체의 집합)은 함수

$g(x)=\log_{\frac{1}{9}} x$ 의 정의역(양의 실수 전체의 집합)에 포함되므로 합성함수 $(g\circ f)(x)$ 가 정의된다.

0358 $f(75)-f(25)=\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{75}-\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{25}$

$$=\log_{\frac{1}{3}} \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{25}}=\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$$

$$=\log_{3^{-1}} 3^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

0359 $(p, q) \in A$ 이므로 $\log_5 p = q$

① $x=2p$ 일 때, $y = \log_5 2p = \log_5 2 + \log_5 p = q + \log_5 2$

② $x=5p$ 일 때, $y = \log_5 5p = \log_5 p + \log_5 5 = q + 1$

③ $x=p^2$ 일 때, $y = \log_5 p^2 = 2 \log_5 p = 2q$

④ $x=\frac{1}{p}$ 일 때, $y = \log_5 \frac{1}{p} = -\log_5 p = -q$

⑤ $x=\sqrt{p}$ 일 때, $y = \log_5 \sqrt{p} = \frac{1}{2} \log_5 p = \frac{1}{2}q$

따라서 반드시 집합 A 의 원소인 것은 ④ $\left(\frac{1}{p}, -q\right)$ 이다. **답 ④**

0360 ④ $y = \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{x} = \log_a x$ 이고 밑 a 가 1보다 작은 양수이

므로 $x > 0$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

답 ④

0361 함수 $y = \log_7(x+a) + b$ 의 그래프의 점근선은 직선 $x = -a$ 이므로

$$-a = 3 \quad \therefore a = -3$$

따라서 $y = \log_7(x-3) + b$ 의 그래프의 x 절편이 10이므로

$$0 = \log_7 7 + b \quad \therefore b = -1$$

$$\therefore a + b = -4 \quad \text{답 -4}$$

0362 ㄱ. $y = a^x$ 의 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지나고, $y = \log_a x$ 의 그래프는 점 $(1, 0)$ 을 지나므로 주어진 그림에서 두 그래프의 교점의 좌표는 $(1, 1)$ 이 아니다. (거짓)

ㄴ. $y = a^x$ 과 $y = \log_a x$ 는 서로 역함수 관계이므로 두 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. 두 함수 모두 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로 $0 < a < 1$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. **답 ㄴ**

0363 $y = \log_2(2x+4) = \log_2 2(x+2) = \log_2(x+2) + 1$ 이므로 함수 $y = \log_2(2x+4)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m = -2, n = 1$ 이므로

$$m + n = -1 \quad \text{답 -1}$$

0364 함수 $y = \log_2 4x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \log_2 4x - 3 \quad \therefore y = \log_2 \frac{x}{2}$$

이 함수의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = \log_2 \frac{x}{2} \quad \therefore y = \log_2 \frac{2}{x} \quad \therefore a = 2 \quad \text{답 ③}$$

0365 함수 $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \log_{\frac{1}{4}}(x-m) + n \quad \dots \text{①단계}$$

이 함수의 그래프의 점근선은 직선 $x = m$ 이므로

$$m = -3 \quad \dots \text{②단계}$$

따라서 $y = \log_{\frac{1}{4}}(x+3) + n$ 의 그래프가 점 $(-1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \log_{\frac{1}{4}} 2 + n, \quad 0 = -\frac{1}{2} + n$$

$$\therefore n = \frac{1}{2} \quad \dots \text{③단계}$$

$$\therefore \frac{m}{n} = \frac{-3}{\frac{1}{2}} = -6 \quad \dots \text{④단계}$$

답 -6

채점 요소		비율
①단계	평행이동한 그래프의 식 구하기	30 %
②단계	m 의 값 구하기	30 %
③단계	n 의 값 구하기	30 %
④단계	$\frac{m}{n}$ 의 값 구하기	10 %

0366 $A = -\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{6} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} = \log_{\frac{1}{2}} 6$

$$B = 2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{25}$$

$$C = -3 \log_{\frac{1}{2}} 3 = \log_{\frac{1}{2}} 3^{-3} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{27}$$

이때 $\frac{1}{27} < \frac{1}{25} < 6$ 이고 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로

$$\log_{\frac{1}{2}} 6 < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{25} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{27}$$

$$\therefore A < B < C \quad \text{답 ①}$$

0367 $A = 5 = \log_2 2^5 = \log_2 32$

$$B = \log_2 7$$

$$C = \log_4 25 = \log_2 5^2 = \log_2 25$$

이때 $5 < 7 < 32$ 이고 함수 $y = \log_2 x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$$\log_2 5 < \log_2 7 < \log_2 32$$

$$\therefore C < B < A \quad \text{답 } C < B < A$$

0368 $1 < x < 2$ 의 각 변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 1 < \log_2 x < \log_2 2 \quad \therefore 0 < \log_2 x < 1$$

$$\therefore 0 < A < 1$$

$$A - B = \log_2 x - (\log_2 x)^2 = \log_2 x (1 - \log_2 x) \text{이고}$$

$0 < \log_2 x < 1$ 에서 $1 - \log_2 x > 0$ 이므로

$$A - B > 0 \quad \therefore A > B \quad \dots \dots \text{㉠}$$

또 $C = \log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$ 이고 $0 < \log_2 x < 1$ 에서 $\frac{1}{\log_2 x} > 1$ 이므로

$$C > 1$$

$$\therefore A < C \quad \dots \dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $B < A < C \quad \text{답 } B < A < C$

0369 $b < a < 1$ 의 각 변에 밑이 a 인 로그를 취하면

$$\log_a b > \log_a a > \log_a 1 \quad \therefore \log_a b > 1$$

$$\therefore A > 1$$

$b < a < 1$ 의 각 변에 밑이 b 인 로그를 취하면

$$\log_b b > \log_b a > \log_b 1 \quad \therefore 0 < \log_b a < 1$$

$$\therefore 0 < B < 1$$

$$\log_a \frac{a}{b} = \log_a a - \log_a b = 1 - \log_a b \text{이고 } \log_a b > 1 \text{이므로}$$

$$1 - \log_a b < 0 \quad \therefore C < 0$$

$$\therefore C < B < A$$

답 ⑤

0370 세 점 P, M, Q의 y 좌표는 각각

$$\log_5 2, \log_5 a, \log_5 18$$

이때 점 M이 선분 PQ의 중점이므로

$$\log_5 a = \frac{\log_5 2 + \log_5 18}{2}, \quad 2\log_5 a = \log_5 2 + \log_5 18$$

$$\log_5 a^2 = \log_5 36, \quad a^2 = 36$$

$$\therefore a = 6 \quad (\because a > 0)$$

답 6

0371 점 C의 좌표를 $(k, 0)$ 이라 하면 $\overline{CD} = 4$ 이므로 점 D의 좌표는

$$(k, 4)$$

이때 점 D가 $y = \log_2 x$ 의 그래프 위에 있으므로

$$4 = \log_2 k$$

$$\therefore k = 2^4 = 16$$

따라서 점 C의 좌표는 $(16, 0)$ 이고 $\overline{BC} = 4$ 이므로 점 B의 x 좌표는

$$16 - 4 = 12$$

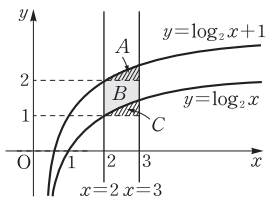
답 12

0372 $y = \log_2 x + 1$ 의 그래프는 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 오른쪽 그림에서 $A = C$ 이

므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} A + B &= B + C \\ &= (3 - 2) \times (2 - 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$



답 1

0373 $y = \log_3(x - k)$ 의 그래프는 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

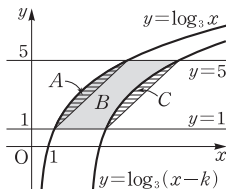
따라서 오른쪽 그림에서 $A = C$ 이므로

$$A + B = B + C = 12$$

즉 $k \times (5 - 1) = 12$ 이므로

$$k = 3$$

답 3



0374 오른쪽 그림에서

$A(\beta, \log_4 \beta)$ 이고 점 B는 직선

$y = x$ 위에 있으므로

$$B(\log_4 \beta, \log_4 \beta)$$

점 B와 점 C는 x 좌표가 같으므로

$$C(\log_4 \beta, 2^{\log_4 \beta})$$

점 C와 점 D는 y 좌표가 같으므로

$$D(\alpha, 2^{\log_4 \beta})$$

점 D는 직선 $y = x$ 위에 있으므로

$$\alpha = 2^{\log_4 \beta} = \beta^{\log_4 2} = \beta^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \beta = \alpha^2$$

..... ㉠

... 1단계

㉠을 $\alpha + \beta = 12$ 에 대입하면

$$\alpha + \alpha^2 = 12, \quad \alpha^2 + \alpha - 12 = 0$$

$$(\alpha + 4)(\alpha - 3) = 0 \quad \therefore \alpha = 3 \quad (\because \alpha > 0)$$

$\alpha = 3$ 을 ㉠에 대입하면

$$\beta = 3^2 = 9$$

... 2단계

$$\therefore \alpha\beta = 27$$

... 3단계

답 27

채점 요소		비율
1단계	α, β 사이의 관계식 구하기	60 %
2단계	α, β 의 값 구하기	30 %
3단계	$\alpha\beta$ 의 값 구하기	10 %

0375 $A(0, 2)$ 이므로 점 C의 y 좌표는 2이고

$2 = \log_3(x + 1) + 1$ 에서

$$1 = \log_3(x + 1), \quad x + 1 = 3$$

$$\therefore x = 2$$

$$\therefore C(2, 2)$$

$B(0, 1)$ 이므로 점 D의 y 좌표는 1이고 $1 = 2^{x+1}$ 에서

$$x + 1 = 0 \quad \therefore x = -1$$

$$\therefore D(-1, 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \square ADBC &= \frac{1}{2} \times (\overline{AC} + \overline{DB}) \times \overline{AB} \\ &= \frac{1}{2} \times (2 + 1) \times 1 \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

답 ①

0376 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x + a) + b$ 에서

$$y - b = \log_{\frac{1}{2}}(x + a)$$

로그의 정의에 의하여 $x + a = \left(\frac{1}{2}\right)^{y-b}$

$$\therefore x = \left(\frac{1}{2}\right)^{y-b} - a$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-b} - a$

$$\therefore f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-b} - a$$

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=-a$ 이므로

$$-a=-2 \quad \therefore a=2$$

또 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(0, -\frac{3}{2})$ 을 지나므로

$$-\frac{3}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-b} - 2, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-b} = \frac{1}{2}$$

$$-b=1 \quad \therefore b=-1$$

$$\therefore ab=-2$$

답 -2

0377 두 함수 $y=3^x$ 과 $y=\log_3 x$ 는 서로 역함수 관계이다.

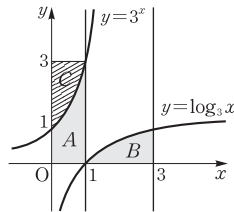
따라서 오른쪽 그림에서

$$B=C$$

이므로

$$A+B=A+C=1 \times 3=3$$

답 3



0378 A(2, 0)이므로 B(2, k)라 하면

$$k=g(2)$$

즉 $f(k)=2$ 이므로 $\log_2(k-1)=2$

$$k-1=2^2 \quad \therefore k=5$$

따라서 B(2, 5)이므로 $\overline{AB}=5$

또 점 C의 y좌표가 5이고 $\log_2(x-1)=5$ 에서

$$x-1=2^5 \quad \therefore x=33$$

즉 C(33, 5)이므로 $\overline{BC}=33-2=31$

$$\therefore \overline{AB}+\overline{BC}=5+31=36$$

답 36

다른 풀이 $y=\log_2(x-1)$ 에서 $x-1=2^y$

$$\therefore x=2^y+1$$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=2^x+1$

$$\therefore g(x)=2^x+1$$

이때 점 B의 x좌표는 2이고

$$g(2)=2^2+1=5$$

이므로 B(2, 5)

0379 $f(x)=x^2-2x+8$ 로 놓으면

$$y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x+8)=\log_{\frac{1}{2}}f(x)$$

이때 밑이 1보다 작은 양수이므로 이 함수는 $f(x)$ 가 최대일 때 최솟값, $f(x)$ 가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

$f(x)=x^2-2x+8=(x-1)^2+7$ 이므로 $2 \leq x \leq 6$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는

$x=2$ 에서 최솟값 8, $x=6$ 에서 최댓값 32

를 갖는다.

따라서 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}f(x)$ 는

$$x=2\text{에서 최댓값 } M=\log_{\frac{1}{2}}8=-3,$$

$$x=6\text{에서 최솟값 } m=\log_{\frac{1}{2}}32=-5$$

를 가지므로 $M-m=2$

답 ④

0380 $f(x)=x^2-6x+11$ 로 놓으면

$$y=\log_2(x^2-6x+11)=\log_2f(x)$$

이때 밑이 1보다 크므로 이 함수는 $f(x)$ 가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

$f(x)=x^2-6x+11=(x-3)^2+2$ 이므로 함수 $f(x)$ 는

$x=3$ 에서 최솟값 2

를 갖는다.

따라서 함수 $y=\log_2f(x)$ 는

$x=3$ 에서 최솟값 $\log_2 2=1$

을 가지므로 $a=3, m=1$

$$\therefore am=3$$

답 3

0381 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)+k$ 에서 밑이 1보다 작은 양수이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

즉 $-1 \leq x \leq 2$ 일 때, 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)+k$ 는

$x=-1$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}}1+k=k,$

$x=2$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}}4+k=-2+k$

를 갖는다.

이때 최댓값이 3이므로 $k=3$

따라서 구하는 최솟값은

$$-2+3=1$$

답 1

0382 진수의 조건에서 $x+1>0, 3-x>0$

$$\therefore -1< x < 3$$

... 1단계

$$y=\log_a(x+1)+\log_a(3-x)$$

$$=\log_a(x+1)(3-x)=\log_a(-x^2+2x+3)$$

이므로 $f(x)=-x^2+2x+3$ 으로 놓으면

$$y=\log_a(-x^2+2x+3)=\log_a f(x)$$

이때 $f(x)=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$ 이므로

$-1< x < 3$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는

$x=1$ 에서 최댓값 4

를 갖고, 최솟값은 갖지 않는다.

그런데 주어진 함수가 최솟값을 가지므로

$$0< a < 1$$

... 2단계

따라서 함수 $y=\log_a f(x)$ 는

$x=1$ 에서 최솟값 $\log_a 4$

를 가지므로 $\log_a 4=-4$

$$a^{-4}=4, \quad a^4=\frac{1}{4}$$

$$\therefore a=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because 0< a < 1)$$

... 3단계

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답

	채점 요소	비율
1단계	진수의 조건을 만족시키는 x의 값의 범위 구하기	20 %
2단계	a의 값의 범위 구하기	50 %
3단계	a의 값 구하기	30 %

0383 $\log_{\frac{1}{2}} x = t$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$y = t^2 + 4t + 5 = (t+2)^2 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $1 \leq x \leq 8$ 에서 $\log_{\frac{1}{2}} 8 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} 1$ 이므로

$$-3 \leq t \leq 0$$

따라서 $-3 \leq t \leq 0$ 일 때, 함수 $\textcircled{1}$ 은

$$t=0 \text{에서 최댓값 } 5,$$

$$t=-2 \text{에서 최솟값 } 1$$

을 갖는다.

즉 $M=5, m=1$ 이므로

$$Mm=5$$

답 5

0384 $y = \log_2 4x \times \log_2 \frac{2}{x^2}$

$$= (2 + \log_2 x)(1 - 2\log_2 x)$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$y = (2+t)(1-2t) = -2t^2 - 3t + 2$$

$$= -2\left(t + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{25}{8} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $\frac{1}{4} \leq x \leq 2$ 에서 $\log_2 \frac{1}{4} \leq \log_2 x \leq \log_2 2$ 이므로

$$-2 \leq t \leq 1$$

따라서 $-2 \leq t \leq 1$ 일 때, 함수 $\textcircled{1}$ 은

$$t = -\frac{3}{4} \text{에서 최댓값 } \frac{25}{8},$$

$$t=1 \text{에서 최솟값 } -3$$

을 가지므로 구하는 합은

$$\frac{25}{8} + (-3) = \frac{1}{8}$$

답 ①

0385 $x^{\log 5} = 5^{\log x}$ 이므로

$$y = 5^{2\log x} - (x^{\log 5} + 5^{\log x}) + 7$$

$$= (5^{\log x})^2 - 2 \times 5^{\log x} + 7$$

이때 $5^{\log x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$y = t^2 - 2t + 7 = (t-1)^2 + 6$$

이 함수는 $t=1$ 에서 최솟값 6을 가지므로 $b=6$

$t=1$, 즉 $5^{\log x} = 1$ 에서

$$\log x = 0 \quad \therefore x = 1$$

따라서 $a=1$ 이므로 $a+b=7$

답 7

0386 $y = (\log_3 x)^2 + a \log_{27} x^2 + b$

$$= (\log_3 x)^2 + \frac{2}{3} a \log_3 x + b$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$y = t^2 + \frac{2}{3} at + b \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots \textcircled{1} \text{단계}$$

이때 함수 $\textcircled{1}$ 은 $x = \frac{1}{3}$, 즉 $t = \log_3 \frac{1}{3} = -1$ 일 때 최솟값 1을 가지므로

$$y = (t+1)^2 + 1 = t^2 + 2t + 2$$

와 일치한다.

042 정답 및 풀이

따라서 $\frac{2}{3}a=2, b=2$ 이므로

$$a=3, b=2$$

$$\therefore a+b=5$$

... 2단계

... 3단계

답 5

	채점 요소	비율
1단계	$\log_3 x = t$ 로 놓고 주어진 함수를 t 에 대한 이차함수로 변형하기	30 %
2단계	a, b 의 값 구하기	60 %
3단계	$a+b$ 의 값 구하기	10 %

0387 $y = x^{2-\log x}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log y = \log x^{2-\log x} = (2-\log x)\log x$$

$$= -(\log x)^2 + 2\log x$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$\log y = -t^2 + 2t = -(t-1)^2 + 1$$

이때 $1 \leq x \leq 1000$ 에서 $\log 1 \leq \log x \leq \log 1000$ 이므로

$$0 \leq t \leq 3$$

따라서 $\log y$ 는 $t=1$ 일 때 최댓값 1, $t=3$ 일 때 최솟값 -3 을 갖는다.

$$\log y = 1 \text{에서} \quad y = 10 \quad \therefore M = 10$$

$$\log y = -3 \text{에서} \quad y = 10^{-3} = \frac{1}{1000} \quad \therefore m = \frac{1}{1000}$$

$$\therefore Mm = \frac{1}{100} \quad \text{답 } \frac{1}{100}$$

0388 $y = \frac{x^8}{x^{\log_2 x}}$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 y = \log_2 \frac{x^8}{x^{\log_2 x}} = \log_2 x^8 - \log_2 x^{\log_2 x}$$

$$= 8\log_2 x - (\log_2 x)^2$$

이때 $\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$\log_2 y = 8t - t^2 = -(t-4)^2 + 16$$

따라서 $\log_2 y$ 는 $t=4$ 일 때 최댓값 16을 갖는다.

$$\log_2 x = 4 \text{에서} \quad x = 2^4 \quad \therefore a = 2^4$$

$$\log_2 y = 16 \text{에서} \quad y = 2^{16} \quad \therefore b = 2^{16}$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{2^{16}}{2^4} = 2^{12} = 4096$$

답 4096

0389 $y = 2\log_5 x + \log_x 125$

$$= 2\log_5 x + 3\log_x 5$$

$$= 2\log_5 x + \frac{3}{\log_5 x}$$

$x > 1$ 에서 $\log_5 x > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$y = 2\log_5 x + \frac{3}{\log_5 x}$$

$$\geq 2\sqrt{2\log_5 x \times \frac{3}{\log_5 x}}$$

$$= 2\sqrt{6} \quad \left(\text{단, 등호는 } \log_5 x = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{일 때 성립} \right)$$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{6}$ 이다.

답 $2\sqrt{6}$

0390 $x > 1, k > 1$ 에서 $\log_3 x > 0, \log_x k > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} y &= \log_3 x + \log_x k \\ &\geq 2\sqrt{\log_3 x \times \log_x k} \\ &= 2\sqrt{\log_3 k} \quad (\text{단, 등호는 } \log_3 x = \log_x k \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

따라서 주어진 함수의 최솟값이 $2\sqrt{\log_3 k}$ 이므로

$$2\sqrt{\log_3 k} = 1$$

양변을 제곱하면 $4\log_3 k = 1$

$$\log_3 k = \frac{1}{4} \quad \therefore k = 3^{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore k^2 = (3^{\frac{1}{4}})^2 = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \quad \text{답 } \sqrt{3}$$

0391 진수의 조건에서 $x-2 > 0, x-5 > 0$
 $\therefore x > 5$ ①

$\log_4(x-2) + \log_{\frac{1}{4}}(x-5) = \frac{1}{2}$ 에서

$$\log_4(x-2) - \log_4(x-5) = \log_4 4^{\frac{1}{2}}$$

$$\log_4(x-2) = \log_4(x-5) + \log_4 2$$

$$\log_4(x-2) = \log_4 2(x-5)$$

$$x-2 = 2(x-5) \quad \therefore x = 8$$

$x=8$ 은 ①을 만족시키므로 주어진 방정식의 해이다.

$$\text{즉 } a=8 \text{ 이므로 } \log_4 a = \log_4 8 = \frac{3}{2} \quad \text{답 } ②$$

0392 진수의 조건에서 $x+3 > 0, x+7 > 0$
 $\therefore x > -3$ ①

$\log_3(x+3) - \log_9(x+7) = 1$ 에서

$$\log_3(x+3) - \frac{1}{2}\log_3(x+7) = 1$$

$$2\log_3(x+3) - \log_3(x+7) = 2$$

$$\log_3(x+3)^2 = \log_3(x+7) + \log_3 3^2$$

$$\log_3(x+3)^2 = \log_3 9(x+7)$$

$$(x+3)^2 = 9(x+7), \quad x^2 - 3x - 54 = 0$$

$$(x+6)(x-9) = 0 \quad \therefore x = -6 \text{ 또는 } x = 9$$

이때 ①에서 $x=9$ ② **답** $x=9$

0393 밑과 진수의 조건에서
 $x^2+1 > 0, x^2+1 \neq 1, x+7 > 0, x+7 \neq 1, x-1 > 0$
 $\therefore x > 1$ ① ... 1단계

(i) $x^2+1 = x+7$ 에서

$$x^2 - x - 6 = 0, \quad (x+2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

이때 ①에서 $x=3$ 2단계

(ii) $x-1 = 1$ 에서 $x=2$

이때 $x=2$ 는 ①을 만족시키므로 주어진 방정식의 근이다.

... 3단계

(i), (ii)에서 $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 모든 근의 합은 $2+3=5$ 4단계

답 5

채점 요소	비율
1단계 밑과 진수의 조건을 만족시키는 x 의 값의 범위 구하기	30 %
2단계 밑이 같을 때의 x 의 값 구하기	40 %
3단계 진수가 1일 때의 x 의 값 구하기	20 %
4단계 모든 근의 합 구하기	10 %

0394 $\log_3 x - \log_9 x = 2\log_3 x \times \log_9 x$ 에서

$$\log_3 x - \frac{1}{2}\log_3 x = 2\log_3 x \times \frac{1}{2}\log_3 x$$

$$\therefore \frac{1}{2}\log_3 x = (\log_3 x)^2$$

이때 $\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$\frac{1}{2}t = t^2, \quad t^2 - \frac{1}{2}t = 0, \quad t\left(t - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = \frac{1}{2}$$

즉 $\log_3 x = 0$ 또는 $\log_3 x = \frac{1}{2}$ 이므로

$$x = 1 \text{ 또는 } x = \sqrt{3}$$

$$\therefore \alpha\beta = 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3} \quad \text{답 } ③$$

참고 위와 같이 $\log_a x = t$ 로 치환하여 구한 방정식의 해는 진수의 조건을 항상 만족시킨다.

0395 $\log_2 2x \times \log_2 \frac{x}{2} = 3$ 에서

$$(1 + \log_2 x)(\log_2 x - 1) = 3$$

이때 $\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$(1+t)(t-1) = 3, \quad t^2 = 4$$

$$\therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 2$$

즉 $\log_2 x = -2$ 또는 $\log_2 x = 2$ 이므로

$$x = \frac{1}{4} \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 구하는 합은

$$\frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4} \quad \text{답 } \frac{17}{4}$$

0396 $(\log_2 x)^2 + k\log_2 x + 5 = 0$ 의 한 근이 $\frac{1}{2}$ 이므로 이 방정식에 $x = \frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$(-1)^2 + k \times (-1) + 5 = 0$$

$$\therefore k = 6$$

따라서 주어진 방정식은 $(\log_2 x)^2 + 6\log_2 x + 5 = 0$ 이므로

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 6t + 5 = 0, \quad (t+5)(t+1) = 0$$

$$\therefore t = -5 \text{ 또는 } t = -1$$

즉 $\log_2 x = -5$ 또는 $\log_2 x = -1$ 이므로

$$x = \frac{1}{32} \text{ 또는 } x = \frac{1}{2}$$

따라서 다른 한 근은 $\frac{1}{32}$ 이다.

$$\text{답 } \frac{1}{32}$$

0397 $\log_x 9 - \log_3 x = 1$ 에서 $\frac{\log_3 9}{\log_3 x} - \log_3 x = 1$

$$\therefore \frac{2}{\log_3 x} - \log_3 x = 1$$

이때 $\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$\frac{2}{t} - t = 1$$

양변에 t 를 곱하면

$$2 - t^2 = t, \quad t^2 + t - 2 = 0$$

$$(t+2)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 1$$

즉 $\log_3 x = -2$ 또는 $\log_3 x = 1$ 이므로

$$x = \frac{1}{9} \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 $\alpha = 3, \beta = \frac{1}{9}$ 이므로

$$\frac{\alpha}{\beta} = 27$$

답 27

0398 $x^{\log_3 x} = \frac{1}{3}x^2$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 \frac{1}{3}x^2$$

$$\log_3 x \times \log_3 x = -1 + 2\log_3 x$$

$$\therefore (\log_3 x)^2 = -1 + 2\log_3 x$$

이때 $\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 = -1 + 2t, \quad t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t-1)^2 = 0 \quad \therefore t = 1$$

즉 $\log_3 x = 1$ 이므로 $x = 3$

답 ②

0399 $x^{1-\log x} = \frac{x^2}{100}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log x^{1-\log x} = \log \frac{x^2}{100}$$

$$(1 - \log x) \log x = 2 \log x - \log 100$$

$$\therefore (\log x)^2 + \log x - 2 = 0$$

이때 $\log x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + t - 2 = 0, \quad (t+2)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 1$$

즉 $\log x = -2$ 또는 $\log x = 1$ 이므로

$$x = \frac{1}{100} \text{ 또는 } x = 10$$

따라서 구하는 곱은

$$\frac{1}{100} \times 10 = \frac{1}{10}$$

답 $\frac{1}{10}$

0400 $\begin{cases} \log_x 4 - \log_y 2 = 2 \\ \log_x 16 + \log_y 8 = -1 \end{cases}$ 에서

$$\begin{cases} 2\log_x 2 - \log_y 2 = 2 \\ 4\log_x 2 + 3\log_y 2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\log_x 2 - \log_y 2 = 2 \\ 4\log_x 2 + 3\log_y 2 = -1 \end{cases}$$

이때 $\log_x 2 = X, \log_y 2 = Y$ 로 놓으면

$$\begin{cases} 2X - Y = 2 \\ 4X + 3Y = -1 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면

$$X = \frac{1}{2}, Y = -1$$

즉 $\log_x 2 = \frac{1}{2}, \log_y 2 = -1$ 이므로

$$x^{\frac{1}{2}} = 2, y^{-1} = 2 \quad \therefore x = 4, y = \frac{1}{2}$$

따라서 $\alpha = 4, \beta = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\alpha\beta = 2$$

답 2

0401 $\log_3 x = X, \log_2 y = Y$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} \log_2 x \times \log_3 y &= \frac{\log_3 x}{\log_3 2} \times \frac{\log_2 y}{\log_2 3} \\ &= \log_3 x \times \log_2 y = XY \end{aligned}$$

이므로 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} X + Y = 4 \\ XY = 3 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면

$$X = 1, Y = 3 \text{ 또는 } X = 3, Y = 1$$

즉 $\log_3 x = 1, \log_2 y = 3$ 또는 $\log_3 x = 3, \log_2 y = 1$ 이므로

$$x = 3, y = 8 \text{ 또는 } x = 27, y = 2$$

그런데 $0 < \beta < \alpha$ 이므로 $\alpha = 27, \beta = 2$

$$\therefore \alpha + \beta = 29$$

답 29

0402 $(\log_2 2x)^2 - 3\log_2 x^2 = 0$ 에서

$$(1 + \log_2 x)^2 - 6\log_2 x = 0$$

$$\therefore (\log_2 x)^2 - 4\log_2 x + 1 = 0$$

이때 $\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 4t + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 방정식의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근은 $\log_2 \alpha, \log_2 \beta$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 4, \quad \log_2 \alpha\beta = 4$$

$$\therefore \alpha\beta = 16$$

답 ④

0403 주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha\beta = 100$$

이때 $\log x = t$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2 - kt - 5 = 0$$

이 방정식의 두 근은 $\log \alpha, \log \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log \alpha + \log \beta = k, \quad \log \alpha\beta = k$$

$$\therefore k = \log 100 = 2$$

답 2

0404 $\log x=t$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$pt^2-2pt+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

주어진 방정식의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식 $\textcircled{㉠}$ 의 두 근은 $\log \alpha, \log \beta$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log \alpha + \log \beta = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\log \alpha \times \log \beta = \frac{1}{p} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉡}$ 과 $\log \alpha - \log \beta = 4$ 를 연립하여 풀면

$$\log \alpha = 3, \log \beta = -1$$

이것을 $\textcircled{㉢}$ 에 대입하면

$$3 \times (-1) = \frac{1}{p} \quad \therefore p = -\frac{1}{3} \quad \text{답 } -\frac{1}{3}$$

0405 $(\log_3 x)^2 - 6\log_3 x + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$

에서 $\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 6t + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

방정식 $\textcircled{㉡}$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식 $\textcircled{㉡}$ 의 두 근은 $\log_3 \alpha, \log_3 \beta$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_3 \alpha + \log_3 \beta = 6, \log_3 \alpha \times \log_3 \beta = 1 \quad \dots \text{1단계}$$

$$(\log_3 x)^2 + p\log_3 x + q = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

에서 $\log_3 x = u$ 로 놓으면

$$u^2 + pu + q = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

방정식 $\textcircled{㉣}$ 의 두 근이 α^2, β^2 이므로 이차방정식 $\textcircled{㉣}$ 의 두 근은 $\log_3 \alpha^2, \log_3 \beta^2$, 즉 $2\log_3 \alpha, 2\log_3 \beta$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$p = -(2\log_3 \alpha + 2\log_3 \beta) = -2(\log_3 \alpha + \log_3 \beta) \\ = -2 \times 6 = -12$$

$$q = 2\log_3 \alpha \times 2\log_3 \beta = 4\log_3 \alpha \times \log_3 \beta \\ = 4 \times 1 = 4 \quad \dots \text{2단계}$$

$$\therefore pq = -48 \quad \dots \text{3단계}$$

답 -48

	채점 요소	비율
1단계	$\log_3 \alpha + \log_3 \beta, \log_3 \alpha \times \log_3 \beta$ 의 값 구하기	40 %
2단계	p, q 의 값 구하기	50 %
3단계	pq 의 값 구하기	10 %

0406 진수의 조건에서 $6-x>0, x+5>0$

$$\therefore -5 < x < 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$\log(6-x) + \log(x+5) \leq 1$ 에서

$$\log(6-x)(x+5) \leq \log 10$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$(6-x)(x+5) \leq 10, \quad -x^2 + x + 30 \leq 10$$

$$x^2 - x - 20 \geq 0, \quad (x+4)(x-5) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -4 \text{ 또는 } x \geq 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } -5 < x \leq -4 \text{ 또는 } 5 \leq x < 6$$

$$\text{따라서 } a = -5, b = 5 \text{이므로 } a + b = 0 \quad \text{답 } 0$$

0407 진수의 조건에서 $x^2 + 4x - 5 > 0, x + 1 > 0$

$$(i) x^2 + 4x - 5 > 0 \text{에서 } (x+5)(x-1) > 0$$

$$\therefore x < -5 \text{ 또는 } x > 1$$

$$(ii) x + 1 > 0 \text{에서 } x > -1$$

$$(i), (ii) \text{에서 } x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(x^2 + 4x - 5) > \log_{\frac{1}{2}}(x+1) \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x - 5) > \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x - 5) > 2\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x - 5) > \log_{\frac{1}{2}}(x+1)^2$$

이때 밑이 1보다 작은 양수이므로

$$x^2 + 4x - 5 < (x+1)^2, \quad 2x < 6$$

$$\therefore x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } 1 < x < 3$$

따라서 정수 x 는 2의 1개이다. 답 1

0408 진수의 조건에서 $x+4>0, 8-x>0$

$$\therefore -4 < x < 8 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\log_2(x+4) + \log_2(8-x) > k \text{에서}$$

$$\log_2(x+4)(8-x) > \log_2 2^k$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$(x+4)(8-x) > 2^k$$

$$\therefore x^2 - 4x + 2^k - 32 < 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

주어진 부등식의 해가 $0 < x < 4$ 이므로 $\textcircled{㉠}$ 과 부등식 $\textcircled{㉡}$ 의 해의 공통 범위가 $0 < x < 4$ 이어야 한다.

즉 부등식 $\textcircled{㉡}$ 의 해가 $0 < x < 4$ 이다.

x^2 의 계수가 1이고 해가 $0 < x < 4$ 인 이차부등식은

$$x(x-4) < 0 \quad \therefore x^2 - 4x < 0$$

이 부등식이 $\textcircled{㉡}$ 과 일치하므로

$$2^k - 32 = 0, \quad 2^k = 32 = 2^5$$

$$\therefore k = 5 \quad \text{답 } 5$$

0409 진수의 조건에서 $\log_2 x > 0, x > 0$

$$\log_2 x > 0 \text{에서 } \log_2 x > \log_2 1$$

$$\text{이때 밑이 1보다 크므로 } x > 1$$

$$\therefore x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\log_5(\log_2 x) \leq 1 \text{에서}$$

$$\log_5(\log_2 x) \leq \log_5 5$$

$$\text{이때 밑이 1보다 크므로 } \log_2 x \leq 5$$

$$\therefore \log_2 x \leq \log_2 32$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } x \leq 32 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } 1 < x \leq 32$$

$$\text{따라서 } a = 1, \beta = 32 \text{이므로 } a\beta = 32 \quad \text{답 } 32$$

0410 진수의 조건에서 $x > 0, x^2 > 0$

$$\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - \log_{\frac{1}{3}} x^2 \geq 0 \text{에서}$$

$$(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - 2 \log_{\frac{1}{3}} x \geq 0$$

$$\text{이때 } \log_{\frac{1}{3}} x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 2t \geq 0$$

$$t(t-2) \geq 0 \quad \therefore t \leq 0 \text{ 또는 } t \geq 2$$

$$\text{즉 } \log_{\frac{1}{3}} x \leq 0 \text{ 또는 } \log_{\frac{1}{3}} x \geq 2 \text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} 1 \text{ 또는 } \log_{\frac{1}{3}} x \geq \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

이때 밑이 1보다 작은 양수이므로

$$x \geq 1 \text{ 또는 } x \leq \frac{1}{9} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$0 < x \leq \frac{1}{9} \text{ 또는 } x \geq 1 \quad \text{답 } 0 < x \leq \frac{1}{9} \text{ 또는 } x \geq 1$$

0411 진수의 조건에서 $x > 0, x^6 > 0$

$$\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \quad \dots \text{1단계}$$

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x^6 + 8 < 0 \text{에서}$$

$$(\log_2 x)^2 - 6 \log_2 x + 8 < 0$$

$$\text{이때 } \log_2 x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 6t + 8 < 0$$

$$(t-2)(t-4) < 0 \quad \therefore 2 < t < 4$$

$$\text{즉 } 2 < \log_2 x < 4 \text{이므로}$$

$$\log_2 2^2 < \log_2 x < \log_2 2^4$$

$$\text{이때 밑이 1보다 크므로 } 4 < x < 16 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } 4 < x < 16 \quad \dots \text{2단계}$$

$$\text{따라서 } a=4, b=16 \text{이므로}$$

$$a-b = -12 \quad \dots \text{3단계}$$

답 -12

채점 요소		비율
1단계	진수의 조건을 만족시키는 x 의 값의 범위 구하기	20 %
2단계	부등식의 해 구하기	70 %
3단계	$a-b$ 의 값 구하기	10 %

0412 진수의 조건에서 $4x > 0, 8x > 0$

$$\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\log_2 4x \times \log_2 8x < 2 \text{에서}$$

$$(2 + \log_2 x)(3 + \log_2 x) < 2$$

$$\text{이때 } \log_2 x = t \text{로 놓으면 } (2+t)(3+t) < 2$$

$$t^2 + 5t + 4 < 0, \quad (t+4)(t+1) < 0$$

$$\therefore -4 < t < -1$$

$$\text{즉 } -4 < \log_2 x < -1 \text{이므로}$$

$$\log_2 2^{-4} < \log_2 x < \log_2 2^{-1}$$

$$\text{이때 밑이 1보다 크므로}$$

$$\frac{1}{16} < x < \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } \frac{1}{16} < x < \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{1}{16}, \beta = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = 8 \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

0413 $\log_3 x = t$ 로 놓으면 주어진 부등식은

$$t^2 + at + b \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{1}{9} \leq x \leq 27 \text{에서}$$

$$\log_3 \frac{1}{9} \leq \log_3 x \leq \log_3 27, \quad -2 \leq \log_3 x \leq 3$$

$$\therefore -2 \leq t \leq 3$$

t^2 의 계수가 1이고 해가 $-2 \leq t \leq 3$ 인 이차부등식은

$$(t+2)(t-3) \leq 0 \quad \therefore t^2 - t - 6 \leq 0$$

이 부등식이 ㉠과 일치하므로

$$a = -1, b = -6 \quad \therefore ab = 6 \quad \text{답 } 6$$

0414 진수의 조건에서 $x > 0$

$$\dots\dots \textcircled{㉠}$$

$x^{\log_3 x} < 9x$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 x^{\log_3 x} < \log_3 9x$$

$$\therefore (\log_3 x)^2 < 2 + \log_3 x$$

$$\text{이때 } \log_3 x = t \text{로 놓으면 } t^2 < 2 + t$$

$$t^2 - t - 2 < 0, \quad (t+1)(t-2) < 0$$

$$\therefore -1 < t < 2$$

$$\text{즉 } -1 < \log_3 x < 2 \text{이므로}$$

$$\log_3 3^{-1} < \log_3 x < \log_3 3^2$$

$$\text{이때 밑이 1보다 크므로 } \frac{1}{3} < x < 9 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } \frac{1}{3} < x < 9$$

따라서 정수 x 는 1, 2, 3, ..., 8의 8개이다.

답 3

0415 진수의 조건에서 $x > 0$

$$\dots\dots \textcircled{㉠}$$

$x^{\log x + 3} \geq 10000$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log x^{\log x + 3} \geq \log 10000$$

$$(\log x + 3) \log x \geq 4$$

$$\therefore (\log x)^2 + 3 \log x - 4 \geq 0$$

$$\text{이때 } \log x = t \text{로 놓으면 } t^2 + 3t - 4 \geq 0$$

$$(t+4)(t-1) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -4 \text{ 또는 } t \geq 1$$

$$\text{즉 } \log x \leq -4 \text{ 또는 } \log x \geq 1 \text{이므로}$$

$$\log x \leq \log 10^{-4} \text{ 또는 } \log x \geq \log 10$$

$$\text{이때 밑이 1보다 크므로}$$

$$x \leq \frac{1}{10000} \text{ 또는 } x \geq 10 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서}$$

$$0 < x \leq \frac{1}{10000} \text{ 또는 } x \geq 10$$

$$\text{답 } 0 < x \leq \frac{1}{10000} \text{ 또는 } x \geq 10$$

0416 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$x^{\log 2} = 2^{\log x}$ 이므로 주어진 부등식은

$$(2^{\log x})^2 - 6 \times 2^{\log x} + 8 > 0$$

이때 $2^{\log x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 6t + 8 > 0, \quad (t-2)(t-4) > 0$$

$$\therefore t < 2 \text{ 또는 } t > 4$$

즉 $2^{\log x} < 2$ 또는 $2^{\log x} > 4$ 이므로 $\log x < 1$ 또는 $\log x > 2$

$$\therefore \log x < \log 10 \text{ 또는 } \log x > \log 10^2$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$x < 10 \text{ 또는 } x > 100 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $0 < x < 10$ 또는 $x > 100$

따라서 $\alpha = 10, \beta = 100$ 이므로

$$\alpha\beta = 1000 \quad \text{답 } \textcircled{5}$$

0417 $(\log_2 x)^2 + 8\log_2 x + 8\log_2 k > 0$ ㉠

에서 $\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 8t + 8\log_2 k > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

모든 양수 x 에 대하여 부등식 ㉠이 성립하려면 모든 실수 t 에 대하여 이차부등식 ㉡이 성립해야 한다.

따라서 이차방정식 $t^2 + 8t + 8\log_2 k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4^2 - 8\log_2 k < 0, \quad 2 - \log_2 k < 0$$

$$\log_2 k > 2 \quad \therefore \log_2 k > \log_2 2^2$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$k > 4 \quad \text{답 } k > 4$$

0418 $\log_{\frac{1}{5}} x \times (\log_5 x + 10) \leq 25\log_5 k$ ㉠

에서 $-\log_5 x \times (\log_5 x + 10) \leq 25\log_5 k$

$$\therefore (\log_5 x)^2 + 10\log_5 x + 25\log_5 k \geq 0$$

이때 $\log_5 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 10t + 25\log_5 k \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

모든 양수 x 에 대하여 부등식 ㉠이 성립하려면 모든 실수 t 에 대하여 이차부등식 ㉡이 성립해야 한다.

따라서 이차방정식 $t^2 + 10t + 25\log_5 k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 5^2 - 25\log_5 k \leq 0, \quad 1 - \log_5 k \leq 0$$

$$\log_5 k \geq 1 \quad \therefore \log_5 k \geq \log_5 5$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$k \geq 5$$

따라서 구하는 최솟값은 5이다. 답 ②

0419 $x^{\log_2 x} \geq (8x)^{4k}$ ㉠

의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 x^{\log_2 x} \geq \log_2 (8x)^{4k}$$

$$(\log_2 x)^2 \geq 4k \log_2 8x$$

$$(\log_2 x)^2 \geq 4k(3 + \log_2 x)$$

$$\therefore (\log_2 x)^2 - 4k \log_2 x - 12k \geq 0$$

이때 $\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 4kt - 12k \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

모든 양수 x 에 대하여 부등식 ㉠이 성립하려면 모든 실수 t 에 대하여 이차부등식 ㉡이 성립해야 한다.

따라서 이차방정식 $t^2 - 4kt - 12k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2k)^2 - (-12k) \leq 0$$

$$k^2 + 3k \leq 0, \quad k(k+3) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq k \leq 0 \quad \text{답 } -3 \leq k \leq 0$$

0420 이차방정식 $x^2 - x \log a + \log a + 3 = 0$ 이 실근을 갖지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-\log a)^2 - 4 \times 1 \times (\log a + 3) < 0$$

$$\therefore (\log a)^2 - 4\log a - 12 < 0$$

이때 $\log a = t$ 로 놓으면 $t^2 - 4t - 12 < 0$

$$(t+2)(t-6) < 0 \quad \therefore -2 < t < 6$$

즉 $-2 < \log a < 6$ 이므로

$$\log 10^{-2} < \log a < \log 10^6$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$\frac{1}{100} < a < 1000000 \quad \text{답 } \frac{1}{100} < a < 1000000$$

0421 이차방정식 $x^2 - x \log a + 2 \log a - 3 = 0$ 이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-\log a)^2 - 4 \times 1 \times (2 \log a - 3) = 0$$

$$\therefore (\log a)^2 - 8 \log a + 12 = 0$$

이때 $\log a = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 8t + 12 = 0, \quad (t-2)(t-6) = 0$$

$$\therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 6$$

즉 $\log a = 2$ 또는 $\log a = 6$ 이므로

$$a = 10^2 \text{ 또는 } a = 10^6$$

따라서 모든 a 의 값의 곱은

$$10^2 \times 10^6 = 10^8 \quad \text{답 } \textcircled{4}$$

0422 $x^2 - 2(1 + \log_2 a)x + 1 - (\log_2 a)^2 > 0$ 이 항상 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2 - 2(1 + \log_2 a)x + 1 - (\log_2 a)^2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{-(1 + \log_2 a)\}^2 - \{1 - (\log_2 a)^2\} < 0$$

$$\therefore (\log_2 a)^2 + \log_2 a < 0 \quad \dots \textcircled{1\text{단계}}$$

이때 $\log_2 a = t$ 로 놓으면 $t^2 + t < 0$

$$t(t+1) < 0 \quad \therefore -1 < t < 0 \quad \dots \textcircled{2\text{단계}}$$

즉 $-1 < \log_2 a < 0$ 이므로

$$\log_2 2^{-1} < \log_2 a < \log_2 1$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$\frac{1}{2} < a < 1 \quad \dots \textcircled{3\text{단계}}$$

$$\text{답 } \frac{1}{2} < a < 1$$

	채점 요소	비율
1단계	판별식을 이용하여 로그부등식 세우기	40 %
2단계	$\log_2 a = t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기	30 %
3단계	a 의 값의 범위 구하기	30 %

0423 $(1 - \log_3 a)x^2 - 2(1 - \log_3 a)x + \log_3 a > 0$ 에서

(i) $\log_3 a = 1$, 즉 $a = 3$ 일 때

주어진 부등식은 $1 > 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

(ii) $\log_3 a \neq 1$, 즉 $a \neq 3$ 일 때

모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면

$$1 - \log_3 a > 0, \quad \log_3 a < 1 \\ \therefore a < 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 이차방정식 $(1 - \log_3 a)x^2 - 2(1 - \log_3 a)x + \log_3 a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{-(1 - \log_3 a)\}^2 - (1 - \log_3 a) \times \log_3 a < 0 \\ \therefore 2(\log_3 a)^2 - 3\log_3 a + 1 < 0$$

이때 $\log_3 a = t$ 로 놓으면

$$2t^2 - 3t + 1 < 0, \quad (2t - 1)(t - 1) < 0 \\ \therefore \frac{1}{2} < t < 1$$

즉 $\frac{1}{2} < \log_3 a < 1$ 이므로

$$\log_3 3^{\frac{1}{2}} < \log_3 a < \log_3 3$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$\sqrt{3} < a < 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 $\sqrt{3} < a < 3$

(i), (ii)에서 $\sqrt{3} < a \leq 3$

따라서 자연수 a 는 2, 3이므로 구하는 곱은

$$2 \times 3 = 6 \quad \text{답 6}$$

0424 올해 매출액은 100억 원이고, n 년 후의 매출액이 올해 매출액의 5배가 된다고 하면

$$100(1 + 0.28)^n = 100 \times 5 \\ \therefore 1.28^n = 5$$

양변에 상용로그를 취하면

$$n \log 1.28 = \log 5, \quad n \log \frac{128}{100} = \log 5 \\ n(7 \log 2 - 2) = 1 - \log 2 \\ \therefore n = \frac{1 - \log 2}{7 \log 2 - 2} = \frac{1 - 0.3}{7 \times 0.3 - 2} = 7$$

따라서 매출액이 올해 매출액의 5배가 되는 것은 7년 후이다.

답 7년

0425 올해의 채굴량을 A 라 하면 채굴량이 매년 $x\%$ 증가하므로

$$A\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{10} = 2A \quad \therefore \left(1 + \frac{x}{100}\right)^{10} = 2$$

048 정답 및 풀이

양변에 상용로그를 취하면

$$10 \log \left(1 + \frac{x}{100}\right) = \log 2 \\ \therefore \log \left(1 + \frac{x}{100}\right) = \frac{1}{10} \log 2 = \frac{1}{10} \times 0.3 = 0.03$$

이때 $\log 1.07 = 0.03$ 이므로

$$1 + \frac{x}{100} = 1.07 \quad \therefore x = 7 \quad \text{답 7}$$

0426 미생물의 개체 수가 1시간마다 r 배가 된다고 하면 배양을 시작한 지 10시간 후 이 미생물의 개체 수가 처음의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었으므로

$$r^{10} = \frac{5}{2}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log r^{10} = \log \frac{5}{2}, \quad 10 \log r = \log 5 - \log 2 \\ \therefore \log r = \frac{\log 5 - \log 2}{10} = \frac{1 - 2 \log 2}{10} \\ = \frac{1 - 2 \times 0.3010}{10} = 0.0398$$

이때 미생물의 개체 수가 n 시간 후 처음의 3배 이상이 된다고 하면

$$r^n \geq 3$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log r^n \geq \log 3, \quad n \log r \geq \log 3 \\ \therefore n \geq \frac{\log 3}{\log r} \\ = \frac{0.4771}{0.0398} \\ = 11. \times \times \times$$

따라서 처음의 3배 이상이 되는 것은 최소 12시간 후이다.

답 12시간

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 058~061쪽

0427 $f(x) = \log_{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \log_{\sqrt{3}} \frac{x+1}{x}$ 이므로

$$f(3) + f(4) + f(5) + \dots + f(8) \\ = \log_{\sqrt{3}} \frac{4}{3} + \log_{\sqrt{3}} \frac{5}{4} + \log_{\sqrt{3}} \frac{6}{5} + \dots + \log_{\sqrt{3}} \frac{9}{8} \\ = \log_{\sqrt{3}} \left(\frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \times \dots \times \frac{9}{8}\right) \\ = \log_{\sqrt{3}} 3 \\ = 2 \quad \text{답 2}$$

0428 $(f \circ g)(x) = 3x$ 이므로

$$(f \circ g)\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \times \frac{1}{3} = 1 \quad \therefore f\left(g\left(\frac{1}{3}\right)\right) = 1$$

이때 함수 $f(x) = \log_2(x+1) - 2$ 에서

$$f\left(g\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \log_2\left\{g\left(\frac{1}{3}\right) + 1\right\} - 2$$

$$\text{이므로 } \log_2\left\{g\left(\frac{1}{3}\right) + 1\right\} - 2 = 1$$

$$\log_2\left\{g\left(\frac{1}{3}\right) + 1\right\} = 3, \quad g\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = 2^3$$

$$\therefore g\left(\frac{1}{3}\right) = 7$$

답 7

0429 함수 $y = \log_5(x-a) + b$ 의 그래프의 점근선이 직선 $x=a$ 이므로

$$a=2$$

따라서 함수 $y = \log_5(x-2) + b$ 의 그래프가 점 $(7, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \log_5 5 + b, \quad 1 + b = 0$$

$$\therefore b = -1$$

$$\therefore a+b=1$$

답 1

$$\begin{aligned} \text{0430 } y &= \log_3(6x-72) \\ &= \log_3\{3 \times 2(x-12)\} \\ &= \log_3 2(x-12) + 1 \end{aligned}$$

따라서 이 함수의 그래프는 $y = \log_3 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 12만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$$a=3, m=12, n=1$$

$$\therefore a+m+n=16$$

답 16

$$\text{0431 } \neg. y = \log_{\frac{1}{3}} x = -\log_3 x$$

이므로 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동하면

$y = \log_3 x$ 의 그래프와 겹쳐진다.

$$\neg. y = 2\log_9(x-3) = \log_3(x-3)$$

이므로 $y = 2\log_9(x-3)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면 $y = \log_3 x$ 의 그래프와 겹쳐진다.

ㄷ. $y = 3^{x-2} - 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 후 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면 $y = \log_3 x$ 의 그래프와 겹쳐진다.

ㄹ. $y = \log_9 x^2 = \log_3 |x|$ 이므로 $y = \log_9 x^2$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 $y = \log_3 x$ 의 그래프와 겹쳐질 수 없다. 이상에서 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프와 겹쳐질 수 있는 것은 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 이다.

답 2

$$\text{0432 } A = \frac{1}{2} \log_{0.1} 2 = \log_{0.1} 2^{\frac{1}{2}} = \log_{0.1} \sqrt{2}$$

$$B = \log_{0.1} \sqrt{3}$$

$$C = \frac{1}{3} \log_{0.1} 8 = \log_{0.1} 8^{\frac{1}{3}} = \log_{0.1} 2$$

이때 $\sqrt{2} < \sqrt{3} < 2$ 이고 함수 $y = \log_{0.1} x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로

$$\log_{0.1} 2 < \log_{0.1} \sqrt{3} < \log_{0.1} \sqrt{2}$$

$$\therefore C < B < A$$

답 5

0433 점 P는 두 곡선 $y = -\log_2 x$, $y = \log_2(-x+k)$ 의 교점이므로

$$-\log_2 x_1 = \log_2(-x_1+k)$$

$$\log_2 \frac{1}{x_1} = \log_2(-x_1+k), \quad \frac{1}{x_1} = -x_1+k$$

$$\therefore x_1^2 - kx_1 + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 R는 두 곡선 $y = \log_2 x$, $y = -\log_2(-x+k)$ 의 교점이므로

$$\log_2 x_3 = -\log_2(-x_3+k)$$

$$\log_2 x_3 = \log_2 \frac{1}{-x_3+k}, \quad x_3 = \frac{1}{-x_3+k}$$

$$\therefore x_3^2 - kx_3 + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 x_1, x_3 은 이차방정식 $x^2 - kx + 1 = 0$ 의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

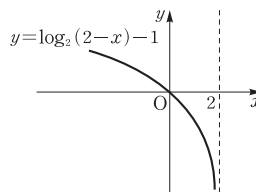
$$x_1 x_3 = 1$$

따라서 $(x_1 + x_3)^2 = (x_3 - x_1)^2 + 4x_1 x_3 = (2\sqrt{3})^2 + 4 \times 1 = 16$ 이므로

$$x_1 + x_3 = 4 (\because x_1 + x_3 > 0)$$

답 3

0434 $y = \log_2(2-x) - 1$ 의 그래프는 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$$\textcircled{5} y = \log_2(2-x) - 1 \text{에서 } y+1 = \log_2(2-x)$$

$$2-x = 2^{y+1} \quad \therefore x = -2^{y+1} + 2$$

x 와 y 를 서로 바꾸어 역함수를 구하면

$$y = -2^{x+1} + 2$$

답 5

0435 $g(\alpha) = 2$, $g(\beta) = 7$ 이므로

$$f(2) = \alpha, \quad f(7) = \beta$$

이때 $g(\alpha + \beta) = k$ 로 놓으면 $f(k) = \alpha + \beta$

$$f(k) = f(2) + f(7)$$

$$\log_3 k = \log_3 2 + \log_3 7, \quad \log_3 k = \log_3 14$$

$$\therefore k = 14 \quad \therefore g(\alpha + \beta) = 14$$

답 14

0436 함수 $y = \log_a x + k$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y = \log_a x + k$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.

이때 두 교점의 x 좌표가 각각 1, 2이므로 함수 $y = \log_a x + k$ 의 그래프는 두 점 $(1, 1)$, $(2, 2)$ 를 지난다.

$$\text{즉 } 1 = \log_a 1 + k \text{에서 } k = 1$$

$$2 = \log_a 2 + 1 \text{에서 } 1 = \log_a 2 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore a+k=3$$

답 3

0437 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 함수 $y=\log_2(x-1)$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $y=g(x)$ 는 함수 $y=\log_2(x-1)$ 의 역함수이다.

이때 점 $P(2, b)$ 가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로 점 $(b, 2)$ 는 곡선 $y=\log_2(x-1)$ 위의 점이다.

$$\text{즉 } 2=\log_2(b-1) \text{ 이므로 } b-1=2^2$$

$$\therefore b=5$$

따라서 점 $Q(a, 5)$ 가 곡선 $y=\log_2(x-1)$ 위의 점이므로

$$5=\log_2(a-1), \quad a-1=2^5$$

$$\therefore a=33$$

$$\therefore a+b=38$$

답 38

0438 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-a)$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

따라서 $5 \leq x \leq 8$ 일 때, 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-a)$ 는

$$x=8 \text{에서 최솟값 } \log_{\frac{1}{3}}(8-a)$$

$$\text{를 가지므로 } \log_{\frac{1}{3}}(8-a)=-2$$

$$8-a=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \quad \therefore a=-1$$

답 5

$$\begin{aligned} \mathbf{0439} \quad (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = \log_2 \frac{g(x)}{4} \\ &= \log_2 g(x) - 2 \end{aligned}$$

이때 밑이 1보다 크므로 이 함수는 $g(x)$ 가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

$$g(x)=x^2-8x+80=(x-4)^2+64 \text{이므로 함수 } g(x) \text{는}$$

$$x=4 \text{에서 최솟값 } 64$$

를 갖는다.

따라서 함수 $(f \circ g)(x)$ 는

$$x=4 \text{에서 최솟값 } \log_2 64 - 2 = 4$$

를 갖는다.

답 4

참고 함수 $g(x)$ 의 치역 $\{y|y \geq 64\}$ 는 함수 $f(x)=\log_2 \frac{x}{4}$ 의 정의역인 양의 실수 전체의 집합에 포함되므로 합성함수 $(f \circ g)(x)$ 가 정의된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{0440} \quad y &= \log_3 x \times \log_{\frac{1}{3}} x + 2 \log_3 x + 10 \\ &= -(\log_3 x)^2 + 2 \log_3 x + 10 \end{aligned}$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$y = -t^2 + 2t + 10 = -(t-1)^2 + 11 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$1 \leq x \leq 81 \text{에서 } \log_3 1 \leq \log_3 x \leq \log_3 81 \text{이므로}$$

$$0 \leq t \leq 4$$

따라서 $0 \leq t \leq 4$ 일 때, 함수 $\textcircled{1}$ 은

$$t=1 \text{에서 최댓값 } M=11,$$

$$t=4 \text{에서 최솟값 } m=2$$

를 가지므로

$$M+m=13$$

답 13

$$\begin{aligned} \mathbf{0441} \quad \log_2 \left(x + \frac{1}{y}\right) + \log_2 \left(y + \frac{9}{x}\right) &= \log_2 \left(x + \frac{1}{y}\right) \left(y + \frac{9}{x}\right) \\ &= \log_2 \left(xy + \frac{9}{xy} + 10\right) \end{aligned}$$

이때 $x > 0, y > 0$ 에서 $xy > 0, \frac{9}{xy} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} xy + \frac{9}{xy} + 10 &\geq 2\sqrt{xy \times \frac{9}{xy}} + 10 \\ &= 2 \times 3 + 10 \\ &= 16 \quad (\text{단, 등호는 } xy=3 \text{일 때 성립}) \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\log_2 16 = 4$ 이다.

답 4

$$\mathbf{0442} \quad \log_{\frac{1}{2}}(x-2) = \log_{\frac{1}{4}}(2x-1) \text{의 진수의 조건에서}$$

$$x-2 > 0, 2x-1 > 0$$

$$\therefore x > 2$$

$\dots\dots \textcircled{1}$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) = \log_{\frac{1}{4}}(2x-1) \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$$

$$2 \log_{\frac{1}{2}}(x-2) = \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 = \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$$

$$(x-2)^2 = 2x-1, \quad x^2-6x+5=0$$

$$(x-1)(x-5)=0 \quad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=5$$

이때 $\textcircled{1}$ 에서 $x=5$

$$\therefore a=5$$

$$(\log_{16} x^2)^2 - 5 \log_{16} x + 1 = 0 \text{에서}$$

$$(2 \log_{16} x)^2 - 5 \log_{16} x + 1 = 0$$

$$\text{이때 } \log_{16} x = t \text{로 놓으면 } (2t)^2 - 5t + 1 = 0$$

$$4t^2 - 5t + 1 = 0, \quad (4t-1)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{4} \text{ 또는 } t = 1$$

$$\text{즉 } \log_{16} x = \frac{1}{4} \text{ 또는 } \log_{16} x = 1 \text{이므로}$$

$$x=2 \text{ 또는 } x=16$$

따라서 $\beta=2, \gamma=16$ 또는 $\beta=16, \gamma=2$ 이므로

$$\alpha + \beta + \gamma = 5 + 2 + 16 = 23$$

답 23

$$\mathbf{0443} \quad x^{\log x^2} = 100x^3 \text{의 양변에 상용로그를 취하면}$$

$$\log x^{\log x^2} = \log 100x^3$$

$$\log x^2 \times \log x = 2 + 3 \log x$$

$$2 \log x \times \log x = 2 + 3 \log x$$

$$\therefore 2(\log x)^2 - 3 \log x - 2 = 0$$

이때 $\log x = t$ 로 놓으면

$$2t^2 - 3t - 2 = 0, \quad (2t+1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } t = 2$$

$$\text{즉 } \log x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \log x = 2 \text{이므로}$$

$$x = 10^{-\frac{1}{2}} \text{ 또는 } x = 10^2$$

따라서 $\alpha=10^{-\frac{1}{2}}$, $\beta=10^2$ 또는 $\alpha=10^2$, $\beta=10^{-\frac{1}{2}}$ 이므로

$$\log \alpha \beta = \log (10^{-\frac{1}{2}} \times 10^2) = \log 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \quad \text{답 ④}$$

다른 풀이 $2(\log x)^2 - 3\log x - 2 = 0$ 에서 $\log x = t$ 로 놓으면

$$2t^2 - 3t - 2 = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

주어진 방정식의 두 근이 α , β 이므로 이차방정식 ㉠의 두 근은 $\log \alpha$, $\log \beta$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log \alpha + \log \beta = \frac{3}{2} \quad \therefore \log \alpha \beta = \frac{3}{2}$$

0444 $(\log_3 x)^2 - 8\log_3 \sqrt{x} + 2 = 0$ 에서

$$(\log_3 x)^2 - 4\log_3 x + 2 = 0$$

이때 $\log_3 x = t$ 로 놓으면 $t^2 - 4t + 2 = 0 \quad \dots\dots ㉠$

주어진 방정식의 두 근이 α , β 이므로 이차방정식 ㉠의 두 근은 $\log_3 \alpha$, $\log_3 \beta$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_3 \alpha + \log_3 \beta = 4, \log_3 \alpha \times \log_3 \beta = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a 3 + \log_\beta 3 &= \frac{1}{\log_3 \alpha} + \frac{1}{\log_3 \beta} \\ &= \frac{\log_3 \alpha + \log_3 \beta}{\log_3 \alpha \times \log_3 \beta} \\ &= \frac{4}{2} = 2 \end{aligned} \quad \text{답 2}$$

0445 진수의 조건에서 $f(x) > 0$, $x-1 > 0$

$$0 < x < 7, x > 1 \quad \therefore 1 < x < 7 \quad \dots\dots ㉠$$

$\log_3 f(x) + \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \leq 0$ 에서

$$\log_3 f(x) - \log_3(x-1) \leq 0$$

$$\therefore \log_3 f(x) \leq \log_3(x-1)$$

이때 밑이 1보다 크므로 $f(x) \leq x-1$

주어진 그래프에서 ㉠과 $f(x) \leq x-1$ 의 해의 공통 범위는

$$4 \leq x < 7$$

따라서 자연수 x 는 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$$4 + 5 + 6 = 15 \quad \text{답 15}$$

0446 진수의 조건에서 $x > 0$

$(2 + \log_{\frac{1}{2}} x) \log_2 x > -3$ 에서

$$(2 - \log_2 x) \log_2 x > -3$$

이때 $\log_2 x = t$ 로 놓으면 $(2-t)t > -3$

$$t^2 - 2t - 3 < 0, (t+1)(t-3) < 0$$

$$\therefore -1 < t < 3$$

즉 $-1 < \log_2 x < 3$ 이므로

$$\log_2 2^{-1} < \log_2 x < \log_2 2^3$$

이때 밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{2} < x < 8 \quad \dots\dots ㉠$

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{2} < x < 8$

따라서 정수 x 의 최댓값은 7이다.

답 7

0447 진수의 조건에서 $x > 0$

$\dots\dots ㉠$

$x^{\log_{\frac{1}{2}} x} > \frac{x}{64}$ 의 양변에 밑이 $\frac{1}{2}$ 인 로그를 취하면

$$\log_{\frac{1}{2}} x^{\log_{\frac{1}{2}} x} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{64}$$

$$\therefore (\log_{\frac{1}{2}} x)^2 < \log_{\frac{1}{2}} x + 6$$

이때 $\log_{\frac{1}{2}} x = t$ 로 놓으면

$$t^2 < t + 6, t^2 - t - 6 < 0$$

$$(t+2)(t-3) < 0 \quad \therefore -2 < t < 3$$

즉 $-2 < \log_{\frac{1}{2}} x < 3$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} < \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

이때 밑이 1보다 작은 양수이므로

$$\frac{1}{8} < x < 4 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{8} < x < 4$

따라서 정수 x 는 1, 2, 3의 3개이다.

답 3

0448 이차방정식 $x^2 + 2(2 - \log a)x - 2\log a + 7 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2 - \log a)^2 - (-2\log a + 7) > 0$$

$$\therefore (\log a)^2 - 2\log a - 3 > 0$$

이때 $\log a = t$ 로 놓으면 $t^2 - 2t - 3 > 0$

$$(t+1)(t-3) > 0 \quad \therefore t < -1 \text{ 또는 } t > 3$$

즉 $\log a < -1$ 또는 $\log a > 3$ 이므로

$$\log a < \log 10^{-1} \text{ 또는 } \log a > \log 10^3$$

이때 밑이 1보다 크므로

$$0 < a < \frac{1}{10} \text{ 또는 } a > 1000 (\because a > 0) \quad \text{답 ⑤}$$

0449 처음에 물에 섞여 있는 중금속의 양을 a ($a > 0$)라 하고, 여과기를 n 번 통과한 후 남아 있는 중금속의 양이 처음 양의 2% 이하가 된다고 하면

$$a \left(1 - \frac{20}{100}\right)^n \leq \frac{2}{100} a \quad \therefore \left(\frac{8}{10}\right)^n \leq \frac{2}{100}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$n \log \frac{8}{10} \leq \log \frac{2}{100}, \quad n(3 \log 2 - 1) \leq \log 2 - 2$$

$$n(1 - 3 \log 2) \geq 2 - \log 2$$

$$\therefore n \geq \frac{2 - \log 2}{1 - 3 \log 2} = \frac{2 - 0.3010}{1 - 3 \times 0.3010} = \frac{1.699}{0.097} = 17. \times \times \times$$

따라서 여과기를 최소한 18번 통과시켜야 한다.

답 ②

0450 두 점 A, B의 x 좌표가 k 이므로

$$A(k, \log_3 k), B(k, \log_{27} k)$$

$$\therefore \overline{AB} = \log_3 k - \log_{27} k = \log_3 k - \frac{1}{3} \log_3 k$$

$$= \frac{2}{3} \log_3 k$$

... 1단계

따라서 $\overline{AB}=2$ 에서 $\frac{2}{3}\log_3 k=2$

$$\log_3 k=3 \quad \therefore k=27$$

... 2단계

답 27

채점 요소	비율
1단계 $\overline{AB}$ 를 k 에 대한 식으로 나타내기	60 %
2단계 k 의 값 구하기	40 %

$$\begin{aligned} 0451 \quad y &= 2(\log_2 x)^2 - \log_{\sqrt{2}} x^3 + a \\ &= 2(\log_2 x)^2 - 6\log_2 x + a \end{aligned}$$

이때 $\log_2 x=t$ 로 놓으면

$$y=2t^2-6t+a=2\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+a$$

... 1단계

이 함수는 $t=\frac{3}{2}$ 에서 최솟값 $-\frac{9}{2}+a$ 를 갖는다.

$$\text{즉 } -\frac{9}{2}+a=2 \text{ 이므로 } a=\frac{13}{2}$$

$$\log_2 x=\frac{3}{2} \text{에서 } x=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$$

$$\therefore b=2\sqrt{2}$$

... 2단계

$$\therefore a^2b^2=(ab)^2=\left(\frac{13}{2}\times 2\sqrt{2}\right)^2=338$$

... 3단계

답 338

채점 요소	비율
1단계 $\log_2 x=t$ 로 놓고 주어진 함수를 t 에 대한 이차함수로 변형하기	30 %
2단계 a, b 의 값 구하기	60 %
3단계 a^2b^2 의 값 구하기	10 %

0452 밑과 진수의 조건에서

$$2x^2+1>0, 2x^2+1\neq 1,$$

$$7x-2>0, 7x-2\neq 1, 2x-1>0$$

$$\therefore x>\frac{1}{2}$$

..... ㉠

... 1단계

(i) $2x^2+1=7x-2$ 에서

$$2x^2-7x+3=0, \quad (2x-1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=3$$

이때 ㉠에서 $x=3$

... 2단계

(ii) $2x-1=1$ 에서 $x=1$

$x=1$ 은 ㉠을 만족시키므로 주어진 방정식의 근이다. ... 3단계

(i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=3$

따라서 모든 근의 합은

$$1+3=4$$

... 4단계

답 4

채점 요소	비율
1단계 밑과 진수의 조건을 만족시키는 x 의 값의 범위 구하기	30 %
2단계 밑이 같을 때의 x 의 값 구하기	40 %
3단계 진수가 1일 때의 x 의 값 구하기	20 %
4단계 모든 근의 합 구하기	10 %

0453 양수 a 가 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-1}}=-\sqrt{\frac{a}{a-1}}$ 를 만족시키므로

$$a>0, a-1<0$$

$$\therefore 0<a<1$$

... 1단계

주어진 부등식의 진수의 조건에서

$$x>0, x-3>0$$

$$\therefore x>3$$

..... ㉡

... 2단계

$\log_a x > \log_a 4 - \log_a (x-3)$ 에서

$$\log_a x + \log_a (x-3) > \log_a 4$$

$$\therefore \log_a x(x-3) > \log_a 4$$

이때 밑이 1보다 작은 양수이므로

$$x(x-3)<4, \quad x^2-3x-4<0$$

$$(x+1)(x-4)<0$$

$$\therefore -1<x<4$$

..... ㉢

㉠, ㉢에서 $3<x<4$

... 3단계

답 $3<x<4$

채점 요소	비율
1단계 a 의 값의 범위 구하기	30 %
2단계 진수의 조건을 만족시키는 x 의 값의 범위 구하기	20 %
3단계 부등식의 해 구하기	50 %

0454 전략 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있음을 이용한다.

$A'(a, 0)$ ($a>0$)이라 하면 $\overline{OA'}=\overline{A'B'}=\overline{B'C'}$ 이므로

$$\overline{OA'}=a, \overline{OB'}=2a, \overline{OC'}=3a$$

$$\therefore A(a, -\log_3 a), B(2a, \log_3 2a), C(3a, \log_3 3a)$$

이때 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$$(\overline{AB} \text{의 기울기}) = (\overline{BC} \text{의 기울기})$$

$$\frac{\log_3 2a - (-\log_3 a)}{2a - a} = \frac{\log_3 3a - \log_3 2a}{3a - 2a}$$

$$\log_3 2a^2 = \log_3 \frac{3}{2}, \quad 2a^2 = \frac{3}{2}$$

$$a^2 = \frac{3}{4} \quad \therefore a = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because a>0)$$

따라서 점 B의 y 좌표는

$$\log_3 \left(2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0455 전략 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$ 이 직선 $y=x-1$ 에 대하여 대칭임을 이용한다.

두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$ 은 각각 곡선 $y=a^x$ 과 곡선 $y=\log_a x$ 를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$ 은 직선 $y=x-1$ 에 대하여 대칭이다.

두 직선 $y=-x+4$, $y=x-1$ 의 교점을 M이라 하면

$$-x+4=x-1 \text{에서 } x=\frac{5}{2} \text{ 이므로}$$

$$M\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

또 점 A가 직선 $y = -x + 4$ 위의 점이므로 점 A의 좌표를 $(k, -k+4)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AM} &= \sqrt{\left(k - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(-k + 4 - \frac{3}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{2k^2 - 10k + \frac{25}{2}} \quad \dots\dots ㉠\end{aligned}$$

이때 점 M은 선분 AB의 중점이므로

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\sqrt{2k^2 - 10k + \frac{25}{2}} = \sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $2k^2 - 10k + \frac{25}{2} = 2$

$$4k^2 - 20k + 21 = 0, \quad (2k-3)(2k-7) = 0$$

$$\therefore k = \frac{3}{2} \text{ 또는 } k = \frac{7}{2}$$

그런데 점 A의 x 좌표는 점 M의 x 좌표보다 작으므로

$$k = \frac{3}{2} \quad \therefore A\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

점 A는 곡선 $y = a^{x-1}$ 위의 점이므로 $\frac{5}{2} = a^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore a = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

즉 점 C는 곡선 $y = \left(\frac{25}{4}\right)^{x-1}$ 이 y 축과 만나는 점이므로

$$C\left(0, \frac{4}{25}\right)$$

점 C에서 직선 $y = -x + 4$, 즉 $x + y - 4 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CH} = \frac{\left|\frac{4}{25} - 4\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{48\sqrt{2}}{25}$$

따라서 $S = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CH} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{48\sqrt{2}}{25} = \frac{96}{25}$ 이므로

$$50 \times S = 192$$

답 192

다른 풀이 두 직선 $y = -x + 4$, $y = x - 1$ 의 교점의 좌표는

$$\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) \text{이므로 선분 AB의 중점은 점 } \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) \text{이다.}$$

이때 두 점 A, B는 직선 $y = -x + 4$ 위의 점이고 $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ 이므로 두 점 A, B의 x 좌표의 차와 y 좌표의 차는 각각 2이다.

따라서 점 A의 좌표는

$$\left(\frac{5}{2} - 1, \frac{3}{2} + 1\right), \text{ 즉 } \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

0456 전략 주어진 방정식에서 진수가 같음을 이용하여 x 에 대한 이차방정식을 구한 후 이 이차방정식의 실근이 존재해야 함을 이용한다.

진수의 조건에서 $2x + 5 > 0$, $4 - x > 0$

$$\therefore -\frac{5}{2} < x < 4$$

$$\log(2x+5) + \log(4-x) = \log a \text{에서}$$

$$\log(2x+5)(4-x) = \log a$$

$$(2x+5)(4-x) = a$$

$$\therefore -2x^2 + 3x + 20 = a \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $f(x) = -2x^2 + 3x + 20 = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{169}{8}$ 라 하면

$-\frac{5}{2} \leq x \leq 4$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는

$$x = \frac{3}{4} \text{에서 최댓값 } \frac{169}{8},$$

$$x = -\frac{5}{2} \text{ 또는 } x = 4 \text{에서 최솟값 } 0$$

을 갖는다.

따라서 $-\frac{5}{2} < x < 4$ 에서 방정식 ㉠의 실근이 존재하려면

$$0 < a \leq \frac{169}{8}$$

즉 구하는 자연수 a 는 1, 2, 3, ..., 21의 21개이다.

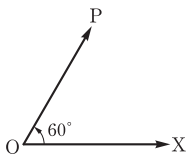
답 21

05 삼각함수

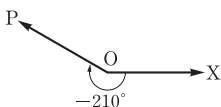
교과서 문제 정복하기

본책 065쪽

0457 답



0458 답



0459 답 $360^\circ \times n + 120^\circ$

0460 답 $360^\circ \times n + 230^\circ$

0461 $500^\circ = 360^\circ \times 1 + 140^\circ$ 이므로

$$360^\circ \times n + 140^\circ$$

답 $360^\circ \times n + 140^\circ$

0462 $-650^\circ = 360^\circ \times (-2) + 70^\circ$ 이므로

$$360^\circ \times n + 70^\circ$$

답 $360^\circ \times n + 70^\circ$

0463 $550^\circ = 360^\circ \times 1 + 190^\circ$ 이므로 550° 는 제3사분면의 각이다.

답 제3사분면

0464 $-380^\circ = 360^\circ \times (-2) + 340^\circ$ 이므로 -380° 는 제4사분면의 각이다.

답 제4사분면

0465 $240^\circ = 240 \times \frac{\pi}{180} = \frac{4}{3}\pi$

답 $\frac{4}{3}\pi$

0466 $\frac{7}{4}\pi = \frac{7}{4}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 315^\circ$

답 315°

0467 $-300^\circ = -300 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{5}{3}\pi$

답 $-\frac{5}{3}\pi$

0468 $-\frac{2}{3}\pi = -\frac{2}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -120^\circ$

답 -120°

0469 $5\pi = 2\pi \times 2 + \pi$ 이므로

$$2n\pi + \pi$$

답 $2n\pi + \pi$

054 정답 및 풀이

0470 $\frac{17}{6}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{5}{6}\pi$ 이므로

$$2n\pi + \frac{5}{6}\pi$$

답 $2n\pi + \frac{5}{6}\pi$

0471 $-\frac{16}{3}\pi = 2\pi \times (-3) + \frac{2}{3}\pi$ 이므로

$$2n\pi + \frac{2}{3}\pi$$

답 $2n\pi + \frac{2}{3}\pi$

0472 $-\frac{3}{4}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{5}{4}\pi$ 이므로

$$2n\pi + \frac{5}{4}\pi$$

답 $2n\pi + \frac{5}{4}\pi$

0473 $l = 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi$, $S = \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{4} = 2\pi$

답 $l = \pi$, $S = 2\pi$

0474 $\frac{1}{2} \times r \times 4 = 6$ 이므로 $r = 3$

따라서 $3\theta = 4$ 이므로 $\theta = \frac{4}{3}$

답 $r = 3$, $\theta = \frac{4}{3}$

0475 $\overline{OP} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{-1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\tan \theta = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

답 $\sin \theta = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\tan \theta = -\frac{1}{3}$

0476 오른쪽 그림과 같이 각 $\frac{3}{4}\pi$ 를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P, 점 P

에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

직각삼각형 PHO에서 $\overline{OP} = 1$,

$\angle POH = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\overline{OH} = \overline{OP} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \overline{PH} = \overline{OP} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

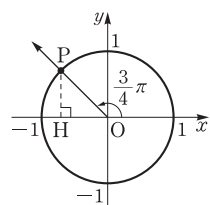
이때 점 P가 제2사분면 위의 점이므로

$$P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \theta = -1$$

답 $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan \theta = -1$

참고 원 $x^2 + y^2 = 1$, 즉 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 단위원이라 한다.



0477 $\frac{14}{3}\pi = 2\pi \times 2 + \frac{2}{3}\pi$ 이므로 θ 는 제2사분면의 각이다.

$$\therefore \sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$$

답 $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$

0478 $\sin \theta < 0$ 이면 θ 는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이고, $\cos \theta < 0$ 이면 θ 는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

따라서 θ 는 제3사분면의 각이다.

답 제3사분면

0479 $\sin \theta > 0$ 이면 θ 는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이고, $\tan \theta < 0$ 이면 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

따라서 θ 는 제2사분면의 각이다.

답 제2사분면

0480 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

이때 θ 가 제2사분면의 각이므로

$$\sin \theta = \frac{4}{5} \quad (\because \sin \theta > 0)$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

답 $\sin \theta = \frac{4}{5}, \tan \theta = -\frac{4}{3}$

0481 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$$

답 $-\frac{4}{9}$

유형 익히기

• 본책 066~071쪽

0482 ① $390^\circ = 360^\circ \times 1 + 30^\circ$

② $750^\circ = 360^\circ \times 2 + 30^\circ$

③ $-330^\circ = 360^\circ \times (-1) + 30^\circ$

④ $-390^\circ = 360^\circ \times (-2) + 330^\circ$

⑤ $-690^\circ = 360^\circ \times (-2) + 30^\circ$

따라서 동경 OP가 나타내는 각이 될 수 없는 것은 ④이다.

답 ④

0483 ① $-500^\circ = 360^\circ \times (-2) + 220^\circ$

② $-220^\circ = 360^\circ \times (-1) + 140^\circ$

③ $580^\circ = 360^\circ \times 1 + 220^\circ$

④ $940^\circ = 360^\circ \times 2 + 220^\circ$

⑤ $1300^\circ = 360^\circ \times 3 + 220^\circ$

따라서 α 의 값이 나머지 넷과 다른 하나는 ②이다.

답 ②

0484 ㄱ. $1680^\circ = 360^\circ \times 4 + 240^\circ$

ㄴ. $-240^\circ = 360^\circ \times (-1) + 120^\circ$

ㄷ. $2040^\circ = 360^\circ \times 5 + 240^\circ$

ㄹ. $-1920^\circ = 360^\circ \times (-6) + 240^\circ$

ㅁ. $720^\circ = 360^\circ \times 2$

이상에서 240° 를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

0485 θ 가 제3사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 180^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 270^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore 180^\circ \times n + 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times n + 135^\circ$$

(i) $n = 2k$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 135^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n = 2k + 1$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 270^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 315^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제2사분면, 제4사분면이다.

답 제2사분면, 제4사분면

0486 ① $610^\circ = 360^\circ \times 1 + 250^\circ$ 이므로 제3사분면의 각이다.

② $955^\circ = 360^\circ \times 2 + 235^\circ$ 이므로 제3사분면의 각이다.

③ $1295^\circ = 360^\circ \times 3 + 215^\circ$ 이므로 제3사분면의 각이다.

④ $-570^\circ = 360^\circ \times (-2) + 150^\circ$ 이므로 제2사분면의 각이다.

⑤ $-840^\circ = 360^\circ \times (-3) + 240^\circ$ 이므로 제3사분면의 각이다.

따라서 각을 나타내는 동경이 존재하는 사분면이 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다.

답 ④

0487 θ 가 제4사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 270^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 360^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore 120^\circ \times n + 90^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times n + 120^\circ$$

(i) $n = 3k$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 90^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 120^\circ$$

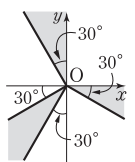
(ii) $n = 3k + 1$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 210^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 240^\circ$$

(iii) $n = 3k + 2$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 330^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 360^\circ$$

이상에서 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 속하는 모든 영역을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다. (단, 경계선은 제외한다.)



답 ③

0488 각 θ 를 나타내는 동경과 각 7θ 를 나타내는 동경이 일치하므로

$$\begin{aligned} 7\theta - \theta &= 360^\circ \times n \quad (n \text{은 정수}) \\ 6\theta &= 360^\circ \times n \\ \therefore \theta &= 60^\circ \times n \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

그런데 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로 $90^\circ < 60^\circ \times n < 180^\circ$

$$\therefore \frac{3}{2} < n < 3$$

이때 n 은 정수이므로 $n=2$

$n=2$ 를 ㉠에 대입하면 $\theta=120^\circ$ **답 120°**

0489 각 θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 일치 선 위에 있고 방향이 반대이므로

$$\begin{aligned} 5\theta - \theta &= 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (n \text{은 정수}) \\ 4\theta &= 360^\circ \times n + 180^\circ \\ \therefore \theta &= 90^\circ \times n + 45^\circ \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

그런데 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 이므로 $0^\circ < 90^\circ \times n + 45^\circ < 90^\circ$

$$\therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{1}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0$

$n=0$ 을 ㉡에 대입하면 $\theta=45^\circ$ **답 45°**

0490 각 θ 를 나타내는 동경과 각 4θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

$$\begin{aligned} \theta + 4\theta &= 360^\circ \times n \quad (n \text{은 정수}) \\ 5\theta &= 360^\circ \times n \\ \therefore \theta &= 72^\circ \times n \quad \dots\dots \textcircled{㉢} \end{aligned}$$

그런데 $180^\circ < \theta < 360^\circ$ 이므로 $180^\circ < 72^\circ \times n < 360^\circ$

$$\therefore \frac{5}{2} < n < 5$$

이때 n 은 정수이므로 $n=3, 4$

이것을 ㉢에 대입하면

$$\theta = 216^\circ, 288^\circ \quad \text{답 } 216^\circ, 288^\circ$$

0491 각 2θ 를 나타내는 동경과 각 7θ 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\begin{aligned} 2\theta + 7\theta &= 360^\circ \times n + 90^\circ \quad (n \text{은 정수}) \\ 9\theta &= 360^\circ \times n + 90^\circ \\ \therefore \theta &= 40^\circ \times n + 10^\circ \quad \dots\dots \textcircled{㉣} \quad \dots \text{1단계} \end{aligned}$$

그런데 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 이므로

$$0^\circ < 40^\circ \times n + 10^\circ < 90^\circ$$

$$\therefore -\frac{1}{4} < n < 2$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0, 1$ **... 2단계**

이것을 ㉣에 대입하면

$$\theta = 10^\circ, 50^\circ \quad \dots \text{3단계}$$

따라서 모든 각 θ 의 크기의 합은

$$10^\circ + 50^\circ = 60^\circ \quad \dots \text{4단계}$$

답 60°

채점 요소	비율
1단계 θ 를 정수 n 에 대한 식으로 나타내기	30 %
2단계 n 의 값 구하기	30 %
3단계 각 θ 의 크기 구하기	20 %
4단계 모든 각 θ 의 크기의 합 구하기	20 %

0492 ① $45^\circ = 45 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$

② $160^\circ = 160 \times \frac{\pi}{180} = \frac{8}{9}\pi$

③ $-144^\circ = -144 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{4}{5}\pi$

④ $\frac{3}{10}\pi = \frac{3}{10}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 54^\circ$

⑤ $\frac{9}{5}\pi = \frac{9}{5}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 324^\circ$

답 ⑤

0493 $432^\circ = 432 \times \frac{\pi}{180} = \frac{12}{5}\pi$ 이므로

$$a=5, b=12$$

$$\frac{5}{12}\pi = \frac{5}{12}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 75^\circ \text{이므로 } c=75$$

$$\therefore a+b+c=92$$

답 92

0494 ㄱ. $16^\circ = 16 \times \frac{\pi}{180} = \frac{4}{45}\pi$ (참)

ㄴ. 2라디안 $= 2 \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{360^\circ}{\pi}$ (참)

ㄷ. $-\frac{4}{3}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{2}{3}\pi$ 이므로 $-\frac{4}{3}\pi$ 는 제2사분면의 각이다. (거짓)

ㄹ. $-\frac{5}{4}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{3}{4}\pi$, $\frac{19}{4}\pi = 2\pi \times 2 + \frac{3}{4}\pi$ 이므로

$-\frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{19}{4}\pi$ 를 나타내는 동경은 모두 일치한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

0495 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$\frac{1}{2} \times r \times 6\pi = 12\pi \quad \therefore r=4$$

따라서 $4\theta = 6\pi$ 이므로 $\theta = \frac{3}{2}\pi$

즉 부채꼴의 중심각의 크기는 $\frac{3}{2}\pi$ 이다.

답 ⑤

0496 반지름의 길이가 a , 중심각의 크기가 $\frac{5}{6}\pi$ 인 부채꼴의 호의 길이가 10π 이므로

$$a \times \frac{5}{6}\pi = 10\pi \quad \therefore a=12$$

따라서 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 12 \times 10\pi = 60\pi \quad \therefore b=60$$

$$\therefore b-a=48$$

답 48

0497 부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면 둘레의 길이가 24이므로 호의 길이는

$$24 - 2r \quad (0 < r < 12)$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{부채꼴의 넓이}) &= \frac{1}{2}r(24 - 2r) = -r^2 + 12r \\ &= -(r - 6)^2 + 36 \end{aligned}$$

따라서 $r=6$ 일 때 부채꼴의 넓이가 최대이므로 넓이가 최대인 부채꼴의 반지름의 길이는 6이다.

답 6

0498 오른쪽 그림과 같이 부채꼴 PAB와 원 O의 접점을 각각 C, D, E라 하고, 원 O의 반지름의 길이를 r 라 하면 $\overline{OC} = \overline{OD} = \overline{OE} = r$ 이때 $\triangle PCO \equiv \triangle PEO$ (RHS 합동)이므로

$$\angle CPO = \angle EPO = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

따라서 직각삼각형 PCO에서

$$\overline{PO} = \frac{r}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2r$$

즉 $\overline{PD} = \overline{PO} + \overline{OD}$ 에서

$$2r + r = 12 \quad \therefore r = 4$$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 12^2 \times \frac{\pi}{3} - \pi \times 4^2 = 24\pi - 16\pi = 8\pi$$

답 8π

참고 두 직각삼각형 PCO, PEO에서

$$\overline{PO} \text{는 공통, } \overline{OC} = \overline{OE} = r$$

이므로 $\triangle PCO \equiv \triangle PEO$ (RHS 합동)

0499 $\overline{OP} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13$ 이므로

$$\sin \theta = -\frac{5}{13}, \cos \theta = \frac{12}{13}, \tan \theta = -\frac{5}{12}$$

$$\therefore 13 \sin \theta - 13 \cos \theta + 12 \tan \theta$$

$$\begin{aligned} &= 13 \times \left(-\frac{5}{13}\right) - 13 \times \frac{12}{13} + 12 \times \left(-\frac{5}{12}\right) \\ &= -22 \end{aligned}$$

답 -22

0500 점 $P\left(a, \frac{3}{2}\right)$ 에 대하여 $\tan \theta = \frac{\frac{3}{2}}{a} = \frac{3}{2a}$ 이므로

$$\frac{3}{2a} = -\frac{3}{4} \quad \therefore a = -2$$

따라서 점 P의 좌표가 $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$ 이므로

$$r = \sqrt{(-2)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore a + r = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

0501 $\overline{AD} = 6, \overline{CD} = 2$ 이므로

$$A(-3, 1)$$

$$\overline{OA} = \sqrt{10} \text{이므로} \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

두 점 A, D는 y 축에 대하여 대칭이므로

$$D(3, 1)$$

$$\overline{OD} = \sqrt{10} \text{이므로} \quad \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3}{10}$$

답 $\frac{3}{10}$

0502 점 P의 좌표를 (a, b) ($a > 0$)라 하면 점 P가 직선 $y = -\sqrt{3}x$ 위의 점이므로

$$b = -\sqrt{3}a$$

... 1단계

$$\begin{aligned} \therefore \overline{OP} &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-\sqrt{3}a)^2} \\ &= 2a \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

... 2단계

따라서

$$\sin \theta = \frac{-\sqrt{3}a}{2a} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},$$

$$\tan \theta = \frac{-\sqrt{3}a}{a} = -\sqrt{3}$$

... 3단계

이므로

$$\begin{aligned} -\sin \theta + \cos \theta + \tan \theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ &= \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

... 4단계

답 $\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$

	채점 요소	비율
1단계	점 P의 좌표를 (a, b) 라 하고 a 와 b 사이의 관계식 구하기	20 %
2단계	$\overline{OP}$ 의 길이를 a 에 대한 식으로 나타내기	30 %
3단계	$\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ 의 값 구하기	40 %
4단계	$-\sin \theta + \cos \theta + \tan \theta$ 의 값 구하기	10 %

0503 (i) $\sin \theta \cos \theta > 0$ 에서

$\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$ 일 때, θ 는 제1사분면의 각이다.

$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$ 일 때, θ 는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\cos \theta \tan \theta > 0$ 에서

$\cos \theta > 0, \tan \theta > 0$ 일 때, θ 는 제1사분면의 각이다.

$\cos \theta < 0, \tan \theta < 0$ 일 때, θ 는 제2사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제1사분면의 각이다.

답 제1사분면

0504 $\tan \theta < 0$ 에서 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이고, $\cos \theta > 0$ 에서 θ 는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

따라서 θ 는 제4사분면의 각이므로 각 θ 의 크기가 될 수 있는 것은 ⑤ $\frac{5}{3}\pi$ 이다.

답 ⑤

0505 θ 가 제3사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$$

$$\begin{aligned} \therefore |\sin \theta| + |\cos \theta| + \sqrt{\sin^2 \theta + \sqrt{\cos^3 \theta}} \\ = |\sin \theta| + |\cos \theta| + |\sin \theta| + \cos \theta \\ = -\sin \theta - \cos \theta - \sin \theta + \cos \theta \\ = -2\sin \theta \end{aligned}$$

답 ①

0506 θ 가 제2사분면의 각이므로

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$$

... 1단계

따라서 $\cos \theta + \tan \theta < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \sqrt{\sin^2 \theta} - \sqrt{(\cos \theta + \tan \theta)^2} + \cos \theta - \sin \theta + |\tan \theta| \\ = |\sin \theta| - |\cos \theta + \tan \theta| + \cos \theta - \sin \theta + |\tan \theta| \\ = \sin \theta + (\cos \theta + \tan \theta) + \cos \theta - \sin \theta - \tan \theta \\ = 2\cos \theta \end{aligned}$$

... 2단계

답 2cos θ

	채점 요소	비율
1단계	$\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ 의 값의 부호 알기	30 %
2단계	주어진 식을 간단히 하기	70 %

0507 $\frac{\sqrt{\cos \theta}}{\sqrt{\sin \theta}} = -\sqrt{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}}$ 이고 $\sin \theta \cos \theta \neq 0$ 이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$$

즉 θ 는 제4사분면의 각이고 $0 < \theta < 2\pi$ 이므로

$$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$$

따라서 $a = \frac{3}{2}, b = 2$ 이므로

$$a + b = \frac{7}{2}$$

답 ⑤

RPM비법노트

음수의 제곱근의 성질

실수 a, b 에 대하여

① $a < 0, b < 0$ 이면

$$\sqrt{a} \sqrt{b} = -\sqrt{ab}$$

그 외에는 $\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

② $a > 0, b < 0$ 이면

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$$

그 외에는 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ (단, $b \neq 0$)

0508 $\cos \theta < 0, \tan \theta < 0$ 이므로 θ 는 제2사분면의 각이다.

이때 $0 < \theta < 2\pi$ 이므로

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

$\therefore \sin \theta > 0, \cos \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta \cos \theta < 0 \text{ (거짓)}$$

$\therefore \sin \theta > 0, \tan \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta \tan \theta < 0 \text{ (참)}$$

ㄷ. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서

$$\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$$

즉 $\frac{\theta}{2}$ 는 제1사분면의 각이므로

$$\tan \frac{\theta}{2} > 0 \text{ (참)}$$

ㄹ. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서

$$\pi < 2\theta < 2\pi$$

즉 2θ 는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이므로

$$\sin 2\theta < 0 \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

0509 $\sin \theta \tan \theta > 0$ 에서

$\sin \theta > 0, \tan \theta > 0$ 일 때, θ 는 제1사분면의 각이다.

$\sin \theta < 0, \tan \theta < 0$ 일 때, θ 는 제3사분면의 각이다.

또 $\cos \theta \tan \theta < 0$ 에서

$\cos \theta > 0, \tan \theta < 0$ 일 때, θ 는 제4사분면의 각이다.

$\cos \theta < 0, \tan \theta > 0$ 일 때, θ 는 제2사분면의 각이다.

즉 θ 는 제1사분면의 각이므로

$$2n\pi + \frac{3}{2}\pi < \theta < 2n\pi + 2\pi \text{ (n은 정수)}$$

$$\therefore n\pi + \frac{3}{4}\pi < \frac{\theta}{2} < n\pi + \pi$$

(i) $n = 2k$ (k 는 정수)일 때

$$2k\pi + \frac{3}{4}\pi < \frac{\theta}{2} < 2k\pi + \pi$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n = 2k + 1$ (k 는 정수)일 때

$$2k\pi + \frac{7}{4}\pi < \frac{\theta}{2} < 2k\pi + 2\pi$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제2사분면, 제4사분면이다.

답 제2사분면, 제4사분면

0510 (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta} + \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - 1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + 1} \\ &= \frac{(\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta)}{(\sin \theta + \cos \theta)^2} + \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} \\ &= \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} + \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} \\ &= 0 \end{aligned}$$

답 ①

$$\begin{aligned}
 \text{0511} \quad \frac{\sin \theta}{1-\cos \theta} + \frac{1-\cos \theta}{\sin \theta} &= \frac{\sin^2 \theta + (1-\cos \theta)^2}{\sin \theta (1-\cos \theta)} \\
 &= \frac{\sin^2 \theta + 1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta (1-\cos \theta)} \\
 &= \frac{2(1-\cos \theta)}{\sin \theta (1-\cos \theta)} \\
 &= \frac{2}{\sin \theta} \\
 &\quad \text{답 } \frac{2}{\sin \theta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{0512} \quad \neg. \frac{1-\cos^2 \theta}{\tan^2 \theta} + \sin^2 \theta &= \frac{\sin^2 \theta}{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} + \sin^2 \theta \\
 &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \text{ (거짓)}
 \end{aligned}$$

ㄴ. (주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \left(1 + \frac{1}{\sin \theta}\right) \left(1 - \frac{1}{\sin \theta}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos \theta}\right) \left(1 - \frac{1}{\cos \theta}\right) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{\sin^2 \theta}\right) \left(1 - \frac{1}{\cos^2 \theta}\right) \\
 &= \frac{\sin^2 \theta - 1}{\sin^2 \theta} \times \frac{\cos^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta} \\
 &= \frac{-\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \times \frac{-\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 1 \text{ (거짓)}
 \end{aligned}$$

ㄷ. (주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \left(\sin^2 \theta + 2 + \frac{1}{\sin^2 \theta}\right) + \left(\cos^2 \theta + 2 + \frac{1}{\cos^2 \theta}\right) \\
 &\quad - \left(\tan^2 \theta + 2 + \frac{1}{\tan^2 \theta}\right) \\
 &= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta - \frac{1}{\tan^2 \theta} + 2 \\
 &= \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + 3 \\
 &= \frac{1-\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{1-\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 3 = \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 3 \\
 &= 1 + 1 + 3 = 5 \text{ (참)}
 \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ㄷ

$$\begin{aligned}
 \text{0513} \quad \sqrt{1-2\sin \theta \cos \theta} - \sqrt{1+2\sin \theta \cos \theta} \\
 &= \sqrt{\sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta} \\
 &\quad - \sqrt{\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta} \\
 &= \sqrt{(\sin \theta - \cos \theta)^2} - \sqrt{(\sin \theta + \cos \theta)^2} \\
 &= |\sin \theta - \cos \theta| - |\sin \theta + \cos \theta| \\
 &\text{이때 } 0 < \cos \theta < \sin \theta \text{에서} \\
 &\quad \sin \theta - \cos \theta > 0, \sin \theta + \cos \theta > 0 \\
 &\text{이므로}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{주어진 식}) &= (\sin \theta - \cos \theta) - (\sin \theta + \cos \theta) \\
 &= \sin \theta - \cos \theta - \sin \theta - \cos \theta \\
 &= -2\cos \theta
 \end{aligned}$$

답 $-2\cos \theta$

$$\text{0514} \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{에서}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

이때 θ 가 제3사분면의 각이므로

$$\sin \theta = -\frac{3}{5} \quad (\because \sin \theta < 0)$$

따라서 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4}$ 이므로

$$5\sin \theta + 8\tan \theta = 5 \times \left(-\frac{3}{5}\right) + 8 \times \frac{3}{4} = 3$$

답 ④

$$\begin{aligned}
 \text{0515} \quad \frac{1}{1+\cos \theta} + \frac{1}{1-\cos \theta} &= \frac{1-\cos \theta + 1+\cos \theta}{(1+\cos \theta)(1-\cos \theta)} \\
 &= \frac{2}{1-\cos^2 \theta} \\
 &= \frac{2}{\sin^2 \theta}
 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \frac{2}{\sin^2 \theta} = \frac{8}{3} \text{ 이므로 } \sin^2 \theta = \frac{3}{4}$$

이때 θ 가 제4사분면의 각이므로

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because \sin \theta < 0)$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{2} \quad (\because \cos \theta > 0)$$

따라서 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\sqrt{3}$ 이므로

$$\tan \theta - \sin \theta = -\sqrt{3} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{0516} \quad \tan \theta = -\frac{2}{3} \text{에서 } \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{2}{3} \cos \theta \quad \dots\dots ㉠$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\left(-\frac{2}{3} \cos \theta\right)^2 + \cos^2 \theta = 1, \quad \frac{13}{9} \cos^2 \theta = 1$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{9}{13}$$

이때 θ 가 제2사분면의 각이므로

$$\cos \theta = -\frac{3}{\sqrt{13}} \quad (\because \cos \theta < 0)$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\sin \theta = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{1 + \sin \theta \cos \theta} &= \frac{\frac{4}{13} - \frac{9}{13}}{1 + \frac{2}{\sqrt{13}} \times \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)} \\
 &= \frac{-\frac{5}{13}}{1 - \frac{6}{13}} = -\frac{5}{7}
 \end{aligned}$$

답 $-\frac{5}{7}$

0517 $\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=2-\sqrt{3}$ 에서

$$1+\tan\theta=(2-\sqrt{3})(1-\tan\theta)$$

$$(3-\sqrt{3})\tan\theta=1-\sqrt{3}$$

$$\therefore \tan\theta=\frac{1-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\approx \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 이므로}$$

$$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \text{ 이므로}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right)^2+\cos^2\theta=1, \quad \frac{4}{3}\cos^2\theta=1$$

$$\therefore \cos^2\theta=\frac{3}{4}$$

이때 θ 가 제 4 사분면의 각이므로

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because \cos\theta>0)$$

이것을 ①에 대입하면

$$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{답} -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

0518 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4} \quad \therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$$

$$\therefore (\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta \\ =1-2\times\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{4}$$

이때 θ 는 제 2 사분면의 각이므로 $\sin\theta>0, \cos\theta<0$

$$\therefore \sin\theta-\cos\theta>0$$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}$ 이므로

$$\sin^2\theta-\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta) \\ =\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{4} \quad \text{답} \textcircled{4}$$

0519 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$$=1-2\times\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{5}{4}$$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 에서 $\sin\theta>0, \cos\theta<0$ 이므로

$$\sin\theta-\cos\theta>0 \quad \therefore \sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \sin^3\theta-\cos^3\theta$$

$$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}\times\left(1-\frac{1}{8}\right)=\frac{7\sqrt{5}}{16} \quad \text{답} \frac{7\sqrt{5}}{16}$$

다른 풀이 $\sin^3\theta-\cos^3\theta$

$$=(\sin\theta-\cos\theta)^3+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3+3\times\left(-\frac{1}{8}\right)\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{7\sqrt{5}}{16}$$

0520 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$\text{이므로} \quad \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=3$$

$$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$$

$$\therefore (\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta \\ =1+2\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin\theta>0, \cos\theta>0$ 이므로

$$\sin\theta+\cos\theta>0$$

$$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{3} \quad \text{답} \frac{\sqrt{15}}{3}$$

0521 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9} \quad \therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}$$

$$\therefore \tan^2\theta+\frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^4\theta+\cos^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} \\ =\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} \\ =\frac{1}{(\sin\theta\cos\theta)^2}-2 \\ =\frac{1}{\left(-\frac{4}{9}\right)^2}-2 \\ =\frac{81}{16}-2=\frac{49}{16} \quad \text{답} \frac{49}{16}$$

0522 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{3}{5} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{k}{5} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{9}{25}$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{25}$$

$$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{8}{25} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

따라서 ②, ③에서 $\frac{k}{5}=-\frac{8}{25}$

$$\therefore k=-\frac{8}{5} \quad \text{답} -\frac{8}{5}$$

0523 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\sin \theta + \cos \theta) + (\sin \theta - \cos \theta) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) = a \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠에서 $2\sin \theta = 1 \quad \therefore \sin \theta = \frac{1}{2}$

㉡에서 $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = a$

$$\sin^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta) = a \quad \therefore 2\sin^2 \theta - 1 = a$$

$\sin \theta = \frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$a = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2} \quad \text{답 ①}$$

0524 이차방정식 $3x^2 - \sqrt{6}x + k = 0$ 의 두 근이 $\sin \theta, \cos \theta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

이 식의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{2}{3}$$

$$1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{6} \quad \dots \textcircled{1\text{단계}}$$

이때

$$\begin{aligned} \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -6, \end{aligned}$$

$$\tan \theta \times \frac{1}{\tan \theta} = 1 \quad \dots \textcircled{2\text{단계}}$$

이므로 $\tan \theta, \frac{1}{\tan \theta}$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2 + 6x + 1 = 0$... 3단계

답 $x^2 + 6x + 1 = 0$

채점 요소	비율
1단계 $\sin \theta \cos \theta$ 의 값 구하기	40 %
2단계 $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}, \tan \theta \times \frac{1}{\tan \theta}$ 의 값 구하기	40 %
3단계 조건을 만족시키는 이차방정식 구하기	20 %

0525 $3\sin \theta = 4\cos \theta$ 에서

$$\sin \theta = \frac{4}{3} \cos \theta \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로} \quad \left(\frac{4}{3} \cos \theta\right)^2 + \cos^2 \theta = 1$$

$$\frac{25}{9} \cos^2 \theta = 1 \quad \therefore \cos^2 \theta = \frac{9}{25}$$

이때 θ 가 제3사분면의 각이므로

$$\cos \theta = -\frac{3}{5} \quad (\because \cos \theta < 0)$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\sin \theta = \frac{4}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$$

따라서 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{4}{3}$ 이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{a}{9} = \tan \theta + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{4}{3} + \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{3},$$

$$\frac{b}{9} = \tan \theta \times \frac{1}{\cos \theta} = \frac{4}{3} \times \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{20}{9}$$

$$\therefore a = 3, b = -20$$

$$\therefore a - b = 23$$

답 23

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 072~075쪽

0526 3θ 가 제2사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 90^\circ < 3\theta < 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore 120^\circ \times n + 30^\circ < \theta < 120^\circ \times n + 60^\circ$$

(i) $n = 3k$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 30^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 60^\circ$$

따라서 θ 는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n = 3k + 1$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 150^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 180^\circ$$

따라서 θ 는 제2사분면의 각이다.

(iii) $n = 3k + 2$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 270^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 300^\circ$$

따라서 θ 는 제4사분면의 각이다.

이상에서 각 θ 를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제3사분면이다.

답 제3사분면

0527 ① $-660^\circ = 360^\circ \times (-2) + 60^\circ$

② $-\frac{4}{3}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{2}{3}\pi$

③ $420^\circ = 360^\circ \times 1 + 60^\circ$

④ $\frac{13}{3}\pi = 2\pi \times 2 + \frac{\pi}{3}$

⑤ $1140^\circ = 360^\circ \times 3 + 60^\circ$

따라서 각을 나타내는 동경이 나머지 넷과 다른 하나는 ②이다.

답 ②

0528 각 θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 5\theta = 2n\pi + \pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore \theta = \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{6} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

그런데 $0 < \theta < \pi$ 이므로

$$0 < \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{6} < \pi \quad \therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{5}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n = 0, 1, 2$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

또 각 θ 를 나타내는 동경과 각 2θ 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 2\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore \theta = \frac{2n}{3}\pi + \frac{\pi}{6} \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

그런데 $0 < \theta < \pi$ 이므로

$$0 < \frac{2n}{3}\pi + \frac{\pi}{6} < \pi \quad \therefore -\frac{1}{4} < n < \frac{5}{4}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0, 1$

이것을 ㉔에 대입하면

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

$$\textcircled{㉔}, \textcircled{㉕} \text{에서} \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

따라서 모든 각 θ 의 크기의 합은

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi = \pi \quad \text{답 } \pi$$

0529 반지름의 길이가 $\sqrt{3}a$ 인 원의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{3}a)^2 = 3a^2\pi$$

반지름의 길이가 $3a$ 이고 호의 길이가 6π 인 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3a \times 6\pi = 9a\pi$$

이때 원의 넓이와 부채꼴의 넓이가 서로 같으므로

$$3a^2\pi = 9a\pi$$

$$a^2 - 3a = 0, \quad a(a-3) = 0$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > 0) \quad \text{답 } \textcircled{㉕}$$

0530 부채꼴의 반지름의 길이를 r cm라 하면 호의 길이는

$$(40 - 2r) \text{ cm} \quad (0 < r < 20)$$

부채꼴의 넓이를 S cm²라 하면

$$S = \frac{1}{2}r(40 - 2r) = -r^2 + 20r$$

$$= -(r-10)^2 + 100$$

따라서 $r=10$ 일 때 S 는 최댓값 100을 가지므로 부채꼴의 넓이의 최댓값은 100 cm²이다. 답 100 cm²

0531 오른쪽 그림과 같이 호 CA와 호 DB의 교점을 P라 하면

$$\overline{PB} = \overline{PC} = 6$$

이므로 삼각형 PBC는 정삼각형이다.

$$\therefore \angle PBC = \angle PCB = \frac{\pi}{3}$$

이때 $\angle ABP = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ 이므로 부채꼴 ABP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\pi}{6} = 3\pi$$

한편 위의 그림에서 빗금 친 부분의 넓이를 S 라 하면 S 는 부채꼴 CPB의 넓이에서 정삼각형 PBC의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$S = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 6\pi - 9\sqrt{3}$$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$$2 \times \{3\pi - (6\pi - 9\sqrt{3})\} = 18\sqrt{3} - 6\pi$$

$$\text{즉 } a=18, b=6 \text{이므로} \quad ab=108$$

답 ③

RPM 비법 노트

정삼각형의 넓이

한 변의 길이가 a 인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

0532 $\overline{OP} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = -\frac{3}{5}, \tan \theta = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\tan \theta} = \frac{\frac{4}{5} - (-\frac{3}{5})}{-\frac{4}{3}} = -\frac{21}{20} \quad \text{답 } \textcircled{1}$$

0533 $12x + 5y = 0$ 에서 $y = -\frac{12}{5}x$

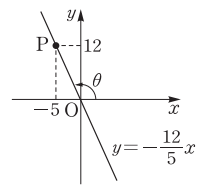
오른쪽 그림에서 직선 $y = -\frac{12}{5}x$ 위의 점

$P(-5, 12)$ 에 대하여

$$\overline{OP} = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$$

따라서 $\sin \theta = \frac{12}{13}, \cos \theta = -\frac{5}{13}$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{12}{13} + (-\frac{5}{13}) = \frac{7}{13} \quad \text{답 } \frac{7}{13}$$



0534 θ 가 제4사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$$

$$\textcircled{1} \sin \theta \tan \theta > 0$$

$$\textcircled{3} \cos \theta \tan \theta < 0$$

$$\textcircled{4} \sin \theta \cos \theta \tan \theta > 0$$

$$\textcircled{5} \frac{\sin \theta}{\tan \theta} > 0$$

답 ②

0535 θ 가 제3사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$$

따라서 $\sin \theta - \frac{1}{2} < 0, \cos \theta - \frac{1}{2} < 0, \sin \theta + \cos \theta < 0$ 이므로

(주어진 식)

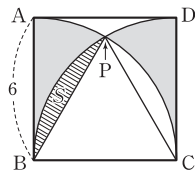
$$= \left| \sin \theta - \frac{1}{2} \right| + \left| \cos \theta - \frac{1}{2} \right| - |\sin \theta + \cos \theta|$$

$$= -\left(\sin \theta - \frac{1}{2}\right) - \left(\cos \theta - \frac{1}{2}\right) + (\sin \theta + \cos \theta)$$

$$= -\sin \theta + \frac{1}{2} - \cos \theta + \frac{1}{2} + \sin \theta + \cos \theta$$

$$= 1$$

답 1



0536 $\sqrt{\cos \theta} \sqrt{\tan \theta} = -\sqrt{\cos \theta \tan \theta}$ 이고 $\cos \theta \tan \theta \neq 0$ 이므로

$$\cos \theta < 0, \tan \theta < 0$$

즉 θ 는 제2사분면의 각이므로

$$\sin \theta > 0$$

따라서 $\cos \theta + \tan \theta < 0, \sin \theta - \tan \theta > 0$ 이므로

(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= |\tan \theta| \times \cos \theta + |\cos \theta| - |\cos \theta + \tan \theta| \\ &\quad - |\sin \theta - \tan \theta| \\ &= -\tan \theta \cos \theta - \cos \theta + (\cos \theta + \tan \theta) \\ &\quad - (\sin \theta - \tan \theta) \\ &= -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \cos \theta - \cos \theta + \cos \theta + \tan \theta \\ &\quad - \sin \theta + \tan \theta \\ &= -2 \sin \theta + 2 \tan \theta \end{aligned}$$

답 ②

0537 ① $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \sin^2 \theta$

$$= \frac{\sin^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta \sin^2 \theta$$

② $\frac{1}{1 + \sin \theta} + \frac{1}{1 - \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta + 1 + \sin \theta}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}$

$$= \frac{2}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta}$$

③ $\frac{\tan \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{\sin \theta + 1}{\cos^2 \theta}$

$$= \frac{\sin \theta + 1}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{1 + \sin \theta}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}$$

$$= \frac{1}{1 - \sin \theta}$$

④ $\frac{1 - \sin^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta} \times \tan^2 \theta = \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \times \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 1$

⑤ $\frac{\tan^2 \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{\tan^2 \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{\tan^2 \theta (1 + \cos \theta + 1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}$

$$= \frac{2 \tan^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2}{\sin^2 \theta} \times \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{2}{\cos^2 \theta}$$

답 ⑤

0538 $\alpha = (1 - \tan^4 \theta) \cos^2 \theta + \tan^2 \theta$

$$= \left(1 - \frac{\sin^4 \theta}{\cos^4 \theta}\right) \cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \cos^2 \theta - \frac{\sin^4 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{\cos^4 \theta - \sin^4 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 1$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{\sin^2 \theta} (1 - \sin^2 \theta)(1 - \cos^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) \\ &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \times \cos^2 \theta \times \sin^2 \theta \times \left(1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}\right) \\ &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \\ \therefore \alpha + \beta &= 2 \end{aligned}$$

답 2

0539 $\frac{\sin \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta}$

$$= \frac{\sin \theta (1 + \sin \theta) - \sin \theta (1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)}$$

$$= \frac{2 \sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{2(1 - \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta}$$

따라서 $\frac{2(1 - \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta} = 4$ 이므로

$$1 - \cos^2 \theta = 2 \cos^2 \theta, \quad 3 \cos^2 \theta = 1$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

이때 θ 가 제2사분면의 각이므로

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\because \cos \theta < 0)$$

답 ①

0540 $\frac{\sqrt{\cos \theta}}{\sqrt{\tan \theta}} = -\sqrt{\frac{\cos \theta}{\tan \theta}}$ 이고 $\cos \theta \tan \theta \neq 0$ 이므로

$$\cos \theta > 0, \tan \theta < 0$$

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = -2 \text{에서}$$

$$\tan^2 \theta + 2 \tan \theta + 1 = 0, \quad (\tan \theta + 1)^2 = 0$$

$$\therefore \tan \theta = -1$$

$$\therefore \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -1 \text{이므로}$$

$$\sin \theta = -\cos \theta$$

..... ㉠

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$(-\cos \theta)^2 + \cos^2 \theta = 1, \quad 2 \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} \quad \therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because \cos \theta > 0)$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore (\text{주어진 식})$$

$$= |\sin \theta - \cos \theta| + |\sin \theta| + |2 \cos \theta| - \cos \theta$$

$$= \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| + \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} \right| + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

답 $2\sqrt{2}$

0541 $\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 2$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta} &= \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}0542 \quad \sin^4 \theta - \cos^4 \theta &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \\ &= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta)\end{aligned}$$

$$\text{이므로} \quad \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{2}(\sin \theta - \cos \theta)$$

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{7}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{7}{4} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sin^3 \theta - \cos^3 \theta &= (\sin \theta - \cos \theta)(\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{8} \right) = \frac{11}{16}\end{aligned}$$

답 ②

$$0543 \quad \text{조건 (가)에서} \quad \frac{\sqrt{\sin \theta}}{\sqrt{\cos \theta}} = -\sqrt{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \text{이고}$$

$$\sin \theta \cos \theta \neq 0 \text{이므로}$$

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\text{조건 (나)의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{3} \right) = \frac{5}{3}\end{aligned}$$

$$\text{이때 ㉠에서} \quad \sin \theta - \cos \theta > 0 \text{이므로}$$

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sin^2 \theta - \cos^2 \theta &= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{15}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

$$0544 \quad \text{주어진 이차방정식의 두 근을 } \alpha, \beta \text{라 하면 근과 계수의 관계에 의하여}$$

$$\alpha + \beta = -2 + 2 \cos \theta, \alpha \beta = -\sin^2 \theta$$

$$\text{이때 } |\alpha - \beta| = 2 \text{에서 } |\alpha - \beta|^2 = 4 \text{이고}$$

$$\begin{aligned}|\alpha - \beta|^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (-2 + 2 \cos \theta)^2 - 4(-\sin^2 \theta) \\ &= 4 - 8 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta \\ &= 8 - 8 \cos \theta\end{aligned}$$

$$\text{이므로} \quad 8 - 8 \cos \theta = 4$$

$$8 \cos \theta = 4 \quad \therefore \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{이므로} \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because \sin \theta > 0)$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

답 ④

$$0545 \quad \text{계수가 유리수인 이차방정식의 한 근이 } 2 + \sqrt{3} \text{이므로 다른 한 근은 } 2 - \sqrt{3} \text{이다.}$$

$$\text{따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여}$$

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$$

$$\text{이때}$$

$$\begin{aligned}\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}\end{aligned}$$

$$\text{이므로} \quad \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 4$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

$$\text{다른 풀이} \quad \text{이차방정식 } x^2 - \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right) x + 1 = 0 \text{에}$$

$$x = 2 + \sqrt{3} \text{을 대입하면}$$

$$(2 + \sqrt{3})^2 - \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right) \times (2 + \sqrt{3}) + 1 = 0$$

$$\left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right) \times (2 + \sqrt{3}) = 8 + 4\sqrt{3}$$

$$\therefore \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 4$$

$$0546 \quad \text{각 } \theta \text{를 나타내는 동경과 각 } 5\theta \text{를 나타내는 동경이 일치하므로}$$

$$5\theta - \theta = 2n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore \theta = \frac{n}{2}\pi$$

..... ㉠ ... 1단계

$$\text{그런데 } \pi < \theta < 2\pi \text{이므로} \quad \pi < \frac{n}{2}\pi < 2\pi$$

$$\therefore 2 < n < 4$$

$$\text{이때 } n \text{은 정수이므로} \quad n = 3$$

... 2단계

$$n = 3 \text{을 ㉠에 대입하면}$$

$$\theta = \frac{3}{2}\pi$$

... 3단계

$$\therefore \cos(\theta - \pi) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \pi\right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

... 4단계

답 0

채점 요소	비율
1단계 θ 를 정수 n 에 대한 식으로 나타내기	30 %
2단계 n 의 값 구하기	30 %
3단계 각 θ 의 크기 구하기	20 %
4단계 $\cos(\theta - \pi)$ 의 값 구하기	20 %

0547 부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면 호의 길이는

$$16 - 2r \quad (0 < r < 8)$$

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}r(16 - 2r) = -r^2 + 8r \quad \dots \text{1단계}$$

$S \geq 12$ 이므로 $-r^2 + 8r \geq 12$

$$r^2 - 8r + 12 \leq 0, \quad (r - 2)(r - 6) \leq 0 \quad \dots \text{2단계}$$

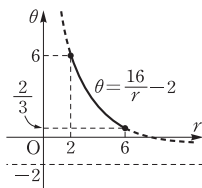
$$\therefore 2 \leq r \leq 6$$

이때 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$r\theta = 16 - 2r \text{이므로}$$

$$\theta = \frac{16 - 2r}{r} = \frac{16}{r} - 2$$

따라서 $2 \leq r \leq 6$ 에서 $r = 2$ 일 때 θ 는 최
댓값 6을 갖는다. ... 3단계



답 6

채점 요소	비율
1단계 부채꼴의 넓이를 반지름의 길이 r 에 대한 식으로 나타내기	30 %
2단계 r 의 값의 범위 구하기	30 %
3단계 부채꼴의 중심각의 크기의 최댓값 구하기	40 %

0548 $\tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta \quad \dots \text{1단계}$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta\right)^2 + \cos^2 \theta = 1$

$$\frac{3}{2} \cos^2 \theta = 1 \quad \therefore \cos^2 \theta = \frac{2}{3}$$

이때 θ 가 제3사분면의 각이므로

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{6}}{3} \quad (\because \cos \theta < 0)$$

이것을 ①에 대입하면

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \dots \text{2단계}$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{3} \quad \dots \text{3단계}$$

$$\text{답 } -\frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{3}$$

채점 요소	비율
1단계 $\sin \theta$ 를 $\cos \theta$ 에 대한 식으로 나타내기	30 %
2단계 $\cos \theta, \sin \theta$ 의 값 구하기	60 %
3단계 $\sin \theta + \cos \theta$ 의 값 구하기	10 %

0549 이차방정식 $2x^2 + ax + 1 = 0$ 의 두 근이 $\sin \theta, \cos \theta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{a}{2}, \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{a}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{a^2}{4}$$

$$1 + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{4} \quad \therefore a^2 = 8$$

이때 $a > 0$ 이므로

$$a = 2\sqrt{2} \quad \dots \text{1단계}$$

즉 $\sin \theta + \cos \theta = -\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{-\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{2},$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \quad \dots \text{2단계}$$

따라서 $\frac{1}{\sin \theta}, \frac{1}{\cos \theta}$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = 0$$

$$\therefore b = 2\sqrt{2}, c = 2 \quad \dots \text{3단계}$$

$$\therefore abc = 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times 2 = 16 \quad \dots \text{4단계}$$

답 16

채점 요소	비율
1단계 a 의 값 구하기	30 %
2단계 $\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta}, \frac{1}{\sin \theta} \times \frac{1}{\cos \theta}$ 의 값 구하기	30 %
3단계 b, c 의 값 구하기	30 %
4단계 abc 의 값 구하기	10 %

0550 [전략] n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하여 동경 OP_n 이 나타내는 각의 크기를 구하고 규칙을 찾는다.

$$360^\circ \times n + (-1)^n \times 90^\circ \times n \text{에서}$$

동경 OP_1 이 나타내는 각의 크기는

$$360^\circ - 90^\circ$$

동경 OP_2 가 나타내는 각의 크기는

$$360^\circ \times 2 + 180^\circ$$

동경 OP_3 이 나타내는 각의 크기는

$$360^\circ \times 3 - 270^\circ$$

동경 OP_4 가 나타내는 각의 크기는

$$360^\circ \times 4 + 360^\circ$$

동경 OP_5 가 나타내는 각의 크기는

$$360^\circ \times 5 - 450^\circ = 360^\circ \times 4 - 90^\circ$$

동경 OP_6 이 나타내는 각의 크기는

$$360^\circ \times 6 + 540^\circ = 360^\circ \times 7 + 180^\circ$$

⋮

따라서 동경 OP_n 의 위치는 동경 OP_1, OP_2, OP_3, OP_4 의 위치가 이 순서대로 반복된다.

즉 동경 OP_n 이 동경 OP_1 과 같은 위치에 있으려면

$n=4k+1$ (k 는 자연수)의 꼴이어야 하므로

$$n=5, 9, 13, \dots, 97$$

따라서 구하는 동경의 개수는 24이다.

답 24

0551 전략 높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 두 삼각형의 밑변의 길이의 비와 같음을 이용한다.

점 A의 좌표를 (a, b) 라 하면 $\overline{OA}=1$ 이므로

$$a=\cos\theta, b=\sin\theta$$

$$\therefore A(\cos\theta, \sin\theta) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 점 A에서의 접선 l 의 방정식은

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 1$$

$$\therefore B\left(\frac{1}{\cos\theta}, 0\right), C\left(0, \frac{1}{\sin\theta}\right)$$

이때 $\overline{AB}:\overline{AC}=\triangle OBA:\triangle OAC=1:2$ 이므로 점 A는 선분 BC를 1:2로 내분하는 점이다.

따라서 점 A의 y 좌표는

$$\frac{1 \times \frac{1}{\sin\theta} + 2 \times 0}{1+2}, \text{ 즉 } \frac{1}{3\sin\theta}$$

이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$\frac{1}{3\sin\theta} = \sin\theta, \quad \sin^2\theta = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\because \sin\theta < 0)$$

답 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

참고! 점 A의 x 좌표를 이용하여 $\sin\theta$ 의 값을 구할 수도 있다.

점 A의 x 좌표는 $\frac{1 \times 0 + 2 \times \frac{1}{\cos\theta}}{1+2}$, 즉 $\frac{2}{3\cos\theta}$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$\frac{2}{3\cos\theta} = \cos\theta \quad \therefore \cos^2\theta = \frac{2}{3}$$

이때 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 에서

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\because \sin\theta < 0)$$

0552 전략 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 임을 이용하여 $\sin(\angle BAP)$ 의 값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 반지름의

길이가 r_1 인 원의 중심을 C, 호

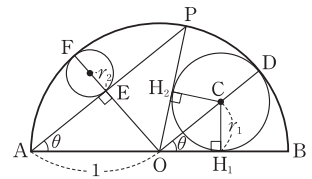
BP와 직선 OC가 만나는 점을

D, 선분 AP의 중점을 E, 호

AP를 이등분하는 점을 F라 하

고, 점 C에서 선분 OB와 선분 OP에 내린 수선의 발을 각각 H_1 ,

H_2 라 하자.



$\angle BAP = \theta$ 라 하면 $\cos\theta = \frac{4}{5}$ 이고 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 이므로

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin\theta = \frac{3}{5}$ ($\because \sin\theta > 0$)

한편 원에서 한 호에 대한 중심각의 크기는 그 호에 대한 원주각의 크기의 2배이므로

$$\angle BOP = 2\angle BAP = 2\theta$$

이때 $\triangle OCH_1 \cong \triangle OCH_2$ (RHS 합동)이므로

$$\angle COH_1 = \angle COH_2 = \frac{1}{2} \angle BOP = \theta$$

따라서 직각삼각형 OCH_1 에서 $\sin\theta = \frac{\overline{CH_1}}{\overline{OC}}$ 이므로

$$\overline{OC} = \frac{r_1}{\sin\theta} = \frac{5}{3}r_1$$

$\overline{OC} + \overline{CD} = \overline{OD}$ 이므로

$$\frac{5}{3}r_1 + r_1 = 1, \quad \frac{8}{3}r_1 = 1$$

$$\therefore r_1 = \frac{3}{8}$$

또 직각삼각형 AOE에서 $\overline{OE} = \sin\theta$ 이고 $\overline{OE} + \overline{EF} = \overline{OF}$ 이므로

$$\sin\theta + 2r_2 = 1, \quad \frac{3}{5} + 2r_2 = 1$$

$$2r_2 = \frac{2}{5} \quad \therefore r_2 = \frac{1}{5}$$

$$\therefore r_1 r_2 = \frac{3}{8} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{40}$$

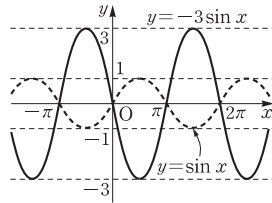
답 ①

06 삼각함수의 그래프

교과서문제 정복하기

본책 077쪽

0553 $y = -3\sin x$ 의 그래프는 $y = \sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3배 한 후 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



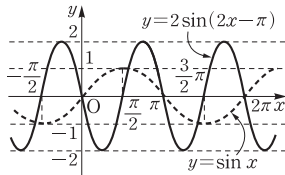
따라서 치역은 $\{y \mid -3 \leq y \leq 3\}$, 주기는 2π 이다.

답 풀이 참조

0554 $y = 2\sin(2x - \pi)$

$$= 2\sin 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

의 그래프는 $y = \sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배, y 축의



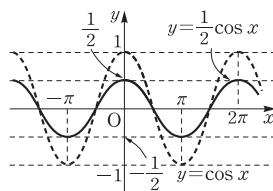
방향으로 2배 한 후 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 것이므로 위의 그림과 같다.

따라서 치역은 $\{y \mid -2 \leq y \leq 2\}$, 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 이다.

답 풀이 참조

0555 $y = \frac{1}{2}\cos x$ 의 그래프는

$y = \cos x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배 한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



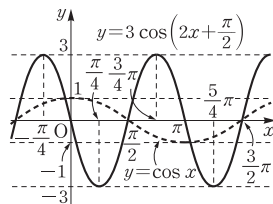
따라서 치역은 $\{y \mid -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$, 주기는 2π 이다.

답 풀이 참조

0556 $y = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$= 3\cos 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

의 그래프는 $y = \cos x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배, y 축의 방향



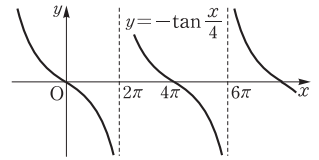
으로 3배 한 후 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$ 만큼 평행이동한 것이므로 위의 그림과 같다.

따라서 치역은 $\{y \mid -3 \leq y \leq 3\}$, 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 이다.

답 풀이 참조

0557 $y = -\tan \frac{x}{4}$ 의 그래

프는 $y = \tan x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4배 한 후 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



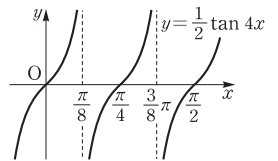
따라서 주기는 $\frac{\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi$ 이고, 점근선의 방정식은

$$\frac{x}{4} = n\pi + \frac{\pi}{2} \text{에서} \quad x = 4n\pi + 2\pi \quad (n \text{은 정수})$$

답 풀이 참조

0558 $y = \frac{1}{2}\tan 4x$ 의 그래프는

$y = \tan x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{4}$ 배, y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배 한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 주기는 $\frac{\pi}{4}$ 이고, 점근선의 방정식은

$$4x = n\pi + \frac{\pi}{2} \text{에서} \quad x = \frac{n}{4}\pi + \frac{\pi}{8} \quad (n \text{은 정수})$$

답 풀이 참조

0559 최댓값은 $\left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3}$

최솟값은 $-\left| -\frac{1}{3} \right| = -\frac{1}{3}$

주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

답 최댓값: $\frac{1}{3}$, 최솟값: $-\frac{1}{3}$, 주기: 4π

0560 최댓값은 $2+1=3$

최솟값은 $-2+1=-1$

주기는 2π

답 최댓값: 3, 최솟값: -1, 주기: 2π

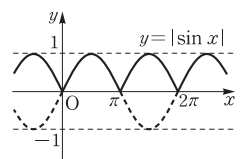
0561 최댓값과 최솟값은 없다.

주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2$

답 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: 2

0562 $y = |\sin x|$ 의 그래프는

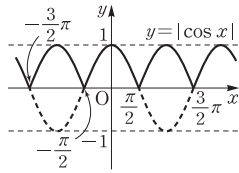
$y = \sin x$ 의 그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고 $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y = |\sin x|$ 의 주기는 π 이다.

답 π

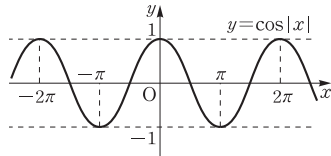
0563 $y = |\cos x|$ 의 그래프는 $y = \cos x$ 의 그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고 $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y = |\cos x|$ 의 주기는 π 이다.

답 π

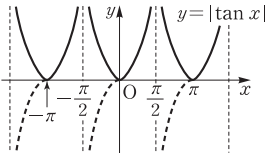
0564 $y = \cos |x|$ 의 그래프는 $x \geq 0$ 에서 $y = \cos x$ 의 그래프를 그리고 $x < 0$ 인 부분은 $x \geq 0$ 인 부분을 y 축에 대하여 대칭이동하여 그린 것이므로 위의 그림과 같다.



따라서 $y = \cos |x|$ 의 주기는 2π 이다.

답 2π

0565 $y = |\tan x|$ 의 그래프는 $y = \tan x$ 의 그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고 $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y = |\tan x|$ 의 주기는 π 이다.

답 π

RPM비법노트

$$y = |a \sin bx| \text{의 주기} \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{|b|}$$

$$y = |a \cos bx| \text{의 주기} \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{|b|}$$

$$y = |a \tan bx| \text{의 주기} \Rightarrow \frac{\pi}{|b|}$$

0566 $\sin 765^\circ = \sin (360^\circ \times 2 + 45^\circ)$

$$= \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0567 $\cos \frac{25}{6}\pi = \cos \left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

0568 $\tan \frac{17}{4}\pi = \tan \left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

답 1

0569 $\sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

0570 $\cos 315^\circ = \cos (360^\circ - 45^\circ) = \cos (-45^\circ)$

$$= \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

0571 $\tan \frac{11}{6}\pi = \tan \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \tan \left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$= -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

0572 $\sin \frac{5}{6}\pi = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

0573 $\cos \frac{5}{4}\pi = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

0574 $\tan 210^\circ = \tan (180^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

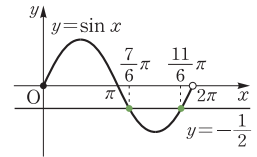
0575 오른쪽 그림에서 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선

$y = -\frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표가 $\frac{7}{6}\pi$,

$\frac{11}{6}\pi$ 이므로

$$x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi$$

답 $x = \frac{7}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$



0576 $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$ 에서 $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

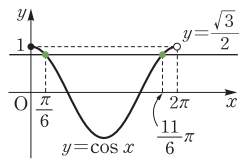
오른쪽 그림에서 $y = \cos x$ 의 그래프

와 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 x 좌표가

$\frac{\pi}{6}$, $\frac{11}{6}\pi$ 이므로

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi$$

답 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$

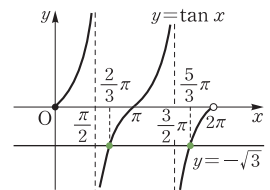


0577 오른쪽 그림에서 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = -\sqrt{3}$ 의 교점

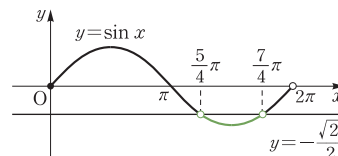
의 x 좌표가 $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$ 이므로

$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi$$

답 $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$



0578 $\sqrt{2} \sin x + 1 < 0$ 에서 $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$



함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 교점의 x 좌표는

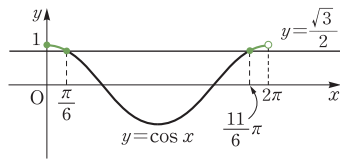
$$\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

따라서 구하는 해는

$$\frac{5}{4}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$$

답 $\frac{5}{4}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$

0579 $2\cos x \geq \sqrt{3}$ 에서 $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$



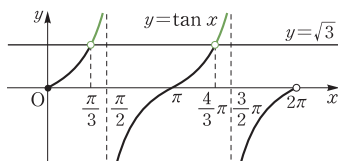
함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 x 좌표는

$\frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi$

따라서 구하는 해는 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{11}{6}\pi \leq x < 2\pi$

답 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{11}{6}\pi \leq x < 2\pi$

0580



함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = \sqrt{3}$ 의 교점의 x 좌표는

$\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi$

따라서 구하는 해는 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{4}{3}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$

답 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{4}{3}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$

유형 익히기

• 본책 078~089쪽

0581 함수 $f(x)$ 의 주기가 p 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$f(x+p) = f(x)$

$\therefore f(p) = f(0) = \sin 0 + \cos 0 + \tan^2 0 = 1$

답 1

0582 $f\left(\frac{91}{3}\right) = f\left(30 + \frac{1}{3}\right) = f\left(3 \times 10 + \frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right)$

$0 \leq x < 3$ 일 때, $f(x) = \cos \pi x$ 이므로

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\therefore f\left(\frac{91}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

0583 함수 $f(x)$ 의 주기가 p 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$f(x) = f(x+np)$ (n 은 정수)

따라서 $f(0) = f(2p) = f(4p) = \dots = f(20p)$ 이므로

$f(2p) + f(4p) + f(6p) + \dots + f(20p)$

$= 10f(0)$

$= 10 \times \frac{\sin 0 + \cos 0 + 1}{3 \sin 0 + 4}$

$= 10 \times \frac{1}{2} = 5$

답 5

0584 모든 실수 x 에 대하여 $f(x-2) = f(x+1)$ 이 성립하므로 양변에 x 대신 $x+2$ 를 대입하면

$f(x) = f(x+3)$

따라서 함수 $f(x)$ 는 주기가 3인 주기함수이므로

$f(2021) = f(3 \times 674 - 1) = f(-1) = 2$

$f(2023) = f(3 \times 674 + 1) = f(1) = 1$

$f(2025) = f(3 \times 675 + 0) = f(0) = -1$

$\therefore f(2021) + f(2023) + f(2025) = 2 + 1 + (-1) = 2$

답 2

0585 ① 최댓값은 $2 - 1 = 1$

② 최솟값은 $-2 - 1 = -3$

③ 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$

④ $f\left(\frac{5}{12}\pi\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{5}{12}\pi + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 2\sin \pi - 1 = -1$

⑤ $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 2\sin 2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) - 1$

따라서 $y = f(x)$ 의 그래프는 함수 $y = 2\sin 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{12}$ 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

답 ⑤

0586 $y = \sin 3x + 1$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y = \sin 3x + 1 \quad \therefore y = -\sin 3x - 1 \quad \dots$ 1단계

이 함수의 그래프를 y 축의 방향으로 $-\frac{3}{2}$ 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y = -\sin 3x - 1 - \frac{3}{2} \quad \therefore y = -\sin 3x - \frac{5}{2} \quad \dots$ 2단계

따라서 $a = -1$, $b = -\frac{5}{2}$ 이므로

$ab = \frac{5}{2} \quad \dots$ 3단계

답 $\frac{5}{2}$

채점 요소		비율
1단계	x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식 구하기	40 %
2단계	y 축의 방향으로 $-\frac{3}{2}$ 만큼 평행이동한 그래프의 식 구하기	40 %
3단계	ab 의 값 구하기	20 %

0587 주기는 $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $a = \frac{1}{2}$

최댓값은 $\left| -\frac{1}{2} \right| + 1 = \frac{3}{2}$ 이므로 $b = \frac{3}{2}$

최솟값은 $-\left| -\frac{1}{2} \right| + 1 = \frac{1}{2}$ 이므로 $c = \frac{1}{2}$

$\therefore abc = \frac{3}{8}$

답 $\frac{3}{8}$

0588 ① 최댓값은 $2+3=5$

② 최솟값은 $-2+3=1$

③ 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

④ $x=\pi$ 를 대입하면

$$y=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+3=2\cos\frac{\pi}{6}+3=\sqrt{3}+3$$

따라서 그래프가 점 $(\pi, \sqrt{3}+3)$ 을 지난다.

⑤ $y=2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+3=2\cos\frac{1}{2}\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)+3$

이므로 그래프는 함수 $y=2\cos\frac{x}{2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{2}{3}\pi$ 만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

답 ④

0589 ㄱ. $y=\cos(2x-5\pi)=\cos 2\left(x-\frac{5}{2}\pi\right)$ 의 그래프는

$y=\cos 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{5}{2}\pi$ 만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\cos 4x+2$ 의 그래프는 $y=\cos 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배 한 후 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=2\cos 2x-3$ 의 그래프는 $y=\cos 2x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배 한 후 y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=-\cos 2x-1$ 의 그래프는 $y=\cos 2x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 $y=\cos 2x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

0590 함수 $y=-2\cos 3x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$

만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=-2\cos 3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+4$$

이 함수의 최댓값은 $|-2|+4=6$, 최솟값은 $-|-2|+4=2$ 이므로 $M=6, m=2 \therefore Mm=12$

답 12

0591 ㄱ. 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다. (참)

ㄴ. $y=3\tan\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+1=3\tan 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1$

따라서 그래프는 함수 $y=3\tan 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

(거짓)

ㄷ. 그래프의 점근선의 방정식은 $2x+\frac{\pi}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$ 에서

$$x=\frac{n}{2}\pi \quad (n \text{은 정수}) \quad (\text{참})$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

0592 $y=-2\tan\left(\frac{x}{3}+\pi\right)+3$ 의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{1}{3}}=3\pi$

이때 주어진 함수의 주기는 다음과 같다.

① $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$ ② $\frac{2\pi}{\pi}=2$ ③ π

④ $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$ ⑤ $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$

따라서 주기가 같은 함수는 ④이다.

답 ④

0593 함수 $y=\tan \pi x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\tan \pi\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{2}{3}, a\right)$ 를 지나므로

$$a=\tan \pi\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)=\tan \frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

0594 $a>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $a+c$, 최솟값은 $-a+c$ 이다.

따라서 조건 ㉑에서 $a+c-(-a+c)=6$

$$2a=6 \quad \therefore a=3$$

또 $b>0$ 이므로 조건 ㉒에서

$$\frac{2\pi}{b}=\frac{3}{2}\pi \quad \therefore b=\frac{4}{3}$$

즉 조건 ㉓에서 $f(x)=3\cos \frac{4}{3}x+c$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ 을

지나므로 $\frac{1}{2}=3\cos \frac{\pi}{3}+c$

$$\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+c \quad \therefore c=-1$$

$$\therefore a+3b+2c=5$$

답 5

0595 함수 $f(x)=a\tan bx$ 의 주기가 $\frac{\pi}{3}$ 이고 $b>0$ 이므로

$$\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{3} \quad \therefore b=3$$

또 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=3$ 이므로 $a\tan \frac{\pi}{4}=3 \quad \therefore a=3$

$$\therefore ab=9$$

답 9

0596 함수 $f(x)=a\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+b$ 의 최댓값이 4이고 $a>0$ 이므로

$$a+b=4 \quad \dots\dots ㉑$$

또 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$ 이므로

$$a\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)+b=\frac{3}{2}, \quad a\sin \frac{\pi}{6}+b=\frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{2}a+b=\frac{3}{2} \quad \dots\dots ㉒$$

㉑-㉒

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5, b=-1$

$$\therefore f(x)=5\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-1$$

따라서 $f(x)$ 의 최솟값은 $-5-1=-6$

답 ②

0597 주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -2 이고 $a>0$ 이므로 $a=2$

또 주기는 $\frac{5}{4}\pi - \frac{\pi}{4} = \pi$ 이고 $b>0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b=2$$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=2\sin(2x-c)$ 이고 그래프가 점

$\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 을 지나므로

$$0=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-c\right) \quad \therefore \sin\left(\frac{\pi}{2}-c\right)=0$$

이때 $0<c<\pi$ 이므로 $c=\frac{\pi}{2}$

$$\therefore a-b+2c=2-2+2\times\frac{\pi}{2}=\pi$$

답 π

0598 주어진 그래프에서 함수의 주기가 $\frac{1}{3}$ 이고 $a>0$ 이므로

$$\frac{\pi}{a\pi} = \frac{1}{3} \quad \therefore a=3$$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=\tan\pi(3x-b)$ 이고 그래프가 점

$\left(\frac{1}{6}, 0\right)$ 을 지나므로 $0=\tan\left(\frac{\pi}{2}-b\pi\right)$

이때 $0<b<1$ 이므로 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-b\pi<\frac{\pi}{2}$

즉 $\frac{\pi}{2}-b\pi=0$ 이므로 $b=\frac{1}{2}$

$$\therefore a+2b=3+2\times\frac{1}{2}=4$$

답 4

0599 주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 4, 최솟값이 -4 이고 $a>0$ 이므로 $a=4$

... 1단계

또 주기는 $3\pi - (-\pi) = 4\pi$ 이고 $b>0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 4\pi \quad \therefore b=\frac{1}{2}$$

... 2단계

따라서 주어진 함수의 식은 $y=4\cos\left(\frac{1}{2}x+c\right)$ 이고 그래프가 원점을 지나므로

$$0=4\cos c \quad \therefore \cos c=0$$

이때 $\pi<c<2\pi$ 이므로 $c=\frac{3}{2}\pi$

... 3단계

$$\therefore abc=4\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\pi=3\pi$$

... 4단계

답 3π

채점 요소	비율
1단계 a의 값 구하기	30%
2단계 b의 값 구하기	30%
3단계 c의 값 구하기	30%
4단계 abc의 값 구하기	10%

0600 주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 5, 최솟값이 -1 이고 $a>0$ 이므로 $a+b=5, -a+b=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3, b=2$

따라서 주어진 함수의 식은

$$y=3\cos\frac{\pi}{6}(2x+1)+2=3\cos\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)+2$$

이때 이 함수의 그래프에서 주기가 $2(c-2)$ 이므로

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 2(c-2) \quad \therefore c=5$$

$$\therefore abc=3\times 2\times 5=30$$

답 30

0601 함수 $y=|\tan ax|$ 의 주기는 $\frac{\pi}{|a|}$

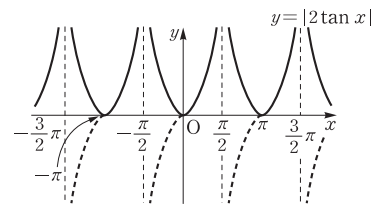
함수 $y=3\cos 5x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{5}$

따라서 $\frac{\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{5}$ 이고 a 는 양수이므로

$$a=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

0602 함수 $y=|2\tan x|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



① 주기는 π 이다.

② 최댓값은 없다.

③ 최솟값은 0이다.

④ 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

답 ⑤

0603 함수 $f(x)=a|\cos bx|+c$ 의 주기가 $\frac{\pi}{3}$ 이고 $b>0$ 이므로

$$\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{3} \quad \therefore b=3$$

$a>0$ 이므로 $0\leq|\cos bx|\leq 1$ 에서

$$c\leq a|\cos bx|+c\leq a+c$$

이때 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 5이므로

$$a+c=5$$

..... ㉠

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1\text{이므로 } a\left|\cos\frac{\pi}{2}\right|+c=1 \quad \therefore c=1$$

㉠에 $c=1$ 을 대입하면 $a+1=5 \quad \therefore a=4$

$$\therefore 3a-2b+c=3\times 4-2\times 3+1=7$$

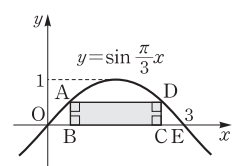
답 7

0604 함수 $y=\sin\frac{\pi}{3}x$ 의 주기가

$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$ 이므로 오른쪽 그림에서

$$\overline{OE}=3$$

$$\therefore \overline{OB}=\frac{1}{2}(\overline{OE}-\overline{BC})=\frac{1}{2}\times(3-2)=\frac{1}{2}$$



즉 점 A의 x 좌표는 $\frac{1}{2}$ 이므로 y 좌표는

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

따라서 $\overline{AB}$ 의 길이가 $\frac{1}{2}$ 이므로 직사각형 ABCD의 넓이는

$$2 \times \frac{1}{2} = 1$$

답 ①

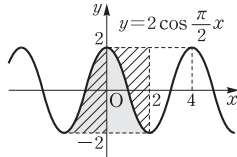
0605 함수 $y = 2 \cos \frac{\pi}{2}x$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 구하는 넓이는

$$2 \times 4 = 8$$

답 8



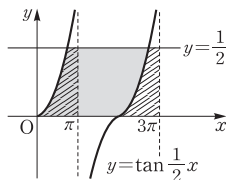
0606 함수 $y = \tan ax$ 의 주기가 $3\pi - \pi = 2\pi$ 이고 $a > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{a} = 2\pi \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 구하는 넓이는

$$2\pi \times \frac{1}{2} = \pi$$

답 π



0607 두 점 $(a, 0)$, $(b, 0)$ 은 직선 $x = \frac{\pi}{2}$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore a+b = \pi$$

두 점 $(c, 0)$, $(d, 0)$ 은 직선 $x = \frac{5}{2}\pi$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{c+d}{2} = \frac{5}{2}\pi \quad \therefore c+d = 5\pi$$

$$\therefore a+b+c+d = \pi + 5\pi = 6\pi$$

답 ③

0608 $y = \cos x$ 의 그래프에서 두 점 $(a, 0)$, $(c, 0)$ 은 직선 $x = \pi$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{a+c}{2} = \pi \quad \therefore a+c = 2\pi$$

... 1단계

$y = \sin x$ 의 그래프에서 두 점 $(b, 0)$, $(d, 0)$ 은 직선 $x = \frac{3}{2}\pi$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{b+d}{2} = \frac{3}{2}\pi \quad \therefore b+d = 3\pi$$

... 2단계

$$\therefore \sin \frac{-a+b-c+d}{4} = \sin \frac{-(a+c) + (b+d)}{4}$$

$$= \sin \frac{-2\pi + 3\pi}{4}$$

$$= \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

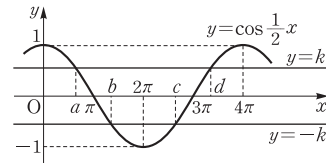
... 3단계

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답

	채점 요소	비율
1단계	$a+c$ 의 값 구하기	40 %
2단계	$b+d$ 의 값 구하기	40 %
3단계	$\sin \frac{-a+b-c+d}{4}$ 의 값 구하기	20 %

0609 $y = \cos \frac{1}{2}x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$



따라서 위의 그림에서 두 점 $(b, 0)$, $(c, 0)$ 은 직선 $x = 2\pi$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{b+c}{2} = 2\pi \quad \therefore b+c = 4\pi$$

두 점 $(c, 0)$, $(d, 0)$ 은 직선 $x = 3\pi$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{c+d}{2} = 3\pi \quad \therefore c+d = 6\pi$$

$$\therefore \cos \frac{b+2c+d}{5} = \cos \frac{(b+c) + (c+d)}{5}$$

$$= \cos \frac{4\pi + 6\pi}{5}$$

$$= \cos 2\pi = 1$$

답 1

0610 $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$, $\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$,

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) = -\sin \theta, \quad \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) = -\cos \theta,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta, \quad \cos(2\pi + \theta) = \cos \theta$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \frac{-\sin \theta \times (-\tan \theta)^2}{-\sin \theta} + \frac{-\cos \theta}{\cos \theta \cos^2 \theta}$$

$$= \tan^2 \theta - \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{-\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = -1$$

답 ②

0611 ㄱ. $\sin(-\theta) = -\sin \theta$

$$\text{ㄴ. } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\text{ㄷ. } \sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\text{ㄹ. } \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = \sin \theta$$

$$\text{ㅁ. } \cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$$

$$\text{ㅂ. } \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

이상에서 $\sin \theta$ 의 값과 항상 같은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ의 3개이다.

답 3

$$\begin{aligned}
 \text{0612 } \cos 100^\circ &= \cos(90^\circ + 10^\circ) = -\sin 10^\circ \\
 &= -0.1736 \\
 \tan 200^\circ &= \tan(90^\circ \times 2 + 20^\circ) = \tan 20^\circ = 0.3640 \\
 \therefore \cos 100^\circ + \tan 200^\circ &= -0.1736 + 0.3640 \\
 &= 0.1904
 \end{aligned}$$

답 0.1904

$$\begin{aligned}
 \text{0613 } \cos \frac{13}{6}\pi &= \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \tan \frac{5}{3}\pi &= \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} \\
 \sin \frac{7}{3}\pi &= \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \sin \frac{7}{6}\pi &= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \\
 \tan \frac{2}{3}\pi &= \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} \\
 \cos\left(-\frac{5}{3}\pi\right) &= \cos \frac{5}{3}\pi = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\
 &= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\
 \therefore (\text{주어진 식}) &= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \sqrt{3}}{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{3}-4}{2} + \frac{1-4\sqrt{3}}{2} \\
 &= -\frac{3+3\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

답 $-\frac{3+3\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned}
 \text{0614 } \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= -\sin \theta, \tan(\pi + \theta) = \tan \theta, \\
 \tan(\pi - \theta) &= -\tan \theta, \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta \\
 \therefore (\text{주어진 식}) &= \frac{\cos \theta \times (-\sin \theta)}{\tan \theta} + \sin \theta \times (-\tan \theta) \times \cos \theta \\
 &= \frac{-\sin \theta \cos \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} + \sin \theta \times \left(-\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right) \times \cos \theta \\
 &= -\cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\
 &= -(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = -1
 \end{aligned}$$

답 -1

$$\begin{aligned}
 \text{0615 } \frac{\pi}{4} + \theta &= A \text{ 라 하면 } \theta = A - \frac{\pi}{4} \text{ 이므로} \\
 \frac{\pi}{4} - \theta &= \frac{\pi}{4} - \left(A - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - A \\
 \therefore \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) &= \sin^2 A + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \\
 &= \sin^2 A + \cos^2 A \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}
 \text{0616 } \cos(-110^\circ) &= \cos 110^\circ = \cos(180^\circ - 70^\circ) \\
 &= -\cos 70^\circ = \alpha
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{이므로 } \cos 70^\circ &= -\alpha \\
 \therefore \sin 250^\circ &= \sin(180^\circ + 70^\circ) = -\sin 70^\circ \\
 &= -\sqrt{1 - \cos^2 70^\circ} = -\sqrt{1 - \alpha^2}
 \end{aligned}$$

답 ①

$$\begin{aligned}
 \text{다른 풀이 } \alpha &= \cos(-110^\circ) = \cos 110^\circ \text{ 이므로} \\
 \sin 250^\circ &= \sin(360^\circ - 110^\circ) = -\sin 110^\circ \\
 &= -\sqrt{1 - \cos^2 110^\circ} = -\sqrt{1 - \alpha^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{0617 } \cos \frac{9}{20}\pi &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{20}\right) = \sin \frac{\pi}{20} \\
 \cos \frac{7}{20}\pi &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{20}\pi\right) = \sin \frac{3}{20}\pi \\
 \therefore (\text{주어진 식}) &= \left(\cos^2 \frac{\pi}{20} + \cos^2 \frac{9}{20}\pi\right) + \left(\cos^2 \frac{3}{20}\pi + \cos^2 \frac{7}{20}\pi\right) \\
 &\quad + \cos^2 \frac{5}{20}\pi \\
 &= \left(\cos^2 \frac{\pi}{20} + \sin^2 \frac{\pi}{20}\right) + \left(\cos^2 \frac{3}{20}\pi + \sin^2 \frac{3}{20}\pi\right) \\
 &\quad + \cos^2 \frac{\pi}{4} \\
 &= 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{5}{2}$

$$\begin{aligned}
 \text{0618 } \sin^2 89^\circ &= \sin^2(90^\circ - 1^\circ) = \cos^2 1^\circ \\
 \sin^2 88^\circ &= \sin^2(90^\circ - 2^\circ) = \cos^2 2^\circ \\
 &\vdots \\
 \sin^2 46^\circ &= \sin^2(90^\circ - 44^\circ) = \cos^2 44^\circ \\
 \therefore (\text{주어진 식}) &= (\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) \\
 &\quad + \cdots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ) + \sin^2 45^\circ \\
 &= (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) \\
 &\quad + \cdots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) + \sin^2 45^\circ \\
 &= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{44\text{개}} + \frac{1}{2} \\
 &= 44 + \frac{1}{2} = \frac{89}{2}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{89}{2}$

$$\begin{aligned}
 \text{0619 } \theta &= 9^\circ \text{ 에서 } 20\theta = 180^\circ \text{ 이므로} \\
 \cos 21\theta &= \cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta \\
 \cos 22\theta &= \cos(180^\circ + 2\theta) = -\cos 2\theta \\
 &\vdots \\
 \cos 40\theta &= \cos(180^\circ + 20\theta) = -\cos 20\theta \\
 \therefore \cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos 40\theta &= (\cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos 20\theta) \\
 &\quad + (\cos 21\theta + \cos 22\theta + \cdots + \cos 40\theta) \\
 &= (\cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos 20\theta) \\
 &\quad - (\cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos 20\theta) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

답 ①

0620 $\angle P_1OP = \theta$ 라 하면 $9\theta = \frac{\pi}{2}$ 이고

$\angle P_nOP = n\theta$ ($n=1, 2, 3, \dots, 8$)

이때 $\overline{OP_n} = 1$ 이므로 직각삼각형 P_nOQ_n 에서

$\overline{P_nQ_n} = \sin n\theta$

$\therefore$ (주어진 식)

$= \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \dots + \sin^2 7\theta + \sin^2 8\theta$

$= \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta + \sin^2 4\theta$

$+ \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - 4\theta \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - 3\theta \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta \right)$

$+ \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$

$= \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta + \sin^2 4\theta$

$+ \cos^2 4\theta + \cos^2 3\theta + \cos^2 2\theta + \cos^2 \theta$

$= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + (\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta)$

$+ (\sin^2 3\theta + \cos^2 3\theta) + (\sin^2 4\theta + \cos^2 4\theta)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

답 4

0621 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로

$1 \leq \sin x + 2 \leq 3, \quad 1 \leq |\sin x + 2| \leq 3$

$-3 \leq -|\sin x + 2| \leq -1$

$\therefore k-3 \leq -|\sin x + 2| + k \leq k-1$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $k-1$, 최솟값은 $k-3$ 이고 최댓값과 최솟값의 합이 1이므로

$(k-1) + (k-3) = 1, \quad 2k = 5$

$\therefore k = \frac{5}{2}$

답 $\frac{5}{2}$

0622 $y = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) - 2 \sin x - 1$

$= -\sin x - 2 \sin x - 1$

$= -3 \sin x - 1$

이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로

$-3 \leq -3 \sin x \leq 3$

$\therefore -4 \leq -3 \sin x - 1 \leq 2$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 2, 최솟값은 -4이므로

$M = 2, m = -4$

$\therefore M - m = 6$

답 6

0623 $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ 이므로

$-2 \leq \cos 2x - 1 \leq 0$

$0 \leq |\cos 2x - 1| \leq 2$

$\therefore b \leq a |\cos 2x - 1| + b \leq 2a + b$ ($\because a > 0$)

이때 주어진 함수의 최댓값이 7, 최솟값이 3이므로

$2a + b = 7, b = 3$

$b = 3$ 을 $2a + b = 7$ 에 대입하면

$2a + 3 = 7 \quad \therefore a = 2$

$\therefore ab = 6$

답 6

0624 $y = |2 + 3 \cos(x - \pi)| - 1$

$= |2 + 3 \cos(\pi - x)| - 1$

$= |2 - 3 \cos x| - 1$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$-3 \leq -3 \cos x \leq 3, \quad -1 \leq 2 - 3 \cos x \leq 5$

$0 \leq |2 - 3 \cos x| \leq 5$

$\therefore -1 \leq |2 - 3 \cos x| - 1 \leq 4$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 4, 최솟값은 -1이므로

$M = 4, m = -1$

$\therefore M + m = 3$

답 ③

0625 $y = -2 \sin^2 x + 2 \cos x + 1$

$= -2(1 - \cos^2 x) + 2 \cos x + 1$

$= 2 \cos^2 x + 2 \cos x - 1$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고 주어진 함수는

$y = 2t^2 + 2t - 1 = 2 \left(t + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{3}{2}$

$-1 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는

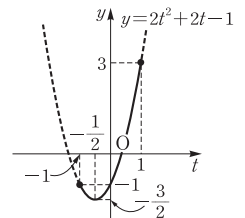
$t = 1$ 에서 최댓값 3,

$t = -\frac{1}{2}$ 에서 최솟값 $-\frac{3}{2}$

을 가지므로 $M = 3, m = -\frac{3}{2}$

$\therefore M + m = \frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$



0626 $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2$

$= (1 - \sin^2 x) + 2 \sin x + 2$

$= -\sin^2 x + 2 \sin x + 3$

$\sin x = t$ 로 놓으면 $-\pi \leq x \leq \pi$ 에서 $-1 \leq t \leq 1$ 이고 주어진 함수는

$y = -t^2 + 2t + 3 = -(t-1)^2 + 4$

$-1 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는

$t = 1$ 에서 최댓값 4

를 가지므로 $M = 4$

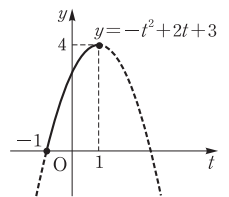
한편 $t = 1$, 즉 $\sin x = 1$ 에서

$x = \frac{\pi}{2} \quad (\because -\pi \leq x \leq \pi)$

이므로 $a = \frac{\pi}{2}$

$\therefore aM = \frac{\pi}{2} \times 4 = 2\pi$

답 ③



0627 $y = \sin^2 x - 4 \cos x + k$

$= (1 - \cos^2 x) - 4 \cos x + k$

$= -\cos^2 x - 4 \cos x + k + 1$

... 1단계

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고 주어진 함수는

$y = -t^2 - 4t + k + 1$

$= -(t+2)^2 + k + 5$

... 2단계

$-1 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는

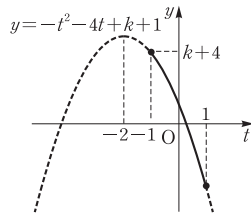
$t = -1$ 에서 최댓값 $k+4$

를 가지므로

$$k+4=3$$

$$\therefore k=-1$$

... 3단계



답 -1

채점 요소	비율
1단계 주어진 함수를 $\cos x$ 에 대한 함수로 변형하기	30 %
2단계 $\cos x = t$ 로 치환하기	30 %
3단계 k 의 값 구하기	40 %

0628 $x - \frac{\pi}{6} = \theta$ 라 하면 $x = \theta + \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$x + \frac{\pi}{3} = \theta + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \theta + \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore y = \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + a$$

$$= \sin^2\theta + 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + a$$

$$= (1 - \cos^2\theta) + 2\cos\theta + a$$

$$= -\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 + a$$

$\cos\theta = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고 주어진 함수는

$$y = -t^2 + 2t + 1 + a = -(t-1)^2 + 2 + a$$

$-1 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는

$t = 1$ 에서 최댓값 $2+a$,

$t = -1$ 에서 최솟값 $-2+a$

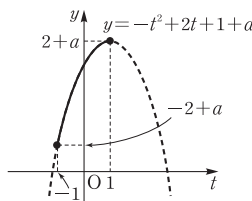
를 가지므로

$$2+a=5, \quad -2+a=b$$

$$2+a=5 \text{에서 } a=3$$

$$\text{이것을 } b = -2+a \text{에 대입하면 } b = -2+3=1$$

$$\therefore a+b=4$$



답 4

0629 $\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고 주어진 함수는

$$y = \frac{-t+1}{t+2} = \frac{-(t+2)+3}{t+2} = \frac{3}{t+2} - 1$$

$-1 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는

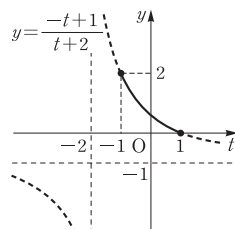
$t = -1$ 에서 최댓값 2,

$t = 1$ 에서 최솟값 0

을 가지므로

$$M=2, \quad m=0$$

$$\therefore M+m=2$$



답 ②

0630 $\tan x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 $0 \leq t \leq 1$ 이고 주어진 함수는

$$y = \frac{2t+1}{t+2} = \frac{2(t+2)-3}{t+2} = -\frac{3}{t+2} + 2$$

$0 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는

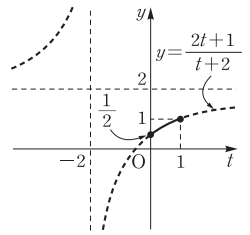
$t = 1$ 에서 최댓값 1,

$t = 0$ 에서 최솟값 $\frac{1}{2}$

을 가지므로

$$M=1, \quad m=\frac{1}{2}$$

$$\therefore M+m=\frac{3}{2}$$



답 $\frac{3}{2}$

0631 $\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고 주어진 함수는

$$y = \frac{-2t+k}{t+3} = \frac{-2(t+3)+k+6}{t+3} = -2 + \frac{k+6}{t+3}$$

한편 $k > -6$ 에서 $k+6 > 0$ 이므로

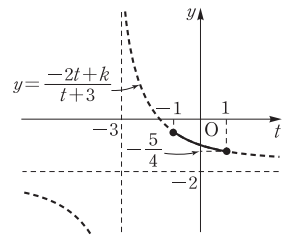
$-1 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는

$t = 1$ 에서 최솟값 $-\frac{5}{4}$

를 갖는다.

$$\text{즉 } \frac{-2+k}{1+3} = -\frac{5}{4} \text{이므로}$$

$$-2+k=-5 \quad \therefore k=-3$$



답 -3

0632 $|\sin x| = t$ 로 놓으면 $0 \leq t \leq 1$ 이고 주어진 함수는

$$y = \frac{t}{t+1} = \frac{(t+1)-1}{t+1} = -\frac{1}{t+1} + 1$$

$0 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는

$t = 1$ 에서 최댓값 $\frac{1}{2}$,

$t = 0$ 에서 최솟값 0

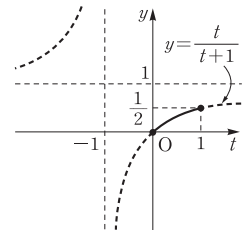
을 가지므로 주어진 함수의 치역은

$$\left\{ y \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \right\}$$

따라서 $a=0, b=\frac{1}{2}$ 이므로

$$a+b=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$



0633 $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ 에서 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$2x + \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓으면 $\sin t = \frac{1}{2}$

한편 $0 \leq x < \pi$ 에서 $0 \leq 2x < 2\pi$

$$\frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi \quad \therefore \frac{\pi}{3} \leq t < \frac{7}{3}\pi$$

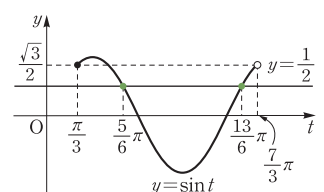
오른쪽 그림과 같이

$\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{7}{3}\pi$ 에서 함수

$y = \sin t$ 의 그래프와 직선

$y = \frac{1}{2}$ 의 교점의 t 좌표는

$$\frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi \text{이므로}$$



$$2x + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{13}{6}\pi$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{11}{12}\pi$$

따라서 모든 근의 합은

$$\frac{\pi}{4} + \frac{11}{12}\pi = \frac{7}{6}\pi$$

답 $\frac{7}{6}\pi$

0634 $x - \frac{\pi}{4} = t$ 로 놓으면 $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서

$$-\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} < \frac{7}{4}\pi \quad \therefore -\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{7}{4}\pi$$

오른쪽 그림과 같이

$$-\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{7}{4}\pi \text{에서 함수}$$

$y = \cos t$ 의 그래프와 직선

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{의 교점의 } t \text{좌표는}$$

$$\frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi \text{이므로}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } x - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{6}\pi$$

$$\therefore x = \frac{13}{12}\pi \text{ 또는 } x = \frac{17}{12}\pi$$

따라서 구하는 차는

$$\frac{17}{12}\pi - \frac{13}{12}\pi = \frac{\pi}{3}$$

답 $\frac{\pi}{3}$

0635 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$,

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\cos x, \sin(2\pi - x) = -\sin x$$

이므로 주어진 방정식은

$$\cos x + \sin x = -\cos x - \sin x$$

$$2\sin x = -2\cos x, \quad \sin x = -\cos x$$

$$\therefore \tan x = -1$$

이때 $0 \leq x < 2\pi$ 이므로 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } x = \frac{7}{4}\pi$$

따라서 모든 근의 값의 합은

$$\frac{3}{4}\pi + \frac{7}{4}\pi = \frac{5}{2}\pi$$

답 ④

0636 $3\sin x - 2\cos^2 x = 0$ 에서

$$3\sin x - 2(1 - \sin^2 x) = 0, \quad 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$\therefore (\sin x + 2)(2\sin x - 1) = 0$$

그런데 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 $\sin x = \frac{1}{2}$

이때 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$

따라서 모든 근의 합은

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi = \pi$$

답 π

076 정답 및 풀이

0637 $2\sin^2 x + a\cos x - 1 = 0$ 에서

$$2(1 - \cos^2 x) + a\cos x - 1 = 0$$

$$\therefore 2\cos^2 x - a\cos x - 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 방정식 ①의 한 근이 $x = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$2\cos^2 \frac{\pi}{3} - a\cos \frac{\pi}{3} - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}a - 1 = 0 \quad \therefore a = -1$$

즉 ①에서 $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ 이므로

$$(\cos x + 1)(2\cos x - 1) = 0$$

$$\therefore \cos x = -1 \text{ 또는 } \cos x = \frac{1}{2}$$

(i) $\cos x = -1$ 일 때, $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $x = \pi$

(ii) $\cos x = \frac{1}{2}$ 일 때, $0 \leq x < 2\pi$ 에서

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \pi \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi$$

따라서 $\alpha = \pi$, $\beta = \frac{5}{3}\pi$ 또는 $\alpha = \frac{5}{3}\pi$, $\beta = \pi$ 이므로

$$\alpha + \beta = \frac{8}{3}\pi$$

답 $\frac{8}{3}\pi$

0638 $\sqrt{2\sin^2 x + 2\sin x + \cos^2 x} = \frac{1}{2}$ 에서

$$\sqrt{2\sin^2 x + 2\sin x + (1 - \sin^2 x)} = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1\text{단계}}$$

$$\sqrt{\sin^2 x + 2\sin x + 1} = \frac{1}{2}, \quad \sqrt{(\sin x + 1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$|\sin x + 1| = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin x = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } \sin x = -\frac{1}{2}$$

그런데 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 $\sin x = -\frac{1}{2}$ $\dots \textcircled{2\text{단계}}$

이때 $0 \leq x < 2\pi$ 에서

$$x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi \quad \dots \textcircled{3\text{단계}}$$

답 $x = \frac{7}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$

	채점 요소	비율
1단계	한 종류의 삼각함수에 대한 방정식으로 변형하기	30 %
2단계	$\sin x$ 의 값 구하기	40 %
3단계	방정식의 해 구하기	30 %

0639 $3\cos^2 x - 1 = \sin x \cos x$ 에서

$$3\cos^2 x - (\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin x \cos x$$

$$2\cos^2 x - \sin x \cos x - \sin^2 x = 0$$

$$(2\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = 0$$

$$\therefore \cos x = -\frac{1}{2}\sin x \text{ 또는 } \cos x = \sin x$$

$$\therefore \tan x = -2 \text{ 또는 } \tan x = 1$$

그런데 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\tan x \geq 0$ 이므로 $\tan x = 1$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4} \quad \text{답 } x = \frac{\pi}{4}$$

0640 $3\cos^2 A - 7\cos A + 2 = 0$ 에서

$$(3\cos A - 1)(\cos A - 2) = 0$$

그런데 $-1 \leq \cos A \leq 1$ 이므로 $\cos A = \frac{1}{3}$

이때 $A + B + C = \pi$ 이므로 $B + C = \pi - A$

$$\begin{aligned} \therefore \sin(B + C) &= \sin(\pi - A) \\ &= \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} \quad (\because 0 < A < \pi) \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{답 ④} \end{aligned}$$

0641 $4\cos^2 A + 4\sqrt{3}\sin A - 7 = 0$ 에서

$$4(1 - \sin^2 A) + 4\sqrt{3}\sin A - 7 = 0$$

$$4\sin^2 A - 4\sqrt{3}\sin A + 3 = 0$$

$$(2\sin A - \sqrt{3})^2 = 0 \quad \therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 삼각형 ABC는 예각삼각형이므로

$$0 < A < \frac{\pi}{2} \quad \therefore A = \frac{\pi}{3}$$

또 $A + B + C = \pi$ 이므로 $\pi - (B + C) = A$

$$\therefore \tan\{\pi - (B + C)\} = \tan A = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \quad \text{답 ⑤}$$

0642 $A + B + C = \pi$ 이므로 $B + C = \pi - A$

$$\therefore \sin \frac{B+C}{2} = \sin \frac{\pi-A}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \cos \frac{A}{2}$$

따라서 주어진 방정식에서 $2\cos^2 \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2} - 1 = 0$

$$\therefore \left(\cos \frac{A}{2} + 1\right)\left(2\cos \frac{A}{2} - 1\right) = 0$$

이때 $0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $0 < \cos \frac{A}{2} < 1$

$$\therefore \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$$

따라서 $\frac{A}{2} = \frac{\pi}{3}$ 이므로 $A = \frac{2}{3}\pi$

$$\therefore \sin A = \sin \frac{2}{3}\pi = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

0643 $4\cos^2 A + 4\sin A = 5$ 에서

$$4(1 - \sin^2 A) + 4\sin A = 5$$

$$4\sin^2 A - 4\sin A + 1 = 0$$

$$(2\sin A - 1)^2 = 0 \quad \therefore \sin A = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos\left(\frac{\pi}{2} + B + C\right) &= -\sin(B + C) \\ &= -\sin(\pi - A) \quad (\because A + B + C = \pi) \\ &= -\sin A = -\frac{1}{2} \quad \text{답 } -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

0644 $\sin^2 x + \cos x + a = 0$ 에서

$$(1 - \cos^2 x) + \cos x + a = 0$$

$$\therefore \cos^2 x - \cos x - 1 = a$$

이 방정식이 실근을 가지려면 $y = \cos^2 x - \cos x - 1$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점이 존재해야 한다.

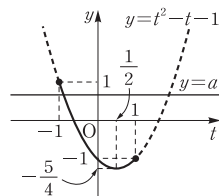
이때 $\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = t^2 - t - 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

따라서 주어진 방정식이 실근을 가지려면 오른쪽 그림에서

$$-\frac{5}{4} \leq a \leq 1$$

$$\text{답 } -\frac{5}{4} \leq a \leq 1$$



0645 $\sin^2 x + 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + k = 0$ 에서

$$\sin^2 x - 2\sin x + k = 0$$

$$\therefore -\sin^2 x + 2\sin x = k$$

이 방정식이 실근을 가지려면 $y = -\sin^2 x + 2\sin x$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점이 존재해야 한다.

이때 $\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = -t^2 + 2t = -(t - 1)^2 + 1$$

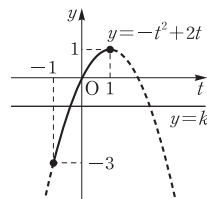
주어진 방정식이 실근을 가지려면 오른쪽 그림에서

$$-3 \leq k \leq 1$$

따라서 정수 k 는 $-3, -2, -1, 0, 1$ 이므로 구하는 합은

$$-3 + (-2) + (-1) + 0 + 1 = -5$$

답 ①



0646 $\sin^2 \theta - 2\cos\left(\theta + \frac{3}{2}\pi\right) - a - 1 = 0$ 에서

$$\sin^2 \theta - 2\sin \theta - a - 1 = 0$$

$$\therefore \sin^2 \theta - 2\sin \theta - 1 = a \quad \dots \text{1단계}$$

이 방정식을 만족시키는 θ 가 존재하려면 $y = \sin^2 \theta - 2\sin \theta - 1$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점이 존재해야 한다.

이때 $\sin \theta = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

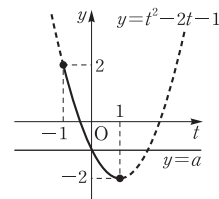
$$y = t^2 - 2t - 1$$

$$= (t - 1)^2 - 2 \quad \dots \text{2단계}$$

따라서 주어진 방정식을 만족시키는 θ 가 존재하려면 오른쪽 그림에서

$$-2 \leq a \leq 2 \quad \dots \text{3단계}$$

$$\text{답 } -2 \leq a \leq 2$$



채점 요소		비율
1단계	한 종류의 삼각함수로 변형하기	30 %
2단계	$\sin \theta = t$ 로 치환하기	30 %
3단계	a 의 값의 범위 구하기	40 %

0647 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+4\sin(\pi+x)=k$ 에서

$$-\sin x \times \sin x - 4\sin x = k$$

$$\therefore -\sin^2 x - 4\sin x = k$$

이 방정식이 실근을 가지려면 $y = -\sin^2 x - 4\sin x$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점이 존재해야 한다.

이때 $\sin x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < \pi$ 에서 $0 \leq t \leq 1$ 이고

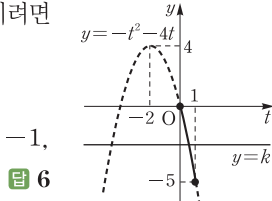
$$y = -t^2 - 4t = -(t+2)^2 + 4$$

따라서 주어진 방정식이 실근을 가지려면

오른쪽 그림에서

$$-5 \leq k \leq 0$$

즉 정수 k 는 $-5, -4, -3, -2, -1, 0$ 의 6개이다.



답 6

0648 $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{1}{2}$ 에서 $x - \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓으면

$$\sin t \geq \frac{1}{2}$$

한편 $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서

$$-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{3} \quad \therefore -\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{5\pi}{3}$$

$$-\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{5\pi}{3} \text{에서 부등식}$$

$$\sin t \geq \frac{1}{2} \text{의 해는}$$

$$\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{따라서 } \frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6} \text{이므로}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$$

$$\text{즉 } \alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{7\pi}{6} \text{이므로}$$

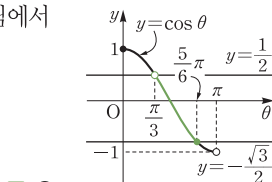
$$\alpha + \beta = \frac{5\pi}{3}$$

답 $\frac{5\pi}{3}$

0649 $0 \leq \theta < \pi$ 이므로 오른쪽 그림에서

$$\text{부등식 } -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos \theta < \frac{1}{2} \text{의 해는}$$

$$\frac{\pi}{3} < \theta \leq \frac{5\pi}{6}$$

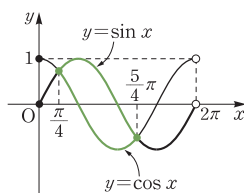


답 ④

0650 부등식 $\sin x \geq \cos x$ 의 해는

$y = \sin x$ 의 그래프가 $y = \cos x$ 의 그래프와 만나거나 $y = \cos x$ 의 그래프보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$$



답 $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$

0651 (i) $2\cos \alpha < \sqrt{3}$ 에서 $\cos \alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

(ii) $2\sin \alpha \leq \sqrt{2}$ 에서 $\sin \alpha \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\therefore 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4} \quad (\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

(i), (ii)에서 연립부등식 $\begin{cases} 2\cos \alpha < \sqrt{3} \\ 2\sin \alpha \leq \sqrt{2} \end{cases}$ 의 해는

$$\frac{\pi}{6} < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$$

..... ㉠

이때 각 α 를 나타내는 동경과 각 β 를 나타내는 동경이 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\alpha + \beta = \pi$$

즉 $\alpha = \pi - \beta$ 이므로 ㉠에 대입하면

$$\frac{\pi}{6} < \pi - \beta \leq \frac{\pi}{4}, \quad -\frac{5\pi}{6} < -\beta \leq -\frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore \frac{3\pi}{4} \leq \beta < \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{답 } \frac{3\pi}{4} \leq \beta < \frac{5\pi}{6}$$

0652 $2\sin^2 x > 3\cos x$ 에서

$$2(1 - \cos^2 x) > 3\cos x$$

$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 < 0$$

$$\therefore (\cos x + 2)(2\cos x - 1) < 0$$

그런데 $\cos x + 2 > 0$ 이므로

$$2\cos x - 1 < 0 \quad \therefore \cos x < \frac{1}{2}$$

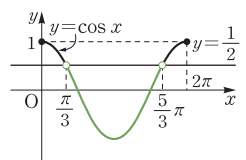
따라서 오른쪽 그림에서 주어진 부등식의 해는

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$$

$$\text{즉 } a = \frac{\pi}{3}, b = \frac{5\pi}{3} \text{이므로}$$

$$a + b = 2\pi$$

답 ⑤



0653 $2\cos^2 x < \sin x + 1$ 에서

$$2(1 - \sin^2 x) < \sin x + 1$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 > 0$$

$$\therefore (\sin x + 1)(2\sin x - 1) > 0$$

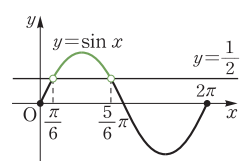
그런데 $\sin x + 1 \geq 0$ 이므로

$$2\sin x - 1 > 0 \quad \therefore \sin x > \frac{1}{2}$$

따라서 오른쪽 그림에서 주어진 부등식의 해는

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{답 } \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$$



0654 $x - \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{\pi}{3} + t$

$$\therefore \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t$$

따라서 주어진 부등식은

$$2\cos^2 t + \sin t - 1 \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $0 \leq x < 2\pi$ 이므로

$$-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi \quad \therefore -\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{5}{3}\pi$$

①에서 $2(1 - \sin^2 t) + \sin t - 1 \geq 0$

$$2\sin^2 t - \sin t - 1 \leq 0, \quad (2\sin t + 1)(\sin t - 1) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq \sin t \leq 1$$

따라서 오른쪽 그림에서 주어

진 부등식의 해는

$$-\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{7}{6}\pi$$

$$\text{즉 } -\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{7}{6}\pi \text{ 이}$$

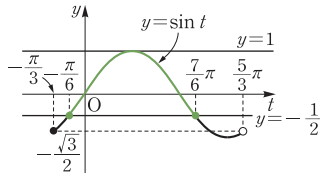
므로

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{3}{2}\pi$ 이므로

$$\frac{\beta}{\alpha} = 9$$

답 9



0655 $\cos^2 \theta + 4\sin \theta \leq 2a$ 에서

$$(1 - \sin^2 \theta) + 4\sin \theta \leq 2a$$

$$\therefore \sin^2 \theta - 4\sin \theta + 2a - 1 \geq 0$$

이때 $\sin \theta = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고 주어진 부등식은

$$t^2 - 4t + 2a - 1 \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$-1 \leq t \leq 1$ 일 때, 함수

$$y = t^2 - 4t + 2a - 1$$

$$= (t - 2)^2 + 2a - 5$$

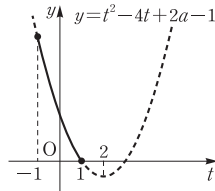
는 $t = 1$ 에서 최솟값을 가지므로 부등식

①이 성립하려면

$$1 - 4 + 2a - 1 \geq 0$$

$$\therefore a \geq 2$$

답 $a \geq 2$



0656 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 2x\sin \theta - 3\cos^2 \theta + 2 \geq 0$ 이 성립하려면 이차방정식 $x^2 - 2x\sin \theta - 3\cos^2 \theta + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4} = (-\sin \theta)^2 - (-3\cos^2 \theta + 2) \leq 0$$

$$\sin^2 \theta + 3\cos^2 \theta - 2 \leq 0, \quad (1 - \cos^2 \theta) + 3\cos^2 \theta - 2 \leq 0$$

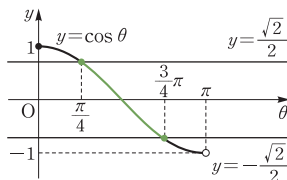
$$2\cos^2 \theta - 1 \leq 0, \quad (\sqrt{2}\cos \theta + 1)(\sqrt{2}\cos \theta - 1) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 오른쪽 그림에서 θ 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi$$

$$\text{답 } \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi$$



0657 이차방정식 $x^2 - 4x\sin \theta + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4} = (-2\sin \theta)^2 - 1 = 0 \quad \dots \text{1단계}$$

$$4\sin^2 \theta - 1 = 0 \quad \therefore (2\sin \theta + 1)(2\sin \theta - 1) = 0$$

이때 $0 < \theta < \pi$ 에서 $0 < \sin \theta \leq 1$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \theta = \frac{5}{6}\pi$$

... 2단계

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{5}{6}\pi$ 이므로

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{2}{3}\pi$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

... 3단계

$$\text{답 } -\frac{1}{2}$$

채점 요소		비율
1단계	판별식을 이용하여 θ 에 대한 방정식 세우기	30 %
2단계	θ 의 값 구하기	50 %
3단계	$\cos(\beta - \alpha)$ 의 값 구하기	20 %

0658 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 3x + \sin^2 \theta - 3\cos^2 \theta = 0$ 이 서로 다른 부호의 실근을 가지려면 두 근의 곱이 음수이어야 하므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin^2 \theta - 3\cos^2 \theta < 0, \quad (1 - \cos^2 \theta) - 3\cos^2 \theta < 0$$

$$4\cos^2 \theta - 1 > 0, \quad (2\cos \theta + 1)(2\cos \theta - 1) > 0$$

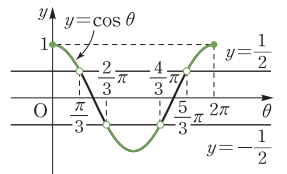
$$\therefore \cos \theta < -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos \theta > \frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 θ 의 값의 범위는

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{3}$$

$$\text{또는 } \frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{4}{3}\pi$$

$$\text{또는 } \frac{5}{3}\pi < \theta \leq 2\pi$$



따라서 θ 의 값이 아닌 것은 ③ $\frac{2}{5}\pi$ 이다.

답 ③

0659 (i) 이차방정식 $x^2 - 4x\cos \theta + 6\sin \theta = 0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4} = (-2\cos \theta)^2 - 6\sin \theta > 0$$

$$4\cos^2 \theta - 6\sin \theta > 0$$

$$4(1 - \sin^2 \theta) - 6\sin \theta > 0$$

$$2\sin^2 \theta + 3\sin \theta - 2 < 0$$

$$\therefore (\sin \theta + 2)(2\sin \theta - 1) < 0$$

그런데 $\sin \theta + 2 > 0$ 이므로

$$2\sin \theta - 1 < 0 \quad \therefore \sin \theta < \frac{1}{2}$$

(ii) 두 근의 합이 0보다 커야 하므로

$$4\cos\theta > 0 \quad \therefore \cos\theta > 0$$

(iii) 두 근의 곱이 0보다 커야 하므로

$$6\sin\theta > 0 \quad \therefore \sin\theta > 0$$

이상에서 $0 < \sin\theta < \frac{1}{2}, \cos\theta > 0$

오른쪽 그림에서 θ 의 값의 범위는

$$0 < \theta < \frac{\pi}{6}$$

따라서 $\alpha=0, \beta=\frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos\alpha + \sin\beta \\ = \cos 0 + \sin \frac{\pi}{6} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

답 3/2

0660 $A+B+C=\pi$ 이므로

$$\therefore \sin \frac{B+C}{2} = \sin \frac{\pi-A}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)$$

$$= \cos \frac{A}{2} \quad (\text{참})$$

$$\therefore \tan \frac{A}{2} = \tan \frac{\pi-(B+C)}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\tan \frac{B+C}{2}} \quad (\text{거짓})$$

$$\therefore \cos(B+C) = \cos(\pi-A) = -\cos A$$

따라서 $-\cos A > 0$ 이므로 $\cos A < 0$

즉 $\frac{\pi}{2} < A < \pi$ 이므로 삼각형 ABC는 둔각삼각형이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

0661 $A+C=\pi, B+D=\pi$ 이므로

$$C=\pi-A, D=\pi-B$$

$$\therefore \sin A + \sin B + \sin C + \sin D$$

$$= \sin A + \sin B + \sin(\pi-A) + \sin(\pi-B)$$

$$= 2(\sin A + \sin B) > 0 \quad (\because 0 < A < \pi, 0 < B < \pi) \quad (\text{거짓})$$

$$\therefore \cos A + \cos B + \cos C + \cos D$$

$$= \cos A + \cos B + \cos(\pi-A) + \cos(\pi-B)$$

$$= \cos A + \cos B - \cos A - \cos B = 0 \quad (\text{참})$$

$$\therefore \tan A + \tan B + \tan C + \tan D$$

$$= \tan A + \tan B + \tan(\pi-A) + \tan(\pi-B)$$

$$= \tan A + \tan B - \tan A - \tan B = 0 \quad (\text{참})$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

0662 $10\theta=2\pi$ 에서 $5\theta=\pi$

$$\textcircled{1} \sin 6\theta = \sin(5\theta + \theta) = \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$$

$$\therefore \sin\theta + \sin 6\theta = \sin\theta + (-\sin\theta) = 0$$

$$\textcircled{2} \sin(-5\theta) = -\sin 5\theta = -\sin\pi = 0$$

이때 $\sin\theta \neq 0$ 이므로 $\sin\theta + \sin(-5\theta) \neq 0$

$$\textcircled{3} \cos 4\theta = \cos(5\theta - \theta) = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

$$\therefore \cos 2\theta + \cos 4\theta = \cos 2\theta - \cos\theta \neq 0$$

$$\textcircled{4} \cos 4\theta = \cos(5\theta - \theta) = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

$$\cos 6\theta = \cos(5\theta + \theta) = \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$$

$$\therefore \cos 4\theta = \cos 6\theta$$

⑤ $\sin\theta$ 는 점 P_1 의 y 좌표이고, $\cos 3\theta$ 는 점 P_3 의 x 좌표이므로

$$\sin\theta \neq \cos 3\theta$$

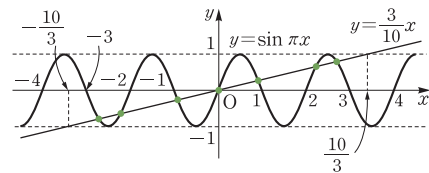
답 ④

0663 방정식 $\sin \pi x = \frac{3}{10}x$ 의 서로 다른 실근의 개수는

$y = \sin \pi x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{3}{10}x$ 의 교점의 개수와 같다.

이때 $y = \sin \pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ 이므로 함수 $y = \sin \pi x$ 의 그

래프와 직선 $y = \frac{3}{10}x$ 는 다음 그림과 같다.



따라서 교점의 개수가 7이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

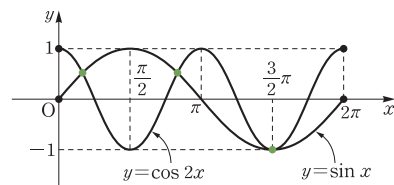
답 ④

0664 방정식 $\sin x = \cos 2x$ 의 서로 다른 실근의 개수는

$y = \sin x$ 와 $y = \cos 2x$ 의 그래프의 교점의 개수와 같다.

이때 $y = \cos 2x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 이므로 $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수

$y = \sin x$ 와 $y = \cos 2x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 교점의 개수가 3이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

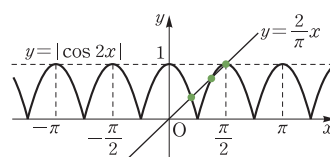
답 3

0665 방정식 $|\cos 2x| = \frac{2}{\pi}x$ 의 서로 다른 실근의 개수는

$y = |\cos 2x|$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{2}{\pi}x$ 의 교점의 개수와 같다.

이때 $y = |\cos 2x|$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이므로 함수 $y = |\cos 2x|$ 의 그

래프와 직선 $y = \frac{2}{\pi}x$ 는 다음 그림과 같다.

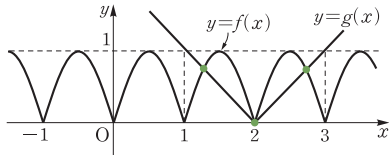


따라서 교점의 개수는 3이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

답 3

0666 방정식 $f(x) - g(x) = 0$, 즉 $f(x) = g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 개수와 같다.

이때 $f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 \pi x} = |\sin \pi x|$ 에서 $y = f(x)$ 의 주기는 $\frac{\pi}{\pi} = 1$ 이므로 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 교점의 개수가 3이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. **답 ②**

시험에 꼭 나오는 문제

● 본책 090~093쪽

0667 주어진 함수의 주기는 다음과 같다.

- ① 2π ② 2π ③ π
 ④ $\frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$ ⑤ $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

따라서 주기가 가장 큰 것은 ⑤이다. **답 ⑤**

0668 함수 $f(x)$ 가 정의역에 속하는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+8) = f(x)$ 를 만족시키려면 $f(x)$ 가 주기함수이고 주기를 p 라 할 때, $pn = 8$ 을 만족시키는 정수 n 이 존재해야 한다.

- ① 함수의 주기가 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ 이므로 $2 \times 4 = 8$
 ② 함수의 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$ 이므로 $\frac{4}{3} \times 6 = 8$
 ③ 함수의 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}$ 이므로 $\frac{4}{5} \times 10 = 8$
 ④ 함수의 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ 이므로 $6n = 8$ 을 만족시키는 정수 n 이 존재하지 않는다.

따라서 $f(x+8) = f(x)$ 를 만족시키지 않는다.

- ⑤ 함수의 주기가 $\frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{1}{2} \times 16 = 8$

답 ④

0669 주기는 $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$ 이므로 $a = 1$

최댓값은 $1 + 5 = 6$ 이므로 $b = 6$

$$f(x) = \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{3}\right) + 5 = \sin 2\pi\left(x - \frac{1}{6}\right) + 5$$

이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 함수 $y = \sin 2\pi x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{6}$ 만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

즉 $c = \frac{1}{6}$, $d = 5$ 이므로

$$ad + bc = 1 \times 5 + 6 \times \frac{1}{6} = 6$$

답 6

$$\begin{aligned} \mathbf{0670} \quad (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = -3f(x) + 2 \\ &= -3(a \sin x - b) + 2 \\ &= -3a \sin x + 3b + 2 \end{aligned}$$

이때 $a > 0$ 에서 $-3a < 0$

$(g \circ f)(x)$ 의 최댓값이 11이므로 $-3a + 3b + 2 = 11$

$$3a + 3b = 9 \quad \therefore a + b = 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$(g \circ f)(x)$ 의 최솟값이 -13 이므로

$$-3a + 3b + 2 = -13$$

$$-3a + 3b = -15 \quad \therefore a - b = 5 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = 4, b = -1$

$$\therefore ab = -4$$

답 -4

0671 주어진 그래프에서 함수의 주기가 $\frac{2}{3}\pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \pi$ 이

고 $a > 0$ 이므로 $\frac{2\pi}{a} = \pi \quad \therefore a = 2$

따라서 주어진 함수의 식은 $y = \cos 2(x + b) + 1$ 이고 그래프가 점 $\left(\frac{2}{3}\pi, 2\right)$ 를 지나므로

$$2 = \cos\left(\frac{4}{3}\pi + 2b\right) + 1 \quad \therefore \cos\left(\frac{4}{3}\pi + 2b\right) = 1$$

이때 $0 < b < \pi$ 이므로 $\frac{4}{3}\pi < \frac{4}{3}\pi + 2b < \frac{10}{3}\pi$

즉 $\frac{4}{3}\pi + 2b = 2\pi$ 이므로 $2b = \frac{2}{3}\pi \quad \therefore b = \frac{\pi}{3}$

$$\therefore ab = 2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

답 $\frac{2}{3}\pi$

0672 $a > 0$ 이므로 $0 \leq |\sin bx| \leq 1$ 에서

$$c \leq a|\sin bx| + c \leq a + c$$

이때 조건 (가)에서 최댓값과 최솟값의 차가 2이므로

$$(a + c) - c = 2 \quad \therefore a = 2$$

또 조건 (나)에서 함수 $y = \cos 6x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ 이고 $b > 0$ 이

므로 $\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{3} \quad \therefore b = 3$

따라서 조건 (다)에서 함수 $f(x) = 2|\sin 3x| + c$ 의 그래프가 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$2|\sin 0| + c = 3 \quad \therefore c = 3$$

$$\therefore a + b + c = 8$$

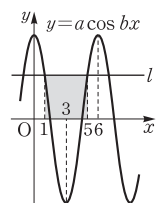
답 8

0673 함수 $y = a \cos bx$ 의 그래프와 직선

l 의 교점의 x 좌표가 1, 5이고 $\frac{1+5}{2} = 3$ 이

므로 함수 $y = a \cos bx$ 의 그래프는 직선

$x = 3$ 에 대하여 대칭이다.



따라서 함수 $y = a \cos bx$ 의 주기는 $2 \times 3 = 6$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 6 \quad \therefore b = \frac{\pi}{3}$$

즉 주어진 함수의 식은 $y = a \cos \frac{\pi}{3}x$ 이므로 $x=1$ 을 대입하면

$$y = a \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}a$$

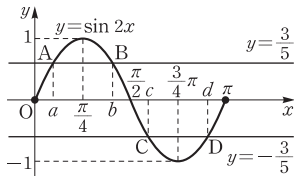
이때 직선 l 과 x 축 및 두 직선 $x=1$, $x=5$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 24이므로

$$(5-1) \times \frac{1}{2}a = 24, \quad 2a = 24 \quad \therefore a = 12$$

$$\therefore ab = 12 \times \frac{\pi}{3} = 4\pi$$

답 4π

0674 $y = \sin 2x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$



따라서 위의 그림에서 두 점 A, B는 직선 $x = \frac{\pi}{4}$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \therefore a+b = \frac{\pi}{2}$$

두 점 C, D는 직선 $x = \frac{3}{4}\pi$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{c+d}{2} = \frac{3}{4}\pi \quad \therefore c+d = \frac{3}{2}\pi$$

두 점 B, C는 점 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{b+c}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore b+c = \pi$$

$$\begin{aligned} \therefore a+2b+2c+d &= (a+b) + (b+c) + (c+d) \\ &= \frac{\pi}{2} + \pi + \frac{3}{2}\pi = 3\pi \end{aligned}$$

답 3π

다른 풀이 두 점 A, D는 점 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{a+d}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore a+d = \pi$$

$$\begin{aligned} \therefore a+2b+2c+d &= (a+d) + 2(b+c) \\ &= \pi + 2 \times \pi = 3\pi \end{aligned}$$

0675 $y = \cos 2x + 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$\begin{aligned} y &= \cos 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 = \cos(2x - \pi) + 1 \\ &= \cos(\pi - 2x) + 1 \\ &= -\cos 2x + 1 \end{aligned}$$

이 함수의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = -\cos(-2x) + 1 = -\cos 2x + 1$$

답 ④

0676 $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$, $\tan(2\pi - \theta) = -\tan \theta$,

$$\sin\left(\frac{5}{2}\pi + \theta\right) = \cos \theta, \quad \sin(3\pi - \theta) = \sin \theta,$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta, \quad \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) = -\sin \theta$$

$\therefore$ (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{-\cos \theta \times (-\tan \theta)}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta \times (-\tan \theta)}{-\sin \theta} \\ &= \tan \theta - \tan \theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

답 ③

0677 $\cos^2(\pi - \theta) = \cos^2 \theta$ 이므로

$$\cos^2 \frac{\pi}{10} = \cos^2 \frac{9}{10}\pi, \quad \cos^2 \frac{2}{10}\pi = \cos^2 \frac{8}{10}\pi,$$

$$\cos^2 \frac{3}{10}\pi = \cos^2 \frac{7}{10}\pi, \quad \cos^2 \frac{4}{10}\pi = \cos^2 \frac{6}{10}\pi$$

$\therefore$ (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= 2\left(\cos^2 \frac{\pi}{10} + \cos^2 \frac{2}{10}\pi + \cos^2 \frac{3}{10}\pi + \cos^2 \frac{4}{10}\pi\right) \\ &\quad + \cos^2 \frac{5}{10}\pi \\ &= 2\left\{\cos^2 \frac{\pi}{10} + \cos^2 \frac{2}{10}\pi + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{10}\pi\right)\right. \\ &\quad \left.+ \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right)\right\} \\ &= 2\left(\cos^2 \frac{\pi}{10} + \cos^2 \frac{2}{10}\pi + \sin^2 \frac{2}{10}\pi + \sin^2 \frac{\pi}{10}\right) \\ &= 2 \times (1+1) = 4 \end{aligned}$$

답 4

다른 풀이 (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \cos^2 \frac{\pi}{10} + \cos^2 \frac{2}{10}\pi + \cos^2 \frac{3}{10}\pi + \cos^2 \frac{4}{10}\pi + \cos^2 \frac{5}{10}\pi \\ &\quad + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{10}\pi\right) \\ &\quad + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{10}\pi\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4}{10}\pi\right) \\ &= \cos^2 \frac{\pi}{10} + \cos^2 \frac{2}{10}\pi + \cos^2 \frac{3}{10}\pi + \cos^2 \frac{4}{10}\pi + \cos^2 \frac{5}{10}\pi \\ &\quad + \sin^2 \frac{\pi}{10} + \sin^2 \frac{2}{10}\pi + \sin^2 \frac{3}{10}\pi + \sin^2 \frac{4}{10}\pi \\ &= 4 \end{aligned}$$

0678 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이고 $0 < a < 1$ 이므로 주어진 함수는 $\cos x = a$ 일 때 최솟값 1을 갖는다.

즉 $2a = 1$ 이므로 $a = \frac{1}{2}$

따라서 주어진 함수는

$$y = \left|\cos x - \frac{1}{2}\right| + 1$$

이고 이 함수는

$$\cos x = -1 \text{ 일 때 최댓값 } \left|-1 - \frac{1}{2}\right| + 1 = \frac{5}{2}$$

를 갖는다.

답 $\frac{5}{2}$

$$\begin{aligned} 0679 \quad y &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\sin(\pi+x)+a \\ &= \sin x \times (-\sin x) - 2(-\sin x) + a \\ &= -\sin^2 x + 2\sin x + a \end{aligned}$$

$\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고 주어진 함수는

$$y = -t^2 + 2t + a = -(t-1)^2 + a + 1$$

$-1 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는

$t=1$ 에서 최댓값 $a+1$,

$t=-1$ 에서 최솟값 $a-3$

을 가지므로

$$a+1=3 \quad \therefore a=2$$

따라서 구하는 최솟값은 $2-3=-1$

답 -1

$$0680 \quad y = \frac{\sin x + \cos x}{3\cos x - \sin x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + 1}{3 - \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\tan x + 1}{3 - \tan x}$$

$\tan x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 $0 \leq t \leq 1$ 이고 주어진 함수는

$$y = \frac{t+1}{3-t} = -\frac{(t-3)+4}{t-3} = -\frac{4}{t-3} - 1$$

$0 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는

$t=1$ 에서 최댓값 1,

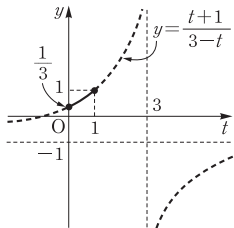
$t=0$ 에서 최솟값 $\frac{1}{3}$

을 가지므로

$$M=1, m=\frac{1}{3}$$

$$\therefore M-m=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$



$$\begin{aligned} 0681 \quad y &= x^2 - 2x\sin\theta - \cos^2\theta \\ &= (x-\sin\theta)^2 - \sin^2\theta - \cos^2\theta \\ &= (x-\sin\theta)^2 - 1 \end{aligned}$$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(\sin\theta, -1)$

따라서 점 $(\sin\theta, -1)$ 이 직선 $y=2\sqrt{3}x+2$ 위에 있어야 하므로

$$-1 = 2\sqrt{3}\sin\theta + 2 \quad \therefore \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{5}{3}\pi \quad (\because 0 \leq \theta < 2\pi)$$

답 $\frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$

0682 $f(g(x))=g(x)$ 에서 $g(x)=t$ ($-1 \leq t \leq 1$)라 하면

$$f(t)=t, \quad 2t^2+2t-1=t$$

$$2t^2+t-1=0, \quad (t+1)(2t-1)=0$$

$$\therefore t=-1 \text{ 또는 } t=\frac{1}{2}$$

$$\therefore g(x)=-1 \text{ 또는 } g(x)=\frac{1}{2}$$

(i) $g(x)=-1$, 즉 $\cos\frac{\pi}{3}x=-1$ 일 때

$$0 \leq x < 12 \text{에서 } 0 \leq \frac{\pi}{3}x < 4\pi \text{이므로}$$

$$\frac{\pi}{3}x = \pi \text{ 또는 } \frac{\pi}{3}x = 3\pi$$

$$\therefore x=3 \text{ 또는 } x=9$$

(ii) $g(x)=\frac{1}{2}$, 즉 $\cos\frac{\pi}{3}x=\frac{1}{2}$ 일 때

$$0 \leq x < 12 \text{에서 } 0 \leq \frac{\pi}{3}x < 4\pi \text{이므로}$$

$$\frac{\pi}{3}x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{\pi}{3}x = \frac{5}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{\pi}{3}x = \frac{7}{3}\pi$$

$$\text{또는 } \frac{\pi}{3}x = \frac{11}{3}\pi$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=5 \text{ 또는 } x=7 \text{ 또는 } x=11$$

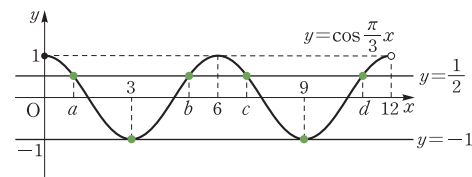
(i), (ii)에서 모든 실수 x 의 값의 합은

$$1+3+5+7+9+11=36$$

답 36

다른 풀이 함수 $g(x)=\cos\frac{\pi}{3}x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$

따라서 $y=\cos\frac{\pi}{3}x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$g(x)=\cos\frac{\pi}{3}x$ 의 그래프가 직선 $y=-1$ 과 만나는 점의 x 좌표는

$$3, 9$$

또 $g(x)=\cos\frac{\pi}{3}x$ 의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$ 과 만나는 점의 x 좌표를 작은 것부터 차례대로 a, b, c, d 라 하면 두 점 $(a, 0)$, $(b, 0)$ 은 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{a+b}{2}=3 \quad \therefore a+b=6$$

두 점 $(c, 0)$, $(d, 0)$ 은 직선 $x=9$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{c+d}{2}=9 \quad \therefore c+d=18$$

따라서 모든 실수 x 의 값의 합은

$$3+9+a+b+c+d=12+6+18=36$$

0683 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\cos x \neq 0$ 이므로

$\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$ 의 양변을 $\cos^2 x$ 로 나누면

$$\sqrt{3} \times \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 - 2 \times \frac{\sin x}{\cos x} - \sqrt{3} = 0$$

$$\sqrt{3}\tan^2 x - 2\tan x - \sqrt{3} = 0$$

$$(\sqrt{3}\tan x + 1)(\tan x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ 또는 } \tan x = \sqrt{3}$$

(i) $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ 일 때, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $x = \frac{5}{6}\pi$

(ii) $\tan x = \sqrt{3}$ 일 때, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $x = \frac{4}{3}\pi$

(i), (ii)에서 $x = \frac{5}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$

따라서 모든 근의 합은

$$\frac{5}{6}\pi + \frac{4}{3}\pi = \frac{13}{6}\pi \quad \text{답 } \frac{13}{6}\pi$$

0684 $\sin^2 x + \sin x = \cos^2 x + \cos x$ 에서

$$(\sin^2 x - \cos^2 x) + (\sin x - \cos x) = 0$$

$$(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) + (\sin x - \cos x) = 0$$

$$(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x + 1) = 0$$

$$\therefore \sin x - \cos x = 0 \text{ 또는 } \sin x + \cos x + 1 = 0$$

(i) $\sin x - \cos x = 0$ 에서 $\sin x = \cos x$

$$0 \leq x < 2\pi \text{에서 } x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{5}{4}\pi$$

(ii) $\sin x + \cos x + 1 = 0$ 에서

$$\sin x + 1 = -\cos x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

양변을 제곱하면

$$\sin^2 x + 2\sin x + 1 = \cos^2 x$$

$$\sin^2 x + 2\sin x + 1 = 1 - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x + \sin x = 0, \quad \sin x(\sin x + 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = 0 \text{ 또는 } \sin x = -1$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = \pi \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi$$

그런데 $x=0$ 은 방정식 ①을 만족시키지 않으므로

$$x = \pi \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi$$

(i), (ii)에서

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \pi \text{ 또는 } x = \frac{5}{4}\pi \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi$$

따라서 $a=4$, $b=\frac{3}{2}\pi$, $c=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$a \cos(b+c) = 4 \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 4 \sin \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} \quad \text{답 } 2\sqrt{2}$$

0685 $\cos A = -\frac{1}{2}$ 이므로 $A = \frac{2}{3}\pi$ ($\because 0 < A < \pi$)

이때 $A+B+C=\pi$ 이므로 $B+C=\pi-A$

$$\therefore \sin \frac{B+C-2\pi}{2} = \sin \frac{\pi-A-2\pi}{2}$$

$$= \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}\right)$$

$$= -\cos \frac{A}{2} = -\cos \frac{\pi}{3}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

답 ②

0686 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ 이므로 주어진 부등식은

$$2\sin^2 x - 3\cos x \geq 2\cos x - 4\cos^2 x$$

$$2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x \geq 2\cos x - 4\cos^2 x$$

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 \geq 0$$

$$\therefore (2\cos x - 1)(\cos x - 2) \geq 0$$

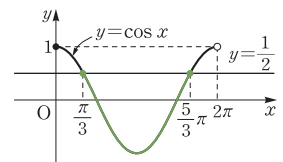
그런데 $\cos x - 2 < 0$ 이므로 $2\cos x - 1 \leq 0$

$$\therefore \cos x \leq \frac{1}{2}$$

따라서 오른쪽 그림에서 주어진 부등식의 해는

$$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}\pi$$

$$\text{답 } \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}\pi$$



0687 이차방정식 $x^2 - (2\sin \theta)x - 3\cos^2 \theta - 5\sin \theta + 5 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-\sin \theta)^2 - (-3\cos^2 \theta - 5\sin \theta + 5) \geq 0$$

$$\sin^2 \theta + 3\cos^2 \theta + 5\sin \theta - 5 \geq 0$$

$$\sin^2 \theta + 3(1 - \sin^2 \theta) + 5\sin \theta - 5 \geq 0$$

$$2\sin^2 \theta - 5\sin \theta + 2 \leq 0$$

$$\therefore (2\sin \theta - 1)(\sin \theta - 2) \leq 0$$

이때 $\sin \theta - 2 < 0$ 이므로 $2\sin \theta - 1 \geq 0$

$$\therefore \sin \theta \geq \frac{1}{2}$$

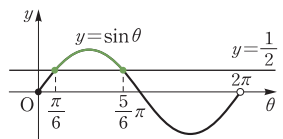
오른쪽 그림에서 θ 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi$$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{5}{6}\pi$ 이므로

$$4\beta - 2\alpha = 4 \times \frac{5}{6}\pi - 2 \times \frac{\pi}{6} = 3\pi$$

답 ①



0688 사각형 ABCD가 원에 내접하므로 $\alpha + \beta = \pi$

$$\therefore \cos \beta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{1}{3}$$

$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$ 이므로

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$$\therefore \sin \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (\because 0 < \beta < \pi)$$

$$\therefore \tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = -2\sqrt{2}$$

답 $-2\sqrt{2}$

0689 함수 $f(x) = a \sin b\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + c$ 의 최댓값이 1, 최솟값이

-3이고 $a > 0$ 이므로

$$a + c = 1, \quad -a + c = -3$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=2, c=-1 \quad \dots \text{1단계}$$

한편 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+p)=f(x)$ 를 만족시키는 양수 p 의 최솟값이 4π 이므로 함수 $f(x)$ 의 주기는 4π 이다.

$$\text{이때 } b>0 \text{이므로 } \frac{2\pi}{b}=4\pi$$

$$\therefore b=\frac{1}{2} \quad \dots \text{2단계}$$

$$\therefore abc=2 \times \frac{1}{2} \times (-1)=-1 \quad \dots \text{3단계}$$

답 -1

채점 요소	비율
1단계 a, c 의 값 구하기	40 %
2단계 b 의 값 구하기	40 %
3단계 abc 의 값 구하기	20 %

$$\text{0690 } \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos \theta, \cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin \theta,$$

$$\sin(\pi-\theta)=\sin \theta, \cos(2\pi-\theta)=\cos \theta$$

이므로 주어진 식은

$$(\cos \theta+\sin \theta+1)^2=2 \sin \theta \cos \theta+3 \quad \dots \text{1단계}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta+\cos^2 \theta+1+2(\sin \theta \cos \theta+\sin \theta+\cos \theta) \\ =2 \sin \theta \cos \theta+3 \end{aligned}$$

$$2+2 \sin \theta \cos \theta+2(\sin \theta+\cos \theta)=2 \sin \theta \cos \theta+3$$

$$\therefore \sin \theta+\cos \theta=\frac{1}{2} \quad \dots \text{2단계}$$

양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta+2 \sin \theta \cos \theta+\cos^2 \theta=\frac{1}{4}$$

$$1+2 \sin \theta \cos \theta=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta=-\frac{3}{8} \quad \dots \text{3단계}$$

답 - $\frac{3}{8}$

채점 요소	비율
1단계 주어진 식을 간단히 정리하기	40 %
2단계 $\sin \theta+\cos \theta$ 의 값 구하기	30 %
3단계 $\sin \theta \cos \theta$ 의 값 구하기	30 %

$$\text{0691 } y=\sin^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=(-\cos x)^2-\sin x$$

$$=(1-\sin^2 x)-\sin x$$

$$=-\sin^2 x-\sin x+1 \quad \dots \text{1단계}$$

$\sin x=t$ 로 놓으면 $-\pi \leq x \leq \pi$ 에서 $-1 \leq t \leq 1$ 이고 주어진 함수는

$$y=-t^2-t+1=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4} \quad \dots \text{2단계}$$

$-1 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는

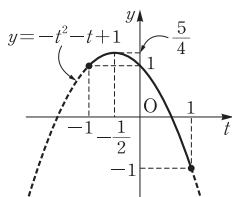
$$t=-\frac{1}{2} \text{에서 최댓값 } \frac{5}{4},$$

$$t=1 \text{에서 최솟값 } -1$$

을 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은

$$\frac{5}{4}+(-1)=\frac{1}{4} \quad \dots \text{3단계}$$

답 $\frac{1}{4}$



채점 요소	비율
1단계 한 종류의 삼각함수로 변형하기	30 %
2단계 $\sin x=t$ 로 치환하기	30 %
3단계 최댓값과 최솟값의 합 구하기	40 %

0692 이차방정식 $x^2+2\sqrt{2}x \cos \theta+3 \sin \theta=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4}=(\sqrt{2} \cos \theta)^2-3 \sin \theta \geq 0 \quad \dots \text{1단계}$$

$$2 \cos^2 \theta-3 \sin \theta \geq 0, \quad 2(1-\sin^2 \theta)-3 \sin \theta \geq 0$$

$$2 \sin^2 \theta+3 \sin \theta-2 \leq 0$$

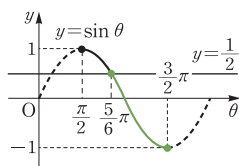
$$\therefore(\sin \theta+2)(2 \sin \theta-1) \leq 0$$

이때 $\sin \theta+2>0$ 이므로

$$2 \sin \theta-1 \leq 0 \quad \therefore \sin \theta \leq \frac{1}{2} \quad \dots \text{2단계}$$

따라서 오른쪽 그림에서 θ 의 값의 범위는

$$\frac{5}{6} \pi \leq \theta \leq \frac{3}{2} \pi \quad \dots \text{3단계}$$



$$\text{답 } \frac{5}{6} \pi \leq \theta \leq \frac{3}{2} \pi$$

채점 요소	비율
1단계 판별식을 이용하여 부등식 세우기	30 %
2단계 $\sin \theta$ 의 값의 범위 구하기	40 %
3단계 θ 의 값의 범위 구하기	30 %

0693 **전략** $\tan(\pi-\theta)=-\tan \theta$ 임을 이용한다.

$$\tan 179^\circ=\tan \left(180^\circ-1^\circ\right)=-\tan 1^\circ$$

$$\tan 159^\circ=\tan \left(180^\circ-21^\circ\right)=-\tan 21^\circ$$

$$\tan 139^\circ=\tan \left(180^\circ-41^\circ\right)=-\tan 41^\circ$$

$$\tan 119^\circ=\tan \left(180^\circ-61^\circ\right)=-\tan 61^\circ$$

$$\tan 99^\circ=\tan \left(180^\circ-81^\circ\right)=-\tan 81^\circ$$

$$\therefore A+B$$

$$=(\tan 1^\circ+\tan 179^\circ)+(\tan 21^\circ+\tan 159^\circ)$$

$$+(\tan 41^\circ+\tan 139^\circ)+(\tan 61^\circ+\tan 119^\circ)$$

$$+(\tan 81^\circ+\tan 99^\circ)$$

$$=(\tan 1^\circ-\tan 1^\circ)+(\tan 21^\circ-\tan 21^\circ)$$

$$+(\tan 41^\circ-\tan 41^\circ)+(\tan 61^\circ-\tan 61^\circ)$$

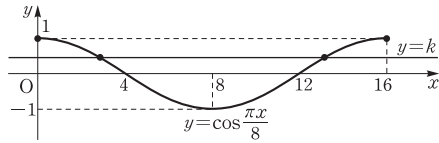
$$+(\tan 81^\circ-\tan 81^\circ)$$

$$=0$$

답 0

0694 전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 해임을 이용한다.

함수 $f(x)=\cos \frac{\pi x}{8}$ 의 최댓값은 1, 최솟값은 -1 이고 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}}=16$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 다음 그림과 같다.



이때 $a_1 < a_2$ 라 하면 $\frac{a_1+a_2}{2}=8$ 에서

$$a_1+a_2=16 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 $|\alpha_1-\alpha_2|=12$ 에서 $\alpha_2-\alpha_1=12$

$$\dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $a_1=2$, $a_2=14$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(2, k)$ 를 지나므로

$$k=f(2)=\cos \frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=k$, 즉 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 가 만나는 두 점의 x 좌

표는 $-3\cos \frac{\pi x}{8}-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서

$$-3\cos \frac{\pi x}{8}=\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \cos \frac{\pi x}{8}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 $0 \leq x \leq 16$ 에서 $0 \leq \frac{\pi x}{8} \leq 2\pi$ 이므로

$$\frac{\pi x}{8}=\frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } \frac{\pi x}{8}=\frac{5}{4}\pi$$

$$\therefore x=6 \text{ 또는 } x=10$$

따라서 $\beta_1=6$, $\beta_2=10$ 또는 $\beta_1=10$, $\beta_2=6$ 이므로

$$|\beta_1-\beta_2|=4 \quad \text{답 4}$$

0695 전략 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 임을 이용하여 주어진 부등식을 $\sin x$ 에 대한 이차부등식으로 변형한다.

$$\cos^2 x + (a+2)\sin x - (2a+1) > 0 \text{에서}$$

$$(1-\sin^2 x) + (a+2)\sin x - (2a+1) > 0$$

$$\sin^2 x - (a+2)\sin x + 2a < 0$$

$$\therefore (\sin x - 2)(\sin x - a) < 0$$

이때 모든 실수 x 에 대하여 $\sin x - 2 < 0$ 이므로

$$\sin x - a > 0 \quad \therefore \sin x > a$$

이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면

$$a < -1 \quad \text{답 } a < -1$$

0696 전략 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같음을 이용한다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=2$ 와 만나는 점의 x 좌표는

$$0 \leq x < \frac{4\pi}{a} \text{ 일 때 방정식 } f(x)=2, \text{ 즉}$$

$$\left| 4\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)+2 \right|=2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

의 실근과 같다.

$$ax-\frac{\pi}{3}=t \text{ 라 하면 } 0 \leq x < \frac{4\pi}{a} \text{ 에서}$$

$$0 \leq ax < 4\pi \quad (\because a > 0)$$

$$-\frac{\pi}{3} \leq ax - \frac{\pi}{3} < \frac{11}{3}\pi$$

$$\therefore -\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{11}{3}\pi$$

이때 $\textcircled{7}$ 에서

$$|4\sin t + 2| = 2$$

$$4\sin t + 2 = -2 \text{ 또는 } 4\sin t + 2 = 2$$

$$\therefore \sin t = -1 \text{ 또는 } \sin t = 0$$

(i) $\sin t = -1$ 일 때,

$$-\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{11}{3}\pi \text{ 에서 } t = \frac{3}{2}\pi \text{ 또는 } t = \frac{7}{2}\pi$$

(ii) $\sin t = 0$ 일 때,

$$-\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{11}{3}\pi \text{ 에서}$$

$$t=0 \text{ 또는 } t=\pi \text{ 또는 } t=2\pi \text{ 또는 } t=3\pi$$

(i), (ii)에서

$$t=0 \text{ 또는 } t=\pi \text{ 또는 } t=\frac{3}{2}\pi \text{ 또는 } t=2\pi$$

$$\text{또는 } t=3\pi \text{ 또는 } t=\frac{7}{2}\pi$$

따라서 방정식 $\textcircled{7}$ 의 실근의 개수가 6이므로

$$n=6$$

한편 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2$ 가 만나는 서로 다른 6개의 점의 x 좌표의 합이 39이므로 방정식 $\textcircled{7}$ 의 6개의 실근의 합이 39이다.

$$\text{이때 } ax-\frac{\pi}{3}=t \text{ 에서 } x=\frac{1}{a}\left(t+\frac{\pi}{3}\right) \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{a}\left(0+\pi+\frac{3}{2}\pi+2\pi+3\pi+\frac{7}{2}\pi+\frac{\pi}{3} \times 6\right)=39$$

$$13\pi=39a \quad \therefore a=\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore n \times a = 6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi \quad \text{답 4}$$

07 삼각함수의 활용

교과서문제 정복하기

본책 095쪽

0697 사인법칙에 의하여 $\frac{c}{\sin 45^\circ} = \frac{4}{\sin 60^\circ}$ 이므로

$$c \sin 60^\circ = 4 \sin 45^\circ$$

$$\therefore c = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3} \quad \text{답 } \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

0698 사인법칙에 의하여 $\frac{b}{\sin 30^\circ} = \frac{5}{\sin 45^\circ}$ 이므로

$$b \sin 45^\circ = 5 \sin 30^\circ$$

$$\therefore b = 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \quad \text{답 } \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

0699 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\sin 120^\circ}$ 이므로

$$a \sin 120^\circ = 12 \sin 30^\circ$$

$$\therefore a = 12 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \quad \text{답 } 4\sqrt{3}$$

0700 사인법칙에 의하여 $\frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}$ 이므로

$$\sqrt{2} \sin A = \sin 135^\circ$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 30^\circ$ 또는 $A = 150^\circ$

그런데 $A + C < 180^\circ$ 이어야 하므로

$$A = 30^\circ \quad \text{답 } 30^\circ$$

0701 사인법칙에 의하여 $\frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin B}$ 이므로

$$2 \sin B = 2\sqrt{2} \sin 30^\circ$$

$$\therefore \sin B = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $B = 45^\circ$ 또는 $B = 135^\circ$

답 45° 또는 135°

0702 사인법칙에 의하여 $\frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{\sin C}$ 이므로

$$2 \sin C = \sqrt{6} \sin 45^\circ$$

$$\therefore \sin C = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 60^\circ$ 또는 $C = 120^\circ$

답 60° 또는 120°

0703 사인법칙에 의하여 $2R = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$

$$\therefore R = \frac{1}{2} \times \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 \quad \text{답 } 1$$

0704 $A + B + C = 180^\circ$ 이므로

$$A = 180^\circ - (100^\circ + 50^\circ) = 30^\circ$$

사인법칙에 의하여 $2R = \frac{6}{\sin 30^\circ}$

$$\therefore R = \frac{1}{2} \times \frac{6}{\frac{1}{2}} = 6 \quad \text{답 } 6$$

0705 $b = c = 2$ 이므로 삼각형 ABC는 $B = C$ 인 이등변삼각형이다.

$$\therefore B = C = \frac{1}{2} (180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$$

사인법칙에 의하여 $2R = \frac{2}{\sin 30^\circ}$

$$\therefore R = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{답 } 2$$

0706 코사인법칙에 의하여

$$a^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \times \cos 60^\circ$$

$$= 25 + 49 - 70 \times \frac{1}{2} = 39$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = \sqrt{39}$

답 $\sqrt{39}$

0707 코사인법칙에 의하여

$$b^2 = (2\sqrt{2})^2 + 6^2 - 2 \times 2\sqrt{2} \times 6 \times \cos 45^\circ$$

$$= 8 + 36 - 24\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 20$$

그런데 $b > 0$ 이므로 $b = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

답 $2\sqrt{5}$

0708 코사인법칙에 의하여

$$c^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \times 12 \times 6 \times \cos 120^\circ$$

$$= 144 + 36 - 144 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 252$$

그런데 $c > 0$ 이므로 $c = \sqrt{252} = 6\sqrt{7}$

답 $6\sqrt{7}$

0709 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{5^2 + (3\sqrt{2})^2 - 1^2}{2 \times 5 \times 3\sqrt{2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

답 $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

0710 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{2^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2^2}{2 \times 2 \times 2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $B = 30^\circ$

답 30°

07

삼각함수의 활용

0711 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 8 \times 12 \times \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 12 \times \frac{1}{2} = 24$$

답 24

0712 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 \times \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

답 $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

0713 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 8 \times 9 \times \sin 135^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 9 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}$$

답 $18\sqrt{2}$

0714 (1) 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{8^2 + 9^2 - 7^2}{2 \times 8 \times 9} = \frac{2}{3}$$

(2) $0^\circ < A < 180^\circ$ 에서 $\sin A > 0$ 이므로

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$(3) \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 8 \times 9 \times \frac{\sqrt{5}}{3} = 12\sqrt{5}$$

답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (3) $12\sqrt{5}$

다른 풀이 (3) 헤론의 공식을 이용하면 $s = \frac{7+8+9}{2} = 12$ 이므로

삼각형 ABC의 넓이는

$$\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)} = 12\sqrt{5}$$

0715 $B = D = 60^\circ$ 이므로

$$\square ABCD = 2 \times 3 \times \sin 60^\circ$$

$$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

답 $3\sqrt{3}$

0716 $A + B = 180^\circ$ 이므로 $A = 45^\circ$

$$\therefore \square ABCD = 3 \times 4 \times \sin 45^\circ$$

$$= 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

답 $6\sqrt{2}$

0717 $C = A = 150^\circ$ 이므로

$$\square ABCD = 4 \times 5 \times \sin 150^\circ$$

$$= 20 \times \frac{1}{2} = 10$$

답 10

0718 $\square ABCD = \frac{1}{2} \times 10 \times 14 \times \sin 120^\circ$

$$= 70 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 35\sqrt{3}$$

답 $35\sqrt{3}$

유형 익히기

0719 사인법칙에 의하여 $\frac{2}{\sin B} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}$ 이므로

$$2\sqrt{3} \sin B = 2 \sin 120^\circ$$

$$\therefore \sin B = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos^2 B = 1 - \sin^2 B$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

0720 삼각형 ABC에서

$$A = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{8}{\sin 45^\circ}$ 이므로

$$a \sin 45^\circ = 8 \sin 60^\circ$$

$$\therefore a = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{6}$$

답 ②

0721 삼각형 ABC에서

$$C = 180^\circ - (105^\circ + 45^\circ) = 30^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AB}}{\sin 30^\circ} = \frac{10}{\sin 45^\circ}$ 이므로

$$\overline{AB} \times \sin 45^\circ = 10 \sin 30^\circ$$

$$\therefore \overline{AB} = 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

답 $5\sqrt{2}$

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABH는 직각이등변삼각형이므로

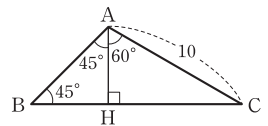
$$\angle CAH = 105^\circ - 45^\circ = 60^\circ$$

이때 직각삼각형 AHC에서

$$\overline{AH} = 10 \cos 60^\circ = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

따라서 직각삼각형 ABH에서

$$\overline{AB} = \frac{5}{\sin 45^\circ} = 5 \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$



0722 $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle ABD = 60^\circ$ 이므로

$$\angle DBC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

또 삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 인 직각이등변삼각형이므로

$$\angle BAC = \angle BCA = 45^\circ$$

한편 한 호에 대한 원주각의 크기는 같으므로

$$\angle BDC = \angle BAC = 45^\circ$$

따라서 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin 30^\circ} = \frac{6\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} \text{ 이므로}$$

$$6\sqrt{2} \sin 30^\circ = \overline{CD} \times \sin 45^\circ$$

$$\therefore \overline{CD} = 6\sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 6$$

답 6

다른 풀이 삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 인 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2} = 12$$

이때 두 삼각형 ABC, BCD는 같은 원에 내접하므로 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$R = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 12 = 6$$

$\angle DBC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ 이므로 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

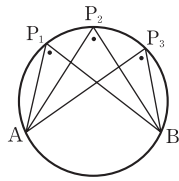
$$\frac{\overline{CD}}{\sin 30^\circ} = 2 \times 6 \quad \therefore \overline{CD} = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

RPM 비법 노트

원주각의 성질

한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.

$$\Rightarrow \angle AP_1B = \angle AP_2B = \angle AP_3B$$



0723 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 12이므로 사인법칙에 의하여

$$\overline{AC} = 2 \times 12 \times \frac{5}{8} = 15$$

답 15

0724 $a+b+c$

$$= 2 \times 10 \times \sin A + 2 \times 10 \times \sin B + 2 \times 10 \times \sin C$$

$$= 20(\sin A + \sin B + \sin C) = 20 \times \frac{3}{2} = 30$$

답 5

0725 삼각형 ABC에서 $A+B=\pi-C$ 이므로

$$\sin(A+B) = \sin(\pi-C) = \sin C$$

... 1단계

즉 $5 \sin(A+B) \sin C = 4$ 에서

$$5 \sin^2 C = 4 \quad \therefore \sin^2 C = \frac{4}{5}$$

$0 < C < \pi$ 에서 $\sin C > 0$ 이므로

$$\sin C = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

... 2단계

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$c = 2 \times \sqrt{5} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 4$$

... 3단계

답 4

	채점 요소	비율
1단계	$\sin(A+B)$ 를 $\sin C$ 에 대한 식으로 나타내기	30 %
2단계	$\sin C$ 의 값 구하기	40 %
3단계	c 의 값 구하기	30 %

0726 선분 BD를 그으면 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{\overline{BD}}{2 \times 3} = \frac{\overline{BD}}{6}$$

또 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\sin C = \frac{\overline{BD}}{2 \times 6} = \frac{\overline{BD}}{12}$$

$$\therefore \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\frac{\overline{BD}}{6}}{\frac{\overline{BD}}{12}} = 2$$

답 2

0727 $A+B+C=180^\circ$ 이고 $A:B:C=1:2:3$ 이므로

$$A = 180^\circ \times \frac{1}{6} = 30^\circ$$

$$B = 180^\circ \times \frac{2}{6} = 60^\circ$$

$$C = 180^\circ \times \frac{3}{6} = 90^\circ$$

따라서 사인법칙에 의하여

$$a:b:c = \sin 30^\circ : \sin 60^\circ : \sin 90^\circ$$

$$= \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1$$

$$= 1 : \sqrt{3} : 2$$

답 3

0728 $\frac{a+b}{4} = \frac{b+c}{5} = \frac{c+a}{5} = k$ ($k>0$)라 하면

$$a+b=4k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$b+c=5k \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$c+a=5k \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3}$ 을 하면 $2(a+b+c) = 14k$

$$\therefore a+b+c=7k \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{4}$ 에서 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 을 각각 빼면

$$c=3k, a=2k, b=2k$$

따라서 사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = 2k : 2k : 3k$$

$$= 2 : 2 : 3$$

답 2

0729 $3a-2b+c=0$

... 1

$$a+2b-3c=0$$

... 2

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면 $4a-2c=0$

$$\therefore c=2a$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $3a-2b+2a=0$

$$\therefore b=\frac{5}{2}a$$

$$\therefore \sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$$

$$= a : \frac{5}{2}a : 2a$$

$$= 2 : 5 : 4$$

$\sin A=2k, \sin B=5k, \sin C=4k$ ($k>0$)라 하면

$$\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin C}{\sin B} + \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{5k}{2k} + \frac{4k}{5k} + \frac{2k}{4k}$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{4}{5} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{19}{5}$$

답 19/5

0730 삼각형 ABC에서 $A+B+C=\pi$ 이므로
 $\sin(A+B) : \sin(B+C) : \sin(C+A)$
 $= \sin(\pi-C) : \sin(\pi-A) : \sin(\pi-B)$
 $= \sin C : \sin A : \sin B$
 $= c : a : b$
 $= 5 : 4 : 7$

즉 $a : b : c = 4 : 7 : 5$ 이므로
 $a=4k, b=7k, c=5k (k>0)$

라 하면

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ac} = \frac{(4k)^2+(7k)^2+(5k)^2}{4k \times 5k} = \frac{90k^2}{20k^2} = \frac{9}{2}$$

답 9/2

0731 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이것을 $(b-c)\sin A = b\sin B - c\sin C$ 에 대입하면

$$(b-c) \times \frac{a}{2R} = b \times \frac{b}{2R} - c \times \frac{c}{2R}$$

$$(b-c)a = b^2 - c^2$$

$$(b-c)a - (b-c)(b+c) = 0$$

$$(b-c)\{a - (b+c)\} = 0$$

$$\therefore b=c \text{ 또는 } a=b+c$$

그런데 $b+c > a$ 에서 $a \neq b+c$ 이므로

$$b=c$$

따라서 삼각형 ABC는 $b=c$ 인 이등변삼각형이다.

답 ③

0732 $\cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C = -1$ 에서

$$(1 - \sin^2 A) - (1 - \sin^2 B) - (1 - \sin^2 C) = -1$$

$$\therefore \sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C \quad \dots\dots ①$$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이것을 ①에 대입하면

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $A=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

답 ④

0733 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{-3\sqrt{b} \sin(A+B)\}^2 - 9a(-\cos^2 C + 1) = 0$$

$$9b \sin^2(A+B) - 9a(1 - \cos^2 C) = 0$$

$$b \sin^2(\pi - C) - a \sin^2 C = 0$$

$$b \sin^2 C - a \sin^2 C = 0$$

$$\therefore (b-a) \sin^2 C = 0 \quad \dots\dots ①$$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$\sin C = \frac{c}{2R}$$

이것을 ①에 대입하면

$$(b-a) \times \left(\frac{c}{2R}\right)^2 = 0, \quad (b-a)c^2 = 0$$

$$\therefore a=b \text{ 또는 } c=0$$

이때 $c \neq 0$ 이므로 $a=b$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

답 ④

0734 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$(3\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{3})^2 + a^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times a \times \cos 60^\circ$$

$$a^2 - 2\sqrt{3}a - 6 = 0$$

$$\therefore a = 3 + \sqrt{3} (\because a > 0)$$

답 ④

0735 평행사변형 ABCD에서 $B=60^\circ$ 이므로

$$A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$\overline{AD} = \overline{BC} = 3$ 이므로 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos 120^\circ = 49$$

그런데 $\overline{BD} > 0$ 이므로

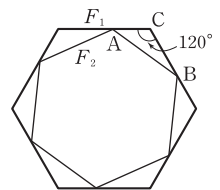
$$\overline{BD} = 7$$

답 7

0736 오른쪽 그림의 세 점 A, B, C에 대하여

$$\overline{AC} = 10 \times \frac{2}{5} = 4,$$

$$\overline{BC} = 10 \times \frac{3}{5} = 6$$



이때 정육각형의 한 내각의 크기는 120° 이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \times \cos 120^\circ = 76$$

그런데 $\overline{AB} > 0$ 이므로

$$\overline{AB} = 2\sqrt{19}$$

$$\therefore S_1 + S_2 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 10^2 + 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{19})^2$$

$$= 150\sqrt{3} + 114\sqrt{3}$$

$$= 264\sqrt{3}$$

답 $264\sqrt{3}$

0737 $3a + 2b - 3c = 0$

..... ①

$$4a - 4b + c = 0$$

..... ②

$$① + ② \times 3 \text{을 하면 } 15a - 10b = 0$$

$$\therefore b = \frac{3}{2}a$$

$$\text{이것을 ①에 대입하면 } 3a + 3a - 3c = 0$$

$$\therefore c = 2a$$

따라서 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{\left(\frac{3}{2}a\right)^2 + (2a)^2 - a^2}{2 \times \frac{3}{2}a \times 2a} = \frac{7}{8}$$

답 7/8

0738 $\overline{CF} = \overline{CH} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$

$\overline{FH} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$

따라서 삼각형 CFH에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{(3\sqrt{5})^2 + (3\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{2})^2}{2 \times 3\sqrt{5} \times 3\sqrt{5}} = \frac{4}{5} \quad \text{답 } \frac{4}{5}$$

0739 오른쪽 그림과 같이 두 직선

$y=3x$, $y=x$ 와 직선 $y=3$ 의 교점을 각

각 A, B라 하면

$A(1, 3), B(3, 3)$

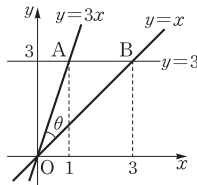
$\therefore \overline{OA} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$

$\overline{OB} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2},$

$\overline{AB} = 3 - 1 = 2$

따라서 삼각형 AOB에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{(\sqrt{10})^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2^2}{2 \times \sqrt{10} \times 3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \text{답 } \frac{2\sqrt{5}}{5}$$



0740 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{12^2 + 10^2 - 8^2}{2 \times 12 \times 10} = \frac{3}{4}$$

이때 점 D는 변 BC를 1 : 3으로 내분하는 점이므로

$$\overline{CD} = 12 \times \frac{3}{4} = 9$$

따라서 삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2 = 10^2 + 9^2 - 2 \times 10 \times 9 \times \frac{3}{4} = 46$$

그런데 $\overline{AD} > 0$ 이므로

$$\overline{AD} = \sqrt{46} \quad \text{답 } \sqrt{46}$$

0741 가장 긴 변의 길이가 $\sqrt{13}$ 이므로 최대각은 길이가 $\sqrt{13}$ 인 변의 대각이다.

최대각의 크기를 θ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{1^2 + (2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \times 1 \times 2\sqrt{2}} = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

그런데 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로

$$\theta = 135^\circ$$

따라서 삼각형 ABC의 최대각의 크기는 135° 이다. 답 135°

0742 $\sqrt{a^2 + ab + b^2} > \sqrt{a^2} = a > b$ 이므로 $\sqrt{a^2 + ab + b^2}$ 이 가장 긴 변의 길이이다.

즉 최대각은 길이가 $\sqrt{a^2 + ab + b^2}$ 인 변의 대각이므로 최대각의 크기를 θ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - (\sqrt{a^2 + ab + b^2})^2}{2 \times a \times b} = -\frac{1}{2}$$

그런데 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로

$$\theta = 120^\circ$$

따라서 삼각형 ABC의 최대각의 크기는 120° 이다. 답 ③

0743 $\frac{2a-b}{2} = \frac{2b-c}{3} = \frac{4c-5a}{5} = k$ ($k > 0$)라 하면

$$2a-b=2k, 2b-c=3k, 4c-5a=5k$$

세 식을 연립하여 풀면

$$a=3k, b=4k, c=5k$$

... 1단계

이때 가장 짧은 변의 길이가 a 이므로 A 가 최소각의 크기이다.

... 2단계

따라서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \cos A = \frac{(4k)^2 + (5k)^2 - (3k)^2}{2 \times 4k \times 5k} = \frac{4}{5} \quad \text{... 3단계}$$

답 $\frac{4}{5}$

	채점 요소	비율
1단계	a, b, c 를 k 에 대한 식으로 나타내기	40 %
2단계	A 가 최소각의 크기임을 알기	20 %
3단계	$\cos \theta$ 의 값 구하기	40 %

0744 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{6^2 + b^2 - 3^2}{2 \times 6 \times b} = \frac{b^2 + 27}{12b} = \frac{b}{12} + \frac{9}{4b}$$

$\frac{b}{12} > 0, \frac{9}{4b} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{b}{12} + \frac{9}{4b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{12} \times \frac{9}{4b}} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 등호는 $\frac{b}{12} = \frac{9}{4b}$ 일 때 성립하므로

$$4b^2 = 108, \quad b^2 = 27$$

$$\therefore b = 3\sqrt{3} \quad (\because b > 0)$$

답 $3\sqrt{3}$

RPM비법노트

산술평균과 기하평균의 관계

$a > 0, b > 0$ 일 때,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{일 때 성립})$$

0745 코사인법칙에 의하여

$$b^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \times \cos 60^\circ = 27$$

$$\therefore b = 3\sqrt{3} \quad (\because b > 0)$$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인 법칙에 의하여

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$$\pi \times 3^2 = 9\pi$$

답 ③

0746 사인법칙에 의하여

$$\frac{7\sqrt{3}}{\sin A} = 2 \times 7 \quad \therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

그런데 $90^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 120^\circ$

따라서 코사인법칙에 의하여

$$(7\sqrt{3})^2 = b^2 + (2b)^2 - 2 \times b \times 2b \times \cos 120^\circ$$

$$7b^2 = 147, \quad b^2 = 21$$

$$\therefore b = \sqrt{21} \quad (\because b > 0)$$

답 ②

0747 $6 \sin A = 2\sqrt{3} \sin B = 3 \sin C$ 에서

$$\sin A : \sin B : \sin C = 1 : \sqrt{3} : 2$$

$$\therefore a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 1 : \sqrt{3} : 2$$

$a = k, b = \sqrt{3}k, c = 2k$ ($k > 0$)라 하면 a 가 가장 짧은 변의 길이이므로 최소각의 크기는 A 이다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{(\sqrt{3}k)^2 + (2k)^2 - k^2}{2 \times \sqrt{3}k \times 2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

그런데 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 30^\circ$

답 30°

0748 $\overline{AC}$ 를 그으면 삼각형 ABC

에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 2^2 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 \\ &\quad - 2 \times 2 \times (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \\ &\quad \times \cos 135^\circ \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AC} = 2\sqrt{2} \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

또 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sin 135^\circ} = \frac{2}{\sin(\angle BCA)}$$

$$2\sqrt{2} \sin(\angle BCA) = 2 \sin 135^\circ$$

$$\therefore \sin(\angle BCA) = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

그런데 $\angle B + \angle BCA < 180^\circ$ 이어야 하므로

$$\angle BCA = 30^\circ$$

따라서 $\angle BAC = 180^\circ - (135^\circ + 30^\circ) = 15^\circ$ 이므로

$$\angle CAD = 75^\circ - 15^\circ = 60^\circ$$

한편 $D = 180^\circ - B = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ 이므로 삼각형 ACD

에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}, \quad \overline{CD} \times \sin 45^\circ = 2\sqrt{2} \sin 60^\circ$$

$$\therefore \overline{CD} = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}$$

답 $2\sqrt{3}$

0749 $a \cos C = c \cos A$ 에서

$$a \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = c \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = b^2 + c^2 - a^2$$

$$a^2 - c^2 = 0, \quad (a+c)(a-c) = 0$$

$$\therefore a = -c \text{ 또는 } a = c$$

그런데 $a > 0, c > 0$ 이므로 $a = c$

따라서 삼각형 ABC는 $a = c$ 인 이등변삼각형이다.

답 ③

0750 $a \cos B - b \cos A = c$ 에서

$$a \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} - b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = c$$

$$c^2 + a^2 - b^2 - (b^2 + c^2 - a^2) = 2c^2$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형이다.

답 ④

0751 $\tan A \sin A = \tan B \sin B$ 에서

$$\frac{\sin A}{\cos A} \times \sin A = \frac{\sin B}{\cos B} \times \sin B$$

$$\therefore \cos B \sin^2 A = \cos A \sin^2 B$$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \times \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \times \left(\frac{b}{2R}\right)^2$$

$$a(c^2 + a^2 - b^2) = b(b^2 + c^2 - a^2)$$

$$a^3 + ac^2 - ab^2 = b^3 + bc^2 - a^2b$$

$$a^3 - b^3 + (a-b)c^2 + (a-b)ab = 0$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2 + c^2 + ab) = 0$$

$$(a-b)\{(a+b)^2 + c^2\} = 0$$

$$\therefore a = b \text{ 또는 } (a+b)^2 + c^2 = 0$$

그런데 $a > 0, b > 0, c > 0$ 에서 $(a+b)^2 + c^2 \neq 0$ 이므로

$$a = b$$

따라서 삼각형 ABC는 $a = b$ 인 이등변삼각형이다.

답 ②

0752 $\overline{AD} = x$ 라 하면 $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 3 \times \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times x \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 3 \times x \times \sin 60^\circ$$

$$\frac{18\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}x$$

$$\therefore x = 2$$

따라서 선분 AD의 길이는 2이다.

답 2

0753 삼각형 ABC의 넓이가 $2\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times 2\sqrt{2} \times \sin A = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

이때 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + A\right) = \cos A, \cos\left(\frac{3}{2}\pi + A\right) = \sin A$ 이고

$0 < A < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos A > 0$ 이므로

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + A\right) \cos\left(\frac{3}{2}\pi + A\right)$$

$$= \cos A \sin A$$

$$= \sqrt{1 - \sin^2 A} \times \sin A$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^2} \times \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

답 $\frac{\sqrt{6}}{5}$

0754 $\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA} = 3 : 4 : 5$ 이므로

$$\begin{aligned}\angle AOB &= 360^\circ \times \frac{3}{12} = 90^\circ \\ \angle BOC &= 360^\circ \times \frac{4}{12} = 120^\circ \\ \angle COA &= 360^\circ \times \frac{5}{12} = 150^\circ \\ \therefore \triangle ABC &= \triangle AOB + \triangle BOC + \triangle COA \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 90^\circ + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 120^\circ \\ &\quad + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 150^\circ \\ &= 2 + \sqrt{3} + 1 \\ &= 3 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

답 ⑤

0755 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 8} = \frac{1}{2}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ 에서 $\sin A > 0$ 이므로

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

이때 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c) \text{에서}$$

$$\begin{aligned}10\sqrt{3} &= \frac{1}{2}r(7+5+8), \quad 10\sqrt{3} = 10r \\ \therefore r &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이 헤론의 공식을 이용하면 $s = \frac{7+5+8}{2} = 10$ 이므로

삼각형 ABC의 넓이는

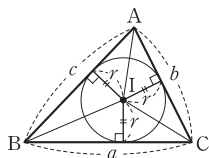
$$\sqrt{10(10-7)(10-5)(10-8)} = 10\sqrt{3}$$

RPM비법 노트

삼각형의 넓이와 내접원의 반지름의 길이

오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 내심을 I, 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \triangle IAB + \triangle IBC + \triangle ICA \\ &= \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br \\ &= \frac{1}{2}r(a+b+c)\end{aligned}$$



0756 길이가 11인 변의 대각의 크기를 θ 라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{9^2 + 10^2 - 11^2}{2 \times 9 \times 10} = \frac{1}{3}$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ 에서 $\sin \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 9 \times 10 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 30\sqrt{2} \quad \dots \text{1단계}$$

이때 $\triangle ABC = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ab \times \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$ 에서

$$30\sqrt{2} = \frac{9 \times 10 \times 11}{4R} \quad \therefore R = \frac{33\sqrt{2}}{8} \quad \dots \text{2단계}$$

또 $\triangle ABC = \frac{1}{2}r(a+b+c)$ 에서

$$30\sqrt{2} = \frac{1}{2}r(9+10+11)$$

$$30\sqrt{2} = 15r \quad \therefore r = 2\sqrt{2} \quad \dots \text{3단계}$$

$$\therefore R - r = \frac{33\sqrt{2}}{8} - 2\sqrt{2} = \frac{17\sqrt{2}}{8} \quad \dots \text{4단계}$$

답 $\frac{17\sqrt{2}}{8}$

	채점 요소	비율
1단계	삼각형 ABC의 넓이 구하기	30 %
2단계	R의 값 구하기	30 %
3단계	r의 값 구하기	30 %
4단계	R-r의 값 구하기	10 %

0757 조건 (가)에서 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : 3$ 이므로 $a = 2k$, $b = 3k$, $c = 3k$ ($k > 0$)라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{(2k)^2 + (3k)^2 - (3k)^2}{2 \times 2k \times 3k} = \frac{1}{3}$$

$0^\circ < C < 180^\circ$ 에서 $\sin C > 0$ 이므로

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2k \times 3k \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}k^2$$

이때 조건 (나)에서 $2\sqrt{2}k^2 = 8\sqrt{2}$ 이므로

$$k^2 = 4 \quad \therefore k = 2 \quad (\because k > 0)$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$a + b + c = 2k + 3k + 3k = 8k = 8 \times 2 = 16$$

답 16

0758 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{8^2 + 2^2 - 8^2}{2 \times 8 \times 2} = \frac{1}{8}$$

$0^\circ < C < 180^\circ$ 에서 $\sin C > 0$ 이므로

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$\therefore \square ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 8 \times \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \times 8 \times 2 \times \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$= 8 + 3\sqrt{7} \quad \text{답 } 8 + 3\sqrt{7}$$

0759 $\overline{BD}$ 를 그으면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos 120^\circ = 49$$

$$\therefore \overline{BD} = 7 \quad (\because \overline{BD} > 0)$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{8^2 + 3^2 - 7^2}{2 \times 8 \times 3} = \frac{1}{2}$$

$0^\circ < C < 180^\circ$ 에서 $\sin C > 0$ 이므로

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \square ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \times 8 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{15\sqrt{3}}{4} + 6\sqrt{3}$$

$$= \frac{39\sqrt{3}}{4}$$

답 ④

0760 $\overline{BD}$ 를 그으면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 4^2 + 8^2 - 2 \times 4 \times 8 \times \cos 60^\circ = 48$$

$$\therefore \overline{BD} = 4\sqrt{3} \quad (\because \overline{BD} > 0)$$

$\angle CBD = \theta$ 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{4}{\sin \theta} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}, \quad 4 \sin 60^\circ = 4\sqrt{3} \sin \theta$$

$$\therefore \sin \theta = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

그런데 $\theta < 75^\circ$ 이므로 $\theta = 30^\circ$

$$\therefore \angle ABD = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$$

$$\therefore \square ABCD$$

$$= \triangle ABD + \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 4\sqrt{3} \times \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \times 4 \times 8 \times \sin 60^\circ$$

$$= 3\sqrt{6} + 8\sqrt{3}$$

답 $3\sqrt{6} + 8\sqrt{3}$

0761 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{7^2 + 8^2 - 13^2}{2 \times 7 \times 8} = -\frac{1}{2}$$

그런데 $90^\circ < B < 180^\circ$ 이므로

$$B = 120^\circ$$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$7 \times 8 \times \sin 120^\circ = 28\sqrt{3}$$

답 ⑤

0762 $\overline{AD} = \overline{BC} = 4$ 이고 평행사변형 ABCD의 넓이가 $4\sqrt{2}$ 이므로

$$2 \times 4 \times \sin A = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

그런데 $90^\circ < A < 180^\circ$ 이므로

$$A = 135^\circ$$

답 ④

0763 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$(3\sqrt{3})^2 = 3^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times 3 \times \overline{BC} \times \cos 60^\circ$$

$$\overline{BC}^2 - 3\overline{BC} - 18 = 0, \quad (\overline{BC} + 3)(\overline{BC} - 6) = 0$$

$$\therefore \overline{BC} = 6 \quad (\because \overline{BC} > 0)$$

... **1단계**

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$3 \times 6 \times \sin 60^\circ = 18 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

... **2단계**

답 $9\sqrt{3}$

채점 요소		비율
1단계	선분 BC의 길이 구하기	50 %
2단계	평행사변형 ABCD의 넓이 구하기	50 %

다른 풀이 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{3}{\sin (\angle ACB)}$$

$$3\sqrt{3} \sin (\angle ACB) = 3 \sin 60^\circ$$

$$\therefore \sin (\angle ACB) = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

이때 $\angle BCD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ 에서 $\angle ACB < 120^\circ$ 이므로 $\angle ACB = 30^\circ$

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$$

따라서 직각삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

이므로 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$2 \triangle ABC = 2 \times \frac{9\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

0764 사각형 ABCD의 넓이가 $3\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 4 \times \overline{AC} \times \sin 120^\circ = 3\sqrt{3}$$

$$2 \times \overline{AC} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{AC} = 3$$

답 3

0765 사각형 ABCD의 넓이가 2이므로

$$\frac{1}{2} \times a \times b \times \sin 30^\circ = 2$$

$$\frac{1}{2} ab \times \frac{1}{2} = 2 \quad \therefore ab = 8$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 6^2 - 2 \times 8 = 20$$

답 20

0766 사각형 ABCD의 두 대각선의 길이를 a, b 라 하면

$$a + b = 8 \text{에서} \quad b = 8 - a \quad (0 < a < 8)$$

사각형 ABCD의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} ab \sin 45^\circ = \frac{1}{2} a(8-a) \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} (-a^2 + 8a) = -\frac{\sqrt{2}}{4} (a-4)^2 + 4\sqrt{2}$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $4\sqrt{2}$ 이다.

답 ②

0767 오른쪽 그림과 같이 평행

사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 교점을 O라 하자.

평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로

$\overline{AC}=2a$, $\overline{BD}=2b$ 라 하면

$$\overline{AO}=\overline{CO}=a, \overline{BO}=\overline{DO}=b$$

삼각형 ABO에서 코사인법칙에 의하여

$$3^2=a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ$$

$$\therefore a^2+b^2-ab=9 \quad \dots\dots ㉠$$

삼각형 BCO에서

$$\angle BOC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$4^2=a^2+b^2-2ab\cos 120^\circ$$

$$\therefore a^2+b^2+ab=16 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠-㉡을 하면 $2ab=7$

$$\therefore ab=\frac{7}{2}$$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2a \times 2b \times \sin 60^\circ = 2 \times \frac{7}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2} \quad \text{답 } \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

0768 삼각형 ABC에서

$$C=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{50}{\sin 45^\circ} = \frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ}$ 이므로

$$\overline{BC} \times \sin 45^\circ = 50 \sin 60^\circ$$

$$\therefore \overline{BC} = 50 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 25\sqrt{6} \text{ (m)}$$

따라서 두 지점 B, C 사이의 거리는 $25\sqrt{6}$ m이다. 답 ㉢

0769 삼각형 ABC에서

$$C=180^\circ-(50^\circ+70^\circ)=60^\circ$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{5}{\sin 60^\circ} = 2R$$

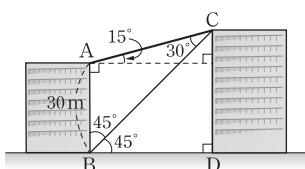
$$\therefore R = \frac{1}{2} \times \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

따라서 물통의 부피는

$$\pi \times \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 \times 9 = 75\pi \quad \text{답 } 75\pi$$

0770 오른쪽 그림과 같이 두

건물 위의 끝의 두 지점을 각각 A, C라 하고, 지면 위의 두 지점을 각각 B, D라 하자.



삼각형 ABC에서

$$\angle BAC=15^\circ+90^\circ=105^\circ,$$

$$\angle ABC=90^\circ-45^\circ=45^\circ$$

이므로

$$\angle ACB=180^\circ-(105^\circ+45^\circ)=30^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin 105^\circ} = \frac{30}{\sin 30^\circ}$ 이고

$$\sin 105^\circ = \sin(90^\circ+15^\circ) = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ 이므로}$$

$$\overline{BC} = \sin 105^\circ \times \frac{30}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \times \frac{30}{\frac{1}{2}}$$

$$= 15(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \text{ (m)}$$

따라서 삼각형 CBD에서

$$\overline{CD} = \overline{BC} \sin 45^\circ = 15(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 15(\sqrt{3}+1) \text{ (m)}$$

즉 옆 건물의 높이는 $15(\sqrt{3}+1)$ m이다. 답 $15(\sqrt{3}+1)$ m

0771 삼각형 ACB에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2 = 50^2 + 60^2 - 2 \times 50 \times 60 \times \cos 60^\circ = 3100$$

$$\therefore \overline{AB} = 10\sqrt{31} \text{ (m)} \quad (\because \overline{AB} > 0)$$

따라서 두 나무 A, B 사이의 거리는 $10\sqrt{31}$ m이다.

$$\text{답 } 10\sqrt{31} \text{ m}$$

0772 $\overline{CD}=x$ m라 하면 삼각형 ACD에서

$$\overline{AC} = \frac{x}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}x \text{ (m)}$$

또 삼각형 BCD는 $\angle BCD=90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{BC}=\overline{CD}=x \text{ (m)}$$

따라서 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$10^2 = (\sqrt{3}x)^2 + x^2 - 2 \times \sqrt{3}x \times x \times \cos 30^\circ$$

$$x^2 = 100 \quad \therefore x = 10 \quad (\because x > 0)$$

따라서 가로등의 높이는 10 m이다. 답 ㉤

0773 오른쪽 그림의 원뿔의 옆면

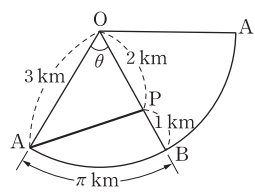
의 전개도에서 구하는 등산로의 최단 거리는 선분 AP의 길이이다.

이때 원뿔의 밑면의 둘레의 길이가 2π km이므로

$$\widehat{AB} = \frac{1}{2} \widehat{AA'} = \frac{1}{2} \times 2\pi = \pi \text{ (km)}$$

부채꼴 OAB의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$3 \times \theta = \pi \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$



따라서 삼각형 OAP에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AP}^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{3} = 7$$

$$\therefore \overline{AP} = \sqrt{7} \text{ (km)} \quad (\because \overline{AP} > 0)$$

즉 구하는 최단 거리는 $\sqrt{7}$ km이다.

답 $\sqrt{7}$ km

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 104~107쪽

0774 삼각형 ABC에서

$$A = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}$ 이므로

$$a \sin 60^\circ = \sqrt{6} \sin 45^\circ$$

$$\therefore a = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 2$$

$$\therefore \frac{a}{\cos A} = \frac{2}{\cos 45^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}$$

답 ④

0775 접선 AC와 현 AB가 이루는 각의 크기가 60° 이므로 오른쪽 그림에서

$$\angle APB = 60^\circ$$

이때 원 O의 반지름의 길이를 R라 하면 삼각형 ABP에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{10}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{1}{2} \times \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

따라서 원 O의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{10\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{100}{3} \pi$$

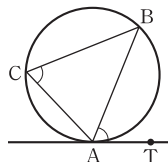
답 ⑤

RPM비법노트

접선과 현이 이루는 각

원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다. 즉

$$\angle BAT = \angle BCA$$



0776 $\overline{CD} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ 이므로 직각삼각

형 BCD에서

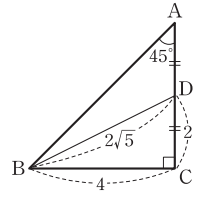
$$\overline{BD} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 $A = 45^\circ$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{2\sqrt{5}}{\sin 45^\circ} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{10}$$

답 $\sqrt{10}$



0777 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 5이므로 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{10}, \sin B = \frac{b}{10}$$

이것을 $\sqrt{3} \sin A = \sin B$ 에 대입하면

$$\sqrt{3} \times \frac{a}{10} = \frac{b}{10}$$

$$\therefore b = \sqrt{3}a$$

..... ㉠

이때 $C = 90^\circ$ 이므로 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$$a^2 + (\sqrt{3}a)^2 = 10^2$$

$$4a^2 = 100, \quad a^2 = 25$$

$$\therefore a = 5 \quad (\because a > 0)$$

이것을 ㉠에 대입하면 $b = 5\sqrt{3}$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 5 \times 5\sqrt{3} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

답 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$

0778 $2a - b = 9k, 2b - c = 6k, 2c - a = k \quad (k > 0)$ 라 하고 세 식을 연립하여 풀면

$$a = 7k, b = 5k, c = 4k$$

따라서 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \sin A : \sin B : \sin C &= a : b : c = 7k : 5k : 4k \\ &= 7 : 5 : 4 \end{aligned}$$

답 ⑤

0779 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}$$

이것을 $a \sin A = b \sin B$ 에 대입하면

$$a \times \frac{a}{2R} = b \times \frac{b}{2R}$$

$$\therefore a^2 = b^2$$

이때 $a > 0, b > 0$ 이므로

$$a = b$$

따라서 삼각형 ABC는 $a = b$ 인 이등변삼각형이다.

답 ④

0780 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= x^2 + \left(\frac{4}{x}\right)^2 - 2 \times x \times \frac{4}{x} \times \cos 120^\circ \\ &= x^2 + \frac{16}{x^2} + 4\end{aligned}$$

이때 $x^2 > 0$, $\frac{16}{x^2} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2 + \frac{16}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{16}{x^2}} = 2 \times 4 = 8$$

(단, 등호는 $x^2 = \frac{16}{x^2}$, 즉 $x=2$ 일 때 성립)

즉 $\overline{BC}^2 \geq 8 + 4 = 12$ 이므로

$$\overline{BC} \geq 2\sqrt{3}$$

따라서 $\overline{BC}$ 의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{3}$ 이다.

답 $2\sqrt{3}$

0781 $\overline{AC} = x$ 라 하면 $x > 3$ 이고 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}2^2 &= 3^2 + x^2 - 2 \times 3 \times x \times \frac{7}{8} \\ 4 &= 9 + x^2 - \frac{21}{4}x, \quad 4x^2 - 21x + 20 = 0 \\ (4x-5)(x-4) &= 0 \\ \therefore x &= 4 \quad (\because x > 3)\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AM} = \overline{CM} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ 이므로 삼각형 ABM에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BM}^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \frac{7}{8} = \frac{5}{2}$$

그런데 $\overline{BM} > 0$ 이므로

$$\overline{BM} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

이때 $\triangle ABM \sim \triangle DCM$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AM} : \overline{DM} = \overline{BM} : \overline{CM}$ 에서

$$\begin{aligned}2 : \overline{DM} &= \frac{\sqrt{10}}{2} : 2, \quad \frac{\sqrt{10}}{2} \overline{DM} = 4 \\ \therefore \overline{DM} &= \frac{4\sqrt{10}}{5}\end{aligned}$$

답 ③

참고 $\triangle ABM$ 과 $\triangle DCM$ 에서 $\angle AMB = \angle DMC$ (맞꼭지각)이고 $\angle BAM, \angle CDM$ 은 호 BC에 대한 원주각이므로 $\angle BAM = \angle CDM$ 이다. 따라서 $\triangle ABM, \triangle DCM$ 은 AA 닮음이다.

0782 $c^2 - 3ab = (a-b)^2$ 에서

$$\begin{aligned}c^2 - 3ab &= a^2 - 2ab + b^2 \\ \therefore c^2 &= a^2 + b^2 + ab\end{aligned}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \times a \times b} \\ &= \frac{a^2 + b^2 - (a^2 + ab + b^2)}{2 \times a \times b} \\ &= \frac{-ab}{2ab} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

그런데 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 120^\circ$

답 120°

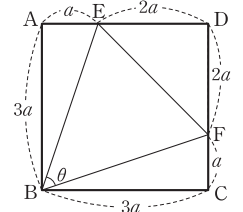
0783 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 $3a$ ($a > 0$)라 하면

$$\begin{aligned}\overline{BE} &= \overline{BF} = \sqrt{a^2 + (3a)^2} = \sqrt{10}a, \\ \overline{EF} &= \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2} = 2\sqrt{2}a\end{aligned}$$

따라서 삼각형 BFE에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{(\sqrt{10}a)^2 + (\sqrt{10}a)^2 - (2\sqrt{2}a)^2}{2 \times \sqrt{10}a \times \sqrt{10}a} \\ &= \frac{12a^2}{20a^2} = \frac{3}{5}\end{aligned}$$

답 $\frac{3}{5}$



0784 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 이므로 $\angle DAC = \angle BCA$

$\overline{AC} = x$, $\angle DAC = \angle BCA = \theta$ 라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{10^2 + x^2 - 6^2}{2 \times 10 \times x} = \frac{x^2 + 64}{20x} \quad \dots\dots ㉠$$

또 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{x^2 + 4^2 - 8^2}{2 \times x \times 4} = \frac{x^2 - 48}{8x} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{x^2 + 64}{20x} = \frac{x^2 - 48}{8x}, \quad 3x^2 = 368$$

$$x^2 = \frac{368}{3} \quad \therefore x = \frac{4\sqrt{69}}{3} \quad (\because x > 0)$$

답 ⑤

0785 $5-x$ 가 가장 짧은 변의 길이이므로

$$\begin{aligned}\cos 30^\circ &= \frac{(5+x)^2 + 5^2 - (5-x)^2}{2 \times (5+x) \times 5} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{25 + 10x + x^2 + 25 - (25 - 10x + x^2)}{10(5+x)}\end{aligned}$$

$$5\sqrt{3} + \sqrt{3}x = 4x + 5$$

$$(4 - \sqrt{3})x = 5\sqrt{3} - 5$$

$$\therefore x = \frac{5\sqrt{3} - 5}{4 - \sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3} - 5}{13}$$

답 ③

0786 $\frac{7}{\sin A} = \frac{5}{\sin B} = \frac{3}{\sin C}$ 에서

$$\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 3$$

$$\therefore a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 3$$

$a=7k, b=5k, c=3k (k>0)$ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{(5k)^2 + (3k)^2 - (7k)^2}{2 \times 5k \times 3k} = -\frac{1}{2}$$

그런데 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A=120^\circ$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{3}{\sin 120^\circ} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{1}{2} \times \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{3})^2 = 3\pi \quad \text{답 ③}$$

0787 조건 (가)에서 $\sin(B+C) = \sin(\pi-A) = \sin A$ 이므로

$$\sin A + \sin C = 2 \sin A \quad \therefore \sin A = \sin C$$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$\frac{a}{2R} = \frac{c}{2R} \quad \therefore a=c \quad \dots\dots ㉠$$

또 조건 (나)에서

$$\frac{\frac{a}{2R}}{\frac{b}{2R}} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad 2a^2 = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\therefore b^2 = a^2 + c^2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 삼각형 ABC는 $B=90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이다.

답 ⑤

0788 부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r 라 하면 점 P는 선분 OA를 3:1로 내분하는 점이므로

$$\overline{OP} = \frac{3}{4} \overline{OA} = \frac{3}{4}r$$

또 점 Q는 선분 OB를 1:2로 내분하는 점이므로

$$\overline{OQ} = \frac{1}{3} \overline{OB} = \frac{1}{3}r$$

이때 삼각형 OPQ의 넓이가 $4\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}r \times \frac{1}{3}r \times \sin \frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{16}r^2 = 4\sqrt{3}, \quad r^2 = 64$$

$$\therefore r = 8 (\because r > 0)$$

따라서 호 AB의 길이는 $8 \times \frac{\pi}{3} = \frac{8}{3}\pi$ 답 ④

0789 $a+c=10$ 에서 $c=10-a (0 < a < 10)$

삼각형 ABC의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times a \times (10-a) \times \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{4}(-a^2 + 10a) = -\frac{1}{4}(a-5)^2 + \frac{25}{4}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은 $\frac{25}{4}$ 이다. 답 $\frac{25}{4}$

0790 $\angle BAD = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ 이므로 $\overline{BD}$ 를 그으면

$$\square ABCD$$

$$= \triangle ABD + \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} \times \sin 135^\circ + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 6 \times \sin 45^\circ$$

$$= 2 + 6 = 8$$

답 8

0791 평행사변형 ABCD의 넓이가 $10\sqrt{3}$ 이므로

$$4 \times 5 \times \sin B = 10\sqrt{3}$$

$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$90^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $B=120^\circ$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos 120^\circ = 61$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{61} (\because \overline{AC} > 0) \quad \text{답 ①}$$

0792 등변사다리꼴 ABCD의 한 대각선의 길이를 a 라 하면

등변사다리꼴의 넓이가 16이므로

$$\frac{1}{2} \times a \times a \times \sin 30^\circ = 16$$

$$\frac{1}{2}a^2 \times \frac{1}{2} = 16, \quad a^2 = 64$$

$$\therefore a = 8 (\because a > 0)$$

따라서 한 대각선의 길이는 8이다. 답 ③

0793 사각형 ABCD에서 $\overline{AC}=p, \overline{BD}=q, \overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 사각형 ABCD의 넓이가 100이므로

$$\frac{1}{2}pq \sin \theta = 100$$

새로운 사각형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 0.8p \times 1.1q \times \sin \theta$$

$$= 0.88 \times \frac{1}{2}pq \sin \theta$$

$$= 0.88 \times 100 = 88$$

답 88

0794 직각삼각형 ABC에서

$$\cos 30^\circ = \frac{30}{\overline{BC}}$$

$$\therefore \overline{BC} = \frac{30}{\cos 30^\circ} = 20\sqrt{3} \text{ (m)}$$

또 삼각형 ABD에서

$$\angle ADB = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ$$

이므로

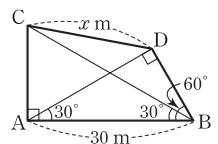
$$\overline{BD} = 30 \times \cos 60^\circ = 15 \text{ (m)}$$

이때 삼각형 BDC에서

$$\angle CBD = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

이므로 $\overline{CD}=x$ m라 하면 코사인법칙에 의하여

$$x^2 = (20\sqrt{3})^2 + 15^2 - 2 \times 20\sqrt{3} \times 15 \times \cos 30^\circ = 525$$



$\therefore x=5\sqrt{21}$ ($\because x>0$)
따라서 두 지점 C, D 사이의 거리는 $5\sqrt{21}$ m이다.

답 $5\sqrt{21}$ m

0795 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \sin^2 C - (\cos A + \cos B)(\cos A - \cos B) = 0$$

$$\sin^2 C - (\cos^2 A - \cos^2 B) = 0$$

$$\sin^2 C - (1 - \sin^2 A) + (1 - \sin^2 B) = 0$$

$$\therefore \sin^2 C + \sin^2 A = \sin^2 B \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots \text{1단계}$$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인 법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이것을 ①에 대입하면

$$\left(\frac{c}{2R}\right)^2 + \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2$$

$$\therefore b^2 = a^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $B=90^\circ$ 인 직각삼각형이다. $\dots$ 2단계

답 $B=90^\circ$ 인 직각삼각형

채점 요소	비율
1단계 중근을 가질 조건 구하기	50 %
2단계 삼각형 ABC의 모양 구하기	50 %

0796 길이가 7인 변의 대각의 크기를 θ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{4^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 4 \times 5} = -\frac{1}{5} \quad \dots \text{1단계}$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ 에서 $\sin \theta > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{6}}{5} \quad \dots \text{2단계} \end{aligned}$$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인 법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{7}{\sin \theta} &= 2R \\ \therefore R &= \frac{1}{2} \times \frac{7}{\frac{2\sqrt{6}}{5}} = \frac{35\sqrt{6}}{24} \quad \dots \text{3단계} \end{aligned}$$

답 $\frac{35\sqrt{6}}{24}$

채점 요소	비율
1단계 길이가 7인 변의 대각의 크기를 θ 라 하고 $\cos \theta$ 의 값 구하기	30 %
2단계 $\sin \theta$ 의 값 구하기	30 %
3단계 외접원의 반지름의 길이 구하기	40 %

0797 $a+b=7k, b+c=5k, c+a=6k$ ($k>0$) $\dots$ ①

라 하고 세 식을 변끼리 더하면

$$2(a+b+c) = 18k \quad \therefore a+b+c = 9k \quad \dots \textcircled{2}$$

①에서 ①을 각각 빼면

$$a=4k, b=3k, c=2k \quad \dots \text{1단계}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{(3k)^2 + (2k)^2 - (4k)^2}{2 \times 3k \times 2k} = -\frac{1}{4}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ 에서 $\sin A > 0$ 이므로

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2k \times 3k \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{4} k^2 \quad \dots \text{2단계}$$

$$\text{즉 } \frac{3\sqrt{15}}{4} k^2 = 3\sqrt{15} \text{이므로}$$

$$k^2 = 4 \quad \therefore k = 2 \quad (\because k > 0) \quad \dots \text{3단계}$$

$$\therefore a = 4k = 4 \times 2 = 8 \quad \dots \text{4단계}$$

답 8

채점 요소	비율
1단계 a, b, c 를 k 에 대한 식으로 나타내기	30 %
2단계 삼각형 ABC의 넓이를 k 에 대한 식으로 나타내기	40 %
3단계 k 의 값 구하기	20 %
4단계 a 의 값 구하기	10 %

0798 $\angle CPD = \theta$ 라 하면 삼각형 CDP에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{2^2 + 4^2 - 4^2}{2 \times 2 \times 4} = \frac{1}{4} \quad \dots \text{1단계}$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ 에서 $\sin \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad \dots \text{2단계}$$

$$\therefore \square ABCD = \frac{1}{2} \times (3+4) \times (6+2) \times \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \times 7 \times 8 \times \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$= 7\sqrt{15} \quad \dots \text{3단계}$$

답 $7\sqrt{15}$

채점 요소	비율
1단계 $\cos (\angle CPD)$ 의 값 구하기	40 %
2단계 $\sin (\angle CPD)$ 의 값 구하기	20 %
3단계 $\square ABCD$ 의 넓이 구하기	40 %

0799 **전략** 사인법칙을 이용하여 $\frac{a}{R}$ 의 값이 정수가 되도록 하는 조건을 구한다.

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여 $\sin A = \frac{a}{2R}$ 이므로

$$\frac{a}{R} = 2 \sin A$$

이때 $\frac{a}{R}$, 즉 $2 \sin A$ 의 값이 정수이어야 하고 $0^\circ < A < 180^\circ$ 에서 $0 < \sin A \leq 1$ 이므로

$$0 < 2 \sin A \leq 2$$

따라서 $2\sin A=1$ 또는 $2\sin A=2$ 이므로

$$\sin A = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin A = 1$$

$$(i) \sin A = \frac{1}{2} \text{에서 } A=30^\circ \text{ 또는 } A=150^\circ$$

$$(ii) \sin A = 1 \text{에서 } A=90^\circ$$

$$(i), (ii) \text{에서 } A=30^\circ \text{ 또는 } A=90^\circ \text{ 또는 } A=150^\circ$$

따라서 모든 A 의 크기의 합은

$$30^\circ + 90^\circ + 150^\circ = 270^\circ$$

답 270°

0800 전략 이등변삼각형의 성질을 이용하여 C 의 크기를 구한다.

$\overline{AB} = \overline{AC} = k$ 라 하면 삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의하여

$$8^2 = k^2 + k^2 - 2 \times k \times k \times \cos 120^\circ$$

$$64 = 3k^2, \quad k^2 = \frac{64}{3}$$

$$\therefore k = \frac{8\sqrt{3}}{3} (\because k > 0)$$

이때 삼각형 ABC 는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이고 $A=120^\circ$ 이므로

$$C = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$$

따라서 $\overline{CP} = x$ ($0 < x \leq \frac{8\sqrt{3}}{3}$)라 하면 삼각형 BCP 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BP}^2 &= x^2 + 8^2 - 2 \times x \times 8 \times \cos 30^\circ \\ &= x^2 - 8\sqrt{3}x + 64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 &= (x^2 - 8\sqrt{3}x + 64) + x^2 \\ &= 2x^2 - 8\sqrt{3}x + 64 \\ &= 2(x - 2\sqrt{3})^2 + 40 \end{aligned}$$

즉 $\overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은 40이다.

답 40

0801 전략 삼각형 PAC 의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P 의 위치를 파악한다.

삼각형 PAC 의 넓이가 최대가 되려면 점 P 와 직선 AC 사이의 거리가 최대가 되어야 한다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 점 B 를 포함하지 않는 호 AC 와 선분 AC 의 수직이등분선의 교점이 점 Q 이다.

이때 $\overline{QA} = 6\sqrt{10}$ 이므로

$$\overline{QC} = \overline{QA} = 6\sqrt{10}$$

한편 $\cos(\angle ABC) = -\frac{5}{8}$ 이므로

$$\cos(\angle AQC) = \cos(\pi - \angle ABC)$$

$$= -\cos(\angle ABC) = \frac{5}{8}$$

따라서 삼각형 QAC 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= (6\sqrt{10})^2 + (6\sqrt{10})^2 - 2 \times 6\sqrt{10} \times 6\sqrt{10} \times \cos(\angle AQC) \\ &= 270 \end{aligned} \quad \dots\dots ㉠$$

$\overline{AB} = x$ ($x > 0$)라 하면 $2\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서

$$\overline{BC} = 2x$$

삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= x^2 + (2x)^2 - 2 \times x \times 2x \times \cos(\angle ABC) \\ &= \frac{15}{2}x^2 \end{aligned} \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠, ㉡ \text{에서 } \frac{15}{2}x^2 = 270$$

$$x^2 = 36 \quad \therefore x = 6 (\because x > 0)$$

즉 $\overline{BC} = 2 \times 6 = 12$ 이므로 삼각형 CDB 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 삼각형 CDB 에서 사인법칙에 의하여

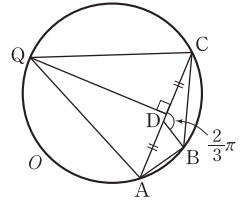
$$\frac{12}{\sin \frac{2}{3}\pi} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{1}{2} \times \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3}$$

답 ②

참고 선분 AC 와 선분 AC 의 수직이등분선의 교점을 H 라 하면 $\triangle QAH$ 와 $\triangle QCH$ 에서 $\overline{AH} = \overline{CH}$, $\angle QHA = \angle QHC = 90^\circ$, $\overline{QH}$ 는 공통이므로 $\triangle QAH \cong \triangle QCH$ (SAS 합동)

$$\therefore \overline{QC} = \overline{QA} = 6\sqrt{10}$$



08 등차수열과 등비수열

교과서문제 정복하기

본책 111쪽

0802 $3-1=2$ 에서 공차가 2이므로 주어진 수열은
1, 3, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$, 9, ... **답** 5, 7

0803 $5-10=-5$ 에서 공차가 -5이므로 주어진 수열은
20, $\boxed{15}$, 10, 5, $\boxed{0}$, ... **답** 15, 0

0804 $a_n = -2 + (n-1) \times 5 = 5n - 7$ **답** $a_n = 5n - 7$

0805 첫째항이 3, 공차가 $6-3=3$ 이므로
 $a_n = 3 + (n-1) \times 3 = 3n$ **답** $a_n = 3n$

0806 공차를 d 라 하면 $a_1=5$, $a_8=33$ 에서
 $5 + (8-1)d = 33$, $7d = 28$
 $\therefore d = 4$ **답** 4

0807 공차를 d 라 하면 $a_1=-5$, $a_6=-40$ 에서
 $-5 + (6-1)d = -40$, $5d = -35$
 $\therefore d = -7$ **답** -7

0808 $x = \frac{1+19}{2} = 10$ **답** 10

0809 $\frac{20(2+40)}{2} = 420$ **답** 420

0810 $\frac{20\{2 \times 4 + (20-1) \times (-2)\}}{2} = -300$ **답** -300

0811 수열 33, 30, 27, ..., 3은 첫째항이 33, 공차가
 $30-33=-3$ 인 등차수열이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = 33 + (n-1) \times (-3) = -3n + 36$
3을 제 n 항이라 하면
 $-3n + 36 = 3 \quad \therefore n = 11$
 $\therefore 33 + 30 + 27 + \dots + 3 = \frac{11(33+3)}{2} = 198$ **답** 198

0812 수열 2, 5, 8, ..., 41은 첫째항이 2, 공차가 $5-2=3$ 인
등차수열이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$
41을 제 n 항이라 하면
 $3n - 1 = 41 \quad \therefore n = 14$
 $\therefore 2 + 5 + 8 + \dots + 41 = \frac{14(2+41)}{2} = 301$ **답** 301

0813 $\frac{6}{3}=2$ 에서 공비가 2이므로 주어진 수열은
3, 6, $\boxed{12}$, $\boxed{24}$, 48, ... **답** 12, 24

0814 $\frac{-2}{2}=-1$ 에서 공비가 -1이므로 주어진 수열은
2, -2, $\boxed{2}$, $\boxed{-2}$, 2, ... **답** 2, -2

0815 **답** $a_n = 5 \times (-3)^{n-1}$

0816 첫째항이 2, 공비가 $\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ 이므로
 $a_n = 2 \times (\sqrt{2})^{n-1}$ **답** $a_n = 2 \times (\sqrt{2})^{n-1}$

0817 공비를 r 라 하면 $a_1 = \frac{2}{27}$, $a_4 = 2$ 에서
 $\frac{2}{27} \times r^{4-1} = 2$, $r^3 = 27$
 $\therefore r = 3$ **답** 3

0818 공비를 r 라 하면 $a_1=1$, $a_5=\frac{1}{81}$ 에서
 $1 \times r^{5-1} = \frac{1}{81}$, $r^4 = \frac{1}{81}$
 $\therefore r = \pm \frac{1}{3}$ **답** $-\frac{1}{3}$ 또는 $\frac{1}{3}$

0819 $x^2 = 3 \times 48 = 144 \quad \therefore x = \pm 12$
답 -12 또는 12

0820 $\frac{4(2^8-1)}{2-1} = 1020$ **답** 1020

0821 첫째항이 3, 공비가 $\frac{-6}{3}=-2$ 인 등비수열이므로
 $\frac{3\{1 - (-2)^8\}}{1 - (-2)} = -255$ **답** -255

0822 수열 1, 3, 9, ..., 243은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{3}{1}=3$ 인
등비수열이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = 1 \times 3^{n-1} = 3^{n-1}$
243을 제 n 항이라 하면
 $3^{n-1} = 243 = 3^5$, $n-1=5$
 $\therefore n = 6$

$\therefore 1 + 3 + 9 + \dots + 243 = \frac{1 \times (3^6 - 1)}{3 - 1} = 364$ **답** 364

0823 수열 $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, -\frac{1}{256}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비
가 $-\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$-\frac{1}{256}$ 을 제 n 항이라 하면

$$\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{256}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{128} = \left(-\frac{1}{2}\right)^7$$

$$n-1=7 \quad \therefore n=8$$

$$\therefore \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{256} = \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^8 \right\}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{85}{256}$$

답 $\frac{85}{256}$

유형 익히기

• 본책 112~124쪽

0824 주어진 등차수열의 첫째항이 20, 공차가 -3 이므로 일항 a_n 은

$$a_n = 20 + (n-1) \times (-3) = -3n + 23$$

-118 을 제 n 항이라 하면

$$-3n + 23 = -118, \quad -3n = -141$$

$$\therefore n = 47$$

따라서 -118 은 제 47 항이다.

답 제 47 항

0825 $a_n = -4n + 14$ 에서

$$a_1 = -4 \times 1 + 14 = 10, \quad a_2 = -4 \times 2 + 14 = 6$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차는 $6 - 10 = -4$ 이므로 구하는 곱은

$$10 \times (-4) = -40$$

답 ③

RPM비법노트

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 이 $a_n = An + B$ (A, B 는 상수)의 꼴이면

$$a_1 = A + B,$$

$$a_{n+1} - a_n = \{A(n+1) + B\} - (An + B) = A$$

이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $A+B$, 공차가 A 인 등차수열이다.

0826 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면

$$a_5 = -2 \text{에서} \quad a + 4 \times 4 = -2 \quad \therefore a = -18$$

$$\therefore a_n = -18 + (n-1) \times 4 = 4n - 22$$

$$a_k = 38 \text{이므로} \quad 4k - 22 = 38$$

$$4k = 60 \quad \therefore k = 15$$

답 15

0827 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2 = 10 \text{에서} \quad a + d = 10 \quad \dots\dots ㉠$$

$$a_5 = 43 \text{에서} \quad a + 4d = 43 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면} \quad a = -1, d = 11$$

따라서 $a_n = -1 + (n-1) \times 11 = 11n - 12$ 이므로

$$a_{50} = 11 \times 50 - 12 = 538$$

답 538

0828 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_8 = 26 \text{에서} \quad a + 7d = 26 \quad \dots\dots ㉠$$

$$a_6 : a_{10} = 5 : 8 \text{에서} \quad (a + 5d) : (a + 9d) = 5 : 8$$

$$8(a + 5d) = 5(a + 9d), \quad 8a + 40d = 5a + 45d$$

$$\therefore 3a - 5d = 0 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면} \quad a = 5, d = 3$$

따라서 $a_n = 5 + (n-1) \times 3 = 3n + 2$ 이므로

$$a_{30} = 3 \times 30 + 2 = 92$$

답 ③

0829 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2 + a_6 = 20 \text{에서} \quad (a + d) + (a + 5d) = 20$$

$$\therefore a + 3d = 10 \quad \dots\dots ㉠$$

$$a_4 + a_5 = 24 \text{에서} \quad (a + 3d) + (a + 4d) = 24$$

$$\therefore 2a + 7d = 24 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면} \quad a = -2, d = 4$$

따라서 $a_n = -2 + (n-1) \times 4 = 4n - 6$ 이므로

$$a_8 = 4 \times 8 - 6 = 26$$

답 26

0830 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_2 + a_6 = 0$ 이므로

$$(-6 + d) + (-6 + 5d) = 0$$

$$6d = 12 \quad \therefore d = 2 \quad \dots \text{1단계}$$

$$\therefore a_n = -6 + (n-1) \times 2 = 2n - 8 \quad \dots \text{2단계}$$

$$12 \text{를 제 } n \text{ 항이라 하면} \quad 2n - 8 = 12 \quad \therefore n = 10$$

따라서 12는 제 10 항이다.

답 ③

답 제 10 항

채점 요소		비율
1단계	공차 구하기	50 %
2단계	a_n 구하기	20 %
3단계	12가 제 몇 항인지 구하기	30 %

0831 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d ($d > 0$)라 하면

$$a_4 + a_8 = 0 \text{에서} \quad (a + 3d) + (a + 7d) = 0$$

$$2a + 10d = 0 \quad \therefore a = -5d \quad \dots\dots ㉠$$

$$|a_5| = |a_6| + 2 \text{에서}$$

$$|a + 4d| = |a + 5d| + 2 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면} \quad |-5d + 4d| = |-5d + 5d| + 2$$

$$|-d| = 2 \quad \therefore |d| = 2$$

$$\text{이때 } d > 0 \text{이므로} \quad d = 2$$

$$d = 2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면} \quad a = -5 \times 2 = -10$$

따라서 $a_n = -10 + (n-1) \times 2 = 2n - 12$ 이므로

$$a_3 = 2 \times 3 - 12 = -6$$

답 -6

다른 풀이 a_6 이 a_4 와 a_8 의 등차중항이므로

$$a_6 = \frac{a_4 + a_8}{2} = 0$$

$$\text{이것을 } |a_5| = |a_6| + 2 \text{에 대입하면} \quad |a_5| = 2$$

$$\text{이때 } d > 0 \text{이므로} \quad a_5 = -2 \quad \therefore d = 2$$

$$\therefore a_3 = a_5 - 2d = -2 - 2 \times 2 = -6$$

0832 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3=63\text{에서} \quad a+2d=63 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{10}=35\text{에서} \quad a+9d=35 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=71, d=-4$

$$\therefore a_n=71+(n-1)\times(-4)=-4n+75$$

$$a_n<0\text{에서} \quad -4n+75<0 \quad \therefore n>18.75$$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제 19 항이다. **답 ②**

0833 $a_n=-62+(n-1)\times 5=5n-67$

$$a_n>0\text{에서} \quad 5n-67>0 \quad \therefore n>13.4$$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제 14 항이다. **답 ③**

0834 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_6-a_4=8\text{에서} \quad (a+5d)-(a+3d)=8$$

$$2d=8 \quad \therefore d=4$$

$$\therefore a_n=5+(n-1)\times 4=4n+1$$

$$a_n>100\text{에서} \quad 4n+1>100 \quad \therefore n>24.75$$

따라서 처음으로 100보다 커지는 항은 제 25 항이다. **답 제 25 항**

0835 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a ($a>0$), 공차를 d 라 하면

$$a_{10}+a_{16}=0\text{이므로} \quad (a+9d)+(a+15d)=0$$

$$2a+24d=0 \quad \therefore a=-12d$$

$$\therefore a_n=a+(n-1)d=-12d+(n-1)d$$

$$=(n-13)d$$

이때 $a>0$ 이므로 $d<0$ 이고 $a_n<0$ 에서

$$(n-13)d<0, \quad n-13>0 \quad \therefore n>13$$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제 14 항이다. **답 제 14 항**

0836 등차수열 $1, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}, 100$ 의 공차를 d 라 하면 첫째항이 1, 제 12 항이 100이므로

$$1+11d=100 \quad \therefore d=9 \quad \leftarrow d=\frac{100-1}{12-1}$$

이때 a_7 은 주어진 수열의 제 8 항이므로

$$a_7=1+7\times 9=64 \quad \textbf{답 64}$$

0837 등차수열 $3, x, y, z, 23$ 의 공차를 d 라 하면 첫째항이 3, 제 5 항이 23이므로

$$3+4d=23 \quad \therefore d=5$$

$$\therefore x=3+d=3+5=8,$$

$$y=x+d=8+5=13,$$

$$z=y+d=13+5=18 \quad \textbf{답 } x=8, y=13, z=18$$

0838 주어진 등차수열은 첫째항이 -20 , 공차가 4이고, 제 $(n+2)$ 항이 100이므로

$$-20+(n+1)\times 4=100$$

$$4(n+1)=120, \quad n+1=30$$

$$\therefore n=29 \quad \textbf{답 29}$$

0839 등차수열 $2, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, 107$ 의 공차를 d 라 하면 첫째항이 2, 제 $(n+2)$ 항이 107이므로

$$2+(n+1)d=107$$

$$(n+1)d=105 \quad \therefore d=\frac{105}{n+1}$$

이때 n 은 자연수이므로 d 의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다. **답 ⑤**

참고 ① $n=20$ 일 때, $d=\frac{105}{21}=5$

② $n=14$ 일 때, $d=\frac{105}{15}=7$

③ $n=6$ 일 때, $d=\frac{105}{7}=15$

④ $n=4$ 일 때, $d=\frac{105}{5}=21$

0840 세 수 $x-1, x^2, 3x+7$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2x^2=(x-1)+(3x+7)$$

$$x^2-2x-3=0, \quad (x+1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 구하는 합은 $-1+3=2$ **답 2**

참고 $x=-1$ 이면 주어진 세 수는 $-2, 1, 4$ 이므로 공차가 3인 등차수열을 이루고, $x=3$ 이면 주어진 세 수는 $2, 9, 16$ 이므로 공차가 7인 등차수열을 이룬다.

0841 세 수 $-9, x, -1$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2x=-9+(-1) \quad \therefore x=-5$$

세 수 $-1, y, 5$ 도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2y=-1+5 \quad \therefore y=2$$

$$\therefore x+y=-3 \quad \textbf{답 ③}$$

0842 $f(x)=ax^2+x+4$ 라 하면 $f(x)$ 를 $x+1, x-2, x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는 각각

$$f(-1)=a+3, \quad f(2)=4a+6, \quad f(3)=9a+7$$

따라서 세 수 $a+3, 4a+6, 9a+7$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2(4a+6)=(a+3)+(9a+7)$$

$$8a+12=10a+10 \quad \therefore a=1 \quad \textbf{답 ④}$$

RPM비법노트

나머지정리

다항식 $f(x)$ 를 일차식 $x-a$ 로 나누었을 때의 나머지를 R 라 하면

$$R=f(a)$$

0843 $\log a, \log 3, \log b$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2\log 3=\log a+\log b, \quad \log 3^2=\log ab$$

$$\therefore ab=9$$

이때 a, b 는 서로 다른 자연수이므로

$$a=1, b=9 \text{ 또는 } a=9, b=1$$

$$\therefore a+b=10 \quad \textbf{답 10}$$

0844 세 수를 $a-d$, a , $a+d$ 라 하면 세 수의 합이 15이므로

$$(a-d)+a+(a+d)=15, \quad 3a=15$$

$$\therefore a=5$$

세 수의 곱이 -55이므로

$$(5-d) \times 5 \times (5+d) = -55$$

$$25-d^2 = -11, \quad d^2 = 36$$

$$\therefore d = \pm 6$$

따라서 세 수는 -1, 5, 11이므로 세 수의 제곱의 합은

$$(-1)^2 + 5^2 + 11^2 = 147$$

답 147

0845 삼차방정식의 세 근을 $a-d$, a , $a+d$ 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a-d)+a+(a+d)=6, \quad 3a=6$$

$$\therefore a=2$$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 2이므로 $x=2$ 를 방정식에 대입하면

$$8-24+2k+24=0, \quad 2k=-8$$

$$\therefore k=-4$$

답 ④

다른 풀이 삼차방정식의 세 근을 $a-d$, a , $a+d$ 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a-d)+a+(a+d)=6, \quad (a-d) \times a \times (a+d) = -24$$

$$\therefore a=2, d=\pm 4$$

따라서 세 근이 -2, 2, 6이므로

$$k = -2 \times 2 + 2 \times 6 + 6 \times (-2) = -4$$

RPM 비법 노트

삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 세 근을 α , β , γ 라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

0846 네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$ ($d>0$)라 하면

네 수의 합이 8이므로

$$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=8$$

$$4a=8 \quad \therefore a=2$$

가장 큰 수가 가장 작은 수의 3배이므로

$$2+3d=3(2-3d), \quad 12d=4$$

$$\therefore d=\frac{1}{3}$$

따라서 네 수는 $1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3$ 이므로 네 수의 곱은

$$1 \times \frac{5}{3} \times \frac{7}{3} \times 3 = \frac{35}{3}$$

답 $\frac{35}{3}$

0847 직각삼각형의 세 변의 길이를 $a-d$, a , $a+d$ ($d>0$)라 하면 빗변의 길이가 15이므로

$$a+d=15$$

..... ㉠

피타고라스 정리에 의하여

$$(a+d)^2 = (a-d)^2 + a^2, \quad a(a-4d)=0$$

$$\therefore a=4d \quad (\because a \neq 0)$$

$$a=4d \text{를 ㉠에 대입하면} \quad 5d=15 \quad \therefore d=3$$

$$\therefore a=12$$

따라서 직각삼각형의 세 변의 길이가 9, 12, 15이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 9 \times 12 = 54$$

답 54

0848 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_6=44 \text{에서} \quad a+5d=44 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$a_{18}=116 \text{에서} \quad a+17d=116 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=14, d=6$$

이때 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 280이므로

$$\frac{n\{2 \times 14 + (n-1) \times 6\}}{2} = 280$$

$$3n^2+11n-280=0, \quad (3n+35)(n-8)=0$$

$$\therefore n = -\frac{35}{3} \text{ 또는 } n=8$$

그런데 n 은 자연수이므로 $n=8$

답 ②

0849 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 -100, 공차가 8이므로

$$S_n = \frac{n\{2 \times (-100) + (n-1) \times 8\}}{2} = 4n^2 - 104n$$

$$S_n > 0 \text{에서} \quad 4n^2 - 104n > 0$$

$$n(n-26) > 0 \quad \therefore n > 26$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 27이다.

답 27

0850 첫째항이 15, 제 n 항이 -6인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 36이므로

$$\frac{n\{15 + (-6)\}}{2} = 36, \quad \frac{9}{2}n = 36$$

$$\therefore n=8$$

즉 제 8 항이 -6이므로 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$15+7d=-6 \quad \therefore d=-3$$

따라서 $a_n = 15 + (n-1) \times (-3) = -3n + 18$ 이므로

$$a_5 = -3 \times 5 + 18 = 3$$

답 3

0851 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_1=6$, $a_{10}=-12$ 에서

$$6+9d=-12$$

$$\therefore d=-2$$

$$\therefore a_n = 6 + (n-1) \times (-2) = -2n + 8$$

$$-2n + 8 < 0 \text{에서} \quad n > 4$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 제 5 항부터 음수이고

$$a_4 = -2 \times 4 + 8 = 0,$$

$$a_5 = -2 \times 5 + 8 = -2,$$

$$a_{20} = -2 \times 20 + 8 = -32$$

... 1단계

... 2단계

이므로

$$\begin{aligned} & |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}| \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_5 + a_6 + a_7 + \cdots + a_{20}) \\ &= \frac{4(6+0)}{2} - \frac{16\{-2+(-32)\}}{2} \\ &= 12 - (-272) \\ &= 284 \end{aligned}$$

... 3단계

답 284

	채점 요소	비율
1단계	공차 구하기	30 %
2단계	a_n 구하기	20 %
3단계	$ a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20} $ 의 값 구하기	50 %

0852 $24 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + (-44)$

$$= 24 + (-120) + (-44) = -140$$

즉 첫째항이 24, 끝항이 -44, 항수가 $n+2$ 인 등차수열의 합이 -140이므로

$$\begin{aligned} & \frac{(n+2)\{24+(-44)\}}{2} = -140 \\ & n+2=14 \quad \therefore n=12 \end{aligned}$$

답 12

0853 첫째항이 -9, 끝항이 31, 항수가 $n+2$ 인 등차수열의 합이 231이므로

$$\begin{aligned} & \frac{(n+2)(-9+31)}{2} = 231 \\ & n+2=21 \quad \therefore n=19 \end{aligned}$$

따라서 31은 제 21 항이므로

$$\begin{aligned} & -9 + 20d = 31 \quad \therefore d=2 \\ & \therefore n+d=21 \end{aligned}$$

답 ④

0854 주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면 첫째항이 2, 제 $(n+2)$ 항이 37이므로

$$\begin{aligned} & 2 + (n+1)d = 37 \\ & \therefore (n+1)d = 35 \end{aligned}$$

이때 모든 항이 자연수이므로 d 는 자연수이어야 한다.

따라서 가능한 순서쌍 (n, d) 는

$$(4, 7), (6, 5), (34, 1)$$

한편 첫째항이 2, 끝항이 37, 항수가 $n+2$ 인 등차수열의 합은

$$\frac{(n+2)(2+37)}{2} = \frac{39}{2}(n+2)$$

즉 $n=4$ 일 때 합이 최소가 되므로 구하는 최솟값은

$$\frac{39}{2} \times 6 = 117$$

답 117

0855 주어진 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하고, 첫째 항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_{20} &= \frac{20(2a+19d)}{2} = 120 \text{에서} \\ & 2a+19d=12 \end{aligned}$$

..... ①

$$S_{30} = \frac{30(2a+29d)}{2} = 300 \text{에서}$$

$$2a+29d=20$$

..... ②

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면} \quad a = -\frac{8}{5}, d = \frac{4}{5}$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10\left\{2 \times \left(-\frac{8}{5}\right) + 9 \times \frac{4}{5}\right\}}{2} = 20$$

답 ①

0856 주어진 등차수열의 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의

$$\text{합을 } S_n \text{이라 하면 } S_{12} = \frac{12(2 \times 10 + 11d)}{2} = 252 \text{에서}$$

$$20 + 11d = 42 \quad \therefore d = 2$$

$$\therefore S_{15} = \frac{15(2 \times 10 + 14 \times 2)}{2} = 360$$

답 360

0857 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2} = 55 \text{에서}$$

$$2a+9d=11$$

..... ①

$$S_{20} = \frac{20(2a+19d)}{2} = 210 \text{에서}$$

$$2a+19d=21$$

..... ②

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면} \quad a=1, d=1$$

$$\begin{aligned} & \therefore S_{15} - S_5 \\ &= \frac{15(2 \times 1 + 14 \times 1)}{2} - \frac{5(2 \times 1 + 4 \times 1)}{2} \\ &= 120 - 15 = 105 \end{aligned}$$

답 ④

다른 풀이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$\begin{aligned} S_{10} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} \\ &= a + (a+d) + \cdots + (a+9d) = 55 \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} S_{20} - S_{10} &= a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{20} \\ &= (a+10d) + (a+11d) + \cdots + (a+19d) \\ &= S_{10} + 10d \times 10 = 55 + 100d \end{aligned}$$

$$\text{이므로} \quad 55 + 100d = 210 - 55$$

$$100d = 100 \quad \therefore d = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{15} - S_5 &= a_6 + a_7 + \cdots + a_{15} \\ &= (a+5d) + (a+6d) + \cdots + (a+14d) \\ &= S_{10} + 5d \times 10 \\ &= 55 + 5 \times 10 = 105 \end{aligned}$$

0858 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_5 = 11 \text{에서} \quad a + 4d = 11 \quad \text{..... ①}$$

$$a_{15} = -9 \text{에서} \quad a + 14d = -9 \quad \text{..... ②}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면} \quad a = 19, d = -2$$

$$\therefore a_n = 19 + (n-1) \times (-2) = -2n + 21$$

$$-2n + 21 < 0 \text{에서} \quad n > 10.5$$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 제 11 항부터 음수이므로 첫째항부터 제 10 항까지의 합이 최대이다.

이때 $a_{10} = -2 \times 10 + 21 = 1$ 이므로 구하는 최댓값은

$$S_{10} = \frac{10(19+1)}{2} = 100$$

답 100

다른 풀이
$$S_n = \frac{n\{2 \times 19 + (n-1) \times (-2)\}}{2}$$
$$= -n^2 + 20n = -(n-10)^2 + 100$$

따라서 $n=10$ 일 때 S_n 은 최대이므로 구하는 최댓값은 100이다.

0859
$$a_n = -\frac{5}{2} + (n-1) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}n - \frac{17}{6}$$

$$\frac{1}{3}n - \frac{17}{6} > 0 \text{에서 } n > 8.5$$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 제 9 항부터 양수이므로 첫째항부터 제 8 항까지의 합이 최소이다.

따라서 구하는 n 의 값은 8이다.

답 8

0860 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 첫째항부터 제 17 항까지의 합이 최대이므로

$$a_{17} \geq 0, a_{18} < 0$$

$$100 + 16d \geq 0, 100 + 17d < 0$$

$$\therefore -\frac{25}{4} \leq d < -\frac{100}{17}$$

이때 d 는 정수이므로 $d = -6$

따라서 $a_n = 100 + (n-1) \times (-6) = -6n + 106$ 이므로

$$a_{10} = -6 \times 10 + 106 = 46$$

답 ②

0861 첫째항이 -28 , 끝항이 44 , 항수가 $k+2$ 인 등차수열의 합이 200이므로

$$\frac{(k+2)(-28+44)}{2} = 200, \quad k+2 = 25$$

$$\therefore k = 23$$

... 1단계

주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면 44는 제 25 항이므로

$$-28 + 24d = 44 \quad \therefore d = 3$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 $-28+3=-25$ 이고 공차가 3이므로

$$a_n = -25 + (n-1) \times 3 = 3n - 28$$

... 2단계

$$3n - 28 > 0 \text{에서 } n > \frac{28}{3} = 9.\times\times\times$$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 제 10 항부터 양수이므로 첫째항부터 제 9 항까지의 합이 최소이다.

... 3단계

이때 $a_9 = 3 \times 9 - 28 = -1$ 이므로 구하는 최솟값은

$$S_9 = \frac{9\{-25 + (-1)\}}{2} = -117$$

... 4단계

답 -117

	채점 요소	비율
1단계	k 의 값 구하기	20 %
2단계	a_n 구하기	30 %
3단계	S_n 의 값이 최소일 때의 n 의 값 구하기	30 %
4단계	S_n 의 최솟값 구하기	20 %

0862 두 자리 자연수 중에서 7로 나누었을 때의 나머지가 2인 수를 작은 것부터 순서대로 나열하면

$$16, 23, 30, \dots, 93$$

이것은 첫째항이 16, 공차가 7인 등차수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 16 + (n-1) \times 7 = 7n + 9$$

$$93 \text{을 제 } n \text{ 항이라 하면 } 7n + 9 = 93 \quad \therefore n = 12$$

따라서 구하는 총합은

$$\frac{12(16+93)}{2} = 654$$

답 ④

0863 50 이하의 자연수 중에서 4로 나누어떨어지는 수는

$$4, 8, 12, \dots, 48$$

$48 = 4 \times 12$ 에서 4로 나누어떨어지는 수의 총합은 첫째항이 4,

끝항이 48, 항수가 12인 등차수열의 합이므로

$$\frac{12(4+48)}{2} = 312$$

50 이하의 자연수 중에서 6으로 나누어떨어지는 수는

$$6, 12, 18, \dots, 48$$

$48 = 6 \times 8$ 에서 6으로 나누어떨어지는 수의 총합은 첫째항이 6,

끝항이 48, 항수가 8인 등차수열의 합이므로

$$\frac{8(6+48)}{2} = 216$$

한편 50 이하의 자연수 중에서 4와 6의 최소공배수인 12로 나누어떨어지는 수는

$$12, 24, 36, 48$$

이므로 그 합은 $12 + 24 + 36 + 48 = 120$

따라서 50 이하의 자연수 중에서 4 또는 6으로 나누어떨어지는 수의 총합은

$$312 + 216 - 120 = 408$$

답 408

0864 6으로 나누었을 때의 나머지가 5인 수를 작은 것부터 순서대로 나열하면

$$5, 11, 17, 23, 29, 35, \dots$$

8로 나누었을 때의 나머지가 3인 수를 작은 것부터 순서대로 나열하면

$$3, 11, 19, 27, 35, \dots$$

이들의 공통인 수를 작은 것부터 순서대로 나열하면

$$11, 35, 59, \dots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 11, 공차가 24인 등차수열이므로

$$a_1 + a_2 + \dots + a_8 = \frac{8(2 \times 11 + 7 \times 24)}{2} = 760$$

답 ③

0865
$$a_1 = S_1 = -3 \times 1^2 + 2 \times 1 = -1$$

$$a_{10} = S_{10} - S_9$$

$$= (-3 \times 10^2 + 2 \times 10) - (-3 \times 9^2 + 2 \times 9)$$

$$= -55$$

$$\therefore a_1 + a_{10} = -1 + (-55) = -56$$

답 ②

0866 $S_n = n^2 + kn$ 이라 하면

$$a_8 = S_8 - S_7 = (8^2 + 8k) - (7^2 + 7k) = 15 + k$$

$T_n = 2n^2 + n$ 이라 하면

$$b_8 = T_8 - T_7 = (2 \times 8^2 + 8) - (2 \times 7^2 + 7) = 31$$

따라서 $a_8 = b_8$ 에서 $15 + k = 31$

$$\therefore k = 16$$

답 16

0867 (i) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = -(1-2)^2 + k = -1 + k$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \{-(n-2)^2 + k\} - \{-(n-3)^2 + k\} \\ &= -2n + 5 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $a_1 = -1 + k$ 와 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것이 같아야 하므로

$$-1 + k = -2 + 5 \quad \therefore k = 4$$

따라서 $a_1 = -1 + 4 = 3$ 이므로

$$a_1 + k = 3 + 4 = 7$$

답 7

다른 풀이 $S_n = -(n-2)^2 + k = -n^2 + 4n - 4 + k$

이때 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등차수열을 이루려면 $-4 + k = 0$ 이어야 하므로

$$k = 4$$

0868 (i) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 3 \times 1 + 1 = 5$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 + 3n + 1) - \{(n-1)^2 + 3(n-1) + 1\} \\ &= 2n + 2 \end{aligned}$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{21} = 5 + 8 + 12 + \dots + 44$$

$$= 5 + \frac{10(8+44)}{2}$$

$$= 5 + 260$$

$$= 265$$

답 265

0869 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 = 2 \text{에서} \quad ar = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_5 = 16 \text{에서} \quad ar^4 = 16 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면} \quad r^3 = 8 \quad \therefore r = 2$$

$$r = 2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면} \quad a = 1$$

따라서 $a_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$ 이므로

$$a_{10} = 2^9 = 512$$

답 ③

0870 $a_n = 2 \times 3^{1-2n}$ 에서

$$a_1 = 2 \times 3^{-1} = \frac{2}{3}, \quad a_2 = 2 \times 3^{-3} = \frac{2}{27}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 공비는

$$\frac{2}{27} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$$

답 첫째항: $\frac{2}{3}$, **공비:** $\frac{1}{9}$

다른 풀이 $a_n = 2 \times 3^{1-2n} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항은 $\frac{2}{3}$, 공비는 $\frac{1}{9}$ 이다.

0871 주어진 등비수열의 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가

$$-\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = -2 \text{이므로 일반항 } a_n \text{은}$$

$$a_n = \frac{1}{4} \times (-2)^{n-1}$$

256을 제 n 항이라 하면

$$\frac{1}{4} \times (-2)^{n-1} = 256, \quad (-2)^{n-1} = 1024 = (-2)^{10}$$

$$n-1 = 10 \quad \therefore n = 11$$

따라서 256은 제 11 항이다.

답 제 11 항

0872 주어진 등비수열의 첫째항이 $\sqrt{2} + 1$, 공비가

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 \text{이므로}$$

$$a_n = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^{n-1}$$

$$\therefore a_{100} = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^{99}$$

$$= (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)^{98}$$

$$= 1 \times (\sqrt{2}-1)^{98}$$

$$= (\sqrt{2}-1)^{98}$$

답 $(\sqrt{2}-1)^{98}$

0873 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_3 = 8 \text{에서} \quad ar^2 = 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_8 = 64a_5 \text{에서} \quad ar^7 = 64ar^4, \quad r^3 = 64 \quad (\because a \neq 0, r \neq 0)$$

$$\therefore r = 4$$

$$r = 4 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면} \quad 16a = 8 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

따라서 $a_n = \frac{1}{2} \times 4^{n-1}$ 이므로

$$a_4 = \frac{1}{2} \times 4^3 = 32$$

답 ⑤

0874 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = 1 : \sqrt{2} \text{에서}$$

$$(a_1 + a_1r) : (a_1r^2 + a_1r^3) = 1 : \sqrt{2}$$

$$1 : r^2 = 1 : \sqrt{2} \quad \therefore r^2 = \sqrt{2}$$

$$\therefore a_3 : a_7 = a_1r^2 : a_1r^6$$

$$= 1 : r^4 = 1 : (r^2)^2$$

$$= 1 : (\sqrt{2})^2 = 1 : 2$$

답 ①

0875 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\frac{a_{12}}{a_2} = \frac{a_{13}}{a_3} = \frac{a_{14}}{a_4} = \dots = \frac{a_{21}}{a_{11}} = r^{10}$$

... 1단계

따라서 $\frac{a_{12}}{a_2} + \frac{a_{13}}{a_3} + \frac{a_{14}}{a_4} + \dots + \frac{a_{21}}{a_{11}} = 10r^{10}$ 이므로

$$10r^{10} = 20 \quad \therefore r^{10} = 2$$

... 2단계

$$\therefore \frac{a_{50}}{a_{30}} = r^{20} = (r^{10})^2 = 2^2 = 4$$

... 3단계

답 4

채점 요소	비율
1단계 공비를 r 라 하고 $\frac{a_{12}}{a_2}, \frac{a_{13}}{a_3}, \frac{a_{14}}{a_4}, \dots, \frac{a_{21}}{a_{11}}$ 을 각각 r 에 대한 식으로 나타내기	40 %
2단계 r^{10} 의 값 구하기	30 %
3단계 $\frac{a_{50}}{a_{30}}$ 의 값 구하기	30 %

0876 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r ($r > 1$)라 하면 조건 (가)에서 $ar \times ar^3 \times ar^5 = 64$

$$a^3 r^9 = 64, \quad (ar^3)^3 = 4^3 \\ \therefore ar^3 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{가}$$

조건 (나)에서 $\frac{ar^2 + ar^6}{ar^4} = \frac{5}{2}$

$$\frac{1+r^4}{r^2} = \frac{5}{2}, \quad 2(1+r^4) = 5r^2 \\ 2r^4 - 5r^2 + 2 = 0, \quad (2r^2 - 1)(r^2 - 2) = 0 \\ \therefore r^2 = 2 \quad (\because r > 1) \quad \dots\dots \textcircled{나} \\ \therefore a_{10} = ar^9 = ar^3 \times (r^2)^3 \\ = 4 \times 2^3 \quad (\because \textcircled{가}, \textcircled{나}) \\ = 32$$

답 32

다른 풀이 $\textcircled{나}$ 에서 $r = \sqrt{2}$ ($\because r > 1$)
 $r = \sqrt{2}$ 를 $\textcircled{가}$ 에 대입하면 $a \times (\sqrt{2})^3 = 4$
 $\therefore a = \sqrt{2}$
따라서 $a_n = \sqrt{2} \times (\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^n$ 이므로
 $a_{10} = (\sqrt{2})^{10} = 32$

0877 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면
 $a_3 = 4$ 에서 $ar^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{가}$
 $a_6 = 32$ 에서 $ar^5 = 32 \quad \dots\dots \textcircled{나}$

$$\textcircled{나} \div \textcircled{가} \text{을 하면 } r^3 = 8 \quad \therefore r = 2 \\ r = 2 \text{를 } \textcircled{가} \text{에 대입하면 } 4a = 4 \quad \therefore a = 1 \\ \therefore a_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$2^{n-1} > 2000$ 에서 $2^{10} = 1024, 2^{11} = 2048$ 이므로
 $n-1 \geq 11 \quad \therefore n \geq 12$
따라서 처음으로 2000보다 커지는 항은 제 12 항이다. **답 ③**

0878 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면
 $a_2 = 40$ 에서 $ar = 40 \quad \dots\dots \textcircled{가}$
 $a_5 = 5$ 에서 $ar^4 = 5 \quad \dots\dots \textcircled{나}$

$$\textcircled{나} \div \textcircled{가} \text{을 하면 } r^3 = \frac{1}{8} \quad \therefore r = \frac{1}{2} \\ r = \frac{1}{2} \text{을 } \textcircled{가} \text{에 대입하면 } \frac{1}{2}a = 40 \quad \therefore a = 80 \\ \therefore a_n = 80 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 80 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{50} \text{에서 } \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{4000} \\ \therefore 2^{n-1} > 4000$$

이때 $2^{11} = 2048, 2^{12} = 4096$ 이므로

$$n-1 \geq 12 \quad \therefore n \geq 13$$

따라서 $a_n < \frac{1}{50}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 13이다.

답 13

0879 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 + a_3 = 6 \text{에서 } ar + ar^2 = 6 \\ \therefore ar(1+r) = 6 \quad \dots\dots \textcircled{가}$$

$$a_3 + a_4 = -18 \text{에서 } ar^2 + ar^3 = -18 \\ \therefore ar^2(1+r) = -18 \quad \dots\dots \textcircled{나}$$

$$\textcircled{나} \div \textcircled{가} \text{을 하면 } r = -3$$

$r = -3$ 을 $\textcircled{가}$ 에 대입하면

$$6a = 6 \quad \therefore a = 1 \\ \therefore a_n = 1 \times (-3)^{n-1} = (-3)^{n-1}$$

$$\left| \frac{1}{a_n} \right| = \left| \frac{1}{(-3)^{n-1}} \right| = \frac{1}{3^{n-1}} \text{이므로 } \left| \frac{1}{a_n} \right| > \frac{1}{1000} \text{에서}$$

$$\frac{1}{3^{n-1}} > \frac{1}{1000} \quad \therefore 3^{n-1} < 1000$$

이때 $3^6 = 729, 3^7 = 2187$ 이므로

$$n-1 \leq 6 \quad \therefore n \leq 7$$

따라서 $\left| \frac{1}{a_n} \right| > \frac{1}{1000}$ 을 만족시키는 자연수 n 은 1, 2, 3, ..., 7

이므로 구하는 합은

$$1 + 2 + 3 + \dots + 7 = 28 \quad \text{답 28}$$

0880 주어진 등비수열의 공비를 r 라 하면 첫째항이 3, 제 12 항이 40이므로

$$3 \times r^{11} = 40 \quad \therefore r^{11} = \frac{40}{3}$$

이때 a_2, a_9 는 각각 주어진 수열의 제 3 항, 제 10 항이므로

$$a_2 a_9 = 3r^2 \times 3r^9 = 9r^{11} = 9 \times \frac{40}{3} = 120 \quad \text{답 ⑤}$$

0881 첫째항이 18, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열의 제 $(n+2)$ 항이

$$\frac{2}{729} \text{이므로}$$

$$18 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{2}{729}, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^8$$

$$n+1 = 8 \quad \therefore n = 7 \quad \text{답 7}$$

0882 주어진 등비수열의 공비를 r 라 하면 첫째항이 1, 제 10 항이 2이므로

$$1 \times r^9 = 2 \quad \therefore r^9 = 2$$

$a_1 = r, a_2 = r^2, a_3 = r^3, \dots, a_8 = r^8$ 이므로

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_8 = r \times r^2 \times r^3 \times \dots \times r^8 \\ = r^{1+2+3+\dots+8} \\ = r^{36} = (r^9)^4 \\ = 2^4 = 16$$

답 ②

0883 첫째항이 2, 공비가 r 인 등비수열의 제 $(n+2)$ 항이 512
이므로

$$2 \times r^{n+1} = 512 \quad \therefore r^{n+1} = 256$$

이때 $256 = 16^2 = 4^4 = 2^8$ 이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (n, r) 은
 $(1, 16), (3, 4), (7, 2)$

따라서 $n+r$ 의 값은

$$1+16=17 \text{ 또는 } 3+4=7 \text{ 또는 } 7+2=9$$

이므로 구하는 최솟값은 7이다. **답 7**

0884 세 양수 $x, x+2, 3x+11$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(x+2)^2 = x(3x+11)$$

$$2x^2 + 7x - 4 = 0, \quad (x+4)(2x-1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \quad (\because x > 0)$$

답 1/2

0885 다항식 $f(x)$ 를 $x-2, x, x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는 각각

$$f(2) = 3a+4, f(0) = a, f(-1) = 1$$

따라서 세 수 $3a+4, a, 1$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a^2 = (3a+4) \times 1, \quad a^2 - 3a - 4 = 0$$

$$(a+1)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 4$$

즉 구하는 합은 $-1+4=3$ **답 3**

0886 1, a, b 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2a = 1+b \quad \therefore b = 2a-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$a, \sqrt{3}, b$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(\sqrt{3})^2 = ab \quad \therefore ab = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$a(2a-1) = 3, \quad 2a^2 - a - 3 = 0$$

$$(a+1)(2a-3) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}$$

그런데 a 는 정수이므로 $a = -1$

$a = -1$ 을 ①에 대입하면

$$b = 2 \times (-1) - 1 = -3$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (-1)^2 + (-3)^2 = 10$$

답 10

0887 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = 4$$

세 수 α, p, β 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2p = \alpha + \beta = 6 \quad \therefore p = 3$$

세 수 α, q, β 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$q^2 = \alpha\beta = 4 \quad \therefore q = 2 \quad (\because q > 0)$$

따라서 두 수 3, 2를 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2 - (3+2)x + 3 \times 2 = 0$$

$$\therefore x^2 - 5x + 6 = 0$$

답 ⑤

0888 세 실수를 a, ar, ar^2 이라 하면

$$a + ar + ar^2 = 13 \text{ 이므로}$$

$$a(1+r+r^2) = 13 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a \times ar \times ar^2 = 27 \text{ 이므로} \quad (ar)^3 = 27$$

$$ar = 3 \quad \therefore a = \frac{3}{r} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$\frac{3}{r}(1+r+r^2) = 13, \quad 3r^2 - 10r + 3 = 0$$

$$(3r-1)(r-3) = 0 \quad \therefore r = \frac{1}{3} \text{ 또는 } r = 3$$

①에서 $r = \frac{1}{3}$ 이면 $a = 9, r = 3$ 이면 $a = 1$ 이다.

따라서 세 실수는 1, 3, 9이므로 가장 큰 수는 9이다. **답 9**

0889 삼차방정식의 세 실근을 a, ar, ar^2 이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + ar + ar^2 = k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a \times ar + ar \times ar^2 + ar^2 \times a = 56 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$a \times ar \times ar^2 = 64 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{에서} \quad (ar)^3 = 64 \quad \therefore ar = 4 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

①에서 $ar(a + ar + ar^2) = 56$ 이므로 ①, ④을 대입하면

$$4k = 56 \quad \therefore k = 14$$

답 ④

0890 두 곡선 $y = x^3 - 4x^2 + 14x, y = 3x^2 + k$ 의 교점의 x 좌표는 방정식 $x^3 - 4x^2 + 14x = 3x^2 + k$, 즉 $x^3 - 7x^2 + 14x - k = 0$ 의 세 실근이다.

세 실근을 a, ar, ar^2 이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + ar + ar^2 = 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a \times ar + ar \times ar^2 + ar^2 \times a = ar(a + ar + ar^2) = 14 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$a \times ar \times ar^2 = (ar)^3 = k \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면} \quad ar = 2$$

이것을 ③에 대입하면

$$k = 2^3 = 8$$

답 8

0891 직육면체의 밑면의 가로, 세로의 길이와 높이를 각각 a, ar, ar^2 이라 하면 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 104이므로

$$4(a + ar + ar^2) = 104$$

$$\therefore a + ar + ar^2 = 26 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직육면체의 겉넓이가 312이므로

$$2(a \times ar + ar \times ar^2 + ar^2 \times a) = 312$$

$$\therefore ar(a + ar + ar^2) = 156 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면} \quad ar = 6$$

따라서 직육면체의 부피는

$$a \times ar \times ar^2 = (ar)^3 = 6^3 = 216$$

답 216

0892 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{이므로}$$

1회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{3}{4}$$

2회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{3}{4}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

3회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$$\left\{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2\right\} \times \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

⋮

n 회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

따라서 8회 시행 후 남아 있는 종이의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^8$$

답 ④

0893 한 변의 길이가 3인 정사각형의 넓이는 $3^2=9$ 이므로

첫 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$$9 \times \frac{8}{9}$$

두 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$$\left(9 \times \frac{8}{9}\right) \times \frac{8}{9} = 9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

세 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$$\left\{9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^2\right\} \times \frac{8}{9} = 9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^3$$

⋮

n 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$$9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

따라서 시행을 10번 반복한 후 남아 있는 도형의 넓이는

$$9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{10} = \frac{8^{10}}{9^9} = \frac{2^{30}}{3^{18}}$$

즉 $p=30$, $q=18$ 이므로

$$p+q=48$$

답 ④

0894 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_3=32 \text{에서} \quad ar^2=32 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$a_6=4 \text{에서} \quad ar^5=4 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠} \div \text{㉡} \text{을 하면} \quad r^3 = \frac{1}{8} \quad \therefore r = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{1}{2} \text{을 } \text{㉠} \text{에 대입하면} \quad a \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 32 \quad \therefore a = 128$$

$$\therefore S_8 = \frac{128 \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 256 \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}$$

$$= 256 - 1 = 255$$

답 ①

0895 주어진 수열은 첫째항이 -6 , 공비가 $\frac{18}{-6} = -3$ 인 등비수열이므로

$$S_n = \frac{-6\{1 - (-3)^n\}}{1 - (-3)} = -\frac{3}{2}\{1 - (-3)^n\}$$

$$S_k = 1092 \text{에서} \quad -\frac{3}{2}\{1 - (-3)^k\} = 1092$$

$$1 - (-3)^k = -728, \quad (-3)^k = 729 = (-3)^6$$

$$\therefore k=6$$

답 6

0896 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 : a_5 = 1 : 27 \text{에서}$$

$$ar : ar^4 = 1 : 27, \quad 27ar = ar^4$$

$$r^3 = 27 \quad \therefore r = 3$$

$$a_{16} - a_1 = 3^{15} - 1 \text{에서}$$

$$a \times 3^{15} - a = 3^{15} - 1, \quad a(3^{15} - 1) = 3^{15} - 1$$

$$\therefore a = 1$$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 15 항까지의 합은

$$\frac{1 \times (3^{15} - 1)}{3 - 1} = \frac{3^{15} - 1}{2}$$

답 ①

0897 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_1 + a_3 = 15 \text{에서}$$

$$a + ar^2 = 15 \quad \therefore a(1 + r^2) = 15 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$a_3 + a_5 = 60 \text{에서}$$

$$ar^2 + ar^4 = 60 \quad \therefore ar^2(1 + r^2) = 60 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉡ $\div$ ㉠을 하면

$$r^2 = 4 \quad \therefore r = -2 \quad (\because r < 0) \quad \dots \text{1단계}$$

$r = -2$ 를 ㉠에 대입하면

$$5a = 15 \quad \therefore a = 3 \quad \dots \text{2단계}$$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10 항까지의 합은

$$\frac{3\{1 - (-2)^{10}\}}{1 - (-2)} = 1 - 2^{10} = -1023 \quad \dots \text{3단계}$$

답 -1023

채점 요소		비율
1단계	공비 구하기	30 %
2단계	첫째항 구하기	30 %
3단계	첫째항부터 제10 항까지의 합 구하기	40 %

0898 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$S_{10} = \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} = 4 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$S_{20} = \frac{a(r^{20} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^{10} + 1)(r^{10} - 1)}{r - 1} = 44 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉡} \div \text{㉠} \text{을 하면} \quad r^{10} + 1 = 11$$

$$\therefore r^{10} = 10$$

$$\begin{aligned}\therefore S_{30} &= \frac{a(r^{30}-1)}{r-1} = \frac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1} \\ &= \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} \times (r^{20}+r^{10}+1) \\ &= 4 \times (10^2+10+1) = 444\end{aligned}$$

답 444

0899 주어진 등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면
첫째항부터 제 10 항까지의 합이 2이므로

$$\frac{a(r^{10}-1)}{r-1} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

제 11 항부터 제 20 항까지의 합은 첫째항이 ar^{10} , 공비가 r 인 등비수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합과 같고 그 합이 12이므로

$$\frac{ar^{10}(r^{10}-1)}{r-1} = 12 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{을 하면 } r^{10} = 6$$

제 21 항부터 제 30 항까지의 합은 첫째항이 ar^{20} , 공비가 r 인 등비수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합과 같으므로

$$\frac{ar^{20}(r^{10}-1)}{r-1} = (r^{10})^2 \times \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} = 6^2 \times 2 = 72$$

답 ②

0900 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$S_n = \frac{5(r^n-1)}{r-1} = 75 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}S_{2n} &= \frac{5(r^{2n}-1)}{r-1} \\ &= \frac{5(r^n+1)(r^n-1)}{r-1} = 1275 \quad \dots\dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{을 하면 } r^n + 1 = 17$$

$$\therefore r^n = 16$$

$$\textcircled{1} \text{에 } r^n = 16 \text{을 대입하면 } \frac{5(16-1)}{r-1} = 75$$

$$r-1=1 \quad \therefore r=2$$

$$\begin{aligned}\therefore a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1} \\ &= 5 + 5r^2 + 5r^4 + \dots + 5r^{2n-2} \quad \left[\begin{array}{l} \text{첫째항이 } 5, \text{ 공비가 } r^2, \\ \text{항수가 } n \text{인 등비수열의 합} \end{array} \right] \\ &= \frac{5\{(r^2)^n-1\}}{r^2-1} = \frac{5\{(r^n)^2-1\}}{r^2-1} \\ &= \frac{5(16^2-1)}{2^2-1} = 425\end{aligned}$$

답 425

다른 풀이 $r=2$ 를 $r^n=16$ 에 대입하면

$$2^n = 16 = 2^4 \quad \therefore n=4$$

$$\begin{aligned}\therefore a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1} &= a_1 + a_3 + a_5 + a_7 \\ &= \frac{5\{(2^2)^4-1\}}{2^2-1} = 425\end{aligned}$$

0901 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이므로 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 도 등비수열이다.

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$T_3 = \frac{a(1-r^3)}{1-r} = \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}T_6 &= \frac{a(1-r^6)}{1-r} \\ &= \frac{a(1+r^3)(1-r^3)}{1-r} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{을 하면 } 1+r^3=4$$

$$\therefore r^3=3$$

$$\therefore T_9 = \frac{a(1-r^9)}{1-r} = \frac{a(1-r^3)(1+r^3+r^6)}{1-r}$$

$$= \frac{a(1-r^3)}{1-r} \times (1+r^3+r^6)$$

$$= \frac{1}{4} \times (1+3+3^2) = \frac{13}{4}$$

답 $\frac{13}{4}$

채점 요소	비율
①단계 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하고 T_3, T_6 을 a, r 에 대한 식으로 나타내기	40 %
②단계 r^3 의 값 구하기	30 %
③단계 T_9 의 값 구하기	30 %

참고 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a' , 공비를 r' 이라 하면 $a_n = a' \times (r')^{n-1}$ 이므로

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a' \times (r')^{n-1}} = \frac{1}{a'} \times \left(\frac{1}{r'}\right)^{n-1}$$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{a'}$, 공비가 $\frac{1}{r'}$ 인 등비수열이다.

0902 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 = 3 \text{에서 } ar = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_5 = 24 \text{에서 } ar^4 = 24 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{을 하면 } r^3 = 8 \quad \therefore r = 2$$

$$r=2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 2a = 3 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\frac{\frac{3}{2}(2^n-1)}{2-1} = \frac{3}{2}(2^n-1)$$

$$\frac{3}{2}(2^n-1) > 720 \text{에서 } 2^n-1 > 480$$

$$\therefore 2^n > 481$$

$$\text{이때 } 2^8 = 256, 2^9 = 512 \text{이므로 } n \geq 9$$

따라서 첫째항부터 제 9 항까지의 합이 처음으로 720보다 커진다.

답 제9 항

0903 주어진 등비수열의 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$S_n = \frac{1 \times \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$|2 - S_n| < 0.05 \text{에서}$$

$$\left|2 - \left\{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\right| < 0.05, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{20}$$

$$\therefore 2^{n-1} > 20$$

이때 $2^4=16$, $2^5=32$ 이므로

$$n-1 \geq 5 \quad \therefore n \geq 6$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 6이다.

답 ①

0904 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$(a_1+a_2):(a_3+a_4)=1:4$$

$$(a_1+a_1r):(a_1r^2+a_1r^3)=1:4$$

$$1:r^2=1:4, \quad r^2=4$$

$$\therefore r=2 \quad (\because r>0)$$

$$\text{따라서 } S_n > 100a_1 \text{에서 } \frac{a_1(2^n-1)}{2-1} > 100a_1$$

$$2^n-1 > 100 \quad (\because a_1 > 0) \quad \therefore 2^n > 101$$

$$\text{이때 } 2^6=64, 2^7=128 \text{이므로 } n \geq 7$$

즉 자연수 n 의 최솟값은 7이다.

답 7

0905 $2S_n+1=5^n$ 에서 $S_n=\frac{5^n-1}{2}$

(i) $n=1$ 일 때

$$a_1=S_1=\frac{5^1-1}{2}=2$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = \frac{5^n-1}{2} - \left(\frac{5^{n-1}-1}{2} \right) \\ &= 2 \times 5^{n-1} \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $a_1=2$ 는 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n=2 \times 5^{n-1}$$

따라서 $a=2$, $r=5$ 이므로

$$a-r=-3$$

답 ②

0906 (i) $n=1$ 일 때

$$a_1=S_1=2^1-2=0$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-2-(2^{n-1}-2)=2^{n-1}$$

(i), (ii)에서 $a_1+a_3+a_5=0+2^2+2^4=20$ 답 ②

0907 (i) $n=1$ 일 때

$$a_1=S_1=3^0+k=1+k$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3^{n-1} + k - (3^{n-2} + k) \\ &= 2 \times 3^{n-2} \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $a_1=1+k$ 와

$\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것이 같아야 하므로

$$1+k=2 \times 3^{1-2} \quad \therefore k=-\frac{1}{3} \quad \text{답 } -\frac{1}{3}$$

0908 14개의 선분과 직선의 교점의 x 좌표를 작은 것부터 순서대로 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{14}$ 라 하면 수열 $\{x_n\}$ 은 등차수열을 이룬다. $\leftarrow x_n - x_{n-1} = (\text{일정})$

또 교점의 x 좌표가 x_n 인 선분의 길이를 l_n 이라 하면

$$l_n = a(x_n - 1) - x_n = (a-1)x_n - a$$

이므로 수열 $\{l_n\}$ 도 등차수열을 이룬다.

이때 $l_1=3$, $l_{14}=42$ 이므로 14개의 선분의 길이의 합은

$$\frac{14(3+42)}{2} = 315 \quad \text{답 ③}$$

0909 도형 A_1 을 만드는 데 필요한 정사각형은 1개

도형 A_2 를 만드는 데 필요한 정사각형은 $(1+4)$ 개

도형 A_3 을 만드는 데 필요한 정사각형은 $(1+4+4)$ 개

$\vdots$

도형 A_n 을 만드는 데 필요한 정사각형은

$$\{1+4(n-1)\} \text{개}$$

따라서 도형 A_n 을 만드는 데 필요한 정사각형의 넓이의 합을 a_n

이라 하면 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 4인 등차수열이므로

도형 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{20}$ 의 넓이의 합은

$$\begin{aligned} a_1+a_2+\dots+a_{20} &= \frac{20(2 \times 1 + 19 \times 4)}{2} \\ &= 780 \end{aligned}$$

답 780

0910 n 각형의 내각의 크기의 합은

$$180^\circ \times (n-2) = 180^\circ \times n - 360^\circ$$

첫째항이 54° , 공차가 20° , 항수가 n 인 등차수열의 합은

$$\frac{n\{2 \times 54^\circ + (n-1) \times 20^\circ\}}{2} = 10^\circ \times n^2 + 44^\circ \times n$$

따라서 $180^\circ \times n - 360^\circ = 10^\circ \times n^2 + 44^\circ \times n$ 에서

$$5n^2 - 68n + 180 = 0$$

$$(5n-18)(n-10)=0$$

$$\therefore n=10 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

답 10

0911 첫 번째 시행에서 색칠한 부분의 넓이는 한 변의 길이가

2인 정사각형의 넓이의 $\frac{1}{4}$ 이므로

$$4 \times \frac{1}{4} = 1$$

두 번째 시행에서 색칠한 부분의 넓이는

$$1 \times \frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}$$

세 번째 시행에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times 3^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$\vdots$

따라서 시행을 10회 반복했을 때 색칠한 부분의 넓이의 합은

$$\begin{aligned} 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^9 &= \frac{1 \times \left\{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right\}}{1 - \frac{3}{4}} \\ &= 4 \left\{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right\} \end{aligned} \quad \text{답 } 4 \left\{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right\}$$

0912 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3, 공비가 -2 인 등비수열이므로

$$a_n = 3 \times (-2)^{n-1}$$

이때 세 점 $A_n(n, a_n)$, $B_n(n, 0)$, $B_{n+1}(n+1, 0)$ 에 대하여 삼각형 $A_n B_n B_{n+1}$ 의 넓이 S_n 은

$$S_n = \frac{1}{2} \times |a_n| \times 1 = \frac{1}{2} \times |3 \times (-2)^{n-1}|$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 2^{n-1} = \frac{3}{2} \times 2^{n-1}$$

$$\therefore S_1 + S_3 + S_5 + S_7 + S_9$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \times 2^2 + \frac{3}{2} \times 2^4 + \frac{3}{2} \times 2^6 + \frac{3}{2} \times 2^8$$

$$= \frac{\frac{3}{2} \times (4^5 - 1)}{4 - 1} = \frac{4^5 - 1}{2}$$

$$= \frac{1023}{2}$$

답 ④

0913 2013년의 사과 생산량을 a 톤이라 하고 매년 사과 생산량이 전년도 사과 생산량의 r 배라 하면

2013년부터 2017년까지의 사과 생산량이 2000톤이므로

$$\frac{a(r^5 - 1)}{r - 1} = 2000 \quad \dots\dots ㉠$$

2018년부터 2022년까지의 사과 생산량이 2500톤이므로

$$\frac{ar^5(r^5 - 1)}{r - 1} = 2500 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉡ \div ㉠ \text{을 하면} \quad r^5 = \frac{5}{4}$$

따라서 2023년의 사과 생산량은

$$ar^{10} = a(r^5)^2 = a \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}a \text{ (톤)}$$

즉 2023년의 사과 생산량은 2013년의 사과 생산량의 $\frac{25}{16}$ 배이다.

답 $\frac{25}{16}$ 배

0914 10년째 말의 적립금의 원리합계는

$$100(1+0.05) + 100(1+0.05)^2 + \dots + 100(1+0.05)^{10}$$

$$= \frac{100(1+0.05)\{(1+0.05)^{10} - 1\}}{(1+0.05) - 1}$$

$$= \frac{100 \times 1.05 \times 0.6}{0.05} = 1260 \text{ (만 원)}$$

답 1260만 원

0915 아영이의 2027년 말의 적립금의 원리합계는

$$10(1+0.1) + 10(1+0.1)^2 + \dots + 10(1+0.1)^{10}$$

$$= \frac{10(1+0.1)\{(1+0.1)^{10} - 1\}}{(1+0.1) - 1}$$

$$= \frac{10 \times 1.1 \times 1.6}{0.1} = 176 \text{ (만 원)}$$

... 1단계

재민이의 2027년 말의 적립금의 원리합계는

$$15 + 15(1+0.06) + 15(1+0.06)^2 + \dots + 15(1+0.06)^9$$

$$= \frac{15\{(1+0.06)^{10} - 1\}}{(1+0.06) - 1}$$

$$= \frac{15 \times 0.8}{0.06} = 200 \text{ (만 원)}$$

... 2단계

따라서 두 사람의 적립금의 원리합계의 차는

$$200 - 176 = 24 \text{ (만 원)}$$

... 3단계

답 24만 원

	채점 요소	비율
1단계	아영이의 적립금의 원리합계 구하기	40 %
2단계	재민이의 적립금의 원리합계 구하기	40 %
3단계	두 사람의 적립금의 원리합계의 차 구하기	20 %

0916 1년 후의 적립금의 원리합계는

$$a(1+0.01) + a(1+0.01)^2 + \dots + a(1+0.01)^{12}$$

$$= \frac{a(1+0.01)\{(1+0.01)^{12} - 1\}}{(1+0.01) - 1}$$

$$= \frac{a \times 1.01 \times 0.13}{0.01}$$

$$= 13.13a \text{ (원)}$$

$13.13a = 1000000$ 이므로

$$a = \frac{1000000}{13.13} = 76161. \times \times \times$$

이때 십의 자리에서 반올림하므로

$$a = 76200$$

답 ⑤

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 125~128쪽

0917 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항을 각각 a , b 라 하면

$$a_n = a + (n-1) \times (-3) = -3n + 3 + a$$

$$b_n = b + (n-1) \times 2 = 2n - 2 + b$$

$$\therefore 3a_n + 2b_n = 3(-3n + 3 + a) + 2(2n - 2 + b) \\ = -5n + 5 + 3a + 2b$$

따라서

$$3a_1 + 2b_1 = -5 \times 1 + 5 + 3a + 2b = 3a + 2b,$$

$$3a_2 + 2b_2 = -5 \times 2 + 5 + 3a + 2b = 3a + 2b - 5$$

이므로 구하는 공차는

$$(3a + 2b - 5) - (3a + 2b) = -5$$

답 -5

RPM비법노트

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항이 각각 a , b 이고 공차가 각각 d_1 , d_2 이면 수열 $\{ka_n + lb_n\}$ (k, l 은 상수)의 첫째항은 $ka + lb$, 공차는 $kd_1 + ld_2$ 이다.

0918 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_3 + a_8 = (a_1 + 2d) + (a_1 + 7d) = 2a_1 + 9d,$$

$$a_4 + a_5 = (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) = 2a_1 + 7d$$

이때 $(a_3 + a_8) : (a_4 + a_5) = 1 : 3$ 이므로

$$(2a_1 + 9d) : (2a_1 + 7d) = 1 : 3$$

$$3(2a_1 + 9d) = 2a_1 + 7d$$

$$6a_1 + 27d = 2a_1 + 7d, \quad 20d = -4a_1$$

$$\therefore d = -\frac{1}{5}a_1$$

$$\therefore a_{31} = a_1 + 30d = a_1 + 30 \times \left(-\frac{1}{5}a_1\right) = -5a_1$$

답 ②

0919 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면 $a_3a_7=64$ 에서

$$\{a+2 \times (-3)\} \{a+6 \times (-3)\} = 64$$

$$(a-6)(a-18) = 64$$

$$a^2 - 24a + 44 = 0, \quad (a-2)(a-22) = 0$$

$$\therefore a=2 \text{ 또는 } a=22$$

(i) $a=2$ 이면

$$a_8 = 2 + 7 \times (-3) = -19 < 0$$

(ii) $a=22$ 이면

$$a_8 = 22 + 7 \times (-3) = 1 > 0$$

(i), (ii)에서 $a=22$

$$\therefore a_2 = 22 + (-3) = 19$$

답 ③

0920 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_5 = -35 \text{에서} \quad a + 4d = -35 \quad \dots\dots ㉠$$

$$a_{10} = -20 \text{에서} \quad a + 9d = -20 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -47, \quad d = 3$$

$$\therefore a_n = -47 + (n-1) \times 3 = 3n - 50$$

$$a_n > 0 \text{에서} \quad 3n - 50 > 0$$

$$\therefore n > \frac{50}{3} = 16.\ddot{x}$$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제 17 항이다.

답 ④

0921 $\overline{BH} = a - d$, $\overline{CH} = a$, $\overline{AB} = a + d$ 라 하면

$\triangle ABH \sim \triangle CBA$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{AB} : \overline{CB} = \overline{BH} : \overline{BA}$$

$$(a+d) : (2a-d) = (a-d) : (a+d)$$

$$(a+d)^2 = (2a-d)(a-d), \quad a(a-5d) = 0$$

$$\therefore a = 5d \quad (\because a > 0)$$

$$\text{즉 } \overline{AB} = a + d = 5d + d = 6d, \quad \overline{BC} = 2a - d = 2 \times 5d - d = 9d,$$

$\overline{AC} = 5$ 이므로 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$$81d^2 = 36d^2 + 25, \quad 45d^2 = 25$$

$$d^2 = \frac{5}{9} \quad \therefore d = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad (\because d > 0)$$

따라서 선분 BC의 길이는

$$9 \times \frac{\sqrt{5}}{3} = 3\sqrt{5}$$

답 $3\sqrt{5}$

0922 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_{10} = 15 \text{에서} \quad a + 9d = 15 \quad \dots\dots ㉠$$

첫째항부터 제 20 항까지의 합이 270이므로

$$\frac{20(2a+19d)}{2} = 270$$

$$\therefore 2a + 19d = 27 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 42, d = -3$

따라서 첫째항부터 제 30 항까지의 합은

$$\frac{30\{2 \times 42 + 29 \times (-3)\}}{2} = -45$$

답 ②

0923 첫째항이 -10 , 끝항이 30 , 항수가 14 인 등차수열의 합은

$$\frac{14(-10+30)}{2} = 140$$

따라서 $-10 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{12} + 30 = 140$ 이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{12} = 140 - (-10 + 30) = 120$$

답 ②

0924 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2} = 195 \text{에서}$$

$$2a + 9d = 39 \quad \dots\dots ㉠$$

$$S_{15} = \frac{15(2a+14d)}{2} = 105 \text{에서}$$

$$a + 7d = 7 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 42, d = -5$

$$\therefore a_n = 42 + (n-1) \times (-5) = -5n + 47$$

$$-5n + 47 < 0 \text{에서} \quad n > 9.4$$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 제 10 항부터 음수이므로 첫째항부터 제 9 항까지의 합이 최대이다.

따라서 구하는 n 의 값은 9이다.

답 9

0925 60보다 작은 자연수 중에서 3으로 나누어떨어지는 수는

$$3, 6, 9, \dots, 57$$

이때 $57 = 3 \times 19$ 에서 3으로 나누어떨어지는 수의 총합은 첫째항이 3, 끝항이 57, 항수가 19인 등차수열의 합이므로

$$\frac{19(3+57)}{2} = 570$$

60보다 작은 자연수 중에서 4로 나누어떨어지는 수는

$$4, 8, 12, \dots, 56$$

이때 $56 = 4 \times 14$ 에서 4로 나누어떨어지는 수의 총합은 첫째항이 4, 끝항이 56, 항수가 14인 등차수열의 합이므로

$$\frac{14(4+56)}{2} = 420$$

한편 60보다 작은 자연수 중에서 3과 4의 최소공배수인 12로 나누어떨어지는 수는

$$12, 24, 36, 48$$

이므로 그 합은 $12 + 24 + 36 + 48 = 120$

따라서 60보다 작은 자연수 중에서 3 또는 4로 나누어떨어지는 수의 총합은

$$570 + 420 - 120 = 870 \quad \text{답 870}$$

0926 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_{13} = 4(S_3 - S_2)$ 에서

$$a_{13} = 4a_3, \quad 4 + 12d = 4(4 + 2d)$$

$$1 + 3d = 4 + 2d \quad \therefore d = 3$$

$$\therefore S_{16} = \frac{16(2 \times 4 + 15 \times 3)}{2} = 424 \quad \text{답 424}$$

0927 (i) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = -2 \times 1^2 + 8 \times 1 = 6$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (-2n^2 + 8n) - \{-2(n-1)^2 + 8(n-1)\} \\ &= -4n + 10 \quad \dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

이때 $a_1=6$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = -4n + 10$$

$$-4n + 10 < 0 \text{에서} \quad n > 2.5$$

즉 수열 $\{a_n\}$ 이 처음으로 음수가 되는 항은 제 3항이므로

$$\begin{aligned} &|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_{10}| \\ &= a_1 + a_2 - (a_3 + a_4 + \dots + a_{10}) \\ &= 6 + 2 - \frac{8\{-2 + (-30)\}}{2} \\ &= 6 + 2 - (-128) \\ &= 136 \end{aligned}$$

답 136

0928 (i) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 2 \times 1 + 4 = 3$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 - 2n + 4) - \{(n-1)^2 - 2(n-1) + 4\} \\ &= 2n - 3 \end{aligned}$$

$$\neg, a_2 = 2 \times 2 - 3 = 1 \text{ (참)}$$

$$\neg, a_3 = 2 \times 3 - 3 = 3, a_4 = 2 \times 4 - 3 = 5 \text{이므로}$$

$$a_3 - a_1 = 3 - 3 = 0, a_4 - a_2 = 5 - 1 = 4$$

$$\therefore a_3 - a_1 \neq a_4 - a_2 \text{ (거짓)}$$

$$\neg, 2n - 3 > 100 \text{에서} \quad n > 51.5$$

따라서 $a_n > 100$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 52이다.

(참)

이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

답 ③

0929 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r ($r > 0$)라 하면

$$a_3 = \sqrt{3} \text{에서} \quad ar^2 = \sqrt{3} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$a_5 = 3\sqrt{3} \text{에서} \quad ar^4 = 3\sqrt{3} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉡} \div \text{㉠} \text{을 하면} \quad r^2 = 3$$

$$\therefore r = \sqrt{3} \text{ (} \because r > 0 \text{)}$$

$r = \sqrt{3}$ 을 ㉠에 대입하면

$$3a = \sqrt{3} \quad \therefore a = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 $a_n = \frac{\sqrt{3}}{3} \times (\sqrt{3})^{n-1} = 3^{\frac{n-2}{2}}$ 이므로

$$\begin{aligned} a_1 a_2 a_3 \cdots a_{10} &= 3^{-\frac{1}{2}} \times 3^0 \times 3^{\frac{1}{2}} \times \cdots \times 3^4 \\ &= 3^{-\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} + \cdots + 4} \\ &= 3^{\frac{2+3+4+\cdots+8}{2}} \\ &= 3^{\frac{1}{2} \times \frac{7(2+8)}{2}} = 3^{\frac{35}{2}} \end{aligned}$$

답 ③

0930 수열 3, 6, 12, ...는 첫째항이 3, 공비가 $\frac{6}{3} = 2$ 인 등비수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

$$3 \times 2^{n-1} > 300 \text{에서} \quad 2^{n-1} > 100$$

이때 $2^6 = 64, 2^7 = 128$ 이므로

$$n-1 \geq 7 \quad \therefore n \geq 8$$

따라서 처음으로 300보다 커지는 항은 제 8항이다. **답 제 8항**

0931 수열 2, $a_1, a_2, a_3, 32$ 의 공차를 d 라 하면 첫째항이 2, 제 5항이 32이므로

$$2 + 4d = 32 \quad \therefore d = \frac{15}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_1 + a_2 + a_3 &= \left(2 + \frac{15}{2}\right) + \left(2 + 2 \times \frac{15}{2}\right) + \left(2 + 3 \times \frac{15}{2}\right) \\ &= \frac{19}{2} + 17 + \frac{49}{2} = 51 \end{aligned}$$

수열 2, $b_1, b_2, b_3, 32$ 의 공비를 r ($r > 0$)라 하면 첫째항이 2, 제 5항이 32이므로

$$2r^4 = 32, \quad r^4 = 16 \quad \therefore r = 2 \text{ (} \because r > 0 \text{)}$$

$$\therefore b_1 + b_2 + b_3 = 2 \times 2 + 2 \times 2^2 + 2 \times 2^3$$

$$= 4 + 8 + 16 = 28$$

$$\therefore (a_1 + a_2 + a_3) - (b_1 + b_2 + b_3)$$

$$= 51 - 28 = 23$$

답 23

0932 세 수 $a^n, 2^6 \times 3^8, b^n$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $(2^6 \times 3^8)^2 = a^n b^n$

$$\therefore 2^{12} \times 3^{16} = (ab)^n$$

a, b, n 이 모두 자연수이려면 n 은 12와 16의 최대공약수인 4의 약수이어야 한다.

이때 n 의 값이 최대이면 ab 의 값이 최소이므로 $n=4$ 일 때 ab 는 최솟값을 갖는다.

즉 $n=4$ 일 때 $(ab)^4 = 2^{12} \times 3^{16} = (2^3 \times 3^4)^4$ 에서

$$ab = 2^3 \times 3^4 = 648$$

따라서 구하는 최솟값은 648이다.

답 648

0933 세 양수 x, y, z 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $y=xr, z=xr^2$ ($r>0$)이라 하면 조건 (가)에서

$$x+xr+xr^2=x(1+r+r^2)=\frac{31}{2} \quad \dots\dots \textcircled{가}$$

조건 (나)에서

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{xr}+\frac{1}{xr^2}=\frac{1+r+r^2}{xr^2}=\frac{31}{8} \quad \dots\dots \textcircled{나}$$

$\textcircled{가} \div \textcircled{나}$ 을 하면

$$(xr)^2=4 \quad \therefore xr=2 \quad (\because xr>0)$$

$$\therefore xyz=x \times xr \times xr^2=(xr)^3=2^3=8$$

답 8

0934 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

(i) $r=1$ 일 때

$$S_6=1 \times 6=6, S_3=1 \times 3=3, a_4=1 \text{이므로}$$

$$\frac{S_6}{S_3}=\frac{6}{3}=2, 2a_4-7=2 \times 1-7=-5$$

$$\therefore \frac{S_6}{S_3} \neq 2a_4-7$$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $r \neq 1$ 일 때

$$\frac{S_6}{S_3}=2a_4-7 \text{에서}$$

$$\frac{1 \times (r^6-1)}{\frac{r-1}{1 \times (r^3-1)}}=2(1 \times r^3)-7$$

$$\frac{(r^3+1)(r^3-1)}{r^3-1}=2r^3-7$$

$$r^3+1=2r^3-7, \quad r^3=8$$

$$\therefore r=2$$

(i), (ii)에서 $r=2$

따라서 $a_n=1 \times 2^{n-1}=2^{n-1}$ 이므로

$$a_7=2^6=64$$

답 64

0935 주어진 등비수열의 공비를 r 라 하면 첫째항이 2,

제 $(n+2)$ 항이 128이므로

$$2 \times r^{n+1}=128$$

$$\therefore r^{n+1}=64 \quad \dots\dots \textcircled{가}$$

한편 첫째항이 2, 공비가 r , 항수가 $n+2$ 인 등비수열의 합이 86

이므로

$$\frac{2(1-r^{n+2})}{1-r}=86$$

이 식에 $\textcircled{가}$ 을 대입하면

$$\frac{2(1-64r)}{1-r}=86$$

$$2-128r=86-86r$$

$$-42r=84 \quad \therefore r=-2$$

이때 x_4 는 주어진 수열의 제5항이므로

$$x_4=2 \times (-2)^4=32$$

답 ⑤

0936 MN 의 모든 양의 약수의 합은 M 의 양의 약수의 총합과 N 의 양의 약수의 총합의 곱이므로

$$(1+2+2^2+\dots+2^5)(1+3+3^2+\dots+3^6)$$

$$=\frac{1 \times (2^6-1)}{2-1} \times \frac{1 \times (3^7-1)}{3-1}$$

$$=\frac{(2 \times 2^5-1)(3 \times 3^6-1)}{2}$$

$$=\frac{(2M-1)(3N-1)}{2}$$

답 ①

0937 $\neg$. $a_n=1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$$a_{2n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}=\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이다. (참)

$$\therefore S_n=\frac{1 \times \left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{이므로} \quad 2-S_n=2-\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

따라서 수열 $\{2-S_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이다. (참)

$$\therefore a_{n+1}-2a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

따라서 수열 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ 은 첫째항이 $-\frac{3}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이다. (참)

이상에서 $\neg$, $\therefore$, $\therefore$ 모두 옳다.

답 ⑤

0938 $b_n=\log_2 a_n$ 이라 하고 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n=\frac{n^2+3n}{2}$$

(i) $n=1$ 일 때

$$b_1=S_1=\frac{1^2+3 \times 1}{2}=2$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$b_n=S_n-S_{n-1}$$

$$=\frac{n^2+3n}{2}-\left\{\frac{(n-1)^2+3(n-1)}{2}\right\}$$

$$=n+1$$

$\dots\dots \textcircled{가}$

이때 $b_1=2$ 는 $\textcircled{가}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$b_n=n+1$$

즉 $\log_2 a_n=n+1$ 이므로

$$a_n=2^{n+1}=4 \times 2^n$$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 4, 공비가 2이므로 첫째항부터 제 10항까지의 합은

$$\frac{4(2^{10}-1)}{2-1}=4092$$

답 ④

0939 매년 5월 1일마다 a 만 원씩 저축한다고 하면 5년 후의 적립금의 원리합계는

$$\begin{aligned} & a(1+0.1) + a(1+0.1)^2 + a(1+0.1)^3 \\ & + a(1+0.1)^4 + a(1+0.1)^5 \\ & = \frac{a(1+0.1)\{(1+0.1)^5-1\}}{(1+0.1)-1} \\ & = \frac{a \times 1.1 \times 0.6}{0.1} = 6.6a \end{aligned}$$

$6.6a = 3300$ 이므로 $a = 500$

따라서 500만 원씩 일정하게 저축해야 한다.

답 ⑤

0940 곡선 $y = x(x+4)(x-1)$ 과 직선 $y = k$ 의 교점의 x 좌표는 방정식 $x(x+4)(x-1) = k$, 즉 $x^3 + 3x^2 - 4x - k = 0$ 의 세 실근이다.

따라서 삼차방정식 $x^3 + 3x^2 - 4x - k = 0$ 의 세 실근이 α, β, γ 이다. ... 1단계

이때 α, β, γ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $\alpha = \beta - d$, $\gamma = \beta + d$ 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\beta - d) + \beta + (\beta + d) = -3$$

$$\therefore \beta = -1$$

... 2단계

즉 -1 이 삼차방정식 $x^3 + 3x^2 - 4x - k = 0$ 의 한 근이므로

$x = -1$ 을 방정식에 대입하면

$$-1 + 3 + 4 - k = 0 \quad \therefore k = 6$$

... 3단계

답 6

채점 요소	비율
1단계 삼차방정식 $x^3 + 3x^2 - 4x - k = 0$ 의 세 실근이 α, β, γ 임을 알기	30 %
2단계 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 β 의 값 구하기	40 %
3단계 k 의 값 구하기	30 %

0941 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2} = 145 \text{에서}$$

$$2a + 9d = 29$$

..... ① ... 1단계

첫째항부터 제 20항까지의 합이 $145 + 445 = 590$ 이므로

$$S_{20} = \frac{20(2a + 19d)}{2} = 590 \text{에서}$$

$$2a + 19d = 59$$

..... ② ... 2단계

①, ②를 연립하여 풀면 $a = 1, d = 3$

... 3단계

$$\therefore S_{30} = \frac{30(2 \times 1 + 29 \times 3)}{2} = 1335$$

... 4단계

답 1335

채점 요소	비율
1단계 첫째항부터 제 10항까지의 합을 이용하여 식 세우기	30 %
2단계 첫째항부터 제 20항까지의 합을 이용하여 식 세우기	30 %
3단계 첫째항과 공차 구하기	20 %
4단계 첫째항부터 제 30항까지의 합 구하기	20 %

0942 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3 \text{에서}$$

$$a + ar + ar^2 = a(1 + r + r^2)$$

$$= 3$$

..... ①

$$a_4 + a_5 + a_6 = 81 \text{에서}$$

$$ar^3 + ar^4 + ar^5 = ar^3(1 + r + r^2)$$

$$= 81$$

..... ②

... 1단계

② $\div$ ①을 하면

$$r^3 = 27 \quad \therefore r = 3$$

... 2단계

$r = 3$ 을 ①에 대입하면

$$a(1 + 3 + 9) = 3 \quad \therefore a = \frac{3}{13}$$

... 3단계

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 = a + ar^2 + ar^4 = a(1 + r^2 + r^4)$$

$$= \frac{3}{13} \times (1 + 9 + 81) = 21$$

... 4단계

답 21

채점 요소	비율
1단계 첫째항을 a , 공비를 r 라 하고 주어진 조건을 이용하여 a, r 에 대한 식 세우기	40 %
2단계 r 의 값 구하기	20 %
3단계 a 의 값 구하기	20 %
4단계 $a_1 + a_3 + a_5$ 의 값 구하기	20 %

0943 등차수열 a, x, y, b 의 공차를 d 라 하면

$$a + b = a + (a + 3d) = (a + d) + (a + 2d)$$

$$= x + y = 5$$

..... ①

... 1단계

등비수열 a, p, q, b 의 공비를 r 라 하면

$$ab = a \times ar^3 = ar \times ar^2 = pq = 6$$

..... ②

... 2단계

①, ②에서 a, b 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2 - 5t + 6 = 0$ 의 두 근이고 이 이차방정식에서

$$(t - 2)(t - 3) = 0 \quad \therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 3$$

이때 $a < b$ 이므로 $a = 2, b = 3$

... 3단계

$$\therefore a^2 - b^2 = 4 - 9 = -5$$

... 4단계

답 -5

채점 요소	비율
1단계 $a + b$ 의 값 구하기	30 %
2단계 ab 의 값 구하기	30 %
3단계 a, b 의 값 구하기	30 %
4단계 $a^2 - b^2$ 의 값 구하기	10 %

다른 풀이 ①, ②에서

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 5^2 - 4 \times 6 = 1$$

이때 $a < b$ 이므로 $a - b < 0$

$$\therefore a - b = -1$$

$$\therefore a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 5 \times (-1) = -5$$

0944 **전략** 주어진 조건을 이용하여 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차와 등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비를 각각 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d , 등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_7 = a_6 + d = 9 + d, \quad b_7 = b_6 \times r = 9r$$

이므로 조건 (가)에서

$$9 + d = 9r \quad \therefore r = 1 + \frac{d}{9} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 r 는 자연수이므로 d 는 9의 배수이어야 한다.

한편 $a_{11} = a_6 + 5d = 9 + 5d$ 이므로 조건 (나)에서

$$94 < 9 + 5d < 109, \quad 85 < 5d < 100$$

$$\therefore 17 < d < 20$$

그런데 d 는 9의 배수이므로

$$d = 18$$

이것을 ①에 대입하면

$$r = 1 + \frac{18}{9} = 3$$

$$\therefore a_7 + b_8 = (a_6 + d) + (b_6 \times r^2)$$

$$= (9 + 18) + (9 \times 3^2)$$

$$= 27 + 81 = 108$$

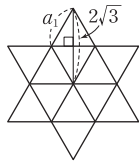
답 ⑤

0945 전략 도형 $S_1, S_2, S_3, \dots$ 의 넓이를 차례대로 구하여 규칙을 찾는다.

☆ 모양의 도형의 넓이는 12개의 합동인 작은 정삼각형의 넓이의 합과 같다.

오른쪽 그림과 같이 도형 S_1 에서 작은 정삼각형의 한 변의 길이를 a_1 이라 하면

$$2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} a_1 = 2\sqrt{3} \quad \therefore a_1 = 2$$



즉 도형 S_1 의 넓이는

$$12 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \right) = 12\sqrt{3}$$

S_1 의 정육각형에 내접하는 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

도형 S_2 에서 작은 정삼각형의 한 변의 길이를 a_2 라 하면

$$2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} a_2 = \sqrt{3} \quad \therefore a_2 = 1$$

즉 도형 S_2 의 넓이는

$$12 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 \right) = 3\sqrt{3}$$

S_2 의 정육각형에 내접하는 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

도형 S_3 에서 작은 정삼각형의 한 변의 길이를 a_3 이라 하면

$$2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} a_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore a_3 = \frac{1}{2}$$

즉 도형 S_3 의 넓이는

$$12 \times \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right\} = \frac{3}{4} \sqrt{3}$$

⋮

도형 S_n 의 넓이는 $12\sqrt{3} \times \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}$

따라서 도형 S_{10} 의 넓이는

$$12\sqrt{3} \times \left(\frac{1}{4} \right)^9 = 3\sqrt{3} \times \left(\frac{1}{4} \right)^8 = \frac{3\sqrt{3}}{2^{16}}$$

답 ⑤

다른 풀이 도형 S_n 과 도형 S_{n+1} 은 닮은 도형이고 닮음비가 2 : 1이므로 넓이의 비는 4 : 1이다.

이때 도형 S_1 의 넓이가 $12\sqrt{3}$ 이므로 도형 S_n 의 넓이는

$$12\sqrt{3} \times \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}$$

0946 전략 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하고 주어진 조건을 a, r 에 대한 식으로 나타낸다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$= \frac{a(1-r^n)}{1-r} = 30$$

⋮ ①

$$a_{2n+1} + a_{2n+2} + a_{2n+3} + \dots + a_{3n}$$

$$= ar^{2n} + ar^{2n+1} + ar^{2n+2} + \dots + ar^{3n-1}$$

$$= \frac{ar^{2n}(1-r^n)}{1-r} = 270$$

⋮ ②

② ÷ ①을 하면 $r^{2n} = 9$

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로 $r^n > 0$

$$\therefore r^n = 3$$

$$\therefore a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{2n}$$

$$= ar^n + ar^{n+1} + ar^{n+2} + \dots + ar^{2n-1}$$

$$= \frac{ar^n(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \times r^n$$

$$= 30 \times 3 = 90$$

답 90

09 수열의 합

교과서 문제 정복하기

본책 131쪽

0947 $\sum_{k=1}^6 5k = 5 \times 1 + 5 \times 2 + 5 \times 3 + 5 \times 4 + 5 \times 5 + 5 \times 6$
 $= 5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30$
답 $5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30$

0948 $\sum_{i=1}^5 2^i = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$
 $= 2 + 4 + 8 + 16 + 32$
답 $2 + 4 + 8 + 16 + 32$

0949 $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$
답 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

0950 $\sum_{j=2}^n \frac{1}{j+1} = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{3+1} + \frac{1}{4+1} + \dots + \frac{1}{n+1}$
 $= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n+1}$
답 $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n+1}$

0951 수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면
 $a_k = \frac{1}{2k}$
 $\therefore \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$ **답** $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$

0952 수열 $1, 3, 3^2, \dots$ 은 첫째항이 1, 공비가 3인 등비수열이므로 제 k 항을 a_k 라 하면
 $a_k = 3^{k-1}$
 이때 $3^{k-1} = 3^9$ 에서 $k-1=9$
 $\therefore k=10$
 $\therefore 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^9 = \sum_{k=1}^{10} 3^{k-1}$ **답** $\sum_{k=1}^{10} 3^{k-1}$

0953 수열 $1, 4, 7, \dots$ 은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이므로 제 k 항을 a_k 라 하면
 $a_k = 1 + (k-1) \times 3 = 3k-2$
 이때 $3k-2=25$ 에서 $k=9$
 $\therefore 1 + 4 + 7 + \dots + 25 = \sum_{k=1}^9 (3k-2)$ **답** $\sum_{k=1}^9 (3k-2)$

0954 수열 $6, 6, 6, \dots$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면
 $a_k = 6$
 $\therefore 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = \sum_{k=1}^5 6$ **답** $\sum_{k=1}^5 6$

0955 $\sum_{k=1}^7 (5a_k - 2) = 5 \sum_{k=1}^7 a_k - \sum_{k=1}^7 2$
 $= 5 \times 2 - 2 \times 7 = -4$ **답** -4

0956 $\sum_{k=1}^7 (2a_k + 3b_k) = 2 \sum_{k=1}^7 a_k + 3 \sum_{k=1}^7 b_k$
 $= 2 \times 2 + 3 \times 3 = 13$ **답** 13

0957 $\sum_{k=1}^{10} (4k+2) = 4 \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 2$
 $= 4 \times \frac{10 \times 11}{2} + 2 \times 10$
 $= 220 + 20 = 240$ **답** 240

0958 $\sum_{k=1}^6 (2k^2 - 3k + 1)$
 $= 2 \sum_{k=1}^6 k^2 - 3 \sum_{k=1}^6 k + \sum_{k=1}^6 1$
 $= 2 \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6} - 3 \times \frac{6 \times 7}{2} + 1 \times 6$
 $= 182 - 63 + 6 = 125$ **답** 125

0959 $\sum_{k=1}^8 k(k+1)(k-1) = \sum_{k=1}^8 (k^3 - k)$
 $= \sum_{k=1}^8 k^3 - \sum_{k=1}^8 k$
 $= \left(\frac{8 \times 9}{2}\right)^2 - \frac{8 \times 9}{2}$
 $= 1296 - 36 = 1260$ **답** 1260

0960 $\sum_{k=1}^5 (k-1)^3 - \sum_{k=1}^5 (k^3 - 1)$
 $= \sum_{k=1}^5 (k^3 - 3k^2 + 3k - 1) - \sum_{k=1}^5 (k^3 - 1)$
 $= \sum_{k=1}^5 \{k^3 - 3k^2 + 3k - 1 - (k^3 - 1)\}$
 $= \sum_{k=1}^5 (-3k^2 + 3k)$
 $= -3 \sum_{k=1}^5 k^2 + 3 \sum_{k=1}^5 k$
 $= -3 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + 3 \times \frac{5 \times 6}{2}$
 $= -165 + 45 = -120$ **답** -120

0961 $3 + 6 + 9 + \dots + 60 = \sum_{k=1}^{20} 3k$
 $= 3 \times \frac{20 \times 21}{2} = 630$ **답** 630

0962 $5^2 + 6^2 + 7^2 + \dots + 15^2 = \sum_{k=1}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^4 k^2$
 $= \frac{15 \times 16 \times 31}{6} - \frac{4 \times 5 \times 9}{6}$
 $= 1240 - 30 = 1210$ **답** 1210

다른 풀이 $5^2 + 6^2 + 7^2 + \dots + 15^2$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{11} (k+4)^2 = \sum_{k=1}^{11} (k^2 + 8k + 16) \\ &= \sum_{k=1}^{11} k^2 + 8 \sum_{k=1}^{11} k + \sum_{k=1}^{11} 16 \\ &= \frac{11 \times 12 \times 23}{6} + 8 \times \frac{11 \times 12}{2} + 16 \times 11 \\ &= 506 + 528 + 176 = 1210 \end{aligned}$$

0963 $2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 14^3 = \sum_{k=1}^7 (2k)^3 = 8 \sum_{k=1}^7 k^3$

$$= 8 \times \left(\frac{7 \times 8}{2} \right)^2 = 6272$$

답 6272

0964 $1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + \dots + 10 \times 12$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{10} k(k+2) = \sum_{k=1}^{10} (k^2 + 2k) \\ &= \sum_{k=1}^{10} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} k \\ &= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 2 \times \frac{10 \times 11}{2} \\ &= 385 + 110 = 495 \end{aligned}$$

답 495

0965 $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k(k+1)}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{21} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21} \end{aligned}$$

답 $\frac{20}{21}$

0966 $\sum_{k=1}^9 \frac{2}{(2k+1)(2k+3)}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^9 \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{21} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

답 $\frac{2}{7}$

0967 $\sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{80} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} \\ &= \sum_{k=1}^{80} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{81} - \sqrt{80}) \\ &= -1 + \sqrt{81} = 8 \end{aligned}$$

답 8

0968 $\sum_{k=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{24} \frac{\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1})} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{24} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + \dots \\ &\quad + (\sqrt{49} - \sqrt{47}) \} \\ &= \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{49}) = 3 \end{aligned}$$

답 3

0969 $\sum_{k=1}^{99} \log \frac{k}{k+1}$

$$\begin{aligned} &= \log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \dots + \log \frac{99}{100} \\ &= \log \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{99}{100} \right) \\ &= \log \frac{1}{100} = -2 \end{aligned}$$

답 -2

0970 수열 $\frac{1}{2 \times 3}, \frac{1}{3 \times 4}, \frac{1}{4 \times 5}, \dots$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$a_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

따라서 구하는 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n}{2(n+2)} \end{aligned}$$

답 $\frac{n}{2(n+2)}$

0971 수열 $\frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{7}}, \dots$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\sqrt{k+3} + \sqrt{k+4}} \\ &= \frac{\sqrt{k+3} - \sqrt{k+4}}{(\sqrt{k+3} + \sqrt{k+4})(\sqrt{k+3} - \sqrt{k+4})} \\ &= \sqrt{k+4} - \sqrt{k+3} \end{aligned}$$

따라서 구하는 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+4} - \sqrt{k+3}) \\ &= (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + (\sqrt{6} - \sqrt{5}) + (\sqrt{7} - \sqrt{6}) + \dots \\ &\quad + (\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3}) \\ &= \sqrt{n+4} - \sqrt{4} = \sqrt{n+4} - 2 \end{aligned}$$

답 $\sqrt{n+4} - 2$

유형 익히기

• 본책 132~138쪽

0972 $\sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k}) = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \dots$

$$+ (a_{2n-1} + a_{2n})$$

이므로 $\sum_{k=1}^{2n} a_k = 5n^2$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k = 5 \times 10^2 = 500$$

답 500

$$\begin{aligned} \text{0973} \quad \textcircled{1} \quad \sum_{k=1}^{n+1} 2k &= 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 2 \times (n+1) \\ &= 2 + 4 + 6 + \cdots + 2(n+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \sum_{k=1}^8 (2k-1) &= (2 \times 1 - 1) + (2 \times 2 - 1) + (2 \times 3 - 1) + \cdots + (2 \times 8 - 1) \\ &= 1 + 3 + 5 + \cdots + 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \sum_{k=1}^9 \frac{1}{2^{k-1}} &= \frac{1}{2^{1-1}} + \frac{1}{2^{2-1}} + \frac{1}{2^{3-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{9-1}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{256} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad \sum_{k=1}^6 (-1)^{k-1} &= (-1)^{1-1} + (-1)^{2-1} + (-1)^{3-1} + \cdots + (-1)^{6-1} \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad \sum_{k=1}^{10} (k+2)^2 &= (1+2)^2 + (2+2)^2 + (3+2)^2 + \cdots + (10+2)^2 \\ &= 9 + 16 + 25 + \cdots + 144 \end{aligned} \quad \text{답 ⑤}$$

참고 ⑤ $9 + 16 + 25 + \cdots + 121 = \sum_{k=1}^9 (k+2)^2$

$$\begin{aligned} \text{0974} \quad \sum_{k=1}^{2024} a_{k+1} - \sum_{n=2}^{2025} a_{n-1} &= (a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2025}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2024}) \\ &= a_{2025} - a_1 = 105 - 5 \\ &= 100 \end{aligned} \quad \text{답 100}$$

$$\begin{aligned} \text{0975} \quad \sum_{k=1}^{20} ka_k &= 200 \text{에서} \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 20a_{20} &= 200 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{19} ka_{k+1} &= 100 \text{에서} \\ a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \cdots + 19a_{20} &= 100 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{을 하면} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20} &= 100 \\ \therefore \sum_{k=1}^{20} a_k &= 100 \end{aligned} \quad \text{답 100}$$

$$\begin{aligned} \text{0976} \quad \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 &= 20 \text{에서} \\ \sum_{k=1}^n (a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2) &= 20 \\ \therefore \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 &= 20 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k - b_k)^2 &= 8 \text{에서} \\ \sum_{k=1}^n (a_k^2 - 2a_k b_k + b_k^2) &= 8 \\ \therefore \sum_{k=1}^n a_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 &= 8 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{을 하면} \quad 4 \sum_{k=1}^n a_k b_k &= 12 \\ \therefore \sum_{k=1}^n a_k b_k &= 3 \end{aligned} \quad \text{답 3}$$

$$\begin{aligned} \text{0977} \quad \sum_{k=1}^9 (2a_k - 1)^2 &= \sum_{k=1}^9 (4a_k^2 - 4a_k + 1) \\ &= 4 \sum_{k=1}^9 a_k^2 - 4 \sum_{k=1}^9 a_k + \sum_{k=1}^9 1 \\ &= 4 \times 12 - 4 \times (-3) + 1 \times 9 \\ &= 69 \end{aligned} \quad \text{답 ⑤}$$

$$\begin{aligned} \text{0978} \quad \sum_{k=1}^{20} (a_k + b_k) &= 13 \text{에서} \\ \sum_{k=1}^{20} a_k + \sum_{k=1}^{20} b_k &= 13 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} (a_k - b_k) &= -3 \text{에서} \\ \sum_{k=1}^{20} a_k - \sum_{k=1}^{20} b_k &= -3 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{을 하면} \quad 2 \sum_{k=1}^{20} a_k = 10 \quad \therefore \sum_{k=1}^{20} a_k = 5$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{을 하면} \quad 2 \sum_{k=1}^{20} b_k = 16 \quad \therefore \sum_{k=1}^{20} b_k = 8$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{20} (3a_k + b_k - 1) &= 3 \sum_{k=1}^{20} a_k + \sum_{k=1}^{20} b_k - \sum_{k=1}^{20} 1 \\ &= 3 \times 5 + 8 - 1 \times 20 \\ &= 3 \end{aligned} \quad \text{답 3}$$

$$\begin{aligned} \text{0979} \quad \sum_{j=1}^n a_j &= n^2 \text{에 } n=30, n=20 \text{을 각각 대입하면} \\ \sum_{j=1}^{30} a_j &= 900, \quad \sum_{j=1}^{20} a_j = 400 \quad \cdots \text{1단계} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n b_j &= 6n \text{에 } n=30, n=20 \text{을 각각 대입하면} \\ \sum_{j=1}^{30} b_j &= 180, \quad \sum_{j=1}^{20} b_j = 120 \quad \cdots \text{2단계} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{j=21}^{30} (2a_j - 3b_j) &= 2 \sum_{j=21}^{30} a_j - 3 \sum_{j=21}^{30} b_j \\ &= 2 \left(\sum_{j=1}^{30} a_j - \sum_{j=1}^{20} a_j \right) - 3 \left(\sum_{j=1}^{30} b_j - \sum_{j=1}^{20} b_j \right) \\ &= 2 \times (900 - 400) - 3 \times (180 - 120) \\ &= 820 \end{aligned} \quad \cdots \text{3단계}$$

답 820

채점 요소		비율
1단계	$\sum_{j=1}^{30} a_j, \sum_{j=1}^{20} a_j$ 의 값 구하기	20 %
2단계	$\sum_{j=1}^{30} b_j, \sum_{j=1}^{20} b_j$ 의 값 구하기	20 %
3단계	$\sum_{j=21}^{30} (2a_j - 3b_j)$ 의 값 구하기	60 %

$$\begin{aligned} \text{0980} \quad \sum_{k=1}^{12} \frac{5^k + 3^k}{4^k} &= \sum_{k=1}^{12} \left(\frac{5}{4} \right)^k + \sum_{k=1}^{12} \left(\frac{3}{4} \right)^k \\ &= \frac{\frac{5}{4} \left[\left(\frac{5}{4} \right)^{12} - 1 \right]}{\frac{5}{4} - 1} + \frac{\frac{3}{4} \left[1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{12} \right]}{1 - \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

$$=5\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^{12}-1\right\}+3\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{12}\right\}$$

$$=5\times\left(\frac{5}{4}\right)^{12}-3\times\left(\frac{3}{4}\right)^{12}-2$$

따라서 $a=5, b=-3, c=-2$ 이므로

$$a+b+c=0$$

답 ③

$$\text{0981} \quad \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} 2^{-k} \cos k\pi$$

$$= \frac{\cos \pi}{2} + \frac{\cos 2\pi}{2^2} + \frac{\cos 3\pi}{2^3} + \dots + \frac{\cos 10\pi}{2^{10}}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots - \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{10}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= -\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}$$

답 ②

0982 등비수열 $1, 2, 2^2, \dots$ 의 첫째항이 1, 공비가 2이므로

$$S_k = \frac{1 \times (2^k - 1)}{2 - 1} = 2^k - 1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n S_k = \sum_{k=1}^n (2^k - 1) = \sum_{k=1}^n 2^k - \sum_{k=1}^n 1$$

$$= \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - 1 \times n$$

$$= 2 \times 2^n - n - 2$$

따라서 $a=2, b=-1, c=-2$ 이므로

$$abc=4$$

답 4

0983 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3=2 \text{에서} \quad a+2d=2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$a_7=18 \text{에서} \quad a+6d=18 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6, d=4$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{10\{2 \times (-6) + 9 \times 4\}}{2} = 120$$

답 ③

0984 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_1 a_4 = 8 \text{에서} \quad a \times ar^3 = 8$$

$$\therefore a^2 r^3 = 8 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$a_3 a_6 = 128 \text{에서} \quad ar^2 \times ar^5 = 128$$

$$\therefore a^2 r^7 = 128 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉡ $\div$ ㉠을 하면 $r^4 = 16$

$$\therefore r = 2 \quad (\because r > 0)$$

$r=2$ 를 ㉠에 대입하면 $8a^2 = 8$

$$a^2 = 1 \quad \therefore a = 1 \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1 \times (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = 511 \text{에서} \quad 2^n - 1 = 511$$

$$2^n = 512 = 2^9 \quad \therefore n = 9$$

답 9

0985 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_8 - a_2 = 12 \text{에서} \quad 6d = 12 \quad \therefore d = 2$$

$$\therefore a_n = 3 + (n-1) \times 2 = 2n + 1$$

따라서 $a_{11} = 2 \times 11 + 1 = 23, a_{20} = 2 \times 20 + 1 = 41$ 이므로

$$\sum_{k=11}^{20} a_k = \frac{10(23+41)}{2} = 320$$

답 ⑤

다른 풀이 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열이므로

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{20} a_k - \sum_{k=1}^{10} a_k$$

$$= \frac{20(2 \times 3 + 19 \times 2)}{2} - \frac{10(2 \times 3 + 9 \times 2)}{2}$$

$$= 440 - 120 = 320$$

$$\text{0986} \quad \sum_{k=1}^{10} (2k-1)^2 + \sum_{k=1}^{10} (2k)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (4k^2 - 4k + 1) + \sum_{k=1}^{10} 4k^2$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (4k^2 - 4k + 1 + 4k^2)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (8k^2 - 4k + 1)$$

$$= 8 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 4 \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 1$$

$$= 8 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 4 \times \frac{10 \times 11}{2} + 1 \times 10$$

$$= 3080 - 220 + 10 = 2870$$

답 2870

$$\text{다른 풀이} \quad \sum_{k=1}^{10} (2k-1)^2 + \sum_{k=1}^{10} (2k)^2$$

$$= (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 19^2) + (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2)$$

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2$$

$$= \sum_{k=1}^{20} k^2 = \frac{20 \times 21 \times 41}{6} = 2870$$

$$\text{0987} \quad \sum_{k=2}^n (2k-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) - \sum_{k=1}^1 (2k-1)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 - 1$$

$$= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - 1 \times n - 1$$

$$= n^2 - 1$$

$$\text{즉 } n^2 - 1 = 80 \text{이므로} \quad n^2 = 81$$

$$\therefore n = 9 \quad (\because n \geq 2)$$

답 9

$$\text{0988} \quad 1 + 2 + 3 + \dots + k = \sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2} \text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{1+2+3+\dots+k}{k+1} = \sum_{k=1}^{20} \frac{\frac{k(k+1)}{2}}{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{20} \frac{k}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{20} k$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{20 \times 21}{2}$$

$$= 105$$

답 105

0989 $\sum_{k=1}^{11} (k-c)(2k-c)$

$$= \sum_{k=1}^{11} (2k^2 - 3ck + c^2)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{11} k^2 - 3c \sum_{k=1}^{11} k + \sum_{k=1}^{11} c^2$$

$$= 2 \times \frac{11 \times 12 \times 23}{6} - 3c \times \frac{11 \times 12}{2} + c^2 \times 11$$

$$= 11c^2 - 198c + 1012$$

$$= 11(c-9)^2 + 121$$

따라서 $\sum_{k=1}^{11} (k-c)(2k-c)$ 의 값이 최소가 되도록 하는 c 의 값은 9이다. **답 ⑤**

0990 주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라 하면 $a_k = k^2(k+1)$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} k^2(k+1) = \sum_{k=1}^{10} (k^3 + k^2)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} k^3 + \sum_{k=1}^{10} k^2$$

$$= \left(\frac{10 \times 11}{2}\right)^2 + \frac{10 \times 11 \times 21}{6}$$

$$= 3025 + 385 = 3410$$
 답 3410

0991 $6+7+8+\dots+n = \sum_{k=6}^n k = \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^5 k$

$$= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{5 \times 6}{2}$$

$$= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 15$$

$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 15 = 105$ 에서 $n^2 + n - 240 = 0$

$$(n+16)(n-15) = 0$$

$\therefore n = 15$ ($\because n$ 은 자연수) **답 ①**

다른 풀이 $6+7+8+\dots+n$

$$= \sum_{k=1}^{n-5} (k+5) = \sum_{k=1}^{n-5} k + \sum_{k=1}^{n-5} 5$$

$$= \frac{(n-5)(n-4)}{2} + 5 \times (n-5) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 15$$

0992 수열 $1 \times 20, 2 \times 19, 3 \times 18, \dots, 20 \times 1$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면 $a_k = k(21-k)$

$$\therefore 1 \times 20 + 2 \times 19 + 3 \times 18 + \dots + 20 \times 1$$

$$= \sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{20} k(21-k) = \sum_{k=1}^{20} (21k - k^2)$$

$$= 21 \sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{20} k^2$$

$$= 21 \times \frac{20 \times 21}{2} - \frac{20 \times 21 \times 41}{6}$$

$$= 4410 - 2870 = 1540$$
 답 ④

0993 $a_k = 2+4+6+\dots+2k$

$$= \sum_{n=1}^k 2n = 2 \sum_{n=1}^k n$$

$$= 2 \times \frac{k(k+1)}{2} = k^2 + k$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{12} a_k = \sum_{k=1}^{12} (k^2 + k) = \sum_{k=1}^{12} k^2 + \sum_{k=1}^{12} k$$

$$= \frac{12 \times 13 \times 25}{6} + \frac{12 \times 13}{2}$$

$$= 650 + 78 = 728$$
 답 728

0994 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2$$

(i) $n=1$ 일 때 $a_1 = S_1 = 1^2 = 1$

(ii) $n \geq 2$ 일 때 $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2$

$$= 2n - 1 \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $a_1=1$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 2n - 1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^5 a_k^2 = \sum_{k=1}^5 (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^5 (4k^2 - 4k + 1)$$

$$= 4 \sum_{k=1}^5 k^2 - 4 \sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=1}^5 1$$

$$= 4 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} - 4 \times \frac{5 \times 6}{2} + 1 \times 5$$

$$= 220 - 60 + 5 = 165$$
 답 ③

0995 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{n}{n+1}$$

(i) $n=1$ 일 때 $a_1 = S_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

(ii) $n \geq 2$ 일 때 $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $a_1 = \frac{1}{2}$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad \dots \text{1단계}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^9 \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^9 k(k+1) = \sum_{k=1}^9 k^2 + \sum_{k=1}^9 k$$

$$= \frac{9 \times 10 \times 19}{6} + \frac{9 \times 10}{2}$$

$$= 285 + 45 = 330 \quad \dots \text{2단계}$$
 답 330

채점 요소		비율
1단계	a_n 구하기	50 %
2단계	$\sum_{k=1}^9 \frac{1}{a_k}$ 의 값 구하기	50 %

0996 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 2^{n+1} - 2$$

(i) $n=1$ 일 때 $a_1 = S_1 = 2^2 - 2 = 2$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = 2^{n+1} - 2 - (2^n - 2) \\ &= 2^n \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $a_1 = 2$ 는 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$\begin{aligned} a_n &= 2^n \\ \therefore \sum_{k=1}^n a_{3k} &= \sum_{k=1}^n 2^{3k} = \sum_{k=1}^n 8^k = \frac{8(8^n - 1)}{8 - 1} = \frac{8}{7}(8^n - 1) \end{aligned} \quad \text{답 ④}$$

0997 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 의 평균이 $n+1$ 이므로

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} = n+1$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = n(n+1)$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n(n+1)$$

(i) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1 \times (1+1) = 2$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = n(n+1) - (n-1)n \\ &= 2n \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $a_1 = 2$ 는 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$\begin{aligned} a_n &= 2n \\ \therefore \sum_{k=1}^{10} ka_k &= \sum_{k=1}^{10} (k \times 2k) = 2 \sum_{k=1}^{10} k^2 \\ &= 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 770 \end{aligned} \quad \text{답 ①}$$

$$\begin{aligned} \text{0998} \quad \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^l k \right) &= \sum_{l=1}^n \frac{l(l+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^n l^2 + \sum_{l=1}^n l \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 35$ 이므로

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2) &= 5 \times 6 \times 7 \\ \therefore n &= 5 \end{aligned} \quad \text{답 5}$$

$$\begin{aligned} \text{0999} \quad \sum_{i=1}^{10} \left(\sum_{k=1}^5 i^2 k \right) &= \sum_{i=1}^{10} \left(i^2 \sum_{k=1}^5 k \right) \\ &= \sum_{i=1}^{10} \left(i^2 \times \frac{5 \times 6}{2} \right) = 15 \sum_{i=1}^{10} i^2 \\ &= 15 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 5775 \end{aligned} \quad \text{답 ④}$$

$$\begin{aligned} \text{1000} \quad \sum_{m=1}^4 \left[\sum_{l=1}^m \left\{ \sum_{k=1}^l (2k - m + 1) \right\} \right] \\ &= \sum_{m=1}^4 \left[\sum_{l=1}^m \left\{ 2 \sum_{k=1}^l k + \sum_{k=1}^l (-m + 1) \right\} \right] \\ &= \sum_{m=1}^4 \left[\sum_{l=1}^m \left\{ 2 \times \frac{l(l+1)}{2} + (-m + 1) \times l \right\} \right] \\ &= \sum_{m=1}^4 \left[\sum_{l=1}^m \{ l^2 + (-m + 2)l \} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=1}^4 \left\{ \sum_{l=1}^m l^2 + (-m + 2) \sum_{l=1}^m l \right\} \\ &= \sum_{m=1}^4 \left\{ \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (-m + 2) \times \frac{m(m+1)}{2} \right\} \\ &= \sum_{m=1}^4 \frac{m(m+1)(-m+7)}{6} \\ &= -\frac{1}{6} \sum_{m=1}^4 (m^3 - 6m^2 - 7m) \\ &= -\frac{1}{6} \left(\sum_{m=1}^4 m^3 - 6 \sum_{m=1}^4 m^2 - 7 \sum_{m=1}^4 m \right) \\ &= -\frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{4 \times 5}{2} \right)^2 - 6 \times \frac{4 \times 5 \times 9}{6} - 7 \times \frac{4 \times 5}{2} \right\} \\ &= -\frac{1}{6} (100 - 180 - 70) = 25 \end{aligned} \quad \text{답 ②}$$

1001 주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{(2k)^2 - 1} = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \end{aligned}$$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제 10항까지의 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{21} \right) = \frac{10}{21} \end{aligned} \quad \text{답 ③}$$

1002 $f(x) = x^2 + 4x + 3$ 이라 하면 $f(x)$ 를 $x-n$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $f(n)$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= n^2 + 4n + 3 \\ \therefore \sum_{n=1}^7 \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^7 \frac{1}{n^2 + 4n + 3} \\ &= \sum_{n=1}^7 \frac{1}{(n+1)(n+3)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^7 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \\ &= \frac{14}{45} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{14}{45}$$

1003 (i) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 + 3 \times 1 = 5$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 + 3n) - \{2(n-1)^2 + 3(n-1)\} \\ &= 4n + 1 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $a_1 = 5$ 는 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 4n + 1$$

$$\begin{aligned}
 \therefore (\text{주어진 식}) &= \sum_{k=1}^5 \frac{1}{a_k a_{k+1}} \\
 &= \sum_{k=1}^5 \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^5 \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+5} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13} \right) + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{21} - \frac{1}{25} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} \right) \\
 &= \frac{1}{25}
 \end{aligned}$$

답 1/25

1004 $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(2n+1)$

$$\begin{aligned}
 &= (2n+1-1)(2n+1+1) \\
 &= 4n(n+1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{n=1}^{11} \frac{8}{(g \circ f)(n)} &= \sum_{n=1}^{11} \frac{8}{4n(n+1)} = 2 \sum_{n=1}^{11} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right) \right\} \\
 &= 2 \left(1 - \frac{1}{12} \right) = \frac{11}{6}
 \end{aligned}$$

답 ①

1005 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}
 \alpha_n + \beta_n &= -4, \quad \alpha_n \beta_n = -(2n-1)(2n+1) \\
 \therefore \frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} &= \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n} = \frac{-4}{-(2n-1)(2n+1)} \\
 &= 2 \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \quad \dots \text{1단계}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{n=1}^{15} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right) &= \sum_{n=1}^{15} 2 \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\
 &= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{29} - \frac{1}{31} \right) \right\} \\
 &= 2 \left(1 - \frac{1}{31} \right) = \frac{60}{31} \quad \dots \text{2단계}
 \end{aligned}$$

답 60/31

채점 요소	비율
1단계 $\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n}$ 을 부분분수로 변형하기	50 %
2단계 $\sum_{n=1}^{15} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right)$ 의 값 구하기	50 %

1006 수열 $\frac{3}{1^2}, \frac{5}{1^2+2^2}, \frac{7}{1^2+2^2+3^2}, \dots$

$$\frac{27}{1^2+2^2+3^2+\dots+13^2} \text{의 제 } k \text{ 항을 } a_k \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2k+1}{1^2+2^2+3^2+\dots+k^2} = \frac{2k+1}{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}} \\
 &= \frac{6}{k(k+1)} = 6 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore (\text{주어진 식}) &= \sum_{k=1}^{13} a_k = \sum_{k=1}^{13} 6 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= 6 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{14} \right) \right\} \\
 &= 6 \left(1 - \frac{1}{14} \right) = \frac{39}{7}
 \end{aligned}$$

답 ②

1007 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2})} \\
 &= \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}
 \end{aligned}$$

따라서 첫째항부터 제 k 항까지의 합은

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=1}^k (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \\
 &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) \\
 &= \sqrt{k+2} - \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

즉 $\sqrt{k+2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ 이므로 $\sqrt{k+2} = 2\sqrt{2}$
 $k+2=8 \quad \therefore k=6$

답 6

1008 $\frac{2}{\sqrt{k-1} + \sqrt{k+1}}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2(\sqrt{k-1} - \sqrt{k+1})}{(\sqrt{k-1} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k-1} - \sqrt{k+1})} \\
 &= \sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^{80} \frac{2}{\sqrt{k-1} + \sqrt{k+1}} &= \sum_{k=1}^{80} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}) \\
 &= (\sqrt{2} - 0) + (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + \dots \\
 &\quad + (\sqrt{80} - \sqrt{78}) + (\sqrt{81} - \sqrt{79}) \\
 &= -1 + \sqrt{80} + \sqrt{81} \\
 &= 8 + 4\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

답 ③

1009 $A_n(n, \sqrt{n+1}), B_n(n, \sqrt{n})$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \overline{A_n B_n} &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\
 \therefore \sum_{n=1}^{120} \overline{A_n B_n} &= \sum_{n=1}^{120} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\
 &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots \\
 &\quad + (\sqrt{121} - \sqrt{120}) \\
 &= \sqrt{121} - 1 = 10
 \end{aligned}$$

답 10

1010 $a_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{20} \log_9 a_k &= \sum_{k=1}^{20} \log_9 3^k \\
 &= \sum_{k=1}^{20} \frac{k}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{20} k \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{20 \times 21}{2} = 105
 \end{aligned}$$

답 105

$$\begin{aligned}
1011 \quad & \sum_{k=1}^{39} \log_3 \{ \log_{2k+1} (2k+3) \} \\
&= \log_3 (\log_3 5) + \log_3 (\log_5 7) + \cdots + \log_3 (\log_{79} 81) \\
&= \log_3 (\log_3 5 \times \log_5 7 \times \cdots \times \log_{79} 81) \\
&= \log_3 \left(\frac{\log 5}{\log 3} \times \frac{\log 7}{\log 5} \times \cdots \times \frac{\log 81}{\log 79} \right) \\
&= \log_3 \left(\frac{\log 81}{\log 3} \right) \\
&= \log_3 (\log_3 81) \\
&= \log_3 4
\end{aligned}$$

답 ②

1012 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \log_2 \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

(i) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = \log_2 \frac{2 \times 3}{2} = \log_2 3$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}
a_n &= S_n - S_{n-1} \\
&= \log_2 \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \log_2 \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \log_2 \frac{n+2}{n} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

이때 $a_1 = \log_2 3$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$\begin{aligned}
a_n &= \log_2 \frac{n+2}{n} \\
\therefore p &= \sum_{k=1}^{10} a_{2k} = \sum_{k=1}^{10} \log_2 \frac{2k+2}{2k} = \sum_{k=1}^{10} \log_2 \frac{k+1}{k} \\
&= \log_2 \frac{2}{1} + \log_2 \frac{3}{2} + \cdots + \log_2 \frac{11}{10} \\
&= \log_2 \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{11}{10} \right) \\
&= \log_2 11 \\
\therefore 8^p &= 8^{\log_2 11} = 11^3 = 1331
\end{aligned}$$

답 1331

1013 수열 $1 \times n, 2 \times (n-1), 3 \times (n-2), \cdots, n \times 1$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$a_k = k\{n - (k-1)\} = -k^2 + (n+1)k$$

따라서 주어진 수열의 합은

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \{-k^2 + (n+1)k\} \\
&= -\sum_{k=1}^n k^2 + (n+1) \sum_{k=1}^n k \\
&= -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1) \times \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \quad \text{답 } \frac{n(n+1)(n+2)}{6}
\end{aligned}$$

1014 수열 $\left(\frac{n+2}{n}\right)^2, \left(\frac{n+4}{n}\right)^2, \left(\frac{n+6}{n}\right)^2, \cdots, \left(\frac{3n}{n}\right)^2$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$a_k = \left(\frac{n+2k}{n}\right)^2 = \left(1 + \frac{2k}{n}\right)^2 = 1 + \frac{4k}{n} + \frac{4k^2}{n^2}$$

따라서 주어진 수열의 합은

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{4k}{n} + \frac{4k^2}{n^2}\right) \\
&= \sum_{k=1}^n 1 + \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \\
&= 1 \times n + \frac{4}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{4}{n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{13n^2 + 12n + 2}{3n}
\end{aligned}$$

답 ②

1015 수열 $1 \times (2n-1), 2 \times (2n-3), 3 \times (2n-5), \cdots, n \times 1$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$\begin{aligned}
a_k &= k\{2n - (2k-1)\} = (2n+1)k - 2k^2 \quad \cdots \textcircled{1} \text{단계} \\
\therefore 1 \times (2n-1) + 2 \times (2n-3) + 3 \times (2n-5) + \cdots + n \times 1 \\
&= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \{(2n+1)k - 2k^2\} \\
&= (2n+1) \sum_{k=1}^n k - 2 \sum_{k=1}^n k^2 \\
&= (2n+1) \times \frac{n(n+1)}{2} - 2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \cdots \textcircled{2} \text{단계}
\end{aligned}$$

따라서 $a=1, b=2, c=1$ 이므로

$$a+b+c=4$$

답 4

	채점 요소	비율
1단계	수열 $1 \times (2n-1), 2 \times (2n-3), 3 \times (2n-5), \cdots, n \times 1$ 의 제 k 항 구하기	30 %
2단계	주어진 등식의 좌변을 간단히 하기	50 %
3단계	$a+b+c$ 의 값 구하기	20 %

1016 주어진 수열을 각 묶음의 마지막 항이 1이 되도록 묶으면

$$(1), (3, 1), (5, 3, 1), (7, 5, 3, 1), \cdots$$

n 번째 묶음의 항의 개수는 n 이므로 첫 번째 묶음부터 n 번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$n=13$ 일 때, $\frac{13 \times 14}{2} = 91$ 이므로 제 95 항은 14번째 묶음의 4 번째 항이다.

이때 n 번째 묶음의 첫째항은 $2n-1$ 이므로 14번째 묶음의 첫째 항은 $2 \times 14 - 1 = 27$ 이다.

따라서 14번째 묶음은 27, 25, 23, 21, $\cdots$, 1이므로 제 95 항은 21이다. 답 ②

1017 주어진 수열을 같은 수끼리 묶으면

$$(1), (2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4, 4), (5, 5, 5, 5, 5), \cdots$$

12가 마지막으로 나오는 항은 12번째 묶음의 마지막 항이다.

이때 n 번째 묶음의 항의 개수는 n 이므로 첫 번째 묶음부터 12번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{12} k = \frac{12 \times 13}{2} = 78$$

$$\therefore m = 78$$

답 78

1018 주어진 수열을 분모가 같은 항끼리 묶으면

$$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right), \dots$$

n 번째 묶음의 모든 항의 분모는 n 이므로 $\frac{8}{14}$ 은 14번째 묶음의 8번째 항이다.

이때 n 번째 묶음의 항의 개수는 n 이므로 첫 번째 묶음부터 13번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{13} k = \frac{13 \times 14}{2} = 91$$

따라서 $91 + 8 = 99$ 이므로 $\frac{8}{14}$ 은 제 99 항이다.

답 제99 항

1019 주어진 수열을 두 수의 곱이 같은 순서쌍끼리 묶으면

$$\{(1, 2), (2, 1)\}, \{(1, 4), (2, 2), (4, 1)\},$$

$$\{(1, 8), (2, 4), (4, 2), (8, 1)\}, \dots$$

n 번째 묶음의 항의 개수는 $n+1$ 이므로 첫 번째 묶음부터 n 번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^n (k+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n+3)}{2}$$

$n=12$ 일 때, $\frac{12 \times 15}{2} = 90$ 이므로 제 100 항은 13번째 묶음의 10번째 항이다.

이때 n 번째 묶음의 k 번째 항은 $(2^{k-1}, 2^{n-k+1})$ 이므로 13번째 묶음의 10번째 항은 $(2^9, 2^4)$, 즉 $(512, 16)$

따라서 $a=512$, $b=16$ 이므로

$$a-b=496$$

답 496

시험에 꼭 나오는 문제

● 본책 139~142쪽

$$\begin{aligned} 1020 \quad \sum_{k=5}^8 a_k &= \sum_{k=1}^8 a_k - \sum_{k=1}^4 a_k = S_8 - S_4 \\ &= (2^8 + 8^2) - (2^4 + 4^2) \\ &= 320 - 32 = 288 \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned} 1021 \quad \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) \\ &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_{n+1} - a_n) \\ &= -a_1 + a_{n+1} = a_{n+1} - 2 \\ \text{이므로} \quad a_{n+1} - 2 &= n^2 - 3n \\ \therefore a_{n+1} &= n^2 - 3n + 2 \end{aligned}$$

양변에 $n=12$ 를 대입하면

$$a_{13} = 12^2 - 3 \times 12 + 2 = 110$$

답 110

1022 자연수 k 에 대하여

(i) $n=3k-2$ 일 때

$$n^2 = (3k-2)^2 = 9k^2 - 12k + 4 = 3(3k^2 - 4k + 1) + 1$$

$$\text{이므로} \quad a_{3k-2} = 1$$

(ii) $n=3k-1$ 일 때

$$n^2 = (3k-1)^2 = 9k^2 - 6k + 1 = 3(3k^2 - 2k) + 1$$

$$\text{이므로} \quad a_{3k-1} = 1$$

(iii) $n=3k$ 일 때

$$n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3 \times 3k^2$$

$$\text{이므로} \quad a_{3k} = 0$$

이상에서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{60} a_k &= \sum_{k=1}^{20} (a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k}) \\ &= \sum_{k=1}^{20} (1 + 1 + 0) = \sum_{k=1}^{20} 2 \\ &= 2 \times 20 = 40 \end{aligned}$$

답 40

$$\begin{aligned} 1023 \quad \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) &= \sum_{k=1}^n \{(a_k + b_k)^2 - 2a_k b_k\} \\ &= \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 - 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k \\ &= 30 - 2 \times 6 = 18 \end{aligned}$$

답 ①

$$\begin{aligned} 1024 \quad \sum_{k=1}^{20} (2a_k + b_k) &= 2 \sum_{k=1}^{20} a_k + \sum_{k=1}^{20} b_k \\ &= 2 \left(\sum_{k=1}^{20} a_k - \sum_{k=1}^{10} a_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{20} b_k - \sum_{k=1}^{10} b_k \right) \\ &= 2 \times (55 - 35) + (40 - 25) \\ &= 55 \end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned} 1025 \quad \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^7 \frac{a_k}{2} &= 56 \text{의 양변에 } 2 \text{를 곱하면} \\ 2 \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^7 a_k &= 112 \quad \dots\dots ㉠ \\ \sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^8 a_k &= 100 \text{에서} \\ 2 \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^8 a_k &= 100 \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ㉠ - ㉡ \text{을 하면} \quad - \sum_{k=1}^7 a_k + \sum_{k=1}^8 a_k &= 12 \\ \therefore a_8 &= 12 \end{aligned}$$

답 12

1026 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2 = 1 \text{에서} \quad a + d = 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$a_8 = -17 \text{에서} \quad a + 7d = -17 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠, ㉡ \text{을 연립하여 풀면} \quad a = 4, d = -3$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{50} a_{2k} - \sum_{k=1}^{50} a_{2k+1} \\ &= (a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{100}) \\ &\quad - (a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_{101}) \\ &= (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + (a_6 - a_7) + \dots \\ &\quad + (a_{100} - a_{101}) \\ &= -50d = -50 \times (-3) = 150 \end{aligned}$$

답 ④

1027 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$\frac{a_2}{a_1} - \frac{a_4}{a_2} = \frac{1}{4} \text{에서} \quad \frac{ar}{a} - \frac{ar^3}{ar} = \frac{1}{4}$$

$$r - r^2 = \frac{1}{4}, \quad 4r^2 - 4r + 1 = 0$$

$$(2r-1)^2 = 0 \quad \therefore r = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^6 a_k = 9 \text{에서} \quad \frac{a \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^6 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 9$$

$$\frac{63}{32}a = 9 \quad \therefore a = \frac{32}{7}$$

따라서 $a_n = \frac{32}{7} \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} a_2 + a_4 + a_6 &= \frac{32}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{32}{7} \times \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \frac{32}{7} \times \left(\frac{1}{2} \right)^5 \\ &= \frac{32}{7} \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right\} \\ &= \frac{32}{7} \times \frac{21}{32} = 3 \end{aligned}$$

답 3

1028 $a_n = 3 + 2(n-1) = 2n + 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{15} (3a_k - 1) &= \sum_{k=1}^{15} \{3(2k+1) - 1\} \\ &= \sum_{k=1}^{15} (6k+2) \\ &= 6 \sum_{k=1}^{15} k + \sum_{k=1}^{15} 2 \\ &= 6 \times \frac{15 \times 16}{2} + 2 \times 15 \\ &= 720 + 30 = 750 \end{aligned}$$

답 750

1029 $\sum_{k=1}^{12} k + \sum_{k=2}^{12} k + \sum_{k=3}^{12} k + \cdots + \sum_{k=12}^{12} k$

$$= (1+2+3+\cdots+12) + (2+3+4+\cdots+12)$$

$$+ (3+4+5+\cdots+12) + \cdots + 12$$

$$= 1+2 \times 2+3 \times 3+\cdots+12 \times 12$$

$$= 1^2+2^2+3^2+\cdots+12^2$$

$$= \sum_{k=1}^{12} k^2 = \frac{12 \times 13 \times 25}{6}$$

$$= 650$$

답 ①

1030 짝수의 제곱은 짝수이고 홀수의 제곱은 홀수이므로

$$f(n^2) = \begin{cases} n^2 & (n \text{이 짝수}) \\ 1 & (n \text{이 홀수}) \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20} f(k^2)$$

$$= 1+2^2+1+4^2+\cdots+1+20^2$$

$$= 1 \times 10 + (2^2+4^2+\cdots+20^2)$$

$$= 10 + \sum_{k=1}^{10} (2k)^2 = 10 + 4 \sum_{k=1}^{10} k^2$$

$$= 10 + 4 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6}$$

$$= 10 + 1540 = 1550$$

답 1550

1031 두 점 A, B는 곡선 $y=x^2+x$ 위의 점이므로 두 점 A, B의 좌표를 각각 $(\alpha_n, \alpha_n^2+\alpha_n)$, $(\beta_n, \beta_n^2+\beta_n)$ 이라 하면

$$a_n = \frac{\alpha_n^2 + \alpha_n - 0}{\alpha_n - 0} = \alpha_n + 1$$

$$b_n = \frac{\beta_n^2 + \beta_n - 0}{\beta_n - 0} = \beta_n + 1$$

$$\therefore a_n + b_n = (\alpha_n + 1) + (\beta_n + 1) = \alpha_n + \beta_n + 2$$

이때 α_n, β_n 은 x 에 대한 방정식 $x^2+x=nx+2$,

즉 $x^2-(n-1)x-2=0$ 의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n + \beta_n = n - 1$$

$$\therefore a_n + b_n = \alpha_n + \beta_n + 2 = (n-1) + 2 = n + 1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{18} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{18} (n + 1)$$

$$= \frac{18 \times 19}{2} + 1 \times 18 = 171 + 18$$

$$= 189$$

답 189

1032 주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$a_k = k + 2k + 3k + \cdots + k \times k$$

$$= \sum_{n=1}^k nk = k \sum_{n=1}^k n$$

$$= k \times \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(k^3 + k^2)$$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제 8 항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^8 a_k = \sum_{k=1}^8 \frac{1}{2}(k^3 + k^2) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^8 k^3 + \sum_{k=1}^8 k^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{8 \times 9}{2} \right)^2 + \frac{8 \times 9 \times 17}{6} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} (1296 + 204) = 750$$

답 ③

1033 $\sum_{k=1}^n \frac{4k-3}{a_k} = 2n^2 + 7n$ 에서

(i) $n=1$ 일 때

$$\frac{1}{a_1} = 9 \quad \therefore a_1 = \frac{1}{9}$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\frac{4n-3}{a_n} = \sum_{k=1}^n \frac{4k-3}{a_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{4k-3}{a_k}$$

$$= (2n^2 + 7n) - \{2(n-1)^2 + 7(n-1)\}$$

$$= 4n + 5$$

$$\therefore a_n = \frac{4n-3}{4n+5}$$

..... ㉠

이때 $a_1 = \frac{1}{9}$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = \frac{4n-3}{4n+5}$$

$$\therefore a_5 \times a_7 \times a_9 = \frac{17}{25} \times \frac{25}{33} \times \frac{33}{41} = \frac{17}{41}$$

따라서 $p=41, q=17$ 이므로

$$p+q=58$$

답 58

$$\begin{aligned}
 1034 \quad \sum_{n=1}^5 \left(\sum_{k=1}^n 2^{k+n-1} \right) &= \sum_{n=1}^5 \left(2^{n-1} \sum_{k=1}^n 2^k \right) \\
 &= \sum_{n=1}^5 \left\{ 2^{n-1} \times \frac{2(2^n-1)}{2-1} \right\} \\
 &= \sum_{n=1}^5 2^{n-1} (2^{n+1}-2) = \sum_{n=1}^5 (2^{2n}-2^n) \\
 &= \sum_{n=1}^5 4^n - \sum_{n=1}^5 2^n \\
 &= \frac{4(4^5-1)}{4-1} - \frac{2(2^5-1)}{2-1} \\
 &= 1364 - 62 \\
 &= 1302
 \end{aligned}$$

답 1302

1035 수열 $\frac{1}{1 \times 4}, \frac{1}{4 \times 7}, \frac{1}{7 \times 10}, \dots, \frac{1}{28 \times 31}$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) \\
 \therefore (\text{주어진 식}) &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left\{ \left(1 - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{28} - \frac{1}{31} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{31} \right) = \frac{10}{31}
 \end{aligned}$$

답 ①

$$\begin{aligned}
 1036 \quad a_n &= \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{3} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{18} \\
 \therefore \sum_{k=1}^{17} \frac{2k+1}{a_k} &= \sum_{k=1}^{17} \left\{ (2k+1) \times \frac{18}{k(k+1)(2k+1)} \right\} \\
 &= \sum_{k=1}^{17} \frac{18}{k(k+1)} = 18 \sum_{k=1}^{17} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= 18 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{18} \right) \right\} \\
 &= 18 \left(1 - \frac{1}{18} \right) = 17
 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}
 1037 \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+3}} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k+3}}{(\sqrt{k+2} + \sqrt{k+3})(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+3})} \\
 &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+3} - \sqrt{k+2}) \\
 &= (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + \dots + (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}) \\
 &= \sqrt{n+3} - \sqrt{3} \\
 \text{즉 } \sqrt{n+3} - \sqrt{3} &= 3\sqrt{3} \text{ 이므로} \\
 \sqrt{n+3} &= 4\sqrt{3} \\
 n+3 &= 48 \quad \therefore n=45
 \end{aligned}$$

답 45

1038 $A_n(-n, \sqrt{2n}), B_n(-n+1, \sqrt{2n-2}), C_n(-n, 0), D_n(-n+1, 0)$ 이므로

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{1}{2} \times (\sqrt{2n} + \sqrt{2n-2}) \times 1 = \frac{1}{2} (\sqrt{2n} + \sqrt{2n-2}) \\
 \therefore \sum_{n=2}^{50} \frac{1}{S_n} &= \sum_{n=2}^{50} \frac{2}{\sqrt{2n} + \sqrt{2n-2}} \\
 &= \sum_{n=2}^{50} \frac{2(\sqrt{2n} - \sqrt{2n-2})}{(\sqrt{2n} + \sqrt{2n-2})(\sqrt{2n} - \sqrt{2n-2})} \\
 &= \sum_{n=2}^{50} (\sqrt{2n} - \sqrt{2n-2}) \\
 &= (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{4}) + \dots \\
 &\quad + (\sqrt{100} - \sqrt{98}) \\
 &= -\sqrt{2} + \sqrt{100} \\
 &= 10 - \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

답 $10 - \sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
 1039 \quad \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{2}{k} \right) &= \sum_{k=1}^n \log \frac{k+2}{k} \\
 &= \log \frac{3}{1} + \log \frac{4}{2} + \log \frac{5}{3} + \dots + \log \frac{n+1}{n-1} + \log \frac{n+2}{n} \\
 &= \log \left(\frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \dots \times \frac{n+1}{n-1} \times \frac{n+2}{n} \right) \\
 &= \log \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
 \text{즉 } \log \frac{(n+1)(n+2)}{2} &= 1 \text{ 이므로} \\
 \frac{(n+1)(n+2)}{2} &= 10, \quad (n+1)(n+2) = 20 \\
 n^2 + 3n - 18 &= 0, \quad (n+6)(n-3) = 0 \\
 \therefore n &= 3 \quad (\because n \text{ 은 자연수})
 \end{aligned}$$

답 3

1040 수열 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2, \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2, \left(1 + \frac{3}{n}\right)^2, \dots, \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$\begin{aligned}
 a_k &= \left(1 + \frac{k}{n} \right)^2 = 1 + \frac{2k}{n} + \frac{k^2}{n^2} \\
 \text{따라서 주어진 수열의 합은} \\
 \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{2k}{n} + \frac{k^2}{n^2} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \\
 &= 1 \times n + \frac{2}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{(2n+1)(7n+1)}{6n}
 \end{aligned}$$

답 ③

1041 주어진 수열을 분모와 분자의 합이 같은 항끼리 묶으면

$$\left(\frac{1}{1} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{1} \right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1} \right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1} \right), \dots$$

n 번째 묶음의 항의 개수는 n 이므로 첫 번째 묶음부터 n 번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$n=11$ 일 때, $\frac{11 \times 12}{2} = 66$ 이므로 제 70 항은 12번째 묶음의 4번째 항이다.

이때 12번째 묶음은 $\frac{1}{12}, \frac{2}{11}, \frac{3}{10}, \frac{4}{9}, \dots, \frac{12}{1}$ 이므로

제 70 항은 $\frac{4}{9}$ 이다. 답 $\frac{4}{9}$

1042 위에서 n 번째 줄에 나열된 수들은 첫째항이 1이고 공차가 n 인 등차수열이다.

따라서 구하는 수는 첫째항이 1이고 공차가 50인 등차수열의 제 30 항이므로

$$1 + 29 \times 50 = 1451 \quad \text{답 1451}$$

1043 수열 $1 \times 3, 3 \times 5, 5 \times 7, \dots, 19 \times 21$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$a_k = (2k-1)(2k+1) = 4k^2 - 1 \quad \dots \text{1단계}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (4k^2 - 1) \\ &= 4 \sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= 4 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 1 \times 10 \\ &= 1540 - 10 \\ &= 1530 \end{aligned}$$

$\dots$ 2단계

답 1530

	채점 요소	비율
1단계	수열 $1 \times 3, 3 \times 5, 5 \times 7, \dots, 19 \times 21$ 의 제 k 항 구하기	40 %
2단계	$1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + \dots + 19 \times 21$ 의 값 구하기	60 %

$$\begin{aligned} \text{1044} \quad & \sum_{m=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^m (k+m) \right\} \\ &= \sum_{m=1}^n \left(\sum_{k=1}^m k + \sum_{k=1}^m m \right) \\ &= \sum_{m=1}^n \left\{ \frac{m(m+1)}{2} + m \times m \right\} \\ &= \sum_{m=1}^n \left(\frac{3}{2}m^2 + \frac{1}{2}m \right) \end{aligned} \quad \dots \text{1단계}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{2} \sum_{m=1}^n m^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n m \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)^2}{2} \end{aligned} \quad \dots \text{2단계}$$

$$\frac{n(n+1)^2}{2} = 90 \text{이므로} \quad n(n+1)^2 = 180 = 5 \times 6^2$$

$$\therefore n=5 \quad \dots \text{3단계}$$

답 5

	채점 요소	비율
1단계	$\sum_{k=1}^m (k+m)$ 구하기	40 %
2단계	$\sum_{m=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^m (k+m) \right\}$ 구하기	40 %
3단계	n 의 값 구하기	20 %

1045 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 4n$$

(i) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 4 \times 1 = 5$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = n^2 + 4n - \{(n-1)^2 + 4(n-1)\} \\ &= 2n + 3 \end{aligned} \quad \dots \text{㉠}$$

이때 $a_1=5$ 는 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 2n + 3 \quad \dots \text{1단계}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^p \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^p \frac{1}{(2k+3)(2k+5)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{2k+3} - \frac{1}{2k+5} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2p+3} - \frac{1}{2p+5} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2p+5} \right) \\ &= \frac{p}{5(2p+5)} \end{aligned} \quad \dots \text{2단계}$$

$$\frac{p}{5(2p+5)} = \frac{2}{25} \text{에서} \quad 25p = 10(2p+5)$$

$$5p = 50 \quad \therefore p = 10 \quad \dots \text{3단계}$$

답 10

	채점 요소	비율
1단계	a_n 구하기	40 %
2단계	$\sum_{k=1}^p \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ 구하기	40 %
3단계	p 의 값 구하기	20 %

1046 $a_n = 2 + (n-1) \times 2 = 2n$ 이므로 $\dots$ 1단계

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k+2}} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \frac{\sqrt{2k} - \sqrt{2k+2}}{(\sqrt{2k} + \sqrt{2k+2})(\sqrt{2k} - \sqrt{2k+2})} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{15} (\sqrt{2k+2} - \sqrt{2k}) \quad \dots \text{2단계} \\ &= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{4}) + \dots + (\sqrt{32} - \sqrt{30}) \} \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{32} - \sqrt{2}) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \quad \dots \text{3단계}$$

$$\text{답 } \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

	채점 요소	비율
1단계	a_n 구하기	20 %
2단계	$\frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}}$ 의 분모를 유리화하기	40 %
3단계	$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}}$ 의 값 구하기	40 %

1047 [전략] $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$ 중 0, 1, 2의 개수를 각각 구한다.

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$ 중 0의 개수를 a , 1의 개수를 b , 2의 개수를 c 라 하면

$$a+b+c=10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sum_{k=1}^{10} x_k = 8 \text{에서} \quad 0 \times a + 1 \times b + 2 \times c = 8$$

$$\therefore b+2c=8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\sum_{k=1}^{10} x_k^2 = 12 \text{에서} \quad 0^2 \times a + 1^2 \times b + 2^2 \times c = 12$$

$$\therefore b+4c=12 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면

$$b=4, c=2$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a+4+2=10 \quad \therefore a=4$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} |x_k - 1| = |0-1| \times 4 + |1-1| \times 4 + |2-1| \times 2 = 6 \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

1048 [전략] 등차수열 $\{a_n\}$ 이 제몇 항에서 처음으로 음수가 되는지 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2=8 \text{에서} \quad a+d=8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_6=0 \text{에서} \quad a+5d=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a=10, d=-2$$

$$\therefore a_n = 10 + (n-1) \times (-2) = -2n + 12$$

$$-2n+12 < 0 \text{에서} \quad n > 6$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 이 처음으로 음수가 되는 항은 제7항이다.

이때

$$\begin{aligned} S_6 &= \sum_{k=1}^6 |a_k| \\ &= \sum_{k=1}^6 (-2k+12) \\ &= \frac{6\{10+(-2 \times 6+12)\}}{2} = 30 \end{aligned}$$

이므로 S_n 의 값이 120 이상이 되려면 $n \geq 7$ 이어야 한다.

$n \geq 7$ 일 때

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n |a_k| \\ &= \sum_{k=1}^6 |a_k| + \sum_{k=7}^n |a_k| \\ &= 30 + \sum_{k=7}^n (2k-12) \\ &= 30 + \frac{(n-6)\{(2 \times 7-12) + (2n-12)\}}{2} \\ &= 30 + (n-6)(n-5) \\ &= n^2 - 11n + 60 \end{aligned}$$

$$n^2 - 11n + 60 \geq 120 \text{에서}$$

$$n^2 - 11n - 60 \geq 0, \quad (n+4)(n-15) \geq 0$$

$$\therefore n \geq 15 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

따라서 S_n 의 값이 120 이상이 되도록 하는 자연수 n 의 최솟값은 15이다. 답 15

참고 $|a_k| \geq 0$ 이므로

$$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \dots \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \dots$$

1049 [전략] 함수 $f(x)$ 가 주기함수임을 이용하여 x 가 정수인 경우와 정수가 아닌 경우의 $f(x)$ 의 값을 각각 구한다.

$f(x+1)=f(x)$ 에서 함수 $f(x)$ 는 주기가 1인 주기함수이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉 x 가 정수이면 $f(x)=1$ 이고, x 가 정수가 아니면 $f(x)=5$ 이다.

이때 $\sqrt{k}$ 가 정수가 되려면 k 는 정수의 제곱의 꼴이어야 하므로

$1 \leq k \leq 25$ 인 자연수 k 에 대하여

$$f(\sqrt{k}) = \begin{cases} 1 & (k=1, 4, 9, 16, 25) \\ 5 & (k \neq 1, 4, 9, 16, 25) \end{cases}$$

따라서 $k=1, 4, 9, 16, 25$ 일 때

$$\frac{k \times f(\sqrt{k})}{5} = \frac{k \times 1}{5} = \frac{k}{5}$$

$k \neq 1, 4, 9, 16, 25$ 일 때

$$\frac{k \times f(\sqrt{k})}{5} = \frac{k \times 5}{5} = k$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{25} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{5} &= \sum_{k=1}^{25} k - (1+4+9+16+25) \\ &\quad + \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5} + \frac{9}{5} + \frac{16}{5} + \frac{25}{5} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{25 \times 26}{2} - 55 + 11$$

$$= 325 - 55 + 11 = 281$$

답 281

1050 [전략] $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 의 양의 약수의 개수가 각각 짝수인지 홀수인지 구해 본다.

$100=2^2 \times 5^2$ 이므로 100의 양의 약수는

$$1, 2, 2^2, 5, 2 \times 5, 2^2 \times 5, 5^2, 2 \times 5^2, 2^2 \times 5^2$$

이때

$$f(1)=1, f(2)=f(5)=2, f(2^2)=f(5^2)=3,$$

$$f(2 \times 5)=4, f(2^2 \times 5)=f(2 \times 5^2)=6, f(2^2 \times 5^2)=9$$

이므로 $f(1), f(2^2), f(5^2), f(2^2 \times 5^2)$ 은 홀수이고,

$f(2), f(5), f(2 \times 5), f(2^2 \times 5), f(2 \times 5^2)$ 은 짝수이다.

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^9 \{(-1)^{f(a_k)} \times \log a_k\} &= -\log 1 + \log 2 - \log 2^2 + \log 5 + \log (2 \times 5) \\ &\quad + \log (2^2 \times 5) - \log 5^2 + \log (2 \times 5^2) \\ &\quad - \log (2^2 \times 5^2) \\ &= \log \frac{2 \times 5 \times (2 \times 5) \times (2^2 \times 5) \times (2 \times 5^2)}{1 \times 2^2 \times 5^2 \times (2^2 \times 5^2)} \\ &= \log 10 \\ &= 1 \end{aligned}$$

답 1

10 수학적 귀납법

교과서 문제 정복하기

본책 145쪽

1051 $a_1=3, a_{n+1}=2a_n-1$ 이므로

$$a_2=2a_1-1=2 \times 3-1=5$$

$$a_3=2a_2-1=2 \times 5-1=9$$

$$a_4=2a_3-1=2 \times 9-1=17$$

답 17

1052 $a_1=-1, a_{n+1}=a_n^2+1$ 이므로

$$a_2=a_1^2+1=(-1)^2+1=2$$

$$a_3=a_2^2+1=2^2+1=5$$

$$a_4=a_3^2+1=5^2+1=26$$

답 26

1053 $a_1=1, a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+2$ 이므로

$$a_2=\frac{1}{a_1}+2=1+2=3$$

$$a_3=\frac{1}{a_2}+2=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$$

$$a_4=\frac{1}{a_3}+2=\frac{3}{7}+2=\frac{17}{7}$$

답 17

1054 $a_1=1, a_2=3, a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$ 이므로

$$a_3=2a_2+a_1=2 \times 3+1=7$$

$$a_4=2a_3+a_2=2 \times 7+3=17$$

답 17

1055 **답** $a_1=2, a_{n+1}=a_n+3 (n=1, 2, 3, \dots)$

1056 **답** $a_1=9, a_{n+1}=-\frac{1}{3}a_n (n=1, 2, 3, \dots)$

1057 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 10, 공차가 -4인 등차수열이므로 수열 $\{a_n\}$ 을 귀납적으로 정의하면

$$a_1=10, a_{n+1}=a_n-4 (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{답 } a_1=10, a_{n+1}=a_n-4 (n=1, 2, 3, \dots)$$

참고 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로

$$a_1=10, a_2=6, a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1} (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{또는 } a_1=10, a_2=6, 2a_{n+1}=a_n+a_{n+2} (n=1, 2, 3, \dots)$$

와 같이 정의할 수도 있다.

1058 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로 수열 $\{a_n\}$ 을 귀납적으로 정의하면

$$a_1=1, a_{n+1}=2a_n (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{답 } a_1=1, a_{n+1}=2a_n (n=1, 2, 3, \dots)$$

참고 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이므로

$$a_1=1, a_2=2, a_{n+1} \div a_n=a_{n+2} \div a_{n+1} (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{또는 } a_1=1, a_2=2, a_{n+1}^2=a_n a_{n+2} (n=1, 2, 3, \dots)$$

와 같이 정의할 수도 있다.

1059 $a_{n+1}=a_n-3$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 -3인 등차수열이다.

이때 첫째항이 3이므로

$$a_n=3+(n-1) \times (-3)=-3n+6 \quad \text{답 } a_n=-3n+6$$

1060 $a_{n+1}=2a_n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 2인 등비수열이다.

이때 첫째항이 5이므로

$$a_n=5 \times 2^{n-1} \quad \text{답 } a_n=5 \times 2^{n-1}$$

1061 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

이때 첫째항이 3, 공차가 $a_2-a_1=2-3=-1$ 이므로

$$a_n=3+(n-1) \times (-1)=-n+4$$

$$\text{답 } a_n=-n+4$$

1062 $a_{n+1}^2=a_n a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

이때 첫째항이 1, 공비가 $a_2 \div a_1=-2 \div 1=-2$ 이므로

$$a_n=1 \times (-2)^{n-1}=(-2)^{n-1} \quad \text{답 } a_n=(-2)^{n-1}$$

1063 $a_{n+1}=a_n+4n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 9를 차례대로 대입하면

$$a_2=a_1+4$$

$$a_3=a_2+8=a_1+4+8$$

$$a_4=a_3+12=a_1+4+8+12$$

$\vdots$

$$\therefore a_{10}=a_9+36=a_1+4+8+12+\dots+36$$

$$=1+\sum_{k=1}^9 4k$$

$$=1+4 \times \frac{9 \times 10}{2}=181$$

답 181

1064 $a_{n+1}-a_n=2n+1$ 에서

$$a_{n+1}=a_n+2n+1$$

n 에 1, 2, 3, ..., 9를 차례대로 대입하면

$$a_2=a_1+3$$

$$a_3=a_2+5=a_1+3+5$$

$$a_4=a_3+7=a_1+3+5+7$$

$\vdots$

$$\therefore a_{10}=a_9+19$$

$$=a_1+3+5+7+\dots+19$$

$$=3+\sum_{k=1}^9 (2k+1)$$

$$=3+2 \times \frac{9 \times 10}{2}+1 \times 9=102$$

답 102

1065 $a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 9를 차례대로 대입하면

$$a_2=\frac{1}{2}a_1$$

$$a_3=\frac{2}{3}a_2=\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}a_1$$

$$\begin{aligned}
 a_4 &= \frac{3}{4}a_3 = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}a_1 \\
 &\vdots \\
 \therefore a_{10} &= \frac{9}{10}a_9 = \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{7}{8} \times \cdots \times \frac{1}{2}a_1 \\
 &= \frac{1}{10}a_1 = \frac{1}{10} \times 2 = \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{5}$

1066 $a_{n+1} \div a_n = 2^n$ 에서

$a_{n+1} = 2^n a_n$
 n 에 1, 2, 3, ..., 9를 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned}
 a_2 &= 2a_1 \\
 a_3 &= 2^2 a_2 = 2^2 \times 2a_1 \\
 a_4 &= 2^3 a_3 = 2^3 \times 2^2 \times 2a_1 \\
 &\vdots \\
 \therefore a_{10} &= 2^9 a_9 = 2^9 \times 2^8 \times 2^7 \times \cdots \times 2a_1 \\
 &= 2^{1+2+3+\cdots+9} \times 1 \\
 &= 2^{\frac{9 \times 10}{2}} = 2^{45}
 \end{aligned}$$

답 2^{45}

1067 (ii) $n=k$ 일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{k}{k+1} \\
 \text{양변에 } \boxed{\text{㉡} \frac{1}{(k+1)(k+2)}} \text{을 더하면} \\
 \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots \\
 + \frac{1}{k(k+1)} + \boxed{\text{㉡} \frac{1}{(k+1)(k+2)}} \\
 = \frac{k}{k+1} + \boxed{\text{㉡} \frac{1}{(k+1)(k+2)}} \\
 = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} \\
 = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\
 = \boxed{\text{㉢} \frac{k+1}{k+2}}
 \end{aligned}$$

답 ㉡ $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ ㉢ $\frac{k+1}{k+2}$

유형 익히기

• 본책 146~152쪽

1068 $a_{n+1} + 3 = a_n$ 에서 $a_{n+1} - a_n = -3$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은
 공차가 -3 인 등차수열이다.

이때 첫째항이 110이므로

$$a_n = 110 + (n-1) \times (-3) = -3n + 113$$

따라서 $a_k = 17$ 에서 $-3k + 113 = 17$

$$3k = 96 \quad \therefore k = 32$$

답 32

1069 $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

이때 첫째항이 2, 공차가 $a_2 - a_1 = 4 - 2 = 2$ 이므로

$$a_n = 2 + (n-1) \times 2 = 2n$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{2k \times 2(k+1)} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k(k+1)} \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{21} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{21} \right) \\
 &= \frac{5}{21}
 \end{aligned}$$

답 ③

1070 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

이때 첫째항이 90, 공차가 $a_2 - a_1 = 86 - 90 = -4$ 이므로

$$a_n = 90 + (n-1) \times (-4) = -4n + 94$$

$a_k < 0$ 에서 $-4k + 94 < 0$

$$4k > 94 \quad \therefore k > 23.5$$

따라서 $a_k < 0$ 을 만족시키는 자연수 k 의 최솟값은 24이다.

답 24

1071 $(a_{n+1} + a_n)^2 = 4a_n a_{n+1} + 36$ 에서

$$a_{n+1}^2 + 2a_n a_{n+1} + a_n^2 = 4a_n a_{n+1} + 36$$

$$a_{n+1}^2 - 2a_n a_{n+1} + a_n^2 = 36$$

$$\therefore (a_{n+1} - a_n)^2 = 36$$

그런데 $a_{n+1} < a_n$ 이므로

$$a_{n+1} - a_n = -6$$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 -6 인 등차수열이므로

$$a_n = 2 + (n-1) \times (-6) = -6n + 8$$

$$\therefore a_{10} = -6 \times 10 + 8 = -52$$

답 -52

1072 $a_{n+1} = 4a_n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 4인 등비수열이다.

이때 첫째항이 1이므로

$$a_n = 1 \times 4^{n-1} = 4^{n-1}$$

$$\therefore \log_2 a_{100} = \log_2 4^{99} = \log_2 2^{198} = 198$$

답 ③

1073 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\frac{a_{11}}{a_1} = \frac{a_{13}}{a_3} = \frac{a_{15}}{a_5} = \frac{a_{17}}{a_7} = r^{10}$$

$$\frac{a_{11}}{a_1} + \frac{a_{13}}{a_3} + \frac{a_{15}}{a_5} + \frac{a_{17}}{a_7} = 12 \text{에서}$$

$$r^{10} + r^{10} + r^{10} + r^{10} = 12, \quad 4r^{10} = 12$$

$$\therefore r^{10} = 3$$

이때 첫째항이 1이므로

$$a_{31} = 1 \times r^{30} = (r^{10})^3 = 3^3 = 27$$

답 ④

1074 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$S_3 = \frac{a(r^3-1)}{r-1} = 78 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$S_6 = \frac{a(r^6-1)}{r-1} = \frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1} = 2184 \quad \dots \textcircled{2} \quad \dots \text{답 6558}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$r^3 + 1 = 28, \quad r^3 = 27$$

$$\therefore r = 3$$

$r = 3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$13a = 78 \quad \therefore a = 6 \quad \dots \text{2단계}$$

$$\therefore S_7 = \frac{6(3^7-1)}{3-1} = 6558 \quad \dots \text{3단계}$$

답 6558

	채점 요소	비율
1단계	수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공비 사이의 관계식 구하기	40 %
2단계	수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공비 구하기	40 %
3단계	S_7 의 값 구하기	20 %

1075 $a_{n+1} = a_n + 3n$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$a_2 = a_1 + 3$$

$$a_3 = a_2 + 6 = a_1 + 3 + 6$$

$$a_4 = a_3 + 9 = a_1 + 3 + 6 + 9$$

$\vdots$

$$\therefore a_n = a_1 + 3 + 6 + 9 + \dots + 3(n-1)$$

$$= -3 + \sum_{k=1}^{n-1} 3k$$

$$= -3 + 3 \times \frac{(n-1)n}{2}$$

$$= \frac{3}{2}(n^2 - n - 2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k &= \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{10} (k^2 - k - 2) \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{10 \times 11 \times 21}{6} - \frac{10 \times 11}{2} - 2 \times 10 \right) \\ &= \frac{3}{2} (385 - 55 - 20) \\ &= 465 \end{aligned} \quad \text{답 ②}$$

1076 $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = a_n + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$a_2 = a_1 + \sqrt{2} - 1$$

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + \sqrt{3} - \sqrt{2} = a_1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ &= a_1 + \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= a_3 + \sqrt{4} - \sqrt{3} = a_1 + \sqrt{3} - 1 + \sqrt{4} - \sqrt{3} \\ &= a_1 + \sqrt{4} - 1 \end{aligned}$$

$\vdots$

$$\therefore a_n = a_1 + \sqrt{n} - 1 = 2 + \sqrt{n} - 1 = \sqrt{n} + 1$$

$$a_k = 13 \text{에서} \quad \sqrt{k} + 1 = 13, \quad \sqrt{k} = 12$$

$$\therefore k = 144$$

답 144

1077 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 10을 차례대로 대입하면

$$a_2 = a_1 + f(1)$$

$$a_3 = a_2 + f(2) = a_1 + f(1) + f(2)$$

$$a_4 = a_3 + f(3) = a_1 + f(1) + f(2) + f(3)$$

$\vdots$

$$\therefore a_{11} = a_1 + f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(10)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{10} f(k) = 1 + 10^2 - 1$$

$$= 100$$

답 100

1078 $a_{n+1} = \frac{n+2}{n} a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 29를 차례대로 대입하면

$$a_2 = \frac{3}{1} a_1$$

$$a_3 = \frac{4}{2} a_2 = \frac{4}{2} \times \frac{3}{1} a_1$$

$$a_4 = \frac{5}{3} a_3 = \frac{5}{3} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{1} a_1$$

$\vdots$

$$\therefore a_{30} = \frac{31}{29} \times \frac{30}{28} \times \dots \times \frac{5}{3} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{1} a_1$$

$$= \frac{31 \times 30}{2 \times 1} \times 1$$

$$= 465$$

답 ④

1079 $a_{n+1} = 5^n a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$a_2 = 5a_1$$

$$a_3 = 5^2 a_2 = 5^2 \times 5a_1$$

$$a_4 = 5^3 a_3 = 5^3 \times 5^2 \times 5a_1$$

$\vdots$

$$\therefore a_n = 5^{n-1} \times 5^{n-2} \times \dots \times 5^3 \times 5^2 \times 5a_1$$

$$= 5^{1+2+3+\dots+(n-1)} \times 1$$

$$= 5^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

$$a_k = 5^{66} \text{에서} \quad 5^{\frac{(k-1)k}{2}} = 5^{66}$$

$$\frac{(k-1)k}{2} = 66, \quad k^2 - k - 132 = 0$$

$$(k-12)(k+11) = 0$$

$$\therefore k = 12 \quad (\because k \text{는 자연수})$$

답 ③

1080 $\sqrt{n+2} a_{n+1} = \sqrt{n+1} a_n$ 에서

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} a_n$$

n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$a_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a_1$$

$$\begin{aligned}
 a_3 &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} a_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} a_1 \\
 a_4 &= \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} a_3 = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} a_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} a_1 \\
 &\vdots \\
 \therefore a_n &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}} a_1 \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}} \times 1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}} \\
 \therefore \sum_{k=1}^{15} (a_k a_{k+1})^2 &= \sum_{k=1}^{15} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k+1}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k+2}} \right)^2 \\
 &= 4 \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
 &= 4 \sum_{k=1}^{15} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\
 &= 4 \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{17} \right) \right\} \\
 &= 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{17} \right) \\
 &= \frac{30}{17}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{30}{17}$

1081 $a_{n+1} = \frac{a_n+2}{4a_n-3}$ 의 n 에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{a_1+2}{4a_1-3} = \frac{1+2}{4 \times 1 - 3} = 3 \\
 a_3 &= \frac{a_2+2}{4a_2-3} = \frac{3+2}{4 \times 3 - 3} = \frac{5}{9} \\
 \therefore a_4 &= \frac{a_3+2}{4a_3-3} = \frac{\frac{5}{9}+2}{4 \times \frac{5}{9} - 3} = -\frac{23}{7}
 \end{aligned}$$

답 $-\frac{23}{7}$

1082 $a_n + a_{n+1} = 3n^2$ 의 n 에 1, 3, 5, ..., 19를 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned}
 a_1 + a_2 &= 3 \times 1^2 \\
 a_3 + a_4 &= 3 \times 3^2 \\
 a_5 + a_6 &= 3 \times 5^2 \\
 &\vdots \\
 a_{19} + a_{20} &= 3 \times 19^2 \\
 \therefore \sum_{k=1}^{20} a_k &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{19} + a_{20}) \\
 &= 3 \times 1^2 + 3 \times 3^2 + 3 \times 5^2 + \cdots + 3 \times 19^2 \\
 &= 3(1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 19^2) \\
 &= 3 \sum_{k=1}^{10} (2k-1)^2 \\
 &= 3 \sum_{k=1}^{10} (4k^2 - 4k + 1) \\
 &= 3 \left(4 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 4 \times \frac{10 \times 11}{2} + 1 \times 10 \right) \\
 &= 3(1540 - 220 + 10) \\
 &= 3990
 \end{aligned}$$

답 3990

1083 $a_{n+1} + 4a_n = (-1)^n \times n$ 에서

$$a_{n+1} = -4a_n + (-1)^n \times n$$

n 에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$a_2 = -4a_1 + (-1)^1 \times 1 = -4a_1 - 1$$

$$a_3 = -4a_2 + (-1)^2 \times 2 = -4a_2 + 2$$

$$= -4(-4a_1 - 1) + 2$$

$$= 16a_1 + 6$$

$$a_4 = -4a_3 + (-1)^3 \times 3 = -4a_3 - 3$$

$$= -4(16a_1 + 6) - 3$$

$$= -64a_1 - 27$$

$$\therefore a_5 = -4a_4 + (-1)^4 \times 4 = -4a_4 + 4$$

$$= -4(-64a_1 - 27) + 4$$

$$= 256a_1 + 112$$

즉 $256a_1 + 112 = -144$ 이므로

$$256a_1 = -256 \quad \therefore a_1 = -1$$

답 -1

다른 풀이 $a_{n+1} + 4a_n = (-1)^n \times n$ 의 n 에 4를 대입하면

$$a_5 + 4a_4 = (-1)^4 \times 4$$

$$-144 + 4a_4 = 4 \quad \therefore a_4 = 37$$

n 에 3을 대입하면 $a_4 + 4a_3 = (-1)^3 \times 3$

$$37 + 4a_3 = -3 \quad \therefore a_3 = -10$$

n 에 2를 대입하면 $a_3 + 4a_2 = (-1)^2 \times 2$

$$-10 + 4a_2 = 2 \quad \therefore a_2 = 3$$

n 에 1을 대입하면 $a_2 + 4a_1 = (-1)^1 \times 1$

$$3 + 4a_1 = -1 \quad \therefore a_1 = -1$$

1084 $a_1 < 0$ 이므로

$$a_2 = 3 - a_1 = 3 - (-5) = 8$$

$a_2 > 0$ 이므로 $a_3 = a_2 + p = 8 + p$

(i) $a_3 \geq 0$, 즉 $p \geq -8$ 인 경우

$$a_4 = a_3 + p \text{이므로} \quad 6 = (8+p) + p$$

$$2p = -2 \quad \therefore p = -1$$

(ii) $a_3 < 0$, 즉 $p < -8$ 인 경우

$$a_4 = 3 - a_3 \text{이므로} \quad 6 = 3 - (8+p)$$

$$\therefore p = -11$$

(i), (ii)에서 모든 p 의 값의 곱은

$$-1 \times (-11) = 11$$

답 11

1085 $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n+1 & (a_n \leq 1) \\ a_n-1 & (a_n > 1) \end{cases}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$a_2 = a_1 - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$a_3 = a_2 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$a_4 = 2 \times a_3 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$a_5 = a_4 - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\vdots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 3, 2, 1이 이 순서대로 반복된다.

이때 $200 = 3 \times 66 + 2$ 이므로 $a_{200} = 2$

답 2

1086 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 - a_1 = 12 - 4 = 8 \\ a_4 &= a_3 - a_2 = 8 - 12 = -4 \\ a_5 &= a_4 - a_3 = -4 - 8 = -12 \\ a_6 &= a_5 - a_4 = -12 - (-4) = -8 \\ a_7 &= a_6 - a_5 = -8 - (-12) = 4 \\ a_8 &= a_7 - a_6 = 4 - (-8) = 12 \\ &\vdots \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 4, 12, 8, -4, -12, -8이 이 순서대로 반복된다.

이때 반복되는 6개의 수 중에서 $|a_k|=12$ 를 만족시키는 것은 12, -12의 2개이고 $100=6 \times 16 + 4$ 이므로 구하는 자연수 k 의 개수는

$$2 \times 16 + 1 = 33 \quad \text{답 33}$$

1087 조건 ㉑의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 - 3 \\ a_4 &= a_2 + 3 \\ a_5 &= a_3 - 3 = (a_1 - 3) - 3 = a_1 - 6 \\ a_6 &= a_4 + 3 = (a_2 + 3) + 3 = a_2 + 6 \\ \therefore a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \\ &= a_1 + a_2 + (a_1 - 3) + (a_2 + 3) + (a_1 - 6) + (a_2 + 6) \\ &= 3(a_1 + a_2) \end{aligned}$$

이때 조건 ㉒에 의하여

$$\begin{aligned} a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \\ &= 3(a_1 + a_2) \\ a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_{17} + a_{18} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \\ &= 3(a_1 + a_2) \\ &\vdots \\ a_{43} + a_{44} + a_{45} + a_{46} + a_{47} + a_{48} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \\ &= 3(a_1 + a_2) \\ a_{49} + a_{50} &= a_1 + a_2 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{50} a_k &= 8 \times 3(a_1 + a_2) + a_1 + a_2 \\ &= 25(a_1 + a_2) = 25 \times 7 = 175 \quad \text{답 175} \end{aligned}$$

1088 $S_n=2a_n-2$ 에서

$$S_{n+1}=2a_{n+1}-2$$

한편 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_{n+1} - 2 - (2a_n - 2) \\ \therefore a_{n+1} &= 2a_n \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \times 2^{n-1} = 2^n \\ \therefore a_8 &= 2^8 = 256 \quad \text{답 256} \end{aligned}$$

1089 $S_{n+1}=3S_n+1$ 의 n 에 1, 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} S_2 &= 3S_1 + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4 \\ S_3 &= 3S_2 + 1 = 3 \times 4 + 1 = 13 \\ S_4 &= 3S_3 + 1 = 3 \times 13 + 1 = 40 \\ S_5 &= 3S_4 + 1 = 3 \times 40 + 1 = 121 \\ S_6 &= 3S_5 + 1 = 3 \times 121 + 1 = 364 \\ \therefore a_6 &= S_6 - S_5 = 364 - 121 = 243 \end{aligned}$$

답 243

다른 풀이 $S_{n+1}=3S_n+1$ 에서

$$S_{n+2}=3S_{n+1}+1$$

한편 $a_{n+2}=S_{n+2}-S_{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 3S_{n+1} + 1 - (3S_n + 1) \\ \therefore a_{n+2} &= 3a_{n+1} \quad \dots\dots \text{㉑} \end{aligned}$$

이때 $a_1=S_1=1$ 이고 $S_{n+1}=3S_n+1$ 의 n 에 1을 대입하면

$$\begin{aligned} S_2 &= 3S_1 + 1, \quad 1 + a_2 = 3 \times 1 + 1 \\ \therefore a_2 &= 3 \end{aligned}$$

즉 $a_2=3a_1$ 이므로 ㉑에서

$$a_{n+1}=3a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 3인 등비수열이므로

$$a_n = 1 \times 3^{n-1} = 3^{n-1} \quad \therefore a_6 = 3^5 = 243$$

1090 $2S_n=a_n+n$, 즉 $S_n=\frac{1}{2}a_n+\frac{n}{2}$ 에서

$$S_{n+1}=\frac{1}{2}a_{n+1}+\frac{n+1}{2}$$

한편 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{n+1}{2} - \left(\frac{1}{2}a_n + \frac{n}{2} \right) \\ \therefore a_{n+1} &= -a_n + 1 \end{aligned}$$

n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_1 + 1 = -3 + 1 = -2 \\ a_3 &= -a_2 + 1 = -(-2) + 1 = 3 \\ a_4 &= -a_3 + 1 = -3 + 1 = -2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 3, -2가 이 순서대로 반복된다.

이때 $100=2 \times 50$ 이므로 $a_{100}=-2$ 답 -2

1091 $3S_n=a_{n+1}-2$, 즉 $S_n=\frac{1}{3}a_{n+1}-\frac{2}{3}$ 에서

$$S_{n+1}=\frac{1}{3}a_{n+2}-\frac{2}{3}$$

한편 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{3}a_{n+2} - \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{3}a_{n+1} - \frac{2}{3} \right) \\ \therefore a_{n+2} &= 4a_{n+1} \quad \dots\dots \text{㉑} \quad \dots \text{1단계} \end{aligned}$$

$3S_n=a_{n+1}-2$ 의 n 에 1을 대입하면

$$3S_1=a_2-2$$

이때 $S_1=a_1=2$ 이므로

$$3 \times 2 = a_2 - 2 \quad \therefore a_2 = 8$$

즉 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{8}{2} = 4$ 이므로 ㉠에서

$$a_{n+1} = 4a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 4인 등비수열이므로

$$a_n = 2 \times 4^{n-1} \quad \dots \text{2단계}$$

$$a_k = 512 \text{에서} \quad 2 \times 4^{k-1} = 512$$

$$4^{k-1} = 256 = 4^4, \quad k-1=4$$

$$\therefore k=5 \quad \dots \text{3단계}$$

답 5

채점 요소	비율
1단계 a_{n+1} 과 a_{n+2} 사이의 관계식 구하기	40 %
2단계 a_n 구하기	30 %
3단계 자연수 k 의 값 구하기	30 %

1092 ① 조건 (가)에서 $p(1)$ 이 참이므로 조건 (나)에 의하여 $p(2)$ 도 참이다.

$p(2)$ 가 참이므로 조건 (나)에 의하여 $p(4)$ 도 참이다.

③ $p(4)$ 가 참이므로 조건 (나)에 의하여 $p(7)$ 도 참이다.

④ $p(7)$ 이 참이므로 조건 (나)에 의하여 $p(8)$ 도 참이다.

⑤ $p(8)$ 이 참이므로 조건 (나)에 의하여 $p(13)$ 도 참이다.

따라서 $p(5)$ 가 참인지는 알 수 없으므로 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 ②이다. **답 ②**

1093 ㄱ. $p(1)$ 이 참이면 주어진 조건에 의하여

$$p(3), p(5), p(7), \dots, p(2k+1)$$

이 참이다. (참)

ㄴ. $p(2)$ 가 참이면 주어진 조건에 의하여

$$p(4), p(6), p(8), \dots, p(2k)$$

가 참이지만 $p(2k+3)$ 이 참인지는 알 수 없다. (거짓)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서 $p(1)$ 이 참이면 $p(2k+1)$ 이 참이고, $p(2)$ 가 참이면 $p(2k)$ 가 참이다.

따라서 $p(1), p(2)$ 가 참이면 $p(k)$ 가 참이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답 ④**

1094 (ii) $n = \boxed{(가) k}$ 일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1+2+2^2+\dots+2^{k-1}=2^k-1$$

양변에 $\boxed{(나) 2^k}$ 을 더하면

$$1+2+2^2+\dots+2^{k-1}+\boxed{(나) 2^k}$$

$$=2^k-1+\boxed{(나) 2^k}=\boxed{(다) 2^{k+1}-1}$$

따라서 $n = \boxed{(라) k+1}$ 일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 ㉠이 성립한다. **답 ②**

1095 (ii) $n = k$ 일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$$

양변에 $\boxed{(가) 2k+1}$ 을 더하면

$$1+3+5+\dots+(2k-1)+\boxed{(가) 2k+1}$$

$$=k^2+\boxed{(가) 2k+1}=\boxed{(나) (k+1)^2}$$

따라서 $n = k+1$ 일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 ㉠이 성립한다.

즉 $f(k) = 2k+1, g(k) = (k+1)^2$ 이므로

$$f(3)+g(2)=7+3^2=16$$

답 16

1096 (ii) $n = k$ 일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1^3+2^3+3^3+\dots+k^3=(1+2+3+\dots+k)^2$$

양변에 $\boxed{(가) (k+1)^3}$ 을 더하면

$$1^3+2^3+3^3+\dots+k^3+\boxed{(가) (k+1)^3}$$

$$=(1+2+3+\dots+k)^2+\boxed{(가) (k+1)^3}$$

$$=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+\boxed{(가) (k+1)^3}$$

$$=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}$$

$$=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$=\boxed{(나) \left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2}$$

따라서 $n = k+1$ 일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 ㉠이 성립한다.

즉 $f(k) = (k+1)^3, g(k) = \left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$ 이므로

$$\frac{g(10)}{f(5)} = \frac{\left(\frac{11 \times 12}{2}\right)^2}{6^3} = \frac{121}{6}$$

답 121/6

$$\textbf{1097} \quad \frac{4}{3} + \frac{8}{3^2} + \frac{12}{3^3} + \dots + \frac{4n}{3^n}$$

$$= 3 - \frac{2n+3}{3^n} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = \frac{4 \times 1}{3^1} = \frac{4}{3}, \quad (\text{우변}) = 3 - \frac{2 \times 1 + 3}{3^1} = \frac{4}{3}$$

따라서 ㉠이 성립한다.

답 1단계

(ii) $n = k$ 일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\frac{4}{3} + \frac{8}{3^2} + \frac{12}{3^3} + \dots + \frac{4k}{3^k} = 3 - \frac{2k+3}{3^k}$$

양변에 $\frac{4(k+1)}{3^{k+1}}$ 을 더하면

$$\frac{4}{3} + \frac{8}{3^2} + \frac{12}{3^3} + \dots + \frac{4k}{3^k} + \frac{4(k+1)}{3^{k+1}}$$

$$= 3 - \frac{2k+3}{3^k} + \frac{4(k+1)}{3^{k+1}}$$

$$= 3 - \frac{3(2k+3) - 4(k+1)}{3^{k+1}}$$

$$= 3 - \frac{2k+5}{3^{k+1}}$$

따라서 $n = k+1$ 일 때에도 ㉠이 성립한다.

답 2단계

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 ㉠이 성립한다.

답 3단계

풀이 참조

	채점 요소	비율
1단계	$n=1$ 일 때 주어진 등식이 성립함을 보이기	30 %
2단계	$n=k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$ 일 때에도 주어진 등식이 성립함을 보이기	60 %
3단계	모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립함을 보이기	10 %

1098 (ii) $n=k$ 일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$a_k = \frac{2k-1}{k}$$

이므로

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{4-a_k}{3-a_k} = \frac{4-\frac{2k-1}{k}}{3-\frac{2k-1}{k}} \\ &= \frac{2k+1}{k+1} = \frac{2(k+1)-1}{k+1} \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 ㉠이 성립한다.

$$\text{즉 } f(k) = \frac{2k-1}{k}, g(k) = \frac{2(k+1)-1}{k+1} \text{ 이므로}$$

$$f(3)g(4) = \frac{5}{3} \times \frac{9}{5} = 3 \quad \text{답 ②}$$

1099 (ii) $n=k$ ($k \geq 4$)일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k > 2^k$$

양변에 $\frac{k+1}{k}$ 을 곱하면

$$\begin{aligned} 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k \times \left(\frac{k+1}{k} \right) &> 2^k \times \left(\frac{k+1}{k} \right) \quad \text{..... ㉡} \\ &> 2^k \times \left(\frac{k+1}{k} \right) \end{aligned}$$

이때 $k \geq 4$ 에서 $k+1 > 2$ 이므로

$$2^k \times \left(\frac{k+1}{k} \right) > 2^k \times 2 = 2^{k+1} \quad \text{..... ㉢}$$

㉡, ㉢에서

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k \times \left(\frac{k+1}{k} \right) > 2^{k+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 4$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 ㉠이 성립한다.

$$\text{즉 } f(k) = k+1, g(k) = 2^{k+1} \text{ 이므로}$$

$$\frac{g(5)}{f(3)} = \frac{2^6}{4} = 16 \quad \text{답 ⑤}$$

1100 (ii) $n=k$ 일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k+1} > 1$$

양변에 $\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1}$ 을 더하면

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + \cdots + \frac{1}{3k+4} \\ &> 1 + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1} \quad \text{... ㉡} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } (3k+2)(3k+4) = 9k^2 + 18k + 8,$$

$$(3k+3)^2 = 9k^2 + 18k + 9 \text{에서}$$

$$(3k+2)(3k+4) < (3k+3)^2$$

이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} &= \frac{6k+6}{(3k+2)(3k+4)} \\ &> \frac{6k+6}{(3k+3)^2} = \frac{2}{3k+3} \end{aligned}$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1}$$

$$> 1 + \frac{1}{3k+3} + \frac{2}{3k+3} - \frac{1}{k+1}$$

$$= 1 \quad \text{..... ㉢}$$

㉡, ㉢에서

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + \cdots + \frac{1}{3k+4} > 1$$

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 ㉠이 성립한다.

$$\text{즉 } f(k) = \frac{1}{k+1}, g(k) = \frac{2}{3k+3} \text{ 이므로}$$

$$f(8) + g(2) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3} \quad \text{답 } \frac{1}{3}$$

1101 n 개의 직선에 1개의 직선을 추가하면 이 직선이 기존의 직선과 각각 한 번씩 만나므로 n 개의 새로운 교점이 생긴다.

즉 $(n+1)$ 개의 직선의 교점의 개수는 n 개의 직선의 교점보다 n 개 더 많으므로

$$a_{n+1} = a_n + n \quad \text{..... ㉠}$$

이때 1개의 직선을 그을 때 생기는 교점은 없으므로 $a_1 = 0$

㉠의 n 에 1, 2, 3, ..., 19를 차례대로 대입하면

$$a_2 = a_1 + 1 = 1$$

$$a_3 = a_2 + 2 = 1 + 2$$

$$a_4 = a_3 + 3 = 1 + 2 + 3$$

⋮

$$\therefore a_{20} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 19$$

$$= \sum_{k=1}^{19} k = \frac{19 \times 20}{2} = 190$$

답 190

1102 훈련을 시작하여 $(n+1)$ 일째 되는 날은 a_n km의 $\frac{4}{3}$ 배보다 2 km 적은 거리를 뛰므로

$$a_{n+1} = \frac{4}{3}a_n - 2 \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

$$\text{답 } a_{n+1} = \frac{4}{3}a_n - 2 \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

1103 n 회 시행 후 그릇 A에 들어 있는 물의 양이 a_n L이면 그릇 B에 들어 있는 물의 양은 $(3-a_n)$ L이다.

그릇 A에서 50 %의 물을 퍼내어 그릇 B에 부었을 때 그릇 A, B에 들어 있는 물의 양은 각각

$$\frac{1}{2}a_n \text{ L}, (3-a_n) + \frac{1}{2}a_n = 3 - \frac{1}{2}a_n \text{ (L)}$$

다시 그릇 B에서 50 %의 물을 퍼내어 그릇 A에 부었을 때 그릇 A에 들어 있는 물의 양은

$$\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{2}a_n\right) = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{2} \quad (\text{L})$$

즉 $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{2}$ 이므로 $p = \frac{1}{4}, q = \frac{3}{2}$

$$\therefore p+q = \frac{7}{4} \quad \text{답 } \frac{7}{4}$$

시험에 꼭 나오는 문제

● 본책 153~156쪽

1104 $a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} = 0$ 에서 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

이때 첫째항이 4, 공차가 $a_2 - a_1 = 7 - 4 = 3$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= 4 + (n-1) \times 3 = 3n + 1 \\ \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} (3k + 1) \\ &= 3 \times \frac{10 \times 11}{2} + 1 \times 10 \\ &= 165 + 10 = 175 \end{aligned} \quad \text{답 } 175$$

1105 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{3}$ 이므로 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 공차가 $\frac{1}{3}$ 인 등차수열이다.

이때 첫째항이 $\frac{1}{a_1} = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_n} &= 1 + (n-1) \times \frac{1}{3} = \frac{n+2}{3} \\ \text{즉 } a_n &= \frac{3}{n+2} \text{이므로} \\ a_{13} &= \frac{3}{13+2} = \frac{1}{5} \end{aligned} \quad \text{답 } ②$$

1106 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

이때 첫째항이 3, 공비가 $a_2 \div a_1 = 9 \div 3 = 3$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= 3 \times 3^{n-1} = 3^n \\ \text{즉 } a_k &= 9^{10} \text{에서 } 3^k = 9^{10} = 3^{20} \\ \therefore k &= 20 \end{aligned} \quad \text{답 } 20$$

1107 이차방정식 $a_n x^2 - a_{n+1} x + a_n = 0$ 이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} D &= (-a_{n+1})^2 - 4 \times a_n \times a_n = 0 \\ \therefore a_{n+1}^2 &= 4a_n^2 \end{aligned}$$

그런데 $a_n > 0$ 이므로 $a_{n+1} = 2a_n$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 2인 등비수열이다.

이때 첫째항이 4이므로

$$\begin{aligned} a_n &= 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1} \\ \therefore \sum_{k=1}^6 a_k &= \sum_{k=1}^6 2^{k+1} = \frac{4(2^6 - 1)}{2 - 1} = 252 \end{aligned} \quad \text{답 } 252$$

1108 $a_{n+1} = a_n + n + 1$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 2 \\ a_3 &= a_2 + 3 = a_1 + 2 + 3 \\ a_4 &= a_3 + 4 = a_1 + 2 + 3 + 4 \\ &\vdots \\ \therefore a_n &= a_1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n \\ &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \\ &= 1 + \frac{(n-1)n}{2} + 1 \times (n-1) \\ &= \frac{n^2 + n}{2} \\ \therefore \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^{15} \frac{2}{k^2 + k} = \sum_{k=1}^{15} \frac{2}{k(k+1)} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{15} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{16}\right) \right] \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{16}\right) \\ &= \frac{15}{8} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{15}{8}$$

1109 $a_{n+1} = a_n + 2^{n-1}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 1 \\ a_3 &= a_2 + 2 = a_1 + 1 + 2 \\ a_4 &= a_3 + 4 = a_1 + 1 + 2 + 4 \\ &\vdots \\ \therefore a_n &= a_1 + 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-2} \\ &= 4 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 4 + \frac{1 \times (2^{n-1} - 1)}{2 - 1} \\ &= 2^{n-1} + 3 \end{aligned}$$

$a_k = 1027$ 에서 $2^{k-1} + 3 = 1027$

$$2^{k-1} = 1024 = 2^{10}, \quad k-1 = 10$$

$$\therefore k = 11 \quad \text{답 } 11$$

1110 $a_{n+1} = 3^n a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 11을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_2 &= 3a_1 \\ a_3 &= 3^2 a_2 = 3^2 \times 3a_1 \\ a_4 &= 3^3 a_3 = 3^3 \times 3^2 \times 3a_1 \\ &\vdots \\ \therefore a_{12} &= 3^{11} \times 3^{10} \times 3^9 \times \cdots \times 3^2 \times 3a_1 \\ &= 3^{1+2+3+\cdots+11} \times 1 \\ &= 3^{\frac{11 \times 12}{2}} = 3^{66} \end{aligned}$$

$$\therefore \log_9 a_{12} = \log_9 3^{66} = 33 \quad \text{답 } 33$$

1111 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ 에서

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \left\{ 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right\} a_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} a_n \\ &= \frac{n+2}{n+1} \times \frac{n}{n+1} a_n \end{aligned}$$

첫째항이 a 이므로 n 에 1, 2, 3, ..., 9를 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} a_1 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} a \\ a_3 &= \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} a_2 = \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} a \\ &= \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} a \\ a_4 &= \frac{5}{4} \times \frac{3}{4} a_3 = \frac{5}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} a \\ &= \frac{5}{4} \times \frac{1}{2} a \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\therefore a_{10} = \frac{11}{10} \times \frac{1}{2} a = \frac{11}{20} a$$

이때 $a_{10} = 11$ 이므로 $\frac{11}{20} a = 11$

$$\therefore a = 20$$

답 20

1112 $a_{n+1} = \frac{a_n}{4a_n + 1}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_1}{4a_1 + 1} = \frac{1}{4 \times 1 + 1} = \frac{1}{5} \\ a_3 &= \frac{a_2}{4a_2 + 1} = \frac{\frac{1}{5}}{4 \times \frac{1}{5} + 1} = \frac{1}{9} \\ a_4 &= \frac{a_3}{4a_3 + 1} = \frac{\frac{1}{9}}{4 \times \frac{1}{9} + 1} = \frac{1}{13} \\ &\vdots \\ \therefore a_n &= \frac{1}{4n-3} \end{aligned}$$

따라서 $a_k = \frac{1}{41}$ 에서 $\frac{1}{4k-3} = \frac{1}{41}$

$$4k-3=41 \quad \therefore k=11$$

답 11

1113 $a_{n+1} = |a_n| - 2$ 에서 $a_n > 0$ 일 때

$$a_{n+1} = a_n - 2$$

따라서 $1 \leq n \leq 10$ 일 때 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 20, 공차가 -2인 등차수열이므로

$$a_n = 20 + (n-1) \times (-2) = -2n + 22$$

이때 $a_{10} = -2 \times 10 + 22 = 2$ 이고 $a_{n+1} = |a_n| - 2$ 의 n 에 10,

11, 12, ...를 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_{11} &= |a_{10}| - 2 = 2 - 2 = 0 \\ a_{12} &= |a_{11}| - 2 = 0 - 2 = -2 \\ a_{13} &= |a_{12}| - 2 = 2 - 2 = 0 \\ a_{14} &= |a_{13}| - 2 = 0 - 2 = -2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

따라서 $n \geq 11$ 일 때 수열 $\{a_n\}$ 은 0, -2가 이 순서대로 반복된다.

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{30} a_n &= \sum_{n=1}^{10} a_n + \sum_{n=11}^{30} a_n \\ &= \sum_{n=1}^{10} (-2n + 22) + 10 \times \{0 + (-2)\} \\ &= -2 \times \frac{10 \times 11}{2} + 22 \times 10 - 20 \\ &= -110 + 220 - 20 = 90 \end{aligned}$$

답 2

1114 ②, ③ 조건 (가)에서 $p(1)$ 이 참이므로 조건 (나)에 의하여 $p(4)$ 가 참이다.

또 $p(4)$ 가 참이므로 조건 (나)에 의하여 $p(6)$, $p(7)$ 이 참이다.

④, ⑤ $p(6)$ 이 참이므로 조건 (나)에 의하여 $p(8)$, $p(9)$ 가 참이다.

따라서 $p(5)$ 가 참인지는 알 수 없으므로 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 ①이다.

답 1

1115 (ii) $n=k$ 일 때, $n^3 + 2n$ 이 3의 배수라 가정하면

$$k^3 + 2k = 3m \quad (m \text{은 자연수})$$

으로 놓을 수 있다. 이때 $n=k+1$ 이면

$$\begin{aligned} &(k+1)^3 + 2(k+1) \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 \\ &= k^3 + 2k + 3(\text{㉞} k^2 + k + 1) \\ &= \text{㉞} 3m + 3(\text{㉞} k^2 + k + 1) \end{aligned}$$

이므로 $n=k+1$ 일 때에도 $n^3 + 2n$ 이 3의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 $n^3 + 2n$ 은 3의 배수이다.

따라서 $f(k) = k^2 + k + 1$, $g(m) = 3m$ 이므로

$$\frac{g(14)}{f(4)} = \frac{3 \times 14}{4^2 + 4 + 1} = 2$$

답 2

1116 (i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = (\text{우변}) = \text{㉞} \frac{1}{2}$$

이므로 ㉞이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, ㉞이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{k+2}{2^k}$$

양변에 $\text{㉞} \frac{k+1}{2^{k+1}}$ 을 더하면

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{k}{2^k} + \text{㉞} \frac{k+1}{2^{k+1}} \\ &= 2 - \frac{k+2}{2^k} + \text{㉞} \frac{k+1}{2^{k+1}} \\ &= 2 - \frac{2(k+2) - (k+1)}{2^{k+1}} \\ &= 2 - \frac{k+3}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 ㉞이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 ㉞이 성립한다.

즉 $a = \frac{1}{2}$, $f(k) = \frac{k+1}{2^{k+1}}$ 이므로

$$f(6a) = f(3) = \frac{4}{2^4} = \frac{1}{4} \quad \text{답 } \frac{1}{4}$$

1117 (ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} > 2 - \frac{1}{\sqrt{k}}$$

양변에 $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ 을 더하면

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > 2 - \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \quad \cdots \text{㉡}$$

이때

$$\begin{aligned} & \left(2 - \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) - \left(2 - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \\ &= \frac{2\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{\sqrt{k^2+k}} > 0 \end{aligned}$$

이므로

$$2 - \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \left(2 - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \quad \cdots \text{㉢}$$

㉡, ㉢에서

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \left(2 - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$$

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 ㉠이 성립한다.

답 ④

참고 모든 자연수 k 에 대하여 $4k > k+10$ 이므로 $\sqrt{4k} > \sqrt{k+1}$, 즉 $2\sqrt{k} - \sqrt{k+1} > 0$ 이다.

1118 주어진 그림에서

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = a_1 + 6$$

$$a_3 = a_2 + 8$$

$$a_4 = a_3 + 10$$

$\vdots$

$$\therefore a_{n+1} = a_n + 2(n+2)$$

$$= a_n + 2n + 4 \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

$$\text{답 } a_{n+1} = a_n + 2n + 4 \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

1119 $\overline{P_n P_{n+1}} = a_n$ 이라 하면 규칙 (가), (나)에서

$$a_1 = 1, a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1} \quad (n=2, 3, 4, \cdots)$$

$a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1}$ 의 n 에 2, 3, 4, ...를 차례대로 대입하면

$$a_2 = \frac{1}{3} a_1$$

$$a_3 = \frac{2}{4} a_2 = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} a_1$$

$$a_4 = \frac{3}{5} a_3 = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} a_1$$

$\vdots$

$$\therefore a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1}$$

$$= \frac{n-1}{n+1} \times \frac{n-2}{n} \times \cdots \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} a_1$$

$$= \frac{2 \times 1}{n(n+1)} \times 1 = \frac{2}{n(n+1)}$$

따라서 $S_n = \frac{1}{2} \times \frac{2}{n(n+1)} \times 1 = \frac{1}{n(n+1)}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10} S_n &= \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \end{aligned}$$

즉 $p=11$, $q=10$ 이므로

$$p+q=21$$

답 21

1120 $a_{n+1} = a_n + 3$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 3인 등차수열이다.

이때 첫째항이 -100 이므로

$$a_n = -100 + (n-1) \times 3 = 3n - 103 \quad \cdots \text{1단계}$$

$a_n > 0$ 에서 $3n - 103 > 0$

$$\therefore n > \frac{103}{3} = 34.\overline{3} \times \times \times$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 제 35 항부터 양수이므로 첫째항부터 제 34 항까지의 합이 최소이다. $\cdots$ 2단계

이때 $a_{34} = 3 \times 34 - 103 = -1$ 이므로 구하는 최솟값은

$$S_{34} = \frac{34 \times \{-100 + (-1)\}}{2} = -1717 \quad \cdots \text{3단계}$$

답 -1717

채점 요소		비율
1단계	a_n 구하기	30 %
2단계	S_n 의 값이 최소일 때의 n 의 값 구하기	30 %
3단계	S_n 의 최솟값 구하기	40 %

1121 $a_{n+1} = -2a_n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 -2 인 등비수열이다.

이때 첫째항이 3이므로

$$a_n = 3 \times (-2)^{n-1} \quad \cdots \text{1단계}$$

$$3 \times (-2)^{n-1} > 300 \text{에서 } (-2)^{n-1} > 100$$

따라서 $(-2)^6 = 64$, $(-2)^7 = -128$, $(-2)^8 = 256$ 이므로 자연수 n 의 최솟값은 9이다. $\cdots$ 2단계

답 9

채점 요소		비율
1단계	a_n 구하기	50 %
2단계	$a_n > 300$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값 구하기	50 %

1122 $S_n = n^2 a_n$ 에서

$$S_{n+1} = (n+1)^2 a_{n+1}$$

한편 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$a_{n+1} = (n+1)^2 a_{n+1} - n^2 a_n$$

$$(n^2 + 2n)a_{n+1} = n^2 a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n \quad \dots \text{1단계}$$

n 에 1, 2, 3, ..., 9를 차례대로 대입하면

$$a_2 = \frac{1}{3} a_1$$

$$a_3 = \frac{2}{4} a_2 = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} a_1$$

$$a_4 = \frac{3}{5} a_3 = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} a_1$$

$\vdots$

$$\therefore a_{10} = \frac{9}{11} a_9 = \frac{9}{11} \times \frac{8}{10} \times \dots \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} a_1$$

$$= \frac{2 \times 1}{11 \times 10} a_1 = \frac{1}{55} a_1$$

$$= \frac{1}{55} \times 1 = \frac{1}{55} \quad \dots \text{2단계}$$

답 $\frac{1}{55}$

	채점 요소	비율
1단계	a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식 구하기	50 %
2단계	a_{10} 의 값 구하기	50 %

1123 $3+7+11+\dots+(4n-1)=2n^2+n \quad \dots\dots \text{㉠}$

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변})=4 \times 1 - 1 = 3, (\text{우변})=2 \times 1^2 + 1 = 3$$

따라서 ㉠이 성립한다. $\dots \text{1단계}$

(ii) $n=k$ 일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$3+7+11+\dots+(4k-1)=2k^2+k$$

양변에 $4k+3$ 을 더하면

$$3+7+11+\dots+(4k-1)+(4k+3)$$

$$=2k^2+k+4k+3$$

$$=2(k^2+2k+1)+k+1$$

$$=2(k+1)^2+(k+1)$$

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 ㉠이 성립한다. $\dots \text{2단계}$

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 ㉠이 성립한다. $\dots \text{3단계}$

답 풀이 참조

	채점 요소	비율
1단계	$n=1$ 일 때 주어진 등식이 성립함을 보이기	30 %
2단계	$n=k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$ 일 때에도 주어진 등식이 성립함을 보이기	60 %
3단계	모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립함을 보이기	10 %

1124 **전략** 주어진 조건을 이용하여 $\sum_{k=1}^{48} a_k$ 를 $a_1+a_2+a_3+a_4$ 에 대한 식으로 나타낸다.

조건 (가), (나)에 의하여

$$a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5,$$

$$a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8,$$

$$a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11$$

조건 (다)에 의하여

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 3(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

$$a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} = 3(a_5 + a_6 + a_7 + a_8)$$

$$= 3^2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

$$a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} = 3(a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12})$$

$$= 3^3(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

$\vdots$

$$a_{45} + a_{46} + a_{47} + a_{48} = 3(a_{41} + a_{42} + a_{43} + a_{44})$$

$$= 3^{11}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{48} a_k = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{11})$$

$$= (2 + 5 + 8 + 11) \times \frac{1 \times (3^{12} - 1)}{3 - 1}$$

$$= 26 \times \frac{3^{12} - 1}{2}$$

$$= 13(3^{12} - 1)$$

답 ③

1125 **전략** $a_n > n$ 인 경우와 $a_n \leq n$ 인 경우로 나누어 a_4, a_3, a_2, a_1 의 값을 차례대로 구해 본다.

주어진 조건을 이용하여 a_4, a_3, a_2, a_1 의 값을 차례대로 구하면 다음과 같다.

(i) $a_4 > 4$ 이면 $a_5 = a_4$ 이므로 $a_4 = 5$

$$a_4 \leq 4 \text{이면 } a_5 = 3 \times 4 - 2 - a_4 \text{ 이므로}$$

$$5 = 10 - a_4 \quad \therefore a_4 = 5$$

그런데 $a_4 \leq 4$ 를 만족시키지 않는다.

(ii) $a_3 > 3$ 이면 $a_4 = a_3$ 이므로 $a_3 = 5$

$$a_3 \leq 3 \text{ 이면 } a_4 = 3 \times 3 - 2 - a_3 \text{ 이므로}$$

$$5 = 7 - a_3 \quad \therefore a_3 = 2$$

(iii) ㉠ $a_3 = 5$ 인 경우

$$a_2 > 2 \text{ 이면 } a_3 = a_2 \text{ 이므로 } a_2 = 5$$

$$a_2 \leq 2 \text{ 이면 } a_3 = 3 \times 2 - 2 - a_2 \text{ 이므로}$$

$$5 = 4 - a_2 \quad \therefore a_2 = -1$$

㉠ $a_3 = 2$ 인 경우

$$a_2 > 2 \text{ 이면 } a_3 = a_2 \text{ 이므로 } a_2 = 2$$

그런데 $a_2 > 2$ 를 만족시키지 않는다.

$$a_2 \leq 2 \text{ 이면 } a_3 = 3 \times 2 - 2 - a_2 \text{ 이므로}$$

$$2 = 4 - a_2 \quad \therefore a_2 = 2$$

㉠, ㉠에서

$$a_2 = 5 \text{ 또는 } a_2 = -1 \text{ 또는 } a_2 = 2$$

(iv) ㉠ $a_2 = 5$ 인 경우

$$a_1 > 1 \text{ 이면 } a_2 = a_1 \text{ 이므로 } a_1 = 5$$

$$a_1 \leq 1 \text{ 이면 } a_2 = 3 \times 1 - 2 - a_1 \text{ 이므로}$$

$$5 = 1 - a_1 \quad \therefore a_1 = -4$$

⑥ $a_2 = -1$ 인 경우

$$a_1 > 1 \text{ 이면 } a_2 = a_1 \text{ 이므로 } a_1 = -1$$

그런데 $a_1 > 1$ 을 만족시키지 않는다.

$$a_1 \leq 1 \text{ 이면 } a_2 = 3 \times 1 - 2 - a_1 \text{ 이므로}$$

$$-1 = 1 - a_1 \quad \therefore a_1 = 2$$

그런데 $a_1 \leq 1$ 을 만족시키지 않는다.

⑦ $a_2 = 2$ 인 경우

$$a_1 > 1 \text{ 이면 } a_2 = a_1 \text{ 이므로 } a_1 = 2$$

$$a_1 \leq 1 \text{ 이면 } a_2 = 3 \times 1 - 2 - a_1 \text{ 이므로}$$

$$2 = 1 - a_1 \quad \therefore a_1 = -1$$

⑧, ⑨, ⑩에서

$$a_1 = 5 \text{ 또는 } a_1 = -4 \text{ 또는 } a_1 = 2 \text{ 또는 } a_1 = -1$$

이상에서 모든 a_1 의 값의 곱은

$$5 \times (-4) \times 2 \times (-1) = 40$$

답 ③

1126 전라 $P_n(x_n)$ 이라 하고 x_n, x_{n+1}, x_{n+2} 사이의 관계식을 구한다.

$P_n(x_n)$ 이라 하면

$$x_{n+2} = \frac{2x_{n+1} + 3x_n}{2+3} = \frac{3}{5}x_n + \frac{2}{5}x_{n+1}$$

n 에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$$x_3 = \frac{3}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 = \frac{3}{5} \times 0 + \frac{2}{5} \times 8$$

$$= \frac{16}{5}$$

$$x_4 = \frac{3}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3 = \frac{3}{5} \times 8 + \frac{2}{5} \times \frac{16}{5}$$

$$= \frac{152}{25}$$

$$x_5 = \frac{3}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 = \frac{3}{5} \times \frac{16}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{152}{25}$$

$$= \frac{544}{125}$$

따라서 점 P_5 의 좌표는 $\frac{544}{125}$ 이다.

답 $\frac{544}{125}$

