AI **튜터**와 함께 푸는 RPM Pro

중학 수학 3-1

정답 및 풀이

01 제곱근의 뜻과 성질

셀프 CHECK

본책 8~9쪽

A 답 (1) $4,\ -4$ (2) $9,\ -9$ (3) $\frac{7}{2},\ -\frac{7}{2}$ (4) $0.5,\ -0.5$

B 답 (1) $\sqrt{10}$ (2) $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ (3) $\pm\sqrt{7}$ (4) $\sqrt{15}$

C 답 (1) 6 (2) 4.1 (3) 16 (4) $\pm\frac{1}{3}$ (5) -11 (6) $-\frac{12}{5}$

D (1) (주어진 식)$=5+7=12$
(2) (주어진 식)$=3-10=-7$
(3) (주어진 식)$=\frac{2}{3}\times6=4$
(4) (주어진 식)$=1.5\div\frac{1}{2}=1.5\times2=3$

답 (1) 12 (2) -7 (3) 4 (4) 3

E (1) $a>0$일 때, $-8a<0$이므로

(주어진 식)$=a-\{-(-8a)\}$
$=a-8a=-7a$

(2) $a<0$일 때, $-4a>0$, $2a<0$이므로

(주어진 식)$=(-4a)-(-2a)$
$=-4a+2a=-2a$

답 (1) $-7a$ (2) $-2a$

F (1) $11<15$이므로

$\sqrt{11}\ \boxed{<}\ \sqrt{15}$

(2) $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$이므로

$\sqrt{\frac{1}{2}}\ \boxed{>}\ \sqrt{\frac{1}{3}}$

(3) $5=\sqrt{25}$이고 $23<25$이므로

$\sqrt{23}\ \boxed{<}\ 5$

(4) $4=\sqrt{16}$이고 $18>16$이므로

$\sqrt{18}>4 \quad \therefore -\sqrt{18}\ \boxed{<}\ -4$

답 (1) $<$ (2) $>$ (3) $<$ (4) $<$

G $\sqrt{x}\le2$의 양변을 제곱하면

$x\le4$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는

$1,\ 2,\ 3,\ 4$ 답 $1,\ 2,\ 3,\ 4$

내신 유형 다지기

본책 10~21쪽

유형 001 제곱근의 뜻

본책 10쪽

(1) x는 $a\ (a\ge0)$의 제곱근이다.
➜ x를 제곱하면 a가 된다.
➜ $x^2=a$
(2) 양수의 제곱근은 양수와 음수의 2개가 있고, 음수의 제곱근은 없다.

001 x가 양수 a의 제곱근이므로

$x^2=a$ 또는 $x=\pm\sqrt{a}$

따라서 바르게 나타낸 것은 ①, ④이다. 답 ①, ④

002 8의 제곱근이 a이므로

$a^2=8$

12의 제곱근이 b이므로

$b^2=12$

$\therefore a^2+b^2=8+12=20$ 답 20

003 ㄱ. $a,\ b$가 양수 A의 제곱근이므로

$a^2=A,\ b^2=A \quad \therefore a^2=b^2$

ㄴ, ㄷ. 양수의 두 제곱근은 절댓값이 같고 부호가 다르므로

$ab<0,\ a+b=0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ④

유형 002 제곱근의 표현

본책 10쪽

$a>0$일 때
(1) a의 제곱근 ➜ $\begin{cases}\text{양의 제곱근: } \sqrt{a} \\ \text{음의 제곱근: } -\sqrt{a}\end{cases}$
➜ $\pm\sqrt{a}$
(2) 제곱근 a ➜ $\sqrt{a}$

004 ㄱ. $\frac{16}{25}=\left(\frac{4}{5}\right)^2$의 음의 제곱근은 $-\frac{4}{5}$이다.

ㄴ. 제곱근 10은 $\sqrt{10}$이다.

ㄷ. $0.\dot{4}=\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$의 제곱근은 $\pm\frac{2}{3}$이고, $\pm0.\dot{2}=\pm\frac{2}{9}$이다.

ㄹ. 제곱하여 음수가 되는 수는 없다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄹ

005 ①, ③, ④, ⑤ ±4

② $\sqrt{16}=4$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ②이다. 답 ②

유형 003 근호를 사용하지 않고 나타내기

본책 10쪽

근호를 사용하지 않고 나타낼 수 있는 수
➜ 근호 안의 수가 어떤 수의 제곱인 수
➜ $a>0$일 때, $\sqrt{a^2}=a$

006 ② $\sqrt{169}=\sqrt{13^2}=13$
③ $\sqrt{\frac{98}{200}}=\sqrt{\frac{49}{100}}=\sqrt{\left(\frac{7}{10}\right)^2}=\frac{7}{10}$
④ $-\sqrt{1.21}=-\sqrt{1.1^2}=-1.1$
따라서 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 없는 것은 ①, ⑤이다.
답 ①, ⑤

007 $\frac{25}{4}$의 제곱근은 $\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\pm\frac{5}{2}$
15의 제곱근은 $\pm\sqrt{15}$
0.9의 제곱근은 $\pm\sqrt{0.9}$
$0.\dot{1}=\frac{1}{9}$의 제곱근은 $\pm\sqrt{\frac{1}{9}}=\pm\frac{1}{3}$
$\sqrt{\frac{121}{36}}=\frac{11}{6}$의 제곱근은 $\pm\sqrt{\frac{11}{6}}$
따라서 제곱근을 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 있는 것은 $\frac{25}{4}$, $0.\dot{1}$의 2개이다.
답 2

008 ㄴ. 25의 음의 제곱근은 $-\sqrt{25}=-5$
ㄷ. $-\sqrt{144}=-12$
ㄹ. $(-6)^2=36$의 양의 제곱근은 $\sqrt{36}=6$
ㅁ. $\sqrt{\frac{81}{64}}=\frac{9}{8}$이므로 제곱근 $\frac{9}{8}$는 $\sqrt{\frac{9}{8}}$
이상에서 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 있는 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.
답 ④

유형 004 제곱근 구하기

본책 11쪽

어떤 수의 제곱근을 구할 때에는 먼저 주어진 수를 간단히 한다.
(1) 거듭제곱으로 나타내어진 수
➜ 거듭제곱을 계산한 다음 제곱근을 구한다.
(2) 근호를 사용하여 나타내어진 수
➜ 근호를 사용하지 않고 나타낸 다음 제곱근을 구한다.

009 ④ $\sqrt{16}=4$의 제곱근은 ±2이다.
⑤ $(-2.5)^2=6.25$의 제곱근은 ±2.5이다.
따라서 제곱근을 잘못 구한 것은 ⑤이다.
답 ⑤

010 $5.\dot{4}=\frac{54-5}{9}=\frac{49}{9}$이므로 $5.\dot{4}$의 음의 제곱근은
$-\sqrt{\frac{49}{9}}=-\frac{7}{3}$
답 ③

011 제곱근 64는 8이므로
$A=8$ … 1단계
$\left(-\frac{5}{8}\right)^2=\frac{25}{64}$의 음의 제곱근은 $-\frac{5}{8}$이므로
$B=-\frac{5}{8}$ … 2단계
$\therefore AB=8\times\left(-\frac{5}{8}\right)=-5$ … 3단계
답 -5

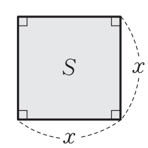
단계	채점 요소	비율
1	A의 값 구하기	40 %
2	B의 값 구하기	40 %
3	AB의 값 구하기	20 %

012 81의 제곱근은 ±9이므로
$a=9,\ b=-9\ (\because a>b)$
$\therefore \sqrt{2(a-b)}=\sqrt{2\times\{9-(-9)\}}$
$=\sqrt{36}=6$
따라서 6의 음의 제곱근은 $-\sqrt{6}$이다.
답 ④

유형 005 제곱근과 도형 ; 정사각형의 한 변의 길이 구하기

본책 12쪽

넓이가 S인 정사각형의 한 변의 길이가 x이면 $x^2=S$이므로
$x=\sqrt{S}\ (\because x>0)$



013 (직사각형의 넓이)$=6\times4=24$
한 변의 길이가 x인 정사각형의 넓이가 24이므로
$x^2=24 \quad \therefore x=\sqrt{24}\ (\because x>0)$
답 $\sqrt{24}$

014 작은 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 큰 정사각형의 한 변의 길이는 $2x$ cm이고 두 정사각형의 넓이의 합이 75 cm²이므로
$x^2+(2x)^2=75,\quad 5x^2=75$
$x^2=15 \quad \therefore x=\sqrt{15}\ (\because x>0)$
따라서 작은 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{15}$ cm이다.
답 ⑤

다른 풀이 닮음비가 $1:2$인 두 정사각형의 넓이의 비는
$1^2:2^2=1:4$
작은 정사각형의 넓이를 x cm²라 하면 큰 정사각형의 넓이는 $4x$ cm²이고 넓이의 합이 75 cm²이므로
$x+4x=75,\quad 5x=75$
$\therefore x=15$
따라서 작은 정사각형의 넓이가 15 cm²이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{15}$ cm이다.

만점 공략 노트

닮은 두 평면도형의 닮음비가 $m:n$이면
① 둘레의 길이의 비는 $m:n$
② 넓이의 비는 $m^2:n^2$

015 정사각형의 각 변의 중점을 연결하여 만든 정사각형의 넓이는 처음 정사각형의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로 색칠한 정사각형을 □EFGH라 하면

□ABCD$=2^5\times$□EFGH$=32\times3=96$ … 1단계

따라서 □ABCD의 한 변의 길이는 $\sqrt{96}$이다. … 2단계

답 $\sqrt{96}$

단계	채점 요소	비율
1	□ABCD의 넓이 구하기	70 %
2	□ABCD의 한 변의 길이 구하기	30 %

016 B의 넓이는 A의 넓이의 $\frac{3}{5}$배이므로

$(\text{B의 넓이})=10\times\frac{3}{5}=6\,(\text{cm}^2)$

C의 넓이는 B의 넓이의 $\frac{2}{3}$배이므로

$(\text{C의 넓이})=6\times\frac{2}{3}=4\,(\text{cm}^2)$

따라서 정사각형 C의 한 변의 길이는 $\sqrt{4}=2\,(\text{cm})$이다.

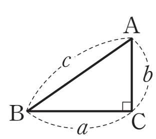
답 2 cm

유형 006 제곱근과 도형 ; 직각삼각형의 한 변의 길이 구하기

본책 12쪽

$\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여 $c^2=a^2+b^2$이므로

$c=\sqrt{a^2+b^2}\ (\because c>0)$



017 △ABD에서 $\overline{AD}=\sqrt{8^2-7^2}=\sqrt{15}\,(\text{cm})$

△ADC에서 $\overline{DC}=\sqrt{5^2-(\sqrt{15})^2}=\sqrt{10}\,(\text{cm})$ 답 $\sqrt{10}$ cm

018 정사각형 ABCD의 넓이가 25 cm^{2}이므로

$\overline{BC}=\sqrt{25}=5\,(\text{cm})$

정사각형 GCEF의 넓이가 49 cm^{2}이므로

$\overline{CE}=\overline{EF}=\sqrt{49}=7\,(\text{cm})$

따라서 $\overline{BE}=\overline{BC}+\overline{CE}=5+7=12\,(\text{cm})$이므로 △BEF에서

$\overline{BF}=\sqrt{12^2+7^2}=\sqrt{193}\,(\text{cm})$ 답 $\sqrt{193}$ cm

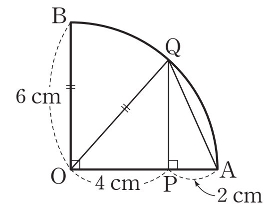
019 △ABC에서 $\overline{AC}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\,(\text{cm})$

△ACD에서 $\overline{AD}=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}\,(\text{cm})$

△ADE에서 $\overline{AE}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2\,(\text{cm})$

△AEF에서 $\overline{AF}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}\,(\text{cm})$ 답 ②

020 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OQ}$를 그으면 $\overline{OQ}=6$ cm이므로



△OPQ에서

$\overline{QP}=\sqrt{6^2-4^2}=\sqrt{20}\,(\text{cm})$

$\overline{PA}=6-4=2\,(\text{cm})$이므로

△AQP에서

$\overline{AQ}=\sqrt{(\sqrt{20})^2+2^2}=\sqrt{24}\,(\text{cm})$

답 ③

유형 007 제곱근의 성질

본책 13쪽

$a>0$일 때
(1) $(\sqrt{a})^2=a,\ (-\sqrt{a})^2=a$
(2) $\sqrt{a^2}=a,\ \sqrt{(-a)^2}=a$

021 ㄴ. $-(\sqrt{5})^2=-5$ ㄹ. $\sqrt{\left(-\frac{6}{7}\right)^2}=\frac{6}{7}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

022 ① $\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4}{3}$ ② $\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}$

③ $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2=\frac{1}{3}$ ④ $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

⑤ $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

따라서 가장 작은 수는 ④이다. 답 ④

023 $\sqrt{(-9)^2}=9$의 양의 제곱근은 3이므로

$A=3$ … 1단계

$\sqrt{\left(-\frac{5}{3}\right)^2}=\frac{5}{3}$의 음의 제곱근은 $-\sqrt{\frac{5}{3}}$이므로

$B=-\sqrt{\frac{5}{3}}$ … 2단계

$\therefore AB^2=3\times\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2=3\times\frac{5}{3}=5$ … 3단계

답 5

단계	채점 요소	비율
1	A의 값 구하기	40 %
2	B의 값 구하기	40 %
3	AB^2의 값 구하기	20 %

유형 008 제곱근의 성질을 이용한 식의 계산

본책 13쪽

제곱근의 성질을 이용하여 근호를 없앤 후 계산한다.

예 $(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{5})^2=3+5=8$

024 ① (주어진 식)$=5+2=7$

② (주어진 식)$=6\times\frac{1}{2}+10=3+10=13$

③ (주어진 식)$=8\div\frac{1}{2}\times3=8\times2\times3=48$

④ (주어진 식)$=-11+7\times\frac{4}{7}=-11+4=-7$

⑤ (주어진 식)$=-5+16\div8=-5+2=-3$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

025 $A=\sqrt{144}-(-\sqrt{11})^2+\sqrt{(-15)^2}$
$=12-11+15=16$

따라서 $\sqrt{A}=\sqrt{16}=4$의 음의 제곱근은 -2이다. 답 ④

026 $3a^2-b^2+4c^2=3\times(\sqrt{6})^2-(\sqrt{11})^2+4\times(-\sqrt{2})^2$
$=3\times6-11+4\times2$
$=18-11+8=15$ 답 15

027 $A=(-\sqrt{20})^2-\sqrt{225}+\sqrt{3^2}-\sqrt{(-7)^2}$
$=20-15+3-7=1$ … 1단계

$B=\sqrt{1.96}\div\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2-\sqrt{(-5)^2}\times\sqrt{\frac{81}{100}}$

$=1.4\div\frac{1}{2}-5\times\frac{9}{10}=\frac{7}{5}\times2-\frac{9}{2}$

$=\frac{14}{5}-\frac{9}{2}=-\frac{17}{10}$ … 2단계

$\therefore A-10B=1-10\times\left(-\frac{17}{10}\right)=18$ … 3단계

답 18

단계	채점 요소	비율
1	A의 값 구하기	40 %
2	B의 값 구하기	40 %
3	$A-10B$의 값 구하기	20 %

유형 009 $\sqrt{a^2}$의 성질

본책 14쪽

근호 안의 식이 어떤 식의 제곱이면 식의 부호를 판별하여 근호를 없앤다.

$\rightarrow \sqrt{a^2}=\begin{cases} a & (a\ge0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

028 ㄱ, ㄴ, ㅁ. a ㄷ. $-a^2$ ㄹ, ㅂ. $-a$

이상에서 간단히 한 결과가 $-a$인 것은 ㄹ, ㅂ의 2개이다.

답 ②

029 ① $3a<0$이므로 $\sqrt{(3a)^2}=-3a$

② $-5a>0$이므로 $\sqrt{(-5a)^2}=-5a$

③ $4a<0$이므로 $-\sqrt{(4a)^2}=-(-4a)=4a$

④ $\sqrt{\frac{a^2}{9}}=\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2}$이고 $\frac{a}{3}<0$이므로 $\sqrt{\frac{a^2}{9}}=-\frac{a}{3}$

⑤ $-6a>0$이므로 $-\sqrt{(-6a)^2}=-(-6a)=6a$

따라서 옳지 않은 것은 ②이다. 답 ②

030 ① $-4a<0$이므로 $\sqrt{(-4a)^2}=-(-4a)=4a$

② $-\sqrt{4a^2}=-\sqrt{(2a)^2}$이고 $2a>0$이므로 $-\sqrt{4a^2}=-2a$

③ $-\frac{3}{2}a<0$이므로 $\sqrt{\left(-\frac{3}{2}a\right)^2}=-\left(-\frac{3}{2}a\right)=\frac{3}{2}a$

④ $-2a<0$이므로 $\frac{\sqrt{(-2a)^2}}{2}=\frac{-(-2a)}{2}=a$

⑤ $-a<0$이므로 $-\sqrt{(-a)^2}=-\{-(-a)\}=-a$

이때 $-2a<-a<a<\frac{3}{2}a<4a$이므로 그 값이 가장 큰 것은 ①이다. 답 ①

유형 010 $\sqrt{a^2}$의 꼴을 포함한 식을 간단히 하기

본책 15쪽

$\sqrt{a^2}$의 꼴을 간단히 할 때에는 먼저 a의 부호를 조사한다.

$\rightarrow \begin{cases} a>0\text{이면} & \sqrt{a^2}=a \leftarrow \text{부호 그대로} \\ a<0\text{이면} & \sqrt{a^2}=-a \leftarrow \text{부호 반대로} \end{cases}$

031 $\sqrt{\frac{25}{16}a^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{4}a\right)^2}$, $\sqrt{0.09a^2}=\sqrt{(0.3a)^2}$이고 $a<0$에서

$-2a>0$, $\frac{5}{4}a<0$, $0.3a<0$, $-5a>0$

$\therefore$ (주어진 식)$=(-2a)\times\left(-\frac{5}{4}a\right)-(-0.3a)\times(-5a)$

$=\frac{5}{2}a^2-\frac{3}{2}a^2=a^2$ 답 a^2

032 $a<0$, $b<0$이므로 $-6a>0$, $-ab<0$

$\therefore$ (주어진 식)$=(-6a)\times(-b)-\{-(-ab)\}$

$=6ab-ab=5ab$ 답 $5ab$

033 $a-b<0$에서 $a<b$이고 $ab<0$에서 a, b의 부호가 다르므로

$a<0$, $b>0$, $2a<0$, $-3b<0$, $2b>0$

$\therefore$ (주어진 식)$=(-2a)-\{-(-3b)\}+2b$

$=-2a-3b+2b$

$=-2a-b$ 답 $-2a-b$

034 $a>0$에서 $\frac{1}{4}a>0$이므로

$b=-\sqrt{\left(\frac{1}{4}a\right)^2}=-\frac{1}{4}a$

$-\frac{1}{4}a<0$에서 $b<0$이므로

$c=\sqrt{16b^2}=\sqrt{(4b)^2}=-4b=-4\times\left(-\frac{1}{4}a\right)=a$

$\therefore 2a+b-c=2a+\left(-\frac{1}{4}a\right)-a=\frac{3}{4}a$ 답 ④

유형 011 $\sqrt{(a-b)^2}$의 꼴을 포함한 식을 간단히 하기

본책 15쪽

$\sqrt{(a-b)^2}$의 꼴을 간단히 할 때에는 먼저 $a-b$의 부호를 조사한다.

$\rightarrow \begin{cases} a-b>0\text{이면} & \sqrt{(a-b)^2}=a-b \\ a-b<0\text{이면} & \sqrt{(a-b)^2}=-(a-b) \end{cases}$

035 $1<a<2$에서

$2a-4<0$, $a-1>0$

$\therefore$ (주어진 식) $=-(2a-4)-(a-1)$

$=-2a+4-a+1$

$=-3a+5$

답 ①

036 $-1<x<3$에서

$x-3<0$, $3x+3>0$, $5-x>0$ … 1단계

$\therefore$ (좌변) $=-(x-3)+(3x+3)-(5-x)$

$=-x+3+3x+3-5+x$

$=3x+1$ … 2단계

$3x+1=6$에서 $3x=5$ $\therefore x=\frac{5}{3}$ … 3단계

답 $\frac{5}{3}$

단계	채점 요소	비율
1	$x-3$, $3x+3$, $5-x$의 부호 구하기	30 %
2	주어진 식의 좌변 간단히 하기	50 %
3	x의 값 구하기	20 %

037 $a<0$이므로 $2a<a$

즉 $2a<a<b<0<c$이므로

$a-c<0$, $b-c<0$, $b-2a>0$

$\therefore$ (주어진 식) $=-(a-c)-\{-(b-c)\}+(b-2a)$

$=-a+c+b-c+b-2a$

$=-3a+2b$ 답 $-3a+2b$

038 $0<a<1$이므로 $\frac{1}{a}>1$

즉 $0<a<1<\frac{1}{a}$이므로

$a-\frac{1}{a}<0$, $a+\frac{1}{a}>0$, $2a>0$

$\therefore$ (주어진 식) $=-\left(a-\frac{1}{a}\right)-\left(a+\frac{1}{a}\right)-2a$

$=-a+\frac{1}{a}-a-\frac{1}{a}-2a$

$=-4a$ 답 $-4a$

039 주어진 직선의 기울기와 y절편이 모두 음수이므로

$a<0$, $b<0$

또 $x=-1$인 점의 y좌표가 양수이므로

$-a+b>0$, 즉 $a-b<0$

$\sqrt{25b^2}=\sqrt{(5b)^2}$이고 $-3a>0$, $5b<0$

$\therefore$ (주어진 식) $=(-3a)-(-5b)-\{-(a-b)\}$

$=-3a+5b+a-b$

$=-2a+4b$

답 ②

유형 012 $\sqrt{Ax}$가 자연수가 되도록 하는 자연수 x의 값 구하기

본책 16쪽

A가 자연수일 때, $\sqrt{Ax}$가 자연수가 되도록 하는 자연수 x의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.

❶ A를 소인수분해 한다.

❷ Ax의 모든 소인수의 지수가 짝수가 되도록 하는 x의 값을 구한다.

040 $\sqrt{126x}=\sqrt{2\times3^2\times7\times x}$가 자연수가 되려면

$x=2\times7\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

따라서 가장 작은 자연수 x의 값은

$2\times7=14$

답 14

041 $\sqrt{\frac{80}{3}a}=\sqrt{\frac{2^4\times5\times a}{3}}$가 자연수가 되려면

$a=3\times5\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

a의 값이 가장 작을 때, $a+b$의 값도 가장 작으므로

$a=3\times5=15$ … 1단계

$a=15$일 때,

$b=\sqrt{\frac{2^4\times5\times3\times5}{3}}=\sqrt{2^4\times5^2}$

$=\sqrt{(2^2\times5)^2}=20$ … 2단계

$\therefore a+b=15+20=35$ … 3단계

답 35

단계	채점 요소	비율
1	가장 작은 a의 값 구하기	50 %
2	a의 값이 가장 작을 때의 b의 값 구하기	40 %
3	가장 작은 $a+b$의 값 구하기	10 %

042 $\sqrt{216x}=\sqrt{2^3\times3^3\times x}$가 자연수가 되려면

$x=2\times3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

따라서 두 자리 자연수 x의 값은

$2\times3\times2^2=24$, $2\times3\times3^2=54$, $2\times3\times4^2=96$

의 3개이다.

답 ③

043 $v=\sqrt{2\times9.8\times h}=\sqrt{\frac{2\times7^2\times h}{5}}$가 자연수가 되려면

$h=2\times5\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

따라서 가장 작은 세 자리 자연수 h의 값은

$2\times5\times4^2=160$

답 160

유형 013 $\sqrt{Axy}$가 자연수가 되도록 하는 자연수 x, y의 값 구하기

본책 17쪽

A가 자연수일 때, $\sqrt{Axy}$가 자연수가 되도록 하는 자연수 x, y의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.

❶ A를 소인수분해 한다.

❷ Axy의 모든 소인수의 지수가 짝수가 되도록 하는 xy의 값을 구한다.

❸ ❷에서 구한 xy의 값을 만족시키는 x, y의 값을 구한다.

044 $\sqrt{96xy}=\sqrt{2^5\times3\times xy}$가 자연수가 되려면 $xy=2\times3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
따라서 가장 작은 xy의 값은
$2\times3=6$
$xy=6$을 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는
$(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$

답 $(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$

045 $\sqrt{3xy}$가 자연수가 되려면 $xy=3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
이때 x, y는 주사위의 눈의 수이므로 xy가 될 수 있는 값은
$3\times1^2=3$, $3\times2^2=12$, $3\times3^2=27$
(i) $xy=3$일 때,
순서쌍 (x, y)는 $(1, 3), (3, 1)$의 2가지
(ii) $xy=12$일 때,
순서쌍 (x, y)는 $(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)$의 4가지
(iii) $xy=27$일 때, 이를 만족시키는 순서쌍 (x, y)는 없다.
이상에서 구하는 경우의 수는 $2+4=6$

답 6

046 모든 경우의 수는 $6\times6=36$
$\sqrt{8ab}=\sqrt{2^3\times ab}$가 자연수가 되려면 $ab=2\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
이때 ab가 될 수 있는 값은
$2\times1^2=2$, $2\times2^2=8$, $2\times3^2=18$, $2\times4^2=32$
(i) $ab=2$일 때,
순서쌍 (a, b)는 $(1, 2)$의 1가지
(ii) $ab=8$일 때,
순서쌍 (a, b)는 $(2, 4), (4, 2)$의 2가지
(iii) $ab=18$일 때,
순서쌍 (a, b)는 $(3, 6), (6, 3)$의 2가지
(iv) $ab=32$일 때, 이를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 없다.
이상에서 구하는 확률은 $\frac{1+2+2+0}{36}=\frac{5}{36}$

답 ③

047 모든 경우의 수는 $12\times12=144$
$\sqrt{90xy}=\sqrt{2\times3^2\times5\times xy}$가 자연수가 되려면 $xy=2\times5\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
이때 xy가 될 수 있는 값은
$2\times5\times1^2=10$, $2\times5\times2^2=40$, $2\times5\times3^2=90$
(i) $xy=10$일 때,
순서쌍 (x, y)는 $(1, 10), (2, 5), (5, 2), (10, 1)$의 4가지
(ii) $xy=40$일 때,
순서쌍 (x, y)는 $(4, 10), (5, 8), (8, 5), (10, 4)$의 4가지
(iii) $xy=90$일 때,
순서쌍 (x, y)는 $(9, 10), (10, 9)$의 2가지
이상에서 구하는 확률은 $\frac{4+4+2}{144}=\frac{5}{72}$

답 $\frac{5}{72}$

유형 014 $\sqrt{\frac{A}{x}}$가 자연수가 되도록 하는 자연수 x의 값 구하기

본책 17쪽

A가 자연수일 때, $\sqrt{\frac{A}{x}}$가 자연수가 되도록 하는 자연수 x의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.

❶ A를 소인수분해 한다.

❷ $\frac{A}{x}$의 모든 소인수의 지수가 짝수가 되도록 하는 x의 값을 구한다.

048 $\sqrt{\frac{112}{x}}=\sqrt{\frac{2^4\times7}{x}}$이 자연수가 되려면 x는 112의 약수이면서 $x=7\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
따라서 자연수 x의 값은
$7\times1^2=7$, $7\times2^2=28$, $7\times2^4=112$
이므로 구하는 합은 $7+28+112=147$

답 147

049 $\sqrt{\frac{108}{x}}=\sqrt{\frac{2^2\times3^3}{x}}$이 1보다 큰 자연수가 되려면 x는 108보다 작은 108의 약수이면서 $x=3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
따라서 가장 큰 자연수 x의 값은
$3\times3^2=27$

답 27

050 $\sqrt{\frac{1500}{n}}=\sqrt{\frac{2^2\times3\times5^3}{n}}$이 자연수가 되려면 n은 1500의 약수이면서 $n=3\times5\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
따라서 자연수 n의 값은
$3\times5\times1^2=15$, $3\times5\times2^2=60$, $3\times5\times5^2=375$,
$3\times5\times2^2\times5^2=1500$
의 4개이다.

답 ④

051 (i) $\sqrt{\frac{75}{2}x}=\sqrt{\frac{3\times5^2\times x}{2}}$가 자연수가 되려면
$x=2\times3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
(ii) $\sqrt{\frac{600}{x}}=\sqrt{\frac{2^3\times3\times5^2}{x}}$이 자연수가 되려면 x는 600의 약수이면서 $x=2\times3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
(i), (ii)에서 구하는 두 자리 자연수 x의 값은
$2\times3\times2^2=24$

답 24

유형 015 $\sqrt{A+x}$가 자연수가 되도록 하는 자연수 x의 값 구하기

본책 18쪽

A가 자연수일 때, $\sqrt{A+x}$가 자연수가 되도록 하는 자연수 x의 값을 구하려면
➜ A보다 큰 (자연수)^{2}의 꼴인 수를 찾는다.

052 $\sqrt{55+m}$이 자연수가 되려면 $55+m$은 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
이때 m은 자연수이므로 $55+m>55$에서
$55+m=64,\ 81,\ 100,\ \cdots$
m은 가장 작은 자연수이므로
$55+m=64 \quad \therefore m=9$
$m=9$일 때, $\quad n=\sqrt{64}=8$
$\therefore m+n=9+8=17$

답 ④

053 $\sqrt{26+x}$가 한 자리 자연수가 되려면 $26+x$는 26보다 크고 100보다 작으면서 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
이때 x는 자연수이므로 $26+x>26$이고, $\sqrt{26+x}$는 한 자리 자연수이므로 $26+x\le 9^2$에서
$26+x=36,\ 49,\ 64,\ 81$
$\therefore x=10,\ 23,\ 38,\ 55$ … 1단계
따라서 구하는 합은
$10+23+38+55=126$ … 2단계

답 126

단계	채점 요소	비율
1	$\sqrt{26+x}$가 한 자리 자연수가 되도록 하는 자연수 x의 값 구하기	70 %
2	모든 자연수 x의 값의 합 구하기	30 %

054 $\sqrt{136+x}$가 자연수가 되려면 $136+x$는 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
이때 x는 자연수이므로 $136+x>136$에서
$136+x=144,\ 169,\ 196,\ 225,\ 256,\ \cdots$
$\therefore x=8,\ 33,\ 60,\ 89,\ 120,\ \cdots$
따라서 100 이하의 자연수 x는 8, 33, 60, 89의 4개이다. 답 ②

유형 016 $\sqrt{A-x}$가 정수 또는 자연수가 되도록 하는 자연수 x의 값 구하기

본책 18쪽

A가 자연수일 때
(1) $\sqrt{A-x}$가 정수가 되도록 하는 자연수 x의 값을 구하려면
➜ 0 또는 A보다 작은 (자연수)^{2}의 꼴인 수를 찾는다.
(2) $\sqrt{A-x}$가 자연수가 되도록 하는 자연수 x의 값을 구하려면
➜ A보다 작은 (자연수)^{2}의 꼴인 수를 찾는다.

055 $\sqrt{50-x}$가 자연수가 되려면 $50-x$는 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
이때 x는 자연수이므로 $50-x<50$에서
$50-x=1,\ 4,\ 9,\ \cdots,\ 49$
x의 값이 가장 큰 경우는
$50-x=1 \quad \therefore x=49$
x의 값이 가장 작은 경우는
$50-x=49 \quad \therefore x=1$
따라서 구하는 합은
$49+1=50$

답 50

056 $\sqrt{63-3x}$가 정수가 되려면 $63-3x$는 0 또는 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
이때 x는 자연수이므로 $63-3x<63$에서
$63-3x=0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49$
$\therefore x=21,\ \frac{62}{3},\ \frac{59}{3},\ 18,\ \frac{47}{3},\ \frac{38}{3},\ 9,\ \frac{14}{3}$
따라서 자연수 x의 값은 21, 18, 9이므로 구하는 합은
$21+18+9=48$

답 ⑤

057 (i) A 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{41+x}$이고, $\sqrt{41+x}$가 자연수가 되려면 $41+x$는 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
이때 x는 자연수이므로 $41+x>41$에서
$41+x=49,\ 64,\ 81,\ \cdots$
$\therefore x=8,\ 23,\ 40,\ \cdots$ … 1단계
(ii) B 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{33-x}$이고, $\sqrt{33-x}$가 자연수가 되려면 $33-x$는 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
이때 x는 자연수이므로 $33-x<33$에서
$33-x=1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25$
$\therefore x=32,\ 29,\ 24,\ 17,\ 8$ … 2단계
(i), (ii)에서 $\quad x=8$ … 3단계

답 8

단계	채점 요소	비율
1	A 정사각형의 한 변의 길이가 자연수가 되도록 하는 자연수 x의 값 구하기	40 %
2	B 정사각형의 한 변의 길이가 자연수가 되도록 하는 자연수 x의 값 구하기	40 %
3	두 정사각형 A, B의 한 변의 길이가 모두 자연수가 되도록 하는 자연수 x의 값 구하기	20 %

058 $\sqrt{45-2a}-\sqrt{21+3b}$의 값이 가장 큰 정수가 되려면 $\sqrt{45-2a}$는 가장 큰 정수가 되고, $\sqrt{21+3b}$는 가장 작은 정수가 되어야 한다.
$\sqrt{45-2a}$가 정수가 되려면 $45-2a$는 0 또는 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.
이때 a는 자연수이므로 $45-2a<45$에서
$45-2a=0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36$
$\therefore a=\frac{45}{2},\ 22,\ \frac{41}{2},\ 18,\ \frac{29}{2},\ 10,\ \frac{9}{2}$

$\sqrt{45-2a}$가 가장 큰 정수가 되도록 하는 자연수 a의 값은 10이다.

$\therefore a=10$

또 $\sqrt{21+3b}$가 정수가 되려면 $21+3b$는 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

이때 b는 자연수이므로 $21+3b>21$에서

$21+3b=25, 36, 49, \cdots$

$\therefore b=\frac{4}{3}, 5, \frac{28}{3}, \cdots$

$\sqrt{21+3b}$가 가장 작은 정수가 되도록 하는 자연수 b의 값은 5이다.

$\therefore b=5$

$\therefore a+b=10+5=15$

답 15

059 두 정사각형 A, B의 한 변의 길이는 각각 $\sqrt{18n}$, $\sqrt{43-n}$이다.

(i) $\sqrt{18n}=\sqrt{2\times3^2\times n}$이 자연수가 되려면 $n=2\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 하므로 자연수 n은

$2\times1^2=2,\ 2\times2^2=8,\ 2\times3^2=18,\ 2\times4^2=32, \cdots$

(ii) $\sqrt{43-n}$이 자연수가 되려면 $43-n$은 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

이때 n은 자연수이므로 $43-n<43$에서

$43-n=1, 4, 9, 16, 25, 36$

$\therefore n=42, 39, 34, 27, 18, 7$

(i), (ii)에서 $n=18$이므로

(정사각형 A의 한 변의 길이)$=\sqrt{18\times18}=18$

(정사각형 B의 한 변의 길이)$=\sqrt{43-18}=5$

따라서 직사각형 C의 넓이는

$5\times(18-5)=65$

답 65

유형 017 제곱근의 대소 관계

본책 19쪽

(1) $a>0$, $b>0$일 때

① $a<b$이면 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$

② $\sqrt{a}<\sqrt{b}$이면 $a<b$, $-\sqrt{a}>-\sqrt{b}$

(2) a와 $\sqrt{b}$의 대소 비교 (단, $a>0$, $b>0$)

방법 ① $\sqrt{a^2}$과 $\sqrt{b}$의 대소를 비교한다.

방법 ② a^2과 b의 대소를 비교한다.

060 ㄱ. $3=\sqrt{9}$이고 $5<9$이므로 $\sqrt{5}<3$

ㄴ. $6=\sqrt{36}$이고 $36>35$이므로 $6>\sqrt{35}$

$\therefore -6<-\sqrt{35}$

ㄷ. $7=\sqrt{49}$이고 $49<50$이므로 $7<\sqrt{50}$

$\therefore -7>-\sqrt{50}$

ㄹ. $\frac{2}{3}=\sqrt{\frac{4}{9}}$이고 $\frac{4}{9}<\frac{4}{5}$이므로 $\frac{2}{3}<\sqrt{\frac{4}{5}}$

ㅁ. $0.2=\sqrt{0.04}$이고 $0.04<0.2$이므로 $0.2<\sqrt{0.2}$

ㅂ. $2=\sqrt{4}$이고 $\frac{7}{2}<4$이므로 $\sqrt{\frac{7}{2}}<2$

$\therefore -\sqrt{\frac{7}{2}}>-2$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ의 3개이다.

답 ③

061 $3=\sqrt{9}$이고 $10>9$이므로 $\sqrt{10}>3$

$\therefore -\sqrt{10}<-3$

$4=\sqrt{16}$이고 $15<16<21$이므로 $\sqrt{15}<4<\sqrt{21}$

따라서 $-\sqrt{10}<-3<\sqrt{15}<4<\sqrt{21}$이므로

$m=-\sqrt{10}$, $n=\sqrt{21}$ … 1단계

$\therefore m^2+n^2=(-\sqrt{10})^2+(\sqrt{21})^2$

$=10+21=31$ … 2단계

답 31

단계	채점 요소	비율
1	m, n의 값 구하기	70 %
2	m^2+n^2의 값 구하기	30 %

062 $a<1$의 양변에 a $(a>0)$를 곱하면

$a^2<a$ …… ㉠

즉 $a^2<a<1$이므로 $\sqrt{a^2}<\sqrt{a}<\sqrt{1}$

$\therefore a<\sqrt{a}<1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2<a<\sqrt{a}<1$ …… ㉢

또 $a^2<a<1$의 각 변을 a^2 $(a^2>0)$으로 나누면 $1<\frac{1}{a}<\frac{1}{a^2}$이므로

$\sqrt{1}<\sqrt{\frac{1}{a}}<\sqrt{\frac{1}{a^2}}$ $\quad\therefore 1<\sqrt{\frac{1}{a}}<\frac{1}{a}$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $a^2<a<\sqrt{a}<\sqrt{\frac{1}{a}}<\frac{1}{a}$

따라서 그 값이 두 번째로 작은 것은 a이다.

답 a

다른 풀이 $a=\frac{1}{4}$이라 하면

$a^2=\frac{1}{16}$, $\frac{1}{a}=4$, $\sqrt{\frac{1}{a}}=\sqrt{4}=2$, $\sqrt{a}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$

이때 $\frac{1}{16}<\frac{1}{4}<\frac{1}{2}<2<4$이므로

$a^2<a<\sqrt{a}<\sqrt{\frac{1}{a}}<\frac{1}{a}$

따라서 그 값이 두 번째로 작은 것은 a이다.

유형 018 제곱근의 성질과 대소 관계

본책 20쪽

$\sqrt{(A-B)^2}$의 꼴의 식을 간단히 할 때에는 먼저 A, B의 대소를 비교한다.

(1) $A>B$이면 $\sqrt{(A-B)^2}=A-B$ ← $A-B>0$

(2) $A<B$이면 $\sqrt{(A-B)^2}=-(A-B)$ ← $A-B<0$

063 $4=\sqrt{16}$, $5=\sqrt{25}$에서 $4<\sqrt{18}<5$이므로

$4-\sqrt{18}<0$, $\sqrt{18}-5<0$

$\therefore$ (주어진 식)$=-(4-\sqrt{18})-(\sqrt{18}-5)$

$=-4+\sqrt{18}-\sqrt{18}+5=1$

답 1

064 $3=\sqrt{9}$에서 $\sqrt{6}<3$이므로

$3-\sqrt{6}>0$, $\sqrt{6}-3<0$

$\therefore$ (주어진 식)

$=(3-\sqrt{6})-\{-(\sqrt{6}-3)\}-\{-(-3)\}+6$

$=3-\sqrt{6}+\sqrt{6}-3-3+6=3$

답 ⑤

065 $x+y=(2-\sqrt{7})+1=3-\sqrt{7}$이고,

$\sqrt{7}<3$이므로 $3-\sqrt{7}>0$ … 1단계

$x-y=(2-\sqrt{7})-1=1-\sqrt{7}$이고,

$1<\sqrt{7}$이므로 $1-\sqrt{7}<0$ … 2단계

$\therefore$ (주어진 식)$=\sqrt{(3-\sqrt{7})^2}+\sqrt{(1-\sqrt{7})^2}$

$=(3-\sqrt{7})+\{-(1-\sqrt{7})\}$

$=3-\sqrt{7}-1+\sqrt{7}=2$ … 3단계

답 2

단계	채점 요소	비율
1	$x+y$의 부호 구하기	30 %
2	$x-y$의 부호 구하기	30 %
3	주어진 식의 값 구하기	40 %

유형 019 제곱근을 포함한 부등식

본책 20쪽

$a>0$, $b>0$일 때

(1) $a<\sqrt{n}<b \Rightarrow a^2<(\sqrt{n})^2<b^2$

$\Rightarrow a^2<n<b^2$

(2) $\sqrt{a}<n<\sqrt{b} \Rightarrow (\sqrt{a})^2<n^2<(\sqrt{b})^2$

$\Rightarrow a<n^2<b$

066 $5\le\sqrt{3n}<6$에서 $5^2\le(\sqrt{3n})^2<6^2$

$25\le 3n<36$ $\therefore \frac{25}{3}\le n<12$

따라서 자연수 n은 9, 10, 11의 3개이다.

답 ②

067 $\sqrt{11}<n<\sqrt{37}$에서 $(\sqrt{11})^2<n^2<(\sqrt{37})^2$

$\therefore 11<n^2<37$

따라서 자연수 n은 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$4+5+6=15$

답 15

068 $3\le\sqrt{2x+1}<5$에서 $3^2\le(\sqrt{2x+1})^2<5^2$

$9\le 2x+1<25$, $8\le 2x<24$

$\therefore 4\le x<12$

이때 자연수 x는 4, 5, 6, …, 11 …… ㉠ … 1단계

$\sqrt{7}<\frac{x}{3}<\sqrt{17}$에서 $(\sqrt{7})^2<\left(\frac{x}{3}\right)^2<(\sqrt{17})^2$

$7<\frac{x^2}{9}<17$ $\therefore 63<x^2<153$

이때 자연수 x는 8, 9, 10, 11, 12 …… ㉡ … 2단계

㉠, ㉡에서 자연수 x는 8, 9, 10, 11 … 3단계

따라서 $M=11$, $m=8$이므로

$M+m=11+8=19$ … 4단계

답 19

단계	채점 요소	비율
1	조건 (가)를 만족시키는 자연수 x의 값 구하기	30 %
2	조건 (나)를 만족시키는 자연수 x의 값 구하기	30 %
3	두 조건을 모두 만족시키는 자연수 x의 값 구하기	20 %
4	$M+m$의 값 구하기	20 %

069 $2<\sqrt{2a+b}<3$에서 $2^2<(\sqrt{2a+b})^2<3^2$

$\therefore 4<2a+b<9$

이때 a, b는 자연수이므로

$2a+b=5, 6, 7, 8$

$2a+b=5$일 때, 순서쌍 (a, b)는 $(1, 3)$, $(2, 1)$의 2개

$2a+b=6$일 때, 순서쌍 (a, b)는 $(1, 4)$, $(2, 2)$의 2개

$2a+b=7$일 때, 순서쌍 (a, b)는 $(1, 5)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$의 3개

$2a+b=8$일 때, 순서쌍 (a, b)는 $(1, 6)$, $(2, 4)$, $(3, 2)$의 3개

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$2+2+3+3=10$

답 10

유형 020 $\sqrt{x}$ 이하의 자연수 구하기

본책 21쪽

$\sqrt{x}$ (x는 자연수) 이하의 자연수를 구할 때에는 먼저 x와 가까운 (자연수)^{2}의 꼴인 수 2개를 찾아 x의 값의 범위를 부등식으로 나타낸다.

예 $\sqrt{5}$ 이하의 자연수

$\Rightarrow 2^2<5<3^2$, 즉 $\sqrt{2^2}<\sqrt{5}<\sqrt{3^2}$이므로

$2<\sqrt{5}<3$

따라서 $\sqrt{5}$ 이하의 자연수는 1, 2이다.

070 $\sqrt{49}<\sqrt{58}<\sqrt{64}$에서 $7<\sqrt{58}<8$

$\therefore N(58)=7$

$\sqrt{196}<\sqrt{200}<\sqrt{225}$에서 $14<\sqrt{200}<15$

$\therefore N(200)=14$

$\therefore N(58)+N(200)=7+14=21$

답 21

071 $4\le\sqrt{x}<5$에서 $4^2\le(\sqrt{x})^2<5^2$

$\therefore 16\le x<25$

따라서 자연수 x는 16, 17, 18, …, 24의 9개이다.

답 ④

072 $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{16}=4$이므로

$N(5)=N(6)=N(7)=N(8)=2$

$N(9)=N(10)=N(11)=\cdots=N(15)=3$

$\therefore N(5)+N(6)+N(7)+\cdots+N(15)$

$=2\times4+3\times7=29$ 답 29

073 $\sqrt{1}=1$, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{16}=4$, $\sqrt{25}=5$, $\cdots$이므로

$f(1)=0$

$f(2)=f(3)=f(4)=1$

$f(5)=f(6)=f(7)=f(8)=f(9)=2$

$f(10)=f(11)=f(12)=\cdots=f(16)=3$

$f(17)=f(18)=f(19)=\cdots=f(25)=4$

$\vdots$

이때 $0\times1+1\times3+2\times5+3\times7+4\times5=54$이므로 구하는 n의 값은 $f(x)=4$를 만족시키는 x의 값 중 5번째로 작은 값이다.

$\therefore n=21$ 답 21

만점 유형 도전하기

본책 22~23쪽

074 전략 제곱근의 뜻과 성질을 이용한다.

진선: $\sqrt{0.\dot{4}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$의 양의 제곱근은 $\sqrt{\frac{2}{3}}$이다.

고운: (주어진 식)$=\frac{5}{3}\times6-20=-10$

유경: $0.3=\sqrt{0.09}$이고, $0.09<\frac{1}{6}<0.3$에서 $0.3<\sqrt{\frac{1}{6}}<\sqrt{0.3}$이므로 가장 큰 수는 $\sqrt{0.3}$이다.

희진: 넓이가 $\sqrt{16}=4$인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{4}=2$이다.

정은: $0<a<1$이면 $\frac{1}{a}>1$, 즉 $0<a<1<\frac{1}{a}$이므로

$a-1<0$, $\frac{1}{a}-a>0$

$\therefore$ (주어진 식)$=-(a-1)-\left(\frac{1}{a}-a\right)$

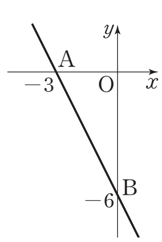
$=-a+1-\frac{1}{a}+a=1-\frac{1}{a}<0$

따라서 잘못 말한 사람은 진선, 유경이다. 답 풀이 참조

075 전략 일차함수 $y=-2x+2$의 그래프를 평행이동하여 두 점 A, B의 좌표를 먼저 구한다.

$y=-2x+2$의 그래프를 y축의 방향으로 -8만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-2x-6$

이 그래프의 x절편은 -3, y절편은 -6이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore A(-3,\ 0)$, $B(0,\ -6)$

따라서 $\overline{OA}=3$, $\overline{OB}=6$이므로 $\triangle OAB$에서

$\overline{AB}=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{45}$ 답 $\sqrt{45}$

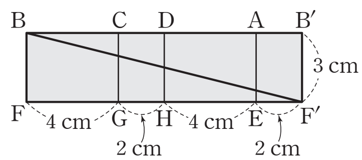
만점 공략 노트

(1) 일차함수 $y=ax+b$의 그래프를 y축의 방향으로 p만큼 평행이동한 그래프의 식 ➔ $y=ax+b+p$

(2) 일차함수 $y=ax+b$의 그래프의

(x절편)$=-\frac{b}{a}$, (y절편)$=b$

076 전략 입체도형에서 최단 거리는 전개도를 이용하여 구한다.



위의 그림의 전개도에서 구하는 최단 거리는 $\overline{BF'}$의 길이이다.

$\overline{FF'}=4+2+4+2=12$ (cm)이므로 $\triangle BFF'$에서

$\overline{BF'}=\sqrt{12^2+3^2}=\sqrt{153}$ (cm) 답 $\sqrt{153}$ cm

077 전략 $\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & (a\geq0) \\ -a & (a<0)\end{cases}$임을 이용하여 $\frac{a}{\sqrt{a^2}}$를 간단히 한다.

$a>0$이면 $\frac{a}{\sqrt{a^2}}=\frac{a}{a}=1$

$a<0$이면 $\frac{a}{\sqrt{a^2}}=\frac{a}{-a}=-1$

(ⅰ) x, y, z가 모두 양수일 때, $xyz>0$이므로

(주어진 식)$=1+1+1+1=4$

(ⅱ) x, y, z 중 2개가 양수이고 1개가 음수일 때, $xyz<0$이므로

(주어진 식)$=1+1-1-1=0$

(ⅲ) x, y, z 중 1개가 양수이고 2개가 음수일 때, $xyz>0$이므로

(주어진 식)$=1-1-1+1=0$

(ⅳ) x, y, z가 모두 음수일 때, $xyz<0$이므로

(주어진 식)$=-1-1-1-1=-4$

이상에서 주어진 식의 값이 될 수 있는 것은 -4, 0, 4이다.

답 -4, 0, 4

078 전략 각 수를 차례대로 계산하여 규칙을 찾는다.

$\sqrt{1}=\sqrt{1^2}=1$

$\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$

$\sqrt{1+3+5}=\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$

$\sqrt{1+3+5+7}=\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=4$

$\vdots$

$\therefore \sqrt{1+3+5+\cdots+23}=\sqrt{12^2}=12$ 답 12

079 전략 $\sqrt{x}$가 자연수 ➔ x는 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

조건 (나)에 의하여 a, b, c, d, e는 모두 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

이때 조건 (라)에서 $a+e=68$이고 조건 (가)에서 $a<e$이므로

$a=4$, $e=64$

조건 (다)에서 $\sqrt{b}=4$이므로

$b=16$

조건 (가)에서 $4<16<c<d<64$, 즉 $2<4<\sqrt{c}<\sqrt{d}<8$이고 조건 (라)에서 $\sqrt{c}+\sqrt{d}=12$이므로

$\sqrt{c}=5$, $\sqrt{d}=7$ $\quad\therefore c=25,\ d=49$

$\therefore a-b+c-d+e=4-16+25-49+64=28$ 답 28

080 전략 근호 안의 수를 소인수분해 한 후 모든 소인수의 지수가 짝수가 되도록 자연수를 제외한다.

근호 안의 수를 소인수분해 하면

$$3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10$$
$$=3\times2^2\times5\times(2\times3)\times7\times2^3\times3^2\times(2\times5)$$
$$=2^7\times3^4\times5^2\times7$$

제곱근이 자연수가 되려면 근호 안의 수가 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다. 즉 소인수의 지수가 모두 짝수이어야 하므로 계산 결과가 가장 큰 자연수가 되려면 2, 7을 제외해야 한다.

이때 2를 소인수로 갖는 자연수 중에서 4, 6을 제외하면 각각 2의 지수, 3의 지수가 홀수가 되므로 $2^3=8$을 제외해야 한다.

따라서 구하는 합은 $\quad 7+8=15$ 답 15

081 전략 $\sqrt{3x}$가 자연수 ➔ $x=3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

$\sqrt{3x}$가 자연수가 되려면 $x=3k^2$ (k는 자연수)의 꼴이어야 한다.

이때 $x\le1000$이므로

$3k^2\le1000,\quad k^2\le\frac{1000}{3}$

$\therefore k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 18$

(ⅰ) x가 5의 배수인 경우

$x=3k^2$이 5의 배수이려면 k^2이 5의 배수이어야 한다.

즉 k는 5의 배수이어야 하므로 5, 10, 15의 3개이다.

(ⅱ) x가 6의 배수인 경우

$x=3k^2$이 6의 배수이려면 k^2이 2의 배수이어야 한다.

즉 k는 2의 배수이므로 2, 4, 6, $\cdots$, 18의 9개이다.

이때 $k=10$은 (ⅰ), (ⅱ)를 동시에 만족시키므로 구하는 개수는

$3+9-1=11$ 답 11

시험 만점 완성하기

본책 24~27쪽

082 전략 제곱근의 뜻과 성질을 이용한다.

ㄱ. $\sqrt{81}=9$의 제곱근은 ±3이다.

ㄴ. $0.\dot{1}=\frac{1}{9}$의 양의 제곱근은 $\frac{1}{3}$이다.

ㄷ. 음수의 제곱근은 없다.

ㄹ. $\sqrt{169}=13$이므로 제곱근 $\sqrt{169}$는 $\sqrt{13}$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ①

083 전략 먼저 225의 두 제곱근을 구한다.

225의 제곱근은 ±15이므로

$a=15,\ b=-15\ (\because a>b)$

$\therefore 2a-b=2\times15-(-15)=45$

따라서 45의 양의 제곱근은 $\sqrt{45}$이다. 답 ⑤

084 전략 처음 정사각형의 넓이를 먼저 구한다.

처음 정사각형의 넓이는

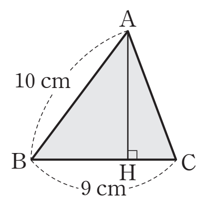
$24^2=576\,(\mathrm{cm}^2)$

각 단계의 정사각형의 넓이는 이전 단계의 정사각형의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로 [5단계]의 정사각형의 넓이는

$576\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=18\,(\mathrm{cm}^2)$

따라서 [5단계]에서 만들어지는 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{18}$ cm이다. 답 ④

085 전략 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{AH}$의 길이를 구한다.



오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 △ABC의 넓이가 36 cm^{2}이므로

$\frac{1}{2}\times9\times\overline{AH}=36$

$\therefore \overline{AH}=8\,(\mathrm{cm})$

△ABH에서

$\overline{BH}=\sqrt{10^2-8^2}=6\,(\mathrm{cm})$

이므로 $\quad\overline{HC}=9-6=3\,(\mathrm{cm})$

△AHC에서

$\overline{AC}=\sqrt{8^2+3^2}=\sqrt{73}\,(\mathrm{cm})$ 답 ①

086 전략 근호를 없앤 후 차례대로 계산한다.

$A=\sqrt{(-12)^2}\times\sqrt{\frac{1}{9}}-(-\sqrt{7})^2=12\times\frac{1}{3}-7=-3$

$B=\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2}-(\sqrt{0.5})^2\div\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{1}{6}-0.5\div\frac{3}{5}$

$=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}=-\frac{2}{3}$

$\therefore \sqrt{AB}=\sqrt{(-3)\times\left(-\frac{2}{3}\right)}=\sqrt{2}$ 답 ④

087 전략 $a<0$이면 $\sqrt{a^2}=-a$임을 이용한다.

① $\sqrt{\frac{9}{4}a^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^2}$이고 $\frac{3}{2}a<0$이므로

$\sqrt{\frac{9}{4}a^2}=-\frac{3}{2}a$

② $-2a>0$이므로 $\quad\sqrt{(-2a)^2}=-2a$

③ $\frac{4}{3}a<0$이므로 $\quad-\sqrt{\left(\frac{4}{3}a\right)^2}=-\left(-\frac{4}{3}a\right)=\frac{4}{3}a$

④ $\sqrt{2.56a^2}=\sqrt{(1.6a)^2}$이고 $1.6a<0$이므로

$\sqrt{2.56a^2}=-1.6a$

⑤ $-\frac{9}{4}a>0$이므로 $\quad\sqrt{\left(-\frac{9}{4}a\right)^2}=-\frac{9}{4}a$

이때 $\frac{4}{3}a<-\frac{3}{2}a<-1.6a<-2a<-\frac{9}{4}a$이므로 그 값이 가장 큰 것은 ⑤이다. 답 ⑤

088 전략 주어진 조건으로 a, b의 부호를 먼저 구한다.

$a<0$, $b>0$이므로 $\quad -2a>0,\ 5a<0,\ 2b>0$

$\therefore$ (주어진 식)$=\sqrt{(-2a)^2}+\sqrt{(5a)^2}-\sqrt{(2b)^2}$
$=-2a+(-5a)-2b$
$=-7a-2b$

답 ①

089 전략 주어진 부등식을 이용하여 x의 부호를 먼저 구한다.

$2(x-5)>3x-8$에서 $\quad 2x-10>3x-8$

$-x>2 \qquad \therefore x<-2$

$x+2<0$, $3x<0$, $x-2<0$이므로

(주어진 식)$=\sqrt{\{2(x+2)\}^2}+\sqrt{(3x)^2}-\sqrt{(x-2)^2}$
$=-2(x+2)+(-3x)-\{-(x-2)\}$
$=-2x-4-3x+x-2$
$=-4x-6$

따라서 $A=-4$, $B=-6$이므로

$A-B=-4-(-6)=2$

답 ⑤

090 전략 20을 소인수분해 하여 근호 안의 모든 소인수의 지수가 짝수가 되도록 하는 xy의 값을 모두 찾는다.

모든 경우의 수는 $\quad 6\times6=36$

$\sqrt{20xy}=\sqrt{2^2\times5\times xy}$가 자연수가 되려면 $xy=5\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

이때 x, y는 주사위의 눈의 수이므로 xy가 될 수 있는 값은

$5\times1^2=5,\ 5\times2^2=20$

(i) $xy=5$일 때,
순서쌍 (x, y)는 $(1, 5)$, $(5, 1)$의 2가지

(ii) $xy=20$일 때,
순서쌍 (x, y)는 $(4, 5)$, $(5, 4)$의 2가지

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\quad \frac{2+2}{36}=\frac{1}{9}$

답 ②

091 전략 132와 270을 각각 소인수분해 하여 근호 안의 모든 소인수의 지수가 짝수가 되도록 하는 a, b 중에서 조건을 만족시키는 값을 찾는다.

$\sqrt{132a}=\sqrt{2^2\times3\times11\times a}$가 자연수가 되려면

$a=3\times11\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

따라서 가장 작은 자연수 a의 값은

$3\times11=33$

또 $\sqrt{\frac{270}{b}}=\sqrt{\frac{2\times3^3\times5}{b}}$가 자연수가 되려면 b는 270의 약수이면서 $2\times3\times5\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

따라서 가장 작은 자연수 b의 값은

$2\times3\times5=30$

$\therefore a+b=33+30=63$

답 ③

092 전략 $m-n$의 값이 가장 작으려면 m은 가장 작고, n은 가장 커야 한다.

$\sqrt{60x}-\sqrt{124-2y}$의 값이 가장 작은 정수가 되려면 $\sqrt{60x}$는 가장 작은 정수가 되고, $\sqrt{124-2y}$는 가장 큰 정수가 되어야 한다.

$\sqrt{60x}=\sqrt{2^2\times3\times5\times x}$가 정수가 되려면 $x=3\times5\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

x의 값이 가장 작을 때 $\sqrt{60x}$의 값도 가장 작으므로

$x=3\times5=15$

또 $\sqrt{124-2y}$가 정수가 되려면 $124-2y$는 0 또는 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

이때 y는 자연수이므로 $124-2y<124$에서

$124-2y=0, 1, 4, 9, \cdots, 100, 121$

$\sqrt{124-2y}$가 가장 큰 정수가 되는 것은

$124-2y=100$ ($\because$ y는 자연수)

$\therefore y=12$

$\therefore x+y=15+12=27$

답 ③

093 전략 두 양수 a, b에 대하여 $a<b$이면 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$임을 이용한다.

$\frac{5}{3}=\sqrt{\frac{25}{9}}$이고 $3>\frac{25}{9}$이므로 $\qquad \sqrt{3}>\frac{5}{3}$

$\therefore -\sqrt{3}<-\frac{5}{3}$

$\frac{4}{3}=\sqrt{\frac{16}{9}}$이고 $\frac{4}{3}<\frac{16}{9}<2$이므로

$\sqrt{\frac{4}{3}}<\frac{4}{3}<\sqrt{2}$

따라서 작은 것부터 차례대로 나열하면

$-\sqrt{3},\ -\frac{5}{3},\ \sqrt{\frac{4}{3}},\ \frac{4}{3},\ \sqrt{2}$

이므로 $\qquad a=-\sqrt{3},\ c=\sqrt{\frac{4}{3}},\ e=\sqrt{2}$

$\therefore a^2-c^2+e^2=(-\sqrt{3})^2-\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2+(\sqrt{2})^2$
$=3-\frac{4}{3}+2=\frac{11}{3}$

답 ⑤

094 전략 두 양수 a, b에 대하여 $a<\sqrt{n}<b$이면 $a^2<n<b^2$임을 이용한다.

$-4\le-\sqrt{2x+1}\le-2$에서 $\qquad 2\le\sqrt{2x+1}\le4$

$2^2\le(\sqrt{2x+1})^2\le4^2, \qquad 4\le2x+1\le16$

$3\le2x\le15 \qquad \therefore \frac{3}{2}\le x\le\frac{15}{2}$

따라서 자연수 x는 2, 3, 4, 5, 6, 7의 6개이다.

답 ④

095 전략 $\sqrt{x}$ 이하의 자연수를 구하려면 x와 가까운 (자연수)^{2}의 꼴인 수를 먼저 찾는다.

$M(x)=7$을 만족시키는 자연수 x는 $7\le\sqrt{x}<8$에서

$7^2\le(\sqrt{x})^2<8^2 \qquad \therefore 49\le x<64$

따라서 자연수 x는 49, 50, 51, $\cdots$, 63의 15개이다.

답 ①

096 전략 근호 안의 수가 어떤 수의 제곱이면 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 있다.

ㄱ. 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하면

$x^2=30 \quad \therefore x=\sqrt{30}\ (\because x>0)$

ㄴ. 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi r^2=\dfrac{25}{4}\pi, \qquad r^2=\dfrac{25}{4}$

$\therefore r=\sqrt{\dfrac{25}{4}}=\dfrac{5}{2}\ (\because r>0)$

ㄷ. $\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=13$

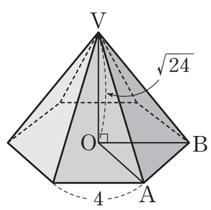
ㄹ. 정육면체의 한 모서리의 길이를 x라 하면

$6x^2=24, \qquad x^2=4$

$\therefore x=2\ (\because x>0)$

따라서 근호를 사용하지 않고 나타낼 수 있는 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

097 전략 피타고라스 정리를 이용하여 옆면의 삼각형의 변의 길이를 구한다.



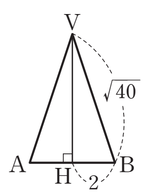
오른쪽 그림에서 △OAB는 정삼각형이므로

$\overline{\mathrm{OB}}=4$

△VOB에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{VB}}=\sqrt{(\sqrt{24})^2+4^2}=\sqrt{40}$

이등변삼각형 VAB의 점 V에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{\mathrm{BH}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=2$

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{VH}}=\sqrt{(\sqrt{40})^2-2^2}=6$

$\therefore \triangle\mathrm{VAB}=\dfrac{1}{2}\times4\times6=12$

즉 옆면을 이루는 한 삼각형의 넓이는 12이다. 답 12

098 전략 각 근호 안의 식의 값의 범위를 나누어 a, b의 값을 구한다.

$\sqrt{9(x+a)^2}+\sqrt{4(x-b)^2}=\sqrt{\{3(x+a)\}^2}+\sqrt{\{2(x-b)\}^2}$

(i) $x+a>0$, $x-b>0$이면

(좌변)$=3(x+a)+2(x-b)=5x+3a-2b$

$\therefore 5x+3a-2b\neq x-4$

(ii) $x+a>0$, $x-b<0$이면

(좌변)$=3(x+a)-2(x-b)=x+3a+2b$

이때 $x+3a+2b=x-4$이므로

$3a+2b=-4$

(iii) $x+a<0$, $x-b>0$이면

(좌변)$=-3(x+a)+2(x-b)=-x-3a-2b$

$\therefore -x-3a-2b\neq x-4$

(iv) $x+a<0$, $x-b<0$이면

(좌변)$=-3(x+a)-2(x-b)=-5x-3a+2b$

$\therefore -5x-3a+2b\neq x-4$

이상에서 $\quad 3a+2b=-4$

$3a+2b=-4$, $a+b=1$을 연립하여 풀면

$a=-6$, $b=7$

이때 올바른 부호는 $x+a>0$, $x-b>0$이므로 바르게 계산한 식은

$$\begin{aligned}3(x+a)+2(x-b)&=5x+3a-2b\\&=5x+3\times(-6)-2\times7\\&=5x-32\end{aligned}$$

답 $5x-32$

다른 풀이 $a+b=1$에서 $\qquad b=-a+1$

$\therefore \sqrt{9(x+a)^2}+\sqrt{4(x-b)^2}$

$=\sqrt{\{3(x+a)\}^2}+\sqrt{\{2(x+a-1)\}^2}$

(i) $x+a>0$, $x+a-1>0$이면

(좌변)$=3(x+a)+2(x+a-1)$

$=5x+5a-2$

$\therefore 5x+5a-2\neq x-4$

(ii) $x+a>0$, $x+a-1<0$이면

(좌변)$=3(x+a)-2(x+a-1)$

$=x+a+2$

이때 $x+a+2=x-4$이므로

$a+2=-4 \qquad \therefore a=-6$

(iii) $x+a<0$, $x+a-1>0$이면

(좌변)$=-3(x+a)+2(x+a-1)$

$=-x-a-2$

$\therefore -x-a-2\neq x-4$

(iv) $x+a<0$, $x+a-1<0$이면

(좌변)$=-3(x+a)-2(x+a-1)$

$=-5x-5a+2$

$\therefore -5x-5a+2\neq x-4$

이상에서 $a=-6$이고, 올바른 부호는 $x+a>0$, $x+a-1>0$이므로 바르게 계산한 식은

$$\begin{aligned}3(x+a)+2(x+a-1)&=5x+5a-2\\&=5x+5\times(-6)-2\\&=5x-32\end{aligned}$$

099 전략 먼저 두 조건을 각각 만족시키는 x의 값을 구하고, 두 조건을 동시에 만족시키는 x를 찾는다.

(i) $\sqrt{19+x}$가 자연수가 되려면 $19+x$는 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

이때 x는 자연수이므로 $19+x>19$에서

$19+x=25, 36, 49, \cdots$

$\therefore x=6, 17, 30, \cdots$

(ii) $\sqrt{12}<x<\sqrt{40}$의 각 변을 제곱하면

$12<x^2<40$

이때 x는 자연수이므로

$x=4, 5, 6$

(i), (ii)에서 $\qquad x=6$ 답 6

100 전략 분모가 15인 기약분수를 $\dfrac{x}{15}$(x는 자연수)라 하고 부등식을 세운다.

$\sqrt{\frac{1}{5}}$과 $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 사이에 있는 분수 중 분모가 15인 기약분수를

$\frac{x}{15}$(x는 자연수)라 하면

$$\sqrt{\frac{1}{5}}<\frac{x}{15}<\sqrt{\frac{2}{3}}$$

각 변을 제곱하면

$$\frac{1}{5}<\frac{x^2}{225}<\frac{2}{3} \quad \therefore 45<x^2<150$$

따라서 자연수 x는 7, 8, 9, 10, 11, 12이다.

이때 $\frac{x}{15}$가 기약분수이려면 x는 15와 서로소이어야 하므로

$$x=7,\ 8,\ 11$$

따라서 구하는 기약분수는 $\frac{7}{15}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{11}{15}$의 3개이다.

답 3

101 전략 $\sqrt{x}$보다 작은 자연수를 구하려면 x와 가까운 (자연수)^{2}의 꼴인 수를 먼저 찾는다.

$\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{16}=4$, $\sqrt{25}=5$이므로

$$N(6)=N(7)=N(8)=N(9)=2$$
$$N(11)=N(12)=\cdots=N(16)=3$$
$$N(17)=N(18)=N(19)=N(20)=4$$
$$\therefore \text{(주어진 식)}=\frac{\sqrt{3^6\times4^4}}{\sqrt{2^4}}=\frac{\sqrt{(3^3\times4^2)^2}}{\sqrt{(2^2)^2}}$$
$$=\frac{3^3\times4^2}{2^2}=108$$

답 108

102 전략 주어진 조건을 이용하여 a, b, c의 부호를 먼저 구한다.

$a<b<c$에서 $\quad a-b<0,\ b-c<0,\ c-a>0$

$a-b<0$, $bc(a-b)>0$에서 $bc<0$이므로 $\quad b<0,\ c>0$

$\therefore a<b<0<c$ … 1단계

$\therefore$ (주어진 식)$=-(b-c)-(c-a)+(-a)+(-b)-c$

$=-b+c-c+a-a-b-c$

$=-2b-c$ … 2단계

답 $-2b-c$

단계	채점 요소	배점
1	a, b, c, $b-c$, $c-a$의 부호 구하기	3점
2	주어진 식 간단히 하기	2점

103 전략 $\sqrt{A}$가 자연수 ➜ $A=$(자연수)^{2}의 꼴

$\sqrt{A}$가 유리수 ➜ $A=$(유리수)^{2}의 꼴

$$\sqrt{\frac{5}{24}x}=\sqrt{\frac{5\times x}{2^3\times3}}$$

$\sqrt{\frac{5\times x}{2^3\times3}}$가 자연수가 되려면 $x=2^3\times3\times5\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

따라서 가장 작은 자연수 x의 값은

$2^3\times3\times5=120 \quad \therefore a=120$ … 1단계

$\sqrt{\frac{5\times x}{2^3\times3}}$가 유리수가 되려면 $x=2\times3\times5\times$(유리수)^{2}의 꼴이어야 한다.

따라서 가장 작은 자연수 x의 값은

$2\times3\times5=30 \quad \therefore b=30$ … 2단계

$\therefore a+b=120+30=150$ … 3단계

답 150

단계	채점 요소	배점
1	a의 값 구하기	2점
2	b의 값 구하기	2점
3	$a+b$의 값 구하기	1점

104 전략 $\sqrt{27n}$, $\sqrt{37-n}$이 모두 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 값을 구한다.

두 정사각형의 한 변의 길이는 각각 $\sqrt{27n}$, $\sqrt{37-n}$이고 모두 자연수이다.

$\sqrt{27n}=\sqrt{3^3\times n}$이 자연수가 되려면 $n=3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 하므로 자연수 n의 값은

$3\times1^2=3$, $3\times2^2=12$, $3\times3^2=27$, $\cdots$ …… ㉠

… 1단계

또 $\sqrt{37-n}$이 자연수가 되려면 $37-n=$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

이때 n은 자연수이므로 $37-n<37$에서

$37-n=1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36$

$\therefore n=36,\ 33,\ 28,\ 21,\ 12,\ 1$ …… ㉡

… 2단계

㉠, ㉡에서 $n=12$이므로 정사각형 B의 넓이는

$37-12=25$ … 3단계

답 25

단계	채점 요소	배점
1	$\sqrt{27n}$이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 값 구하기	2점
2	$\sqrt{37-n}$이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 값 구하기	2점
3	정사각형 B의 넓이 구하기	1점

105 전략 제곱근의 대소 관계를 이용하여 $f(x)$의 식을 간단히 한다.

$\sqrt{x}<\sqrt{x+1}$이므로 $\quad \sqrt{x}-\sqrt{x+1}<0$

$\therefore f(x)=\sqrt{(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})^2}=-(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})$

$=-\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$ … 1단계

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(8)$

$=(-\sqrt{1}+\sqrt{2})+(-\sqrt{2}+\sqrt{3})+\cdots+(-\sqrt{8}+\sqrt{9})$

$=-\sqrt{1}+\sqrt{9}=-1+3=2$ … 2단계

답 2

단계	채점 요소	배점
1	$f(x)$의 식 간단히 하기	2점
2	$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(8)$의 값 구하기	4점

02 무리수와 실수

셀프 CHECK

본책 28쪽

A (2) $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$는 유리수이다.
(3) $2.3\dot{4}\dot{1}$은 순환소수이므로 유리수이다.
답 (1) 무 (2) 유 (3) 유 (4) 무

B (1) $1=\sqrt{1}$, $2=\sqrt{4}$이므로 $1<\sqrt{2}<2$
따라서 $\sqrt{2}$에 대응하는 점은 C이다.
(2) $2=\sqrt{4}$, $3=\sqrt{9}$이므로 $2<\sqrt{7}<3$
따라서 $\sqrt{7}$에 대응하는 점은 D이다.
(3) $0=\sqrt{0}$, $1=\sqrt{1}$이므로 $0<\sqrt{\frac{1}{2}}<1$
따라서 $\sqrt{\frac{1}{2}}$에 대응하는 점은 B이다.
(4) $1=\sqrt{1}$, $2=\sqrt{4}$이므로 $1<\sqrt{3}<2$
$\therefore -2<-\sqrt{3}<-1$
따라서 $-\sqrt{3}$에 대응하는 점은 A이다.
답 (1) 점 C (2) 점 D (3) 점 B (4) 점 A

C 답 >, >

D 답 (1) 3.271 (2) 3.391

내신 유형 다지기

본책 29~35쪽

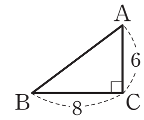
유형 021 유리수와 무리수의 구별

본책 29쪽

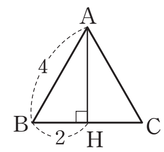
(1) 유리수: $\frac{(정수)}{(0이\ 아닌\ 정수)}$의 꼴로 나타낼 수 있는 수
➜ 정수, 유한소수, 순환소수
예 3, 1.234, $0.\dot{1}$, $\sqrt{4}$
(2) 무리수: 유리수가 아닌 수
➜ 순환소수가 아닌 무한소수
예 π, $0.122333\cdots$, $\sqrt{5}$

106 $\sqrt{25}=5$, $(-\sqrt{11})^2=11$
따라서 무리수는 2π, $-\sqrt{0.9}$의 2개이다. 답 ②

107 ㄱ. 넓이가 9인 정사각형의 한 변의 길이는
$\sqrt{9}=3$
ㄴ. 지름의 길이가 4인 원의 둘레의 길이는
4π
ㄷ. 오른쪽 그림의 직각삼각형 ABC에서
$\overline{AB}=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=10$



ㄹ. 오른쪽 그림의 정삼각형 ABC에서
$\overline{AH}=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}$



이상에서 유리수인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

108 ① $a=\sqrt{5}$이면 $\sqrt{5}a=(\sqrt{5})^2=5$
② $a=-\sqrt{2}$이면 $a+\sqrt{2}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$
③ $a=\sqrt{2}$이면 $a^2=(\sqrt{2})^2=2$
④ (0이 아닌 유리수)×(무리수)=(무리수)이므로 $3a$는 무리수이다.
⑤ (무리수)−(유리수)=(무리수)이므로 $a-1$은 무리수이다.
따라서 항상 무리수인 것은 ④, ⑤이다. 답 ④, ⑤

유형 022 무리수의 이해

본책 29쪽

소수
- 유한소수 — 유리수
- 무한소수
  - 순환소수 — 유리수
  - 순환소수가 아닌 무한소수 — 무리수

109 ㄱ. 순환소수는 무한소수이지만 유리수이다.
ㄷ. 유한소수는 모두 유리수이다.
ㄹ. $\sqrt{4}$는 근호를 사용하여 나타낸 수이지만 유리수이다.
이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ①

110 ② 소수는 유한소수와 무한소수로 이루어져 있다.
따라서 옳지 않은 것은 ②이다. 답 ②

111 ① 무리수이다.
② 순환하지 않는 무한소수로 나타낼 수 있다.
④ 음수이므로 0보다 작은 수이다.
따라서 옳은 것은 ③, ⑤이다. 답 ③, ⑤

유형 023 실수의 이해

본책 30쪽

실수
- 유리수
  - 정수
    - 양의 정수(자연수)
    - 0
    - 음의 정수
  - 정수가 아닌 유리수
- 무리수 ← 유리수가 아닌 실수

112 ④ 실수 중 무리수가 아닌 수는 유리수이다.
따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

113 □ 안의 수는 무리수이다.

① $0.\dot{1}$ ➜ 유리수

② 3.14 ➜ 유리수

$1+\sqrt{9}=1+3=4$ ➜ 유리수

③ $\sqrt{1.\dot{7}}=\sqrt{\frac{17-1}{9}}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}$ ➜ 유리수

④ $\sqrt{(-5)^2}=5$ ➜ 유리수

따라서 두 수가 모두 무리수인 것은 ⑤이다.

답 ⑤

114 $-\sqrt{(-4)^2}=-4$, $\sqrt{0.0\dot{4}}=\sqrt{\frac{4}{90}}=\sqrt{\frac{2}{45}}$, $\sqrt{\frac{81}{4}}=\frac{9}{2}$

주어진 수는 모두 실수이고 7개이므로

$a=7$ … 1단계

무리수는 $\sqrt{1000}$, -3π, $\sqrt{0.0\dot{4}}$의 3개이므로

$b=3$ … 2단계

$\therefore a-b=7-3=4$ … 3단계

답 4

단계	채점 요소	비율
1	a의 값 구하기	40 %
2	b의 값 구하기	40 %
3	$a-b$의 값 구하기	20 %

다른 풀이 실수는 유리수와 무리수로 이루어져 있으므로 $a-b$의 값은 유리수의 개수와 같다.

유리수는 $-\sqrt{(-4)^2}$, 2.0606, $0.1333\cdots$, $\sqrt{\frac{81}{4}}$의 4개이므로

$a-b=4$

115 $\sqrt{1.21}=1.1$, $\sqrt{16}-3=4-3=1$,

$\sqrt{\frac{32}{50}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$, $\sqrt{0.\dot{8}}=\sqrt{\frac{8}{9}}$

① 자연수는 $\sqrt{16}-3$의 1개이다.

② 정수는 $\sqrt{16}-3$의 1개이다.

③ 유리수는 $\frac{1}{6}$, $\sqrt{1.21}$, $\sqrt{16}-3$, $\sqrt{\frac{32}{50}}$의 4개이다.

④ 정수가 아닌 유리수는 $\frac{1}{6}$, $\sqrt{1.21}$, $\sqrt{\frac{32}{50}}$의 3개이다.

⑤ 순환소수가 아닌 무한소수, 즉 무리수는 $-\sqrt{27}$, $\sqrt{0.\dot{8}}$의 2개이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

유형 024 제곱근이 무리수가 되도록 하는 자연수의 개수 구하기

본책 30쪽

① $\sqrt{x}$가 무리수가 되도록 하는 자연수 x의 개수

➜ 전체 x의 개수에서 $\sqrt{x}$가 유리수가 되도록 하는 x의 개수를 뺀다.

② $\sqrt{Ax}$, $\sqrt{Bx}$가 모두 무리수가 되도록 하는 자연수 x의 개수

➜ 전체 x의 개수에서 $\sqrt{Ax}$, $\sqrt{Bx}$가 각각 유리수가 되도록 하는 x의 개수를 뺀다. 이때 중복되는 x의 값에 주의한다.

116 (i) $\sqrt{n}$이 유리수가 되도록 하는 n은

$1^2, 2^2, 3^2, \cdots, 10^2$

의 10개이다.

(ii) $\sqrt{2n}$이 유리수가 되도록 하는 n은

$2\times1^2, 2\times2^2, 2\times3^2, \cdots, 2\times7^2$

의 7개이다.

(i), (ii)에서 중복되는 n의 값이 없으므로 $\sqrt{n}$, $\sqrt{2n}$이 모두 무리수가 되도록 하는 n의 개수는

$100-(10+7)=83$

답 83

117 $\sqrt{x}$가 유리수이려면 $x=(\text{유리수})^2$의 꼴이어야 한다.

30 이하의 자연수 중 $(\text{유리수})^2$의 꼴인 수는

$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$

의 5개이다. … 1단계

따라서 $\sqrt{x}$가 무리수가 되도록 하는 x의 개수는

$30-5=25$ … 2단계

답 25

단계	채점 요소	비율
1	$\sqrt{x}$가 유리수가 되도록 하는 x의 개수 구하기	50 %
2	$\sqrt{x}$가 무리수가 되도록 하는 x의 개수 구하기	50 %

118 (i) $\sqrt{20n}=\sqrt{2^2\times5\times n}$이 유리수가 되도록 하는 n은

$5\times1^2, 5\times2^2, 5\times3^2$

의 3개이다.

(ii) $\sqrt{27n}=\sqrt{3^3\times n}$이 유리수가 되도록 하는 n은

$3\times1^2, 3\times2^2, 3\times3^2, 3\times4^2$

의 4개이다.

(i), (ii)에서 중복되는 n의 값이 없으므로 $\sqrt{20n}$, $\sqrt{27n}$이 모두 무리수가 되도록 하는 n의 개수는

$50-(3+4)=43$

답 ③

119 두 자리 자연수는

$10, 11, 12, \cdots, 99$

의 90개이다.

(i) $\sqrt{2n}$이 유리수가 되도록 하는 n은

$2\times3^2, 2\times4^2, 2\times5^2, 2\times6^2, 2\times7^2$

의 5개이다.

(ii) $\sqrt{3n}$이 유리수가 되도록 하는 n은

$3\times2^2, 3\times3^2, 3\times4^2, 3\times5^2$

의 4개이다.

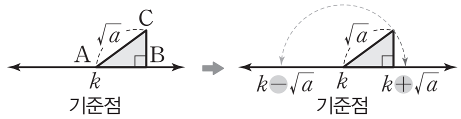
(iii) $\sqrt{12n}=\sqrt{2^2\times3\times n}$이므로 $\sqrt{3n}$과 $\sqrt{12n}$이 유리수가 되도록 하는 n은 서로 같다.

이상에서 $\sqrt{2n}$, $\sqrt{3n}$, $\sqrt{12n}$이 모두 무리수가 되도록 하는 n의 개수는

$90-(5+4)=81$

답 81

유형 025 무리수를 수직선 위에 나타내기
본책 31쪽



❶ 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}$의 길이 $\sqrt{a}$를 구한다.
❷ 기준점 k에서 오른쪽에 있는 점의 좌표는
(기준점)$+\overline{AC}$, 즉 $k+\sqrt{a}$
기준점 k에서 왼쪽에 있는 점의 좌표는
(기준점)$-\overline{AC}$, 즉 $k-\sqrt{a}$

120 $\triangle$ABC, $\triangle$DEF는 직각삼각형이므로
$\overline{AB}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, $\overline{DF}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$
$\overline{AP}=\overline{AB}=\sqrt{5}$이므로 점 P에 대응하는 수는
$-1-\sqrt{5}$
$\overline{DQ}=\overline{DF}=\sqrt{8}$이므로 점 Q에 대응하는 수는
$0+\sqrt{8}=\sqrt{8}$ 답 $-1-\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$

121 세 정사각형의 대각선의 길이는 모두
$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$
이므로 각 점의 좌표는
A$(-1-\sqrt{2})$, B$(-\sqrt{2})$, C$(-2+\sqrt{2})$,
D$(-1+\sqrt{2})$, E$(2-\sqrt{2})$
따라서 $-1+\sqrt{2}$에 대응하는 점은 D이다. 답 ④

122 두 정사각형 ABCD, BEFG의 한 변의 길이는 각각 $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$이므로
$\overline{AD}=\sqrt{2}$, $\overline{EF}=\sqrt{5}$
① $\overline{AP}=\overline{AD}=\sqrt{2}$
② $\overline{EQ}=\overline{EF}=\sqrt{5}$
③ $\overline{AQ}=\overline{AE}+\overline{EQ}=3+\sqrt{5}$
④ 점 P는 점 A로부터 왼쪽으로 $\sqrt{2}$만큼 떨어져 있는 점이므로 점 P에 대응하는 수는 $1-\sqrt{2}$
⑤ 점 Q는 점 E로부터 오른쪽으로 $\sqrt{5}$만큼 떨어져 있는 점이므로 점 Q에 대응하는 수는 $4+\sqrt{5}$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

123 $\overline{AC}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$
$\overline{AQ}=\overline{AC}=\sqrt{13}$이고 점 Q에 대응하는 수가 $-3+\sqrt{13}$이므로 점 A에 대응하는 수는
$(-3+\sqrt{13})-\sqrt{13}=-3$
$\overline{AP}=\overline{AC}=\sqrt{13}$이므로 점 P에 대응하는 수는
$-3-\sqrt{13}$ 답 $-3-\sqrt{13}$

124 원의 반지름의 길이를 r라 하면
$\pi r^2=\pi$, $r^2=1$ $\therefore r=1$ $(\because r>0)$ … 1단계
원의 둘레의 길이는
$2\pi\times1=2\pi$ … 2단계
점 A와 A$'$ 사이의 거리는 원의 둘레의 길이의 2배와 같으므로
$\overline{AA'}=2\pi\times2=4\pi$ … 3단계
따라서 점 A$'$에 대응하는 수는 $2+4\pi$ … 4단계
답 $2+4\pi$

단계	채점 요소	비율
1	원의 반지름의 길이 구하기	10 %
2	원의 둘레의 길이 구하기	20 %
3	$\overline{AA'}$의 길이 구하기	30 %
4	점 A$'$에 대응하는 수 구하기	40 %

유형 026 실수와 수직선
본책 32쪽

(1) 모든 실수는 수직선 위의 한 점에 각각 대응한다.
(2) 서로 다른 두 실수 사이에는 무수히 많은 실수가 있다.
(3) 수직선은 실수에 대응하는 점들로 완전히 메울 수 있다.

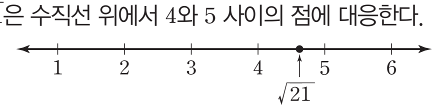
125 ③ 두 실수 1과 2 사이에는 정수가 없다.
⑤ 수직선은 유리수와 무리수, 즉 실수에 대응하는 점들로 완전히 메울 수 있다.
따라서 옳지 않은 것은 ③, ⑤이다. 답 ③, ⑤

126 ㄱ. $\sqrt{15}<\sqrt{16}<\sqrt{17}$, 즉 $\sqrt{15}<4<\sqrt{17}$이므로 $\sqrt{15}$와 $\sqrt{17}$ 사이에 자연수가 존재한다.
ㄴ. 서로 다른 두 무리수 사이에는 무수히 많은 무리수가 있다.
ㄹ. 서로 다른 두 유리수 사이에는 무수히 많은 유리수가 있다.
ㅁ. 무리수는 무수히 많으므로 4에 가장 가까운 무리수는 찾을 수 없다.
이상에서 옳은 것은 ㄷ의 1개이다. 답 ①

127 ㄱ. $\sqrt{1}<\sqrt{3}<\sqrt{4}$에서 $1<\sqrt{3}<2$이므로 $\sqrt{3}$과 3 사이의 정수는 2의 1개이다.
ㄷ. $\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4}$에서 $1<\sqrt{2}<2$
$\sqrt{81}<\sqrt{99}<\sqrt{100}$에서 $9<\sqrt{99}<10$
따라서 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{99}$ 사이의 자연수는 2, 3, 4, …, 9의 8개이다.
이상에서 그 개수가 무수히 많은 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ이다. 답 ⑤

유형 027 수직선에서 대응하는 점 찾기
본책 32쪽

수직선에서 $\sqrt{21}$에 대응하는 점 찾기
➜ $\sqrt{16}<\sqrt{21}<\sqrt{25}$이므로 $4<\sqrt{21}<5$
➜ $\sqrt{21}$은 수직선 위에서 4와 5 사이의 점에 대응한다.



128 $\sqrt{9}<\sqrt{12}<\sqrt{16}$에서 $3<\sqrt{12}<4$이므로

$-1<\sqrt{12}-4<0$

따라서 $\sqrt{12}-4$에 대응하는 점은 D이다. 답 ④

129 (i) $\sqrt{1}<\sqrt{\frac{8}{3}}<\sqrt{4}$에서 $1<\sqrt{\frac{8}{3}}<2$이므로 $\sqrt{\frac{8}{3}}$에 대응하는 점은 구간 E에 있다.

(ii) $\sqrt{4}<\sqrt{8}<\sqrt{9}$에서 $2<\sqrt{8}<3$이므로

$-3<-\sqrt{8}<-2$

따라서 $-\sqrt{8}$에 대응하는 점은 구간 A에 있다.

(iii) $\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}$에서 $3<\sqrt{10}<4$이므로

$-4<-\sqrt{10}<-3$ $\quad\therefore -1<3-\sqrt{10}<0$

따라서 $3-\sqrt{10}$에 대응하는 점은 구간 C에 있다.

답 구간 E, 구간 A, 구간 C

130 (i) $\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$에서 $\quad 2<\sqrt{7}<3$

따라서 $\sqrt{7}$에 대응하는 점은 D이다.

(ii) $\sqrt{4}<\sqrt{6}<\sqrt{9}$에서 $2<\sqrt{6}<3$이므로

$-3<-\sqrt{6}<-2$

따라서 $-\sqrt{6}$에 대응하는 점은 A이다.

(iii) $\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$에서 $2<\sqrt{5}<3$이므로

$-3<-\sqrt{5}<-2$ $\quad\therefore 1<4-\sqrt{5}<2$

따라서 $4-\sqrt{5}$에 대응하는 점은 C이다.

(iv) $\sqrt{1}<\sqrt{3}<\sqrt{4}$에서 $1<\sqrt{3}<2$이므로

$-2<\sqrt{3}-3<-1$

따라서 $\sqrt{3}-3$에 대응하는 점은 B이다.

이상에서 점 A와 점 C에 대응하는 수는 각각

$-\sqrt{6},\ 4-\sqrt{5}$ 답 $-\sqrt{6},\ 4-\sqrt{5}$

131 조건 (가)에서 $\quad\sqrt{110}-\sqrt{64}=\sqrt{110}-8$

이때 $\sqrt{100}<\sqrt{110}<\sqrt{121}$, 즉 $10<\sqrt{110}<11$이므로

$2<\sqrt{110}-8<3$

따라서 수직선에서 $\sqrt{110}-\sqrt{64}$에 대응하는 점은 두 정수 2, 3에 각각 대응하는 두 점 사이에 있으므로

$a=2$ … 1단계

조건 (나)에서 $\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4}$, 즉 $1<\sqrt{2}<2$이므로

$1+b<\sqrt{2}+b<2+b$

따라서 수직선에서 $\sqrt{2}+b$에 대응하는 점은 두 정수 $1+b$, $2+b$에 각각 대응하는 두 점 사이에 있으므로

$1+b=-2$ $\quad\therefore b=-3$ … 2단계

$\therefore a+b=2+(-3)=-1$ … 3단계

답 -1

단계	채점 요소	비율
1	a의 값 구하기	40 %
2	b의 값 구하기	40 %
3	$a+b$의 값 구하기	20 %

유형 028 두 실수 사이의 수

본책 33쪽

(1) 두 자연수 a, b 사이에 $\sqrt{c}$가 있으면

$\sqrt{a^2}<\sqrt{c}<\sqrt{b^2}$

이 성립한다.

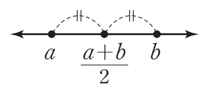
(2) 두 무리수 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ 사이에 c가 있으면

$\sqrt{a}<\sqrt{c^2}<\sqrt{b}$

가 성립한다.

참고 두 실수 a, b의 평균 $\frac{a+b}{2}$는 a, b 사이의 수이므로

$a<\frac{a+b}{2}<b$



132 $\sqrt{16}<\sqrt{17}<\sqrt{25}$에서 $\quad 4<\sqrt{17}<5$

$\sqrt{36}<\sqrt{42}<\sqrt{49}$에서 $\quad 6<\sqrt{42}<7$

④ $1<\sqrt{3}<2$에서 $\quad 5<\sqrt{3}+4<6$

⑤ $6<\sqrt{41}<7$에서 $\quad 3<\sqrt{41}-3<4$

따라서 $\sqrt{17}$과 $\sqrt{42}$ 사이에 있는 수가 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

133 ㄱ. $2<\sqrt{8}<3$, $5<\sqrt{27}<6$이므로 정수인 x는 3, 4, 5의 3개이다.

ㄷ. 무리수인 x는 무수히 많다.

ㄹ. $7<\sqrt{50}<8$에서 $\quad 4<\sqrt{50}-3<5$

이때 $\sqrt{8}<4$, $5<\sqrt{27}$이므로

$\sqrt{8}<\sqrt{50}-3<\sqrt{27}$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ③

134 $\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}$에서 $3<\sqrt{10}<4$이고 $6=\sqrt{36}$이다.

$\sqrt{\frac{22}{3}}<\sqrt{10}$

$\sqrt{10}<\sqrt{34}<\sqrt{36}$, 즉 $\sqrt{10}<\sqrt{34}<6$

$4<\sqrt{20}<5$이므로 $\quad 6<\sqrt{20}+2<7$

$2<\sqrt{8}<3$에서 $-3<-\sqrt{8}<-2$이므로 $\quad 4<7-\sqrt{8}<5$

$\frac{\sqrt{10}}{2}+3=\frac{\sqrt{10}+6}{2}$은 $\sqrt{10}$과 6의 평균이다.

따라서 $\sqrt{10}$과 6 사이에 있는 수는

$\sqrt{34},\ 7-\sqrt{8},\ \frac{\sqrt{10}}{2}+3$

의 3개이다. 답 ③

135 $3<\sqrt{15}<4$에서 $\quad -3<\sqrt{15}-6<-2$

$2<\sqrt{7}<3$에서 $\quad 6<4+\sqrt{7}<7$

따라서 $\sqrt{15}-6$과 $4+\sqrt{7}$ 사이에 있는 정수는

$-2,\ -1,\ 0,\ \cdots,\ 6$

의 9개이다. 답 9

136 k는 자연수이므로 $\quad\sqrt{5}<\sqrt{11+k}$

이때 $2<\sqrt{5}<3$이므로 $\sqrt{5}$와 $\sqrt{11+k}$ 사이에 있는 3개의 정수는 3, 4, 5이다. … 1단계

따라서 $5<\sqrt{11}+k<6$이어야 한다.

$3<\sqrt{11}<4$에서 $3+k<\sqrt{11}+k<4+k$이므로

$3+k=5 \qquad \therefore k=2$ … 2단계

답 2

단계	채점 요소	비율
1	$\sqrt{5}$와 $\sqrt{11}+k$ 사이에 있는 3개의 정수 구하기	50 %
2	k의 값 구하기	50 %

유형 029 두 실수의 대소 관계

본책 34쪽

두 실수의 대소를 비교할 때에는 두 수의 차를 이용한다.
즉 두 실수 a, b에 대하여
(1) $a-b>0$이면 $\quad a>b$
(2) $a-b=0$이면 $\quad a=b$
(3) $a-b<0$이면 $\quad a<b$

137 ① $2-(\sqrt{7}-1)=3-\sqrt{7}=\sqrt{9}-\sqrt{7}>0$

$\therefore 2>\sqrt{7}-1$

② $(\sqrt{3}+2)-4=\sqrt{3}-2=\sqrt{3}-\sqrt{4}<0$

$\therefore \sqrt{3}+2<4$

③ $-2-(\sqrt{8}-4)=2-\sqrt{8}=\sqrt{4}-\sqrt{8}<0$

$\therefore -2<\sqrt{8}-4$

④ $(3+\sqrt{10})-(\sqrt{10}+\sqrt{15})=3-\sqrt{15}=\sqrt{9}-\sqrt{15}<0$

$\therefore 3+\sqrt{10}<\sqrt{10}+\sqrt{15}$

⑤ $(9-\sqrt{5})-(\sqrt{80}-\sqrt{5})=9-\sqrt{80}=\sqrt{81}-\sqrt{80}>0$

$\therefore 9-\sqrt{5}>\sqrt{80}-\sqrt{5}$

따라서 옳지 않은 것은 ②이다. 답 ②

138 ㄱ. $(\sqrt{11}-2)-1=\sqrt{11}-3=\sqrt{11}-\sqrt{9}>0$

$\therefore \sqrt{11}-2>1$

ㄴ. $\left(\sqrt{3}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)-\left(\sqrt{3}+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{3}}>0$

$\therefore \sqrt{3}+\sqrt{\frac{1}{2}}>\sqrt{3}+\sqrt{\frac{1}{3}}$

ㄷ. $(\sqrt{15}-1)-(\sqrt{17}-1)=\sqrt{15}-\sqrt{17}<0$

$\therefore \sqrt{15}-1<\sqrt{17}-1$

ㄹ. $(3-\sqrt{2})-(-\sqrt{3}+3)=-\sqrt{2}+\sqrt{3}>0$

$\therefore 3-\sqrt{2}>-\sqrt{3}+3$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

139 ① $5-(\sqrt{10}+1)=4-\sqrt{10}=\sqrt{16}-\sqrt{10}>0$

$\therefore 5 \boxed{>} \sqrt{10}+1$

② $(\sqrt{34}-7)-(-2)=\sqrt{34}-5=\sqrt{34}-\sqrt{25}>0$

$\therefore \sqrt{34}-7 \boxed{>} -2$

③ $(3+\sqrt{6})-(\sqrt{6}+\sqrt{12})=3-\sqrt{12}=\sqrt{9}-\sqrt{12}<0$

$\therefore 3+\sqrt{6} \boxed{<} \sqrt{6}+\sqrt{12}$

④ $(-2-\sqrt{8})-(-\sqrt{5}-\sqrt{8})=-2+\sqrt{5}=-\sqrt{4}+\sqrt{5}>0$

$\therefore -2-\sqrt{8} \boxed{>} -\sqrt{5}-\sqrt{8}$

⑤ $\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-\left(1-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)=-\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{4}}>0$

$\therefore 1-\sqrt{\frac{2}{3}} \boxed{>} 1-\sqrt{\frac{3}{4}}$

따라서 부등호가 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다. 답 ③

유형 030 세 실수의 대소 관계

본책 34쪽

세 실수의 대소를 비교할 때에는 두 수씩 짝 지어 비교한다.
즉 세 실수 a, b, c에 대하여 $a<b$이고 $b<c$이면
$a<b<c$

140 $x-y=(4+\sqrt{13})-(\sqrt{10}+4)=\sqrt{13}-\sqrt{10}>0$이므로

$x>y$

$y-z=(\sqrt{10}+4)-(\sqrt{10}+\sqrt{13})=4-\sqrt{13}=\sqrt{16}-\sqrt{13}>0$이므로

$y>z$

$\therefore x>y>z$ 답 ①

141 $a-c=(\sqrt{26}-1)-4=\sqrt{26}-5=\sqrt{26}-\sqrt{25}>0$이므로

$a>c$

$b-c=(5-\sqrt{2})-4=1-\sqrt{2}<0$이므로

$b<c$

$\therefore b<c<a$ 답 $b<c<a$

142 $-\sqrt{6}-1$은 음수이고 $3+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{6}$, 5는 양수이다. … 1단계

$(3+\sqrt{2})-(\sqrt{2}+\sqrt{6})=3-\sqrt{6}=\sqrt{9}-\sqrt{6}>0$이므로

$3+\sqrt{2}>\sqrt{2}+\sqrt{6}$

$(3+\sqrt{2})-5=\sqrt{2}-2=\sqrt{2}-\sqrt{4}<0$이므로

$3+\sqrt{2}<5$

$\therefore -\sqrt{6}-1<\sqrt{2}+\sqrt{6}<3+\sqrt{2}<5$ … 2단계

따라서 작은 것부터 차례대로 나열할 때 두 번째에 오는 수는 $\sqrt{2}+\sqrt{6}$이다. … 3단계

답 $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

단계	채점 요소	비율
1	양수와 음수 구분하기	20 %
2	네 수의 대소 비교하기	60 %
3	두 번째에 오는 수 구하기	20 %

143 $0.1=\sqrt{0.01}$이므로 $\qquad 0.1<\sqrt{0.1}$

(i) 주경이는 $\sqrt{0.1}$이 적힌 팻말이 있는 길을 따라 이동한다.

$4-(\sqrt{14}+1)=3-\sqrt{14}=\sqrt{9}-\sqrt{14}<0$이므로

$4<\sqrt{14}+1$

따라서 주경이가 도착하게 되는 곳은 급식실이다.

(ii) 인영이는 0.1이 적힌 팻말이 있는 길을 따라 이동한다.

$(\sqrt{3}-\sqrt{8})-(-\sqrt{8}+1)=\sqrt{3}-1>0$이므로

$\sqrt{3}-\sqrt{8}>-\sqrt{8}+1$

$-2-(-\sqrt{8}+1)=-3+\sqrt{8}=-\sqrt{9}+\sqrt{8}<0$이므로

$-2<-\sqrt{8}+1$

$\therefore -2<-\sqrt{8}+1<\sqrt{3}-\sqrt{8}$

따라서 인영이가 도착하게 되는 곳은 음악실이다.

답 급식실, 음악실

유형 031 제곱근표를 이용하여 제곱근의 값 구하기

본책 35쪽

예 제곱근표에서 $\sqrt{3.83}$의 값 구하기

3.8의 가로줄과 3의 세로 줄이 만나는 곳에 적힌 수를 읽는다.

➜ $\sqrt{3.83}=1.957$

수	…	3	…
3.7	⋮	1.931	⋮
3.8	⋮	1.957	⋮
3.9	⋮	1.982	⋮

144 $\sqrt{14.6}=3.821$이므로 $a=3.821$

$\sqrt{13.9}=3.728$이므로 $b=13.9$

$\therefore 100a+b=382.1+13.9=396$

답 396

145 $\sqrt{5.23}=2.287$이므로 $a=5.23$

$\sqrt{5.45}=2.335$이므로 $b=5.45$

따라서 $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{5.23+5.45}{2}=5.34$이므로

$\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}=\sqrt{5.34}=2.311$

답 ③

146 35.2의 양의 제곱근은 $\sqrt{35.2}$이므로

$a=\sqrt{35.2}=5.933$

$x^2=37.3$을 만족시키는 음수 x는 37.3의 음의 제곱근, 즉 $-\sqrt{37.3}$이므로

$b=-\sqrt{37.3}=-6.107$

$\therefore a-b=5.933-(-6.107)=12.04$

답 12.04

147 단면인 원 모양의 반지름의 길이가 각각 1.2, 1.5인 두 수도관의 단면의 넓이의 합은

$\pi\times1.2^2+\pi\times1.5^2=1.44\pi+2.25\pi=3.69\pi$

새롭게 만들 수도관의 단면인 원 모양의 반지름의 길이를 x라 하면

$\pi\times x^2=3.69\pi$ $\quad\therefore x^2=3.69$

그런데 $x>0$이므로 $x=\sqrt{3.69}$

$\therefore x=1.921$

따라서 구하는 반지름의 길이는 1.921이다.

답 1.921

만점 유형 도전하기

본책 36~37쪽

148 전략 계산 결과가 유리수 또는 무리수가 되는 예를 찾는다.

한샘: 유리수와 무리수의 합은 항상 무리수이다.

선정: $a=2$, $b=\sqrt{2}$이면

$\dfrac{b}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$

즉 유리수이다.

효영: $a=2$, $b=-\sqrt{2}$이면

$\sqrt{a}+b=\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$

즉 유리수이다.

정모: $a=0$이면 $ab=0$

즉 유리수이다.

따라서 잘못 말한 사람은 선정, 효영이다.

답 풀이 참조

만점 공략 노트

(1) (무리수)+(유리수)=(무리수)
(유리수)+(무리수)=(무리수)

(2) (무리수)−(유리수)=(무리수)
(유리수)−(무리수)=(무리수)

149 전략 무리수는 유리수가 아닌 수이므로 먼저 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$가 유리수일 확률을 구해 본다.

모든 경우의 수는 $6\times6=36$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}$가 유리수인 경우는 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$가 모두 유리수이거나 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$인 경우이다.

(i) $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$가 모두 유리수인 경우

a, b가 모두 $(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 하므로 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$, $(1, 4)$, $(4, 1)$, $(4, 4)$

의 4가지이다.

(ii) $\sqrt{a}=\sqrt{b}$인 경우

순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $\cdots$, $(6, 6)$

의 6가지이다.

이때 (i), (ii)에서 $(1, 1)$, $(4, 4)$가 중복되므로 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$가 유리수인 경우의 수는

$4+6-2=8$

따라서 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$가 유리수일 확률은

$\dfrac{8}{36}=\dfrac{2}{9}$

이므로 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$가 무리수일 확률은

$1-\dfrac{2}{9}=\dfrac{7}{9}$

답 $\dfrac{7}{9}$

만점 공략 노트

사건 A가 일어날 확률을 p라 하면
(사건 A가 일어나지 않을 확률)$=1-p$

150 전략 다각형의 성질을 이용하여 a, b, c의 값을 구한다.

(가) 십이각형의 대각선의 개수는

$$\frac{12\times(12-3)}{2}=54 \qquad \therefore a=54$$

(나) b각형의 내각의 크기의 합이 1080°이므로

$$180^\circ\times(b-2)=1080^\circ$$

$$b-2=6 \qquad \therefore b=8$$

(다) 정c각형의 한 외각의 크기가 40°이므로

$$\frac{360^\circ}{c}=40^\circ \qquad \therefore c=9$$

$$\therefore \sqrt{a}+c=\sqrt{54}+9,\ \sqrt{b}=\sqrt{8}$$

$7<\sqrt{54}<8$에서 $\quad 16<\sqrt{54}+9<17$

$2<\sqrt{8}<3$

따라서 $\sqrt{a}+c$와 $\sqrt{b}$ 사이에 있는 정수는

$$3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 16$$

의 14개이다.

답 14

만점 공략 노트

① n각형의 대각선의 개수 ➜ $\dfrac{n(n-3)}{2}$

② n각형의 내각의 크기의 합 ➜ $180^\circ\times(n-2)$

n각형의 외각의 크기의 합 ➜ 360°

③ 정n각형의 한 내각의 크기 ➜ $\dfrac{180^\circ\times(n-2)}{n}$

정n각형의 한 외각의 크기 ➜ $\dfrac{360^\circ}{n}$

151 전략 [그림 1]과 [그림 2]의 물의 부피가 같음을 이용하여 $\triangle$ABC와 $\triangle$PQC의 넓이의 비를 구한다.

물의 부피는 전체의 $\frac{3}{7}$이므로 물이 채워지지 않은 부분의 부피는 전체의 $\frac{4}{7}$이다.

이때 $\overline{AB}/\!/\overline{PQ}$이므로 $\triangle ABC\backsim\triangle PQC$ (AA 닮음)이고, 밑면이 각각 $\triangle$ABC와 $\triangle$PQC이고 높이가 $\overline{CF}$인 삼각기둥의 부피의 비는 $1:\frac{4}{7}=7:4$이므로 $\triangle$ABC와 $\triangle$PQC의 넓이의 비는 $7:4$이다.

따라서 $\triangle$ABC와 $\triangle$PQC의 닮음비는 $\sqrt{7}:2$이므로

$$\overline{AC}:\overline{PC}=\sqrt{7}:2, \quad \overline{AC}:2=\sqrt{7}:2$$

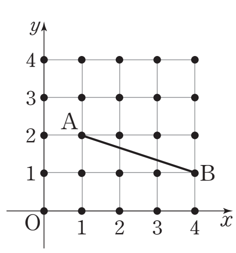
$$\therefore \overline{AC}=\sqrt{7}=2.646$$

답 2.646

152 전략 먼저 $\overline{AC}$ 또는 $\overline{BC}$의 길이가 유리수가 되는 경우를 구해 본다.

$\overline{AB}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$이므로 무리수이다.

점 C$(a,\ b)$를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 점 A의 x좌표가 1, y좌표가 2이므로 두 직선 $x=1$, $y=2$ 위의 모든 점 C에 대하여 $\overline{AC}$의 길이가 유리수이다.

또 점 B의 x좌표가 4, y좌표가 1이므로 두 직선 $x=4$, $y=1$ 위의 모든 점 C에 대하여 $\overline{BC}$의 길이가 유리수이다.

한편 점 C$(0,\ 4)$에 대하여

$$\overline{BC}=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

이므로 $\overline{BC}$의 길이가 유리수이다.

따라서 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$의 길이가 유리수인 점과 두 점 A, B를 제외하면 $\triangle$ABC의 모든 변의 길이가 무리수가 되도록 하는 점 C는

$$(0,\ 0),\ (2,\ 0),\ (3,\ 0),\ (0,\ 3),$$
$$(2,\ 3),\ (3,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 4)$$

의 8개이다.

답 8

153 전략 $\overline{AB}=\overline{AP}$임을 이용하여 직각삼각형 ACP에서 $\overline{PC}$의 길이를 구한다.

$\overline{AB}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로

$$\overline{AP}=\overline{AB}=\sqrt{2}$$

직각삼각형 ACP에서

$$\overline{PC}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{6}$$

$$\therefore \overline{PQ}=\overline{PC}=\sqrt{6}$$

이때 점 P는 점 A로부터 왼쪽으로 $\sqrt{2}$만큼 떨어져 있으므로 점 P에 대응하는 수는

$$0-\sqrt{2}=-\sqrt{2}$$

또 점 Q는 점 P로부터 오른쪽으로 $\sqrt{6}$만큼 떨어져 있으므로 점 Q에 대응하는 수는

$$-\sqrt{2}+\sqrt{6}$$

답 $-\sqrt{2}+\sqrt{6}$

154 전략 연속하는 두 자연수 사이에 있는 무리수의 개수에 대한 규칙을 찾는다.

무리수에 대응하는 점의 개수는

1과 2 사이에는 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$의 2개

2와 3 사이에는 $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$의 4개

3과 4 사이에는 $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\cdots$, $\sqrt{15}$의 6개

⋮

즉 두 자연수 n과 $n+1$ 사이에는 $2n$개의 점이 있다.

따라서 1000과 1001 사이에 있는 무리수에 대응하는 점의 개수는

$$2\times1000=2000$$

답 2000

155 전략 $\sqrt{77}-4$의 값의 범위를 구하고, 연속하는 정수들의 합이 9가 되는 경우를 생각해 본다.

$8<\sqrt{77}<9$이므로 $\quad 4<\sqrt{77}-4<5$

$3<\sqrt{15}<4$이므로 $\quad 3-a<\sqrt{15}-a<4-a$

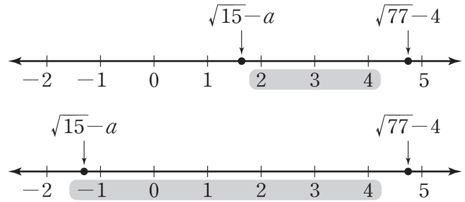
이때 두 수 사이에 있는 모든 정수의 합이 9이고 연속하는 정수들의 합이 9가 되는 경우는

$$9=2+3+4 \text{ 또는 } 9=-1+0+1+2+3+4$$

이므로

$$1<\sqrt{15}-a<2 \text{ 또는 } -2<\sqrt{15}-a<-1$$

이어야 한다.



즉 $3-a=1$ 또는 $3-a=-2$이므로

$a=2$ 또는 $a=5$

따라서 모든 자연수 a의 값의 합은

$2+5=7$ 답 7

시험 만점 완성하기

본책 38~41쪽

156 전략 순환소수가 아닌 무한소수 → 무리수

① $\sqrt{81}=9$의 양의 제곱근은 $\sqrt{9}=3$

② $\sqrt{0.04}=0.2$

③ $\sqrt{2.\dot{7}}=\sqrt{\dfrac{27-2}{9}}=\sqrt{\dfrac{25}{9}}=\dfrac{5}{3}$

⑤ $\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$

따라서 순환소수가 아닌 무한소수, 즉 무리수인 것은 ④, ⑤이다.

답 ④, ⑤

157 전략 $a=\sqrt{2}$를 대입하여 계산해 본다.

① $a^2=(\sqrt{2})^2=2$

② (무리수)×(0이 아닌 유리수)=(무리수)이므로 $a\times1.414$는 무리수이다.

③ $\sqrt{2a^2}=\sqrt{2\times(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2\times2}=\sqrt{4}=2$

④ $a-\sqrt{2}=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$

⑤ $(-a)^2=(-\sqrt{2})^2=2$

따라서 무리수인 것은 ②이다. 답 ②

158 전략 순환소수가 아닌 무한소수는 무리수임을 이용한다.

순환하지 않는 무한소수는 무리수이다.

① π는 무리수이지만 근호를 사용하여 나타낸 수가 아니다.

② 무리수는 $\dfrac{(\text{정수})}{(0\text{이 아닌 정수})}$의 꼴로 나타낼 수 없다.

③ 유리수는 무리수가 아니다.

④ 유리수와 무리수는 모두 실수이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

159 전략 먼저 $\sqrt{n}$, $\sqrt{27n}$이 유리수가 되도록 하는 n의 개수를 구한다.

250 이하의 홀수는 125개이다.

(i) $\sqrt{n}$이 유리수가 되도록 하는 n은

$1^2, 3^2, 5^2, \cdots, 15^2$

의 8개이다.

(ii) $\sqrt{27n}=\sqrt{3^3\times n}$이 유리수가 되도록 하는 n은

$3\times1^2, 3\times3^2, 3\times5^2, 3\times7^2, 3\times9^2$

의 5개이다.

(i), (ii)에서 중복되는 n의 값이 없으므로 $\sqrt{n}$, $\sqrt{27n}$이 모두 무리수가 되도록 하는 n의 개수는

$125-(8+5)=112$ 답 ②

160 전략 선분의 길이가 모두 $\sqrt{2}$임을 이용하여 각 점에 대응하는 수를 구한다.

점 A에 대응하는 수는 $-1-\sqrt{2}$

점 B에 대응하는 수는 $-2+\sqrt{2}$

점 C에 대응하는 수는 $2-\sqrt{2}$

점 D에 대응하는 수는 $\sqrt{2}$

점 E에 대응하는 수는 $2+\sqrt{2}$

따라서 $2-\sqrt{2}$에 대응하는 점은 C이다. 답 ③

161 전략 서로 다른 두 실수 사이에는 무수히 많은 실수가 있다.

② 서로 다른 두 유리수 사이에는 무수히 많은 유리수와 무리수가 있다.

③ 서로 다른 두 무리수 사이에는 무수히 많은 무리수가 있다.

④ 유리수는 무수히 많으므로 $\sqrt{24}$에 가장 가까운 유리수는 찾을 수 없다.

⑤ 수직선은 유리수와 무리수에 대응하는 점들로 완전히 메울 수 있다.

따라서 옳은 것은 ①, ④이다. 답 ①, ④

162 전략 보기에 주어진 각 수의 범위를 구한다.

ㄱ. $\sqrt{4}<\sqrt{6}<\sqrt{9}$에서 $2<\sqrt{6}<3$이므로

$-3<-\sqrt{6}<-2$ $\therefore -1<2-\sqrt{6}<0$

ㄴ. $\sqrt{1}<\sqrt{\dfrac{7}{3}}<\sqrt{4}$에서 $1<\sqrt{\dfrac{7}{3}}<2$이므로

$-2<-\sqrt{\dfrac{7}{3}}<-1$

ㄷ. $\sqrt{1}<\sqrt{3}<\sqrt{4}$에서 $1<\sqrt{3}<2$이므로

$2<1+\sqrt{3}<3$

ㄹ. $\sqrt{16}<\sqrt{22}<\sqrt{25}$에서 $4<\sqrt{22}<5$이므로

$1<\sqrt{22}-3<2$

따라서 두 점 A, B에 대응하는 수로 가장 적당한 것은 각각 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

163 전략 $\sqrt{17}$과 $\sqrt{89}$에 가까운 정수를 이용하여 두 수 사이에 있는 정수를 구한다.

$\sqrt{16}<\sqrt{17}<\sqrt{25}$에서 $4<\sqrt{17}<5$이므로 $2<\sqrt{17}-2<3$

$\sqrt{81}<\sqrt{89}<\sqrt{100}$에서 $9<\sqrt{89}<10$이므로 $10<\sqrt{89}+1<11$

따라서 $\sqrt{17}-2$와 $\sqrt{89}+1$ 사이에 있는 정수는

$3, 4, 5, \cdots, 10$

이때 가장 큰 수는 10, 가장 작은 수는 3이므로 구하는 합은

$10+3=13$ 답 ①

164 전략 $\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$에 가장 가까운 정수를 이용하여 주어진 수의 범위를 구하고 대소를 비교한다.

① $\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}$에서 $3<\sqrt{10}<4$이므로 $\quad 2<\sqrt{10}-1<3$

② $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$은 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{10}$의 평균이므로 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{10}$ 사이에 있다.

③ $\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4}$에서 $1<\sqrt{2}<2$이므로 $4<\sqrt{2}+3<5$이고,
$\sqrt{10}<\sqrt{16}$에서 $\sqrt{10}<4$이므로
$$\sqrt{10}<\sqrt{2}+3$$

④ $\sqrt{2}$와 $\sqrt{10}$ 사이에 있는 정수는 2, 3의 2개이다.

⑤ 서로 다른 두 무리수 사이에는 무수히 많은 유리수가 있다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다. 답 ③

165 전략 두 수의 차를 이용하여 대소를 비교한다.

ㄱ. $(\sqrt{12}-1)-3=\sqrt{12}-4=\sqrt{12}-\sqrt{16}<0$
$\quad \therefore \sqrt{12}-1<3$

ㄴ. $(-1+\sqrt{5})-2=-3+\sqrt{5}=-\sqrt{9}+\sqrt{5}<0$
$\quad \therefore -1+\sqrt{5}<2$

ㄷ. $(\sqrt{6}+\sqrt{10})-(\sqrt{6}+3)=\sqrt{10}-3=\sqrt{10}-\sqrt{9}>0$
$\quad \therefore \sqrt{6}+\sqrt{10}>\sqrt{6}+3$

ㄹ. $(5-\sqrt{2})-(\sqrt{26}-\sqrt{2})=5-\sqrt{26}=\sqrt{25}-\sqrt{26}<0$
$\quad \therefore 5-\sqrt{2}<\sqrt{26}-\sqrt{2}$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ⑤

166 전략 세 원의 반지름의 길이의 대소를 비교한다.

반지름의 길이가 길수록 원의 넓이도 크다.

$(3+\sqrt{5})-6=\sqrt{5}-3=\sqrt{5}-\sqrt{9}<0 \quad \therefore 3+\sqrt{5}<6$

$(\sqrt{34}+1)-6=\sqrt{34}-5=\sqrt{34}-\sqrt{25}>0 \quad \therefore \sqrt{34}+1>6$

따라서 $3+\sqrt{5}<6<\sqrt{34}+1$이므로
$$a<c<b$$
답 ②

167 전략 주어진 제곱근표를 이용하여 먼저 x, y의 값을 구한다.

$\sqrt{71.2}=8.438$이므로 $\quad x=71.2$

$\sqrt{73.4}=8.567$이므로 $\quad y=73.4$

따라서 $\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{71.2+73.4}{2}=72.3$이므로 $\dfrac{x+y}{2}$의 양의 제곱근은 $\quad \sqrt{72.3}=8.503$ 답 ④

168 전략 $f(n)$이 유리수가 되도록 하는 n의 개수를 구한다.

$f(n)=\sqrt{\dfrac{n}{9}}=\sqrt{\dfrac{n}{3^2}}$이 유리수가 되도록 하는 한 자리 자연수 n은
$$1^2,\ 2^2,\ 3^2$$
의 3개이다.

따라서 $f(1)$, $f(2)$, $\cdots$, $f(9)$ 중에서 무리수의 개수는
$$9-3=6$$
답 6

169 전략 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$의 길이를 먼저 구한다.

ㄱ. $\overline{AP}=\overline{AC}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

ㄴ. $\overline{AQ}=\overline{AB}=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}$

ㄷ. $\overline{AP}=\sqrt{5}$이므로 점 A에 대응하는 수가 2이면 점 P에 대응하는 수는
$$2-\sqrt{5}$$

ㄹ. $\overline{AQ}=\sqrt{18}$이므로 점 Q에 대응하는 수가 $\sqrt{18}$이면 점 A에 대응하는 수는
$$\sqrt{18}-\sqrt{18}=0$$

ㅁ. 점 P에 대응하는 수가 $-1-\sqrt{5}$이면 점 A에 대응하는 수는
$$(-1-\sqrt{5})+\sqrt{5}=-1$$
이므로 점 Q에 대응하는 수는
$$-1+\sqrt{18}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㅁ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㅁ

170 전략 $\sqrt{\dfrac{4}{3}}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{6}$에 가장 가까운 정수를 이용하여 세 수의 범위를 각각 구한다.

$\sqrt{1}<\sqrt{\dfrac{4}{3}}<\sqrt{4}$에서 $1<\sqrt{\dfrac{4}{3}}<2$이므로 $\quad -2<-\sqrt{\dfrac{4}{3}}<-1$

$\sqrt{9}<\sqrt{11}<\sqrt{16}$에서 $\quad 3<\sqrt{11}<4$

$\sqrt{4}<\sqrt{6}<\sqrt{9}$에서 $2<\sqrt{6}<3$이므로 $\quad 1<\sqrt{6}-1<2$

따라서 세 수에 대응하는 점이 있는 구간은 차례대로 A, F, D이다. 답 구간 A, 구간 F, 구간 D

171 전략 $a+\sqrt{14}$, $b-\sqrt{3}$의 값의 범위를 a, b를 이용하여 나타내고 a, b의 관계식을 구한다.

$\sqrt{9}<\sqrt{14}<\sqrt{16}$에서 $3<\sqrt{14}<4$이므로
$$a+3<a+\sqrt{14}<a+4$$

$\sqrt{1}<\sqrt{3}<\sqrt{4}$에서 $1<\sqrt{3}<2$, 즉 $-2<-\sqrt{3}<-1$이므로
$$b-2<b-\sqrt{3}<b-1$$

따라서 두 수 $a+\sqrt{14}$와 $b-\sqrt{3}$ 사이에 있는 가장 작은 정수는 $a+4$, 가장 큰 정수는 $b-2$이다.

이때 두 수 사이에 있는 모든 정수의 개수가 4이므로
$$(b-2)-(a+4)+1=4 \qquad \therefore b-a=9$$
답 9

172 전략 a가 어떤 연속하는 두 정수 사이에 있는지 구한다.

$\overline{AP}=\overline{AB}=\sqrt{20}$이므로 점 P에 대응하는 수는
$$-4+\sqrt{20} \qquad \therefore a=-4+\sqrt{20}$$

$\sqrt{16}<\sqrt{20}<\sqrt{25}$에서 $4<\sqrt{20}<5$이므로
$$0<-4+\sqrt{20}<1 \qquad \therefore 0<a<1$$

ㄱ. $1<\sqrt{2}<2$이므로 $\quad a<\sqrt{2}<3$

ㄴ. $-\dfrac{1}{2}<0$이므로 $\quad -\dfrac{1}{2}<a$

ㄷ. $0<a<1$이므로 $\quad 3<a+3<4$

ㄹ. $0<a<1$에서 $-1<-a<0$이므로
$$1<-a+2<2,\ \text{즉}\ a<-a+2<3$$

이상에서 a와 3 사이에 있는 수는 ㄱ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄹ

173 전략 $a-b$와 $a-\frac{1}{2}b$의 값의 부호를 구하고 식을 간단히 한다.

$a-b=(\sqrt{24}-1)-4=\sqrt{24}-5=\sqrt{24}-\sqrt{25}<0$

$a-\frac{1}{2}b=(\sqrt{24}-1)-\frac{1}{2}\times4=\sqrt{24}-3=\sqrt{24}-\sqrt{9}>0$

$\therefore \sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2}=-(a-b)+\left(a-\frac{1}{2}b\right)$

$=-a+b+a-\frac{1}{2}b$

$=\frac{1}{2}b=\frac{1}{2}\times4=2$

답 2

174 전략 $\sqrt{3n}$, $\sqrt{64-n}$이 각각 유리수가 되도록 하는 자연수 n의 값을 먼저 구한다.

(i) $\sqrt{3n}$이 유리수가 되도록 하는 n은

$3\times1^2=3,\ 3\times2^2=12,\ 3\times3^2=27,\ 3\times4^2=48$

의 4개이다. … 1단계

(ii) $\sqrt{64-n}$이 유리수가 되도록 하는 n은

$64-n=0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49$

에서

$n=64,\ 63,\ 60,\ 55,\ 48,\ 39,\ 28,\ 15$

의 8개이다. … 2단계

이때 (i), (ii)에서 중복되는 n의 값이 48의 1개이므로 $\sqrt{3n}$, $\sqrt{64-n}$이 모두 무리수가 되도록 하는 n의 개수는

$64-(4+8-1)=53$ … 3단계

답 53

단계	채점 요소	배점
1	$\sqrt{3n}$이 유리수가 되도록 하는 n의 개수 구하기	2점
2	$\sqrt{64-n}$이 유리수가 되도록 하는 n의 개수 구하기	2점
3	$\sqrt{3n}$, $\sqrt{64-n}$이 모두 무리수가 되도록 하는 n의 개수 구하기	1점

175 전략 점 C에 대응하는 수를 먼저 구하고 이를 이용하여 점 B와 점 Q에 대응하는 수를 차례대로 구한다.

$\overline{PC}=\overline{AC}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로 점 C에 대응하는 수는

$(2-\sqrt{2})+\sqrt{2}=2$ … 1단계

$\overline{BC}=1$이므로 점 B에 대응하는 수는

$2-1=1$ … 2단계

$\overline{BG}=3$, $\overline{GH}=1$이므로 직각삼각형 BGH에서

$\overline{BH}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

따라서 $\overline{BQ}=\sqrt{10}$이므로 점 Q에 대응하는 수는

$1+\sqrt{10}$ … 3단계

답 $1+\sqrt{10}$

단계	채점 요소	배점
1	점 C에 대응하는 수 구하기	2점
2	점 B에 대응하는 수 구하기	2점
3	점 Q에 대응하는 수 구하기	2점

176 전략 $\sqrt{3}-5$, $\sqrt{54}$가 각각 어떤 연속하는 두 정수 사이에 있는지 구한다.

$\sqrt{1}<\sqrt{3}<\sqrt{4}$에서 $1<\sqrt{3}<2$이므로 $\quad -4<\sqrt{3}-5<-3$

$\sqrt{49}<\sqrt{54}<\sqrt{64}$에서 $\quad 7<\sqrt{54}<8$

두 수 사이에 있는 정수는

$-3,\ -2,\ -1,\ \cdots,\ 7$

의 11개이므로 $\quad a=11$ … 1단계

두 수 사이에 있는 자연수는

$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 7$

의 7개이므로 $\quad b=7$ … 2단계

두 수 사이에 있는 자연수의 양의 제곱근은

$\sqrt{1},\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \cdots,\ \sqrt{53}$

의 53개이므로 $\quad c=53$ … 3단계

$\therefore a-2b+c=11-2\times7+53=50$ … 4단계

답 50

단계	채점 요소	배점
1	a의 값 구하기	2점
2	b의 값 구하기	1점
3	c의 값 구하기	2점
4	$a-2b+c$의 값 구하기	1점

177 전략 주어진 수가 어떤 연속하는 두 정수 사이에 있는지 구한다.

(1) $\sqrt{1}<\sqrt{3}<\sqrt{4}$에서 $1<\sqrt{3}<2$이므로

$-2<-\sqrt{3}<-1$

$\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4}$에서 $1<\sqrt{2}<2$이므로

$3<2+\sqrt{2}<4$

$\sqrt{4}<\sqrt{6}<\sqrt{9}$에서 $2<\sqrt{6}<3$이므로

$-3<-\sqrt{6}<-2 \qquad \therefore -1<2-\sqrt{6}<0$

따라서 $-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{2}$, $2-\sqrt{6}$에 대응하는 점은 차례대로 A, C, B이다. … 1단계

(2) $(2+\sqrt{5})-(\sqrt{5}+\sqrt{6})=2-\sqrt{6}=\sqrt{4}-\sqrt{6}<0$

$\therefore 2+\sqrt{5}<\sqrt{5}+\sqrt{6}$

이때 $\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$에서 $2<\sqrt{5}<3$이므로

$4<2+\sqrt{5}<5$

따라서 $2+\sqrt{5}$, $\sqrt{5}+\sqrt{6}$에 대응하는 점은 차례대로 D, E이다. … 2단계

답 (1) 점 A, 점 C, 점 B (2) 점 D, 점 E

단계	채점 요소	배점
1	$-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{2}$, $2-\sqrt{6}$에 대응하는 점 구하기	3점
2	$2+\sqrt{5}$, $\sqrt{5}+\sqrt{6}$에 대응하는 점 구하기	3점

03 근호를 포함한 식의 계산

셀프 CHECK

본책 42~43쪽

A (1) $\sqrt{\frac{2}{5}}\times\sqrt{15}=\sqrt{\frac{2}{5}\times 15}=\sqrt{6}$

(2) $5\sqrt{2}\times(-\sqrt{11})=-5\times\sqrt{2\times 11}=-5\sqrt{22}$

(3) $-\sqrt{18}\div\sqrt{30}=-\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{30}}=-\sqrt{\frac{18}{30}}=-\sqrt{\frac{3}{5}}$

(4) $\frac{4\sqrt{35}}{\sqrt{3}}\div\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{35}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}=4\sqrt{\frac{35}{3}\times\frac{6}{7}}=4\sqrt{10}$

답 (1) $\sqrt{6}$ (2) $-5\sqrt{22}$ (3) $-\sqrt{\frac{3}{5}}$ (4) $4\sqrt{10}$

B (1) $\sqrt{72}=\sqrt{6^2\times 2}=6\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{125}=\sqrt{5^2\times 5}=5\sqrt{5}$

(3) $\sqrt{\frac{27}{4}}=\sqrt{\frac{3^2\times 3}{2^2}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(4) $\sqrt{0.32}=\sqrt{\frac{32}{100}}=\sqrt{\frac{4^2\times 2}{10^2}}=\frac{4\sqrt{2}}{10}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$

답 (1) $6\sqrt{2}$ (2) $5\sqrt{5}$ (3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (4) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$

C (1) $4\sqrt{3}=\sqrt{4^2\times 3}=\sqrt{48}$

(2) $-3\sqrt{10}=-\sqrt{3^2\times 10}=-\sqrt{90}$

(3) $-\frac{\sqrt{7}}{2}=-\sqrt{\frac{7}{2^2}}=-\sqrt{\frac{7}{4}}$

(4) $\frac{2\sqrt{5}}{3}=\sqrt{\frac{2^2\times 5}{3^2}}=\sqrt{\frac{20}{9}}$

답 (1) $\sqrt{48}$ (2) $-\sqrt{90}$ (3) $-\sqrt{\frac{7}{4}}$ (4) $\sqrt{\frac{20}{9}}$

D (1) $-\frac{4}{\sqrt{3}}=-\frac{4\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

(2) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

(3) $-\frac{3}{2\sqrt{6}}=-\frac{3\times\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=-\frac{3\sqrt{6}}{12}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$

(4) $\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{4\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{20}$

답 (1) $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ (3) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$ (4) $\frac{\sqrt{15}}{20}$

E (1) $10\sqrt{7}-5\sqrt{7}-2\sqrt{7}=(10-5-2)\sqrt{7}=3\sqrt{7}$

(2) $-6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-\sqrt{2}-3\sqrt{5}=(-6-1)\sqrt{2}+(5-3)\sqrt{5}$
$=-7\sqrt{2}+2\sqrt{5}$

(3) $\sqrt{27}+\sqrt{90}-3\sqrt{12}-5\sqrt{40}=3\sqrt{3}+3\sqrt{10}-6\sqrt{3}-10\sqrt{10}$
$=(3-6)\sqrt{3}+(3-10)\sqrt{10}$
$=-3\sqrt{3}-7\sqrt{10}$

답 (1) $3\sqrt{7}$ (2) $-7\sqrt{2}+2\sqrt{5}$ (3) $-3\sqrt{3}-7\sqrt{10}$

F (1) $2\sqrt{3}(4-\sqrt{3})=2\sqrt{3}\times 4-2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=8\sqrt{3}-6$

(2) $(\sqrt{45}-\sqrt{6})\div\sqrt{3}=(\sqrt{45}-\sqrt{6})\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$
$=\sqrt{\frac{45}{3}}-\sqrt{\frac{6}{3}}=\sqrt{15}-\sqrt{2}$

(3) $\frac{4\sqrt{15}+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{(4\sqrt{15}+2\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$
$=\frac{4\sqrt{30}+2\sqrt{6}}{2}=2\sqrt{30}+\sqrt{6}$

(4) $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{(3\sqrt{2}-\sqrt{3})\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}$
$=\frac{6\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

답 (1) $8\sqrt{3}-6$ (2) $\sqrt{15}-\sqrt{2}$ (3) $2\sqrt{30}+\sqrt{6}$ (4) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

G (1) $(\sqrt{54}-\sqrt{2})\div\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{10}{\sqrt{6}}=(\sqrt{54}-\sqrt{2})\times\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{10}{\sqrt{6}}$
$=2\sqrt{18}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{10\sqrt{6}}{6}$
$=6\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{6}}{3}+\frac{5\sqrt{6}}{3}$
$=6\sqrt{2}+\sqrt{6}$

(2) $-\sqrt{8}\div\sqrt{20}+\frac{3\sqrt{2}+5}{2\sqrt{5}}=-\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{3\sqrt{10}+5\sqrt{5}}{10}$
$=-\frac{\sqrt{10}}{5}+\frac{3\sqrt{10}+5\sqrt{5}}{10}$
$=\frac{\sqrt{10}}{10}+\frac{\sqrt{5}}{2}$

답 (1) $6\sqrt{2}+\sqrt{6}$ (2) $\frac{\sqrt{10}}{10}+\frac{\sqrt{5}}{2}$

내신 유형 다지기

본책 44~55쪽

유형 032 제곱근의 곱셈

본책 44쪽

근호 밖의 수끼리, 근호 안의 수끼리 곱한다.

➜ $a>0$, $b>0$이고 m, n이 유리수일 때,

$m\sqrt{a}\times n\sqrt{b}=mn\sqrt{ab}$

178 ⑤ $-9\sqrt{21}\times\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{7}}=\left(-9\times\frac{1}{3}\right)\times\sqrt{21\times\frac{2}{7}}=-3\sqrt{6}$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

179 $8\sqrt{5}\times(-2\sqrt{1.2})=\{8\times(-2)\}\times\sqrt{5\times 1.2}=-16\sqrt{6}$

$-6\sqrt{\frac{35}{6}}\times\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{7}}=\left(-6\times\frac{1}{3}\right)\times\sqrt{\frac{35}{6}\times\frac{6}{7}}=-2\sqrt{5}$

따라서 $a=-16\sqrt{6}$, $b=-2\sqrt{5}$이므로

$ab=(-16\sqrt{6})\times(-2\sqrt{5})=32\sqrt{30}$

답 $32\sqrt{30}$

180 $\sqrt{2}\times\sqrt{2n}\times\sqrt{12}\times\sqrt{3n}=\sqrt{2\times 2n\times 12\times 3n}$
$=\sqrt{12^2\times n^2}=\sqrt{(12n)^2}$
$=12n\ (\because n>0)$

따라서 $12n=48$이므로 $\quad n=4$

답 ③

유형 033 제곱근의 나눗셈

본책 44쪽

근호 밖의 수끼리, 근호 안의 수끼리 나눈다.
➜ $a>0$, $b>0$이고 m, n이 유리수일 때,
$m\sqrt{a}\div n\sqrt{b}=\frac{m}{n}\sqrt{\frac{a}{b}}$ (단, $n\neq 0$)

181 $10\sqrt{3}\div\frac{\sqrt{12}}{2}\div\frac{4}{\sqrt{8}}=10\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{12}}\times\frac{\sqrt{8}}{4}$
$=\left(10\times 2\times\frac{1}{4}\right)\times\sqrt{3\times\frac{1}{12}\times 8}$
$=5\sqrt{2}$

$\therefore a=2$

답 2

182 $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{72}{6}}=\sqrt{12}$이므로 $\quad \sqrt{a}=\sqrt{12}$

$\sqrt{\frac{4}{3}}\div\sqrt{\frac{8}{27}}=\sqrt{\frac{4}{3}\times\frac{27}{8}}=\sqrt{\frac{9}{2}}$이므로 $\quad \sqrt{b}=\sqrt{\frac{9}{2}}$

$\therefore \sqrt{a}\div\sqrt{b}=\sqrt{12}\div\sqrt{\frac{9}{2}}=\sqrt{12\times\frac{2}{9}}=\sqrt{\frac{8}{3}}$

답 ④

183 $\sqrt{40}\div\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}}=\sqrt{40\times\frac{5}{8}}=\sqrt{25}=5$이므로

$a=5$ … 1단계

$\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{20}}\div\sqrt{0.4}=8\sqrt{\frac{2}{20}\times\frac{10}{4}}=8\sqrt{\frac{1}{4}}=8\times\frac{1}{2}=4$이므로

$b=4$ … 2단계

$\therefore a+b=5+4=9$ … 3단계

답 9

단계	채점 요소	비율
1	a의 값 구하기	40 %
2	b의 값 구하기	40 %
3	$a+b$의 값 구하기	20 %

유형 034 $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$를 이용한 식의 변형

본책 45쪽

(1) 근호 안의 제곱인 인수는 근호 밖으로 꺼낸다.
➜ $a>0$, $b>0$일 때, $\quad \sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

(2) 근호 밖의 양수는 제곱하여 근호 안으로 넣는다.
➜ $a>0$, $b>0$일 때, $\quad a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$

184 $4\sqrt{5}=\sqrt{4^2\times 5}=\sqrt{80}$이므로 $\quad a=80$

$\sqrt{128}=\sqrt{8^2\times 2}=8\sqrt{2}$이므로 $\quad b=8$

$\therefore a+b=80+8=88$

답 88

185 $3\sqrt{6}=\sqrt{3^2\times 6}=\sqrt{54}$이므로

$24+3x=54 \quad \therefore x=10$

답 ④

186 $\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3^2\times 2}}{2}=\frac{\sqrt{18}}{2}$, $\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{9}}{2}$,

$\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2^2\times 2}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}$

이때 $\sqrt{6}<\sqrt{8}<\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{18}$이므로

$\frac{\sqrt{6}}{2}<\frac{\sqrt{8}}{2}<\frac{\sqrt{9}}{2}<\frac{\sqrt{10}}{2}<\frac{\sqrt{18}}{2}$

따라서 세 번째에 오는 수는 $\frac{3}{2}$이다.

답 $\frac{3}{2}$

187 $b\sqrt{5}=\sqrt{5b^2}$이므로

$15a=5b^2 \quad \therefore b^2=3a$

a, b는 자연수이므로 $a=3\times$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

따라서 두 자리 자연수 a는

3×2^2, 3×3^2, 3×4^2, 3×5^2

이 중 가장 큰 a의 값은 $a=3\times 5^2=75$이고 이때 $b^2=3^2\times 5^2=15^2$,

즉 $b=15$이므로 구하는 값은

$a+b=75+15=90$

답 90

유형 035 $\sqrt{\frac{b}{a^2}}=\frac{\sqrt{b}}{a}$를 이용한 식의 변형

본책 45쪽

$a>0$, $b>0$일 때

(1) $\sqrt{\frac{b}{a^2}}=\frac{\sqrt{b}}{a}$

(2) $\frac{\sqrt{b}}{a}=\sqrt{\frac{b}{a^2}}$

188 ㄱ. $\sqrt{\frac{13}{81}}=\sqrt{\frac{13}{9^2}}=\frac{\sqrt{13}}{9}$

ㄴ. $\sqrt{\frac{10}{32}}=\sqrt{\frac{5}{16}}=\sqrt{\frac{5}{4^2}}=\frac{\sqrt{5}}{4}$

ㄷ. $\sqrt{0.75}=\sqrt{\frac{75}{100}}=\sqrt{\frac{5^2\times 3}{10^2}}=\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ㄹ. $\frac{\sqrt{7}}{5}=\sqrt{\frac{7}{5^2}}=\sqrt{\frac{7}{25}}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

189 $\frac{5\sqrt{3}}{3}=\sqrt{\frac{5^2\times 3}{3^2}}=\sqrt{\frac{25}{3}}$이므로 $\quad a=\frac{25}{3}$

$\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{2^2\times 7}{14}}=\sqrt{2}$이므로 $\quad b=2$

$\therefore 3a+b=3\times\frac{25}{3}+2=27$

답 27

190 $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{1}{b}\sqrt{\frac{4b}{a}}=\sqrt{\frac{1}{a^2}\times\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{1}{b^2}\times\frac{4b}{a}}$

$=\sqrt{\frac{1}{ab}}+\sqrt{\frac{4}{ab}}$

$=\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{2}{\sqrt{ab}}$

$=\frac{3}{\sqrt{ab}}$ … 1단계

이때 $\sqrt{ab}=6$이므로

(주어진 식)$=\frac{3}{\sqrt{ab}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ … 2단계

답 $\frac{1}{2}$

단계	채점 요소	비율
1	주어진 식 간단히 하기	70 %
2	식의 값 구하기	30 %

유형 036 제곱근표에 없는 수의 제곱근의 값 구하기

본책 46쪽

제곱근표에 없는 수의 제곱근의 값은 근호 안의 수를 제곱근표에 있는 수로 바꾸어 구한다.

(1) 근호 안이 100보다 큰 수일 때

➜ $\sqrt{100a}=10\sqrt{a}$, $\sqrt{10000a}=100\sqrt{a}$, …임을 이용한다.

(2) 근호 안이 0과 1 사이의 수일 때

➜ $\sqrt{\frac{a}{100}}=\frac{\sqrt{a}}{10}$, $\sqrt{\frac{a}{10000}}=\frac{\sqrt{a}}{100}$, …임을 이용한다.

191 ① $\sqrt{172}=\sqrt{1.72\times100}=10\sqrt{1.72}$

$=10\times1.311=13.11$

② $\sqrt{1720}=\sqrt{17.2\times100}=10\sqrt{17.2}$

$=10\times4.147=41.47$

③ $\sqrt{17200}=\sqrt{1.72\times10000}=100\sqrt{1.72}$

$=100\times1.311=131.1$

④ $\sqrt{0.172}=\sqrt{\frac{17.2}{100}}=\frac{\sqrt{17.2}}{10}=\frac{4.147}{10}=0.4147$

⑤ $\sqrt{0.0172}=\sqrt{\frac{1.72}{100}}=\frac{\sqrt{1.72}}{10}=\frac{1.311}{10}=0.1311$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다. 답 ③

192 $\sqrt{438}=\sqrt{4.38\times100}=10\sqrt{4.38}$

$=10\times2.093=20.93$

따라서 $\sqrt{438}$과 가장 가까운 정수는 21이다. 답 21

193 ① $\sqrt{250}=\sqrt{2.5\times100}=10\sqrt{2.5}$

$=10\times1.581=15.81$

② $\sqrt{272}=\sqrt{2.72\times100}=10\sqrt{2.72}$

$=10\times1.649=16.49$

③ $\sqrt{26300}=\sqrt{2.63\times10000}=100\sqrt{2.63}$

$=100\times1.622=162.2$

④ $\sqrt{0.0271}=\sqrt{\frac{2.71}{100}}=\frac{\sqrt{2.71}}{10}=\frac{1.646}{10}=0.1646$

⑤ $\sqrt{0.00252}=\sqrt{\frac{25.2}{10000}}=\frac{\sqrt{25.2}}{100}$

따라서 그 값을 구할 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

194 $\sqrt{24}=\sqrt{2^2\times6}=2\sqrt{6}=2\times2.449=4.898$ … 1단계

$\sqrt{\frac{3}{50}}=\sqrt{\frac{6}{100}}=\frac{\sqrt{6}}{10}=\frac{2.449}{10}=0.2449$ … 2단계

$\therefore \sqrt{24}+\sqrt{\frac{3}{50}}=4.898+0.2449=5.1429$ … 3단계

답 5.1429

단계	채점 요소	비율
1	$\sqrt{24}$의 값 구하기	40 %
2	$\sqrt{\frac{3}{50}}$의 값 구하기	40 %
3	$\sqrt{24}+\sqrt{\frac{3}{50}}$의 값 구하기	20 %

유형 037 제곱근을 문자를 사용하여 나타내기

본책 46쪽

❶ 근호 안의 수를 소인수분해 한다.

❷ 근호 안의 제곱인 인수는 밖으로 꺼내고, 나머지 인수는 근호를 분리한다.

❸ 주어진 문자를 사용하여 나타낸다.

예 $\sqrt{2}=a$, $\sqrt{3}=b$일 때, $\sqrt{12}$를 a, b를 사용하여 나타내면

$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times3}=(\sqrt{2})^2\times\sqrt{3}=a^2b$

195 $\sqrt{375}=\sqrt{3\times5^3}=5\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}=5xy$ 답 ②

196 ① $\sqrt{98}=\sqrt{2\times7^2}=\sqrt{2}\times(\sqrt{7})^2=ab^2$

② $\sqrt{392}=\sqrt{14^2\times2}=14\sqrt{2}=14a$

③ $\sqrt{0.28}=\sqrt{\frac{28}{100}}=\sqrt{\frac{7}{25}}=\frac{\sqrt{7}}{5}=\frac{b}{5}$

④ $\sqrt{\frac{2}{49}}=\sqrt{\frac{2}{7^2}}=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{7})^2}=\frac{a}{b^2}$

⑤ $\sqrt{18}+\sqrt{56}=\sqrt{3^2\times2}+\sqrt{2^2\times2\times7}$

$=3\sqrt{2}+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{7}$

$=3a+2ab$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

197 ① $\sqrt{180}=\sqrt{1.8\times100}=10\sqrt{1.8}=10a$

② $\sqrt{0.18}=\sqrt{\frac{18}{100}}=\frac{\sqrt{18}}{10}=\frac{b}{10}$

③ $\sqrt{162}=\sqrt{3^2\times18}=3\sqrt{18}=3b$

④ $\sqrt{7.2}=\sqrt{2^2\times1.8}=2\sqrt{1.8}=2a$

⑤ $\sqrt{0.45}=\sqrt{\dfrac{1.8}{4}}=\dfrac{\sqrt{1.8}}{2}=\dfrac{a}{2}$

따라서 옳은 것은 ③, ⑤이다. 답 ③, ⑤

유형 038 분모의 유리화 본책 47쪽

분모에 근호를 포함한 무리수가 있으면 분모를 유리화한다.
이때 분모의 근호 안에 제곱인 인수가 있으면 제곱인 인수를 근호 밖으로 꺼내어 근호 안을 가장 작은 자연수로 만든 후 분모를 유리화한다.

예 $\dfrac{4}{\sqrt{50}}=\dfrac{4}{5\sqrt{2}}=\dfrac{4\times\sqrt{2}}{5\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{10}=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

198 $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$이므로

$a=\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{8}{\sqrt{12}}=\dfrac{8}{2\sqrt{3}}=\dfrac{8\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{8\sqrt{3}}{6}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$이므로

$b=\dfrac{4}{3}$

$\therefore \sqrt{a\div b}=\sqrt{\dfrac{2}{3}\div\dfrac{4}{3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 답 ③

199 $\dfrac{3\sqrt{a}}{4\sqrt{6}}=\dfrac{3\sqrt{a}\times\sqrt{6}}{4\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{3\sqrt{6a}}{24}=\dfrac{\sqrt{6a}}{8}$ … 1단계

즉 $\dfrac{\sqrt{6a}}{8}=\dfrac{\sqrt{42}}{8}$이므로

$6a=42 \quad \therefore a=7$ … 2단계

답 7

단계	채점 요소	비율
1	$\dfrac{3\sqrt{a}}{4\sqrt{6}}$의 분모를 유리화하여 나타내기	60 %
2	a의 값 구하기	40 %

200 $\sqrt{4.5}=\sqrt{\dfrac{45}{10}}=\sqrt{\dfrac{9}{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3}{2}a$ 답 ②

201 $\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{y}}-\dfrac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=\dfrac{x\sqrt{x}\times\sqrt{y}}{\sqrt{y}\times\sqrt{y}}-\dfrac{y\sqrt{y}\times\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}$

$=\dfrac{x\sqrt{xy}}{y}-\dfrac{y\sqrt{xy}}{x}$

이때 $xy=\sqrt{10}\times\dfrac{1}{\sqrt{10}}=1$에서 $\sqrt{xy}=1$이므로

(주어진 식)$=\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{x^2-y^2}{xy}=x^2-y^2$

$=(\sqrt{10})^2-\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)^2$

$=10-\dfrac{1}{10}=\dfrac{99}{10}$ 답 $\dfrac{99}{10}$

유형 039 제곱근의 곱셈과 나눗셈의 혼합 계산 본책 47쪽

❶ 근호 안에 제곱인 인수가 있으면 제곱인 인수를 근호 밖으로 꺼낸다.
❷ 나눗셈은 역수의 곱셈으로 바꾼 후 앞에서부터 순서대로 계산한다.
❸ 계산 결과의 분모에 근호를 포함한 무리수가 있으면 분모를 유리화한다.

예 $\sqrt{18}\div6\sqrt{3}\times\sqrt{5}=3\sqrt{2}\times\dfrac{1}{6\sqrt{3}}\times\sqrt{5}=\dfrac{\sqrt{10}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

202 ① $\sqrt{32}\div\sqrt{45}\times2\sqrt{5}=4\sqrt{2}\times\dfrac{1}{3\sqrt{5}}\times2\sqrt{5}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

② $\sqrt{12}\div\sqrt{48}\div\dfrac{\sqrt{3}}{4}=2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{4\sqrt{3}}\times\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

③ $\dfrac{10}{\sqrt{5}}\times\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{27}}\div\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{10}{\sqrt{5}}\times\dfrac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}\times(-\sqrt{3})$

$=-\dfrac{10\sqrt{7}}{3\sqrt{5}}=-\dfrac{10\sqrt{35}}{15}=-\dfrac{2\sqrt{35}}{3}$

④ $\sqrt{\dfrac{9}{10}}\times(-\sqrt{50})\div\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}\times(-5\sqrt{2})\times\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

$=-\dfrac{30}{\sqrt{10}}=-\dfrac{30\sqrt{10}}{10}=-3\sqrt{10}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\div\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{20}}\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{30}}{4}$

따라서 옳지 않은 것은 ③, ④이다. 답 ③, ④

203 $\sqrt{\dfrac{7}{12}}\times\dfrac{6}{\sqrt{28}}\div A=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$에서

$\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}\times\dfrac{6}{2\sqrt{7}}\times\dfrac{1}{A}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\dfrac{3}{2\sqrt{3}}\times\dfrac{1}{A}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{A}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{3}{\sqrt{6}}=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ 답 ③

204 ㉠~㉤에 알맞은 수를 차례대로 a, b, c, d, e라 하면

$a=\dfrac{\sqrt{30}}{\sqrt{3}\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

$b=\dfrac{\sqrt{30}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$$e=\sqrt{30}\div 2\div\frac{6}{\sqrt{2}}=\sqrt{30}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{15}}{6}$$

$$c=\sqrt{30}\div\sqrt{6}\div\frac{\sqrt{15}}{6}=\sqrt{30}\times\frac{1}{\sqrt{6}}\times\frac{6}{\sqrt{15}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

$$d=\sqrt{30}\div\frac{\sqrt{15}}{3}\div\frac{6}{\sqrt{2}}=\sqrt{30}\times\frac{3}{\sqrt{15}}\times\frac{\sqrt{2}}{6}=1$$

따라서 ㉠~㉤에 알맞은 수가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

유형 040 제곱근의 곱셈과 나눗셈의 도형에의 활용 본책 48쪽

변의 길이 또는 모서리의 길이가 무리수인 도형의 넓이 또는 부피에 대한 문제

➜ 공식을 이용하여 조건에 맞게 식을 세운 후 제곱근의 곱셈과 나눗셈을 이용하여 계산한다.

205 (삼각형의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\sqrt{54}\times x$

$$=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{6}\times x$$

$$=\frac{3\sqrt{6}}{2}x$$

(직사각형의 넓이)$=\sqrt{27}\times\sqrt{24}=3\sqrt{3}\times 2\sqrt{6}=18\sqrt{2}$

따라서 $\frac{3\sqrt{6}}{2}x=18\sqrt{2}$이므로

$$x=18\sqrt{2}\times\frac{2}{3\sqrt{6}}=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$$

답 $4\sqrt{3}$

206 원뿔의 높이를 x cm라 하면

$\frac{1}{3}\times\pi\times(2\sqrt{7})^2\times x=56\sqrt{2}\pi$, $\quad\frac{28}{3}x=56\sqrt{2}$

$\therefore x=56\sqrt{2}\times\frac{3}{28}=6\sqrt{2}$

따라서 원뿔의 높이는 $6\sqrt{2}$ cm이다. 답 ④

207 정사각형의 한 변의 길이는

$\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

즉 직사각형의 세로의 길이가 $2\sqrt{10}$이므로 직사각형의 가로의 길이를 x라 하면

$x:2\sqrt{10}=2:\sqrt{5}$, $\quad\sqrt{5}x=4\sqrt{10}$

$\therefore x=\frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=4\sqrt{2}$

따라서 직사각형의 가로의 길이는 $4\sqrt{2}$이다. 답 $4\sqrt{2}$

208 밑면인 원의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$2\pi r=4\sqrt{2}\pi$ $\quad\therefore r=2\sqrt{2}$ … 1단계

따라서 원기둥의 부피는

$\pi\times(2\sqrt{2})^2\times 5\sqrt{10}=40\sqrt{10}\pi$ (cm³) … 2단계

답 $40\sqrt{10}\pi$ cm³

단계	채점 요소	비율
1	밑면인 원의 반지름의 길이 구하기	50 %
2	원기둥의 부피 구하기	50 %

만점 공략 노트

기둥의 전개도는 서로 합동인 두 개의 밑면과 직사각형 모양의 옆면으로 이루어져 있고, 옆면을 이루는 직사각형에서

(직사각형의 가로의 길이)=(밑면의 둘레의 길이),

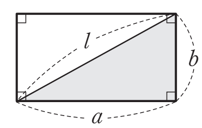
(직사각형의 세로의 길이)=(기둥의 높이)

이다.

유형 041 제곱근의 곱셈과 나눗셈의 도형에의 활용; 대각선의 길이 본책 48쪽

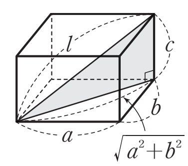
(1) 가로, 세로의 길이가 각각 a, b인 직사각형의 대각선의 길이를 l이라 하면

$l=\sqrt{a^2+b^2}$



(2) 세 모서리의 길이가 각각 a, b, c인 직육면체의 대각선의 길이를 l이라 하면

$l=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$



209 △ABC에서

$\overline{BC}=\sqrt{(5\sqrt{6})^2-(2\sqrt{15})^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$ (cm)

$\therefore\ \square ABCD=2\sqrt{15}\times 3\sqrt{10}$

$=6\sqrt{150}=30\sqrt{6}$ (cm²) 답 $30\sqrt{6}$ cm²

210 ① △BCD에서

$\overline{BD}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}=\sqrt{2}a$

② △BFE에서

$\overline{BE}=\sqrt{(2a)^2+a^2}=\sqrt{5a^2}=\sqrt{5}a$

③ △BGH에서

$\overline{BH}=\sqrt{(3a)^2+a^2}=\sqrt{10a^2}=\sqrt{10}a$

④ $a=\sqrt{2}$이면 △CGH에서

$\overline{CH}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{10}$

⑤ $\overline{AG}=\overline{BH}=\sqrt{10}a$이므로 $\sqrt{10}a=\sqrt{15}$에서

$$a=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\therefore\ \overline{AH}=3\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

211 정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라 하면

△FGH에서

$\overline{FH}=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}x$ (cm)

△FHD에서

$\overline{FD}=\sqrt{(\sqrt{2}x)^2+x^2}=\sqrt{3x^2}=\sqrt{3}x$ (cm)

즉 $\sqrt{3}x=3\sqrt{2}$이므로

$$x=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{6}$$

따라서 정육면체의 한 모서리의 길이는 $\sqrt{6}$ cm이다. 답 ②

212 △EFG에서

$\overline{EG}=\sqrt{6^2+(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{6}\,(\text{cm})$ … 1단계

△AEG에서

$\overline{AE}=\sqrt{(\sqrt{66})^2-(3\sqrt{6})^2}=2\sqrt{3}\,(\text{cm})$ … 2단계

$\therefore$ $\triangle AEG=\frac{1}{2}\times3\sqrt{6}\times2\sqrt{3}=9\sqrt{2}\,(\text{cm}^2)$ … 3단계

답 $9\sqrt{2}$ cm^2

단계	채점 요소	비율
1	$\overline{EG}$의 길이 구하기	40 %
2	$\overline{AE}$의 길이 구하기	40 %
3	△AEG의 넓이 구하기	20 %

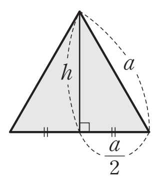
유형 042 제곱근의 곱셈과 나눗셈의 도형에의 활용; 정삼각형의 높이와 넓이

본책 49쪽

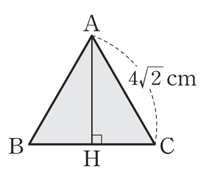
한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이를 h, 넓이를 S라 하면

(1) $h=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

(2) $S=\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$



213 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{CH}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}=2\sqrt{2}\,(\text{cm})$

△AHC에서

$\overline{AH}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{6}\,(\text{cm})$

$\therefore$ $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times2\sqrt{6}=8\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$ 답 ③

다른 풀이 $\triangle ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4\sqrt{2})^2=8\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

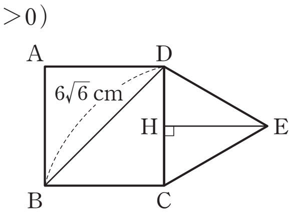
214 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 x cm라 하면

△BCD에서

$x^2+x^2=(6\sqrt{6})^2$, $2x^2=216$

$x^2=108$ $\therefore$ $x=6\sqrt{3}$ ($\because$ $x>0$)

오른쪽 그림과 같이 점 E에서 $\overline{DC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{DH}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{1}{2}\times6\sqrt{3}$

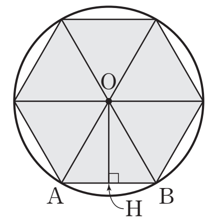
$=3\sqrt{3}\,(\text{cm})$

△EDH에서

$\overline{EH}=\sqrt{(6\sqrt{3})^2-(3\sqrt{3})^2}=9\,(\text{cm})$

따라서 정삼각형 CED의 높이는 9 cm이다. 답 9 cm

215 오른쪽 그림과 같이 정육각형은 정삼각형 6개로 이루어져 있다.



정삼각형의 한 변의 길이는 원의 반지름의 길이와 같고, 원의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$\pi r^2=20\pi$, $r^2=20$

$\therefore$ $r=2\sqrt{5}$ ($\because$ $r>0$)

즉 정삼각형의 한 변의 길이는 $2\sqrt{5}$ cm이므로 원의 중심 O에서 정육각형의 한 변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}=\sqrt{5}\,(\text{cm})$

△OAH에서

$\overline{OH}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{15}\,(\text{cm})$

$\therefore$ $\triangle OAB=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\sqrt{15}=5\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

따라서 정육각형의 넓이는

$6\times5\sqrt{3}=30\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$ 답 $30\sqrt{3}$ cm^2

유형 043 제곱근의 덧셈과 뺄셈

본책 49쪽

근호 안의 수가 같은 것끼리 모아서 계산한다.

➜ a, b, c, d는 유리수, $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$는 무리수일 때,

$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}+c\sqrt{x}+d\sqrt{y}$

$=a\sqrt{x}+c\sqrt{x}+b\sqrt{y}+d\sqrt{y}$

$=(a+c)\sqrt{x}+(b+d)\sqrt{y}$

216 $A=(5-4-6)\sqrt{2}=-5\sqrt{2}$

$B=(-1+2-3)\sqrt{5}=-2\sqrt{5}$

$\therefore$ $AB=(-5\sqrt{2})\times(-2\sqrt{5})=10\sqrt{10}$ 답 $10\sqrt{10}$

217 $\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{5}+\frac{\sqrt{2}}{6}$

$=\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{6}\right)\sqrt{2}+\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)\sqrt{3}$

$=\frac{5}{3}\sqrt{2}+\frac{1}{15}\sqrt{3}$

따라서 $a=\frac{5}{3}$, $b=\frac{1}{15}$이므로

$a-b=\frac{5}{3}-\frac{1}{15}=\frac{8}{5}$ 답 ①

218 $2<\sqrt{5}<3$이므로 $2-\sqrt{5}<0$

$4<\sqrt{20}<5$, 즉 $4<2\sqrt{5}<5$이므로 $2\sqrt{5}-4>0$ … 1단계

$\therefore$ (주어진 식)$=-(2-\sqrt{5})-(2\sqrt{5}-4)$

$=-2+\sqrt{5}-2\sqrt{5}+4$

$=2-\sqrt{5}$ … 2단계

답 $2-\sqrt{5}$

단계	채점 요소	비율
1	$2-\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}-4$의 부호 구하기	50 %
2	주어진 식 계산하기	50 %

유형 044 $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$를 이용한 제곱근의 덧셈과 뺄셈
본책 50쪽

❶ $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$ $(a>0,\ b>0)$임을 이용하여 근호 안을 가장 작은 자연수로 만든다.
❷ 근호 안의 수가 같은 것끼리 모아서 계산한다.

219 ① $\frac{\sqrt{5}}{5}-\sqrt{5}=\left(\frac{1}{5}-1\right)\sqrt{5}=-\frac{4\sqrt{5}}{5}$

② $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-\sqrt{27}=2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-3\sqrt{3}$
$=(2+5-3)\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

③ $\sqrt{18}-\sqrt{50}+\sqrt{8}=3\sqrt{2}-5\sqrt{2}+2\sqrt{2}$
$=(3-5+2)\sqrt{2}=0$

④ $\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{\sqrt{8}}{3}-\frac{\sqrt{18}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{3\sqrt{2}}{2}$
$=\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right)\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$

⑤ $\sqrt{216}-\sqrt{12}+\sqrt{6}=6\sqrt{6}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}$
$=(6+1)\sqrt{6}-2\sqrt{3}=7\sqrt{6}-2\sqrt{3}$

따라서 옳지 않은 것은 ②, ④이다. 답 ②, ④

220 $\sqrt{192}-3\sqrt{a}+\sqrt{108}=\sqrt{75}$에서
$8\sqrt{3}-3\sqrt{a}+6\sqrt{3}=5\sqrt{3}$
$3\sqrt{a}=9\sqrt{3}$, $\quad\sqrt{a}=3\sqrt{3}=\sqrt{27}$
$\therefore a=27$ 답 27

221 $\sqrt{72}-\sqrt{112}-4\sqrt{28}+\sqrt{98}$
$=6\sqrt{2}-4\sqrt{7}-8\sqrt{7}+7\sqrt{2}$
$=13\sqrt{2}-12\sqrt{7}$
$=13a-12b$ 답 ④

222 두 눈금 0과 18 사이의 거리는 $\quad\sqrt{18}=3\sqrt{2}$
두 눈금 2와 A 사이의 거리는 $\quad\sqrt{A}-\sqrt{2}$
두 거리가 같으므로 $\quad 3\sqrt{2}=\sqrt{A}-\sqrt{2}$
$\sqrt{A}=4\sqrt{2}=\sqrt{32}\qquad\therefore A=32$ 답 ②

유형 045 등식을 만족시키는 미지수의 값 추론하기; 제곱근의 덧셈
본책 51쪽

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{A}$를 만족시키는 자연수 x, y의 값 구하기
➜ $\sqrt{A}=a\sqrt{b}$ (a, b는 자연수)의 꼴로 나타낸 후 $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$도 $k\sqrt{b}$ (k는 자연수)의 꼴임을 이용하여 $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$의 값을 구한다.
예 두 자연수 x, y에 대하여 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{18}$일 때,
$\sqrt{18}=3\sqrt{2}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}$이므로
$\sqrt{x}=\sqrt{2}$, $\sqrt{y}=2\sqrt{2}$ 또는 $\sqrt{x}=2\sqrt{2}$, $\sqrt{y}=\sqrt{2}$
$\therefore x=2$, $y=8$ 또는 $x=8$, $y=2$

223 $\sqrt{48}=4\sqrt{3}$이므로 주어진 등식은
$\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\sqrt{3}$ …… ㉠
이때 x, y는 자연수이고 $4\sqrt{3}$은 무리수이므로 ㉠을 만족시키는 $\sqrt{x}$와 $\sqrt{y}$는 모두 $k\sqrt{3}$ (k는 자연수)의 꼴이어야 한다.
$\sqrt{x}=p\sqrt{3}$, $\sqrt{y}=q\sqrt{3}$ (p, q는 자연수)이라 하고 이를 ㉠에 대입하면
$p\sqrt{3}+q\sqrt{3}=4\sqrt{3}\qquad\therefore p+q=4$
$\therefore p=1$, $q=3$ 또는 $p=2$, $q=2$ 또는 $p=3$, $q=1$
즉 $\sqrt{x}=\sqrt{3}$, $\sqrt{y}=3\sqrt{3}$ 또는 $\sqrt{x}=2\sqrt{3}$, $\sqrt{y}=2\sqrt{3}$ 또는 $\sqrt{x}=3\sqrt{3}$, $\sqrt{y}=\sqrt{3}$이므로
$x=3$, $y=27$ 또는 $x=12$, $y=12$ 또는 $x=27$, $y=3$
따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(3,\ 27)$, $(12,\ 12)$, $(27,\ 3)$의 3개이다. 답 ②

224 $\sqrt{294}=7\sqrt{6}$이므로 주어진 등식은
$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=7\sqrt{6}$ …… ㉠
이때 a, b, c는 자연수이고 $7\sqrt{6}$은 무리수이므로 ㉠을 만족시키는 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$는 모두 $k\sqrt{6}$ (k는 자연수)의 꼴이어야 한다.
$\sqrt{a}=p\sqrt{6}$, $\sqrt{b}=q\sqrt{6}$, $\sqrt{c}=r\sqrt{6}$ (p, q, r는 자연수)이라 하고 이를 ㉠에 대입하면
$p\sqrt{6}+q\sqrt{6}+r\sqrt{6}=7\sqrt{6}\qquad\therefore p+q+r=7$
이때 $a<b<c$에서 $p<q<r$이므로 $\quad p=1$, $q=2$, $r=4$
즉 $\sqrt{a}=\sqrt{6}$, $\sqrt{b}=2\sqrt{6}$, $\sqrt{c}=4\sqrt{6}$이므로
$a=6$, $b=24$, $c=96$
$\therefore a-b+c=6-24+96=78$ 답 78

225 $\sqrt{x}=\sqrt{3y}+\sqrt{2}$ …… ㉠
x, y는 자연수이고 $\sqrt{2}$는 무리수이므로 ㉠을 만족시키는 $\sqrt{x}$와 $\sqrt{3y}$는 모두 $k\sqrt{2}$ (k는 자연수)의 꼴이어야 한다.
이때 $y=2\times3\times(\text{자연수})^2$의 꼴이므로 가장 작은 y의 값은
$2\times3\times1^2=6$
$y=6$을 ㉠에 대입하면
$\sqrt{x}=\sqrt{18}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2}\qquad\therefore x=32$
따라서 조건을 만족시키는 $x+y$의 값 중 가장 작은 값은
$32+6=38$ 답 38

유형 046 분모의 유리화를 이용한 제곱근의 덧셈과 뺄셈
본책 51쪽

❶ 분모에 근호를 포함한 무리수가 있으면 분모를 유리화한다.
❷ 근호 안의 수가 같은 것끼리 모아서 계산한다.

226 $\sqrt{45}-\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{7}}+\frac{15}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}-\sqrt{5}+3\sqrt{5}=5\sqrt{5}$ 답 ③

227 $\sqrt{72}+\frac{6}{\sqrt{3}}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{24}}+\frac{a}{\sqrt{8}}=6\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{a}{2\sqrt{2}}$

$=6\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{a\sqrt{2}}{4}$

$=\left(6+\frac{a}{4}\right)\sqrt{2}+\frac{5}{3}\sqrt{3}$ ⋯ 1단계

따라서 $6+\frac{a}{4}=5$, $\frac{5}{3}=b$이므로

$a=-4$, $b=\frac{5}{3}$ ⋯ 2단계

$\therefore a+3b=-4+3\times\frac{5}{3}=1$ ⋯ 3단계

답 1

단계	채점 요소	비율
1	등식의 좌변 간단히 하기	50 %
2	a, b의 값 구하기	30 %
3	$a+3b$의 값 구하기	20 %

228 $b=a-\frac{2}{a}=\sqrt{7}-\frac{2}{\sqrt{7}}=\sqrt{7}-\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{5\sqrt{7}}{7}=\frac{5}{7}a$

따라서 b는 a의 $\frac{5}{7}$배이다.

답 ⑤

유형 047 제곱근의 덧셈과 뺄셈의 수직선에의 활용

본책 52쪽

직각삼각형 또는 정사각형을 이용하여 수직선 위의 점에 대응하는 수를 구한 후 식의 값을 구한다.

229 $\overline{AP}=\overline{AB}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로 $p=1+\sqrt{2}$

$\overline{QC}=\overline{BC}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로 $q=3-\sqrt{2}$

$\therefore 3p-2q=3(1+\sqrt{2})-2(3-\sqrt{2})$

$=3+3\sqrt{2}-6+2\sqrt{2}$

$=-3+5\sqrt{2}$

답 $-3+5\sqrt{2}$

230 $\overline{PC}=\overline{AC}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$이므로 점 P에 대응하는 수는

$0-\sqrt{13}=-\sqrt{13}$

$\overline{QE}=\overline{DE}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$이므로 점 Q에 대응하는 수는

$-2+\sqrt{13}$

$\therefore \overline{PQ}=(-2+\sqrt{13})-(-\sqrt{13})$

$=-2+2\sqrt{13}$

답 $-2+2\sqrt{13}$

231 세 삼각형 ABC, BDE, DFG는 닮음이므로

$\overline{AB}:\overline{BD}:\overline{DF}=\overline{AC}:\overline{BE}:\overline{DG}=1:\sqrt{3}:3$

$\overline{AB}=\sqrt{3}$이므로

$\overline{BD}=\sqrt{3}\,\overline{AB}=3$, $\overline{DF}=3\overline{AB}=3\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AF}=\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{DF}$

$=\sqrt{3}+3+3\sqrt{3}=3+4\sqrt{3}$

따라서 점 F에 대응하는 수는

$-1+(3+4\sqrt{3})=2+4\sqrt{3}$

답 $2+4\sqrt{3}$

유형 048 분배법칙을 이용한 분모의 유리화

본책 52쪽

$a>0$, $b>0$, $c>0$일 때,

$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\times\sqrt{c}}{\sqrt{c}\times\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{ac}+\sqrt{bc}}{c}$

232 $\frac{15-5\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}=\frac{(15-5\sqrt{2})\times\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{15\sqrt{5}-5\sqrt{10}}{15}$

$=\sqrt{5}-\frac{\sqrt{10}}{3}$

따라서 $a=1$, $b=-\frac{1}{3}$이므로

$a-b=1-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$

답 ④

233 (주어진 식)

$=\frac{(2\sqrt{6}-3\sqrt{2})\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}-\frac{(2\sqrt{6}+4\sqrt{2})\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$=\frac{12-6\sqrt{3}}{6}-\frac{4\sqrt{3}+8}{4}$

$=(2-\sqrt{3})-(\sqrt{3}+2)$

$=2-\sqrt{3}-\sqrt{3}-2=-2\sqrt{3}$

답 $-2\sqrt{3}$

234 $x=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{(3+\sqrt{3})\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}$

$=\frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

$y=\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{10}}=\frac{(5+\sqrt{5})\times\sqrt{10}}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}$

$=\frac{5\sqrt{10}+5\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$ ⋯ 1단계

$\therefore 2(x-y)=2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}\right)$

$=\sqrt{6}-\sqrt{10}$ ⋯ 2단계

답 $\sqrt{6}-\sqrt{10}$

단계	채점 요소	비율
1	x, y의 분모를 각각 유리화하기	60 %
2	$2(x-y)$의 값 구하기	40 %

유형 049 근호를 포함한 복잡한 식의 계산

본책 53쪽

❶ 분배법칙을 이용하여 괄호를 푼다.
❷ $\sqrt{a^2b}$의 꼴은 $a\sqrt{b}$의 꼴로 고친다.
❸ 분모에 근호를 포함한 무리수가 있으면 분모를 유리화한다.
❹ 곱셈, 나눗셈을 먼저 한 후 덧셈, 뺄셈을 한다.

235 $\sqrt{3}(2\sqrt{15}-\sqrt{3})+\frac{10-\sqrt{20}}{\sqrt{5}}=6\sqrt{5}-3+2\sqrt{5}-2$

$=-5+8\sqrt{5}$

따라서 $a=-5$, $b=8$이므로

$$a+2b=-5+2\times8=11$$

답 11

236 $A=\left(-\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\div\frac{\sqrt{18}}{4}$

$=\left(-\frac{5\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\times\frac{4}{3\sqrt{2}}$

$=\left(-\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)\times\frac{4}{3\sqrt{2}}=-2\sqrt{3}$

$B=3\sqrt{2}\left(\frac{9}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\sqrt{27}-3}{\sqrt{3}}$

$=9\sqrt{3}-3-3+\sqrt{3}$

$=10\sqrt{3}-6$

$\therefore \frac{B}{A}=\frac{10\sqrt{3}-6}{-2\sqrt{3}}=\frac{30-6\sqrt{3}}{-6}=-5+\sqrt{3}$

답 $-5+\sqrt{3}$

237 $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}+3\right)◎\frac{\sqrt{6}}{2}$

$=\sqrt{2}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}+3\right)+\frac{\sqrt{6}}{2}-\left(\frac{4}{\sqrt{3}}+3\right)\times\frac{\sqrt{6}}{2}$

$=\frac{4\sqrt{6}}{3}+3\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}-2\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{6}}{2}$

$=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{3}$

답 $\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{3}$

유형 050 제곱근의 계산 결과가 유리수가 될 조건

본책 53쪽

a, b가 유리수이고 $\sqrt{m}$이 무리수일 때, $a+b\sqrt{m}$이 유리수가 될 조건

➜ $b=0$

238 (주어진 식)$=2\sqrt{5}(a+\sqrt{5})-4\sqrt{5}$

$=2a\sqrt{5}+10-4\sqrt{5}$

$=10+(2a-4)\sqrt{5}$

주어진 식이 유리수가 되려면

$2a-4=0 \qquad \therefore a=2$

답 ②

239 (1) $A=\frac{a}{2}+2\sqrt{6}-\frac{a\sqrt{6}}{2}+1$

$=\left(\frac{a}{2}+1\right)+\left(2-\frac{a}{2}\right)\sqrt{6}$ …… ㉠

A가 유리수가 되려면

$2-\frac{a}{2}=0 \qquad \therefore a=4$ … 1단계

(2) $a=4$를 ㉠에 대입하면

$A=\frac{4}{2}+1=3$ … 2단계

답 (1) 4 (2) 3

단계	채점 요소	비율
1	a의 값 구하기	60 %
2	A의 값 구하기	40 %

240 (주어진 식)$=3a\sqrt{7}-2a+2b\sqrt{7}-7$

$=(-2a-7)+(3a+2b)\sqrt{7}$

주어진 식이 유리수가 되려면

$3a+2b=0, \qquad a=-\frac{2}{3}b$

이때 $b\neq0$이므로 $\frac{a}{b}=-\frac{2}{3}$

답 ③

유형 051 무리수의 정수 부분과 소수 부분

본책 54쪽

(1) (무리수)=(정수 부분)+(소수 부분)

(단, $0<$(소수 부분)<1)

(2) 무리수의 정수 부분과 소수 부분을 구할 때에는 먼저 정수 부분을 찾고, 소수 부분은 무리수에서 정수 부분을 뺀 값임을 이용한다.

예 $\sqrt{10}$의 정수 부분과 소수 부분 구하기

➜ $3<\sqrt{10}<4$이므로

$\sqrt{10}$의 정수 부분: 3

$\sqrt{10}$의 소수 부분: $\sqrt{10}-3$

241 $3+\frac{4}{\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}=3+\sqrt{8}$

$2<\sqrt{8}<3$이므로 $\qquad 5<3+\sqrt{8}<6$

따라서 $a=5$, $b=(3+2\sqrt{2})-5=-2+2\sqrt{2}$이므로

$ab=5(-2+2\sqrt{2})=-10+10\sqrt{2}$

답 ⑤

242 $2<\sqrt{7}<3$이므로 $\qquad k=\sqrt{7}-2$

$\therefore \sqrt{7}=k+2$

이때 $15<\sqrt{252}<16$이므로 $\sqrt{252}$의 소수 부분은

$\sqrt{252}-15=6\sqrt{7}-15$

$=6(k+2)-15$

$=6k-3$

답 ①

243 $6<\sqrt{48}<7$이므로 $\qquad a=4\sqrt{3}-6$

$5<\sqrt{27}<6$에서 $-2<\sqrt{27}-7<-1$이므로

$b=(3\sqrt{3}-7)-(-2)=3\sqrt{3}-5$ … 1단계

이때 $0<a<1$, $0<b<1$이므로

$a-1<0$, $b-1<0$

$\therefore \sqrt{(a-1)^2}-\sqrt{(b-1)^2}$

$=-(a-1)+(b-1)=-a+1+b-1$

$=-a+b=-(4\sqrt{3}-6)+(3\sqrt{3}-5)$

$=-4\sqrt{3}+6+3\sqrt{3}-5=1-\sqrt{3}$ … 2단계

답 $1-\sqrt{3}$

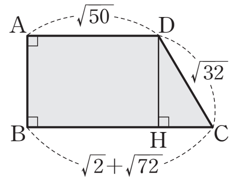
단계	채점 요소	비율
1	a, b의 값 구하기	50 %
2	$\sqrt{(a-1)^2}-\sqrt{(b-1)^2}$의 값 구하기	50 %

유형 052 제곱근의 덧셈과 뺄셈의 도형에의 활용

본책 54쪽

변의 길이 또는 모서리의 길이가 무리수인 도형의 넓이 또는 부피에 대한 문제
➜ 공식을 이용하여 조건에 맞게 식을 세운 후 근호를 포함한 식의 계산을 한다.

244 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{HC}=(\sqrt{2}+\sqrt{72})-\sqrt{50}$
$=(\sqrt{2}+6\sqrt{2})-5\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

△DHC에서

$\overline{DH}=\sqrt{(\sqrt{32})^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{6}$

$\therefore$ □ABCD$=\frac{1}{2}\times\{5\sqrt{2}+(\sqrt{2}+6\sqrt{2})\}\times2\sqrt{6}$
$=\frac{1}{2}\times12\sqrt{2}\times2\sqrt{6}=24\sqrt{3}$

답 $24\sqrt{3}$

245 $\overline{AB}=\overline{BC}=a$, $\overline{CD}=\overline{DE}=b$라 하면

$\frac{1}{2}a^2=6$에서 $a^2=12$ $\therefore a=2\sqrt{3}$ ($\because a>0$)

$\frac{1}{2}b^2=\frac{27}{2}$에서 $b^2=27$ $\therefore b=3\sqrt{3}$ ($\because b>0$)

$\therefore \overline{BD}=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

△ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}$

△CED에서

$\overline{CE}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+(3\sqrt{3})^2}=3\sqrt{6}$

$\therefore \overline{AE}=2\sqrt{6}+3\sqrt{6}=5\sqrt{6}$

$\therefore \overline{AE}+\overline{BD}=5\sqrt{3}+5\sqrt{6}$

답 ④

246 밑면인 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 $\sqrt{8}$, $2\sqrt{6}$이므로 빗변의 길이는

$\sqrt{(\sqrt{8})^2+(2\sqrt{6})^2}=4\sqrt{2}$

삼각기둥의 모든 모서리의 길이의 합은

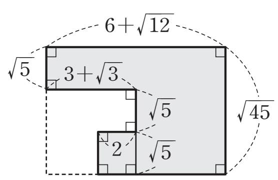
$2(\sqrt{8}+4\sqrt{2}+2\sqrt{6})+3(\sqrt{2}+3\sqrt{6})$
$=2(2\sqrt{2}+4\sqrt{2}+2\sqrt{6})+3(\sqrt{2}+3\sqrt{6})$
$=12\sqrt{2}+4\sqrt{6}+3\sqrt{2}+9\sqrt{6}$
$=15\sqrt{2}+13\sqrt{6}$

따라서 $a=15$, $b=13$이므로

$a+b=15+13=28$

답 28

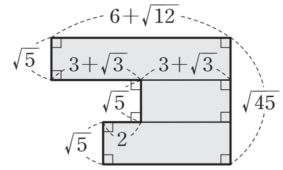
247 $6+\sqrt{12}=6+2\sqrt{3}$,
$\sqrt{45}=3\sqrt{5}$이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$3\sqrt{5}(6+2\sqrt{3})-2\sqrt{5}(3+\sqrt{3})$
$+2\sqrt{5}$
$=18\sqrt{5}+6\sqrt{15}-6\sqrt{5}-2\sqrt{15}+2\sqrt{5}$
$=14\sqrt{5}+4\sqrt{15}$

답 $14\sqrt{5}+4\sqrt{15}$

다른 풀이 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



$\sqrt{5}(6+2\sqrt{3})+\sqrt{5}(3+\sqrt{3})$
$+\sqrt{5}(5+\sqrt{3})$
$=6\sqrt{5}+2\sqrt{15}+3\sqrt{5}+\sqrt{15}$
$+5\sqrt{5}+\sqrt{15}$
$=14\sqrt{5}+4\sqrt{15}$

유형 053 제곱근의 덧셈과 뺄셈의 도형에의 활용 ; 겹쳐진 도형의 둘레의 길이

본책 55쪽

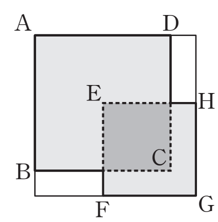
(1) 두 개 이상의 도형의 일부분이 겹쳐져 있거나 연결되어 있는 경우
➜ 보조선을 이용하여 도형을 채우거나 나누어서 계산한다.
(2) 닮은 도형이 연속적으로 나타나는 경우
➜ 닮음비를 활용하여 계산한다.

248 □ABCD, □EFGH의 한 변의 길이는 각각

$\sqrt{96}=4\sqrt{6}$, $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

겹쳐진 부분의 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

따라서 구하는 도형의 둘레의 길이는 오른쪽 그림의 큰 정사각형의 둘레의 길이와 같으므로



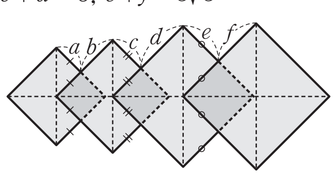
$(4\sqrt{6}+3\sqrt{5}-2\sqrt{6})\times4$
$=12\sqrt{5}+8\sqrt{6}$

답 $12\sqrt{5}+8\sqrt{6}$

249 넓이가 각각 12, 16, 25, 27인 네 정사각형의 한 변의 길이는 각각 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, $\sqrt{16}=4$, $\sqrt{25}=5$, $\sqrt{27}=3\sqrt{3}$이다.

겹치는 부분은 모두 정사각형이므로 다음 그림에서

$a+b=4$, $c+d=5$, $e+f=3\sqrt{3}$



따라서 도형의 둘레의 길이는

$2\times(2\sqrt{3}+a+b+c+d+e+f+3\sqrt{3})$
$=2\times(2\sqrt{3}+4+5+3\sqrt{3}+3\sqrt{3})$
$=2\times(8\sqrt{3}+9)$
$=16\sqrt{3}+18$

답 $16\sqrt{3}+18$

다른 풀이 겹치는 부분의 정사각형의 한 변의 길이는 차례대로

$\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$, $\frac{4}{2}=2$, $\frac{5}{2}$

구하는 도형의 둘레의 길이는 처음 네 정사각형의 둘레의 길이의 합에서 겹치는 부분의 세 정사각형의 둘레의 길이의 합을 뺀 것과 같다.

따라서 도형의 둘레의 길이는

$$4\times(2\sqrt{3}+4+5+3\sqrt{3})-4\times\left(\sqrt{3}+2+\frac{5}{2}\right)$$
$$=(20\sqrt{3}+36)-(4\sqrt{3}+18)$$
$$=16\sqrt{3}+18$$

250 가장 큰 정사각형의 넓이가 $12^2=144$이므로 정사각형의 각 변의 중점을 연결하여 만든 나머지 세 정사각형의 넓이는 각각

$$\frac{144}{2}=72,\ \frac{72}{2}=36,\ \frac{36}{2}=18$$

따라서 세 정사각형의 한 변의 길이는 각각

$$\sqrt{72}=6\sqrt{2},\ \sqrt{36}=6,\ \sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

원의 반지름의 길이는

$$\frac{12}{2}=6$$

색칠한 부분의 둘레의 길이는

$$(12+6\sqrt{2}+6+3\sqrt{2})\times4+2\pi\times6$$
$$=72+36\sqrt{2}+12\pi$$

따라서 $a=72$, $b=36$, $c=12$이므로

$a-b-c=72-36-12=24$ 답 24

유형 054 실수의 대소 관계

본책 55쪽

두 실수 a, b에 대하여

(1) $a-b>0$이면 $a>b$

(2) $a-b=0$이면 $a=b$

(3) $a-b<0$이면 $a<b$

251 ① $(\sqrt{10}+4)-2\sqrt{10}=4-\sqrt{10}$
$=\sqrt{16}-\sqrt{10}>0$
$\therefore \sqrt{10}+4>2\sqrt{10}$

② $\sqrt{50}-(8-\sqrt{2})=5\sqrt{2}-8+\sqrt{2}$
$=6\sqrt{2}-8$
$=\sqrt{72}-\sqrt{64}>0$
$\therefore \sqrt{50}>8-\sqrt{2}$

③ $(\sqrt{28}-2)-(\sqrt{7}+1)=2\sqrt{7}-2-\sqrt{7}-1$
$=\sqrt{7}-3$
$=\sqrt{7}-\sqrt{9}<0$
$\therefore \sqrt{28}-2<\sqrt{7}+1$

④ $(3-2\sqrt{2})-(\sqrt{2}-1)=3-2\sqrt{2}-\sqrt{2}+1$
$=4-3\sqrt{2}$
$=\sqrt{16}-\sqrt{18}<0$
$\therefore 3-2\sqrt{2}<\sqrt{2}-1$

⑤ $(4\sqrt{6}-\sqrt{5})-(3\sqrt{5}+\sqrt{6})=4\sqrt{6}-\sqrt{5}-3\sqrt{5}-\sqrt{6}$
$=3\sqrt{6}-4\sqrt{5}$
$=\sqrt{54}-\sqrt{80}<0$
$\therefore 4\sqrt{6}-\sqrt{5}<3\sqrt{5}+\sqrt{6}$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

252 $a-c=(2\sqrt{3}-2)-\sqrt{3}=\sqrt{3}-2=\sqrt{3}-\sqrt{4}<0$이므로
$a<c$

$b-c=(3\sqrt{2}-\sqrt{3})-\sqrt{3}=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}=\sqrt{18}-\sqrt{12}>0$이므로
$b>c$

$\therefore a<c<b$ 답 ②

253 $-2\sqrt{3}$, $1-3\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-2\sqrt{6}$은 음수이고 $\sqrt{3}+\sqrt{6}$, $\sqrt{6}-1$은 양수이다. … 1단계

즉 작은 것부터 차례대로 나열할 때 세 번째에 오는 수는 세 음수 중 가장 큰 수이다.

$-2\sqrt{3}-(1-3\sqrt{3})=\sqrt{3}-1=\sqrt{3}-\sqrt{1}>0$이므로
$-2\sqrt{3}>1-3\sqrt{3}$

$-2\sqrt{3}-(\sqrt{3}-2\sqrt{6})=2\sqrt{6}-3\sqrt{3}=\sqrt{24}-\sqrt{27}<0$이므로
$-2\sqrt{3}<\sqrt{3}-2\sqrt{6}$

$\therefore 1-3\sqrt{3}<-2\sqrt{3}<\sqrt{3}-2\sqrt{6}$ … 2단계

따라서 세 번째에 오는 수는 $\sqrt{3}-2\sqrt{6}$이다. … 3단계

답 $\sqrt{3}-2\sqrt{6}$

단계	채점 요소	비율
1	음수와 양수 구분하기	30 %
2	세 음수의 대소 비교하기	50 %
3	작은 것부터 차례대로 나열할 때 세 번째에 오는 수 구하기	20 %

만점 유형 도전하기

본책 56~57쪽

254 전략 $a<0$, $b>0$이면 $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$임에 주의한다.

(1) ③ $b>0$, $c<0$이므로

$$\sqrt{bc^2}=\sqrt{b}\sqrt{c^2}=\sqrt{b}\sqrt{(-c)^2}=\sqrt{b}\times(-c)=-c\sqrt{b}$$

따라서 처음으로 틀린 부분은 ③이다.

(2) $$2a\sqrt{b}+\frac{a}{\sqrt{b}}-c\sqrt{b}=2a\sqrt{b}+\frac{a\sqrt{b}}{b}-c\sqrt{b}$$
$$=\left(2a+\frac{a}{b}-c\right)\sqrt{b}$$

답 풀이 참조

255 전략 두 식에 적당한 수를 각각 곱하여 x의 계수 또는 y의 계수의 절댓값을 같게 한 후 소거한다.

$$\begin{cases}\sqrt{3}x+\sqrt{5}y=1 & \cdots\cdots ㉠\\ \sqrt{5}x-\sqrt{3}y=-1 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠$\times\sqrt{3}+$㉡$\times\sqrt{5}$를 하면

$8x=\sqrt{3}-\sqrt{5}$ $\quad\therefore x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{8}$

또 ㉠$\times\sqrt{5}-$㉡$\times\sqrt{3}$을 하면

$8y=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ $\quad\therefore y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{8}$

따라서 $p=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{8}$, $q=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{8}$이므로

$$p-q=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{8}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{8}=-\frac{\sqrt{5}}{4},$$

$$p+q=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{8}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \frac{3(p-q)}{p+q}=3\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)\div\frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$=3\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)\times\frac{4}{\sqrt{3}}$$
$$=-\sqrt{15}$$

답 $-\sqrt{15}$

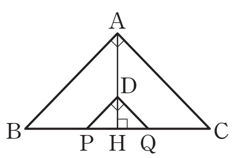
256 전략 두 삼각형이 겹쳐진 부분이 직각이등변삼각형임을 이용한다.

$\triangle$ABC에서 $\overline{BC}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2}=6$이므로

$(\triangle\text{ABC}$의 둘레의 길이$)=3\sqrt{2}+3\sqrt{2}+6$
$=6\sqrt{2}+6$ …… ㉠

$\triangle$DEF에서 $\overline{EF}=\sqrt{(6\sqrt{2})^2+(6\sqrt{2})^2}=12$이므로

$(\triangle\text{DEF}$의 둘레의 길이$)=6\sqrt{2}+6\sqrt{2}+12$
$=12\sqrt{2}+12$ …… ㉡



오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$의 중점을 H라 하면 $\overline{AH}$는 $\triangle$ABC의 중선이고 점 D가 무게중심이므로

$\overline{AH}:\overline{DH}=3:1$

$\overline{BC}$가 $\overline{DE}$, $\overline{DF}$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하면 $\triangle\text{ABC}\backsim\triangle\text{DPQ}$이고 $\overline{AH}:\overline{DH}=3:1$이므로 닮음비는 $3:1$이다.

이때 둘레의 길이의 비도 $3:1$이므로

$(\triangle\text{DPQ}$의 둘레의 길이$)$
$=(\triangle\text{ABC}$의 둘레의 길이$)\times\dfrac{1}{3}$
$=(6\sqrt{2}+6)\times\dfrac{1}{3}$
$=2\sqrt{2}+2$ …… ㉢

따라서 구하는 도형의 둘레의 길이는 ㉠, ㉡, ㉢에서

$(6\sqrt{2}+6)+(12\sqrt{2}+12)-(2\sqrt{2}+2)$
$=6\sqrt{2}+6+12\sqrt{2}+12-2\sqrt{2}-2$
$=16+16\sqrt{2}$

답 $16+16\sqrt{2}$

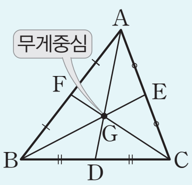
만점 공략 노트

삼각형의 무게중심의 성질

삼각형의 무게중심은 세 중선의 길이를 각 꼭짓점으로부터 각각 $2:1$로 나눈다.

➜ 점 G가 $\triangle$ABC의 무게중심이면

$\overline{AG}:\overline{GD}=\overline{BG}:\overline{GE}$
$=\overline{CG}:\overline{GF}=2:1$



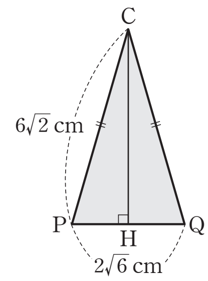
257 전략 정사면체의 각 면은 모두 합동인 정삼각형임을 이용하여 $\triangle$PCQ의 각 변의 길이를 구한다.

$\overline{CP}$, $\overline{CQ}$는 한 변의 길이가 $4\sqrt{6}$ cm인 정삼각형의 높이이므로

$\overline{CP}=\overline{CQ}=\sqrt{(4\sqrt{6})^2-(2\sqrt{6})^2}=6\sqrt{2}$ (cm)

$\triangle$ABD에서 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의하여

$\overline{PQ}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{6}=2\sqrt{6}$ (cm)



$\triangle$PCQ는 $\overline{CP}=\overline{CQ}$인 이등변삼각형이므로 점 C에서 $\overline{PQ}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PH}=\dfrac{1}{2}\overline{PQ}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{6}$
$=\sqrt{6}$ (cm)

$\triangle$CPH에서

$\overline{CH}=\sqrt{(6\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}$
$=\sqrt{66}$ (cm)

$\therefore \triangle\text{PCQ}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times\sqrt{66}$
$=6\sqrt{11}$ (cm^2)

답 $6\sqrt{11}$ cm^2

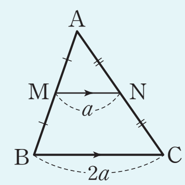
만점 공략 노트

삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질

$\triangle$ABC에서

$\overline{AM}=\overline{MB}$, $\overline{AN}=\overline{NC}$

➜ $\overline{MN}\,/\!/\,\overline{BC}$, $\overline{MN}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$



258 전략 분모의 유리화와 제곱근의 덧셈을 반복하여 계산한다.

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}}=\frac{1}{\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3}-\dfrac{1}{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}-\dfrac{3}{2\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

답 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

다른 풀이 $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$의 분모, 분자에 각각 $\sqrt{3}$을 곱하면

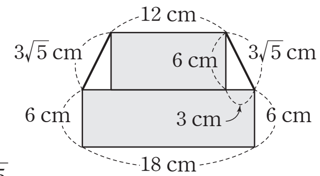
$$\frac{1\times\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3-1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}}=\frac{1}{\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

259 전략 끈이 지나는 상자의 한가운데를 수직으로 자른 단면을 생각해 본다.

끈이 지나는 상자의 한가운데를 밑면에 수직으로 자른 단면을 그리면 오른쪽 그림과 같다.



이 도형의 둘레의 길이는

$12+3\sqrt{5}+6+18+6+3\sqrt{5}$

$=42+6\sqrt{5}\,(\text{cm})$

따라서 필요한 끈의 전체 길이는

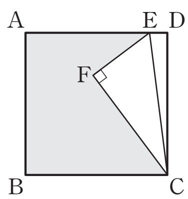
$(42+6\sqrt{5})\times2+8\sqrt{5}=84+12\sqrt{5}+8\sqrt{5}$

$=84+20\sqrt{5}\,(\text{cm})$

답 $(84+20\sqrt{5})$ cm

260 전략 $\overline{EC}$를 그어 직각삼각형을 만든 후 피타고라스 정리와 제곱근의 성질을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{EC}$를 그으면 $\triangle ECD$에서



$\overline{EC}^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(4\sqrt{2})^2=\frac{65}{2}$

이때 $\overline{EF}:\overline{FC}=4:7$이므로 $\overline{EF}=4k$, $\overline{FC}=7k\ (k>0)$라 하면 $\triangle EFC$에서

$(4k)^2+(7k)^2=\frac{65}{2}$

$65k^2=\frac{65}{2},\qquad k^2=\frac{1}{2}$

$\therefore k=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (\because k>0)$

$\therefore \overline{EF}=2\sqrt{2},\ \overline{FC}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$

따라서 구하는 도형의 둘레의 길이는

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CF}+\overline{FE}+\overline{EA}$

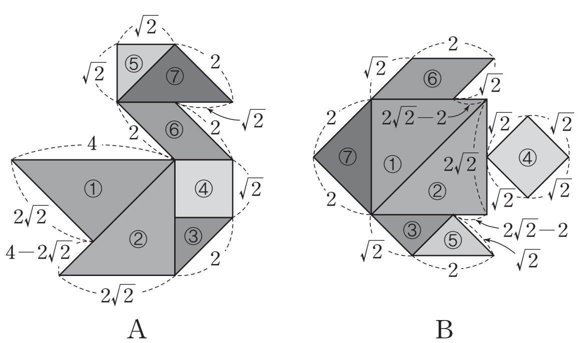
$=4\sqrt{2}+4\sqrt{2}+\frac{7\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}+\left(4\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=17\sqrt{2}$

답 $17\sqrt{2}$

261 전략 각 변의 길이를 먼저 구한다.

(1) 각 변의 길이를 구하면 다음과 같다.



(i) 도형 A의 둘레의 길이

가장 위쪽의 가로의 길이부터 시곗바늘 방향으로 차례대로 선분의 길이를 더하면

$\sqrt{2}+2+\sqrt{2}+2+\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}$

$+(4-2\sqrt{2})+2\sqrt{2}+4+2+\sqrt{2}$

$=16+6\sqrt{2}$

(ii) 도형 B의 둘레의 길이

가장 위쪽의 가로의 길이부터 시곗바늘 방향으로 차례대로 선분의 길이를 더하면

$2+\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-2)+2\sqrt{2}+\sqrt{2}\times4$

$+(2\sqrt{2}-2)+\sqrt{2}+2+\sqrt{2}+2+2+\sqrt{2}$

$=4+14\sqrt{2}$

(2) $(16+6\sqrt{2})-(4+14\sqrt{2})=12-8\sqrt{2}=\sqrt{144}-\sqrt{128}>0$이므로

$16+6\sqrt{2}>4+14\sqrt{2}$

따라서 도형 A의 둘레의 길이가 더 길다.

답 (1) A: $16+6\sqrt{2}$, B: $4+14\sqrt{2}$ (2) A

시험 만점 완성하기

본책 58~61쪽

262 전략 근호 밖의 수끼리, 근호 안의 수끼리 곱하거나 나눈다.

① $2\sqrt{18}\div\sqrt{6}=2\sqrt{\frac{18}{6}}=2\sqrt{3}$

② $\sqrt{6}\div\sqrt{42}=\sqrt{\frac{6}{42}}=\sqrt{\frac{1}{7}}$

③ $-5\sqrt{20}\times\frac{3}{\sqrt{10}}=-15\sqrt{\frac{20}{10}}=-15\sqrt{2}$

④ $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{12}}\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)=-2\sqrt{\frac{2\times6}{12}}=-2$

⑤ $-\frac{24}{\sqrt{5}}\div\left(-\frac{4}{\sqrt{15}}\right)=-\frac{24}{\sqrt{5}}\times\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)=6\sqrt{3}$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

263 전략 근호 안의 수를 1.5와 어떤 수의 거듭제곱의 곱으로 나타낸다.

① $\sqrt{150}=\sqrt{1.5\times10^2}=10\sqrt{1.5}=12.25$

② $\sqrt{6}=\sqrt{1.5\times2^2}=2\sqrt{1.5}=2.45$

③ $\sqrt{135}=\sqrt{15\times3^2}=3\sqrt{15}$

④ $\sqrt{\frac{3}{200}}=\sqrt{\frac{1.5}{10^2}}=\frac{\sqrt{1.5}}{10}=0.1225$

⑤ $\sqrt{0.15}=\sqrt{\frac{15}{10^2}}=\frac{\sqrt{15}}{10}$

따라서 그 값을 구할 수 없는 것은 ③, ⑤이다.

답 ③, ⑤

264 전략 근호 안의 수를 5 또는 11과 어떤 수의 거듭제곱의 곱으로 나타낸다.

$\sqrt{220}+\sqrt{2.2}=\sqrt{5\times11\times2^2}+\sqrt{\frac{11}{5}}$

$=2\times\sqrt{5}\times\sqrt{11}+\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}}$

$=2AB+\frac{B}{A}$

답 ⑤

265 전략 주어진 수의 분모를 통분하여 분자의 크기를 비교한다.

$\sqrt{7}=\dfrac{3\sqrt{7}}{3}=\dfrac{\sqrt{63}}{3}$, $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$, $\dfrac{7}{3}=\dfrac{\sqrt{49}}{3}$,

$\dfrac{7}{\sqrt{3}}=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{147}}{3}$

이때 $\sqrt{147}>\sqrt{63}>\sqrt{49}>\sqrt{21}>\sqrt{7}$이므로

$$\frac{7}{\sqrt{3}}>\sqrt{7}>\frac{7}{3}>\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}>\frac{\sqrt{7}}{3}$$

따라서 두 번째에 오는 수는 $\sqrt{7}$이다. 답 ①

266 전략 근호 안의 제곱인 인수는 근호 밖으로 꺼내고, 나눗셈은 역수의 곱셈으로 바꾸어 계산한다.

$$\frac{16}{3\sqrt{40}}\div\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)\times\sqrt{1.\dot{6}}$$
$$=\frac{16}{6\sqrt{10}}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)\times\sqrt{\frac{15}{9}}$$
$$=\frac{8}{3\sqrt{10}}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)\times\frac{\sqrt{15}}{3}$$
$$=-\frac{8\sqrt{5}}{9\sqrt{2}}=-\frac{4\sqrt{10}}{9}$$
$$\therefore a=-\frac{4}{9}$$
답 ④

267 전략 정사각형의 넓이의 양의 제곱근이 정사각형의 한 변의 길이임을 이용한다.

주어진 두 정사각형의 넓이의 합은

$(2\sqrt{3})^2+(4\sqrt{2})^2=12+32=44\ (\mathrm{cm}^2)$

따라서 두 정사각형의 넓이의 합과 넓이가 같은 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{44}=2\sqrt{11}\ (\mathrm{cm})$이므로 둘레의 길이는

$2\sqrt{11}\times4=8\sqrt{11}\ (\mathrm{cm})$ 답 ②

268 전략 먼저 $\overline{\mathrm{OQ}}$의 길이를 구한 후 직각삼각형 POQ에서 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이를 구한다.

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{3}$ cm이고 $\overline{\mathrm{OQ}}:\overline{\mathrm{QA}}=2:1$이므로

$$\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{OA}}=\frac{2}{3}\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\ (\mathrm{cm})$$

△POQ에서

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}\ (\mathrm{cm})$$
$$\therefore \triangle\mathrm{POQ}=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{15}}{3}=\frac{\sqrt{5}}{3}\ (\mathrm{cm}^2)$$
답 ②

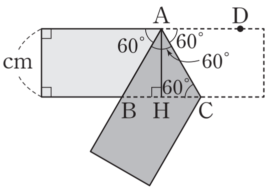
269 전략 접은 각과 엇각의 크기를 이용하여 △ABC가 어떤 삼각형인지 알아본다.

오른쪽 그림에서

$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}$ (접은 각)

$=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ-60^\circ)$

$=60^\circ$



$\overline{\mathrm{AD}}/\!/\overline{\mathrm{BC}}$이므로

$\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{CAD}=60^\circ$ (엇각)

즉 △ABC는 정삼각형이다.

점 A에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 △ABC의 한 변의 길이를 x cm라 하면 $\overline{\mathrm{BH}}=\dfrac{x}{2}$ cm이므로 △ABH에서

$$x^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+(\sqrt{6})^2,\qquad \frac{3}{4}x^2=6$$
$$x^2=8\qquad \therefore x=2\sqrt{2}\ (\because x>0)$$
$$\therefore \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{6}=2\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^2)$$
답 ④

270 전략 먼저 근호 안의 제곱인 인수를 근호 밖으로 꺼낸다.

$$4\sqrt{24}-\sqrt{80}+\sqrt{96}-3\sqrt{45}=8\sqrt{6}-4\sqrt{5}+4\sqrt{6}-9\sqrt{5}$$
$$=-13\sqrt{5}+12\sqrt{6}$$

따라서 $a=-13$, $b=12$이므로

$a-b=-13-12=-25$ 답 ①

271 전략 주어진 식의 x에 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$를 대입하여 계산한다.

$$4x-\frac{5}{x}=\frac{8}{\sqrt{3}}-\frac{5\sqrt{3}}{2}=\frac{8\sqrt{3}}{3}-\frac{5\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$
답 ①

272 전략 정사각형의 대각선의 길이를 이용하여 두 점 P, Q의 좌표를 각각 구한다.

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로 $\quad p=2-\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$이므로 $\quad q=3+2\sqrt{2}$

$$\therefore 3p+q=3(2-\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})$$
$$=6-3\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}$$
$$=9-\sqrt{2}$$
답 ④

273 전략 a, b가 유리수이고 $\sqrt{m}$이 무리수일 때, $a+b\sqrt{m}$이 유리수가 되는 조건은 $b=0$임을 이용한다.

$$(\text{주어진 식})=2\sqrt{5}+30-\frac{4a\sqrt{5}}{5}+2a$$
$$=(2a+30)+\left(2-\frac{4a}{5}\right)\sqrt{5}$$

주어진 식이 유리수가 되려면

$2-\dfrac{4a}{5}=0\qquad \therefore a=\dfrac{5}{2}$ 답 ③

274 전략 제곱근의 계산을 이용하여 주어진 부등식을 간단히 한다.

$\dfrac{\sqrt{6}}{3}(\sqrt{18}-\sqrt{6})x+12<4\sqrt{3}-2x$에서

$$(2\sqrt{3}-2)x+12<4\sqrt{3}-2x$$
$$2\sqrt{3}x<4\sqrt{3}-12$$
$$\therefore x<\frac{2\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}}=2-2\sqrt{3}$$

이때 $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$이고, $3<\sqrt{12}<4$에서 $-2<2-\sqrt{12}<-1$이므로 부등식을 만족시키는 x의 값 중 가장 큰 정수는 -2이다.

답 ③

275 전략 색칠한 부분의 둘레의 일부분을 연결하면 원 또는 정사각형의 둘레가 된다.

원의 지름의 길이가 10이므로 외접하는 정사각형의 한 변의 길이는 10이고 대각선의 길이는 $\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2}$이다.
또 내접하는 정사각형의 대각선의 길이가 10이므로 이 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하면

$x^2+x^2=10^2$, $\quad x^2=50$

$\therefore x=5\sqrt{2}\ (\because x>0)$

색칠한 부분의 둘레의 길이는 외접하는 정사각형의 두 변의 길이, 두 대각선의 길이, 내접하는 정사각형의 둘레의 길이, 원의 둘레의 길이의 합과 같으므로

$10\times2+10\sqrt{2}\times2+5\sqrt{2}\times4+2\pi\times5$

$=20+40\sqrt{2}+10\pi$

따라서 $a=20$, $b=40$, $c=10$이므로

$a+b+c=20+40+10=70$ 답 ⑤

276 전략 근호 밖의 양수는 제곱하여 근호 안으로 넣는다.

$3\sqrt{3}=\sqrt{27}$이므로

$2a+21=27 \qquad \therefore a=3$

$a\sqrt{2}=3\sqrt{2}=\sqrt{18}$이므로

$50-b=18 \qquad \therefore b=32$

$\therefore a+b=3+32=35$ 답 35

277 전략 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{BD}$의 길이를 구한 후 $\overline{DH}=\frac{1}{2}\overline{BD}$임을 이용한다.

$\overline{BD}=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$이므로

$\overline{DH}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}=3\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$

$\triangle$OHD에서

$\overline{OH}=\sqrt{9^2-(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{7}\ (\mathrm{cm})$

따라서 사각뿔의 부피는

$\frac{1}{3}\times6^2\times3\sqrt{7}=36\sqrt{7}\ (\mathrm{cm}^3)$ 답 $36\sqrt{7}\ \mathrm{cm}^3$

278 전략 $x+y$, $x-y$를 각각 구한 후 $(x+y)(x-y)$의 값을 구한다.

$x+y=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}+\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}=\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

$x-y=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}-\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}=\frac{2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$

$\therefore (x+y)(x-y)=3\sqrt{3}\times\sqrt{6}=9\sqrt{2}$ 답 $9\sqrt{2}$

279 전략 $\sqrt{72}$를 $a\sqrt{b}$ (a, b는 자연수)의 꼴로 나타낸 후 $\sqrt{x}$와 $\sqrt{y}$도 $k\sqrt{b}$ (k는 자연수)의 꼴임을 이용한다.

$\sqrt{72}=6\sqrt{2}$이므로 주어진 등식은

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=6\sqrt{2}$ …… ㉠

이때 x, y는 자연수이고 $6\sqrt{2}$는 무리수이므로 ㉠을 만족시키는 $\sqrt{x}$와 $\sqrt{y}$는 모두 $k\sqrt{2}$ (k는 자연수)의 꼴이어야 한다.

$\sqrt{x}=p\sqrt{2}$, $\sqrt{y}=q\sqrt{2}$ (p, q는 자연수)라 하고 이를 ㉠에 대입하면

$p\sqrt{2}+q\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

$\therefore p+q=6$

(i) $p=1$, $q=5$ 또는 $p=5$, $q=1$일 때,
$\sqrt{x}=\sqrt{2}$, $\sqrt{y}=5\sqrt{2}$ 또는 $\sqrt{x}=5\sqrt{2}$, $\sqrt{y}=\sqrt{2}$이므로
$x+y=2+50=52$

(ii) $p=2$, $q=4$ 또는 $p=4$, $q=2$일 때,
$\sqrt{x}=2\sqrt{2}$, $\sqrt{y}=4\sqrt{2}$ 또는 $\sqrt{x}=4\sqrt{2}$, $\sqrt{y}=2\sqrt{2}$이므로
$x+y=8+32=40$

(iii) $p=3$, $q=3$일 때,
$\sqrt{x}=3\sqrt{2}$, $\sqrt{y}=3\sqrt{2}$이므로
$x+y=18+18=36$

이상에서 $x+y$의 값 중 가장 큰 값은 52이다. 답 52

280 전략 주어진 조건을 이용하여 근호를 포함한 식으로 나타낸다.

$(3\diamond a)-(a\diamond5)=b$에서

$(3+a\sqrt{2})-(a+5\sqrt{2})=b$

$(3-a)+(a-5)\sqrt{2}=b$

a, b는 유리수이므로

$3-a=b$, $a-5=0$

$\therefore a=5$, $b=-2$

$\therefore a\diamond b\sqrt{2}=5\diamond(-2\sqrt{2})$

$=5+(-2\sqrt{2})\times\sqrt{2}$

$=5-4=1$ 답 1

281 전략 제곱근의 덧셈과 뺄셈을 이용하여 네 사분원의 반지름의 길이를 각각 구한다.

사분원 A의 반지름의 길이는 7이므로 호의 길이는

$2\pi\times7\times\frac{1}{4}=\frac{7}{2}\pi$

사분원 B의 반지름의 길이는 $(10+\sqrt{2})-7=3+\sqrt{2}$이므로 호의 길이는

$2\pi\times(3+\sqrt{2})\times\frac{1}{4}=\frac{3+\sqrt{2}}{2}\pi$

사분원 C의 반지름의 길이는 $7-(3+\sqrt{2})=4-\sqrt{2}$이므로 호의 길이는

$2\pi\times(4-\sqrt{2})\times\frac{1}{4}=\frac{4-\sqrt{2}}{2}\pi$

사분원 D의 반지름의 길이는 $(3+\sqrt{2})-(4-\sqrt{2})=2\sqrt{2}-1$이므로 호의 길이는

$2\pi\times(2\sqrt{2}-1)\times\frac{1}{4}=\frac{2\sqrt{2}-1}{2}\pi$

따라서 네 사분원의 호의 길이의 합은

$\frac{7}{2}\pi+\frac{3+\sqrt{2}}{2}\pi+\frac{4-\sqrt{2}}{2}\pi+\frac{2\sqrt{2}-1}{2}\pi$

$=\frac{13+2\sqrt{2}}{2}\pi$ 답 $\frac{13+2\sqrt{2}}{2}\pi$

282 전략 x가 y의 a배 ➜ $x=ay$에서 $a=\frac{x}{y}$임을 이용하여 계산한다.

$a=\frac{\sqrt{1.8}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{18}{10}\times\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$ … 1단계

$b=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{0.002}}=\sqrt{5\div\frac{2}{1000}}=\sqrt{5\times\frac{1000}{2}}$

$=\sqrt{2500}=50$ … 2단계

$\therefore ab=\frac{3}{5}\times 50=30$ … 3단계

답 30

단계	채점 요소	배점
1	a의 값 구하기	2점
2	b의 값 구하기	2점
3	ab의 값 구하기	1점

다른 풀이 $ab=\frac{\sqrt{1.8}}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{0.002}}=\sqrt{\frac{18}{10}\times\frac{1000}{2}}$

$=\sqrt{900}=30$

283 전략 주어진 조건을 이용하여 두 상자의 무게의 합을 식으로 나타낸다.

두 상자의 무게의 합을 식으로 나타내면

$(4\sqrt{5}-5)x+(\sqrt{5}+2)y$

$=4x\sqrt{5}-5x+y\sqrt{5}+2y$

$=(-5x+2y)+(4x+y)\sqrt{5}$ … 1단계

즉 $(-5x+2y)+(4x+y)\sqrt{5}=17\sqrt{5}-5$이므로

$-5x+2y=-5,\ 4x+y=17$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=3,\ y=5$ … 2단계

$\therefore x+y=3+5=8$ … 3단계

답 8

단계	채점 요소	배점
1	두 상자의 무게의 합을 식으로 나타내기	2점
2	x, y의 값 구하기	1점
3	$x+y$의 값 구하기	1점

284 전략 분모에 근호를 포함한 무리수가 있으면 분모를 유리화한 후 근호 안의 수가 같은 것끼리 모아서 계산한다.

$A=\frac{3\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}}=3-2\sqrt{3}$ … 1단계

$B=\sqrt{2}(3-2\sqrt{3})-2\sqrt{6}$

$=3\sqrt{2}-2\sqrt{6}-2\sqrt{6}$

$=3\sqrt{2}-4\sqrt{6}$ … 2단계

$C=2\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

$=2\sqrt{2}+\sqrt{6}-4\sqrt{2}$

$=-2\sqrt{2}+\sqrt{6}$ … 3단계

답 $-2\sqrt{2}+\sqrt{6}$

단계	채점 요소	배점
1	A의 값 구하기	1점
2	B의 값 구하기	2점
3	C의 값 구하기	2점

285 전략 무리수 A의 소수 부분은 $A-(A$의 정수 부분)임을 이용한다. (단, $0<$(소수 부분)<1)

$4<\sqrt{24}<5$이므로 $1<\sqrt{24}-3<2$

즉 $2\sqrt{6}-3$의 정수 부분은 1이므로 소수 부분은

$(2\sqrt{6}-3)-1=2\sqrt{6}-4$

$\therefore a=2\sqrt{6}-4$ … 1단계

$7<\sqrt{54}<8$이므로 $8<\sqrt{54}+1<9$

즉 $3\sqrt{6}+1$의 정수 부분은 8이므로 소수 부분은

$(3\sqrt{6}+1)-8=3\sqrt{6}-7$

$\therefore b=3\sqrt{6}-7$ … 2단계

$\therefore a-b=(2\sqrt{6}-4)-(3\sqrt{6}-7)$

$=2\sqrt{6}-4-3\sqrt{6}+7$

$=3-\sqrt{6}=\sqrt{9}-\sqrt{6}>0$

따라서 $a-b>0$이므로 $a>b$ … 3단계

답 $a>b$

단계	채점 요소	배점
1	a의 값 구하기	2점
2	b의 값 구하기	2점
3	a, b의 대소 비교하기	2점

04 다항식의 곱셈

셀프 CHECK

본책 64쪽

A (3) $(x+y)(2x-y+1)=2x^2-xy+x+2xy-y^2+y$

$=2x^2+xy-y^2+x+y$

답 (1) $ab+5a-4b-20$
(2) $2ac-2ad+bc-bd$
(3) $2x^2+xy-y^2+x+y$

B (1) $(x+6)^2=x^2+2\times x\times 6+6^2=x^2+12x+36$

(2) $(2a-b)^2=(2a)^2-2\times 2a\times b+b^2=4a^2-4ab+b^2$

(3) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=x^2-\frac{1}{4}$

(4) $(x+8y)(x-y)=x^2+(8y-y)x-8y^2$

$=x^2+7xy-8y^2$

(5) $(a-3b)(5a-2b)=5a^2+(-2b-15b)a+6b^2$

$=5a^2-17ab+6b^2$

답 (1) $x^2+12x+36$ (2) $4a^2-4ab+b^2$ (3) $x^2-\frac{1}{4}$
(4) $x^2+7xy-8y^2$ (5) $5a^2-17ab+6b^2$

C (1) $201^2=(200+1)^2=200^2+2\times 200\times 1+1^2$

$=40000+400+1=40401$

(2) $10.4\times 9.6=(10+0.4)\times(10-0.4)=10^2-0.4^2$

$=100-0.16=99.84$

(3) $98\times 103=(100-2)\times(100+3)$

$=100^2+(-2+3)\times 100-6$

$=10000+100-6$

$=10094$

답 (1) 40401 (2) 99.84 (3) 10094

D (1) $\dfrac{3}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}=\dfrac{3(\sqrt{10}+\sqrt{7})}{(\sqrt{10}-\sqrt{7})(\sqrt{10}+\sqrt{7})}$

$=\dfrac{3(\sqrt{10}+\sqrt{7})}{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{7})^2}=\sqrt{10}+\sqrt{7}$

(2) $\dfrac{3-\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}=\dfrac{(3-\sqrt{6})^2}{(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})}=\dfrac{3^2-2\times 3\times\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2}{3^2-(\sqrt{6})^2}$

$=\dfrac{15-6\sqrt{6}}{3}=5-2\sqrt{6}$

답 (1) $\sqrt{10}+\sqrt{7}$ (2) $5-2\sqrt{6}$

E (1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=7^2-2\times 3=43$

(2) $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=7^2-4\times 3=37$

답 (1) 43 (2) 37

내신 유형 다지기

본책 65~75쪽

유형 055 (다항식)×(다항식)의 전개

본책 65쪽

분배법칙을 이용하여 식을 전개한 다음 동류항끼리 모아서 계산한다.

➜ $(a+b)(x+y+z)=ax+ay+az+bx+by+bz$

286 $(4x+1)(5-3y)=-12xy+20x-3y+5$이므로

$a=-12,\ b=20,\ c=-3$

$\therefore a+b+c=-12+20+(-3)=5$

답 ③

287 $(x-4y)(Ax+By)$

$=Ax^2+Bxy-4Axy-4By^2$

$=Ax^2+(B-4A)xy-4By^2$

따라서 $A=-3,\ B-4A=C,\ -4B=-8$이므로

$A=-3,\ B=2,\ C=14$

$\therefore A-B+C=-3-2+14=9$

답 9

288 $(2a-1)(a+b-8)-(a+3)(b+2)$

$=(2a^2+2ab-16a-a-b+8)-(ab+2a+3b+6)$

$=2a^2+ab-19a-4b+2$

답 $2a^2+ab-19a-4b+2$

유형 056 전개식에서 특정한 항의 계수 구하기

본책 65쪽

다항식의 곱셈에서 특정한 항의 계수를 구할 때에는 특정한 항이 나오는 부분만 전개한다.

예 $(x-y)(2x+3y-4)$의 전개식에서 xy항은

$(x-y)(2x+3y-4)$ ➜ $3xy-2xy=xy$

따라서 xy의 계수는 1이다.

289 주어진 식의 전개식에서 x항은

$-3\times 2x=-6x$

y항은 $4y\times 1+(-3)\times(-2y)=10y$

따라서 x의 계수는 -6, y의 계수는 10이므로 구하는 합은

$-6+10=4$

답 ③

290 주어진 식의 전개식에서 y^2항은

$ay\times(-5y)=-5ay^2$

xy항은 $2x\times(-5y)+ay\times x=(-10+a)xy$

따라서 y^2의 계수는 $-5a$, xy의 계수는 $-10+a$이고 그 합이 2이므로

$-5a+(-10+a)=2$

$-4a=12 \quad \therefore a=-3$

답 -3

291 주어진 식의 전개식에서 xy항은

$ax\times 2y+y\times(-x)=(2a-1)xy$

이므로 $2a-1=7 \quad \therefore a=4$ … 1단계

상수항은

$-3\times b=-3b$

이므로 $-3b=21 \quad \therefore b=-7$ … 2단계

따라서 x항은

$4x\times(-7)+(-3)\times(-x)=-25x$

이므로 x의 계수는 -25이다. … 3단계

답 -25

단계	채점 요소	비율
1	a의 값 구하기	30 %
2	b의 값 구하기	30 %
3	x의 계수 구하기	40 %

유형 057 $(a+b)^2$, $(a-b)^2$의 전개
본책 66쪽

$(a+b)^2=a^2+\underbrace{2ab}_{\text{곱의 2배}}+b^2 \qquad (a-b)^2=a^2-\underbrace{2ab}_{\text{곱의 2배}}+b^2$

292 ① $(2x+y)^2=4x^2+4xy+y^2$

② $(-5x+1)^2=25x^2-10x+1$

⑤ $\left(\frac{1}{2}x-2\right)^2=\frac{1}{4}x^2-2x+4$

따라서 옳은 것은 ③, ④이다.

답 ③, ④

293 $\left(\frac{1}{4}x+A\right)^2=\frac{1}{16}x^2+\frac{A}{2}x+A^2$이므로

$\frac{A}{2}=-2,\ A^2=B$

따라서 $A=-4,\ B=16$이므로

$A+B=-4+16=12$

답 12

294 ㄱ, ㄹ. $(x+y)^2=(-x-y)^2=x^2+2xy+y^2$

ㄴ, ㅁ. $(x-y)^2=(-x+y)^2=x^2-2xy+y^2$

ㄷ. $-(x+y)^2=-x^2-2xy-y^2$

ㅂ. $-(y-x)^2=-x^2+2xy-y^2$

이상에서 전개한 식이 같은 것끼리 짝 지은 것은 ㄱ, ㄹ과 ㄴ, ㅁ이다.

답 ②, ④

만점 공략 노트

전개식이 같은 다항식

① $(a+b)^2=\{-(a+b)\}^2=(-a-b)^2$

② $(a-b)^2=\{-(a-b)\}^2=(-a+b)^2$

295 $(ax-3b)^2=a^2x^2-6abx+9b^2$이므로

$a^2=16,\ -6ab=-12$

$\therefore a=4,\ b=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-4,\ b=-\frac{1}{2}$ … 1단계

따라서 상수항은

$9b^2=9\times\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$ … 2단계

답 $\frac{9}{4}$

단계	채점 요소	비율
1	a, b의 값 구하기	60 %
2	상수항 구하기	40 %

유형 058 $(a+b)(a-b)$의 전개
본책 66쪽

$\underbrace{(a+b)}_{\text{합}}\underbrace{(a-b)}_{\text{차}}=\underbrace{a^2-b^2}_{\text{제곱의 차}}$

참고 $(-a+b)(a+b)=(b+a)(b-a)=b^2-a^2$

$(-a-b)(-a+b)=(-a+b)(-a-b)=a^2-b^2$

296 ③ $(2x+y)(y-2x)=(y+2x)(y-2x)$

$=y^2-4x^2$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

297 $\left(ax+\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}-ax\right)=\left(\frac{1}{6}+ax\right)\left(\frac{1}{6}-ax\right)$

$=\frac{1}{36}-a^2x^2$

이므로 $-a^2=-\frac{25}{9},\quad a^2=\frac{25}{9}$

이때 $a>0$이므로 $a=\frac{5}{3}$

답 $\frac{5}{3}$

298 $(x-y)(-x-y)-\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)$

$=(-y+x)(-y-x)-\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)$

$=(y^2-x^2)-\left(\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\right)$

$=-\frac{5}{4}x^2+\frac{10}{9}y^2$

답 ③

299 $(x-2)(x+2)(x^2+4)(x^4+16)$

$=(x^2-4)(x^2+4)(x^4+16)$

$=(x^4-16)(x^4+16)$

$=x^8-256$ … 1단계

따라서 $a=8,\ b=-256$이므로 … 2단계

$a-b=8-(-256)=264$ … 3단계

답 264

단계	채점 요소	비율
1	주어진 식 전개하기	40 %
2	a, b의 값 구하기	40 %
3	$a-b$의 값 구하기	20 %

유형 059 $(x+a)(x+b)$의 전개

본책 67쪽

합

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

곱

300 $(x+2y)(x-4y)=x^2-2xy-8y^2$이므로

$a=-2$, $b=-8$

$\therefore ab=-2\times(-8)=16$

답 16

301 $(x+a)\left(x-\frac{3}{2}\right)=x^2+\left(a-\frac{3}{2}\right)x-\frac{3}{2}a$

이때 x의 계수와 상수항이 같으므로

$a-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}a$, $\quad \frac{5}{2}a=\frac{3}{2}$

$\therefore a=\frac{3}{5}$

답 ②

302 $(x+A)(x+B)=x^2+(A+B)x+AB$이므로

$A+B=C$, $AB=12$

$AB=12$를 만족시키는 정수 A, B의 순서쌍 (A, B)는

$(1, 12)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$, $(12, 1)$,
$(-1, -12)$, $(-2, -6)$, $(-3, -4)$, $(-4, -3)$,
$(-6, -2)$, $(-12, -1)$

따라서 C의 값은 ±13, ±8, ±7이므로 C의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

답 ③

유형 060 $(ax+b)(cx+d)$의 전개

본책 67쪽

곱

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

곱

303 $(5x-6)(ax+b)=5ax^2+(5b-6a)x-6b$이므로

$5a=15$, $5b-6a=c$, $-6b=6$

따라서 $a=3$, $b=-1$, $c=-23$이므로

$a+b+c=3+(-1)+(-23)=-21$

답 ①

304 ① $(x-6)(2x+5)=2x^2-7x-30$

② $(2x+3)(3x-8)=6x^2-7x-24$

③ $(3x+7)(5x-14)=15x^2-7x-98$

④ $\left(x-\frac{4}{3}\right)(6x-1)=6x^2-9x+\frac{4}{3}$

⑤ $\left(\frac{1}{2}x-1\right)(4x-6)=2x^2-7x+6$

따라서 x의 계수가 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다.

답 ④

305 $(3x+a)(2x+b)=6x^2+(2a+3b)x+ab$이므로

$2a+3b=15$, $ab=c$

$2a+3b=15$를 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(6, 1)$, $(3, 3)$

따라서 c의 값은 6, 9이므로 가장 큰 수는 9이다.

답 9

유형 061 곱셈 공식 종합

본책 68쪽

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
(2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
(3) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
(4) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
(5) $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

306 ㄱ. $(4x-3)^2=16x^2-24x+9$

ㄹ. $(-2x-7y)^2=4x^2+28xy+49y^2$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㅁ이다.

답 ③

307 ① $(x+2)^2=x^2+4x+4$이므로 $\quad A=4$

② $(2x-A)^2=4x^2-4Ax+A^2$이므로

$-4A=12$, $A^2=9 \quad \therefore A=-3$

③ $(4x+1)(4x-1)=16x^2-1$이므로 $\quad A=-1$

④ $(x+A)(x+5)=x^2+(A+5)x+5A$이므로

$A+5=8$, $5A=15 \quad \therefore A=3$

⑤ $(3x-4)(x+4)=3x^2+8x-16$이므로 $\quad A=8$

따라서 A의 값이 가장 큰 것은 ⑤이다.

답 ⑤

308 $(3x-1)(2x-3)=6x^2-11x+3$

$(1+3x)(1-3x)=1-9x^2$

$(x+4)(x-6)=x^2-2x-24$

$\therefore A+B+C$

$=(6x^2-11x+3)+(1-9x^2)+(x^2-2x-24)$

$=-2x^2-13x-20$

답 $-2x^2-13x-20$

309 $(1+2x)^2-(x-6)(3x+a)$

$=(1+4x+4x^2)-\{3x^2+(a-18)x-6a\}$

$=x^2+(22-a)x+1+6a$ ··· 1단계

x의 계수가 18이므로

$22-a=18 \quad \therefore a=4$ ··· 2단계

따라서 상수항은

$1+6a=1+6\times4=25$ … 3단계

답 25

단계	채점 요소	비율
1	주어진 식 계산하기	30 %
2	a의 값 구하기	30 %
3	상수항 구하기	40 %

유형 062 계수 또는 상수항을 잘못 보고 전개한 경우

본책 69쪽

계수 또는 상수항을 잘못 보고 전개한 경우

➜ 잘못 본 수 대신에 문자를 대입하여 식을 전개한다.

예 $(x+2)(x+4)$에서 2를 k로 잘못 보고 전개하였다.

➜ 2 대신 k를 대입하여 $(x+k)(x+4)$로 놓고 전개한다.

310 $(2x+11)(x+A)=2x^2+(2A+11)x+11A$이므로

$2A+11=3,\ 11A=B$

$\therefore A=-4,\ B=-44$

$(Cx+11)(x-5)=Cx^2+(-5C+11)x-55$이므로

$C=6,\ -5C+11=D$

$\therefore C=6,\ D=-19$

$\therefore A-B+C-D=-4-(-44)+6-(-19)$

$=65$

답 65

311 $(6x+a)(3x+2)=18x^2+(12+3a)x+2a$이므로

$12+3a=33,\ 2a=14$

$\therefore a=7$

바르게 곱하여 전개한 식은

$(6x+7)(x+3)=6x^2+25x+21$

따라서 x의 계수는 25, 상수항은 21이므로 구하는 합은

$25+21=46$

답 46

312 잘못 보고 전개한 식은

$(ax+2)(x-0.6)=ax^2+\left(-\frac{3}{5}a+2\right)x-\frac{6}{5}$

바르게 보고 전개한 식은

$(ax+2)(x-0.\dot{6})=ax^2+\left(-\frac{2}{3}a+2\right)x-\frac{4}{3}$ … 1단계

즉 잘못 보고 전개한 식의 x의 계수는 $-\frac{3}{5}a+2$이고 바르게 보고 전개한 식의 x의 계수는 $-\frac{2}{3}a+2$이므로

$-\frac{3}{5}a+2=-\frac{2}{3}a+2+\frac{1}{6}$ … 2단계

$\frac{1}{15}a=\frac{1}{6}\qquad\therefore a=\frac{5}{2}$ … 3단계

답 $\frac{5}{2}$

단계	채점 요소	비율
1	잘못 보고 전개한 식과 바르게 보고 전개한 식 각각 구하기	40 %
2	a에 대한 방정식 세우기	40 %
3	a의 값 구하기	20 %

유형 063 곱셈 공식의 도형에의 활용 (1)

본책 69쪽

곱셈 공식을 이용하여 직사각형의 넓이를 구할 때

❶ 가로, 세로의 길이를 문자를 사용하여 나타낸다.

❷ 직사각형의 넓이를 구하는 식을 세운 후 곱셈 공식을 이용하여 전개한다.

313 $4\times2+\{(5x-2)-4\}\{(4x+5)-2\}$

$=8+(5x-6)(4x+3)$

$=20x^2-9x-10$

답 $20x^2-9x-10$

314 $2\{(2x-1)(x+6)+(x+6)(2x+1)$

$+(2x-1)(2x+1)\}$

$=2\{(2x^2+11x-6)+(2x^2+13x+6)+(4x^2-1)\}$

$=2(8x^2+24x-1)$

$=16x^2+48x-2$

답 $16x^2+48x-2$

315 $\triangle$ABC에서

$\overline{BC}^2=(2x+4)^2+(6x-4)^2$

$=(4x^2+16x+16)+(36x^2-48x+16)$

$=40x^2-32x+32$

반원의 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{BC}$이므로 반원의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\overline{BC}\right)^2=\frac{\pi}{8}\times\overline{BC}^2$

$=\frac{\pi}{8}\times(40x^2-32x+32)$

$=(5x^2-4x+4)\pi$

따라서 $a=5,\ b=-4,\ c=4$이므로

$abc=5\times(-4)\times4=-80$

답 -80

유형 064 곱셈 공식의 도형에의 활용 (2)

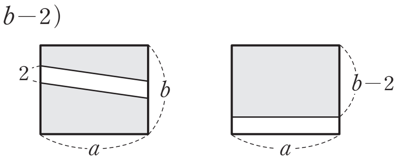
본책 70쪽

폭이 일정한 길을 제외한 땅의 넓이를 구할 때

➜ 길을 가장자리로 이동하여 떨어져 있는 땅을 붙여서 직사각형 모양으로 만든 후 넓이를 구한다.

예 [그림 1]의 색칠한 부분의 넓이는 [그림 2]에서

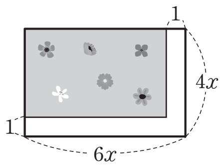
$a(b-2)$



[그림 1] [그림 2]

04 다항식의 곱셈

316 오른쪽 그림과 같이 폭이 일정한 길을 가장자리로 이동하면 길을 제외한 화단의 넓이는

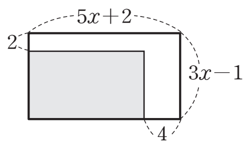


$(6x-1)(4x-1)$

$=24x^2-10x+1$

답 $24x^2-10x+1$

317 오른쪽 그림과 같이 폭이 일정한 길을 가장자리로 이동하면 길을 제외한 땅의 넓이는



$\{(5x+2)-4\}\{(3x-1)-2\}$

$=(5x-2)(3x-3)$

$=15x^2-21x+6$ ⋯ 1단계

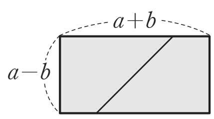
따라서 $a=15$, $b=-21$, $c=6$이므로 ⋯ 2단계

$a+b+c=15+(-21)+6=0$ ⋯ 3단계

답 0

단계	채점 요소	비율
1	땅의 넓이 구하기	60 %
2	a, b, c의 값 구하기	30 %
3	$a+b+c$의 값 구하기	10 %

318 새로운 직사각형의 가로의 길이는 $a+b$, 세로의 길이는 $a-b$이므로 구하는 넓이는



$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

답 a^2-b^2

유형 065 공통부분이 있는 식의 전개

본책 70쪽

전개해야 하는 식에 공통부분이 있으면

❶ 공통부분을 한 문자로 놓는다.

❷ 곱셈 공식을 이용하여 전개한다.

❸ ❷의 식의 문자에 원래의 식을 대입하여 정리한다.

예 $(x+y+1)(x+y-1)$

$=(A+1)(A-1)$ ← $x+y$를 A로 놓는다.

$=A^2-1$ ← 전개한다.

$=(x+y)^2-1$ ← A에 $x+y$를 대입한다.

$=x^2+2xy+y^2-1$ ← 전개한다.

319 $x+2y=A$로 놓으면

$(x+2y+5)(x+2y-7)$

$=(A+5)(A-7)$

$=A^2-2A-35$

$=(x+2y)^2-2(x+2y)-35$

$=x^2+4xy+4y^2-2x-4y-35$

따라서 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합은

$1+4+4+(-2)+(-4)+(-35)=-32$

답 -32

만점 공략 노트

다항식에서 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합은 다항식의 모든 문자에 1을 대입한 것과 같다.

따라서 $(x+2y+5)(x+2y-7)$을 전개한 식에서 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합은 $(1+2+5)\times(1+2-7)=-32$와 같이 구할 수도 있다.

320 $3x-y=A$로 놓으면

$(3x-y-2)^2=(A-\boxed{2})^2=A^2-4A+4$

$=(3x-y)^2-4(\boxed{3x-y})+4$

$=\boxed{9x^2-6xy+y^2}-12x+4y+4$

답 2, $3x-y$, $9x^2-6xy+y^2$

321 $a^2+1=A$로 놓으면

$(a^2+a+1)(a^2-a+1)=(A+a)(A-a)$

$=A^2-a^2$

$=(a^2+1)^2-a^2$

$=a^4+a^2+1$

따라서 주어진 식은 $(a^4+a^2+1)(a^4-a^2+1)$이므로

$a^4+1=B$로 놓으면

$(a^4+a^2+1)(a^4-a^2+1)=(B+a^2)(B-a^2)$

$=B^2-a^4$

$=(a^4+1)^2-a^4$

$=a^8+a^4+1$

답 a^8+a^4+1

322 $b-c-2=A$로 놓으면

$(a+b-c-2)(a-b+c+2)=(a+A)(a-A)$

$=a^2-A^2$

$=a^2-(b-c-2)^2$

이때 $(b-c-2)^2$에서 $b-c=B$로 놓으면

$(b-c-2)^2=(B-2)^2$

$=B^2-4B+4$

$=(b-c)^2-4(b-c)+4$

$=b^2-2bc+c^2-4b+4c+4$

$\therefore$ (주어진 식)$=a^2-(b^2-2bc+c^2-4b+4c+4)$

$=a^2-b^2-c^2+2bc+4b-4c-4$

답 $a^2-b^2-c^2+2bc+4b-4c-4$

유형 066 ( )( )( )( )의 꼴의 전개

본책 71쪽

❶ 공통부분이 생기도록 두 개씩 짝을 지어 전개한다.

➜ 두 일차식의 상수항의 합이 같아지도록 두 개씩 짝을 짓는다.

❷ 공통부분을 한 문자로 놓고 전개한다.

❸ ❷의 식의 문자에 원래의 식을 대입하여 정리한다.

323 (주어진 식)$=\{(x-2)(x+4)\}\{(x-1)(x+3)\}$
$=(x^2+2x-8)(x^2+2x-3)$
$x^2+2x=A$로 놓으면
(주어진 식)$=(A-8)(A-3)$
$=A^2-11A+24$
$=(x^2+2x)^2-11(x^2+2x)+24$
$=x^4+4x^3-7x^2-22x+24$
답 $x^4+4x^3-7x^2-22x+24$

324 (주어진 식)$=\{(x+2)(x-7)\}\{(x-1)(x-4)\}$
$=(x^2-5x-14)(x^2-5x+4)$
$x^2-5x=A$로 놓으면
(주어진 식)$=(A-14)(A+4)$
$=A^2-10A-56$
$=(x^2-5x)^2-10(x^2-5x)-56$
$=x^4-10x^3+15x^2+50x-56$ ··· 1단계
따라서 x^2의 계수는 15, x의 계수는 50이므로
$a=15$, $b=50$ ··· 2단계
$\therefore a+b=15+50=65$ ··· 3단계
답 65

단계	채점 요소	비율
1	주어진 식 전개하기	60 %
2	a, b의 값 구하기	30 %
3	$a+b$의 값 구하기	10 %

325 $A=x^2+6x$이므로
$(x+1)(x+3)^2(x+5)$
$=\{(x+1)(x+5)\}(x+3)^2$
$=(x^2+6x+5)(x^2+6x+9)$
$=(A+5)(A+9)$
$=A^2+14A+45$
답 ③

유형 067 곱셈 공식을 이용한 수의 계산 본책 71쪽

(1) 수의 제곱의 계산
➜ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
을 이용한다.
(2) 두 수의 곱의 계산
➜ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,
$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
를 이용한다.

326 $14.8\times15.2=(15-0.2)(15+0.2)$이므로
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
을 이용하는 것이 가장 편리하다.
답 ③

327 $2027=x$라 하면
$$\frac{27^2-9}{2027^2-2023\times2031}=\frac{27^2-3^2}{x^2-(x-4)(x+4)}$$
$$=\frac{(27+3)(27-3)}{x^2-(x^2-16)}$$
$$=\frac{30\times24}{16}=45$$
답 45

328 주어진 등식의 양변에 $3-1(=2)$을 곱하면
$(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)+1=3^n$
이므로
(좌변)$=(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)+1$
$=(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)+1$
$=(3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)+1$
$=(3^8-1)(3^8+1)+1$
$=3^{16}-1+1=3^{16}$
$\therefore n=16$
답 16

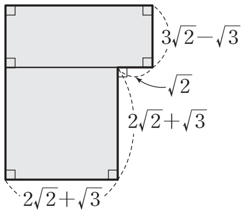
329 $100=x$라 하면
$201^2+407\times393$
$=(2\times100+1)^2+(4\times100+7)(4\times100-7)$
$=(2x+1)^2+(4x+7)(4x-7)$
$=20x^2+4x-48$
$=20\times100^2+4\times100-48$
$=2\times10^5+4\times10^2-48$
따라서 $a=2$, $b=4$이므로
$ab=2\times4=8$
답 8

유형 068 곱셈 공식을 이용한 근호를 포함한 식의 계산 본책 72쪽

제곱근을 문자로 생각하고 곱셈 공식을 이용한다.
(1) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+2\sqrt{ab}+b$
(2) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a-2\sqrt{ab}+b$
(3) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$
(4) $(\sqrt{a}+b)(\sqrt{a}+c)=a+(b+c)\sqrt{a}+bc$

330 $A=(3\sqrt{5}-2)^2$
$=(3\sqrt{5})^2-2\times3\sqrt{5}\times2+2^2$
$=45-12\sqrt{5}+4$
$=49-12\sqrt{5}$
$B=(1+\sqrt{5})^2$
$=1^2+2\times1\times\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2$
$=1+2\sqrt{5}+5$
$=6+2\sqrt{5}$
$\therefore A+6B=(49-12\sqrt{5})+6(6+2\sqrt{5})$
$=49-12\sqrt{5}+36+12\sqrt{5}$
$=85$
답 85

331 오른쪽 그림에서 도형의 넓이는



$$\begin{aligned}&\{(2\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{2}\}(3\sqrt{2}-\sqrt{3})\\&\quad+(2\sqrt{2}+\sqrt{3})^2\\&=(3\sqrt{2}+\sqrt{3})(3\sqrt{2}-\sqrt{3})\\&\quad+(2\sqrt{2}+\sqrt{3})^2\\&=(18-3)+(8+4\sqrt{6}+3)\\&=26+4\sqrt{6}\end{aligned}$$

답 $26+4\sqrt{6}$

332 (좌변)$=(a-\sqrt{10})(5-2\sqrt{10})$

$=5a+(-2a-5)\sqrt{10}+20$

$=(5a+20)+(-2a-5)\sqrt{10}$ ··· 1단계

유리수가 되려면

$-2a-5=0 \quad \therefore a=-\dfrac{5}{2}$ ··· 2단계

$\therefore b=5a+20=5\times\left(-\dfrac{5}{2}\right)+20=\dfrac{15}{2}$ ··· 3단계

$\therefore a+b=-\dfrac{5}{2}+\dfrac{15}{2}=5$ ··· 4단계

답 5

단계	채점 요소	비율
1	주어진 식의 좌변 전개하기	40 %
2	a의 값 구하기	30 %
3	b의 값 구하기	20 %
4	$a+b$의 값 구하기	10 %

333 $(3\sqrt{3}+2\sqrt{7})^{99}(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})^{100}$

$=\{(3\sqrt{3}+2\sqrt{7})(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})\}^{99}(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})$

$=(27-28)^{99}(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})$

$=-(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})$

$=-3\sqrt{3}+2\sqrt{7}$

따라서 $a=-3$, $b=2$이므로

$a-b=-3-2=-5$

답 ①

334 ① $A=(\sqrt{6}-3)^2=6-6\sqrt{6}+9=15-6\sqrt{6}$

② $B=(\sqrt{7}-3)(\sqrt{7}+2)=7+(-3+2)\sqrt{7}-6=1-\sqrt{7}$

③ $C=(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})=6+(3-2)\sqrt{6}-6=\sqrt{6}$

즉 C는 무리수이다.

④ $D=(2-\sqrt{2})(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)(2+\sqrt{2})$

$=\{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})\}\{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)\}$

$=(4-2)(5-4)=2$

즉 D는 유리수이다.

⑤ A, C, D는 양수이고 B는 음수이므로 A, C, D 중 가장 큰 수가 네 수 중 가장 큰 수이다.

$A-D=(15-6\sqrt{6})-2=13-6\sqrt{6}=\sqrt{169}-\sqrt{216}<0$이므로

$A<D$

$2<\sqrt{6}$이므로

$D<C$

$\therefore A<D<C$

즉 가장 큰 수는 C이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

유형 069 곱셈 공식을 이용한 분모의 유리화

본책 72쪽

분모가 2개의 항으로 되어 있는 무리수일 때에는 곱셈 공식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 이용하여 분모를 유리화한다.

335 $\dfrac{4}{7-3\sqrt{5}}+\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}$

$=\dfrac{4(7+3\sqrt{5})}{(7-3\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}+\dfrac{(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}$

$=\dfrac{4(7+3\sqrt{5})}{49-45}+\dfrac{5+\sqrt{5}-6}{5-4}$

$=7+3\sqrt{5}-1+\sqrt{5}$

$=6+4\sqrt{5}$

따라서 $a=6$, $b=4$이므로

$a+b=6+4=10$

답 ④

336 $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{\sqrt{15}+\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{\sqrt{15}-\sqrt{5}}$

$=\dfrac{(\sqrt{15}-\sqrt{5})^2}{(\sqrt{15}+\sqrt{5})(\sqrt{15}-\sqrt{5})}+\dfrac{(\sqrt{15}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{15}-\sqrt{5})(\sqrt{15}+\sqrt{5})}$

$=\dfrac{15-2\sqrt{75}+5}{15-5}+\dfrac{15+2\sqrt{75}+5}{15-5}$

$=\dfrac{20-10\sqrt{3}}{10}+\dfrac{20+10\sqrt{3}}{10}$

$=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$

답 4

337 $x=\dfrac{2}{3\sqrt{3}-5}=\dfrac{2(3\sqrt{3}+5)}{(3\sqrt{3}-5)(3\sqrt{3}+5)}$

$=\dfrac{2(3\sqrt{3}+5)}{27-25}=3\sqrt{3}+5$

$\dfrac{9}{x+1}=\dfrac{9}{3\sqrt{3}+6}=\dfrac{3}{\sqrt{3}+2}$

$=\dfrac{3(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}=\dfrac{3(\sqrt{3}-2)}{3-4}=-3\sqrt{3}+6$

$\therefore x+\dfrac{9}{x+1}=3\sqrt{3}+5-3\sqrt{3}+6$

$=11$

답 11

338 $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$

$=\dfrac{x+2\sqrt{xy}+y}{x-y}$

이때

$x+y=(5+2\sqrt{6})+(5-2\sqrt{6})=10$,

$x-y=(5+2\sqrt{6})-(5-2\sqrt{6})=4\sqrt{6}$,

$xy=(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})=25-24=1$

이므로

$(\text{주어진 식})=\frac{10+2\times1}{4\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

339 $5<\sqrt{32}<6$, 즉 $5<4\sqrt{2}<6$이므로

$-6<-4\sqrt{2}<-5$ $\quad\therefore 3<9-4\sqrt{2}<4$ … 1단계

따라서 $a=3$, $b=(9-4\sqrt{2})-3=6-4\sqrt{2}$이므로 … 2단계

$$\frac{a+1}{b}=\frac{4}{6-4\sqrt{2}}=\frac{2}{3-2\sqrt{2}}$$
$$=\frac{2(3+2\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}$$
$$=\frac{6+4\sqrt{2}}{9-8}=6+4\sqrt{2}$$ … 3단계

답 $6+4\sqrt{2}$

단계	채점 요소	비율
1	$9-4\sqrt{2}$의 값의 범위 구하기	30 %
2	a, b의 값 구하기	20 %
3	$\frac{a+1}{b}$의 값 구하기	50 %

340 $$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}$$
$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x}-\sqrt{x+2})}$$
$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{x-(x+2)}$$
$$=\frac{-\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}{2}$$
$$\therefore \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(3)}+\frac{1}{f(5)}+\cdots+\frac{1}{f(47)}$$
$$=\frac{-\sqrt{1}+\sqrt{3}}{2}+\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}+\frac{-\sqrt{5}+\sqrt{7}}{2}$$
$$+\cdots+\frac{-\sqrt{47}+\sqrt{49}}{2}$$
$$=\frac{-\sqrt{1}+\sqrt{49}}{2}=\frac{-1+7}{2}=3$$

답 3

유형 070 $x=a+\sqrt{b}$의 꼴이 주어질 때 식의 값 구하기

본책 73쪽

$x=a+\sqrt{b}$의 꼴이 주어지고 어떤 식의 값을 구할 때에는 다음과 같이 식을 변형하여 대입한다.

➜ $x=a+\sqrt{b}$에서 $\quad x-a=\sqrt{b}$

$(x-a)^2=b$, 즉 $x^2-2ax+a^2=b$

$\therefore x^2-2ax=b-a^2$

참고 x의 값을 직접 대입하여 식의 값을 구할 수도 있다.

341 $x=2\sqrt{10}-3$에서 $\quad x+3=2\sqrt{10}$

$(x+3)^2=(2\sqrt{10})^2$, $\quad x^2+6x+9=40$

$x^2+6x=31$

$\therefore \sqrt{x^2+6x+12}=\sqrt{31+12}=\sqrt{43}$ 답 $\sqrt{43}$

다른 풀이 $x=2\sqrt{10}-3$을 $x^2+6x+12$에 대입하면

$(2\sqrt{10}-3)^2+6(2\sqrt{10}-3)+12$

$=40-12\sqrt{10}+9+12\sqrt{10}-18+12=43$

$\therefore \sqrt{x^2+6x+12}=\sqrt{43}$

342 $$\frac{4}{3-\sqrt{7}}=\frac{4(3+\sqrt{7})}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}$$
$$=\frac{4(3+\sqrt{7})}{9-7}=6+2\sqrt{7}$$

$5<\sqrt{28}<6$, 즉 $5<2\sqrt{7}<6$이므로

$11<6+2\sqrt{7}<12$

따라서 $x=(6+2\sqrt{7})-11=2\sqrt{7}-5$이므로

$x+5=2\sqrt{7}$, $\quad (x+5)^2=(2\sqrt{7})^2$

$x^2+10x+25=28$, $\quad x^2+10x=3$

$\therefore x^2+10x-4=3-4=-1$ 답 ②

343 $x=1+\sqrt{3}$에서 $\quad x-1=\sqrt{3}$

$(x-1)^2=(\sqrt{3})^2$, $\quad x^2-2x+1=3$

$x^2-2x=2$

양변에 x를 곱하면 $\quad x^3-2x^2=2x$

$\therefore x^3-2x^2-3x+4=2x-3x+4$

$=-x+4$

$=-(1+\sqrt{3})+4$

$=3-\sqrt{3}$ 답 $3-\sqrt{3}$

유형 071 곱셈 공식의 변형 (1)

본책 74쪽

두 수의 합, 차, 곱, 제곱의 합 등의 식의 값이 주어지고 새로운 식의 값을 구할 때에는 다음과 같이 곱셈 공식을 변형한 식을 이용한다.

(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(x-y)^2+2xy$

(2) $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$, $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$

344 $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

$=(2\sqrt{5})^2+4\times(-2)$

$=20-8=12$ 답 12

345 ① $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로

$19=5^2-2xy$ $\quad\therefore xy=3$

② $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2=19-2\times3=13$

③ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{5}{3}$

④ $(x-2y)(2x-y)=2x^2-5xy+2y^2$

$=2(x^2+y^2)-5xy$

$=2\times19-5\times3=23$

⑤ $(x^2-1)(y^2-1)=x^2y^2-x^2-y^2+1$

$=(xy)^2-(x^2+y^2)+1$

$=3^2-19+1=-9$

따라서 식의 값이 가장 큰 것은 ④이다. 답 ④

346 $(3a+2)(3b-2)=9ab-6a+6b-4$
$=9ab-6(a-b)-4$
$=9\times4-6(a-b)-4$
$=32-6(a-b)$ … 1단계

즉 $32-6(a-b)=20$이므로

$-6(a-b)=-12 \quad \therefore a-b=2$ … 2단계

$\therefore \dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}=\dfrac{(a-b)^2+2ab}{ab}$

$=\dfrac{2^2+2\times4}{4}=3$ … 3단계

답 3

단계	채점 요소	비율
1	$(3a+2)(3b-2)$를 간단히 하기	20 %
2	$a-b$의 값 구하기	40 %
3	$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$의 값 구하기	40 %

347 $x=\dfrac{1}{2\sqrt{2}-3}=\dfrac{2\sqrt{2}+3}{(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3)}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}+3}{8-9}=-2\sqrt{2}-3$

$y=\dfrac{1}{2\sqrt{2}+3}=\dfrac{2\sqrt{2}-3}{(2\sqrt{2}+3)(2\sqrt{2}-3)}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}-3}{8-9}=-2\sqrt{2}+3$

따라서

$x+y=(-2\sqrt{2}-3)+(-2\sqrt{2}+3)=-4\sqrt{2}$,

$xy=(-2\sqrt{2}-3)(-2\sqrt{2}+3)=8-9=-1$

이므로

$x^2+3xy+y^2=(x+y)^2+xy$

$=(-4\sqrt{2})^2+(-1)=31$

답 31

348 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$이므로

$12=4^2-2ab \quad \therefore ab=2$

$\therefore a\sqrt{\dfrac{3b}{a}}+2b\sqrt{\dfrac{12a}{b}}=\sqrt{a^2\times\dfrac{3b}{a}}+\sqrt{4b^2\times\dfrac{12a}{b}}$

$=\sqrt{3ab}+\sqrt{48ab}$

$=\sqrt{3\times2}+\sqrt{48\times2}$

$=\sqrt{6}+4\sqrt{6}=5\sqrt{6}$

답 ④

유형 072 곱셈 공식의 변형 (2)

본책 75쪽

$x+\dfrac{1}{x}$ 또는 $x-\dfrac{1}{x}$의 값이 주어지고 새로운 식의 값을 구할 때에는 다음을 이용한다.

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$

(2) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+4$, $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4$

349 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=8^2-2=62$

답 ①

350 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2=27-2=25$

그런데 $0<x<1$, $\dfrac{1}{x}>1$이므로 $\quad x-\dfrac{1}{x}<0$

$\therefore x-\dfrac{1}{x}=-5$

답 -5

351 $a^2+\dfrac{1}{a^2}=\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2+2=(-\sqrt{2})^2+2=4$

$a^4+\dfrac{1}{a^4}=\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)^2-2=4^2-2=14$

$\therefore a^4+a^2+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^4}=\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)+\left(a^4+\dfrac{1}{a^4}\right)$

$=4+14=18$

답 18

유형 073 $x^2+ax\pm1=0$의 꼴이 주어질 때 식의 값 구하기

본책 75쪽

$x^2+ax\pm1=0\ (a\neq0)$의 꼴이 주어지고 어떤 식의 값을 구할 때에는 다음과 같이 식을 변형한 후 이용한다.

➜ $x\neq0$이므로 $x^2+ax\pm1=0$의 양변을 x로 나누면

$x+a\pm\dfrac{1}{x}=0 \quad \therefore x\pm\dfrac{1}{x}=-a$

352 $x\neq0$이므로 $x^2+6x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x+6-\dfrac{1}{x}=0 \quad \therefore x-\dfrac{1}{x}=-6$

$\therefore \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+4=(-6)^2+4=40$

답 40

353 $x\neq0$이므로 $x^2=3x-1$의 양변을 x로 나누면

$x=3-\dfrac{1}{x} \quad \therefore x+\dfrac{1}{x}=3$ … 1단계

$\therefore x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$ … 2단계

답 7

단계	채점 요소	비율
1	$x+\dfrac{1}{x}$의 값 구하기	50 %
2	$x^2+\dfrac{1}{x^2}$의 값 구하기	50 %

354 $x\neq0$이므로 $x^2-4x=1$의 양변을 x로 나누면

$x-4=\dfrac{1}{x} \quad \therefore x-\dfrac{1}{x}=4$

$\therefore x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=4^2+2=18$

$\therefore 3x^2+\dfrac{2}{x^2}-4x=2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+(x^2-4x)$

$=2\times18+1=37$

답 ⑤

만점 유형 도전하기

본책 76~77쪽

355 전략 (다항식)×(다항식)은 분배법칙 또는 곱셈 공식을 이용하여 계산한다.

세현: $(2x-y+3)(x+2y+1)$을 전개한 식에서 x항은
$2x\times1+3\times x=5x$이므로 x의 계수는 5이다.

경실: $\left(-x-\frac{1}{2}y\right)^2=\left\{-\frac{1}{2}(2x+y)\right\}^2=\frac{1}{4}(2x+y)^2$이므로
$\left(-x-\frac{1}{2}y\right)^2$과 $\frac{1}{4}(2x+y)^2$은 전개한 식이 같다.

준철: $(ax+b)^2=a^2x^2+2abx+b^2$이므로 x^2의 계수가 4이고 상수항이 9이면
$a^2=4$, $b^2=9$, 즉 $a=\pm2$, $b=\pm3$
$\therefore 2ab=12$ 또는 -12
따라서 x의 계수는 12 또는 -12이다.

은경: $(4x-3)(2x+7)=8x^2+22x-21$에서 x의 계수는 22, 상수항은 -21이므로 x의 계수는 상수항보다 43만큼 크다.

따라서 잘못 말한 사람은 준철, 은경이다. 답 풀이 참조

356 전략 $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$임을 이용하여 두 수의 곱을 계산한다.

$(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$

유리수가 되려면 $b+d=0$

$\therefore \frac{d}{b}=-1$ ...... ㉠

$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$

유리수가 되려면 $ad+bc=0$

$\therefore \frac{ad}{bc}=-1$ ...... ㉡

$y=\frac{c}{a}x+\frac{d}{b}$에 $y=0$을 대입하면

$0=\frac{c}{a}x+\frac{d}{b}$, $\frac{c}{a}x=-\frac{d}{b}$

$\therefore x=-\frac{ad}{bc}=1$ ($\because$ ㉡)

$y=\frac{c}{a}x+\frac{d}{b}$에 $x=0$을 대입하면

$y=\frac{d}{b}=-1$ ($\because$ ㉠)

즉 $y=\frac{c}{a}x+\frac{d}{b}$의 그래프의 x절편은 1, y절편은 -1이므로 이 일차함수의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

357 전략 $\overline{AQ}$, $\overline{BQ}$의 길이를 각각 x, y로 놓고 조건을 이용하여 식을 세운다.

$\overline{AQ}=x$, $\overline{BQ}=y$라 하면

$S_1=\pi\times\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}-\pi\times\left(\frac{x}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}-\pi\times\left(\frac{y}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}$

$=\frac{\pi}{8}(x^2+2xy+y^2)-\frac{\pi}{8}x^2-\frac{\pi}{8}y^2=\frac{\pi}{4}xy$

이때 $\overline{AB}$는 $\triangle PAB$의 외접원의 지름이다.

즉 $\triangle PAB$의 외심이 $\overline{AB}$ 위에 있으므로 $\triangle PAB$는 $\overline{AB}$를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

$\angle APB=90^\circ$이고 $\overline{AB}\perp\overline{PQ}$이므로

$\triangle AQP \backsim \triangle PQB$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{AQ}:\overline{PQ}=\overline{PQ}:\overline{BQ}$에서

$\overline{PQ}^2=\overline{AQ}\times\overline{BQ}=xy$

$\therefore S_2=\pi\times\left(\frac{\overline{PQ}}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{8}xy$

$S_1-S_2=\frac{9}{4}\pi$이므로

$\frac{\pi}{4}xy-\frac{\pi}{8}xy=\frac{9}{4}\pi$ $\qquad\therefore xy=18$

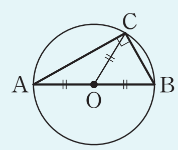
또 $\overline{AQ}-\overline{BQ}=6\sqrt{2}$에서 $\qquad x-y=6\sqrt{2}$

$\therefore (x+y)^2=(x-y)^2+4xy$
$=(6\sqrt{2})^2+4\times18$
$=72+72=144$

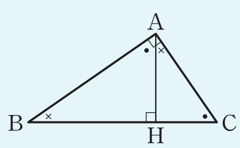
$\therefore \overline{AB}=x+y=12$ ($\because \overline{AB}>0$) 답 12

만점 공략 노트

(1) 직각삼각형의 외심과 외접원
① 직각삼각형의 외심은 빗변의 중점이다.
② $\triangle ABC$의 외접원 O의 반지름의 길이는
$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\frac{1}{2}\overline{AB}$



(2) 직각삼각형의 닮음의 응용
$\angle A=90^\circ$인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 빗변 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때
① $\overline{AB}^2=\overline{BH}\times\overline{BC}$
② $\overline{AC}^2=\overline{CH}\times\overline{CB}$
③ $\overline{AH}^2=\overline{HB}\times\overline{HC}$



358 전략 [5단계]의 상자 전체의 부피를 식으로 나타낸 후 y^2항과 xy항이 나오는 부분만 전개하여 y^2의 계수와 xy의 계수를 각각 구한다.

상자 1개의 부피는 $\quad 3(x+2y)(x+y+1)$

[1단계]의 상자의 개수는 $\quad 1$

[2단계]의 상자의 개수는 $\quad 1+4$

[3단계]의 상자의 개수는 $\quad 1+4+9$

[4단계]의 상자의 개수는 $\quad 1+4+9+16$

[5단계]의 상자의 개수는 $\quad 1+4+9+16+25$

즉 [5단계]의 상자의 개수는 55이므로 상자 전체의 부피는

$55\times3(x+2y)(x+y+1)$, 즉

$165(x+2y)(x+y+1)$

이 식의 전개식에서 y^2항은

$165\times2y\times y=330y^2$

xy항은 $\quad 165\times(x\times y+2y\times x)=495xy$

따라서 y^2의 계수는 330, xy의 계수는 495이므로 구하는 합은

$330+495=825$ 답 825

만점 공략 노트

[1단계]의 상자의 개수는 1이고 [n단계]는 [$(n-1)$단계]에 n^2개의 상자를 추가하여 만들어지므로 [n단계]의 상자의 개수는

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

359 전략 곱하는 각각의 수를 100을 이용하여 나타내어 본다.

$$\begin{aligned}97\times103\times10009&=(100-3)(100+3)(100^2+3^2)\\&=(100^2-3^2)(100^2+3^2)\\&=100^4-3^4\\&=10^8-81\end{aligned}$$

이때 10^8은 9자리 자연수이므로 10^8-81은 8자리 자연수이다.

$\therefore a=8$

또 8자리 중 십의 자리의 숫자는 1, 일의 자리의 숫자는 9이고, 십의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 나머지 숫자는 9이므로

$b=1+9+6\times9=64$

$\therefore a+b=8+64=72$

답 72

360 전략 주어진 수를 각각 제곱하여 크기를 비교한다.

$$\begin{aligned}(\sqrt{10}+\sqrt{15})^2&=10+2\sqrt{150}+15\\&=25+2\sqrt{150}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\sqrt{11}+\sqrt{14})^2&=11+2\sqrt{154}+14\\&=25+2\sqrt{154}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\sqrt{12}+\sqrt{13})^2&=12+2\sqrt{156}+13\\&=25+2\sqrt{156}\end{aligned}$$

이때 $\sqrt{150}<\sqrt{154}<\sqrt{156}$이므로

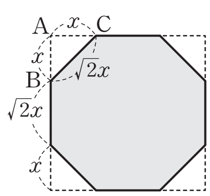
$25+2\sqrt{150}<25+2\sqrt{154}<25+2\sqrt{156}$, 즉

$(\sqrt{10}+\sqrt{15})^2<(\sqrt{11}+\sqrt{14})^2<(\sqrt{12}+\sqrt{13})^2$

$\therefore \sqrt{10}+\sqrt{15}<\sqrt{11}+\sqrt{14}<\sqrt{12}+\sqrt{13}$

답 $\sqrt{10}+\sqrt{15}<\sqrt{11}+\sqrt{14}<\sqrt{12}+\sqrt{13}$

361 전략 직각이등변삼각형에서 직각을 낀 한 변의 길이를 x라 하고 정사각형의 한 변의 길이를 이용하여 x의 값을 구한다.



오른쪽 그림과 같이 직각이등변삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\overline{AC}=x$라 하면

$\overline{BC}=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2}x$

이때 처음 정사각형의 한 변의 길이가 2이므로

$x+\sqrt{2}x+x=2,\quad (2+\sqrt{2})x=2$

$$\begin{aligned}\therefore x&=\frac{2}{2+\sqrt{2}}=\frac{2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\\&=\frac{2(2-\sqrt{2})}{4-2}=2-\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 정팔각형의 넓이는

$$\begin{aligned}&2\times2-4\times\left\{\frac{1}{2}\times(2-\sqrt{2})^2\right\}\\&=4-2(6-4\sqrt{2})\\&=4-12+8\sqrt{2}\\&=-8+8\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 $-8+8\sqrt{2}$

362 전략 x_1의 값을 이용하여 y_1, y_2, y_3, $\cdots$의 값을 차례대로 구해 보고 규칙을 찾는다.

$x_1=2\sqrt{2}=\sqrt{8}$이고 $2<\sqrt{8}<3$이므로

$y_1=2\sqrt{2}-2$

$$\begin{aligned}\therefore x_2&=\frac{1}{y_1}=\frac{1}{2\sqrt{2}-2}=\frac{2\sqrt{2}+2}{(2\sqrt{2}-2)(2\sqrt{2}+2)}\\&=\frac{2\sqrt{2}+2}{8-4}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}\end{aligned}$$

$2<\sqrt{2}+1<3$에서 $1<\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}<\dfrac{3}{2}$이므로

$y_2=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}-1=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore x_3&=\frac{1}{y_2}=\frac{2}{\sqrt{2}-1}=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}\\&=2\sqrt{2}+2\end{aligned}$$

$2<\sqrt{8}<3$에서 $4<2\sqrt{2}+2<5$이므로

$y_3=(2\sqrt{2}+2)-4=2\sqrt{2}-2$

$\vdots$

따라서

n이 홀수일 때, $\quad y_n=2\sqrt{2}-2$

n이 짝수일 때, $\quad y_n=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

이므로 $\quad y_{100}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

답 $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

시험 만점 완성하기

본책 78~81쪽

363 전략 x항이 나오는 부분만 전개하여 x의 계수를 구한다.

각 주어진 식의 전개식에서 x항은

ㄱ. $2x\times(-3)=-6x$

ㄴ. $3x\times4+7\times(-x)=5x$

ㄷ. $x\times(-5)+(-1)\times x=-6x$

ㄹ. $x\times9=9x$

따라서 x의 계수가 같은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

364 전략 주어진 식을 $a(bx+cy)^2$의 꼴로 변형한다.

$\left(\dfrac{3}{2}y-2x\right)^2=\left\{\dfrac{1}{2}(3y-4x)\right\}^2=\dfrac{1}{4}(4x-3y)^2$

따라서 주어진 식과 전개한 식이 같은 것은 ④이다.

답 ④

365 전략 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$임을 이용한다.

$$\begin{aligned}&6\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y\right)(2x-3y)-(x-y)(-x-y)\\&=(2x+3y)(2x-3y)+(x-y)(x+y)\\&=(4x^2-9y^2)+(x^2-y^2)\\&=5x^2-10y^2\end{aligned}$$

따라서 $A=5$, $B=-10$이므로

$A-B=5-(-10)=15$

답 ⑤

366 전략 곱셈 공식을 이용하여 전개한다.

① $(x+6)^2=x^2+12x+36$
② $(2x-3)(x+6)=2x^2+9x-18$
③ $(2x-3)(2x+3)=4x^2-9$
④ $(3x-7)(x+6)=3x^2+11x-42$
⑤ $(3x-7)(2x+3)=6x^2-5x-21$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

367 전략 주어진 정의를 이용하여 식을 세운 후 곱셈 공식을 이용하여 식을 전개한다.

$B◎C=(x+3)◎(-x^2+x)$
$=(x+3)^2-2(-x^2+x)$
$=x^2+6x+9+2x^2-2x$
$=3x^2+4x+9$
$A◎(B◎C)=(5x-1)◎(3x^2+4x+9)$
$=(5x-1)^2-2(3x^2+4x+9)$
$=25x^2-10x+1-6x^2-8x-18$
$=19x^2-18x-17$
따라서 $a=19$, $b=-18$, $c=-17$이므로
$a+b+c=19+(-18)+(-17)=-16$ 답 ③

368 전략 잘못 본 수 대신에 문자를 대입하여 식을 전개한 후 용훈이와 준호가 구한 식과 계수를 비교한다.

$(x-6)(x+7)$에서 -6을 C로 잘못 보았다고 하면
$(x+C)(x+7)=x^2+(C+7)x+7C$
즉 $C+7=-1$, $7C=A$이므로
$C=-8$, $A=-56$
$(4x+5)(2x-1)$에서 2를 D로 잘못 보았다고 하면
$(4x+5)(Dx-1)=4Dx^2+(-4+5D)x-5$
즉 $4D=B$, $-4+5D=-14$이므로
$D=-2$, $B=-8$
$\therefore A+B=-56+(-8)=-64$ 답 ①

369 전략 액자의 넓이에서 나무 판자의 넓이를 뺀다.

$A=(2x+3y)^2-4\times2x\times3y$
$=4x^2+12xy+9y^2-24xy$
$=4x^2-12xy+9y^2$
$B=3y(4x+3y)-4\times2x\times3y$
$=12xy+9y^2-24xy$
$=9y^2-12xy$
$\therefore A-B=(4x^2-12xy+9y^2)-(9y^2-12xy)$
$=4x^2$ 답 ②

370 전략 $2x-y=A$로 놓고 곱셈 공식을 이용하여 전개한다.

$2x-y=A$로 놓으면
$(2x-y+3)^2=(A+3)^2=A^2+6A+9$
$=(2x-y)^2+6(2x-y)+9$
$=4x^2-4xy+y^2+12x-6y+9$

따라서 $a=-4$, $b=12$, $c=-6$이므로
$a+b-c=-4+12-(-6)=14$ 답 ⑤

371 전략 공통부분이 생기도록 두 개씩 짝을 지어 전개한다.

$x-\dfrac{2}{x}=2$의 양변에 x를 곱하면
$x^2-2=2x$ $\therefore x^2-2x=2$
$\therefore x(x+1)(x-2)(x-3)$
$=\{x(x-2)\}\{(x+1)(x-3)\}$
$=(x^2-2x)(x^2-2x-3)$
$=2\times(2-3)=-2$ 답 ①

372 전략 $230=x$로 놓고 주어진 식을 x를 이용하여 나타낸다.

$230=x$라 하면
$A=233\times228-229\times231$
$=(230+3)(230-2)-(230-1)(230+1)$
$=(x+3)(x-2)-(x-1)(x+1)$
$=(x^2+x-6)-(x^2-1)$
$=x-5=230-5=225$
따라서 A의 양의 제곱근은 $\sqrt{225}=15$ 답 ②

373 전략 (소수 부분)=(무리수)−(정수 부분)임을 이용하여 p의 값을 먼저 구한다.

$1<\sqrt{3}<2$이므로 $4<3+\sqrt{3}<5$
따라서 $p=(3+\sqrt{3})-4=\sqrt{3}-1$이므로
$p^2=(\sqrt{3}-1)^2=3-2\sqrt{3}+1=4-2\sqrt{3}$ 답 ④

374 전략 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$임을 이용하여 분모를 유리화한다.

$x=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}$
$=\dfrac{7-2\sqrt{21}+3}{7-3}=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$
$x=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$의 양변에 2를 곱하면
$2x=5-\sqrt{21}$, $2x-5=-\sqrt{21}$
양변을 제곱하면
$(2x-5)^2=(-\sqrt{21})^2$, $4x^2-20x+25=21$
$4x^2-20x=-4$ $\therefore x^2-5x=-1$ 답 ②

375 전략 주어진 식의 분모를 통분하여 간단히 한 후 조건을 이용하여 x^2+y^2의 값을 구한다.

$\dfrac{y-1}{x}+\dfrac{x-1}{y}=\dfrac{y(y-1)+x(x-1)}{xy}$
$=\dfrac{x^2+y^2-(x+y)}{xy}$
이때
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-2\times(-6)=21$
이므로

(주어진 식)$=\dfrac{x^2+y^2-(x+y)}{xy}$

$=\dfrac{21-3}{-6}=-3$ 답 ⑤

376 전략 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$, $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4$임을 이용한다.

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=5+2=7$

$\left(y-\dfrac{1}{y}\right)^2=\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2-4=4^2-4=12$

$\therefore \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2\left(y-\dfrac{1}{y}\right)^2=7\times12=84$ 답 ③

377 전략 A를 B로 나누었을 때의 몫이 Q이고 나머지가 R이다. ➜ $A=BQ+R$

a를 8로 나누었을 때의 몫을 p (p는 음이 아닌 정수)라 하면

$a=8p+5$

b를 8로 나누었을 때의 몫을 q (q는 음이 아닌 정수)라 하면

$b=8q+3$

$\therefore ab=(8p+5)(8q+3)$

$=64pq+24p+40q+15$

이때 $64pq$, $24p$, $40q$는 8로 나누어떨어지므로 ab를 8로 나누었을 때의 나머지는 15를 8로 나누었을 때의 나머지와 같다.

$15=8\times1+7$이므로 구하는 나머지는 7이다. 답 7

378 전략 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$임을 이용한다.

$(2x+a)^2=4x^2+4ax+a^2$이므로 $4a=b$, $a^2=c$

$4a=b$, $b=3a-5$에서 $4a=3a-5$ $\therefore a=-5$

$a=-5$를 $4a=b$, $a^2=c$에 각각 대입하면

$b=-20$, $c=25$

$\therefore a-b+c=-5-(-20)+25=40$ 답 40

379 전략 색칠한 두 정사각형의 한 변의 길이를 a, b를 이용하여 나타낸다.

색칠한 두 정사각형 중 큰 정사각형의 한 변의 길이는

$\dfrac{a+b}{2}$

작은 정사각형의 한 변의 길이는

$a-\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{a-b}{2}$

따라서 두 정사각형의 넓이의 합은

$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2=\dfrac{a^2+2ab+b^2}{4}+\dfrac{a^2-2ab+b^2}{4}$

$=\dfrac{a^2+b^2}{2}$

즉 $\dfrac{a^2+b^2}{2}=10$이므로 $a^2+b^2=20$ 답 20

380 전략 주어진 식에 1이 곱해져 있음을 나타내고 곱해져 있는 각 수를 2의 거듭제곱을 이용하여 나타내어 본다.

$3\times5\times17\times257$

$=1\times3\times5\times17\times257$

$=(2-1)(2+1)(4+1)(16+1)(256+1)$

$=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)$

$=(2^8-1)(2^8+1)$

$=2^{16}-1$

$\therefore n=16$ 답 16

381 전략 $7.5=x$, $2.5=y$로 놓고 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ 또는 $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$임을 이용한다.

$7.5=x$, $2.5=y$라 하면

$7.5^2+2.5^2=x^2+y^2$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로

$7.5^2+2.5^2=(7.5+2.5)^2-2\times7.5\times2.5$

$=10^2-2\times2.5\times7.5$

$=10^2-5\times7.5$

즉 [방법 1]에서 $A=10$

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$이므로

$7.5^2+2.5^2=(7.5-2.5)^2+2\times7.5\times2.5$

$=5^2+15\times2.5$

즉 [방법 2]에서 $B=5$

$\therefore A-B=10-5=5$ 답 5

382 전략 $\dfrac{b}{a}=X$로 놓고 주어진 식을 X를 이용하여 나타낸다.

$\dfrac{b}{a}=X$라 하면 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\sqrt{5}$에서

$X+\dfrac{1}{X}=\sqrt{5}$

$\therefore \dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{b^2}=X^2+\dfrac{1}{X^2}=\left(X+\dfrac{1}{X}\right)^2-2$

$=(\sqrt{5})^2-2=3$ 답 3

다른 풀이 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\sqrt{5}$의 양변을 제곱하면

$\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{b^2}+2=5$ $\therefore \dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{b^2}=3$

383 전략 곱셈 공식을 이용하여 주어진 식을 전개하고 x항을 구한다.

(주어진 식)$=x^2+2ax+a^2+6x^2+(2b-9)x-3b$

$=7x^2+(2a+2b-9)x+a^2-3b$

즉 $2a+2b-9=7$이므로 $a+b=8$ … 1단계

이때 전체 경우의 수는 $6\times6=36$

$a+b=8$을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$

의 5개이다. … 2단계

따라서 구하는 확률은 $\frac{5}{36}$ … 3단계

답 $\frac{5}{36}$

단계	채점 요소	배점
1	a, b 사이의 관계식 구하기	2점
2	전체 경우의 수와 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기	2점
3	확률 구하기	1점

384 전략 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$임을 이용하여 분모를 유리화한다.

$$\frac{x}{3\sqrt{2}-4}+\frac{y\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+4}$$
$$=\frac{x(3\sqrt{2}+4)}{(3\sqrt{2}-4)(3\sqrt{2}+4)}+\frac{y\sqrt{2}(3\sqrt{2}-4)}{(3\sqrt{2}+4)(3\sqrt{2}-4)}$$
$$=\frac{3x\sqrt{2}+4x}{18-16}+\frac{6y-4y\sqrt{2}}{18-16}$$
$$=2x+3y+\frac{(3x-4y)\sqrt{2}}{2}$$ … 1단계

유리수가 되려면 $\frac{3x-4y}{2}=0$

$\therefore 3x-4y=0$ … 2단계

$3x-4y=0$과 $x+2y=-5$를 연립하여 풀면

$x=-2$, $y=-\frac{3}{2}$ … 3단계

$\therefore xy=-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=3$ … 4단계

답 3

단계	채점 요소	배점
1	주어진 식의 분모를 유리화하여 간단히 하기	2점
2	x, y 사이의 관계식 구하기	1점
3	x, y의 값 구하기	1점
4	xy의 값 구하기	1점

385 전략 두 정사각형의 둘레의 길이의 합과 넓이의 합을 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

두 정사각형의 둘레의 길이의 합이 64 cm이므로

$4(x+y)=64$ $\therefore x+y=16$ … 1단계

두 정사각형의 넓이의 합이 168 cm^2이므로

$x^2+y^2=168$ … 2단계

이때 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로

$168=16^2-2xy$ $\therefore xy=44$ … 3단계

답 44

단계	채점 요소	배점
1	$x+y$의 값 구하기	1점
2	x^2+y^2의 값 구하기	1점
3	xy의 값 구하기	2점

386 전략 먼저 주어진 등식의 양변을 x로 나누어 식을 변형한다.

$x\neq0$이므로 $x^2+2x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x+2-\frac{1}{x}=0$ $\therefore x-\frac{1}{x}=-2$ … 1단계

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=(-2)^2+2=6$

$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=6^2-2=34$ … 2단계

$\therefore \left(2x^2-\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2-\frac{2}{x^2}\right)=2x^4-4-1+\frac{2}{x^4}$

$=2\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)-5$

$=2\times34-5=63$ … 3단계

답 63

단계	채점 요소	배점
1	$x-\frac{1}{x}$의 값 구하기	1점
2	$x^4+\frac{1}{x^4}$의 값 구하기	2점
3	주어진 식의 값 구하기	3점

05 다항식의 인수분해

Ⅱ. 다항식의 곱셈과 인수분해

셀프 CHECK

본책 82~83쪽

A 답 (1) a^2-3a (2) x^2+4x+4 (3) $2y^2+5y-12$

B 답 (1) $ab(b+2)$ (2) $xy^3(x-y)$ (3) $(a-2)(x+1)$

C 답 (1) $(a+3)^2$ (2) $(2x-1)^2$ (3) $(5x+3y)^2$

D (1) $a^2-64=a^2-8^2$
$=(a+8)(a-8)$
(2) $4a^2-b^2=(2a)^2-b^2$
$=(2a+b)(2a-b)$
(3) $\frac{1}{9}x^2-\frac{9}{16}y^2=\left(\frac{1}{3}x\right)^2-\left(\frac{3}{4}y\right)^2$
$=\left(\frac{1}{3}x+\frac{3}{4}y\right)\left(\frac{1}{3}x-\frac{3}{4}y\right)$
답 (1) $(a+8)(a-8)$ (2) $(2a+b)(2a-b)$
(3) $\left(\frac{1}{3}x+\frac{3}{4}y\right)\left(\frac{1}{3}x-\frac{3}{4}y\right)$

E 답 (1) $(x+5)(x-2)$ (2) $(x-3)(x-4)$
(3) $(a+8)(a-2)$ (4) $(a+3b)(a+6b)$

F 답 (1) $(3x+1)(x+3)$ (2) $(5x+2)(2x-1)$
(3) $(a+6b)(2a-b)$ (4) $-(a-4)(4a+1)$

G (1) $4x-1=A$로 놓으면
(주어진 식)$=A^2-A-2$
$=(A+1)(A-2)$
$=(4x-1+1)(4x-1-2)$
$=4x(4x-3)$
(2) (주어진 식)$=x(y+6)+3(y+6)$
$=(x+3)(y+6)$
(3) (주어진 식)$=9a^2-(4b^2+4b+1)$
$=(3a)^2-(2b+1)^2$
$=(3a+2b+1)(3a-2b-1)$
(4) 주어진 식을 b에 대하여 내림차순으로 정리하면
(주어진 식)$=(a-5)b+(a^2-6a+5)$
$=(a-5)b+(a-1)(a-5)$
$=(a-5)(b+a-1)$
$=(a-5)(a+b-1)$
답 (1) $4x(4x-3)$ (2) $(x+3)(y+6)$
(3) $(3a+2b+1)(3a-2b-1)$ (4) $(a-5)(a+b-1)$

내신 유형 다지기

본책 84~97쪽

유형 074 인수

본책 84쪽

하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타낼 때, 각각의 식을 처음 다항식의 인수라 한다.
참고 모든 다항식에서 1과 자기 자신은 그 다항식의 인수이다.

387 ② ab는 $a(a+b)(2a-b)$의 인수가 아니다.
⑤ $a(a+b)=a^2+ab$는 $a(a+b)(2a-b)$의 인수이다.
따라서 $a(a+b)(2a-b)$의 인수가 아닌 것은 ②이다. 답 ②

388 $2ab^2(a-4b)$의 인수인 것은
a, $2b^2$, $b^2(a-4b)$
의 3개이다. 답 ③

389 ㄹ. $x(x+1)=x^2+x$는 $x^2(x+1)$의 인수이다.
이상에서 $x^2(x+1)$의 인수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.
답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

유형 075 공통인 인수로 묶어 인수분해하기

본책 84쪽

다항식의 각 항에 공통인 인수가 있으면 그 인수로 묶어 내어 인수분해한다.
→ $mA+mB-mC=m(A+B-C)$

390 ① $2a^2-a=a(2a-1)$
② $9x^2+3xy=3x(3x+y)$
③ $8a^2b^2-4ab^3=4ab^2(2a-b)$
④ $a-a^2+ab=a(1-a+b)$
따라서 인수분해한 것이 옳은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

391 $a(a-b)-(b-a)+(a-b)^2$
$=a(a-b)+(a-b)+(a-b)^2$
$=(a-b)\{a+1+(a-b)\}$
$=(a-b)(2a-b+1)$
따라서 $a(a-b)-(b-a)+(a-b)^2$의 인수인 것은 ㄴ, ㅁ이다. 답 ㄴ, ㅁ

392 $(x-1)(x+5)-x+1$
$=(x-1)(x+5)-(x-1)$
$=(x-1)\{(x+5)-1\}$
$=(x-1)(x+4)$ … 1단계

따라서 두 일차식의 합은

$(x-1)+(x+4)=2x+3$ … 2단계

답 $2x+3$

단계	채점 요소	비율
1	주어진 식 인수분해하기	60 %
2	두 일차식의 합 구하기	40 %

유형 076 $a^2\pm2ab+b^2$의 인수분해 (본책 85쪽)

(1) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

(2) $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

393 ① $2a^2-16a+32=2(a^2-8a+16)=2(a-4)^2$

③ $9x^2-12x+4=(3x-2)^2$

④ $a^2+a+\frac{1}{4}=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$

⑤ $x^2+5xy+\frac{25}{4}y^2=\left(x+\frac{5}{2}y\right)^2$

따라서 완전제곱식으로 인수분해되지 않는 것은 ②이다.

답 ②

394 $x(x+a)+64=(x+b)^2$에서

$x^2+ax+64=x^2+2bx+b^2$

$64=b^2$이므로 $b=\pm8$

$a=2b$이므로 $a=\pm16$

그런데 $a>0$이므로 $a=16,\ b=8$

$\therefore a+b=16+8=24$

답 ③

395 $ax^2+20xy+by^2=(2x+cy)^2$에서

$ax^2+20xy+by^2=4x^2+4cxy+c^2y^2$

$a=4$이고, $20=4c$이므로 $c=5$

$b=c^2$이므로 $b=25$

$\therefore a+b+c=4+25+5=34$

답 34

유형 077 완전제곱식이 되도록 하는 미지수의 값 구하기 (본책 85쪽)

(1) $x^2+ax+■$가 완전제곱식이 되도록 하는 ■의 값

➜ $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$이어야 하므로 $■=\left(\frac{a}{2}\right)^2$

(2) $x^2+●x+b$가 완전제곱식이 되도록 하는 ●의 값

➜ $(x\pm\sqrt{b})^2$이어야 하므로 $●=\pm2\sqrt{b}$ (단, $b>0$)

(3) $Ax^2+▲x+B$가 완전제곱식이 되도록 하는 ▲의 값

➜ $(\sqrt{A}x\pm\sqrt{B})^2$이어야 하므로 $▲=\pm2\sqrt{AB}$

(단, $A>0,\ B>0$)

396 ① x^2-4x+k에서 $k=\left(\frac{-4}{2}\right)^2=4$

② $x^2+kx+9=x^2+kx+3^2$에서

$k=2\times1\times3=6$

③ $kx^2-6x+1=kx^2-2\times3x\times1+1^2$에서

$k=3^2=9$

④ $16x^2+kx+1=(4x)^2+kx+1^2$에서

$k=2\times4\times1=8$

⑤ $81x^2+kx+\frac{1}{36}=(9x)^2+kx+\left(\frac{1}{6}\right)^2$에서

$k=2\times9\times\frac{1}{6}=3$

따라서 양수 k의 값이 가장 큰 것은 ③이다.

답 ③

397 $(x+2)(x-8)+k=x^2-6x-16+k$

따라서 $-16+k=\left(\frac{-6}{2}\right)^2=9$이므로

$k=25$

답 25

398 $9x^2+(k+1)xy+y^2=(3x\pm y)^2$이므로

$k+1=\pm(2\times3\times1),\quad k+1=\pm6$

$\therefore k=-7$ 또는 $k=5$ … 1단계

따라서 구하는 합은 $-7+5=-2$ … 2단계

답 -2

단계	채점 요소	비율
1	k의 값 구하기	70 %
2	모든 k의 값의 합 구하기	30 %

399 $x^2-8ax+4b$가 완전제곱식이 되려면

$4b=\left(\frac{-8a}{2}\right)^2=16a^2$, 즉 $b=4a^2$

이를 만족시키는 100 이하의 자연수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 4),\ (2,\ 16),\ (3,\ 36),\ (4,\ 64),\ (5,\ 100)$

의 5개이다.

답 5

유형 078 근호 안이 완전제곱식으로 인수분해되는 식 (본책 86쪽)

근호 안의 식을 인수분해한 후 다음을 이용하여 근호를 없앤다.

➜ $\sqrt{(x-a)^2}=\begin{cases} x-a & (x-a\ge0) \\ -(x-a) & (x-a<0) \end{cases}$

400 $\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{x^2}+\sqrt{(x-1)^2}$

이때 $0<x<1$에서 $x-1<0$

$\therefore$ (주어진 식)$=\sqrt{x^2}+\sqrt{(x-1)^2}$

$=x-(x-1)$

$=x-x+1=1$

답 1

401 $\sqrt{a^2+2ab+b^2}-\sqrt{a^2-2ab+b^2}$
$=\sqrt{(a+b)^2}-\sqrt{(a-b)^2}$
이때 $0<b<a$에서 $a+b>0,\ a-b>0$
$\therefore$ (주어진 식)$=\sqrt{(a+b)^2}-\sqrt{(a-b)^2}$
$=(a+b)-(a-b)$
$=a+b-a+b$
$=2b$
답 ②

402 $\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-2x}-\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2x}$
$=\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}-2x}-\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}+2x}$
$=\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}}-\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}$
$=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$
이때 $0<2x<1$에서 $0<x<\frac{1}{2}$이므로
$x-\frac{1}{2}<0,\ x+\frac{1}{2}>0$
$\therefore$ (주어진 식)$=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$
$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)-\left(x+\frac{1}{2}\right)$
$=-x+\frac{1}{2}-x-\frac{1}{2}$
$=-2x$
답 ③

403 $\sqrt{x}=a-1$에서 $x=(a-1)^2=a^2-2a+1$이므로
$\sqrt{x+4a}-\sqrt{x-2a+3}$
$=\sqrt{(a^2-2a+1)+4a}-\sqrt{(a^2-2a+1)-2a+3}$
$=\sqrt{a^2+2a+1}-\sqrt{a^2-4a+4}$
$=\sqrt{(a+1)^2}-\sqrt{(a-2)^2}$ … 1단계
이때 $1<a<2$에서 $a+1>0,\ a-2<0$ … 2단계
$\therefore$ (주어진 식)$=\sqrt{(a+1)^2}-\sqrt{(a-2)^2}$
$=(a+1)-\{-(a-2)\}$
$=a+1+a-2$
$=2a-1$ … 3단계
답 $2a-1$

단계	채점 요소	비율
1	주어진 식을 a에 대한 식으로 나타내기	40 %
2	$a+1,\ a-2$의 부호 구하기	30 %
3	주어진 식 간단히 하기	30 %

유형 079 a^2-b^2의 인수분해

본책 86쪽

$\underbrace{a^2-b^2}_{\text{제곱의 차}}=(\underbrace{a+b}_{\text{합}})(\underbrace{a-b}_{\text{차}})$

404 $50x^2-18y^2=2(25x^2-9y^2)$
$=2(5x+3y)(5x-3y)$
따라서 $a=2,\ b=5,\ c=3$이므로
$a+b-c=2+5-3=4$
답 4

405 $(2x+3)(2x-5)+4x+6$
$=(4x^2-4x-15)+4x+6$
$=4x^2-9$
$=(2x+3)(2x-3)$
따라서 $a=2,\ b=3$이므로
$a+b=2+3=5$
답 ①

406 $a^8-1=(a^4-1)(a^4+1)$
$=(a^2-1)(a^2+1)(a^4+1)$
$=(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)$
따라서 a^8-1의 인수가 아닌 것은 ⑤이다.
답 ⑤

유형 080 $x^2+(a+b)x+ab$의 인수분해

본책 87쪽

❶ 합이 일차항의 계수, 곱이 상수항인 두 정수를 찾는다.
❷ 두 일차식의 곱으로 나타낸다.
➜ $x^2+(\underbrace{a+b}_{\text{합}})x+\underbrace{ab}_{\text{곱}}=(x+a)(x+b)$

407 ㄱ. $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$
ㄴ. $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$
ㄷ. $x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$
ㄹ. $x^2-9x+14=(x-2)(x-7)$
따라서 $x+2$를 인수로 갖는 것은 ㄱ, ㄷ이다.
답 ②

408 $x^2+Ax-35=(x-5)(x+B)$
$=x^2+(B-5)x-5B$ … 1단계
따라서 $A=B-5,\ 35=5B$이므로
$A=2,\ B=7$ … 2단계
$\therefore A+B=2+7=9$ … 3단계
답 9

단계	채점 요소	비율
1	$(x-5)(x+B)$를 전개식으로 나타내기	40 %
2	$A,\ B$의 값 구하기	50 %
3	$A+B$의 값 구하기	10 %

409 $(x-2)(x-5)-40=x^2-7x+10-40$
$=x^2-7x-30$
$=(x+3)(x-10)$
따라서 두 일차식의 합은
$(x+3)+(x-10)=2x-7$
답 ①

유형 081 $acx^2+(ad+bc)x+bd$의 인수분해

본책 87쪽

$$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

$$\begin{array}{ccccc} a & \nearrow\!\!\!\!\searrow & b & \longrightarrow & bc \\ c & & d & \longrightarrow & \underline{ad\quad(+} \\ & & & & ad+bc \end{array}$$

410 $2x^2-7xy-4y^2=(x-4y)(2x+y)$이므로

$a=1,\ b=-4,\ c=2,\ d=1\ (\because 0<a<c)$

$\therefore a-b+c-d=1-(-4)+2-1=6$

답 ②

411 $12x^2+(1-2a)x-10=(3x+2)(4x+b)$

$=12x^2+(3b+8)x+2b$

따라서 $1-2a=3b+8,\ -10=2b$이므로

$a=4,\ b=-5$ … 1단계

$\therefore ab=4\times(-5)=-20$ … 2단계

답 -20

단계	채점 요소	비율
1	$a,\ b$의 값 구하기	70 %
2	ab의 값 구하기	30 %

412 $(x+1)(2x+1)-28=2x^2+3x+1-28$

$=2x^2+3x-27$

$=(x-3)(2x+9)$

따라서 두 일차식의 합은

$(x-3)+(2x+9)=3x+6$

답 $3x+6$

413 $[1,\ 3x,\ 4]-[x,\ 2,\ -6x]$

$=(1+3x)(3x-4)-(x+2)(2+6x)$

$=9x^2-9x-4-(6x^2+14x+4)$

$=3x^2-23x-8$

$=(x-8)(3x+1)$

답 $(x-8)(3x+1)$

유형 082 인수분해 공식 종합

본책 88쪽

(1) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

(2) $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(3) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(4) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

(5) $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

414 ⑤ $8x^2+10x-7=(2x-1)(4x+7)$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

415 ① $\frac{1}{4}x^2+\boxed{4}x+16=\left(\frac{1}{2}x+4\right)^2$

② $16x^2-8x+1=(\boxed{4}x-1)^2$

③ $9x^2-16y^2=(3x+4y)(3x-\boxed{4}y)$

④ $x^2-\boxed{5}x+4=(x-1)(x-4)$

⑤ $6x^2-11x+4=(2x-1)(3x-\boxed{4})$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다.

답 ④

416 ㄱ. $x^2+6x+9=(x+3)^2$

ㄴ. $x^2-9=(x+3)(x-3)$

ㄷ. $x^2+2x-15=(x-3)(x+5)$

ㄹ. $2x^2+5x-3=(x+3)(2x-1)$

따라서 $x-3$을 인수로 갖는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

유형 083 두 다항식의 공통인 인수 구하기

본책 89쪽

두 다항식을 각각 인수분해한 후 공통으로 들어 있는 인수를 찾는다.

417 $x^2-5x-6=(x+1)(x-6)$

$2x^2-9x-18=(x-6)(2x+3)$

따라서 공통인 인수는 $x-6$이다.

답 ①

418 ① $2x^2-4xy=2x(x-2y)$

② $x^2y-4y^3=y(x^2-4y^2)=y(x+2y)(x-2y)$

③ $x^2-3xy+2y^2=(x-y)(x-2y)$

④ $2x^2-3xy+y^2=(x-y)(2x-y)$

⑤ $2x^2-5xy+2y^2=(x-2y)(2x-y)$

따라서 공통인 인수는 $x-2y$이고, 1이 아닌 공통인 인수를 갖지 않는 것은 ④이다.

답 ④

419 $3x^2+xy-2y^2=(x+y)(3x-2y)$

$9x^3y-4xy^3=xy(9x^2-4y^2)=xy(3x+2y)(3x-2y)$

따라서 공통인 인수는 $3x-2y$이므로

$a=3,\ b=2$

$\therefore a+b=3+2=5$

답 5

유형 084 인수가 주어진 이차식의 미지수의 값 구하기

본책 89쪽

일차식 $px+q$가 이차식 ax^2+bx+c의 인수이면

$$ax^2+bx+c=\underbrace{(px+q)}_{\text{주어진 인수}}\underbrace{(■x+▲)}_{\text{나머지 인수}}$$

로 놓고 우변을 전개하여 양변의 계수를 비교한다.

420 $x^2+(a-5)x-24=(x+4)(x+m)$ (m은 상수)으로 놓으면

$$x^2+(a-5)x-24=x^2+(m+4)x+4m$$

이므로 $a-5=m+4,\ -24=4m$

$\therefore m=-6,\ a=3$

따라서 일차식인 다른 한 인수는 $x-6$이다.

답 $a=3$, 다른 한 인수: $x-6$

421 $2x^2-xy-15y^2=(x-3y)(2x+5y)$이고 공통인 인수는 $x-3y$이므로

$b=-3$

이때

$4x^2-9xy+ay^2=(x-3y)(4x+my)$ (m은 상수)

로 놓으면

$4x^2-9xy+ay^2=4x^2+(m-12)xy-3my^2$

따라서 $-9=m-12,\ a=-3m$이므로

$m=3,\ a=-9$

$\therefore a-b=-9-(-3)=-6$

답 -6

422 $4x^2+ax+3=(x+1)(4x+m)$ (m은 상수)으로 놓으면

$4x^2+ax+3=4x^2+(m+4)x+m$

이므로 $a=m+4,\ 3=m$

$\therefore m=3,\ a=7$ … 1단계

$6x^2+5x+b=(x+1)(6x+n)$ (n은 상수)으로 놓으면

$6x^2+5x+b=6x^2+(n+6)x+n$

이므로 $5=n+6,\ b=n$

$\therefore n=-1,\ b=-1$ … 2단계

$\therefore a+b=7+(-1)=6$ … 3단계

답 6

단계	채점 요소	비율
1	a의 값 구하기	40 %
2	b의 값 구하기	40 %
3	$a+b$의 값 구하기	20 %

423 $x^2+ax+10=(x+c)(x+m)$ (m은 상수)으로 놓으면

$x^2+ax+10=x^2+(c+m)x+cm$

이므로 $a=c+m,\ 10=cm$

이때 c는 자연수이므로 $10=cm$을 만족시키는 c는 1, 2, 5, 10이다. …… ㉠

$x^2+bx-15=(x+c)(x+n)$ (n은 상수)으로 놓으면

$x^2+bx-15=x^2+(c+n)x+cn$

이므로 $b=c+n,\ -15=cn$

이때 c는 자연수이므로 $-15=cn$을 만족시키는 c는 1, 3, 5, 15이다. …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 c는 1, 5이다.

(i) $c=1$일 때,

$n=-15$이므로 $b=1+(-15)=-14$

그런데 b는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $c=5$일 때,

$m=2,\ n=-3$이므로 $a=5+2=7,\ b=5+(-3)=2$

(i), (ii)에서 $a+b+c=7+2+5=14$

답 ⑤

유형 085 계수 또는 상수항을 잘못 보고 인수분해한 경우

본책 90쪽

x^2의 계수가 1인 이차식에서

(i) 상수항을 잘못 본 식이 x^2+ax+b이면

➜ 제대로 본 수는 x의 계수 a

(ii) x의 계수를 잘못 본 식이 x^2+cx+d이면

➜ 제대로 본 수는 상수항 d

(i), (ii)에서 처음 이차식은 x^2+ax+d

424 윤희는 상수항을 제대로 보았으므로

$(x+4)(x-6)=x^2-2x-24$

에서 처음 이차식의 상수항은 -24이다.

성호는 x의 계수를 제대로 보았으므로

$(x-2)(x-8)=x^2-10x+16$

에서 처음 이차식의 x의 계수는 -10이다.

따라서 처음 이차식을 바르게 인수분해하면

$x^2-10x-24=(x+2)(x-12)$

답 ①

425 은혜는 상수항을 제대로 보았으므로

$2(x-1)(x+16)=2x^2+30x-32$

에서 처음 이차식의 상수항은 -32이다. … 1단계

재희는 x의 계수를 제대로 보았으므로

$2(x+3)(x-9)=2x^2-12x-54$

에서 처음 이차식의 x의 계수는 -12이다. … 2단계

따라서 처음 이차식을 바르게 인수분해하면

$2x^2-12x-32=2(x+2)(x-8)$

이므로 $a=2,\ b=8$ … 3단계

$\therefore 10a+b=10\times2+8=28$ … 4단계

답 28

단계	채점 요소	비율
1	처음 이차식의 상수항 구하기	30 %
2	처음 이차식의 x의 계수 구하기	30 %
3	a, b의 값 구하기	30 %
4	$10a+b$의 값 구하기	10 %

426 정윤이는 x^2의 계수와 상수항을 제대로 보았으므로

$(2x+5)(3x-2)=6x^2+11x-10$

에서 처음 이차식의 x^2의 계수는 6, 상수항은 -10이다.

은호는 x^2의 계수와 x의 계수를 제대로 보았으므로

$(x-1)(6x-1)=6x^2-7x+1$

에서 처음 이차식의 x^2의 계수는 6, x의 계수는 -7이다.
따라서 처음 이차식을 바르게 인수분해하면

$6x^2-7x-10=(x-2)(6x+5)$ 답 $(x-2)(6x+5)$

유형 086 계수와 상수항이 모두 정수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되는 경우 본책 90쪽

x^2+mx+n이 x의 계수가 1이고 상수항이 자연수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되면

$x^2+mx+n=(x+a)(x+b)$ (a, b는 자연수)

로 놓고

$x^2+mx+n=x^2+(a+b)x+ab$

에서 계수를 비교하여 미지수의 값을 구한다.

427 $x^2+kx+18=(x+a)(x+b)$ (a, b는 자연수, $a \le b$)로 놓으면

$x^2+kx+18=x^2+(a+b)x+ab$

이므로 $a+b=k$, $ab=18$

$ab=18$을 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 18)$, $(2, 9)$, $(3, 6)$

이므로 k의 값은 $1+18=19$, $2+9=11$, $3+6=9$이다.
따라서 k의 값이 될 수 있는 가장 큰 수는 19, 가장 작은 수는 9이므로 구하는 차는

$19-9=10$ 답 10

428 $x^2+8x+k=(x+a)(x+b)$ (a, b는 자연수, $a \le b$)로 놓으면

$x^2+8x+k=x^2+(a+b)x+ab$

이므로 $a+b=8$, $ab=k$

$a+b=8$을 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 7)$, $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$

이므로 k의 값은 7, 12, 15, 16의 4개이다. 답 4

429 곱해서 2가 되는 두 자연수는 1과 2이고, 곱해서 -3이 되는 두 정수는 1과 -3, -1과 3이므로 정수 k의 값을 모두 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) 1 ╳ 1 → 2
2 ╳ -3 → -3(+
-1

(ⅱ) 1 ╳ -3 → -6
2 ╳ 1 → 1(+
-5

(ⅲ) 1 ╳ -1 → -2
2 ╳ 3 → 3(+
1

(ⅳ) 1 ╳ 3 → 6
2 ╳ -1 → -1(+
5

이상에서 k의 값이 될 수 있는 수는 -5, -1, 1, 5이므로 가장 큰 수는 5이다. 답 5

430 a가 소수이므로

$ax^2+28x+15=(ax+b)(x+c)$ (b, c는 자연수)

로 놓으면

$ax^2+28x+15=ax^2+(ac+b)x+bc$

$\therefore ac+b=28$, $bc=15$

(ⅰ) $b=1$, $c=15$일 때,

$15a+1=28$에서 $a=\dfrac{9}{5}$

(ⅱ) $b=3$, $c=5$일 때,

$5a+3=28$에서 $a=5$

(ⅲ) $b=5$, $c=3$일 때,

$3a+5=28$에서 $a=\dfrac{23}{3}$

(ⅳ) $b=15$, $c=1$일 때,

$a+15=28$에서 $a=13$

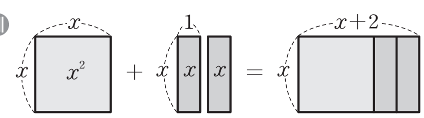
이상에서 a의 값이 될 수 있는 소수는 5, 13이므로 구하는 합은

$5+13=18$ 답 18

유형 087 인수분해의 도형에의 활용 (1) 본책 91쪽

여러 직사각형을 빈틈없이 겹치지 않게 붙여 새로운 직사각형을 만드는 경우

➜ 직사각형의 넓이의 합을 이용하여 식을 세운 후 인수분해하여 새로운 직사각형의 가로, 세로의 길이를 구한다.

예


➜ $x^2+2x=x(x+2)$

431 새로 만든 정사각형의 넓이는

$x^2+4x+4=(x+2)^2$

따라서 구하는 한 변의 길이는 $x+2$이다. 답 $x+2$

432 새로 만든 직사각형의 넓이는

$8x^2+18xy+9y^2=(2x+3y)(4x+3y)$

따라서 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각 $2x+3y$, $4x+3y$이므로 구하는 둘레의 길이는

$2\{(2x+3y)+(4x+3y)\}=12x+12y$ 답 ④

433 넓이가 x인 직사각형이 a개 더 필요하다고 할 때, 새로 만든 직사각형의 세로의 길이를 $2x+b$라 하면

$2x^2+(2+a)x+3=(x+3)(2x+b)$
$=2x^2+(6+b)x+3b$

이므로 $2+a=6+b$, $3=3b$

$\therefore a=5$, $b=1$

따라서 넓이가 x인 직사각형은 5개 더 필요하다. 답 5개

유형 088 인수분해의 도형에의 활용 (2)

본책 91쪽

주어진 도형의 넓이 또는 부피를 식으로 나타낸 후 인수분해하여 다항식의 곱으로 나타낸다.

434 주어진 삼각형의 높이를 A라 하면

$\frac{1}{2}\times(x+5)\times A=2x^2+9x-5$

$\frac{1}{2}A(x+5)=(x+5)(2x-1)$

$\therefore A=2(2x-1)=4x-2$

따라서 삼각형의 높이는 $4x-2$이다. 답 $4x-2$

435 $(\text{넓이})=\pi\left(\frac{9a}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{5b}{2}\right)^2$

$=\pi\left(\frac{9a}{2}+\frac{5b}{2}\right)\left(\frac{9a}{2}-\frac{5b}{2}\right)$

$=\frac{1}{4}\pi(9a+5b)(9a-5b)$ 답 ④

436 $9a^2-30a+25=(3a-5)^2$이므로 이 정사각형의 한 변의 길이는 $3a-5$ 또는 $-3a+5$이다.

이때 정사각형의 둘레의 길이가 40이므로

(i) 정사각형의 한 변의 길이가 $3a-5$일 때,

$4(3a-5)=40,\quad 3a-5=10\quad \therefore a=5$

(ii) 정사각형의 한 변의 길이가 $-3a+5$일 때,

$4(-3a+5)=40,\quad -3a+5=10\quad \therefore a=-\frac{5}{3}$

그런데 a는 정수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=5$ 답 5

유형 089 공통부분이 있는 식의 인수분해 (1)

본책 92쪽

❶ 공통부분을 한 문자로 놓고 인수분해한다.
❷ 문자에 원래의 식을 대입하여 정리한다.

437 $2x+1=A$로 놓으면

(주어진 식)$=2A^2-A-10$

$=(A+2)(2A-5)$

$=\{(2x+1)+2\}\{2(2x+1)-5\}$

$=(2x+3)(4x-3)$

따라서 $a=3$, $b=4$, $c=-3$이므로

$a+b+c=3+4+(-3)=4$ 답 ②

438 $a-b=A$로 놓으면

(주어진 식)$=A(A+8)+15$

$=A^2+8A+15$

$=(A+3)(A+5)$

$=(a-b+3)(a-b+5)$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ④이다. 답 ④

439 $(x-3y)^2+12x-36y+36$

$=(x-3y)^2+12(x-3y)+36$

$x-3y=A$로 놓으면

(주어진 식)$=A^2+12A+36$

$=(A+6)^2$

$=(x-3y+6)^2$ … 1단계

따라서 $a=-3$, $b=6$이므로 … 2단계

$a-b=-3-6=-9$ … 3단계

답 -9

단계	채점 요소	비율
1	주어진 식 인수분해하기	60 %
2	a, b의 값 구하기	30 %
3	$a-b$의 값 구하기	10 %

440 $x^2-2x=A$로 놓으면

(주어진 식)$=A^2-11A+24$

$=(A-3)(A-8)$

$=(x^2-2x-3)(x^2-2x-8)$

$=(x+1)(x-3)(x+2)(x-4)$

따라서 네 일차식의 합은

$(x+1)+(x-3)+(x+2)+(x-4)=4x-4$ 답 $4x-4$

유형 090 공통부분이 있는 식의 인수분해 (2)

본책 93쪽

주어진 식이 A^2-B^2의 꼴이거나 주어진 식에 공통부분이 2개 있는 경우
❶ 각각을 서로 다른 문자로 놓고 인수분해한다.
❷ 문자에 원래의 식을 대입하여 정리한다.

441 $a+b=A$, $a-b=B$로 놓으면

(주어진 식)

$=A^2-9B^2=A^2-(3B)^2$

$=(A+3B)(A-3B)$

$=\{(a+b)+3(a-b)\}\{(a+b)-3(a-b)\}$

$=(4a-2b)(-2a+4b)$

$=-4(2a-b)(a-2b)$ 답 ③

442 $x+5=A$, $x-2=B$로 놓으면

(주어진 식)

$=5A^2+9AB-2B^2$

$=(A+2B)(5A-B)$

$=\{(x+5)+2(x-2)\}\{5(x+5)-(x-2)\}$

$=(3x+1)(4x+27)$

따라서 두 일차식의 합은

$(3x+1)+(4x+27)=7x+28$ 답 $7x+28$

443 $x+1=A$, $x-2=B$로 놓으면

$P(x)=4A^2-4AB+B^2=(2A-B)^2$
$=\{2(x+1)-(x-2)\}^2=(x+4)^2$
$\therefore P(x)\times P(x-8)=(x+4)^2\{(x-8)+4\}^2$
$=(x+4)^2(x-4)^2$
$=\{(x+4)(x-4)\}^2$
$=(x^2-16)^2$

따라서 $P(x)\times P(x-8)$의 인수가 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

유형 091 ( )( )( )( )+k의 꼴의 인수분해 본책 93쪽

❶ 공통부분이 생기도록 2개씩 묶어 전개한다.
→ 상수항의 합이 같아지도록 묶는다.
❷ 공통부분을 한 문자로 놓고 인수분해한다.

444 $(x+1)(x+2)(x-2)(x+5)-28$
$=\{(x+1)(x+2)\}\{(x-2)(x+5)\}-28$
$=(x^2+3x+2)(x^2+3x-10)-28$
$x^2+3x=A$로 놓으면
(주어진 식)$=(A+2)(A-10)-28$
$=A^2-8A-48$
$=(A+4)(A-12)$
$=(x^2+3x+4)(x^2+3x-12)$ 답 ③

445 (주어진 식)$=\{x(x+2)\}\{(x-1)(x+3)\}-40$
$=(x^2+2x)(x^2+2x-3)-40$
$x^2+2x=A$로 놓으면
(주어진 식)$=A(A-3)-40$
$=A^2-3A-40$
$=(A+5)(A-8)$
$=(x^2+2x+5)(x^2+2x-8)$
$=(x^2+2x+5)(x-2)(x+4)$
따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ③, ④이다.
답 ③, ④

446 (주어진 식)
$=\{(x-1)(x+4)\}\{(x-2)(x+5)\}+k$
$=(x^2+3x-4)(x^2+3x-10)+k$ … 1단계
$x^2+3x=A$로 놓으면
(주어진 식)$=(A-4)(A-10)+k$
$=A^2-14A+40+k$ … 2단계
위의 식이 완전제곱식이 되려면
$40+k=\left(-\frac{14}{2}\right)^2=49$ $\therefore k=9$ … 3단계
답 9

단계	채점 요소	비율
1	주어진 식을 공통부분이 생기도록 2개씩 묶어 전개하기	30 %
2	공통부분을 한 문자로 놓고 주어진 식 간단히 하기	40 %
3	k의 값 구하기	30 %

유형 092 항이 4개인 식의 인수분해 ; 2개의 항씩 묶기 본책 94쪽

항이 4개인 식에서 2개의 항씩 묶어 공통인 인수가 생기는 경우
➜ (2개의 항)+(2개의 항)으로 묶어 인수분해한다.

447 (주어진 식)$=a^2(a-1)-b^2(a-1)$
$=(a^2-b^2)(a-1)$
$=(a+b)(a-b)(a-1)$
따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ㄱ, ㄹ, ㅁ이다. 답 ④

448 (주어진 식)$=x^2(x+1)-4(x+1)$
$=(x^2-4)(x+1)$
$=(x+2)(x-2)(x+1)$
따라서 세 일차식의 합은
$(x+2)+(x-2)+(x+1)=3x+1$ 답 $3x+1$

449 $ab-ac-bc+c^2=a(b-c)-c(b-c)$
$=(a-c)(b-c)$
$a^2b-a^2c-b^3+b^2c=a^2(b-c)-b^2(b-c)$
$=(a^2-b^2)(b-c)$
$=(a+b)(a-b)(b-c)$
$ab^2-b^2c-ac^2+c^3=b^2(a-c)-c^2(a-c)$
$=(b^2-c^2)(a-c)$
$=(b+c)(b-c)(a-c)$
따라서 세 다항식의 공통인 인수는 $b-c$이다. 답 ⑤

유형 093 항이 4개인 식의 인수분해 ; 3개의 항씩 묶기 본책 94쪽

항 4개 중 3개가 완전제곱식으로 인수분해되는 경우
➜ (3개의 항)+(1개의 항) 또는 (1개의 항)+(3개의 항)으로 묶어 A^2-B^2의 꼴로 나타낸 후 인수분해한다.

450 (주어진 식)$=a^2-(9b^2+6bc+c^2)$
$=a^2-(3b+c)^2$
$=(a+3b+c)(a-3b-c)$ 답 ②

451 $16-9x^2+6xy-y^2=16-(9x^2-6xy+y^2)$
$=4^2-(3x-y)^2$
$=(4+3x-y)(4-3x+y)$
$\therefore A=4-3x+y$ 답 $4-3x+y$

452 $4x^2-4xy+y^2-1=(2x-y)^2-1^2$

$=(2x-y+1)(2x-y-1)$ ⋯ 1단계

$(2x-y)^2-2x+y-2=(2x-y)^2-(2x-y)-2$

$2x-y=A$로 놓으면

$(2x-y)^2-(2x-y)-2=A^2-A-2$

$=(A+1)(A-2)$

$=(2x-y+1)(2x-y-2)$

⋯ 2단계

따라서 두 다항식의 공통인 인수는 $2x-y+1$이므로

$a=2,\ b=1$ ⋯ 3단계

$\therefore\ a-b=2-1=1$ ⋯ 4단계

답 1

단계	채점 요소	비율
1	$4x^2-4xy+y^2-1$을 인수분해하기	30 %
2	$(2x-y)^2-2x+y-2$를 인수분해하기	40 %
3	$a,\ b$의 값 구하기	20 %
4	$a-b$의 값 구하기	10 %

유형 094 항이 5개 이상인 식의 인수분해

본책 95쪽

❶ 차수가 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다. 이때 문자의 차수가 모두 같으면 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

❷ 공통인수로 묶어 내거나 인수분해 공식을 이용하여 인수분해한다.

453 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

(주어진 식)$=(-x+6)y+(x^2-12x+36)$

$=-(x-6)y+(x-6)^2$

$=(x-6)(-y+x-6)$

$=(x-6)(x-y-6)$

답 ③

454 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

(주어진 식)$=x^2+(2y-6)x+y^2-6y+9$

$=x^2+2(y-3)x+(y-3)^2$

$y-3=A$로 놓으면

(주어진 식)$=x^2+2Ax+A^2$

$=(x+A)^2$

$=\{x+(y-3)\}^2$

$=(x+y-3)^2$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ③이다. 답 ③

다른 풀이 (주어진 식)$=(x^2+2xy+y^2)-6(x+y)+9$

$=(x+y)^2-6(x+y)+9$

$x+y=A$로 놓으면

(주어진 식)$=A^2-6A+9=(A-3)^2$

$=(x+y-3)^2$

455 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

(주어진 식)$=x^2+(-5y+4)x+4y^2+5y-21$

$=x^2-(5y-4)x+(y+3)(4y-7)$

$$\begin{array}{lll} 1 & -(y+3) & \to -(y+3) \\ 1 & -(4y-7) & \to \underline{-(4y-7)\ (+} \\ & & \quad -(5y-4) \end{array}$$

$=\{x-(y+3)\}\{x-(4y-7)\}$

$=(x-y-3)(x-4y+7)$

따라서 $a=-3,\ b=-4,\ c=7$이므로

$a-b+c=-3-(-4)+7=8$ 답 8

유형 095 인수분해 공식을 이용한 수의 계산

본책 95쪽

인수분해 공식을 이용할 수 있도록 수의 모양을 변형하여 계산한다.

456 $A=3.5^2-7\times12.5+12.5^2$

$=3.5^2-2\times3.5\times12.5+12.5^2$

$=(3.5-12.5)^2$

$=(-9)^2$

$=81$

$B=\sqrt{58^2-42^2}=\sqrt{(58+42)(58-42)}$

$=\sqrt{100\times16}=\sqrt{1600}=40$

$\therefore\ A+B=81+40=121$ 답 121

457 (주어진 식)

$=(21+19)(21-19)+(17+15)(17-15)$

$+(13+11)(13-11)$

$=40\times2+32\times2+24\times2$

$=(40+32+24)\times2$

$=96\times2$

$=192$ 답 ②

458 $15=x$로 놓으면

$15\times16\times17\times18+1$

$=x(x+1)(x+2)(x+3)+1$

$=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+1$

$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$ ⋯ 1단계

$x^2+3x=A$로 놓으면

$(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$

$=A(A+2)+1=A^2+2A+1$

$=(A+1)^2=(x^2+3x+1)^2$ ⋯ 2단계

$=(15^2+3\times15+1)^2=271^2$

따라서 구하는 자연수는 271이다. ⋯ 3단계

답 271

단계	채점 요소	비율
1	$15=x$로 놓고 공통부분이 생기도록 2개씩 묶어 전개하기	40 %
2	공통부분을 한 문자로 놓고 인수분해하기	40 %
3	자연수 구하기	20 %

459 (주어진 식)

$$=\frac{(2-1)(2+1)}{2\times2}\times\frac{(3-1)(3+1)}{3\times3}\times\frac{(4-1)(4+1)}{4\times4}\times\cdots\times\frac{(11-1)(11+1)}{11\times11}$$

$$=\frac{1\times3}{2\times2}\times\frac{2\times4}{3\times3}\times\frac{3\times5}{4\times4}\times\cdots\times\frac{10\times12}{11\times11}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{12}{11}$$

$$=\frac{6}{11}$$

답 $\frac{6}{11}$

460 (주어진 식)

$$=\sqrt{\frac{5^4(5^2+1)-(5^2+1)}{5^4-1}+\frac{(36+13)(36-13)}{7^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(5^4-1)(5^2+1)}{5^4-1}+\frac{49\times23}{7^2}}$$

$$=\sqrt{(5^2+1)+23}$$

$$=\sqrt{49}=7$$

답 7

유형 096 인수분해 공식을 이용한 수의 계산 ; 자연수의 약수 구하기 본책 96쪽

인수분해 공식을 이용하여 주어진 식을 계산하여 수의 곱의 꼴로 변형한다.

461 $2^{16}-1=(2^8+1)(2^8-1)$

$=(2^8+1)(2^4+1)(2^4-1)$

$=(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2^2-1)$

$=257\times17\times5\times3$

따라서 주어진 수의 약수가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

462 $3^{12}-1=(3^6+1)(3^6-1)$

$=(3^6+1)(3^3+1)(3^3-1)$

따라서 $3^{12}-1$은 $3^3-1=26$, $3^3+1=28$로 나누어떨어지므로 구하는 합은

$26+28=54$ 답 54

463 $17^3-5\times17^2-4\times17+20$

$=17^2(17-5)-4(17-5)$

$=(17^2-4)(17-5)$

$=(17+2)(17-2)(17-5)$

$=19\times15\times12$

$=2^2\times3^2\times5\times19$

① $34=2\times17$ ② $38=2\times19$ ③ $42=2\times3\times7$

④ $46=2\times23$ ⑤ $50=2\times5^2$

따라서 주어진 수의 약수인 것은 ②이다. 답 ②

유형 097 인수분해 공식을 이용하여 식의 값 구하기 본책 96쪽

❶ 주어진 식을 인수분해한다.

❷ 조건으로 주어진 문자의 값을 바로 대입하거나 변형하여 대입한다.

464 $\frac{3x-6y}{x^2-4xy+4y^2}=\frac{3(x-2y)}{(x-2y)^2}=\frac{3}{x-2y}$

$=\frac{3}{(1+3\sqrt{2})-2(-1+3\sqrt{2})}$

$=\frac{3}{3-3\sqrt{2}}=\frac{1}{1-\sqrt{2}}$

$=\frac{1+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=\frac{1+\sqrt{2}}{1-2}$

$=-1-\sqrt{2}$ 답 ①

465 $x^2-y^2+4y-4=x^2-(y^2-4y+4)$

$=x^2-(y-2)^2$

$=\{x+(y-2)\}\{x-(y-2)\}$

$=(x+y-2)(x-y+2)$

$=(3-2)(\sqrt{3}+2)$

$=\sqrt{3}+2$ 답 $\sqrt{3}+2$

466 $x^2y+xy^2+4x+4y=xy(x+y)+4(x+y)$

$=7(x+y)+4(x+y)$

$=11(x+y)=99$

이므로 $x+y=9$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=9^2-2\times7$

$=81-14=67$ 답 ②

467 $\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}$, 즉 $3<\sqrt{10}<4$이므로 $\sqrt{10}$의 정수 부분은 3이고 소수 부분은 $\sqrt{10}-3$이다.

$\therefore x=\sqrt{10}-3$ … 1단계

$x+1=A$로 놓으면

(주어진 식)$=A^2+4A+4=(A+2)^2$

$=\{(x+1)+2\}^2=(x+3)^2$ … 2단계

$=(\sqrt{10}-3+3)^2$

$=(\sqrt{10})^2=10$ … 3단계

답 10

단계	채점 요소	비율
1	$\sqrt{10}$의 소수 부분 구하기	40 %
2	주어진 식 인수분해하기	40 %
3	x의 값을 대입하여 식의 값 구하기	20 %

유형 098 인수분해를 이용한 자연수의 추론

본책 97쪽

두 수의 곱으로 이루어진 자연수가 소수이면 두 수 중 하나는 1임을 이용한다.

468 $p=n^2+8n-48=(n+12)(n-4)$

이때 p가 소수이므로

$n+12=1$ 또는 $n-4=1$

$\therefore n=-11$ 또는 $n=5$

그런데 n은 자연수이므로 $n=5$

$n=5$일 때, $p=17$

$\therefore n+p=5+17=22$

답 22

469 $m+n=A$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=A^2+2A-80\\&=(A-8)(A+10)\\&=(m+n-8)(m+n+10)\end{aligned}$$

이때 주어진 식의 값이 소수이므로

$m+n-8=1$ 또는 $m+n+10=1$

$\therefore m+n=9$ 또는 $m+n=-9$

그런데 m, n은 자연수이므로 $m+n=9$

(i) m, n이 1과 8일 때, $mn=8$

(ii) m, n이 2와 7일 때, $mn=14$

(iii) m, n이 3과 6일 때, $mn=18$

(iv) m, n이 4와 5일 때, $mn=20$

이상에서 mn의 값이 될 수 없는 것은 ②이다.

답 ②

470 $x+y=A$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=A^2+2A-120\\&=(A-10)(A+12)\\&=(x+y-10)(x+y+12)\end{aligned}$$

(i) $x+y-10=1$, 즉 $x+y=11$일 때,

$x+y+12=23$

이때 (주어진 식)$=23$, 즉 소수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $x+y-10=2$, 즉 $x+y=12$일 때,

$x+y+12=24$

이때 (주어진 식)$=48$이므로 두 자리의 합성수이고, 이를 만족시키는 순서쌍 (x, y)는

$(1, 11)$, $(2, 10)$, $(3, 9)$, $(4, 8)$, $(5, 7)$

의 5개이다.

(iii) $x+y-10=3$, 즉 $x+y=13$일 때,

$x+y+12=25$

이때 (주어진 식)$=75$이므로 두 자리의 합성수이고, 이를 만족시키는 순서쌍 (x, y)는

$(1, 12)$, $(2, 11)$, $(3, 10)$, $(4, 9)$, $(5, 8)$, $(6, 7)$

의 6개이다.

(iv) $x+y-10\geq 4$, 즉 $x+y\geq 14$일 때,

$x+y+12\geq 26$

이때 (주어진 식)≥ 104, 즉 세 자리 이상이므로 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 순서쌍 (x, y)의 개수는

$5+6=11$

답 ③

만점 공략 노트

합성수: 1보다 큰 자연수 중에서 소수가 아닌 수를 합성수라 한다.

만점 유형 도전하기

본책 98~99쪽

471 전략 인수분해 공식을 이용하여 좌변을 인수분해해 본다.

덕훈: $3(x-1)(2x+5)-8x=3(2x^2+3x-5)-8x$

$$\begin{aligned}&=6x^2+x-15\\&=(2x-3)(3x+5)\end{aligned}$$

보미: $18ax^2-8a=2a(9x^2-4)$

$$=2a(3x+2)(3x-2)$$

성완: $(x^2-2x)(x^2+4x+3)+9$

$$\begin{aligned}&=x(x-2)(x+1)(x+3)+9\\&=\{x(x+1)\}\{(x-2)(x+3)\}+9\\&=(x^2+x)(x^2+x-6)+9\end{aligned}$$

$x^2+x=A$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=A(A-6)+9\\&=A^2-6A+9\\&=(A-3)^2\\&=(x^2+x-3)^2\end{aligned}$$

따라서 잘못 인수분해한 사람은 덕훈, 성완이다.

답 풀이 참조

472 전략 삼각형의 세 변의 길이와 내접원의 반지름의 길이를 이용하여 삼각형의 넓이를 나타낸다.

△ABC의 둘레의 길이가 $2(2x+7)$이므로

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=2(2x+7)$

△ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\begin{aligned}\triangle ABC&=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times r+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times r+\frac{1}{2}\times\overline{CA}\times r\\&=\frac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})\times r\\&=\frac{1}{2}\times 2(2x+7)\times r\\&=(2x+7)r\end{aligned}$$

이때 △ABC의 넓이가 $6x^2+19x-7=(2x+7)(3x-1)$이므로

$(2x+7)r=(2x+7)(3x-1)$

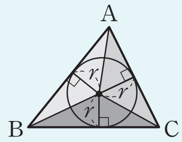
$2x+7\neq 0$이므로 $r=3x-1$

따라서 내접원의 반지름의 길이는 $3x-1$이다.

답 $3x-1$

만점 공략 노트

$\triangle$ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면



$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times r+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times r+\frac{1}{2}\times\overline{CA}\times r=\frac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})\times r$$

473 전략 $\sqrt{A}$가 자연수가 되려면 A는 (자연수)^{2}의 꼴이어야 함을 이용한다.

모든 경우의 수는 $\quad 6\times6=36$

$\sqrt{ab-3a-2b+6}=\sqrt{a(b-3)-2(b-3)}=\sqrt{(a-2)(b-3)}$이므로 이 식이 자연수가 되려면 $(a-2)(b-3)$이 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

이때 $1\le a\le6$, $1\le b\le6$이므로

(i) $(a-2)(b-3)=1$일 때,
순서쌍 (a, b)는 $(1, 2)$, $(3, 4)$의 2가지

(ii) $(a-2)(b-3)=4$일 때,
순서쌍 (a, b)는 $(4, 5)$, $(6, 4)$의 2가지

(iii) $(a-2)(b-3)=9$일 때,
순서쌍 (a, b)는 $(5, 6)$의 1가지

이상에서 $\sqrt{ab-3a-2b+6}$이 자연수가 되는 경우의 수는
$2+2+1=5$

따라서 구하는 확률은 $\quad \frac{5}{36}$ 답 $\frac{5}{36}$

474 전략 먼저 인수분해되는 식을 인수분해하여 공통인 인수가 될 수 있는 일차식을 구한다.

$x^2-(a+1)x+a=(x-1)(x-a)$이므로
$x^2-(a+3)x+a+3$은 $x-1$ 또는 $x-a$로 나누어떨어진다.

(i) $x-1$로 나누어떨어질 때,
$x^2-(a+3)x+a+3=(x-1)(x-m)$ (m은 상수)으로 놓으면
$$x^2-(a+3)x+a+3=x^2-(m+1)x+m$$
즉 $a+3=m+1$, $a+3=m$이므로
$$m=m+1$$
이것을 만족시키는 m은 없다.

(ii) $x-a$로 나누어떨어질 때,
$x^2-(a+3)x+a+3=(x-a)(x-n)$ (n은 상수)으로 놓으면
$$x^2-(a+3)x+a+3=x^2-(a+n)x+an$$
즉 $a+3=a+n$, $a+3=an$이므로
$a+3=a+n$에서 $\quad n=3$
$n=3$을 $a+3=an$에 대입하면
$$a+3=3a \qquad \therefore a=\frac{3}{2}$$

(i), (ii)에서 $\quad a=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

475 전략 x의 계수가 1이고 상수항이 정수인 두 일차식의 곱을 $(x+a)(x+b)$ (a, b는 정수)로 놓고 등식을 세운 후 a, b에 대한 조건을 구한다.

두 정수 a, b $(a>b)$에 대하여
$$x^2-8x-n=(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$
로 놓으면 $\quad a+b=-8$, $ab=-n$
이때 $10\le n\le99$이므로 $\quad -99\le -n\le -10$
$\therefore -99\le ab\le -10$
즉 a와 b는 서로 다른 부호이고 $a>b$이므로
$a>0$, $b<0$
이때 $a+b=-8$, $-99\le ab\le -10$을 만족시키는 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는
$(2, -10)$, $(3, -11)$, $(4, -12)$, $(5, -13)$, $(6, -14)$
이다.
따라서 두 자리 자연수 n은 20, 33, 48, 65, 84의 5개이다.

답 5

476 전략 반지름의 길이가 r인 원의 둘레의 길이는 $2\pi r$, 넓이는 πr^2임을 이용하여 식을 세운다.

원 모양의 호수의 반지름의 길이를 r m라 하면 원 모양의 중앙선의 반지름의 길이는 $\left(r+\frac{a}{2}\right)$ m이고, 이 둘레의 길이가 18π m이므로
$$2\pi\times\left(r+\frac{a}{2}\right)=18\pi$$
$$\therefore 2r+a=18 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
길의 넓이가 72π m^{2}이므로
$$\pi(r+a)^2-\pi r^2=72\pi$$
$$\pi\{(r+a)+r\}\{(r+a)-r\}=72\pi$$
$$(2r+a)a=72, \qquad 18a=72\ (\because ㉠)$$
$$\therefore a=4$$
답 4

477 전략 분모를 $(a-b)(b-c)(c-a)$로 통분한다.

$$(\text{주어진 식})=\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{(b-c)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=-1$$
답 -1

478 전략 거북이의 위치를 좌표로 나타낸 후 x좌표와 y좌표를 각각 나누어 생각한다.

거북이의 위치를 좌표로 나타내면 첫째 날은 $(1^2, 0)$, 둘째 날은 $(1^2, 2^2)$, 셋째 날은 $(1^2-3^2, 2^2)$, 넷째 날은 $(1^2-3^2, 2^2-4^2)$, …이다.

출발한 지 12일 후의 거북이의 위치를 (a, b)라 하면

$a=1^2-3^2+5^2-7^2+9^2-11^2$
$=(1+3)(1-3)+(5+7)(5-7)+(9+11)(9-11)$
$=-2(4+12+20)=-72$

$b=2^2-4^2+6^2-8^2+10^2-12^2$
$=(2+4)(2-4)+(6+8)(6-8)+(10+12)(10-12)$
$=-2(6+14+22)=-84$

따라서 구하는 좌표는 $(-72, -84)$이다. 답 $(-72, -84)$

시험 만점 완성하기

본책 100~103쪽

479 전략 공통인 인수로 묶어 인수분해한다.

$ab(a+2b)-ab(2a+b)=ab\{(a+2b)-(2a+b)\}$
$=ab(-a+b)$
$=-ab(a-b)$

따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ③, ④이다.

답 ③, ④

480 전략 $x^2+mx+n\ (n>0)$이 완전제곱식이 되려면 $m=\pm2\sqrt{n}$, $n=\left(\dfrac{m}{2}\right)^2$임을 이용한다.

$x^2+ax+64=x^2+ax+8^2$에서

$a=\pm(2\times1\times8)=\pm16$

$9x^2+(b+2)x+4=(3x)^2+(b+2)x+2^2$에서

$b+2=\pm(2\times3\times2)=\pm12$

$\therefore b=10$ 또는 $b=-14$

따라서 $a+b$의 값 중 가장 큰 값은

$16+10=26$ 답 ③

481 전략 근호 안의 식을 인수분해한 후 $\sqrt{A^2}=\begin{cases} A\ (A\ge0) \\ -A\ (A<0)\end{cases}$임을 이용하여 근호를 없앤다.

$\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+4}+\sqrt{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4}$

$=\sqrt{x^2-2+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+4}+\sqrt{x^2+2+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2-4}$

$=\sqrt{x^2+2+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}+\sqrt{x^2-2+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}$

$=\sqrt{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2}+\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2}$

이때 $0<x<1$에서 $\dfrac{1}{x}>1$이므로

$x+\dfrac{1}{x}>0,\ x-\dfrac{1}{x}<0$

$\therefore$ (주어진 식)$=\sqrt{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2}+\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2}$

$=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

$=x+\dfrac{1}{x}-x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{x}$ 답 ④

482 전략 x의 계수가 1이고 상수항이 정수인 두 일차식의 곱을 $(x+m)(x+n)$ (m, n은 정수)으로 놓고 등식을 세운 후 m, n에 대한 조건을 구한다.

$x^2-x-k=(x+m)(x+n)$ (m, n은 정수, $m>n$)이라 하면

$x^2-x-k=x^2+(m+n)x+mn$

즉 $m+n=-1$, $mn=-k$인 두 정수 m, n에 대하여

$m=1$, $n=-2$일 때, $k=2$
$m=2$, $n=-3$일 때, $k=6$
$m=3$, $n=-4$일 때, $k=12$
⋮
$m=9$, $n=-10$일 때, $k=90$

따라서 조건을 만족시키는 다항식은

$x^2-x-2,\ x^2-x-6,\ x^2-x-12,\ \cdots,\ x^2-x-90$

의 9개이다. 답 ②

483 전략 인수분해 공식을 이용하여 좌변을 인수분해한다.

$x^2-8x+15=(x-3)(x-5)$이므로

$a=-5$

$x^2-144=x^2-12^2=(x+12)(x-12)$이므로

$b=12$

$15x^2-2x-8=(3x+2)(5x-4)$이므로

$c=2$

$\therefore a+b+c=-5+12+2=9$ 답 ②

484 전략 먼저 인수분해되는 식을 인수분해하여 공통인 인수가 될 수 있는 일차식을 구한다.

$x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$이므로 x^2+ax-5, x^2-3x+b는 $x-1$ 또는 $x+4$를 인수로 갖는다.

(i) $x-1$을 공통인 인수로 가질 때,

$x^2+ax-5=(x-1)(x+m)$ (m은 상수)으로 놓으면

$x^2+ax-5=x^2+(m-1)x-m$

이므로 $a=m-1$, $-5=-m$

$\therefore m=5$, $a=4$

$x^2-3x+b=(x-1)(x+n)$ (n은 상수)으로 놓으면

$x^2-3x+b=x^2+(n-1)x-n$

이므로 $-3=n-1$, $b=-n$

$\therefore n=-2$, $b=2$

(ii) $x+4$를 공통인 인수로 가질 때,

$x^2+ax-5=(x+4)(x+l)$ (l은 상수)로 놓으면

$x^2+ax-5=x^2+(l+4)x+4l$

이므로 $a=l+4$, $-5=4l$

$\therefore l=-\dfrac{5}{4}$, $a=\dfrac{11}{4}$

$x^2-3x+b=(x+4)(x+k)$ (k는 상수)로 놓으면

$$x^2-3x+b=x^2+(k+4)x+4k$$

이므로 $\quad -3=k+4,\ b=4k$

$$\therefore k=-7,\ b=-28$$

그런데 a, b는 정수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=4$, $b=2$이므로

$ab=4\times2=8$ 답 ④

485 전략 제대로 본 x의 계수와 상수항을 각각 구한다.

하송이는 상수항을 제대로 보았으므로

$$(x-4)(x-5)=x^2-9x+20$$

에서 처음 이차식의 상수항은 20이다.

나운이는 x의 계수를 제대로 보았으므로

$$(x-5)(x-7)=x^2-12x+35$$

에서 처음 이차식의 x의 계수는 -12이다.

따라서 처음 이차식을 바르게 인수분해하면

$x^2-12x+20=(x-2)(x-10)$ 답 ①

486 전략 사다리꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\{$(윗변의 길이)$+$(아랫변의 길이)$\}\times$(높이)

임을 이용하여 식을 세운 후 인수분해한다.

사다리꼴의 윗변의 길이를 A라 하면 아랫변의 길이는 $A+8$이므로 넓이는

$$\frac{1}{2}\{A+(A+8)\}(2x+1)=6x^2+11x+4$$

$$\frac{1}{2}(2A+8)(2x+1)=(2x+1)(3x+4)$$

$$A+4=3x+4 \qquad \therefore A=3x$$

따라서 윗변의 길이는 $3x$, 아랫변의 길이는 $3x+8$이다.

이때 $3x>0$, 즉 $x>0$에서 $3x+8>2x+1$이므로 구하는 차는

$(3x+8)-(2x+1)=x+7$ 답 ③

487 전략 공통부분을 한 문자로 놓고 인수분해한다.

$(x+2)^2-3(x+2)-10$에서 $x+2=A$로 놓으면

$$\begin{aligned}(x+2)^2-3(x+2)-10&=A^2-3A-10\\&=(A+2)(A-5)\\&=\{(x+2)+2\}\{(x+2)-5\}\\&=(x+4)(x-3)\end{aligned}$$

$(4x+7)^2-(3x+10)^2$에서 $4x+7=B$, $3x+10=C$로 놓으면

$$\begin{aligned}&(4x+7)^2-(3x+10)^2\\&=B^2-C^2\\&=(B+C)(B-C)\\&=\{(4x+7)+(3x+10)\}\{(4x+7)-(3x+10)\}\\&=(7x+17)(x-3)\end{aligned}$$

따라서 두 다항식의 공통인 인수는 $x-3$이다. 답 ①

488 전략 x에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

x에 대하여 내림차순으로 정리하면

(주어진 식)

$=x^2-3x-(y^2+5y+4)$

$=x^2-3x-(y+1)(y+4)$

$$\begin{array}{lll} 1 & y+1 & \to\ y+1 \\ 1 & -(y+4) & \to\ \underline{-(y+4)}\ (+ \\ & & \quad -3 \end{array}$$

$=\{x+(y+1)\}\{x-(y+4)\}$

$=(x+y+1)(x-y-4)$

따라서 $a=1$, $b=-1$, $c=-4$이므로

$a+b+c=1+(-1)+(-4)=-4$ 답 ①

489 전략 $f(x)$를 분모가 x^2이 되도록 통분한 후 분자를 인수분해한다.

$f(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$이므로

$f(2)\times f(3)\times f(4)\times\cdots\times f(20)$

$=\dfrac{(2-1)(2+1)}{2\times2}\times\dfrac{(3-1)(3+1)}{3\times3}\times\dfrac{(4-1)(4+1)}{4\times4}$

$\quad\times\cdots\times\dfrac{(20-1)(20+1)}{20\times20}$

$=\dfrac{1\times3}{2\times2}\times\dfrac{2\times4}{3\times3}\times\dfrac{3\times5}{4\times4}\times\cdots\times\dfrac{19\times21}{20\times20}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{21}{20}=\dfrac{21}{40}$ 답 ⑤

490 전략 한 자연수를 x로 놓고 나머지 자연수를 x에 대한 식으로 나타낸 후 인수분해 공식을 이용하여 정리한다.

$20=x$로 놓으면

$20\times21\times22\times23+1$

$=x(x+1)(x+2)(x+3)+1$

$=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+1$

$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$

$x^2+3x=A$로 놓으면

$(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$

$=A(A+2)+1=A^2+2A+1$

$=(A+1)^2=(x^2+3x+1)^2$

$=(20^2+3\times20+1)^2=461^2$

$\therefore$ (주어진 식)$=\sqrt{461^2}=461$ 답 ②

491 전략 $1+\sqrt{3}$의 정수 부분을 먼저 구한 후 (소수 부분)$=(1+\sqrt{3})-$(정수 부분)임을 이용하여 소수 부분을 구한다.

$1<\sqrt{3}<2$에서 $2<1+\sqrt{3}<3$이므로 $1+\sqrt{3}$의 정수 부분은 2이고 소수 부분은 $(1+\sqrt{3})-2=\sqrt{3}-1$이다.

$\therefore a=2,\ b=\sqrt{3}-1$

$$\begin{aligned}\therefore a^2-b^2-2b-1&=a^2-(b^2+2b+1)\\&=a^2-(b+1)^2\\&=(a+b+1)(a-b-1)\\&=\{2+(\sqrt{3}-1)+1\}\{2-(\sqrt{3}-1)-1\}\\&=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2\\&=4-3=1\end{aligned}$$

답 ①

492 전략 인수분해가 되는 식을 먼저 인수분해한 후 주어진 식의 값을 대입한다.

$x^2-49y^2=x^2-(7y)^2=(x+7y)(x-7y)$
$=(x+7y)\times16=32$
이므로 $x+7y=2$
$x+7y=2$, $x-7y=16$을 연립하여 풀면
$x=9$, $y=-1$
$\therefore x-y=9-(-1)=10$ 답 ④

493 전략 근호 안의 식을 인수분해한 후
$\sqrt{A^2}=\begin{cases} A\ (A\ge0) \\ -A\ (A<0)\end{cases}$임을 이용하여 근호를 없앤다.

$A=\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-4x+4}$
$=\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}$
ㄱ. $x<-1$이면 $x+1<0$, $x-2<0$이므로
$A=-(x+1)-(x-2)$
$=-x-1-x+2=-2x+1$
ㄴ. $-1\le x<2$이면 $x+1\ge0$, $x-2<0$이므로
$A=(x+1)-(x-2)$
$=x+1-x+2=3$
ㄷ. $x\ge2$이면 $x+1>0$, $x-2\ge0$이므로
$A=(x+1)+(x-2)=2x-1$
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

494 전략 도형 A의 넓이를 먼저 구한 후 이 넓이와 도형 B의 넓이가 같음을 이용하여 도형 B의 세로의 길이를 구한다.

도형 A의 넓이는
$(4x+1)^2-2^2=\{(4x+1)+2\}\{(4x+1)-2\}$
$=(4x+3)(4x-1)$
이때 도형 B는 도형 A와 넓이가 같고, 가로의 길이가 $4x+3$이므로 세로의 길이는 $4x-1$이다. 답 $4x-1$

495 전략 공통부분을 한 문자로 놓고 공통인 인수를 이용하여 등식을 세운다.

$x+y=X$로 놓으면
$A=X^2+(X-4)+a=X^2+X+a-4$,
$B=X(X-2)+b=X^2-2X+b$
이때 두 다항식 A, B는 모두 $x+y+3=X+3$을 인수로 갖는다.
$A=X^2+X+a-4=(X+3)(X+m)$ (m은 상수)으로 놓으면
$X^2+X+a-4=X^2+(m+3)X+3m$
이므로 $1=m+3$, $a-4=3m$
$\therefore m=-2$, $a=-2$
$B=X^2-2X+b=(X+3)(X+n)$ (n은 상수)으로 놓으면
$X^2-2X+b=X^2+(n+3)X+3n$
이므로 $-2=n+3$, $b=3n$
$\therefore n=-5$, $b=-15$
$\therefore a-b=-2-(-15)=13$ 답 13

496 전략 먼저 좌변에서 공통부분이 생기도록 2개씩 묶어 전개한다.

(좌변)$=\{(x-1)(x+3)\}\{(x-3)(x+5)\}+36$
$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-15)+36$
$x^2+2x=A$로 놓으면
(좌변)$=(A-3)(A-15)+36=A^2-18A+81$
$=(A-9)^2=(x^2+2x-9)^2$
따라서 $a=2$, $b=-9$이므로
$ab=2\times(-9)=-18$ 답 -18

497 전략 분모가 같은 항끼리 묶어서 계산한다.

(주어진 식)
$=\frac{3^2-1^2}{2}+\frac{5^2-3^2}{4}+\frac{7^2-5^2}{6}+\cdots+\frac{21^2-19^2}{20}$
$=\frac{(3+1)(3-1)}{2}+\frac{(5+3)(5-3)}{4}+\frac{(7+5)(7-5)}{6}$
$+\cdots+\frac{(21+19)(21-19)}{20}$
$=\frac{4\times2}{2}+\frac{8\times2}{4}+\frac{12\times2}{6}+\cdots+\frac{40\times2}{20}$
$=\underbrace{4+4+4+\cdots+4}_{10개}=4\times10=40$ 답 40

498 전략 인수분해 공식을 이용하여 주어진 수를 변형한 후 소인수를 구해 본다.

$6^4-1=(6^2+1)(6^2-1)$
$=(6^2+1)(6+1)(6-1)$
$=37\times7\times5$
따라서 $x=37$이므로
$x^2+6x+9=(x+3)^2=(37+3)^2=40^2=1600$ 답 1600

499 전략 타일의 넓이의 합을 이용하여 식을 세운 후 인수분해하여 새로운 직사각형의 가로, 세로의 길이를 구한다.

타일 C를 k장 이용한다고 하면 새로 만든 직사각형의 넓이는
x^2+6x+k … 1단계
이때 $1\le k\le10$이므로
(i) $x^2+6x+k=(x+1)(x+5)$일 때, $k=5$
(ii) $x^2+6x+k=(x+2)(x+4)$일 때, $k=8$
(iii) $x^2+6x+k=(x+3)^2$일 때, $k=9$ … 2단계
이상에서 만들 수 있는 서로 다른 모양의 직사각형은 3개이다.
… 3단계
답 3

단계	채점 요소	배점
1	타일 C를 k장 이용한다고 하고 직사각형의 넓이를 식으로 나타내기	2점
2	조건을 만족시키는 k의 값 구하기	3점
3	서로 다른 모양의 직사각형의 개수 구하기	1점

500 전략 주어진 식의 좌변은 두 일차식의 곱, 우변은 정수가 되도록 나타내어 본다.

$xy-2x-2y-1=0$에서 $x(y-2)-2(y-2)=5$

$(x-2)(y-2)=5$ … 1단계

(i) $x-2=-5$, $y-2=-1$일 때, $x=-3$, $y=1$

(ii) $x-2=-1$, $y-2=-5$일 때, $x=1$, $y=-3$

(iii) $x-2=1$, $y-2=5$일 때, $x=3$, $y=7$

(iv) $x-2=5$, $y-2=1$일 때, $x=7$, $y=3$

이상에서 순서쌍 (x, y)는 $(-3, 1)$, $(1, -3)$, $(3, 7)$, $(7, 3)$의 4개이다. … 2단계

답 4

단계	채점 요소	배점
1	주어진 식의 좌변은 두 일차식의 곱, 우변은 정수로 나타내기	2점
2	순서쌍 (x, y)의 개수 구하기	2점

501 전략 공통부분이 생기도록 주어진 식을 적절히 변형하거나 x에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해한다.

(1) (주어진 식)$=(x+2y)^2-3(x+2y)+2$

$x+2y=A$로 놓으면

(주어진 식)$=A^2-3A+2=(A-1)(A-2)$

$=(x+2y-1)(x+2y-2)$ … 1단계

(2) x에 대하여 내림차순으로 정리하면

(주어진 식)$=x^2+(4y-3)x+4y^2-6y+2$

$=x^2+(4y-3)x+(2y-1)(2y-2)$

$=(x+2y-1)(x+2y-2)$ … 2단계

답 풀이 참조

단계	채점 요소	배점
1	공통부분을 한 문자로 놓고 인수분해하기	2점
2	x에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하기	2점

502 전략 두 자연수 a, b의 곱으로 이루어진 자연수 ab가 소수이면 $a=1$ 또는 $b=1$임을 이용한다.

$x+y=A$로 놓으면

(주어진 식)$=A^2+2A-63$

$=(A-7)(A+9)$

$=(x+y-7)(x+y+9)$ … 1단계

이때 주어진 식의 값이 소수이므로

$x+y-7=1$ 또는 $x+y+9=1$

$\therefore x+y=8$ 또는 $x+y=-8$

그런데 x, y는 자연수이므로 $x+y=8$ … 2단계

(i) x, y가 1과 7일 때, $xy=7$

(ii) x, y가 2와 6일 때, $xy=12$

(iii) x, y가 3과 5일 때, $xy=15$

(iv) x, y가 모두 4일 때, $xy=16$

이상에서 xy의 값 중 가장 큰 값은 16이다. … 3단계

답 16

단계	채점 요소	배점
1	주어진 식 인수분해하기	2점
2	$x+y$의 값 구하기	2점
3	xy의 값 중 가장 큰 값 구하기	1점

III. 이차방정식

06 이차방정식의 풀이

셀프 CHECK

본책 106~107쪽

A (1) $-\frac{1}{2}x^2=3$에서 $-\frac{1}{2}x^2-3=0$

(2) 등식이 아니므로 이차방정식이 아니다.

(3) $x^3-2x-5=-4x^2+x^3$에서 $4x^2-2x-5=0$

답 (1) ○ (2) × (3) ○

B ㄱ. $x=4$를 주어진 이차방정식에 대입하면

$(4-4)(4+2)=0$

ㄴ. $x=4$를 주어진 이차방정식에 대입하면

$4^2-4\times4=0$

ㄷ. $x=4$를 주어진 이차방정식에 대입하면

$2\times4^2+4-1\neq0$

이상에서 $x=4$를 해로 갖는 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

C (1) $(x-2)(x-6)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=6$

(2) $x^2+4x-5=0$에서 $(x+5)(x-1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=1$

(3) $4x^2-9x-9=0$에서 $(4x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-\frac{3}{4}$ 또는 $x=3$

답 (1) $x=2$ 또는 $x=6$ (2) $x=-5$ 또는 $x=1$ (3) $x=-\frac{3}{4}$ 또는 $x=3$

D (1) $(x+8)^2=0$에서 $x=-8$

(2) $x^2-14x=-49$에서 $x^2-14x+49=0$

$(x-7)^2=0$ $\therefore x=7$

(3) $25x^2+20x+4=0$에서 $(5x+2)^2=0$

$\therefore x=-\frac{2}{5}$

답 (1) $x=-8$ (2) $x=7$ (3) $x=-\frac{2}{5}$

E (1) $x^2=5$에서 $x=\pm\sqrt{5}$

(2) $-3x^2+6=0$에서 $-3x^2=-6$

$x^2=2$ $\therefore x=\pm\sqrt{2}$

(3) $2(x-3)^2=18$에서 $(x-3)^2=9$

$x-3=\pm3$ $\therefore x=0$ 또는 $x=6$

답 (1) $x=\pm\sqrt{5}$ (2) $x=\pm\sqrt{2}$ (3) $x=0$ 또는 $x=6$

F (1) $x^2-6x-4=0$에서

$x^2-6x=4$, $x^2-6x+9=4+9$

$(x-3)^2=13$, $x-3=\pm\sqrt{13}$

$\therefore x=3\pm\sqrt{13}$

06 이차방정식의 풀이

(2) $2x^2+3x-1=0$의 양변을 2로 나누면

$$x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=0, \quad x^2+\frac{3}{2}x=\frac{1}{2}$$

$$x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=\frac{1}{2}+\frac{9}{16}, \quad \left(x+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{17}{16}$$

$$x+\frac{3}{4}=\pm\frac{\sqrt{17}}{4} \quad \therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$$

(3) $3x^2-6x+2=0$의 양변을 3으로 나누면

$$x^2-2x+\frac{2}{3}=0, \quad x^2-2x=-\frac{2}{3}$$

$$x^2-2x+1=-\frac{2}{3}+1, \quad (x-1)^2=\frac{1}{3}$$

$$x-1=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \therefore x=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 (1) $x=3\pm\sqrt{13}$ (2) $x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$ (3) $x=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

내신 유형 다지기

본책 108~117쪽

유형 099 이차방정식의 뜻

본책 108쪽

x에 대한 이차방정식
➜ (x에 대한 이차식)$=0$의 꼴
➜ $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)의 꼴

503 ㄱ. 일차방정식이다.
ㄴ. $(1+x)(1-x)=x^2$에서

$$1-x^2=x^2 \quad \therefore -2x^2+1=0$$

ㄷ. 등식이 아니므로 이차방정식이 아니다.
ㄹ. 분모에 x에 대한 식이 있으므로 이차방정식이 아니다.
ㅁ. $x(2x-1)=2x$에서

$$2x^2-x=2x \quad \therefore 2x^2-3x=0$$

ㅂ. $-x^3=x(4-x^2)+8$에서

$$-x^3=4x-x^3+8 \quad \therefore -4x-8=0$$

이상에서 이차방정식인 것은 ㄴ, ㅁ의 2개이다. 답 ②

만점 공략 노트

주어진 식이 이차방정식인지 확인하려면 등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하였을 때 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)의 꼴이어야 한다. 이때 $x+1$, x^2-x와 같이 등식이 아니거나 $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$과 같이 분모에 x에 대한 식이 있는 경우 이차방정식이 아니다.

504 $(x+3)^2=(x+2)(3x-1)+2x$에서

$$x^2+6x+9=3x^2+5x-2+2x$$

$$\therefore 2x^2+x-11=0$$

따라서 $a=1$, $b=-11$이므로

$$ab=1\times(-11)=-11$$

답 -11

505 $(x+5)(ax-2)=3x^2+2$에서

$$ax^2+(-2+5a)x-10=3x^2+2$$

$$\therefore (a-3)x^2+(-2+5a)x-12=0$$

이 방정식이 x에 대한 이차방정식이 되려면

$$a-3\neq0 \quad \therefore a\neq3$$

답 ③

유형 100 이차방정식의 해

본책 108쪽

$x=p$가 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해이다.
➜ $x=p$를 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면 등식이 성립한다.
➜ $ap^2+bp+c=0$

506 [ ] 안의 수를 각 이차방정식에 대입하면
① $(-1)^2+(-1)+3\neq0$
② $3^2-4\times3-12\neq0$
③ $3\times(-2)^2+6\times(-2)=0$
④ $3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2-4\neq0$
⑤ $(-4-3)\times(-8+7)=7$
따라서 [ ] 안의 수가 주어진 이차방정식의 해인 것은 ③, ⑤이다. 답 ③, ⑤

507 ① $x=-\frac{1}{2}$을 주어진 이차방정식에 대입하면

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)\neq0$$

② $x=1$을 주어진 이차방정식에 대입하면

$$2\times1^2+3\times1+1\neq0$$

③ $x=-\frac{1}{2}$을 주어진 이차방정식에 대입하면

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\neq4\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1$$

④ $x=1$을 주어진 이차방정식에 대입하면

$$4\times1^2-5\neq4\times1-2$$

⑤ $x=1$을 주어진 이차방정식에 대입하면

$$1\times(2\times1-1)=1$$

$x=-\frac{1}{2}$을 주어진 이차방정식에 대입하면

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left\{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right\}=1$$

따라서 $x=1$, $x=-\frac{1}{2}$을 모두 해로 갖는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

508 x의 값은 -2, -1, 0, 1
$x=-2$를 주어진 이차방정식에 대입하면

$$(-2)^2-3\times(-2)-4\neq0$$

$x=-1$을 주어진 이차방정식에 대입하면

$$(-1)^2-3\times(-1)-4=0$$

$x=0$을 주어진 이차방정식에 대입하면

$$0^2-3\times0-4\neq0$$

$x=1$을 주어진 이차방정식에 대입하면

$1^2-3\times1-4\neq0$

따라서 주어진 이차방정식의 해는 $x=-1$이다. 답 $x=-1$

유형 101 이차방정식의 한 근이 주어졌을 때 미지수의 값 구하기

본책 109쪽

미지수를 포함한 이차방정식의 한 근이 주어지면 주어진 근을 이차방정식에 대입하여 미지수의 값을 구한다.

예 이차방정식 $x^2+x+a=0$의 한 근이 $x=2$일 때

➜ $2^2+2+a=0$ $\therefore a=-6$

509 $x=-3$을 $2x^2+x+a=0$에 대입하면

$2\times(-3)^2+(-3)+a=0$ $\therefore a=-15$

$x=4$를 $(b+1)x^2-3bx-8=0$에 대입하면

$(b+1)\times4^2-3b\times4-8=0$

$4b+8=0$ $\therefore b=-2$

$\therefore ab=-15\times(-2)=30$ 답 30

510 $x=\frac{1}{3}$을 $6x^2+ax+b=0$에 대입하면

$6\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}a+b=0$

$\therefore a+3b=-2$ ...... ㉠

$x=2$를 $2x^2-bx+a-1=0$에 대입하면

$2\times2^2-2b+a-1=0$

$\therefore a-2b=-7$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5,\ b=1$

$\therefore a+b=-5+1=-4$ 답 ①

511 $x=-1$을 $(a-b)x^2-(2a-3)x-4b=0$에 대입하면

$(a-b)\times(-1)^2-(2a-3)\times(-1)-4b=0$

$\therefore 3a-5b=3$ ...... ㉠ ··· 1단계

$x=3$을 $(a-b)x^2-(2a-3)x-4b=0$에 대입하면

$(a-b)\times3^2-(2a-3)\times3-4b=0$

$\therefore 3a-13b=-9$ ...... ㉡ ··· 2단계

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{7}{2},\ b=\frac{3}{2}$ ··· 3단계

$\therefore a-b=\frac{7}{2}-\frac{3}{2}=2$ ··· 4단계

답 2

단계	채점 요소	비율
1	$x=-1$을 주어진 이차방정식에 대입하기	30 %
2	$x=3$을 주어진 이차방정식에 대입하기	30 %
3	a, b의 값 구하기	30 %
4	$a-b$의 값 구하기	10 %

512 $x=1$을 $(m+2)x^2+amx-b=0$에 대입하면

$m+2+am-b=0$

$\therefore (a+1)m-b+2=0$

이 식이 실수 m의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$a+1=0,\ -b+2=0$

$\therefore a=-1,\ b=2$

$\therefore ab=-1\times2=-2$ 답 ①

만점 공략 노트

미지수가 어떤 값을 갖더라도 항상 참이 되는 등식을 항등식이라 한다.

① $ax+b=0$이 x에 대한 항등식이다. ➜ $a=0,\ b=0$

② $ax+b=cx+d$가 x에 대한 항등식이다. ➜ $a=c,\ b=d$

유형 102 이차방정식의 한 근이 문자로 주어졌을 때 식의 값 구하기

본책 109쪽

x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $x=p$이면

$p^2+ap+b=0$ ...... ㉠

이므로 다음과 같이 ㉠을 변형하여 나타낼 수 있다.

① ㉠의 좌변의 b를 이항하면 $p^2+ap=-b$

② ㉠의 양변을 $p(p\neq0)$로 나누어 정리하면

$p+\frac{b}{p}=-a$

513 $x=\alpha$를 $x^2-4x-2=0$에 대입하면

$\alpha^2-4\alpha-2=0$ $\therefore \alpha^2-4\alpha=2$

① $\alpha^2-4\alpha+2=2+2=4$

② $3\alpha^2-12\alpha=3(\alpha^2-4\alpha)=3\times2=6$

③ $8+8\alpha-2\alpha^2=8-2(\alpha^2-4\alpha)=8-2\times2=4$

④ $\alpha\neq0$이므로 $\alpha^2-4\alpha-2=0$의 양변을 α로 나누면

$\alpha-4-\frac{2}{\alpha}=0$ $\therefore \alpha-\frac{2}{\alpha}=4$

⑤ $\alpha^2-4\alpha-2=0$에서 $\alpha^2=4\alpha+2$이므로

$\frac{1}{2}\alpha^2+1=\frac{1}{2}(4\alpha+2)+1=2\alpha+2$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

514 $x=p$를 $2x^2+x-3=0$에 대입하면

$2p^2+p-3=0$ $\therefore 2p^2+p=3$

$x=q$를 $x^2-5x+1=0$에 대입하면

$q^2-5q+1=0,$ $q^2-5q=-1$

$\therefore -2q^2+10q=-2(q^2-5q)=-2\times(-1)=2$

$\therefore (2p^2+p+1)(-2q^2+10q+3)$

$=(3+1)\times(2+3)=20$ 답 20

515 $x=\alpha$를 $x^2+x-3=0$에 대입하면

$\alpha^2+\alpha-3=0$

$\therefore\ a^2-3=-a,\ 3-a=a^2$

$\therefore\ \dfrac{-2a}{a^2-3}+\dfrac{5a^2}{3-a}=\dfrac{-2a}{-a}+\dfrac{5a^2}{a^2}=2+5=7$ 답 7

516 $x^2-2x-5=4x-4$에서

$x^2-6x-1=0$

$x=a$를 $x^2-6x-1=0$에 대입하면

$a^2-6a-1=0$

이때 $a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면

$a-6-\dfrac{1}{a}=0 \qquad \therefore\ a-\dfrac{1}{a}=6$ … 1단계

$\therefore\ a^2+\dfrac{1}{a^2}=\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2+2=6^2+2=38$ … 2단계

$\therefore\ 2a^2-a+\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}=2\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)-\left(a-\dfrac{1}{a}\right)$

$=2\times38-6=70$ … 3단계

답 70

단계	채점 요소	비율
1	$a-\dfrac{1}{a}$의 값 구하기	40 %
2	$a^2+\dfrac{1}{a^2}$의 값 구하기	40 %
3	$2a^2-a+\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}$의 값 구하기	20 %

517 $x=a$를 $2x^2-2x-1=0$에 대입하면

$2a^2-2a-1=0 \qquad \therefore\ a^2-a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ 2a^5-2a^4-a^3+a^2-a+3$

$=a^3(2a^2-2a-1)+(a^2-a)+3$

$=a^3\times0+\dfrac{1}{2}+3=\dfrac{7}{2}$ 답 ⑤

유형 103 이차방정식의 근이 문자로 주어졌을 때 미지수의 값 추론하기

본책 110쪽

❶ 주어진 근을 이차방정식에 대입하여 미지수에 대한 관계식을 구한다.

❷ ❶의 관계식을 만족시키는 미지수의 값을 구한다.

518 $x=m-n$을 $x^2+(2m+n)x-3mn=0$에 대입하면

$(m-n)^2+(2m+n)(m-n)-3mn=0$

$m^2-2mn+n^2+2m^2-mn-n^2-3mn=0$

$\therefore\ 3m^2-6mn=0$

$m\neq0$이므로 $3m^2-6mn=0$의 양변을 $3m$으로 나누면

$m-2n=0 \qquad \therefore\ m=2n$

이때 m, n은 30 이하의 자연수이므로 순서쌍 (m, n)은

$(2, 1), (4, 2), (6, 3), \cdots, (30, 15)$

의 15개이다. 답 15

519 $x=a+2b$를 $x^2-ax-5ab=0$에 대입하면

$(a+2b)^2-a(a+2b)-5ab=0$

$a^2+4ab+4b^2-a^2-2ab-5ab=0$

$\therefore\ 4b^2-3ab=0$

$b\neq0$이므로 $4b^2-3ab=0$의 양변을 b로 나누면

$4b-3a=0 \qquad \therefore\ b=\dfrac{3}{4}a$

이때 a, b는 자연수이므로 a는 4의 배수이어야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(4, 3), (8, 6), (12, 9), (16, 12), (20, 15)$

의 5개이다. 답 ④

520 $x=a+1$을 $x^2-(a-b)x-b=0$에 대입하면

$(a+1)^2-(a-b)(a+1)-b=0$

$a^2+2a+1-(a^2+a-ab-b)-b=0$

$a+ab+1=0 \qquad \therefore\ a(b+1)=-1$

이때 a, b는 정수이므로

$a=1,\ b+1=-1$ 또는 $a=-1,\ b+1=1$

$\therefore\ a=1,\ b=-2$ 또는 $a=-1,\ b=0$

$\therefore\ a+b=-1$ 답 -1

유형 104 $AB=0$의 성질을 이용한 이차방정식의 풀이

본책 111쪽

이차방정식 $(ax-b)(cx-d)=0$의 해

➜ $ax-b=0$ 또는 $cx-d=0$에서

$x=\dfrac{b}{a}$ 또는 $x=\dfrac{d}{c}$

521 ① $x=1$ 또는 $x=-\dfrac{3}{2}$

② $x=1$ 또는 $x=-\dfrac{2}{3}$

③ $x=-1$ 또는 $x=-\dfrac{3}{2}$

④ $x=-1$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}$

⑤ $x=-1$ 또는 $x=\dfrac{2}{3}$ 답 ③

522 ① $x=0$ 또는 $x=3$이므로 $\quad 0\times3=0$

② $x=-1$ 또는 $x=6$이므로 $\quad -1\times6=-6$

③ $x=-2$ 또는 $x=-3$이므로 $\quad -2\times(-3)=6$

④ $x=\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$이므로 $\quad \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

⑤ $x=12$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$이므로 $\quad 12\times\dfrac{1}{2}=6$

따라서 두 근의 곱이 6인 것은 ③, ⑤이다. 답 ③, ⑤

523 $(x+5)(x+2)=0$에서 $\quad x=-5$ 또는 $x=-2$

$(2x-1)(x+2)=0$에서 $\quad x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=-2$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=-5$이므로
$\alpha-2\beta=-2-2\times(-5)=8$ 답 8

유형 105 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이 본책 111쪽

❶ 주어진 이차방정식을 $ax^2+bx+c=0$의 꼴로 나타낸다.
❷ 좌변을 인수분해한다.
❸ $AB=0$의 성질을 이용하여 해를 구한다.

524 $3x^2-16x-12=0$에서
$(3x+2)(x-6)=0$
$\therefore x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=6$
이때 $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=6$, $\beta=-\frac{2}{3}$
$\therefore \alpha+3\beta=6+3\times\left(-\frac{2}{3}\right)=4$ 답 4

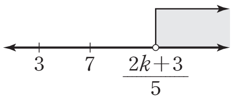
525 $(x+5)(x-4)+x^2+14=0$에서
$2x^2+x-6=0$, $(x+2)(2x-3)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=\frac{3}{2}$
따라서 두 근의 차는
$\frac{3}{2}-(-2)=\frac{7}{2}$ 답 ①

526 $x^2-6x+5=0$에서 $(x-1)(x-5)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=5$
두 근 중 큰 근은 $x=5$이므로 $\alpha=5$ … 1단계
$5x^2-x-6=0$에서 $(x+1)(5x-6)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{6}{5}$
두 근 중 정수인 근은 $x=-1$이므로 $\beta=-1$ … 2단계
$\therefore \alpha+\beta=5+(-1)=4$ … 3단계
답 4

단계	채점 요소	비율
1	α의 값 구하기	40 %
2	β의 값 구하기	40 %
3	$\alpha+\beta$의 값 구하기	20 %

527 $x^2-2x-8=0$에서 $(x+2)(x-4)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$
이때 $a<b$이므로 $a=-2$, $b=4$
따라서 $2x^2+(b+1)x+6a=0$, 즉 $2x^2+5x-12=0$에서
$(x+4)(2x-3)=0$
$\therefore x=-4$ 또는 $x=\frac{3}{2}$ 답 ①

528 $3(x-1)>2(k-x)$에서
$3x-3>2k-2x$, $5x>2k+3$
$\therefore x>\frac{2k+3}{5}$ …… ㉠
$x^2-10x+21=0$에서 $(x-3)(x-7)=0$
$\therefore x=3$ 또는 $x=7$ …… ㉡
㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x의 값이 존재하지 않으려면 오른쪽 그림에서



$\frac{2k+3}{5}\geq 7$, $2k+3\geq 35$
$2k\geq 32$ $\therefore k\geq 16$ 답 ⑤

529 $x^2-(a+3)x+3a=0$에서
$(x-3)(x-a)=0$
$\therefore x=3$ 또는 $x=a$
이때 $a<3$이므로 a와 3 사이에 있는 정수가 4개이려면 그 정수는 -1, 0, 1, 2이다.
따라서 정수 a의 값은 -2이다. 답 -2

유형 106 한 근이 주어졌을 때 다른 한 근 구하기 본책 112쪽

미지수를 포함한 이차방정식의 한 근이 $x=\alpha$이면
❶ $x=\alpha$를 주어진 방정식에 대입하여 미지수의 값을 구한다.
❷ ❶에서 구한 미지수의 값을 이차방정식에 대입한 후 이차방정식을 풀어 다른 한 근을 구한다.

530 $x=2$를 $x^2+(7a+2)x-6a=0$에 대입하면
$2^2+(7a+2)\times2-6a=0$
$8a+8=0$ $\therefore a=-1$
즉 $x^2-5x+6=0$에서 $(x-2)(x-3)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=3$
다른 한 근은 $x=3$이므로 $b=3$
$\therefore a+b=-1+3=2$ 답 ⑤

531 $x=3$을 $2x^2+ax+15=0$에 대입하면
$2\times3^2+3a+15=0$
$3a+33=0$ $\therefore a=-11$
즉 $2x^2-11x+15=0$에서 $(2x-5)(x-3)=0$
$\therefore x=\frac{5}{2}$ 또는 $x=3$
$\therefore b=\frac{5}{2}$
이때 $2bx^2-(a+2)x+4=0$, 즉 $5x^2+9x+4=0$에서
$(x+1)(5x+4)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=-\frac{4}{5}$
따라서 두 근의 차는 $-\frac{4}{5}-(-1)=\frac{1}{5}$ 답 $\frac{1}{5}$

532 $x=-2$를 $(k+3)x^2-2kx+k^2+3=0$에 대입하면

$(k+3)\times(-2)^2-2k\times(-2)+k^2+3=0$

$k^2+8k+15=0,\quad (k+5)(k+3)=0$

$\therefore k=-5$ 또는 $k=-3$

그런데 $k=-3$이면 x^2의 계수가 0이므로

$k=-5$ … 1단계

즉 $-2x^2+10x+28=0$에서

$x^2-5x-14=0,\quad (x+2)(x-7)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=7$

다른 한 근은 $x=7$이므로 $a=7$ … 2단계

$\therefore k+a=-5+7=2$ … 3단계

답 2

단계	채점 요소	비율
1	k의 값 구하기	50 %
2	a의 값 구하기	40 %
3	$k+a$의 값 구하기	10 %

533 $x=1$을 $ax^2+(a-2b)x+4b=0$에 대입하면

$a+a-2b+4b=0,\quad 2a+2b=0$

$\therefore b=-a$

$b=-a$를 $ax^2+(a-2b)x+4b=0$에 대입하면

$ax^2+3ax-4a=0$

$a(x^2+3x-4)=0$

$a(x+4)(x-1)=0$

$a=0$이면 x^2의 계수가 0이므로 $a\neq0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

따라서 다른 한 근은 $x=-4$이다. 답 $x=-4$

유형 107 한 근이 다른 이차방정식의 한 근일 때

본책 113쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근 중 한 근이 이차방정식 $a'x^2+b'x+c'=0$의 한 근이면

❶ $ax^2+bx+c=0$의 근을 구한다.

❷ ❶에서 구한 근 중에서 조건을 만족시키는 근 $x=\alpha$를 $a'x^2+b'x+c'=0$에 대입한다.

534 $x^2+2x-48=0$에서 $(x+8)(x-6)=0$

$\therefore x=-8$ 또는 $x=6$

즉 $x^2+(3a+1)x-8=0$의 한 근이 $x=-8$이므로

$(-8)^2+(3a+1)\times(-8)-8=0$

$-24a+48=0\quad \therefore a=2$

답 ③

535 $3x^2+7x+4=0$에서 $(3x+4)(x+1)=0$

$\therefore x=-\frac{4}{3}$ 또는 $x=-1$

즉 $x(x-a)+a^2-3=0$의 한 근이 $x=-1$이므로

$(-1)\times(-1-a)+a^2-3=0$

$a^2+a-2=0,\quad (a+2)(a-1)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=1$

따라서 모든 a의 값의 합은 $-2+1=-1$ 답 -1

536 $x=-3$을 $3x^2+ax+a-13=0$에 대입하면

$3\times(-3)^2+a\times(-3)+a-13=0$

$-2a+14=0\quad \therefore a=7$ … 1단계

즉 $3x^2+7x-6=0$에서 $(x+3)(3x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

따라서 $6x^2-x+b=0$의 한 근이 $x=\frac{2}{3}$이므로

$6\times\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{2}{3}+b=0$

$2+b=0\quad \therefore b=-2$ … 2단계

$\therefore a+b=7+(-2)=5$ … 3단계

답 5

단계	채점 요소	비율
1	a의 값 구하기	40 %
2	b의 값 구하기	40 %
3	$a+b$의 값 구하기	20 %

유형 108 두 이차방정식의 공통인 근

본책 113쪽

두 이차방정식의 공통인 근

→ 각각의 이차방정식을 푼 후 공통인 근을 찾는다.

537 $x^2-6x-27=0$에서 $(x+3)(x-9)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=9$

$5x^2+12x-9=0$에서 $(x+3)(5x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{3}{5}$

따라서 두 이차방정식을 동시에 만족시키는 해는 $x=-3$

답 $x=-3$

538 $4x^2-7x-2=0$에서 $(4x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{4}$ 또는 $x=2$

$8x^2+14x+3=0$에서 $(2x+3)(4x+1)=0$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-\frac{1}{4}$

따라서 두 이차방정식의 공통인 근은 $x=-\frac{1}{4}$

$x=-\frac{1}{4}$을 $8ax^2-4x+a-7=0$에 대입하면

$8a\times\left(-\frac{1}{4}\right)^2-4\times\left(-\frac{1}{4}\right)+a-7=0$

$\frac{3}{2}a-6=0\quad \therefore a=4$

답 ④

539 $x=-6$을 $x^2+ax-18=0$에 대입하면

$(-6)^2+a\times(-6)-18=0$

$-6a+18=0$ $\quad\therefore a=3$

즉 $x^2+3x-18=0$에서 $\quad(x+6)(x-3)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=3$

공통이 아닌 근은 $x=3$이므로 $\quad p=3$

$x=-6$을 $2x^2+9x+b=0$에 대입하면

$2\times(-6)^2+9\times(-6)+b=0$

$\therefore b=-18$

즉 $2x^2+9x-18=0$에서 $\quad(x+6)(2x-3)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

공통이 아닌 근은 $x=\frac{3}{2}$이므로 $\quad q=\frac{3}{2}$

$\therefore a+b+2pq=3+(-18)+2\times3\times\frac{3}{2}=-6$ 답 -6

유형 109 중근을 갖는 이차방정식 본책 114쪽

이차방정식이 $a(x-m)^2=0$의 꼴로 나타내어지면 이 이차방정식은 중근 $x=m$을 갖는다.

540 ㄱ. $(x-1)^2=1$에서 $\quad x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=2$

ㄴ. $4x^2=4x-1$에서 $\quad 4x^2-4x+1=0$

$(2x-1)^2=0$ $\quad\therefore x=\frac{1}{2}$

ㄷ. $x^2=9$에서 $\quad x^2-9=0$

$(x+3)(x-3)=0$ $\quad\therefore x=-3$ 또는 $x=3$

ㄹ. $4x+5=2(x+2)^2-1$에서 $\quad 2x^2+4x+2=0$

$2(x+1)^2=0$ $\quad\therefore x=-1$

이상에서 중근을 갖는 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

541 $x^2-10x+25=0$에서 $\quad(x-5)^2=0$

$\therefore x=5$ $\quad\therefore \alpha=5$

$16x^2-24x+9=0$에서 $\quad(4x-3)^2=0$

$\therefore x=\frac{3}{4}$ $\quad\therefore \beta=\frac{3}{4}$

$\therefore 4\alpha\beta=4\times5\times\frac{3}{4}=15$ 답 15

542 ① $(x+2)^2=0$에서 $\quad x=-2$

② $4x^2-1=0$에서 $\quad(2x+1)(2x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

③ $(2x+1)^2=1$에서 $\quad 4x^2+4x=0$

$4x(x+1)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=-1$

④ $9x^2-9x+1=3x-3$에서 $\quad 9x^2-12x+4=0$

$(3x-2)^2=0$ $\quad\therefore x=\frac{2}{3}$

⑤ $2x^2+12x=-18$에서 $\quad 2x^2+12x+18=0$

$2(x+3)^2=0$ $\quad\therefore x=-3$

따라서 중근을 갖는 이차방정식과 그때의 중근을 바르게 구한 것은 ⑤이다. 답 ⑤

유형 110 이차방정식이 중근을 가질 조건 본책 114쪽

이차방정식 $x^2+Ax+B=0$이 중근을 갖는다.

➜ $x^2+Ax+B=0$이 (완전제곱식)$=0$의 꼴로 나타내어진다.

➜ $B=\left(\frac{A}{2}\right)^2$ ← (상수항)$=\left(\frac{x\text{의 계수}}{2}\right)^2$

543 $x^2-6x+3-2a=0$이 중근을 가지므로

$3-2a=\left(\frac{-6}{2}\right)^2$, $\quad -2a=6$ $\quad\therefore a=-3$

또 $x^2+12x+b+12=0$이 중근을 가지므로

$b+12=\left(\frac{12}{2}\right)^2$ $\quad\therefore b=24$

$\therefore a+b=-3+24=21$ 답 ⑤

544 $2x^2+2x-5a+3=0$의 양변을 2로 나누면

$x^2+x+\frac{-5a+3}{2}=0$

이 이차방정식이 중근을 가지므로

$\frac{-5a+3}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$-5a=-\frac{5}{2}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$ ··· 1단계

따라서 $x^2-2(a+2)x+12a=0$, 즉 $x^2-5x+6=0$에서

$(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$ ··· 2단계

답 $x=2$ 또는 $x=3$

단계	채점 요소	비율
1	a의 값 구하기	60 %
2	이차방정식 $x^2-2(a+2)x+12a=0$ 풀기	40 %

545 $3x^2+kx+12=0$의 양변을 3으로 나누면

$x^2+\frac{k}{3}x+4=0$

이 이차방정식이 중근을 가지므로

$4=\left(\frac{k}{6}\right)^2$, $\quad k^2=144$

$\therefore k=-12$ 또는 $k=12$

따라서 음수 k의 값은 -12이다. 답 ②

546 $\frac{1}{3}x^2+ax-a=0$의 양변에 3을 곱하면

$x^2+3ax-3a=0$

이 이차방정식이 중근을 가지므로

$$-3a=\left(\frac{3a}{2}\right)^2, \qquad -3a=\frac{9}{4}a^2$$
$$9a^2+12a=0, \qquad 3a(3a+4)=0$$
$$\therefore\ a=0 \text{ 또는 } a=-\frac{4}{3}$$
이때 $a=0$이면 주어진 이차방정식은 $x^2=0$이고 이 이차방정식은 중근 $x=0$을 가지므로 조건을 만족시키지 않는다.
$$\therefore\ a=-\frac{4}{3}$$
따라서 $x^2+3ax-3a=0$, 즉 $x^2-4x+4=0$에서
$$(x-2)^2=0 \qquad \therefore\ x=2$$
답 $a=-\frac{4}{3}$, $x=2$

547 $x^2+6x+ab=0$이 중근을 가지므로
$$ab=\left(\frac{6}{2}\right)^2=9$$
$x^2+(a-b)x+4ab=0$, 즉 $x^2+(a-b)x+36=0$이 중근을 가지므로
$$36=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \qquad \therefore\ (a-b)^2=144$$
$$\therefore\ a^2+b^2=(a-b)^2+2ab =144+2\times9=162$$
답 162

유형 111 제곱근을 이용한 이차방정식의 풀이 (본책 115쪽)

(1) $x^2=q\ (q\ge0)$의 해 ➜ $x=\pm\sqrt{q}$
(2) $ax^2=q\ (a\neq0,\ aq\ge0)$의 해 ➜ $x=\pm\sqrt{\frac{q}{a}}$
(3) $(x+p)^2=q\ (q\ge0)$의 해 ➜ $x=-p\pm\sqrt{q}$
(4) $a(x+p)^2=q\ (a\neq0,\ aq\ge0)$의 해 ➜ $x=-p\pm\sqrt{\frac{q}{a}}$

548 $3(x-6)^2=15$에서 $\quad (x-6)^2=5$
$$x-6=\pm\sqrt{5} \qquad \therefore\ x=6\pm\sqrt{5}$$
따라서 $a=6$, $b=5$이므로 $\quad a+b=6+5=11$
답 ①

549 $6(x+a)^2=b$에서 $\quad (x+a)^2=\frac{b}{6}$
$$x+a=\pm\sqrt{\frac{b}{6}} \qquad \therefore\ x=-a\pm\sqrt{\frac{b}{6}}$$
따라서 $-a=-2$, $\frac{b}{6}=7$이므로 $\quad a=2$, $b=42$
$$\therefore\ b-a=42-2=40$$
답 40

550 $\frac{1}{2}(x-3)^2=k$에서 $\quad (x-3)^2=2k$
$$x-3=\pm\sqrt{2k} \qquad \therefore\ x=3\pm\sqrt{2k}$$ … 1단계
이때 두 근의 차가 8이므로
$$(3+\sqrt{2k})-(3-\sqrt{2k})=8, \qquad 2\sqrt{2k}=8$$
$$\sqrt{2k}=4, \qquad 2k=16 \qquad \therefore\ k=8$$ … 2단계
답 8

단계	채점 요소	비율
1	이차방정식의 해를 $x=a\pm\sqrt{b}$의 꼴로 나타내기	40 %
2	k의 값 구하기	60 %

551 $9(x+2)^2=a^2$에서 $\quad (x+2)^2=\frac{a^2}{9}$
$$x+2=\pm\frac{a}{3}\ (\because\ a>0) \qquad \therefore\ x=-2\pm\frac{a}{3}$$
이때 $-2-\frac{a}{3}<0$이고 주어진 이차방정식의 두 근이 $x=3$ 또는 $x=b$이므로
$$-2+\frac{a}{3}=3,\ -2-\frac{a}{3}=b$$
따라서 $a=15$, $b=-7$이므로
$$a+b=15+(-7)=8$$
답 8

다른 풀이 $x=3$을 $9(x+2)^2=a^2$에 대입하면
$$9\times(3+2)^2=a^2, \qquad a^2=225$$
이때 $a>0$이므로 $\quad a=15$
따라서 $9(x+2)^2=225$에서
$$(x+2)^2=25, \qquad x+2=\pm5$$
$$\therefore\ x=-7 \text{ 또는 } x=3$$
$$\therefore\ b=-7$$
$$\therefore\ a+b=15+(-7)=8$$

유형 112 이차방정식 $(x+p)^2=q$가 근을 가질 조건 (본책 116쪽)

이차방정식 $(x+p)^2=q$가
(1) 서로 다른 두 근을 가질 조건 ➜ $q>0$
(2) 중근을 가질 조건 ➜ $q=0$
(3) 근을 갖지 않을 조건 ➜ $q<0$
참고 (1), (2)에서 이차방정식 $(x+p)^2=q$가 근을 가질 조건 ➜ $q\ge0$

552 ㄱ. $a\le5$, 즉 $5-a\ge0$이면 근을 갖는다.
ㄴ. $a=5$이면 $(x-4)^2=0$에서 $x=4$이므로 중근을 갖는다.
ㄷ. $a=6$이면 $(x-4)^2=-1$에서 근을 갖지 않는다.
ㄹ. $a=0$이면 $(x-4)^2=5$에서 $\quad x-4=\pm\sqrt{5}$
$$\therefore\ x=4\pm\sqrt{5}$$
이때 $2<\sqrt{5}<3$에서
$$6<4+\sqrt{5}<7,\ 1<4-\sqrt{5}<2$$
이므로 두 근은 모두 양수이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.
답 ④

553 $(x+3)^2=-2k+4$가 근을 가지려면
$$-2k+4\ge0, \qquad -2k\ge-4$$
$$\therefore\ k\le2$$
답 ①

554 $(x+3a)^2=a(a-1)-2$가 중근을 가지므로

$a(a-1)-2=0,\quad a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

(i) $a=-1$일 때,

$(x-3)^2=0$에서 $\quad x=3$

$\therefore b=3$

(ii) $a=2$일 때,

$(x+6)^2=0$에서 $\quad x=-6$

$\therefore b=-6$

(i), (ii)에서 모든 b의 값의 곱은

$3\times(-6)=-18$

답 -18

유형 113 이차방정식 $(x+p)^2=q$의 해에 대한 조건이 주어진 경우

본책 116쪽

❶ 제곱근을 이용하여 주어진 이차방정식의 해를 미지수를 포함한 식으로 나타낸다.
❷ 해의 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구한다.

555 $(x+3)^2=5k$에서 $\quad x+3=\pm\sqrt{5k}$

$\therefore x=-3\pm\sqrt{5k}$

해가 정수가 되려면 $k=5\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 하므로 가장 작은 두 자리 자연수 k의 값은

$5\times2^2=20$

답 20

556 $(x-8)^2=3k$에서 $\quad x-8=\pm\sqrt{3k}$

$\therefore x=8\pm\sqrt{3k}$ … 1단계

서로 다른 두 근이 모두 자연수가 되려면 $k=3\times(\text{자연수})^2$의 꼴이면서 $\sqrt{3k}$는 8보다 작아야 하므로

$\sqrt{3k}<8,\quad 3k<64\quad \therefore k<\frac{64}{3}$

따라서 자연수 k의 값은

$3\times1^2=3,\ 3\times2^2=12$ … 2단계

이므로 구하는 합은 $\quad 3+12=15$ … 3단계

답 15

단계	채점 요소	비율
1	이차방정식의 해를 $x=a\pm\sqrt{b}$의 꼴로 나타내기	40 %
2	k의 값 구하기	50 %
3	모든 k의 값의 합 구하기	10 %

557 $2(x-4)^2=24-2a$에서

$(x-4)^2=12-a,\quad x-4=\pm\sqrt{12-a}$

$\therefore x=4\pm\sqrt{12-a}$

해가 정수가 되려면 $12-a$는 0 또는 $(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.
이때 a는 자연수이므로 $12-a<12$에서

$12-a=0,\ 1,\ 4,\ 9\quad \therefore a=12,\ 11,\ 8,\ 3$

따라서 해가 정수가 되도록 하는 자연수 a의 개수는 4이다.

답 ③

유형 114 완전제곱식의 꼴로 나타내기

본책 117쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$을 다음과 같이 $(x+p)^2=q$의 꼴로 나타낼 수 있다.
❶ x^2의 계수 a로 양변을 나누어 x^2의 계수를 1로 만든다.
❷ 상수항을 우변으로 이항한다.
❸ 양변에 $\left(\frac{x\text{의 계수}}{2}\right)^2$을 더한다.
❹ $(x+p)^2=q$의 꼴로 나타낸다.

558 $-2x^2+8x+7=0$에서 $\quad x^2-4x-\frac{7}{2}=0$

$x^2-4x=\frac{7}{2},\quad x^2-4x+4=\frac{7}{2}+4$

$\therefore (x-2)^2=\frac{15}{2}$

따라서 $a=-2,\ b=\frac{15}{2}$이므로

$ab=-2\times\frac{15}{2}=-15$

답 -15

559 $3(x+1)^2-x(x+4)=9$에서 $\quad 2x^2+2x=6$

$x^2+x=3,\quad x^2+x+\frac{1}{4}=3+\frac{1}{4}$

$\therefore \left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$ … 1단계

따라서 $p=\frac{1}{2},\ q=\frac{13}{4}$이므로 … 2단계

$p+2q=\frac{1}{2}+2\times\frac{13}{4}=7$ … 3단계

답 7

단계	채점 요소	비율
1	$(x+p)^2=q$의 꼴로 나타내기	70 %
2	$p,\ q$의 값 구하기	20 %
3	$p+2q$의 값 구하기	10 %

유형 115 완전제곱식을 이용한 이차방정식의 풀이

본책 117쪽

❶ 주어진 이차방정식을 $(x+p)^2=q$의 꼴로 나타낸다.
❷ 이차방정식의 해는 $\quad x=-p\pm\sqrt{q}$

560 $3x^2+6x-4=0$의 양변을 3으로 나누면

$x^2+2x-\frac{4}{3}=0,\quad x^2+2x=\frac{4}{3}$

$x^2+2x+1=\frac{4}{3}+1$,　　$(x+1)^2=\frac{7}{3}$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{\frac{7}{3}}$

따라서 $A=3$, $B=1$, $C=1$, $D=\frac{7}{3}$이므로

$AD+BC=3\times\frac{7}{3}+1\times1=8$　　답 8

561 $x^2-12x+a=0$에서　　$x^2-12x=-a$

$x^2-12x+36=36-a$,　　$(x-6)^2=36-a$

$x-6=\pm\sqrt{36-a}$

$\therefore x=6\pm\sqrt{36-a}$

따라서 $b=6$, $36-a=5$이므로　　$a=31$, $b=6$

$\therefore a+b=31+6=37$　　답 ③

562 $2x^2+6x-3=0$의 양변을 2로 나누면

$x^2+3x-\frac{3}{2}=0$,　　$x^2+3x=\frac{3}{2}$

$x^2+3x+\frac{9}{4}=\frac{3}{2}+\frac{9}{4}$,　　$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{15}{4}$

$x+\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$　　$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{15}}{2}$

따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{15}{4}$, $c=-3$, $d=15$이므로

$(a+b)(c+d)=\left(\frac{3}{2}+\frac{15}{4}\right)\times(-3+15)=63$　　답 63

만점 유형 도전하기

본책 118~119쪽

563 전략 이차방정식의 뜻을 알고 이를 이용하여 이차방정식이 되기 위한 조건을 구한다.

(1) 등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하였을 때,

(x에 대한 이차식)$=0$

의 꼴로 나타내어지는 방정식을 x에 대한 이차방정식이라 한다.

(2) 주어진 방정식이 이차방정식이 되려면

$a(a-3)=0$이고 $a\neq0$

$\therefore a=3$

(3) $(a^2-a)x^2+ax=2x^2+3$에서

$(a^2-a-2)x^2+ax-3=0$

이 방정식이 이차방정식이 되려면

$a^2-a-2\neq0$,　　$(a+1)(a-2)\neq0$

$\therefore a\neq-1$이고 $a\neq2$

답 (1) 풀이 참조　(2) 3　(3) $a\neq-1$이고 $a\neq2$

564 전략 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면 두 직선 AB, AC의 기울기가 같음을 이용하여 이차방정식을 세운다.

세 점이 한 직선 위에 있으므로 두 직선 AB, AC의 기울기가 같다.

직선 AB의 기울기는　$\frac{(3a+2)-2}{(-4)-1}=\frac{3a}{-5}$

직선 AC의 기울기는　$\frac{(-a-5)-2}{a-1}=\frac{-a-7}{a-1}$

두 직선의 기울기가 같으므로

$\frac{3a}{-5}=\frac{-a-7}{a-1}$,　　$3a(a-1)=-5(-a-7)$

$3a^2-8a-35=0$,　　$(3a+7)(a-5)=0$

$\therefore a=-\frac{7}{3}$ 또는 $a=5$

따라서 양수 a의 값은 5이다.　　답 5

만점 공략 노트

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있을 때,

(두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기)

=(두 점 B, C를 지나는 직선의 기울기)

=(두 점 A, C를 지나는 직선의 기울기)

565 전략 주어진 점의 좌표를 일차함수의 식에 대입하여 이차방정식을 세운다.

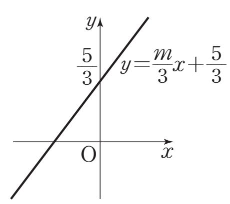
일차함수 $mx-3y=-5$의 그래프가 점 $(2m+2,\ m^2-1)$을 지나므로

$m(2m+2)-3(m^2-1)=-5$

$m^2-2m-8=0$,　　$(m+2)(m-4)=0$

$\therefore m=-2$ 또는 $m=4$

이때 일차함수 $mx-3y=-5$, 즉 $y=\frac{m}{3}x+\frac{5}{3}$의 그래프가 제4사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 (기울기)>0이어야 하므로



$\frac{m}{3}>0$　　$\therefore m>0$

따라서 구하는 m의 값은 4이다.　　답 4

만점 공략 노트

일차함수 $y=ax+b$의 그래프가

→ $\begin{cases}\text{오른쪽 위로 향하면} & a>0\\ \text{오른쪽 아래로 향하면} & a<0\end{cases}$

$\begin{cases}y\text{축과 양의 부분에서 만나면} & b>0\\ y\text{축과 음의 부분에서 만나면} & b<0\end{cases}$

566 전략 주어진 이차방정식을 $(x+p)^2=q$의 꼴로 나타낸다.

(1) 공에 적혀 있는 숫자를 k라 하면 $x^2-4x-k=0$에서

$x^2-4x=k$,　　$x^2-4x+4=k+4$

$(x-2)^2=k+4$,　　$x-2=\pm\sqrt{k+4}$

$\therefore x=2\pm\sqrt{k+4}$

해가 자연수가 되려면 $k+4=$(자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

이때 k는 20 이하의 자연수이므로

$k+4=9,\ 16$　　$\therefore k=5,\ 12$

즉 5 또는 12가 적힌 공을 뽑으면 상품을 받을 수 있으므로 상품을 받을 확률은

$\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

(2) $x=2+\sqrt{k+4}$에서 k의 값이 클수록 해도 커지므로 $k=12$일 때 가장 큰 자연수인 해를 갖는다.

따라서 12가 적힌 공을 뽑아야 한다.

답 (1) $\frac{1}{10}$ (2) 12

567 전략 $99\times101=(100-1)(100+1)$임을 이용하여 주어진 이차방정식을 인수분해한다.

$99\times101=(100-1)(100+1)=100^2-1$이므로

$100^2x^2+99\times101x-1=0$에서

$100^2x^2+(100^2-1)x-1=0$

$(x+1)(100^2x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{100^2}$

두 근 중 작은 근은 $x=-1$이므로 $\alpha=-1$

$99\times101x^2-2x-1=0$에서

$(101x+1)(99x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{101}$ 또는 $x=\frac{1}{99}$

두 근 중 큰 근은 $x=\frac{1}{99}$이므로 $\beta=\frac{1}{99}$

$\therefore \beta-\alpha=\frac{1}{99}-(-1)=\frac{100}{99}$

답 $\frac{100}{99}$

568 전략 $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\ge0) \\ -a & (a<0)\end{cases}$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 정리한다.

(1) $x<-\frac{1}{2}$이면 $x-1<0$, $2x+1<0$이므로

$x^2-(x-1)=4-(2x+1)$

$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

이때 $x<-\frac{1}{2}$이므로 $x=-2$

(2) $-\frac{1}{2}\le x<1$이면 $x-1<0$, $2x+1\ge0$이므로

$x^2-(x-1)=4+(2x+1)$

$x^2-3x-4=0$, $(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

이때 $-\frac{1}{2}\le x<1$이므로 해가 없다.

(3) $x\ge1$이면 $x-1\ge0$, $2x+1\ge0$이므로

$x^2+(x-1)=4+(2x+1)$

$x^2-x-6=0$, $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

이때 $x\ge1$이므로 $x=3$

답 (1) $x=-2$ (2) 해가 없다. (3) $x=3$

569 전략 인수분해를 이용하여 주어진 방정식을 풀어서 $\langle x\rangle$의 값을 먼저 구한다.

$\langle x\rangle^2-2\langle x\rangle-8=0$에서

$(\langle x\rangle+2)(\langle x\rangle-4)=0$

$\therefore \langle x\rangle=-2$ 또는 $\langle x\rangle=4$

이때 $\langle x\rangle$는 개수이므로 음이 아닌 정수이다.

$\therefore \langle x\rangle=4$

$\langle x\rangle=4$이려면 x보다 작은 소수가 2, 3, 5, 7이어야 하므로 자연수 x의 값은

8, 9, 10, 11

따라서 모든 x의 값의 합은

$8+9+10+11=38$

답 38

570 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β이면
→ $a\alpha^2+b\alpha+c=0$, $a\beta^2+b\beta+c=0$

$2x^2-3x-2=0$의 두 근이 α, β이므로

$2\alpha^2-3\alpha-2=0$, $2\beta^2-3\beta-2=0$

또 $2x^2-3x-2=0$에서

$(2x+1)(x-2)=0$ $\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

$\therefore \alpha+\beta=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$

$\therefore 2f(n+2)-3f(n+1)-2f(n)+2f(1)$

$=2(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2})-3(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-2(\alpha^n+\beta^n)+2(\alpha+\beta)$

$=(2\alpha^{n+2}-3\alpha^{n+1}-2\alpha^n)+(2\beta^{n+2}-3\beta^{n+1}-2\beta^n)+2(\alpha+\beta)$

$=\alpha^n(2\alpha^2-3\alpha-2)+\beta^n(2\beta^2-3\beta-2)+2(\alpha+\beta)$

$=\alpha^n\times0+\beta^n\times0+2\times\frac{3}{2}=3$

답 3

시험 만점 완성하기

본책 120~123쪽

571 전략 등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 후 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)의 꼴이 아닌 것을 찾는다.

② $x(5+x)=0$에서 $x^2+5x=0$

③ $\frac{x^2}{3}=\frac{x^2}{2}$에서 $\frac{x^2}{3}-\frac{x^2}{2}=0$ $\therefore -\frac{1}{6}x^2=0$

④ $(1-x)(x+2)=-x^2+3x-9$에서

$-x^2-x+2=-x^2+3x-9$

$\therefore -4x+11=0$

⑤ $x^3-x^2+4x=x(x^2+3x)-1$에서

$x^3-x^2+4x=x^3+3x^2-1$

$\therefore -4x^2+4x+1=0$

따라서 이차방정식이 아닌 것은 ④이다.

답 ④

572 전략 $x=\frac{1}{2}$을 각각의 이차방정식에 대입하여 등식이 성립하는 것을 찾는다.

ㄱ. $\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\neq1$

ㄴ. $\left(2\times\frac{1}{2}-1\right)^2=0$

ㄷ. $4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{2}+1=1$

ㄹ. $\frac{1}{2}\times\left(2\times\frac{1}{2}+5\right)\neq2$

이상에서 $x=\frac{1}{2}$을 해로 갖는 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ③

573 전략 이차방정식에 주어진 근을 대입하여 a, b의 관계식을 구한다.

$x=2$를 $3x^2-ax=2b$에 대입하면

$3\times2^2-2a=2b$

$2a+2b=12$ $\therefore a+b=6$

$x=1$을 $x^2+(ab+1)x=4$에 대입하면

$1+ab+1=4$ $\therefore ab=2$

$\therefore (a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

$=6^2-4\times2=28$

이때 $a>b$, 즉 $a-b>0$이므로

$a-b=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ 답 ③

574 전략 $x=\alpha$를 주어진 이차방정식에 대입한 후 식을 변형한다.

$x=\alpha$를 $x^2+3x-2=0$에 대입하면

$\alpha^2+3\alpha-2=0$ $\therefore \alpha^2+3\alpha=2$

$\alpha\neq0$이므로 $\alpha^2+3\alpha-2=0$의 양변을 α로 나누면

$\alpha+3-\frac{2}{\alpha}=0$ $\therefore \alpha-\frac{2}{\alpha}=-3$

$\therefore \alpha^2+\frac{4}{\alpha^2}=\left(\alpha-\frac{2}{\alpha}\right)^2+4=(-3)^2+4=13$

$\therefore 2\alpha^2+3\alpha+\frac{4}{\alpha^2}=\left(\alpha^2+\frac{4}{\alpha^2}\right)+(\alpha^2+3\alpha)$

$=13+2=15$ 답 ②

575 전략 $AB=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$임을 이용한다.

①, ②, ③ $x=-3$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

④ $3x^2+7x=6$에서 $3x^2+7x-6=0$

$(x+3)(3x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

⑤ $3x(x+2)=3-2x$에서 $3x^2+8x-3=0$

$(x+3)(3x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

따라서 해가 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다. 답 ⑤

576 전략 이차방정식의 좌변을 인수분해하여 해를 구한다.

$10x^2+19x-56=0$에서 $(2x+7)(5x-8)=0$

$\therefore x=-\frac{7}{2}$ 또는 $x=\frac{8}{5}$

따라서 두 근 사이에 있는 정수는

-3, -2, -1, 0, 1

의 5개이다. 답 ④

577 전략 x의 계수와 상수항을 바꾼 이차방정식에 주어진 한 근을 대입하여 a의 값을 구한다.

주어진 이차방정식의 x의 계수와 상수항을 바꾸면

$x^2+(7-a)x+3a=0$

$x=-3$을 위의 방정식에 대입하면

$(-3)^2+(7-a)\times(-3)+3a=0$

$6a-12=0$ $\therefore a=2$

따라서 처음 이차방정식은 $x^2+6x+5=0$이므로

$(x+5)(x+1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=-1$ 답 ①

578 전략 근이 주어진 이차방정식에 근을 대입하여 미지수의 값을 먼저 구한다.

$x=-1$을 $4x^2+5x+a=0$에 대입하면

$4\times(-1)^2+5\times(-1)+a=0$ $\therefore a=1$

즉 $4x^2+5x+1=0$에서

$(x+1)(4x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-\frac{1}{4}$

따라서 $bx^2+(4a-3)x-2=0$, 즉 $bx^2+x-2=0$의 한 근이 $x=-\frac{1}{4}$이므로

$b\times\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)-2=0$

$\frac{1}{16}b-\frac{9}{4}=0$ $\therefore b=36$

$\therefore a+b=1+36=37$ 답 ⑤

579 전략 이차방정식이 (완전제곱식)$=0$의 꼴로 나타내어지면 중근을 갖는다.

① $2x^2=0$에서 $x^2=0$ $\therefore x=0$

② $x^2=4$에서 $x^2-4=0$

$(x+2)(x-2)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

③ $(5x+1)^2=1$에서 $25x^2+10x=0$

$5x(5x+2)=0$ $\therefore x=-\frac{2}{5}$ 또는 $x=0$

④ $(2x-1)\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}\right)=0$에서

$2x-1=0$ 또는 $\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}=0$ $\therefore x=\frac{1}{2}$

⑤ $16x^2+24x+9=0$에서

$(4x+3)^2=0$ $\therefore x=-\frac{3}{4}$

따라서 중근을 갖지 않는 것은 ②, ③이다. 답 ②, ③

580 전략 이차방정식 $x^2+Ax+B=0$이 중근을 가지려면 $B=\left(\frac{A}{2}\right)^2$임을 이용한다.

$x^2-(k+3)x+5-k=0$이 중근을 가지므로

$$5-k=\left\{\frac{-(k+3)}{2}\right\}^2$$

$$4(5-k)=(k+3)^2, \qquad 20-4k=k^2+6k+9$$

$$k^2+10k-11=0, \qquad (k+11)(k-1)=0$$

$$\therefore k=-11 \text{ 또는 } k=1$$

(i) $k=-11$일 때,

$x^2+8x+16=0$에서 $\quad (x+4)^2=0$

$$\therefore x=-4 \qquad \therefore a=-4$$

(ii) $k=1$일 때,

$x^2-4x+4=0$에서 $\quad (x-2)^2=0$

$$\therefore x=2 \qquad \therefore a=2$$

이때 $a<0$이므로 (i), (ii)에서

$$k=-11,\ a=-4$$

$$\therefore k+a=-11+(-4)=-15$$

답 ②

581 전략 이차방정식 $(x+p)^2=q$가 서로 다른 두 근을 가지려면 $q>0$이어야 한다.

$-6(x-2)^2+8=a$에서 $\quad (x-2)^2=\frac{8-a}{6}$

이 이차방정식이 서로 다른 두 근을 가지려면

$$\frac{8-a}{6}>0, \qquad 8-a>0 \qquad \therefore a<8$$

따라서 정수 a의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

582 전략 이차방정식 $(x+p)^2=q\ (q\ge0)$의 해
➔ $x=-p\pm\sqrt{q}$

$9(x+2)^2=27-n$에서 $\quad (x+2)^2=\frac{27-n}{9}$

$$x+2=\pm\frac{\sqrt{27-n}}{3} \qquad \therefore x=-2\pm\frac{\sqrt{27-n}}{3}$$

해가 정수가 되려면 $\frac{\sqrt{27-n}}{3}$이 정수이어야 하므로 $\sqrt{27-n}$은 0 또는 3의 배수이어야 한다.

즉 $\sqrt{27-n}=0,\ 3,\ 6,\ \cdots$에서

$$27-n=0,\ 9,\ 36,\ \cdots$$

이때 n은 자연수이므로 $27-n<27$에서

$$27-n=0,\ 9 \qquad \therefore n=27,\ 18$$

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$$27+18=45$$

답 ④

583 전략 먼저 주어진 이차방정식의 양변에 적당한 수를 곱하여 x^2의 계수를 1로 만든다.

$\frac{2}{3}x^2-2x-1=0$의 양변에 $\frac{3}{2}$을 곱하면

$$x^2-3x-\frac{3}{2}=0, \qquad x^2-3x=\frac{3}{2}$$

$$x^2-3x+\frac{9}{4}=\frac{3}{2}+\frac{9}{4} \qquad \therefore \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{15}{4}$$

따라서 $a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{15}{4}$이므로

$$a+2b=-\frac{3}{2}+2\times\frac{15}{4}=6$$

답 ③

584 전략 등식의 좌변을 완전제곱식으로 만든다.

$5x^2-2x-2=0$의 양변을 5로 나누면

$$x^2-\frac{2}{5}x-\frac{2}{5}=0, \qquad x^2-\frac{2}{5}x=\frac{2}{5}$$

$$x^2-\frac{2}{5}x+\frac{1}{25}=\frac{2}{5}+\frac{1}{25}, \qquad \left(x-\frac{1}{5}\right)^2=\frac{11}{25}$$

$$x-\frac{1}{5}=\pm\frac{\sqrt{11}}{5} \qquad \therefore x=\frac{1\pm\sqrt{11}}{5}$$

따라서 $p=\frac{1}{25}$, $q=-\frac{1}{5}$, $r=11$, $s=1$이므로

$$(p+q)(r-s)=\left\{\frac{1}{25}+\left(-\frac{1}{5}\right)\right\}\times(11-1)=-\frac{8}{5}$$

답 ①

585 전략 $x=a$를 주어진 이차방정식에 대입한 후 식을 변형한다.

$x=a$를 $x^2+(1-3k)x+1=0$에 대입하면

$$a^2+(1-3k)a+1=0$$

$a\ne0$이므로 양변을 a로 나누면

$$a+(1-3k)+\frac{1}{a}=0$$

$$\therefore a+\frac{1}{a}=3k-1$$

이때 $a+\frac{1}{a}=2k$이므로 $\qquad 2k=3k-1$

$$\therefore k=1$$

답 1

586 전략 주어진 근을 이차방정식에 대입하여 a, b의 관계식을 구한다.

$x=a-b$를 $x^2+(a+2b)x-2b^2=0$에 대입하면

$$(a-b)^2+(a+2b)(a-b)-2b^2=0$$

$$a^2-2ab+b^2+a^2+ab-2b^2-2b^2=0$$

$$2a^2-ab-3b^2=0$$

$$(a+b)(2a-3b)=0$$

$$\therefore a+b=0 \text{ 또는 } 2a-3b=0$$

a, b는 자연수이므로 $\qquad a+b\ne0$

따라서 $2a-3b=0$, 즉 $b=\frac{2}{3}a$이다.

이때 a는 3의 배수이어야 하므로 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$$(3,\ 2),\ (6,\ 4),\ (9,\ 6),\ \cdots,\ (30,\ 20)$$

의 10개이다.

답 10

587 전략 연립방정식의 해가 존재하지 않을 조건을 이용하여 이차방정식을 세운다.

주어진 연립방정식의 해가 존재하지 않으므로

$$\frac{a}{8}=\frac{1}{3a-2}\ne\frac{-1}{6} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\frac{a}{8}=\frac{1}{3a-2}$에서 $\qquad a(3a-2)=8$

$3a^2-2a-8=0$, $\quad (3a+4)(a-2)=0$

$\therefore a=-\frac{4}{3}$ 또는 $a=2$

(ⅰ) $a=-\frac{4}{3}$일 때, $\frac{a}{8}=-\frac{4}{3}\times\frac{1}{8}=-\frac{1}{6}$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a=2$일 때, $\frac{a}{8}=\frac{2}{8}\neq-\frac{1}{6}$이므로 ㉠을 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\quad a=2$

답 2

만점 공략 노트

연립방정식 $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$에서

① $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ ➜ 한 쌍의 해를 갖는다.

② $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ ➜ 해가 무수히 많다.

③ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ ➜ 해가 없다.

588 전략 인수분해를 이용하여 두 이차방정식의 해를 각각 구한 후 공통인 근이 될 수 있는 경우를 나누어 생각한다.

$x^2-(a+2)x+2a=0$에서

$(x-a)(x-2)=0$

$\therefore x=a$ 또는 $x=2$

$x^2+(a+2)x+a+1=0$에서

$(x+a+1)(x+1)=0$

$\therefore x=-a-1$ 또는 $x=-1$

(ⅰ) 공통인 근이 $x=2$일 때,

$-a-1=2 \quad \therefore a=-3$

(ⅱ) 공통인 근이 $x=-1$일 때, $\quad a=-1$

(ⅲ) 공통인 근이 $x=a$ $(a\neq-3,\ a\neq-1)$일 때,

$a=-a-1, \quad 2a=-1 \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$

이상에서 모든 a의 값의 합은

$-3+(-1)+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{2}$

답 $-\frac{9}{2}$

589 전략 이차방정식 $(x+p)^2=q$가 중근을 가지려면 $q=0$이어야 한다.

$(x-2a)^2=a(a-b)$가 중근을 가지므로

$a(a-b)=0 \quad \therefore a=0$ 또는 $a=b$

(ⅰ) $a=0$일 때,

$(x-2a)^2=a(a-b)$, 즉 $x^2=0$에서 $x=0$이므로

$b+1=0 \quad \therefore b=-1$

$\therefore a+b=0+(-1)=-1$

(ⅱ) $a=b$일 때,

$(x-2a)^2=a(a-b)$, 즉 $(x-2b)^2=0$에서 $x=2b$이므로

$b+1=2b \quad \therefore b=1$

$\therefore a=b=1$

$\therefore a+b=1+1=2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a+b$의 값은 -1, 2이다.

답 -1, 2

590 전략 이차방정식 $(x+p)^2=q$가 해를 가지려면 $q\geq0$이어야 한다.

(ⅰ) $(x-3)^2=15-2a$가 해를 가지려면

$15-2a\geq0, \quad -2a\geq-15 \quad \therefore a\leq\frac{15}{2}$

가장 큰 실수 a의 값은 $\frac{15}{2}$이므로 $\quad m=\frac{15}{2}$

(ⅱ) $(x-3)^2=15-2a$에서

$x-3=\pm\sqrt{15-2a} \quad \therefore x=3\pm\sqrt{15-2a}$

해가 모두 자연수가 되려면 $\sqrt{15-2a}$는 0 또는 3보다 작은 자연수이어야 하므로

$\sqrt{15-2a}=0,\ 1,\ 2$

$15-2a=0,\ 1,\ 4 \quad \therefore a=\frac{15}{2},\ 7,\ \frac{11}{2}$

자연수 a의 값은 7이므로 $\quad n=7$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\quad 2mn=2\times\frac{15}{2}\times7=105$

답 105

591 전략 이차방정식의 좌변을 인수분해한 후 주어진 조건을 이용하여 식을 정리한다.

(1) $x^2+(2a+3)x+a(a+3)=(x+a)(x+a+3)$ … 1단계

(2) $x+a=2b-1$을 $(x+a)(x+a+3)=4b$에 대입하면

$(2b-1)(2b-1+3)=4b$

$4b^2-2b-2=0$

$2(2b+1)(b-1)=0$

$\therefore b=-\frac{1}{2}$ 또는 $b=1$ … 2단계

따라서 모든 b의 값의 합은

$-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$ … 3단계

답 (1) $(x+a)(x+a+3)$ (2) $\frac{1}{2}$

단계	채점 요소	배점
1	이차방정식의 좌변 인수분해하기	2점
2	b의 값 구하기	2점
3	모든 b의 값의 합 구하기	1점

592 전략 이차방정식 $3x^2+7x-6=0$의 두 근을 이차방정식 $x^2-2x+k=0$에 차례대로 대입하여 조건에 맞는 k의 값을 구한다.

$3x^2+7x-6=0$에서 $\quad (x+3)(3x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{2}{3}$ … 1단계

(ⅰ) $x=-3$이 $x^2-2x+k=0$의 근일 때,

$(-3)^2-2\times(-3)+k=0$

$15+k=0 \quad \therefore k=-15$

(ⅱ) $x=\frac{2}{3}$가 $x^2-2x+k=0$의 근일 때,

$\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\times\frac{2}{3}+k=0$

$-\frac{8}{9}+k=0 \quad \therefore k=\frac{8}{9}$

(i), (ii)에서 음수 k의 값은 -15이다. … 2단계

답 -15

단계	채점 요소	배점
1	이차방정식 $3x^2+7x-6=0$ 풀기	1점
2	음수 k의 값 구하기	3점

593 전략 이차방정식이 중근을 가질 조건을 이용하여 k의 값을 먼저 구한다.

$2x^2+12x+k+10=0$의 양변을 2로 나누면

$$x^2+6x+\frac{k+10}{2}=0$$

이 이차방정식이 중근을 가지므로

$$\frac{k+10}{2}=\left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$k+10=18$ $\quad\therefore k=8$ … 1단계

$x^2+3x-2k+6=0$, 즉 $x^2+3x-10=0$에서

$(x+5)(x-2)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=2$ … 2단계

$kx^2+(k-8)x-32=0$, 즉 $8x^2-32=0$에서

$8(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$ … 3단계

따라서 두 이차방정식의 공통인 근은 $x=2$이다. … 4단계

답 $x=2$

단계	채점 요소	배점
1	k의 값 구하기	1점
2	이차방정식 $x^2+3x-2k+6=0$ 풀기	1점
3	이차방정식 $kx^2+(k-8)x-32=0$ 풀기	1점
4	공통인 근 구하기	1점

594 전략 이차방정식 $(x+p)^2=q$ $(q\geq0)$의 해
➜ $x=-p\pm\sqrt{q}$

$(x+a)^2=b$에서 $\quad x+a=\pm\sqrt{b}$

$\therefore x=-a\pm\sqrt{b}$ … 1단계

조건 (가)에서

$(-a+\sqrt{b})-(-a-\sqrt{b})=2\sqrt{3}$

$2\sqrt{b}=2\sqrt{3}$ $\quad\therefore b=3$ … 2단계

조건 (나)에서 $\quad a=-a+\sqrt{3}$

이때 $1<\sqrt{3}<2$에서 $-a+1<-a+\sqrt{3}<-a+2$이고 a는 정수이므로

$-a+1=3$ $\quad\therefore a=-2$ … 3단계

$\therefore ab=-2\times3=-6$ … 4단계

답 -6

단계	채점 요소	배점
1	주어진 이차방정식의 근을 a, b에 대한 식으로 나타내기	1점
2	b의 값 구하기	2점
3	a의 값 구하기	2점
4	ab의 값 구하기	1점

III. 이차방정식

07 이차방정식의 활용

셀프 CHECK

본책 124~125쪽

A (1) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-7)}}{2\times1}=\dfrac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$

(2) $x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times5\times(-4)}}{2\times5}=\dfrac{3\pm\sqrt{89}}{10}$

(3) $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-2\times1}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$

(4) $x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-3\times(-4)}}{3}=\dfrac{4\pm2\sqrt{7}}{3}$

답 (1) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$ (2) $x=\dfrac{3\pm\sqrt{89}}{10}$ (3) $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$ (4) $x=\dfrac{4\pm2\sqrt{7}}{3}$

B (1) $2(x^2-2)=3x$에서 $\quad 2x^2-3x-4=0$

$\therefore x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times2\times(-4)}}{2\times2}=\dfrac{3\pm\sqrt{41}}{4}$

(2) $0.2x^2+0.5x-\dfrac{6}{5}=0$의 양변에 10을 곱하면

$2x^2+5x-12=0$, $\quad (x+4)(2x-3)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}$

답 (1) $x=\dfrac{3\pm\sqrt{41}}{4}$ (2) $x=-4$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}$

C (1) $6x^2+2x-3=0$에서

$2^2-4\times6\times(-3)=76>0$

따라서 서로 다른 두 근을 갖는다.

(2) $-x^2+8x-16=0$에서

$8^2-4\times(-1)\times(-16)=0$

따라서 중근을 갖는다.

(3) $2x^2+x+4=0$에서

$1^2-4\times2\times4=-31<0$

따라서 근이 없다.

답 (1) 2 (2) 1 (3) 0

D (1) $(x+4)(x-9)=0$ $\quad\therefore x^2-5x-36=0$

(2) $3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)(x-2)=0$ $\quad\therefore 3x^2-7x+2=0$

(3) $2(x-3)^2=0$ $\quad\therefore 2x^2-12x+18=0$

답 (1) $x^2-5x-36=0$ (2) $3x^2-7x+2=0$ (3) $2x^2-12x+18=0$

E (1) $x^2=5x+6$에서 $\quad x^2-5x-6=0$

(2) $(x+1)(x-6)=0$ $\quad\therefore x=-1$ 또는 $x=6$

답 (1) $x^2-5x-6=0$ (2) -1, 6

F (1) 가로의 길이는 $(5+x)$ cm

세로의 길이는 $(6+x)$ cm

(2) $(5+x)(6+x)=72$에서

$30+11x+x^2=72$, $x^2+11x-42=0$

$(x+14)(x-3)=0$ $\therefore x=-14$ 또는 $x=3$

그런데 $x>0$이므로 $x=3$

답 (1) $(5+x)$ cm, $(6+x)$ cm (2) 3

내신 유형 다지기

본책 126~137쪽

유형 116 이차방정식의 근의 공식

본책 126쪽

(1) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근

➜ $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (단, $b^2-4ac\geq0$)

(2) 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$의 근

➜ $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ (단, $b'^2-ac\geq0$)

595 $3x^2+7x+3=0$에서

$x=\dfrac{-7\pm\sqrt{7^2-4\times3\times3}}{2\times3}=\dfrac{-7\pm\sqrt{13}}{6}$

따라서 $A=-7$, $B=13$이므로

$A+B=-7+13=6$

답 ④

596 $2x^2-6x+a=0$에서

$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-2\times a}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9-2a}}{2}$

따라서 $b=3$, $9-2a=11$이므로 $a=-1$

$\therefore a+b=-1+3=2$

답 ②

597 $x^2-4x-8=0$에서

$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\times(-8)}}{1}=2\pm\sqrt{12}$

이때 $3<\sqrt{12}<4$이므로 $5<2+\sqrt{12}<6$

또 $-4<-\sqrt{12}<-3$이므로 $-2<2-\sqrt{12}<-1$

따라서 두 근 사이에 있는 정수는

$-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$

의 7개이다.

답 ④

598 $x=a$를 $2x^2+5x+a=0$에 대입하면

$2a^2+5a+a=0$

$a^2+3a=0$, $a(a+3)=0$

$\therefore a=-3$ ($\because a\neq0$) … 1단계

$a=-3$을 $x^2+(a-3)x-a=0$에 대입하면

$x^2-6x+3=0$

$\therefore x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\times3}}{1}=3\pm\sqrt{6}$ … 2단계

답 $x=3\pm\sqrt{6}$

단계	채점 요소	비율
1	a의 값 구하기	50 %
2	이차방정식 $x^2+(a-3)x-a=0$ 풀기	50 %

599 $7x^2+6x+A=0$에서

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-7\times A}}{7}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-7A}}{7}$

$\therefore B=-3$, $C=9-7A$

$C=9-7A$와 $6A+C=18$을 연립하여 풀면

$A=-9$, $C=72$

$\therefore A+B+C=-9+(-3)+72=60$

답 60

600 $x^2-x-5=0$에서

$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-5)}}{2\times1}=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}$

$\therefore \alpha=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$, $\beta=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$

또 α, β는 $x^2-x-5=0$의 근이므로

$\alpha^2-\alpha-5=0$, $\beta^2-\beta-5=0$

$\therefore \alpha^2=\alpha+5$, $\beta^2=\beta+5$

$\therefore \alpha^2+4\alpha-2\beta^2+5\beta$

$=(\alpha+5)+4\alpha-2(\beta+5)+5\beta$

$=5\alpha+3\beta-5$

$=5\times\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}+3\times\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}-5$

$=-1+\sqrt{21}$

답 ②

유형 117 복잡한 이차방정식의 풀이

본책 127쪽

(1) 괄호가 있으면 괄호를 풀고 $ax^2+bx+c=0$의 꼴로 정리한 후 푼다.

(2) 계수가 소수이면 양변에 10, 100, 1000, …을 곱하여 계수를 정수로 고쳐서 푼다.

(3) 계수가 분수이면 양변에 분모의 최소공배수를 곱하여 계수를 정수로 고쳐서 푼다.

601 주어진 이차방정식의 양변에 6을 곱하면

$4x+6=3(x^2-x)$

$3x^2-7x-6=0$, $(3x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-\dfrac{2}{3}$ 또는 $x=3$

답 ③

602 주어진 이차방정식의 양변에 10을 곱하면

$12x^2+30x=-16+2x(x+2)$

$5x^2+13x+8=0,\quad (5x+8)(x+1)=0$

$\therefore x=-\frac{8}{5}$ 또는 $x=-1$

따라서 $\alpha=-\frac{8}{5}$, $\beta=-1$이므로

$\beta-5\alpha=-1-5\times\left(-\frac{8}{5}\right)=7$

답 7

603 $\frac{x^2}{4}=\frac{1-x}{2}+\frac{x^2}{3}$의 양변에 12를 곱하면

$3x^2=6(1-x)+4x^2$

$x^2-6x+6=0$

$\therefore x=3\pm\sqrt{3}$ …… ㉠ … 1단계

$0.\dot{2}x+1>1.\dot{8}$에서 $\frac{2}{9}x+1>\frac{17}{9}$

양변에 9를 곱하면 $2x+9>17$

$\therefore x>4$ …… ㉡ … 2단계

㉠, ㉡에서 $x=3+\sqrt{3}$

따라서 $\alpha=3+\sqrt{3}$이므로

$\alpha-3=\sqrt{3}$ … 3단계

답 $\sqrt{3}$

단계	채점 요소	비율
1	이차방정식 $\frac{x^2}{4}=\frac{1-x}{2}+\frac{x^2}{3}$ 풀기	40 %
2	일차부등식 $0.\dot{2}x+1>1.\dot{8}$ 풀기	40 %
3	$\alpha-3$의 값 구하기	20 %

604 $0.3x^2-1.4(x-1)=0$의 양변에 10을 곱하면

$3x^2-14(x-1)=0$

$3x^2-14x+14=0 \quad \therefore x=\frac{7\pm\sqrt{7}}{3}$

두 근 중 큰 근은 $x=\frac{7+\sqrt{7}}{3}$이므로 $p=\frac{7+\sqrt{7}}{3}$

$(4-x)(x+2)=x+\frac{13}{2}$의 양변에 2를 곱하면

$2(4-x)(x+2)=2x+13$

$-2x^2+4x+16=2x+13$

$2x^2-2x-3=0 \quad \therefore x=\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}$

두 근 중 작은 근은 $x=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$이므로 $q=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$

$\therefore pq=\frac{7+\sqrt{7}}{3}\times\frac{1-\sqrt{7}}{2}$

$=\frac{7-6\sqrt{7}-7}{6}=-\sqrt{7}$

답 ③

605 $<x, -2>=2x^2-2x+2$

$<3, 2x>=2\times3^2+3\times2x-2x=4x+18$

$<x, 8>=2x^2+8x-8$

따라서 $<x, -2>+<3, 2x>=2<x, 8>$에서

$(2x^2-2x+2)+(4x+18)=2(2x^2+8x-8)$

$x^2+7x-18=0,\quad (x+9)(x-2)=0$

$\therefore x=-9$ 또는 $x=2$

답 -9, 2

유형 118 공통부분이 있는 이차방정식의 풀이 (본책 127쪽)

이차방정식에 공통부분이 있으면

❶ 공통부분을 A로 놓고 정리한다.

❷ 인수분해 또는 근의 공식을 이용하여 A의 값을 구한다.

❸ A에 원래의 식을 대입하여 x의 값을 구한다.

606 $2x+1=A$로 놓으면

$A^2-6A-27=0,\quad (A+3)(A-9)=0$

$\therefore A=-3$ 또는 $A=9$

즉 $2x+1=-3$ 또는 $2x+1=9$이므로

$x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=4$이므로

$2\alpha+\beta=2\times(-2)+4=0$

답 ①

607 $\frac{1}{5}x-1=A$로 놓으면

$\frac{1}{2}A^2-\frac{1}{5}A=0.3$

양변에 10을 곱하면 $5A^2-2A=3$

$5A^2-2A-3=0,\quad (5A+3)(A-1)=0$

$\therefore A=-\frac{3}{5}$ 또는 $A=1$

즉 $\frac{1}{5}x-1=-\frac{3}{5}$ 또는 $\frac{1}{5}x-1=1$이므로

$x=2$ 또는 $x=10$

이때 $x=2$가 $3x^2-5ax+4a^2-18=0$의 근이므로

$12-10a+4a^2-18=0$

$2a^2-5a-3=0,\quad (2a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=3$

따라서 양수 a의 값은 3이다.

답 3

608 $x+2y=A$로 놓으면

$(A+2)(A-6)-33=0$

$A^2-4A-45=0,\quad (A+5)(A-9)=0$

$\therefore A=-5$ 또는 $A=9$

즉 $x+2y=-5$ 또는 $x+2y=9$이다.

이때 x, y는 자연수이므로 $x+2y=9$

이를 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(7, 1)$, $(5, 2)$, $(3, 3)$, $(1, 4)$

이므로 xy의 값은 7, 10, 9, 4

따라서 xy의 값이 될 수 없는 것은 ②이다.

답 ②

609 $3x^2-x=A$로 놓으면

$A^2-14A+40=0,\quad (A-4)(A-10)=0$

$\therefore A=4$ 또는 $A=10$ … 1단계

즉 $3x^2-x=4$ 또는 $3x^2-x=10$이다.

(i) $3x^2-x=4$에서 $\quad 3x^2-x-4=0$

$(x+1)(3x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

(ii) $3x^2-x=10$에서 $\quad 3x^2-x-10=0$

$(3x+5)(x-2)=0$

$\therefore x=-\frac{5}{3}$ 또는 $x=2$ … 2단계

(i), (ii)에서 모든 해의 합은

$-1+\frac{4}{3}+\left(-\frac{5}{3}\right)+2=\frac{2}{3}$ … 3단계

답 $\frac{2}{3}$

단계	채점 요소	비율
1	공통부분을 한 문자로 놓고 이차방정식 풀기	30 %
2	주어진 방정식의 해 모두 구하기	60 %
3	모든 해의 합 구하기	10 %

610 $x-y=A$로 놓으면

$2A^2-7A=4,\quad 2A^2-7A-4=0$

$(2A+1)(A-4)=0$

$\therefore A=-\frac{1}{2}$ 또는 $A=4$

즉 $x-y=-\frac{1}{2}$ 또는 $x-y=4$이다.

(i) $x-y=-\frac{1}{2}$일 때,

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\times(-3)=-\frac{23}{4}$

이를 만족시키는 실수 x, y는 존재하지 않는다.

(ii) $x-y=4$일 때,

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$=4^2+2\times(-3)=10$

(i), (ii)에서 $\quad x^2+y^2=10$

답 10

유형 119 해에 대한 조건이 주어진 경우

본책 128쪽

❶ 근의 공식을 이용하여 이차방정식의 해를 미지수를 포함한 식으로 나타낸다.

❷ 해의 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구한다.

611 $3x^2+8x+k=0$에서

$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-3k}}{3}$

해가 모두 유리수가 되려면 $16-3k$는 0 또는 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

이때 k는 자연수이므로 $16-3k<16$에서

$16-3k=0,\ 1,\ 4,\ 9$

$\therefore k=\frac{16}{3},\ 5,\ 4,\ \frac{7}{3}$

따라서 자연수 k는 4, 5의 2개이다.

답 ②

612 $2x^2-5x-a=0$에서

$x=\frac{5\pm\sqrt{25+8a}}{4}$

해가 모두 유리수가 되려면 $25+8a$는 0 또는 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

이때 a는 자연수이므로 $25+8a>25$에서

$25+8a=36,\ 49,\ 64,\ \cdots$

$\therefore a=\frac{11}{8},\ 3,\ \frac{39}{8},\ \cdots$

따라서 가장 작은 자연수 a의 값은 3이고 그때의 해는

$x=\frac{5\pm\sqrt{25+8\times3}}{4}=\frac{5\pm7}{4}$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$

답 $a=3$, $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$

613 $(x+a)^2=4x+1$에서

$x^2+2ax+a^2=4x+1$

$x^2+2(a-2)x+a^2-1=0$

$\therefore x=-(a-2)\pm\sqrt{(a-2)^2-(a^2-1)}$

$=-a+2\pm\sqrt{5-4a}$

해가 모두 정수가 되려면 $5-4a$는 0 또는 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

이때 a는 자연수이므로 $5-4a<5$에서

$5-4a=0,\ 1,\ 4$

$\therefore a=\frac{5}{4},\ 1,\ \frac{1}{4}$

따라서 자연수 a의 값은 1이다.

답 1

유형 120 이차방정식의 근의 개수

본책 129쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 개수를 구할 때에는 b^2-4ac의 부호를 조사한다.

(1) $b^2-4ac>0$ → 서로 다른 두 근 → 2개

(2) $b^2-4ac=0$ → 중근 → 1개

(3) $b^2-4ac<0$ → 근이 없다. → 0개

614 ① $4^2-4\times1\times4=0$이므로 중근을 갖는다.

② $(-9)^2-4\times1\times6=57>0$이므로 서로 다른 두 근을 갖는다.

③ $-3x^2+5x=2$에서 $\quad 3x^2-5x+2=0$

$(-5)^2-4\times3\times2=1>0$이므로 서로 다른 두 근을 갖는다.

④ $\frac{1}{2}x^2+3=x-1$에서 $x^2-2x+8=0$

$(-2)^2-4\times1\times8=-28<0$이므로 근이 없다.

⑤ $-2x^2=3(x+1)$에서 $2x^2+3x+3=0$

$3^2-4\times2\times3=-15<0$이므로 근이 없다.

따라서 근이 없는 것은 ④, ⑤이다. 답 ④, ⑤

615 ㄱ. $6^2-4\times4\times1=20>0$이므로 서로 다른 두 근을 갖는다.

ㄴ. $-x^2+7x=2(x-2)$에서 $x^2-5x-4=0$

$(-5)^2-4\times1\times(-4)=41>0$이므로 서로 다른 두 근을 갖는다.

ㄷ. $\frac{1}{5}x^2+\frac{3}{2}=x$에서 $2x^2-10x+15=0$

$(-10)^2-4\times2\times15=-20<0$이므로 근이 없다.

ㄹ. $(-x+1)^2=2x^2+2$에서 $x^2+2x+1=0$

$2^2-4\times1\times1=0$이므로 중근을 갖는다.

ㅁ. $(x+3)(2x+3)-14=0$에서 $2x^2+9x-5=0$

$9^2-4\times2\times(-5)=121>0$이므로 서로 다른 두 근을 갖는다.

이상에서 서로 다른 두 근을 갖는 것은 ㄱ, ㄴ, ㅁ의 3개이고 중근을 갖는 것은 ㄹ의 1개이므로

$a=3$, $b=1$

$\therefore a+2b=3+2\times1=5$ 답 5

616 $x^2+4=3x$에서 $x^2-3x+4=0$

이때 $(-3)^2-4\times1\times4=-7<0$이므로 근이 없다.

$\therefore a=0$ … 1단계

$2(x^2+3x)=5x+8$에서 $2x^2+x-8=0$

이때 $1^2-4\times2\times(-8)=65>0$이므로 서로 다른 두 근을 갖는다.

$\therefore b=2$ … 2단계

$\frac{12}{5}x-0.8(x^2+1)=1$에서 $4x^2-12x+9=0$

이때 $(-12)^2-4\times4\times9=0$이므로 중근을 갖는다.

$\therefore c=1$ … 3단계

$\therefore a+2b+3c=0+2\times2+3\times1=7$ … 4단계

답 7

단계	채점 요소	비율
1	a의 값 구하기	30 %
2	b의 값 구하기	30 %
3	c의 값 구하기	30 %
4	$a+2b+3c$의 값 구하기	10 %

617 ㄱ. $x^2+2x-1=0$에서 $2^2-4\times1\times(-1)=8>0$이므로 서로 다른 두 근을 갖는다.

ㄴ. $x^2+4x+5=0$에서 $4^2-4\times1\times5=-4<0$이므로 근이 없다.

ㄷ. $B\le0$이면 $A^2-4B\ge0$이므로 서로 다른 두 근 또는 중근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ①

유형 121 이차방정식이 중근을 가질 조건

본책 129쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 가질 조건은

$b^2-4ac=0$

618 $4x^2-6x+k=0$이 중근을 가지므로

$(-6)^2-4\times4\times k=0$

$36-16k=0$ $\therefore k=\frac{9}{4}$

즉 주어진 이차방정식은 $4x^2-6x+\frac{9}{4}=0$이므로

$16x^2-24x+9=0$

$(4x-3)^2=0$ $\therefore x=\frac{3}{4}$

$\therefore a=\frac{3}{4}$

$\therefore k+a=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=3$ 답 ⑤

619 $(a+3)x^2+(2-2a)x+2=0$이 중근을 가지므로

$(2-2a)^2-4\times(a+3)\times2=0$

$a^2-4a-5=0$, $(a+1)(a-5)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=5$

따라서 모든 상수 a의 값의 곱은

$-1\times5=-5$ 답 -5

620 $3x^2-2x+k=0$이 중근을 가지므로

$(-2)^2-4\times3\times k=0$

$4-12k=0$ $\therefore k=\frac{1}{3}$ … 1단계

즉 $2kx^2-3x+k+1=0$은 $\frac{2}{3}x^2-3x+\frac{4}{3}=0$이므로

$2x^2-9x+4=0$, $(2x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=4$ … 2단계

따라서 두 근의 합은

$\frac{1}{2}+4=\frac{9}{2}$ … 3단계

답 $\frac{9}{2}$

단계	채점 요소	비율
1	k의 값 구하기	40 %
2	이차방정식 $2kx^2-3x+k+1=0$ 풀기	40 %
3	두 근의 합 구하기	20 %

621 $2x^2+ax+3b=0$이 중근을 가지므로

$a^2-4\times2\times3b=0$ $\therefore a^2=24b$

a, b는 자연수이고 $24=2^3\times3$이므로 $b=2\times3\times(\text{자연수})^2$의 꼴이어야 한다.

a의 값이 최소가 되려면 b의 값도 최소이어야 하므로

$b=2\times3=6$

이때 $a^2=2^3\times3\times(2\times3)=(2^2\times3)^2=12^2$이므로

$a=12$

따라서 주어진 이차방정식은 $2x^2+12x+18=0$이므로

$x^2+6x+9=0,\quad (x+3)^2=0$

$\therefore x=-3$

답 $b=6,\ x=-3$

유형 122 근을 가질 조건에 따른 미지수의 값의 범위 구하기 (본책 130쪽)

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이

(1) 서로 다른 두 근을 가질 조건 ➜ $b^2-4ac>0$

(2) 근을 가질 조건 ➜ $b^2-4ac\ge0$

(3) 근을 갖지 않을 조건 ➜ $b^2-4ac<0$

622 $2x^2+x+k=0$이 근을 갖지 않으려면

$1^2-4\times2\times k<0$

$1-8k<0\qquad \therefore k>\frac{1}{8}$

답 ④

623 $(a-2)x^2+2x-\frac{1}{4}=0$이 서로 다른 두 근을 가지려면

$2^2-4\times(a-2)\times\left(-\frac{1}{4}\right)>0$

$a+2>0\qquad \therefore a>-2$

따라서 가장 작은 정수 a의 값은 -1이다.

답 -1

624 $(k^2-4)x^2+(2k-1)x+1=0$이 근을 가지려면

$(2k-1)^2-4\times(k^2-4)\times1\ge0$

$-4k+17\ge0\qquad \therefore k\le\frac{17}{4}$

이때 $k^2-4\ne0$이므로 $\quad k\ne\pm2$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k는 1, 3, 4이므로 구하는 합은

$1+3+4=8$

답 8

만점 공략 노트

$ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 이차방정식이 되려면 $a\ne0$이어야 한다.

625 $x^2-(3a+2)x+a^2=0$이 중근을 가지므로

$\{-(3a+2)\}^2-4\times1\times a^2=0$

$5a^2+12a+4=0,\quad (a+2)(5a+2)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=-\frac{2}{5}$ …… ㉠

또 $x^2-2x+2a+3=0$이 근을 갖지 않으므로

$(-2)^2-4\times1\times(2a+3)<0$

$-8a-8<0\qquad \therefore a>-1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a=-\frac{2}{5}$

답 $-\frac{2}{5}$

유형 123 두 근이 주어질 때 이차방정식 구하기 (본책 131쪽)

(1) 두 근이 α, β이고 x^2의 계수가 a인 이차방정식

➜ $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$

(2) 중근이 α이고 x^2의 계수가 a인 이차방정식

➜ $a(x-\alpha)^2=0$

626 두 근이 -4, 5이고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$2(x+4)(x-5)=0\qquad \therefore 2x^2-2x-40=0$

답 $2x^2-2x-40=0$

627 두 근이 -1, $\frac{2}{3}$이고 x^2의 계수가 -3인 이차방정식은

$-3(x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right)=0\qquad \therefore -3x^2-x+2=0$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로

$a+b=-1+2=1$

답 1

628 중근 $x=-\frac{1}{2}$을 갖고 x^2의 계수가 6인 이차방정식은

$6\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0\qquad \therefore 6x^2+6x+\frac{3}{2}=0$ … 1단계

따라서 $a=6$, $b=\frac{3}{2}$이므로 … 2단계

$ab=6\times\frac{3}{2}=9$ … 3단계

답 9

단계	채점 요소	비율
1	이차방정식 구하기	40 %
2	a, b의 값 구하기	40 %
3	ab의 값 구하기	20 %

629 직선 $ax+by+4=0$이 두 점 $(0,\ -2)$, $(8,\ 10)$을 지나므로

$-2b+4=0,\ 8a+10b+4=0$

$\therefore a=-3,\ b=2$

따라서 -3, 2를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 -1인 이차방정식은

$-(x+3)(x-2)=0$

$\therefore -x^2-x+6=0$

답 ①

만점 공략 노트

직선이 점 $(p,\ q)$를 지난다.

➜ 직선의 방정식에 $x=p$, $y=q$를 대입하면 등식이 성립한다.

630 두 근이 $-\frac{5}{2}$, 3이고 x^2의 계수가 a인 이차방정식은

$a\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-3)=0\qquad \therefore ax^2-\frac{1}{2}ax-\frac{15}{2}a=0$

$\therefore b=-\frac{1}{2}a,\ c=-\frac{15}{2}a$ …… ㉠

㉠을 $cx^2+bx+a=0$에 대입하면

$-\frac{15}{2}ax^2-\frac{1}{2}ax+a=0$

이때 $a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면

$-\frac{15}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1=0$

$15x^2+x-2=0$, $(5x+2)(3x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{2}{5}$ 또는 $x=\frac{1}{3}$ 답 $x=-\frac{2}{5}$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

유형 124 두 근에 대한 조건이 주어질 때 미지수의 값 구하기

본책 132쪽

(1) 두 근의 차가 p일 때
➜ 두 근을 α, $\alpha+p$ 또는 $\alpha-p$, α로 놓는다.
(2) 한 근이 다른 근의 k배일 때
➜ 두 근을 α, $k\alpha$ $(\alpha\neq0)$로 놓는다.
(3) 두 근의 비가 $m:n$일 때
➜ 두 근을 $m\alpha$, $n\alpha$ $(\alpha\neq0)$로 놓는다.

631 주어진 이차방정식의 두 근을 α, 3α $(\alpha\neq0)$라 하면 두 근이 α, 3α이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-\alpha)(x-3\alpha)=0$ $\therefore x^2-4\alpha x+3\alpha^2=0$

이 이차방정식이 $x^2-12x+k=0$과 같으므로

$-12=-4\alpha$, $k=3\alpha^2$

$\therefore \alpha=3$, $k=27$ 답 27

632 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+5$라 하면 두 근이 α, $\alpha+5$이고 x^2의 계수가 -2인 이차방정식은

$-2(x-\alpha)\{x-(\alpha+5)\}=0$

$-2\{x^2-(2\alpha+5)x+\alpha^2+5\alpha\}=0$

$\therefore -2x^2+(4\alpha+10)x-2\alpha^2-10\alpha=0$

이 이차방정식이 $-2x^2+6x+m=0$과 같으므로

$6=4\alpha+10$, $m=-2\alpha^2-10\alpha$

$\therefore \alpha=-1$, $m=8$ 답 ④

633 주어진 이차방정식의 두 근을 2α, 3α $(\alpha\neq0)$라 하면 두 근이 2α, 3α이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-2\alpha)(x-3\alpha)=0$ $\therefore x^2-5\alpha x+6\alpha^2=0$

이 이차방정식이 $x^2-5kx+14k-4=0$과 같으므로

$-5k=-5\alpha$, $14k-4=6\alpha^2$

$-5k=-5\alpha$에서 $\alpha=k$

$\alpha=k$를 $14k-4=6\alpha^2$에 대입하면

$14k-4=6k^2$

$3k^2-7k+2=0$, $(3k-1)(k-2)=0$

$\therefore k=\frac{1}{3}$ 또는 $k=2$

따라서 정수 k의 값은 2이다. 답 2

유형 125 계수 또는 상수항을 잘못 보고 푼 이차방정식

본책 132쪽

이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서
(1) x의 계수를 잘못 본 경우 ➜ 상수항 b를 바르게 보았다.
(2) 상수항을 잘못 본 경우 ➜ x의 계수 a를 바르게 보았다.

634 두 근이 1, 11이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-1)(x-11)=0$ $\therefore x^2-12x+11=0$

석민이는 상수항을 바르게 보았으므로 $b=11$

두 근이 -3, 2이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x+3)(x-2)=0$ $\therefore x^2+x-6=0$

은희는 x의 계수를 바르게 보았으므로 $a=1$

$\therefore a-b=1-11=-10$ 답 ①

635 (1) 두 근이 -4, 2이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x+4)(x-2)=0$ $\therefore x^2+2x-8=0$ … 1단계

따라서 처음 이차방정식은

$x^2-8x+2=0$ … 2단계

(2) $a-b=-8$, $2a+b=2$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=6$ … 3단계

답 (1) $x^2-8x+2=0$ (2) $a=-2$, $b=6$

단계	채점 요소	비율
1	잘못 본 이차방정식 구하기	30 %
2	처음 이차방정식 구하기	30 %
3	a, b의 값 구하기	40 %

636 두 근이 $-\frac{7}{2}$, -1이고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$2\left(x+\frac{7}{2}\right)(x+1)=0$ $\therefore 2x^2+9x+7=0$

용혁이는 상수항을 바르게 보았으므로 처음 이차방정식의 상수항은 7이다.

두 근이 $2\pm\sqrt{3}$이고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$2\{x-(2-\sqrt{3})\}\{x-(2+\sqrt{3})\}=0$

$2(x^2-4x+1)=0$ $\therefore 2x^2-8x+2=0$

인재는 x의 계수를 바르게 보았으므로 처음 이차방정식의 x의 계수는 -8이다.

따라서 처음 이차방정식은 $2x^2-8x+7=0$이므로 그 해는

$x=\frac{4\pm\sqrt{2}}{2}$ 답 $x=\frac{4\pm\sqrt{2}}{2}$

유형 126 이차방정식의 활용; 식이 주어진 문제

본책 133쪽

❶ 주어진 식을 이용하여 이차방정식을 세운다.
❷ 이차방정식을 푼다.
❸ 문제의 조건에 맞는 해를 택한다.

637 $\frac{n(n+1)}{2}=91$에서 $n^2+n-182=0$

$(n+14)(n-13)=0$

$\therefore n=-14$ 또는 $n=13$

그런데 n은 자연수이므로 $n=13$

따라서 1부터 13까지의 자연수를 더해야 한다. 답 13

638 $\frac{n(n-1)}{2}=45$에서 $n^2-n-90=0$

$(n+9)(n-10)=0$

$\therefore n=-9$ 또는 $n=10$

그런데 n은 자연수이므로 $n=10$

따라서 경기에 참가한 농구 팀은 모두 10팀이다. 답 10팀

639 n각형의 변의 개수는 n이므로

$\frac{n(n-3)}{2}+n=28$

$n^2-n-56=0$, $(n+7)(n-8)=0$

$\therefore n=-7$ 또는 $n=8$

그런데 $n>3$이므로 $n=8$

따라서 구하는 다각형은 팔각형이므로 꼭짓점의 개수는 8이다.

답 ③

유형 127 이차방정식의 활용; 수에 대한 문제

본책 133쪽

(1) 연속하는 두 정수 ➜ x, $x+1$ 또는 $x-1$, x

(2) 연속하는 세 정수 ➜ $x-1$, x, $x+1$ 또는 x, $x+1$, $x+2$

(3) 연속하는 두 홀수(짝수)

➜ x, $x+2$ 또는 $x-2$, x

(4) 연속하는 세 홀수(짝수)

➜ $x-2$, x, $x+2$ 또는 x, $x+2$, $x+4$

640 두 자연수를 x, $x+6$이라 하면

$x(x+6)=135$, $x^2+6x-135=0$

$(x+15)(x-9)=0$

$\therefore x=-15$ 또는 $x=9$

그런데 x는 자연수이므로 $x=9$

따라서 두 자연수는 9, 15이므로 구하는 합은

$9+15=24$ 답 ⑤

641 어떤 자연수를 x라 하면

$(x-3)^2=(3x+2)+7$ … 1단계

$x^2-9x=0$, $x(x-9)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=9$ … 2단계

그런데 x는 자연수이므로 $x=9$

따라서 바르게 계산한 값은 $3\times9+2=29$이다. … 3단계

답 29

단계	채점 요소	비율
1	이차방정식 세우기	40 %
2	이차방정식 풀기	40 %
3	바르게 계산한 값 구하기	20 %

642 세 짝수를 $x-2$, x, $x+2$라 하면

$(x-2)^2+x^2+(x+2)^2=200$

$x^2-64=0$, $(x+8)(x-8)=0$

$\therefore x=-8$ 또는 $x=8$

그런데 $x>2$이므로 $x=8$

즉 연속하는 세 짝수는 6, 8, 10이다.

이때 $6^2+8^2=10^2$이므로 6, 8, 10을 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 10인 직각삼각형이다.

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times6\times8=24$ 답 24

만점 공략 노트

삼각형의 변의 길이와 각의 크기 사이의 관계

$\triangle$ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$이고 c가 가장 긴 변의 길이일 때

(1) $c^2<a^2+b^2$이면 $\angle C<90^\circ$ (예각삼각형)

(2) $c^2=a^2+b^2$이면 $\angle C=90^\circ$ (직각삼각형)

(3) $c^2>a^2+b^2$이면 $\angle C>90^\circ$ (둔각삼각형)

유형 128 이차방정식의 활용 ; 실생활에 대한 문제

본책 134쪽

❶ 구하려고 하는 것을 미지수 x로 놓는다.

❷ 문제의 뜻에 맞게 x에 대한 이차방정식을 세운다.

❸ 이차방정식을 푼다.

❹ 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

643 현진이의 나이를 x살이라 하면 동생의 나이는 $(x-3)$살이므로

$8x=(x-3)^2+4$

$x^2-14x+13=0$, $(x-1)(x-13)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=13$

그런데 $x>3$이므로 $x=13$

따라서 현진이의 나이는 13살이고 동생의 나이는 10살이므로 구하는 곱은

$13\times10=130$ 답 ④

644 첫 번째 일요일의 날짜를 x라 하면 세 번째 일요일의 날짜는 $x+14$이므로

$x(x+14)=120$

$x^2+14x-120=0$, $(x+20)(x-6)=0$

$\therefore x=-20$ 또는 $x=6$

그런데 x는 자연수이므로 $\quad x=6$
따라서 두 날짜는 6, 20이므로 구하는 합은

$6+20=26$ 답 26

645 인상하기 전의 입장료를 A원, 이때의 방문객을 B명이라 하면 입장료 인상 전후의 매출액이 같으므로

$A\left(1+\frac{4x}{100}\right)\times B\left(1-\frac{3x}{100}\right)=AB$

$\left(1+\frac{4x}{100}\right)\left(1-\frac{3x}{100}\right)=1$

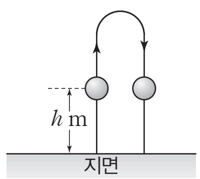
$3x^2-25x=0, \quad x(3x-25)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{25}{3}$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x=\frac{25}{3}$ 답 ②

유형 129 이차방정식의 활용 ; 쏘아 올린 물체에 대한 문제 본책 134쪽

(1) 지면에서 위로 쏘아 올린 물체의 지면으로부터의 높이가 h m인 경우는 올라갈 때와 내려올 때 2번이다.
(2) 물체가 지면에 떨어질 때의 높이는 0 m이다.



646 $30t-5t^2=40$에서

$t^2-6t+8=0, \quad (t-2)(t-4)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=4$

따라서 물체의 높이가 처음으로 40 m가 되는 것은 쏘아 올린 지 2초 후이다. 답 ①

647 공이 지면에 떨어지는 것은 공의 높이가 0 m일 때이므로

$1.8+8t-5t^2=0, \quad 25t^2-40t-9=0$

$(5t+1)(5t-9)=0$

$\therefore t=-\frac{1}{5}$ 또는 $t=\frac{9}{5}$

그런데 $t>0$이므로 $\quad t=\frac{9}{5}$

따라서 공이 지면에 떨어지는 것은 공을 던진 지 $\frac{9}{5}$초 후이다.

답 $\frac{9}{5}$초

648 $80+40x-5x^2=140$에서 ··· 1단계

$x^2-8x+12=0, \quad (x-2)(x-6)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=6$ ··· 2단계

따라서 물체의 높이가 140 m 이상이 되는 것은 쏘아 올린 지 2초 후부터 6초 후까지이므로 4초 동안이다. ··· 3단계

답 4초

단계	채점 요소	비율
1	이차방정식 세우기	40 %
2	이차방정식 풀기	40 %
3	물체의 높이가 140 m 이상이 되는 시간 구하기	20 %

유형 130 이차방정식의 활용: 도형에 대한 문제 본책 135쪽

평면도형의 넓이를 구하는 공식을 이용하여 넓이에 대한 이차방정식을 세운다. 이때 다각형의 변의 길이나 원의 반지름의 길이는 항상 양수임에 주의한다.

649 둘레의 길이가 30 cm이므로 가로의 길이와 세로의 길이의 합은 $\quad \frac{30}{2}=15\,(\text{cm})$

가로의 길이를 x cm라 하면 세로의 길이는 $(15-x)$ cm이므로

$x(15-x)=54, \quad x^2-15x+54=0$

$(x-6)(x-9)=0$

$\therefore x=6$ 또는 $x=9$

이때 가로의 길이가 세로의 길이보다 더 길어야 하므로

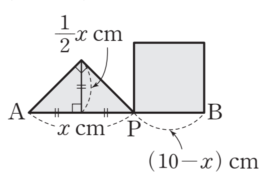
$x=9$

따라서 가로의 길이는 9 cm이다. 답 9 cm

650 $\overline{AP}=x$ cm라 하면 $\quad \overline{BP}=(10-x)$ cm

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AP}$를 직각이등변삼각형의 밑변이라 하면 높이는

$\frac{1}{2}\overline{AP}=\frac{1}{2}x$ (cm)이므로



$\frac{1}{2}\times x\times\frac{1}{2}x+(10-x)^2=25$

$x^2-16x+60=0, \quad (x-6)(x-10)=0$

$\therefore x=6$ 또는 $x=10$

그런데 $0<x<10$이므로 $\quad x=6$

따라서 $\overline{AP}$의 길이는 6 cm이다. 답 6 cm

만점 공략 노트

직각이등변삼각형의 빗변의 중점은 외심이고, 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

다른 풀이 $\overline{AP}=x$ cm라 하면 $\quad \overline{BP}=(10-x)$ cm

직각이등변삼각형에서 빗변이 아닌 한 변의 길이를 a cm라 하면

$a^2+a^2=x^2, \quad a^2=\frac{x^2}{2}$

$\therefore a=\frac{x}{\sqrt{2}}\ (\because a>0)$

따라서 $\frac{1}{2}\times\frac{x}{\sqrt{2}}\times\frac{x}{\sqrt{2}}+(10-x)^2=25$이므로

$x^2-16x+60=0, \quad (x-6)(x-10)=0$

$\therefore x=6$ 또는 $x=10$

651 반지름의 길이가 x cm이고 중심각의 크기가 60°인 부채꼴의 넓이는

$$\pi \times x^2 \times \frac{60}{360} = \frac{\pi}{6}x^2\,(\text{cm}^2)$$

반지름의 길이를 2 cm만큼 늘이고 중심각의 크기를 반으로 줄인 부채꼴의 넓이는

$$\pi \times (x+2)^2 \times \frac{30}{360} = \frac{\pi}{12}(x+2)^2\,(\text{cm}^2)$$

따라서 $\frac{\pi}{12}(x+2)^2 = \frac{\pi}{6}x^2 - \frac{\pi}{12}$에서 … 1단계

$x^2-4x-5=0$, $\quad (x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$ … 2단계

그런데 $x>0$이므로 $\quad x=5$ … 3단계

답 5

단계	채점 요소	비율
1	이차방정식 세우기	40 %
2	이차방정식 풀기	40 %
3	x의 값 구하기	20 %

만점 공략 노트

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 x°인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

(1) $l=2\pi r \times \frac{x}{360}$

(2) $S=\pi r^2 \times \frac{x}{360}$

652 $\overline{CD}=x$ cm라 하면

$\overline{AF}=\overline{FE}=x$ cm, $\overline{AC}=\overline{BC}=19-x$ (cm)

$\therefore \overline{FC}=\overline{AC}-\overline{AF}=(19-x)-x=19-2x$ (cm)

□CDEF의 넓이가 45 cm²이므로

$x(19-2x)=45$, $\quad 2x^2-19x+45=0$

$(x-5)(2x-9)=0$

$\therefore x=5$ 또는 $x=\frac{9}{2}$

따라서 $19-x=14$ 또는 $19-x=\frac{29}{2}$이므로 처음 직사각형 모양의 종이의 세로의 길이가 될 수 있는 것은 14 cm, $\frac{29}{2}$ cm이다.

답 14 cm, $\frac{29}{2}$ cm

다른 풀이 처음 직사각형 모양의 종이의 세로의 길이를 x cm라 하면 □CDEF의 넓이는

$19\times x - x^2 - (19-x)^2 = 45$

$2x^2-57x+406=0$

$(x-14)(2x-29)=0$

$\therefore x=14$ 또는 $x=\frac{29}{2}$

653 점 P는 1초에 3 cm씩 움직이고 점 Q는 1초에 5 cm씩 움직이므로 t초 후의 각 선분의 길이는

$\overline{AP}=3t$ cm, $\overline{PB}=(40-3t)$ cm, $\overline{BQ}=5t$ cm

□APQC의 넓이가 720 cm²이면 △PBQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 40\times 50-720=280\,(\text{cm}^2)$$

이므로

$\frac{1}{2}\times(40-3t)\times 5t=280$

$3t^2-40t+112=0$, $\quad (t-4)(3t-28)=0$

$\therefore t=4$ 또는 $t=\frac{28}{3}$

따라서 □APQC의 넓이가 처음으로 720 cm²가 되는 것은 출발한 지 4초 후이다.

답 ②

654 타일의 짧은 변의 길이를 x cm라 하면 긴 변의 길이는

$(6x-4)\times\frac{1}{2}=3x-2$ (cm)

판의 넓이가 180 cm²이므로

$6x\{(3x-2)+x\}=180$

$2x^2-x-15=0$, $\quad (2x+5)(x-3)=0$

$\therefore x=-\frac{5}{2}$ 또는 $x=3$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x=3$

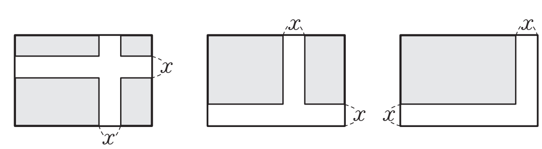
따라서 타일의 짧은 변의 길이는 3 cm, 긴 변의 길이는 $3\times 3-2=7$ (cm)이므로 타일 한 장의 넓이는

$3\times 7=21$ (cm²)

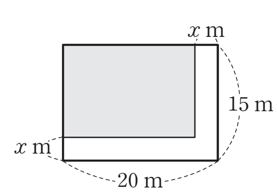
답 21 cm²

유형 131 이차방정식의 활용 ; 길의 폭에 대한 문제 본책 136쪽

다음 그림과 같이 폭이 일정한 길을 만든 세 땅에서 길을 가장자리로 이동하여 떨어져 있는 땅을 붙이면 길을 제외한 땅의 넓이는 모두 같다.



655 오른쪽 그림과 같이 길의 폭을 x m라 하고 폭이 일정한 길을 가장자리로 이동하면 길을 제외한 땅의 넓이는 어두운 부분의 넓이와 같으므로



$(20-x)(15-x)=204$

$x^2-35x+96=0$, $\quad (x-3)(x-32)=0$

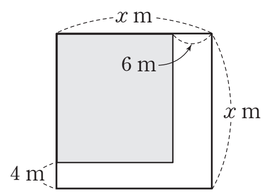
$\therefore x=3$ 또는 $x=32$

그런데 $0<x<15$이므로 $\quad x=3$

따라서 길의 폭은 3 m이다.

답 3 m

656 오른쪽 그림과 같이 땅의 한 변의 길이를 x m라 하고 폭이 일정한 길을 가장자리로 이동하면 길을 제외한 땅의 넓이는 어두운 부분의 넓이와 같으므로



$(x-6)(x-4)=360$

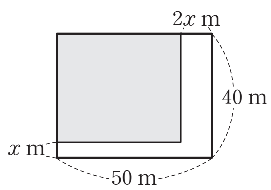
$x^2-10x-336=0$, $(x+14)(x-24)=0$

$\therefore x=-14$ 또는 $x=24$

그런데 $x>6$이므로 $x=24$

따라서 땅의 한 변의 길이는 24 m이다. **답** 24 m

657 오른쪽 그림과 같이 도로의 폭을 x m라 하고 폭이 일정한 도로를 가장자리로 이동하면 도로를 제외한 땅의 넓이는 어두운 부분의 넓이와 같으므로



$(50-2x)(40-x)=1400$

$x^2-65x+300=0$, $(x-5)(x-60)=0$

$\therefore x=5$ 또는 $x=60$

그런데 $0<x<25$이므로 $x=5$

따라서 도로의 폭은 5 m로 해야 한다. **답** 5 m

유형 132 이차방정식의 활용 ; 상자를 만드는 문제

본책 136쪽

구하는 길이를 x로 놓고

(직육면체의 부피)=(가로의 길이)×(세로의 길이)×(높이)

임을 이용하여 이차방정식을 세운다.

658 상자의 높이를 x cm라 하면 밑면의 가로의 길이는 $(18-2x)$ cm, 세로의 길이는 $(14-2x)$ cm이므로

$(18-2x)(14-2x)=77$

$4x^2-64x+175=0$, $(2x-7)(2x-25)=0$

$\therefore x=\frac{7}{2}$ 또는 $x=\frac{25}{2}$

그런데 $0<x<7$이므로 $x=\frac{7}{2}$

따라서 상자의 높이는 $\frac{7}{2}$ cm이다. **답** ③

659 처음 직사각형의 세로의 길이를 x cm라 하면 가로의 길이는 $(x+3)$ cm이므로

$2\{(x+3)-4\}(x-4)=80$ … 1단계

$(x-1)(x-4)=40$

$x^2-5x-36=0$, $(x+4)(x-9)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=9$ … 2단계

그런데 $x>4$이므로 $x=9$

따라서 처음 직사각형의 세로의 길이는 9 cm이다. … 3단계

답 9 cm

단계	채점 요소	비율
1	이차방정식 세우기	40 %
2	이차방정식 풀기	40 %
3	처음 직사각형의 세로의 길이 구하기	20 %

660 물받이의 높이를 x cm라 하면 물받이의 단면의 가로의 길이는 $(42-2x)$ cm이므로

$x(42-2x)=208$

$x^2-21x+104=0$, $(x-8)(x-13)=0$

$\therefore x=8$ 또는 $x=13$

그런데 $0<x<21$이므로 $x=8$ 또는 $x=13$

따라서 물받이의 높이가 될 수 있는 것은 8 cm, 13 cm이다.

답 8 cm, 13 cm

유형 133 이차방정식의 활용 ; 닮음을 이용한 문제

본책 137쪽

두 닮은 도형이 주어지면

(1) 닮음비 또는 넓이의 비를 이용하여 비례식을 세운다.

(2) 이차방정식을 세우는 데 필요한 변의 길이를 닮음비를 이용하여 구한다.

661 $\overline{DE}=x$라 하면 $\overline{AB}=\overline{AE}=2-x$

이때 □ABCD∽□DEFC이므로

$\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{AD}:\overline{DC}$

$(2-x):x=2:(2-x)$

$(2-x)^2=2x$, $x^2-6x+4=0$

$\therefore x=3\pm\sqrt{5}$

그런데 $0<x<2$이므로 $x=3-\sqrt{5}$

따라서 $\overline{DE}$의 길이는 $3-\sqrt{5}$이다. **답** $3-\sqrt{5}$

662 $\overline{AB}=x$ cm라 하면 $\overline{AC}=(x+4)$ cm

두 반원은 닮은 도형이므로 닮음비는 $x:(x+4)$이고 넓이의 비가 $1:2$이므로

$x^2:(x+4)^2=1:2$

$2x^2=(x+4)^2$, $x^2-8x-16=0$

$\therefore x=4\pm4\sqrt{2}$

그런데 $x>0$이므로 $x=4+4\sqrt{2}$

따라서 $\overline{AB}$의 길이는 $(4+4\sqrt{2})$ cm이다. **답** ③

만점 공략 노트

닮은 두 평면도형의 닮음비가 $m:n$이면

(1) 둘레의 길이의 비는 $m:n$

(2) 넓이의 비는 $m^2:n^2$

663 큰 정육각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 작은 정육각형의 한 변의 길이는

$$\frac{24-6x}{6}=4-x\,(\text{cm})$$

두 정육각형은 닮은 도형이므로 닮음비가 $(4-x):x$이고 넓이의 비가 $2:3$이므로

$(4-x)^2:x^2=2:3$

$3(4-x)^2=2x^2$ … (1단계)

$x^2-24x+48=0$ $\quad\therefore x=12\pm4\sqrt{6}$ … (2단계)

그런데 $0<x<4$이므로 $\quad x=12-4\sqrt{6}$

따라서 큰 정육각형의 한 변의 길이는 $(12-4\sqrt{6})$ cm이므로

$a=12,\ b=-4$ … (3단계)

$\therefore a+b=12+(-4)=8$ … (4단계)

답 8

단계	채점 요소	비율
1	이차방정식 세우기	40 %
2	이차방정식 풀기	40 %
3	a, b의 값 구하기	10 %
4	$a+b$의 값 구하기	10 %

664 $\overline{BQ}=x$ cm라 하면 $\quad\overline{AQ}=(9-x)$ cm

$\triangle ABC\backsim\triangle QBP$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AB}:\overline{QB}=\overline{AC}:\overline{QP}$

$9:x=12:\overline{QP}$

$\therefore \overline{QP}=\frac{4}{3}x$

□AQPR의 넓이가 24 cm^2이므로

$(9-x)\times\frac{4}{3}x=24$

$x^2-9x+18=0,\quad (x-3)(x-6)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=6$

그런데 $\overline{BP}>\overline{PC}$이므로

$\overline{BQ}>\overline{PR}$, 즉 $\overline{BQ}>\overline{AQ}$

$\therefore x=6$

따라서 $\overline{BQ}=6$ cm, $\overline{QP}=\frac{4}{3}\times6=8$ (cm)이므로

$\overline{BP}=\sqrt{6^2+8^2}=10$ (cm)

답 10 cm

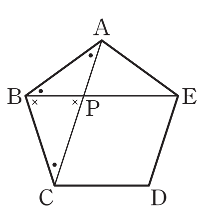
유형 134 이차방정식의 활용 ; 정오각형을 이용한 문제

본책 137쪽

정오각형의 두 대각선으로 만들어지는 닮음인 두 삼각형을 이용하여 비례식을 세운다.

➜ $\triangle ABC\backsim\triangle APB$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AB}:\overline{AP}=\overline{AC}:\overline{AB}$



665 (1) 정오각형의 한 내각의 크기는

$\frac{180^\circ\times(5-2)}{5}=108^\circ$이므로

$\angle ABC=108^\circ$

$\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이므로

$\angle BAC=\angle BCA=\frac{1}{2}\times(180^\circ-108^\circ)=36^\circ$

같은 방법으로 $\triangle ABE$에서 $\quad\angle ABE=36^\circ$

$\therefore \angle PBC=108^\circ-36^\circ=72^\circ$

$\angle BPC=180^\circ-(36^\circ+72^\circ)=72^\circ$

즉 $\angle PBC=\angle BPC$이므로 $\triangle BCP$는 $\overline{BC}=\overline{PC}$인 이등변삼각형이다.

$\therefore \overline{PC}=\overline{BC}=2$

(2) $\overline{AP}=\overline{AC}-\overline{PC}=x-2$

$\triangle ABC\backsim\triangle APB$이므로 $\overline{AB}:\overline{AP}=\overline{AC}:\overline{AB}$에서

$2:(x-2)=x:2$

$x(x-2)=4\quad\therefore x^2-2x-4=0$

이 이차방정식을 풀면 $\quad x=1\pm\sqrt{5}$

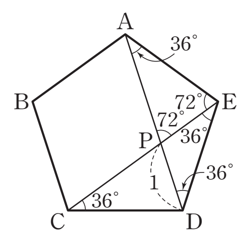
그런데 $x>2$이므로 $\quad x=1+\sqrt{5}$

답 (1) 2 (2) $x^2-2x-4=0,\ x=1+\sqrt{5}$

666 정오각형의 한 변의 길이를 x라 하자.

오른쪽 그림에서 $\triangle APE$는 $\overline{AP}=\overline{AE}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{AP}=\overline{AE}=x$



$\triangle ADE\backsim\triangle EDP$이므로

$\overline{DE}:\overline{DP}=\overline{AD}:\overline{ED}$에서

$x:1=(x+1):x$

$x^2=x+1,\quad x^2-x-1=0$

$\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

따라서 정오각형의 한 변의 길이는 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$이다. 답 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

만점 유형 도전하기

본책 138~139쪽

667 전략 이차방정식의 근의 공식을 알고, 이를 이용하여 올바른 해를 구한다.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 올바른 근의 공식은

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

상일이가 잘못 풀어 얻은 해가 $x=-8$ 또는 $x=4$이므로

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{a}=-8,\quad \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{a}=4$$

$\therefore\ \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-8\times\dfrac{1}{2}=-4,$

$\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=4\times\dfrac{1}{2}=2$

즉 올바른 해는 $\boxed{x=-4 \text{ 또는 } x=2}$이다.

따라서 두 근이 -4, 2이고 x^2의 계수가 3인 이차방정식은

$3(x+4)(x-2)=0$

$\therefore\ \boxed{3x^2+6x-24=0}$

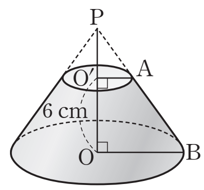
$\therefore$ (가): $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(나): $x=-4$ 또는 $x=2$

(다): $3x^2+6x-24=0$

답 풀이 참조

668 전략 $\overline{OO'}$과 $\overline{AB}$의 연장선을 이용하여 닮음인 두 직각삼각형을 만든다.



오른쪽 그림과 같이 $\overline{OO'}$의 연장선과 $\overline{AB}$의 연장선이 만나는 점을 P라 하면

$\triangle PO'A \backsim \triangle POB$ (AA 닮음)이므로

$\overline{PO'}:\overline{PO}=\overline{O'A}:\overline{OB}=2:5$

에서

$\overline{PO'}:\overline{O'O}=2:(5-2)=2:3$

$\overline{OO'}=6$ cm이므로

$\overline{PO'}:6=2:3 \qquad \therefore\ \overline{PO'}=4\,(\text{cm})$

$\therefore\ \overline{PO}=4+6=10\,(\text{cm})$

$\overline{O'A}=2x$ cm, $\overline{OB}=5x$ cm라 하면 원뿔대의 부피가 156π cm^{3}이므로

$\dfrac{1}{3}\times\pi\times(5x)^2\times10-\dfrac{1}{3}\times\pi\times(2x)^2\times4=156\pi$

$78x^2=156, \qquad x^2=2 \qquad \therefore\ x=\sqrt{2}\ (\because\ x>0)$

따라서 원뿔대의 두 밑면의 반지름의 길이는 각각 $2\sqrt{2}$ cm, $5\sqrt{2}$ cm이므로 둘레의 길이의 합은

$2\pi\times2\sqrt{2}+2\pi\times5\sqrt{2}=14\sqrt{2}\pi\,(\text{cm})$

답 $14\sqrt{2}\pi$ cm

669 전략 직선 l의 방정식을 이용하여 교점의 좌표를 문자로 나타낸다.

두 점 $(0,\ -2)$, $(4,\ 0)$을 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{0-(-2)}{4-0}=\dfrac{1}{2}$

즉 직선 l의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$, y절편은 -2이므로 직선의 방정식은

$y=\dfrac{1}{2}x-2$

두 직선 l, m의 교점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$b=\dfrac{1}{2}a-2$

삼각형의 밑변의 길이는 $a-4$, 높이는 $\dfrac{1}{2}a-2$이므로

$\dfrac{1}{2}\times(a-4)\times\left(\dfrac{1}{2}a-2\right)=25$

$\dfrac{1}{4}(a-4)^2=25, \qquad (a-4)^2=100$

$a-4=\pm10 \qquad \therefore\ a=-6$ 또는 $a=14$

그런데 $a>4$이므로 $\qquad a=14$

$\therefore\ b=\dfrac{1}{2}\times14-2=5$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(14,\ 5)$이다.

답 $(14,\ 5)$

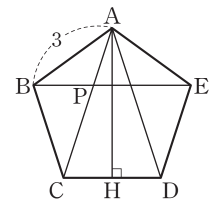
만점 공략 노트

두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ $(x_1\neq x_2)$를 지나는 직선의 방정식 구하기

❶ 두 점을 지나는 직선의 기울기 $a=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$을 구한다.

❷ $y=ax+b$로 놓고 두 점 중 한 점의 좌표를 대입하여 b의 값을 구한다.

670 전략 $\triangle ACD$의 넓이를 $\dfrac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{AH}$와 내접원의 반지름의 길이를 이용하여 각각 구한 후 두 넓이가 같음을 이용한다.



오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$와 $\overline{BE}$의 교점을 P라 하고 $\overline{AC}=x$라 하면 $\triangle BCP$는 $\overline{BC}=\overline{PC}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{PC}=\overline{BC}=3$

$\therefore\ \overline{AP}=x-3$

$\triangle ABC \backsim \triangle APB$이므로

$\overline{AB}:\overline{AP}=\overline{AC}:\overline{AB}$에서

$3:(x-3)=x:3$

$9=x^2-3x, \qquad x^2-3x-9=0$

$\therefore\ x=\dfrac{3\pm3\sqrt{5}}{2}$

그런데 $x>3$이므로 $\qquad x=\dfrac{3+3\sqrt{5}}{2}$

따라서 $\triangle ACD$의 둘레의 길이는

$\overline{AC}+\overline{AD}+\overline{CD}=2\times\dfrac{3+3\sqrt{5}}{2}+3=6+3\sqrt{5}$

이때 내접원의 반지름의 길이가 r이고 둘레의 길이가 $6+3\sqrt{5}$인 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times r\times(6+3\sqrt{5})=\dfrac{6+3\sqrt{5}}{2}r \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 밑변의 길이가 3이고 높이가 h인 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times3\times h=\dfrac{3}{2}h \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡이 같으므로

$\dfrac{6+3\sqrt{5}}{2}r=\dfrac{3}{2}h, \qquad (6+3\sqrt{5})r=3h$

$\therefore\ \dfrac{h}{r}=2+\sqrt{5}$

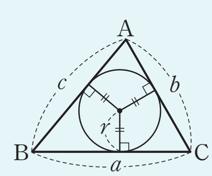
답 $2+\sqrt{5}$

만점 공략 노트

삼각형의 넓이와 내접원의 반지름의 길이

세 변의 길이가 각각 a, b, c이고 내접원의 반지름의 길이가 r인 $\triangle ABC$의 넓이는

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$



671 전략 공통부분을 한 문자로 놓고 이차방정식을 푼다.

$2(x+y)^2+5(x+y)-25=0$에서 $x+y=A$로 놓으면

$2A^2+5A-25=0,\quad (A+5)(2A-5)=0$

$\therefore A=-5$ 또는 $A=\frac{5}{2}$

즉 $x+y=-5$ 또는 $x+y=\frac{5}{2}$

이때 x, y는 정수이므로 $\quad x+y=-5 \quad\cdots\cdots$ ㉠

$3(x-y)^2-7(x-y)-6=0$에서 $x-y=B$로 놓으면

$3B^2-7B-6=0,\quad (3B+2)(B-3)=0$

$\therefore B=-\frac{2}{3}$ 또는 $B=3$

즉 $x-y=-\frac{2}{3}$ 또는 $x-y=3$

이때 x, y는 정수이므로 $\quad x-y=3 \quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad x=-1,\ y=-4$

$\therefore xy=-1\times(-4)=4$

답 4

672 전략 이차방정식이 중근을 가질 조건을 이용하여 세 수 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로

$\{-2(a-2c)\}^2-4\times(a-2b)^2=0$

$(a-2c)^2-(a-2b)^2=0$

$\{(a-2c)-(a-2b)\}\{(a-2c)+(a-2b)\}=0$

$4(b-c)(a-b-c)=0$

$\therefore b-c=0$ 또는 $a-b-c=0$

그런데 삼각형의 한 변의 길이는 다른 두 변의 길이의 합보다 작으므로

$a\neq b+c$, 즉 $a-b-c\neq 0$

따라서 $b-c=0$이므로 이 삼각형은 $b=c$인 이등변삼각형이다.

답 $b=c$인 이등변삼각형

673 전략 두 폭죽이 터질 때까지 걸린 시간을 각각 구하여 비교한다.

$-5t^2+60t=160$에서

$t^2-12t+32=0,\quad (t-4)(t-8)=0$

$\therefore t=4$ 또는 $t=8$

첫 번째 폭죽이 내려오면서 160 m의 높이에 도달하는 것은 쏘아 올린 지 8초 후이다.

또 $-5t^2+60t=135$에서

$t^2-12t+27=0,\quad (t-3)(t-9)=0$

$\therefore t=3$ 또는 $t=9$

두 번째 폭죽이 올라가면서 135 m의 높이에 도달하는 것은 쏘아 올린 지 3초 후이다.

따라서 두 폭죽이 동시에 터지려면 첫 번째 폭죽을 쏘아 올린 지 5초 후에 두 번째 폭죽을 쏘아 올려야 한다.

답 5초

674 전략 t초 후의 각 선분의 길이를 이용하여 $\triangle APQ$의 넓이를 식으로 나타낸다.

t초 후의 각 선분의 길이는

$\overline{BP}=\frac{3}{2}t$ cm, $\overline{PC}=\left(15-\frac{3}{2}t\right)$ cm,

$\overline{CQ}=2t$ cm, $\overline{DQ}=(14-2t)$ cm

이므로

$\triangle ABP=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}t\times 14=\frac{21}{2}t\ (\text{cm}^2)$

$\triangle PCQ=\frac{1}{2}\times\left(15-\frac{3}{2}t\right)\times 2t=15t-\frac{3}{2}t^2\ (\text{cm}^2)$

$\triangle AQD=\frac{1}{2}\times 15\times(14-2t)=105-15t\ (\text{cm}^2)$

$\square ABCD=\triangle ABP+\triangle PCQ+\triangle AQD+\triangle APQ$이므로

$15\times 14=\frac{21}{2}t+\left(15t-\frac{3}{2}t^2\right)+(105-15t)+87$

$\frac{3}{2}t^2-\frac{21}{2}t+18=0$

$t^2-7t+12=0,\quad (t-3)(t-4)=0$

$\therefore t=3$ 또는 $t=4$

이때 $0<t<7$이므로 $\quad t=3$ 또는 $t=4$

따라서 구하는 시간은 3초, 4초이다.

답 3초, 4초

시험 만점 완성하기

본책 140~143쪽

675 전략 근의 공식을 이용하여 이차방정식의 해를 구한다.

$x^2+2x-2=0$에서 $\quad x=-1\pm\sqrt{3}$

따라서 $\alpha=-1-\sqrt{3}$이므로

$\alpha+1=-\sqrt{3}$

답 ②

676 전략 주어진 이차방정식의 양변에 적당한 수를 곱하여 계수를 정수로 고친 후 근의 공식을 이용하여 해를 구한다.

주어진 이차방정식의 양변에 10을 곱하면

$15x(x-2)-20=-5x$

$3x^2-5x-4=0\quad \therefore x=\frac{5\pm\sqrt{73}}{6}$

따라서 $a=5$, $b=73$이므로

$b-a=73-5=68$

답 ⑤

677 전략 공통부분을 한 문자로 놓고 이차방정식을 푼다.

$x-y=A$로 놓으면

$A(2A-1)-3=0$

$2A^2-A-3=0,\quad (A+1)(2A-3)=0$

$\therefore A=-1$ 또는 $A=\frac{3}{2}$

즉 $x-y=-1$ 또는 $x-y=\frac{3}{2}$

이때 $x<y$, 즉 $x-y<0$이므로 $\quad x-y=-1$

$\therefore 3y-3x=-3(x-y)=-3\times(-1)=3$

답 ④

678 전략 근의 공식을 이용하여 이차방정식의 해를 구한 후 k의 값을 대입하여 근을 확인한다.

$x^2-4x+2k=0$에서 $\quad x=2\pm\sqrt{4-2k}$

① $k=-4$이면 근호 안의 식의 값이 $4-2\times(-4)=12>0$이므로 서로 다른 두 근을 갖는다.

② $k=-2$이면 $x=2\pm\sqrt{8}$이므로 무리수인 근을 갖는다.

③ $k=\frac{3}{2}$이면 $x=2\pm1$, 즉 $x=1$ 또는 $x=3$이므로 근이 모두 자연수이다.

④ $k=2$이면 근호 안의 식의 값이 $4-2\times2=0$이므로 중근을 갖는다.

⑤ $k=5$이면 근호 안의 식의 값이 $4-2\times5=-6<0$이므로 근이 없다.

따라서 옳지 않은 것은 ②이다. 답 ②

679 전략 $a+b=k$로 놓고 이차방정식이 중근을 가질 조건을 이용하여 k의 값을 구한다.

$a+b=k$로 놓으면

$2x^2-2(k+2)x+k^2+4=0$

이 이차방정식이 중근을 가지므로

$\{-2(k+2)\}^2-4\times2\times(k^2+4)=0$

$-4k^2+16k-16=0, \quad k^2-4k+4=0$

$(k-2)^2=0 \quad \therefore k=2$

$\therefore a+b=2$ 답 ⑤

680 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해가 존재하지 않으면 $b^2-4ac<0$이고, 해가 모두 유리수이면 b^2-4ac는 0 또는 (자연수)^{2}의 꼴임을 이용한다.

$x^2+7x-3k=0$에서 $\quad x=\frac{-7\pm\sqrt{49+12k}}{2}$

$x^2+7x-3k=0$의 해가 존재하지 않으려면

$49+12k<0 \quad \therefore k<-\frac{49}{12}$

$\therefore p=-5$

또 $x^2+7x-3k=0$의 해가 모두 유리수가 되려면 $49+12k$는 0 또는 (자연수)^{2}의 꼴이어야 한다.

이때 k는 자연수이므로 $49+12k>49$에서

$49+12k=64, 81, 100, 121, \cdots$

$\therefore k=\frac{5}{4}, \frac{8}{3}, \frac{17}{4}, 6, \cdots$

$\therefore q=6$

$\therefore p+q=-5+6=1$ 답 ④

681 전략 중근이 α이고 x^2의 계수가 k인 이차방정식 ➜ $k(x-\alpha)^2=0$

중근 $x=\frac{5}{2}$를 갖고 x^2의 계수가 -2인 이차방정식은

$-2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=0 \quad \therefore -2x^2+10x-\frac{25}{2}=0$

따라서 $a=10$, $b=-\frac{25}{2}$이므로

$a-2b=10-2\times\left(-\frac{25}{2}\right)=35$ 답 ⑤

682 전략 두 근을 α, $-\alpha$로 놓고 이차방정식을 세운 후 주어진 이차방정식과 계수를 비교한다.

두 근의 절댓값이 같고 부호가 다르므로 두 근을 α, $-\alpha$로 놓으면 두 근이 α, $-\alpha$이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-\alpha)(x+\alpha)=0 \quad \therefore x^2-\alpha^2=0$

이 이차방정식이 $x^2+(3k^2-2k-8)x+k-1=0$과 같으므로

$3k^2-2k-8=0$ …… ㉠

$k-1=-\alpha^2$ …… ㉡

㉠에서 $\quad (3k+4)(k-2)=0 \quad \therefore k=-\frac{4}{3}$ 또는 $k=2$

(ⅰ) $k=-\frac{4}{3}$일 때,

㉡에서 $-\frac{4}{3}-1=-\alpha^2$, 즉 $\alpha^2=\frac{7}{3}$이므로

$\alpha=\pm\frac{\sqrt{21}}{3}$

(ⅱ) $k=2$일 때,

㉡에서 $2-1=-\alpha^2$, 즉 $\alpha^2=-1$이므로 이를 만족시키는 α는 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\quad k=-\frac{4}{3}$ 답 ②

683 전략 주어진 식을 이용하여 이차방정식을 세운다.

참석한 사람의 수는 $2a$이고 부부끼리의 악수의 횟수는 a이므로

$\frac{2a(2a-1)}{2}-a=60$

$a^2-a-30=0, \quad (a+5)(a-6)=0$

$\therefore a=-5$ 또는 $a=6$

그런데 a는 자연수이므로 $\quad a=6$ 답 ③

684 전략 연속하는 세 자연수를 $x-1$, x, $x+1$로 놓고 이차방정식을 세운다.

연속하는 세 자연수를 $x-1$, x, $x+1$이라 하면

$\{(x+1)+1\}^2=3x(x-1)$

$2x^2-7x-4=0, \quad (2x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=4$

그런데 x는 자연수이므로 $\quad x=4$

따라서 세 수는 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$3+4+5=12$ 답 ③

685 전략 주어진 식을 이용하여 이차방정식을 세운다.

$-5t^2+30t+15=60$에서 $\quad t^2-6t+9=0$

$(t-3)^2=0 \quad \therefore t=3$

따라서 물 로켓의 높이가 60 m가 되는 것은 쏘아 올린 지 3초 후이다. 답 ③

686 전략 직선 AB의 방정식을 먼저 구한다.

두 점 A$(0, -2)$, B$(3, 0)$을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{0-(-2)}{3-0}=\frac{2}{3}$$

즉 직선 AB의 기울기는 $\frac{2}{3}$, y절편은 -2이므로 직선의 방정식은

$$y=\frac{2}{3}x-2$$

점 P가 출발한 지 t초 후의 점 P의 x좌표는 $\frac{3}{2}t+3$이므로 점 Q의 x좌표도 $\frac{3}{2}t+3$이다.

이때 점 Q는 직선 AB 위의 점이므로 점 Q의 y좌표는

$$\frac{2}{3}\times\left(\frac{3}{2}t+3\right)-2=t$$

즉 $\overline{\mathrm{OP}}=\frac{3}{2}t+3$, $\overline{\mathrm{PQ}}=t$이므로

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}t+3\right)\times t=60$$

$$t^2+2t-80=0, \qquad (t+10)(t-8)=0$$

$$\therefore t=-10 \text{ 또는 } t=8$$

그런데 $t>0$이므로 $\quad t=8$

따라서 △OPQ의 넓이가 60이 되는 것은 점 P가 출발한 지 8초 후이다.

답 ③

687 전략 길의 폭을 x m라 하고 이차방정식을 세운다.

길의 폭을 x m라 하면 길이 아닌 땅의 넓이는

$7\times10-36=34\ (\mathrm{m}^2)$이므로

$$(10-x)(7-2x)=34$$

$$2x^2-27x+36=0, \qquad (2x-3)(x-12)=0$$

$$\therefore x=\frac{3}{2} \text{ 또는 } x=12$$

그런데 $0<x<\frac{7}{2}$이므로 $\quad x=\frac{3}{2}$

따라서 길의 폭은 $\frac{3}{2}$ m이다.

답 ①

다른 풀이 길의 폭을 x m라 하면 길의 넓이가 36 m^2이므로

$$10x+x(7-2x)+10x=36$$

$$2x^2-27x+36=0, \qquad (2x-3)(x-12)=0$$

$$\therefore x=\frac{3}{2} \text{ 또는 } x=12$$

688 전략 $\overline{\mathrm{AD}}=x$ cm로 놓고 비례식을 세운다.

$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACB}=\frac{1}{2}\times(180^\circ-36^\circ)=72^\circ$이므로

$$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{DBC}=\frac{1}{2}\times72^\circ=36^\circ,$$

$$\angle\mathrm{BDC}=180^\circ-(36^\circ+72^\circ)=72^\circ$$

즉 △ABD, △BCD는 각각 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BD}}$, $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형이므로

$$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BC}}$$

$\overline{\mathrm{AD}}=x$ cm라 하면 $\overline{\mathrm{BA}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{CD}}$에서

$$12:x=x:(12-x)$$

$$12(12-x)=x^2, \qquad x^2+12x-144=0$$

$$\therefore x=-6\pm6\sqrt{5}$$

그런데 $0<x<12$이므로 $\quad x=-6+6\sqrt{5}$

따라서 $\overline{\mathrm{AD}}$의 길이는 $(-6+6\sqrt{5})$ cm이다.

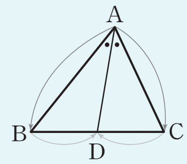
답 ②

만점 공략 노트

삼각형의 내각의 이등분선의 성질

△ABC에서 ∠A의 이등분선이 $\overline{\mathrm{BC}}$와 만나는 점을 D라 하면

$$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}$$



다른 풀이 △ABC∽△BCD (AA 닮음)이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=x$ cm라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{CD}}$에서

$$12:x=x:(12-x)$$

$$12(12-x)=x^2, \qquad x^2+12x-144=0$$

$$\therefore x=-6\pm6\sqrt{5}$$

689 전략 주어진 이차방정식을 간단히 한 후 해를 구한다.

$(3x+2)^2=2(x+3)(4x-1)+15$에서

$$9x^2+12x+4=8x^2+22x+9$$

$$x^2-10x-5=0 \qquad \therefore x=5\pm\sqrt{30}$$

$$\therefore a=5-\sqrt{30}$$

이때 $5<\sqrt{30}<6$에서 $\quad -6<-\sqrt{30}<-5$

$$\therefore -1<5-\sqrt{30}<0$$

즉 $-1<a<0$이므로 $\quad n=-1$

답 -1

690 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 개수는 b^2-4ac의 부호로 판단할 수 있다.

$4ax^2+2(a+b)x+b=0$에서

$$\{2(a+b)\}^2-4\times4a\times b=4a^2+8ab+4b^2-16ab$$
$$=4a^2-8ab+4b^2$$
$$=4(a-b)^2$$

이때 a, b는 서로 다른 두 실수이므로 $\quad a-b\neq0$

즉 $4(a-b)^2>0$이므로 주어진 이차방정식의 근의 개수는 2이다.

답 2

691 전략 x^2의 계수가 1인 이차방정식에서 x의 계수를 잘못 본 경우 상수항을 바르게 본 것이고, 상수항을 잘못 본 경우 x의 계수를 바르게 본 것임을 이용한다.

두 근이 $4\pm\sqrt{7}$이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$\{x-(4-\sqrt{7})\}\{x-(4+\sqrt{7})\}=0$$

$$\therefore x^2-8x+9=0$$

성희는 상수항을 바르게 보았으므로 $\quad b=9$

두 근이 -12, 1이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$(x+12)(x-1)=0$$

$$\therefore x^2+11x-12=0$$

수연이는 x의 계수를 바르게 보았으므로 $\quad a=11$

$$\therefore ab=11\times9=99$$

답 99

692 전략 (이익)=(판매 가격)−(원가)임을 이용하여 이차방정식을 세운다.

상품의 정가는 $3000\left(1+\frac{a}{100}\right)$원

정가의 $a\%$를 할인한 판매 가격은

$3000\left(1+\frac{a}{100}\right)\left(1-\frac{a}{100}\right)$원

30원의 손해를 보았으므로

$3000\left(1+\frac{a}{100}\right)\left(1-\frac{a}{100}\right)-3000=-30$

$-\frac{3}{10}a^2=-30,\quad a^2-100=0$

$(a+10)(a-10)=0\quad \therefore a=-10$ 또는 $a=10$

그런데 $a>0$이므로 $a=10$

답 10

693 전략 $\overline{DE}=x$ cm로 놓고 비례식을 세운다.

$\overline{DE}=x$ cm라 하면 $\overline{AB}=(x+5)$ cm

□ABCD∽□EFGD이므로 $\overline{AB}:\overline{EF}=\overline{AD}:\overline{ED}$에서

$(x+5):4=6:x$

$x(x+5)=24,\quad x^2+5x-24=0$

$(x+8)(x-3)=0\quad \therefore x=-8$ 또는 $x=3$

그런데 $x>0$이므로 $x=3$

따라서 □EFGD의 넓이는

$4\times3=12\ (\mathrm{cm}^2)$

답 $12\ \mathrm{cm}^2$

694 전략 △ABC와 △AFB가 닮음임을 이용하여 정오각형의 대각선의 길이를 구한다.

정오각형의 한 내각의 크기는 $\frac{180^\circ\times(5-2)}{5}=108^\circ$이므로

$\angle ABC=108^\circ$

△ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이므로

$\angle BAC=\angle BCA=\frac{1}{2}\times(180^\circ-108^\circ)=36^\circ$

같은 방법으로 △ABE에서 $\angle ABE=36^\circ$

$\therefore \angle FBC=108^\circ-36^\circ=72^\circ$

$\angle BFC=180^\circ-(36^\circ+72^\circ)=72^\circ$

즉 $\angle FBC=\angle BFC$이므로 △BCF는 $\overline{BC}=\overline{FC}$인 이등변삼각형이다.

$\therefore \overline{FC}=\overline{BC}=1$

$\overline{AF}=x$라 하면 $\overline{AC}=x+1$

△ABC∽△AFB이므로 $\overline{AB}:\overline{AF}=\overline{AC}:\overline{AB}$에서

$1:x=(x+1):1$

$1=x^2+x,\quad x^2+x-1=0$

$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

그런데 $0<x<1$이므로 $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore \overline{AF}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

이때 $\overline{BG}=\overline{AB}=1$, $\overline{BF}=\overline{AF}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$이므로

$\overline{FG}=\overline{BG}-\overline{BF}=1-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

답 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

695 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 갖는다.
→ $b^2-4ac=0$

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로

$(k+1)^2-4\times(k^2-1)\times(-1)=0$

$5k^2+2k-3=0,\quad (k+1)(5k-3)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=\frac{3}{5}$

그런데 주어진 방정식은 이차방정식이므로 $k^2-1\neq0$

$(k+1)(k-1)\neq0\quad \therefore k\neq-1,\ k\neq1$

$\therefore k=\frac{3}{5}$ … 1단계

즉 주어진 이차방정식은 $-\frac{16}{25}x^2+\frac{8}{5}x-1=0$이므로

$16x^2-40x+25=0$

$(4x-5)^2=0\quad \therefore x=\frac{5}{4}$

$\therefore a=\frac{5}{4}$ … 2단계

$\therefore ka=\frac{3}{5}\times\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$ … 3단계

답 $\frac{3}{4}$

단계	채점 요소	배점
1	k의 값 구하기	2점
2	a의 값 구하기	2점
3	ka의 값 구하기	1점

696 전략 주어진 이차방정식을 풀어서 α, β의 값을 먼저 구한다.

주어진 이차방정식의 양변에 6을 곱하면

$3x^2+x=18x-10$

$3x^2-17x+10=0,\quad (3x-2)(x-5)=0$

$\therefore x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=5$ … 1단계

$\alpha=\frac{2}{3}$, $\beta=5$라 하면 $\alpha-1=-\frac{1}{3}$, $\beta-1=4$이므로 $-\frac{1}{3}$, 4를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 3인 이차방정식은

$3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-4)=0$

$\therefore 3x^2-11x-4=0$ … 2단계

답 $3x^2-11x-4=0$

단계	채점 요소	배점
1	주어진 이차방정식 풀기	2점
2	조건을 만족시키는 이차방정식 구하기	2점

697 전략 십의 자리의 숫자를 x로 놓고 이차방정식을 세운다.

십의 자리의 숫자를 x라 하면 일의 자리의 숫자는 $5-x$이다.
즉 두 자리 자연수는 $10x+(5-x)=9x+5$이고 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수는 $10(5-x)+x=50-9x$이므로

$5(50-9x)=(9x+5)^2+9$ … 1단계

$3x^2+5x-8=0$, $(3x+8)(x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{8}{3}$ 또는 $x=1$ … 2단계

그런데 x는 자연수이므로 $x=1$

따라서 구하는 수는 14이다. … 3단계

답 14

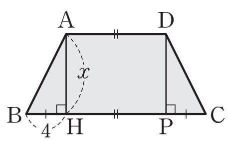
단계	채점 요소	배점
1	이차방정식 세우기	2점
2	이차방정식 풀기	1점
3	두 자리 자연수 구하기	1점

698 전략 $\overline{AH}=x$로 놓고 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$의 길이를 x를 이용하여 나타낸다.

$\overline{AH}=x$라 하면

$\overline{AD}=\overline{AH}+2=x+2$

오른쪽 그림과 같이 점 D에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 P라 하면



$\triangle ABH \equiv \triangle DCP$ (RHS 합동)이므로

$\overline{CP}=\overline{BH}=4$

따라서 $\overline{BC}=x+10$이므로

$\frac{1}{2}\times\{(x+2)+(x+10)\}\times x=112$ … 1단계

$x^2+6x-112=0$, $(x+14)(x-8)=0$

$\therefore x=-14$ 또는 $x=8$ … 2단계

그런데 $x>0$이므로 $x=8$

$\therefore \overline{BC}=8+10=18$ … 3단계

답 18

단계	채점 요소	배점
1	이차방정식 세우기	2점
2	이차방정식 풀기	1점
3	$\overline{BC}$의 길이 구하기	1점

08 이차함수의 그래프 (1)

셀프 CHECK

본책 146~147쪽

A (1) 일차함수이다.

(2) $y=x^2-2x-1$이므로 이차함수이다.

(3) $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$이므로 이차함수이다.

답 (1) × (2) ○ (3) ○

B 답 (1) ㄱ, ㄷ, ㄹ (2) ㄱ, ㄴ, ㄷ

C 답 (1) $(0, 0)$ (2) $x=0$ (3) $y=4x^2$

D 답 (1) $y=\frac{2}{3}x^2+1$ (2) $y=8x^2-3$ (3) $y=-2x^2+\frac{5}{2}$

E 답 (1) 꼭짓점의 좌표: $(7, 0)$, 축의 방정식: $x=7$

(2) 꼭짓점의 좌표: $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$, 축의 방정식: $x=-\frac{4}{3}$

(3) 꼭짓점의 좌표: $(1, 0)$, 축의 방정식: $x=1$

F 답 (1) $y=-6(x-2)^2-5$ (2) $y=4\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-2$

G 답 (1) 꼭짓점의 좌표: $(3, 3)$, 축의 방정식: $x=3$

(2) 꼭짓점의 좌표: $(-1, -4)$, 축의 방정식: $x=-1$

내신 유형 다지기

본책 148~159쪽

유형 135 이차함수의 뜻

본책 148쪽

y가 x에 대한 이차함수

➜ $y=$(x에 대한 이차식)

➜ $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)의 꼴

699 ① $y=2$ ➜ 이차함수가 아니다.

② $y=x-7$ ➜ 일차함수이다.

③ $y=\frac{4}{3x^2}$ ➜ 이차함수가 아니다.

④ $y=x^3+x^2(6-x)=6x^2$ ➜ 이차함수이다.

⑤ $y=(x+1)(x-2)-x^2=-x-2$ ➜ 일차함수이다.

따라서 y가 x에 대한 이차함수인 것은 ④이다.

답 ④

700 ① $y=24-x$ ➜ 일차함수이다.
② $y=\frac{1}{3}\times\pi x^2\times5=\frac{5}{3}\pi x^2$ ➜ 이차함수이다.
③ $y=x^2\times6=6x^2$ ➜ 이차함수이다.
④ $y=\frac{x}{100}\times200=2x$ ➜ 일차함수이다.
⑤ $y=x^2+(x+2)^2=2x^2+4x+4$ ➜ 이차함수이다.
따라서 y가 x에 대한 이차함수가 아닌 것은 ①, ④이다.

답 ①, ④

만점 공략 노트

(1) (소금물의 농도)$=\frac{\text{(소금의 양)}}{\text{(소금물의 양)}}\times100\,(\%)$

(2) (소금의 양)$=\frac{\text{(소금물의 농도)}}{100}\times$(소금물의 양)

701 ㄱ. $y=\pi\times\left(\frac{x}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{8}x^2$ ➜ 이차함수이다.
ㄴ. $y=\frac{1}{2}\times\{x+(x+3)\}\times2=2x+3$ ➜ 일차함수이다.
ㄷ. $y=x(x-1)=x^2-x$ ➜ 이차함수이다.
따라서 y가 x에 대한 이차함수인 것과 그때의 함수의 식을 바르게 구한 것은 ⑤이다.

답 ⑤

유형 136 이차함수가 되도록 하는 조건

본책 148쪽

$y=ax^2+bx+c$가 x에 대한 이차함수가 되려면 $a\neq0$이어야 한다.

702 $y=x(ax+2)-3x^2+1$
$=ax^2+2x-3x^2+1$
$=(a-3)x^2+2x+1$
이 함수가 이차함수가 되려면
$a-3\neq0$ $\therefore a\neq3$

답 ⑤

703 $y=(4+a)x^2+ax(5-3x)-2$
$=(4+a)x^2+5ax-3ax^2-2$
$=(4-2a)x^2+5ax-2$
이 함수가 이차함수이므로
$4-2a\neq0$ $\therefore a\neq2$
따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ④이다.

답 ④

704 주어진 함수가 이차함수가 되려면
$(k+1)(k-3)=0$, $k^2+k\neq0$
이어야 한다.
(i) $(k+1)(k-3)=0$에서 $k=-1$ 또는 $k=3$
(ii) $k^2+k\neq0$에서 $k(k+1)\neq0$ $\therefore k\neq-1$이고 $k\neq0$
(i), (ii)에서 $k=3$

답 3

유형 137 이차함수의 함숫값

본책 149쪽

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$에서 $f(k)$의 값
➜ $x=k$일 때의 함숫값
➜ x 대신 k를 대입하여 얻은 $f(x)$의 값
➜ ak^2+bk+c

705 $f(x)=2x^2+9x-4$에서
$f(-1)=2\times(-1)^2+9\times(-1)-4=-11$
$f(2)=2\times2^2+9\times2-4=22$
$\therefore f(-1)+f(2)=-11+22=11$

답 ①

706 $f(4)=15$에서
$-\frac{3}{2}\times4^2+8\times4+k=15$
$k+8=15$ $\therefore k=7$
따라서 $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+8x+7$이므로
$f(-2)=-\frac{3}{2}\times(-2)^2+8\times(-2)+7=-15$

답 -15

707 $f\left(\frac{1}{3}\right)=-1$에서
$-\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}a+b=-1$
$\therefore 3a+9b=-8$ …… ㉠
$f(3)=7$에서
$-3^2+3a+b=7$
$\therefore 3a+b=16$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=\frac{19}{3}$, $b=-3$ … 1단계
$\therefore ab=\frac{19}{3}\times(-3)=-19$ … 2단계

답 -19

단계	채점 요소	비율
1	a, b의 값 구하기	80 %
2	ab의 값 구하기	20 %

708 $f(-6)=-3$에서
$-\frac{1}{2}\times(-6)^2-(-6)+a=-3$ $\therefore a=9$
$g(7)=-15$에서
$7^2+7b+b=-15$, $8b=-64$ $\therefore b=-8$
$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}x^2-x+9$, $g(x)=x^2-8x-8$
$f(k)=g(k)+5$에서
$-\frac{1}{2}k^2-k+9=(k^2-8k-8)+5$
$3k^2-14k-24=0$, $(3k+4)(k-6)=0$
$\therefore k=-\frac{4}{3}$ 또는 $k=6$
따라서 정수 k의 값은 6이다.

답 ②

유형 138 이차함수 $y=ax^2$의 그래프

본책 149쪽

이차함수 $y=ax^2$에서
(1) a의 부호 ➜ 그래프의 모양(아래로 또는 위로 볼록)을 결정
(2) a의 절댓값 ➜ 그래프의 폭을 결정

709 그래프가 아래로 볼록하므로 x^2의 계수가 양수이어야 한다. x^2의 계수가 양수인 이차함수의 x^2의 계수의 절댓값의 대소를 비교하면

$$\left|\frac{1}{2}\right|<\left|\frac{4}{3}\right|<|2|$$

따라서 그래프가 아래로 볼록하면서 폭이 가장 좁은 것은 ④이다.

답 ④

710 $y=ax^2$의 그래프가 색칠한 부분을 지나려면
(ⅰ) 그래프가 아래로 볼록한 경우
$a>0$이고 $|a|<\left|\frac{1}{3}\right|$이어야 하므로
$0<a<\frac{1}{3}$
(ⅱ) 그래프가 위로 볼록한 경우
$a<0$이고 $|a|<|-1|$이어야 하므로
$-1<a<0$
(ⅰ), (ⅱ)에서 그래프가 색칠한 부분을 지나는 것은 ②, ③이다.

답 ②, ③

711 이차함수의 x^2의 계수의 절댓값이 작을수록 그래프의 폭이 넓어진다.
주어진 이차함수의 x^2의 계수의 절댓값을 비교하면

$$\left|\frac{2}{3}\right|<\left|-\frac{4}{5}\right|<|2|<\left|-\frac{5}{2}\right|<|-3|$$

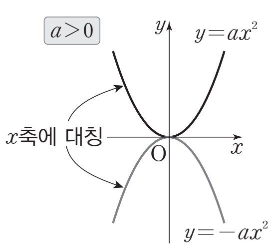
따라서 그래프의 폭이 가장 넓은 것부터 차례대로 나열하면 ㄹ, ㄷ, ㄴ, ㅁ, ㄱ이다.

답 ㄹ, ㄷ, ㄴ, ㅁ, ㄱ

유형 139 두 이차함수 $y=ax^2$, $y=-ax^2$의 그래프의 관계

본책 150쪽

두 이차함수
$y=ax^2$, $y=-ax^2$
과 같이 x^2의 계수의 절댓값이 같고, 부호가 반대인 두 이차함수의 그래프는 x축에 대하여 대칭이다.



712 $y=ax^2$의 그래프와 $y=-ax^2$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이다.
따라서 보기의 이차함수 중 그래프가 x축에 대하여 대칭인 것은 ㄱ과 ㄹ, ㄷ과 ㅂ이다.

답 ②, ④

713 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭인 것은
$y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프이므로 $a=\frac{1}{2}$ … 1단계
$y=\frac{3}{2}ax^2$, 즉 $y=\frac{3}{4}x^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭인 것은
$y=-\frac{3}{4}x^2$의 그래프이므로 $b=-\frac{3}{4}$ … 2단계
$\therefore 2a+4b=2\times\frac{1}{2}+4\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-2$ … 3단계

답 -2

단계	채점 요소	비율
1	a의 값 구하기	40 %
2	b의 값 구하기	40 %
3	$2a+4b$의 값 구하기	20 %

714 $y=2x^2$과 $y=cx^2$의 그래프가 x축에 대하여 대칭이므로
$c=-2$
$y=ax^2$과 $y=bx^2$의 그래프가 x축에 대하여 대칭이므로
$b=-a$
① $a+b+c=a+(-a)+(-2)=-2$
② $a=-b$의 양변을 제곱하면 $a^2=b^2$
③ $y=ax^2$의 그래프가 $y=cx^2$의 그래프보다 폭이 더 넓으므로
$|a|<|c|$
④ $bc=(-a)\times(-2)=2a$
⑤ $ac=(-b)\times(-2)=2b$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

유형 140 이차함수 $y=ax^2$의 그래프의 성질

본책 150쪽

(1) 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이다.
(2) y축에 대하여 대칭이다. ➜ 축의 방정식: $x=0$ (y축)
(3) a의 부호에 따라 그래프의 모양이 달라진다.
➜ $a>0$일 때 아래로 볼록, $a<0$일 때 위로 볼록
(4) a의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 좁아진다.
(5) $y=-ax^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

715 ④ $y=-\frac{3}{4}x^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

716 ㄱ. $a>0$일 때, 아래로 볼록하다.
ㄹ. $a<0$이면 모든 실수 x에 대하여 $y\le 0$이다.
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

717 ③ x축에 대하여 대칭인 그래프는 없다.
④ $y=ax^2$에서 $a<0$이면 그래프는 제3사분면과 제4사분면을 지나므로 그 그래프는 ㄱ, ㄹ이다.

⑤ $y=ax^2$에서 a의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 좁아지므로 가장 좁은 것은 ㄷ이다.
따라서 옳지 않은 것은 ③이다. 답 ③

유형 141 이차함수 $y=ax^2$의 그래프 위의 점 본책 151쪽

이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 점 (m, n)을 지난다.
➜ $x=m$, $y=n$을 $y=ax^2$에 대입하면 등식이 성립한다. 즉
$n=am^2$

718 $y=ax^2$의 그래프가 점 $(2, 5)$를 지나므로

$5=a\times 2^2 \qquad \therefore a=\frac{5}{4}$

$y=\frac{5}{4}x^2$의 그래프가 점 $(-4, b)$를 지나므로

$b=\frac{5}{4}\times(-4)^2=20$

$\therefore ab=\frac{5}{4}\times 20=25$ 답 25

719 $y=4x^2$의 그래프가 점 $(3, a)$를 지나므로

$a=4\times 3^2=36$

$y=4x^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭인 것은 $y=-4x^2$의 그래프이므로

$b=-4$

$\therefore a+b=36+(-4)=32$ 답 ⑤

720 $y=\frac{2}{3}x^2$의 그래프가 점 $\left(a-1, \frac{1}{3}a\right)$를 지나므로

$\frac{1}{3}a=\frac{2}{3}\times(a-1)^2, \qquad 2a^2-5a+2=0$

$(2a-1)(a-2)=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=2$

따라서 모든 a의 값의 합은

$\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$ 답 ⑤

721 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프가 점 $(-6, a)$를 지나므로

$a=\frac{1}{2}\times(-6)^2=18$

또 점 $(b, 2)$를 지나므로

$2=\frac{1}{2}b^2, \qquad b^2=4 \qquad \therefore b=\pm 2$

그런데 $b>0$이므로 $\quad b=2$

두 점 $(-6, 18)$, $(2, 2)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{2-18}{2-(-6)}=-2$

따라서 직선의 방정식을 $y=-2x+k$로 놓으면 이 직선이 점 $(2, 2)$를 지나므로

$2=-2\times 2+k \qquad \therefore k=6$

$\therefore y=-2x+6$ 답 ②

유형 142 이차함수 $y=ax^2$의 식 구하기 본책 151쪽

원점을 꼭짓점으로 하는 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식 구하기
❶ 구하는 식을 $y=ax^2$으로 놓는다.
❷ 그래프가 지나는 점의 좌표를 ❶의 식에 대입하여 a의 값을 구한다.

722 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이므로 이차함수의 식을 $y=ax^2$으로 놓으면 이 그래프가 점 $(-4, 6)$을 지나므로

$6=a\times(-4)^2 \qquad \therefore a=\frac{3}{8}$

따라서 구하는 이차함수의 식은 $y=\frac{3}{8}x^2$이다. 답 ④

723 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이므로 $f(x)=ax^2$으로 놓으면 이 그래프가 점 $(-3, -4)$를 지나므로

$-4=a\times(-3)^2 \qquad \therefore a=-\frac{4}{9}$

$\therefore f(x)=-\frac{4}{9}x^2$ ··· 1단계

$\therefore f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{4}{9}\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=-1$ ··· 2단계

답 -1

단계	채점 요소	비율
1	$f(x)$의 식 구하기	60 %
2	$f\left(\frac{3}{2}\right)$의 값 구하기	40 %

724 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이므로 이차함수의 식을 $y=ax^2$으로 놓으면 이 그래프가 점 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$을 지나므로

$\frac{1}{3}=a\times\left(\frac{1}{3}\right)^2 \qquad \therefore a=3$

$y=3x^2$의 그래프가 점 $(k, 12)$를 지나므로

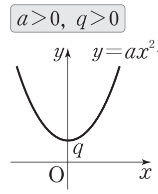
$12=3k^2, \qquad k^2=4 \qquad \therefore k=\pm 2$

그런데 $k>0$이므로 $\quad k=2$ 답 2

유형 143 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프 본책 152쪽

$y=ax^2+q$의 그래프는
(1) $y=ax^2$의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.
(2) 꼭짓점의 좌표: $(0, q)$
(3) 축의 방정식: $x=0$ (y축)

$a>0$, $q>0$



725 주어진 그래프는 $y=2x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로

$f(x)=2x^2-3$

따라서

$f(2)=2\times2^2-3=5,$

$f(-3)=2\times(-3)^2-3=15$

이므로

$f(2)+f(-3)=5+15=20$ 　　**답** 20

726 $y=-5x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 7만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-5x^2+7$

이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 7)$이고 축의 방정식은 $x=0$이므로

$p=0,\ q=7,\ m=0$

$\therefore\ p+q+m=0+7+0=7$ 　　**답** 7

727 $y=ax^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭인 그래프의 식은 $y=-ax^2$이고 이 그래프를 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-ax^2-4$ 　　… 1단계

이 그래프가 점 $(-1,\ -5)$를 지나므로

$-5=-a\times(-1)^2-4$ 　　$\therefore\ a=1$ 　　… 2단계

$y=-x^2-4$의 그래프가 점 $(k,\ -13)$을 지나므로

$-13=-k^2-4,$ 　　$k^2=9$ 　　$\therefore\ k=\pm3$

그런데 $k>0$이므로 　　$k=3$ 　　… 3단계

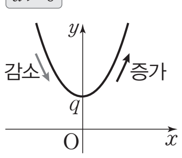
답 3

단계	채점 요소	비율
1	이차함수의 식 구하기	20 %
2	a의 값 구하기	40 %
3	k의 값 구하기	40 %

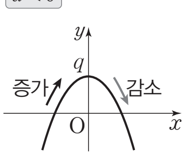
유형 144 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프의 성질 　본책 152쪽

a의 부호에 따라 $y=ax^2+q\ (q>0)$의 그래프는 다음과 같다.

$a>0$



$a<0$

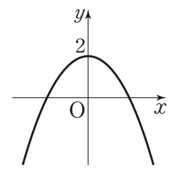


728 ② 축의 방정식은 $x=0$이다.

⑤ $x<0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 옳지 않은 것은 ②, ⑤이다. 　　**답** ②, ⑤

729 ㄴ. 오른쪽 그림과 같이 모든 사분면을 지난다.



ㄷ. $\left|-\frac{1}{2}\right|<|1|$이므로 $y=-\frac{1}{2}x^2+2$의 그래프는 $y=x^2+2$의 그래프보다 폭이 넓다.

ㄹ. $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 　　**답** ㄱ, ㄴ, ㄷ

유형 145 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프 　본책 153쪽

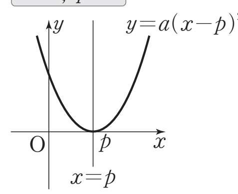
$y=a(x-p)^2$의 그래프는

(1) $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 것이다.

(2) 꼭짓점의 좌표: $(p,\ 0)$

(3) 축의 방정식: $x=p$

$a>0,\ p>0$



730 $y=6x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=6(x+1)^2$

이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 　$(-1,\ 0)$ 　　**답** ④

731 $y=-3x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-3(x-a)^2$

이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(a,\ 0)$이므로

$a=\frac{5}{3}$

$y=-3\left(x-\frac{5}{3}\right)^2$의 그래프가 점 $(1,\ b)$를 지나므로

$b=-3\left(1-\frac{5}{3}\right)^2=-\frac{4}{3}$

$\therefore\ a-b=\frac{5}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)=3$ 　　**답** 3

732 $y=bx^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -9만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=b(x+9)^2$

이 그래프의 식이 $y=-(x+a)^2$과 같으므로

$a=9,\ b=-1$ 　　… 1단계

$y=-(x+9)^2$의 그래프가 점 $(-7,\ c)$를 지나므로

$c=-(-7+9)^2=-4$ 　　… 2단계

$\therefore\ a+b+c=9+(-1)+(-4)=4$ 　　… 3단계

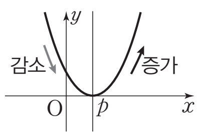
답 4

단계	채점 요소	비율
1	$a,\ b$의 값 구하기	60 %
2	c의 값 구하기	30 %
3	$a+b+c$의 값 구하기	10 %

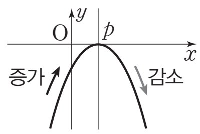
유형 146 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프의 성질 본책 153쪽

a의 부호에 따라 $y=a(x-p)^2\ (p>0)$의 그래프는 다음과 같다.

$a>0$



$a<0$



733 $y=-4x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-4(x+3)^2$

ㄱ. 꼭짓점의 좌표는 $(-3,\ 0)$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

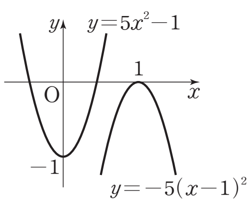
734 ④ 그래프의 꼭짓점이 x축 위에 있으므로 x축과 반드시 한 점에서 만난다.

⑤ $a>0$이면 $x>5$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$a<0$이면 $x>5$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

735 ①, ② $y=5x^2-1$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ -1)$이고 축의 방정식은 $x=0$이다.
$y=-5(x-1)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 0)$이고 축의 방정식은 $x=1$이다.

④ 오른쪽 그림과 같이 $y=5x^2-1$의 그래프는 모든 사분면을 지나지만 $y=-5(x-1)^2$의 그래프는 제3사분면과 제4사분면을 지난다.



⑤ $y=-5(x-1)^2$의 그래프는 $y=-5x^2$의 그래프를 평행이동한 것이다.

따라서 옳은 것은 ③이다. 답 ③

유형 147 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프 본책 154쪽

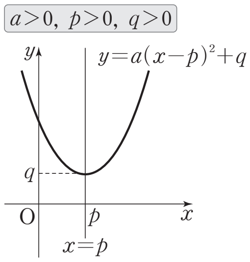
$y=a(x-p)^2+q$의 그래프는

(1) $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

(2) 꼭짓점의 좌표: $(p,\ q)$

(3) 축의 방정식: $x=p$

$a>0,\ p>0,\ q>0$



736 $y=2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 -8만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=2(x+5)^2-8$

이 그래프가 점 $(k,\ 0)$을 지나므로

$0=2(k+5)^2-8$

$(k+5)^2=4,\qquad k+5=\pm2$

$\therefore k=-7$ 또는 $k=-3$

따라서 모든 k의 값의 합은

$-7+(-3)=-10$ 답 -10

737 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ 6)$이므로

$p=3,\ q=6$

즉 $y=a(x-3)^2+6$의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2=a\times(-3)^2+6\qquad \therefore a=-\frac{4}{9}$

$\therefore apq=-\frac{4}{9}\times3\times6=-8$ 답 -8

738 그래프가 위로 볼록하므로 x^2의 계수가 음수이어야 한다. 각 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구하면

① $(0,\ -4)$ ➜ y축 위에 있다.

② $(-1,\ 0)$ ➜ x축 위에 있다.

③ $\left(-\frac{1}{2},\ 5\right)$ ➜ 제2사분면 위에 있다.

④ $(4,\ -2)$ ➜ 제4사분면 위에 있다.

⑤ x^2의 계수가 양수이므로 그래프가 아래로 볼록하다.

따라서 그래프가 위로 볼록하고 꼭짓점이 제2사분면 위에 있는 것은 ③이다. 답 ③

739 꼭짓점의 좌표는 $\quad(-2p,\ p^2+1)$ … 1단계

이 점이 직선 $y=\frac{1}{2}x+7$ 위에 있으므로

$p^2+1=\frac{1}{2}\times(-2p)+7$

$p^2+p-6=0,\qquad (p+3)(p-2)=0$

$\therefore p=-3$ 또는 $p=2$

그런데 $p<0$이므로 $\quad p=-3$ … 2단계

답 -3

단계	채점 요소	비율
1	꼭짓점의 좌표 구하기	30 %
2	음수 p의 값 구하기	70 %

740 ① 꼭짓점의 좌표가 $(0,\ 0)$이므로 x축과 한 점에서 만난다.

② 꼭짓점의 좌표가 $(0,\ 2)$이고 아래로 볼록하므로 x축과 만나지 않는다.

③ 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 0)$이므로 x축과 한 점에서 만난다.

④ 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ -9)$이고 아래로 볼록하므로 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

⑤ 꼭짓점의 좌표가 $(4,\ -8)$이고 위로 볼록하므로 x축과 만나지 않는다.

따라서 그래프가 x축과 만나지 않는 것은 ②, ⑤이다.

답 ②, ⑤

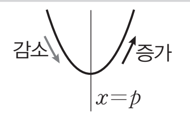
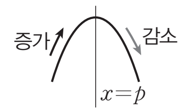
741 주어진 이차함수의 그래프가 모든 사분면을 지나려면 y축과의 교점이 x축의 아래쪽에 위치해야 하므로

$$\frac{1}{2}\times(-3)^2+a<0 \qquad \therefore a<-\frac{9}{2}$$

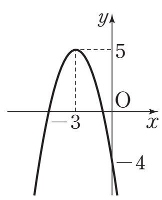
따라서 가장 큰 정수 a의 값은 -5이다. 답 -5

유형 148 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 증가와 감소

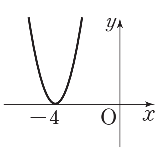
본책 155쪽

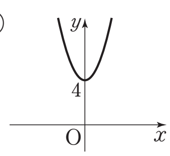
	$a>0$	$a<0$
그래프		
$x<p$일 때	x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.	x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$x>p$일 때	x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.	x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

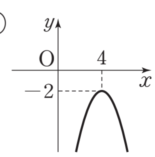
742 $y=-(x+3)^2+5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하는 x의 값의 범위는 $x<-3$이다. 답 ①

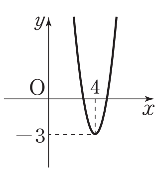


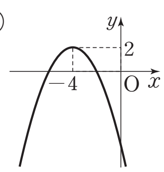
743 각 이차함수의 그래프를 그리면 다음과 같다.

①


②


③


④


⑤


따라서 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하는 x의 값의 범위가 $x<4$인 것은 ④이다. 답 ④

744 $y=-\frac{1}{2}(x+p)^2+q$의 그래프는 위로 볼록한 포물선이고 축의 방정식은 $x=-p$이다.

$x<-p$이면 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하고, $x>-p$이면 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하므로

$-p=6 \qquad \therefore p=-6$ … 1단계

$\therefore y=-\frac{1}{2}(x-6)^2+q$

이 그래프가 점 $(8, 7)$을 지나므로

$7=-\frac{1}{2}\times(8-6)^2+q \qquad \therefore q=9$ … 2단계

$\therefore p+q=-6+9=3$ … 3단계

답 3

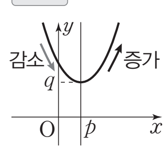
단계	채점 요소	비율
1	p의 값 구하기	40 %
2	q의 값 구하기	40 %
3	$p+q$의 값 구하기	20 %

유형 149 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프의 성질

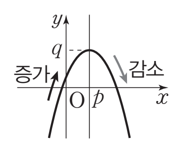
본책 155쪽

a의 부호에 따라 $y=a(x-p)^2+q$ $(p>0,\ q>0)$의 그래프는 다음과 같다.

$a>0$

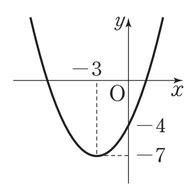


$a<0$



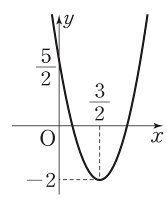
745 ⑤ $y=\frac{1}{3}(x+3)^2-7$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 모든 사분면을 지난다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤



746 $y=2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-2$$



ㄴ. $|2|<|-3|$이므로 $y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-2$의 그래프는 $y=-3x^2$의 그래프보다 폭이 넓다.

ㄷ. 축의 방정식은 $x=\frac{3}{2}$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

747 조건 (가)에서 그래프가 위로 볼록하므로 x^2의 계수는 음수이어야 한다.

조건 (나)에서 $y=4x^2-3$의 그래프와 폭이 같으므로 x^2의 계수의 절댓값은 4이어야 한다.

즉 x^2의 계수는 -4이므로 조건을 만족시키는 이차함수는 ②, ③이고, 두 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구하면

② $(-1, 1)$ ➜ 제2사분면 위에 있다.

③ $(-1, -1)$ ➜ 제3사분면 위에 있다.

따라서 구하는 이차함수의 식으로 알맞은 것은 ③이다. 답 ③

유형 150 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 식 구하기

본책 156쪽

꼭짓점의 좌표가 (p, q)인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식 구하기

❶ 구하는 식을 $y=a(x-p)^2+q$로 놓는다.

❷ 그래프가 지나는 점의 좌표를 ❶의 식에 대입하여 a의 값을 구한다.

748 꼭짓점의 좌표가 $(0, 2)$이므로 이차함수의 식을 $y=ax^2+2$로 놓으면 이 그래프가 점 $(-2, -1)$을 지나므로

$$-1=a\times(-2)^2+2 \qquad \therefore a=-\frac{3}{4}$$

따라서 구하는 이차함수의 식은

$$y=-\frac{3}{4}x^2+2$$

답 ②

749 꼭짓점의 좌표가 $(2, -5)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-2)^2-5$로 놓으면 이 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로

$$3=a\times(0-2)^2-5 \qquad \therefore a=2$$

따라서 이차함수의 식은

$$y=2(x-2)^2-5$$

즉 $f(x)=2(x-2)^2-5$이므로

$$f(1)=2\times(1-2)^2-5=-3$$
$$f(5)=2\times(5-2)^2-5=13$$
$$\therefore f(1)+f(5)=-3+13=10$$

답 10

750 $y=-(x+5)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-5, 0)$

이차함수의 식을 $y=a(x+5)^2$으로 놓으면 이 그래프가 점 $(-4, -3)$을 지나므로

$$-3=a\times(-4+5)^2 \qquad \therefore a=-3$$

따라서 이차함수의 식은

$$y=-3(x+5)^2$$ … 1단계

이 이차함수의 그래프가 점 $(k, -12)$를 지나므로

$$-12=-3\times(k+5)^2$$
$$(k+5)^2=4, \qquad k+5=\pm 2$$
$$\therefore k=-7 \text{ 또는 } k=-3$$

따라서 모든 k의 값의 합은

$$-7+(-3)=-10$$ … 2단계

답 -10

단계	채점 요소	비율
1	이차함수의 식 구하기	50 %
2	모든 k의 값의 합 구하기	50 %

751 꼭짓점의 좌표가 $(-1, 4)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x+1)^2+4$로 놓으면 이 그래프가 점 $(-3, -8)$을 지나므로

$$-8=a\times(-3+1)^2+4 \qquad \therefore a=-3$$

따라서 이차함수의 식은

$$y=-3(x+1)^2+4$$

주어진 점의 좌표를 각각 대입하면

① $-23=-3\times(-4+1)^2+4$

② $1=-3\times(-2+1)^2+4$

③ $\frac{13}{4}=-3\times\left(-\frac{3}{2}+1\right)^2+4$

④ $-1\neq-3\times(0+1)^2+4$

⑤ $-\frac{4}{3}=-3\times\left(\frac{1}{3}+1\right)^2+4$

따라서 이차함수의 그래프 위의 점이 아닌 것은 ④이다. 답 ④

752 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

이차함수의 식을 $y=a\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$으로 놓으면 이 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$$1=a\times\left(0+\frac{1}{2}\right)^2 \qquad \therefore a=4$$

따라서 구하는 이차함수의 식은

$$y=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$

답 ④

753 꼭짓점의 좌표가 $(0, -6)$이므로 이차함수의 식을 $y=ax^2-6$으로 놓으면 이 그래프가 점 $(8, 10)$을 지나므로

$$10=a\times 8^2-6 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$$

즉 이차함수의 식은 $y=\frac{1}{4}x^2-6$이고 그래프가 x축과 만나는 점의 y좌표는 0이므로

$$0=\frac{1}{4}x^2-6, \qquad x^2=24 \qquad \therefore x=\pm 2\sqrt{6}$$

따라서 $p=2\sqrt{6}$, $q=-2\sqrt{6}$이므로

$$p-q=2\sqrt{6}-(-2\sqrt{6})=4\sqrt{6}$$

답 ④

유형 151 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프의 평행이동

본책 157쪽

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은 x 대신 $x-m$을, y 대신 $y-n$을 대입하여 구한다.

➜ $y-n=a(x-m-p)^2+q$이므로

$$y=a(x-m-p)^2+q+n$$

754 평행이동한 그래프의 식은

$y-n=4(x-m+2)^2+6$, 즉

$$y=4(x-m+2)^2+6+n$$

이 그래프가 $y=4(x-6)^2-3$의 그래프와 일치하므로

$$-m+2=-6, \; 6+n=-3$$
$$\therefore m=8, \; n=-9$$
$$\therefore m+n=8+(-9)=-1$$

답 ②

755 평행이동한 그래프의 식은

$y-7=a(x-2)^2-3$, 즉

$y=a(x-2)^2+4$ … 1단계

이 그래프가 점 $(1,\ -1)$을 지나므로

$-1=a\times(1-2)^2+4$

$\therefore a=-5$ … 2단계

답 -5

단계	채점 요소	비율
1	평행이동한 그래프의 식 구하기	50 %
2	a의 값 구하기	50 %

756 평행이동한 그래프의 식은

$y+3=-2(x+2+c)^2+9$, 즉

$y=-2(x+2+c)^2+6$

이 그래프가 $y=a(x+1)^2+b$의 그래프와 일치하므로

$a=-2,\ 2+c=1,\ b=6$

따라서 $a=-2,\ b=6,\ c=-1$이므로

$a+b+c=-2+6+(-1)=3$

답 ①

757 평행이동한 그래프의 식은

$y-q=(x-p+6)^2$, 즉

$y=(x-p+6)^2+q$

이 그래프가 점 $(-3,\ -3)$을 지나므로

$-3=(-3-p+6)^2+q$, 즉

$-3=(-p+3)^2+q$ …… ㉠

또 그래프가 점 $(0,\ 12)$를 지나므로

$12=(-p+6)^2+q$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$-15=(-p+3)^2-(-p+6)^2$

$-15=6p-27, \quad 6p=12 \quad \therefore p=2$

$p=2$를 ㉠에 대입하면

$-3=(-2+3)^2+q \quad \therefore q=-4$

$\therefore p+q=2+(-4)=-2$

답 -2

유형 152 이차함수의 그래프의 평행이동과 넓이

본책 157쪽

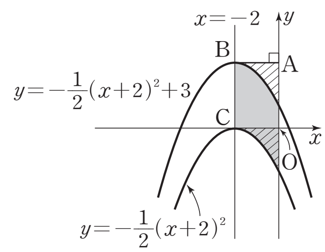
두 이차함수의 x^2의 계수가 같다.

➜ 두 그래프는 서로 평행이동의 관계에 있다.

➜ 두 그래프의 모양이 같음을 이용하여 넓이가 같은 부분을 찾는다.

758 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+3$의 그래프는 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 두 그래프의 모양이 같다.

즉 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이는 같으므로 구하는 넓이는 직사각형 OABC의 넓이와 같다.



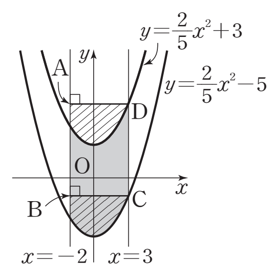
이때 점 B의 좌표는 $(-2,\ 3)$이므로

$\square\mathrm{OABC}=2\times3=6$

답 6

759 $y=\frac{2}{5}x^2-5$의 그래프는 $y=\frac{2}{5}x^2+3$의 그래프를 y축의 방향으로 -8만큼 평행이동한 것이므로 두 그래프의 모양이 같다.

즉 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이는 같으므로 구하는 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.



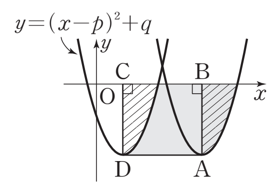
이때 $\overline{\mathrm{AD}}=5,\ \overline{\mathrm{CD}}=8$이므로

$\square\mathrm{ABCD}=5\times8=40$

답 40

760 두 그래프는 평행이동의 관계에 있으므로 두 그래프의 모양이 같다.

즉 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이는 같으므로 색칠한 부분의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.



이때 $\overline{\mathrm{AB}}=4,\ \overline{\mathrm{AD}}=m$이므로

$4\times m=18 \qquad \therefore m=\frac{9}{2}$

따라서 점 D의 x좌표는 $6-\frac{9}{2}=\frac{3}{2}$이므로

$p=\frac{3}{2},\ q=-4$

$\therefore p+q-m=\frac{3}{2}+(-4)-\frac{9}{2}=-7$

답 -7

유형 153 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프에서 a, p, q의 부호

본책 158쪽

(1) 그래프의 모양: a의 부호 결정

➜ 아래로 볼록하면 $a>0$, 위로 볼록하면 $a<0$

(2) 꼭짓점의 위치: p, q의 부호 결정

① 꼭짓점이 제1사분면 위에 있으면 $p>0,\ q>0$

② 꼭짓점이 제2사분면 위에 있으면 $p<0,\ q>0$

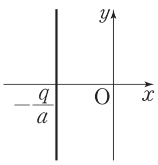
③ 꼭짓점이 제3사분면 위에 있으면 $p<0,\ q<0$

④ 꼭짓점이 제4사분면 위에 있으면 $p>0,\ q<0$

761 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$
꼭짓점 $(p,\ q)$가 제3사분면 위에 있으므로
$p<0,\ q<0$ 답 ③

762 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
꼭짓점 $(-p,\ q)$가 제1사분면 위에 있으므로
$-p>0,\ q>0$ $\therefore p<0,\ q>0$
② $a<0,\ p<0$이므로 $a+p<0$
③ $a<0,\ q>0$이므로 $a-q<0$
④ $a<0,\ p-q<0$이므로 $a(p-q)>0$
⑤ $a<0,\ p<0,\ q>0$이므로 $apq>0$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

763 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$
꼭짓점 $(p,\ q)$가 y축 위의 점이면서 x축의 위쪽에 있으므로
$p=0,\ q>0$ … 1단계
$ax+py+q=0$에서
$ax+q=0$ $\therefore x=-\dfrac{q}{a}$
이때 $-\dfrac{q}{a}<0$이므로 직선 $ax+py+q=0$은 오른쪽 그림과 같이 제2사분면과 제3사분면을 지난다. … 2단계



답 제2사분면, 제3사분면

단계	채점 요소	비율
1	$a,\ q$의 부호와 p의 값 구하기	50 %
2	직선 $ax+py+q=0$이 지나는 사분면 구하기	50 %

764 점 $(ab,\ a-b)$가 제2사분면 위의 점이므로
$ab<0,\ a-b>0$ $\therefore a>0,\ b<0$
따라서 $y=b(x-ab)^2-a$의 그래프는 위로 볼록하며 꼭짓점 $(ab,\ -a)$가 제3사분면 위에 있는 포물선이므로 ④이다.
답 ④

유형 154 이차함수의 그래프의 활용 (1)

본책 158쪽

그래프 위의 한 점의 좌표를 $(p,\ q)$로 놓은 후 주어진 조건을 이용하여 나머지 점의 좌표를 $p,\ q$를 이용하여 나타낸다.

765 점 A의 x좌표를 $p\ (p>0)$라 하면 점 B의 x좌표는 $p+\dfrac{3}{2}$이므로
$\mathrm{A}(p,\ 9p^2),\ \mathrm{B}\left(p+\dfrac{3}{2},\ \left(p+\dfrac{3}{2}\right)^2\right)$
두 점 A, B의 y좌표가 같으므로
$9p^2=\left(p+\dfrac{3}{2}\right)^2$, $32p^2-12p-9=0$
$(8p+3)(4p-3)=0$ $\therefore p=-\dfrac{3}{8}$ 또는 $p=\dfrac{3}{4}$
그런데 $p>0$이므로 $p=\dfrac{3}{4}$
$\therefore k=9p^2=9\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{81}{16}$ 답 $\dfrac{81}{16}$

다른 풀이 점 A의 x좌표를 $p\ (p>0)$라 하면
$9p^2=k$, $p^2=\dfrac{k}{9}$ $\therefore p=\dfrac{\sqrt{k}}{3}\ (\because p>0)$
점 B의 x좌표를 $q\ (q>0)$라 하면
$q^2=k$ $\therefore q=\sqrt{k}\ (\because q>0)$
$q-p=\dfrac{3}{2}$이므로 $\sqrt{k}-\dfrac{\sqrt{k}}{3}=\dfrac{3}{2}$
$\dfrac{2}{3}\sqrt{k}=\dfrac{3}{2}$, $\sqrt{k}=\dfrac{9}{4}$
$\therefore k=\dfrac{81}{16}$

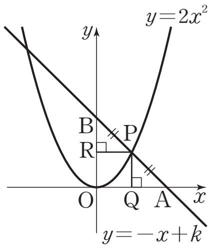
766 점 B의 좌표는 $\left(1,\ \dfrac{1}{4}\right)$
점 D의 x좌표를 $p\ (p>1)$라 하면
$\mathrm{D}\left(p,\ \dfrac{1}{4}p^2\right),\ \mathrm{C}\left(p,\ \dfrac{1}{4}\right)$
$\therefore \overline{\mathrm{BC}}=p-1,\ \overline{\mathrm{CD}}=\dfrac{1}{4}p^2-\dfrac{1}{4}$
$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}$이므로
$p-1=\dfrac{1}{4}p^2-\dfrac{1}{4}$
$p^2-4p+3=0$, $(p-1)(p-3)=0$
$\therefore p=1$ 또는 $p=3$
그런데 $p>1$이므로 $p=3$
따라서 $\overline{\mathrm{BC}}=3-1=2$이므로
$\square\mathrm{ABCD}=2^2=4$ 답 ④

다른 풀이 점 B의 좌표는 $\left(1,\ \dfrac{1}{4}\right)$
정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 k라 하면 점 D의 좌표는
$\left(1+k,\ \dfrac{1}{4}+k\right)$
점 D는 $y=\dfrac{1}{4}x^2$의 그래프 위의 점이므로
$\dfrac{1}{4}+k=\dfrac{1}{4}(1+k)^2$, $k^2-2k=0$
$k(k-2)=0$ $\therefore k=0$ 또는 $k=2$
그런데 $k>0$이므로 $k=2$
$\therefore \square\mathrm{ABCD}=2^2=4$

767 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}$이므로 점 B의 x좌표를 $p\ (p>0)$라 하면
$\mathrm{B}(p,\ ap^2),\ \mathrm{C}(2p,\ b(2p)^2),\ \mathrm{D}(3p,\ c(3p)^2)$
세 점의 y좌표가 같으므로
$ap^2=4bp^2=9cp^2$
$p\neq0$이므로 각 변을 p^2으로 나누면
$a=4b=9c$
$\therefore \dfrac{2a+9c}{4b}=\dfrac{2a+a}{a}=\dfrac{3a}{a}=3$ 답 3

08 이차함수의 그래프 (1)

768 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하면 △APQ와 △PBR는 합동인 직각이등변삼각형이므로



$\overline{OQ}=\overline{QA}=\overline{OR}=\overline{RB}$

따라서 점 P의 좌표를 (p, p) $(p>0)$라 하면 점 P는 $y=2x^2$의 그래프 위의 점이므로

$p=2p^2$, $\quad 2p^2-p=0$, $\quad p(2p-1)=0$

$\therefore p=0$ 또는 $p=\frac{1}{2}$

그런데 $p>0$이므로 $\quad p=\frac{1}{2}$

점 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$은 직선 $y=-x+k$ 위의 점이므로

$\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+k \qquad \therefore k=1$

답 1

유형 155 이차함수의 그래프의 활용 (2)

본책 159쪽

이차함수의 그래프가 x축에 평행한 직선과 만나는 두 점
➜ 축에 대하여 대칭임을 이용한다.

769 점 C의 x좌표를 p $(p>0)$라 하면 $\quad C\left(p, -\frac{3}{2}p^2\right)$

두 점 B, C는 y축에 대하여 대칭이므로 $\quad B\left(-p, -\frac{3}{2}p^2\right)$

$\therefore \overline{BC}=2p$, $\overline{CD}=\frac{3}{2}p^2$

□ABCD의 둘레의 길이가 7이므로

$2\times\left(2p+\frac{3}{2}p^2\right)=7$, $\quad 3p^2+4p-7=0$

$(3p+7)(p-1)=0 \qquad \therefore p=-\frac{7}{3}$ 또는 $p=1$

그런데 $p>0$이므로 $\quad p=1$

따라서 $\overline{BC}=2$, $\overline{CD}=\frac{3}{2}$이므로

□ABCD$=2\times\frac{3}{2}=3$

답 3

770 점 B의 좌표는 $(0, -8)$이므로 $\quad \overline{OB}=8$ ⋯ 1단계

점 C의 x좌표를 p $(p>0)$라 하면 $\quad C(p, 0)$

두 점 A, C는 y축에 대하여 대칭이므로 $\quad A(-p, 0)$

$\therefore \overline{AC}=2p$

△ABC의 넓이가 48이므로

$\frac{1}{2}\times 2p\times 8=48 \qquad \therefore p=6$

$\therefore A(-6, 0)$, $C(6, 0)$ ⋯ 2단계

즉 $y=ax^2-8$의 그래프가 점 $C(6, 0)$을 지나므로

$0=a\times 6^2-8 \qquad \therefore a=\frac{2}{9}$ ⋯ 3단계

답 $\frac{2}{9}$

단계	채점 요소	비율
1	점 B의 좌표 구하기	10 %
2	두 점 A, C의 좌표 구하기	60 %
3	a의 값 구하기	30 %

771 점 B의 x좌표를 p $(p>0)$라 하면

$B(p, p^2)$, $C\left(p, -\frac{1}{3}p^2\right)$

두 점 A, B는 y축에 대하여 대칭이므로

$A(-p, p^2)$

$\therefore \overline{AB}=2p$, $\overline{BC}=p^2-\left(-\frac{1}{3}p^2\right)=\frac{4}{3}p^2$

이때 $\overline{AB}:\overline{BC}=5:4$, 즉 $4\overline{AB}=5\overline{BC}$이므로

$4\times 2p=5\times\frac{4}{3}p^2$, $\quad 5p^2-6p=0$

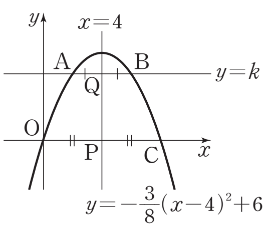
$p(5p-6)=0 \qquad \therefore p=0$ 또는 $p=\frac{6}{5}$

그런데 $p>0$이므로 $\quad p=\frac{6}{5}$

따라서 점 B의 x좌표는 $\frac{6}{5}$이다.

답 $\frac{6}{5}$

772 $y=-\frac{3}{8}(x-4)^2+6$의 그래프의 축의 방정식은 $x=4$이므로 두 점 A와 B, O와 C는 각각 직선 $x=4$에 대하여 대칭이다.



직선 $x=4$가 x축과 만나는 점을 P라 하면 $\overline{OP}=4$이므로

$\overline{OC}=2\overline{OP}=8$

$\overline{AB}+\overline{OC}=12$에서

$\overline{AB}+8=12 \qquad \therefore \overline{AB}=4$

직선 $x=4$가 직선 $y=k$와 만나는 점을 Q라 하면

$\overline{AQ}=\frac{1}{2}\overline{AB}=2$

즉 점 A의 x좌표가 $4-2=2$이므로

$k=-\frac{3}{8}\times(2-4)^2+6=\frac{9}{2}$

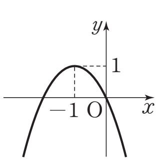
답 $\frac{9}{2}$

만점 유형 도전하기

본책 160~161쪽

773 전략 이차함수의 그래프의 성질을 알고 좌표평면 위에 나타내어 본다.

성준: $y=-(x+1)^2+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면을 지나지 않는다.



나연: $y=2(x-1)^2$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

미선: $y=-x^2+6$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표를 $(k,\ 0)$이라 하면

$0=-k^2+6,\qquad k^2=6\qquad \therefore k=\pm\sqrt{6}$

즉 x축과 두 점 $(-\sqrt{6},\ 0)$, $(\sqrt{6},\ 0)$에서 만나므로 두 점 사이의 거리는 $\sqrt{6}-(-\sqrt{6})=2\sqrt{6}$

자득: 평행이동한 그래프의 식은

$y+5=2(x+4-1)^2+7$, 즉 $y=2(x+3)^2+2$

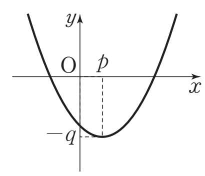
이때 $4=2\times(-4+3)^2+2$이므로 점 $(-4,\ 4)$를 지난다.

따라서 잘못 말한 사람은 성준, 나연, 미선이다. 답 풀이 참조

774 전략 평행이동한 그래프가 y축과 만나는 점을 이용하여 p, q의 관계식을 구한다.

평행이동한 그래프의 식은 $y=\frac{1}{3}(x-p)^2-q$

이때 그래프는 아래로 볼록하고 꼭짓점 $(p,\ -q)$는 제4사분면 위에 있으므로 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 y축과의 교점이 x축의 아래쪽에 위치해야 한다.



y축과의 교점의 y좌표는 $\frac{1}{3}p^2-q$이므로

$\frac{1}{3}p^2-q<0\qquad \therefore q>\frac{1}{3}p^2$

(i) $p=1$일 때, $q>\frac{1}{3}$이므로 $\quad q=1,\ 2,\ \cdots,\ 6$

(ii) $p=2$일 때, $q>\frac{4}{3}$이므로 $\quad q=2,\ 3,\ \cdots,\ 6$

(iii) $p=3$일 때, $q>3$이므로 $\quad q=4,\ 5,\ 6$

(iv) $p=4$일 때, $q>\frac{16}{3}$이므로 $\quad q=6$

(v) $p=5,\ 6$일 때, 조건을 만족시키는 q는 존재하지 않는다.

이상에서 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는

$6+5+3+1=15$

전체 경우의 수는 $\quad 6\times 6=36$

따라서 구하는 확률은 $\quad \frac{15}{36}=\frac{5}{12}$ 답 $\frac{5}{12}$

775 전략 $y=ax^2$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(-3,\ -3)$을 지남을 이용하여 a의 값을 먼저 구한다.

$y=ax^2$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(-3,\ -3)$을 지나므로

$-3=a\times(-3)^2\qquad \therefore a=-\frac{1}{3}$

$y=-\frac{1}{3}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{1}{3}(x-p)^2+q$

이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\quad \mathrm{B}(p,\ q)$

이때 세 점 A, O, B가 한 직선 위에 있으므로 두 직선 OA, OB의 기울기가 같다.

즉 $\frac{-3-0}{-3-0}=\frac{q-0}{p-0}$이므로 $\quad 1=\frac{q}{p}\qquad \therefore p=q$

따라서 $y=-\frac{1}{3}(x-p)^2+p$의 그래프가 원점 O를 지나므로

$0=-\frac{1}{3}\times(0-p)^2+p,\qquad p^2-3p=0$

$p(p-3)=0\qquad \therefore p=3\ (\because p\neq 0)$

$\therefore q=3$

$\therefore 3a+p+q=3\times\left(-\frac{1}{3}\right)+3+3=5$ 답 5

만점 공략 노트

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있을 때,
(두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기)
=(두 점 B, C를 지나는 직선의 기울기)
=(두 점 A, C를 지나는 직선의 기울기)

776 전략 y가 x^2에 정비례 ➜ $y=kx^2$ (k는 상수)

(1) 자동차의 속력이 x km/h일 때의 반응 거리를 $f(x)$ m, 제동 거리를 $g(x)$ m라 하자.

반응 거리는 속력에 정비례하므로

$f(x)=mx$ (m은 상수)

라 하면 $f(20)=4.8$에서

$4.8=20m\qquad \therefore m=\frac{6}{25}$

$\therefore f(x)=\frac{6}{25}x$

제동 거리는 속력의 제곱에 정비례하므로

$g(x)=nx^2$ (n은 상수)

이라 하면 $g(20)=3.6$에서

$3.6=400n\qquad \therefore n=\frac{9}{1000}$

$\therefore g(x)=\frac{9}{1000}x^2$

반응 거리와 제동 거리의 합이 정지 거리이므로

$y=f(x)+g(x)=\frac{9}{1000}x^2+\frac{6}{25}x$

(2) $y=\frac{9}{1000}x^2+\frac{6}{25}x$에 $x=100$을 대입하면

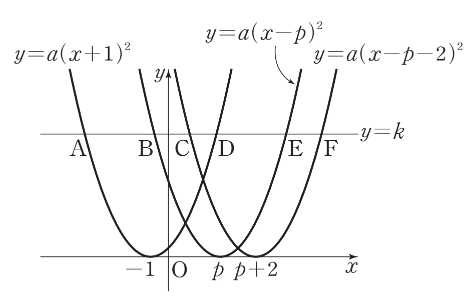
$y=\frac{9}{1000}\times 100^2+\frac{6}{25}\times 100=114$

따라서 속력이 100 km/h일 때의 정지 거리는 114 m이다.

답 (1) $y=\frac{9}{1000}x^2+\frac{6}{25}x$ (2) 114 m

777 전략 이차함수의 그래프의 평행이동의 성질을 이용하여 각 선분의 길이를 구한다.

p는 양수이므로 세 이차함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



$y=a(x-p)^2$의 그래프는 $y=a(x+1)^2$의 그래프를 x축의 방향으로 $p+1$만큼 평행이동한 것이므로

$\overline{AB}=\overline{DE}=p+1$

$y=a(x-p-2)^2$의 그래프는 $y=a(x-p)^2$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$\overline{BC}=\overline{EF}=2$

$y=a(x-p-2)^2$의 그래프는 $y=a(x+1)^2$의 그래프를 x축의 방향으로 $p+3$만큼 평행이동한 것이므로

$\overline{AC}=\overline{DF}=p+3$

이때 $\overline{AC}+2\overline{BC}+3\overline{DE}+4\overline{EF}=30$이므로

$(p+3)+2\times2+3(p+1)+4\times2=30$

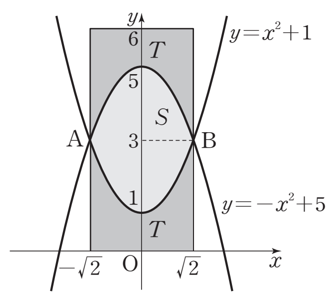
$4p+18=30,\quad 4p=12\quad \therefore p=3$

답 3

778 전략 두 이차함수의 그래프의 폭이 같음을 이용하여 넓이가 같은 부분을 찾는다.

$y=x^2+1$, $y=-x^2+5$의 x^2의 계수의 절댓값이 서로 같으므로 두 이차함수의 그래프의 폭이 같다.

따라서 다음 그림과 같이 $y=-x^2+5$의 그래프와 두 직선 $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$ 및 직선 $y=6$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 T와 같다.



즉 $S+2T$의 값은 가로의 길이가 $2\sqrt{2}$이고 세로의 길이가 6인 직사각형의 넓이와 같으므로

$2\sqrt{2}\times6=12\sqrt{2}$

답 $12\sqrt{2}$

779 전략 이차함수의 그래프가 반드시 지나야 하는 점의 좌표를 찾아 대입한다.

(i) $y=ax^2$의 그래프가 점 $\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$를 지날 때,

$\frac{2}{n}=a\times\left(\frac{1}{n}\right)^2\quad \therefore a=2n$

(ii) $y=ax^2$의 그래프가 점 $\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)$을 지날 때,

$\frac{1}{n}=a\times\left(\frac{2}{n}\right)^2\quad \therefore a=\frac{n}{4}$

(i), (ii)에서 $\frac{n}{4}\le a\le 2n$

$n=4$이면 $1\le a\le 8$이므로 자연수 a의 값은 1, 2, 3, ⋯, 8의 8개이다.

$\therefore f(4)=8$

$n=10$이면 $\frac{5}{2}\le a\le 20$이므로 자연수 a의 값은 3, 4, 5, ⋯, 20의 18개이다.

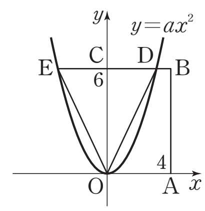
$\therefore f(10)=18$

$\therefore f(4)+f(10)=8+18=26$

답 26

780 전략 $y=ax^2$의 그래프가 □OABC의 넓이를 이등분할 때 지나는 점의 좌표를 아르키메데스의 계산 방법을 이용하여 구한다.

오른쪽 그림과 같이 $y=ax^2$의 그래프와 $\overline{BC}$가 만나는 점을 D라 하고 점 D와 y축에 대하여 대칭인 점을 E라 하자.



주어진 아르키메데스의 계산 방법에 따라 $\overline{DE}$와 $y=ax^2$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 △DOE의 넓이의 $\frac{4}{3}$배이다.

이때 $y=ax^2$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $\overline{OC}$, $\overline{CD}$ 및 $y=ax^2$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 △DOC의 넓이의 $\frac{4}{3}$배이다.

점 D의 좌표를 $(k, 6)$ $(k>0)$이라 하면

$\triangle DOC=\frac{1}{2}\times k\times 6=3k$

즉 $\overline{OC}$, $\overline{CD}$ 및 $y=ax^2$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{4}{3}\times3k=4k$이고 □OABC의 넓이가 $y=ax^2$의 그래프에 의하여 이등분되므로

$4k=\frac{1}{2}\times(4\times6)\quad \therefore k=3\quad \therefore D(3, 6)$

점 D는 $y=ax^2$의 그래프 위의 점이므로

$6=a\times3^2\quad \therefore a=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

시험 만점 완성하기

본책 162~165쪽

781 전략 $y=$(x에 대한 이차식)의 꼴인 것을 찾는다.

① $y=-5x+9$ ➜ 일차함수이다.

② $y=\frac{1}{x^2}$ ➜ 이차함수가 아니다.

③ $y=x(4-x)+x^2=4x$ ➜ 일차함수이다.

④ $y=\frac{x(x+3)}{2}=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x$ ➜ 이차함수이다.

⑤ $y=(1-x)(1-x^2)=x^3-x^2-x+1$ ➜ 이차함수가 아니다.

따라서 y가 x에 대한 이차함수인 것은 ④이다.

답 ④

782 전략 $y=ax^2+bx+c$가 x에 대한 이차함수가 되려면 $a\ne0$이어야 한다.

$y=k(2k-1)x^2-x(3+x)=(2k^2-k-1)x^2-3x$

이 함수가 이차함수이므로

$2k^2-k-1\ne0,\quad (2k+1)(k-1)\ne0$

$\therefore k\ne-\frac{1}{2}$이고 $k\ne1$

따라서 k의 값이 될 수 없는 것은 ②, ⑤이다.

답 ②, ⑤

783 전략 주어진 함숫값을 이용하여 상수 a의 값을 먼저 구한다.

$f(3)=25$에서 $\quad 4\times3^2+a\times3-5=25$

$3a+31=25 \qquad \therefore a=-2$

$\therefore f(x)=4x^2-2x-5$

$f(b)=7$에서 $\quad 4b^2-2b-5=7$

$2b^2-b-6=0, \qquad (2b+3)(b-2)=0$

$\therefore b=-\frac{3}{2}$ 또는 $b=2$

그런데 $b>0$이므로 $\quad b=2$

$\therefore a+b=-2+2=0$

답 ③

784 전략 $y=ax^2$의 그래프의 성질을 이용한다.

ㄴ. $y=-\frac{3}{2}x^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

ㄷ. 원점이 꼭짓점이고 아래로 볼록한 포물선이므로 제1사분면과 제2사분면을 지난다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ②

785 전략 주어진 이차함수의 식에 그래프가 지나는 점의 좌표를 대입한다.

$y=ax^2+b$의 그래프가 점 $(1, 3)$을 지나므로

$3=a\times1^2+b \qquad \therefore a+b=3$ ...... ㉠

또 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$0=a\times(-2)^2+b \qquad \therefore 4a+b=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-1, b=4$

$\therefore a-b=-1-4=-5$

답 ①

786 전략 두 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 각각 구하여 서로의 이차함수의 식에 대입한다.

$y=a(x-p)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(p, 0)$이고

$y=-\frac{1}{2}x^2+8$의 그래프가 이 점을 지나므로

$0=-\frac{1}{2}p^2+8, \qquad p^2=16 \qquad \therefore p=\pm4$

그런데 $p<0$이므로 $\quad p=-4$

$y=-\frac{1}{2}x^2+8$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0, 8)$이고

$y=a(x+4)^2$의 그래프가 이 점을 지나므로

$8=a\times4^2 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore ap=\frac{1}{2}\times(-4)=-2$

답 ①

787 전략 축의 방정식을 이용하여 꼭짓점의 x좌표를 먼저 구한다.

$y=-2(x-p)^2+q$의 그래프의 축의 방정식이 $x=3$이므로

$p=3$

꼭짓점 $(3, q)$가 직선 $y=-2x+4$ 위에 있으므로

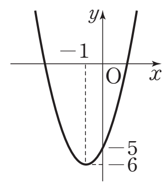
$q=-2\times3+4=-2$

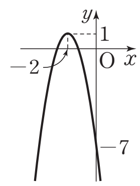
$\therefore p+q=3+(-2)=1$

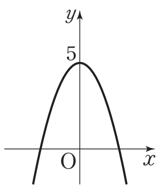
답 ④

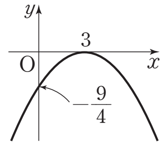
788 전략 꼭짓점의 좌표와 y축과 만나는 점의 좌표를 이용하여 그래프를 그려 본다.

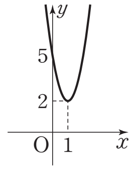
각 이차함수의 그래프를 그리면 다음과 같다.

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


ㄹ.


ㅁ.


따라서 제1사분면과 제2사분면을 모두 지나지 않는 것은 ㄹ의 1개이고, 모든 사분면을 지나는 것은 ㄱ, ㄷ의 2개이므로

$a=1, b=2$

$\therefore a-b=1-2=-1$

답 ②

789 전략 그래프의 꼭짓점의 좌표가 (p, q)인 이차함수의 식 ➜ $y=a(x-p)^2+q$

꼭짓점의 좌표가 $(-6, -8)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x+6)^2-8$로 놓으면 이 그래프가 원점을 지나므로

$0=a\times(0+6)^2-8 \qquad \therefore a=\frac{2}{9}$

$\therefore y=\frac{2}{9}(x+6)^2-8$

이 그래프가 점 $(k, -4)$를 지나므로

$-4=\frac{2}{9}(k+6)^2-8$

$(k+6)^2=18, \qquad k+6=\pm3\sqrt{2}$

$\therefore k=-6\pm3\sqrt{2}$

따라서 모든 k의 값의 곱은

$(-6-3\sqrt{2})\times(-6+3\sqrt{2})=36-18=18$

답 ④

790 전략 평행이동한 그래프의 꼭짓점의 좌표와 주어진 그래프의 꼭짓점의 좌표를 비교한다.

평행이동한 그래프의 식은

$y=a(x+3-p)^2+1+q$

이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-3+p, 1+q)$이므로

$-3+p=4, 1+q=7 \qquad \therefore p=7, q=6$

$y=a(x-4)^2+7$의 그래프가 점 $(5, 6)$을 지나므로

$6=a\times(5-4)^2+7 \qquad \therefore a=-1$

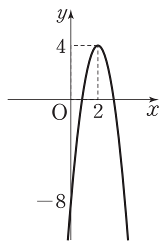
$\therefore a+p+q=-1+7+6=12$

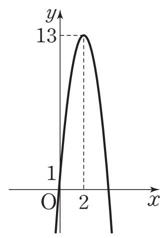
답 ①

791 전략 평행이동한 두 이차함수의 그래프의 식은 x^2의 계수가 같다.

08 이차함수의 그래프 (1)

조건 (가), (나)에 의하여 구하는 이차함수는 x^2의 계수가 -3이고 그래프의 축의 방정식이 $x=2$이어야 한다.
이때 두 조건을 만족시키는 이차함수는 ②, ③이고 각 이차함수의 그래프를 그리면 다음과 같다.
② $y=-3(x-2)^2+4$ ③ $y=-3(x-2)^2+13$

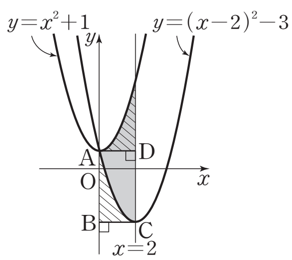




따라서 그래프가 모든 사분면을 지나는 것은 ③이므로 조건을 만족시키는 이차함수의 식은 ③이다. 답 ③

792 전략 평행이동한 두 이차함수의 그래프의 모양이 같음을 이용하여 넓이가 같은 부분을 찾는다.

$y=(x-2)^2-3$의 그래프는 $y=x^2+1$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로 두 그래프의 모양이 같다.
즉 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 구하는 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.



이때 $\overline{AB}=4$, $\overline{AD}=2$이므로
$\square ABCD=2\times4=8$ 답 ⑤

793 전략 그래프의 모양과 꼭짓점의 위치를 이용하여 a, p, q의 부호를 구한다.

그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
꼭짓점 (p, q)가 x축 위의 점이면서 y축의 왼쪽에 있으므로
$p<0$, $q=0$
따라서 $y=p(x-q)^2+a$, 즉 $y=px^2+a$의 그래프는 위로 볼록하고 꼭짓점 $(0, a)$가 y축 위의 점이면서 x축의 아래쪽에 있는 포물선이므로 알맞은 그래프는 ②이다. 답 ②

794 전략 점 P의 x좌표를 p $(p>0)$로 놓고 $\overline{PR}$, $\overline{RQ}$의 길이를 p를 이용하여 나타낸다.

점 P의 x좌표를 p $(p>0)$라 하면
$\mathrm{P}\left(p, \frac{1}{3}p^2\right)$, $\mathrm{R}(p, 0)$, $\mathrm{Q}(p, ap^2)$
$\therefore \overline{PR}=\frac{1}{3}p^2$, $\overline{RQ}=-ap^2$
$\triangle OPR:\triangle OPQ=2:5$이므로
$\triangle OPR:\triangle OQR=2:(5-2)=2:3$
이때 $\triangle OPR$와 $\triangle OQR$의 높이가 $\overline{OR}$로 같으므로 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.
즉 $\overline{PR}:\overline{RQ}=2:3$이므로 $3\overline{PR}=2\overline{RQ}$에서
$3\times\frac{1}{3}p^2=2\times(-ap^2)$
$p\neq0$이므로 양변을 p^2으로 나누면
$1=-2a$ $\therefore a=-\frac{1}{2}$ 답 ⑤

795 전략 이차함수 $y=ax^2$의 그래프와 x축에 대하여 대칭인 그래프의 식 ➔ $y=-ax^2$

주어진 두 이차함수의 그래프가 x축에 대하여 대칭이므로
$a=-(3a-1)$, $4a=1$ $\therefore a=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

796 전략 모든 x의 값에 대하여 y의 값이 양수가 되려면 이차함수의 그래프는 아래로 볼록하고 꼭짓점의 y좌표가 양수이어야 한다.

$y=(-k+8)x^2+3k-5$에서 모든 x의 값에 대하여 y의 값이 양수가 되려면 그래프가 아래로 볼록해야 하므로
$-k+8>0$ $\therefore k<8$ …… ㉠
또 꼭짓점의 y좌표가 양수이어야 하므로
$3k-5>0$ $\therefore k>\frac{5}{3}$ …… ㉡
㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 k는 $2, 3, 4, \cdots, 7$의 6개이다.
답 6

797 전략 점 (a, a)의 좌표를 주어진 이차함수의 식에 대입한다.

점 (a, a)가 $y=-(x-1)^2+3$의 그래프 위에 있으므로
$a=-(a-1)^2+3$
$a^2-a-2=0$, $(a+1)(a-2)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$
이때 점 (a, a)는 제3사분면 위의 점이므로 $a<0$이다.
$\therefore a=-1$ 답 -1

798 전략 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프의 꼭짓점의 좌표 ➔ (p, q)

$y=(a+2)(x-3)^2+a^2-2a-4$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(3, a^2-2a-4)$이므로
$a^2-2a-4=4$, $a^2-2a-8=0$
$(a+2)(a-4)=0$ $\therefore a=-2$ 또는 $a=4$
이때 주어진 함수는 이차함수이므로
$a+2\neq0$, 즉 $a\neq-2$
$\therefore a=4$ 답 4

799 전략 평행이동한 이차함수의 식을 구하고 그 그래프가 지나는 점의 좌표를 대입한다.

$y=-2(x+5)^2+a$의 그래프를 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-2(x+5)^2+a-4$
이 그래프가 점 $(-4, 0)$을 지나므로
$0=-2\times(-4+5)^2+a-4$ $\therefore a=6$

$y=-2(x+5)^2+6$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=-2(x-b+5)^2+6$$

이 그래프가 점 $(-7,\ -12)$를 지나므로

$$-12=-2\times(-7-b+5)^2+6$$

$$(b+2)^2=9, \quad b+2=\pm3$$

$$\therefore b=-5 \text{ 또는 } b=1$$

그런데 $b>0$이므로 $\quad b=1$

$$\therefore a+b=6+1=7$$

답 7

800 전략 두 점 A, D가 y축에 대하여 대칭임을 이용한다.

점 D의 x좌표를 $p\ (p>0)$라 하면

$$\mathrm{D}(p,\ p^2),\ \mathrm{C}\left(p,\ -\frac{1}{2}p^2\right)$$

두 점 A, D는 y축에 대하여 대칭이므로

$$\mathrm{A}(-p,\ p^2)$$

$$\therefore \overline{\mathrm{AD}}=2p,\ \overline{\mathrm{CD}}=p^2-\left(-\frac{1}{2}p^2\right)=\frac{3}{2}p^2$$

□ABCD가 정사각형이므로

$$2p=\frac{3}{2}p^2, \quad 3p^2-4p=0$$

$$p(3p-4)=0 \quad \therefore p=0 \text{ 또는 } p=\frac{4}{3}$$

그런데 $p>0$이므로 $\quad p=\frac{4}{3}$

따라서 점 D의 x좌표는 $\frac{4}{3}$이다.

답 $\frac{4}{3}$

801 전략 $y=ax^2$의 그래프에서 a의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 좁아진다.

㉠은 아래로 볼록한 포물선 중 폭이 좁은 것이므로 이를 나타내는 이차함수의 식은 $y=\frac{5}{2}x^2$이다.

이 이차함수의 그래프가 점 $(2,\ a)$를 지나므로

$$a=\frac{5}{2}\times2^2=10 \quad \cdots \text{1단계}$$

㉡은 위로 볼록한 포물선 중 폭이 넓은 것이므로 이를 나타내는 이차함수의 식은 $y=-\frac{1}{3}x^2$이다.

이 이차함수의 그래프가 점 $(-9,\ b)$를 지나므로

$$b=-\frac{1}{3}\times(-9)^2=-27 \quad \cdots \text{2단계}$$

$$\therefore a-b=10-(-27)=37 \quad \cdots \text{3단계}$$

답 37

단계	채점 요소	배점
1	a의 값 구하기	1점
2	b의 값 구하기	1점
3	$a-b$의 값 구하기	1점

802 전략 먼저 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구한다.

조건 (나)에 의하여 꼭짓점의 y좌표는 0이고, 조건 (다)에 의하여 꼭짓점의 x좌표는 -3이다.

즉 꼭짓점의 좌표는 $\quad (-3,\ 0)$ $\quad \cdots$ 1단계

이차함수의 식을 $y=a(x+3)^2$으로 놓으면 조건 (가)에서 이 그래프는 점 $(0,\ 9)$를 지나므로

$$9=a\times(0+3)^2 \quad \therefore a=1$$

따라서 이차함수의 식은 $y=(x+3)^2$, 즉 $y=x^2+6x+9$이므로 이차항의 계수는 1이다. $\quad \cdots$ 2단계

답 1

단계	채점 요소	배점
1	꼭짓점의 좌표 구하기	3점
2	이차항의 계수 구하기	2점

803 전략 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프의 축이 y축의 왼쪽에 위치하면 $p<0$, y축의 오른쪽에 위치하면 $p>0$이다.

주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식은

$$x=a-1$$

축이 y축의 왼쪽에 위치하므로

$$a-1<0 \quad \therefore a<1 \quad \cdots \text{1단계}$$

꼭짓점의 좌표는 $\quad (a-1,\ 4a-5)$

이때 $a<1$이므로 $\quad 4a<4$

$$\therefore 4a-5<-1 \quad \cdots \text{2단계}$$

즉 점 $(a-1,\ 4a-5)$의 x좌표와 y좌표가 모두 음수이므로 꼭짓점은 제3사분면 위에 있다. $\quad \cdots$ 3단계

답 제3사분면

단계	채점 요소	배점
1	a의 값의 범위 구하기	2점
2	꼭짓점의 y좌표의 범위 구하기	2점
3	꼭짓점이 제몇 사분면 위에 있는지 구하기	1점

804 전략 점 B의 y좌표가 6임을 이용하여 점 B의 x좌표를 먼저 구한다.

점 B의 x좌표를 $p\ (p>0)$라 하면 $y=3x^2$의 그래프가 점 $\mathrm{B}(p,\ 6)$을 지나므로

$$6=3p^2, \quad p^2=2 \quad \therefore p=\sqrt{2}\ (\because p>0)$$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}\,\overline{\mathrm{AB}}=(\sqrt{2})^2=2$이므로 점 C의 x좌표는 2이다.

$$\therefore k=2 \quad \cdots \text{1단계}$$

$y=ax^2$의 그래프가 점 $\mathrm{C}(2,\ 6)$을 지나므로

$$6=a\times2^2 \quad \therefore a=\frac{3}{2} \quad \cdots \text{2단계}$$

$$\therefore ak=\frac{3}{2}\times2=3 \quad \cdots \text{3단계}$$

답 3

단계	채점 요소	배점
1	k의 값 구하기	3점
2	a의 값 구하기	2점
3	ak의 값 구하기	1점

09 이차함수의 그래프 (2)

셀프 CHECK

본책 166~167쪽

A (1) $y=x^2-6x-3=(x^2-6x+9-9)-3$
$=(x-3)^2-12$
(2) $y=-4x^2+16x+7=-4(x^2-4x+4-4)+7$
$=-4(x-2)^2+23$
답 (1) $y=(x-3)^2-12$ (2) $y=-4(x-2)^2+23$

B (1) $y=\frac{1}{5}x^2+2x-15=\frac{1}{5}(x^2+10x+25-25)-15$
$=\frac{1}{5}(x+5)^2-20$
따라서 꼭짓점의 좌표는 $(-5, -20)$이다.
(2) $y=\frac{1}{5}x^2+2x-15$에 $x=0$을 대입하면 $y=-15$
따라서 y축과의 교점의 좌표는 $(0, -15)$이다.
(3) $y=\frac{1}{5}x^2+2x-15$에 $y=0$을 대입하면
$0=\frac{1}{5}x^2+2x-15$
$x^2+10x-75=0$, $(x+15)(x-5)=0$
$\therefore x=-15$ 또는 $x=5$
따라서 x축과의 교점의 좌표는 $(-15, 0)$, $(5, 0)$이다.
답 (1) $(-5, -20)$ (2) $(0, -15)$ (3) $(-15, 0)$, $(5, 0)$

C (1) 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$
축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $ab>0$ $\therefore b>0$
y축과의 교점이 x축의 아래쪽에 있으므로 $c<0$
(2) 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $ab<0$ $\therefore b>0$
y축과의 교점이 x축의 위쪽에 있으므로 $c>0$
답 (1) $a>0$, $b>0$, $c<0$ (2) $a<0$, $b>0$, $c>0$

D (1) 꼭짓점의 좌표가 $(3, -1)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-3)^2-1$로 놓으면 그래프가 점 $(0, -4)$를 지나므로
$-4=9a-1$ $\therefore a=-\frac{1}{3}$
$\therefore y=-\frac{1}{3}(x-3)^2-1=-\frac{1}{3}x^2+2x-4$
(2) 축의 방정식이 $x=-2$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x+2)^2+q$로 놓으면 그래프가 두 점 $(-1, 1)$, $(1, 9)$를 지나므로
$1=a+q$, $9=9a+q$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $q=0$
$\therefore y=(x+2)^2=x^2+4x+4$
(3) 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$로 놓으면 그래프가 점 $(0, 6)$을 지나므로
$c=6$
$y=ax^2+bx+6$의 그래프가 두 점 $(-1, -2)$, $(4, 18)$을 지나므로
$-2=a-b+6$, $18=16a+4b+6$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=7$
$\therefore y=-x^2+7x+6$
(4) x축과의 교점의 좌표가 $(-2, 0)$, $(5, 0)$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x+2)(x-5)$로 놓으면 그래프가 점 $(0, -5)$를 지나므로
$-5=-10a$ $\therefore a=\frac{1}{2}$
$\therefore y=\frac{1}{2}(x+2)(x-5)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-5$
답 (1) $y=-\frac{1}{3}x^2+2x-4$ (2) $y=x^2+4x+4$
(3) $y=-x^2+7x+6$ (4) $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-5$

E $y=2x^2-2x+1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$
따라서 그래프는 아래로 볼록하고 꼭짓점의 좌표가 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$이므로 $x=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $\frac{1}{2}$을 갖는다. 답 최솟값: $\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$

F $y=-x^2-8x+9=-(x+4)^2+25$
따라서 그래프는 위로 볼록하고 꼭짓점의 좌표가 $(-4, 25)$이므로 $x=-4$일 때 최댓값 25를 갖는다. 답 최댓값: 25, $x=-4$

G (1) 두 수를 x, $12-x$라 하고 두 수의 곱을 y라 하면
$y=x(12-x)=-x^2+12x=-(x-6)^2+36$
이므로 $x=6$일 때 최댓값 36을 갖는다.
(2) 곱이 최대가 될 때의 두 수는 6, 6이다.
답 (1) 36 (2) 6, 6

내신 유형 다지기

본책 168~179쪽

유형 156 이차함수 $y=ax^2+bx+c$를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고치기

본책 168쪽

❶ 상수항을 제외한 나머지 항을 x^2의 계수로 묶는다.
❷ 괄호 안에 $\left(\frac{x\text{의 계수}}{2}\right)^2$을 더하고 뺀다.
❸ $y=$(완전제곱식)$+$(상수)의 꼴로 정리한다.

805 $y=3x^2-6x-4=3(x^2-2x+1-1)-4$
$=3(x-1)^2-7$
따라서 $a=3$, $p=1$, $q=-7$이므로
$a+p+q=3+1+(-7)=-3$ 답 ④

806 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-10=-\frac{1}{2}(x^2-8x+16-16)-10$
$=-\frac{1}{2}(x-4)^2-2$
이 이차함수의 그래프는 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로
$p=4$, $q=-2$
$\therefore p+q=4+(-2)=2$ 답 2

유형 157 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점과 축

본책 168쪽

이차함수 $y=ax^2+bx+c$를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고친 후 구한다.
(1) 꼭짓점의 좌표: (p, q)
(2) 축의 방정식: $x=p$

807 $y=x^2+3x+5=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$
이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right)$, 축의 방정식은 $x=-\frac{3}{2}$이므로
$a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{11}{4}$, $c=-\frac{3}{2}$
$\therefore a+2b+4c=-\frac{3}{2}+2\times\frac{11}{4}+4\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-2$ 답 -2

808 ① $y=x^2-10x+27=(x-5)^2+2$
이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(5, 2)$이므로 제1사분면 위에 있다.
② $y=2x^2+16x+25=2(x+4)^2-7$
이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-4, -7)$이므로 제3사분면 위에 있다.
③ $y=4x^2+4x-\frac{3}{2}=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{2}$
이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$이므로 제3사분면 위에 있다.
④ $y=-x^2-2x=-(x+1)^2+1$
이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 1)$이므로 제2사분면 위에 있다.
⑤ $y=-3x^2+6x-6=-3(x-1)^2-3$
이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1, -3)$이므로 제4사분면 위에 있다.
따라서 꼭짓점이 제4사분면 위에 있는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

809 $y=\frac{1}{3}x^2-2kx-3$
$=\frac{1}{3}(x^2-6kx+9k^2-9k^2)-3$
$=\frac{1}{3}(x-3k)^2-3k^2-3$ … 1단계
이 이차함수의 그래프의 축의 방정식은 $x=3k$이므로
$3k=-3$ $\therefore k=-1$ … 2단계
$\therefore y=\frac{1}{3}(x+3)^2-6$
따라서 꼭짓점의 y좌표는 -6이다. … 3단계
답 -6

단계	채점 요소	비율
1	이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 나타내기	40 %
2	k의 값 구하기	30 %
3	꼭짓점의 y좌표 구하기	30 %

810 $y=-2x^2-4x+a=-2(x+1)^2+a+2$
이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, a+2)$이고, 이 점이 직선 $x-2y=-3$ 위에 있으므로
$-1-2(a+2)=-3$ $\therefore a=-1$ 답 -1

유형 158 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프 그리기

본책 169쪽

❶ 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고친 후 꼭짓점의 좌표를 구한다.
❷ a의 부호에 따라 그래프의 모양을 정한다.
❸ y축과의 교점의 좌표를 구한다.
❹ ❶, ❷, ❸을 이용하여 그래프를 그린다.

811 $y=-x^2+4x-2=-(x-2)^2+2$
이 이차함수의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(2, 2)$이고 위로 볼록하며, y축과의 교점의 좌표가 $(0, -2)$인 포물선이므로 주어진 이차함수의 그래프로 알맞은 것은 ④이다. 답 ④

812 ① $y=2x^2+4x=2(x+1)^2-2$
이 이차함수의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(-1, -2)$이고 아래로 볼록하며, y축과의 교점의 좌표가 $(0, 0)$인 포물선이다.
② $y=-2x^2+6x-5=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$
이 이차함수의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$이고 위로 볼록하며, y축과의 교점의 좌표가 $(0, -5)$인 포물선이다.
③ $y=3x^2-6x-3=3(x-1)^2-6$
이 이차함수의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(1, -6)$이고 아래로 볼록하며, y축과의 교점의 좌표가 $(0, -3)$인 포물선이다.

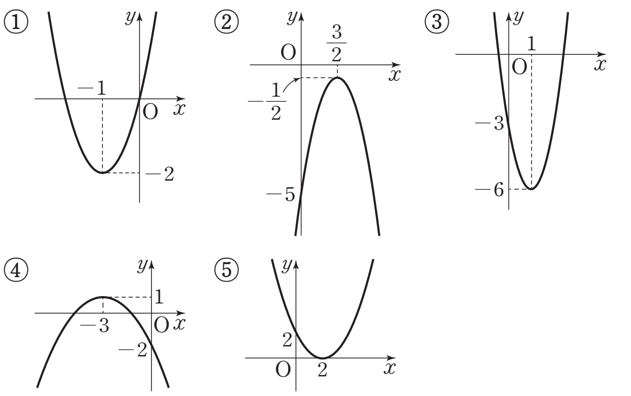
④ $y=-\frac{1}{3}x^2-2x-2=-\frac{1}{3}(x+3)^2+1$

이 이차함수의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ 1)$이고 위로 볼록하며, y축과의 교점의 좌표가 $(0,\ -2)$인 포물선이다.

⑤ $y=\frac{1}{2}x^2-2x+2=\frac{1}{2}(x-2)^2$

이 이차함수의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 0)$이고 아래로 볼록하며, y축과의 교점의 좌표가 $(0,\ 2)$인 포물선이다.

따라서 각 이차함수의 그래프는 다음 그림과 같으므로 모든 사분면을 지나는 것은 ③이다.



답 ③

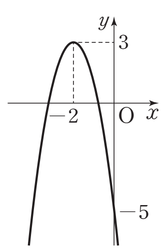
813 $y=ax+b$의 그래프가 두 점 $(-2,\ 0)$, $(0,\ -4)$를 지나므로

$0=-2a+b,\ -4=b \qquad \therefore a=-2,\ b=-4$

$\therefore y=-2x^2-8x-5=-2(x+2)^2+3$

이 이차함수의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ 3)$이고 위로 볼록하며, y축과의 교점의 좌표가 $(0,\ -5)$인 포물선이다.

따라서 그 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면을 지나지 않는다.

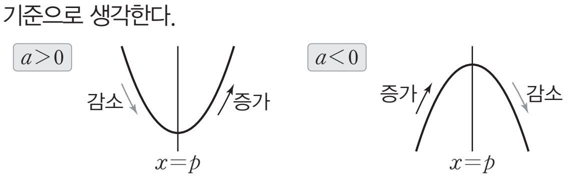


답 ①

유형 159 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 증가와 감소

본책 169쪽

이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고친 후 축 $x=p$를 기준으로 생각한다.



814 $y=-\frac{3}{2}x^2+12x-14=-\frac{3}{2}(x-4)^2+10$

이 이차함수의 그래프의 축의 방정식은 $x=4$이고 위로 볼록하므로 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하는 x의 값의 범위는 $x<4$이다.

답 ④

815 $y=\frac{1}{4}x^2+ax+1=\frac{1}{4}(x+2a)^2-a^2+1$ … 1단계

이 이차함수의 그래프의 축의 방정식은 $x=-2a$이고 아래로 볼록하므로 $x<-2a$이면 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하고, $x>-2a$이면 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가한다.

따라서 $-2a=-4$이므로 $\quad a=2$ … 2단계

답 2

단계	채점 요소	비율
1	이차함수의 식을 $y=k(x-p)^2+q$의 꼴로 나타내기	50 %
2	a의 값 구하기	50 %

유형 160 이차함수의 그래프와 x축, y축과의 교점

본책 169쪽

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와

(1) x축과의 교점의 x좌표 ➜ $y=0$을 대입하여 x의 값을 구한다.

(2) y축과의 교점의 y좌표 ➜ $x=0$을 대입하여 y의 값을 구한다.

816 $y=2x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$에 $y=0$을 대입하면

$0=2x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2},\qquad 4x^2+3x-1=0$

$(x+1)(4x-1)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{4}$

이때 $p<q$이므로 $\qquad p=-1,\ q=\frac{1}{4}$

또 $y=2x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$에 $x=0$을 대입하면 $\qquad y=-\frac{1}{2}$

$\therefore r=-\frac{1}{2}$

$\therefore p+2q+r=-1+2\times\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

답 -1

817 $y=-\frac{1}{2}x^2-x+2a$에 $x=0$을 대입하면 $\qquad y=2a$

즉 두 그래프가 만나는 점의 좌표는 $\qquad (0,\ 2a)$

따라서 직선 $y=2x-a+9$가 점 $(0,\ 2a)$를 지나므로

$2a=-a+9,\qquad 3a=9 \qquad \therefore a=3$

답 3

818 $y=3x^2+10x+8$에 $y=0$을 대입하면

$0=3x^2+10x+8,\qquad (x+2)(3x+4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-\frac{4}{3}$

따라서 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}\left(-\frac{4}{3},\ 0\right)$ 또는 $\mathrm{A}\left(-\frac{4}{3},\ 0\right)$, $\mathrm{B}(-2,\ 0)$이므로 … 1단계

$\overline{\mathrm{AB}}=-\frac{4}{3}-(-2)=\frac{2}{3}$ … 2단계

답 $\frac{2}{3}$

단계	채점 요소	비율
1	두 점 A, B의 좌표 구하기	50 %
2	$\overline{AB}$의 길이 구하기	50 %

819 $y=-\frac{2}{3}x^2+4x-6=-\frac{2}{3}(x-3)^2$

$\therefore$ A$(3, 0)$

또 $y=-\frac{2}{3}x^2+4x-6$에 $x=0$을 대입하면 $y=-6$

$\therefore$ B$(0, -6)$

△AOB에서 $\overline{AB}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$

이때 $\overline{AB}=\overline{AC}$이고 점 C가 점 A의 왼쪽에 있으므로

C$(3-3\sqrt{5}, 0)$

따라서 두 점 B, C를 지나는 직선의 기울기는

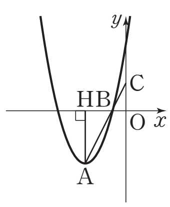
$$\frac{0-(-6)}{(3-3\sqrt{5})-0}=\frac{2}{1-\sqrt{5}}=\frac{2(1+\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

답 ①

820 $y=x^2+6x+k=(x+3)^2+k-9$

이 이차함수의 그래프의 축의 방정식은 $x=-3$

오른쪽 그림과 같이 직선 $x=-3$과 x축의 교점을 H라 하면 △ABH∽△CBO이므로



$\overline{HB}:\overline{OB}=\overline{AB}:\overline{CB}=2:1$

$\therefore \overline{BO}=\frac{1}{3}\overline{HO}=\frac{1}{3}\times 3=1$

$\therefore$ B$(-1, 0)$

따라서 $y=x^2+6x+k$의 그래프가 점 B$(-1, 0)$을 지나므로

$0=(-1)^2+6\times(-1)+k \quad \therefore k=5$

답 5

유형 161 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 성질

본책 170쪽

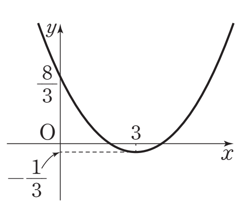
(1) 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표, 축의 방정식, 좌표축과 의 교점의 좌표를 구한다.

(2) (1)을 이용하여 그래프를 그린 후 그래프가 지나는 사분면과 함수가 증가 또는 감소하는 x의 값의 범위를 구한다.

821 $y=\frac{1}{3}x^2-2x+\frac{8}{3}$

$=\frac{1}{3}(x-3)^2-\frac{1}{3}$

이므로 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



④ $y=\frac{1}{3}x^2-2x+\frac{8}{3}$에 $y=0$을 대입하면

$0=\frac{1}{3}x^2-2x+\frac{8}{3}, \quad x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0 \quad \therefore x=2$ 또는 $x=4$

즉 x축과의 교점의 좌표는 $(2, 0)$, $(4, 0)$이다.

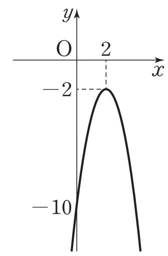
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

822 $y=-2x^2+8x-10$

$=-2(x-2)^2-2$

이므로 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 축의 방정식은 $x=2$이다.

ㄹ. x축과 만나지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

유형 162 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 평행이동

본책 171쪽

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식 구하기

➜ $y=ax^2+bx+c$를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고친 후 x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입한다.

➜ $y-n=a(x-m-p)^2+q$, 즉

$y=a(x-m-p)^2+q+n$

823 $y=x^2-2x+5=(x-1)^2+4$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-a=(x-4-1)^2+4$

$\therefore y=(x-5)^2+a+4=x^2-10x+a+29$

이 식이 $y=x^2+bx+16$과 일치하므로

$-10=b,\ a+29=16 \quad \therefore a=-13,\ b=-10$

$\therefore a+b=-13+(-10)=-23$

답 -23

824 $y=4x^2+2x-\frac{3}{4}=4\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-1$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-q=4\left(x-p+\frac{1}{4}\right)^2-1$

$\therefore y=4\left(x-p+\frac{1}{4}\right)^2+q-1$

이 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$이므로

$p-\frac{1}{4}=\frac{1}{2},\ q-1=0 \quad \therefore p=\frac{3}{4},\ q=1$

$\therefore pq=\frac{3}{4}\times 1=\frac{3}{4}$

답 ④

825 $y=-3x^2+12x+1=-3(x-2)^2+13$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-2=-3(x+3-2)^2+13$

$\therefore y=-3(x+1)^2+15=-3x^2-6x+12$

이 식이 $y=ax^2+bx+c$와 일치하므로

$a=-3,\ b=-6,\ c=12$

$\therefore a-b+c=-3-(-6)+12=15$

답 15

만점 공략 노트

이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식이 $y=g(x)$이다.
➜ 이차함수 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-m$만큼, y축의 방향으로 $-n$만큼 평행이동한 그래프의 식이 $y=f(x)$이다.

다른 풀이 $y=ax^2+bx+c$에 x 대신 $x-3$, y 대신 $y+2$를 대입하면

$y+2=a(x-3)^2+b(x-3)+c$

$\therefore y=ax^2+(-6a+b)x+9a-3b+c-2$

이 식이 $y=-3x^2+12x+1$과 일치하므로

$a=-3,\ -6a+b=12,\ 9a-3b+c-2=1$

$\therefore a=-3,\ b=-6,\ c=12$

$\therefore a-b+c=-3-(-6)+12=15$

유형 163 이차함수의 그래프와 삼각형의 넓이 (본책 171쪽)

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서
① 꼭짓점의 좌표 ➜ $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고친 후 꼭짓점의 좌표를 구한다.
② x축과의 교점의 좌표 ➜ $y=ax^2+bx+c$에 $y=0$을 대입하여 구한다.
③ y축과의 교점의 좌표 ➜ $y=ax^2+bx+c$에 $x=0$을 대입하여 구한다.

826 $y=-x^2-5x-4$에 $y=0$을 대입하면

$0=-x^2-5x-4,\quad x^2+5x+4=0$

$(x+4)(x+1)=0\quad \therefore x=-4$ 또는 $x=-1$

$\therefore A(-4,\ 0),\ B(-1,\ 0)$

또 $x=0$을 대입하면 $\quad y=-4$

$\therefore C(0,\ -4)$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\{(-1)-(-4)\}\times4=6$

답 6

827 $y=\frac{2}{5}x^2-4x+12$에 $x=0$을 대입하면

$y=12\quad \therefore A(0,\ 12)$ … 1단계

$y=\frac{2}{5}x^2-4x+12=\frac{2}{5}(x-5)^2+2$이므로

$B(5,\ 2)$ … 2단계

$\therefore \triangle AOB=\frac{1}{2}\times12\times5=30$ … 3단계

답 30

단계	채점 요소	비율
1	점 A의 좌표 구하기	40 %
2	점 B의 좌표 구하기	40 %
3	△AOB의 넓이 구하기	20 %

828 $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+k$에 $x=0$을 대입하면

$y=k\quad \therefore C(0,\ k)$

$y=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+k=\frac{1}{4}(x+3)^2+k-\frac{9}{4}$이므로

$D\left(-3,\ k-\frac{9}{4}\right)$

△ACB와 △ADB의 밑변을 $\overline{AB}$로 정하면 두 삼각형의 넓이의 비는 높이의 비와 같다.

즉 $(-k):\left(-k+\frac{9}{4}\right)=16:25$이므로

$-25k=16\left(-k+\frac{9}{4}\right),\quad -25k=-16k+36$

$9k=-36\quad \therefore k=-4$

답 -4

829 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=-1+a+3\quad \therefore a=-2$

따라서 $y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$이므로

$A(-1,\ 4)$

$y=-x^2-2x+3$에 $y=0$을 대입하면

$0=-x^2-2x+3,\quad x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0\quad \therefore x=-3$ 또는 $x=1$

$\therefore B(-3,\ 0)$

또 $x=0$을 대입하면 $\quad y=3$

$\therefore C(0,\ 3)$

$\therefore \triangle ABC=\triangle ABO+\triangle AOC-\triangle BOC$

$=\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{1}{2}\times3\times1-\frac{1}{2}\times3\times3$

$=3$

답 3

유형 164 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 a, b, c의 부호 (본책 172쪽)

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서
(1) 아래로 볼록 ➜ $a>0$
위로 볼록 ➜ $a<0$
(2) 축이 y축의 왼쪽에 위치 ➜ $ab>0$ (a, b는 같은 부호)
축이 y축의 오른쪽에 위치 ➜ $ab<0$ (a, b는 다른 부호)
축이 y축과 일치 ➜ $b=0$
(3) y축과의 교점이 x축의 위쪽에 위치 ➜ $c>0$
y축과의 교점이 x축의 아래쪽에 위치 ➜ $c<0$
y축과의 교점이 원점과 일치 ➜ $c=0$

830 그래프가 아래로 볼록하므로 $\quad a>0$

축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $\quad ab<0\quad \therefore b<0$

y축과의 교점이 x축의 위쪽에 있으므로 $\quad c>0$

④ $x=1$일 때, $\quad y=a+b+c$

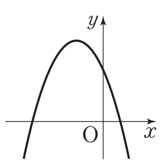
주어진 그래프에서 $x=1$일 때의 함숫값이 음수이므로

$a+b+c<0$

⑤ $x=2$일 때, $y=4a+2b+c$
주어진 그래프에서 $x=2$일 때의 함숫값이 양수이므로
$4a+2b+c>0$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

831 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 $a<0$이므로 위로 볼록하고, $ab<0$이므로 축은 y축의 오른쪽에 있다.
또 $c<0$이므로 y축과의 교점은 x축의 아래쪽에 있다.
따라서 $y=ax^2+bx+c$의 그래프로 알맞은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

832 $y=ax+b$의 그래프의 기울기는 음수이고 y절편은 양수이므로
$a<0$, $b>0$
즉 $y=-bx^2+ax-a+b$의 그래프는 $-b<0$이므로 위로 볼록하고 $-ab>0$이므로 축은 y축의 왼쪽에 있다.
또 $-a+b>0$이므로 y축과의 교점은 x축의 위쪽에 있다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 꼭짓점은 제2사분면 위에 있다. 답 제2사분면



유형 165 이차함수의 식 구하기 ; 꼭짓점과 다른 한 점을 알 때 본책 172쪽

이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 (●, ■)이면 이차함수의 식을
$y=a(x-●)^2+■$
로 놓고 그래프가 지나는 다른 한 점의 좌표를 대입하여 a의 값을 구한다.

833 꼭짓점의 좌표가 $(-3, 1)$이므로 이차함수의 식을
$y=a(x+3)^2+1$
로 놓으면 그래프가 점 $(0, -8)$을 지나므로
$-8=9a+1$ $\quad\therefore a=-1$
따라서 $y=-(x+3)^2+1=-x^2-6x-8$이므로
$b=-6$, $c=-8$
$\therefore abc=-1\times(-6)\times(-8)=-48$ 답 -48

834 $y=-2x^2+8x-1=-2(x-2)^2+7$
꼭짓점의 좌표가 $(2, 7)$이므로 이차함수의 식을
$y=a(x-2)^2+7$
로 놓으면 그래프가 점 $(-2, 15)$를 지나므로
$15=16a+7$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$
$\therefore y=\frac{1}{2}(x-2)^2+7$ … 1단계
이 그래프가 점 $(4, k)$를 지나므로
$k=\frac{1}{2}\times2^2+7=9$ … 2단계
답 9

단계	채점 요소	비율
1	이차함수의 식 구하기	70 %
2	k의 값 구하기	30 %

835 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-6, 2)$이므로 이차함수의 식을
$y=a(x+6)^2+2$
로 놓으면 그래프가 점 $(-9, 5)$를 지나므로
$5=9a+2$ $\quad\therefore a=\frac{1}{3}$
$\therefore y=\frac{1}{3}(x+6)^2+2=\frac{1}{3}x^2+4x+14$
$\therefore b=4$, $c=14$
$\therefore y=bx^2+cx+3a=4x^2+14x+1$
$=4\left(x+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{45}{4}$
따라서 $p=-\frac{7}{4}$, $q=-\frac{45}{4}$이므로
$p+q=-\frac{7}{4}+\left(-\frac{45}{4}\right)=-13$ 답 -13

유형 166 이차함수의 식 구하기 ; 축의 방정식과 두 점을 알 때 본책 173쪽

이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=●$이면 이차함수의 식을
$y=a(x-●)^2+q$
로 놓고 그래프가 지나는 다른 두 점의 좌표를 각각 대입하여 a, q의 값을 구한다.

836 축의 방정식이 $x=3$이므로 이차함수의 식을
$y=a(x-3)^2+q$
로 놓으면 그래프가 두 점 $(1, 8)$, $(0, 3)$을 지나므로
$8=4a+q$, $3=9a+q$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $q=12$
$\therefore y=-(x-3)^2+12=-x^2+6x+3$
답 $y=-x^2+6x+3$

837 축의 방정식이 $x=-6$이므로 이차함수의 식을
$y=a(x+6)^2+q$
로 놓으면 그래프가 두 점 $(2, 0)$, $(-10, 12)$를 지나므로
$0=64a+q$, $12=16a+q$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{4}$, $q=16$

$\therefore y=-\frac{1}{4}(x+6)^2+16$ … 1단계

$y=-\frac{1}{4}(x+6)^2+16$에 $x=0$을 대입하면

$y=-\frac{1}{4}\times 6^2+16=7$

따라서 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는 7이다. … 2단계

답 7

단계	채점 요소	비율
1	이차함수의 식 구하기	70 %
2	그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표 구하기	30 %

838 조건 (가), (나)에서 이차항의 계수는 -2이고 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{1}{3}$이다.

따라서 이차함수의 식을

$y=-2\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+q$

로 놓으면 조건 (다)에서 그래프가 점 $(-2,\ -10)$을 지나므로

$-10=-2\times\left(-\frac{7}{3}\right)^2+q \qquad \therefore q=\frac{8}{9}$

$\therefore y=-2\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}$

$y=-2\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}$에 $y=0$을 대입하면

$0=-2\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}, \qquad \left(x-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

$x-\frac{1}{3}=\pm\frac{2}{3} \qquad \therefore x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

즉 그래프가 x축과 만나는 두 점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{3},\ 0\right)$, $(1,\ 0)$이므로 두 점 사이의 거리는

$1-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$

답 $\frac{4}{3}$

유형 167 이차함수의 식 구하기 ; 서로 다른 세 점을 알 때

본책 173쪽

이차함수의 그래프가 지나는 세 점 $(0,\ ▲)$, $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$의 좌표가 주어지면 이차함수의 식을

$y=ax^2+bx+▲$

로 놓고 그래프가 지나는 다른 두 점의 좌표를 각각 대입하여 a, b의 값을 구한다.

839 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 점 $(0,\ -3)$을 지나므로

$c=-3$

$y=ax^2+bx-3$의 그래프가 두 점 $(-2,\ -5)$, $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$을 지나므로

$-5=4a-2b-3,\ 0=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ b=5$

$\therefore a+b+c=2+5+(-3)=4$

답 ①

840 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$로 놓으면 그래프가 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$c=0$

$y=ax^2+bx$의 그래프가 두 점 $(-4,\ 8)$, $(1,\ -7)$을 지나므로

$8=16a-4b,\ -7=a+b$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-1,\ b=-6$

$\therefore y=-x^2-6x=-(x+3)^2+9$

따라서 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-3,\ 9)$이다.

답 ②

841 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$로 놓으면 그래프가 점 $(0,\ -5)$를 지나므로

$c=-5$

$y=ax^2+bx-5$의 그래프가 두 점 $(-1,\ 0)$, $(2,\ -3)$을 지나므로

$0=a-b-5,\ -3=4a+2b-5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ b=-3$

즉 $y=2x^2-3x-5$의 그래프가 점 $(k,\ 4)$를 지나므로

$4=2k^2-3k-5, \qquad 2k^2-3k-9=0$

$(2k+3)(k-3)=0 \qquad \therefore k=-\frac{3}{2}$ 또는 $k=3$

따라서 모든 k의 값의 합은

$-\frac{3}{2}+3=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

유형 168 이차함수의 식 구하기 ; x축과의 두 교점과 다른 한 점을 알 때

본책 174쪽

이차함수의 그래프와 x축과의 두 교점의 좌표가 $(●,\ 0)$, $(■,\ 0)$이면 이차함수의 식을

$y=a(x-●)(x-■)$

로 놓고 그래프가 지나는 다른 한 점의 좌표를 대입하여 a의 값을 구한다.

842 x축과 두 점 $(-6,\ 0)$, $(-2,\ 0)$에서 만나므로 이차함수의 식을

$y=a(x+6)(x+2)$

로 놓으면 그래프가 점 $(1,\ 7)$을 지나므로

$7=21a \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$

$\therefore y=\frac{1}{3}(x+6)(x+2)=\frac{1}{3}x^2+\frac{8}{3}x+4$

따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{8}{3}$, $c=4$이므로

$a+b-c=\frac{1}{3}+\frac{8}{3}-4=-1$

답 ①

843 x축과 두 점 $(-2,\ 0)$, $(3,\ 0)$에서 만나므로 이차함수의 식을

$$y=a(x+2)(x-3)$$

으로 놓으면 그래프가 점 $(2,\ 4)$를 지나므로

$$4=-4a \qquad \therefore a=-1$$

$y=-(x+2)(x-3)$에 $x=0$을 대입하면

$$y=-2\times(-3)=6$$

따라서 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ 6)$이다.

답 $(0,\ 6)$

844 $y=\frac{1}{5}x^2$의 그래프와 모양이 같고, x축과 두 점 $(-9,\ 0)$, $(1,\ 0)$에서 만나므로 이차함수의 식은

$$y=\frac{1}{5}(x+9)(x-1)=\frac{1}{5}(x^2+8x-9)=\frac{1}{5}(x+4)^2-5$$

따라서 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 y좌표는 -5이다.

답 -5

845 △ABC의 넓이가 30이고 $\overline{AB}=8$이므로

$$\frac{1}{2}\times 8\times\overline{OC}=30 \qquad \therefore \overline{OC}=\frac{15}{2}$$

$$\therefore C\left(0,\ -\frac{15}{2}\right) \qquad \cdots \text{1단계}$$

$y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 두 점 $(-3,\ 0)$, $(5,\ 0)$에서 만나므로 이차함수의 식을

$$y=a(x+3)(x-5)$$

로 놓으면 그래프가 점 $C\left(0,\ -\frac{15}{2}\right)$를 지나므로

$$-\frac{15}{2}=-15a \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$$

$$\therefore y=\frac{1}{2}(x+3)(x-5)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{15}{2} \qquad \cdots \text{2단계}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-1$, $c=-\frac{15}{2}$이므로

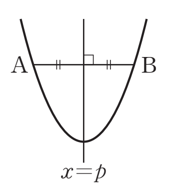
$$a+bc=\frac{1}{2}+(-1)\times\left(-\frac{15}{2}\right)=8 \qquad \cdots \text{3단계}$$

답 8

단계	채점 요소	비율
1	점 C의 좌표 구하기	30 %
2	이차함수의 식 구하기	50 %
3	$a+bc$의 값 구하기	20 %

유형 169 이차함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 문제 해결하기 본책 174쪽

이차함수의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B의 y좌표가 같다.
➜ 두 점 A, B는 축에 대하여 대칭이다.



846 $y=x^2+ax+b$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 그래프가 x축과 만나는 두 점도 y축에 대하여 대칭이다.
즉 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8이면 두 점의 좌표는 각각 $(-4,\ 0)$, $(4,\ 0)$이므로 이차함수의 식은

$$y=(x+4)(x-4)=x^2-16$$

따라서 $a=0$, $b=-16$이므로

$$a+b=0+(-16)=-16$$

답 -16

847 $y=-x^2-4x+k=-(x+2)^2+k+4$
이 이차함수의 그래프의 축의 방정식은 $x=-2$이므로 두 점 A, B는 직선 $x=-2$에 대하여 대칭이다.
따라서 점 B의 x좌표는

$$-2+\frac{1}{2}\overline{AB}=-2+\frac{1}{2}\times 3=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore B\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$$

$y=-x^2-4x+k$의 그래프가 점 $B\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$을 지나므로

$$0=-\frac{1}{4}+2+k \qquad \therefore k=-\frac{7}{4}$$

답 ③

다른 풀이 점 A의 x좌표는

$$-2-\frac{1}{2}\overline{AB}=-2-\frac{1}{2}\times 3=-\frac{7}{2}$$

$$\therefore A\left(-\frac{7}{2},\ 0\right)$$

즉 x축과 두 점 $\left(-\frac{7}{2},\ 0\right)$, $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$에서 만나므로 이차함수의 식은

$$y=-\left(x+\frac{7}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=-x^2-4x-\frac{7}{4}$$

$$\therefore k=-\frac{7}{4}$$

848 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 세 점 $(-5,\ -5)$, $(-3,\ 1)$, $(1,\ 1)$을 지난다.
이때 두 점 $(-3,\ 1)$, $(1,\ 1)$의 y좌표가 서로 같으므로 두 점은 축에 대하여 대칭이다.
따라서 축의 방정식은 $x=\frac{-3+1}{2}$, 즉 $x=-1$이므로 이차함수의 식을

$$y=a(x+1)^2+q$$

로 놓으면 그래프가 두 점 $(1,\ 1)$, $(-5,\ -5)$를 지나므로

$$1=4a+q,\ -5=16a+q$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-\frac{1}{2}$, $q=3$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}(x+1)^2+3$이므로

$$f(0)=-\frac{1}{2}+3=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

849 $y=x^2+10x+21$에 $y=0$을 대입하면

$$0=x^2+10x+21, \qquad (x+7)(x+3)=0$$

$$\therefore x=-7 \text{ 또는 } x=-3$$

즉 $y=x^2+10x+21$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리는

$(-3)-(-7)=4$

또 $y=x^2+10x+21=(x+5)^2-4$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=(x+5)^2+k-4$

이 그래프의 축의 방정식은 $\quad x=-5$

이때 x축과 만나는 두 점 사이의 거리는 $4\times\frac{1}{2}=2$이고 이 두 점은 직선 $x=-5$에 대하여 대칭이므로 두 점의 좌표는

$(-5-1,\ 0),\ (-5+1,\ 0)$, 즉 $(-6,\ 0),\ (-4,\ 0)$

따라서 $y=(x+5)^2+k-4$의 그래프가 점 $(-4,\ 0)$을 지나므로

$0=1+k-4 \qquad \therefore k=3$ 답 3

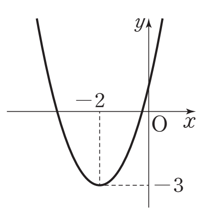
유형 170 이차함수의 그래프가 지나는 사분면 본책 175쪽

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는
① $a>0$이면 제1사분면과 제2사분면을,
$a<0$이면 제3사분면과 제4사분면을 항상 지난다.
② $c>0$이면 제1사분면과 제2사분면을,
$c<0$이면 제3사분면과 제4사분면을 항상 지난다.

850 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ -3)$이므로 이차함수의 식을

$y=a(x+2)^2-3=ax^2+4ax+4a-3$

으로 놓을 수 있다.



이때 꼭짓점이 제3사분면 위에 있으므로 그래프가 제4사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉 아래로 볼록해야 하므로

$a>0$ ...... ㉠

또 y축과의 교점이 원점이거나 x축의 위쪽에 위치해야 하므로

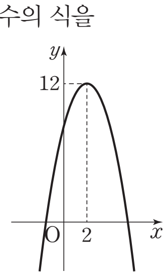
$4a-3\ge0 \qquad \therefore a\ge\frac{3}{4}$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 a의 최솟값은 $\frac{3}{4}$이다. 답 ⑤

851 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 12)$이므로 이차함수의 식을

$y=a(x-2)^2+12$
$\quad=ax^2-4ax+4a+12$

로 놓을 수 있다.



이때 꼭짓점이 제1사분면 위에 있으므로 그래프가 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉 위로 볼록해야 하므로 $\quad a<0$ ...... ㉠

또 y축과의 교점이 x축의 위쪽에 위치해야 하므로

$4a+12>0 \qquad \therefore a>-3$ ...... ㉡ ... 1단계

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 a는 $-2,\ -1$이므로 그 합은

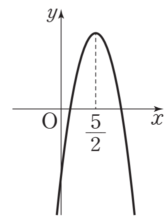
$(-2)+(-1)=-3$ ... 2단계

답 -3

단계	채점 요소	비율
1	a의 값의 범위 구하기	60 %
2	모든 정수 a의 값의 합 구하기	40 %

852 $y=-2x^2+10x+3k$

$\quad=-2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+3k+\frac{25}{2}$



이때 그래프가 위로 볼록하므로 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면만을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉 꼭짓점이 제1사분면 위에 있어야 하므로

$3k+\frac{25}{2}>0 \qquad \therefore k>-\frac{25}{6}$ ...... ㉠

또 y축과의 교점이 원점이거나 x축의 아래쪽에 위치해야 하므로

$3k\le0 \qquad \therefore k\le0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 k는 $-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0$의 5개이다. 답 5

유형 171 이차함수의 최댓값과 최솟값 본책 176쪽

이차함수 $y=ax^2+bx+c$를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고쳤을 때
① $a>0$
➜ $x=p$일 때 최솟값 q를 갖고, 최댓값은 없다.
② $a<0$
➜ $x=p$일 때 최댓값 q를 갖고, 최솟값은 없다.

853 $y=-\frac{1}{4}x^2+x-5=-\frac{1}{4}(x-2)^2-4$이므로 $x=2$일 때 최댓값 -4를 갖는다.

$\therefore M=-4$

$y=x^2+8x-9=(x+4)^2-25$이므로 $x=-4$일 때 최솟값 -25를 갖는다.

$\therefore m=-25$

$\therefore M-m=-4-(-25)=21$ 답 ④

854 ㄱ. $x=0$일 때 최댓값 9를 갖는다.

ㄴ. $x=1$일 때 최댓값 0을 갖는다.

ㄷ. $x=-5$일 때 최댓값 2를 갖는다.

ㄹ. $y=\frac{1}{2}x^2-5x+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}(x-5)^2-10$이므로 $x=5$일 때 최솟값 -10을 갖고, 최댓값은 없다.

ㅁ. $y=-2x^2-6x-4=-2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$이므로 $x=-\frac{3}{2}$일 때 최댓값 $\frac{1}{2}$을 갖는다.

ㅂ. $y=-\frac{2}{3}x^2+4x-5=-\frac{2}{3}(x-3)^2+1$이므로 $x=3$일 때 최댓값 1을 갖는다.

이상에서 최댓값이 자연수인 이차함수는 ㄱ, ㄷ, ㅂ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㅂ

855 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$로 놓으면 그래프가 점 $(0, -1)$을 지나므로

$c=-1$

$y=ax^2+bx-1$의 그래프가 두 점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$, $(2, -1)$을 지나므로

$\frac{5}{4}=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b-1$, $-1=4a+2b-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=6$

$\therefore y=-3x^2+6x-1$

즉 $f(x)=-3x^2+6x-1=-3(x-1)^2+2$이므로 $x=1$일 때 최댓값 2를 갖는다.

답 2

다른 풀이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 세 점 $(0, -1)$, $(2, -1)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$를 지난다.

이때 두 점 $(0, -1)$, $(2, -1)$의 y좌표가 서로 같으므로 두 점은 축에 대하여 대칭이다.

따라서 축의 방정식은 $x=\frac{0+2}{2}$, 즉 $x=1$이므로 이차함수의 식을

$y=a(x-1)^2+q$

로 놓으면 그래프가 두 점 $(0, -1)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$를 지나므로

$-1=a+q$, $\frac{5}{4}=\frac{1}{4}a+q$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $q=2$

따라서 $f(x)=-3(x-1)^2+2$이므로 $x=1$일 때 최댓값 2를 갖는다.

유형 172 이차함수의 최댓값 또는 최솟값이 주어질 때 미지수의 값 구하기 (1)

본책 176쪽

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최댓값(또는 최솟값)이 ●이다.

➜ 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고친 후 $q=$● 임을 이용하여 미지수의 값을 구한다.

856 $y=2x^2+2x+k=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+k-\frac{1}{2}$

따라서 $x=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $k-\frac{1}{2}$을 가지므로

$k-\frac{1}{2}=-1$ $\therefore k=-\frac{1}{2}$

답 ②

857 $y=\frac{1}{3}x^2-2x+a=\frac{1}{3}(x-3)^2+a-3$이므로 $x=3$일 때 최솟값 $a-3$을 갖는다.

$y=-2x^2+8x+4a+1=-2(x-2)^2+4a+9$이므로 $x=2$일 때 최댓값 $4a+9$를 갖는다.

두 이차함수의 최솟값과 최댓값의 합이 -4이므로

$(a-3)+(4a+9)=-4$ $\therefore a=-2$

답 -2

858 $y=a(x+3)^2+a^2+3$이 최댓값을 가지므로

$a<0$

$x=-3$일 때 최댓값 a^2+3을 가지므로

$a^2+3=4$, $a^2=1$ $\therefore a=\pm1$

그런데 $a<0$이므로 $a=-1$ … 1단계

$\therefore y=\frac{1}{2}x^2-x-4=\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{9}{2}$

따라서 $x=1$일 때 최솟값 $-\frac{9}{2}$를 갖는다. … 2단계

답 $-\frac{9}{2}$

단계	채점 요소	비율
1	a의 값 구하기	50 %
2	$y=-\frac{1}{2}ax^2-x+4a$의 최솟값 구하기	50 %

859 $y=-x^2+2kx-3k+8$

$=-(x-k)^2+k^2-3k+8$

이 이차함수의 그래프를 y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은

$y=-(x-k)^2+k^2-3k+3$

이 이차함수는 $x=k$일 때 최댓값 k^2-3k+3을 가지므로

$k^2-3k+3=7$, $k^2-3k-4=0$

$(k+1)(k-4)=0$ $\therefore k=-1$ 또는 $k=4$

그런데 $k>0$이므로 $k=4$

답 4

다른 풀이 $y=-x^2+2kx-3k+8=-(x-k)^2+k^2-3k+8$

이 이차함수의 그래프를 y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 최댓값이 7이므로 이 이차함수의 최댓값은 12이다.

이 이차함수는 $x=k$일 때 최댓값 k^2-3k+8을 가지므로

$k^2-3k+8=12$, $k^2-3k-4=0$

$(k+1)(k-4)=0$ $\therefore k=-1$ 또는 $k=4$

그런데 $k>0$이므로 $k=4$

유형 173 이차함수의 최댓값 또는 최솟값이 주어질 때 미지수의 값 구하기 (2)

본책 177쪽

이차함수 $y=ax^2+bx+c$가 $x=$●에서 최댓값(또는 최솟값) ▲를 갖는다.

➜ 이차함수의 식을 $y=a(x-$●$)^2+$▲로 놓고 우변을 전개하여 주어진 식과 비교한다.

860 주어진 이차함수는 x^2의 계수가 -3이고 $x=-2$일 때 최댓값 6을 가지므로

$$y=-3(x+2)^2+6=-3x^2-12x-6$$

따라서 $a=-12$, $b=-6$이므로

$$ab=-12\times(-6)=72$$

답 72

861 주어진 이차함수는 x^2의 계수가 $\frac{1}{2}$이고 $x=-5$일 때 최솟값 b를 가지므로

$$y=\frac{1}{2}(x+5)^2+b=\frac{1}{2}x^2+5x+b+\frac{25}{2}$$

이 식이 $y=\frac{1}{2}x^2+ax+\frac{3}{2}$과 같으므로

$$5=a,\ b+\frac{25}{2}=\frac{3}{2} \qquad \therefore a=5,\ b=-11$$ … 1단계

따라서 $y=\frac{1}{2}x^2+5x+\frac{3}{2}$의 그래프가 점 $(1, k)$를 지나므로

$$k=\frac{1}{2}+5+\frac{3}{2}=7$$ … 2단계

$$\therefore a+b+k=5+(-11)+7=1$$ … 3단계

답 1

단계	채점 요소	비율
1	a, b의 값 구하기	40 %
2	k의 값 구하기	40 %
3	$a+b+k$의 값 구하기	20 %

862 이차함수의 그래프가 두 점 $(1, 0)$, $(3, 0)$을 지나므로

$$y=a(x-1)(x-3)=a(x^2-4x+3)$$
$$=a(x-2)^2-a$$

이 이차함수는 $x=2$일 때 최솟값 $-a$를 가지므로

$$-a=-1 \qquad \therefore a=1$$
$$\therefore y=(x-1)(x-3)$$

① $15=(-3)\times(-5)$ ② $8=(-2)\times(-4)$

③ $2\neq(-1)\times(-3)$ ④ $\frac{5}{4}=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{5}{2}\right)$

⑤ $-\frac{3}{4}=\frac{3}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

따라서 이 이차함수의 그래프 위의 점이 아닌 것은 ③이다.

답 ③

유형 174 최댓값의 최솟값 또는 최솟값의 최댓값

본책 177쪽

이차함수의 최댓값의 최솟값 또는 최솟값의 최댓값은 다음과 같이 구한다.

❶ 주어진 이차함수를 $y=a(x-k)^2+f(k)$의 꼴로 나타낸 후 $f(k)$를 구한다.

❷ 새로운 이차함수 $f(k)$의 최솟값 또는 최댓값을 구한다.

863 $y=x^2+2kx-k+3$

$$=(x+k)^2-k^2-k+3$$

따라서 최솟값 m은

$$m=-k^2-k+3=-\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$$

이므로 m은 $k=-\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{13}{4}$을 갖는다.

답 $\frac{13}{4}$

864 $y=-\frac{1}{2}x^2-3ax+a$

$$=-\frac{1}{2}(x+3a)^2+\frac{9}{2}a^2+a$$

따라서 최댓값 M은

$$M=\frac{9}{2}a^2+a=\frac{9}{2}\left(a+\frac{1}{9}\right)^2-\frac{1}{18}$$

이므로 M은 $a=-\frac{1}{9}$일 때 최솟값 $-\frac{1}{18}$을 갖는다.

답 ⑤

유형 175 이차함수의 활용 ; 합 또는 차가 일정한 두 수의 곱

본책 178쪽

(1) 합이 m인 두 수의 곱의 최댓값을 구하는 경우

➜ 두 수를 x, $m-x$, 두 수의 곱을 y로 놓으면

$y=x(m-x)$

(2) 차가 m인 두 수의 곱의 최솟값을 구하는 경우

➜ 두 수를 x, $x+m$, 두 수의 곱을 y로 놓으면

$y=x(x+m)$

865 두 수를 x, $x+8$이라 하고 두 수의 곱을 y라 하면

$$y=x(x+8)=x^2+8x$$
$$=(x+4)^2-16$$

이므로 $x=-4$일 때 최솟값 -16을 갖는다.

따라서 두 수의 곱이 최소가 될 때의 두 수는 -4, 4이다.

답 -4, 4

866 두 수를 x, $10-x$라 하고 두 수의 제곱의 합을 y라 하면

$$y=x^2+(10-x)^2=2x^2-20x+100$$
$$=2(x-5)^2+50$$

이므로 $x=5$일 때 최솟값 50을 갖는다.

따라서 두 수의 제곱의 합의 최솟값은 50이다.

답 50

867 점 (a, b)가 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 위에 있으므로

$$b=-\frac{1}{2}a+2$$

$$\therefore ab=a\left(-\frac{1}{2}a+2\right)=-\frac{1}{2}a^2+2a$$
$$=-\frac{1}{2}(a-2)^2+2$$

따라서 $a=2$일 때 최댓값 2를 갖는다.

답 ①

유형 176 이차함수의 활용: 쏘아 올린 물체
본책 178쪽

어떤 위치에서 똑바로 위로 쏘아 올린 물체의 x초 후의 높이를 y m라 할 때,

$y=ax^2+bx+c\ (a<0)$, 즉 $y=a(x-p)^2+q$

이면

(1) 도달할 수 있는 최고 높이 ➜ q m

(2) 최고 높이에 도달하는 데 걸린 시간 ➜ p초

868 $y=-5x^2+60x+30$

$=-5(x-6)^2+210$

이므로 $x=6$일 때 최댓값 210을 갖는다.

따라서 최고 높이에 도달했을 때의 높이는 210 m이다.

답 210 m

869 주어진 이차함수는 $x=3$일 때 최댓값 b를 가지므로

$y=-5(x-3)^2+b$

$=-5x^2+30x+b-45$

이 식이 $y=-5x^2+ax+10$과 같으므로

$30=a,\ b-45=10 \qquad \therefore a=30,\ b=55$ … 1단계

$\therefore a+b=30+55=85$ … 2단계

답 85

단계	채점 요소	비율
1	a, b의 값 구하기	80 %
2	$a+b$의 값 구하기	20 %

다른 풀이 $y=-5x^2+ax+10$

$=-5\left(x-\dfrac{a}{10}\right)^2+\dfrac{a^2}{20}+10$

이므로 $x=\dfrac{a}{10}$일 때 최댓값 $\dfrac{a^2}{20}+10$을 갖는다.

즉 $\dfrac{a}{10}=3$, $\dfrac{a^2}{20}+10=b$이므로

$a=30,\ b=55$

$\therefore a+b=30+55=85$

870 $h=-5t^2+25t$

$=-5\left(t-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{125}{4}$

이므로 $t=\dfrac{5}{2}$일 때 최댓값 $\dfrac{125}{4}$를 갖는다.

즉 공은 $\dfrac{5}{2}$초 후에 가장 높이 올라간다.

공이 지면에 떨어지는 것은 $h=0$일 때이므로

$0=-5t^2+25t, \qquad t^2-5t=0$

$t(t-5)=0 \qquad \therefore t=0$ 또는 $t=5$

그런데 $t>0$이므로 $\quad t=5$

따라서 공이 가장 높이 올라갔을 때부터 지면에 떨어질 때까지 걸리는 시간은

$5-\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}$(초)

답 ②

유형 177 이차함수의 활용: 도형의 넓이
본책 178쪽

여러 가지 도형의 성질과 평면도형의 넓이를 구하는 공식을 이용하여 넓이 y를 길이 x에 대한 이차함수로 나타낸다.

871 가로의 길이를 $2x$ cm만큼 늘이고, 세로의 길이를 x cm만큼 줄였으므로

$y=(8+2x)(12-x)=-2x^2+16x+96$

$=-2(x-4)^2+128$

따라서 $x=4$일 때 최댓값 128을 갖는다.

답 128, 4

872 물받이의 높이를 x cm라 하면 빗금 친 단면의 가로의 길이는 $(36-2x)$ cm이다.

빗금 친 단면의 넓이를 y cm^{2}라 하면

$y=x(36-2x)=-2x^2+36x$

$=-2(x-9)^2+162$

이므로 $x=9$일 때 최댓값 162를 갖는다.

따라서 넓이가 최대가 될 때의 물받이의 높이는 9 cm이다.

답 ⑤

873 부채꼴의 반지름의 길이를 x cm라 하면 부채꼴의 호의 길이는 $(8-2x)$ cm이다.

부채꼴의 넓이를 y cm^{2}라 하면

$y=\dfrac{1}{2}x(8-2x)=-x^2+4x$

$=-(x-2)^2+4$ … 1단계

이므로 $x=2$일 때 최댓값 4를 갖는다.

따라서 부채꼴의 넓이가 최대가 될 때의 반지름의 길이는 2 cm이다. … 2단계

답 2 cm

단계	채점 요소	비율
1	이차함수의 식 세우기	50 %
2	부채꼴의 넓이가 최대가 될 때의 반지름의 길이 구하기	50 %

만점 공략 노트

반지름의 길이가 r, 호의 길이가 l인 부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}rl$

874 $\overline{EP}=x$라 하면 $\quad \overline{PF}=20-x$

$\triangle$AEP, $\triangle$CFP는 직각이등변삼각형이므로

$S=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}(20-x)^2$

$=x^2-20x+200$

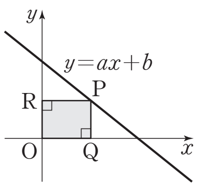
$=(x-10)^2+100$

따라서 $x=10$일 때 최댓값 100을 갖는다.

답 100

유형 178 이차함수의 활용; 내접하는 도형 본책 179쪽

직선 $y=ax+b$ 위의 점 $\mathrm{P}(x, ax+b)$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 할 때, □OQPR의 넓이
➜ $\overline{\mathrm{OQ}}=x$, $\overline{\mathrm{PQ}}=ax+b$이므로
□$\mathrm{OQPR}=x(ax+b)$



875 점 P의 좌표를 $\left(x,\ -\dfrac{2}{3}x+6\right)$이라 하고 □OQPR의 넓이를 y라 하면

$$y=x\left(-\frac{2}{3}x+6\right)=-\frac{2}{3}x^2+6x$$
$$=-\frac{2}{3}\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{27}{2}$$

이므로 $x=\dfrac{9}{2}$일 때 최댓값 $\dfrac{27}{2}$을 갖는다.

따라서 □OQPR의 최대 넓이는 $\dfrac{27}{2}$이다. 답 ④

876 점 P의 좌표를 $(x,\ -x+8)$이라 하고 세 삼각형의 넓이의 합을 y라 하면

$$y=\triangle\mathrm{OAB}-\triangle\mathrm{PRQ}$$
$$=\frac{1}{2}\times8\times8-\frac{1}{2}x(-x+8)$$
$$=\frac{1}{2}x^2-4x+32=\frac{1}{2}(x-4)^2+24$$

이므로 $x=4$일 때 최솟값 24를 갖는다.
따라서 세 삼각형의 넓이의 합이 최소가 될 때의 점 P의 좌표는 $(4,\ 4)$이다. 답 $(4,\ 4)$

877 점 D의 좌표를 $(x,\ -2x^2+1)$이라 하고 □ABCD의 둘레의 길이를 y라 하자.
두 이차함수 $y=2x^2-1$과 $y=-2x^2+1$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이므로

$$\overline{\mathrm{AD}}=2x,\ \overline{\mathrm{DC}}=2(-2x^2+1)$$
$$\therefore y=2\{2x+2(-2x^2+1)\}$$
$$=-8x^2+4x+4$$
$$=-8\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{2}$$

따라서 $x=\dfrac{1}{4}$일 때 최댓값 $\dfrac{9}{2}$를 갖는다.

즉 □ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 $\dfrac{9}{2}$이다. 답 $\dfrac{9}{2}$

만점 유형 도전하기

본책 180~181쪽

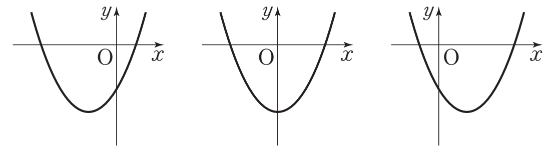
878 전략 $y=ax^2+bx+c$를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 나타내어 축의 방정식을 구한다.

재민: $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$이므로 축의 방정식은 $x=-\dfrac{b}{2a}$이다.

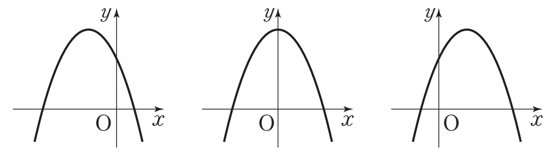
동식: $ab>0$이면 축은 y축의 왼쪽에 위치하고, $ab<0$이면 축은 y축의 오른쪽에 위치한다.

성현: $a>0,\ c<0$ 또는 $a<0,\ c>0$일 때 그래프는 다음 그림과 같이 모든 사분면을 지난다.

(i) $a>0,\ c<0$일 때,



(ii) $a<0,\ c>0$일 때,



따라서 잘못 말한 사람은 재민, 동식이다. 답 풀이 참조

879 전략 평행사변형은 두 쌍의 대변이 각각 평행함을 이용한다.

$y=\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{4}{3}x-7$에 $y=0$을 대입하면

$0=\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{4}{3}x-7,\qquad x^2-4x-21=0$

$(x+3)(x-7)=0\qquad \therefore x=-3$ 또는 $x=7$

$\therefore \mathrm{A}(-3,\ 0),\ \mathrm{C}(7,\ 0)$

또 $x=0$을 대입하면 $\quad y=-7\qquad \therefore \mathrm{B}(0,\ -7)$

점 D의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 □ABCD가 평행사변형이므로

$\overline{\mathrm{AB}}/\!/\overline{\mathrm{DC}}$에서 $\quad \dfrac{-7-0}{0-(-3)}=\dfrac{0-b}{7-a}$

$-\dfrac{7}{3}=-\dfrac{b}{7-a},\qquad 7(7-a)=3b$

$\therefore 7a+3b=49$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{AD}}/\!/\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\quad \dfrac{b-0}{a-(-3)}=\dfrac{0-(-7)}{7-0}$

$\dfrac{b}{a+3}=1,\qquad b=a+3$

$\therefore a-b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=4,\ b=7$

따라서 점 D의 좌표는 $(4,\ 7)$이다. 답 $(4,\ 7)$

만점 공략 노트

두 점 $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 기울기
➜ $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (단, $x_1\neq x_2$)

다른 풀이 점 D에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\triangle\mathrm{ABO}\equiv\triangle\mathrm{CDH}$ (RHA 합동)이므로

$\overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{BO}}=7,\ \overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{AO}}=3,$

$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OC}}-\overline{\mathrm{CH}}=7-3=4$

$\therefore \mathrm{D}(4,\ 7)$

880 **전략** 그래프의 모양을 이용하여 a의 부호를 구하고, y축과의 교점을 이용하여 c의 값을 구한다. 또 축의 방정식을 이용하여 a와 b 사이의 관계식을 구한다.

그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

y축과의 교점의 y좌표가 -3이므로 $c=-3$

그래프의 축의 방정식이 $x=-2$이므로 이차함수의 식을

$$y=a(x+2)^2+q=ax^2+4ax+4a+q$$

로 놓으면 이 식이 $y=ax^2+bx+c$와 일치하므로

$$b=4a$$

따라서 주어진 부등식에 $c=-3$, $b=4a$를 대입하면

$$(2a-3\times 4a)x-7a-4a\times(-3)>0$$

$$-10ax+5a>0, \qquad -10ax>-5a$$

이때 $a<0$에서 $-10a>0$이므로 $x>\frac{1}{2}$

답 $x>\frac{1}{2}$

만점 공략 노트

x의 계수가 문자인 일차부등식은 x의 계수의 부호를 확인한 후 푼다.

➜ $ax>b$에서

① $a>0$이면 $x>\frac{b}{a}$

② $a<0$이면 $x<\frac{b}{a}$

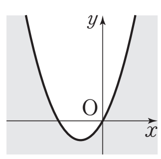
881 **전략** 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표와 y축과 만나는 점의 y좌표를 이용하여 모든 사분면을 지나는 경우를 생각한다.

모든 경우의 수는 $4\times4=16$

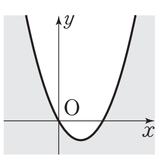
$y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=(x-a)^2+b$$

이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 (a, b)이고, 아래로 볼록하므로 모든 사분면을 지나려면 다음 [그림 1] 또는 [그림 2]의 어두운 부분에 위치해야 한다.



[그림 1]



[그림 2]

(i) 이차함수 $y=(x-a)^2+b$의 그래프의 꼭짓점이 x축의 아래쪽에 위치해야 하므로

$$b<0$$

이를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(-2, -2)$, $(-1, -2)$, $(1, -2)$, $(2, -2)$,
$(-2, -1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(2, -1)$ …… ㉠

(ii) 이차함수 $y=(x-a)^2+b$의 그래프와 y축과의 교점이 x축의 아래쪽에 위치해야 하므로 $x=0$일 때 (y의 값)<0이어야 한다.

$y=(x-a)^2+b$에 $x=0$을 대입하면

$$y=a^2+b<0 \qquad \therefore b<-a^2$$

㉠에서 $b<-a^2$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(-1, -2)$, $(1, -2)$

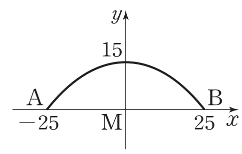
의 2가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$

답 $\frac{1}{8}$

882 **전략** 직선 AB를 x축, 점 M을 원점으로 하는 좌표평면을 생각한다.

직선 AB를 x축, 터널 바닥의 중앙 M을 원점으로 하는 좌표평면을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(0, 15)$이므로 포물선의 식을

$$y=ax^2+15$$

로 놓으면 포물선이 점 B$(25, 0)$을 지나므로

$$0=625a+15 \qquad \therefore a=-\frac{3}{125}$$

$$\therefore y=-\frac{3}{125}x^2+15$$

$y=-\frac{3}{125}x^2+15$에 $x=20$을 대입하면

$$y=-\frac{3}{125}\times 20^2+15=\frac{27}{5}$$

따라서 구하는 높이는 $\frac{27}{5}$ m이다.

답 $\frac{27}{5}$ m

다른 풀이 포물선의 식을 $y=a(x+25)(x-25)$로 놓으면 포물선이 점 $(0, 15)$를 지나므로

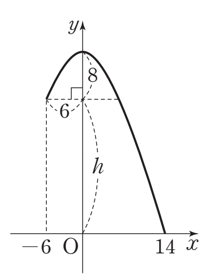
$$15=-625a \qquad \therefore a=-\frac{3}{125}$$

$y=-\frac{3}{125}(x+25)(x-25)$에 $x=20$을 대입하면

$$y=-\frac{3}{125}\times 45\times(-5)=\frac{27}{5}$$

883 **전략** 지면을 x축으로 하는 좌표평면을 생각한다.

지면을 x축, 공이 최고 높이에 도달했을 때의 공의 위치에서 x축에 내린 수선의 발을 원점으로 하는 좌표평면을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(0, h+8)$이므로 포물선의 식을

$$y=ax^2+h+8$$

로 놓으면 포물선이 점 $(-6, h)$를 지나므로

$$h=36a+h+8 \qquad \therefore a=-\frac{2}{9}$$

$y=-\frac{2}{9}x^2+h+8$의 그래프가 점 $(14, 0)$을 지나므로

$$0=-\frac{2}{9}\times 14^2+h+8 \qquad \therefore h=\frac{320}{9}$$

$$\therefore 9h=320$$

답 320

다른 풀이 포물선은 y축을 축으로 하고 점 $(14, 0)$을 지나므로 포물선의 식을

$y=a(x+14)(x-14)$
로 놓으면 포물선이 두 점 $(-6,\ h)$, $(0,\ h+8)$을 지나므로
$h=-160a$, $h+8=-196a$
즉 $-196a=-160a+8$이므로 $\quad a=-\dfrac{2}{9}$
$\therefore h=-160\times\left(-\dfrac{2}{9}\right)=\dfrac{320}{9}$
$\therefore 9h=320$

884 전략 직선 AD의 방정식을 이용하여 점 C의 좌표를 구한다.
두 점 $\mathrm{A}\left(4,\ \dfrac{15}{2}\right)$, $\mathrm{D}\left(2,\ \dfrac{9}{2}\right)$를 지나는 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하면
$\dfrac{15}{2}=4m+n$, $\dfrac{9}{2}=2m+n$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad m=\dfrac{3}{2}$, $n=\dfrac{3}{2}$
$\therefore y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{2}$
$y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{2}$에 $y=0$을 대입하면
$0=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{2}\qquad \therefore x=-1$
$\therefore \mathrm{C}(-1,\ 0)$
$f(x)=ax^2+bx+c$로 놓으면 그래프가 점 $\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{9}{2}\right)$를 지나므로
$c=\dfrac{9}{2}$
$f(x)=ax^2+bx+\dfrac{9}{2}$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}\left(4,\ \dfrac{15}{2}\right)$, $\mathrm{C}(-1,\ 0)$을 지나므로
$\dfrac{15}{2}=16a+4b+\dfrac{9}{2}$, $0=a-b+\dfrac{9}{2}$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-\dfrac{3}{4}$, $b=\dfrac{15}{4}$
$\therefore f(x)=-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{15}{4}x+\dfrac{9}{2}$
$\qquad =-\dfrac{3}{4}\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{147}{16}$
따라서 꼭짓점의 y좌표는 $\dfrac{147}{16}$이다. 답 $\dfrac{147}{16}$

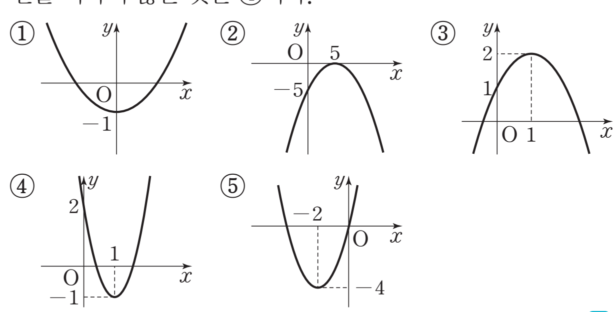
885 전략 각 그래프가 x축과 만나는 점을 이용하여 함수의 식을 먼저 세운다.
(1) $f(x)=x(x-1)$, $g(x)=x(x-a)$, $h(x)=x(x-b)$이므로
$f(x)+g(x)+h(x)$
$=x(x-1)+x(x-a)+x(x-b)$
$=x\{(x-1)+(x-a)+(x-b)\}$
$=x(3x-1-a-b)$
$x(3x-1-a-b)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=\dfrac{1+a+b}{3}$
따라서 방정식 $f(x)+g(x)+h(x)=0$의 0이 아닌 근은
$x=\dfrac{1+a+b}{3}$
(2) $y=f(x)+g(x)+h(x)$가 $x=2$에서 최솟값을 가지므로 그래프의 축의 방정식이 $x=2$이다.
이때 $f(x)+g(x)+h(x)=0$에서 $x=0$ 또는
$x=\dfrac{1+a+b}{3}$이므로 그래프와 x축과의 교점의 좌표가 $(0,\ 0)$, $\left(\dfrac{1+a+b}{3},\ 0\right)$이고, 두 점은 축 $x=2$에 대하여 대칭이므로
$\dfrac{1+a+b}{3}=4\qquad \therefore a+b=11$
a, b는 자연수이고 $1<a<b$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(2,\ 9)$, $(3,\ 8)$, $(4,\ 7)$, $(5,\ 6)$
의 4개이다.
답 (1) $x=\dfrac{1+a+b}{3}$ (2) 4

시험 만점 완성하기

본책 182~185쪽

886 전략 먼저 그래프가 지나는 점의 좌표를 주어진 이차함수에 대입하여 a의 값을 구한다.
$y=ax^2-6x+1$의 그래프가 점 $(-1,\ 5)$를 지나므로
$5=a+6+1\qquad \therefore a=-2$
$y=-2x^2-6x+1=-2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{2}$이므로 이 그래프의 축의 방정식은 $x=-\dfrac{3}{2}$이다. 답 ①

887 전략 꼭짓점의 좌표와 y축과의 교점의 좌표를 이용하여 그래프를 그려 본다.
③ $y=-x^2+2x+1=-(x-1)^2+2$
④ $y=3x^2-6x+2=3(x-1)^2-1$
⑤ $y=x^2+4x=(x+2)^2-4$
따라서 각 이차함수의 그래프는 다음 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는 것은 ④이다.



답 ④

888 전략 그래프가 지나는 점을 이용하여 a의 값을 구한다.
① $y=-x^2+ax+6$의 그래프가 점 $(6,\ 0)$을 지나므로
$0=-36+6a+6\qquad \therefore a=5$
② $y=-x^2+5x+6=-\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{49}{4}$
$\therefore \mathrm{A}\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{49}{4}\right)$

③ $y=-x^2+5x+6$에 $x=0$을 대입하면 $y=6$

$\therefore$ B$(0, 6)$

④ $y=-x^2+5x+6$에 $y=6$을 대입하면

$6=-x^2+5x+6$, $x^2-5x=0$

$x(x-5)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=5$

이때 C$(5, 6)$이므로 $\overline{BC}=5$

⑤ $y=-x^2+5x+6$에 $y=0$을 대입하면

$0=-x^2+5x+6$, $x^2-5x-6=0$

$(x+1)(x-6)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=6$

$\therefore$ D$(-1, 0)$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

889 전략 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고친 후 평행이동한 그래프의 식을 구한다.

$y=-x^2+4x+10=-(x-2)^2+14$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y+3=-(x+5-2)^2+14$

$\therefore y=-(x+3)^2+11$

ㄴ. 꼭짓점의 좌표는 $(-3, 11)$이다.

ㄷ. y축과 점 $(0, 2)$에서 만난다.

ㄹ. 그래프가 위로 볼록하고 꼭짓점이 제2사분면 위에 있으므로 x축과 두 점에서 만난다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

890 전략 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고친 후 평행이동한 그래프의 식을 구한다.

$y=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-1=\frac{1}{3}(x+1)^2-\frac{4}{3}$이므로

A$\left(-1, -\frac{4}{3}\right)$

평행이동한 그래프의 식은

$y+4=\frac{1}{3}(x+1)^2-\frac{4}{3}$

$\therefore y=\frac{1}{3}(x+1)^2-\frac{16}{3}$

위의 식에 $y=0$을 대입하면

$0=\frac{1}{3}(x+1)^2-\frac{16}{3}$, $(x+1)^2=16$

$x+1=\pm4$ $\therefore x=-5$ 또는 $x=3$

따라서 B$(-5, 0)$, C$(3, 0)$이라 하면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\{3-(-5)\}\times\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$ 답 ④

891 전략 이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서 ab의 부호에 따라 그래프의 축의 위치가 결정된다.

$ab<0$, $bc<0$에서 a와 b는 다른 부호, b와 c도 다른 부호이므로 a와 c는 같은 부호이다.

$\therefore ac>0$

즉 $y=acx^2-b^2x$의 그래프는 $ac>0$이므로 아래로 볼록하고, $ac\times(-b^2)<0$이므로 축은 y축의 오른쪽에 있다.

또 $x=0$일 때 $y=0$이므로 그래프는 원점을 지난다.

따라서 $y=acx^2-b^2x$의 그래프로 알맞은 것은 ③이다. 답 ③

892 전략 주어진 꼭짓점의 좌표를 이용하여 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$로 놓는다.

꼭짓점의 좌표가 $(-3, 8)$이므로 이차함수의 식을

$y=a(x+3)^2+8$

로 놓으면 그래프가 점 $\left(0, \frac{7}{2}\right)$을 지나므로

$\frac{7}{2}=9a+8$ $\therefore a=-\frac{1}{2}$

따라서 $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2+8=-\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{7}{2}$이므로

$b=-3$, $c=\frac{7}{2}$

$\therefore a-b-c=-\frac{1}{2}-(-3)-\frac{7}{2}=-1$ 답 ②

893 전략 주어진 축의 방정식을 이용하여 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$로 놓는다.

축의 방정식이 $x=2$이므로 이차함수의 식을

$y=a(x-2)^2+q$

로 놓으면 그래프가 두 점 $(-1, 8)$, $(4, -2)$를 지나므로

$8=9a+q$, $-2=4a+q$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $q=-10$

따라서 $y=2(x-2)^2-10$의 그래프가 점 $(k, 4k-2)$를 지나므로

$4k-2=2(k-2)^2-10$, $2k^2-12k=0$

$2k(k-6)=0$ $\therefore k=0$ 또는 $k=6$

그런데 k는 양수이므로 $k=6$ 답 ①

894 전략 이차함수의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 좌표를 이용하여 이차함수의 식을 $y=a(x-m)(x-n)$으로 놓는다.

x축과 두 점 $\left(-\frac{9}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$에서 만나므로 이차함수의 식을

$y=a\left(x+\frac{9}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

로 놓으면 그래프가 점 $(0, 9)$를 지나므로

$9=\frac{9}{4}a$ $\therefore a=4$

$\therefore y=4\left(x+\frac{9}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=4\left(x^2+5x+\frac{9}{4}\right)$

$=4\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-16$

따라서 꼭짓점의 y좌표는 -16이다. 답 ③

895 전략 주어진 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고친 후 최솟값을 구한다.

① $x=-2$일 때 최솟값 -5를 갖는다.

② $y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$이므로 $x=-1$일 때 최솟값 -4를 갖는다.

③ $y=\frac{1}{3}x^2-4x+5=\frac{1}{3}(x-6)^2-7$이므로 $x=6$일 때 최솟값 -7을 갖는다.

④ $y=3x^2-x-2=3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{25}{12}$이므로 $x=\frac{1}{6}$일 때 최솟값 $-\frac{25}{12}$를 갖는다.

⑤ $y=\frac{1}{4}x(3x-4)=\frac{3}{4}x^2-x=\frac{3}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{3}$이므로 $x=\frac{2}{3}$일 때 최솟값 $-\frac{1}{3}$을 갖는다.

따라서 최솟값이 가장 작은 것은 ③이다. 답 ③

896 전략 이차함수의 최솟값과 그래프의 축의 방정식을 이용하여 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$로 놓는다.

꼭짓점의 y좌표가 -5이고 축의 방정식이 $x=1$이므로 이차함수의 식을

$$y=a(x-1)^2-5$$

로 놓을 수 있다.

그래프가 직선 $y=-1$과 만나는 두 점은 축 $x=1$에 대하여 대칭이고 두 점 사이의 거리가 4이므로 두 점의 좌표는 각각

$$\left(1-\frac{1}{2}\times4,\ -1\right),\ \left(1+\frac{1}{2}\times4,\ -1\right),\text{ 즉}$$

$$(-1,\ -1),\ (3,\ -1)$$

즉 $y=a(x-1)^2-5$의 그래프가 점 $(-1,\ -1)$을 지나므로

$$-1=4a-5 \qquad \therefore a=1$$

따라서 $y=(x-1)^2-5=x^2-2x-4$이므로

$$b=-2,\ c=-4$$

$$\therefore abc=1\times(-2)\times(-4)=8$$

답 ③

897 전략 주어진 이차함수의 식을 $y=k(x-p)^2+q$의 꼴로 고친 후 최솟값을 a에 대한 식으로 나타낸다.

$$y=\frac{1}{3}x^2+4ax+6a+1$$
$$=\frac{1}{3}(x+6a)^2-12a^2+6a+1$$

따라서 최솟값 $f(a)$는

$$f(a)=-12a^2+6a+1=-12\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{4}$$

이므로 $f(a)$는 $a=\frac{1}{4}$일 때 최댓값 $\frac{7}{4}$을 갖는다. 답 ⑤

898 전략 울타리의 가로의 길이를 x m, 넓이를 y m^2라 하고 이차함수의 식을 세운다.

울타리 내부의 가로의 길이를 x m라 하면 세로의 길이는 $(24-2x)$ m이다.

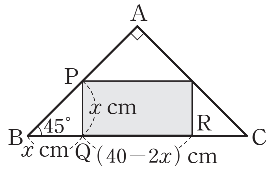
울타리 내부의 넓이를 y m^2라 하면

$$y=x(24-2x)=-2x^2+24x$$
$$=-2(x-6)^2+72$$

이므로 $x=6$일 때 최댓값 72를 갖는다.

따라서 울타리 내부의 최대 넓이는 72 m^2이다. 답 ⑤

899 전략 직사각형의 세로의 길이를 x cm, 넓이를 y cm^2라 하고 이차함수의 식을 세운다.



직사각형의 세로의 길이를 x cm라 하면 오른쪽 그림에서

$$\overline{BQ}=\overline{PQ}=x\text{ cm},$$
$$\overline{QR}=40-2x\text{ (cm)}$$

직사각형의 넓이를 y cm^2라 하면

$$y=x(40-2x)=-2x^2+40x$$
$$=-2(x-10)^2+200$$

이므로 $x=10$일 때 최댓값 200을 갖는다.

즉 직사각형의 세로의 길이가 10 cm일 때 넓이가 최대가 되고 이때 둘레의 길이는

$$2(\overline{PQ}+\overline{QR})=2\times(10+20)=60\text{ (cm)}$$

답 ④

900 전략 주어진 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 나타내어 축의 방정식을 구한다.

$$y=x^2+kx+k-3$$
$$=\left(x+\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}+k-3$$

축의 방정식이 $x=1$이므로

$$-\frac{k}{2}=1 \qquad \therefore k=-2$$

따라서 $y=(x-1)^2-6$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ -6)$이다.

답 $(1,\ -6)$

다른 풀이 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이므로 이차함수의 식을

$$y=(x-1)^2+q=x^2-2x+q+1$$

로 놓으면 이 식이 $y=x^2+kx+k-3$과 일치하므로

$$-2=k,\ q+1=k-3$$

$$\therefore k=-2,\ q=-6$$

따라서 $y=(x-1)^2-6$이므로 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ -6)$이다.

901 전략 먼저 네 점 A, B, C, D의 좌표를 구한 후 사각형을 삼각형으로 나누어 넓이를 구한다.

$y=-2x^2+2x+4$에 $x=0$을 대입하면 $\quad y=4$

$$\therefore \text{A}(0,\ 4)$$

또 $y=0$을 대입하면

$$0=-2x^2+2x+4, \qquad x^2-x-2=0$$
$$(x+1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$
$$\therefore \text{B}(-1,\ 0),\ \text{C}(2,\ 0)$$

$y=-2x^2+2x+4=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$이므로

$$\text{D}\left(\frac{1}{2},\ \frac{9}{2}\right)$$

$$\therefore \square\text{ABCD}=\triangle\text{ABO}+\triangle\text{AOD}+\triangle\text{OCD}$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times4+\frac{1}{2}\times4\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times2\times\frac{9}{2}$$
$$=\frac{15}{2}$$

답 $\frac{15}{2}$

902 전략 주어진 이차함수의 식을 $y=k(x-p)^2+q$의 꼴로 고친 후 꼭짓점의 좌표를 구한다.

$y=-3x^2-18ax+3a=-3(x+3a)^2+27a^2+3a$

축의 방정식은 $x=-3a$이고 조건 (가)에서 축이 y축의 오른쪽에 있으므로

$-3a>0 \quad \therefore a<0$ …… ㉠

꼭짓점의 좌표는 $(-3a,\ 27a^2+3a)$이고 조건 (나)에서 꼭짓점이 직선 $y=-5x+7$ 위에 있으므로

$27a^2+3a=15a+7$

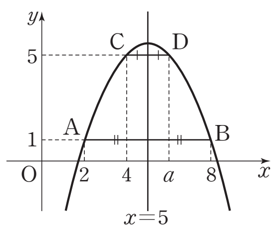
$27a^2-12a-7=0, \quad (3a+1)(9a-7)=0$

$\therefore a=-\frac{1}{3}$ 또는 $a=\frac{7}{9}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-\frac{1}{3}$

답 $-\frac{1}{3}$

903 전략 이차함수의 그래프 위의 서로 다른 두 점의 y좌표가 같다. ➜ 두 점은 축에 대하여 대칭이다.



$y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 A, B의 y좌표가 같으므로 두 점은 축에 대하여 대칭이다.

따라서 축의 방정식은

$x=\frac{2+8}{2}$, 즉 $x=5$

$\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이므로 두 점 C, D의 y좌표도 서로 같다.

$\therefore b=5$

또 두 점 C, D는 축 $x=5$에 대하여 대칭이고 점 C의 x좌표가 4이므로 점 D의 x좌표는

$a=5+1=6$

$\therefore a+b=6+5=11$

답 11

904 전략 이차함수가 $x=p$에서 최댓값 q를 가지면 이차함수의 식은 $y=a(x-p)^2+q\ (a<0)$로 놓을 수 있다.

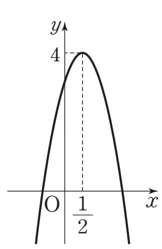
주어진 이차함수는 $x=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 4를 가지므로

$y=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4$

$=ax^2-ax+\frac{1}{4}a+4$

로 놓을 수 있다.

이때 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ 4\right)$이고 제1사분면 위에 있으므로 그래프가 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 위로 볼록해야 하므로

$a<0$ …… ㉠

또 y축과의 교점이 x축의 위쪽에 위치해야 하므로

$\frac{1}{4}a+4>0 \quad \therefore a>-16$ …… ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 정수 a의 값 중 가장 큰 값은 -1, 가장 작은 값은 -15이므로

$M=-1,\ m=-15$

$\therefore M-m=-1-(-15)=14$

답 14

905 전략 마름모의 한 대각선의 길이를 x cm, 넓이를 y cm^{2}라 하고 이차함수의 식을 세운다.

한 대각선의 길이를 x cm라 하면 다른 대각선의 길이는 $(12-x)$ cm이다.

마름모의 넓이를 y cm^{2}라 하면

$y=\frac{1}{2}x(12-x)=-\frac{1}{2}x^2+6x$

$=-\frac{1}{2}(x-6)^2+18$

이므로 $x=6$일 때 최댓값 18을 갖는다.

즉 마름모의 넓이가 최대가 되도록 하는 두 대각선의 길이가 각각 6 cm, 6 cm이고, 이때 대각선의 길이가 서로 같으므로 이 마름모는 정사각형이다.

넓이가 18 cm^{2}인 정사각형의 한 변의 길이는

$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$(cm)

답 $3\sqrt{2}$ cm

906 전략 먼저 주어진 그래프를 이용하여 a, b의 부호를 구한다.

그래프의 축이 y축의 왼쪽에 있으므로

$1\times a>0 \quad \therefore a>0$

y축과의 교점이 x축의 아래쪽에 있으므로

$b<0$ … 1단계

$\therefore a-b>0,\ b-a<0$ … 2단계

$\therefore \sqrt{(a-b)^2}-\sqrt{(b-a)^2}+\sqrt{b^2}$

$=(a-b)+(b-a)+(-b)$

$=-b$ … 3단계

답 $-b$

단계	채점 요소	배점
1	a, b의 부호 구하기	2점
2	$a-b$, $b-a$의 부호 구하기	1점
3	주어진 식 간단히 하기	1점

907 전략 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$로 놓고 세 점의 좌표를 대입한다.

이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$로 놓으면 그래프가 점 $(0,\ -4)$를 지나므로

$c=-4$

$y=ax^2+bx-4$의 그래프가 두 점 $(-1,\ 3)$, $(3,\ 11)$을 지나므로

$3=a-b-4,\ 11=9a+3b-4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=-4$

$\therefore y=3x^2-4x-4$ … 1단계

$y=3x^2-4x-4$에 $y=0$을 대입하면

$0=3x^2-4x-4, \quad (3x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

따라서 $A\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$, $B(2, 0)$이라 하면

$\overline{AB}=2-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{3}$ … 2단계

답 $\frac{8}{3}$

단계	채점 요소	배점
1	이차함수의 식 구하기	2점
2	$\overline{AB}$의 길이 구하기	2점

908 전략 주어진 이차함수의 식을 $y=k(x-p)^2+q$의 꼴로 나타내어 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

$y=ax^2-ax+2=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}a+2$이므로 $x=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $-\frac{1}{4}a+2$를 갖는다. … 1단계

$y=5x^2+10x-2a=5(x+1)^2-2a-5$이므로 $x=-1$일 때 최솟값 $-2a-5$를 갖는다. … 2단계

두 함수의 최댓값과 최솟값이 같으므로

$-\frac{1}{4}a+2=-2a-5 \qquad \therefore a=-4$ … 3단계

답 -4

단계	채점 요소	배점
1	$y=ax^2-ax+2$의 최댓값을 a에 대한 식으로 나타내기	1점
2	$y=5x^2+10x-2a$의 최솟값을 a에 대한 식으로 나타내기	1점
3	a의 값 구하기	1점

909 전략 주어진 이차함수의 그래프가 점 (a, b)를 지남을 이용하여 b를 a에 대한 식으로 나타낸다.

$y=x^2+x-4$의 그래프가 점 (a, b)를 지나므로

$b=a^2+a-4$

$\therefore 3a+b=3a+(a^2+a-4)$

$=a^2+4a-4$

$=(a+2)^2-8$ … 1단계

따라서 $3a+b$는 $a=-2$일 때 최솟값 -8을 갖는다. … 2단계

답 -8

단계	채점 요소	배점
1	$3a+b$를 a에 대한 식으로 나타내기	2점
2	$3a+b$의 최솟값 구하기	2점