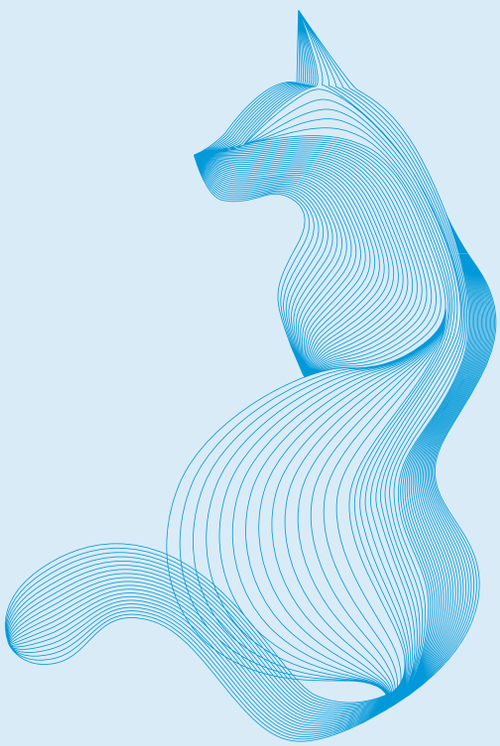
RPM Pro

AI 튜터와 함께 푸는 RPM Pro

공통수학 1

정답 및 풀이



01 다항식의 연산

셀프 CHECK → 본책 8~9쪽

A 답 (1) $-4x^3y+2x^2+3xy^3+y^2-6$
(2) $2x^2-6-4x^3y+y^2+3xy^3$

B 답 (1) $-6x^2+5xy-5y^2$ (2) $13x^2-5xy+10y^2$

C 답 (1) $a^3b-2ab^2+3ab^3$ (2) $2x^3-3x^2+5x-4$
(3) $6a^3+17a^2b-15ab^2+2b^3$

D 답 (1) $x^2+4y^2+z^2-4xy-4yz+2zx$
(2) $x^3+9x^2+27x+27$ (3) $8x^3-1$
(4) $x^3+10x^2+31x+30$ (5) $a^3-b^3+6ab+8$
(6) $x^4+9x^2y^2+81y^4$

E 답 (1) 10 (2) 16 (3) 26

F 답 (1) 11 (2) 30

G 답 (1) $2x^3+5x^2+3x-1=(2x-1)(x^2+3x+3)+2$
(2) $3x^3-6x^2+10=(x^2-4)(3x-6)+12x-14$

H 답 (1) 몫: $2x^2+5x+4$, 나머지: 10
(2) 몫: $6x^2-3x+9$, 나머지: -8

내신유형 다지기 → 본책 10~19쪽

유형 001 다항식의 덧셈과 뺄셈 → 본책 10쪽

다항식의 덧셈과 뺄셈은 다음과 같은 순서로 계산한다.
(i) 괄호가 있는 경우 괄호를 푼다.
(ii) 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.

0001 $3A-2X=2B-A$에서 $-2X=-4A+2B$
$\therefore X=2A-B$
$=2(x^2+6xy-3y^2)-(-2x^2-4xy+5y^2)$
$=2x^2+12xy-6y^2+2x^2+4xy-5y^2$
$=4x^2+16xy-11y^2$ 답 ④

0002 $A+B-2(C-2A)$
$=A+B-2C+4A=5A+B-2C$
$=5(x^3+2x^2-2x+1)+(-x^3+3x^2-ax+2)$
$-2(ax^2+4x-1)$
$=5x^3+10x^2-10x+5-x^3+3x^2-ax+2-2ax^2-8x+2$
$=4x^3+(13-2a)x^2-(a+18)x+9$
이때 x^2의 계수가 5이므로
$13-2a=5$ $\therefore a=4$
따라서 x의 계수는
$-(a+18)=-(4+18)=-22$ 답 ①

0003 $A+2B=4x^2-xy+9y^2$ …… ㉠
$A-B=x^2+2xy-3y^2$ …… ㉡
㉠−㉡을 하면 $3B=3x^2-3xy+12y^2$
$\therefore B=x^2-xy+4y^2$ … ❶
이것을 ㉡에 대입하면
$A-(x^2-xy+4y^2)=x^2+2xy-3y^2$
$\therefore A=x^2+2xy-3y^2+(x^2-xy+4y^2)$
$=x^2+2xy-3y^2+x^2-xy+4y^2$
$=2x^2+xy+y^2$ … ❷
$\therefore 3A+B=3(2x^2+xy+y^2)+(x^2-xy+4y^2)$
$=6x^2+3xy+3y^2+x^2-xy+4y^2$
$=7x^2+2xy+7y^2$ … ❸
답 $7x^2+2xy+7y^2$

단계	채점 요소	비율
❶	다항식 B 구하기	40 %
❷	다항식 A 구하기	40 %
❸	$3A+B$ 계산하기	20 %

0004 $(P\circ Q)\blacklozenge(Q\circ P)$
$=(2P+Q)\blacklozenge(2Q+P)=(2P+Q)-3(2Q+P)$
$=2P+Q-6Q-3P=-P-5Q$
$=-(2x^2-6x+10)-5(-x^2+4x-1)$
$=-2x^2+6x-10+5x^2-20x+5$
$=3x^2-14x-5$ 답 ③

유형 002 다항식의 전개식에서 계수 구하기 → 본책 10쪽

다항식의 전개식에서 특정한 항의 계수를 구할 때에는 분배법칙을 이용하여 특정한 항이 나오도록 각 다항식에서 하나씩 선택하여 곱한다.

0005 $(4x^3+6x^2-2x-7)(2x^2-3x+5)$의 전개식에서 x^2항은
$6x^2\times5+(-2x)\times(-3x)+(-7)\times2x^2$
$=30x^2+6x^2-14x^2=22x^2$
따라서 x^2의 계수는 22이다. 답 ⑤

0006 $(3x+5)(2x^2+ax-8)$의 전개식에서 x항은
$3x\times(-8)+5\times ax=-24x+5ax=(5a-24)x$
이때 x의 계수가 -9이므로
$5a-24=-9$ $\therefore a=3$ … ❶
따라서 $(3x+5)(2x^2+3x-8)$의 전개식에서 x^2항은
$3x\times3x+5\times2x^2=9x^2+10x^2=19x^2$
즉 x^2의 계수는 19이다. … ❷
답 19

단계	채점 요소	비율
❶	a의 값 구하기	50 %
❷	x^2의 계수 구하기	50 %

0007 $(1+x+2x^2+\cdots+50x^{50})^2$
$=(1+x+2x^2+\cdots+50x^{50})(1+x+2x^2+\cdots+50x^{50})$
이 식의 전개식에서 x^4항은
$1\times4x^4+x\times3x^3+2x^2\times2x^2+3x^3\times x+4x^4\times1$
$=4x^4+3x^4+4x^4+3x^4+4x^4=18x^4$
따라서 x^4의 계수는 18이다. 답 ④

만점 공략 노트
주어진 다항식을 전개할 때, $5x^5$, $6x^6$, …, $50x^{50}$항은 x^4의 계수에 영향을 주지 않는다.
따라서 주어진 식의 전개식에서 x^4의 계수는
$(1+x+2x^2+3x^3+4x^4)^2$
의 전개식에서 x^4의 계수와 서로 같다.

0008 $(x+1)(x+2)(x+3)\times\cdots\times(x+20)$의 전개식에서 x^{19}항은
$x^{19}\times20+x^{18}\times19\times x+x^{17}\times18\times x^2+\cdots$
$+x\times2\times x^{18}+1\times x^{19}$
$=(20+19+18+\cdots+2+1)x^{19}$
$=210x^{19}$
따라서 x^{19}의 계수는 210이다. 답 210

유형 003 곱셈 공식을 이용한 다항식의 전개 본책 11쪽

다항식의 곱셈은 다음과 같은 곱셈 공식을 이용하면 빠르게 전개할 수 있다.
① $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
② $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
③ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
④ $(x+a)(x+b)(x+c)$
$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

0009 ① $(3x-2y)^3=27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$
② $(2x-y-4z)^2=4x^2+y^2+16z^2-4xy+8yz-16zx$
④ $(9x^2+6xy+4y^2)(9x^2-6xy+4y^2)=81x^4+36x^2y^2+16y^4$
⑤ $(x-2)(x+2)(x^2+4)=(x^2-4)(x^2+4)=x^4-16$
따라서 옳은 것은 ③이다. 답 ③

0010 $(x+a)^3+x(x-5)$
$=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3+x^2-5x$
$=x^3+(3a+1)x^2+(3a^2-5)x+a^3$
이때 x^2의 계수가 13이므로
$3a+1=13$ $\therefore a=4$ 답 4

0011 $(x-\sqrt{3}y)^3(x+\sqrt{3}y)^3=\{(x-\sqrt{3}y)(x+\sqrt{3}y)\}^3$
$=(x^2-3y^2)^3$
$=x^6-9x^4y^2+27x^2y^4-27y^6$
따라서 x^2y^4의 계수는 27이다. 답 ⑤

0012 $(x^2-4)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$
$=(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$
$=\{(x-2)(x^2+2x+4)\}\{(x+2)(x^2-2x+4)\}$
$=(x^3-8)(x^3+8)$
$=x^6-64$ 답 ②
다른 풀이 $(x^2-4)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$
$=(x^2-4)(x^4+4x^2+16)=x^6-64$

0013 $a+b+c=3$에서
$a+b=3-c$, $b+c=3-a$, $c+a=3-b$
$\therefore(a+b)(b+c)(c+a)$
$=(3-c)(3-a)(3-b)$
$=27-9(a+b+c)+3(ab+bc+ca)-abc$
$=27-9\times3+3\times(-5)-(-4)$
$=-11$ 답 -11

유형 004 공통부분이 있는 다항식의 전개 본책 12쪽

(1) 공통부분이 있는 다항식의 곱셈은 다음과 같은 순서로 한다.
(i) 공통부분을 t로 치환한다.
(ii) (i)의 식을 곱셈 공식을 이용하여 전개한다.
(iii) (ii)의 식에 t 대신 공통부분을 대입한다.
(2) ( )( )( )( )의 꼴
➜ 공통부분이 생기도록 짝을 지어 전개한 후 곱셈 공식을 이용한다.

0014 $2x^2+x=t$로 놓으면
$(2x^2+x+3)(2x^2+x-1)$
$=(t+3)(t-1)=t^2+2t-3$
$=(2x^2+x)^2+2(2x^2+x)-3$
$=4x^4+4x^3+x^2+4x^2+2x-3$
$=4x^4+4x^3+5x^2+2x-3$
따라서 $a=4$, $b=4$, $c=2$이므로
$abc=32$ 답 32

0015 $(a+b-2)\{(a+b)^2+2a+2b+4\}$
$=(a+b-2)\{(a+b)^2+2(a+b)+4\}$
$a+b=t$로 놓으면
$(a+b-2)\{(a+b)^2+2(a+b)+4\}$
$=(t-2)(t^2+2t+4)$
$=t^3-8=(a+b)^3-8$
따라서 $(a+b)^3-8=12$이므로
$(a+b)^3=20$ 답 ②

0016 $(x-2)(x+1)(x+3)(x+6)$
$=\{(x-2)(x+6)\}\{(x+1)(x+3)\}$
$=(x^2+4x-12)(x^2+4x+3)$
$x^2+4x=t$로 놓으면
(주어진 식)$=(t-12)(t+3)=t^2-9t-36$
$=(x^2+4x)^2-9(x^2+4x)-36$
$=x^4+8x^3+16x^2-9x^2-36x-36$
$=x^4+8x^3+7x^2-36x-36$ 답 ④

0017 $(7+3k)^3=A$, $(7-3k)^3=B$로 놓으면
(주어진 식)$=(A+B)^2-(A-B)^2$
$=A^2+2AB+B^2-(A^2-2AB+B^2)$
$=4AB$
$=4(7+3k)^3(7-3k)^3$
$=4\{(7+3k)(7-3k)\}^3$
$=4(49-9k^2)^3$
$=4\times(49-9\times5)^3$ ($\because$ $k=\sqrt{5}$)
$=4\times64=256$ 답 256

유형 005 곱셈 공식의 변형 – 문자가 2개 → 본책 12쪽

① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$
② $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
③ $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

0018 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서
$12=4^2-2xy$ $\therefore$ $xy=2$
$\therefore$ $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=4^3-3\times2\times4=40$ 답 ⑤

0019 $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$에서
$20=5^3+3xy\times5$ $\therefore$ $xy=-7$
$\therefore$ $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$
$=5^2+2\times(-7)=11$
$\therefore$ $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$
$=11^2-2\times(-7)^2=23$ 답 23

0020 $a^2+ab+b^2=10$ …… ㉠
$a^2-ab+b^2=20$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면
$2a^2+2b^2=30$ $\therefore$ $a^2+b^2=15$
$a^2+b^2=15$를 ㉠에 대입하면
$15+ab=10$ $\therefore$ $ab=-5$ … ❶
$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$에서
$15=(a-b)^2+2\times(-5)$, $(a-b)^2=25$
$\therefore$ $a-b=5$ ($\because$ $a>b$) … ❷
$\therefore$ $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=5^3+3\times(-5)\times5=50$ … ❸
답 50

단계	채점 요소	비율
❶	a^2+b^2, ab의 값 구하기	30 %
❷	$a-b$의 값 구하기	40 %
❸	a^3-b^3의 값 구하기	30 %

0021 $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{x^3+y^3}{xy}$
$=\dfrac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}$ …… ㉠
이때 $x^2=16-6\sqrt{7}$, $y^2=16+6\sqrt{7}$에서
$x^2y^2=(16-6\sqrt{7})(16+6\sqrt{7})=4$
$\therefore$ $xy=2$ ($\because$ $x>0$, $y>0$)
또 $x^2+y^2=(16-6\sqrt{7})+(16+6\sqrt{7})=32$이므로
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서
$32=(x+y)^2-2\times2$, $(x+y)^2=36$
$\therefore$ $x+y=6$ ($\because$ $x>0$, $y>0$)
따라서 ㉠에서
$\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{6^3-3\times2\times6}{2}=90$ 답 ④

0022 $x^7+y^7=(x^3+y^3)(x^4+y^4)-x^3y^4-x^4y^3$
$=(x^3+y^3)(x^4+y^4)-x^3y^3(x+y)$ … ㉠
이때 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서
$3=2^2-2xy$ $\therefore$ $xy=\dfrac{1}{2}$
$\therefore$ $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=2^3-3\times\dfrac{1}{2}\times2=5$,
$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$
$=3^2-2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{17}{2}$
따라서 ㉠에서
$x^7+y^7=5\times\dfrac{17}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times2=\dfrac{169}{4}$ 답 ④

유형 006 곱셈 공식의 변형 – $x\pm\dfrac{1}{x}$의 꼴 → 본책 13쪽

① $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$
② $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$
③ $x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$
참고 $x^2-px+1=0$의 꼴의 조건식이 주어진 경우에는 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누어 $x+\dfrac{1}{x}=p$의 꼴로 변형한다.

0023 $x\neq0$이므로 $x^2-5x+1=0$의 양변을 x로 나누면
$x-5+\dfrac{1}{x}=0$ $\therefore$ $x+\dfrac{1}{x}=5$
$\therefore$ $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$
$=5^3-3\times5=110$ 답 110
참고 $x=0$을 $x^2-5x+1=0$의 좌변에 대입하면 $1\neq0$이므로 $x\neq0$이다.

0024 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$에서

$11=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2, \quad \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=9$

$\therefore x-\frac{1}{x}=3\ (\because x>1)$

$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=3^3+3\times3=36$

답 ②

0025 $x\neq0$이므로 $x^2+2x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x+2-\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x-\frac{1}{x}=-2$ … ❶

$\therefore 3x^3+4x^2-6+\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x^3}$

$=3\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)+4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-6$

$=3\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)\right\}+4\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\right\}-6$

$=3\times\{(-2)^3+3\times(-2)\}+4\times\{(-2)^2+2\}-6$

$=-24$ … ❷

답 -24

단계	채점 요소	비율
❶	$x-\frac{1}{x}$의 값 구하기	30 %
❷	$3x^3+4x^2-6+\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x^3}$의 값 구하기	70 %

0026 $a^6+3a^2-2a-12-\frac{2}{a}+\frac{3}{a^2}+\frac{1}{a^6}$

$=\left(a^6+\frac{1}{a^6}\right)+3\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)-2\left(a+\frac{1}{a}\right)-12$ …… ㉠

이때 $\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2=\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)^2+4=(2\sqrt{3})^2+4=16$이므로

$a^2+\frac{1}{a^2}=4\ (\because a^2>0)$

$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+\frac{1}{a^2}+2=4+2=6$이므로

$a+\frac{1}{a}=\sqrt{6}\ (\because a>0)$

또 $a^6+\frac{1}{a^6}=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^3-3\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)=4^3-3\times4=52$이므로

㉠에서

(주어진 식)$=52+3\times4-2\times\sqrt{6}-12$

$=52-2\sqrt{6}$

답 ①

유형 007 곱셈 공식의 변형 – 문자가 3개

본책 14쪽

① $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

② $a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

0027 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=3^2-2\times(-2)=13$

$\therefore a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=3\times\{13-(-2)\}+3\times5=60$

답 ③

0028 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$11=(-4)^2-2(ab+bc+ca) \quad \therefore ab+bc+ca=\frac{5}{2}$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{\frac{5}{2}}{-5}=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

0029 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$에서

$\frac{9}{2}=\frac{18}{abc} \quad \therefore abc=4$

$(a+b)(b+c)(c+a)$

$=(ab+ac+b^2+bc)(c+a)$

$=abc+a^2b+ac^2+a^2c+b^2c+ab^2+bc^2+abc$

$=a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc$

$=ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ca(a+b+c)-abc$

$=(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc$

이므로

$140=18(a+b+c)-4 \quad \therefore a+b+c=8$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=8^2-2\times18=28$

답 ⑤

다른 풀이 $a+b+c=t$ (t는 상수)라 하면

$(t-c)(t-a)(t-b)=140$

$t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ca)t-abc=140$

$t^3-t^3+18t-4=140, \quad 18t=144$

$\therefore t=8 \quad \therefore a+b+c=8$

유형 008 특수한 식의 변형

본책 14쪽

① $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

② $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

$=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

0030 $a-b=2$, $b-c=-5$를 변끼리 더하면

$a-c=-3 \quad \therefore c-a=3$

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)$

$+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$=\frac{1}{2}\times\{2^2+(-5)^2+3^2\}=19$

답 ④

0031 $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2+2ab+b^2)+(b^2+2bc+c^2)+(c^2+2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

$=\frac{1}{2}\times\{6^2+(2\sqrt{2}-2)^2+(2\sqrt{2}+2)^2\}=30$ 답 ⑤

0032 $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$에서

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

이때 $x+y+z\neq0$이므로

$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx=0$

$(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)=0$

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$

$\therefore x=y=z$ … ❶

$\therefore \frac{(x+2y)^3+(y+2z)^3+(z+2x)^3}{(x+2y)(y+2z)(z+2x)}$

$=\frac{(3x)^3+(3x)^3+(3x)^3}{3x\times3x\times3x}$

$=\frac{81x^3}{27x^3}=3$ … ❷

답 3

단계	채점 요소	비율
❶	$x=y=z$임을 알기	60 %
❷	$\frac{(x+2y)^3+(y+2z)^3+(z+2x)^3}{(x+2y)(y+2z)(z+2x)}$의 값 구하기	40 %

참고 x, y, z는 실수이므로

$(x-y)^2\geq0$, $(y-z)^2\geq0$, $(z-x)^2\geq0$

따라서 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$에서

$x-y=0$, $y-z=0$, $z-x=0$ $\therefore x=y=z$

유형 009 곱셈 공식을 이용한 수의 계산 본책 15쪽

곱셈 공식을 이용할 수 있도록 식을 변형하거나 하나의 수를 두 수의 합 또는 차로 나타낸다. 이때 반복되는 수는 같은 문자로 생각한다.

0033 $(5+1)(5^2+1)(5^4+1)(5^8+1)$

$=\frac{(5-1)(5+1)(5^2+1)(5^4+1)(5^8+1)}{4}$

$=\frac{(5^2-1)(5^2+1)(5^4+1)(5^8+1)}{4}$

$=\frac{(5^4-1)(5^4+1)(5^8+1)}{4}$

$=\frac{(5^8-1)(5^8+1)}{4}$

$=\frac{5^{16}-1}{4}$

따라서 $a=16$, $b=4$이므로

$a+b=20$ 답 20

0034 $(3^2-1)(3^4+3^2+1)(3^{12}+3^6+1)$

$=\{(3^2)^3-1^3\}(3^{12}+3^6+1)$

$=(3^6-1)(3^{12}+3^6+1)$

$=(3^6)^3-1^3$

$=3^{18}-1$ 답 ①

0035 $30^2=(25+5)^2=25^2+2\times25\times5+5^2$

$=25^2+5^2+250$

이므로 $p=250$ … ❶

$30^2=(18+6+6)^2$

$=18^2+6^2+6^2+2\times18\times6+2\times6\times6+2\times6\times18$

$=18^2+6^2+6^2+504$

이므로 $q=504$ … ❷

$\therefore q-2p=504-2\times250=4$ … ❸

답 4

단계	채점 요소	비율
❶	p의 값 구하기	40 %
❷	q의 값 구하기	40 %
❸	$q-2p$의 값 구하기	20 %

0036 $a=100$이라 하면

$102^3-98^3=(a+2)^3-(a-2)^3$

$=a^3+6a^2+12a+8-(a^3-6a^2+12a-8)$

$=12a^2+16=12\times100^2+16$

$=120016$

따라서 102^3-98^3의 모든 자리의 숫자의 합은

$1+2+0+0+1+6=10$ 답 ④

유형 010 곱셈 공식의 도형에의 활용 본책 15쪽

주어진 도형의 선분의 길이를 문자로 놓고 길이, 넓이, 부피 등을 이 문자로 나타낸 후 곱셈 공식을 이용한다.

0037 $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$의 길이를 각각 x, y, z라 하면 직육면체의 겉넓이가 130이므로

$2(xy+yz+zx)=130$

$\therefore xy+yz+zx=65$

직육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 52이므로

$4(x+y+z)=52$

$\therefore x+y+z=13$

따라서

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$=13^2-2\times65=39$

이므로

$\overline{AC}^2+\overline{CF}^2+\overline{FA}^2=(x^2+y^2)+(y^2+z^2)+(x^2+z^2)$

$=2(x^2+y^2+z^2)$

$=2\times39=78$ 답 78

0038 $(a+b+c)^2-3ab-3bc-3ca=0$에서

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca-3ab-3bc-3ca=0$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$

$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)=0$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\therefore a=b=c$

따라서 주어진 삼각형은 정삼각형이다. 답 정삼각형

0039 두 점 M, N은 각각 직각삼각형 ABH, HBC의 외심이므로

$\overline{MA}=\overline{MB}=\overline{MH}$, $\overline{NB}=\overline{NC}=\overline{NH}$

따라서 $\overline{MH}$, $\overline{NH}$의 길이를 각각 x, y라 하면

$\overline{AB}=2\overline{MH}=2x$, $\overline{BC}=2\overline{NH}=2y$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 10이므로

$\frac{1}{2}\times 2x\times 2y=10$ $\therefore xy=5$

$\overline{AC}=2\sqrt{14}$이므로

$\sqrt{(2x)^2+(2y)^2}=2\sqrt{14}$, $4x^2+4y^2=56$

$\therefore x^2+y^2=14$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서

$14=(x+y)^2-2\times 5$, $(x+y)^2=24$

$\therefore x+y=2\sqrt{6}$ ($\because x>0$, $y>0$)

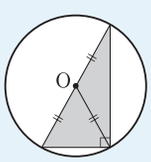
$\therefore \overline{MH}^3+\overline{NH}^3=x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=(2\sqrt{6})^3-3\times 5\times 2\sqrt{6}=18\sqrt{6}$

답 ③

만점 공략 노트

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형의 외심은 빗변의 중점이고 외심에서 직각삼각형의 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.



0040 직각삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=\sqrt{10}$이므로

$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{10}$ $\therefore x^2+y^2=10$

한편 $\triangle ABC\backsim\triangle APS$이므로

$\overline{AB}:\overline{AP}=\overline{BC}:\overline{PS}$

$x:\overline{AP}=\sqrt{10}:\frac{2}{7}\sqrt{10}$

$\sqrt{10}\,\overline{AP}=\frac{2}{7}\sqrt{10}x$ $\therefore \overline{AP}=\frac{2}{7}x$

$\therefore \overline{BP}=\overline{AB}-\overline{AP}=x-\frac{2}{7}x=\frac{5}{7}x$

또 $\triangle ABC\backsim\triangle QBP$이므로

$\overline{AC}:\overline{QP}=\overline{BC}:\overline{BP}$

$y:\frac{2}{7}\sqrt{10}=\sqrt{10}:\frac{5}{7}x$

$\frac{5}{7}xy=\frac{20}{7}$ $\therefore xy=4$

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$에서

$10=(x-y)^2+2\times 4$, $(x-y)^2=2$

$\therefore x-y=\sqrt{2}$ ($\because x>y$)

$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=(\sqrt{2})^3+3\times 4\times\sqrt{2}=14\sqrt{2}$

답 ③

유형 011 다항식의 나눗셈 — 몫과 나머지 본책 16쪽

다항식의 나눗셈은 각 다항식을 내림차순으로 정리한 다음 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다. 이때 나머지는 상수이거나 나머지의 차수는 나누는 식의 차수보다 낮다.

0041

$$\begin{array}{r} 5x\ -3 \\ x^2-2\ \overline{)\ 5x^3-3x^2\ \ \ -2} \\ \underline{5x^3\ \ \ -10x} \\ -3x^2+10x-2 \\ \underline{-3x^2\ \ \ +6} \\ 10x-8 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=5x-3$, $R(x)=10x-8$이고

$5x-3=\frac{1}{2}(10x-8)+1$

이므로 구하는 나머지는 1이다. 답 1

0042

$$\begin{array}{r} 2x\ -5 \\ x^2+3x-1\ \overline{)\ 2x^3+\ x^2-\ 3x+6} \\ \underline{2x^3+6x^2-\ 2x} \\ -5x^2-\ \ x+6 \\ \underline{-5x^2-15x+5} \\ 14x+1 \end{array}$$

… ❶

따라서 몫은 $2x-5$, 나머지는 $14x+1$이므로

$a=2$, $b=-5$, $c=14$, $d=1$ … ❷

$\therefore ab+cd=2\times(-5)+14\times 1=4$ … ❸

답 4

단계	채점 요소	비율
❶	$2x^3+x^2-3x+6$을 x^2+3x-1로 나누기	50 %
❷	a, b, c, d의 값 구하기	30 %
❸	$ab+cd$의 값 구하기	20 %

0043

$$\begin{array}{r} x\ -5 \\ x^2+x+b\ \overline{)\ x^3-4x^2+\ \ \ ax\ \ \ -\ 1} \\ \underline{x^3+\ x^2+\ \ \ bx} \\ -5x^2+(a-b)x\ \ -\ 1 \\ \underline{-5x^2-\ \ \ 5x\ \ \ -5b} \\ (a-b+5)x+5b-1 \end{array}$$

이때 나머지가 0이어야 하므로

$a-b+5=0$, $5b-1=0$ $\therefore a=-\frac{24}{5}$, $b=\frac{1}{5}$

$\therefore \frac{a}{b}=-24$

답 ①

유형 012 다항식의 나눗셈 – $A=BQ+R$ 본책 16쪽

다항식 A를 다항식 $B(B\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$A=BQ+R$

0044 $P(x)=(x+3)(x^2-2x+1)-6=x^3+x^2-5x-3$

$$\begin{array}{r} x\ +1 \\ x^2+1\ \overline{)\ x^3+x^2-5x-3} \\ \underline{x^3\quad +\ x} \\ x^2-6x-3 \\ \underline{x^2\quad\ +1} \\ -6x-4 \end{array}$$

따라서 $P(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 $-6x-4$이다. 답 ①

0045 $6x^3-2x^2-3x+4=A(x)(2x^2-1)+3$이므로

$A(x)(2x^2-1)=6x^3-2x^2-3x+1$

$\therefore A(x)=(6x^3-2x^2-3x+1)\div(2x^2-1)$

$$\begin{array}{r} 3x\ -1 \\ 2x^2-1\ \overline{)\ 6x^3-2x^2-3x+1} \\ \underline{6x^3\quad -3x} \\ -2x^2\quad +1 \\ \underline{-2x^2\quad +1} \\ 0 \end{array}$$

따라서 $A(x)=3x-1$이므로

$A(-2)=-7$ 답 -7

0046 $P(x)=(x-2)Q(x)+3$

이때 $Q(x)$를 x^2+2x+4로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$Q(x)=(x^2+2x+4)Q_1(x)+x+2$

$\therefore P(x)$

$=(x-2)\{(x^2+2x+4)Q_1(x)+x+2\}+3$

$=(x-2)(x^2+2x+4)Q_1(x)+(x-2)(x+2)+3$

$=(x^3-8)Q_1(x)+x^2-1$

따라서 구하는 나머지는 x^2-1이다. 답 ②

0047

$$\begin{array}{r} 3x^2-\ x\ +2 \\ x^2+x-1\ \overline{)\ 3x^4+2x^3-2x^2+3x+2} \\ \underline{3x^4+3x^3-3x^2} \\ -\ x^3+\ x^2+3x+2 \\ \underline{-\ x^3-\ x^2+\ x} \\ 2x^2+2x+2 \\ \underline{2x^2+2x-2} \\ 4 \end{array}$$

$\therefore 3x^4+2x^3-2x^2+3x+2$

$=(x^2+x-1)(3x^2-x+2)+4$

이때 $x^2+x-1=0$이므로 구하는 식의 값은 4이다. 답 4

0048 세 다항식 $2x^3+3x^2+x+1$, $3x^3+8x^2+3x$, $5x^3+12x^2+3x-1$을 $P(x)$로 나눈 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $Q_3(x)$라 하면

$2x^3+3x^2+x+1=P(x)Q_1(x)+R(x)$ …… ㉠

$3x^3+8x^2+3x=P(x)Q_2(x)+2R(x)$ …… ㉡

$5x^3+12x^2+3x-1=P(x)Q_3(x)+3R(x)$ …… ㉢

㉢−㉠−㉡을 하면

$x^2-x-2=P(x)\{Q_3(x)-Q_1(x)-Q_2(x)\}$

이때 $P(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차다항식이므로

$P(x)=x^2-x-2$

$\therefore P(3)=4$ 답 ④

유형 013 몫과 나머지의 변형 본책 17쪽

다항식 $P(x)$를 $x+\frac{b}{a}$ $(a\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$\begin{aligned} P(x)&=\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R \\ &=\frac{1}{a}(ax+b)Q(x)+R \\ &=(ax+b)\times\frac{1}{a}Q(x)+R \end{aligned}$$

➜ $P(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{a}Q(x)$, 나머지는 R이다.

0049 $P(x)$를 $x-\frac{3}{4}$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$$\begin{aligned} P(x)&=\left(x-\frac{3}{4}\right)Q(x)+R \\ &=\frac{1}{4}(4x-3)Q(x)+R \\ &=(4x-3)\times\frac{1}{4}Q(x)+R \end{aligned}$$

따라서 $P(x)$를 $4x-3$으로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{4}Q(x)$, 나머지는 R이다. 답 ①

0050 $P(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$$\begin{aligned} P(x)&=(ax+b)Q(x)+R \\ &=a\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R \\ &=\left(x+\frac{b}{a}\right)\times aQ(x)+R \end{aligned}$$

따라서 $P(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫은 $aQ(x)$, 나머지는 R이다. 답 몫: $aQ(x)$, 나머지: R

0051 $P(x)$를 $3x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$P(x)=(3x+1)Q(x)+R$ … ❶

이 식의 양변에 x를 곱하면

$$xP(x)=x(3x+1)Q(x)+Rx$$
$$=3x\left(x+\frac{1}{3}\right)Q(x)+R\left(x+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}R$$
$$=\left(x+\frac{1}{3}\right)\{3xQ(x)+R\}-\frac{1}{3}R$$

따라서 $xP(x)$를 $x+\frac{1}{3}$로 나누었을 때의 몫은 $3xQ(x)+R$, 나머지는 $-\frac{1}{3}R$이다. … ❷

답 몫: $3xQ(x)+R$, 나머지: $-\frac{1}{3}R$

단계	채점 요소	비율
❶	$P(x)$를 $3x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 식 세우기	30 %
❷	$xP(x)$를 $x+\frac{1}{3}$로 나누었을 때의 몫과 나머지 구하기	70 %

0052 $P(x)$를 x^2+4로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$P(x)=(x^2+4)Q(x)+x+2$$
$$\therefore \{P(x)\}^2$$
$$=\{(x^2+4)Q(x)+x+2\}^2$$
$$=\{(x^2+4)Q(x)\}^2+2(x^2+4)(x+2)Q(x)+(x+2)^2$$
$$=(x^2+4)^2\{Q(x)\}^2+2(x^2+4)(x+2)Q(x)$$
$$+x^2+4x+4$$
$$=(x^2+4)[(x^2+4)\{Q(x)\}^2+2(x+2)Q(x)+1]+4x$$

따라서 $R(x)=4x$이므로

$$R(2)=8$$

답 8

유형 014 다항식의 연산의 도형에의 활용 → 본책 18쪽

주어진 조건을 이용하여 식을 세운 후 다항식의 사칙연산을 이용한다.

0053 직육면체의 높이를 A라 하면

$$(x+3)(x-1)A=x^3+7x^2+7x-15$$
$$(x^2+2x-3)A=x^3+7x^2+7x-15$$
$$\therefore A=(x^3+7x^2+7x-15)\div(x^2+2x-3)$$

$$\begin{array}{r} x+5 \\ x^2+2x-3\overline{)\,x^3+7x^2+7x-15} \\ x^3+2x^2-3x \\ \hline 5x^2+10x-15 \\ 5x^2+10x-15 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\therefore A=x+5$$

따라서 직육면체의 높이는 $x+5$이다.

답 $x+5$

다른 풀이 $x^3+7x^2+7x-15$에서 x^3의 계수가 1이므로 구하는 높이를 $x+k$(k는 상수)라 하면

$$(x+3)(x-1)(x+k)=x^3+7x^2+7x-15$$

이때 좌변의 전개식의 상수항이 $-3k$이므로

$$-3k=-15 \quad \therefore k=5$$

따라서 직육면체의 높이는 $x+5$이다.

0054 직사각형 ABCD의 둘레의 길이가 $16x+2$이므로

$$2(3x+2)+2\overline{AD}=16x+2$$
$$\therefore \overline{AD}=5x-1 \quad \cdots ❶$$

이때 $\overline{PQ}$의 길이를 A라 하면 색칠한 부분의 넓이가 $-3x^3+16x^2+3x-6$이고 $\triangle DQP\equiv\triangle DCP$이므로

$$(3x+2)(5x-1)-2\times\left\{\frac{1}{2}\times(3x+2)\times A\right\}$$
$$=-3x^3+16x^2+3x-6 \quad \cdots ❷$$
$$(3x+2)A=3x^3-x^2+4x+4$$
$$\therefore A=(3x^3-x^2+4x+4)\div(3x+2)$$

$$\begin{array}{r} x^2-x+2 \\ 3x+2\overline{)\,3x^3-x^2+4x+4} \\ 3x^3+2x^2 \\ \hline -3x^2+4x+4 \\ -3x^2-2x \\ \hline 6x+4 \\ 6x+4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\therefore A=x^2-x+2$$

따라서 $\overline{PQ}$의 길이는 x^2-x+2이다. … ❸

답 x^2-x+2

단계	채점 요소	비율
❶	$\overline{AD}$의 길이 구하기	30 %
❷	색칠한 부분의 넓이에 대한 식 세우기	30 %
❸	$\overline{PQ}$의 길이 구하기	40 %

0055 $\overline{CH}=1$이고 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{4}{3}$이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times1=\frac{4}{3} \quad \therefore \overline{AB}=\frac{8}{3}$$
$$\therefore \overline{AH}=\overline{AB}-\overline{BH}=\frac{8}{3}-x$$

이때 $\triangle AHC\backsim\triangle CHB$이므로

$$\overline{AH}:\overline{CH}=\overline{CH}:\overline{BH}$$
$$\left(\frac{8}{3}-x\right):1=1:x, \quad \left(\frac{8}{3}-x\right)x=1$$
$$\therefore 3x^2-8x+3=0$$

$0<x<1$이므로 $x=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$

한편 $3x^3-5x^2+4x+7$을 $3x^2-8x+3$으로 나누면

$$\begin{array}{r} x+1 \\ 3x^2-8x+3\overline{)\,3x^3-5x^2+4x+7} \\ 3x^3-8x^2+3x \\ \hline 3x^2+x+7 \\ 3x^2-8x+3 \\ \hline 9x+4 \end{array}$$

$$\therefore 3x^3-5x^2+4x+7$$
$$=(3x^2-8x+3)(x+1)+9x+4$$
$$=0\times(x+1)+9\times\frac{4-\sqrt{7}}{3}+4$$
$$=16-3\sqrt{7}$$

답 ④

유형 015 다항식의 연산의 실생활에의 활용 → 본책 18쪽

주어진 관계식에 조건으로 제시된 값들을 대입하여 식을 세운 후 다항식의 사칙연산을 이용한다.

0056 두 축전기 A, B의 전기용량을 각각 C_A, C_B라 하고, 전압을 각각 V_A, V_B라 하면

$$C_A=\frac{1}{2}C_B,\ V_A=\frac{4}{3}V_B$$

$$\therefore \frac{U_A}{U_B}=\frac{\frac{1}{2}C_A{V_A}^2}{\frac{1}{2}C_B{V_B}^2}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}C_B\times\left(\frac{4}{3}V_B\right)^2}{\frac{1}{2}C_B{V_B}^2}=\frac{8}{9}$$

답 $\frac{8}{9}$

0057 두 물체 A, B의 질량을 각각 m_A, m_B라 하고, 속력을 각각 v_A, v_B라 하면

$$m_A=5m_B,\ v_A=\frac{2}{5}v_B$$

이때 두 물체 A, B의 구심력의 크기가 같으므로

$$m_A\frac{{v_A}^2}{r_A}=m_B\frac{{v_B}^2}{r_B},\quad 5m_B\frac{\left(\frac{2}{5}v_B\right)^2}{r_A}=m_B\frac{{v_B}^2}{r_B}$$

$$\therefore \frac{r_A}{r_B}=\frac{4}{5}$$

답 $\frac{4}{5}$

0058 두 강철 용기 A, B에 담긴 이상 기체의 몰수를 각각 n_A, n_B라 하고, 압력을 각각 P_A, P_B라 하면

$$n_A=\frac{1}{4}n_B,\ P_A=\frac{3}{2}P_B$$

두 강철 용기 A, B에 담긴 이상 기체의 절대 온도가 T로 같다고 하면

$$\frac{V_A}{V_B}=\frac{R\left(\frac{n_AT}{P_A}\right)}{R\left(\frac{n_BT}{P_B}\right)}=\frac{R\left(\frac{\frac{1}{4}n_BT}{\frac{3}{2}P_B}\right)}{R\left(\frac{n_BT}{P_B}\right)}=\frac{1}{6}$$

답 ①

유형 016 조립제법 → 본책 19쪽

다항식을 일차식으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구할 때에는 조립제법을 이용하면 편리하다.
조립제법에서 항의 계수를 나열할 때에는 계수가 0인 것도 반드시 적어야 한다.

0059 다항식 $6x^3+4x^2-11x+5$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

-2	6	4	-11	5
		-12	16	-10
	6	-8	5	-5

따라서 $a=-2$, $b=-8$, $c=16$, $R=-5$이므로

$$a+b+c+R=1$$

답 ④

0060 주어진 조립제법에서

$k-3=0$이므로 $k=3$

$a+3=-1$이므로 $a=-4$

$-1\times3=c$이므로 $c=-3$

$2\times3=d$이므로 $d=6$

$b+6=-3$이므로 $b=-9$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

다른 풀이 다항식 x^3+ax^2+5x+b를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

3	1	a	5	b
		3	$3a+9$	$9a+42$
	1	$a+3$	$3a+14$	$9a+b+42$

따라서 $k=3$, $a+3=-1$, $3a+9=c$, $9a+42=d$, $9a+b+42=-3$이므로

$$a=-4,\ b=-9,\ c=-3,\ d=6,\ k=3$$

0061 주어진 조립제법에서 $3\times\frac{1}{3}+a=0$이므로

$$a=-1$$

이때 조립제법에서 □ 안에 알맞은 수를 구하면 다음과 같다.

$\frac{1}{3}$	-3	7	-11	9
		$\boxed{-1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{-3}$
	-3	6	-9	6

$\therefore b=6,\ c=-9$

$-3x^3+7x^2-11x+9$를 $x-\frac{1}{3}$로 나누었을 때의 몫은 $-3x^2+6x-9$, 나머지는 6이므로

$$-3x^3+7x^2-11x+9=\left(x-\frac{1}{3}\right)(-3x^2+6x-9)+6$$
$$=\left(x-\frac{1}{3}\right)\times3(-x^2+2x-3)+6$$
$$=(3x-1)(-x^2+2x-3)+6$$

따라서 $d=2$, $e=-3$이므로

$$abc+de=-1\times6\times(-9)+2\times(-3)=48$$

답 48

1등급 유형 도전하기 → 본책 20~21쪽

0062 Step 1 $xy+yz+zx$, xyz의 값을 구한다.

$$x^5+y^5+z^5$$
$$=(x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3)$$
$$-\{x^2y^2(x+y)+y^2z^2(y+z)+z^2x^2(z+x)\}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

이때 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$이므로

$$15=5^2-2(xy+yz+zx)$$
$$\therefore xy+yz+zx=\boxed{(가)\ 5}$$

$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$이므로

$$47=5\times(15-5)+3xyz\qquad\therefore xyz=\boxed{(나)\ -1}$$

Step 2 $x^2y^2(x+y)+y^2z^2(y+z)+z^2x^2(z+x)$의 값을 구한다.

$(xy+yz+zx)^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(xy^2z+xyz^2+x^2yz)$

$=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$

이므로

$5^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2\times(-1)\times5$

$\therefore x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=35$

$\therefore x^2y^2(x+y)+y^2z^2(y+z)+z^2x^2(z+x)$

$=(x+y+z)(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)-xyz(xy+yz+zx)$

$=5\times35-(-1)\times5=$ (다) 180

Step 3 $x^5+y^5+z^5$의 값을 구한다.

㉠에서

$x^5+y^5+z^5=15\times47-180=$ (라) 525

Step 4 $ac+bd$의 값을 구한다.

$a=5$, $b=-1$, $c=180$, $d=525$이므로

$ac+bd=5\times180+(-1)\times525=375$ 답 375

논리 Check

$x+y+z=6$, $x^2+y^2+z^2=20$, $x^3+y^3+z^3=75$일 때, $x^5+y^5+z^5$의 값을 구하시오.

풀이 $x^5+y^5+z^5$

$=(x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3)$

$-\{x^2y^2(x+y)+y^2z^2(y+z)+z^2x^2(z+x)\}$ …… ㉠

이때 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$이므로

$20=6^2-2(xy+yz+zx)$

$\therefore xy+yz+zx=8$

$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

이므로

$75=6\times(20-8)+3xyz$

$\therefore xyz=1$

한편

$(xy+yz+zx)^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(xy^2z+xyz^2+x^2yz)$

$=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$

이므로

$8^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2\times1\times6$

$\therefore x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=52$

$\therefore x^2y^2(x+y)+y^2z^2(y+z)+z^2x^2(z+x)$

$=(x+y+z)(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)-xyz(xy+yz+zx)$

$=6\times52-1\times8=304$

따라서 ㉠에서

$x^5+y^5+z^5=20\times75-304=1196$ 답 1196

0063 Step 1 $A\triangle B$를 구한다.

$AB=(x^3+x^2+x)(x^2-x+1)$

$=x(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$=x(x^4+x^2+1)=x^5+x^3+x$

이므로 AB의 전개식에서 모든 항의 차수는 홀수이다.

$\therefore A\triangle B=x^5+x^3+x$

Step 2 $(A\triangle B)\triangle B$, $((A\triangle B)\triangle B)\triangle B$를 구한다.

$(A\triangle B)\triangle B$는 $(x^5+x^3+x)(x^2-x+1)$의 전개식에서 차수가 홀수인 모든 항의 합이다. 이때

$(x^5+x^3+x)(x^2-x+1)$

$=(x^5+x^3+x)\{(x^2+1)-x\}$

$=(x^5+x^3+x)(x^2+1)-(x^5+x^3+x)x$

이고 x^5+x^3+x의 모든 항의 차수는 홀수이므로

$(x^5+x^3+x)(x^2+1)$의 전개식에서 모든 항의 차수는 홀수,

$(x^5+x^3+x)x$의 전개식에서 모든 항의 차수는 짝수이다.

$\therefore (A\triangle B)\triangle B=(x^5+x^3+x)(x^2+1)$

따라서 $((A\triangle B)\triangle B)\triangle B$는

$(x^5+x^3+x)(x^2+1)(x^2-x+1)$의 전개식에서 차수가 홀수인 모든 항의 합이다. 이때

$(x^5+x^3+x)(x^2+1)(x^2-x+1)$

$=(x^5+x^3+x)(x^2+1)\{(x^2+1)-x\}$

$=(x^5+x^3+x)(x^2+1)^2-(x^5+x^3+x)(x^2+1)x$

이고 $(x^5+x^3+x)(x^2+1)$의 전개식에서 모든 항의 차수는 홀수이므로 $(x^5+x^3+x)(x^2+1)^2$의 전개식에서 모든 항의 차수는 홀수, $(x^5+x^3+x)(x^2+1)x$의 전개식에서 모든 항의 차수는 짝수이다.

$\therefore ((A\triangle B)\triangle B)\triangle B=(x^5+x^3+x)(x^2+1)^2$

Step 3 $C(1)$의 값을 구한다.

같은 방법으로 하면

$C(x)=((((A\triangle B)\triangle B)\triangle B)\triangle B)\triangle B$

$=(x^5+x^3+x)(x^2+1)^4$

$\therefore C(1)=3\times2^4=48$ 답 48

0064 Step 1 조건 (가)를 이용하여 식을 세운 후 전개한다.

조건 (가)에 의하여 $x-5$, $2y-5$, $3z-5$ 중 적어도 하나는 0이므로

$(x-5)(2y-5)(3z-5)=0$

$(-5+x)(-5+2y)(-5+3z)=0$

$\therefore -125+25(x+2y+3z)-5(2xy+6yz+3zx)+6xyz$

$=0$ …… ㉠

Step 2 조건 (나)를 이용하여 $12xyz$의 값을 구한다.

조건 (나)에서 $5(x+2y+3z)=2xy+6yz+3zx$이므로 ㉠에서

$-125+25(x+2y+3z)-5\times5(x+2y+3z)+6xyz=0$

$-125+6xyz=0$ $\therefore xyz=\frac{125}{6}$

$\therefore 12xyz=250$ 답 250

0065 Step 1 a, b를 각각 p, q에 대한 식으로 나타낸다.

$p\neq0$이므로 $ap^5+bp^4=1$의 양변을 p^4으로 나누면

$ap+b=\frac{1}{p^4}$ …… ㉠

또 $q\neq0$이므로 $aq^5+bq^4=1$의 양변을 q^4으로 나누면

$aq+b=\frac{1}{q^4}$ …… ㉡

이때 $pq=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$이므로

$$\frac{1}{p}=q,\ \frac{1}{q}=p$$

따라서 ㉠, ㉡에서

$$ap+b=q^4 \quad \cdots\cdots ㉢$$

$$aq+b=p^4 \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉢−㉣을 하면

$$ap-aq=q^4-p^4$$

$$\therefore a(p-q)=-(p^4-q^4)$$

$p\neq q$, 즉 $p-q\neq 0$이므로

$$a=-\frac{p^4-q^4}{p-q}=-\frac{(p^2+q^2)(p+q)(p-q)}{p-q}$$

$$=-(p^2+q^2)(p+q) \quad \cdots\cdots ㉤$$

㉢+㉣을 하면

$$ap+aq+2b=p^4+q^4$$

$$\therefore b=\frac{1}{2}\{p^4+q^4-a(p+q)\} \quad \cdots\cdots ㉥$$

Step 2 p^2+q^2, p^4+q^4의 값을 구한다.

$p+q=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$이므로

$$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=4^2-2\times 1=14$$

$$\therefore p^4+q^4=(p^2+q^2)^2-2p^2q^2$$

$$=14^2-2\times 1^2=194$$

Step 3 $a+b$의 값을 구한다.

㉤에서

$$a=-14\times 4=-56$$

㉥에서

$$b=\frac{1}{2}\times\{194-(-56)\times 4\}=209$$

$$\therefore a+b=153$$

답 153

0066 Step 1 $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$, $\overline{AE}=c$라 하고 $l_1-l_2=32$임을 이용하여 $a+b+c$의 값을 구한다.

$\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$, $\overline{AE}=c$라 하면

$$l_1-l_2=(\overline{DC}+\overline{HG}+\overline{EF}+\overline{AD}+\overline{EH}+\overline{FG}+\overline{AE}+\overline{DH}+\overline{CG}+\overline{AC}+\overline{CF}+\overline{FA})-(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{BF}+\overline{AC}+\overline{CF}+\overline{FA})$$

$$=(3a+3b+3c+\overline{AC}+\overline{CF}+\overline{FA})-(a+b+c+\overline{AC}+\overline{CF}+\overline{FA})$$

$$=2a+2b+2c$$

이므로 $2a+2b+2c=32$

$$\therefore a+b+c=16$$

Step 2 $S_1-S_2=80$임을 이용하여 $ab+bc+ca$의 값을 구한다.

$$S_1-S_2=(\triangle ACD+\triangle CFG+\triangle AEF+\triangle AFC+\square EFGH+\square AEHD+\square DHGC)-(\triangle ABC+\triangle BFC+\triangle AFB+\triangle AFC)$$

$$=\left(\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}ca+\triangle AFC+ab+bc+ca\right)-\left(\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}ca+\triangle AFC\right)$$

$$=ab+bc+ca$$

이므로 $ab+bc+ca=80$

Step 3 $\overline{AC}^2+\overline{CF}^2+\overline{FA}^2$의 값을 구한다.

$$\overline{AC}^2+\overline{CF}^2+\overline{FA}^2=(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)$$

$$=2(a^2+b^2+c^2)$$

$$=2\{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\}$$

$$=2\times(16^2-2\times 80)=192$$

답 192

0067 Step 1 세 원 C_1, C_2, C_3의 반지름의 길이를 각각 a, b, c라 하고 $ab-bc+ca$, $a-b-c$의 값을 구한다.

세 원 C_1, C_2, C_3의 반지름의 길이를 각각 a, b, c라 하면

$$\overline{AO_1}=\overline{BO_1}=a,\ \overline{O_1O_2}=a-b,\ \overline{O_1O_3}=a-c$$

이때 사각형 AO_2O_3B의 넓이가 35이므로

$$\triangle AO_1B-\triangle O_2O_1O_3=35$$

$$\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}(a-b)(a-c)=35$$

$$\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}(a^2-ac-ab+bc)=35$$

$$\therefore ab-bc+ca=70$$

또 $\overline{O_1C}+\overline{O_1D}=8$이므로

$$(a-2b)+(a-2c)=8$$

$$\therefore a-b-c=4$$

Step 2 세 원 C_1, C_2, C_3의 넓이의 합을 구한다.

$(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2(ab-bc+ca)$이므로

$$4^2=a^2+b^2+c^2-2\times 70$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2=156$$

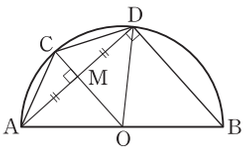
따라서 세 원 C_1, C_2, C_3의 넓이의 합은

$$(a^2+b^2+c^2)\pi=156\pi$$

답 156π

0068 Step 1 선분 AB의 중점을 O, 선분 AD와 선분 OC가 만나는 점을 M이라 하고 $\overline{MO}$, $\overline{CM}$의 길이를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 선분 AB의 중점을 O, 선분 AD와 선분 OC가 만나는 점을 M이라 하자.



$\triangle AOC\equiv\triangle DOC$이므로

$$\angle ACO=\angle DCO$$

즉 $\overline{CM}$이 $\angle ACD$의 이등분선이고 $\triangle CAD$가 $\overline{AC}=\overline{CD}$인 이등변삼각형이므로

$$\overline{AM}=\overline{DM},\ \angle AMC=90^\circ$$

한편 $\angle ADB=90^\circ$이고 $\triangle MAO\backsim\triangle DAB$이므로

$$\overline{AO}:\overline{AB}=\overline{MO}:\overline{DB}$$

$$a:2a=\overline{MO}:6 \quad \therefore \overline{MO}=3$$

$$\therefore \overline{CM}=\overline{CO}-\overline{MO}=a-3$$

Step 2 직각삼각형에서 피타고라스 정리를 이용하여 $a-\frac{4}{a}$의 값을 구한다.

직각삼각형 CAM에서

$$\overline{AM}^2=\overline{AC}^2-\overline{CM}^2$$

이고 직각삼각형 MAO에서

$$\overline{AM}^2=\overline{AO}^2-\overline{MO}^2$$

이므로 $\overline{AC}^2-\overline{CM}^2=\overline{AO}^2-\overline{MO}^2$

$(a-2)^2-(a-3)^2=a^2-3^2$

$2a-5=a^2-9$ $\therefore a^2-2a-4=0$

$a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면

$a-2-\frac{4}{a}=0$

$\therefore a-\frac{4}{a}=2$

Step 3 $a^3-\frac{64}{a^3}$의 값을 구한다.

$a^3-\frac{64}{a^3}=\left(a-\frac{4}{a}\right)^3+3\times4\times\left(a-\frac{4}{a}\right)$

$=2^3+3\times4\times2=32$ 답 32

0069 Step 1 나눗셈에 대한 등식을 이용하여 $C(x)$로 나누어떨어지는 다항식을 구한다.

$3A(x)+2B(x)$를 $C(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$3A(x)+2B(x)=C(x)Q_1(x)+9x^2$ …… ㉠

$4A(x)+2B(x)$를 $C(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$4A(x)+2B(x)=C(x)Q_2(x)+4x^2$ …… ㉡

㉠$\times4-$㉡$\times9$를 하면

$-24A(x)-10B(x)=C(x)\{4Q_1(x)-9Q_2(x)\}$

따라서 $-24A(x)-10B(x)$는 $C(x)$로 나누어떨어진다.

Step 2 $m+n$의 최솟값과 최댓값의 합을 구한다.

$mA(x)+nB(x)$가 $C(x)$로 나누어떨어지려면

$k\{-24A(x)-10B(x)\}$ (k는 실수)의 꼴이어야 하므로

$m=-24k$, $n=-10k$

이때 m, n은 50 이하의 자연수이므로

$k=-\frac{1}{2}$이면 $m=12$, $n=5$

$k=-1$이면 $m=24$, $n=10$

$k=-\frac{3}{2}$이면 $m=36$, $n=15$

$k=-2$이면 $m=48$, $n=20$

따라서 $m+n$의 최솟값과 최댓값은 각각

$12+5=17$, $48+20=68$

이므로 구하는 합은

$17+68=85$ 답 85

시험 만점 완성하기

본책 22~25쪽

0070 전략 주어진 세 식을 변끼리 더하여 $2(A+B+C)$를 구한다.

$A+B=2x^2-6xy+7y^2$ …… ㉠

$B+C=3x^2+xy+y^2$ …… ㉡

$C+A=-x^2+3xy+4y^2$ …… ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$2(A+B+C)=4x^2-2xy+12y^2$

$\therefore A+B+C=2x^2-xy+6y^2$ 답 ④

0071 전략 주어진 식의 전개식에서 x항과 x^2항을 구해 본다.

$(x-4)(x^3+6x^2-ax+1)$의 전개식에서 x항은

$x\times1+(-4)\times(-ax)=x+4ax$

$=(4a+1)x$

x^2항은

$x\times(-ax)+(-4)\times6x^2=-ax^2-24x^2$

$=-(a+24)x^2$

이때 x의 계수와 x^2의 계수가 같으므로

$4a+1=-(a+24)$, $5a=-25$

$\therefore a=-5$ 답 ①

0072 전략 곱셈 공식을 이용하여 $(x-6y-3z)^2$을 전개한다.

$(x-6y-3z)^2=x^2+36y^2+9z^2-12xy+36yz-6zx$

$=x^2+36y^2+9z^2-6(2xy-6yz+zx)$

$=82-6\times9=28$ 답 ③

0073 전략 곱셈 공식을 이용하여 $(4x-ay)^3$을 전개한다.

$(4x-ay)^3=64x^3-48ax^2y+12a^2xy^2-a^3y^3$

이때 x^2y의 계수가 -144이므로

$-48a=-144$ $\therefore a=3$

따라서 xy^2의 계수는

$12a^2=12\times3^2=108$ 답 ④

0074 전략 $(a-4)(a-2)(a+4)(a+6)$을 공통부분이 생기도록 짝을 지어 전개한다.

$(a-4)(a-2)(a+4)(a+6)$

$=\{(a-4)(a+6)\}\{(a-2)(a+4)\}$

$=(a^2+2a-24)(a^2+2a-8)$

이때 $(a+1)^2=10$에서 $a^2+2a+1=10$

$\therefore a^2+2a=9$

$\therefore$ (주어진 식)$=(9-24)\times(9-8)=-15$ 답 ①

0075 전략 $x^2-x=t$로 놓고 $(x^2-x-a)(x^2-x-b)$를 t에 대한 식으로 나타낸다.

$x^2-x=t$로 놓으면

$(x^2-x-a)(x^2-x-b)=(t-a)(t-b)$

$=t^2-(a+b)t+ab$

$=t^2-5t-2$

$=(x^2-x)^2-5(x^2-x)-2$

$=x^4-2x^3+x^2-5x^2+5x-2$

$=x^4-2x^3-4x^2+5x-2$

답 ②

0076 전략 x^5+y^5, x^6+y^6을 $x+y$, xy의 값을 이용할 수 있도록 변형한다.

$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^3-x^3y^2$

$=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)$ …… ㉠

이때

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(-2)^2-2\times(-1)=6$,

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=(-2)^3-3\times(-1)\times(-2)=-14$

이므로 ㉠에서

$x^5+y^5=6\times(-14)-(-1)^2\times(-2)=-82$

한편

$x^6+y^6=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3$

$=(-14)^2-2\times(-1)^3=198$

이므로

$x^5+y^5+x^6+y^6=-82+198=116$ 답 ③

0077 전략 주어진 조건을 이용하여 $(x+y+z)^2$의 값을 구한다.

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz}$에서

$0=\frac{xy+yz+zx}{xyz}$ $\therefore xy+yz+zx=0$

따라서

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

$=4+2\times0=4$

이므로

$(x+y+z)^8=\{(x+y+z)^2\}^4=4^4=256$ 답 ②

0078 전략 $a=(\sqrt{5}+1)^{12}$, $b=(\sqrt{5}-1)^{12}$으로 놓고 주어진 식을 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

$a=(\sqrt{5}+1)^{12}$, $b=(\sqrt{5}-1)^{12}$이라 하면

$\{(\sqrt{5}+1)^{12}+(\sqrt{5}-1)^{12}\}^2-\{(\sqrt{5}+1)^{12}-(\sqrt{5}-1)^{12}\}^2$

$=(a+b)^2-(a-b)^2$

$=a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

$=4ab=4(\sqrt{5}+1)^{12}(\sqrt{5}-1)^{12}$

$=4\{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)\}^{12}$

$=4\times4^{12}=4^{13}$

$=(2^2)^{13}=2^{26}$ 답 ②

0079 전략 다항식의 나눗셈을 이용하여 몫과 나머지를 구해 본다.

④

$$\begin{array}{r} 2x\ +2 \\ 3x^2+x-2\ \overline{)\ 6x^3+8x^2-2x+1} \\ \underline{6x^3+2x^2-4x} \\ 6x^2+2x+1 \\ \underline{6x^2+2x-4} \\ 5 \end{array}$$

➜ 몫: $2x+2$, 나머지: 5

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

0080 전략 $A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$임을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

$A(x)$를 $B(x)$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $R(x)$이므로

$A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$

ㄱ. $A(x)-R(x)=B(x)Q(x)$

따라서 $A(x)-R(x)$는 $Q(x)$로 나누어떨어진다. (참)

ㄴ. $A(x)+2B(x)=B(x)Q(x)+R(x)+2B(x)$

$=B(x)\{Q(x)+2\}+R(x)$

따라서 $A(x)+2B(x)$를 $B(x)$로 나누었을 때의 나머지는 $R(x)$이다. (참)

ㄷ. $A(x)=x^3+1$, $B(x)=x^2+1$이라 하면

$x^3+1=(x^2+1)\times x-x+1$

이므로 $Q(x)=x$, $R(x)=-x+1$

이때 $A(x)$를 $Q(x)$로 나누었을 때의 나머지는 1이므로 $R(x)$가 아니다. (거짓)

이상에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0081 전략 주어진 조건을 이용하여 두 자동차 A, B의 보어와 스트로크에 대한 관계식을 세운다.

두 자동차 A, B의 실린더의 보어를 각각 R_A, R_B라 하고, 스트로크를 각각 H_A, H_B라 하면

$R_A=\frac{3}{5}R_B$, $H_A=\frac{10}{9}H_B$

두 자동차 A, B의 실린더의 개수가 M으로 같다고 하면

$$\frac{W_A}{W_B}=\frac{\pi\left(\frac{R_A}{2}\right)^2\frac{H_AM}{1000}}{\pi\left(\frac{R_B}{2}\right)^2\frac{H_BM}{1000}}=\frac{\pi\left(\frac{\frac{3}{5}R_B}{2}\right)^2\frac{\frac{10}{9}H_BM}{1000}}{\pi\left(\frac{R_B}{2}\right)^2\frac{H_BM}{1000}}=\frac{2}{5}$$

답 ④

0082 전략 먼저 B를 구한 후 다항식 A, B, C, D가 x의 값에 관계없이 모두 같음을 이용한다.

$B=(x+2)+(x^3+x)+(-2x^2)=x^3-2x^2+2x+2$

두 다항식 A, B가 x의 값에 관계없이 같으므로

$(x+2)+P(x)+(x^3-3x^2)=x^3-2x^2+2x+2$

$\therefore P(x)=x^3-2x^2+2x+2-(x+2)-(x^3-3x^2)$

$=x^3-2x^2+2x+2-x-2-x^3+3x^2$

$=x^2+x$

또 두 다항식 B, C가 x의 값에 관계없이 같으므로

$x^3-2x^2+2x+2=-2x^2+(x^3+3x)+Q(x)$

$\therefore Q(x)=x^3-2x^2+2x+2-(-2x^2)-(x^3+3x)$

$=x^3-2x^2+2x+2+2x^2-x^3-3x$

$=-x+2$

$\therefore P(x)+Q(x)=(x^2+x)+(-x+2)$

$=x^2+2$ 답 x^2+2

0083 전략 $(a+a^2+a^3)-(b-b^2+b^3)$을 $a-b$, ab의 값을 이용할 수 있도록 변형한다.

$(a+a^2+a^3)-(b-b^2+b^3)$
$=a+a^2+a^3-b+b^2-b^3$
$=(a-b)+(a^2+b^2)+(a^3-b^3)$ …… ㉠

이때
$a-b=(\sqrt{5}+3)-(\sqrt{5}-3)=6$,
$ab=(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-3)=-4$

이므로
$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=6^2+2\times(-4)=28$,
$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)=6^3+3\times(-4)\times6=144$

따라서 ㉠에서
$(a+a^2+a^3)-(b-b^2+b^3)=6+28+144=178$

답 178

0084 전략 $\left(x^4-\frac{16}{x^4}\right)^2$을 $x-\frac{2}{x}$의 값을 이용할 수 있도록 변형한다.

$\left(x^4-\frac{16}{x^4}\right)^2=\left\{\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)\left(x^2-\frac{4}{x^2}\right)\right\}^2$
$=\left\{\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x-\frac{2}{x}\right)\right\}^2$
$=\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{2}{x}\right)^2\left(x-\frac{2}{x}\right)^2$ …… ㉠

이때 $x\neq0$이므로 $x^2-4x-2=0$의 양변을 x로 나누면
$x-4-\frac{2}{x}=0$ $\therefore x-\frac{2}{x}=4$

따라서
$x^2+\frac{4}{x^2}=\left(x-\frac{2}{x}\right)^2+4=4^2+4=20$,
$\left(x+\frac{2}{x}\right)^2=\left(x-\frac{2}{x}\right)^2+8=4^2+8=24$

이므로 ㉠에서
$\left(x^4-\frac{16}{x^4}\right)^2=20^2\times24\times4^2$
$=(2^2\times5)^2\times(2^3\times3)\times(2^2)^2$
$=2^{11}\times3\times5^2$

즉 $a=11$, $b=1$, $c=2$이므로
$a+b-c=10$

답 10

0085 전략 주어진 조건을 이용하여 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$의 값을 구한다.

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서
$6=0^2-2(ab+bc+ca)$
$\therefore ab+bc+ca=-3$

$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(ab^2c+abc^2+a^2bc)$
$=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

에서 $(-3)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc\times0$
$\therefore a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=9$

따라서 $(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$에서
$6^2=a^4+b^4+c^4+2\times9$
$\therefore a^4+b^4+c^4=18$

답 18

0086 전략 $x=\sqrt{11}-2$를 (x에 대한 이차식)$=0$의 꼴로 변형한다.

$x=\sqrt{11}-2$에서 $x+2=\sqrt{11}$
양변을 제곱하면 $x^2+4x+4=11$
$\therefore x^2+4x-7=0$

$x^5+4x^4-10x^3-11x^2+26x-5$를 x^2+4x-7로 나누면

$$\begin{array}{r} x^3-3x+1 \\ x^2+4x-7\,\overline{)\,x^5+4x^4-10x^3-11x^2+26x-5} \\ x^5+4x^4-7x^3 \\ \hline -3x^3-11x^2+26x-5 \\ -3x^3-12x^2+21x \\ \hline x^2-5x-5 \\ x^2+4x-7 \\ \hline x+2 \end{array}$$

$\therefore x^5+4x^4-10x^3-11x^2+26x-5$
$=(x^2+4x-7)(x^3-3x+1)+x+2$
$=0\times(x^3-3x+1)+(\sqrt{11}-2)+2$
$=\sqrt{11}$

답 $\sqrt{11}$

0087 전략 주어진 조립제법에서 몫과 나머지를 파악한다.

$P(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지는 3이므로
$P(x)=(x-5)Q(x)+3$

$Q(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 몫은 x^2-3x-5, 나머지는 2이므로
$Q(x)=(x-5)(x^2-3x-5)+2$
$\therefore P(x)=(x-5)\{(x-5)(x^2-3x-5)+2\}+3$
$\therefore P(6)=18$

답 18

0088 전략 주어진 식의 전개식에서 a^5항은
$\{(2a^2-3a+1)^3$의 전개식에서 a^4항$\}\times a$
$+\{(2a^2-3a+1)^3$의 전개식에서 a^5항$\}\times2$
임을 이용한다.

$(2a^2-3a+1)^3=(2a^2-3a+1)(2a^2-3a+1)(2a^2-3a+1)$
이 식의 전개식에서 a^4항은
$2a^2\times2a^2\times1+2a^2\times(-3a)\times(-3a)$
$+2a^2\times1\times2a^2+(-3a)\times2a^2\times(-3a)$
$+(-3a)\times(-3a)\times2a^2+1\times2a^2\times2a^2$
$=4a^4+18a^4+4a^4+18a^4+18a^4+4a^4=66a^4$ … ❶

a^5항은
$2a^2\times2a^2\times(-3a)+2a^2\times(-3a)\times2a^2$
$+(-3a)\times2a^2\times2a^2$
$=-12a^5-12a^5-12a^5=-36a^5$ … ❷

따라서 $(2a^2-3a+1)^3(a+2)$의 전개식에서 a^5항은
$\{(2a^2-3a+1)^3$의 전개식에서 a^4항$\}\times a$
$+\{(2a^2-3a+1)^3$의 전개식에서 a^5항$\}\times2$
$=66a^4\times a+(-36a^5)\times2$
$=66a^5-72a^5=-6a^5$

즉 a^5의 계수는 -6이다. … ❸

답 -6

단계	채점 요소	배점
❶	$(2a^2-3a+1)^3$의 전개식에서 a^4항 구하기	2점
❷	$(2a^2-3a+1)^3$의 전개식에서 a^5항 구하기	2점
❸	주어진 다항식의 전개식에서 a^5의 계수 구하기	2점

0089 전략 $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$의 길이를 각각 x, y, z라 하고 주어진 조건을 x, y, z로 나타낸다.

$\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$의 길이를 각각 x, y, z라 하면 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 $16\sqrt{3}$이므로

$4(x+y+z)=16\sqrt{3}$

$\therefore x+y+z=4\sqrt{3}$

직육면체의 부피가 $6\sqrt{3}$이므로

$xyz=6\sqrt{3}$

$\overline{AG}=3\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=3\sqrt{2}$

$\therefore x^2+y^2+z^2=18$ … ❶

이때 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$에서

$18=(4\sqrt{3})^2-2(xy+yz+zx)$

$\therefore xy+yz+zx=15$ … ❷

$\therefore {S_1}^2+{S_2}^2+{S_3}^2$

$=(xy)^2+(xz)^2+(yz)^2$

$=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$

$=(xy+yz+zx)^2-2(xy^2z+xyz^2+x^2yz)$

$=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)$

$=15^2-2\times6\sqrt{3}\times4\sqrt{3}=81$ … ❸

답 81

단계	채점 요소	배점
❶	$\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$의 길이를 각각 x, y, z라 하고 주어진 조건을 x, y, z로 나타내기	2점
❷	$xy+yz+zx$의 값 구하기	1점
❸	${S_1}^2+{S_2}^2+{S_3}^2$의 값 구하기	3점

0090 전략 다항식의 나눗셈에서 나머지는 상수이거나 나머지의 차수는 나누는 식의 차수보다 낮음을 이용한다.

$A(x)+B(x)$를 x로 나누었을 때의 나머지 $x^2-x-\frac{1}{3}A(x)$는 상수이므로 $x^2-x-\frac{1}{3}A(x)=R$ (R는 상수)라 하면

$A(x)=3x^2-3x-3R$ … ❶

즉 $A(x)$는 이차다항식이고 $B(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식이므로 $A(x)+B(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식이다.

이때 $A(x)+B(x)$를 x^2+x-3으로 나누었을 때의 나머지도 R이므로

$A(x)+B(x)=x(x^2+x-3)+R$

$\therefore B(x)=x(x^2+x-3)+R-A(x)$

$=x(x^2+x-3)+R-(3x^2-3x-3R)$

$=x^3+x^2-3x+R-3x^2+3x+3R$

$=x^3-2x^2+4R$

$B(1)=11$이므로

$4R-1=11$ $\therefore R=3$ … ❷

따라서 $A(x)=3x^2-3x-9$이므로

$A(-3)=27$ … ❸

답 27

단계	채점 요소	배점
❶	$x^2-x-\frac{1}{3}A(x)=R$ (R는 상수)라 하고 $A(x)$를 R를 이용하여 나타내기	2점
❷	R의 값 구하기	3점
❸	$A(-3)$의 값 구하기	1점

0091 전략 $P(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 나머지가 $3x^2+ax-1$임을 이용하여 식을 세운 후 이 식을 변형한다.

$P(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(x-1)^3Q(x)+3x^2+ax-1$ … ❶

$=(x-1)^3Q(x)+3(x^2-2x+1)+(a+6)x-4$

$=(x-1)^3Q(x)+3(x-1)^2+(a+6)x-4$

$=(x-1)^2\{(x-1)Q(x)+3\}+(a+6)x-4$ … ❷

이때 $P(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $4x+b$이므로

$a+6=4$, $-4=b$ $\therefore a=-2$, $b=-4$

$\therefore ab=8$ … ❸

답 8

단계	채점 요소	배점
❶	$P(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고 식 세우기	1점
❷	식 변형하기	2점
❸	ab의 값 구하기	2점

02 항등식과 나머지정리

셀프 CHECK 본책 26쪽

A 답 ㄴ, ㄷ

B 답 (1) $a=3$, $b=0$, $c=-1$ (2) $a=1$, $b=-1$, $c=2$
(3) $a=2$, $b=-1$, $c=3$ (4) $a=1$, $b=2$, $c=-2$

C 답 (1) 39 (2) $\frac{1}{2}$

D 답 (1) -6 (2) 3

내신유형 다지기 본책 27~33쪽

유형 017 항등식에서 미정계수 구하기 – 계수 비교법 본책 27쪽

주어진 식을 전개하여 내림차순으로 정리한 후 양변의 동류항의 계수를 비교한다.

0092 $(2x+b)(x^2+cx-6)$
$=2x^3+(b+2c)x^2+(bc-12)x-6b$
이므로
$2x^3+ax^2-24$
$=2x^3+(b+2c)x^2+(bc-12)x-6b$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=b+2c$, $0=bc-12$, $-24=-6b$
$\therefore a=10$, $b=4$, $c=3$
$\therefore a-b+c=9$ 답 9

0093 주어진 등식을 k에 대하여 정리하면
$(x-y+3)k+2x^2+2y^2-6=0$
이 등식이 k에 대한 항등식이므로
$x-y+3=0$, $2x^2+2y^2-6=0$
$\therefore x-y=-3$, $x^2+y^2=3$
이때 $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$이므로
$3=(-3)^2+2xy$ $\therefore xy=-3$ 답 ②

0094 $P(x)=x^3-x^2+5x-1$에서
$P(x+a)$
$=(x+a)^3-(x+a)^2+5(x+a)-1$
$=x^3+(3a-1)x^2+(3a^2-2a+5)x+a^3-a^2+5a-1$ … ❶
이므로
$x^3+(3a-1)x^2+(3a^2-2a+5)x+a^3-a^2+5a-1$
$=x^3+2x^2+bx+4$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$3a-1=2$, $3a^2-2a+5=b$, $a^3-a^2+5a-1=4$
$\therefore a=1$, $b=6$ … ❷
$\therefore a+b=7$ … ❸
답 7

단계	채점 요소	비율
❶	$P(x+a)$ 구하기	40 %
❷	a, b의 값 구하기	50 %
❸	$a+b$의 값 구하기	10 %

0095 $\frac{x^2+ax+b}{4x^2-3bx+8}=k$ (k는 상수)라 하면
$x^2+ax+b=k(4x^2-3bx+8)$
$\therefore (1-4k)x^2+(a+3bk)x+b-8k=0$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$1-4k=0$, $a+3bk=0$, $b-8k=0$
$\therefore k=\frac{1}{4}$, $a=-\frac{3}{2}$, $b=2$
$\therefore ab=-3$ 답 -3

유형 018 항등식에서 미정계수 구하기 – 수치 대입법 본책 27쪽

계산이 간단한 식을 얻을 수 있도록 적당한 수를 미정계수의 개수만큼 대입한다.

0096 주어진 등식의 양변에 $x=-2$, $x=1$, $x=3$을 각각 대입하면
$-30=15b$, $-18=-6c$, $40=10a$
$\therefore a=4$, $b=-2$, $c=3$
$\therefore a+b+c=5$ 답 ①

0097 주어진 등식의 좌변의 x^3의 계수는 2이고, 우변의 전개식에서 x^3의 계수는 c이므로
$c=2$
주어진 등식의 양변에 $x=-3$, $x=2$를 각각 대입하면
$-54+9a+33+b=0$, $16+4a-22+b=0$
$\therefore 9a+b=21$, $4a+b=6$
두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-6$
$\therefore abc=-36$ 답 -36

다른 풀이 $(x-2)(x+3)(cx+1)$
$=cx^3+(c+1)x^2-(6c-1)x-6$
이므로
$2x^3+ax^2-11x+b=cx^3+(c+1)x^2-(6c-1)x-6$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$2=c$, $a=c+1$, $11=6c-1$, $b=-6$
$\therefore a=3$, $b=-6$, $c=2$

0098 주어진 등식의 양변에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면
$0=-a+b$, $8=a+b$
$\therefore a-b=0$, $a+b=8$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=4$

따라서 주어진 등식은

$x(x+1)(x+3)=(x+1)(x-1)P(x)+4x+4$

이때 $a-b=0$이므로 이 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=-P(0)+4 \quad \therefore P(0)=4$

$\therefore P(a-b)=P(0)=4$ 답 ④

참고 $x(x+1)(x+3)=(x+1)(x-1)P(x)+4x+4$에서

$(x+1)(x-1)P(x)=x(x+1)(x+3)-4x-4$

$(x^2-1)P(x)=x^3+4x^2-x-4$

$(x^2-1)P(x)=(x^2-1)(x+4)$

$\therefore P(x)=x+4$

유형 019 조건을 만족시키는 항등식 → 본책 28쪽

(1) x, y에 대한 관계식이 주어진 경우

➜ 주어진 관계식을 한 문자에 대하여 정리한 후 등식에 대입하면 그 문자에 대한 항등식이 된다.

(2) x에 대한 방정식이 k의 값에 관계없이 항상 α를 근으로 갖는 경우

➜ 방정식에 $x=\alpha$를 대입하면 k에 대한 항등식이 된다.

0099 $x+y=1$에서 $y=-x+1$

이것을 주어진 등식에 대입하면

$ax^2+3x+b(-x+1)^2-4x(-x+1)+c(-x+1)-7=0$

$\therefore (a+b+4)x^2-(2b+c+1)x+b+c-7=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b+4=0,\ 2b+c+1=0,\ b+c-7=0$

$\therefore a+b=-4,\ 2b+c=-1,\ b+c=7$

세 식을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=-8,\ c=15$

$\therefore a-b+c=27$ 답 27

참고 $x=-y+1$을 대입해서 y에 대한 식으로 정리해도 결과는 같다.

0100 주어진 방정식이 -1을 근으로 가지므로

$1-(k+3)+(k-1)m+n-2=0$

$\therefore (m-1)k-m+n-4=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$m-1=0,\ -m+n-4=0$

$\therefore m=1,\ n=5 \quad \therefore m+n=6$ 답 ⑤

0101 $2x-y=k$에서 $y=2x-k$

이것을 주어진 등식에 대입하면

$px^2+qx-4x(2x-k)+5(2x-k)-10=0$

$\therefore (p-8)x^2+(4k+q+10)x-5k-10=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$p-8=0,\ 4k+q+10=0,\ -5k-10=0$

$\therefore k=-2,\ p=8,\ q=-2$

$\therefore kpq=32$ 답 ①

유형 020 항등식에서 계수의 합 구하기 → 본책 28쪽

주어진 등식의 양변에 적당한 수를 대입하여 계수에 대한 식으로 나타낸다.

➜ $(x+a)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$에서

① 양변에 $x=0$을 대입하면 $a^n=a_0$

② 양변에 $x=1$을 대입하면 $(1+a)^n=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$

0102 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$5^4=a_0+a_1+\cdots+a_7+a_8$ ····· ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$1=a_0-a_1+\cdots-a_7+a_8$ ····· ㉡

㉠+㉡을 하면 $626=2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8)$

$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6+a_8=313$ 답 313

0103 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$a_0=(-1)^5=-1$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-p)^5=a_0-a_1+\cdots-a_9+a_{10}$

따라서 $(-p)^5=-1+244=243=3^5$이므로

$-p=3 \quad \therefore p=-3$ 답 -3

0104 주어진 등식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$(-2)^{40}+1=a_{40}+a_{39}+\cdots+a_1+a_0$ ····· ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-4$를 대입하면

$(-4)^{40}+1=a_{40}-a_{39}+\cdots-a_1+a_0$ ····· ㉡

㉠−㉡을 하면

$2^{40}-4^{40}=2(a_{39}+a_{37}+\cdots+a_3+a_1)$

$\therefore a_{39}+a_{37}+\cdots+a_3+a_1=\dfrac{2^{40}-4^{40}}{2}=\dfrac{2^{40}(1-2^{40})}{2}$

$=2^{39}(1-2^{40})$

답 ①

0105 $(x^2+x)^{10}=a_0+a_1x+\cdots+a_{19}x^{19}+a_{20}x^{20}$에서

$x^{10}(x+1)^{10}=a_0+a_1x+\cdots+a_{19}x^{19}+a_{20}x^{20}$

이 식의 좌변에서 구차 이하의 항의 계수는 모두 0이므로

$a_0=a_1=\cdots=a_9=0$ … ❶

따라서

$x^{10}(x+1)^{10}=a_{10}x^{10}+a_{11}x^{11}+\cdots+a_{19}x^{19}+a_{20}x^{20}$

이므로

$(x+1)^{10}=a_{10}+a_{11}x+\cdots+a_{19}x^9+a_{20}x^{10}$ ····· ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $a_{10}=1$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^{10}=a_{10}+a_{11}+\cdots+a_{19}+a_{20}$ … ❷

$\therefore a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{19}+a_{20}$

$=2^{10}-a_{10}$

$=1024-1=1023$ … ❸

답 1023

단계	채점 요소	비율
❶	$a_0=a_1=\cdots=a_9=0$임을 알기	30 %
❷	a_{10}, $a_{10}+a_{11}+\cdots+a_{19}+a_{20}$의 값 구하기	50 %
❸	$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{19}+a_{20}$의 값 구하기	20 %

유형 021 다항식의 나눗셈과 항등식 본책 29쪽

다항식 $A(x)$를 다항식 $B(x)$ $(B(x)\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하면

$A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$

가 성립하고, 이 등식은 x에 대한 항등식이다.

0106 $x^3+2x^2+ax+13$을 x^2+bx+5로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

$x^3+2x^2+ax+13=(x^2+bx+5)(x+c)+2x-7$

$=x^3+(b+c)x^2+(bc+7)x+5c-7$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$2=b+c$, $a=bc+7$, $13=5c-7$

$\therefore a=-1$, $b=-2$, $c=4$

$\therefore ab=2$ 답 2

참고 $x^3+2x^2+ax+13$과 x^2+bx+5의 최고차항의 계수가 모두 1이므로 몫은 $x+c$ (c는 상수)의 꼴이다.

0107 $3x^3+8x^2+a$를 x^2+3x+b로 나누었을 때의 몫을 $3x+c$ (c는 상수)라 하면

$3x^3+8x^2+a=(x^2+3x+b)(3x+c)$

$=3x^3+(c+9)x^2+(3b+3c)x+bc$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$8=c+9$, $0=3b+3c$, $a=bc$

$\therefore a=-1$, $b=1$, $c=-1$

$\therefore b-a=2$ 답 ⑤

다른 풀이

$$\begin{array}{r} 3x-1 \\ x^2+3x+b \overline{)\,3x^3+8x^2\qquad +a} \\ \underline{\;3x^3+9x^2+3bx\;} \\ -\;x^2-3bx+a \\ \underline{\;-\;x^2-\;3x-b\;} \\ (-3b+3)x+a+b \end{array}$$

이때 나머지가 0이어야 하므로

$(-3b+3)x+a+b=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$-3b+3=0$, $a+b=0$

$\therefore a=-1$, $b=1$

0108 $x^4+ax^3+bx^2+5$를 x^2-4x+2로 나누었을 때의 몫을 x^2+cx+d (c, d는 상수)라 하면

$x^4+ax^3+bx^2+5$

$=(x^2-4x+2)(x^2+cx+d)+10x+1$

$=x^4+(c-4)x^3+(-4c+d+2)x^2$

$+(2c-4d+10)x+2d+1$ … ❶

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=c-4$, $b=-4c+d+2$, $0=2c-4d+10$, $5=2d+1$

$\therefore a=-5$, $b=8$, $c=-1$, $d=2$ … ❷

$\therefore a+b=3$ … ❸

답 3

단계	채점 요소	비율
❶	나눗셈에 대한 등식 세우기	50 %
❷	a, b, c, d의 값 구하기	40 %
❸	$a+b$의 값 구하기	10 %

0109 $P(x)$를 x^2+x-1로 나누었을 때의 몫을 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2+x-1)(ax+b)$ …… ㉠

$P(x)+10$을 x^2+1로 나누었을 때의 몫을 $ax+c$ (c는 상수)라 하면

$P(x)+10=(x^2+1)(ax+c)$

$\therefore P(x)=(x^2+1)(ax+c)-10$ …… ㉡

이때 $P(0)=-4$이므로 ㉠, ㉡에서

$-b=-4$, $c-10=-4$ $\therefore b=4$, $c=6$

따라서 ㉠, ㉡에서

$(x^2+x-1)(ax+4)=(x^2+1)(ax+6)-10$

$\therefore ax^3+(a+4)x^2-(a-4)x-4=ax^3+6x^2+ax-4$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+4=6$, $-(a-4)=a$ $\therefore a=2$

즉 $P(x)=(x^2+x-1)(2x+4)$이므로

$P(-1)=-2$ 답 −2

유형 022 조립제법과 항등식 본책 29쪽

조립제법을 연속으로 이용하면 내림차순으로 정리한 식에서 미정계수를 구할 수 있다.

0110

$$\begin{array}{r|cccc} 1 & 2 & -7 & 11 & 1 \\ & & 2 & -5 & 6 \\ \hline 1 & 2 & -5 & 6 & 7 \\ & & 2 & -3 & \\ \hline 1 & 2 & -3 & 3 & \\ & & 2 & & \\ \hline & 2 & -1 & & \end{array}$$

위의 조립제법에서

$2x^3-7x^2+11x+1$

$=(x-1)(2x^2-5x+6)+7$

$=(x-1)\{(x-1)(2x-3)+3\}+7$

$=(x-1)[(x-1)\{2(x-1)-1\}+3]+7$

$=(x-1)\{2(x-1)^2-(x-1)+3\}+7$

$=2(x-1)^3-(x-1)^2+3(x-1)+7$

$\therefore a=2$, $b=-1$, $c=3$, $d=7$

$\therefore a-b-c+d=7$ 답 7

만점 공략 노트

$2x^3-7x^2+11x+1$
$=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$
$=(x-1)\{a(x-1)^2+b(x-1)+c\}+d$ ····· ㉠
$=(x-1)[(x-1)\{a(x-1)+b\}+c]+d$ ····· ㉡
㉠에서 $2x^3-7x^2+11x+1$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫은 $a(x-1)^2+b(x-1)+c$이고 나머지는 d이다.
㉡에서 $a(x-1)^2+b(x-1)+c$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫은 $a(x-1)+b$이고 나머지는 c이다.
또 $a(x-1)+b$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫은 a이고 나머지는 b이다.
따라서 오른쪽과 같이 조립제법에서 a, b, c, d의 값을 바로 구할 수도 있다.

1	2	−7	11	1
		2	−5	6
1	2	−5	6	7 ← d
		2	−3	
1	2	−3	3 ← c	
		2		
a →	2	−1 ← b		

다른 풀이 $x-1=y$라 하면 $x=y+1$이므로 주어진 등식에서
$2(y+1)^3-7(y+1)^2+11(y+1)+1$
$=ay^3+by^2+cy+d$
$2y^3-y^2+3y+7=ay^3+by^2+cy+d$
$\therefore a=2,\ b=-1,\ c=3,\ d=7$

0111

$\frac{1}{2}$	8	4	−14	8
		4	4	−5
$\frac{1}{2}$	8	8	−10	3
		4	6	
$\frac{1}{2}$	8	12	−4	
		4		
	8	16		

위의 조립제법에서
$8x^3+4x^2-14x+8$
$=\left(x-\frac{1}{2}\right)(8x^2+8x-10)+3$
$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)(8x+12)-4\right\}+3$
$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{8\left(x-\frac{1}{2}\right)+16\right\}-4\right]+3$
$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{8\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+16\left(x-\frac{1}{2}\right)-4\right\}+3$
$=8\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+16\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{2}\right)+3$
$=(2x-1)^3+4(2x-1)^2-2(2x-1)+3$
$\therefore a=1,\ b=4,\ c=-2,\ d=3$
$\therefore ab+cd=1\times4+(-2)\times3=-2$ 답 −2

유형 023 일차식으로 나누었을 때의 나머지 → 본책 29쪽

다항식 $P(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지 ➔ $P(a)$

0112 나머지정리에 의하여
$P(-2)=-1,\ Q(-2)=3$
따라서 $2P(x)-3Q(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는
$2P(-2)-3Q(-2)=2\times(-1)-3\times3=-11$
답 −11

0113 나머지정리에 의하여
$-\{P(3)+5\}=-8,\quad P(3)+5=8$
$\therefore P(3)=3$
따라서 $P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 3이다.
답 3

0114 $P(x)$를 x^2+3으로 나누었을 때의 몫이 $3x+1$, 나머지가 $2x+5$이므로
$P(x)=(x^2+3)(3x+1)+2x+5$
따라서 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는
$P(1)=23$ 답 23

0115 나머지정리에 의하여
$P(-5)+Q(-5)=6,$
$\{P(-5)\}^3+\{Q(-5)\}^3=72$ ··· ❶
$\{P(-5)\}^3+\{Q(-5)\}^3$
$=\{P(-5)+Q(-5)\}^3-3P(-5)Q(-5)\{P(-5)+Q(-5)\}$
이므로 $72=6^3-3\times P(-5)Q(-5)\times6$
$\therefore P(-5)Q(-5)=8$
따라서 $P(x)Q(x)$를 $x+5$로 나누었을 때의 나머지는 8이다. ··· ❷
답 8

단계	채점 요소	비율
❶	$P(-5)+Q(-5)$, $\{P(-5)\}^3+\{Q(-5)\}^3$의 값 구하기	40 %
❷	$P(x)Q(x)$를 $x+5$로 나누었을 때의 나머지 구하기	60 %

유형 024 일차식으로 나누었을 때의 미정계수 구하기 → 본책 30쪽

다항식 $P(x)$를 $x-\alpha$, $x-\beta$로 나누었을 때의 나머지는 각각 $P(\alpha)$, $P(\beta)$임을 이용하여 미정계수를 구한다.

0116 $P(x)=x^4+ax^3-3x+b$라 하면 나머지정리에 의하여
$P(-1)=2,\ P(2)=-19$
$1-a+3+b=2,\ 16+8a-6+b=-19$
$\therefore a-b=2,\ 8a+b=-29$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-5$
$\therefore ab=15$ 답 ⑤

0117 $P(x)=x^2+kx-2$라 하면 나머지정리에 의하여
$R_1=P(4)=4k+14,\ R_2=P(-2)=-2k+2$
이때 $R_1R_2=-20$이므로 $(4k+14)(-2k+2)=-20$
$2k^2+5k-12=0,\quad (k+4)(2k-3)=0$
$\therefore k=-4\ (\because k<0)$ 답 −4

0118 $P(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 나머지정리에 의하여

$P(1)=2$, $P(2)=3$

$1+a+b=2$, $4+2a+b=3$

$\therefore a+b=1$, $2a+b=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=3$

따라서 $P(x)=x^2-2x+3$이므로 $P(x)$를 $x-3$으로 나눈 나머지는 $P(3)=6$ 답 6

0119 $Q(x)=2x^2P(x)$ …… ㉠

$Q(x)+(x^2-3x)P(x)=x^3+ax^2-2x+b$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2x^2P(x)+(x^2-3x)P(x)=x^3+ax^2-2x+b$

$\therefore 3x(x-1)P(x)=x^3+ax^2-2x+b$

양변에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면

$0=b$, $0=1+a-2+b$ $\therefore a=1$, $b=0$

즉 $3x(x-1)P(x)=x^3+x^2-2x$이므로 양변에 $x=-3$을 대입하면

$36P(-3)=-12$ $\therefore P(-3)=-\frac{1}{3}$

따라서 $Q(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는

$Q(-3)=18P(-3)$ ($\because$ ㉠)

$=18\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-6$ 답 ④

유형 025 이차식으로 나누었을 때의 나머지 본책 30쪽

다항식 $P(x)$를 $(x-\alpha)(x-\beta)$로 나누었을 때의 나머지

➜ 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하고 $P(\alpha)$, $P(\beta)$의 값을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

0120 나머지정리에 의하여

$P(-3)=10$, $P(1)=-2$

다항식 $P(x)$를 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2+2x-3)Q(x)+ax+b$

$=(x+3)(x-1)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=-3$, $x=1$을 각각 대입하면

$P(-3)=-3a+b$, $P(1)=a+b$

$\therefore -3a+b=10$, $a+b=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=1$

따라서 $R(x)=-3x+1$이므로

$R(-2)=7$ 답 7

0121 나머지정리에 의하여

$P(-4)=1$, $P(4)=5$

다항식 $(x^2-x-2)P(x)$를 x^2-16으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$(x^2-x-2)P(x)=(x^2-16)Q(x)+ax+b$

$=(x+4)(x-4)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=-4$, $x=4$를 각각 대입하면

$18P(-4)=-4a+b$, $10P(4)=4a+b$

$\therefore -4a+b=18$, $4a+b=50$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=34$

따라서 구하는 나머지는 $4x+34$이다. 답 $4x+34$

0122 $P(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$P(x)=(x^2-4)Q_1(x)+x+3$

$=(x+2)(x-2)Q_1(x)+x+3$ …… ㉠

$P(x)$를 x^2+x-12로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$P(x)=(x^2+x-12)Q_2(x)-x+9$

$=(x+4)(x-3)Q_2(x)-x+9$ …… ㉡

$P(x)$를 x^2-x-6으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-x-6)Q(x)+ax+b$

$=(x+2)(x-3)Q(x)+ax+b$ …… ㉢

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면 $P(-2)=1$

㉡의 양변에 $x=3$을 대입하면 $P(3)=6$ … ❶

㉢의 양변에 $x=-2$, $x=3$을 각각 대입하면

$P(-2)=-2a+b$, $P(3)=3a+b$

$\therefore -2a+b=1$, $3a+b=6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$

따라서 구하는 나머지는 $x+3$이다. … ❷

답 $x+3$

단계	채점 요소	비율
❶	$P(-2)$, $P(3)$의 값 구하기	50 %
❷	$P(x)$를 x^2-x-6으로 나누었을 때의 나머지 구하기	50 %

0123 조건 (가)에서 나머지정리에 의하여

$P(2)+P(3)=7$ …… ㉠

조건 (나)에서 $P(x)$를 x^2-5x+6으로 나눈 몫을 $Q(x)$, $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-5x+6)Q(x)+ax+b$

$=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=2$, $x=3$을 각각 대입하면

$P(2)=2a+b$, $P(3)=3a+b$

따라서 ㉠에서 $(2a+b)+(3a+b)=7$

$\therefore 5a+2b=7$ …… ㉡

또 $R(1)-R(2)=5$이므로

$(a+b)-(2a+b)=5$ $\therefore a=-5$

$a=-5$를 ㉡에 대입하면

$-25+2b=7$ $\therefore b=16$

따라서 $R(x)=-5x+16$이므로 $R(1)=11$ 답 ⑤

유형 026 삼차식으로 나누었을 때의 나머지 본책 31쪽

다항식 $P(x)$를 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$로 나누었을 때의 나머지

➜ 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하고 $P(\alpha)$, $P(\beta)$, $P(\gamma)$의 값을 이용하여 a, b, c의 값을 구한다.

0124 $P(x)$를 $x(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$P(x)=x(x-3)Q_1(x)+x+4$ … ㉠

$P(x)$를 $(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$P(x)=(x-2)(x-3)Q_2(x)+3x-2$ … ㉡

$P(x)$를 $x(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$P(x)=x(x-2)(x-3)Q(x)+ax^2+bx+c$ … ㉢

㉠의 양변에 $x=0$, $x=3$을 각각 대입하면

$P(0)=4$, $P(3)=7$

㉡의 양변에 $x=2$를 대입하면

$P(2)=4$

㉢의 양변에 $x=0$, $x=2$, $x=3$을 각각 대입하면

$P(0)=c$, $P(2)=4a+2b+c$, $P(3)=9a+3b+c$

$4=c$, $4=4a+2b+c$, $7=9a+3b+c$

$\therefore a=1$, $b=-2$, $c=4$

따라서 구하는 나머지는 x^2-2x+4이다. 답 ④

다른 풀이 $P(x)$를 $x(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$P(x)=x(x-2)(x-3)Q(x)+ax^2+bx+c$ … ㉣

$P(x)$를 $x(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+4$이므로 ax^2+bx+c를 $x(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지도 $x+4$이다.

즉 $ax^2+bx+c=ax(x-3)+x+4$이므로 이것을 ㉣에 대입하면

$P(x)$

$=x(x-2)(x-3)Q(x)+ax(x-3)+x+4$ … ㉤

한편 $P(x)$를 $(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_3(x)$라 하면

$P(x)=(x-2)(x-3)Q_3(x)+3x-2$

양변에 $x=2$를 대입하면 $P(2)=4$

㉤의 양변에 $x=2$를 대입하면

$P(2)=-2a+6$, $4=-2a+6$ $\therefore a=1$

따라서 구하는 나머지는

$x(x-3)+x+4=x^2-2x+4$

0125 $x^{12}+x^7-x^4+2$를 x^3-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$x^{12}+x^7-x^4+2$

$=(x^3-x)Q(x)+ax^2+bx+c$

$=x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$c=2$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$1=a-b+c$ $\therefore a-b=-1$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$3=a+b+c$ $\therefore a+b=1$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=1$

따라서 $R(x)=x+2$이므로

$R(-4)=-2$ 답 ④

0126 $P(x)$를 $(x-3)^2(x-4)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$P(x)=(x-3)^2(x-4)Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠

$P(x)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $-2x+1$이므로 ax^2+bx+c를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 나머지도 $-2x+1$이다.

즉 $ax^2+bx+c=a(x-3)^2-2x+1$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$P(x)=(x-3)^2(x-4)Q(x)+a(x-3)^2-2x+1$

한편 $P(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지가 -4이므로

$P(4)=a-7=-4$ $\therefore a=3$

따라서 구하는 나머지는

$3(x-3)^2-2x+1=3x^2-20x+28$ 답 $3x^2-20x+28$

유형 027 $P(ax+b)$를 $x-a$로 나누는 경우 → 본책 31쪽

다항식 $P(ax+b)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지
➜ $P(a\alpha+b)$

0127 $P(x)$를 $2x^2+5x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(2x^2+5x-3)Q(x)-x+5$

$=(2x-1)(x+3)Q(x)-x+5$ …… ㉠

$P(4x-1)$을 $2x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$P\left(4\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right)=P(-3)$

이므로 ㉠의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$P(-3)=8$ 답 8

다른 풀이 $P(x)$를 $2x^2+5x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(2x^2+5x-3)Q(x)-x+5$

$=(2x-1)(x+3)Q(x)-x+5$

양변에 x 대신 $4x-1$을 대입하면

$P(4x-1)=(8x-3)(4x+2)Q(4x-1)-4x+6$

$=2(8x-3)(2x+1)Q(4x-1)-2(2x+1)+8$

$=(2x+1)\{2(8x-3)Q(4x-1)-2\}+8$

따라서 $P(4x-1)$을 $2x+1$로 나누었을 때의 나머지는 8이다.

0128 나머지정리에 의하여

$P(-2026+2027)=5$, $P(-2027+2026)=-1$

$P(1)=5$, $P(-1)=-1$

$a+1+b=5$, $-a+1+b=-1$

$\therefore a+b=4$, $a-b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=1$

$\therefore ab=3$ 답 3

0129 $P(x+2)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x+2)=(x^2-1)Q(x)+10$

$=(x+1)(x-1)Q(x)+10$

양변에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면

$P(1)=10$, $P(3)=10$

$2(a+b)-6=10$, $8(3a+b)-6=10$

$\therefore a+b=8$, $3a+b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=11$

$\therefore b-a=14$ 답 ④

유형 028 몫을 $x-a$로 나누는 경우 본책 32쪽

다항식 $P(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이면

$P(x)=(x-a)Q(x)+R$

이고, $Q(x)$를 $x-\beta$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(\beta)$이다.

0130 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -1이므로

$P(x)=(x+2)Q(x)-1$ …… ㉠

$Q(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지가 3이므로

$Q(5)=3$

$P(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는 $P(5)$이므로 ㉠의 양변에 $x=5$를 대입하면

$P(5)=7Q(5)-1=7\times3-1=20$ 답 ⑤

0131 $P(x)$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $3x+10$이므로

$P(x)=(x^2-x+1)Q(x)+3x+10$ …… ㉠

$Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$Q(x)=(x+1)Q_1(x)+4$ …… ㉡ … ❶

㉡을 ㉠에 대입하면

$P(x)=(x^2-x+1)\{(x+1)Q_1(x)+4\}+3x+10$

$=(x^3+1)Q_1(x)+4x^2-x+14$

따라서 $R(x)=4x^2-x+14$이므로 … ❷

$R(-1)=19$ … ❸

답 19

단계	채점 요소	비율
❶	나눗셈에 대한 등식 세우기	40 %
❷	$R(x)$ 구하기	40 %
❸	$R(-1)$의 값 구하기	20 %

0132 $x^{50}+x^{25}+x$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$(-1)^{50}+(-1)^{25}+(-1)=-1$

이므로

$x^{50}+x^{25}+x=(x+1)Q(x)-1$ …… ㉠

$Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(1)$이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1^{50}+1^{25}+1=2Q(1)-1$

$2Q(1)=4$ $\therefore Q(1)=2$ 답 ⑤

유형 029 수의 나눗셈에서 나머지정리의 활용 본책 32쪽

자연수 A를 자연수 B로 나누었을 때의 나머지를 구할 때에는 A를 x에 대한 다항식, B를 x에 대한 일차식으로 나타낸 후 나머지정리를 이용한다.

0133 $x=49$라 하면 $50=x+1$

x^{99}을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$x^{99}=(x+1)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$R=(-1)^{99}=-1$

㉠의 양변에 $x=49$를 대입하면

$49^{99}=50Q(49)-1=50\{Q(49)-1\}+49$

따라서 49^{99}을 50으로 나누었을 때의 나머지는 49이다. 답 49

참고 자연수의 나눗셈에서 나머지는 0 또는 나누는 수보다 작은 자연수이어야 한다.

0134 $x=100$이라 하면 $98=x-2$

x^8+x^4+1을 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$x^8+x^4+1=(x-2)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$R=2^8+2^4+1=273$

㉠의 양변에 $x=100$을 대입하면

$100^8+100^4+1=98Q(100)+273$

$=98\{Q(100)+2\}+77$

따라서 100^8+100^4+1을 98로 나누었을 때의 나머지는 77이다.

답 ③

0135 $2^{131}=(2^4)^{32}\times2^3=8\times16^{32}$

$x=16$이라 하면 $15=x-1$

$8x^{32}$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$8x^{32}=(x-1)Q(x)+R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $R=8$

㉠의 양변에 $x=16$을 대입하면

$8\times16^{32}=15Q(16)+8$

따라서 2^{131}을 15로 나누었을 때의 나머지는 8이다. 답 8

유형 030 인수정리 — 일차식으로 나누는 경우 본책 33쪽

다항식 $P(x)$가 $x-a$로 나누어떨어진다.

➜ $P(a)=0$

0136 $P(x)=x^4+ax^3+x+b$라 하면 $P(x)$가 $x+1$, $x-3$으로 각각 나누어떨어지므로

$P(-1)=0$, $P(3)=0$

$1-a-1+b=0$, $81+27a+3+b=0$

$\therefore a-b=0$, $27a+b=-84$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-3$

$\therefore ab=9$ 답 ⑤

0137 $P(x)=(kx^3-1)(kx^2+3)-4kx$라 하면 $P(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지므로 $P(1)=0$

$(k-1)(k+3)-4k=0$, $k^2-2k-3=0$

$(k+1)(k-3)=0$ $\therefore k=-1$ 또는 $k=3$

따라서 구하는 합은 $-1+3=2$ 답 2

0138 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 6이므로

$P(-2)=6$, $-8+4a-2b+8=6$

$\therefore 2a-b=3$ …… ㉠ … ❶

$P(x+2)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로

$P(-1+2)=P(1)=0$

$1+a+b+8=0$ $\therefore a+b=-9$ …… ㉡ … ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-7$

$\therefore a-b=5$ … ❸

답 5

단계	채점 요소	비율
❶	나머지정리를 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	40 %
❷	인수정리를 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	40 %
❸	$a-b$의 값 구하기	20 %

0139 $P(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로 조건 ㈎에서 $Q(x)=x+k$ (k는 상수)라 하면

$P(x)=(x-2)^2(x+k)+2(x+k)$ …… ㉠

조건 ㈏에서 $P(1)=0$이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$P(1)=1+k+2(1+k)$, $0=3+3k$

$\therefore k=-1$

따라서 $P(x)=(x-2)^2(x-1)+2(x-1)$이므로

$P(3)=6$ 답 ①

유형 031 인수정리 – 이차식으로 나누는 경우 → 본책 33쪽

다항식 $P(x)$가 $(x-\alpha)(x-\beta)$로 나누어떨어진다.

➜ $P(\alpha)=0$, $P(\beta)=0$

0140 $P(x)=2x^3+ax^2+bx-10$이라 하면 $P(x)$가 $(x+2)(x-5)$로 나누어떨어지므로

$P(-2)=0$, $P(5)=0$

$-16+4a-2b-10=0$, $250+25a+5b-10=0$

$\therefore 2a-b=13$, $5a+b=-48$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=-23$

$\therefore P(x)=2x^3-5x^2-23x-10$

따라서 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(-1)=6$ 답 6

0141 $P(x)=x^3+3x^2+ax+b$라 하면 $P(x)$가 x^2-3x+2, 즉 $(x-1)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$P(1)=0$, $P(2)=0$

$1+3+a+b=0$, $8+12+2a+b=0$

$\therefore a+b=-4$, $2a+b=-20$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-16$, $b=12$

$\therefore b-a=28$ 답 ③

0142 $P(x)-8$이 x^2-4x-5, 즉 $(x+1)(x-5)$로 나누어떨어지므로

$P(-1)-8=0$, $P(5)-8=0$

$\therefore P(-1)=8$, $P(5)=8$

$P(2x-7)$을 $x^2-9x+18$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(2x-7)=(x^2-9x+18)Q(x)+ax+b$

$=(x-3)(x-6)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=3$, $x=6$을 각각 대입하면

$P(-1)=3a+b$, $P(5)=6a+b$

$\therefore 3a+b=8$, $6a+b=8$

두 식을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=8$

따라서 구하는 나머지는 8이다. 답 8

0143 조건 ㈎에서

$P(1+2)-P(1)=P(3)-P(1)=0$,

$P(-1+2)-P(-1)=P(1)-P(-1)=0$

$\therefore P(-1)=P(1)=P(3)$

$P(-1)=P(1)=P(3)=k$ (k는 상수)라 하면

$P(-1)-k=0$, $P(1)-k=0$, $P(3)-k=0$

이므로 $P(x)-k$는 $x+1$, $x-1$, $x-3$으로 각각 나누어떨어진다.

이때 $P(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로

$P(x)-k=(x+1)(x-1)(x-3)$

$\therefore P(x)=(x+1)(x-1)(x-3)+k$

조건 ㈏에서 $P(-2)=-12$이므로

$-15+k=-12$ $\therefore k=3$

따라서 $P(x)=(x+1)(x-1)(x-3)+3$이므로

$P(2)=0$ 답 0

다른 풀이 $P(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 x^2+ax+b (a, b는 상수)라 하면 조건 ㈏에서

$P(x)=(x+2)(x^2+ax+b)-12$

조건 ㈎에서

$P(1+2)-P(1)=0$이므로 $P(1)=P(3)$ …… ㉠

$P(-1+2)-P(-1)=0$이므로 $P(1)=P(-1)$ …… ㉡

㉠에서 $3(1+a+b)-12=5(9+3a+b)-12$

$3+3a+3b=45+15a+5b$

$\therefore 6a+b=-21$ …… ㉢

㉡에서 $3(1+a+b)-12=(1-a+b)-12$

$3+3a+3b=1-a+b$

$\therefore 2a+b=-1$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=9$

따라서 $P(x)=(x+2)(x^2-5x+9)-12$이므로

$P(2)=0$

1등급 유형 도전하기

본책 34~35쪽

0144 Step 1 $A(a)=0$이면 $A(x)$는 $x-a$를 인수로 가짐을 이용하여 (가)에 알맞은 식을 구한다.

$P(k)=\dfrac{3k}{2k-4}$ $(k=4, 5, 6, 7)$에서

$(2k-4)P(k)-3k=0$ $(k=4, 5, 6, 7)$

따라서 $A(x)=(2x-4)P(x)-3x$라 하면 $A(x)$는 사차식이고

$A(4)=A(5)=A(6)=A(7)=0$

이므로 인수정리에 의하여

$A(x)=a(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)$

$\therefore (2x-4)P(x)-3x$

$=a\times\boxed{(\text{가})\ (x-4)(x-5)(x-6)(x-7)}$ $(a\neq0)$ …… ㉠

Step 2 등식의 양변에 $x=2$, $x=1$을 각각 대입하여 (나), (다)에 알맞은 수를 구한다.

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$-6=a\times(-2)\times(-3)\times(-4)\times(-5)$

$-6=120a$ $\therefore a=\boxed{(\text{나})\ -\dfrac{1}{20}}$

㉠의 양변에 $x=1$, $a=-\dfrac{1}{20}$을 대입하면

$-2P(1)-3=-\dfrac{1}{20}\times(-3)\times(-4)\times(-5)\times(-6)$

$-2P(1)-3=-18$ $\therefore P(1)=\boxed{(\text{다})\ \dfrac{15}{2}}$

Step 3 $f(-8mn)$의 값을 구한다.

$f(x)=(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)$, $m=-\dfrac{1}{20}$, $n=\dfrac{15}{2}$이므로

$f(-8mn)=f(3)$

$=-1\times(-2)\times(-3)\times(-4)=24$

답 24

논리 Check

삼차식 $P(x)$에 대하여

$P(1)=2$, $P(2)=\dfrac{3}{2}$, $P(3)=\dfrac{4}{3}$, $P(4)=\dfrac{5}{4}$

일 때, $P(6)$의 값을 구하시오.

풀이 $P(1)=2$, $P(2)=\dfrac{3}{2}$, $P(3)=\dfrac{4}{3}$, $P(4)=\dfrac{5}{4}$에서

$P(1)-2=0$, $2P(2)-3=0$, $3P(3)-4=0$,

$4P(4)-5=0$

따라서 $A(x)=xP(x)-x-1$이라 하면 $A(x)$는 사차식이고

$A(1)=A(2)=A(3)=A(4)=0$

이므로 인수정리에 의하여

$A(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

$\therefore xP(x)-x-1$

$=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ $(a\neq0)$ … ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-1=a\times(-1)\times(-2)\times(-3)\times(-4)$

$-1=24a$ $\therefore a=-\dfrac{1}{24}$

㉠의 양변에 $x=6$, $a=-\dfrac{1}{24}$을 대입하면

$6P(6)-7=-\dfrac{1}{24}\times5\times4\times3\times2$

$6P(6)-7=-5$

$\therefore P(6)=\dfrac{1}{3}$ 답 $\dfrac{1}{3}$

0145 Step 1 $P(x)$의 차수와 최고차항의 계수를 구한다.

$P(x)$를 $(x-a)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $2P(x)+4x^2-5$이므로 $2P(x)+4x^2-5$는 상수이거나 차수가 $(x-a)^2$보다 낮아야 한다.

따라서 $P(x)=-2x^2+mx+n$ (m, n은 상수)이라 하자.

Step 2 $P(-1)$, $P(3)$의 값을 이용하여 $P(x)$를 구한다.

$\{P(x)\}^2-2P(x)+4$를 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$\{P(x)\}^2-2P(x)+4$

$=(x^2-2x-3)Q_1(x)+3$

$=(x+1)(x-3)Q_1(x)+3$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$\{P(-1)\}^2-2P(-1)+4=3$

$\{P(-1)\}^2-2P(-1)+1=0$

$\{P(-1)-1\}^2=0$ $\therefore P(-1)=1$

즉 $-2-m+n=1$이므로 $m-n=-3$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$\{P(3)\}^2-2P(3)+4=3$, $\{P(3)\}^2-2P(3)+1=0$

$\{P(3)-1\}^2=0$ $\therefore P(3)=1$

즉 $-18+3m+n=1$이므로 $3m+n=19$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$m=4$, $n=7$

$\therefore P(x)=-2x^2+4x+7$

Step 3 $P(a^2)$의 값을 구한다.

$P(x)$를 $(x-a)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$P(x)=(x-a)^2Q_2(x)+2P(x)+4x^2-5$

$\therefore (x-a)^2Q_2(x)=-P(x)-4x^2+5$

$=-(-2x^2+4x+7)-4x^2+5$

$=-2x^2-4x-2$

$=-2(x+1)^2$

따라서 $x-a=x+1$이므로 $a=-1$

$\therefore P(a^2)=P(1)=9$ 답 9

0146 Step 1 조건 (가)를 이용하여 $A(x)$, $B(x)$를 구한다.

$B(x)=x^3+px^2+qx+r$ (p, q, r는 상수)라 하면 조건 (가)에서

$(x^2+1)A(x)=B(x^2)-2x^2$

$=x^6+px^4+qx^2+r-2x^2$

$=x^6+px^4+(q-2)x^2+r$

따라서 $A(x)$는 짝수 차수의 항과 상수항만으로 이루어진 사차식이어야 하고 $A(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$A(x)=x^4+ax^2+b$ (a, b는 상수)

라 하면

$(x^2+1)(x^4+ax^2+b)=x^6+px^4+(q-2)x^2+r$

$\therefore x^6+(a+1)x^4+(a+b)x^2+b$

$=x^6+px^4+(q-2)x^2+r$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+1=p$, $a+b=q-2$, $b=r$

$\therefore p=a+1$, $q=a+b+2$, $r=b$

$\therefore B(x)=x^3+(a+1)x^2+(a+b+2)x+b$

Step 2 조건 (나)를 이용하여 $R(x)$를 구한다.

조건 (나)에서

$A(x)-B(x)$

$=(x^4+ax^2+b)-\{x^3+(a+1)x^2+(a+b+2)x+b\}$

$=x^4-x^3-x^2-(a+b+2)x$

이므로 $x^4-x^3-x^2-(a+b+2)x=x^2R(x)$

이때 $a+b+2=0$이어야 하므로

$x^4-x^3-x^2=x^2R(x)$ $\therefore R(x)=x^2-x-1$

Step 3 나눗셈에 대한 등식을 이용하여 $A(2)$의 값을 구한다.

$a+b+2=0$에서 $b=-a-2$이므로

$A(x)=x^4+ax^2-a-2$, $B(x)=x^3+(a+1)x^2-a-2$

$A(x)$를 $B(x)$로 나누었을 때의 몫을 $x+c$라 하면

x^4+ax^2-a-2

$=\{x^3+(a+1)x^2-a-2\}(x+c)+x^2-x-1$ ····· ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1=-2(-1+c)+1$, $2c=4$ $\therefore c=2$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-a-2=(-a-2)c-1$, $-a-2=-2a-5$

$\therefore a=-3$

따라서 $A(x)=x^4-3x^2+1$이므로 $A(2)=5$ 답 5

0147 Step 1 $(x+1)P(x)$를 $(x-2)(x+4)$로 나누었을 때의 나머지를 구한다.

조건 (가)에서 $P(3)=14$ ····· ㉠

조건 (나)에서 $P(x)$를 $(x-2)(x+4)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$P(x)=(x-2)(x+4)Q_1(x)+5x-1$

양변에 $x+1$을 곱하면

$(x+1)P(x)$

$=(x-2)(x+4)(x+1)Q_1(x)+(5x-1)(x+1)$

따라서 $(x+1)P(x)$를 $(x-2)(x+4)$로 나누었을 때의 나머지는 $(5x-1)(x+1)$을 $(x-2)(x+4)$, 즉 x^2+2x-8로 나누었을 때의 나머지와 같다. 이때

$(5x-1)(x+1)=5x^2+4x-1=5(x^2+2x-8)-6x+39$

이므로 $(x+1)P(x)$를 $(x-2)(x+4)$로 나누었을 때의 나머지는 $-6x+39$이다.

Step 2 $Q(3)$의 값을 구한다.

$(x+1)P(x)=(x-2)(x+4)Q(x)-6x+39$이므로 양변에 $x=3$을 대입하면

$4P(3)=7Q(3)+21$, $4\times14=7Q(3)+21$ ($\because$ ㉠)

$\therefore Q(3)=5$ 답 5

0148 Step 1 다항식 $P(x)$를 $(x-1)^2$, $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라 하고 $Q_1(-1)$, $Q_2(1)$의 값을 구한다.

$P(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$P(x)=(x-1)^2Q_1(x)+x+4$ ····· ㉠

$P(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$P(x)=(x+1)^2Q_2(x)+x$ ····· ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $P(1)=5$

㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $P(-1)=-1$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $P(-1)=4Q_1(-1)+3$

$-1=4Q_1(-1)+3$ $\therefore Q_1(-1)=-1$

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면 $P(1)=4Q_2(1)+1$

$5=4Q_2(1)+1$ $\therefore Q_2(1)=1$

Step 2 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$를 각각 $(x+1)^2$, $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_3(x)$, $Q_4(x)$라 하고 나눗셈에 대한 등식을 세운다.

$Q_1(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_3(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$Q_1(x)=(x+1)^2Q_3(x)+ax+b$

양변에 $x=-1$을 대입하면 $Q_1(-1)=-a+b$

$-1=-a+b$ $\therefore b=a-1$

$\therefore Q_1(x)=(x+1)^2Q_3(x)+ax+a-1$ ····· ㉢

$Q_2(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_4(x)$, 나머지를 $cx+d$ (c, d는 상수)라 하면

$Q_2(x)=(x-1)^2Q_4(x)+cx+d$

양변에 $x=1$을 대입하면 $Q_2(1)=c+d$

$1=c+d$ $\therefore d=-c+1$

$\therefore Q_2(x)=(x-1)^2Q_4(x)+cx-c+1$ ····· ㉣

Step 3 $P(x)$를 $(x^2-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 구한다.

㉢을 ㉠에 대입하면

$P(x)$

$=(x-1)^2\{(x+1)^2Q_3(x)+ax+a-1\}+x+4$

$=(x-1)^2(x+1)^2Q_3(x)+(ax+a-1)(x-1)^2+x+4$

$=(x^2-1)^2Q_3(x)+(ax+a-1)(x-1)^2+x+4$ ····· ㉤

㉣을 ㉡에 대입하면

$P(x)$

$=(x+1)^2\{(x-1)^2Q_4(x)+cx-c+1\}+x$

$=(x+1)^2(x-1)^2Q_4(x)+(cx-c+1)(x+1)^2+x$

$=(x^2-1)^2Q_4(x)+(cx-c+1)(x+1)^2+x$ ····· ㉥

㉤에서 $P(x)$를 $(x^2-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $(ax+a-1)(x-1)^2+x+4$이고, ㉥에서 $P(x)$를 $(x^2-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $(cx-c+1)(x+1)^2+x$이므로

$(ax+a-1)(x-1)^2+x+4$
$=(cx-c+1)(x+1)^2+x$ …… ㉠

이때 ㉠의 좌변의 최고차항의 계수는 a이고, 우변의 최고차항의 계수는 c이므로 $a=c$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$a+3=-c+1$ $\therefore a+c=-2$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-1$, $c=-1$

따라서 구하는 나머지는

$(-x-2)(x-1)^2+x+4=-x^3+4x+2$

답 $-x^3+4x+2$

0149 Step 1 $P(x)+Q(x)$의 인수의 조건을 파악한다.

조건 (가)에서

$\{P(x)+Q(x)\}\{P(x)-Q(x)\}$
$=(x-1)^2(x-3)(x-5)$ …… ㉠

따라서 $P(x)+Q(x)$, $P(x)-Q(x)$는 각각 이차식이고 $(x-1)^2(x-3)(x-5)$의 인수이다.

이때 $P(x)+Q(x)$가 $x-3$을 인수로 가지면 $P(3)+Q(3)=0$이므로 조건 (나)에서

$|P(5)+Q(5)|<0$

그런데 $|P(5)+Q(5)|\geq 0$이므로 $P(x)+Q(x)$는 $x-3$을 인수로 갖지 않는다.

즉 $P(x)+Q(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 갖거나 $(x-1)(x-5)$를 인수로 갖는다.

Step 2 $P(x)+Q(x)$, $P(x)-Q(x)$를 구한다.

(i) $P(x)+Q(x)=a(x-1)^2$ $(a\neq 0)$인 경우

$|P(5)+Q(5)|=|16a|$, $|P(3)+Q(3)|=|4a|$이고 $|16a|>|4a|$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $P(x)+Q(x)=a(x-1)(x-5)$ $(a\neq 0)$인 경우

$|P(5)+Q(5)|=0$, $|P(3)+Q(3)|=|-4a|$이고 $0<|-4a|$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $P(x)+Q(x)=a(x-1)(x-5)$이므로 ㉠에 의하여 $P(x)-Q(x)=\frac{1}{a}(x-1)(x-3)$

이때 $P(7)-Q(7)=8$이므로 $\frac{24}{a}=8$ $\therefore a=3$

$\therefore P(x)+Q(x)=3(x-1)(x-5)$ …… ㉡

$P(x)-Q(x)=\frac{1}{3}(x-1)(x-3)$ …… ㉢

Step 3 $P(6)$의 값을 구한다.

㉡+㉢을 하면

$2P(x)=3(x-1)(x-5)+\frac{1}{3}(x-1)(x-3)$
$=\frac{10}{3}x^2-\frac{58}{3}x+16$

$\therefore P(x)=\frac{5}{3}x^2-\frac{29}{3}x+8$

$\therefore P(6)=10$

답 10

0150 Step 1 조건 (가)를 이용하여 $B(x)$의 차수를 구한다.

조건 (가)에서

$A(x)=\{x^2+B(x)\}(x-1)+\{B(x)\}^2-x^2$ … ㉠

이때 $\{B(x)\}^2-x^2$은 상수이거나 차수가 $x^2+B(x)$보다 낮아야 한다.

그런데 $B(x)$의 차수가 n $(n\geq 2)$이면 $\{B(x)\}^2-x^2$의 차수는 $2n$, $x^2+B(x)$의 차수는 n이므로 조건을 만족시키지 않는다.

또 $B(x)$가 상수이면 $\{B(x)\}^2-x^2$의 차수와 $x^2+B(x)$의 차수가 2로 같으므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $B(x)$의 차수는 1이다.

Step 2 $B(x)=x+k$ (k는 상수)라 하고 조건 (나)를 만족시키는 k의 값을 구한다.

$x^2+B(x)$는 이차식이므로 $\{B(x)\}^2-x^2$은 상수이거나 일차식이어야 하고 $B(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로

$B(x)=x+k$ (k는 상수)

라 하면 ㉠에서

$A(x)=(x^2+x+k)(x-1)+(x+k)^2-x^2$
$=(x^2+x+k)(x-1)+2kx+k^2$

이때 조건 (나)에서 $A(x)$가 $x+k$로 나누어떨어지므로

$A(-k)=0$

$(k^2-k+k)(-k-1)-2k^2+k^2=0$

$-k^3-2k^2=0$, $k^2(k+2)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=0$

Step 3 $A(3)$의 값을 구한다.

(i) $k=-2$인 경우

$A(x)=(x^2+x-2)(x-1)-4x+4$이므로

$A(0)=6$

따라서 $A(0)\neq 0$이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $k=0$인 경우

$A(x)=(x^2+x)(x-1)$이므로 $A(0)=0$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $A(x)=(x^2+x-2)(x-1)-4x+4$

$\therefore A(3)=12$

답 12

0151 Step 1 $P(0)$의 값과 $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$의 값에 대한 조건을 구한다.

조건 (가)에서 $P(1)-2=0$ 또는 $P(2)-4=0$

$\therefore P(1)=2$ 또는 $P(2)=4$

조건 (나)에서 $\{P(0)\}^2=0$이므로 $P(0)=0$

또 $P(3)\{P(3)-6\}=0$이므로

$P(3)=0$ 또는 $P(3)-6=0$

$\therefore P(3)=0$ 또는 $P(3)=6$

Step 2 $P(3)$의 값에 따라 경우를 나누어 $P(x)$를 구한다.

(i) $P(3)=0$인 경우

$P(0)=0$, $P(3)=0$이고 $P(x)$는 이차식이므로

$P(x)=ax(x-3)$ $(a\neq 0)$

이라 하자.

$P(1)=2$일 때, $-2a=2$ $\therefore a=-1$

$\therefore P(x)=-x(x-3)$

$P(2)=4$일 때, $-2a=4$ $\therefore a=-2$

$\therefore P(x)=-2x(x-3)$

(ii) $P(3)=6$인 경우

$P(0)=0$, $P(3)=6$이므로

$P(0)-0=0$, $P(3)-6=0$

따라서

$P(x)-2x=bx(x-3)$ $(b\neq0)$

이라 하자.

$P(1)=2$일 때, $P(1)-2=0$이므로

$-2b=0$ $\therefore b=0$

그런데 $b\neq0$이므로 모순이다.

$P(2)=4$일 때, $P(2)-4=0$이므로

$-2b=0$ $\therefore b=0$

그런데 $b\neq0$이므로 모순이다.

Step 3 $P(x)$의 개수를 구한다.

(i), (ii)에서 이차식 $P(x)$는 2개이다. 답 2

시험 만점 완성하기

본책 36~39쪽

0152 전략 주어진 등식의 좌변을 x, y, z에 대하여 정리한 후 계수비교법을 이용한다.

$a(2x-y)-b(y+z)-c(y-2z)$

$=2ax-(a+b+c)y-(b-2c)z$

이므로

$2ax-(a+b+c)y-(b-2c)z=4x-10z$

이 등식이 x, y, z에 대한 항등식이므로

$2a=4$, $a+b+c=0$, $b-2c=10$

$\therefore a=2$, $b+c=-2$, $b-2c=10$

$b+c=-2$, $b-2c=10$을 연립하여 풀면

$b=2$, $c=-4$ $\therefore a-b-c=4$ 답 ④

0153 전략 등식의 양변에 적당한 수를 대입하여 $a-b$, ab의 값을 구한다.

주어진 등식의 양변에 $x=-3$, $x=-1$을 각각 대입하면

$16=4(a-b)$, $-6=2ab$ $\therefore a-b=4$, $ab=-3$

$\therefore a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$=4^3+3\times(-3)\times4=28$ 답 ⑤

0154 전략 주어진 등식의 양변에 $x=\frac{1}{2}$, $x=-\frac{1}{2}$을 각각 대입하여 계수에 대한 식으로 나타낸다.

주어진 등식의 양변에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면

$(-1)^6=a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_{11}}{2^{11}}+\frac{a_{12}}{2^{12}}$ ····· ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-\frac{1}{2}$을 대입하면

$0=a_0-\frac{a_1}{2}+\cdots-\frac{a_{11}}{2^{11}}+\frac{a_{12}}{2^{12}}$ ····· ㉡

㉠+㉡을 하면

$1=2\left(a_0+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{10}}{2^{10}}+\frac{a_{12}}{2^{12}}\right)$

$\therefore a_0+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{10}}{2^{10}}+\frac{a_{12}}{2^{12}}=\frac{1}{2}$ 답 ③

0155 전략 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하고 나눗셈에 대한 등식을 세운다.

$(x-2)(x+3)(x+a)+b(x-2)$를 x^2-3x+4로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

$(x-2)(x+3)(x+a)+b(x-2)=(x^2-3x+4)(x+c)$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 등식의 양변에 $x=-3$, $x=0$, $x=2$를 각각 대입하면

$-5b=22(-3+c)$, $-6a-2b=4c$, $0=2(2+c)$

$\therefore a=-6$, $b=22$, $c=-2$

$\therefore a+b=16$ 답 ③

0156 전략 나눗셈에 대한 등식을 세우고 양변에 적당한 수를 대입하여 a, b의 값을 구한다.

$x^n(x^2+ax+b)$를 $(x-5)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^n(x^2+ax+b)=(x-5)^2Q(x)+5^n(x-5)$ ····· ㉠

㉠의 양변에 $x=5$를 대입하면

$5^n(25+5a+b)=0$, $25+5a+b=0$ ($\because 5^n\neq0$)

$\therefore b=-5a-25$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^n(x^2+ax-5a-25)=(x-5)^2Q(x)+5^n(x-5)$

$x^n(x-5)(x+a+5)=(x-5)^2Q(x)+5^n(x-5)$

$\therefore x^n(x+a+5)=(x-5)Q(x)+5^n$

양변에 $x=5$를 대입하면

$5^n(5+a+5)=5^n$, $a+10=1$ ($\because 5^n\neq0$)

$\therefore a=-9$

$a=-9$를 ㉡에 대입하면 $b=20$

$\therefore b-a=29$ 답 ④

0157 전략 나머지정리를 이용하여 $a+b+c+d$의 값을 구한다.

$P(x)=ax^9+bx^7+cx^3+dx+2$라 하면 나머지정리에 의하여

$P(-1)=11$, $-a-b-c-d+2=11$

$\therefore a+b+c+d=-9$

따라서 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(1)=a+b+c+d+2=-9+2=-7$ 답 ②

0158 전략 나눗셈에 대한 등식을 세워서 $Q(x)$를 구한다.

$(x-1)P(x)+x^2$을 $P(x)+x$로 나누었을 때 몫은 $Q(x)$, 나머지는 $P(x)+2x$이므로

$(x-1)P(x)+x^2=\{P(x)+x\}Q(x)+P(x)+2x$

$\therefore \{P(x)+x\}Q(x)=(x-1)P(x)+x^2-P(x)-2x$

$=(x-2)P(x)+x(x-2)$

$=\{P(x)+x\}(x-2)$

이때 $P(x)+x\neq 0$이므로 $\quad Q(x)=x-2$

한편 $(x-1)P(x)+x^2$을 $P(x)+x$로 나누었을 때의 나머지가 $P(x)+2x$이므로 $P(x)+2x$는 상수이거나 차수가 $P(x)+x$보다 낮아야 한다.

따라서 $P(x)=-2x+k$ (k는 상수)라 하면 $P(x)$를 $Q(x)$로 나누었을 때의 나머지가 12이므로

$P(2)=12, \quad -4+k=12 \quad \therefore k=16$

즉 $P(x)=-2x+16$이므로

$P(-10)=36$ 답 ③

0159 전략 $P(ax+b)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $P(a\alpha+b)$임을 이용한다.

나머지정리에 의하여

$P(-2)=4, \ P(2)=-7$

따라서 $P\left(\frac{2}{3}x-4\right)-P\left(4-\frac{2}{3}x\right)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$P\left(\frac{2}{3}\times 3-4\right)-P\left(4-\frac{2}{3}\times 3\right)=P(-2)-P(2)$

$=4-(-7)=11$ 답 ②

0160 전략 나눗셈에 대한 등식을 세우고 양변에 적당한 수를 대입하여 $Q(2)$의 값을 구한다.

$(x-2)^2P(x)$를 $5x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$\left(-\frac{2}{5}-2\right)^2P\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{144}{25}\times 25=144$

이므로

$(x-2)^2P(x)=(5x+2)Q(x)+144 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$Q(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(2)$이므로 ㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=12Q(2)+144$

$\therefore Q(2)=-12$ 답 ①

0161 전략 2502와 625를 각각 x에 대한 일차식으로 나타낸다.

$x=625$라 하면 $\quad 2502=4x+2$

$(4x+2)^{12}$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$(4x+2)^{12}=xQ(x)+R \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$R=2^{12}=4096$

㉠의 양변에 $x=625$를 대입하면

$2502^{12}=625Q(625)+4096$

$=625\{Q(625)+6\}+346$

따라서 2502^{12}을 625로 나누었을 때의 나머지는 346이다.

답 ④

0162 전략 인수정리와 나머지정리를 이용한다.

$P(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지므로 $\quad P(1)=0$

$P(x)$를 $x-6$으로 나누었을 때의 나머지가 10이므로

$P(6)=10$

$P(x)$를 x^2-7x+6으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-7x+6)Q(x)+ax+b$

$=(x-1)(x-6)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=1$, $x=6$을 각각 대입하면

$P(1)=a+b, \ P(6)=6a+b$

$\therefore a+b=0, \ 6a+b=10$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=2, \ b=-2$

따라서 $R(x)=2x-2$이므로

$R(2)=2$ 답 ②

0163 전략 나눗셈에 대한 등식을 세우고 인수정리를 이용한다.

$P(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x-1)^2(ax+b)$

$12-P(x)$가 $(x+1)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$12-P(-1)=0, \ 12-P(2)=0$

$12-4(-a+b)=0, \ 12-(2a+b)=0$

$\therefore a-b=-3, \ 2a+b=12$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=3, \ b=6$

$\therefore P(x)=(x-1)^2(3x+6)$

따라서 $P(x)$를 $x+4$로 나누었을 때의 나머지는

$P(-4)=-150$ 답 ④

0164 전략 $P(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하고 주어진 등식에 대입한 후 계수 비교법을 이용한다.

$P(x)$가 이차 이하의 다항식이므로

$P(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면 주어진 등식은

$(ax^2+bx+c)^2=3(ax^4+bx^2+c)+18x^2$

$\therefore a^2x^4+2abx^3+(2ac+b^2)x^2+2bcx+c^2$

$=3ax^4+(3b+18)x^2+3c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a^2=3a, \ 2ab=0, \ 2ac+b^2=3b+18, \ 2bc=0, \ c^2=3c$

$a^2=3a$에서 $\quad a(a-3)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=3$

(i) $a=0$일 때

$2ab=0$이고 $2ac+b^2=3b+18$에서

$b^2-3b-18=0, \quad (b+3)(b-6)=0$

$\therefore b=-3$ 또는 $b=6$

$b=-3$ 또는 $b=6$일 때 $2bc=0$이려면 $\quad c=0$

$c=0$은 $c^2=3c$를 만족시키므로

$P(x)=-3x$ 또는 $P(x)=6x$

(ii) $a=3$일 때

$2ab=0$에서 $\quad b=0$

$2ac+b^2=3b+18$에서 $\quad 6c=18 \quad \therefore c=3$

$b=0$, $c=3$은 $2bc=0$, $c^2=3c$를 모두 만족시키므로

$P(x)=3x^2+3$

(i), (ii)에서 구하는 다항식 $P(x)$는 3개이다. 답 3

0165 전략 $(x^5-5x^3+10x^2-4x+2)^2(2x-1)^{10}$
$=a_0+a_1x+\cdots+a_{19}x^{19}+a_{20}x^{20}$
이라 하고 양변에 적당한 수를 대입하여 계수에 대한 식으로 나타낸다.

다항식 $(x^5-5x^3+10x^2-4x+2)^2(2x-1)^{10}$의 차수는 20이므로

$$(x^5-5x^3+10x^2-4x+2)^2(2x-1)^{10}$$
$$=a_0+a_1x+\cdots+a_{19}x^{19}+a_{20}x^{20} \quad \cdots\cdots ㉠$$
(a_0, a_1, a_2, …, a_{20}은 상수)

이라 하자.

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면
$a_0=4$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$16=a_0+a_1+\cdots+a_{19}+a_{20}$

따라서 상수항을 제외한 모든 항의 계수의 합은
$a_1+a_2+\cdots+a_{20}=16-a_0$
$=16-4=12$ 답 12

0166 전략 조건 (가)에서 $Q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식임을 알고 나머지정리를 이용한다.

조건 (나)에서 $P(-1)=-3$, $Q(2)=3$

조건 (가)에서 $P(x)=(x-2)Q(x)$의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$P(-1)=-3Q(-1)$, $-3=-3Q(-1)$
$\therefore Q(-1)=1$

이때 $Q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이므로
$Q(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)
라 하면 $Q(-1)=1$, $Q(2)=3$에서
$1-a+b=1$, $4+2a+b=3$
$\therefore a-b=0$, $2a+b=-1$

두 식을 연립하여 풀면
$a=-\frac{1}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$

즉 $Q(x)=x^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$이므로
$P(x)=(x-2)\left(x^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)$

따라서 $P(x)Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는
$P(1)Q(1)=-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=-\frac{1}{9}$ 답 $-\frac{1}{9}$

0167 전략 나머지정리와 주어진 등식을 이용하여 $P(2)$, $P(4)$의 값을 구한다.

$P(x)$를 x^2-6x+8로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$P(x)=(x^2-6x+8)Q(x)+ax+b$
$=(x-2)(x-4)Q(x)+ax+b$ ……㉠

한편 $P(x)$를 $x-6$으로 나누었을 때의 나머지가 -1이므로
$P(6)=-1$

$P(x-2)=P(x)+x^2-5x$ ……㉡

㉡의 양변에 $x=6$을 대입하면
$P(4)=P(6)+6=-1+6=5$

㉡의 양변에 $x=4$를 대입하면
$P(2)=P(4)-4=5-4=1$

㉠의 양변에 $x=2$, $x=4$를 각각 대입하면
$P(2)=2a+b$, $P(4)=4a+b$
$\therefore 2a+b=1$, $4a+b=5$

두 식을 연립하여 풀면
$a=2$, $b=-3$

따라서 구하는 나머지는 $2x-3$이다. 답 $2x-3$

0168 전략 나눗셈에 대한 등식을 세우고 나머지정리를 이용한다.

$P(x)$를 $x^2-7x+10$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면
$P(x)=(x^2-7x+10)Q(x)+3x-1$
$=(x-2)(x-5)Q(x)+3x-1$ ……㉠

$(3x+2)P(x+4)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는
$\{3\times(-2)+2\}\times P(-2+4)=-4P(2)$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면
$P(2)=5$

따라서 구하는 나머지는
$-4P(2)=-4\times5=-20$ 답 -20

0169 전략 나눗셈에 대한 등식을 세우고 인수정리를 이용한다.

$P(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로 $P(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $x+k$ (k는 상수)라 하면 나머지도 $x+k$이므로
$P(x)=(x^2+x-2)(x+k)+x+k$ ……㉠

$(x-1)P(x)$가 x^2+x-2, 즉 $(x+2)(x-1)$로 나누어떨어지므로 $P(x)$는 $x+2$로 나누어떨어진다.
$\therefore P(-2)=0$

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면
$P(-2)=-2+k$, $-2+k=0$
$\therefore k=2$

따라서 $P(x)=(x^2+x-2)(x+2)+x+2$이므로
$P(3)=55$ 답 55

0170 전략 주어진 조건과 나머지정리를 이용하여 $P(x)$를 구한다.

$P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면 조건 (가)에서
$x^3+ax^2+bx+c=x^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+c\right)$
$=cx^3+bx^2+ax+1$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$c=1$, $a=b$

즉 $P(x)=x^3+ax^2+ax+1$이고 조건 (나)에서
$P(3)=4$, $27+9a+3a+1=4$
$\therefore a=-2$
$\therefore P(x)=x^3-2x^2-2x+1$ … ❶

따라서 $(x-3)P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는
$-2P(1)=-2\times(-2)=4$ … ❷

답 4

단계	채점 요소	배점
❶	$P(x)$ 구하기	3점
❷	$(x-3)P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지 구하기	2점

0171 전략 $P(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지와 $P(-2)$의 값을 구한다.

$P(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면
$P(x)=(x-1)^3Q_1(x)+2x^2-x+2$
$=(x-1)^3Q_1(x)+2(x-1)^2+3x$
$=(x-1)^2\{(x-1)Q_1(x)+2\}+3x$
따라서 $P(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $3x$이다. … ❶

$P(x)$를 $(x+2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면
$P(x)=(x+2)^2Q_2(x)+5x-2$
양변에 $x=-2$를 대입하면
$P(-2)=-12$ …… ㉠ … ❷

$P(x)$를 $(x-1)^2(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면
$P(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉡

이때 $P(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $3x$이므로 ax^2+bx+c를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지도 $3x$이다.
즉 $ax^2+bx+c=a(x-1)^2+3x$이므로 이것을 ㉡에 대입하면
$P(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+a(x-1)^2+3x$
양변에 $x=-2$를 대입하면
$P(-2)=9a-6$, $-12=9a-6$ ($\because$ ㉠)
$\therefore a=-\frac{2}{3}$
따라서 $R(x)=-\frac{2}{3}(x-1)^2+3x$이므로
$R(4)=6$ … ❸

답 6

단계	채점 요소	배점
❶	$P(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지 구하기	2점
❷	$P(-2)$의 값 구하기	1점
❸	$R(4)$의 값 구하기	3점

0172 전략 주어진 조건을 이용하여 $P(x)$, $Q(x)$를 구한다.

조건 (나)에서
$\{P(x)+Q(x)\}\{P(x)-Q(x)\}=4x^2-4x+8$
이때 조건 (가)에서
$P(x)+Q(x)=2$ …… ㉠
이므로
$2\{P(x)-Q(x)\}=4x^2-4x+8$
$\therefore P(x)-Q(x)=2x^2-2x+4$ …… ㉡ … ❶

㉠+㉡을 하면 $2P(x)=2x^2-2x+6$
$\therefore P(x)=x^2-x+3$
이것을 ㉠에 대입하면 $x^2-x+3+Q(x)=2$
$\therefore Q(x)=-x^2+x-1$ … ❷
따라서 $P(x+1)Q(x-1)$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는
$P(1+1)Q(1-1)=P(2)Q(0)$
$=5\times(-1)=-5$ … ❸

답 -5

단계	채점 요소	배점
❶	$P(x)-Q(x)$ 구하기	2점
❷	$P(x)$, $Q(x)$ 구하기	1점
❸	$P(x+1)Q(x-1)$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지 구하기	1점

0173 전략 인수정리를 이용하여 $P(x)$를 구하고 조립제법을 연속으로 이용한다.

$P(-4)=P(-2)=P(0)=0$이므로 $P(x)$는 $x+4$, $x+2$, x로 각각 나누어떨어진다.
이때 $P(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로
$P(x)=(x+4)(x+2)x=x^3+6x^2+8x$ … ❶
조립제법을 연속으로 이용하면 다음과 같다.

-1	1	6	8	0
		-1	-5	-3
-1	1	5	3	-3
		-1	-4	
-1	1	4	-1	
		-1		
	1	3		

위의 조립제법에서
x^3+6x^2+8x
$=(x+1)(x^2+5x+3)-3$
$=(x+1)\{(x+1)(x+4)-1\}-3$
$=(x+1)[(x+1)\{(x+1)+3\}-1]-3$
$=(x+1)\{(x+1)^2+3(x+1)-1\}-3$
$=(x+1)^3+3(x+1)^2-(x+1)-3$ … ❷
따라서 $a=1$, $b=3$, $c=-1$, $d=-3$이므로
$abcd=9$ … ❸

답 9

단계	채점 요소	배점
❶	$P(x)$ 구하기	2점
❷	$P(x)$를 $a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$의 꼴로 나타내기	2점
❸	$abcd$의 값 구하기	1점

03 인수분해

셀프 CHECK → 본책 40쪽

A 답 (1) $3b(ab-2)$
(2) $(x+2y)(x+2y-2)$
(3) $(1-5m)(1-n)$

B 답 (1) $(3x+2y)^2$
(2) $(4x+5y)(4x-5y)$
(3) $(x+2)(x+7)$
(4) $(2x+1)(3x-2)$
(5) $(a-b-c)^2$
(6) $(x+2y)^3$
(7) $(a-2)(a^2+2a+4)$
(8) $(x^2+3xy+9y^2)(x^2-3xy+9y^2)$
(9) $(a+b+2c)(a^2+b^2+4c^2-ab-2bc-2ca)$

C 답 (1) $(x+1)(x-5)$
(2) $(x+1)^2(x^2+2x-4)$
(3) $(x+3)(x-3)(x^2+2)$
(4) $(x^2+2x+6)(x^2-2x+6)$
(5) $(x-5)(x+3y-1)$
(6) $(x+y+3)(x-y+1)$
(7) $(x+4)(x+1)(x-3)$
(8) $(x+2)(x+1)(x-1)(x-3)$

내신유형 다지기 → 본책 41~47쪽

유형 032 인수분해 공식을 이용한 다항식의 인수분해 → 본책 41쪽

① $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$
② $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$
$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$
③ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
④ $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
⑤ $a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

0174 ② $x^3+2x^2-24x=x(x^2+2x-24)$
$=x(x-4)(x+6)$
③ $8x^3+27y^3=(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$
④ $a^2-(b+c)^2=\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}$
$=(a+b+c)(a-b-c)$
따라서 옳지 않은 것은 ③이다. 답 ③

0175 $x(x-4y)+4y(y-2z)+4z(x+z)$
$=x^2+4y^2+4z^2-4xy-8yz+4zx$
$=(x-2y+2z)^2$
따라서 인수인 것은 ②이다. 답 ②

0176 $(x+y)^3-64(x-y)^3$
$=(x+y)^3-\{4(x-y)\}^3$
$=\{x+y-4(x-y)\}$
$\times[(x+y)^2+4(x+y)(x-y)+\{4(x-y)\}^2]$
$=(-3x+5y)$
$\times(x^2+2xy+y^2+4x^2-4y^2+16x^2-32xy+16y^2)$
$=-(3x-5y)(21x^2-30xy+13y^2)$ … ❶
따라서 $3x-5y$가 $(x+y)^3-64(x-y)^3$의 인수이므로
$a=3,\ b=5$
$\therefore ab=15$ … ❷
답 15

단계	채점 요소	비율
❶	$(x+y)^3-64(x-y)^3$을 인수분해하기	70 %
❷	ab의 값 구하기	30 %

0177 ㄱ. $x^3-5x^2+5x-1=x^3-1-5x(x-1)$
$=(x-1)(x^2+x+1)-5x(x-1)$
$=(x-1)(x^2-4x+1)$
ㄴ. $a^6-b^6=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$=(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
ㄷ. $x^3-x^2y-xz^2+yz^2=x^2(x-y)-z^2(x-y)$
$=(x-y)(x^2-z^2)$
$=(x-y)(x+z)(x-z)$
ㄹ. $a^3-27b^3+c^3+9abc$
$=(a-3b+c)(a^2+9b^2+c^2+3ab+3bc-ca)$
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ③

다른 풀이 ㄴ. a^6-b^6
$=(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$
$=(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

유형 033 공통부분이 있는 다항식의 인수분해 → 본책 41쪽

(1) 공통부분이 있는 다항식의 인수분해는 다음과 같은 순서로 한다.
(i) 공통부분을 t로 치환한다.
(ii) (i)의 식을 인수분해 공식을 이용하여 인수분해한다.
(iii) (ii)의 식에 t 대신 공통부분을 대입한다.
(2) ( )( )( )( )+k의 꼴
➜ 공통부분이 생기도록 짝을 지어 전개한 후 치환한다.

0178 $(x-4)(x-2)(x+3)(x+5)+48$
$=\{(x-4)(x+5)\}\{(x-2)(x+3)\}+48$
$=(x^2+x-20)(x^2+x-6)+48$

$x^2+x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t-20)(t-6)+48$

$=t^2-26t+168=(t-12)(t-14)$

$=(x^2+x-12)(x^2+x-14)$

$=(x+4)(x-3)(x^2+x-14)$

따라서 인수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0179 $x(x+4)(x^2+4x-1)-20$

$=(x^2+4x)(x^2+4x-1)-20$

$x^2+4x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=t(t-1)-20$

$=t^2-t-20=(t-5)(t+4)$

$=(x^2+4x-5)(x^2+4x+4)$

$=(x-1)(x+5)(x+2)^2$

따라서 $a=5$, $b=2$이므로

$a-2b=5-2\times2=1$ 답 ①

0180 $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+k$

$=\{(x+2)(x+5)\}\{(x+3)(x+4)\}+k$

$=(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)+k$

$x^2+7x=t$로 놓으면

(주어진 식)$=(t+10)(t+12)+k$

$=t^2+22t+120+k$ …… ㉠

주어진 식이 $(x^2+ax+b)^2$으로 인수분해되려면 ㉠이 t에 대한 완전제곱식이 되어야 한다.

즉 $t^2+22t+120+k=(t+11)^2$이어야 하므로

$120+k=11^2$ $\therefore k=1$

이때 $(t+11)^2=(x^2+7x+11)^2$이므로

$a=7$, $b=11$ $\therefore a+b+k=19$ 답 ⑤

0181 $x^2-x=t$로 놓으면

$(x^2-x)(x^2-x+6)+k(x^2-x)+10$

$=t(t+6)+kt+10$

$=t^2+(k+6)t+10$,

$(x^2-x+a)(x^2-x+b)=(t+a)(t+b)$

$=t^2+(a+b)t+ab$

즉 $t^2+(k+6)t+10=t^2+(a+b)t+ab$이므로

$k+6=a+b$, $10=ab$

$ab=10$을 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 10)$, $(2, 5)$, $(5, 2)$, $(10, 1)$

따라서 $a+b=1+10=11$ 또는 $a+b=2+5=7$이므로

$k+6=11$ 또는 $k+6=7$ $\therefore k=5$ 또는 $k=1$

즉 구하는 합은 $5+1=6$ 답 6

유형 034 x^4+ax^2+b의 꼴의 다항식의 인수분해 본책 42쪽

(1) $x^2=X$로 치환하여 인수분해한다.

(2) 이차항 ax^2을 분리하여 A^2-B^2의 꼴로 변형한 후 인수분해한다.

0182 $x^2=X$로 놓으면

$x^4-29x^2+100=X^2-29X+100$

$=(X-4)(X-25)$

$=(x^2-4)(x^2-25)$

$=(x+2)(x-2)(x+5)(x-5)$

이때 $a<b<c<d$이므로

$a=-5$, $b=-2$, $c=2$, $d=5$

$\therefore ab+cd=-5\times(-2)+2\times5=20$ 답 ①

다른 풀이 $x^4-29x^2+100=(x^4-20x^2+100)-9x^2$

$=(x^2-10)^2-9x^2$

$=(x^2+3x-10)(x^2-3x-10)$

$=(x+5)(x-2)(x+2)(x-5)$

0183 $x^4-3x^2y^2+9y^4=(x^4+6x^2y^2+9y^4)-9x^2y^2$

$=(x^2+3y^2)^2-9x^2y^2$

$=(x^2-3xy+3y^2)(x^2+3xy+3y^2)$

따라서 $a=3$, $b=3$이므로

$ab=9$ 답 ②

0184 $(x+2)^2=X$로 놓으면

$(x+2)^4-13(x+2)^2+36$

$=X^2-13X+36$

$=(X-4)(X-9)$

$=\{(x+2)^2-4\}\{(x+2)^2-9\}$

$=(x+2-2)(x+2+2)(x+2-3)(x+2+3)$

$=x(x+4)(x-1)(x+5)$

따라서 인수인 것은 ②이다. 답 ②

0185 $(x^2+bx+5)(x^2+cx+5)$의 전개식에서 상수항은 $5\times5=25$이므로

$a=25$ … ❶

$\therefore x^4+6x^2+25=(x^4+10x^2+25)-4x^2$

$=(x^2+5)^2-4x^2$

$=(x^2+2x+5)(x^2-2x+5)$

따라서 $b=2$, $c=-2$ 또는 $b=-2$, $c=2$이므로 … ❷

$a-bc=25-2\times(-2)=29$ … ❸

답 29

단계	채점 요소	비율
❶	a의 값 구하기	30 %
❷	b, c의 값 구하기	50 %
❸	$a-bc$의 값 구하기	20 %

유형 035 여러 개의 문자가 포함된 다항식의 인수분해 본책 43쪽

(1) 차수가 가장 낮은 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

(2) 모든 문자의 차수가 같으면 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

0186 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2-3xy-2y^2+8x-y+6$

$=2x^2-(3y-8)x-2y^2-y+6$

$=2x^2-(3y-8)x-(y+2)(2y-3)$

$=(2x+y+2)(x-2y+3)$

따라서 $a=2$, $b=1$, $c=-2$이므로

$a+b-c=5$ 답 ⑤

참고 y에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해해도 그 결과는 같다.

0187 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2+3b^2+4ab-4a-10b+3$

$=a^2+(4b-4)a+3b^2-10b+3$

$=a^2+(4b-4)a+(3b-1)(b-3)$

$=(a+3b-1)(a+b-3)$

따라서 인수인 것은 ④이다. 답 ④

0188 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-4y^2+3xy+ax+13y+12$

$=x^2+(3y+a)x-4y^2+13y+12$

$=x^2+(3y+a)x-(4y+3)(y-4)$ … ❶

주어진 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면

$(4y+3)-(y-4)=3y+a$

$\therefore a=7$ … ❷

답 7

단계	채점 요소	비율
❶	주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하기	50 %
❷	a의 값 구하기	50 %

유형 036 순환하는 꼴의 다항식의 인수분해 → 본책 43쪽

a, b, c의 차수가 같으면서 순환하는 꼴의 다항식은 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

0189 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$

$=a^2b+a^2c+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2+3abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+3bc+c^2)a+b^2c+bc^2$

$=(b+c)a^2+\{(b+c)^2+bc\}a+bc(b+c)$

$=\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

답 $(a+b+c)(ab+bc+ca)$

0190 주어진 식의 분자를 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$

$=xy^2-xz^2+yz^2-x^2y+x^2z-y^2z$

$=-(y-z)x^2+(y^2-z^2)x-y^2z+yz^2$

$=-(y-z)x^2+(y+z)(y-z)x-yz(y-z)$

$=-(y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$

$=-(y-z)(x-y)(x-z)=(x-y)(y-z)(z-x)$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=1$ 답 1

0191 ㄱ. 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc$

$=a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+ac^2+a^2c+2abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+b^2c+bc^2$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

ㄴ. 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$4abc-a(b+c)^2-b(c+a)^2-c(a+b)^2$

$=4abc-a(b^2+2bc+c^2)-b(c^2+2ca+a^2)$

$\quad-c(a^2+2ab+b^2)$

$=4abc-ab^2-2abc-ac^2-bc^2-2abc-a^2b$

$\quad-a^2c-2abc-b^2c$

$=-ab^2-ac^2-bc^2-a^2b-a^2c-2abc-b^2c$

$=-\{(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+b^2c+bc^2\}$

$=-\{(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)\}$

$=-(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=-(b+c)(a+b)(a+c)$

ㄷ. 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3+b^3-3b^2c+3bc^2-c^3$

$\quad+c^3-3c^2a+3ca^2-a^3$

$=-3a^2b+3ab^2-3b^2c+3bc^2+3a^2c-3ac^2$

$=-3\{(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2\}$

$=-3\{(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)\}$

$=-3(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=-3(b-c)(a-b)(a-c)$

$=3(a-b)(b-c)(c-a)$

이상에서 $a+b$를 인수로 갖는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

다른 풀이 ㄷ. $a-b=x$, $b-c=y$, $c-a=z$로 놓으면

$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

$=x^3+y^3+z^3$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

이때 $x+y+z=(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$이므로

$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

$=3xyz=3(a-b)(b-c)(c-a)$

유형 037 인수정리를 이용한 다항식의 인수분해 → 본책 44쪽

삼차 이상의 다항식 $P(x)$는 다음과 같은 순서로 인수분해한다.

(i) $P(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값을 구한다.

(ii) 조립제법을 이용하여 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$의 꼴로 나타낸다.

(iii) $Q(x)$가 더 이상 인수분해되지 않을 때까지 인수분해한다.

0192 $P(x)=x^3+4x^2+x-6$이라 하면

$P(1)=1+4+1-6=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	4	1	−6
		1	5	6
	1	5	6	0

$P(x)=(x-1)(x^2+5x+6)$

$=(x-1)(x+2)(x+3)$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(-1)^2+2^2+3^2=14$ 답 ④

0193 $P(x)=x^3+2x^2+3x+6$이라 하면

$P(-2)=-8+8-6+6=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

−2	1	2	3	6
		−2	0	−6
	1	0	3	0

$P(x)=(x+2)(x^2+3)$

따라서 $P(x)$가 $x+2$로 나누어떨어지므로

$b=2$

이때 $Q(x)=x^3+x+a$라 하면 $Q(x)$가 $x+2$로 나누어떨어지므로

$Q(-2)=0$, $-8-2+a=0$

$\therefore a=10$

$\therefore a+b=12$ 답 ②

0194 $P(x)=x^4+4x^3-10x^2-28x-15$라 하면

$P(-1)=1-4-10+28-15=0$,

$P(3)=81+108-90-84-15=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

−1	1	4	−10	−28	−15
		−1	−3	13	15
3	1	3	−13	−15	0
		3	18	15	
	1	6	5	0	

$P(x)=(x+1)(x-3)(x^2+6x+5)$

$=(x+1)^2(x-3)(x+5)$ … ❶

따라서 $A(x)B(x)=(x+1)^2(x-3)(x+5)$이고 $A(x)$, $B(x)$가 모두 $x+1$로 나누어떨어져야 하므로

$A(x)=(x+1)(x-3)$, $B(x)=(x+1)(x+5)$ 또는

$A(x)=(x+1)(x+5)$, $B(x)=(x+1)(x-3)$ … ❷

$\therefore A(x)+B(x)$

$=(x+1)(x-3)+(x+1)(x+5)$

$=x^2-2x-3+x^2+6x+5$

$=2x^2+4x+2$ … ❸

답 $2x^2+4x+2$

단계	채점 요소	비율
❶	$x^4+4x^3-10x^2-28x-15$를 인수분해하기	40 %
❷	$A(x)$, $B(x)$ 구하기	40 %
❸	$A(x)+B(x)$ 구하기	20 %

0195

1	1	a	b	0	−1
		1	$a+1$	$a+b+1$	$a+b+1$
1	1	$a+1$	$a+b+1$	$a+b+1$	$a+b$
		1	$a+2$	$2a+b+3$	
	1	$a+2$	$2a+b+3$	$3a+2b+4$	

이때 $x^4+ax^3+bx^2-1$이 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로

$a+b=0$, $3a+2b+4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=4$

$\therefore x^4-4x^3+4x^2-1=(x-1)^2(x^2-2x-1)$

따라서 $c=-2$, $d=-1$이므로

$abcd=-32$ 답 ①

0196 다항식 $x^3+x^2-4x-10$을 서로 다른 두 이차식 $A(x)$, $B(x)$로 나누었을 때의 나머지가 모두 $4x+2$이므로 $A(x)$, $B(x)$는

$x^3+x^2-4x-10-(4x+2)=x^3+x^2-8x-12$

의 인수이다.

$P(x)=x^3+x^2-8x-12$라 하면

$P(-2)=-8+4+16-12=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

−2	1	1	−8	−12
		−2	2	12
	1	−1	−6	0

$P(x)=(x+2)(x^2-x-6)$

$=(x+2)^2(x-3)$

최고차항의 계수가 1인 두 이차식 $A(x)$, $B(x)$는 $P(x)$의 서로 다른 인수이므로

$A(x)=(x+2)^2$, $B(x)=(x+2)(x-3)$ 또는

$A(x)=(x+2)(x-3)$, $B(x)=(x+2)^2$

따라서

$A(x)+B(x)=(x+2)^2+(x+2)(x-3)$

이므로 $A(x)+B(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$A(2)+B(2)=12$ 답 12

유형 038 계수가 대칭인 사차식의 인수분해 본책 44쪽

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$의 꼴의 사차식은 다음과 같은 순서로 인수분해한다.

(i) 가운데 항이 상수가 되도록 x^2으로 묶어 낸다.

(ii) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$임을 이용하여 $x+\frac{1}{x}$ 또는 $x-\frac{1}{x}$에 대한 이차식으로 정리한 후 인수분해한다.

(iii) 각 인수에 x를 곱하여 다항식이 되도록 한다.

0197 $x^4+4x^3-3x^2+4x+1=x^2\left(x^2+4x-3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-3\right\}$

$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-5\right\}$

$=x^2\left(x+\frac{1}{x}+5\right)\left(x+\frac{1}{x}-1\right)$

$=(x^2+5x+1)(x^2-x+1)$

따라서 인수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0198 $x^4-5x^3-16x^2+5x+1$

$=x^2\left(x^2-5x-16+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-5\left(x-\frac{1}{x}\right)-16\right\}$

$=x^2\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x-\frac{1}{x}\right)-14\right\}$

$=x^2\left(x-\frac{1}{x}-7\right)\left(x-\frac{1}{x}+2\right)$

$=(x^2-7x-1)(x^2+2x-1)$ … ❶

따라서 $a=-1$, $b=2$, $c=-1$이므로

$a-b+c=-4$ … ❷

답 -4

단계	채점 요소	비율
❶	$x^4-5x^3-16x^2+5x+1$을 인수분해하기	70 %
❷	$a-b+c$의 값 구하기	30 %

0199 $x^4+2ax^3+(2a+1)x^2+2ax+1$

$=x^2\left(x^2+2ax+2a+1+\frac{2a}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}+2a\left(x+\frac{1}{x}\right)+2a+1\right\}$

$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2a\left(x+\frac{1}{x}\right)+2a-1\right\}$

$=x^2\left(x+\frac{1}{x}+2a-1\right)\left(x+\frac{1}{x}+1\right)$

$=\{x^2+(2a-1)x+1\}(x^2+x+1)$

따라서 두 이차식의 x의 계수는 각각 $2a-1$, 1이므로 구하는 합은 $(2a-1)+1=2a$ 답 ④

유형 039 조건이 주어진 다항식의 인수분해 본책 45쪽

(1) 주어진 조건을 정리하여 다항식에 대입한 후 인수분해한다.
(2) 다항식을 먼저 인수분해한 후 주어진 조건을 대입하여 식을 정리한다.

0200 $x-y+z=0$에서 $z=y-x$

$\therefore xyz+xy+x-y-1$

$=xy(y-x)+xy+x-y-1$

$=xy^2-x^2y+xy+x-y-1$

$=-xy(x-y-1)+x-y-1$

$=(-xy+1)(x-y-1)=(-xy+1)(-z-1)$

$=(xy-1)(z+1)$ 답 ③

다른 풀이 $x-y+z=0$에서 $x=y-z$

$\therefore xyz+xy+x-y-1$

$=(y-z)yz+(y-z)y+(y-z)-y-1$

$=y^2z-yz^2+y^2-yz+y-z-y-1$

$=(z+1)y^2-(z^2+z)y-z-1$

$=(z+1)y^2-z(z+1)y-(z+1)$

$=(y^2-yz-1)(z+1)$

$=\{y(y-z)-1\}(z+1)$

$=(xy-1)(z+1)$

0201 $4-a^2+6ab-9b^2=4-(a^2-6ab+9b^2)$

$=4-(a-3b)^2$

$=\{2+(a-3b)\}\{2-(a-3b)\}$

$=(2+a-3b)(2-a+3b)$

이때 $a+3b+2=0$에서

$2+a=-3b$, $2+3b=-a$

$\therefore$ (주어진 식)$=(-3b-3b)(-a-a)$

$=-6b\times(-2a)=12ab$ 답 ⑤

다른 풀이 $a+3b+2=0$에서 $a=-3b-2$

$\therefore 4-a^2+6ab-9b^2$

$=4-(-3b-2)^2+6(-3b-2)b-9b^2$

$=4-9b^2-12b-4-18b^2-12b-9b^2$

$=-36b^2-24b$

$=12b(-3b-2)$

$=12ab$

유형 040 인수분해를 이용한 삼각형 모양의 판단 본책 45쪽

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c일 때
(1) $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ ➜ 이등변삼각형
(2) $a=b=c$ ➜ 정삼각형
(3) $a^2=b^2+c^2$ ➜ 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

0202 주어진 식의 좌변을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2b+a^2c-ab^2-ac^2+b^2c+bc^2-2abc$

$=(b+c)a^2-(b^2+2bc+c^2)a+b^2c+bc^2$

$=(b+c)a^2-(b+c)^2a+bc(b+c)$

$=\{a^2-(b+c)a+bc\}(b+c)$

$=(a-b)(a-c)(b+c)$

$\therefore (a-b)(a-c)(b+c)=0$

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$b+c>0$

즉 $a-b=0$ 또는 $a-c=0$이므로

$a=b$ 또는 $a=c$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이 될 수 없다. 답 ④

참고 직각삼각형의 세 변의 길이 중에서 빗변의 길이가 가장 길어야 하므로 빗변의 길이는 다른 두 변의 길이와 같을 수 없다.

0203 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$에서

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

$\therefore \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$a+b+c>0$

즉 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$이므로

$a=b=c$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 정삼각형이다.

답 정삼각형

0204 조건 (나)의 좌변을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^3+a^2b-ab^2-ac^2-b^3-bc^2$

$=-(a+b)c^2+a^3+a^2b-ab^2-b^3$

$=-(a+b)c^2+a^2(a+b)-b^2(a+b)$

$=(a+b)(-c^2+a^2-b^2)$

$\therefore (a+b)(-c^2+a^2-b^2)=0$

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$a+b>0$

즉 $-c^2+a^2-b^2=0$이므로 $a^2=b^2+c^2$ …… ㉠

따라서 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다. … ❶

이때 조건 (다)에서 삼각형 ABC의 넓이가 120이므로

$\frac{1}{2}bc=120$ $\therefore bc=240$

조건 (가)에서 $b=\frac{12}{5}c$이므로

$\frac{12}{5}c^2=240$, $c^2=100$ $\therefore c=10$ ($\because c>0$)

$\therefore b=\frac{12}{5}\times 10=24$

$b=24$, $c=10$을 ㉠에 대입하면

$a^2=24^2+10^2=676$ $\therefore a=26$ ($\because a>0$) … ❷

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$a+b+c=26+24+10=60$ … ❸

답 60

단계	채점 요소	비율
❶	삼각형 ABC가 빗변의 길이가 a인 직각삼각형임을 알기	40 %
❷	a, b, c의 값 구하기	40 %
❸	삼각형 ABC의 둘레의 길이 구하기	20 %

유형 041 인수분해의 도형에의 활용 본책 46쪽

도형에서 변의 길이, 넓이, 부피 등이 다항식으로 주어지면 주어진 다항식을 인수분해를 이용하여 두 개 이상의 다항식의 곱의 꼴로 나타낸다.

0205 $P(x)=x^3+ax-6$이라 하면 $P(x)$가 $x-3$을 인수로 가지므로

$P(3)=0$, $27+3a-6=0$ $\therefore a=-7$

즉 $P(x)=x^3-7x-6$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

3	1	0	−7	−6
		3	9	6
	1	3	2	0

$P(x)=(x-3)(x^2+3x+2)$

$=(x-3)(x+1)(x+2)$

따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$4\{(x-3)+(x+1)+(x+2)\}=12x$ 답 $12x$

0206 나무 블록의 부피는

$x\times x\times(x+1)-2\times 1^3=x^2(x+1)-2=x^3+x^2-2$

$P(x)=x^3+x^2-2$라 하면

$P(1)=1+1-2=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	1	0	−2
		1	2	2
	1	2	2	0

$P(x)=(x-1)(x^2+2x+2)$

따라서 $a=-1$, $b=2$, $c=2$이므로

$abc=-4$ 답 ②

0207 주어진 입체도형의 부피는

$a^3-3\times(b\times b\times a)+2\times b^3=a^3-3ab^2+2b^3$

$P(a)=a^3-3ab^2+2b^3$이라 하면

$P(b)=b^3-3b^3+2b^3=0$

조립제법을 이용하여 $P(a)$를 인수분해하면

b	1	0	$-3b^2$	$2b^3$
		b	b^2	$-2b^3$
	1	b	$-2b^2$	0

$P(a)=(a-b)(a^2+ab-2b^2)$

$=(a-b)^2(a+2b)$ 답 ②

0208 $p=a^3$, $q=b^3$, $r=a^2$, $s=b^2$, $t=ab(b-a)$이므로 $p+r+s+t=q$에서

$a^3+a^2+b^2+ab(b-a)=b^3$

$a^3+ab^2-a^2b-b^3+a^2+b^2=0$

$a(a^2+b^2)-b(a^2+b^2)+a^2+b^2=0$

$\therefore (a-b+1)(a^2+b^2)=0$

이때 $a^2+b^2>0$이므로

$a-b+1=0$ $\therefore b-a=1$ 답 1

유형 042 인수분해를 이용한 식의 값 구하기 본책 46쪽

인수분해 공식을 이용하여 식을 변형한 후 주어진 조건을 식에 대입한다.

0209 $x^4+y^4+x^3y+xy^3=x^4+x^3y+xy^3+y^4$

$=x^3(x+y)+y^3(x+y)$

$=(x+y)(x^3+y^3)$

$=(x+y)^2(x^2-xy+y^2)$

$=(x+y)^2\{(x+y)^2-3xy\}$

이때 $x=2+\sqrt{5}$, $y=2-\sqrt{5}$에서

$x+y=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4$,

$xy=(2+\sqrt{5})\times(2-\sqrt{5})=-1$

이므로 구하는 식의 값은

$4^2\times\{4^2-3\times(-1)\}=304$ 답 304

0210 $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

에서 $a+b+c=0$이므로

$a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc$

$\therefore\ \dfrac{a^3+b^3+c^3}{3abc}=\dfrac{3abc}{3abc}=1$ 답 ③

0211 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$ab(b-a)+bc(c-b)+ca(a-c)$

$=ab^2-a^2b+bc^2-b^2c+a^2c-ac^2$

$=-(b-c)a^2+(b^2-c^2)a-b^2c+bc^2$

$=-(b-c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b-c)$

$=-(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=-(b-c)(a-b)(a-c)$ …… ㉠ … ❶

이때 $a-b=1+\sqrt{3}$, $b-c=1-\sqrt{3}$을 변끼리 더하면

$a-c=2$ … ❷

따라서 ㉠에서 구하는 식의 값은

$-(1-\sqrt{3})\times(1+\sqrt{3})\times2=4$ … ❸

답 4

단계	채점 요소	비율
❶	$ab(b-a)+bc(c-b)+ca(a-c)$를 인수분해하기	50 %
❷	$a-c$의 값 구하기	30 %
❸	$ab(b-a)+bc(c-b)+ca(a-c)$의 값 구하기	20 %

0212 $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$

$=\dfrac{-a^3(b-c)-b^3(c-a)-c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ …… ㉠

분자를 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$-a^3(b-c)-b^3(c-a)-c^3(a-b)$

$=-a^3b+a^3c-b^3c+ab^3-ac^3+bc^3$

$=-(b-c)a^3+(b^3-c^3)a-b^3c+bc^3$

$=-(b-c)a^3+(b-c)(b^2+bc+c^2)a-bc(b+c)(b-c)$

$=-(b-c)\{a^3-(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)\}$

$a^3-(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)$를 b에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^3-(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)$

$=a^3-ab^2-abc-ac^2+b^2c+bc^2$

$=-(a-c)b^2-(ac-c^2)b+a^3-ac^2$

$=-(a-c)b^2-(a-c)bc+a(a+c)(a-c)$

$=-(a-c)\{b^2+bc-a(a+c)\}$

$=-(a-c)(-a^2+b^2-ac+bc)$

$=-(a-c)\{-(a+b)(a-b)-c(a-b)\}$

$=(a-c)(a-b)(a+b+c)$

$\therefore\ -a^3(b-c)-b^3(c-a)-c^3(a-b)$

$=-(b-c)(a-c)(a-b)(a+b+c)$

$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

따라서 ㉠에서

$\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$

$=\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=a+b+c$

$=5$ 답 ⑤

유형 043 인수분해를 이용한 수의 계산 → 본책 47쪽

수의 계산이 복잡한 경우

➜ 수를 문자로 치환하여 인수분해한 후 수를 다시 대입한다.

0213 $x=999$로 놓으면

$\dfrac{999^4-2\times999^2+3\times999-2}{999^3+999^2-997}$

$=\dfrac{x^4-2x^2+3x-2}{x^3+x^2-(x-2)}$

$=\dfrac{x^4-2x^2+3x-2}{x^3+x^2-x+2}$ …… ㉠

$A(x)=x^4-2x^2+3x-2$라 하면

$A(1)=1-2+3-2=0$,

$A(-2)=16-8-6-2=0$

조립제법을 이용하여 $A(x)$를 인수분해하면

1	1	0	−2	3	−2
		1	1	−1	2
−2	1	1	−1	2	0
		−2	2	−2	
	1	−1	1	0	

$A(x)=(x-1)(x+2)(x^2-x+1)$

$B(x)=x^3+x^2-x+2$라 하면

$B(-2)=-8+4+2+2=0$

조립제법을 이용하여 $B(x)$를 인수분해하면

−2	1	1	−1	2
		−2	2	−2
	1	−1	1	0

$B(x)=(x+2)(x^2-x+1)$

따라서 ㉠에서

$$\frac{999^4-2\times999^2+3\times999-2}{999^3+999^2-997}$$
$$=\frac{(x-1)(x+2)(x^2-x+1)}{(x+2)(x^2-x+1)}$$
$$=x-1$$
$$=999-1=998$$ 답 998

0214 $x=7$로 놓으면

$$(7^2+2\times7)^2-32\times(7^2+2\times7)+192$$
$$=(x^2+2x)^2-32(x^2+2x)+192$$

$x^2+2x=t$로 놓으면

$$(x^2+2x)^2-32(x^2+2x)+192$$
$$=t^2-32t+192=(t-8)(t-24)$$
$$=(x^2+2x-8)(x^2+2x-24)$$
$$=(x+4)(x-2)(x+6)(x-4)$$
$$=(7+4)\times(7-2)\times(7+6)\times(7-4)$$
$$=11\times5\times13\times3$$
$$\therefore a+b+c+d=11+5+13+3=32$$ 답 ③

0215 $x=30$으로 놓으면

$$26\times28\times29\times31+9$$
$$=(x-4)(x-2)(x-1)(x+1)+9$$
$$=\{(x-4)(x+1)\}\{(x-2)(x-1)\}+9$$
$$=(x^2-3x-4)(x^2-3x+2)+9$$

$x^2-3x=t$로 놓으면

$$(x^2-3x-4)(x^2-3x+2)+9=(t-4)(t+2)+9$$
$$=t^2-2t+1=(t-1)^2$$
$$=(x^2-3x-1)^2$$
$$=(30^2-3\times30-1)^2$$
$$=809^2$$

따라서 구하는 식의 값은 $\sqrt{809^2}=809$ 답 809

0216 $P(x)=x^3-0.3x^2+0.03x-0.001$이라 하면 $P(x)$를 $x-3.1$로 나누었을 때의 나머지는

$$P(3.1)$$
$$=(3.1)^3-0.3\times(3.1)^2+0.03\times3.1-0.001$$
$$=(3.1)^3-3\times(3.1)^2\times0.1+3\times3.1\times(0.1)^2-(0.1)^3$$
$$=(3.1-0.1)^3=3^3=27$$ 답 27

1등급 유형 도전하기

본책 48~49쪽

0217 Step 1 n^4-6n^2+25를 인수분해한다.

$$n^4-6n^2+25=(n^4+10n^2+25)-16n^2$$
$$=(n^2+5)^2-16n^2$$
$$=(n^2+4n+5)(\boxed{\text{(가) } n^2-4n+5})$$

Step 2 n^4-6n^2+25가 소수가 되도록 하는 자연수 n의 값을 구한다.

주어진 자연수가 소수가 되려면 1과 자기 자신만을 약수로 가져야 하므로

$$n^2+4n+5=1 \text{ 또는 } n^2-4n+5=1$$

(i) $n^2+4n+5=1$이면

$$n^2+4n+4=0,\quad (n+2)^2=0\quad \therefore n=\boxed{\text{(나) } -2}$$

(ii) $\boxed{\text{(가) } n^2-4n+5}=1$이면

$$n^2-4n+4=0,\quad (n-2)^2=0\quad \therefore n=\boxed{\text{(다) } 2}$$

(i), (ii)에서 n은 자연수이므로 $n=\boxed{\text{(라) } 2}$

Step 3 $f(a-bc)$의 값을 구한다.

$f(n)=n^2-4n+5$, $a=-2$, $b=2$, $c=2$이므로

$$f(a-bc)=f(-6)=65$$ 답 65

참고 $n=2$이면

$$n^4-6n^2+25=(n^2+4n+5)(n^2-4n+5)=17\times1=17$$

논리 Check

자연수 n^4-16n^2+100이 소수가 되도록 하는 자연수 n의 값을 구하시오.

풀이 $n^4-16n^2+100=(n^4+20n^2+100)-36n^2$
$$=(n^2+10)^2-36n^2$$
$$=(n^2+6n+10)(n^2-6n+10)$$

주어진 자연수가 소수가 되려면 1과 자기 자신만을 약수로 가져야 하므로

$$n^2+6n+10=1 \text{ 또는 } n^2-6n+10=1$$

(i) $n^2+6n+10=1$이면

$$n^2+6n+9=0,\quad (n+3)^2=0$$
$$\therefore n=-3$$

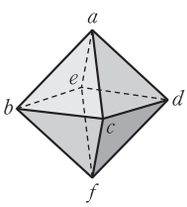
(ii) $n^2-6n+10=1$이면

$$n^2-6n+9=0,\quad (n-3)^2=0$$
$$\therefore n=3$$

(i), (ii)에서 n은 자연수이므로 $n=3$ 답 3

0218 Step 1 여섯 개의 꼭짓점에 적힌 자연수를 각각 a, b, c, d, e, f라 하고 여덟 개의 면에 적힌 수들의 합을 식으로 나타낸 후 인수분해한다.

오른쪽 그림과 같이 정팔면체의 여섯 개의 꼭짓점에 적힌 자연수를 각각 a, b, c, d, e, f라 하면 여덟 개의 면에 적힌 수들의 합은



$$abc+abe+acd+ade$$
$$+fbc+fbe+fcd+fde$$
$$=a(bc+be+cd+de)+f(bc+be+cd+de)$$
$$=(a+f)(bc+be+cd+de)$$
$$=(a+f)\{b(c+e)+d(c+e)\}$$
$$=(a+f)(b+d)(c+e)$$

Step 2 여섯 개의 꼭짓점에 적힌 수들의 합을 구한다.

$(a+f)(b+d)(c+e)=154=2\times7\times11$이므로 구하는 합은

$$a+b+c+d+e+f=(a+f)+(b+d)+(c+e)$$
$$=2+7+11=20$$ 답 20

0219 Step 1 $P(x)$가 $x-2a$를 인수로 가짐을 이용하여 a의 값을 구한다.

$P(x)=x^4-100x^2+b$가 $x-2a$를 인수로 가지므로

$P(2a)=0,\quad 16a^4-400a^2+b=0$

$\therefore\ b=-16a^4+400a^2=16a^2(-a^2+25)$

이때 b가 자연수이므로

$-a^2+25>0\quad \therefore\ a^2<25$

$\therefore\ a=1,\ 2,\ 3,\ 4\ (\because\ a$는 자연수)

Step 2 $P(x)$를 인수분해한다.

$P(x)=x^4-100x^2-16a^4+400a^2$이고

$P(2a)=0,$

$P(-2a)=16a^4-400a^2-16a^4+400a^2=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$2a$	1	0	-100	0	$-16a^4+400a^2$
		$2a$	$4a^2$	$8a^3-200a$	$16a^4-400a^2$
$-2a$	1	$2a$	$4a^2-100$	$8a^3-200a$	0
		$-2a$	0	$-8a^3+200a$	
	1	0	$4a^2-100$	0	

$P(x)=(x-2a)(x+2a)(x^2+4a^2-100)$

Step 3 $P(x)$의 개수를 구한다.

$P(x)$가 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 세 개의 다항식의 곱으로 인수분해되어야 하므로 x^2+4a^2-100이 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 두 개의 일차식의 곱으로 인수분해되지 않아야 한다.

이때 $x^2+4a^2-100=x^2-(-4a^2+100)$이므로 $-4a^2+100$의 값이 어떤 자연수의 제곱이면 x^2+4a^2-100이 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 두 개의 일차식의 곱으로 인수분해된다.

$a=1$이면 $\quad -4a^2+100=96$

$a=2$이면 $\quad -4a^2+100=84$

$a=3$이면 $\quad -4a^2+100=64=8^2$

$a=4$이면 $\quad -4a^2+100=36=6^2$

즉 $a=3$ 또는 $a=4$이면 조건을 만족시키지 않으므로

$a=1$ 또는 $a=2$

$\therefore\ P(x)=(x-2)(x+2)(x^2-96)$ 또는

$P(x)=(x-4)(x+4)(x^2-84)$

따라서 다항식 $P(x)$는 2개이다. 답 2

0220 Step 1 주어진 조건을 이용하여 $P(x)Q(x)$를 구한다.

조건 (나)에서

$\{P(x)-Q(x)\}^3+3P(x)Q(x)\{P(x)-Q(x)\}$

$=18x^4-72x^3+72x^2+54$

이때 조건 (가)에서 $P(x)-Q(x)=6$이므로

$216+18P(x)Q(x)=18x^4-72x^3+72x^2+54$

$\therefore\ P(x)Q(x)=x^4-4x^3+4x^2-9$

Step 2 $P(x)Q(x)$를 인수분해한다.

$P(-1)Q(-1)=1+4+4-9=0,$

$P(3)Q(3)=81-108+36-9=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)Q(x)$를 인수분해하면

-1	1	-4	4	0	-9
		-1	5	-9	9
3	1	-5	9	-9	0
		3	-6	9	
	1	-2	3	0	

$P(x)Q(x)=(x+1)(x-3)(x^2-2x+3)$

Step 3 $P(1)+Q(-2)$의 값을 구한다.

$P(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고 $P(x)-Q(x)=6$이므로

$P(x)=x^2-2x+3,\ Q(x)=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$

$\therefore\ P(1)+Q(-2)=2+5=7$ 답 7

0221 Step 1 $N(0,\ -2)$의 값을 구한다.

ㄱ. $x^2=X$로 놓으면

$x^4-2x^2+1=X^2-2X+1$

$=(X-1)^2$

$=(x^2-1)^2$

$=\{(x+1)(x-1)\}^2$

$=(x+1)^2(x-1)^2$

$\therefore\ N(0,\ -2)=2$ (참)

Step 2 $N(m,\ 2)=1$을 만족시키는 정수 m의 개수를 구한다.

ㄴ. $x^4+mx^3+2x^2+mx+1=x^2\left(x^2+mx+2+\dfrac{m}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{x^2+\dfrac{1}{x^2}+m\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+2\right\}$

$=x^2\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+m\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\right\}$

$=x^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}+m\right)$

$=(x^2+1)(x^2+mx+1)$

이때 $N(m,\ 2)=1$을 만족시키려면 x^2+mx+1이 $(x-1)^2$ 또는 $(x+1)^2$으로 인수분해되어야 하므로

$m=-2$ 또는 $m=2$

따라서 $N(m,\ 2)=1$을 만족시키는 정수 m은 2개이다. (참)

Step 3 $N(2n,\ n^2+2)=1$을 만족시키는 정수 n의 개수를 구한다.

ㄷ. $x^4+2nx^3+(n^2+2)x^2+2nx+1$

$=x^2\left(x^2+2nx+n^2+2+\dfrac{2n}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{x^2+\dfrac{1}{x^2}+2n\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+n^2+2\right\}$

$=x^2\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+2n\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+n^2\right\}$

$=x^2\left(x+\dfrac{1}{x}+n\right)^2$

$=(x^2+nx+1)^2$

이때 $N(2n,\ n^2+2)=1$을 만족시키려면 x^2+nx+1이 $(x-1)^2$ 또는 $(x+1)^2$으로 인수분해되어야 하므로

$n=-2$ 또는 $n=2$

따라서 $N(2n,\ n^2+2)=1$을 만족시키는 정수 n은 2개이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

0222 Step 1 $x^3-(2k+4)x^2+(k^2+7k+3)x-3k^2-3k$를 인수분해하여 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 구한다.

$P(x)=x^3-(2k+4)x^2+(k^2+7k+3)x-3k^2-3k$라 하면

$P(3)=27-9(2k+4)+3(k^2+7k+3)-3k^2-3k=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

3	1	$-(2k+4)$	k^2+7k+3	$-3k^2-3k$
		3	$-6k-3$	$3k^2+3k$
	1	$-2k-1$	k^2+k	0

$P(x)=(x-3)\{x^2-(2k+1)x+k^2+k\}$

$=(x-3)(x-k)(x-k-1)$

따라서 삼각형 ABC의 세 변의 길이는 각각 3, k, $k+1$이다.

Step 2 삼각형 ABC가 직각삼각형이 되도록 하는 양수 k의 값을 구한다.

(i) 삼각형 ABC가 빗변의 길이가 3인 직각삼각형인 경우

$3^2=k^2+(k+1)^2$에서

$9=k^2+k^2+2k+1$, $k^2+k-4=0$

$\therefore k=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$ ($\because k>0$)

(ii) 삼각형 ABC가 빗변의 길이가 $k+1$인 직각삼각형인 경우

$(k+1)^2=3^2+k^2$에서

$k^2+2k+1=9+k^2$

$\therefore k=4$

Step 3 모든 양수 k의 값의 곱을 구한다.

(i), (ii)에서

$k=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$ 또는 $k=4$

이므로 구하는 곱은

$\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\times4=-2+2\sqrt{17}$ 답 $-2+2\sqrt{17}$

0223 Step 1 두 정사각뿔 O-ABCD와 O-EFGH의 부피의 합을 이용하여 x^3+y^3의 값을 구한다.

정사각뿔 O-ABCD의 꼭짓점 O에서 밑면에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{AI}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

이므로 직각삼각형 OAI에서

$\overline{OI}=\sqrt{x^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$

따라서 정사각뿔 O-ABCD의 부피는

$\dfrac{1}{3}\times x^2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}x=\dfrac{\sqrt{2}}{6}x^3$

같은 방법으로 하면 정사각뿔 O-EFGH의 부피는

$\dfrac{1}{3}\times y^2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}y=\dfrac{\sqrt{2}}{6}y^3$

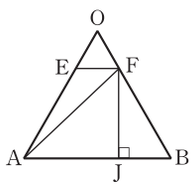
이때 두 정사각뿔 O-ABCD와 O-EFGH의 부피의 합이 $8\sqrt{2}$이므로

$\dfrac{\sqrt{2}}{6}x^3+\dfrac{\sqrt{2}}{6}y^3=8\sqrt{2}$

$\therefore x^3+y^3=48$

Step 2 선분 AF의 길이를 이용하여 x^2-xy+y^2의 값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 점 F에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 J라 하면 삼각형 FJB는 $\angle FBJ=60°$인 직각삼각형이므로



$\overline{FJ}=\overline{FB}\sin60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-y)$,

$\overline{BJ}=\overline{FB}\cos60°=\dfrac{1}{2}(x-y)$

$\therefore \overline{AJ}=\overline{AB}-\overline{BJ}=x-\dfrac{1}{2}(x-y)=\dfrac{1}{2}(x+y)$

따라서 직각삼각형 FAJ에서

$(2\sqrt{3})^2=\left\{\dfrac{1}{2}(x+y)\right\}^2+\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-y)\right\}^2$

$\therefore x^2-xy+y^2=12$

Step 3 사각형 ABFE의 넓이를 구한다.

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$이므로

$48=(x+y)\times12$ $\therefore x+y=4$

$x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy$이므로

$12=4^2-3xy$ $\therefore xy=\dfrac{4}{3}$

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=4^2-4\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{32}{3}$이므로

$x-y=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ ($\because x>y$)

따라서 사각형 ABFE의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{EF})\times\overline{FJ}=\dfrac{1}{2}\times(x+y)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-y)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(x+y)(x-y)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times4\times\dfrac{4\sqrt{6}}{3}=4\sqrt{2}$ 답 $4\sqrt{2}$

0224 Step 1 근호 안의 식의 분자를 소인수분해한다.

$x=10$으로 놓으면

$9\times99+99\times999+999\times9-3$

$=(x-1)(x^2-1)+(x^2-1)(x^3-1)$

$+(x^3-1)(x-1)-3$

$=x^3-x^2-x+1+x^5-x^3-x^2+1+x^4-x^3-x+1-3$

$=x^3+x^4+x^5-2(x+x^2+x^3)$

$=x^3(1+x+x^2)-2x(1+x+x^2)$

$=x(x^2-2)(1+x+x^2)$

$=10\times(10^2-2)\times(1+10+10^2)$

$=10\times98\times111=(2\times5)\times(2\times7^2)\times(3\times37)$

$=2^2\times3\times5\times7^2\times37$

$\therefore A=\sqrt{\dfrac{2^2\times3\times5\times7^2\times37}{N}}$

Step 2 A가 자연수가 되도록 하는 N의 개수를 구한다.

A가 자연수가 되려면 $\dfrac{2^2\times3\times5\times7^2\times37}{N}$이 (자연수)^{2}의 꼴이어야 하므로 자연수 N은

$3\times5\times37$, $2^2\times3\times5\times37$, $3\times5\times7^2\times37$,

$2^2\times3\times5\times7^2\times37$

의 4개이다. 답 4

시험 만점 완성하기

본책 50~53쪽

0225 전략 인수분해 공식을 이용하여 주어진 다항식의 인수를 구한다.

$$\begin{aligned}2x^6-2x^4+3x^3-3x^2&=x^2(2x^4-2x^2+3x-3)\\&=x^2\{2x^2(x^2-1)+3(x-1)\}\\&=x^2\{2x^2(x+1)(x-1)+3(x-1)\}\\&=x^2(x-1)\{2x^2(x+1)+3\}\\&=x^2(x-1)(2x^3+2x^2+3)\end{aligned}$$

따라서 인수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0226 전략 $3a\times[3a,\ b]-3b\times[3b,\ a]$를 a, b에 대한 다항식으로 나타내고 인수분해 공식을 이용한다.

$$\begin{aligned}&3a\times[3a,\ b]-3b\times[3b,\ a]\\&=3a\times\{(3a)^2-9\times3a\times b\}-3b\times\{(3b)^2-9\times3b\times a\}\\&=3a(9a^2-27ab)-3b(9b^2-27ab)\\&=27a^3-81a^2b+81ab^2-27b^3\\&=(3a-3b)^3=\{3(a-b)\}^3\\&=27(a-b)^3\end{aligned}$$

답 ④

0227 전략 인수정리를 이용하여 b, c 사이의 관계식을 구한다.

$P(x)=ax^4+bx^3+cx-a$라 하면 $P(1)=0$

$a+b+c-a=0$ $\therefore\ c=-b$

$$\begin{aligned}\therefore\ ax^3+4bx^2-4ax+16c&=ax^3+4bx^2-4ax-16b\\&=ax(x^2-4)+4b(x^2-4)\\&=(x^2-4)(ax+4b)\\&=(x+2)(x-2)(ax+4b)\end{aligned}$$

따라서 항상 인수인 것은 ④이다. 답 ④

0228 전략 공통부분을 t로 치환하여 인수분해한다.

$16-8x=t$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=9x^4+(t-2x^2)(t+4x^2)\\&=9x^4+t^2+2x^2t-8x^4\\&=x^4+2x^2t+t^2=(x^2+t)^2\\&=(x^2-8x+16)^2=\{(x-4)^2\}^2\\&=(x-4)^4\end{aligned}$$

$\therefore\ k=-4$ 답 ③

0229 전략 사차식을 A^2-B^2의 꼴로 변형하여 인수분해한다.

$$\begin{aligned}x^4-56x^2+16&=(x^4+8x^2+16)-64x^2\\&=(x^2+4)^2-64x^2\\&=(x^2+8x+4)(x^2-8x+4)\end{aligned}$$

따라서 $Q(x)=x^2-8x+4$이므로

$$\begin{aligned}Q(x^2)&=x^4-8x^2+4\\&=(x^4-4x^2+4)-4x^2\\&=(x^2-2)^2-4x^2\\&=(x^2+2x-2)(x^2-2x-2)\end{aligned}$$

답 ④

0230 전략 주어진 식을 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&a^3-b^3-c^3-ab(a-b)-bc(b+c)+ca(c-a)\\&=a^3-b^3-c^3-a^2b+ab^2-b^2c-bc^2+ac^2-a^2c\\&=a^3-(b+c)a^2+(b^2+c^2)a-b^3-b^2c-bc^2-c^3\\&=(a-b-c)a^2+(b^2+c^2)a-b^2(b+c)-c^2(b+c)\\&=(a-b-c)a^2+(b^2+c^2)a-(b^2+c^2)(b+c)\\&=(a-b-c)a^2+(a-b-c)(b^2+c^2)\\&=(a^2+b^2+c^2)(a-b-c)\end{aligned}$$

따라서 인수인 것은 ①이다. 답 ①

0231 전략 $a^2=x$, $b^2=y$, $c^2=z$로 놓고 인수분해한다.

$a^2=x$, $b^2=y$, $c^2=z$로 놓으면

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^2b^2c^2\\&=(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz\\&=x^2y+xyz+x^2z+xy^2+y^2z+xyz+xyz+yz^2+xz^2\\&\quad-xyz\\&=x^2y+x^2z+xy^2+y^2z+yz^2+xz^2+2xyz\\&=(y+z)x^2+(y^2+2yz+z^2)x+y^2z+yz^2\\&=(y+z)x^2+(y+z)^2x+yz(y+z)\\&=\{x^2+(y+z)x+yz\}(y+z)\\&=(x+y)(x+z)(y+z)\\&=(a^2+b^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2)\\&=(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)\end{aligned}$$

답 ⑤

0232 전략 주어진 식을 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 b의 값에 따라 경우를 나누어 생각한다.

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2-y^2+ax+by-5=x^2+ax-(y^2-by+5)$$

이때 y^2-by+5는

$(y+1)(y+5)$ 또는 $(y-1)(y-5)$

로 인수분해되어야 하므로

$b=-6$ 또는 $b=6$

(i) $b=-6$일 때

$x^2+ax-(y^2+6y+5)=x^2+ax-(y+1)(y+5)$

따라서

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\{x-(y+1)\}\{x+(y+5)\}\\&=x^2+4x-(y+1)(y+5)\end{aligned}$$

이면 $a=4$

또

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\{x+(y+1)\}\{x-(y+5)\}\\&=x^2-4x-(y+1)(y+5)\end{aligned}$$

이면 $a=-4$

(ii) $b=6$일 때

$x^2+ax-(y^2-6y+5)=x^2+ax-(y-1)(y-5)$

따라서
$$(\text{주어진 식})=\{x-(y-1)\}\{x+(y-5)\}$$
$$=x^2-4x-(y-1)(y-5)$$
이면 $a=-4$

또
$$(\text{주어진 식})=\{x+(y-1)\}\{x-(y-5)\}$$
$$=x^2+4x-(y-1)(y-5)$$
이면 $a=4$

(i), (ii)에서 a, b의 순서쌍 (a, b)는
$(4, -6), (-4, -6), (-4, 6), (4, 6)$
이므로 $a+b$의 값이 될 수 있는 것은 -10, -2, 2, 10이다.
따라서 $a+b$의 값이 될 수 없는 것은 ②이다. 답 ②

0233 전략 조립제법을 이용하여 주어진 다항식을 인수분해한다.

$P(x)=x^3-3(a-1)x^2-(9a-2)x-6a$라 하면
$P(-1)=-1-3(a-1)+(9a-2)-6a=0$
조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

-1	1	$-3(a-1)$	$-(9a-2)$	$-6a$
		-1	$3a-2$	$6a$
	1	$-3a+2$	$-6a$	0

$P(x)=(x+1)\{x^2-(3a-2)x-6a\}$
$=(x+1)(x+2)(x-3a)$
따라서 인수인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ③

다른 풀이 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^3-3(a-1)x^2-(9a-2)x-6a$
$=-3(x^2+3x+2)a+x^3+3x^2+2x$
$=-3(x^2+3x+2)a+x(x^2+3x+2)$
$=(x^2+3x+2)(x-3a)=(x+1)(x+2)(x-3a)$

0234 전략 먼저 인수정리를 이용하여 a, b의 값을 구한다.

$Q(x)=x^4+ax^3-7x^2+bx+12$라 하면 $Q(x)$가 $(x+2)(x-3)$을 인수로 가지므로
$Q(-2)=0$, $Q(3)=0$
$16-8a-28-2b+12=0$, $81+27a-63+3b+12=0$
$\therefore 4a+b=0$, $9a+b=-10$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=8$
즉 $Q(x)=x^4-2x^3-7x^2+8x+12$이므로 조립제법을 이용하여 $Q(x)$를 인수분해하면

-2	1	-2	-7	8	12
		-2	8	-2	-12
3	1	-4	1	6	0
		3	-3	-6	
	1	-1	-2	0	

$Q(x)=(x+2)(x-3)(x^2-x-2)$
$=(x+2)(x-3)(x+1)(x-2)$
따라서 $P(x)=(x+1)(x-2)$이고 $A(x)-B(x)=3$이므로
$A(x)=x+1$, $B(x)=x-2$
$\therefore A(a)B(b)=A(-2)B(8)=-1\times6=-6$ 답 ⑤

0235 전략 인수분해를 이용하여 주어진 등식에서 b, c 사이의 관계식을 구한다.

$ab(a+b)=bc(c-b)+ca(a+c)$에서
$ab(a+b)-bc(c-b)-ca(a+c)=0$
이 식의 좌변을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면
$ab(a+b)-bc(c-b)-ca(a+c)$
$=a^2b+ab^2-bc^2+b^2c-a^2c-ac^2$
$=(b-c)a^2+(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$
$=(b-c)a^2+(b-c)(b+c)a+bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$
$=(b-c)(a+b)(a+c)$
$\therefore (b-c)(a+b)(a+c)=0$
이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로
$a+b>0$, $a+c>0$
즉 $b-c=0$이므로
$b=c$
따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 $b=c$인 이등변삼각형이다. 답 ③

0236 전략 원기둥의 부피를 인수분해하여 원기둥의 밑면인 원의 반지름의 길이와 높이를 구한다.

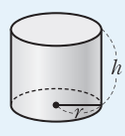
$P(x)=x^3+6x^2+9x+4$라 하면
$P(-1)=-1+6-9+4=0$
조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

-1	1	6	9	4
		-1	-5	-4
	1	5	4	0

$P(x)=(x+1)(x^2+5x+4)$
$=(x+1)^2(x+4)$
즉 주어진 원기둥의 부피가 $(x+1)^2(x+4)\pi$이므로 원기둥의 밑면인 원의 반지름의 길이는 $x+1$, 높이는 $x+4$이다.
따라서 원기둥의 겉넓이는
$2\pi(x+1)^2+2\pi(x+1)(x+4)$
$=2\pi(x+1)\{(x+1)+(x+4)\}$
$=2\pi(x+1)(2x+5)$ 답 ③

만점 공략 노트

오른쪽 그림과 같이 밑면인 원의 반지름의 길이가 r, 높이가 h인 원기둥의 부피를 V, 겉넓이를 S라 하면
$V=\pi r^2h$, $S=2\pi r^2+2\pi rh$



0237 전략 공통부분을 t로 치환하고 주어진 다항식과 인수분해한 식이 서로 같음을 이용한다.

$x^2+x=t$로 놓으면
$(x^2+x+a)(x^2+x-a)-20=(t+a)(t-a)-20$
$=t^2-a^2-20$ …… ㉠
$(x-2)(x+b)(x^2+x+6)$
$=\{x^2+(b-2)x-2b\}(t+6)$ …… ㉡

이때 ㉡을 전개하면 ㉠이 되어야 하므로

$b-2=1,\ 2b=6 \quad \therefore\ b=3$

따라서 ㉡에서

$(x^2+x-6)(t+6)=(t-6)(t+6)=t^2-36$

이므로

$t^2-a^2-20=t^2-36, \quad a^2=16$

$\therefore\ a=4\ (\because\ a>0) \quad \therefore\ a+b=7$ 답 7

0238 전략 $n^4-n^3-3n^2+3$을 $(n-1)(n-3)$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 이용하여 변형한다.

1	1	−1	−3	0	3
		1	0	−3	−3
3	1	0	−3	−3	0
		3	9	18	
	1	3	6	15	

$\therefore\ n^4-n^3-3n^2+3$

$=(n-1)\{(n-3)(n^2+3n+6)+15\}$

$=(n-1)(n-3)(n^2+3n+6)+15(n-1)$

이때 $(n-1)(n-3)(n^2+3n+6)$은 $(n-1)(n-3)$으로 나누어떨어지므로 $n^4-n^3-3n^2+3$이 $(n-1)(n-3)$의 배수가 되려면 $15(n-1)$이 $(n-1)(n-3)$의 배수이어야 한다.

즉 $15(n-1)=(n-1)(n-3)k$ (k는 자연수)이므로

$15=(n-3)k\ (\because\ n\neq1)$

이때 $n-3$은 15의 양의 약수이어야 하므로

$n-3=1$ 또는 $n-3=3$ 또는 $n-3=5$ 또는 $n-3=15$

$\therefore\ n=4$ 또는 $n=6$ 또는 $n=8$ 또는 $n=18$

따라서 구하는 합은

$4+6+8+18=36$ 답 36

0239 전략 $x^4+8x^3+17x^2+8x+1$을 인수분해하여 $A(x)$, $B(x)$를 구한다.

$$x^4+8x^3+17x^2+8x+1=x^2\left(x^2+8x+17+\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}+8\left(x+\frac{1}{x}\right)+17\right\}$$
$$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+8\left(x+\frac{1}{x}\right)+15\right\}$$
$$=x^2\left(x+\frac{1}{x}+5\right)\left(x+\frac{1}{x}+3\right)$$
$$=(x^2+5x+1)(x^2+3x+1)$$

따라서

$A(x)=x^2+5x+1,\ B(x)=x^2+3x+1$ 또는

$A(x)=x^2+3x+1,\ B(x)=x^2+5x+1$

이므로 $A(1)+B(1)=7+5=12$ 답 12

0240 전략 모든 상자의 부피의 합을 x, y에 대한 식으로 나타내고 인수분해한다.

A 상자의 부피는 x^3, B 상자의 부피는 x^2y, C 상자의 부피는 xy^2, D 상자의 부피는 y^3이다.

따라서 A 상자 6개, B 상자 11개, C 상자 6개, D 상자 1개를 빈틈없이 쌓아서 만든 직육면체의 부피는

$6x^3+11x^2y+6xy^2+y^3$

$P(x)=6x^3+11x^2y+6xy^2+y^3$이라 하면

$P(-y)=-6y^3+11y^3-6y^3+y^3=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$-y$	6	$11y$	$6y^2$	y^3
		$-6y$	$-5y^2$	$-y^3$
	6	$5y$	y^2	0

$P(x)=(x+y)(6x^2+5xy+y^2)$

$=(x+y)(2x+y)(3x+y)$

따라서 $(x+y)(2x+y)(3x+y)=105=3\times5\times7$이고 x, y가 자연수이므로

$x+y=3,\ 2x+y=5,\ 3x+y=7$

세 식을 연립하여 풀면 $x=2,\ y=1$

$\therefore\ xy=2$ 답 2

0241 전략 $x=3+\sqrt{13}$을 (x에 대한 이차식)$=k$ (k는 상수)의 꼴로 변형한다.

$x=3+\sqrt{13}$에서 $x-3=\sqrt{13}$

양변을 제곱하면 $x^2-6x+9=13$

$\therefore\ x^2-6x=4$ …… ㉠

한편 $P(x)=x^3-5x^2-4x+2$라 하면

$P(-1)=-1-5+4+2=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

−1	1	−5	−4	2
		−1	6	−2
	1	−6	2	0

$P(x)=(x+1)(x^2-6x+2)$

또 $x^3-5x^2-6x=x(x^2-5x-6)=x(x+1)(x-6)$이므로

$$\frac{x^3-5x^2-4x+2}{x^3-5x^2-6x}=\frac{(x+1)(x^2-6x+2)}{x(x+1)(x-6)}$$
$$=\frac{x^2-6x+2}{x(x-6)}=\frac{x^2-6x+2}{x^2-6x}$$
$$=\frac{4+2}{4}\ (\because\ ㉠)$$
$$=\frac{3}{2}$$ 답 $\frac{3}{2}$

0242 전략 주어진 식의 좌변을 곱셈 공식과 인수분해 공식을 이용하여 $29^4\times k$의 꼴로 변형한다.

$(870\sqrt{870}+29\sqrt{29})\times(870\sqrt{870}-29\sqrt{29})$

$=(870\sqrt{870})^2-(29\sqrt{29})^2=870^3-29^3$

$=(29\times30)^3-(29\times1)^3=29^3\times(30^3-1^3)$

$=29^3\times(30-1)\times(30^2+30+1)$

$=29^4\times931$

$\therefore\ k=931$ 답 931

0243 전략 나눗셈에 대한 등식을 세우고 나머지정리를 이용하여 $P(x)$, $Q(x)$를 구한다.

$x^6+4x^4+7x^3+20x^2$을 $P(x)$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $7x^3+4x^2$이므로

$x^6+4x^4+7x^3+20x^2=P(x)Q(x)+7x^3+4x^2$

$\therefore P(x)Q(x)$

$=x^6+4x^4+16x^2$

$=x^2(x^4+4x^2+16)$

$=x^2(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$ …… ㉠ … ❶

이때 $x^6+4x^4+7x^3+20x^2$을 $P(x)$로 나누었을 때의 나머지가 삼차식이므로 $P(x)$는 사차 이상의 다항식이고 $Q(x)$는 이차 이하의 다항식이다.

한편 $Q(x+1)$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 7이므로

$Q(2+1)=Q(3)=7$

따라서 ㉠에서

$P(x)=x^2(x^2+2x+4)$, $Q(x)=x^2-2x+4$ … ❷

$\therefore P(-1)=3$ … ❸

답 3

단계	채점 요소	배점
❶	$P(x)Q(x)$를 구하고 인수분해하기	2점
❷	$P(x)$, $Q(x)$ 구하기	3점
❸	$P(-1)$의 값 구하기	1점

0244 전략 먼저 주어진 식을 일차식과 이차식의 곱으로 나타낸다.

$P(x)=3x^3+(a+4)x^2+2(a+2)x+16$이라 하면

$P(-2)=-24+4(a+4)-4(a+2)+16=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

-2	3	$a+4$	$2(a+2)$	16
		-6	$-2a+4$	-16
	3	$a-2$	8	0

$P(x)=(x+2)\{3x^2+(a-2)x+8\}$ … ❶

이때

$3x^2+(a-2)x+8=(3x+p)(x+q)$ (p, q는 정수)

라 하면

$3x^2+(a-2)x+8=3x^2+(p+3q)x+pq$

$\therefore a-2=p+3q$, $8=pq$

$pq=8$을 만족시키는 두 정수 p, q의 순서쌍 (p, q)는

$(1, 8)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$, $(8, 1)$,

$(-1, -8)$, $(-2, -4)$, $(-4, -2)$, $(-8, -1)$

따라서 $p+3q$의 값 중 가장 큰 값은 $1+3\times8=25$, 가장 작은 값은 $-1+3\times(-8)=-25$이다.

이때 $a=p+3q+2$이므로

$M=25+2=27$, $m=-25+2=-23$ … ❷

$\therefore M+m=4$ … ❸

답 4

단계	채점 요소	배점
❶	주어진 식을 일차식과 이차식의 곱으로 나타내기	2점
❷	M, m의 값 구하기	3점
❸	$M+m$의 값 구하기	1점

0245 전략 주어진 식을 인수분해한 후 245를 소인수분해하여 a, b의 값을 구한다.

주어진 식을 b에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2b+3a^2+4ab+12a+4b+12$

$=(a^2+4a+4)b+3a^2+12a+12$

$=(a^2+4a+4)b+3(a^2+4a+4)$

$=(a^2+4a+4)(b+3)$

$=(a+2)^2(b+3)$ … ❶

이때 a, b는 자연수이고 $245=5\times7^2$이므로

$a+2=7$, $b+3=5$ $\therefore a=5$, $b=2$ … ❷

$\therefore ab=10$ … ❸

답 10

단계	채점 요소	배점
❶	주어진 식을 인수분해하기	2점
❷	a, b의 값 구하기	1점
❸	ab의 값 구하기	1점

0246 전략 $x=17$로 놓고 인수정리를 이용하여 인수분해한다.

$x=17$로 놓으면

$17^3+7\times17^2-10\times17-16$

$=x^3+7x^2-10x-16$ …… ㉠

$P(x)=x^3+7x^2-10x-16$이라 하면

$P(-1)=-1+7+10-16=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

-1	1	7	-10	-16
		-1	-6	16
	1	6	-16	0

$P(x)=(x+1)(x^2+6x-16)$

$=(x+1)(x-2)(x+8)$

따라서 ㉠에서

$17^3+7\times17^2-10\times17-16$

$=(x+1)(x-2)(x+8)$ … ❶

$=(17+1)\times(17-2)\times(17+8)$

$=18\times15\times25$

$=(2\times3^2)\times(3\times5)\times5^2$

$=2\times3^3\times5^3$ … ❷

즉 $a=1$, $b=3$, $c=3$이므로

$a+b+c=7$ … ❸

답 7

단계	채점 요소	배점
❶	$x=17$로 놓고 주어진 수를 x에 대한 식으로 나타내어 인수분해하기	2점
❷	주어진 수를 소인수분해하기	1점
❸	$a+b+c$의 값 구하기	1점

04 복소수

셀프 CHECK → 본책 56쪽

A 답 (1) ㄱ, ㄹ (2) ㄴ, ㄷ (3) ㄴ

B 답 (1) $x=-4$, $y=3$ (2) $x=2$, $y=-3$

C 답 (1) $9+2i$ (2) $-\sqrt{6}i$

D 답 (1) $1-6i$ (2) $-10+7i$ (3) $14-13i$ (4) $1+5i$

E 답 (1) $-i$ (2) -1 (3) 0 (4) 1

F 답 (1) $\pm\sqrt{5}i$ (2) $\pm2\sqrt{3}i$

G 답 (1) -9 (2) $-\sqrt{6}i$

내신유형 다지기 → 본책 57~65쪽

유형 044 복소수의 뜻과 분류 → 본책 57쪽

실수 a, b에 대하여

$$\text{복소수 } a+bi \begin{cases} \text{실수 } a & (b=0) \\ \text{허수} \begin{cases} \text{순허수 } bi & (a=0,\ b\neq0) \\ \text{순허수가 아닌 허수 } a+bi & (a\neq0,\ b\neq0) \end{cases} \end{cases}$$

0247 ⑤ 복소수 $a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $b=0$이면 실수이다. 즉 실수는 복소수이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0248 $\sqrt{-3}=\sqrt{3}i$, $\sqrt{2}i^2=-\sqrt{2}$

따라서 실수는 -8, $4+\sqrt{10}$, $\pi-1$, $\sqrt{2}i^2$의 4개이므로 $a=4$

허수는 $5i-8$, $\sqrt{-3}$, $-6i$의 3개이므로 $b=3$

순허수는 $\sqrt{-3}$, $-6i$의 2개이므로 $c=2$

$\therefore a+bc=10$ 답 10

유형 045 복소수의 사칙연산 → 본책 57쪽

(1) i를 문자처럼 생각하여 계산하고 $i^2=-1$임을 이용한다.

(2) 분모가 허수이면 분모의 켤레복소수를 분모, 분자에 각각 곱하여 분모를 실수로 만든다.

0249 ① $(7-4i)-(i-2)=7-4i-i+2=9-5i$

② $(5-2i)(1+3i)=5+15i-2i-6i^2=11+13i$

③ $\dfrac{3-2i}{2+i}=\dfrac{(3-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{6-3i-4i+2i^2}{4-i^2}=\dfrac{4}{5}-\dfrac{7}{5}i$

④ $-5i+(3+i)^2=-5i+9+6i+i^2=8+i$

⑤ $\dfrac{1}{1+i}-\dfrac{1}{1-i}=\dfrac{1-i-(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{1-i^2}=\dfrac{-2i}{2}=-i$

따라서 옳은 것은 ③이다. 답 ③

0250 $z_1=(1+\sqrt{3}i)^2-(1-\sqrt{3}i)^2$

$=(1+2\sqrt{3}i+3i^2)-(1-2\sqrt{3}i+3i^2)$

$=-2+2\sqrt{3}i+2+2\sqrt{3}i=4\sqrt{3}i$

$z_2=\dfrac{2+\sqrt{5}i}{\sqrt{5}-2i}=\dfrac{(2+\sqrt{5}i)(\sqrt{5}+2i)}{(\sqrt{5}-2i)(\sqrt{5}+2i)}$

$=\dfrac{2\sqrt{5}+4i+5i+2\sqrt{5}i^2}{5-4i^2}=\dfrac{9i}{9}=i$

$\therefore z_1z_2=4\sqrt{3}i\times i=4\sqrt{3}i^2=-4\sqrt{3}$ 답 ②

0251 $(1-2i)+(-3+4i)+(5-6i)+(-7+8i)+\cdots$

$+(17-18i)+(-19+20i)$

$=\{(1-2i)+(-3+4i)\}+\{(5-6i)+(-7+8i)\}+\cdots$

$+\{(17-18i)+(-19+20i)\}$

$=(-2+2i)+(-2+2i)+\cdots+(-2+2i)$

$=5(-2+2i)=-10+10i$

따라서 $a=-10$, $b=10$이므로

$b-a=20$ 답 ⑤

0252 $(5+i)(a-2i)+\dfrac{7i-3}{1+i}$

$=5a-10i+ai-2i^2+\dfrac{(7i-3)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$=5a-10i+ai+2+\dfrac{7i-7i^2-3+3i}{1-i^2}$

$=5a-10i+ai+2+\dfrac{4+10i}{2}$

$=(5a+4)+(a-5)i$ … ❶

실수부분과 허수부분의 합이 17이므로

$(5a+4)+(a-5)=17$, $6a=18$

$\therefore a=3$ … ❷

답 3

단계	채점 요소	비율
❶	주어진 식을 계산하기	70 %
❷	a의 값 구하기	30 %

0253 $f(1,2)+f(2,4)+f(3,6)+\cdots+f(25,50)$

$=\dfrac{1-2i}{1+2i}+\dfrac{2-4i}{2+4i}+\dfrac{3-6i}{3+6i}+\cdots+\dfrac{25-50i}{25+50i}$

$=\dfrac{1-2i}{1+2i}+\dfrac{1-2i}{1+2i}+\dfrac{1-2i}{1+2i}+\cdots+\dfrac{1-2i}{1+2i}$

$=25\times\dfrac{1-2i}{1+2i}=25\times\dfrac{(1-2i)^2}{(1+2i)(1-2i)}$

$=25\times\dfrac{1-4i+4i^2}{1-4i^2}=25\times\dfrac{-3-4i}{5}$

$=-15-20i$ 답 $-15-20i$

유형 046 복소수가 주어질 때의 식의 값 본책 58쪽

복소수 $x=a+bi$ (a, b는 실수)에 대한 식의 값

➜ $x-a=bi$의 꼴로 변형한 후 양변을 제곱하여 식의 값이 0인 이차식을 만든다.

0254 $x=\dfrac{-3+\sqrt{7}i}{2}$에서 $2x+3=\sqrt{7}i$

양변을 제곱하면 $4x^2+12x+9=-7$

$4x^2+12x=-16$ $\therefore x^2+3x=-4$

$\therefore -5x^2-15x+8=-5(x^2+3x)+8$

$=-5\times(-4)+8=28$ 답 ⑤

0255 $x=\dfrac{5-3i}{1+i}=\dfrac{(5-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2-8i}{2}=1-4i$에서

$x-1=-4i$

양변을 제곱하면 $x^2-2x+1=-16$

$\therefore x^2-2x=-17$

$\therefore x^3-2x^2+9x-1=x(x^2-2x)+9x-1$

$=x\times(-17)+9x-1$

$=-8x-1$

$=-8(1-4i)-1$

$=-9+32i$ 답 $-9+32i$

0256 $x^2=3-i$에서 $x^2-3=-i$

양변을 제곱하면 $x^4-6x^2+9=-1$

$\therefore x^4-6x^2=-10$

$x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면 $x^3-6x=-\dfrac{10}{x}$

$\therefore x^3-6x+\dfrac{10}{x}=0$

$\therefore x^4+x^3-6x^2-6x+\dfrac{10}{x}$

$=(x^4-6x^2)+\left(x^3-6x+\dfrac{10}{x}\right)$

$=-10+0=-10$ 답 ①

유형 047 켤레복소수가 주어질 때의 식의 값 본책 58쪽

켤레복소수인 두 복소수 x, y에 대한 식의 값

➜ 주어진 식을 $x+y$, $x-y$, xy를 포함한 식으로 변형하여 그 값을 구한다.

0257 $(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=(x+y)\times\dfrac{x+y}{xy}$

$=\dfrac{(x+y)^2}{xy}$ …… ㉠

이때

$x+y=(3+\sqrt{3}i)+(3-\sqrt{3}i)=6$,

$xy=(3+\sqrt{3}i)(3-\sqrt{3}i)=12$

이므로 ㉠에서 $(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{6^2}{12}=3$ 답 3

0258 $\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{x^2}{y}=\dfrac{x^3+y^3}{xy}$

$=\dfrac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}$ …… ㉠

이때

$x+y=\dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}+\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}=1$,

$xy=\dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}\times\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}=2$

이므로 ㉠에서

$\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{x^2}{y}=\dfrac{1^3-3\times2\times1}{2}=-\dfrac{5}{2}$ 답 ②

0259 $z^4+z^2\overline{z}^2+\overline{z}^4$

$=(z^2+z\overline{z}+\overline{z}^2)(z^2-z\overline{z}+\overline{z}^2)$

$=\{(z+\overline{z})^2-z\overline{z}\}\{(z+\overline{z})^2-3z\overline{z}\}$ …… ㉠

이때 $z=\dfrac{2}{1+i}=\dfrac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$이므로

$\overline{z}=1+i$

따라서

$z+\overline{z}=(1-i)+(1+i)=2$,

$z\overline{z}=(1-i)(1+i)=2$

이므로 ㉠에서

$z^4+z^2\overline{z}^2+\overline{z}^4=(2^2-2)\times(2^2-3\times2)=-4$ 답 -4

0260 $x^3-4x^2y+4xy^2-y^3$

$=x^3-y^3-4xy(x-y)$

$=(x-y)^3+3xy(x-y)-4xy(x-y)$

$=(x-y)^3-xy(x-y)$ …… ㉠ … ❶

$xy=26$에서

$y=\dfrac{26}{x}=\dfrac{26}{5-i}=\dfrac{26(5+i)}{(5-i)(5+i)}=5+i$ … ❷

$\therefore x-y=(5-i)-(5+i)=-2i$ … ❸

따라서 ㉠에서

$x^3-4x^2y+4xy^2-y^3=(-2i)^3-26\times(-2i)$

$=-8i^3+52i$

$=8i+52i$

$=60i$ … ❹

답 $60i$

단계	채점 요소	비율
❶	주어진 식을 변형하기	30 %
❷	y의 값 구하기	30 %
❸	$x-y$의 값 구하기	20 %
❹	$x^3-4x^2y+4xy^2-y^3$의 값 구하기	20 %

유형 048 복소수가 실수 또는 순허수가 되는 조건 본책 59쪽

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여

(1) z가 실수 ➜ $b=0$

(2) z가 순허수 ➜ $a=0$, $b\neq0$

0261 $(i+1)x^2+(i-5)x-6i+2$
$=(x^2-5x+2)+(x^2+x-6)i$
이 복소수가 실수가 되려면
$x^2+x-6=0$, $(x+3)(x-2)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$
따라서 모든 실수 x의 값의 곱은
$-3\times2=-6$ 답 ③

0262 $(x-i)(x-4)+i-5$
$=x^2-4x-xi+4i+i-5$
$=(x^2-4x-5)+(5-x)i$
이 복소수가 순허수가 되려면
$x^2-4x-5=0$, $5-x\neq0$
(i) $x^2-4x-5=0$에서 $(x+1)(x-5)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$
(ii) $5-x\neq0$에서 $x\neq5$
(i), (ii)에서 $x=-1$ 답 -1

0263 $z=(i-2)x^2+9x-8(2i+1)$
$=(-2x^2+9x-8)+(x^2-16)i$ …… ㉠
z가 실수가 되려면
$x^2-16=0$, $(x+4)(x-4)=0$
$\therefore x=-4$ 또는 $x=4$
$\therefore a=4$ ($\because a>0$) … ❶
$x=4$를 ㉠에 대입하면
$z=-4$ $\therefore b=-4$ … ❷
$\therefore a+b=0$ … ❸
답 0

단계	채점 요소	비율
❶	a의 값 구하기	50 %
❷	b의 값 구하기	40 %
❸	$a+b$의 값 구하기	10 %

유형 049 **복소수 z^2이 실수가 되는 조건** → 본책 59쪽

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여
(1) z^2이 양의 실수 ➜ z는 0이 아닌 실수 ➜ $a\neq0$, $b=0$
(2) z^2이 음의 실수 ➜ z는 순허수 ➜ $a=0$, $b\neq0$
(3) z^2이 실수 ➜ z는 실수 또는 순허수 ➜ $a=0$ 또는 $b=0$

0264 z^2이 양의 실수가 되려면 z는 0이 아닌 실수이어야 하므로
$x^2-2x-3\neq0$, $x^2-4x+3=0$
(i) $x^2-2x-3\neq0$에서 $(x+1)(x-3)\neq0$
$\therefore x\neq-1$, $x\neq3$
(ii) $x^2-4x+3=0$에서 $(x-1)(x-3)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=3$
(i), (ii)에서 $x=1$ 답 1

0265 $z=x(2-i)+3i-10=(2x-10)+(3-x)i$
z^2이 음의 실수가 되려면 z는 순허수이어야 하므로
$2x-10=0$, $3-x\neq0$ $\therefore x=5$
따라서 $z=-2i$이므로
$z^2-z^4=(-2i)^2-(-2i)^4$
$=4i^2-16i^4$
$=-4-16=-20$ 답 ④

0266 z^2이 실수가 되려면 z는 실수 또는 순허수이어야 하므로
$m-n=0$ 또는 $m+n-4=0$
$\therefore m=n$ 또는 $m+n=4$
(i) $m=n$을 만족시키는 5 이하의 두 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)은
(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)의 5개
(ii) $m+n=4$를 만족시키는 5 이하의 두 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)은
(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3개
(i), (ii)에서 (2, 2)는 중복되므로 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는 $5+3-1=7$ 답 ②

유형 050 **복소수가 서로 같을 조건** → 본책 60쪽

실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 정리한 후 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.
(1) $a+bi=c+di$ (a, b, c, d는 실수) ➜ $a=c$, $b=d$
(2) $a+bi=0$ (a, b는 실수) ➜ $a=0$, $b=0$

0267 $(5+3i)x+(7i-3)y=-17+25i$에서
$(5x-3y)+(3x+7y)i=-17+25i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$5x-3y=-17$, $3x+7y=25$
두 식을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=4$
$\therefore x^2+y^2=(-1)^2+4^2=17$ 답 ④

0268 $\dfrac{x}{1-3i}+\dfrac{y}{1+3i}=\dfrac{x(1+3i)+y(1-3i)}{(1-3i)(1+3i)}$
$=\dfrac{x+y}{10}+\dfrac{3x-3y}{10}i$
따라서 $\dfrac{x+y}{10}+\dfrac{3x-3y}{10}i=\overline{2-3i}$에서
$\dfrac{x+y}{10}+\dfrac{3x-3y}{10}i=2+3i$ … ❶
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$\dfrac{x+y}{10}=2$, $\dfrac{3x-3y}{10}=3$
$\therefore x+y=20$, $x-y=10$
두 식을 연립하여 풀면 $x=15$, $y=5$ … ❷
$\therefore x-4y=15-4\times5=-5$ … ❸
답 -5

단계	채점 요소	비율
❶	주어진 등식의 양변을 각각 (실수부분)+(허수부분)i의 꼴로 나타내기	50 %
❷	x, y의 값 구하기	40 %
❸	$x-4y$의 값 구하기	10 %

0269 $x^2+y^2i+x-8yi-20+12i=0$에서

$(x^2+x-20)+(y^2-8y+12)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2+x-20=0$, $y^2-8y+12=0$

(i) $x^2+x-20=0$에서 $(x+5)(x-4)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=4$

(ii) $y^2-8y+12=0$에서 $(y-2)(y-6)=0$

$\therefore y=2$ 또는 $y=6$

(i), (ii)에서

$x-y=-11$ 또는 $x-y=-7$ 또는

$x-y=-2$ 또는 $x-y=2$

따라서 $x-y$의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0270 $(a-bi)^2=18i$에서 $(a^2-b^2)-2abi=18i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=0$, $-2ab=18$

$a^2-b^2=0$에서 $(a+b)(a-b)=0$

$\therefore b=-a$ 또는 $b=a$

(i) $b=-a$일 때, $-2ab=18$에서

$2a^2=18$, $a^2=9$

$\therefore a=-3$, $b=3$ ($\because a<0$)

(ii) $b=a$일 때, $-2ab=18$에서

$-2a^2=18$, $a^2=-9$

이것을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=-3$, $b=3$

$\therefore 5a+2b=5\times(-3)+2\times3=-9$ 답 -9

유형 051 켤레복소수의 성질 본책 60쪽

복소수 z의 켤레복소수를 $\overline{z}$라 할 때

(1) $z+\overline{z}=$(실수) (2) $z\overline{z}=$(실수)

(3) $z=\overline{z}$ ➜ z는 실수 (4) $z=-\overline{z}$ ➜ z는 순허수 또는 0

0271 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$

ㄱ. $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$이므로 실수이다. (거짓)

ㄴ. $z-\overline{z}=0$, 즉 $(a+bi)-(a-bi)=0$이면

$2bi=0$ $\therefore b=0$

따라서 $z=a$이므로 z는 실수이다. (참)

ㄷ. $z=a+bi$가 순허수이면 $a=0$, $b\neq0$

따라서 $z=bi$에서 $z^2=(bi)^2=-b^2$이므로 z^2은 음의 실수이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0272 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$,

$z-\overline{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$,

$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

① $z-\overline{z}=2bi$이므로 0 또는 순허수이다.

② $z^2+\overline{z}^2=(z+\overline{z})^2-2z\overline{z}=(2a)^2-2(a^2+b^2)=2a^2-2b^2$

이므로 항상 실수이다.

③ $z^2-\overline{z}^2=(z+\overline{z})(z-\overline{z})=2a\times2bi=4abi$

이므로 0 또는 순허수이다.

④ $\frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}=\frac{\overline{z}-z}{z\overline{z}}=-\frac{z-\overline{z}}{z\overline{z}}=-\frac{2bi}{a^2+b^2}$

이므로 0 또는 순허수이다.

⑤ $(z+1)(\overline{z}+1)=z\overline{z}+z+\overline{z}+1=a^2+b^2+2a+1$

이므로 항상 실수이다.

따라서 항상 실수인 것은 ②, ⑤이다. 답 ②, ⑤

0273 $z=-\overline{z}$이므로 z는 순허수 또는 0이어야 한다.

$z=x^2+(i-4)x-12-3i=(x^2-4x-12)+(x-3)i$에서

$x^2-4x-12=0$, $(x+2)(x-6)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=6$

따라서 모든 실수 x의 값의 합은

$-2+6=4$ 답 4

유형 052 켤레복소수의 성질의 활용 본책 61쪽

두 복소수 z_1, z_2의 켤레복소수를 각각 $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$라 할 때

(1) $\overline{(\overline{z_1})}=z_1$

(2) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2\neq0$)

0274 $z=a+bi$, $w=c+di$ (a, b, c, d는 실수, $b\neq0$, $d\neq0$)라 하면

$z+w=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

$zw=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

이때 $z+w$, zw가 모두 실수이므로

$b+d=0$, $ad+bc=0$

$b+d=0$에서 $d=-b$이므로 이것을 $ad+bc=0$에 대입하면

$-ab+bc=0$, $-a+c=0$ ($\because b\neq0$)

$\therefore c=a$

따라서 $w=a-bi$이므로 z와 w는 서로 켤레복소수이다.

$\therefore \overline{z}=w$, $\overline{w}=z$

① $\overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w}=w-z$

② $z-\overline{w}=z-z=0$, $\overline{z}-w=w-w=0$이므로

$z-\overline{w}=\overline{z}-w$

③ $z+\overline{w}=z+z=2z$, $\overline{z}+w=\overline{z}+\overline{z}=2\overline{z}$

이때 z는 실수가 아닌 복소수이므로

$2z\neq2\overline{z}$ $\therefore z+\overline{w}\neq\overline{z}+w$

④ $z\overline{w}=z\times z=z^2$

⑤ $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}}=\frac{w}{z}$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다. 답 ③

0275 $\frac{1}{z^2+3}$이 실수이므로 z^2+3은 실수이다.

즉 $z^2+3=\overline{z^2+3}$이므로

$z^2+3=\overline{z}^2+3$, $z^2-\overline{z}^2=0$

$\therefore (z+\overline{z})(z-\overline{z})=0$

이때 z는 허수이므로 $z\neq\overline{z}$

$\therefore z+\overline{z}=0$ 답 ②

만점 공략 노트

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$\overline{z^2}=\overline{(a+bi)^2}=\overline{(a^2-b^2)+2abi}=(a^2-b^2)-2abi$,

$\overline{z}^2=\overline{a+bi}^2=(a-bi)^2=(a^2-b^2)-2abi$

이므로 $\overline{z^2}=\overline{z}^2$이 성립한다.

0276 $z=a+bi$이므로

$iz=i(a+bi)=-b+ai$

따라서 $iz=\overline{z}$에서

$-b+ai=a-bi$ $\therefore a=-b$

$\therefore z=a-ai$

ㄱ. $z+\overline{z}=(a-ai)+(a+ai)=2a=-2b$ (참)

ㄴ. $i\overline{z}=i(a+ai)=ai-a=-(a-ai)=-z$ (참)

ㄷ. $iz=\overline{z}$에서 $\frac{\overline{z}}{z}=i$

ㄴ에서 $i\overline{z}=-z$이므로 $\frac{z}{\overline{z}}=-i$

$\therefore \frac{\overline{z}}{z}+\frac{z}{\overline{z}}=i+(-i)=0$ (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

유형 053 켤레복소수의 성질을 이용한 식의 계산 본책 61쪽

복소수가 주어지고 이 복소수의 켤레복소수를 포함한 식의 값을 구할 때에는 켤레복소수의 성질을 이용하여 식을 간단히 한 후 복소수를 대입한다.

0277 $z_1\overline{z_1}+\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_2}$

$=z_1(\overline{z_1}+\overline{z_2})+z_2(\overline{z_1}+\overline{z_2})$

$=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})$

$=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})$ …… ㉠

이때 $z_1=-2+7i$, $z_2=8-5i$이므로

$z_1+z_2=(-2+7i)+(8-5i)=6+2i$

$\therefore \overline{z_1+z_2}=\overline{6+2i}=6-2i$

따라서 ㉠에서

$z_1\overline{z_1}+\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_2}=(6+2i)(6-2i)=40$

답 ①

0278 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$ …… ㉠

$\overline{\alpha}-\overline{\beta}=4+3i$에서 $\overline{\alpha-\beta}=4+3i$

$\therefore \alpha-\beta=4-3i$ … ❶

$\overline{\alpha}\times\overline{\beta}=7-3i$에서 $\overline{\alpha\beta}=7-3i$

$\therefore \alpha\beta=7+3i$ … ❷

따라서 ㉠에서

$\alpha^2+\beta^2=(4-3i)^2+2(7+3i)$

$=16-24i-9+14+6i$

$=21-18i$ … ❸

답 $21-18i$

단계	채점 요소	비율
❶	$\alpha-\beta$의 값 구하기	30 %
❷	$\alpha\beta$의 값 구하기	30 %
❸	$\alpha^2+\beta^2$의 값 구하기	40 %

0279 $z_1\overline{z_2}=1$에서 $z_1=\frac{1}{\overline{z_2}}$

또 $z_1\overline{z_2}=1$에서 $\overline{z_1\overline{z_2}}=\overline{z_1}z_2=1$

$\therefore z_2=\frac{1}{\overline{z_1}}$

$\therefore z_2+\frac{1}{\overline{z_2}}=\frac{1}{\overline{z_1}}+z_1=2i$ 답 $2i$

0280 $(\alpha-\beta)\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)=(\alpha-\beta)\left(\frac{\overline{\beta}}{\beta\overline{\beta}}-\frac{\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha}}\right)$

$=(\alpha-\beta)\left(\frac{\overline{\beta}}{2}-\frac{\overline{\alpha}}{2}\right)$

$=-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$

$=-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})$

$=-\frac{1}{2}\times 8=-4$ 답 ①

유형 054 등식을 만족시키는 복소수 구하기 본책 62쪽

복소수 z에 대한 등식이 주어질 때, z는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓고 주어진 등식에 대입한다.

(ii) 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

0281 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$\overline{z}=a-bi$

$(2+3i)z+(1-i)\overline{z}=-19+2i$에서

$(2+3i)(a+bi)+(1-i)(a-bi)=-19+2i$

$2a+2bi+3ai-3b+a-bi-ai-b=-19+2i$

$\therefore (3a-4b)+(2a+b)i=-19+2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3a-4b=-19$, $2a+b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=4$

$\therefore z=-1+4i$ 답 $-1+4i$

0282 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$\overline{z}=a-bi$

$z-\overline{z}=2i$에서 $(a+bi)-(a-bi)=2i$

$2bi=2i$ $\therefore b=1$

$z\overline{z}=10$에서 $(a+i)(a-i)=10$

$a^2+1=10$, $a^2=9$ $\therefore a=\pm3$

따라서 복소수 z는 $3+i$, $-3+i$이다. 답 $3+i$, $-3+i$

0283 $z=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면

$\overline{z}=a-bi$ … ❶

$z^2+6\overline{z}=0$에서 $(a+bi)^2+6(a-bi)=0$

$\therefore (a^2-b^2+6a)+2b(a-3)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2+6a=0$, $2b(a-3)=0$

$2b(a-3)=0$에서 $b\neq0$이므로

$a-3=0$ $\therefore a=3$

$a=3$을 $a^2-b^2+6a=0$에 대입하면

$9-b^2+18=0$ $\therefore b^2=27$ … ❷

$\therefore z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)$

$=a^2+b^2=3^2+27=36$ … ❸

답 36

단계	채점 요소	비율
❶	$z=a+bi$로 놓고 $\overline{z}$ 구하기	20 %
❷	a, b^2의 값 구하기	50 %
❸	$z\overline{z}$의 값 구하기	30 %

0284 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$

조건 (가)에서 $\overline{z}=-z$이므로

$a-bi=-a-bi$ $\therefore a=0$ $\therefore z=bi$

조건 (나)에서 $z^2+(k^2-3k-4)z+(k^2+2k-8)=0$이므로 이 식에 $z=bi$를 대입하면

$(bi)^2+(k^2-3k-4)bi+(k^2+2k-8)=0$

$\therefore (k^2+2k-8-b^2)+(k^2-3k-4)bi=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$k^2+2k-8-b^2=0$, $(k^2-3k-4)b=0$

$(k^2-3k-4)b=0$에서 $(k+1)(k-4)b=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=4$ 또는 $b=0$

(i) $k=-1$일 때, $k^2+2k-8-b^2=0$에서

$-9-b^2=0$, $b^2=-9$

이것을 만족시키는 실수 b의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $k=4$일 때, $k^2+2k-8-b^2=0$에서

$16-b^2=0$, $b^2=16$

$\therefore b=-4$ 또는 $b=4$

(iii) $b=0$일 때, $k^2+2k-8-b^2=0$에서

$k^2+2k-8=0$, $(k+4)(k-2)=0$

$\therefore k=-4$ 또는 $k=2$

이상에서 $k=-4$ 또는 $k=2$ 또는 $k=4$이므로 구하는 곱은

$-4\times2\times4=-32$ 답 ①

유형 055 i의 거듭제곱

본책 63쪽

(1) n이 음이 아닌 정수일 때

$i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$, $i^{4n+4}=1$

(2) $i+i^2+i^3+i^4=0$, $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=0$

0285 $1+i-i^2+i^3-i^4+\cdots-i^{1004}$

$=1+(i-i^2+i^3-i^4)+(i^5-i^6+i^7-i^8)+\cdots$

$+(i^{1001}-i^{1002}+i^{1003}-i^{1004})$

$=1+(i+1-i-1)+(i+1-i-1)+\cdots+(i+1-i-1)$

$=1$ 답 ①

0286 $\frac{2i^2+4i^4+6i^6+8i^8+\cdots+18i^{18}+20i^{20}}{i+3i^3+5i^5+7i^7+\cdots+17i^{17}+19i^{19}}$

$=\frac{(-2+4)+(-6+8)+\cdots+(-18+20)}{(i-3i)+(5i-7i)+\cdots+(17i-19i)}$

$=\frac{5\times2}{5\times(-2i)}$

$=-\frac{1}{i}=i$ 답 ④

0287 $\frac{1}{i}+\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}+\frac{4}{i^4}+\cdots+\frac{30}{i^{30}}$

$=\left(\frac{1}{i}+\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}+\frac{4}{i^4}\right)+\cdots+\left(\frac{25}{i^{25}}+\frac{26}{i^{26}}+\frac{27}{i^{27}}+\frac{28}{i^{28}}\right)$

$+\frac{29}{i^{29}}+\frac{30}{i^{30}}$

$=\left(\frac{1}{i}-2-\frac{3}{i}+4\right)+\cdots+\left(\frac{25}{i}-26-\frac{27}{i}+28\right)+\frac{29}{i}-30$

$=\left(2-\frac{2}{i}\right)+\cdots+\left(2-\frac{2}{i}\right)+\frac{29}{i}-30$

$=7\left(2-\frac{2}{i}\right)+\frac{29}{i}-30$

$=-16+\frac{15}{i}=-16-15i$ … ❶

따라서 $a=-16$, $b=-15$이므로 … ❷

$a+b=-31$ … ❸

답 -31

단계	채점 요소	비율
❶	주어진 등식의 좌변을 간단히 하기	70 %
❷	a, b의 값 구하기	20 %
❸	$a+b$의 값 구하기	10 %

0288 $\frac{\overline{z}}{z}=\frac{a-i}{a+i}=\frac{(a-i)^2}{(a+i)(a-i)}=\frac{a^2-1}{a^2+1}-\frac{2a}{a^2+1}i$

이때 $\frac{\overline{z}}{z}$가 실수이므로

$-\frac{2a}{a^2+1}=0$ $\therefore a=0$

따라서 $z=i$이므로

$z+z^2+z^3+\cdots+z^{199}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots$

$+(i^{193}+i^{194}+i^{195}+i^{196})+i^{197}+i^{198}+i^{199}$

$=(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)+i-1-i$

$=-1$ 답 ②

유형 056 복소수의 거듭제곱 → 본책 63쪽

(1) $(1+i)^n$, $(1-i)^n$의 꼴
➜ $(1+i)^2=2i$, $(1-i)^2=-2i$임을 이용한다.
(2) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$의 꼴
➜ $\frac{1+i}{1-i}=i$, $\frac{1-i}{1+i}=-i$임을 이용한다.

0289 $(1+i)^{50}=\{(1+i)^2\}^{25}=(2i)^{25}=2^{25}i^{25}=2^{25}i$
$(1-i)^{50}=\{(1-i)^2\}^{25}=(-2i)^{25}=-2^{25}i^{25}=-2^{25}i$
$\therefore (1+i)^{50}+(1-i)^{50}-i^{50}$
$=2^{25}i+(-2^{25}i)-(-1)=1$ 답 ③

0290 $z^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2=\frac{2}{-2i}=i$
$\therefore z^2+z^4+z^6+z^8+z^{10}$
$=z^2+(z^2)^2+(z^2)^3+(z^2)^4+(z^2)^5$
$=i+i^2+i^3+i^4+i^5$
$=i-1-i+1+i$
$=i$ 답 i

0291 $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$
$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$
$\therefore \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2n}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n}+i^{2n}$
$=(-i)^{2n}+i^{2n}+i^{2n}$
$=\{(-i)^2\}^n+(i^2)^n+(i^2)^n$
$=(-1)^n+(-1)^n+(-1)^n$
$=-1+(-1)+(-1)$ ($\because$ n은 홀수)
$=-3$ 답 ①

유형 057 복소수의 거듭제곱의 활용 → 본책 64쪽

복소수 z에 대하여 z^2, z^3, z^4, …을 구하여 반복되는 수의 규칙을 찾은 후 문제를 해결한다.

0292 $z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$에서
$z^2=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{-2i}{2}=-i$
$z^4=(z^2)^2=(-i)^2=-1$
$z^8=(z^4)^2=(-1)^2=1$
즉 z의 거듭제곱은 z, z^2, …, z^8의 값이 반복된다.
따라서 n이 8의 배수일 때 $z^n=1$이므로 300 이하의 자연수 n은
8×1, 8×2, 8×3, …, 8×37
의 37개이다. 답 ⑤

0293 $\left(\frac{1}{\bar{z}}-\frac{1}{z}\right)^n=(1-z)i$에서
$\left(\frac{z-\bar{z}}{z\bar{z}}\right)^n=(1-z)i$
$\left\{\frac{(1+i)-(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right\}^n=\{1-(1+i)\}i$
$\left(\frac{2i}{2}\right)^n=-i^2$ $\therefore i^n=1$
n이 4의 배수일 때 $i^n=1$이므로 80 이하의 자연수 n은
4×1, 4×2, 4×3, …, 4×20
의 20개이다. 답 20

0294 ㄱ. $z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에서
$z^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$
$\therefore z^3=z^2\times z=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\times\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=1$ (참)

ㄴ. $z^3=1$이므로
$z^4+z^5=z^3\times z+z^3\times z^2$
$=z+z^2$
$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$
$=-1$ (참)

ㄷ. $z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}$
$=z^n+(z^n)^2+(z^n)^3+(z^n)^4+(z^n)^5$ …… ㉠
이때 z^n은 z, z^2, 1이 이 순서대로 반복되므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각한다.
(i) $n=3k-2$ ($k=1, 2, 3, \cdots, 34$)일 때
$z^n=z$이므로 ㉠에서
$z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}$
$=z+z^2+z^3+z^4+z^5$
$=-1+1+(-1)=-1$
즉 조건을 만족시킨다.
(ii) $n=3k-1$ ($k=1, 2, 3, \cdots, 33$)일 때
$z^n=z^2$이므로 ㉠에서
$z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}$
$=z^2+z^4+z^6+z^8+z^{10}$
$=z^2+z+1+z^2+z$
$=-1+1+(-1)=-1$
즉 조건을 만족시킨다.
(iii) $n=3k$ ($k=1, 2, 3, \cdots, 33$)일 때
$z^n=1$이므로 ㉠에서
$z^n+z^{2n}+z^{3n}+z^{4n}+z^{5n}$
$=1+1+1+1+1=5$
즉 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 구하는 자연수 n의 개수는
$34+33=67$ (거짓)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

유형 058 음수의 제곱근의 계산 본책 64쪽

(1) $a>0$일 때, $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$

(2) $a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

(3) $a>0$, $b<0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

0295 ① $\sqrt{5}\sqrt{-7}=\sqrt{5}\times\sqrt{7}i=\sqrt{35}i=\sqrt{-35}$

② $\sqrt{-2}\sqrt{-18}=\sqrt{2}i\times\sqrt{18}i=\sqrt{36}i^2=-6$

③ $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{10}i}{\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{10}{3}}i=\sqrt{-\dfrac{10}{3}}$

④ $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{-5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}i}=\dfrac{\sqrt{15}i}{\sqrt{5}i^2}=-\sqrt{\dfrac{15}{5}}i=-\sqrt{-3}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{-54}}{\sqrt{-6}}=\dfrac{\sqrt{54}i}{\sqrt{6}i}=\sqrt{9}=3$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

0296 $\sqrt{2}\sqrt{-8}+\sqrt{-3}\sqrt{-27}-\dfrac{\sqrt{-50}}{\sqrt{-2}}+\dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{-7}}$

$=\sqrt{-16}-\sqrt{81}-\sqrt{25}-\sqrt{-4}$

$=4i-9-5-2i=-14+2i$ … ❶

따라서 $x=-14$, $y=2$이므로 … ❷

$y-x=16$ … ❸

답 16

단계	채점 요소	비율
❶	주어진 등식의 좌변을 계산하기	70 %
❷	x, y의 값 구하기	20 %
❸	$y-x$의 값 구하기	10 %

0297 $x>y>0$이므로 $-x<0$, $x-y>0$, $y-x<0$

$\therefore \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{-x}}-\dfrac{\sqrt{y-x}}{\sqrt{x-y}}=-\sqrt{\dfrac{x}{-x}}-\sqrt{\dfrac{y-x}{x-y}}$

$=-\sqrt{-1}-\sqrt{-1}$

$=-i-i=-2i$ 답 ①

0298 $0<a<3$이므로 $a-3<0$, $3-a>0$

$\therefore \sqrt{a}\sqrt{-a}+\sqrt{a-3}\sqrt{3-a}-\sqrt{\dfrac{a-3}{3-a}}\dfrac{\sqrt{3-a}}{\sqrt{a-3}}$

$=\sqrt{a}\sqrt{a}i+\sqrt{3-a}\,i\sqrt{3-a}-\sqrt{-1}\dfrac{\sqrt{3-a}}{\sqrt{3-a}\,i}$

$=ai+(3-a)i-i\times\dfrac{1}{i}$

$=3i-1$ 답 $3i-1$

다른 풀이 $0<a<3$이므로 $-a<0$, $a-3<0$, $3-a>0$

$\therefore \sqrt{a}\sqrt{-a}+\sqrt{a-3}\sqrt{3-a}-\sqrt{\dfrac{a-3}{3-a}}\dfrac{\sqrt{3-a}}{\sqrt{a-3}}$

$=\sqrt{-a^2}+\sqrt{-(3-a)^2}-\dfrac{\sqrt{a-3}}{\sqrt{3-a}}\dfrac{\sqrt{3-a}}{\sqrt{a-3}}$

$=\sqrt{a^2}i+\sqrt{(3-a)^2}i-1=|a|i+|3-a|i-1$

$=ai+(3-a)i-1=3i-1$

유형 059 음수의 제곱근의 성질 본책 65쪽

0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여

(1) $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ ➡ $a<0$, $b<0$

(2) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ ➡ $a>0$, $b<0$

0299 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 $a<0$, $b<0$

따라서 $a+b<0$이므로

$\sqrt{a^2}+|-b|-\sqrt{(a+b)^2}=|a|+|-b|-|a+b|$

$=-a+(-b)+(a+b)$

$=0$ 답 ③

0300 $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$이므로 $a<0$, $b>0$

① $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

② $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

③ $-a>0$이므로 $\sqrt{-a}\sqrt{b}=\sqrt{-ab}$

④ $\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}=-a\sqrt{b}$

⑤ $\sqrt{ab^2}=|b|\sqrt{a}=b\sqrt{a}$

따라서 항상 옳은 것은 ③이다. 답 ③

0301 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 $a<0$, $b<0$ … ❶

$\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{c}{b}}$이므로 $b<0$, $c>0$ … ❷

따라서 $a+b<0$, $c-a>0$, $b-c<0$이므로

$|a+b|-\sqrt{(c-a)^2}+\sqrt{(b-c)^2}$

$=|a+b|-|c-a|+|b-c|$

$=-(a+b)-(c-a)-(b-c)$

$=-2b$ … ❸

답 $-2b$

단계	채점 요소	비율
❶	a, b의 부호 구하기	20 %
❷	c의 부호 구하기	20 %
❸	주어진 식을 간단히 하기	60 %

0302 조건 (가)에서 $a<0$, $b<0$

조건 (나)에서 $a+c=0$, $b+c-1=0$

$a+c=0$에서 $c=-a$ $\therefore c>0$

$b+c-1=0$에서 $b-a-1=0$

$\therefore a=b-1$ $\therefore a<b$

따라서 $a<b<c$이다. 답 ①

만점 공략 노트

실수 a, b에 대하여 $|a|\geq 0$, $|b|\geq 0$이므로

$|a|+|b|=0$이면

$|a|=0$, $|b|=0$ $\therefore a=0$, $b=0$

1등급 유형 도전하기

→ 본책 66~67쪽

0303 Step 1 z^2이 실수가 되는 z의 조건을 알아본다.

(1) z^2이 실수이려면 z는 실수 또는 [(가) 순허수]이어야 하고, z^2이 양의 실수이려면 z는 [(나) 0]이 아닌 실수이어야 한다.

또 z^2이 음의 실수이려면 z는 [(다) 순허수]이어야 한다.

Step 2 $z^4<0$을 만족시키는 z^2의 조건을 알아본다.

(2) ㄱ. $z^4<0$, 즉 z^4이 음의 실수이려면 z^2이 순허수이어야 한다.

$z^2=ki$ (k는 0이 아닌 실수)라 하면 $\overline{z}^2=\overline{z^2}=-ki$이므로 $\overline{z}^2$은 순허수이다. (거짓)

Step 3 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하고 z^2이 순허수임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

ㄴ. $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$z^2=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$

$=(a+b)(a-b)+2abi$

z^2이 순허수이므로 $(a+b)(a-b)=0$, $2ab\neq0$

즉 0이 아닌 실수 a, b에 대하여

$a=b$ 또는 $a=-b$

$\therefore z=a+ai$ 또는 $z=a-ai$ ····· ㉠

이때 $z=a-ai$이면 z의 실수부분과 허수부분이 같지 않다. (거짓)

Step 4 $z+\overline{z}=6$임을 이용하여 $z\overline{z}$의 값을 구한다.

ㄷ. ㉠에서 $z=a\pm ai$ (a는 0이 아닌 실수)라 하면

$\overline{z}=a\mp ai$ (복호동순)

$z+\overline{z}=6$에서 $2a=6$ $\therefore a=3$

즉 $z=3\pm3i$, $\overline{z}=3\mp3i$ (복호동순)이므로

$z\overline{z}=9+9=18$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 (1) (가) 순허수 (나) 0 (다) 순허수 (2) ㄷ

0304 Step 1 $f(x)$를 $g(x)$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하여 등식으로 나타낸다.

$f(x)$를 $g(x)$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면

$$\begin{array}{r} x-3 \\ x^3-2x^2-x+16\overline{)\,x^4-5x^3+5x^2+17x-36} \\ \underline{x^4-2x^3-x^2+16x} \\ -3x^3+6x^2+x-36 \\ \underline{-3x^3+6x^2+3x-48} \\ -2x+12 \end{array}$$

$\therefore f(x)=g(x)(x-3)+($[(가) $-2x+12$]$)$ ····· ㉠

Step 2 $f(\alpha)$, $g(\alpha)$가 실수임을 이용하여 $g(\alpha)$의 값을 구한다.

㉠에 $x=\alpha$를 대입하면

$f(\alpha)=g(\alpha)(\alpha-3)-2\alpha+12$

$=\alpha\{g(\alpha)-2\}-3g(\alpha)+12$

이때 $f(\alpha)$, $g(\alpha)$가 모두 실수이고 α가 허수이므로

$g(\alpha)-2=0$ $\therefore g(\alpha)=$[(나) 2]

Step 3 $h(\alpha)$의 값을 구한다.

$h(x)=-2x+12$, $\alpha=2$이므로

$h(\alpha)=h(2)=8$ 답 8

논리 Check

두 다항식 $f(x)=x^4-3x^3-2x^2+6x-6$, $g(x)=x^3+x^2+2x-1$과 허수 α에 대하여 $f(\alpha)$, $g(\alpha)$가 모두 실수일 때, $g(\alpha)$의 값을 구하시오.

풀이 $f(x)$를 $g(x)$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면

$$\begin{array}{r} x-4 \\ x^3+x^2+2x-1\overline{)\,x^4-3x^3-2x^2+6x-6} \\ \underline{x^4+x^3+2x^2-x} \\ -4x^3-4x^2+7x-6 \\ \underline{-4x^3-4x^2-8x+4} \\ 15x-10 \end{array}$$

$\therefore f(x)=g(x)(x-4)+15x-10$ ····· ㉠

㉠에 $x=\alpha$를 대입하면

$f(\alpha)=g(\alpha)(\alpha-4)+15\alpha-10$

$=\alpha\{g(\alpha)+15\}-4g(\alpha)-10$

이때 $f(\alpha)$, $g(\alpha)$가 모두 실수이고 α가 허수이므로

$g(\alpha)+15=0$ $\therefore g(\alpha)=-15$ 답 -15

0305 Step 1 2를 포함한 세 수의 곱이 실수가 되는 경우를 찾는다.

2를 포함한 세 수의 곱이 실수가 되려면 나머지 두 수의 곱이 실수가 되어야 한다.

이때 서로 켤레복소수인 두 수의 곱은 실수이므로 세 수의 곱이 실수인 경우는

$2\times(1+i)(1-i)=4$,

$2\times\underline{(3+3i)(1-i)}=12$, $(3+3i)(1-i)=3(1+i)(1-i)$

$2\times(1+2i)(1-2i)=10$

Step 2 2를 제외한 세 수의 곱이 실수가 되는 경우를 찾는다.

2를 제외한 세 수의 곱이 실수가 되려면 i와 곱이 순허수가 되는 두 수를 곱해야 하므로

$i\times(1+i)\times(3+3i)=-6$

Step 3 $M-m$의 값을 구한다.

$M=12$, $m=-6$이므로

$M-m=18$ 답 18

0306 Step 1 조건 (가)의 식을 변형한다.

조건 (가)에서 $z^3+\overline{z}^3=0$이므로

$(z+\overline{z})(z^2-z\overline{z}+\overline{z}^2)=0$

$\therefore (z+\overline{z})\{(z+\overline{z})^2-3z\overline{z}\}=0$ ····· ㉠

Step 2 $z+\overline{z}$, $z\overline{z}$를 구한다.

조건 (나)에서

$z+\overline{z}=\{\sqrt{3}x-(x-6)i\}+\{\sqrt{3}x+(x-6)i\}$

$=2\sqrt{3}x$

$z\overline{z}=\{\sqrt{3}x-(x-6)i\}\{\sqrt{3}x+(x-6)i\}$

$=3x^2+(x-6)^2=4x^2-12x+36$

Step 3 모든 실수 x의 값의 합을 구한다.

㉠에서 $2\sqrt{3}x\{(2\sqrt{3}x)^2-3(4x^2-12x+36)\}=0$

$x(x-3)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=3$

따라서 모든 실수 x의 값의 합은 $0+3=3$ 답 3

0307 Step 1 $n=4k-3$일 때, 순서쌍 (m, n)의 개수를 구한다.

$\left\{i^{2n}+\left(\frac{1}{i}\right)^n\right\}^m=\{(i^2)^n+(-i)^n\}^m=\{(-1)^n+(-i)^n\}^m$에서

$f(n)=(-1)^n+(-i)^n$이라 하자.

(i) $n=4k-3$ $(k=1, 2, 3, \cdots, 13)$일 때

$(-1)^{4k-3}=-1$, $(-i)^{4k-3}=-i$이므로

$f(n)=-1-i$

$\{f(n)\}^2=(-1-i)^2=2i$

$\{f(n)\}^3=\{f(n)\}^2\times f(n)=2i(-1-i)=2-2i$

$\{f(n)\}^4=[\{f(n)\}^2]^2=(2i)^2=-4$

$\vdots$

$\{f(n)\}^8=[\{f(n)\}^4]^2=(-4)^2=16$

따라서 $\{f(n)\}^m$의 값이 양의 실수가 되도록 하는 50 이하의 자연수 m은

8, 16, 24, 32, 40, 48

의 6개이므로 순서쌍 (m, n)의 개수는

$6\times 13=78$

Step 2 $n=4k-2$일 때, 순서쌍 (m, n)의 개수를 구한다.

(ii) $n=4k-2$ $(k=1, 2, 3, \cdots, 13)$일 때

$(-1)^{4k-2}=1$, $(-i)^{4k-2}=-1$이므로

$f(n)=1+(-1)=0$

따라서 $\{f(n)\}^m$의 값이 양의 실수가 되도록 하는 50 이하의 자연수 m의 값은 존재하지 않는다.

Step 3 $n=4k-1$일 때, 순서쌍 (m, n)의 개수를 구한다.

(iii) $n=4k-1$ $(k=1, 2, 3, \cdots, 12)$일 때

$(-1)^{4k-1}=-1$, $(-i)^{4k-1}=i$이므로

$f(n)=-1+i$

$\{f(n)\}^2=(-1+i)^2=-2i$

$\{f(n)\}^3=\{f(n)\}^2\times f(n)=-2i(-1+i)=2+2i$

$\{f(n)\}^4=[\{f(n)\}^2]^2=(-2i)^2=-4$

$\vdots$

$\{f(n)\}^8=[\{f(n)\}^4]^2=(-4)^2=16$

따라서 $\{f(n)\}^m$의 값이 양의 실수가 되도록 하는 50 이하의 자연수 m은

8, 16, 24, 32, 40, 48

의 6개이므로 순서쌍 (m, n)의 개수는

$6\times 12=72$

Step 4 $n=4k$일 때, 순서쌍 (m, n)의 개수를 구한다.

(iv) $n=4k$ $(k=1, 2, 3, \cdots, 12)$일 때

$(-1)^{4k}=1$, $(-i)^{4k}=1$이므로

$f(n)=1+1=2$

따라서 50 이하의 모든 자연수 m에 대하여 $\{f(n)\}^m$의 값은 양의 실수이므로 순서쌍 (m, n)의 개수는

$50\times 12=600$

Step 5 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수를 구한다.

이상에서 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$78+72+600=750$ 답 750

0308 Step 1 z의 거듭제곱의 규칙을 찾는다.

$z=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$에서

$z^2=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^2=\frac{2-2\sqrt{3}i}{4}$

$=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=w$ …… ㉠

$z^3=z^2\times z=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\times\frac{\sqrt{3}-i}{2}=\frac{-4i}{4}=-i$

$z^6=(z^3)^2=(-i)^2=-1$ …… ㉡

$z^{12}=(z^6)^2=(-1)^2=1$

즉 z의 거듭제곱은 z, z^2, $\cdots$, z^{12}의 값이 반복된다.

Step 2 $z^mw^n=-1$을 만족시키는 $m+2n$의 최댓값을 구한다.

㉠에 의하여

$z^mw^n=z^m(z^2)^n=z^{m+2n}=-1$

이때 ㉡에 의하여

$m+2n=12k-6$ (k는 자연수)

그런데 m, n이 20 이하의 자연수이므로

$m+2n\le 60$

따라서 $m+2n$의 최댓값은 54이다. 답 54

0309 Step 1 음수의 제곱근의 성질을 이용하여 $a+b$, c의 부호를 구한다.

조건 (가)에서

$a+b>0$, $c<0$

Step 2 z^3이 음의 실수이기 위한 a, b, c의 조건을 찾는다.

조건 (나)에서 z^2이 음의 실수이려면 z는 순허수이어야 한다.

따라서

$z=a^3+b^3+c^3-3abc(1+i)$

$=(a^3+b^3+c^3-3abc)-3abci$

에서

$a^3+b^3+c^3-3abc=0$, $-3abc\ne 0$

$a^3+b^3+c^3-3abc=0$에서

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

$\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

이때 a, b, c가 서로 다른 정수이므로

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ne 0$

$\therefore a+b+c=0$, 즉 $a+b=-c$

Step 3 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구한다.

a, b, c가 모두 -3 이상 3 이하인 정수이고 $ab\ne 0$, $a\ne b$이므로 c의 값에 따른 a, b의 순서쌍 (a, b)를 구하면 다음과 같다.

(i) $c=-3$일 때, $a+b=3$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(1, 2)$, $(2, 1)$의 2개

(ii) $c=-2$일 때, $a+b=2$이므로 순서쌍 (a, b)는
$(-1, 3), (3, -1)$의 2개
(iii) $c=-1$일 때, $a+b=1$이므로 순서쌍 (a, b)는
$(-2, 3), (3, -2)$의 2개
이상에서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$2+2+2=6$ 답 6

시험 만점 완성하기

본책 68~71쪽

0310 전략 복소수의 뜻을 알고 이를 분류해 본다.
① $9-5i$의 실수부분은 9, 허수부분은 -5이다.
② $-1+\sqrt{3}i^2=-1-\sqrt{3}$은 실수이다.
③ $(2+8i)-2(1-4i)=16i$는 순허수이다.
④ $\frac{10}{1-i}=\frac{10(1+i)}{(1-i)(1+i)}=5+5i$는 허수이다.
⑤ 허수는 실수 a와 0이 아닌 실수 b에 대하여 $a+bi$의 꼴로 나타낼 수 있다.
따라서 옳은 것은 ③이다. 답 ③

0311 전략 주어진 연산 기호의 규칙에 따라 식을 나타낸 후 계산한다.
$(4-i)\blacksquare(6+3i)=(4-i)-3(6+3i)+(4-i)(6+3i)$
$=4-i-18-9i+24+12i-6i+3$
$=13-4i$
따라서 허수부분은 -4이다. 답 ②

0312 전략 주어진 식을 $x+5y$, $x\times5y$를 포함한 식으로 변형한다.
$x^3+125y^3=(x+5y)^3-3\times x\times5y\times(x+5y)$ …… ㉠
$x=\frac{5}{2+i}=\frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)}=2-i$
$y=\frac{1}{2-i}=\frac{2+i}{(2-i)(2+i)}=\frac{2+i}{5}$에서 $5y=2+i$
따라서
$x+5y=(2-i)+(2+i)=4$,
$x\times5y=(2-i)(2+i)=5$
이므로 ㉠에서
$x^3+125y^3=4^3-3\times5\times4=4$ 답 ⑤

0313 전략 $z^4<0$을 만족시키는 z^2의 조건을 알아본다.
$z^4<0$, 즉 z^4이 음의 실수이려면 z^2은 순허수이어야 한다.
$z=(3-i)x+7+i=(3x+7)+(1-x)i$에서
$z^2=\{(3x+7)^2-(1-x)^2\}+2(3x+7)(1-x)i$
z^2이 순허수이어야 하므로
$(3x+7)^2-(1-x)^2=0$, $2(3x+7)(1-x)\neq0$
(i) $(3x+7)^2-(1-x)^2=0$에서
$2x^2+11x+12=0$, $(x+4)(2x+3)=0$
$\therefore x=-4$ 또는 $x=-\frac{3}{2}$
(ii) $2(3x+7)(1-x)\neq0$에서
$x\neq-\frac{7}{3}$, $x\neq1$
(i), (ii)에서 $x=-4$ 또는 $x=-\frac{3}{2}$
따라서 모든 실수 x의 값의 곱은
$-4\times\left(-\frac{3}{2}\right)=6$ 답 ④

0314 전략 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{15}$ 중에서 -1, i, $1+i$의 개수를 각각 x, y, z라 하고 식을 세운 후 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.
$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{15}$ 중에서 -1, i, $1+i$의 개수를 각각 x, y, z라 하면
$x+y+z=15$ …… ㉠
$(-1)^2=1$, $i^2=-1$, $(1+i)^2=2i$이므로
$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{15}^2=1\times x+(-1)\times y+2i\times z$
$=(x-y)+2zi$
$\therefore (x-y)+2zi=5+8i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x-y=5$, $2z=8$
$2z=8$에서 $z=4$
$z=4$를 ㉠에 대입하면
$x+y+4=15$ $\therefore x+y=11$
$x-y=5$, $x+y=11$을 연립하여 풀면
$x=8$, $y=3$
$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15}$
$=-1\times8+i\times3+(1+i)\times4$
$=-4+7i$ 답 ①

0315 전략 $z=a+bi$라 하고 각 식에 대입하여 참, 거짓을 판별한다.
$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면
$\overline{z}=a-bi$
① $z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$이므로 실수이다.
② $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=0$에서
$a=0$, $b=0$ $\therefore z=0$
③ $\overline{z}=a-bi$가 순허수이면
$a=0$, $b\neq0$
즉 $z=bi$이므로 z도 순허수이다.
④ $\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}=\frac{z+\overline{z}}{z\overline{z}}=\frac{2a}{a^2+b^2}$이므로 실수이다.
⑤ $z^3+\overline{z}^3=(z+\overline{z})^3-3z\overline{z}(z+\overline{z})$
$=(2a)^3-3\times(a^2+b^2)\times2a$
$=8a^3-6a^3-6ab^2$
$=2a^3-6ab^2$
이므로 실수이다.
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0316 전략 주어진 조건을 이용하여 a의 값을 구하고 보기의 참, 거짓을 판별한다.

$z^2+2z=(a+bi)^2+2(a+bi)$
$=(a^2-b^2+2a)+2b(a+1)i$
이때 z^2+2z가 실수이고 $b\neq0$이므로
$a+1=0 \quad \therefore a=-1$
$\therefore z=-1+bi$
ㄱ. $z+\overline{z}=(-1+bi)+(-1-bi)=-2$ (거짓)
ㄴ. $z\overline{z}=(-1+bi)(-1-bi)=1+b^2$
이때 $b\neq0$이므로 $b^2>0$
즉 $1+b^2>1$이므로 $z\overline{z}>1$ (참)
ㄷ. z^2+2z가 실수이므로 $\overline{z^2+2z}$도 실수이다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0317 전략 $z=a+bi$라 하고 주어진 등식을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$
$(2+i)z+(2-i)\overline{z}=10$에서
$(2+i)(a+bi)+(2-i)(a-bi)=10$
$2a+2bi+ai-b+2a-2bi-ai-b=10$
$4a-2b=10 \quad \therefore 2a-b=5$
① $a=-2$, $b=-7$이므로
$2a-b\neq5$
② $a=-1$, $b=-5$이므로
$2a-b\neq5$
③ $a=1$, $b=-5$이므로
$2a-b\neq5$
④ $a=3$, $b=-1$이므로
$2a-b\neq5$
⑤ $a=4$, $b=3$이므로
$2a-b=5$
따라서 복소수 z가 될 수 있는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0318 전략 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(98)$을 간단히 한다.

$f(n)=(n+1)i^{n+1}-ni^n$에서
$f(1)=2i^2-i$, $f(2)=3i^3-2i^2$, $f(3)=4i^4-3i^3$, …,
$f(98)=99i^{99}-98i^{98}$
$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(98)$
$=(2i^2-i)+(3i^3-2i^2)+(4i^4-3i^3)+\cdots$
$+(99i^{99}-98i^{98})$
$=-i+99i^{99}$
$=-i-99i=-100i$ 답 ①

0319 전략 z와 w의 거듭제곱의 규칙을 찾는다.

$z=\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}$에서
$z^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2=\dfrac{2}{2i}=-i$
$z^4=(z^2)^2=(-i)^2=-1$
$z^8=(z^4)^2=(-1)^2=1$
$w=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$에서
$w^2=\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$
$w^3=w^2\times w=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\times\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{-4}{4}=-1$
$w^6=(w^3)^2=(-1)^2=1$
따라서 n이 8의 배수일 때 $z^n=1$이고, n이 6의 배수일 때 $w^n=1$이므로 $z^n=w^n$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 8과 6의 최소공배수인 24이다.
답 ④

참고 $n=8k-4$ (k는 자연수)일 때 $z^n=-1$이고,
$n=6l-3$ (l은 자연수)일 때 $w^n=-1$이므로 $z^n=w^n=-1$을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

0320 전략 $x+7y=-35$, $xy=7$임을 이용하여 x, y의 부호를 구한다.

$xy=7$이므로
$x>0$, $y>0$ 또는 $x<0$, $y<0$
이때 $x+7y<0$이므로
$x<0$, $y<0$
따라서 $x<0$, $7y<0$이므로
$$\sqrt{\frac{7y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{7y}}=\frac{\sqrt{7y}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{7y}}$$
$$=\frac{(\sqrt{7y})^2+(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}\sqrt{7y}}$$
$$=\frac{x+7y}{-\sqrt{7xy}}$$
$$=\frac{-35}{-7}=5$$
답 ④

0321 전략 $\sqrt{a}\sqrt{bc}=-\sqrt{abc}$, $\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{c}{b}}$임을 이용하여 a, b, c의 부호를 구한다.

$\sqrt{a}\sqrt{bc}=-\sqrt{abc}$에서
$a<0$, $bc<0$
$bc<0$이고 $\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{c}{b}}$이므로
$b>0$, $c<0$
ㄱ. $a<0$, $b>0$이므로 $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ (참)
ㄴ. $b>0$, $c<0$이므로 $\sqrt{b}\sqrt{c}=\sqrt{bc}$ (참)
ㄷ. $a<0$, $c<0$에서 $a+c<0$이므로
$|a+c|=-(a+c)$, $|a|+|c|=-a-c$
$\therefore |a+c|=|a|+|c|$ (참)
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0322 전략 세 복소수 $-1+2i$, $1-2i$, $-4-8i$ 중 두 복소수의 곱을 각각 구해 본다.

$(-1+2i)(1-2i)=-1+2i+2i+4=3+4i$
$(-1+2i)(-4-8i)=4+8i-8i+16=20$
$(1-2i)(-4-8i)=-4-8i+8i-16=-20$
$\therefore a=20$ 답 20

0323 전략 $x^6+3x^5+2x^4-x^3-x^2$을 인수분해한다.

$x^2=-x+1+i$에서

$x^2+x=1+i$, $x^2+x-1=i$

이때

$x^6+3x^5+2x^4-x^3-x^2=x^2(x^4+3x^3+2x^2-x-1)$

$=x^2(x+1)^2(x^2+x-1)$

$=\{x(x+1)\}^2(x^2+x-1)$

$=(x^2+x)^2(x^2+x-1)$

이므로

$x^6+3x^5+2x^4-x^3-x^2-5=(x^2+x)^2(x^2+x-1)-5$

$=(1+i)^2\times i-5$

$=2i\times i-5$

$=-2-5=-7$ 답 -7

다른 풀이 $x^2=-x+1+i$에서

$x^2+x-1=i$

양변을 제곱하면 $x^4+2x^3-x^2-2x+1=-1$

$\therefore x^4+2x^3-x^2-2x+2=0$

$\therefore x^6+3x^5+2x^4-x^3-x^2-5$

$=x^2(x^4+2x^3-x^2-2x+2)$

$+x(x^4+2x^3-x^2-2x+2)$

$+(x^4+2x^3-x^2-2x+2)-7$

$=x^2\times 0+x\times 0+0-7=-7$

0324 전략 $\frac{1}{1+ai}$을 $m+ni$ (m, n은 실수)의 꼴로 나타낸 후 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

$\frac{1}{1+ai}=\frac{1-ai}{(1+ai)(1-ai)}=\frac{1}{1+a^2}-\frac{a}{1+a^2}i$이므로

$x+yi=\frac{1}{1+a^2}-\frac{a}{1+a^2}i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x=\frac{1}{1+a^2}$, $y=-\frac{a}{1+a^2}$

이때 $x+3y=1$이므로

$\frac{1}{1+a^2}-\frac{3a}{1+a^2}=1$

$\frac{1-3a}{1+a^2}=1$, $1-3a=1+a^2$

$a^2+3a=0$, $a(a+3)=0$

$\therefore a=-3$ ($\because a<0$) 답 -3

0325 전략 $z=\overline{z}$를 만족시키는 z의 조건을 알아본다.

$z=\overline{z}$이고 $z\neq 0$이므로 z는 0이 아닌 실수이다.

$z=(1+i)x^2-3xi-4i-1=(x^2-1)+(x^2-3x-4)i$에서

$x^2-1\neq 0$, $x^2-3x-4=0$

(i) $x^2-1\neq 0$에서 $(x+1)(x-1)\neq 0$

$\therefore x\neq -1$, $x\neq 1$

(ii) $x^2-3x-4=0$에서 $(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

(i), (ii)에서 $x=4$ 답 4

0326 전략 $z=a+bi$라 하고 주어진 등식을 이용하여 a, b^2의 값을 구한다.

$z=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq 0$)라 하면

$\overline{z}=a-bi$

$z\overline{z}+\frac{z}{\overline{z}}=7$에서 $(a+bi)(a-bi)+\frac{a+bi}{a-bi}=7$

$a^2+b^2+\frac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)}=7$

$a^2+b^2+\frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2}=7$

$\therefore \left(a^2+b^2+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)+\frac{2ab}{a^2+b^2}i=7$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2+b^2+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=7$, $\frac{2ab}{a^2+b^2}=0$

$\frac{2ab}{a^2+b^2}=0$에서 $ab=0$

$\therefore a=0$ ($\because b\neq 0$)

$a=0$을 $a^2+b^2+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=7$에 대입하면

$b^2-1=7$ $\therefore b^2=8$

$\therefore (\overline{z}-z)^2=\{(a-bi)-(a+bi)\}^2$

$=(-2bi)^2=-4b^2$

$=-32$ 답 -32

0327 전략 $\frac{2+5i}{5-2i}$, $\frac{1-i}{1+i}$를 간단히 한 후 m의 값에 따라 경우를 나누어 생각해 본다.

$\frac{2+5i}{5-2i}=\frac{(2+5i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)}=\frac{29i}{29}=i$,

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

이므로

$\left(\frac{2+5i}{5-2i}\right)^m-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n=i^m-(-i)^n$ ····· ㉠

(i) $m=4k-3$ ($k=1, 2, 3, \cdots, 10$)일 때

$i^m=i$이므로 ㉠이 실수가 되려면 $(-i)^n=i$이어야 한다.

$\therefore n=4t-1$ ($t=1, 2, 3, \cdots, 10$)

따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$10\times 10=100$

(ii) $m=4k-2$ ($k=1, 2, 3, \cdots, 10$)일 때

$i^m=-1$이므로 ㉠이 실수가 되려면 $(-i)^n=-1$ 또는 $(-i)^n=1$이어야 한다.

$\therefore n=2t$ ($t=1, 2, 3, \cdots, 20$)

따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$10\times 20=200$

(iii) $m=4k-1$ ($k=1, 2, 3, \cdots, 10$)일 때

$i^m=-i$이므로 ㉠이 실수가 되려면 $(-i)^n=-i$이어야 한다.

$\therefore n=4t-3$ ($t=1, 2, 3, \cdots, 10$)

따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$10\times 10=100$

(iv) $m=4k$ ($k=1, 2, 3, \cdots, 10$)일 때

$i^m=1$이므로 ㉠이 실수가 되려면 $(-i)^n=-1$ 또는 $(-i)^n=1$이어야 한다.

$\therefore n=2t$ ($t=1, 2, 3, \cdots, 20$)

따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$10\times20=200$

이상에서 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$100+200+100+200=600$ 답 600

0328 전략 z^2이 실수가 되기 위한 z의 조건을 알아본다.

$z=(1+i)x^2+(6-7i)x+8-18i$

$=(x^2+6x+8)+(x^2-7x-18)i$

z^2이 실수가 되려면 z는 실수 또는 순허수이어야 하므로

$x^2+6x+8=0$ 또는 $x^2-7x-18=0$ … ❶

(i) $x^2+6x+8=0$에서 $(x+4)(x+2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=-2$

(ii) $x^2-7x-18=0$에서 $(x+2)(x-9)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=9$

(i), (ii)에서

$x=-4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=9$ … ❷

따라서 모든 실수 x의 값의 합은

$-4+(-2)+9=3$ … ❸

답 3

단계	채점 요소	배점
❶	z^2이 실수가 되기 위한 조건 구하기	2점
❷	x의 값 구하기	2점
❸	모든 실수 x의 값의 합 구하기	1점

0329 전략 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

$|x-y|+(7-2x)i=11-5i$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$|x-y|=11$, $7-2x=-5$

$7-2x=-5$에서 $x=6$ … ❶

$|x-y|=11$에서 $|6-y|=11$

$6-y=-11$ 또는 $6-y=11$

$\therefore y=17$ 또는 $y=-5$

이때 $xy<0$이므로 $y=-5$ … ❷

$\therefore 3x+2y=3\times6+2\times(-5)=8$ … ❸

답 8

단계	채점 요소	배점
❶	x의 값 구하기	2점
❷	y의 값 구하기	2점
❸	$3x+2y$의 값 구하기	1점

0330 전략 켤레복소수의 성질을 이용하여 $\alpha+\beta$의 값을 구한다.

$\overline{\alpha}^2-\overline{\beta}^2=19+2i$에서

$(\overline{\alpha}+\overline{\beta})(\overline{\alpha}-\overline{\beta})=19+2i$

$\overline{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}=19+2i$

$\therefore (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=19-2i$

이때 $\alpha-\beta=3-8i$이므로

$(\alpha+\beta)(3-8i)=19-2i$

$\therefore \alpha+\beta=\dfrac{19-2i}{3-8i}=\dfrac{(19-2i)(3+8i)}{(3-8i)(3+8i)}$

$=\dfrac{73+146i}{73}=1+2i$ … ❶

$\alpha+\beta=1+2i$, $\alpha-\beta=3-8i$를 연립하여 풀면

$\alpha=2-3i$, $\beta=-1+5i$ … ❷

$\therefore \alpha\beta=(2-3i)(-1+5i)$

$=-2+10i+3i+15$

$=13+13i$ … ❸

답 $13+13i$

단계	채점 요소	배점
❶	$\alpha+\beta$의 값 구하기	3점
❷	α, β의 값 구하기	2점
❸	$\alpha\beta$의 값 구하기	1점

0331 전략 $z=\dfrac{\sqrt{7}+3i}{3-\sqrt{7}i}$를 간단히 한 후 주어진 식의 좌변의 반복되는 규칙을 찾는다.

$z=\dfrac{\sqrt{7}+3i}{3-\sqrt{7}i}=\dfrac{(\sqrt{7}+3i)(3+\sqrt{7}i)}{(3-\sqrt{7}i)(3+\sqrt{7}i)}=\dfrac{16i}{16}=i$ … ❶

$\therefore z+2z^2+3z^3+4z^4+\cdots+nz^n$

$=i+2i^2+3i^3+4i^4+\cdots+ni^n$

$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)+\cdots+ni^n$

$=(2-2i)+(2-2i)+\cdots+ni^n$

이때 $10(2-2i)=20-20i$이므로

$n=4\times10=40$ … ❷

답 40

단계	채점 요소	배점
❶	z를 간단히 하기	2점
❷	n의 값 구하기	4점

05 이차방정식

셀프 CHECK → 본책 72쪽

A 답 (1) $x=-2$ 또는 $x=7$ (2) $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

B 답 (1) $x=\frac{7\pm\sqrt{41}}{2}$ (2) $x=-2\pm\sqrt{2}i$

C 답 (1) $k<\frac{1}{4}$ (2) $k=\frac{1}{4}$ (3) $k>\frac{1}{4}$

D 답 (1) 7 (2) 5

E 답 (1) $x^2-2x-4=0$ (2) $x^2-6x+10=0$

F 답 $a=-8$, $b=14$

내신유형 다지기 → 본책 73~81쪽

유형 060 이차방정식의 풀이 → 본책 73쪽

이차방정식을 (x에 대한 이차식)$=0$의 꼴로 정리한 후 인수분해 또는 근의 공식을 이용한다.

0332 $(2x+1)^2=3(x+3)(x-5)$에서

$4x^2+4x+1=3x^2-6x-45$

$x^2+10x+46=0$

$\therefore x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-1\times46}}{1}=-5\pm\sqrt{21}i$

따라서 $a=-5$, $b=21$이므로 $b-a=26$ 답 ⑤

0333 $\frac{x^2+2x-1}{3}=\frac{1}{5}x(x+1)$에서

$5(x^2+2x-1)=3x(x+1)$

$5x^2+10x-5=3x^2+3x$

$2x^2+7x-5=0$

$\therefore x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\times2\times(-5)}}{2\times2}=\frac{-7\pm\sqrt{89}}{4}$

따라서 $a=\frac{-7-\sqrt{89}}{4}$이므로 $4a=-7-\sqrt{89}$

$\therefore 4a+7=-\sqrt{89}$ 답 $-\sqrt{89}$

0334 $(x\triangle x)-(x\triangle2)=-x^2+6x-8$에서

$(x+x-2\times x\times x)-(x+2-2\times x\times2)=-x^2+6x-8$

$(2x-2x^2)-(2-3x)=-x^2+6x-8$

$x^2+x-6=0$, $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=2$ ($\because x>0$) 답 2

0335 주어진 이차방정식의 양변에 $2+\sqrt{3}$을 곱하면

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})x^2-2(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{3}(2+\sqrt{3})=0$

$x^2-2(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}(2+\sqrt{3})=0$

$(x-\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})=0$

$\therefore x=\sqrt{3}$ 또는 $x=2+\sqrt{3}$

이때 $\alpha<\beta$이므로

$\alpha=\sqrt{3}$, $\beta=2+\sqrt{3}$

$\therefore 2\alpha-\beta=2\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})=\sqrt{3}-2$ 답 $\sqrt{3}-2$

참고 x^2의 계수가 무리수인 이차방정식은 먼저 x^2의 계수를 유리화한다.

유형 061 한 근이 주어진 이차방정식 → 본책 73쪽

이차방정식의 한 근이 주어진 경우

➜ 주어진 근을 방정식에 대입하면 등식이 성립한다.

0336 이차방정식 $x^2+(1-a)x+2a-4=0$의 한 근이 3이므로

$9+3(1-a)+2a-4=0$, $9+3-3a+2a-4=0$

$\therefore a=8$

$a=8$을 이차방정식 $3x^2-(2a+1)x-a+2=0$에 대입하면

$3x^2-17x-6=0$, $(3x+1)(x-6)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=6$ 답 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=6$

0337 이차방정식 $x^2+(3a-k)x-(k+5)b=0$의 한 근이 -2이므로

$4-2(3a-k)-(k+5)b=0$

$4-6a+2k-kb-5b=0$

$\therefore (2-b)k+4-6a-5b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$2-b=0$, $4-6a-5b=0$

$\therefore a=-1$, $b=2$

$\therefore a+b=1$ 답 ④

만점 공략 노트

다음은 모두 k에 대한 항등식을 나타낸다.

① k의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식

② 모든 k에 대하여 성립하는 등식

③ 임의의 k에 대하여 성립하는 등식

0338 이차방정식 $x^2+ax+\sqrt{2}-1=0$의 한 근이 $-1+\sqrt{2}$이므로

$(-1+\sqrt{2})^2+a(-1+\sqrt{2})+\sqrt{2}-1=0$

$1-2\sqrt{2}+2+a(-1+\sqrt{2})+\sqrt{2}-1=0$

$a(-1+\sqrt{2})=-2+\sqrt{2}$

$\therefore a=\frac{-2+\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}=\frac{(-2+\sqrt{2})(-1-\sqrt{2})}{(-1+\sqrt{2})(-1-\sqrt{2})}$

$=\frac{2+2\sqrt{2}-\sqrt{2}-2}{1-2}=-\sqrt{2}$ … ❶

$a=-\sqrt{2}$를 이차방정식 $x^2+ax+\sqrt{2}-1=0$에 대입하면
$x^2-\sqrt{2}x+\sqrt{2}-1=0$
$(x-1)(x+1-\sqrt{2})=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=-1+\sqrt{2}$ … ❷
따라서 다른 한 근은 1이다. … ❸

답 1

단계	채점 요소	비율
❶	a의 값 구하기	50 %
❷	주어진 이차방정식 풀기	40 %
❸	다른 한 근 구하기	10 %

0339 이차방정식 $x^2-4x-2=0$의 한 근이 α이므로
$\alpha^2-4\alpha-2=0$ $\therefore \alpha^2-4\alpha=2$
$\therefore (\alpha^2-3\alpha-1)(\alpha^2-5\alpha+3)$
$=(\alpha^2-4\alpha+\alpha-1)(\alpha^2-4\alpha-\alpha+3)$
$=(2+\alpha-1)(2-\alpha+3)$
$=-(\alpha+1)(\alpha-5)$
$=-(\alpha^2-4\alpha-5)$
$=-(2-5)=3$ 답 3

0340 이차방정식 $5x^2+(9k-2)x+5=0$의 한 근이 α이므로
$5\alpha^2+(9k-2)\alpha+5=0$
이때 $\alpha\neq0$이므로 양변을 α로 나누면
$5\alpha+9k-2+\frac{5}{\alpha}=0$, $5\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+9k-2=0$
$\alpha+\frac{1}{\alpha}=k^2$이므로 $5k^2+9k-2=0$
$(k+2)(5k-1)=0$
$\therefore k=-2$ ($\because k<0$) 답 -2

유형 062 절댓값 기호를 포함한 이차방정식 본책 74쪽

$|x|=\begin{cases} x & (x\geq0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$임을 이용하여 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어서 방정식을 푼다.
이때 해당 범위에 속하는 것만이 근임에 유의한다.

0341 (i) $x<-1$일 때, $x^2+5(x+1)-19=0$
$x^2+5x-14=0$, $(x+7)(x-2)=0$
$\therefore x=-7$ 또는 $x=2$
그런데 $x<-1$이므로 $x=-7$
(ii) $x\geq-1$일 때, $x^2-5(x+1)-19=0$
$x^2-5x-24=0$, $(x+3)(x-8)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=8$
그런데 $x\geq-1$이므로 $x=8$
(i), (ii)에서 $x=-7$ 또는 $x=8$
따라서 모든 근의 곱은
$-7\times8=-56$ 답 ①

0342 방정식 $|x^2+ax|=3$의 한 근이 1이므로
$|1+a|=3$, $1+a=\pm3$
$\therefore a=-4$ 또는 $a=2$
그런데 $a<0$이므로 $a=-4$ … ❶
즉 방정식 $|x^2+ax|=3$에서 $|x^2-4x|=3$
$\therefore x^2-4x=\pm3$
(i) $x^2-4x=3$일 때, $x^2-4x-3=0$
$\therefore x=2\pm\sqrt{7}$
(ii) $x^2-4x=-3$일 때, $x^2-4x+3=0$
$(x-1)(x-3)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=3$
(i), (ii)에서 $x=2\pm\sqrt{7}$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$ … ❷
따라서 1을 제외한 모든 근의 합은
$(2+\sqrt{7})+(2-\sqrt{7})+3=7$ … ❸

답 7

단계	채점 요소	비율
❶	a의 값 구하기	30 %
❷	주어진 방정식 풀기	50 %
❸	1을 제외한 모든 근의 합 구하기	20 %

0343 $2x^2-\sqrt{x^2-6x+9}=x^2+|x|+2$에서
$2x^2-\sqrt{(x-3)^2}=x^2+|x|+2$
$2x^2-|x-3|=x^2+|x|+2$
$\therefore x^2-|x-3|-|x|-2=0$
(i) $x<0$일 때, $x^2+(x-3)+x-2=0$
$x^2+2x-5=0$ $\therefore x=-1\pm\sqrt{6}$
그런데 $x<0$이므로 $x=-1-\sqrt{6}$
(ii) $0\leq x<3$일 때, $x^2+(x-3)-x-2=0$
$x^2=5$ $\therefore x=\pm\sqrt{5}$
그런데 $0\leq x<3$이므로 $x=\sqrt{5}$
(iii) $x\geq3$일 때, $x^2-(x-3)-x-2=0$
$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$ $\therefore x=1$
그런데 $x\geq3$이므로 $x=1$은 근이 아니다.
이상에서 $x=-1-\sqrt{6}$ 또는 $x=\sqrt{5}$
답 $x=-1-\sqrt{6}$ 또는 $x=\sqrt{5}$

유형 063 이차방정식의 활용 본책 74쪽

이차방정식의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 푼다.
(i) 구하려는 것을 미지수 x로 놓는다.
(ii) 주어진 조건을 이용하여 방정식을 세운다.
(iii) 방정식을 풀고 구한 해가 문제의 조건에 맞는지 확인한다.

0344 늘어난 땅의 넓이가 170 m^2이므로
$(8+x)\{8+(x-5)\}=8\times8+170$
$(8+x)(3+x)=234$, $x^2+11x-210=0$
$(x+21)(x-10)=0$ $\therefore x=-21$ 또는 $x=10$
그런데 $x>5$이므로 $x=10$ 답 10

0345 $\overline{AC}=x$라 하면 $\overline{AB}<\overline{AC}$이므로 $x>6$

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BC}=\sqrt{6^2+x^2}=\sqrt{36+x^2}$

정사각형 BDEC의 넓이는 직각삼각형 ABC의 넓이의 5배이므로

$(\sqrt{36+x^2})^2=5\times\left(\frac{1}{2}\times6\times x\right)$

$36+x^2=15x,\quad x^2-15x+36=0$

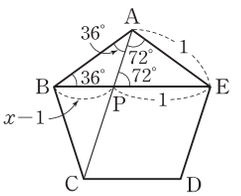
$(x-3)(x-12)=0\quad\therefore\ x=3$ 또는 $x=12$

그런데 $x>6$이므로 $x=12$

따라서 $\overline{AC}$의 길이는 12이다. 답 12

0346 정오각형의 한 내각의 크기는

$\frac{180^\circ\times(5-2)}{5}=108^\circ$



이때 $\triangle ABE$는 이등변삼각형이므로

$\angle ABE=\frac{1}{2}\times(180^\circ-108^\circ)$

$=36^\circ$

같은 방법으로 하면 $\triangle BCA$에서 $\angle BAC=36^\circ$이므로

$\angle EAP=\angle BAE-\angle BAP=108^\circ-36^\circ=72^\circ$

$\angle APE=\angle PAB+\angle PBA=36^\circ+36^\circ=72^\circ$

즉 $\triangle APE$는 이등변삼각형이므로 $\overline{EP}=\overline{EA}=1$

따라서 $\overline{BE}:\overline{PE}=\overline{PE}:\overline{BP}$에서

$x:1=1:(x-1),\quad x(x-1)=1$

$x^2-x-1=0$ …… ㉠

$\therefore\ x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

㉠에서 $x^2-x=1$이므로

$1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8$

$=1+(-x+x^2)+x^2(-x+x^2)$

$\quad+x^4(-x+x^2)+x^6(-x+x^2)$

$=1+1+x^2+x^4+x^6=2+x^2+x^4+x^6$ …… ㉡

이때 ㉠에서 $x^2=x+1$이므로

$x^4=(x^2)^2=(x+1)^2=x^2+2x+1$

$=(x+1)+2x+1=3x+2$

$x^6=x^2\times x^4=(x+1)(3x+2)=3x^2+5x+2$

$=3(x+1)+5x+2=8x+5$

따라서 ㉡에서

$1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8$

$=2+(x+1)+(3x+2)+(8x+5)$

$=12x+10=12\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}+10$

$=16+6\sqrt{5}$

즉 $p=16$, $q=6$이므로 $p+q=22$ 답 ①

만점 공략 노트

(1) n각형의 내각의 크기의 합 ➡ $180^\circ\times(n-2)$

(2) 정n각형의 한 내각의 크기 ➡ $\frac{180^\circ\times(n-2)}{n}$

유형 064 이차방정식의 근의 판별 본책 75쪽

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 할 때

(1) 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$

(2) 중근 (서로 같은 두 실근)을 가지면 $D=0$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지면 $D<0$

0347 주어진 방정식이 이차방정식이므로

$k+1\neq0\quad\therefore\ k\neq-1$ …… ㉠

이차방정식 $(k+1)x^2-6x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-3(k+1)>0$

$6-3k>0\quad\therefore\ k<2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$k<-1$ 또는 $-1<k<2$ 답 ④

0348 이차방정식 $3x^2+5x+k+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=5^2-4\times3\times(k+1)<0$

$13-12k<0\quad\therefore\ k>\frac{13}{12}$ …… ㉠ … ❶

이차방정식 $x^2-kx+5-2k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-k)^2-4(5-2k)=0$

$k^2+8k-20=0,\quad(k+10)(k-2)=0$

$\therefore\ k=-10$ 또는 $k=2$ …… ㉡ … ❷

㉠, ㉡에서 $k=2$ … ❸

답 2

단계	채점 요소	비율
❶	허근을 가질 때, k의 값의 범위 구하기	40 %
❷	중근을 가질 때, k의 값 구하기	40 %
❸	k의 값 구하기	20 %

0349 이차방정식 $x^2-2(k-a)x+k^2-8k+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-a)\}^2-(k^2-8k+b)=0$

$k^2-2ak+a^2-k^2+8k-b=0$

$\therefore\ (8-2a)k+a^2-b=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$8-2a=0,\ a^2-b=0$

$\therefore\ a=4,\ b=16$

$\therefore\ a+b=20$ 답 20

0350 (i) $n=1$일 때, $4x+1=0$이므로

$x=-\frac{1}{4}\quad\therefore\ f(1)=1$

(ii) $n\neq1$일 때, 이차방정식 $(1-n)x^2+4x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-(1-n)=n+3$

$n=-4$이면 $\frac{D}{4}=-1<0$이므로 $f(-4)=0$

$n=-3$이면 $\frac{D}{4}=0$이므로 $\quad f(-3)=1$

$n=0$이면 $\frac{D}{4}=3>0$이므로 $\quad f(0)=2$

(i), (ii)에서

$f(-4)+f(-3)+f(0)+f(1)=0+1+2+1=4$

답 4

유형 065 계수가 문자인 이차방정식의 근의 판별 본책 75쪽

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 판별

➜ b^2-4ac의 부호를 조사한다.

0351 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=a^2-4b<0$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+(a-2)x-a+b+2=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(a-2)^2-4(-a+b+2)=a^2-4b-4$

㉠에서 $a^2-4b-4<-4$이므로 $\quad D_2<0$

따라서 이차방정식 $x^2+(a-2)x-a+b+2=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다. 답 ③

0352 이차방정식 $ax^2+(b+2)x-c=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(b+2)^2+4ac$

$=b^2+4b+4+4\times(-2b)$

$=b^2-4b+4$

$=(b-2)^2\geq 0$

따라서 이차방정식 $ax^2+(b+2)x-c=0$은 실근을 갖는다.

답 실근을 갖는다.

0353 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이므로 $\quad a>0,\ b<0$

ㄱ. 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=a^2-4b>0$

따라서 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. 이차방정식 $x^2+2ax-b=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=a^2+b$

a^2+b의 값의 부호는 알 수 없으므로 이 이차방정식의 근은 판별할 수 없다.

ㄷ. 이차방정식 $x^2-2bx+a=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$\frac{D_3}{4}=b^2-a$

b^2-a의 값의 부호는 알 수 없으므로 이 이차방정식의 근은 판별할 수 없다.

ㄹ. 이차방정식 $ax^2+bx-1=0$의 판별식을 D_4라 하면

$D_4=b^2+4a>0$

따라서 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이상에서 항상 서로 다른 두 실근을 갖는 이차방정식은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ②

0354 두 이차방정식 $A(x)=0$, $B(x)=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$\frac{D_1}{4}=k^2-(k^2-2k+3)=2k-3$,

$\frac{D_2}{4}=(k+1)^2-(k^2+2)=2k-1$

ㄱ. $A(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면

$\frac{D_1}{4}=2k-3>0$

따라서 $2k-1>2$, 즉 $\frac{D_2}{4}>2$이므로 $B(x)=0$도 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $A(x)=0$이 중근을 가지면

$\frac{D_1}{4}=2k-3=0$

따라서 $2k-1=2>0$, 즉 $\frac{D_2}{4}>0$이므로 $B(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. $A(x)=0$이 서로 다른 두 허근을 가지면

$\frac{D_1}{4}=2k-3<0$

따라서 $2k-1<2$, 즉 $\frac{D_2}{4}<2$이므로 $B(x)=0$이 항상 서로 다른 두 허근을 갖는다고 할 수 없다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

유형 066 이차방정식의 판별식과 삼각형의 모양 본책 76쪽

판별식을 이용하여 주어진 이차방정식의 미정계수 사이의 관계를 파악한 후 다음을 이용하여 삼각형의 모양을 판단한다.

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c $(a\leq b\leq c)$일 때

(1) $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ ➜ 이등변삼각형

(2) $a=b=c$ ➜ 정삼각형

(3) $a^2+b^2>c^2$ ➜ 예각삼각형

(4) $a^2+b^2=c^2$ ➜ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

(5) $a^2+b^2<c^2$ ➜ 둔각삼각형

0355 이차방정식 $(a+c)x^2-2bx+c-a=0$의 판별식을 D라 하면 $\quad \frac{D}{4}=(-b)^2-(a+c)(c-a)=0$

$b^2-(c^2-a^2)=0 \quad \therefore c^2=a^2+b^2$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

답 ②

0356 $a(x^2+1)+b(x^2-1)+2cx=0$에서

$(a+b)x^2+2cx+a-b=0$

이차방정식 $(a+b)x^2+2cx+a-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=c^2-(a+b)(a-b)<0$

$c^2-(a^2-b^2)<0 \quad \therefore a^2>b^2+c^2$

따라서 주어진 삼각형은 둔각삼각형이다.

답 둔각삼각형

0357 이차방정식 $3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+b+c)\}^2-3(ab+bc+ca)=0$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\therefore \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

이때 a, b, c가 실수이므로

$a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$

$\therefore a=b=c$

따라서 주어진 삼각형은 정삼각형이다. 답 정삼각형

유형 067 이차식이 완전제곱식이 될 조건 본책 76쪽

이차식 ax^2+bx+c가 완전제곱식이다.

➜ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 갖는다.

➜ $b^2-4ac=0$

0358 주어진 식이 x에 대한 이차식이므로 $k\neq0$

또 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식 $kx^2-3kx+2k+1=0$의 판별식을 D라 할 때

$D=(-3k)^2-4k(2k+1)=0$

$k^2-4k=0$, $k(k-4)=0$

$\therefore k=4$ ($\because k\neq0$) 답 4

0359 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식 $x^2-2(ak+b)x+4k^2-c-3=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=\{-(ak+b)\}^2-(4k^2-c-3)=0$

$a^2k^2+2abk+b^2-4k^2+c+3=0$

$\therefore (a^2-4)k^2+2abk+b^2+c+3=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$a^2-4=0$, $2ab=0$, $b^2+c+3=0$

$\therefore a=-2$ ($\because a<0$), $b=0$, $c=-3$

$\therefore a+b-c=1$ 답 ③

0360 주어진 이차식이 $(4x+b)^2$으로 인수분해되려면 x에 대한 이차방정식 $16x^2+4ax+a+3=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=(2a)^2-16(a+3)=0$

$4a^2-16a-48=0$, $a^2-4a-12=0$

$(a+2)(a-6)=0$ $\therefore a=6$ ($\because a>0$) … ❶

$a=6$을 주어진 이차식에 대입하면

$16x^2+24x+9=(4x+3)^2$ $\therefore b=3$ … ❷

$\therefore b-a=-3$ … ❸

답 -3

단계	채점 요소	비율
❶	a의 값 구하기	60 %
❷	b의 값 구하기	30 %
❸	$b-a$의 값 구하기	10 %

0361 $\{P(x)+2\}^2=(x-a)(x-2a)+4$에서

$\{P(x)+2\}^2=x^2-3ax+2a^2+4$

이때 $x^2-3ax+2a^2+4$가 완전제곱식이어야 하므로 x에 대한 이차방정식 $x^2-3ax+2a^2+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3a)^2-4(2a^2+4)=0$

$a^2-16=0$, $(a+4)(a-4)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=4$

(i) $a=-4$일 때, $\{P(x)+2\}^2=x^2+12x+36$이므로

$\{P(x)+2\}^2=(x+6)^2$

$P(x)+2=\pm(x+6)$

$\therefore P(x)=x+4$ 또는 $P(x)=-x-8$

$\therefore P(1)=5$ 또는 $P(1)=-9$

(ii) $a=4$일 때, $\{P(x)+2\}^2=x^2-12x+36$이므로

$\{P(x)+2\}^2=(x-6)^2$

$P(x)+2=\pm(x-6)$

$\therefore P(x)=x-8$ 또는 $P(x)=-x+4$

$\therefore P(1)=-7$ 또는 $P(1)=3$

(i), (ii)에서 구하는 합은

$5+(-9)+(-7)+3=-8$ 답 ②

유형 068 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값 구하기 (1) 본책 77쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

0362 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-1$

ㄱ. $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{4}{-1}=-4$ (참)

ㄴ. $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=4^2-2\times(-1)=18$ (거짓)

ㄷ. $(\alpha-3)(\beta-3)=\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9$

$=-1-3\times4+9=-4$ (거짓)

ㄹ. $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=4^2-4\times(-1)=20$

$\therefore |\alpha-\beta|=2\sqrt{5}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄹ

0363 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=4$

$\therefore \frac{\beta+1}{\alpha}+\frac{\alpha+1}{\beta}=\frac{\beta(\beta+1)+\alpha(\alpha+1)}{\alpha\beta}$

$=\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$=\frac{3^2-2\times4+3}{4}$

$=1$ 답 1

0364 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=-\frac{3}{2}$ … ❶

$\therefore\ \alpha^3-5\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2+\beta^3$

$=\alpha^3+\beta^3-5\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)-5\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(\alpha+\beta)^3-8\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-3)^3-8\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times(-3)$

$=-27-36$

$=-63$ … ❷

답 -63

단계	채점 요소	비율
❶	$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 구하기	40 %
❷	$\alpha^3-5\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2+\beta^3$의 값 구하기	60 %

0365 $|x^2+5x|=2$에서 $x^2+5x=\pm2$

(i) $x^2+5x=2$, 즉 $x^2+5x-2=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-5,\ \alpha\beta=-2$

(ii) $x^2+5x=-2$, 즉 $x^2+5x+2=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\gamma+\delta=-5,\ \gamma\delta=2$

(i), (ii)에서

$\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{\delta}=\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+\frac{2(\gamma+\delta)}{\gamma\delta}$

$=\frac{2\times(-5)}{-2}+\frac{2\times(-5)}{2}$

$=5-5=0$

답 0

유형 069 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값 구하기 (2)

본책 77쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$a\alpha^2+b\alpha+c=0,\ a\beta^2+b\beta+c=0$,

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$

임을 이용하여 식의 값을 구한다.

0366 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2+3\alpha+1=0,\ \beta^2+3\beta+1=0$

$\therefore\ \alpha^2+3\alpha=-1,\ \beta^2+3\beta=-1$

이때

$\alpha^2+5\alpha-2=\alpha^2+3\alpha+2\alpha-2=2\alpha-3$,

$\beta^2+5\beta-2=\beta^2+3\beta+2\beta-2=2\beta-3$

이므로

$(\alpha^2+5\alpha-2)(\beta^2+5\beta-2)$

$=(2\alpha-3)(2\beta-3)$

$=4\alpha\beta-6(\alpha+\beta)+9$ …… ㉠

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=1$

따라서 ㉠에서

(주어진 식)$=4\times1-6\times(-3)+9=31$

답 31

0367 이차방정식 $x^2-8x+5=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-8\alpha+5=0,\ \beta^2-8\beta+5=0$

이때

$\alpha^2-7\alpha+5=\alpha^2-8\alpha+\alpha+5=\alpha$,

$\beta^2-7\beta+5=\beta^2-8\beta+\beta+5=\beta$

이므로

$\frac{1}{\alpha^2-7\alpha+5}+\frac{1}{\beta^2-7\beta+5}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

$=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$ …… ㉠

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=8,\ \alpha\beta=5$

따라서 ㉠에서 (주어진 식)$=\frac{8}{5}$

답 ④

0368 이차방정식 $x^2-2x-4=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-2\alpha-4=0,\ \beta^2-2\beta-4=0$

$\therefore\ \alpha^2-2\alpha=4,\ \beta^2-2\beta=4$

이때

$\alpha^3-2\alpha^2-\alpha+1=\alpha(\alpha^2-2\alpha)-\alpha+1=3\alpha+1$,

$\beta^3-2\beta^2-\beta+1=\beta(\beta^2-2\beta)-\beta+1=3\beta+1$

이므로

$(\alpha^3-2\alpha^2-\alpha+1)(\beta^3-2\beta^2-\beta+1)$

$=(3\alpha+1)(3\beta+1)$

$=9\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+1$ …… ㉠

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-4$

따라서 ㉠에서

(주어진 식)$=9\times(-4)+3\times2+1=-29$

답 -29

유형 070 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수 구하기

본책 78쪽

이차방정식의 두 근 α, β에 대한 식의 값이 주어진 경우

➜ 주어진 식을 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$에 대한 식으로 변형한 후 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수를 구한다.

0369 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=\frac{k}{3}$

$\therefore\ \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-2)^3-3\times\frac{k}{3}\times(-2)=-8+2k$

$\alpha^3+\beta^3=6$에서

$-8+2k=6$ $\therefore\ k=7$

답 7

0370 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3k+1$, $\alpha\beta=k-2$

$\therefore\ \alpha^2\beta-3\alpha-3\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)-3(\alpha+\beta)$

$=(\alpha+\beta)(\alpha\beta-3)$

$=(3k+1)(k-5)$

$\alpha^2\beta-3\alpha-3\beta+\alpha\beta^2=19$에서

$(3k+1)(k-5)=19$, $3k^2-14k-24=0$

$(3k+4)(k-6)=0$ $\therefore\ k=6\ (\because\ k>0)$

답 6

0371 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-k$, $\alpha\beta=-6k$

$k>0$에서 $\alpha\beta=-6k<0$이므로

$(|\alpha|+|\beta|)^2=|\alpha|^2+2|\alpha\beta|+|\beta|^2$

$=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-k)^2-4\times(-6k)$

$=k^2+24k$

이때 $|\alpha|+|\beta|=9$에서 $(|\alpha|+|\beta|)^2=81$이므로

$k^2+24k=81$, $k^2+24k-81=0$

$(k+27)(k-3)=0$ $\therefore\ k=3\ (\because\ k>0)$

따라서 $\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=-18$이므로

$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1$

$=-18-3+1=-20$

답 -20

0372 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2a$, $\alpha\beta=-b$

$\therefore\ |\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$=\sqrt{(-2a)^2-4\times(-b)}=\sqrt{4a^2+4b}$

$=2\sqrt{a^2+b}$

따라서 $|\alpha-\beta|<12$에서 $2\sqrt{a^2+b}<12$, $\sqrt{a^2+b}<6$

$\therefore\ a^2+b<36$

(i) $a=1$일 때, $b<35$이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 34이다.

(ii) $a=2$일 때, $b<32$이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 31이다.

(iii) $a=3$일 때, $b<27$이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 26이다.

(iv) $a=4$일 때, $b<20$이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 19이다.

(v) $a=5$일 때, $b<11$이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 10이다.

이상에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$34+31+26+19+10=120$

답 120

유형 071 **두 근 사이의 관계가 주어질 때 미정계수 구하기** → 본책 78쪽

이차방정식의 두 근에 대한 조건이 주어진 경우 두 근을 다음과 같이 놓고 근과 계수의 관계를 이용한다.

(1) 두 근의 차가 k ➡ α, $\alpha+k$

(2) 두 근의 비가 $m:n$ ➡ $m\alpha$, $n\alpha$ $(\alpha\neq0)$

(3) 한 근이 다른 근의 k배 ➡ α, $k\alpha$ $(\alpha\neq0)$

(4) 두 근이 연속인 정수 ➡ α, $\alpha+1$ (α는 정수)

0373 이차방정식 $x^2-4kx+k-4=0$의 두 근을 α, $\alpha+6$이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+6)=4k$, $\alpha(\alpha+6)=k-4$

$\alpha+(\alpha+6)=4k$에서 $\alpha=2k-3$

이것을 $\alpha(\alpha+6)=k-4$에 대입하면

$(2k-3)(2k+3)=k-4$, $4k^2-k-5=0$

$(k+1)(4k-5)=0$ $\therefore\ k=-1$ 또는 $k=\frac{5}{4}$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-1+\frac{5}{4}=\frac{1}{4}$

답 ③

0374 이차방정식 $x^2+(5-m)x+3m=0$의 두 근을 α, 3α $(\alpha\neq0)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+3\alpha=m-5$이므로 $m=4\alpha+5$ …… ㉠

$\alpha\times3\alpha=3m$이므로 $m=\alpha^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha^2=4\alpha+5$

$\alpha^2-4\alpha-5=0$, $(\alpha+1)(\alpha-5)=0$

$\therefore\ \alpha=-1$ 또는 $\alpha=5$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $m=1$ 또는 $m=25$

따라서 모든 실수 m의 값의 곱은

$1\times25=25$

답 25

0375 이차방정식 $x^2-2(m-3)x+m^2-5m+1=0$의 두 근을 α, $\alpha+2$ (α는 홀수)라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+2)=2(m-3)$, $\alpha(\alpha+2)=m^2-5m+1$ … ❶

$\alpha+(\alpha+2)=2(m-3)$에서 $\alpha=m-4$

이것을 $\alpha(\alpha+2)=m^2-5m+1$에 대입하면

$(m-4)(m-2)=m^2-5m+1$

$m^2-6m+8=m^2-5m+1$

$\therefore\ m=7$ … ❷

답 7

단계	채점 요소	비율
❶	두 근을 α, $\alpha+2$ (α는 홀수)라 하고 α, m에 대한 식 구하기	60 %
❷	m의 값 구하기	40 %

0376 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 곱) $=-54<0$이므로 두 근의 부호는 서로 다르다.

따라서 이차방정식 $x^2-(k+1)x-54=0$의 두 근을 2α, -3α $(\alpha\neq0)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+(-3\alpha)=k+1$ …… ㉠

$2\alpha\times(-3\alpha)=-54$ …… ㉡

㉡에서 $\alpha^2=9$이므로 $\alpha=-3$ 또는 $\alpha=3$

(i) $\alpha=-3$일 때, ㉠에서

$3=k+1$ $\therefore\ k=2$

(ii) $\alpha=3$일 때, ㉠에서

$-3=k+1$ $\therefore\ k=-4$

(i), (ii)에서 음수 k의 값은 -4이다.

답 -4

유형 072 두 이차방정식이 주어질 때 미정계수 구하기

본책 79쪽

두 이차방정식의 근이 모두 α, β에 대한 식으로 주어진 경우
➜ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β에 대한 식을 세운다.

0377 이차방정식 $x^2-ax-10=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=-10$ …… ㉠

이차방정식 $5x^2+2x+b=0$의 두 근이 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{2}{5}$, $\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{b}{5}$

$\therefore \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{2}{5}$, $\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{b}{5}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-\frac{a}{10}=-\frac{2}{5}$, $-\frac{1}{10}=\frac{b}{5}$ $\therefore a=4$, $b=-\frac{1}{2}$

$\therefore ab=-2$ 답 ②

0378 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-(7-a)x+6=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=7-a$, $(\alpha+\beta)\alpha\beta=6$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a+b=7-a$, $ab=6$

$a+b=7-a$에서 $b=-2a+7$

이것을 $ab=6$에 대입하면

$a(-2a+7)=6$, $2a^2-7a+6=0$

$(2a-3)(a-2)=0$ $\therefore a=2$ ($\because a$는 정수)

따라서 $b=-2\times2+7=3$이므로

$a+b=5$ 답 5

0379 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+3ax+3b=0$의 두 근이 $\alpha+2$, $\beta+2$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+2)+(\beta+2)=-3a$, $(\alpha+2)(\beta+2)=3b$

$\therefore \alpha+\beta+4=-3a$, $\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4=3b$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-a+4=-3a$, $b-2a+4=3b$

$\therefore a=-2$, $b=4$

$\therefore \alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=4$

한편 $x^2-2x+4=0$의 양변에 $x+2$를 곱하면

$(x+2)(x^2-2x+4)=0$, $x^3+8=0$

$\therefore x^3=-8$

따라서 $\alpha^3=-8$, $\beta^3=-8$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\times4=-4$

$\alpha^3+\beta^3=-8+(-8)=-16$

$\alpha^4+\beta^4=\alpha^3\times\alpha+\beta^3\times\beta=-8(\alpha+\beta)$

$=-8\times2=-16$

$\alpha^5+\beta^5=\alpha^3\times\alpha^2+\beta^3\times\beta^2=-8(\alpha^2+\beta^2)$

$=-8\times(-4)=32$

$\alpha^6+\beta^6=(\alpha^3)^2+(\beta^3)^2=(-8)^2+(-8)^2=128$

$\alpha^7+\beta^7=\alpha^6\times\alpha+\beta^6\times\beta=64(\alpha+\beta)$

$=64\times2=128$

즉 주어진 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 6이다.

답 6

유형 073 두 수를 근으로 하는 이차방정식

본책 79쪽

두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

0380 이차방정식 $3x^2+x+4=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{1}{3}$, $\alpha\beta=\frac{4}{3}$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(-\frac{1}{3}\right)^2-2\times\frac{4}{3}=-\frac{23}{9}$,

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$

따라서 α^2, β^2을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 9인 이차방정식은

$9\left(x^2+\frac{23}{9}x+\frac{16}{9}\right)=0$ $\therefore 9x^2+23x+16=0$

답 $9x^2+23x+16=0$

0381 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$ … ❶

$\therefore \frac{\beta}{1+\alpha}+\frac{\alpha}{1+\beta}=\frac{\beta(1+\beta)+\alpha(1+\alpha)}{(1+\alpha)(1+\beta)}$

$=\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}$

$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}$

$=\frac{2^2-2\times(-1)+2}{1+2+(-1)}$

$=4$,

$\frac{\beta}{1+\alpha}\times\frac{\alpha}{1+\beta}=\frac{\alpha\beta}{(1+\alpha)(1+\beta)}$

$=\frac{\alpha\beta}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}$

$=\frac{-1}{1+2+(-1)}$

$=-\frac{1}{2}$

따라서 $\frac{\beta}{1+\alpha}$, $\frac{\alpha}{1+\beta}$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$2\left(x^2-4x-\frac{1}{2}\right)=0$ $\therefore 2x^2-8x-1=0$ … ❷

즉 $p=-8$, $q=-1$이므로

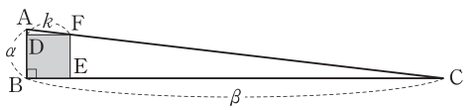
$pq=8$ … ❸

답 8

단계	채점 요소	비율
❶	$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 구하기	20 %
❷	이차방정식 구하기	60 %
❸	pq의 값 구하기	20 %

0382 이차방정식 $x^2-8x+6=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=6$



위의 그림과 같이 직각삼각형 ABC에 내접하는 정사각형 DBEF의 한 변의 길이를 k라 하면

$\triangle ADF \backsim \triangle ABC$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{DF} : \overline{BC}$, $(\alpha-k) : \alpha = k : \beta$

$\alpha k=\beta(\alpha-k)$, $(\alpha+\beta)k=\alpha\beta$

$\therefore k=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

따라서 정사각형 DBEF의 넓이는 $\frac{9}{16}$, 둘레의 길이는 3이므로

$\frac{9}{16}$, 3을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 16인 이차방정식은

$16\left\{x^2-\left(\frac{9}{16}+3\right)x+\frac{9}{16}\times 3\right\}=0$

$\therefore 16x^2-57x+27=0$

즉 $m=-57$, $n=27$이므로

$m+n=-30$ 답 ①

유형 074 잘못 푼 이차방정식 → 본책 80쪽

(1) 일차항의 계수를 잘못 보았다. ➜ 두 근의 곱은 바르게 보았다.
(2) 상수항을 잘못 보았다. ➜ 두 근의 합은 바르게 보았다.

0383 민구는 a, c를 바르게 보고 풀었으므로

$\frac{c}{a}=-6\times 4=-24$ $\therefore c=-24a$

가은이는 a, b를 바르게 보고 풀었으므로

$-\frac{b}{a}=(5+\sqrt{3})+(5-\sqrt{3})=10$ $\therefore b=-10a$

따라서 주어진 이차방정식은 $ax^2-10ax-24a=0$

$a\neq 0$이므로 $x^2-10x-24=0$

$(x+2)(x-12)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=12$

답 $x=-2$ 또는 $x=12$

0384 현서는 b를 바르게 보고 풀었으므로

$\frac{b}{5}=-\frac{2}{5}$ $\therefore b=-2$ … ❶

은진이는 a를 바르게 보고 풀었으므로

$-\frac{a}{5}=2$ $\therefore a=-10$ … ❷

$\therefore b-a=8$ … ❸

답 8

단계	채점 요소	비율
❶	b의 값 구하기	40 %
❷	a의 값 구하기	40 %
❸	$b-a$의 값 구하기	20 %

0385 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 근의 공식을 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{2a}$로 잘못 적용하여 얻은 두 근이 -2, 3이므로

$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=-2+3$,

$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=-2\times 3$

$-\frac{b}{a}=1$, $\frac{c}{4a}=-6$ $\therefore b=-a$, $c=-24a$

따라서 주어진 이차방정식은

$ax^2-ax-24a=0$

이므로 구하는 두 근의 곱은

$\frac{-24a}{a}=-24$ 답 -24

유형 075 이차방정식 $f(x)=0$과 $f(ax+b)=0$의 관계 → 본책 80쪽

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이면 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$
이므로 이차방정식 $f(ax+b)=0$ $(a\neq 0)$의 두 근은
$ax+b=\alpha$ 또는 $ax+b=\beta$에서

$x=\frac{\alpha-b}{a}$ 또는 $x=\frac{\beta-b}{a}$

0386 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(3x)=0$이려면

$3x=\alpha$ 또는 $3x=\beta$ $\therefore x=\frac{\alpha}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta}{3}$

따라서 $f(3x)=0$의 두 근의 곱은

$\frac{\alpha}{3}\times\frac{\beta}{3}=\frac{\alpha\beta}{9}=\frac{-18}{9}=-2$ 답 -2

0387 $f(1-4x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=3$

$f(1-4\alpha)=0$, $f(1-4\beta)=0$이므로 $f(x)=0$이려면

$x=1-4\alpha$ 또는 $x=1-4\beta$

따라서 $f(x)=0$의 두 근의 합은

$(1-4\alpha)+(1-4\beta)=2-4(\alpha+\beta)$

$=2-4\times 3=-10$ 답 -10

0388 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f\left(\frac{x+3}{2}\right)=0$이려면

$\frac{x+3}{2}=\alpha$ 또는 $\frac{x+3}{2}=\beta$

$\therefore x=2\alpha-3$ 또는 $x=2\beta-3$

따라서 $f\left(\frac{x+3}{2}\right)=0$의 두 근의 곱은

$(2\alpha-3)(2\beta-3)=4\alpha\beta-6(\alpha+\beta)+9$

$=4\times2-6\times(-4)+9=41$ 답 41

유형 076 이차식의 인수분해 본책 80쪽

x에 대한 이차식 ax^2+bx+c가 쉽게 인수분해되지 않을 때에는 다음과 같은 순서로 인수분해한다.

(i) 근의 공식을 이용하여 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근 α, β를 구한다.

(ii) $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$로 인수분해한다.

0389 $x^2+4x+7=0$에서 $x=-2\pm\sqrt{3}i$

$\therefore x^2+4x+7=\{x-(-2+\sqrt{3}i)\}\{x-(-2-\sqrt{3}i)\}$

$=(x+2-\sqrt{3}i)(x+2+\sqrt{3}i)$ 답 ④

0390 $4x^2-8x+5=0$에서 $x=\frac{2\pm i}{2}$

$\therefore 4x^2-8x+5=4\left(x-\frac{2+i}{2}\right)\left(x-\frac{2-i}{2}\right)$

$=(2x-2-i)(2x-2+i)$

따라서 인수인 것은 ③이다. 답 ③

유형 077 이차식을 두 일차식의 곱으로 인수분해하기 본책 81쪽

x, y에 대한 이차식이 두 일차식의 곱으로 인수분해된다.

➜ (이차식)$=0$의 판별식 D가 완전제곱식이어야 하므로 $D=0$의 판별식 D'의 값이 0임을 이용한다.

0391 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+(y-2)x+ay^2-7y-3$

x에 대한 이차방정식 $x^2+(y-2)x+ay^2-7y-3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(y-2)^2-4(ay^2-7y-3)=(1-4a)y^2+24y+16$

이때 주어진 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 D가 완전제곱식이어야 한다.

즉 $1-4a\neq0$에서 $a\neq\frac{1}{4}$

y에 대한 이차방정식 $(1-4a)y^2+24y+16=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\frac{D'}{4}=12^2-16(1-4a)=0$, $64a=-128$

$\therefore a=-2$ 답 -2

참고 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리해도 같은 결과를 얻을 수 있다.

0392 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$3x^2-2(y-1)x-y^2+ky-8$

x에 대한 이차방정식 $3x^2-2(y-1)x-y^2+ky-8=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(y-1)\}^2-3(-y^2+ky-8)$

$=4y^2-(3k+2)y+25$

이때 주어진 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 D가 완전제곱식이어야 한다.

따라서 y에 대한 이차방정식 $4y^2-(3k+2)y+25=0$의 판별식을 D'이라 하면

$D'=\{-(3k+2)\}^2-4\times4\times25=0$

$3k^2+4k-132=0$, $(3k+22)(k-6)=0$

$\therefore k=6$ ($\because k$는 정수) 답 6

유형 078 $f(\alpha)=f(\beta)=k$를 만족시키는 이차식 $f(x)$ 구하기 본책 81쪽

이차식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=f(\beta)=k$이면

$f(\alpha)-k=0$, $f(\beta)-k=0$이므로 이차방정식 $f(x)-k=0$의 두 근은 α, β이다.

0393 $f(\alpha)=f(\beta)=3$이므로

$f(\alpha)-3=0$, $f(\beta)-3=0$

즉 이차방정식 $f(x)-3=0$의 두 근이 α, β이고 $f(x)$의 x^2의 계수가 1이므로

$f(x)-3=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-4x-9$

따라서 $f(x)=x^2-4x-6$이므로

$f(-1)=-1$ 답 ⑤

0394 이차방정식 $3x^2+6x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$

$f(\alpha)=f(\beta)=-2$이므로

$f(\alpha)+2=0$, $f(\beta)+2=0$

즉 이차방정식 $f(x)+2=0$의 두 근이 α, β이고 $f(x)$의 x^2의 계수가 3이므로

$f(x)+2=3(x-\alpha)(x-\beta)=3x^2+6x-2$

따라서 $f(x)=3x^2+6x-4$이므로

$f(2)=20$ 답 20

유형 079 이차방정식의 켤레근의 성질 본책 81쪽

(1) 계수가 유리수인 이차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$이다.

(단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)

(2) 계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 $p+qi$이면 다른 한 근은 $p-qi$이다. (단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$이다.)

0395 a, b가 유리수이므로 이차방정식 $x^2-(a+2b)x+3a-4b=0$의 한 근이 $-3+\sqrt{7}$이면 다른 한 근은 $-3-\sqrt{7}$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-3+\sqrt{7})+(-3-\sqrt{7})=a+2b$,

$(-3+\sqrt{7})(-3-\sqrt{7})=3a-4b$

$\therefore a+2b=-6,\ 3a-4b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=-2$

$\therefore ab=4$ 답 4

0396 p, q가 실수이므로 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 한 근이 $\frac{5}{1-2i}=\frac{5(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=1+2i$이면 다른 한 근은 $1-2i$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+2i)+(1-2i)=-p,\ (1+2i)(1-2i)=q$

$\therefore p=-2,\ q=5$

이때 $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$, 즉 $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 10인 이차방정식은

$10\left\{x^2-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)x+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{5}\right\}=0$

$\therefore 10x^2+3x-1=0$ 답 $10x^2+3x-1=0$

0397 주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 한 근이 α이면 다른 한 근은 $\overline{\alpha}$이고 한 근이 β이면 다른 한 근은 $\overline{\beta}$이다.

$\therefore \overline{\alpha}=\beta,\ \overline{\beta}=\alpha$

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=3$

또 $\alpha^2-\alpha+3=0$, $\beta^2-\beta+3=0$에서

$\alpha^2+3=\alpha$, $\beta^2+3=\beta$

$$\therefore \frac{(\alpha^2+\overline{\beta}+3)(\beta^2+\overline{\alpha}+3)}{\alpha+\overline{\alpha}}=\frac{(\alpha+\overline{\beta})(\overline{\alpha}+\beta)}{\alpha+\overline{\alpha}}$$
$$=\frac{(\alpha+\alpha)(\beta+\beta)}{\alpha+\beta}$$
$$=\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$
$$=\frac{4\times3}{1}=12$$

답 12

0398 조건 (가)에서 허수 z는 x에 대한 이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 한 근이다.

이때 m, n이 정수이므로 이 이차방정식의 다른 한 근은 $\overline{z}$이다.

조건 (나)에서 $z+\overline{z}=8$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$z+\overline{z}=-m=8$ $\therefore m=-8$

이차방정식 $x^2-8x+n=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-n<0$ $\therefore n>16$

따라서 정수 n의 최솟값은 17이므로 $m+n$의 최솟값은

$-8+17=9$ 답 ④

다른 풀이 z는 허수이므로 $z=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면

$\overline{z}=a-bi$

조건 (나)에서

$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=8$ $\therefore a=4$

조건 (가)에서

$(4+bi)^2+m(4+bi)+n=0$

$(16-b^2+4m+n)+b(8+m)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$16-b^2+4m+n=0$ …… ㉠

$b(8+m)=0$ …… ㉡

㉡에서 $b\neq0$이므로 $m=-8$

$m=-8$을 ㉠에 대입하면

$16-b^2-32+n=0$ $\therefore n=16+b^2$

이때 $b\neq0$이므로 $b^2>0$ $\therefore n>16$

따라서 정수 n의 최솟값은 17이므로 $m+n$의 최솟값은

$-8+17=9$

1등급 유형 도전하기

본책 82~83쪽

0399 Step 1 α, β의 거듭제곱의 규칙을 찾아 (가), (나)에 알맞은 수를 구한다.

$x^2-x+1=0$에서 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\alpha=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$, $\beta=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$라 하면

$\alpha^2=\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$,

$\alpha^3=\alpha^2\times\alpha=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\times\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=-1$,

$\alpha^4=\alpha^3\times\alpha=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$,

$\alpha^5=\alpha^3\times\alpha^2=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$,

$\alpha^6=(\alpha^3)^2=(-1)^2=1$

이므로 $\alpha^n=\alpha^{n+6}$

마찬가지로

$\beta^2=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$,

$\beta^3=\beta^2\times\beta=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=-1$,

$\beta^4=\beta^3\times\beta=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$,

$\beta^5=\beta^3\times\beta^2=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$,

$\beta^6=(\beta^3)^2=(-1)^2=1$

이므로 $\beta^n=\beta^{n+6}$

자연수 k에 대하여

(i) $n=6k-5$일 때

$$\alpha^n+\beta^n=\alpha+\beta=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=1$$

(ii) $n=6k-4$일 때

$$\alpha^n+\beta^n=\alpha^2+\beta^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=-1$$

(iii) $n=6k-3$일 때

$$\alpha^n+\beta^n=\alpha^3+\beta^3=-1+(-1)=\boxed{\text{(가) } -2}$$

(iv) $n=6k-2$일 때

$$\alpha^n+\beta^n=\alpha^4+\beta^4=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=-1$$

(v) $n=6k-1$일 때

$$\alpha^n+\beta^n=\alpha^5+\beta^5=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$$

(vi) $n=6k$일 때

$$\alpha^n+\beta^n=\alpha^6+\beta^6=1+1=\boxed{\text{(나) } 2}$$

Step 2 $\alpha^n+\beta^n=-2$가 되는 경우를 찾아 (다)에 알맞은 식과 (라)에 알맞은 수를 구한다.

즉 $\alpha^n+\beta^n=-2$가 되는 경우는 $n=\boxed{\text{(다) } 6k-3}$일 때이다.

따라서 $\alpha^n+\beta^n=-2$가 되도록 하는 30 이하의 자연수 n은

3, 9, 15, 21, 27

의 $\boxed{\text{(라) } 5}$개이다.

Step 3 $f(a+b+c)$의 값을 구한다.

$a=-2$, $b=2$, $c=5$, $f(k)=6k-3$이므로

$$f(a+b+c)=f(5)=27$$

답 27

논리 Check

이차방정식 $x^2-\sqrt{2}x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^n+\beta^n=2$가 되도록 하는 50 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오.

풀이 $x^2-\sqrt{2}x+1=0$에서 $x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}$

$\alpha=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}$, $\beta=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$라 하면

$$\alpha^2=\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}\right)^2=-i,$$

$$\alpha^3=\alpha^2\times\alpha=-i\times\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2},$$

$$\alpha^4=(\alpha^2)^2=(-i)^2=-1,$$

$$\alpha^5=\alpha^4\times\alpha=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2},$$

$$\alpha^6=\alpha^4\times\alpha^2=i,$$

$$\alpha^7=\alpha^4\times\alpha^3=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2},$$

$$\alpha^8=(\alpha^4)^2=(-1)^2=1$$

이므로 $\alpha^n=\alpha^{n+8}$

마찬가지로

$$\beta^2=\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)^2=i,$$

$$\beta^3=\beta^2\times\beta=i\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2},$$

$$\beta^4=(\beta^2)^2=i^2=-1,$$

$$\beta^5=\beta^4\times\beta=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2},$$

$$\beta^6=\beta^4\times\beta^2=-i,$$

$$\beta^7=\beta^4\times\beta^3=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2},$$

$$\beta^8=(\beta^4)^2=(-1)^2=1$$

이므로 $\beta^n=\beta^{n+8}$

자연수 k에 대하여

(i) $n=8k-7$일 때

$$\alpha^n+\beta^n=\alpha+\beta=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}=\sqrt{2}$$

(ii) $n=8k-6$일 때

$$\alpha^n+\beta^n=\alpha^2+\beta^2=-i+i=0$$

(iii) $n=8k-5$일 때

$$\alpha^n+\beta^n=\alpha^3+\beta^3=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}+\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}=-\sqrt{2}$$

(iv) $n=8k-4$일 때

$$\alpha^n+\beta^n=\alpha^4+\beta^4=-1+(-1)=-2$$

(v) $n=8k-3$일 때

$$\alpha^n+\beta^n=\alpha^5+\beta^5=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}+\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}=-\sqrt{2}$$

(vi) $n=8k-2$일 때

$$\alpha^n+\beta^n=\alpha^6+\beta^6=i+(-i)=0$$

(vii) $n=8k-1$일 때

$$\alpha^n+\beta^n=\alpha^7+\beta^7=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}=\sqrt{2}$$

(viii) $n=8k$일 때

$$\alpha^n+\beta^n=\alpha^8+\beta^8=1+1=2$$

즉 $\alpha^n+\beta^n=2$가 되는 경우는 $n=8k$일 때이다.

따라서 $\alpha^n+\beta^n=2$가 되도록 하는 50 이하의 자연수 n은

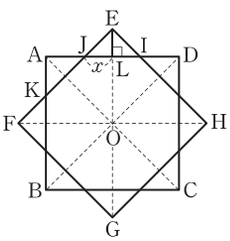
8, 16, 24, 32, 40, 48

의 6개이다.

답 6

0400 Step 1 변의 길이를 미지수로 놓고 △EJI와 △AKJ의 넓이를 식으로 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 E에서 변 AD에 내린 수선의 발을 L이라 하자. $\overline{JL}=x$라 하면 △EJL은 직각이등변삼각형이므로 $\overline{EL}=x$이다.



$$\therefore\ \triangle EJI=\frac{1}{2}\times\overline{JI}\times\overline{EL}$$

$$=\frac{1}{2}\times2x\times x=x^2$$

또 $\overline{AJ}=2-x$이고 △AKJ도 직각이등변삼각형이므로

$$\triangle AKJ=\frac{1}{2}\times\overline{AJ}\times\overline{AK}$$

$$=\frac{1}{2}\times(2-x)\times(2-x)=\frac{(2-x)^2}{2}$$

Step 2 △AKJ의 넓이가 △EJI의 넓이의 $\frac{3}{2}$배임을 이용하여 이차방정식을 세워서 푼다.

△AKJ의 넓이가 △EJI의 넓이의 $\frac{3}{2}$배이므로

$$\frac{(2-x)^2}{2}=\frac{3}{2}x^2, \qquad x^2+2x-2=0$$

$$\therefore\ x=-1+\sqrt{3}\ (\because\ x>0)$$

Step 3 $\overline{OE}$의 길이를 이용하여 k의 값을 구한다.

$\overline{OE}=\overline{OL}+\overline{EL}=2+(-1+\sqrt{3})=1+\sqrt{3}$

이때 □EFGH의 대각선의 길이가 $2\sqrt{2}k$이므로

$$\overline{OE}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}k=\sqrt{2}k$$

즉 $\sqrt{2}k=1+\sqrt{3}$이므로 $\qquad k=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

Step 4 $40ab$의 값을 구한다.

$a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이므로 $\qquad 40ab=10$ 답 10

0401 Step 1 이차방정식 $ax^2-8x+4=0$이 정수인 근을 적어도 하나 가질 조건을 이용하여 가능한 a의 값을 구한다.

이차방정식 $ax^2-8x+4=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-4)^2-4a\geq 0, \qquad 16-4a\geq 0$$

$$\therefore\ a\leq 4$$

이때 이차방정식 $ax^2-8x+4=0$의 근이

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4a}}{a} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이고, 적어도 한 개는 정수이므로 $16-4a=k^2$ (k는 정수)의 꼴이어야 한다.

즉 $k^2=16-4a=4(4-a)=2^2(4-a)$이고 a는 자연수이므로

$4-a=0$ 또는 $4-a=1$

$\therefore\ a=3$ 또는 $a=4$

Step 2 이차방정식 $bx^2-6x+2a=0$이 정수인 근을 적어도 하나 가질 조건을 이용하여 a의 값에 따른 b의 값을 구한다.

(i) $a=3$일 때

이차방정식 $3x^2-8x+4=0$의 근은 ㉠에서

$x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

즉 이 이차방정식의 정수인 근이 존재한다.

한편 이차방정식 $bx^2-6x+6=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(-3)^2-6b\geq 0, \qquad 9-6b\geq 0$$

$$\therefore\ b\leq\frac{3}{2}$$

이를 만족시키는 자연수 b는 1뿐이다.

이때 $x^2-6x+6=0$에서 $\qquad x=3\pm\sqrt{3}$

따라서 이 이차방정식의 정수인 근은 존재하지 않는다.

(ii) $a=4$일 때

이차방정식 $4x^2-8x+4=0$의 근은 ㉠에서

$x=1$

즉 이 이차방정식의 정수인 근이 존재한다.

한편 이차방정식 $bx^2-6x+8=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(-3)^2-8b\geq 0, \qquad 9-8b\geq 0$$

$$\therefore\ b\leq\frac{9}{8}$$

이를 만족시키는 자연수 b는 1뿐이다.

이때 $x^2-6x+8=0$에서 $\qquad (x-2)(x-4)=0$

$\therefore\ x=2$ 또는 $x=4$

따라서 이 이차방정식의 정수인 근이 존재한다.

Step 3 $a-b$의 값을 구한다.

(i), (ii)에서 $a=4$, $b=1$이므로

$a-b=3$ 답 3

0402 Step 1 두 이차방정식에서 근과 계수의 관계를 이용하여 a의 값과 b, n 사이의 관계식을 구한다.

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이차방정식 $x^2-a(n+1)x+b(n+1)=0$의 두 근이 $\alpha+n$, $\beta+n$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\alpha+n)+(\beta+n)=a(n+1),$$

$$(\alpha+n)(\beta+n)=b(n+1)$$

$$\therefore\ \alpha+\beta+2n=a(n+1), \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$$\alpha\beta+n(\alpha+\beta)+n^2=b(n+1) \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$a+2n=a(n+1), \qquad a+2n=an+a$$

$$2n=an \qquad \therefore\ a=2\ (\because\ n>0)$$

또 ㉠을 ㉢에 대입하면

$$b+an+n^2=b(n+1), \qquad b+2n+n^2=bn+b$$

$$2n+n^2=bn, \qquad n(2+n)=bn$$

$$\therefore\ b=n+2\ (\because\ n>0)$$

Step 2 일차방정식의 근이 $x=3$임을 이용하여 b, n의 값을 구한다.

일차방정식 $ax-b=a(n+1)x-b(n+1)$, 즉 $2x-(n+2)=2(n+1)x-(n+2)(n+1)$의 근이 $x=3$이므로

$$6-(n+2)=6(n+1)-(n+2)(n+1)$$

$$n^2-4n=0, \qquad n(n-4)=0$$

$$\therefore\ n=4\ (\because\ n>0)$$

$$\therefore\ b=4+2=6$$

Step 3 곱셈 공식의 변형을 이용하여 $\alpha^n+\beta^n$의 값을 구한다.

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=6$이므로

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$=2^2-2\times 6$$

$$=-8$$

$$\therefore\ \alpha^n+\beta^n=\alpha^4+\beta^4$$

$$=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$$

$$=(-8)^2-2\times 6^2$$

$$=-8$$

답 −8

0403 Step 1 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$ …… ㉠

Step 2 $f(\alpha^2)=-2\alpha$, $f(\beta^2)=-2\beta$의 식을 변형한다.

α가 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근이므로

$\alpha^2+\alpha+1=0$

㉠에서 $\alpha=-\beta-1$이므로

$\alpha^2+(-\beta-1)+1=0$ $\therefore \alpha^2=\beta$

따라서 $f(\alpha^2)=-2\alpha$에서

$f(\beta)=-2(-\beta-1)$

$\therefore f(\beta)-2\beta-2=0$ …… ㉡

β가 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근이므로

$\beta^2+\beta+1=0$

㉠에서 $\beta=-\alpha-1$이므로

$\beta^2+(-\alpha-1)+1=0$ $\therefore \beta^2=\alpha$

따라서 $f(\beta^2)=-2\beta$에서

$f(\alpha)=-2(-\alpha-1)$

$\therefore f(\alpha)-2\alpha-2=0$ …… ㉢

Step 3 $f(x)$를 구한다.

㉡, ㉢에서 이차방정식 $f(x)-2x-2=0$의 두 근이 α, β이고 $f(x)$의 x^2의 계수가 1이므로

$f(x)-2x-2=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+x+1$

$\therefore f(x)=x^2+3x+3$

Step 4 $p+q$의 값을 구한다.

$p=3$, $q=3$이므로 $p+q=6$ 답 6

다른 풀이 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=1$

$f(\alpha^2)=-2\alpha$, $f(\beta^2)=-2\beta$에서

$\alpha^4+p\alpha^2+q=-2\alpha$ …… ㉠

$\beta^4+p\beta^2+q=-2\beta$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$\alpha^4+\beta^4+p(\alpha^2+\beta^2)+2q=-2(\alpha+\beta)$

이때

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\times1=-1$,

$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=(-1)^2-2\times1^2=-1$

이므로

$-1-p+2q=2$ $\therefore p-2q=-3$ …… ㉢

㉠−㉡을 하면

$\alpha^4-\beta^4+p(\alpha^2-\beta^2)=-2(\alpha-\beta)$

$(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)+p(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)+2(\alpha-\beta)=0$

$(\alpha-\beta)-p(\alpha-\beta)+2(\alpha-\beta)=0$, $(\alpha-\beta)(3-p)=0$

$\therefore p=3$ ($\because \alpha\neq\beta$)

$p=3$을 ㉢에 대입하면 $3-2q=-3$ $\therefore q=3$

$\therefore p+q=6$

0404 Step 1 이차방정식이 허근을 가질 조건을 이용하여 k의 값의 범위를 구한다.

이차방정식 $x^2+2(k+1)x+k^2-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(k^2-1)<0$

$2k+2<0$ $\therefore k<-1$

Step 2 이차방정식의 켤레근의 성질과 근과 계수의 관계를 이용하여 $w^2+\overline{w}^2$의 값을 구한다.

$w^4=\overline{w}^4$, 즉 $w^4-\overline{w}^4=0$에서

$(w^2+\overline{w}^2)(w+\overline{w})(w-\overline{w})=0$

이때 w는 허수이므로 $w-\overline{w}\neq0$

또 k가 실수이므로 이차방정식 $x^2+2(k+1)x+k^2-1=0$의 한 근이 w이면 다른 한 근은 $\overline{w}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$w+\overline{w}=-2(k+1)$, $w\overline{w}=k^2-1$ …… ㉠

그런데 $k<-1$이므로 $w+\overline{w}\neq0$

따라서 $w^4-\overline{w}^4=0$이려면 $w^2+\overline{w}^2=0$이어야 한다.

Step 3 $w^2+\overline{w}^2=0$임을 이용하여 k의 값을 구한다.

$w^2+\overline{w}^2=(w+\overline{w})^2-2w\overline{w}$

$=\{-2(k+1)\}^2-2(k^2-1)$ ($\because$ ㉠)

$=2k^2+8k+6$

이므로 $w^2+\overline{w}^2=0$에서

$2k^2+8k+6=0$, $(k+3)(k+1)=0$

$\therefore k=-3$ ($\because k<-1$) 답 −3

0405 Step 1 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하고 조건 (나)를 이용하여 z를 구한다.

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$

조건 (나)에서 $z-i$는 $-3z+6$의 켤레복소수이므로

$\overline{z}+i=-3z+6$

$a-bi+i=-3(a+bi)+6$

$\therefore a+(1-b)i=(-3a+6)-3bi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-3a+6$, $1-b=-3b$ $\therefore a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$

$\therefore z=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$

Step 2 조건 (가)를 이용하여 $f(x)$를 구한다.

조건 (가)에서 $z-i=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$가 이차방정식 $2x^2-2kx+k^2=0$의 한 근이고 k가 실수이므로 $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$도 이 이차방정식의 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$k=\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i\right)+\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i\right)=3$

$\therefore f(x)=2x^2-6x+9$

Step 3 $f(2z-k)$의 값을 구한다.

$2z-k=2\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i\right)-3=-i$이므로

$f(2z-k)=f(-i)=-2+6i+9=7+6i$

답 $7+6i$

시험 만점 완성하기

본책 84~87쪽

0406 전략 x^2의 계수가 무리수인 이차방정식은 먼저 x^2의 계수를 유리화한다.

주어진 이차방정식의 양변에 $\sqrt{2}-1$을 곱하면

$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)x^2+(\sqrt{2}-1)(3+\sqrt{2})x+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=0$

$x^2+(2\sqrt{2}-1)x+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=0$

$(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{2}-1)=0$

$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=1-\sqrt{2}$

이때 $\alpha>\beta$이므로 $\alpha=1-\sqrt{2}$, $\beta=-\sqrt{2}$

$\therefore 2\alpha-3\beta=2(1-\sqrt{2})-3\times(-\sqrt{2})=2+\sqrt{2}$ 답 ④

0407 전략 주어진 근을 방정식에 대입하면 등식이 성립함을 이용한다.

이차방정식 $x^2-3x-1=0$의 한 근이 α이므로

$\alpha^2-3\alpha-1=0$

이때 $\alpha\neq0$이므로 양변을 α로 나누면

$\alpha-3-\frac{1}{\alpha}=0$ $\therefore \alpha-\frac{1}{\alpha}=3$

$\therefore \alpha^3-4\alpha+\frac{4}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^3}+10$

$=\alpha^3-\frac{1}{\alpha^3}-4\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)+10$

$=\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^3+3\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)-4\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)+10$

$=\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^3-\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)+10$

$=3^3-3+10=34$ 답 ⑤

0408 전략 주어진 연산 기호의 규칙에 따라 식을 나타낸 후 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어서 방정식을 푼다.

$x◎x=|x◎2|$에서

$x^2-x-x=|2x-x-2|$

$\therefore x^2-2x=|x-2|$

(i) $x<2$일 때, $x^2-2x=-x+2$

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

그런데 $x<2$이므로 $x=-1$

(ii) $x\geq2$일 때, $x^2-2x=x-2$

$x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

그런데 $x\geq2$이므로 $x=2$

(i), (ii)에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 모든 x의 값의 곱은 $-1\times2=-2$ 답 ①

0409 전략 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 판별 ➜ b^2-4ac의 부호를 조사한다.

주어진 방정식이 이차방정식이므로

$k^2-4\neq0$ $\therefore k\neq-2$, $k\neq2$ …… ㉠

이차방정식 $(k^2-4)x^2-2(k+2)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+2)\}^2-(k^2-4)\geq0$

$k^2+4k+4-k^2+4\geq0$, $4k+8\geq0$

$\therefore k\geq-2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-2<k<2$ 또는 $k>2$

따라서 정수 k의 최솟값은 -1이다. 답 ②

0410 전략 주어진 이차방정식의 판별식을 a, b, c에 대한 식으로 나타낸다.

이차방정식 $x^2+2(a+b+c)x+3(ab+bc+ca)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

ㄱ. $\frac{D}{4}\geq0$이므로 주어진 이차방정식은 항상 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $a=b=c$이면 $\frac{D}{4}=0$이므로 주어진 이차방정식은 중근을 갖는다. (참)

ㄷ. $a+b+c=0$이면 주어진 이차방정식은

$x^2+3(ab+bc+ca)=0$

$\therefore x=\pm\sqrt{-3(ab+bc+ca)}$

이때

$ab+bc+ca=a(b+c)+bc$

$=a\times(-a)+(-a-c)c$

$=-a^2-ac-c^2$

$=-(a^2+ac+c^2)$

$=-\left\{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}c^2\right\}<0$ ($\because abc\neq0$)

이므로 $-3(ab+bc+ca)>0$

따라서 주어진 이차방정식은 부호가 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0411 전략 이차식 px^2+qx+r가 완전제곱식이다.
➜ 이차방정식 $px^2+qx+r=0$이 중근을 갖는다.

주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식 $x^2+2ax+8a-3b=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=a^2-(8a-3b)=0$, $a^2-8a+3b=0$

$\therefore (a-4)^2=16-3b$ …… ㉠

이때 b는 자연수이고 ㉠에서 $16-3b\geq0$이므로

$b\leq\frac{16}{3}$

$\therefore b=1, 2, 3, 4, 5$

또 a는 자연수이므로 $(a-4)^2=k^2$ (k는 정수)의 꼴이어야 한다.

$b=4$일 때, ㉠에서 $(a-4)^2=4$이므로

$a-4=\pm2$ $\therefore a=2$ 또는 $a=6$

$b=5$일 때, ㉠에서 $(a-4)^2=1$이므로

$a-4=\pm1$ $\therefore a=3$ 또는 $a=5$

따라서 $a+b=6$ 또는 $a+b=8$ 또는 $a+b=10$이므로 $a+b$의 최댓값은 10이다. 답 ③

0412 전략 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$임을 이용한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=4$ …… ㉠

따라서

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$

$=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$ ($\because$ ㉠에서 $\alpha>0$, $\beta>0$)

$=8+2\sqrt{4}=12$

이므로 $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=2\sqrt{3}$ 답 ②

0413 전략 $\beta P(\alpha)+\alpha P(\beta)$를 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$에 대한 식으로 변형한 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-3$

$\therefore \beta P(\alpha)+\alpha P(\beta)$

$=\beta(2\alpha^2-7\alpha+1)+\alpha(2\beta^2-7\beta+1)$

$=2\alpha^2\beta-7\alpha\beta+\beta+2\alpha\beta^2-7\alpha\beta+\alpha$

$=2\alpha\beta(\alpha+\beta)-14\alpha\beta+\alpha+\beta$

$=2\times(-3)\times(-1)-14\times(-3)+(-1)$

$=47$ 답 ④

0414 전략 먼저 주어진 조건을 이용하여 $\alpha+\beta$와 $\alpha\beta$의 값의 범위를 구한다.

조건 (가)에서 $8<\alpha+\beta<10$, $12<\alpha\beta<21$

이차방정식 $ax^2-bx+4c=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=\frac{b}{a}$이므로

$8<\frac{b}{a}<10$ $\therefore 8a<b<10a$ ($\because a>0$)

이때 조건 (나)에 의하여 $a=1$, $b=9$

또 $\alpha\beta=\frac{4c}{a}=4c$이므로 $12<4c<21$ $\therefore 3<c<\frac{21}{4}$

따라서 조건 (나)에 의하여 $c=4$ 또는 $c=5$

(i) $c=4$일 때, 주어진 방정식은

$x^2-9x+16=0$ $\therefore x=\frac{9\pm\sqrt{17}}{2}$

$2<\frac{9-\sqrt{17}}{2}<3$, $6<\frac{9+\sqrt{17}}{2}<7$이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $c=5$일 때, 주어진 방정식은

$x^2-9x+20=0$, $(x-4)(x-5)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=5$

이것은 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $c=4$

$\therefore a+b-3c=1+9-3\times4=-2$ 답 ③

0415 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β와 a, b 사이의 관계식을 구한다.

이차방정식 $x^2+ax+6=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=6$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-13x-4b=0$의 두 근이 α^2, β^2이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha^2+\beta^2=13$, $\alpha^2\beta^2=-4b$

$\therefore (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=13$, $(\alpha\beta)^2=-4b$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2-12=13$, $36=-4b$

$\therefore a=5$ ($\because a>0$), $b=-9$

$\therefore a-b=14$ 답 ⑤

0416 전략 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하고 $f(2x-7)=0$의 두 근을 α, β에 대한 식으로 나타낸다.

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=-3$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(2x-7)=0$이려면

$2x-7=\alpha$ 또는 $2x-7=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha+7}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta+7}{2}$

따라서 $f(2x-7)=0$의 두 근의 곱은

$\frac{\alpha+7}{2}\times\frac{\beta+7}{2}=\frac{\alpha\beta+7(\alpha+\beta)+49}{4}$

$=\frac{-3+7\times6+49}{4}$

$=22$ 답 ④

0417 전략 α^3이 실수가 되는 조건을 알아본다.

$\alpha=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하자.

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 한 근이 $\alpha=a+bi$이면 다른 한 근은 $a-bi$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a+bi)+(a-bi)=2k$, $(a+bi)(a-bi)=k+1$

$\therefore a=k$, $a^2+b^2=k+1$

한편

$\alpha^3=(a+bi)^3=a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i$

$=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i$

이므로 α^3이 실수이려면 $3a^2b-b^3=0$이어야 한다.

이때 $b\neq0$이므로

$3a^2-b^2=0$ $\therefore b^2=3a^2$

이것을 $a^2+b^2=k+1$에 대입하면

$4a^2=k+1$, $4k^2=k+1$ ($\because a=k$)

$\therefore 4k^2-k-1=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{1}{4}$이다.

답 ④

다른 풀이 이차방정식 $x^2-2kx+k+1=0$의 한 근이 α이므로

$\alpha^2-2k\alpha+k+1=0$, $\alpha^2=2k\alpha-k-1$

$\therefore \alpha^3=2k\alpha^2-k\alpha-\alpha$

$=2k(2k\alpha-k-1)-k\alpha-\alpha$

$=4k^2\alpha-2k^2-2k-k\alpha-\alpha$

$=(4k^2-k-1)\alpha-2k^2-2k$

이때 k는 실수, α는 허수이므로 α^3이 실수이려면

$4k^2-k-1=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{1}{4}$이다.

0418 전략 $x^2-x+1=0$의 한 근이 z임을 이용하여 $z^n(1-z)^{2n}$을 간단히 한다.

이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 근이 z이므로

$z^2-z+1=0$

$\therefore 1-z=-z^2$

$\therefore z^n(1-z)^{2n}=z^n\times(-z^2)^{2n}$

$=z^n\times z^{4n}=z^{5n}$ …… ㉠

$z^2-z+1=0$에서 $(z+1)(z^2-z+1)=0$

$z^3+1=0$, $z^3=-1$

$\therefore z^6=(z^3)^2=1$

따라서 ㉠에서 z^{5n}의 값이 양의 실수이려면 $n=6k$ (k는 자연수)의 꼴이어야 하므로 60 이하의 자연수 n은

6, 12, 18, …, 60

의 10개이다. 답 10

0419 전략 주어진 식을 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$에 대한 식으로 변형한 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식 $x^2+5x+k=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2+5\alpha+k=0$, $\beta^2+5\beta+k=0$

$\therefore \alpha^2+6\alpha+k=\alpha$, $\beta^2+6\beta+k=\beta$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=k$

$\therefore \frac{\beta}{\alpha^2+6\alpha+k}+\frac{\alpha}{\beta^2+6\beta+k}=\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\frac{25-2k}{k}$

$\frac{\beta}{\alpha^2+6\alpha+k}+\frac{\alpha}{\beta^2+6\beta+k}=\frac{19}{3}$에서

$\frac{25-2k}{k}=\frac{19}{3}$, $75-6k=19k$

$25k=75$ $\therefore k=3$ 답 3

0420 전략 두 근을 α, $-\alpha$ ($\alpha\neq0$)라 하고 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식 $2x^2-(k^2+k-12)x+3k-1=0$의 두 근을 α, $-\alpha$ ($\alpha\neq0$)라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-\alpha)=\frac{k^2+k-12}{2}$ …… ㉠

$\alpha\times(-\alpha)=\frac{3k-1}{2}$ …… ㉡

㉠에서 $\frac{k^2+k-12}{2}=0$이므로

$k^2+k-12=0$, $(k+4)(k-3)=0$

$\therefore k=-4$ 또는 $k=3$ …… ㉢

㉡에서 $-\alpha^2<0$이므로

$\frac{3k-1}{2}<0$ $\therefore k<\frac{1}{3}$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $k=-4$ 답 -4

만점 공략 노트

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근 α, β의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르면

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=0$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}<0$

0421 전략 바르게 본 계수를 이용하여 두 근의 합과 곱을 구한다.

원래의 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$ (a, b는 상수)이라 하자.

재현이는 b를 바르게 보고 풀었으므로

$b=(-1+2i)(-1-2i)=5$

우주는 a를 바르게 보고 풀었으므로

$-a=(4+\sqrt{7})+(4-\sqrt{7})$ $\therefore a=-8$

따라서 원래의 이차방정식은

$x^2-8x+5=0$

$\therefore x=4\pm\sqrt{11}$ 답 $x=4\pm\sqrt{11}$

0422 전략 이차식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되는 조건을 알아본다.

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2+(k-y)x-y^2+2y+3$

x에 대한 이차방정식 $2x^2+(k-y)x-y^2+2y+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k-y)^2-4\times2\times(-y^2+2y+3)$

$=9y^2-2(k+8)y+k^2-24$

이때 주어진 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 D가 완전제곱식이어야 한다.

따라서 y에 대한 이차방정식 $9y^2-2(k+8)y+k^2-24=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\frac{D'}{4}=\{-(k+8)\}^2-9(k^2-24)=0$

$k^2-2k-35=0$, $(k+5)(k-7)=0$

$\therefore k=-5$ ($\because k<0$) 답 -5

0423 전략 이차식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=f(\beta)=k$이면 이차방정식 $f(x)-k=0$의 두 근은 α, β이다.

조건 (가)에서 $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=f\left(\frac{\beta}{2}\right)=-4$이므로

$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)+4=0$, $f\left(\frac{\beta}{2}\right)+4=0$

즉 이차방정식 $f\left(\frac{x}{2}\right)+4=0$의 두 근이 α, β이므로 $f\left(\frac{x}{2}\right)$의 x^2의 계수를 $a\,(a\neq0)$라 하면

$f\left(\frac{x}{2}\right)+4=a(x-\alpha)(x-\beta)=a(x^2+8x-3)$

$\therefore f\left(\frac{x}{2}\right)=a(x^2+8x-3)-4$

조건 (나)에서 $f(0)=-1$이므로

$-3a-4=-1 \qquad \therefore a=-1$

따라서 $f\left(\frac{x}{2}\right)=-x^2-8x-1$이므로

$f(3)=f\left(\frac{6}{2}\right)=-6^2-8\times6-1=-85$ 답 -85

0424 전략 $\overline{AP}$의 길이를 x라 하고 □APOS와 □OQCR의 넓이의 합이 12임을 이용하여 x에 대한 이차방정식을 세운다.

$\overline{AP}=x$라 하면 $\triangle ABD\backsim\triangle SOD$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AB}:\overline{SO}=\overline{AD}:\overline{SD}, \qquad 4:x=8:\overline{SD}$

$4\overline{SD}=8x \qquad \therefore \overline{SD}=2x$

따라서 □APOS의 넓이는

$\overline{AP}\times\overline{AS}=x(8-2x)=8x-2x^2$

□OQCR의 넓이는

$\overline{OQ}\times\overline{OR}=(4-x)\times2x=8x-2x^2$

□APOS와 □OQCR의 넓이의 합이 12이므로

$(8x-2x^2)+(8x-2x^2)=12$ … ❶

$x^2-4x+3=0, \qquad (x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$ … ❷

이때 $\overline{AP}<\overline{PB}$에서 $x<4-x$, 즉 $x<2$이므로

$x=1$

따라서 $\overline{AP}$의 길이는 1이다. … ❸

답 1

단계	채점 요소	배점
❶	이차방정식 세우기	3점
❷	이차방정식 풀기	2점
❸	$\overline{AP}$의 길이 구하기	1점

0425 전략 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 k인 이차방정식 ➡ $k\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0$

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 -2, α이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+\alpha=-a, \ -2\alpha=b$

$\therefore a=2-\alpha, \ b=-2\alpha$ …… ㉠

이차방정식 $2x^2+(a-2)x-b-5=0$의 두 근이 1, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+\beta=\frac{2-a}{2}, \ \beta=\frac{-b-5}{2}$

$\therefore a=-2\beta, \ b=-2\beta-5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2-\alpha=-2\beta, \ -2\alpha=-2\beta-5$

$\therefore \alpha-2\beta=2, \ 2\alpha-2\beta=5$

두 식을 연립하여 풀면 $\alpha=3, \ \beta=\frac{1}{2}$ … ❶

따라서 3, $\frac{1}{2}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$2\left\{x^2-\left(3+\frac{1}{2}\right)x+3\times\frac{1}{2}\right\}=0$

$\therefore 2x^2-7x+3=0$ … ❷

즉 $p=-7$, $q=3$이므로

$p+q=-4$ … ❸

답 -4

단계	채점 요소	배점
❶	α, β의 값 구하기	3점
❷	이차방정식 구하기	2점
❸	$p+q$의 값 구하기	1점

0426 전략 먼저 근의 공식을 이용하여 이차방정식 $\frac{1}{3}x^2-2x+\frac{13}{3}=0$의 해를 구한다.

$\frac{1}{3}x^2-2x+\frac{13}{3}=0$에서 $\qquad x^2-6x+13=0$

$\therefore x=3\pm2i$ … ❶

$\therefore \frac{1}{3}x^2-2x+\frac{13}{3}=\frac{1}{3}\{x-(3+2i)\}\{x-(3-2i)\}$

$=\frac{1}{3}(x-3-2i)(x-3+2i)$ … ❷

따라서 $a=-3$, $b=-2$, $c=-3$, $d=2$이므로

$ad-bc=-12$ … ❸

답 -12

단계	채점 요소	배점
❶	이차방정식 $\frac{1}{3}x^2-2x+\frac{13}{3}=0$의 해 구하기	2점
❷	이차식 $\frac{1}{3}x^2-2x+\frac{13}{3}$을 인수분해하기	2점
❸	$ad-bc$의 값 구하기	1점

0427 전략 이차방정식의 켤레근의 성질을 이용하여 다른 한 근을 구한다.

a, b가 실수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $\frac{4}{1+\sqrt{3}i}=\frac{4(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}=1-\sqrt{3}i$이면 다른 한 근은 $1+\sqrt{3}i$이다. … ❶

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)=-a, \ (1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)=b$

$\therefore a=-2, \ b=4$ … ❷

즉 $f(x)=x^2-2x+4$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-1)=7$ … ❸

답 7

단계	채점 요소	배점
❶	다른 한 근 구하기	2점
❷	a, b의 값 구하기	2점
❸	$f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지 구하기	2점

06 이차방정식과 이차함수

셀프 CHECK → 본책 88쪽

A 답 (1) -5, -2 (2) -3, 1

B 답 (1) 2 (2) 0 (3) 1

C 답 (1) $-\frac{1}{2}$, 4 (2) -2

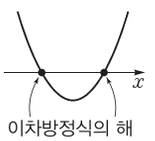
D 답 (1) $k>3$ (2) $k=3$ (3) $k<3$

E 답 (1) 최댓값: 3, 최솟값: -1
(2) 최댓값: 1, 최솟값: -3
(3) 최댓값: 10, 최솟값: 6

내신유형 다지기 → 본책 89~97쪽

유형 080 이차함수의 그래프와 x축의 교점 → 본책 89쪽

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근과 같다.



0428 이차함수 $y=3x^2-3x+a$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 -2, b이므로 -2, b는 이차방정식 $3x^2-3x+a=0$의 두 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+b=1$, $-2\times b=\frac{a}{3}$

$\therefore a=-18$, $b=3$

$\therefore b-a=21$ 답 ⑤

0429 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 -4, 1이므로 -4, 1은 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-4+1=-a$, $-4\times 1=b$

$\therefore a=3$, $b=-4$ … ❶

이차함수 $y=x^2-bx-4a$, 즉 $y=x^2+4x-12$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+4x-12=0$의 실근과 같다.
$x^2+4x-12=0$에서 $(x+6)(x-2)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=2$

즉 두 교점의 좌표가 $(-6, 0)$, $(2, 0)$이므로 구하는 두 점 사이의 거리는 $2-(-6)=8$ … ❷

답 8

단계	채점 요소	비율
❶	a, b의 값 구하기	40 %
❷	두 점 사이의 거리 구하기	60 %

0430 이차함수 $y=x^2+2ax-21$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 α, β이므로 α, β는 이차방정식 $x^2+2ax-21=0$의 두 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2a$, $\alpha\beta=-21$ …… ㉠

이때 $|\alpha-\beta|=10$의 양변을 제곱하면

$(\alpha-\beta)^2=100$

$\therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=100$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(-2a)^2-4\times(-21)=100$, $a^2=4$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

즉 모든 a의 값의 곱은

$-2\times 2=-4$ 답 ⑤

0431 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 -3, 5이므로 -3, 5는 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이다.
즉 $f(-3)=0$, $f(5)=0$이므로 $f(kx-5)=0$이려면

$kx-5=-3$ 또는 $kx-5=5$

$\therefore x=\frac{2}{k}$ 또는 $x=\frac{10}{k}$ $(\because k\neq 0)$

이때 이차방정식 $f(kx-5)=0$의 두 근의 곱이 5이어야 하므로

$\frac{2}{k}\times\frac{10}{k}=5$, $\frac{20}{k^2}=5$

$k^2=4$ $\therefore k=-2$ $(\because k<0)$ 답 -2

유형 081 이차함수의 그래프와 직선의 교점 → 본책 89쪽

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표가 α, β이다.
➜ 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 두 실근이 α, β이다.

0432 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 직선 $y=-2x+3$의 두 교점의 x좌표가 -5, 2이므로 -5, 2는 이차방정식 $x^2+ax+b=-2x+3$, 즉 $x^2+(a+2)x+b-3=0$의 두 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-5+2=-a-2$, $-5\times 2=b-3$

$\therefore a=1$, $b=-7$

$\therefore a+b=-6$ 답 ①

0433 이차함수 $y=3x^2-x+a$의 그래프와 직선 $y=4x-1$의 두 교점의 x좌표의 곱이 -4이므로 이차방정식 $3x^2-x+a=4x-1$, 즉 $3x^2-5x+a+1=0$의 두 근의 곱이 -4이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{a+1}{3}=-4$ $\therefore a=-13$ 답 -13

0434 이차함수 $y=-2x^2+5x-1$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $-2x^2+5x-1=x+k$, 즉

$2x^2-4x+k+1=0$ …… ㉠

의 근이므로 ㉠의 한 근이 -1이다.

$x=-1$을 ㉠에 대입하면

$2+4+k+1=0$ $\therefore k=-7$ … ❶

$k=-7$을 ㉠에 대입하면

$2x^2-4x-6=0$, $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

$x=3$을 $y=x-7$에 대입하면 $y=-4$

따라서 점 B의 좌표는 $(3, -4)$이다. … ❷

답 $(3, -4)$

단계	채점 요소	비율
❶	k의 값 구하기	50 %
❷	점 B의 좌표 구하기	50 %

0435 이차함수 $y=x^2-7x+1$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 한 교점의 x좌표가 $3+\sqrt{6}$이므로 $3+\sqrt{6}$은 이차방정식 $x^2-7x+1=ax+b$, 즉 $x^2-(7+a)x+1-b=0$의 한 근이다.

이때 $x^2-(7+a)x+1-b=0$의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $3+\sqrt{6}$이므로 다른 한 근은 $3-\sqrt{6}$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+\sqrt{6})+(3-\sqrt{6})=7+a$, $(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})=1-b$

$\therefore a=-1$, $b=-2$

$\therefore ab=2$

답 ③

만점 공략 노트

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 a, b, c가 유리수일 때, $p+q\sqrt{m}$이 근이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다.

(단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)

0436 $\overline{OA}:\overline{OB}=2:3$이므로 두 점 A, B의 x좌표를 각각 2α, -3α $(\alpha>0)$라 하자.

2α, -3α는 이차방정식 $-x^2+6=mx$, 즉 $x^2+mx-6=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+(-3\alpha)=-m$, $2\alpha\times(-3\alpha)=-6$

$2\alpha\times(-3\alpha)=-6$에서

$\alpha^2=1$ $\therefore \alpha=1$ $(\because \alpha>0)$

$\alpha=1$을 $2\alpha+(-3\alpha)=-m$에 대입하면

$-1=-m$ $\therefore m=1$

답 1

유형 082 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계 본책 90쪽

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

(1) $D>0$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0$ ➡ 한 점에서 만난다. (접한다.)

(3) $D<0$ ➡ 만나지 않는다.

0437 이차함수 $y=x^2-6kx+9k^2+k-5$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2-6kx+9k^2+k-5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3k)^2-(9k^2+k-5)>0$

$-k+5>0$ $\therefore k<5$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$1+2+3+4=10$

답 10

0438 이차함수 $y=x^2+kx-k+3$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2+kx-k+3=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=k^2-4(-k+3)=0$

$k^2+4k-12=0$, $(k+6)(k-2)=0$

$\therefore k=-6$ 또는 $k=2$ …… ㉠

이차함수 $y=-3x^2-4x+2k-4$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $-3x^2-4x+2k-4=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-2)^2-(-3)\times(2k-4)<0$

$6k-8<0$ $\therefore k<\frac{4}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k=-6$

답 -6

0439 이차함수 $y=x^2-(2k-3)x+k^2-k+2$의 그래프가 x축과 만나므로 이차방정식 $x^2-(2k-3)x+k^2-k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2k-3)\}^2-4(k^2-k+2)\geq0$

$-8k+1\geq0$ $\therefore k\leq\frac{1}{8}$

따라서 정수 k의 최댓값은 0이다.

답 0

0440 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 점 $(1, 0)$에서 x축과 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 1이다. 즉

$1+a+b=0$

$\therefore b=-a-1$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4b=0$

㉠을 이 식에 대입하면

$a^2-4(-a-1)=0$, $(a+2)^2=0$

$\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$b=1$

이차방정식 $4x^2+(5a+2b)x+2a-b=0$, 즉 $4x^2-8x-5=0$에서

$(2x+1)(2x-5)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

따라서 구하는 두 점 사이의 거리는

$\frac{5}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=3$

답 3

유형 083 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 본책 91쪽

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 위치 관계는 이차방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$의 판별식을 D라 할 때

(1) $D>0$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0$ ➡ 한 점에서 만난다. (접한다.)

(3) $D<0$ ➡ 만나지 않는다.

0441 이차함수 $y=2x^2-x+k$의 그래프와 직선 $y=x-4$가 만나지 않으므로 이차방정식 $2x^2-x+k=x-4$, 즉 $2x^2-2x+k+4=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-2(k+4)<0$$

$$-2k-7<0 \qquad \therefore k>-\frac{7}{2}$$

따라서 정수 k의 최솟값은 -3이다. 답 ③

0442 이차함수 $y=-x^2+2kx+1$의 그래프와 직선 $y=3x+k^2$이 적어도 한 점에서 만나므로 이차방정식 $-x^2+2kx+1=3x+k^2$, 즉 $x^2+(3-2k)x+k^2-1=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(3-2k)^2-4(k^2-1)\geq 0$$

$$13-12k\geq 0 \qquad \therefore k\leq\frac{13}{12}$$

답 $k\leq\frac{13}{12}$

0443 직선 $y=-x+k$가 이차함수 $y=x^2+x-1$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $-x+k=x^2+x-1$, 즉 $x^2+2x-1-k=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=1^2-(-1-k)>0, \qquad k+2>0$$

$$\therefore k>-2 \qquad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❶$$

직선 $y=-x+k$가 이차함수 $y=x^2-3x+5$의 그래프와 만나지 않으므로 이차방정식 $-x+k=x^2-3x+5$, 즉 $x^2-2x+5-k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-(5-k)<0, \qquad k-4<0$$

$$\therefore k<4 \qquad \cdots\cdots ㉡ \quad \cdots ❷$$

㉠, ㉡에서 정수 k는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다. … ❸

답 5

단계	채점 요소	비율
❶	서로 다른 두 점에서 만날 때, k의 값의 범위 구하기	40 %
❷	만나지 않을 때, k의 값의 범위 구하기	40 %
❸	정수 k의 개수 구하기	20 %

0444 이차함수 $y=x^2-4kx+4k^2+k$의 그래프와 직선 $y=2ax-b$가 접하므로 이차방정식 $x^2-4kx+4k^2+k=2ax-b$, 즉 $x^2-2(2k+a)x+4k^2+k+b=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(2k+a)\}^2-(4k^2+k+b)=0$$

$$\therefore (4a-1)k+a^2-b=0$$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$4a-1=0,\ a^2-b=0$$

$$\therefore a=\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{16}$$

$$\therefore a+b=\frac{5}{16}$$

답 ④

유형 084 두 이차함수의 그래프의 교점과 위치 관계 본책 91쪽

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표가 α, β이다.

➡ 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 두 실근이 α, β이다.

0445 두 이차함수 $y=-x^2-5x+7$, $y=3x^2+kx-1$의 그래프의 두 교점의 x좌표가 α, β이므로 α, β는 이차방정식 $-x^2-5x+7=3x^2+kx-1$, 즉 $4x^2+(k+5)x-8=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{k+5}{4}$$

이때 $\alpha+\beta=-3$이므로

$$-\frac{k+5}{4}=-3 \qquad \therefore k=7$$

답 7

0446 두 이차함수 $y=x^2-ax+3$, $y=-2x^2+x+b$의 그래프의 두 교점의 x좌표의 합이 2, 곱이 -1이므로 이차방정식 $x^2-ax+3=-2x^2+x+b$, 즉 $3x^2-(a+1)x+3-b=0$의 두 근의 합이 2, 곱이 -1이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{a+1}{3}=2,\ \frac{3-b}{3}=-1$$

$$\therefore a=5,\ b=6$$

$$\therefore ab=30$$

답 ⑤

0447 ㄱ. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=a^2-4b=0 \text{ (참)}$$

ㄴ. ㄱ에 의하여 $a^2=4b$이므로

$$a^2-4d=4b-4d=4(b-d)$$

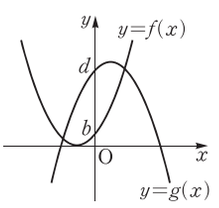
이때 $b<d$에서 $b-d<0$이므로 $a^2-4d<0$이다. (참)

ㄷ. 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $2x^2+(a-c)x+b-d=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=(a-c)^2-8(b-d)>0 \text{ (참)}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

참고 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표가 각각 b, d이고 두 이차함수의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 $b-d<0$이다.



유형 085 이차함수의 그래프의 접선의 방정식 본책 92쪽

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 접선의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 주어진 조건을 이용하여 직선의 방정식을 $y=g(x)$로 놓는다.

(ii) 이차방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$의 판별식 D가 $D=0$임을 이용한다.

0448 점 $(-1, 0)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=m(x+1)$

이 직선이 이차함수 $y=x^2-x+7$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-x+7=m(x+1)$, 즉 $x^2-(1+m)x+7-m=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(1+m)\}^2-4(7-m)=0$

$m^2+6m-27=0$, $(m+9)(m-3)=0$

$\therefore m=3$ ($\because m>0$)

답 3

0449 직선 $y=ax+b$가 직선 $y=-2x+3$에 평행하므로

$a=-2$

따라서 직선 $y=-2x+b$가 이차함수 $y=-x^2+4x-2$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-x^2+4x-2=-2x+b$, 즉 $x^2-6x+b+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(b+2)=0$

$7-b=0$ $\therefore b=7$

$\therefore a+b=5$

답 5

0450 기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+a$라 하자.

이 직선이 이차함수 $y=x^2$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2=2x+a$, 즉 $x^2-2x-a=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-1)^2-1\times(-a)=0$ $\therefore a=-1$

$\therefore y=2x-1$ … ❶

따라서 직선 $y=2x-1$이 이차함수 $y=-3x^2+kx+k$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-3x^2+kx+k=2x-1$, 즉 $3x^2+(2-k)x-1-k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(2-k)^2-4\times3\times(-1-k)=0$

$k^2+8k+16=0$, $(k+4)^2=0$

$\therefore k=-4$ … ❷

답 -4

단계	채점 요소	비율
❶	$y=x^2$의 그래프에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식 구하기	50 %
❷	k의 값 구하기	50 %

0451 구하는 직선의 방정식을 $y=ax+b$라 하자.

이 직선이 이차함수 $y=-x^2-2mx-m^2+5$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $-x^2-2mx-m^2+5=ax+b$, 즉 $x^2+(2m+a)x+m^2+b-5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2m+a)^2-4(m^2+b-5)=0$

$\therefore 4am+a^2-4b+20=0$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4a=0$, $a^2-4b+20=0$

$\therefore a=0$, $b=5$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=5$

답 $y=5$

유형 086 절댓값 기호를 포함한 이차방정식과 이차함수의 그래프의 관계 본책 92쪽

방정식 $|f(x)|=g(x)$의 실근의 개수는 두 함수 $y=|f(x)|$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

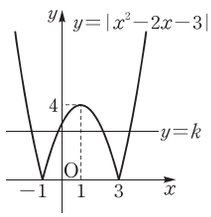
0452 방정식 $|x^2-2x-3|=k$가 서로 다른 4개의 실근을 가지려면 함수 $y=|x^2-2x-3|$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나야 한다.

$x^2-2x-3=0$에서 $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(1, -4)$이고, x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 3이다.

이때 함수 $y=|x^2-2x-3|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$0<k<4$

따라서 정수 k는 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$1+2+3=6$

답 ③

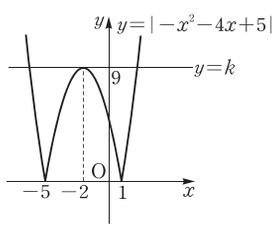
0453 방정식 $|-x^2-4x+5|=k$가 서로 다른 3개의 실근을 가지려면 함수 $y=|-x^2-4x+5|$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$-x^2-4x+5=0$에서 $(x+5)(x-1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=1$

함수 $y=-x^2-4x+5=-(x+2)^2+9$의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(-2, 9)$이고, x축과 만나는 점의 x좌표가 -5, 1이다.

이때 함수 $y=|-x^2-4x+5|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$k=9$

답 9

유형 087 제한된 범위에서 이차함수의 최대·최소 본책 93쪽

$\alpha\le x\le\beta$에서 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값, 최솟값은

(1) $\alpha\le p\le\beta$일 때 ← 꼭짓점의 x좌표가 제한된 범위에 포함될 때

➡ $f(p)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

(2) $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$일 때 ← 꼭짓점의 x좌표가 제한된 범위에 포함되지 않을 때

➡ $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

0454 $f(x)=3x^2+6x-1=3(x+1)^2-4$

$-2\le x\le 1$에서

$f(-2)=-1,\ f(-1)=-4,\ f(1)=8$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 8, 최솟값은 -4이므로

$M=8,\ m=-4 \quad \therefore M+m=4$ 답 ②

0455 $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+k$의 그래프가 점 $(-4,\ 7)$을 지나므로

$7=-8+8+k \quad \therefore k=7$ … ❶

즉 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+7=-\frac{1}{2}(x+2)^2+9$이고

$-3\le x\le 2$에서

$f(-3)=\frac{17}{2},\ f(-2)=9,\ f(2)=1$

이므로 $f(x)$의 최댓값은 9, 최솟값은 1이다. … ❷

따라서 구하는 차는 $9-1=8$ … ❸

답 8

단계	채점 요소	비율
❶	k의 값 구하기	40 %
❷	최댓값과 최솟값 구하기	40 %
❸	최댓값과 최솟값의 차 구하기	20 %

0456 $y=-x^2+8kx-17k^2+6k-3$

$=-(x-4k)^2-k^2+6k-3$

이므로 $x=4k$에서 최댓값 $-k^2+6k-3$을 갖는다.

따라서 $f(k)=-k^2+6k-3=-(k-3)^2+6$이고 $0\le k\le 4$에서

$f(0)=-3,\ f(3)=6,\ f(4)=5$

이므로 $f(k)$의 최솟값은 -3이다. 답 -3

0457 (i) $-1\le x\le 2$일 때

$f(x)\times f(|x-2|)=f(x)\times f(-x+2)$

$=(x-3)(-x-1)$

$=-x^2+2x+3$

$=-(x-1)^2+4$

이때

$f(-1)=0,\ f(1)=4,\ f(2)=3$

이므로 함수 $f(x)\times f(|x-2|)$의 최댓값은 4, 최솟값은 0이다.

(ii) $2\le x\le 5$일 때

$f(x)\times f(|x-2|)=f(x)\times f(x-2)$

$=(x-3)(x-5)$

$=x^2-8x+15$

$=(x-4)^2-1$

이때

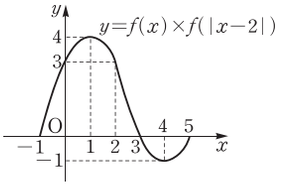
$f(2)=3,\ f(4)=-1,\ f(5)=0$

이므로 함수 $f(x)\times f(|x-2|)$의 최댓값은 3, 최솟값은 -1이다.

(i), (ii)에 의하여 $-1\le x\le 5$에서 함수 $f(x)\times f(|x-2|)$의 최댓값은 4, 최솟값은 -1이므로 구하는 합은

$4+(-1)=3$ 답 ③

참고 $-1\le x\le 5$에서 함수 $y=f(x)\times f(|x-2|)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



유형 088 최댓값 또는 최솟값이 주어질 때 미지수의 값 구하기

본책 93쪽

제한된 범위에서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 최댓값 또는 최솟값이 주어지면 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 변형한 후 이 범위에서 최댓값 또는 최솟값을 구하여 주어진 값과 비교한다.

0458 $f(x)=2x^2-8x+k$

$=2(x-2)^2-8+k$

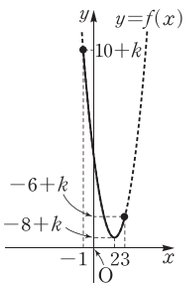
이므로 $-1\le x\le 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=2$에서 최솟값 $-8+k$를 가지므로

$-8+k=1 \quad \therefore k=9$

이때 $f(x)$의 최댓값은

$10+k=10+9=19$ 답 ⑤



0459 $y=ax^2+2ax+3b$

$=a(x+1)^2-a+3b$

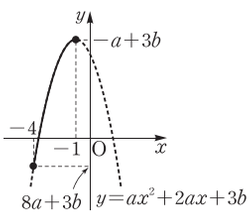
이므로 $-4\le x\le -1$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=-1$에서 최댓값 $-a+3b$, $x=-4$에서 최솟값 $8a+3b$를 가지므로

$-a+3b=7,\ 8a+3b=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=2$

$\therefore a+b=1$ 답 1



0460 $y=x^2-6x-2$

$=(x-3)^2-11$

이므로 $a\le x\le 2$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=a$에서 최댓값 14를 가지므로

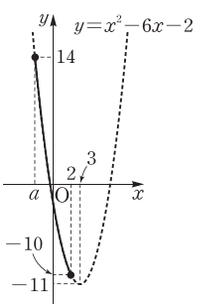
$a^2-6a-2=14$

$a^2-6a-16=0$

$(a+2)(a-8)=0$

$\therefore a=-2\ (\because a<2)$

답 -2



0461 $f(x)=x^2-8x+a+6=(x-4)^2+a-10$

(i) $0<a<4$일 때

$0\le x\le a$에서 $f(x)$는 $x=a$일 때 최솟값 a^2-7a+6을 가지므로

$a^2-7a+6=0$, $(a-1)(a-6)=0$

$\therefore a=1$ ($\because 0<a<4$)

(ii) $a\ge4$일 때

$0\le x\le a$에서 $f(x)$는 $x=4$일 때 최솟값 $a-10$을 가지므로

$a-10=0$ $\therefore a=10$

(i), (ii)에서 모든 a의 값의 합은

$1+10=11$ 답 ①

0462 $f(x)=-x^2+2kx-7k+5=-(x-k)^2+k^2-7k+5$

라 하자.

(i) $k<4$일 때

$x\ge4$에서 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 $k-11$을 가지므로

$k-11=-1$ $\therefore k=10$

그런데 $k<4$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k\ge4$일 때

$x\ge4$에서 $f(x)$는 $x=k$일 때 최댓값 k^2-7k+5를 가지므로

$k^2-7k+5=-1$, $k^2-7k+6=0$

$(k-1)(k-6)=0$

$\therefore k=6$ ($\because k\ge4$)

(i), (ii)에서 $k=6$ 답 6

유형 089 최댓값 또는 최솟값을 이용하여 이차함수의 식 구하기

본책 94쪽

주어진 조건에 따라 계수가 미지수인 이차함수의 식으로 나타낸 후 최댓값 또는 최솟값을 이용하여 미지수의 값을 구한다.

0463 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

라 하자.

조건 (가)에서

$4-2a+b=16+4a+b$, $-6a=12$

$\therefore a=-2$

$\therefore f(x)=x^2-2x+b=(x-1)^2+b-1$

$-3\le x\le3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

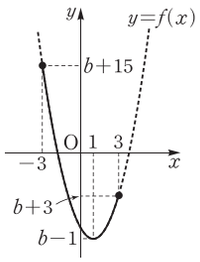
따라서 $x=-3$에서 최댓값 $b+15$를 가지므로 조건 (나)에서

$b+15=8$

$\therefore b=-7$

즉 $f(x)=x^2-2x-7$이므로

$f(-1)=-4$ 답 ②



0464 조건 (가)에서

$f(x)=a(x+3)(x-1)$

$=a(x+1)^2-4a$ ($a<0$)

라 하자. … ❶

$-2\le x\le2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=2$에서 최솟값 $5a$를 가지므로 조건 (나)에서

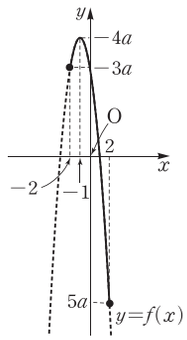
$5a=-15$

$\therefore a=-3$ … ❷

즉 $f(x)=-3(x+1)^2+12$이므로

$f(0)=9$ … ❸

답 9



단계	채점 요소	비율
❶	$f(x)$를 $a(x-p)^2+q$의 꼴로 나타내기	30 %
❷	a의 값 구하기	40 %
❸	$f(0)$의 값 구하기	30 %

0465 조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=2$이므로

$f(x)=a(x-2)^2+b$ (a, b는 상수)

라 하자.

(i) $a>0$일 때

조건 (나)에서 $f(4)=5$, $f(2)=1$이므로

$4a+b=5$, $b=1$

$\therefore a=1$, $b=1$

$\therefore f(x)=(x-2)^2+1$

이때 함수 $y=(x-2)^2+1$의 그래프는 x축과 만나지 않으므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때

조건 (나)에서 $f(2)=5$, $f(4)=1$이므로

$b=5$, $4a+b=1$

$\therefore a=-1$, $b=5$

$\therefore f(x)=-(x-2)^2+5$

이때 함수 $y=-(x-2)^2+5$의 그래프는 x축과 만나므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $f(x)=-(x-2)^2+5$이므로

$f(3)=4$ 답 4

유형 090 공통부분이 있는 함수의 최대·최소

본책 95쪽

공통부분이 있는 함수의 최댓값, 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 공통부분을 t로 치환한 후 t의 값의 범위를 구한다.

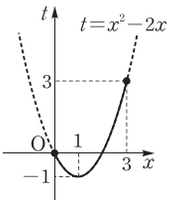
(ii) (i)의 범위에서 t에 대한 함수의 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

0466 $x^2-2x=t$로 놓으면

$t=x^2-2x=(x-1)^2-1$

$0\le x\le 3$이므로 오른쪽 그림에서

$-1\le t\le 3$

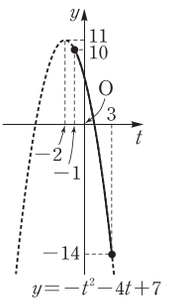


이때 주어진 함수는

$y=-t^2-4t+7$

$=-(t+2)^2+11\ (-1\le t\le 3)$

이므로 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $t=-1$에서 최댓값 10을 갖는다.

답 ②

0467 $x^2+4x+2=t$로 놓으면

$t=x^2+4x+2=(x+2)^2-2 \quad \therefore t\ge -2$

이때 주어진 함수는

$y=3t^2-18t+k-1$

$=3(t-3)^2+k-28\ (t\ge -2)$

따라서 $t=3$에서 최솟값 $k-28$을 가지므로

$k-28=-5 \quad \therefore k=23$

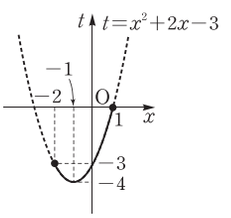
답 ④

0468 $x^2+2x-3=t$로 놓으면

$t=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$

$-2\le x\le 1$이므로 오른쪽 그림에서

$-4\le t\le 0$ … ❶



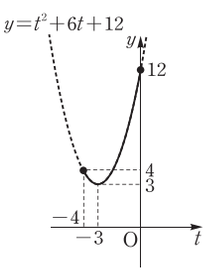
이때 주어진 함수는

$y=t(t+6)+12$

$=t^2+6t+12$

$=(t+3)^2+3\ (-4\le t\le 0)$

이므로 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $t=0$에서 최댓값 12, $t=-3$에서 최솟값 3을 가지므로

$M=12,\ m=3$ … ❷

$\therefore Mm=36$ … ❸

답 36

단계	채점 요소	비율
❶	$x^2+2x-3=t$로 놓고 t의 값의 범위 구하기	40 %
❷	M, m의 값 구하기	50 %
❸	Mm의 값 구하기	10 %

0469 $y=-(x^2-6x+10)^2-4x^2+24x-40$

$=-(x^2-6x+10)^2-4(x^2-6x+10)$

$x^2-6x+10=t$로 놓으면

$t=x^2-6x+10=(x-3)^2+1$

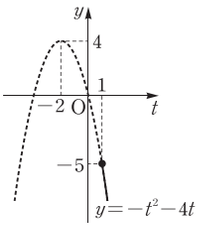
$\therefore t\ge 1$

이때 주어진 함수는

$y=-t^2-4t$

$=-(t+2)^2+4\ (t\ge 1)$

이므로 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $t=1$에서 최댓값 -5를 가지므로

$b=-5$

이때 $t=1$에서

$(x-3)^2+1=1 \quad \therefore x=3$

즉 $a=3$이므로

$b-a=-8$

답 ①

유형 091 완전제곱식을 이용한 이차식의 최대·최소 본책 95쪽

x, y가 실수일 때,

$a(x-m)^2+b(y-n)^2+k\ (a,\ b,\ m,\ n,\ k$는 실수)

의 꼴로 변형한 후 $(x-m)^2\ge 0$, $(y-n)^2\ge 0$임을 이용한다.

0470 $x^2-6x+4y^2+8y-2=(x-3)^2+4(y+1)^2-15$

이때 x, y가 실수이므로

$(x-3)^2\ge 0,\ (y+1)^2\ge 0$

$\therefore x^2-6x+4y^2+8y-2\ge -15$

따라서 주어진 식의 최솟값은 -15이다.

답 ①

0471 $-3x^2-y^2-12x+10y+k$

$=-3(x+2)^2-(y-5)^2+37+k$

이때 x, y가 실수이므로

$(x+2)^2\ge 0,\ (y-5)^2\ge 0$

$\therefore -(x+2)^2\le 0,\ -(y-5)^2\le 0$

$\therefore -3x^2-y^2-12x+10y+k\le 37+k$

따라서 주어진 식의 최댓값은 $37+k$이므로

$37+k=32 \quad \therefore k=-5$

답 -5

0472 $2x^2+y^2+3z^2-4x-6y+12z+15$

$=2(x-1)^2+(y-3)^2+3(z+2)^2-8$ … ❶

이때 x, y, z가 실수이므로

$(x-1)^2\ge 0,\ (y-3)^2\ge 0,\ (z+2)^2\ge 0$

$\therefore 2x^2+y^2+3z^2-4x-6y+12z+15\ge -8$

따라서 주어진 식은 $x=1$, $y=3$, $z=-2$일 때 최솟값 -8을 가지므로

$a=1,\ b=3,\ c=-2,\ d=-8$ … ❷

$\therefore a-b+c-d=4$ … ❸

답 4

단계	채점 요소	비율
❶	주어진 식을 변형하여 완전제곱식의 합의 꼴로 나타내기	30 %
❷	a, b, c, d의 값 구하기	60 %
❸	$a-b+c-d$의 값 구하기	10 %

0473 $x^2-3x=t$로 놓으면

$(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)y+2y^2-12y+k$

$=t^2-2ty+2y^2-12y+k$

$=(t-y)^2+(y-6)^2+k-36$

이때 t, y가 실수이므로 $(t-y)^2\geq 0$, $(y-6)^2\geq 0$

$\therefore (t-y)^2+(y-6)^2+k-36\geq k-36$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $k-36$이므로

$k-36=-10$ $\therefore k=26$ 답 26

유형 092 조건이 주어진 이차식의 최대·최소 본책 96쪽

주어진 등식을 만족시키는 이차식의 최댓값, 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 주어진 등식을 한 문자에 대하여 정리한다.

(ii) (i)의 식을 이차식에 대입하여 한 문자에 대한 이차식으로 나타낸다.

(iii) (ii)의 식에서 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

0474 $x+2y=2$에서 $y=-\frac{1}{2}x+1$

$\therefore xy=x\left(-\frac{1}{2}x+1\right)=-\frac{1}{2}x^2+x=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}$

이때 $-1\leq x\leq 2$이므로 $x=1$에서 최댓값 $\frac{1}{2}$, $x=-1$에서 최솟값 $-\frac{3}{2}$을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)=-1$ 답 ②

0475 $x-y^2=3$에서 $y^2=x-3$ …… ㉠

y가 실수이므로 $y^2\geq 0$

$x-3\geq 0$ $\therefore x\geq 3$

㉠을 $-x^2+4y^2-8x$에 대입하면

$-x^2+4y^2-8x=-x^2+4(x-3)-8x$

$=-x^2-4x-12$

$=-(x+2)^2-8$

이때 $x\geq 3$이므로 $x=3$에서 최댓값 -33을 갖는다. 답 -33

0476 $y=0$일 때, $-\frac{1}{4}x+1=0$ $\therefore x=4$

$x=0$일 때, $y=1$

즉 A(0, 1), B(4, 0)이고 점 P(a, b)가 점 A에서 직선 $y=-\frac{1}{4}x+1$을 따라 점 B까지 움직이므로

$b=-\frac{1}{4}a+1$ $(0\leq a\leq 4)$

$\therefore a^2+16b=a^2+16\left(-\frac{1}{4}a+1\right)$

$=a^2-4a+16$

$=(a-2)^2+12$

이때 $0\leq a\leq 4$이므로 $a=2$에서 최솟값 12를 갖는다. 답 ④

0477 이차방정식 $x^2+2kx-k^2-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(-k^2-1)=2k^2+1>0$

즉 이 이차방정식은 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2k$, $\alpha\beta=-k^2-1$

$\therefore (3-\alpha)(3-\beta)=9-3(\alpha+\beta)+\alpha\beta$

$=9-3\times(-2k)-k^2-1$

$=-k^2+6k+8$

$=-(k-3)^2+17$

따라서 $k=3$에서 최댓값 17을 갖는다. 답 17

유형 093 이차함수의 최대·최소의 활용 본책 97쪽

이차함수의 최대, 최소의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 푼다.

(i) 주어진 조건을 이용하여 한 문자에 대한 이차식을 세우고, 문자의 값의 범위를 구한다.

(ii) (i)의 범위에서 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

0478 $y=0$일 때, $-\frac{1}{2}x+3=0$ $\therefore x=6$

$x=0$일 때, $y=3$

즉 직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각 (6, 0), (0, 3)이다.

점 A의 좌표를 $(a, 0)$ $(0<a<6)$이라 하면

$\mathrm{P}\left(a, -\frac{1}{2}a+3\right)$

$\therefore \overline{\mathrm{BP}}=a$, $\overline{\mathrm{AP}}=-\frac{1}{2}a+3$

직사각형 OAPB의 넓이는

$a\left(-\frac{1}{2}a+3\right)=-\frac{1}{2}a^2+3a=-\frac{1}{2}(a-3)^2+\frac{9}{2}$

이때 $0<a<6$이므로 $a=3$에서 최댓값 $\frac{9}{2}$를 갖는다.

따라서 직사각형 OAPB의 넓이의 최댓값은 $\frac{9}{2}$이다. 답 ③

0479 $h=-5t^2+20t+10=-5(t-2)^2+30$

이때 $1\leq t\leq 4$이므로 $t=2$에서 최댓값 30, $t=4$에서 최솟값 10을 갖는다.

따라서 공의 높이가 가장 높을 때와 가장 낮을 때의 높이의 차는

$30-10=20\,(\mathrm{m})$ 답 20 m

0480 닭장의 세로의 길이를 x m라 하면 가로의 길이는 $(40-2x)$ m이다.

변의 길이는 양수이므로 $0<x<20$

닭장의 넓이는

$x(40-2x)=-2x^2+40x=-2(x-10)^2+200$

이때 $0<x<20$이므로 $x=10$에서 최댓값 200을 갖는다.

따라서 닭장의 넓이의 최댓값은 200 m^{2}이다. 답 200 m^2

0481 한 사람의 관람료를 $200x$원 올리면 하루 관람객은 $10x$명 줄어들므로 한 사람의 관람료가 $(4000+200x)$원일 때 하루 관람객은 $(300-10x)$명이다.

이때 하루 관람료 수입은

$(4000+200x)(300-10x)$

$=-2000x^2+20000x+1200000$

$=-2000(x-5)^2+1250000$

따라서 $x=5$에서 최댓값 1250000을 갖고, 이때의 한 사람의 관람료는

$4000+200\times5=5000$(원)

답 5000원

0482 $\overline{EC}=a$, $\overline{CF}=b$라 하면 $\triangle ABC\backsim\triangle DBE$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AC}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{BE}$

$12:b=18:(18-a)$ $\therefore b=-\frac{2}{3}a+12$

변의 길이는 양수이므로 $0<a<18$

사각형 DECF의 넓이는

$ab=a\left(-\frac{2}{3}a+12\right)=-\frac{2}{3}a^2+12a$

$=-\frac{2}{3}(a-9)^2+54$ … ❶

이때 $0<a<18$이므로 $a=9$에서 최댓값 54를 갖는다.

$a=9$일 때 $b=6$이므로 구하는 둘레의 길이는

$2\times(9+6)=30$ … ❷

답 30

단계	채점 요소	비율
❶	사각형 DECF의 넓이를 이차식으로 나타내기	60 %
❷	사각형 DECF의 넓이가 최대일 때, 사각형 DECF의 둘레의 길이 구하기	40 %

0483 점 P가 변 BC의 중점이므로

$\overline{BP}=\overline{CP}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times4=2$

$\overline{AP}\perp\overline{BC}$이므로 직각삼각형 QBP와 직각삼각형 QCP에서

$\overline{BQ}^2=\overline{CQ}^2=4+x^2$

한편 $\overline{AP}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4=2\sqrt{3}$이므로

$\overline{AQ}=\overline{AP}-\overline{PQ}=2\sqrt{3}-x$

$\therefore\ \overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2+\overline{CQ}^2$

$=(2\sqrt{3}-x)^2+(4+x^2)+(4+x^2)$

$=3x^2-4\sqrt{3}x+20$

$=3\left(x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+16$

이때 $0<x<2\sqrt{3}$이므로 $\overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2+\overline{CQ}^2$은 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$에서 최솟값 16을 갖는다.

따라서 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $m=16$이므로

$\frac{m}{a}=8\sqrt{3}$

답 ③

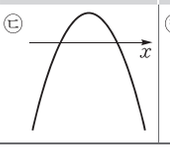
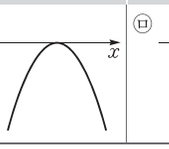
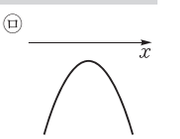
1등급 유형 도전하기

본책 98~99쪽

0484 Step 1 이차함수의 그래프와 이차방정식의 관계를 이용하여 ㉠, ㉡에 알맞은 식과 ㉢, ㉣, ㉤에 알맞은 그래프의 개형을 구한다.

(1) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축($\boxed{㉠\ y=0}$)의 교점의 개수는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근의 개수와 같다.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근의 개수는 판별식 $D=\boxed{㉡\ b^2-4ac}$의 값의 부호에 따라 결정되므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$과 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$a<0$일 때	㉢ 	㉣ 	㉤ 

Step 2 두 이차방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 판별식을 각각 구한다.

(2) 이차방정식 $x^2-x+k-2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-1)^2-4(k-2)=9-4k$

또 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+k^2-3=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(k-1)^2-(k^2-3)=-2k+4$

Step 3 $a^2+b^2=5$를 만족시키는 a, b의 값을 구한다.

a, b는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 각각 x축과 만나는 점의 개수이므로 a, b는 음이 아닌 정수이다.

따라서 $a^2+b^2=5$를 만족시키려면

$a=2$, $b=1$ 또는 $a=1$, $b=2$

이어야 한다.

Step 4 a, b의 값에 따라 경우를 나누어 k의 값을 구한다.

(i) $a=2$, $b=1$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점에서 만나므로

$D_1=9-4k>0$ $\therefore k<\frac{9}{4}$

함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 접하므로

$\frac{D_2}{4}=-2k+4=0$ $\therefore k=2$

두 조건을 동시에 만족시키는 실수 k의 값은 2이다.

(ii) $a=1$, $b=2$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 접하므로

$D_1=9-4k=0$ $\therefore k=\frac{9}{4}$

함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 두 점에서 만나므로

$\frac{D_2}{4}=-2k+4>0$ $\therefore k<2$

두 조건을 동시에 만족시키는 실수 k의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $k=2$

답 (1) 풀이 참조 (2) 2

0485 Step 1 α, β의 절댓값의 평균이 자연수가 되도록 하는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구한다.

α, β는 이차방정식 $x^2-6x+9=n$, 즉 $x^2-6x+9-n=0$의 두 근이다.

$x^2-6x+9-n=0$에서 $\quad x=3\pm\sqrt{n}$

$\alpha<\beta$이므로 $\quad \alpha=3-\sqrt{n}$, $\beta=3+\sqrt{n}$

(i) $1\le n\le 9$인 경우

$\alpha\ge 0$, $\beta>0$이므로

$$\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{(3-\sqrt{n})+(3+\sqrt{n})}{2}=3$$

따라서 자연수 n은 1, 2, 3, …, 9의 9개이다.

(ii) $n>9$인 경우

$\alpha<0$, $\beta>0$이므로

$$\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}=\frac{-\alpha+\beta}{2}$$

$$=\frac{-(3-\sqrt{n})+(3+\sqrt{n})}{2}=\boxed{\text{(가) } \sqrt{n}}$$

따라서 자연수 n은 (자연수)^{2}의 꼴이어야 하므로 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100의 $\boxed{\text{(나) } 7}$개이다.

(i), (ii)에서 100 이하의 자연수 n의 개수는

$9+7=\boxed{\text{(다) } 16}$

Step 2 $a\times f(b)$의 값을 구한다.

$f(n)=\sqrt{n}$, $a=7$, $b=16$이므로

$a\times f(b)=7\times\sqrt{16}=28$ 답 28

논리 Check

자연수 n에 대하여 직선 $y=n$이 이차함수 $y=x^2-8x+16$의 그래프와 만나는 두 점의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하자. $\frac{|x_1|+|x_2|}{2}$의 값이 자연수가 되도록 하는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오.

풀이 x_1, x_2는 이차방정식 $x^2-8x+16=n$, 즉 $x^2-8x+16-n=0$의 두 근이다.

$x^2-8x+16-n=0$에서 $\quad x=4\pm\sqrt{n}$

$x_1=4-\sqrt{n}$, $x_2=4+\sqrt{n}$이라 하자.

(i) $1\le n\le 16$인 경우

$x_1\ge 0$, $x_2>0$이므로

$$\frac{|x_1|+|x_2|}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{(4-\sqrt{n})+(4+\sqrt{n})}{2}=4$$

따라서 자연수 n은 1, 2, 3, …, 16의 16개이다.

(ii) $n>16$인 경우

$x_1<0$, $x_2>0$이므로

$$\frac{|x_1|+|x_2|}{2}=\frac{-x_1+x_2}{2}$$

$$=\frac{-(4-\sqrt{n})+(4+\sqrt{n})}{2}=\sqrt{n}$$

따라서 자연수 n은 (자연수)^{2}의 꼴이어야 하므로 25, 36, 49, 64, 81, 100의 6개이다.

(i), (ii)에서 100 이하의 자연수 n의 개수는

$16+6=22$ 답 22

0486 Step 1 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$와 접한다는 것을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 위로 볼록하고 x축과 두 점 $(2, 0)$, $(8, 0)$에서 만나므로 $f(x)=a(x-2)(x-8)$ $(a<0)$이라 하자.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$와 접하므로 이차방정식 $a(x-2)(x-8)=x$, 즉 $ax^2-(10a+1)x+16a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(10a+1)\}^2-4\times a\times 16a=0$

$36a^2+20a+1=0$, $\quad (2a+1)(18a+1)=0$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{1}{18}$

(i) $a=-\frac{1}{2}$일 때

이차방정식 $ax^2-(10a+1)x+16a=0$에서

$-\frac{1}{2}x^2+4x-8=0$, $\quad x^2-8x+16=0$

$(x-4)^2=0$ $\quad \therefore x=4$

(ii) $a=-\frac{1}{18}$일 때

이차방정식 $ax^2-(10a+1)x+16a=0$에서

$-\frac{1}{18}x^2-\frac{4}{9}x-\frac{8}{9}=0$, $\quad x^2+8x+16=0$

$(x+4)^2=0$ $\quad \therefore x=-4$

그런데 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$와 제1사분면에서 접하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\quad a=-\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}(x-2)(x-8)=-\frac{1}{2}x^2+5x-8$

Step 2 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x$의 두 교점의 x좌표의 합을 구한다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x$의 두 교점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=\frac{1}{2}x$의 두 근과 같다.

즉 $-\frac{1}{2}x^2+5x-8=\frac{1}{2}x$에서 $\quad x^2-9x+16=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 9이므로 두 교점의 x좌표의 합은 9이다.

답 9

0487 Step 1 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 $-2\le x\le 2$에 있을 때, $g(a)=7a+16$을 만족시키는 a의 값을 구한다.

$f(x)=x^2-2ax+4=(x-a)^2-a^2+4$

(i) $-2\le a<0$일 때

최솟값은 $f(a)=-a^2+4$, 최댓값은 $f(2)=8-4a$이므로

$g(a)=(8-4a)-(-a^2+4)=a^2-4a+4$

이때 $g(a)=7a+16$에서

$a^2-4a+4=7a+16$, $\quad a^2-11a-12=0$

$(a+1)(a-12)=0$

$\therefore a=-1$ ($\because -2\le a<0$)

(ii) $0 \le a \le 2$일 때

최솟값은 $f(a) = -a^2+4$, 최댓값은 $f(-2) = 8+4a$이므로

$g(a) = (8+4a) - (-a^2+4) = a^2+4a+4$

이때 $g(a) = 7a+16$에서

$a^2+4a+4 = 7a+16, \quad a^2-3a-12 = 0$

$\therefore a = \dfrac{3 \pm \sqrt{57}}{2}$

그런데 이것은 $0 \le a \le 2$를 만족시키지 않는다.

Step 2 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 $x<-2$ 또는 $x>2$에 있을 때, $g(a)=7a+16$을 만족시키는 a의 값을 구한다.

(iii) $a<-2$일 때

최댓값은 $f(2) = 8-4a$, 최솟값은 $f(-2) = 8+4a$이므로

$g(a) = (8-4a) - (8+4a) = -8a$

이때 $g(a) = 7a+16$에서

$-8a = 7a+16 \quad \therefore a = -\dfrac{16}{15}$

그런데 이것은 $a<-2$를 만족시키지 않는다.

(iv) $a>2$일 때

최댓값은 $f(-2) = 8+4a$, 최솟값은 $f(2) = 8-4a$이므로

$g(a) = (8+4a) - (8-4a) = 8a$

이때 $g(a) = 7a+16$에서

$8a = 7a+16 \quad \therefore a = 16$

Step 3 모든 실수 a의 값의 합을 구한다.

이상에서 $a = -1$ 또는 $a = 16$

따라서 구하는 합은 $-1+16 = 15$ 답 15

0488 Step 1 조건 (가)를 이용하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를 각각 식으로 나타낸다.

조건 (가)에서

$f(x) = (x+1)^2+p$, $g(x) = -(x-2)^2+q$ (p, q는 상수)

라 하자.

Step 2 조건 (나), (다)를 이용하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를 구한다.

이차방정식 $(x+1)^2+p = x$, 즉 $x^2+x+1+p = 0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1 = 1^2-4(1+p) = -3-4p$

또 이차방정식 $-(x-2)^2+q = x$, 즉 $x^2-3x+4-q = 0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2 = (-3)^2-4(4-q) = -7+4q$

조건 (나)에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 위치 관계는 다음과 같은 2가지 경우가 있다.

(i) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 접하고, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$와 만나지 않을 때

$-3-4p = 0$, $-7+4q < 0$

$\therefore p = -\dfrac{3}{4}$, $q < \dfrac{7}{4}$ …… ㉠

조건 (다)에서 $f(0)+g(0)+3<0$이므로

$1+p-4+q+3<0$

$1-\dfrac{3}{4}-4+q+3<0$

$\therefore q < \dfrac{3}{4}$ …… ㉡

또 $|f(-1)-g(2)| = 2$이므로

$|p-q| = \left|-\dfrac{3}{4}-q\right| = 2$

$-\dfrac{3}{4}-q = -2$ 또는 $-\dfrac{3}{4}-q = 2$

$\therefore q = \dfrac{5}{4}$ 또는 $q = -\dfrac{11}{4}$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$p = -\dfrac{3}{4}$, $q = -\dfrac{11}{4}$

(ii) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$와 만나지 않고, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 접할 때

$-3-4p<0$, $-7+4q = 0$

$\therefore p > -\dfrac{3}{4}$, $q = \dfrac{7}{4}$ …… ㉣

조건 (다)에서 $f(0)+g(0)+3<0$이므로

$1+p-4+q+3<0$

$1+p-4+\dfrac{7}{4}+3<0$

$\therefore p < -\dfrac{7}{4}$ …… ㉤

㉣, ㉤에서 조건을 만족시키는 p의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $p = -\dfrac{3}{4}$, $q = -\dfrac{11}{4}$

$\therefore f(x) = (x+1)^2-\dfrac{3}{4}$, $g(x) = -(x-2)^2-\dfrac{11}{4}$

Step 3 함수 $f(x)-g(x)$의 최솟값을 구한다.

$f(x)-g(x) = \left\{(x+1)^2-\dfrac{3}{4}\right\} - \left\{-(x-2)^2-\dfrac{11}{4}\right\}$

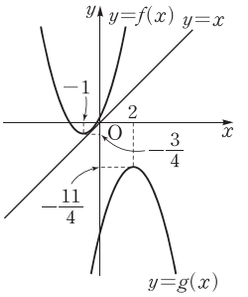
$= 2x^2-2x+7$

$= 2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{13}{2}$

따라서 함수 $f(x)-g(x)$는 $x = \dfrac{1}{2}$에서 최솟값 $\dfrac{13}{2}$을 갖는다.

답 $\dfrac{13}{2}$

참고 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



0489 Step 1 점 P의 좌표를 k에 대한 식으로 나타낸다.

점 P가 직선 $y=k(x+5)$ 위에 있으므로 점 P의 좌표는

$(-k, -k^2+5k)$

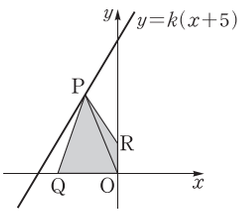
이때 $1 \le k \le 4$에서

$-k<0$, $-k^2+5k = -\left(k-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{25}{4} > 0$

이므로 점 P는 제2사분면 위의 점이다.

Step 2 사각형 PQOR의 넓이를 k에 대한 식으로 나타낸다.

사각형 PQOR의 넓이를 $f(k)$라 하면



$$f(k)=\triangle OPQ+\triangle ORP$$
$$=\frac{1}{2}\times 4\times|-k^2+5k|+\frac{1}{2}\times 2\times|-k|$$
$$=2(-k^2+5k)+k$$
$$=-2k^2+11k$$
$$=-2\left(k-\frac{11}{4}\right)^2+\frac{121}{8}$$

Step 3 사각형 PQOR의 넓이의 최댓값을 구한다.

$1\le k\le 4$에서 이차함수 $f(k)$는 $k=\frac{11}{4}$일 때 최댓값 $\frac{121}{8}$을 갖는다.

따라서 사각형 PQOR의 넓이의 최댓값은 $\frac{121}{8}$이다.

답 $\frac{121}{8}$

시험 만점 완성하기

본책 100~103쪽

0490 전략 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-1, 9)$임을 이용하여 주어진 이차함수를 식으로 나타낸다.

그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-1, 9)$이므로 주어진 이차함수는

$$y=a(x+1)^2+9=ax^2+2ax+a+9 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=-1$이고 $\overline{AB}=6$이므로 두 점 A, B의 x좌표는 -4, 2이다.

즉 -4, 2는 이차방정식 $ax^2+2ax+a+9=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-4\times 2=\frac{a+9}{a}, \quad -8a=a+9$$
$$\therefore a=-1$$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$$y=-x^2-2x+8$$

따라서 $b=-2$, $c=8$이므로

$$abc=16$$

답 ④

0491 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 실근임을 이용한다.

이차함수 $f(x)=x^2+ax+3$의 그래프와 일차함수 $g(x)=x+b$의 그래프의 두 교점의 x좌표가 -1, 5이므로 -1, 5는 이차방정식 $x^2+ax+3=x+b$, 즉 $x^2+(a-1)x+3-b=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1+5=-a+1, \quad -1\times 5=3-b$$
$$\therefore a=-3, \ b=8$$

즉 $f(x)=x^2-3x+3$, $g(x)=x+8$이므로

$$f(2)-g(-3)=1-5=-4$$

답 ②

0492 전략 판별식을 이용하여 각각의 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 파악한다.

ㄱ. 이차방정식 $4x^2-2x-1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(-1)^2-4\times(-1)=5>0$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다. (거짓)

ㄴ. 이차방정식 $f(x)+3=0$, 즉 $4x^2-2x+2=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-4\times 2=-7<0$$

따라서 함수 $y=f(x)+3$의 그래프는 x축과 만나지 않는다. (참)

ㄷ. 이차방정식 $f(x)-n=0$, 즉 $4x^2-2x-1-n=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$$\frac{D_3}{4}=(-1)^2-4(-1-n)=4n+5$$

이때 모든 자연수 n에 대하여 $4n+5>0$이므로 함수 $y=f(x)-n$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

0493 전략 이차함수의 그래프가 직선보다 항상 위쪽에 있을 조건을 알아본다.

이차함수 $y=x^2-2kx+k^2-1$의 그래프가 직선 $y=-x+3$보다 항상 위쪽에 있으려면 이차함수의 그래프와 직선이 만나지 않아야 한다.

이차방정식 $x^2-2kx+k^2-1=-x+3$, 즉 $x^2+(1-2k)x+k^2-4=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(1-2k)^2-4(k^2-4)<0$$
$$-4k+17<0 \quad \therefore k>\frac{17}{4}$$

따라서 정수 k의 최솟값은 5이다.

답 ③

0494 전략 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 실근임을 이용한다.

두 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2-x+k$, $y=\frac{1}{2}x^2+5x-1$의 그래프의 두 교점의 x좌표가 α, β이므로 α, β는 이차방정식 $-\frac{1}{2}x^2-x+k=\frac{1}{2}x^2+5x-1$, 즉 $x^2+6x-1-k=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-6, \ \alpha\beta=-1-k \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $|\alpha-\beta|=4$이므로 양변을 제곱하면

$$(\alpha-\beta)^2=16$$
$$\therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$(-6)^2-4(-1-k)=16, \quad 4k=-24$$
$$\therefore k=-6$$

답 ①

0495 전략 점 $(4, -4)$를 지나는 직선의 방정식을 $y=m(x-4)-4$라 하고 판별식을 이용한다.

점 $(4, -4)$를 지나는 직선의 방정식을 $y=m(x-4)-4$라 하자.

이 직선이 이차함수 $y=x^2-3x-4$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2-3x-4=m(x-4)-4$, 즉

$$x^2-(3+m)x+4m=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

의 판별식을 D라 하면

$$D=\{-(3+m)\}^2-4\times 4m=0$$

$$m^2-10m+9=0, \quad (m-1)(m-9)=0$$

$\therefore m=1$ 또는 $m=9$

(i) $m=1$을 ㉠에 대입하면

$$x^2-4x+4=0, \quad (x-2)^2=0$$

$\therefore x=2$

(ii) $m=9$를 ㉠에 대입하면

$$x^2-12x+36=0, \quad (x-6)^2=0$$

$\therefore x=6$

(i), (ii)에서 두 접점의 x좌표의 합은

$2+6=8$

답 ⑤

0496 전략 방정식 $|f(x)|=g(x)$의 실근의 개수는 두 함수 $y=|f(x)|$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

방정식 $|x^2-3|=k$가 서로 다른 2개의 실근을 가지려면 함수 $y=|x^2-3|$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$x^2-3=0$에서 $x^2=3$

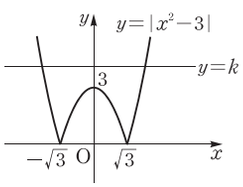
$\therefore x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

함수 $y=x^2-3$의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(0, -3)$이고, x축과 만나는 점의 x좌표가 $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$이다.

이때 함수 $y=|x^2-3|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$k=0$ 또는 $k>3$

따라서 정수 k의 값이 될 수 있는 것은 ⑤이다.



답 ⑤

0497 전략 $-1\le x\le 4$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

$f(x)=-2x^2+4x-3a+1$

$=-2(x-1)^2-3a+3$

이므로 $-1\le x\le 4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

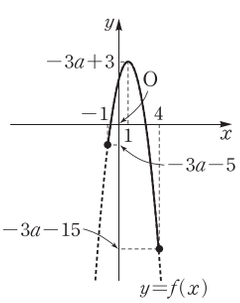
따라서 $x=4$에서 최솟값 $-3a-15$를 가지므로

$-3a-15=-12$

$\therefore a=-1$

이때 $f(x)$의 최댓값은

$-3a+3=3+3=6$



답 ④

0498 전략 $f(x)=t$로 놓고 함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 t의 값의 범위를 구한다.

(i) $x<0$일 때

$$f(x)=x^2-4x-3=(x-2)^2-7$$

(ii) $x\ge 0$일 때

$$f(x)=x^2+4x-3=(x+2)^2-7$$

(i), (ii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore f(x)\ge -3$

$y=\{f(x)\}^2-2f(x)+5$에서 $f(x)=t$로 놓으면

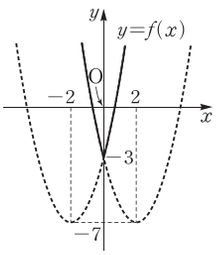
$$y=t^2-2t+5$$

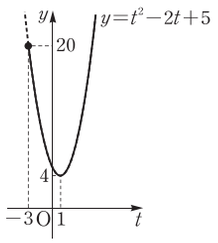
$$=(t-1)^2+4 \ (t\ge -3)$$

이므로 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $t=1$에서 최솟값 4를 갖는다.

답 ②





0499 전략 $z^2+\overline{z}^2=0$임을 이용하여 a^2과 b^2 사이의 관계식을 구한다.

$z=a+3bi$이므로 $\overline{z}=a-3bi$

$\therefore z^2+\overline{z}^2=(a+3bi)^2+(a-3bi)^2=2a^2-18b^2$

이때 $z^2+\overline{z}^2=0$이므로

$$2a^2-18b^2=0 \quad \therefore b^2=\frac{1}{9}a^2$$

$$\therefore a^2-8a-18b^2=a^2-8a-18\times\frac{1}{9}a^2$$

$$=-a^2-8a$$

$$=-(a+4)^2+16$$

따라서 $a=-4$에서 최댓값 16을 갖는다.

답 ④

0500 전략 점 B의 좌표를 $(a, 0)$이라 하고 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 a에 대한 이차식으로 나타낸다.

$-x^2+4=0$에서 $x^2=4$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 이차함수 $y=-x^2+4$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 -2, 2이다.

점 B의 좌표를 $(a, 0)$ $(0<a<2)$이라 하면

$A(-a, 0)$, $C(a, -a^2+4)$

$\therefore \overline{AB}=2a$, $\overline{BC}=-a^2+4$

직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$$2\{2a+(-a^2+4)\}=-2a^2+4a+8$$

$$=-2(a-1)^2+10$$

이때 $0<a<2$이므로 $a=1$에서 최댓값 10을 갖는다.

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 10이다.

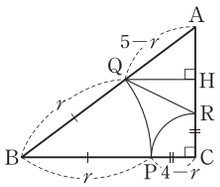
답 ③

0501 전략 점 Q에서 $\overline{AC}$에 수선을 긋고 삼각형의 닮음을 이용한다.

$\overline{BP}=\overline{BQ}=r\left(\frac{5}{2}<r<4\right)$라 하면

$\overline{PC}=\overline{RC}=4-r$,

$\overline{AQ}=5-r$



점 Q에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle ABC\backsim\triangle AQH$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AB}:\overline{AQ}=\overline{AC}:\overline{AH}$

$5:(5-r)=3:\overline{AH}$ $\therefore \overline{AH}=3-\frac{3}{5}r$

이때 $\overline{HC}=\overline{AC}-\overline{AH}=3-\left(3-\frac{3}{5}r\right)=\frac{3}{5}r$이므로

$\overline{HR}=\overline{HC}-\overline{RC}$

$=\frac{3}{5}r-(4-r)$

$=\frac{8}{5}r-4$

또 $\overline{AB}:\overline{AQ}=\overline{BC}:\overline{QH}$이므로

$5:(5-r)=4:\overline{QH}$ $\therefore \overline{QH}=4-\frac{4}{5}r$

따라서 직각삼각형 QRH에서

$\overline{QR}^2=\overline{HR}^2+\overline{QH}^2$

$=\left(\frac{8}{5}r-4\right)^2+\left(4-\frac{4}{5}r\right)^2$

$=\frac{16}{5}r^2-\frac{96}{5}r+32$

$=\frac{16}{5}(r-3)^2+\frac{16}{5}$

이때 $\frac{5}{2}<r<4$이므로 $r=3$, 즉 $\overline{BP}=3$일 때 $\overline{QR}^2$의 값이 최소이다. 답 ③

0502 전략 $f(x)=0$의 두 근이 α, β임을 이용하여 $f(x-2)=0$을 만족시키는 x의 값을 α, β를 이용하여 나타낸다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=3$ $\therefore \alpha+\beta=6$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 α, β이므로 α, β는 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이다.

즉 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(x-2)=0$이려면

$x-2=\alpha$ 또는 $x-2=\beta$

$\therefore x=\alpha+2$ 또는 $x=\beta+2$

따라서 이차방정식 $f(x-2)=0$의 두 근의 합은

$(\alpha+2)+(\beta+2)=\alpha+\beta+4=6+4=10$ 답 10

0503 전략 이차함수의 그래프가 두 직선에 동시에 접할 조건을 알아본다.

이차함수 $y=-2x^2+ax+b$의 그래프와 직선 $y=3x-1$이 접하므로 이차방정식 $-2x^2+ax+b=3x-1$, 즉

$2x^2+(3-a)x-1-b=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(3-a)^2-4\times2\times(-1-b)=0$

$\therefore a^2-6a+8b+17=0$ …… ㉠

또 이차함수 $y=-2x^2+ax+b$의 그래프와 직선 $y=-x+5$가 접하므로 이차방정식 $-2x^2+ax+b=-x+5$, 즉

$2x^2-(1+a)x+5-b=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=\{-(1+a)\}^2-4\times2\times(5-b)=0$

$\therefore a^2+2a+8b-39=0$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $-8a+56=0$ $\therefore a=7$

$a=7$을 ㉠에 대입하면

$8b+24=0$ $\therefore b=-3$

$\therefore ab=-21$ 답 −21

0504 전략 a의 값의 범위에 따라 경우를 나누어 생각한다.

$f(x)=x^2-2ax+a^2-2a-4=(x-a)^2-2a-4$

(i) $0<a\le2$일 때

$0\le x\le2$에서 $f(x)$는 $x=a$일 때 최솟값 $-2a-4$를 가지므로

$-2a-4=0$ $\therefore a=-2$

그런데 $0<a\le2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a>2$일 때

$0\le x\le2$에서 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 a^2-6a를 가지므로

$a^2-6a=0$, $a(a-6)=0$

$\therefore a=6$ ($\because a>2$)

(i), (ii)에서 $a=6$

따라서 $0\le x\le2$에서 $f(x)=(x-6)^2-16$의 최댓값은 $x=0$일 때이므로

$M=20$ $\therefore a+M=26$ 답 26

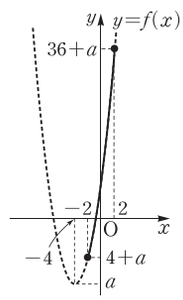
0505 전략 조건 (가)를 이용하여 $f(x)$를 $(x+p)^2+q$의 꼴로 나타낸다.

조건 (가)에서

$f(x)=(x+4)^2+a$ (a는 상수)

라 하자.

$-2\le x\le2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=2$에서 최댓값 $36+a$를 가지므로 조건 (나)에서

$36+a=26$ $\therefore a=-10$

즉 $f(x)=(x+4)^2-10$이므로

$f(1)=15$ 답 15

0506 전략 주어진 식을 완전제곱식의 합의 꼴로 변형한다.

$3x^2+\frac{1}{2}y^2+z^2+6x-4y-10z+19$

$=3(x+1)^2+\frac{1}{2}(y-4)^2+(z-5)^2-17$

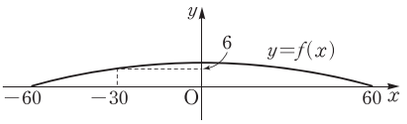
이때 x, y, z가 실수이므로

$(x+1)^2\ge0$, $(y-4)^2\ge0$, $(z-5)^2\ge0$

$\therefore 3x^2+\frac{1}{2}y^2+z^2+6x-4y-10z+19\ge-17$

따라서 주어진 식의 최솟값은 −17이다. 답 −17

0507 전략 물 로켓이 날아가는 모양을 나타내는 이차함수의 식을 구한다.



주어진 그림을 위의 그림과 같이 좌표평면 위에 나타내고, 물 로켓이 날아가는 모양을 나타내는 이차함수의 식을 $y=f(x)$라 하면

$f(x)=a(x+60)(x-60)$ $(a<0)$

으로 놓을 수 있다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-30, 6)$을 지나므로

$-2700a=6$ $\therefore a=-\frac{1}{450}$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{450}(x+60)(x-60)=-\frac{1}{450}x^2+8$

이때 $-30\le x\le 60$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 8을 갖는다.

따라서 물 로켓의 지면으로부터의 최고 높이는 8 m이다.

답 8 m

0508 전략 이차함수의 그래프가 x축에 접할 조건을 알아본다.

이차함수 $y=x^2+2(a-k)x+k^2-6k-3b$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2+2(a-k)x+k^2-6k-3b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-k)^2-(k^2-6k-3b)=0$

$\therefore (6-2a)k+a^2+3b=0$ … ❶

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$6-2a=0$, $a^2+3b=0$

$\therefore a=3$, $b=-3$ … ❷

$\therefore a-b=6$ … ❸

답 6

단계	채점 요소	배점
❶	k에 대한 항등식으로 나타내기	2점
❷	a, b의 값 구하기	2점
❸	$a-b$의 값 구하기	1점

0509 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x+9$의 두 교점의 x좌표가 -4, $-\frac{2}{3}$임을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

이차함수 $y=-3x^2+ax+b$의 그래프와 직선 $y=2x+9$의 두 교점의 x좌표가 -4, $-\frac{2}{3}$이므로 -4, $-\frac{2}{3}$는 이차방정식 $-3x^2+ax+b=2x+9$, 즉 $3x^2+(2-a)x+9-b=0$의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-4+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{a-2}{3}$, $-4\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{9-b}{3}$

$\therefore a=-12$, $b=1$ … ❶

즉 $f(x)=-3x^2-12x+1=-3(x+2)^2+13$이므로

$-3\le x\le 1$에서

$f(-3)=10$, $f(-2)=13$, $f(1)=-14$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 13, 최솟값은 -14이므로

$M=13$, $m=-14$ … ❷

$\therefore M+m=-1$ … ❸

답 -1

단계	채점 요소	배점
❶	a, b의 값 구하기	2점
❷	M, m의 값 구하기	2점
❸	$M+m$의 값 구하기	1점

0510 전략 먼저 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식을 구한다.

두 점 $A(0, 1)$, $B(3, -5)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-5-1}{3-0}=-2$

기울기가 -2이고 y절편이 1인 직선의 방정식은

$y=-2x+1$ … ❶

$\therefore 2x^2-y^2+4x=2x^2-(-2x+1)^2+4x$

$=-2x^2+8x-1$

$=-2(x-2)^2+7$ … ❷

이때 점 $P(x, y)$가 선분 AB 위를 움직이므로

$0\le x\le 3$

따라서 $0\le x\le 3$에서 $x=2$일 때 최댓값 7을 갖는다. … ❸

답 7

단계	채점 요소	배점
❶	두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식 구하기	2점
❷	$2x^2-y^2+4x$를 x에 대한 이차식으로 나타내기	2점
❸	$2x^2-y^2+4x$의 최댓값 구하기	2점

0511 전략 $\overline{AE}=\overline{BF}=\overline{CG}=\overline{DH}=x$라 하고 사각형 EFGH의 넓이를 x에 대한 이차식으로 나타낸다.

$\overline{AE}=\overline{BF}=\overline{CG}=\overline{DH}=x$라 하면

$\overline{BE}=\overline{DG}=14-x$, $\overline{CF}=\overline{AH}=10-x$

변의 길이는 양수이므로

$0<x<10$

사각형 EFGH의 넓이는

$14\times 10-2\times\frac{1}{2}\times x\times(14-x)-2\times\frac{1}{2}\times x\times(10-x)$

$=2x^2-24x+140$

$=2(x-6)^2+68$ … ❶

이때 $0<x<10$이므로 $x=6$에서 최솟값 68을 갖는다.

따라서 사각형 EFGH의 넓이의 최솟값은 68이다. … ❷

답 68

단계	채점 요소	배점
❶	사각형 EFGH의 넓이를 이차식으로 나타내기	4점
❷	사각형 EFGH의 넓이의 최솟값 구하기	2점

07 여러 가지 방정식

셀프 CHECK 본책 104~105쪽

A 답 (1) $x=-2$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

(2) $x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

B 답 (1) $x=1$ 또는 $x=-3\pm\sqrt{6}$

(2) $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm2i$

C 답 (1) $x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

(2) $x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=2\pm\sqrt{6}$

D 답 (1) $x=\pm1$ 또는 $x=\pm3$

(2) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

E 답 (1) -24 (2) 19

F 답 $x^3-6x^2+3x+10=0$

G 답 $a=1$, $b=15$

H 답 (1) 0 (2) -2 (3) -1 (4) 0

I 답 (1) $\begin{cases}x=-4\\y=1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=1\\y=-4\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=-2\\y=-2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$

또는 $\begin{cases}x=-2\sqrt{2}\\y=2\sqrt{2}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\sqrt{2}\\y=-2\sqrt{2}\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=-3\\y=5\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=5\\y=-3\end{cases}$

내신유형 다지기 본책 106~117쪽

유형 094 삼차방정식과 사차방정식의 풀이 본책 106쪽

방정식 $f(x)=0$은 다음과 같은 순서로 푼다.

(i) $f(\alpha)=0$을 만족시키는 α의 값을 찾아 인수정리를 이용하거나 공통인수로 묶어서 $f(x)$를 인수분해한다.

(ii) $ABC=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$ 또는 $C=0$임을 이용하여 해를 구한다.

0512 $f(x)=x^3+x^2-2x+12$라 하면

$f(-3)=-27+9+6+12=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-3	1	1	-2	12
		-3	6	-12
	1	-2	4	0

$f(x)=(x+3)(x^2-2x+4)$

즉 주어진 방정식은

$(x+3)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=1$, $\gamma=3$이므로

$\alpha\beta+\gamma=0$ 답 ③

0513 $f(x)=x^3-x^2+x-6$이라 하면

$f(2)=8-4+2-6=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

2	1	-1	1	-6
		2	2	6
	1	1	3	0

$f(x)=(x-2)(x^2+x+3)$

즉 주어진 방정식은

$(x-2)(x^2+x+3)=0$

이때 방정식 $f(x)=0$의 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2+x+3=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=3$

$\therefore \dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{(-1)^2-2\times3}{3}=-\dfrac{5}{3}$ 답 ②

0514 $f(x)=x^4-8x^3+14x^2+8x-15$라 하면

$f(-1)=1+8+14-8-15=0$,

$f(1)=1-8+14+8-15=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	-8	14	8	-15
		-1	9	-23	15
1	1	-9	23	-15	0
		1	-8	15	
	1	-8	15	0	

$f(x)=(x+1)(x-1)(x^2-8x+15)$

$=(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)$

즉 주어진 방정식은

$(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=5$

따라서 가장 큰 근은 5, 가장 작은 근은 -1이므로 구하는 합은

$5+(-1)=4$ 답 4

0515 $x^4+5x^3-x-5=0$에서

$x^3(x+5)-(x+5)=0$, $(x+5)(x^3-1)=0$

$(x+5)(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=1$ 또는 $x^2+x+1=0$

이때 두 실근의 합은 $-5+1=-4$이므로

$p=-4$ … ❶

또 두 허근은 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 허근의 곱은 1이므로 $q=1$ … ❷
$\therefore p+q=-3$ … ❸

답 -3

단계	채점 요소	비율
❶	p의 값 구하기	40 %
❷	q의 값 구하기	40 %
❸	$p+q$의 값 구하기	20 %

0516 $z=\overline{z}$에서 복소수 z는 실수이므로
$x^3-4x^2-9x+36=0$, $x^2(x-4)-9(x-4)=0$
$(x-4)(x^2-9)=0$, $(x-4)(x+3)(x-3)=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=3$
따라서 모든 양수 x의 값의 곱은 $4\times3=12$ 답 12

0517 $f(x)=x^4+5x^3+4x^2+4x+16$이라 하면
$f(-2)=16-40+16-8+16=0$,
$f(-4)=256-320+64-16+16=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-2	1	5	4	4	16
		-2	-6	4	-16
-4	1	3	-2	8	0
		-4	4	-8	
	1	-1	2	0	

$f(x)=(x+2)(x+4)(x^2-x+2)$
즉 주어진 방정식은 $(x+2)(x+4)(x^2-x+2)=0$
이때 방정식 $f(x)=0$의 허근 α는 이차방정식 $x^2-x+2=0$의 한 근이므로 $\alpha^2-\alpha+2=0$
양변을 α로 나누면 $\alpha-1+\frac{2}{\alpha}=0$ $\therefore \alpha+\frac{2}{\alpha}=1$
$\therefore \alpha^3+\frac{8}{\alpha^3}=\left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)^3-6\left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)=1^3-6\times1=-5$

답 -5

0518 $f(x)=x^3-6x^2+(k+8)x-2k$라 하면
$f(2)=8-24+2(k+8)-2k=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

2	1	-6	$k+8$	$-2k$
		2	-8	$2k$
	1	-4	k	0

$f(x)=(x-2)(x^2-4x+k)$
즉 주어진 방정식은 $(x-2)(x^2-4x+k)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=2\pm\sqrt{4-k}$
이때 $\alpha<\beta<\gamma$이므로
$\alpha=2-\sqrt{4-k}$, $\beta=2$, $\gamma=2+\sqrt{4-k}$
따라서 $2\alpha+\beta=2\gamma$에서
$2(2-\sqrt{4-k})+2=2(2+\sqrt{4-k})$
$\sqrt{4-k}=\frac{1}{2}$, $4-k=\frac{1}{4}$
$\therefore k=\frac{15}{4}$ 답 ④

유형 095 공통부분이 있는 사차방정식의 풀이 → 본책 107쪽

(1) 공통부분을 한 문자로 치환한 후 인수분해한다.
(2) ( )( )( )( )$=k$ (k는 상수)의 꼴
➜ 공통부분이 생기도록 두 개씩 짝을 지어 전개한 후 공통부분을 치환한다.

0519 $x^2-2x=t$로 놓으면 주어진 방정식은
$t^2-11t+24=0$, $(t-3)(t-8)=0$
$\therefore t=3$ 또는 $t=8$
(i) $t=3$일 때, $x^2-2x=3$이므로
$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$
(ii) $t=8$일 때, $x^2-2x=8$이므로
$x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$
(i), (ii)에서
$x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=4$
따라서 주어진 방정식의 근이 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0520 $x^2+4x=t$로 놓으면 주어진 방정식은
$(t-5)(t-8)-28=0$, $t^2-13t+12=0$
$(t-1)(t-12)=0$ $\therefore t=1$ 또는 $t=12$
(i) $t=1$일 때, $x^2+4x=1$이므로
$x^2+4x-1=0$ $\therefore x=-2\pm\sqrt{5}$
(ii) $t=12$일 때, $x^2+4x=12$이므로
$x^2+4x-12=0$, $(x+6)(x-2)=0$
$\therefore x=-6$ 또는 $x=2$
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 양수인 근은 $-2+\sqrt{5}$, 2이므로 구하는 합은
$-2+\sqrt{5}+2=\sqrt{5}$ 답 ②

0521 $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)-56=0$에서
$\{(x-3)(x+4)\}\{(x-1)(x+2)\}-56=0$
$\therefore (x^2+x-12)(x^2+x-2)-56=0$
$x^2+x=t$로 놓으면 주어진 방정식은
$(t-12)(t-2)-56=0$, $t^2-14t-32=0$
$(t+2)(t-16)=0$ $\therefore t=-2$ 또는 $t=16$
(i) $t=-2$일 때, $x^2+x=-2$이므로
$x^2+x+2=0$
이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면
$D_1=1^2-4\times1\times2=-7<0$
즉 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.
(ii) $t=16$일 때, $x^2+x=16$이므로
$x^2+x-16=0$
이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면
$D_2=1^2-4\times1\times(-16)=65>0$
즉 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2+x+2=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=2$

$\therefore \alpha^3-4\alpha^2\beta-4\alpha\beta^2+\beta^3$
$=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)-4\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=(\alpha+\beta)^3-7\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=(-1)^3-7\times2\times(-1)=13$ 답 13

유형 096 $x^4+ax^2+b=0$의 꼴의 방정식의 풀이 본책 107쪽

$x^2=t$로 치환하였을 때
(1) 좌변이 인수분해되면 인수분해하여 푼다.
(2) 좌변이 인수분해되지 않으면 $A^2-B^2=0$의 꼴로 변형하여 푼다.

0522 $x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은
$t^2-13t+36=0$, $(t-4)(t-9)=0$
$\therefore t=4$ 또는 $t=9$
즉 $x^2=4$ 또는 $x^2=9$이므로 $x=\pm2$ 또는 $x=\pm3$
이때 $\alpha<\beta<\gamma<\delta$이므로 $\alpha=-3$, $\beta=-2$, $\gamma=2$, $\delta=3$
$\therefore \alpha-\beta-\gamma+\delta=0$ 답 0

0523 $x^2=t$로 놓으면 주어진 방정식은
$t^2+6t-16=0$, $(t+8)(t-2)=0$
$\therefore t=-8$ 또는 $t=2$
즉 $x^2=-8$ 또는 $x^2=2$이므로
$x=\pm2\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$
따라서 주어진 방정식의 두 실근의 곱은
$\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=-2$ 답 ⑤

0524 $x^4-7x^2+9=0$에서 $(x^4-6x^2+9)-x^2=0$
$(x^2-3)^2-x^2=0$, $(x^2+x-3)(x^2-x-3)=0$
$x^2+x-3=0$ 또는 $x^2-x-3=0$
$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$
따라서 주어진 방정식의 모든 음수인 근의 합은
$\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}+\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}=-\sqrt{13}$ 답 ④

0525 $x^4+4x^2+16=0$에서 $(x^4+8x^2+16)-4x^2=0$
$(x^2+4)^2-(2x)^2=0$, $(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)=0$
$\therefore x^2+2x+4=0$ 또는 $x^2-2x+4=0$
방정식 $x^2+2x+4=0$의 두 근을 α, β, 방정식 $x^2-2x+4=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=4$, $\gamma+\delta=2$, $\gamma\delta=4$
$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$
$=\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+\{(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta\}$
$=\{(-2)^2-2\times4\}+(2^2-2\times4)$
$=-8$ 답 ②

유형 097 계수가 대칭인 사차방정식의 풀이 본책 108쪽

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$의 꼴의 방정식
➜ 양변을 x^2으로 나눈 후 $x+\dfrac{1}{x}=t$로 치환한다.

0526 $x^4-3x^3-2x^2-3x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x^2으로 나누면
$x^2-3x-2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$
$\therefore \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-4=0$
$x+\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 주어진 방정식은
$t^2-3t-4=0$, $(t+1)(t-4)=0$
$\therefore t=-1$ 또는 $t=4$
(i) $t=-1$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=-1$이므로
$x^2+x+1=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=1^2-4\times1\times1=-3<0$
즉 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.
(ii) $t=4$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=4$이므로
$x^2-4x+1=0$ $\therefore x=2\pm\sqrt{3}$
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 실근은 $x=2\pm\sqrt{3}$이므로
$p=2$, $q=3$ $\therefore pq=6$ 답 ③

0527 $x^4+6x^3-5x^2+6x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x^2으로 나누면
$x^2+6x-5+\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$
$\therefore \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+6\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-7=0$
$x+\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 주어진 방정식은
$t^2+6t-7=0$, $(t+7)(t-1)=0$
$\therefore t=-7$ 또는 $t=1$
(i) $t=-7$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=-7$이므로
$x^2+7x+1=0$
이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면
$D_1=7^2-4\times1\times1=45>0$
즉 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(ii) $t=1$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=1$이므로
$x^2-x+1=0$
이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면
$D_2=(-1)^2-4\times1\times1=-3<0$
즉 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.
(i), (ii)에서 α는 $x^2+7x+1=0$의 한 실근이므로
$\alpha^2+7\alpha+1=0$ $\therefore \alpha+\dfrac{1}{\alpha}=-7$ 답 -7

유형 098 근이 주어진 삼·사차방정식 본책 108쪽

방정식 $f(x)=0$의 한 근이 α이다.
➜ $f(\alpha)=0$

0528 $f(x)=x^3+ax^2-13x+3b$라 하면 주어진 방정식의 두 근이 -1, 3이므로
$f(-1)=0$에서 $\quad -1+a+13+3b=0$
$\therefore\ a+3b=-12$ …… ㉠
$f(3)=0$에서 $\quad 27+9a-39+3b=0$
$\therefore\ 3a+b=4$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=3,\ b=-5$
즉 $f(x)=x^3+3x^2-13x-15$
이므로 조립제법을 이용하여
$f(x)$를 인수분해하면

-1	1	3	-13	-15
		-1	-2	15
3	1	2	-15	0
		3	15	
	1	5	0	

$f(x)$
$=(x+1)(x-3)(x+5)$
따라서 주어진 방정식은
$(x+1)(x-3)(x+5)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=-5$
즉 나머지 한 근은 -5이다. 답 -5

0529 $f(x)=x^4-5x^3+(a-3)x^2+(3a+1)x-32$라 하면 주어진 방정식의 한 근이 -2이므로 $f(-2)=0$에서
$16+40+4(a-3)-2(3a+1)-32=0$
$10-2a=0 \quad \therefore\ a=5$
즉 $f(x)=x^4-5x^3+2x^2+16x-32$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-2	1	-5	2	16	-32
		-2	14	-32	32
4	1	-7	16	-16	0
		4	-12	16	
	1	-3	4	0	

$f(x)=(x+2)(x-4)(x^2-3x+4)$
따라서 주어진 방정식은 $\quad (x+2)(x-4)(x^2-3x+4)=0$
이때 방정식 $f(x)=0$의 두 허근은 이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 곱은 4이다. 답 ④

0530 $f(x)=x^3+(k+1)x^2+(4k-3)x+k+7$이라 하면 주어진 방정식의 한 근이 1이므로 $f(1)=0$에서
$1+(k+1)+(4k-3)+k+7=0$
$6k+6=0 \quad \therefore\ k=-1$
즉 $f(x)=x^3-7x+6$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	0	-7	6
		1	1	-6
	1	1	-6	0

$f(x)=(x-1)(x^2+x-6)$
$=(x-1)(x+3)(x-2)$
따라서 주어진 방정식은
$(x-1)(x+3)(x-2)=0$
$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=2$
따라서 $\alpha=-3$, $\beta=2$ 또는 $\alpha=2$, $\beta=-3$이므로
$|\alpha-\beta|=5$ 답 ①

0531 주어진 방정식의 두 근이 -5, 2이므로
$625-125a-5b-40=0$에서 $\quad 25a+b=117$ …… ㉠
또 $16+8a+2b-40=0$에서 $\quad 4a+b=12$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=5,\ b=-8$ … ❶
즉 주어진 방정식은 $\quad x^4+5x^3-8x-40=0$
$x^3(x+5)-8(x+5)=0, \quad (x+5)(x^3-8)=0$
$\therefore\ (x+5)(x-2)(x^2+2x+4)=0$
이때 나머지 두 근 α, β는 이차방정식 $x^2+2x+4=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=4$ … ❷
$\therefore\ a+b+\dfrac{2}{\alpha}+\dfrac{2}{\beta}=a+b+\dfrac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$
$=5+(-8)+\dfrac{2\times(-2)}{4}=-4$ … ❸
답 -4

단계	채점 요소	비율
❶	a, b의 값 구하기	40 %
❷	$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 구하기	40 %
❸	$a+b+\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}$의 값 구하기	20 %

유형 099 삼차방정식의 근의 조건 본책 109쪽

주어진 삼차방정식을 $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)=0$ (a는 실수)의 꼴로 변형한 후 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 이용한다.

0532 $f(x)=x^3+8x^2+(12-k)x-2k$라 하면
$f(-2)=-8+32-2(12-k)-2k=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-2	1	8	$12-k$	$-2k$
		-2	-12	$2k$
	1	6	$-k$	0

$f(x)=(x+2)(x^2+6x-k)$
이때 방정식 $f(x)=0$이 한 실근과 두 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+6x-k=0$이 두 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=3^2-(-k)<0 \quad \therefore\ k<-9$
따라서 정수 k의 최댓값은 -10이다. 답 ①

0533 $f(x)=2x^3-3x^2+(k+1)x-k$라 하면
$f(1)=2-3+(k+1)-k=0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	2	-3	$k+1$	$-k$
		2	-1	k
	2	-1	k	0

$f(x)=(x-1)(2x^2-x+k)$

이때 방정식 $f(x)=0$의 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 $2x^2-x+k=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\times2\times k\geq0$ $\therefore k\leq\frac{1}{8}$ 답 $k\leq\frac{1}{8}$

0534 $f(x)=x^3+(4-a)x^2+(7-a)x+4$라 하면

$f(-1)=-1+(4-a)-(7-a)+4=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	$4-a$	$7-a$	4
		-1	$-3+a$	-4
	1	$3-a$	4	0

$f(x)=(x+1)\{x^2+(3-a)x+4\}$

이때 방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2+(3-a)x+4=0$이 $x=-1$을 근으로 갖는 경우

$1-(3-a)+4=0$ $\therefore a=-2$

(ii) 방정식 $x^2+(3-a)x+4=0$이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(3-a)^2-4\times1\times4=0$

$a^2-6a-7=0$, $(a+1)(a-7)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=7$

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 곱은

$-2\times(-1)\times7=14$ 답 ④

0535 $f(x)=x^3-9x^2+3(k+6)x-9k$라 하면

$f(3)=27-81+9(k+6)-9k=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

3	1	-9	$3(k+6)$	$-9k$
		3	-18	$9k$
	1	-6	$3k$	0

$f(x)=(x-3)(x^2-6x+3k)$ … ❶

이때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근이 1개이려면

(i) 방정식 $x^2-6x+3k=0$이 $x=3$을 중근으로 갖는 경우

$9-18+3k=0$ $\therefore k=3$

(ii) 방정식 $x^2-6x+3k=0$이 허근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-3k<0$ $\therefore k>3$

(i), (ii)에서 실수 k의 값의 범위는 $k\geq3$ … ❷

따라서 실수 k의 최솟값은 3이다. … ❸

답 3

단계	채점 요소	비율
❶	주어진 방정식의 좌변을 인수분해하기	30 %
❷	k의 값의 범위 구하기	50 %
❸	k의 최솟값 구하기	20 %

만점 공략 노트

삼차방정식의 서로 다른 실근이 1개인 경우는 다음과 같다.

(1) 서로 같은 세 실근을 갖는 경우

(2) 실근 1개와 허근 2개를 갖는 경우

0536 $x^2+kx=t$로 놓으면

$(t+2)(t+6)+3=0$, $t^2+8t+15=0$

$(t+3)(t+5)=0$, $(x^2+kx+3)(x^2+kx+5)=0$

$\therefore x^2+kx+3=0$ 또는 $x^2+kx+5=0$

두 이차방정식 $x^2+kx+3=0$, $x^2+kx+5=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$D_1=k^2-4\times1\times3=k^2-12$,

$D_2=k^2-4\times1\times5=k^2-20$

주어진 사차방정식이 실근과 허근을 모두 가지려면

$D_1<0$, $D_2\geq0$ 또는 $D_1\geq0$, $D_2<0$

이어야 한다.

(i) $D_1<0$, $D_2\geq0$인 경우

$k^2<12$, $k^2\geq20$을 만족시키는 자연수 k는 존재하지 않는다.

(ii) $D_1\geq0$, $D_2<0$인 경우

$12\leq k^2<20$을 만족시키는 자연수 k의 값은 4이다.

(i), (ii)에서 구하는 자연수 k의 값은 4이다. 답 4

참고 사차방정식의 근의 조건도 주어진 식을 이차식이 포함된 꼴로 변형한 후 이차방정식의 판별식을 이용하여 해결한다.

07 여러 가지 방정식

유형 100 삼차방정식의 근과 계수의 관계

본책 110쪽

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

0537 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=4$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=7$, $\alpha\beta\gamma=-3$

$\therefore (2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$

$=8-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=8-4\times4+2\times7-(-3)=9$ 답 ④

다른 풀이 $x^3-4x^2+7x+3=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

$x^3-4x^2+7x+3=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

양변에 $x=2$를 대입하면

$(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=8-16+14+3=9$

0538 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3$, $\alpha\beta\gamma=1$ … ❶

이때

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(-2)^2-2\times(-3)=10$

이므로

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

$=-2\times\{10-(-3)\}+3\times1=-23$ … ❷

답 -23

단계	채점 요소	비율
❶	$\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$의 값 구하기	30 %
❷	$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$의 값 구하기	70 %

0539 삼차방정식 $x^3-18x^2+4ax+6b=0$의 세 근을 2α, 3α, 4α ($\alpha\neq0$)라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+3\alpha+4\alpha=18$, $9\alpha=18$ $\therefore \alpha=2$

따라서 세 근이 4, 6, 8이므로

$4\times6+6\times8+8\times4=4a$, $4\times6\times8=-6b$

$\therefore a=26$, $b=-32$ $\therefore a-b=58$ 답 58

0540 삼차방정식 $x^3+px^2+26x+q=0$의 세 근을 $\alpha-1$, α, $\alpha+1$ (α는 정수)라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha-1)\alpha+\alpha(\alpha+1)+(\alpha+1)(\alpha-1)=26$

$\alpha^2=9$ $\therefore \alpha=\pm3$

(i) $\alpha=3$일 때, 세 근이 2, 3, 4이므로

$2+3+4=-p$, $2\times3\times4=-q$

$\therefore p=-9$, $q=-24$

(ii) $\alpha=-3$일 때, 세 근이 -4, -3, -2이므로

$-4+(-3)+(-2)=-p$, $-4\times(-3)\times(-2)=-q$

$\therefore p=9$, $q=24$

(i), (ii)에서 $|p|+|q|=9+24=33$ 답 33

유형 101 세 수를 근으로 하는 삼차방정식 → 본책 110쪽

세 수 α, β, γ를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식

➔ $x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$

0541 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-5$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=3$

$\therefore (\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)$

$=(\alpha+\beta+\gamma)+3=-5+3=-2$

$(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\alpha+\beta+\gamma)+3$

$=2+2\times(-5)+3=-5$

$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$

$=3+2+(-5)+1=1$

따라서 $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3+2x^2-5x-1=0$ 답 ②

0542 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-4$, $\alpha\beta\gamma=-1$

$\therefore \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{-4}{-1}=4$

$\dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\beta}\times\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\gamma}\times\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{3}{-1}=-3$

$\dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{1}{\beta}\times\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{1}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{1}{-1}=-1$

따라서 $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$, $\dfrac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3-4x^2-3x+1=0$

즉 $a=-4$, $b=-3$, $c=1$이므로 $a-b+c=0$ 답 0

0543 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=5$, $\alpha\beta\gamma=1$

이때 $\alpha+\beta=-\gamma$, $\beta+\gamma=-\alpha$, $\gamma+\alpha=-\beta$이므로

$(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)=-(\alpha+\beta+\gamma)=0$

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)+(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$

$=-\gamma\times(-\alpha)+(-\alpha)\times(-\beta)+(-\beta)\times(-\gamma)$

$=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=5$

$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=-\gamma\times(-\alpha)\times(-\beta)$

$=-\alpha\beta\gamma=-1$

따라서 $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $x^3+5x+1=0$ 답 $x^3+5x+1=0$

유형 102 $P(\alpha)=P(\beta)=P(\gamma)=k$의 꼴의 삼차방정식 → 본책 111쪽

삼차식 $P(x)$에 대하여 $P(\alpha)=P(\beta)=P(\gamma)=k$

➔ $P(\alpha)-k=P(\beta)-k=P(\gamma)-k=0$

➔ 삼차방정식 $P(x)-k=0$의 세 근은 α, β, γ이다.

0544 $P(-1)=P(2)=P(3)=4$에서

$P(-1)-4=P(2)-4=P(3)-4=0$

이므로 삼차방정식 $P(x)-4=0$의 세 근이 -1, 2, 3이다.

이때 -1, 2, 3을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$(x+1)(x-2)(x-3)=0$

따라서 $P(x)-4=(x+1)(x-2)(x-3)$이므로

$P(x)=(x+1)(x-2)(x-3)+4$

$\therefore P(1)=8$ 답 ⑤

0545 $P(-4)=P(1)=P(2)=-2$에서

$P(-4)+2=P(1)+2=P(2)+2=0$

이므로 삼차방정식 $P(x)+2=0$의 세 근이 -4, 1, 2이다.

이때 -4, 1, 2를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 -1인 삼차방정식은 $-(x+4)(x-1)(x-2)=0$

따라서 $P(x)+2=-(x+4)(x-1)(x-2)$이므로

$P(x)=-(x+4)(x-1)(x-2)-2$

$\therefore P(-3)=-22$ 답 -22

0546 $P(-3)=P(-1)=P(5)=-6$에서

$P(-3)+6=P(-1)+6=P(5)+6=0$

이므로 삼차방정식 $P(x)+6=0$의 세 근이 -3, -1, 5이다.

이때 -3, -1, 5를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은 $(x+3)(x+1)(x-5)=0$

$\therefore x^3-x^2-17x-15=0$

따라서 $P(x)+6=x^3-x^2-17x-15$이므로

$P(x)=x^3-x^2-17x-21$

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 방정식 $P(x)=0$의 모든 근의 합은 1, 모든 근의 곱은 21이므로

$a=1$, $b=21$ $\therefore b-a=20$ 답 ③

유형 103 삼·사차방정식의 켤레근 본책 111쪽

(1) 계수가 유리수인 이차 이상의 방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다.
(단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)

(2) 계수가 실수인 이차 이상의 방정식의 한 근이 $p+qi$이면 $p-qi$도 근이다. (단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$이다.)

0547 주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 $3-\sqrt{2}$가 근이면 $3+\sqrt{2}$도 근이다.
나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})\alpha=14$, $7\alpha=14$

$\therefore \alpha=2$

따라서 주어진 방정식의 세 근이 2, $3-\sqrt{2}$, $3+\sqrt{2}$이므로

$2+(3-\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})=-a$,

$2(3-\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})+2(3+\sqrt{2})=b$

$\therefore a=-8$, $b=19$

$\therefore a+b=11$ 답 ②

0548 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $\frac{5}{2+i}$, 즉 $2-i$가 근이면 $2+i$도 근이다. … ❶
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-i)+(2+i)+(-3)=-\frac{b}{a}$,

$(2-i)(2+i)-3(2-i)-3(2+i)=\frac{c}{a}$,

$(2-i)(2+i)\times(-3)=-\frac{15}{a}$

$b=-a$, $c=-7a$, $a=1$

$\therefore a=1$, $b=-1$, $c=-7$ … ❷

$\therefore abc=7$ … ❸

답 7

단계	채점 요소	비율
❶	나머지 한 근 구하기	30 %
❷	a, b, c의 값 구하기	60 %
❸	abc의 값 구하기	10 %

0549 주어진 사차방정식의 계수가 실수이므로 $-i$, $2+\sqrt{3}i$가 근이면 i, $2-\sqrt{3}i$도 근이다.
이때 $-i$, i, $2-\sqrt{3}i$, $2+\sqrt{3}i$를 네 근으로 하고 x^4의 계수가 1인 사차방정식은

$(x+i)(x-i)\{x-(2-\sqrt{3}i)\}\{x-(2+\sqrt{3}i)\}=0$

$(x^2+1)(x^2-4x+7)=0$

$\therefore x^4-4x^3+8x^2-4x+7=0$

따라서 $a=-4$, $b=8$, $c=-4$, $d=7$이므로

$a-b+c-d=-23$ 답 ①

0550 $x^3+(k-1)x^2-k=0$에서

$x^3-x^2+kx^2-k=0$

$x^2(x-1)+k(x^2-1)=0$

$x^2(x-1)+k(x+1)(x-1)=0$

$(x-1)(x^2+kx+k)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x^2+kx+k=0$

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 한 허근이 z이면 $\overline{z}$도 근이다.
따라서 이차방정식 $x^2+kx+k=0$의 두 근이 z, $\overline{z}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$z+\overline{z}=-k$

이때 $z+\overline{z}=-2$이므로 $k=2$ 답 ②

유형 104 방정식 $x^3=1$, $x^3=-1$의 허근의 성질 본책 112쪽

$\overline{\omega}$가 ω의 켤레복소수일 때

(1) 방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이면 다른 한 허근은 $\overline{\omega}$이다.
① $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$
② $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$
③ $\omega^2=\overline{\omega}=\frac{1}{\omega}$

(2) 방정식 $x^3=-1$의 한 허근이 ω이면 다른 한 허근은 $\overline{\omega}$이다.
① $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$
② $\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$
③ $\omega^2=-\overline{\omega}=-\frac{1}{\omega}$

0551 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$

$\therefore (x-1)(x^2+x+1)=0$

이때 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로 $\omega^2+\omega+1=0$

$\therefore 1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{20}$
$=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\cdots$
$+\omega^{18}(1+\omega+\omega^2)$
$=0$ 답 0

0552 ①, ②, ③ $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$

$\therefore (x+1)(x^2-x+1)=0$

이때 ω는 $x^3=-1$, $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

ω가 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$ $\therefore \omega^2=\omega-1=-\overline{\omega}$

④ $\omega^{14}+\omega^4=(\omega^3)^4\times\omega^2+\omega^3\times\omega=\omega^2-\omega=-1$

⑤ $\frac{\omega-1}{\omega^2}+\frac{\omega^2}{1-\omega}=\frac{\omega^2}{\omega^2}+\frac{\omega^2}{-\omega^2}=1-1=0$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0553 $\omega=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2\omega-1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면 $4\omega^2-4\omega+1=-3$

$\therefore \omega^2-\omega+1=0$

양변에 $\omega+1$을 곱하면 $(\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0$

$\omega^3+1=0$ $\therefore \omega^3=-1$

$\therefore \omega^{99}-\omega^{150}+\dfrac{1}{\omega^{198}}=(\omega^3)^{33}-(\omega^3)^{50}+\dfrac{1}{(\omega^3)^{66}}$

$=-1-1+1=-1$ 답 ②

0554 $x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x^3-1=0$ $\therefore x^3=1$

이때 ω는 $x^3=1$, $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

ω가 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로 $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$

$\therefore \dfrac{\overline{\omega}}{\omega^2+\omega}+\dfrac{\omega^8}{\omega^2+1}=\dfrac{\overline{\omega}}{-1}+\dfrac{(\omega^3)^2\times\omega^2}{-\omega}$

$=-\overline{\omega}-\omega$

$=-(\omega+\overline{\omega})=1$ 답 ④

0555 $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$

$\therefore (x+1)(x^2-x+1)=0$

이때 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$ … ❶

$\therefore \dfrac{(4\omega+1)(\overline{4\omega+1})}{(\omega-1)(\overline{\omega-1})}=\dfrac{(4\omega+1)(4\overline{\omega}+1)}{(\omega-1)(\overline{\omega}-1)}$

$=\dfrac{16\omega\overline{\omega}+4(\omega+\overline{\omega})+1}{\omega\overline{\omega}-(\omega+\overline{\omega})+1}$

$=\dfrac{16+4+1}{1-1+1}=21$ … ❷

답 21

단계	채점 요소	비율
❶	$\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$임을 알기	40 %
❷	$\dfrac{(4\omega+1)(\overline{4\omega+1})}{(\omega-1)(\overline{\omega-1})}$의 값 구하기	60 %

만점 공략 노트

두 복소수 z_1, z_2의 켤레복소수를 각각 $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$라 할 때

① $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ ② $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

③ $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$ ④ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2\neq0$)

0556 $x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

이때 ω는 $x^3=1$, $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

따라서

$f(1)=\dfrac{1}{\omega+\omega^2}=\dfrac{1}{-1}=-1$,

$f(2)=\dfrac{1}{\omega^2+\omega^4}=\dfrac{1}{\omega^2+\omega}=\dfrac{1}{-1}=-1$,

$f(3)=\dfrac{1}{\omega^3+\omega^6}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$,

$f(4)=\dfrac{1}{\omega^4+\omega^8}=\dfrac{1}{\omega+\omega^2}=\dfrac{1}{-1}=-1$,

$f(5)=\dfrac{1}{\omega^5+\omega^{10}}=\dfrac{1}{\omega^2+\omega}=\dfrac{1}{-1}=-1$,

$f(6)=\dfrac{1}{\omega^6+\omega^{12}}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$,

⋮

이므로

$f(1)=f(4)=f(7)=\cdots=f(49)=-1$,

$f(2)=f(5)=f(8)=\cdots=f(50)=-1$,

$f(3)=f(6)=f(9)=\cdots=f(48)=\dfrac{1}{2}$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)$

$=16\times\left(-1-1+\dfrac{1}{2}\right)-1-1$

$=-26$ 답 -26

0557 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$

$\therefore (x-1)(x^2+x+1)=0$

이때 ω는 $x^3=1$, $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$\overline{\omega}$도 $x^3=1$, $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\overline{\omega}^3=1$, $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

ㄱ. $\overline{\omega}^3=1$ (참)

ㄴ. $\dfrac{1}{\omega}+\left(\dfrac{1}{\omega}\right)^2=\dfrac{\omega+1}{\omega^2}=\dfrac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$

$\dfrac{1}{\overline{\omega}}+\left(\dfrac{1}{\overline{\omega}}\right)^2=\dfrac{\overline{\omega}+1}{\overline{\omega}^2}=\dfrac{-\overline{\omega}^2}{\overline{\omega}^2}=-1$

$\therefore \dfrac{1}{\omega}+\left(\dfrac{1}{\omega}\right)^2=\dfrac{1}{\overline{\omega}}+\left(\dfrac{1}{\overline{\omega}}\right)^2$ (참)

ㄷ. $(-\omega-1)^n=(\omega^2)^n$

$\left(\dfrac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n=(-\overline{\omega})^n=\left(-\dfrac{1}{\omega}\right)^n$

$=(-1)^n\times\left(\dfrac{1}{\omega}\right)^n=(-1)^n\times(\omega^2)^n$

따라서 $(-\omega-1)^n=\left(\dfrac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n$에서

$(\omega^2)^n=(-1)^n\times(\omega^2)^n$ $\therefore 1=(-1)^n$

즉 n은 짝수이어야 하므로 100 이하의 자연수 n의 개수는 50이다. (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

유형 105 삼차방정식의 활용 → 본책 113쪽

삼차방정식의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 푼다.

(i) 구하려는 것을 미지수 x로 놓는다.

(ii) 주어진 조건을 이용하여 방정식을 세운다.

(iii) 방정식을 풀고 구한 해가 문제의 조건에 맞는지 확인한다.

0558 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라 하면

$(x+6)(x+3)(x-1)=4x^3$

$3x^3-8x^2-9x+18=0$

$(x-3)(3x^2+x-6)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{73}}{6}$

이때 x는 자연수이므로 $x=3$

따라서 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는 3 cm이므로 구하는 부피는 $3^3=27\,(\text{cm}^3)$ 답 $27\ \text{cm}^3$

0559 높이를 x m 줄였다고 하면

$\pi(6+x)^2(6-x)=\pi\times6^2\times6$

$x^3+6x^2-36x=0$, $x(x^2+6x-36)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-3\pm3\sqrt{5}$

그런데 $0<x<6$이어야 하므로 $x=-3+3\sqrt{5}$

따라서 새로운 물탱크의 높이는

$6-(-3+3\sqrt{5})=9-3\sqrt{5}\,(\text{m})$ 답 $(9-3\sqrt{5})$ m

0560 정육면체 1개의 한 모서리의 길이를 x라 하면

$S=18x^2$, $V=4x^3$

$S=V+32$이므로 $18x^2=4x^3+32$

$2x^3-9x^2+16=0$, $(x-4)(2x^2-x-4)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{33}}{4}$

이때 x는 자연수이므로 $x=4$

따라서 정육면체 1개의 한 모서리의 길이는 4이다. 답 4

0561 작은 구의 반지름의 길이를 x cm라 하면 큰 구의 반지름의 길이는 $(10-x)$ cm이므로

$\dfrac{4}{3}\pi(10-x)^3-\dfrac{4}{3}\pi x^3=672\pi$ … ❶

$x^3-15x^2+150x-248=0$

$(x-2)(x^2-13x+124)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=\dfrac{13\pm\sqrt{327}i}{2}$

이때 x는 실수이므로 $x=2$ … ❷

따라서 두 구의 겉넓이의 합은

$4\pi\times2^2+4\pi\times8^2=272\pi\,(\text{cm}^2)$ … ❸

답 $272\pi\ \text{cm}^2$

단계	채점 요소	비율
❶	삼차방정식 세우기	40 %
❷	삼차방정식 풀기	40 %
❸	두 구의 겉넓이의 합 구하기	20 %

유형 106 **일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식** 본책 114쪽

일차방정식을 x 또는 y에 대하여 정리한 후 이차방정식에 대입하여 푼다.

0562 $\begin{cases} x-y=-6 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x+6$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2+x(x+6)+(x+6)^2=12$

$3x^2+18x+24=0$, $x^2+6x+8=0$

$(x+4)(x+2)=0$ $\therefore x=-4$ 또는 $x=-2$

$x=-4$를 ㉢에 대입하면 $y=2$

$x=-2$를 ㉢에 대입하면 $y=4$

따라서 $\alpha=-4$, $\beta=2$ 또는 $\alpha=-2$, $\beta=4$이므로

$|\alpha|+|\beta|=6$ 답 ②

0563 $\begin{cases} x+3y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2y^2+xy=-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=1-3y$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$2y^2+(1-3y)y=-2$, $y^2-y-2=0$

$(y+1)(y-2)=0$ $\therefore y=-1$ 또는 $y=2$

$y=-1$을 ㉢에 대입하면 $x=4$

$y=2$를 ㉢에 대입하면 $x=-5$

이때 $\alpha=4$, $\beta=-1$ 또는 $\alpha=-5$, $\beta=2$이므로

$\alpha-\beta=5$ 또는 $\alpha-\beta=-7$

따라서 $\alpha-\beta$의 값이 될 수 있는 것은 ④이다. 답 ④

0564 두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases} x-y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x^2-y^2=11 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

을 만족시킨다.

㉠에서 $y=x-1$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$3x^2-(x-1)^2=11$, $2x^2+2x-12=0$

$x^2+x-6=0$, $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

$x=-3$을 ㉢에 대입하면 $y=-4$

$x=2$를 ㉢에 대입하면 $y=1$ … ❶

(i) $x=-3$, $y=-4$를 $x^2+ay^2=41$, $4x+by=-24$에 각각 대입하면

$9+16a=41$, $-12-4b=-24$ $\therefore a=2$, $b=3$

(ii) $x=2$, $y=1$을 $x^2+ay^2=41$, $4x+by=-24$에 각각 대입하면

$4+a=41$, $8+b=-24$ $\therefore a=37$, $b=-32$

그런데 a, b는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=2$, $b=3$ … ❷

$\therefore ab=6$ … ❸

답 6

단계	채점 요소	비율
❶	연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ 3x^2-y^2=11 \end{cases}$의 해 구하기	50 %
❷	a, b의 값 구하기	40 %
❸	ab의 값 구하기	10 %

유형 107 두 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식

본책 114쪽

한 이차방정식에서 이차식을 인수분해하여 얻은 두 일차방정식을 한 문자에 대하여 정리한 후 다른 이차방정식에 각각 대입하여 푼다.

0565 $\begin{cases} 6x^2-xy-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x^2-2xy=44 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(3x+y)(2x-y)=0$

$\therefore y=-3x$ 또는 $y=2x$

(i) $y=-3x$를 ㉡에 대입하면

$5x^2+6x^2=44$, $x^2=4$ $\therefore x=\pm 2$

$y=-3x$이므로

$x=2$, $y=-6$ 또는 $x=-2$, $y=6$

(ii) $y=2x$를 ㉡에 대입하면

$5x^2-4x^2=44$, $x^2=44$ $\therefore x=\pm 2\sqrt{11}$

$y=2x$이므로

$x=2\sqrt{11}$, $y=4\sqrt{11}$ 또는 $x=-2\sqrt{11}$, $y=-4\sqrt{11}$

그런데 x, y는 정수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $x=2$, $y=-6$ 또는 $x=-2$, $y=6$

$\therefore xy=-12$ 답 -12

0566 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=12 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(x-2y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면 $y^2-y^2=12$이므로 조건을 만족시키는 x, y의 값은 없다.

(ii) $x=2y$를 ㉡에 대입하면

$4y^2-y^2=12$, $y^2=4$ $\therefore y=\pm 2$

$x=2y$이므로

$x=4$, $y=2$ 또는 $x=-4$, $y=-2$

(i), (ii)에서 $x=4$, $y=2$ 또는 $x=-4$, $y=-2$

이때 $\alpha_1<\alpha_2$이므로

$\alpha_1=-4$, $\beta_1=-2$, $\alpha_2=4$, $\beta_2=2$

$\therefore \beta_1-\beta_2=-4$ 답 ①

0567 $\begin{cases} 2x^2+y^2-3x+y=7 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2-x+y=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면 $x^2-2x=3$, $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

(i) $x=-1$을 ㉡에 대입하면

$1+y^2+1+y=4$, $y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$ $\therefore y=-2$ 또는 $y=1$

(ii) $x=3$을 ㉡에 대입하면

$9+y^2-3+y=4$, $y^2+y+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times 1\times 2=-7<0$

이므로 실수인 해가 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $\alpha=-1$, $\beta=-2$ 또는 $\alpha=-1$, $\beta=1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=5$ 또는 $\alpha^2+\beta^2=2$

따라서 $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값은 2이다. 답 2

유형 108 x, y에 대한 대칭식인 연립이차방정식

본책 115쪽

$x+y=u$, $xy=v$일 때, x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-ut+v=0$의 두 근임을 이용하여 x, y의 값을 구한다.

0568 $\begin{cases} x^2+y^2=65 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy=28 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x+y)^2-2xy=65$ $\cdots\cdots ㉢$

㉡을 ㉢에 대입하면

$(x+y)^2-56=65$, $(x+y)^2=121$

$\therefore x+y=\pm 11$

(i) $x+y=11$, $xy=28$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-11t+28=0$의 두 근이다.

$t^2-11t+28=0$에서 $(t-4)(t-7)=0$

$\therefore t=4$ 또는 $t=7$

$\therefore x=4$, $y=7$ 또는 $x=7$, $y=4$

(ii) $x+y=-11$, $xy=28$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+11t+28=0$의 두 근이다.

$t^2+11t+28=0$에서 $(t+7)(t+4)=0$

$\therefore t=-7$ 또는 $t=-4$

$\therefore x=-7$, $y=-4$ 또는 $x=-4$, $y=-7$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=4 \\ y=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=7 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-7 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-7 \end{cases}$

$\therefore 2x+y=15$ 또는 $2x+y=18$ 또는

$2x+y=-18$ 또는 $2x+y=-15$

따라서 $M=18$, $m=-18$이므로 $M-m=36$ 답 ③

0569 $\begin{cases} x+y+xy=14 \\ x^2y+xy^2=48 \end{cases}$에서 $\begin{cases} x+y+xy=14 \\ xy(x+y)=48 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u+v=14 & \cdots\cdots ㉠ \\ uv=48 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $v=14-u$ $\cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$u(14-u)=48$, $u^2-14u+48=0$

$(u-6)(u-8)=0$ $\therefore u=6$ 또는 $u=8$

이것을 ㉢에 대입하면

$u=6$, $v=8$ 또는 $u=8$, $v=6$

(i) $u=6$, $v=8$, 즉 $x+y=6$, $xy=8$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-6t+8=0$의 두 근이다.

$t^2-6t+8=0$에서 $(t-2)(t-4)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=4$

$\therefore x=2$, $y=4$ 또는 $x=4$, $y=2$

(ii) $u=8$, $v=6$, 즉 $x+y=8$, $xy=6$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-8t+6=0$의 두 근이다.

$t^2-8t+6=0$에서 $t=4\pm\sqrt{10}$

$\therefore x=4+\sqrt{10}$, $y=4-\sqrt{10}$ 또는 $x=4-\sqrt{10}$, $y=4+\sqrt{10}$

그런데 x, y는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)는

$(2, 4)$, $(4, 2)$ 답 $(2, 4)$, $(4, 2)$

0570 $\begin{cases} x+y-xy=1 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$에서 $\begin{cases} x+y-xy=1 \\ (x+y)^2-xy=7 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u-v=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-v=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $v=u-1$ ····· ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$u^2-(u-1)=7$, $u^2-u-6=0$

$(u+2)(u-3)=0$ $\therefore u=-2$ 또는 $u=3$

이것을 ㉢에 대입하면

$u=-2$, $v=-3$ 또는 $u=3$, $v=2$

(i) $u=-2$, $v=-3$, 즉 $x+y=-2$, $xy=-3$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+2t-3=0$의 두 근이다.

$t^2+2t-3=0$에서 $(t+3)(t-1)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

$\therefore x=-3$, $y=1$ 또는 $x=1$, $y=-3$

(ii) $u=3$, $v=2$, 즉 $x+y=3$, $xy=2$일 때

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-3t+2=0$의 두 근이다.

$t^2-3t+2=0$에서 $(t-1)(t-2)=0$

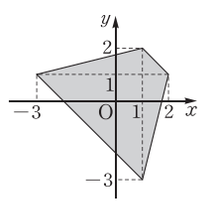
$\therefore t=1$ 또는 $t=2$

$\therefore x=1$, $y=2$ 또는 $x=2$, $y=1$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

따라서 네 점 $(-3, 1)$, $(1, -3)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$을 꼭짓점으로 하는 사각형은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는



$\frac{1}{2}\times5\times4+\frac{1}{2}\times5\times1=\frac{25}{2}$

답 ②

유형 109 연립이차방정식의 해의 조건 본책 115쪽

일차방정식을 이차방정식에 대입한 후 이차방정식의 판별식을 이용한다.

0571 $\begin{cases} x-y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy-y^2=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-2$

이것을 ㉡에 대입하면 $x^2-x(x-2)-(x-2)^2=k$

$\therefore x^2-6x+4+k=0$ ····· ㉢

주어진 연립방정식이 실근을 가지려면 이차방정식 ㉢이 실근을 가져야 하므로 ㉢의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(4+k)\geq0$

$5-k\geq0$ $\therefore k\leq5$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$1+2+3+4+5=15$ 답 ④

0572 $\begin{cases} x+y=k & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+x-y^2=3-2k^2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+k$

이것을 ㉡에 대입하면 $2x^2+x-(-x+k)^2=3-2k^2$

$\therefore x^2+(2k+1)x+k^2-3=0$ ····· ㉢

주어진 연립방정식의 실근이 존재하지 않으려면 이차방정식 ㉢이 허근을 가져야 하므로 ㉢의 판별식을 D라 하면

$D=(2k+1)^2-4(k^2-3)<0$

$4k+13<0$ $\therefore k<-\frac{13}{4}$

따라서 정수 k의 최댓값은 -4이다. 답 -4

0573 $\begin{cases} 2x+y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-ky=-6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=1-2x$

이것을 ㉡에 대입하면 $x^2-k(1-2x)=-6$

$\therefore x^2+2kx-k+6=0$ ····· ㉢

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 이차방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 ㉢의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(-k+6)=0$

$k^2+k-6=0$, $(k+3)(k-2)=0$

$\therefore k=2$ ($\because k>0$) … ❶

$k=2$를 ㉢에 대입하면

$x^2+4x+4=0$, $(x+2)^2=0$ $\therefore x=-2$

$x=-2$를 ㉠에 대입하면

$-4+y=1$ $\therefore y=5$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=5$이므로 … ❷

$\alpha+3\beta=13$ … ❸

답 13

단계	채점 요소	비율
❶	k의 값 구하기	60 %
❷	α, β의 값 구하기	30 %
❸	$\alpha+3\beta$의 값 구하기	10 %

유형 110 공통인 근을 갖는 방정식 본책 116쪽

주어진 두 이차방정식의 공통인 근을 α라 하고 두 이차방정식에 각각 $x=\alpha$를 대입한 후 두 식을 연립한다.

0574 두 이차방정식의 공통인 근을 α라 하면

$\begin{cases} \alpha^2+2m\alpha+3=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2+(m-1)\alpha+1-2m=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면 $(m+1)\alpha+2(1+m)=0$

$(m+1)(\alpha+2)=0$ $\therefore m=-1$ 또는 $\alpha=-2$

(i) $m=-1$일 때, 두 이차방정식은 모두 $x^2-2x+3=0$으로 일치하므로 서로 다른 두 이차방정식이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha=-2$일 때, 이것을 ㉠에 대입하면

$4-4m+3=0$ $\therefore m=\frac{7}{4}$

(i), (ii)에서 $m=\frac{7}{4}$ 답 ③

0575 두 이차방정식의 공통인 근을 α라 하면

$\begin{cases} \alpha^2+3\alpha+k-9=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2+k\alpha+k^2-3k-6=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡−㉠을 하면 $(k-3)\alpha+k^2-4k+3=0$

$(k-3)\alpha+(k-1)(k-3)=0$, $(k-3)(\alpha+k-1)=0$

$\therefore k=3$ 또는 $\alpha=1-k$

(i) $k=3$일 때, 두 이차방정식은 모두 $x^2+3x-6=0$으로 일치하므로 공통인 근은 2개이다.

(ii) $\alpha=1-k$일 때, 이것을 ㉠에 대입하면

$(1-k)^2+3(1-k)+k-9=0$

$k^2-4k-5=0$, $(k+1)(k-5)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=5$

(i), (ii)에서 $k=-1$ 또는 $k=5$이므로 구하는 곱은

$-1\times5=-5$ 답 -5

0576 두 이차방정식의 공통인 근을 α라 하면

$\begin{cases} \alpha^2-a\alpha+b=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2-b\alpha+a=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면 $(b-a)\alpha+b-a=0$

$(b-a)(\alpha+1)=0$ $\therefore a=b$ 또는 $\alpha=-1$

그런데 $a\neq b$이므로 $\alpha=-1$

$\alpha=-1$을 ㉠에 대입하면

$1+a+b=0$ $\therefore a+b=-1$

$x^2-ax+b=0$, $x^2-bx+a=0$의 -1이 아닌 근이 각각 p, q이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1\times p=b$, $-1\times q=a$

$\therefore b=-p$, $a=-q$

이때 $pq=-2$이므로 $ab=-2$

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=(-1)^3-3\times(-2)\times(-1)$

$=-7$ 답 -7

다른 풀이 $\alpha=-1$을 ㉠에 대입하면

$1+a+b=0$ $\therefore b=-a-1$ $\cdots\cdots ㉢$

㉢을 $x^2-ax+b=0$에 대입하면

$x^2-ax-a-1=0$, $(x+1)(x-1-a)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1+a$

㉢을 $x^2-bx+a=0$에 대입하면

$x^2+(a+1)x+a=0$, $(x+1)(x+a)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-a$

따라서 공통이 아닌 나머지 근은 $1+a$, $-a$이므로

$(1+a)\times(-a)=-2$, $a^2+a-2=0$

$(a+2)(a-1)=0$ $\therefore a=-2$ 또는 $a=1$

$a=-2$를 ㉢에 대입하면 $b=1$

$a=1$을 ㉢에 대입하면 $b=-2$

$\therefore a^3+b^3=-7$

유형 111 연립이차방정식의 활용 본책 116쪽

연립이차방정식의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 푼다.

(i) 구하려는 것을 미지수 x, y로 놓는다.

(ii) 주어진 조건을 이용하여 연립방정식을 세운다.

(iii) 방정식을 풀고 구한 해가 문제의 조건에 맞는지 확인한다.

0577 꽃밭의 가로의 길이를 x m, 세로의 길이를 y m ($x>y$)라 하면

$\begin{cases} 2(x+y)=30 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=(5\sqrt{5})^2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x+y=15$

$\therefore y=15-x$ $\cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2+(15-x)^2=125$

$2x^2-30x+100=0$, $x^2-15x+50=0$

$(x-5)(x-10)=0$ $\therefore x=5$ 또는 $x=10$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=5$, $y=10$ 또는 $x=10$, $y=5$

이때 $x>y$이므로 $x=10$, $y=5$

따라서 가로의 길이는 10 m이다. 답 10 m

0578 처음 두 자리 자연수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y ($x>y$)라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=53 & \cdots\cdots ㉠ \\ (10y+x)+(10x+y)=99 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ … ❶

㉡에서 $11x+11y=99$, $x+y=9$

$\therefore y=9-x$ $\cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면 $x^2+(9-x)^2=53$

$2x^2-18x+28=0$, $x^2-9x+14=0$

$(x-2)(x-7)=0$ $\therefore x=2$ 또는 $x=7$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=2$, $y=7$ 또는 $x=7$, $y=2$

이때 $x>y$이므로 $x=7$, $y=2$ … ❷

따라서 처음 수는 72이다. … ❸

답 72

단계	채점 요소	비율
❶	연립이차방정식 세우기	40 %
❷	연립이차방정식 풀기	50 %
❸	처음 수 구하기	10 %

0579 $\overline{AB}=a$, $\overline{EF}=b$이므로 $\overline{AB}+\overline{EF}=\overline{AF}+\overline{EB}$에서

$a+b=5+2=7$ …… ㉠

직사각형 EBCI의 넓이가 정사각형 EFGH의 넓이의 $\frac{1}{4}$이므로

$2a=\frac{1}{4}b^2$ …… ㉡

㉠에서 $a=7-b$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$2(7-b)=\frac{1}{4}b^2$, $b^2+8b-56=0$

$\therefore b=-4\pm6\sqrt{2}$

이것을 ㉢에 대입하면

$a=11+6\sqrt{2}$, $b=-4-6\sqrt{2}$

또는 $a=11-6\sqrt{2}$, $b=-4+6\sqrt{2}$

이때 $2<a<b<5$이므로

$a=11-6\sqrt{2}$, $b=-4+6\sqrt{2}$ 답 ③

유형 112 정수 조건의 부정방정식 본책 117쪽

(일차식)×(일차식)=(정수)의 꼴로 변형하여 곱해서 정수가 되는 두 일차식의 값을 구한다.

0580 $xy-3x-5y+11=0$에서

$x(y-3)-5(y-3)-4=0$

$\therefore (x-5)(y-3)=4$

이때 x, y는 자연수이므로 $x-5$, $y-3$은 정수이고 $x-5\geq-4$, $y-3\geq-2$이다.

따라서 $x-5$, $y-3$의 값은 다음 표와 같다.

$x-5$	-4	-2	1	2	4
$y-3$	-1	-2	4	2	1

(i) $x-5=-4$, $y-3=-1$일 때, $x=1$, $y=2$

(ii) $x-5=-2$, $y-3=-2$일 때, $x=3$, $y=1$

(iii) $x-5=1$, $y-3=4$일 때, $x=6$, $y=7$

(iv) $x-5=2$, $y-3=2$일 때, $x=7$, $y=5$

(v) $x-5=4$, $y-3=1$일 때, $x=9$, $y=4$

이상에서 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(1, 2)$, $(3, 1)$, $(6, 7)$, $(7, 5)$, $(9, 4)$

의 5개이다. 답 ⑤

0581 $xy-x+2y-7=0$에서

$x(y-1)+2(y-1)-5=0$

$\therefore (x+2)(y-1)=5$ … ❶

이때 x, y는 정수이므로 $x+2$, $y-1$도 정수이다.

따라서 $x+2$, $y-1$의 값은 다음 표와 같다.

$x+2$	-5	-1	1	5
$y-1$	-1	-5	5	1

(i) $x+2=-5$, $y-1=-1$일 때, $x=-7$, $y=0$

$\therefore xy=0$

(ii) $x+2=-1$, $y-1=-5$일 때, $x=-3$, $y=-4$

$\therefore xy=12$

(iii) $x+2=1$, $y-1=5$일 때, $x=-1$, $y=6$

$\therefore xy=-6$

(iv) $x+2=5$, $y-1=1$일 때, $x=3$, $y=2$

$\therefore xy=6$

이상에서 xy의 최솟값은 -6이다. … ❷

답 -6

단계	채점 요소	비율
❶	주어진 방정식을 (일차식)×(일차식)=(정수)의 꼴로 변형하기	30 %
❷	xy의 최솟값 구하기	70 %

0582 이차방정식 $x^2-(k-5)x+k-3=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\begin{cases}\alpha+\beta=k-5 & \cdots\cdots ㉠\\ \alpha\beta=k-3 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉡−㉠을 하면 $\alpha\beta-\alpha-\beta=2$

$\alpha(\beta-1)-(\beta-1)-1=2$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=3$

이때 α, β는 정수이므로 $\alpha-1$, $\beta-1$도 정수이다.

따라서 $\alpha-1$, $\beta-1$의 값은 다음 표와 같다.

$\alpha-1$	-3	-1	1	3
$\beta-1$	-1	-3	3	1

(i) $\alpha-1=-3$, $\beta-1=-1$일 때, $\alpha=-2$, $\beta=0$

(ii) $\alpha-1=-1$, $\beta-1=-3$일 때, $\alpha=0$, $\beta=-2$

(iii) $\alpha-1=1$, $\beta-1=3$일 때, $\alpha=2$, $\beta=4$

(iv) $\alpha-1=3$, $\beta-1=1$일 때, $\alpha=4$, $\beta=2$

(i), (ii)에서 $\alpha+\beta=-2$이므로 ㉠에 대입하면

$-2=k-5$ $\therefore k=3$

(iii), (iv)에서 $\alpha+\beta=6$이므로 ㉠에 대입하면

$6=k-5$ $\therefore k=11$

따라서 모든 k의 값의 곱은

$3\times11=33$ 답 ⑤

유형 113 실수 조건의 부정방정식 본책 117쪽

(1) $A^2+B^2=0$의 꼴로 변형한 후 실수 A, B에 대하여 $A=0$, $B=0$임을 이용한다.

(2) 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 판별식 D가 $D\geq0$임을 이용한다.

0583 $9x^2-12xy+5y^2+12y+36=0$에서

$(9x^2-12xy+4y^2)+(y^2+12y+36)=0$

$(3x-2y)^2+(y+6)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로

$3x-2y=0$, $y+6=0$ $\therefore x=-4$, $y=-6$

$\therefore x+y=-10$ 답 -10

0584 $5x^2+4xy+2y^2+2x-4y+5=0$에서

$(4x^2+4xy+y^2)+(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)=0$

$(2x+y)^2+(x+1)^2+(y-2)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로

$2x+y=0$, $x+1=0$, $y-2=0$

$\therefore x=-1$, $y=2$ $\quad\therefore y-x=3$

답 ④

0585 $x^2-2xy+2y^2+2x+4y+10=0$에서

$x^2-2(y-1)x+2y^2+4y+10=0$ …… ㉠

x가 실수이므로 x에 대한 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 한다.

㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(y-1)\}^2-(2y^2+4y+10)\geq 0$

$-y^2-6y-9\geq 0$, $\quad y^2+6y+9\leq 0$

$\therefore (y+3)^2\leq 0$

이때 y도 실수이므로 $\quad y+3=0 \quad\therefore y=-3$

$y=-3$을 ㉠에 대입하면 $\quad x^2+8x+16=0$

$(x+4)^2=0 \quad\therefore x=-4$

$\therefore xy=12$

답 12

1등급 유형 도전하기

→ 본책 118~119쪽

0586 Step 1 방정식이 서로 다른 두 허근을 갖기 위한 조건을 찾는다.

좌변을 인수분해하면

$ax^3+2bx^2+4bx+8a$

$=a(x^3+8)+2bx(x+2)$

$=a(x+2)(x^2-2x+4)+2bx(x+2)$

$=(x+\boxed{\text{(가) } 2})\{ax^2-2(a-b)x+4a\}$

이므로 두 허근 α, β는 이차방정식

$ax^2-2(a-b)x+4a=0$

의 근이다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a-b)\}^2-a\times 4a$

$=(a-b)^2-4a^2<0$ …… ㉠

이어야 한다.

Step 2 $\alpha=p+qi$ (p, q는 실수)라 하고 p, q가 정수임을 이용하여 가능한 p의 값을 구한다.

한편 $\alpha=p+qi$ (p, q는 실수)라 하면 $\beta=p-qi$이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=p$, $\frac{\alpha-\beta}{2i}=q$

즉 p, q는 모두 정수이다.

α, β는 이차방정식 $ax^2-2(a-b)x+4a=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=p^2+q^2=\boxed{\text{(나) } 4}$

p, q는 모두 정수이므로

$p=-2$ 또는 $p=0$ 또는 $p=2$

Step 3 조건을 만족시키는 p의 값을 찾고 a, b 사이의 관계식을 구한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{2(a-b)}{a}=2-\frac{2b}{a}$

$\therefore p=\frac{\alpha+\beta}{2}=1-\frac{b}{a}$

(i) $p=-2$일 때, $\quad\frac{b}{a}=3 \quad\therefore b=3a$

㉠에서 $\frac{D}{4}=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $p=0$일 때, $\quad\frac{b}{a}=1 \quad\therefore b=a$

㉠에서 $\frac{D}{4}=-4a^2<0$이므로 조건을 만족시킨다.

(iii) $p=2$일 때, $\quad\frac{b}{a}=-1 \quad\therefore b=-a$

㉠에서 $\frac{D}{4}=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 $p=0$이고 이때 $b=\boxed{\text{(다) } a}$이다.

Step 4 $f(m+n)$의 값을 구한다.

$m=2$, $n=4$, $f(a)=a$이므로

$f(m+n)=f(6)=6$

답 6

논리 Check

x에 대한 삼차방정식

$ax^3+(a+2b)x^2+2(a-b)x-4a=0$

의 서로 다른 두 허근 α, β에 대하여 $\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\frac{\alpha-\beta}{2i}$가 모두 정수일 때, 두 실수 a, b 사이의 관계식을 구하시오.

풀이 좌변을 인수분해하면

$ax^3+(a+2b)x^2+2(a-b)x-4a$

$=(x-1)\{ax^2+2(a+b)x+4a\}$

이므로 두 허근 α, β는 이차방정식

$ax^2+2(a+b)x+4a=0$

의 근이다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+b)^2-4a^2<0$ …… ㉠

이어야 한다.

한편 $\alpha=p+qi$ (p, q는 실수)라 하면 $\beta=p-qi$이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=p$, $\frac{\alpha-\beta}{2i}=q$

즉 p, q는 모두 정수이다.

α, β는 이차방정식 $ax^2+2(a+b)x+4a=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=p^2+q^2=4$

p, q는 모두 정수이므로

$p=-2$ 또는 $p=0$ 또는 $p=2$

또 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{2(a+b)}{a}=-2-\frac{2b}{a}$

$\therefore p=\frac{\alpha+\beta}{2}=-1-\frac{b}{a}$

(i) $p=-2$일 때, $\frac{b}{a}=1$ $\therefore b=a$

㉠에서 $\frac{D}{4}=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $p=0$일 때, $\frac{b}{a}=-1$ $\therefore b=-a$

㉠에서 $\frac{D}{4}=-4a^2<0$이므로 조건을 만족시킨다.

(iii) $p=2$일 때, $\frac{b}{a}=-3$ $\therefore b=-3a$

㉠에서 $\frac{D}{4}=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 $p=0$이고 이때 $b=-a$이다. 답 $b=-a$

0587 Step 1 인수분해를 이용하여 사차방정식의 해를 n에 대한 식으로 나타낸다.

$x^4-x^2-n^2+n=0$에서

$x^4-n^2-x^2+n=0$

$(x^2+n)(x^2-n)-(x^2-n)=0$

$(x^2-n)(x^2+n-1)=0$

$x^2=n$ 또는 $x^2=-n+1$

$\therefore x=\pm\sqrt{n}$ 또는 $x=\pm\sqrt{n-1}i$

Step 2 서로 다른 두 정수인 근과 서로 다른 두 허근을 갖도록 하는 n의 값을 구한다.

서로 다른 두 정수인 근을 가지려면 n은 $n=k^2$ (k는 자연수)의 꼴이어야 한다.

이때 n은 20 이하의 자연수이므로

$n=1^2, 2^2, 3^2, 4^2$, 즉 $n=1, 4, 9, 16$

그런데 $n=1$이면 허근이 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 가능한 n의 값은 4, 9, 16이다.

Step 3 모든 자연수 n의 값의 합을 구한다.

모든 자연수 n의 값의 합은

$4+9+16=29$ 답 29

0588 Step 1 $f(x)=0$의 세 근을 α, β, γ라 하고 $f(2x-1)=0$의 세 근을 구한다.

삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

로 놓을 수 있다.

이때

$f(2x-1)=(2x-1-\alpha)(2x-1-\beta)(2x-1-\gamma)$

이므로 $f(2x-1)=0$의 세 근은

$\frac{1+\alpha}{2}$, $\frac{1+\beta}{2}$, $\frac{1+\gamma}{2}$

이다.

Step 2 $f(2x-1)=0$의 세 근의 곱이 -1임을 이용하여 a의 값을 구한다.

$f(2x-1)=0$의 세 근의 곱이 -1이므로

$\frac{1+\alpha}{2}\times\frac{1+\beta}{2}\times\frac{1+\gamma}{2}=-1$

$\therefore (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)=-8$

따라서

$f(-1)=(-1-\alpha)(-1-\beta)(-1-\gamma)$

$=-(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)=8$

이므로 $-1+a-1-2a+3=8$ $\therefore a=-7$

Step 3 $f(2x-1)=0$의 세 근의 합을 구한다.

$f(x)=x^3-7x^2+x+17$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta+\gamma=7$

따라서 $f(2x-1)=0$의 세 근의 합은

$\frac{1+\alpha}{2}+\frac{1+\beta}{2}+\frac{1+\gamma}{2}=\frac{3+(\alpha+\beta+\gamma)}{2}$

$=\frac{3+7}{2}=5$ 답 5

0589 Step 1 조건 (가), (나)를 만족시키는 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$의 차수를 구한다.

조건 (가)에서 사차방정식 $f(x)g(x)=0$이 실근을 갖지 않으므로 두 방정식 $f(x)=0$과 $g(x)=0$도 실근을 갖지 않아야 한다.

이때 계수와 상수항이 모두 실수인 일차방정식과 삼차방정식은 적어도 하나의 실근을 가지므로 $f(x)$와 $g(x)$는 둘 다 이차식이거나 둘 중 하나가 사차식이어야 한다.

조건 (나)에서 $g(x)$는 이차 이상의 다항식이고 $g(x)$가 사차식이면 $f(x)$는 상수항으로만 이루어진 다항식이므로 $f(x)$를 $g(x)$로 나누었을 때의 나머지가 일차식이 아니다.

따라서 $f(x)$와 $g(x)$는 모두 이차식이다.

Step 2 조건 (다)를 만족시키는 a, b의 값을 구한다.

이차식 $f(x)$와 $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(x)$를 x^2으로 나누었을 때의 나머지가 $ax+b$이므로

$f(x)=x^2+ax+b$

라 하면 조건 (나)에서 $f(x)=g(x)+5x-4$이므로

$g(x)=f(x)-5x+4=x^2+ax+b-5x+4$

$=x^2+(a-5)x+b+4$

조건 (다)에서 $f(0)g(0)=12$이므로

$b(b+4)=12$, $b^2+4b-12=0$

$(b+6)(b-2)=0$ $\therefore b=-6$ 또는 $b=2$

또 $f(1)g(1)=12$이므로

$(1+a+b)(a+b)=12$ …… ㉠

$b=-6$이면 ㉠에서

$(a-5)(a-6)=12$, $a^2-11a+18=0$

$(a-2)(a-9)=0$ $\therefore a=2$ 또는 $a=9$

$b=2$이면 ㉠에서

$(a+3)(a+2)=12$, $a^2+5a-6=0$

$(a+6)(a-1)=0$ $\therefore a=-6$ 또는 $a=1$

Step 3 ab의 값을 구한다.

(i) $a=2$, $b=-6$일 때

$f(x)=x^2+2x-6$, $g(x)=x^2-3x-2$이고 두 이차방정식 $f(x)=0$과 $g(x)=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$\frac{D_1}{4}=1^2-1\times(-6)=7>0$,

$D_2=(-3)^2-4\times1\times(-2)=17>0$

따라서 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(ii) $a=9$, $b=-6$일 때

$f(x)=x^2+9x-6$, $g(x)=x^2+4x-2$이고 두 이차방정식 $f(x)=0$과 $g(x)=0$의 판별식을 각각 D_3, D_4라 하면

$D_3=9^2-4\times1\times(-6)=105>0$,

$\frac{D_4}{4}=2^2-1\times(-2)=6>0$

따라서 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(iii) $a=-6$, $b=2$일 때

$f(x)=x^2-6x+2$, $g(x)=x^2-11x+6$이고 두 이차방정식 $f(x)=0$과 $g(x)=0$의 판별식을 각각 D_5, D_6이라 하면

$\frac{D_5}{4}=(-3)^2-1\times2=7>0$,

$D_6=(-11)^2-4\times1\times6=97>0$

따라서 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(iv) $a=1$, $b=2$일 때

$f(x)=x^2+x+2$, $g(x)=x^2-4x+6$이고 두 이차방정식 $f(x)=0$과 $g(x)=0$의 판별식을 각각 D_7, D_8이라 하면

$D_7=1^2-4\times1\times2=-7<0$,

$\frac{D_8}{4}=(-2)^2-1\times6=-2<0$

따라서 조건 (가)를 만족시킨다.

이상에서 $a=1$, $b=2$ $\therefore ab=2$ 답 2

0590 Step 1 ω가 방정식 $x^3=1$의 한 허근임을 이용하여 $\omega^{100n}+(\omega+1)^{100n}$을 간단히 한다.

$x^3=1$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

이때 ω는 $x^3=1$, $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$\therefore \omega^{100n}+(\omega+1)^{100n}=\omega^{100n}+(-\omega^2)^{100n}$

$=(\omega^{100})^n+(\omega^{200})^n$

$=\{(\omega^3)^{33}\times\omega\}^n+\{(\omega^3)^{66}\times\omega^2\}^n$

$=\omega^n+\omega^{2n}$

Step 2 n의 값에 따라 경우를 나누어 $\omega^n+\omega^{2n}$의 값을 구한다.

(i) $n=3k$ ($k=1, 2, 3, \cdots, 33$)일 때

$\omega^n+\omega^{2n}=\omega^{3k}+\omega^{6k}=1+1=2$

(ii) $n=3k+1$ ($k=0, 1, 2, \cdots, 33$)일 때

$\omega^n+\omega^{2n}=\omega^{3k+1}+\omega^{6k+2}=\omega+\omega^2=-1$

(iii) $n=3k+2$ ($k=0, 1, 2, \cdots, 32$)일 때

$\omega^n+\omega^{2n}=\omega^{3k+2}+\omega^{6k+4}=\omega^2+\omega=-1$

Step 3 100 이하의 자연수 n의 개수를 구한다.

이상에서 $\omega^{100n}+(\omega+1)^{100n}=-1$을 만족시키는 자연수 n의 개수는

$34+33=67$ 답 67

0591 Step 1 $x\geq y$일 때, 주어진 연립방정식을 푼다.

(i) $x\geq y$일 때, $\max(x, y)=x$, $\min(x, y)=y$이므로 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} x-y=2y+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy=x+8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=3y+1$ $\cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면 $(3y+1)^2-(3y+1)y=(3y+1)+8$

$3y^2+y-4=0$, $(3y+4)(y-1)=0$

$\therefore y=-\frac{4}{3}$ 또는 $y=1$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=-3$, $y=-\frac{4}{3}$ 또는 $x=4$, $y=1$

그런데 $x\geq y$이므로 $x=4$, $y=1$

Step 2 $x<y$일 때, 주어진 연립방정식을 푼다.

(ii) $x<y$일 때, $\max(x, y)=y$, $\min(x, y)=x$이므로 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} x-y=2x+1 & \cdots\cdots ㉣ \\ x^2-xy=y+8 & \cdots\cdots ㉤ \end{cases}$

㉣에서 $y=-x-1$ $\cdots\cdots ㉥$

㉥을 ㉤에 대입하면 $x^2-x(-x-1)=(-x-1)+8$

$2x^2+2x-7=0$ $\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{15}}{2}$

이것을 ㉥에 대입하면

$x=\frac{-1+\sqrt{15}}{2}$, $y=\frac{-1-\sqrt{15}}{2}$ 또는

$x=\frac{-1-\sqrt{15}}{2}$, $y=\frac{-1+\sqrt{15}}{2}$

그런데 $x<y$이므로 $x=\frac{-1-\sqrt{15}}{2}$, $y=\frac{-1+\sqrt{15}}{2}$

Step 3 $\alpha_1\beta_1-2\alpha_2\beta_2$의 값을 구한다.

(i), (ii)에서 순서쌍 (x, y)는

$(4, 1)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{15}}{2}, \frac{-1+\sqrt{15}}{2}\right)$

이때 $\alpha_1>\alpha_2$이므로

$\alpha_1=4$, $\beta_1=1$, $\alpha_2=\frac{-1-\sqrt{15}}{2}$, $\beta_2=\frac{-1+\sqrt{15}}{2}$

$\therefore \alpha_1\beta_1-2\alpha_2\beta_2=4\times1-2\times\frac{-1-\sqrt{15}}{2}\times\frac{-1+\sqrt{15}}{2}$

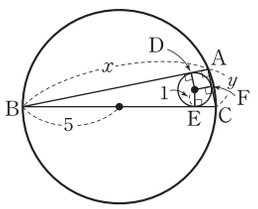
$=4-2\times\left(-\frac{7}{2}\right)=11$ 답 11

0592 Step 1 외접원의 성질을 이용하여 빗변이 아닌 두 변의 길이 사이의 관계식을 구한다.

직각삼각형의 외접원의 중심은 빗변의 중점이므로 직각삼각형의 빗변의 길이는 외접원의 지름의 길이와 같다.

즉 오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=x$, $\overline{AC}=y$라 하면 $\overline{BC}=10$이므로

$x^2+y^2=100$ $\cdots\cdots ㉦$



Step 2 내접원의 성질을 이용하여 빗변이 아닌 두 변의 길이 사이의 관계식을 구한다.

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$와 내접원의 접점을 각각 D, E, F라 하면 내접원의 반지름의 길이가 1이므로

$\overline{BE}=\overline{BD}=x-1$, $\overline{CE}=\overline{CF}=y-1$

이때 $\overline{BE}+\overline{CE}=10$이므로 $(x-1)+(y-1)=10$

$\therefore x+y=12$ $\cdots\cdots ㉧$

Step 3 연립방정식의 해를 구한다.

㉡에서 $y=12-x$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $x^2+(12-x)^2=100$

$x^2-12x+22=0$ $\therefore x=6\pm\sqrt{14}$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=6+\sqrt{14}$, $y=6-\sqrt{14}$ 또는 $x=6-\sqrt{14}$, $y=6+\sqrt{14}$

Step 4 가장 짧은 변의 길이를 구한다.

가장 짧은 변의 길이는 $6-\sqrt{14}$ 답 $6-\sqrt{14}$

시험 만점 완성하기

본책 120~123쪽

0593 전략 인수정리를 이용하여 주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해한다.

$f(x)=x^3-2x^2-11x+12$라 하면

$f(1)=1-2-11+12=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	−2	−11	12
		1	−1	−12
	1	−1	−12	0

$f(x)=(x-1)(x^2-x-12)$

$=(x-1)(x+3)(x-4)$

즉 주어진 방정식은 $(x-1)(x+3)(x-4)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$ 또는 $x=4$

따라서 가장 큰 근은 4, 가장 작은 근은 -3이므로 구하는 합은

$4+(-3)=1$ 답 ④

0594 전략 공통부분이 생기도록 두 개씩 짝을 지어 전개한 후 공통부분을 치환한다.

$x(x+1)(x+2)(x+3)-15=0$에서

$\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}-15=0$

$\therefore (x^2+3x)(x^2+3x+2)-15=0$

$x^2+3x=t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t(t+2)-15=0$, $t^2+2t-15=0$

$(t+5)(t-3)=0$ $\therefore t=-5$ 또는 $t=3$

(i) $t=-5$일 때, $x^2+3x=-5$이므로

$x^2+3x+5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=3^2-4\times1\times5=-11<0$

즉 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $t=3$일 때, $x^2+3x=3$이므로

$x^2+3x-3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=3^2-4\times1\times(-3)=21>0$

즉 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 실근은 이차방정식 $x^2+3x-3=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 곱은 -3이다. 답 ②

0595 전략 주어진 방정식의 좌변을 A^2-B^2의 꼴로 변형한다.

$x^4-9x^2+16=0$에서 $(x^4-8x^2+16)-x^2=0$

$(x^2-4)^2-x^2=0$, $(x^2+x-4)(x^2-x-4)=0$

$\therefore x^2+x-4=0$ 또는 $x^2-x-4=0$

방정식 $x^2+x-4=0$의 두 근을 α, β, 방정식 $x^2-x-4=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-4$, $\gamma+\delta=1$, $\gamma\delta=-4$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}$

$=\frac{-1}{-4}+\frac{1}{-4}$

$=0$ 답 ③

0596 전략 삼차방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우를 나누어 생각한다.

$f(x)=x^3-9x^2+(a+8)x-a$라 하면

$f(1)=1-9+(a+8)-a=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	−9	$a+8$	$-a$
		1	−8	a
	1	−8	a	0

$f(x)=(x-1)(x^2-8x+a)$

이때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근이 2개이려면

(i) 방정식 $x^2-8x+a=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우

$1-8+a=0$ $\therefore a=7$

(ii) 방정식 $x^2-8x+a=0$이 1이 아닌 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-a=0$ $\therefore a=16$

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$7+16=23$ 답 ⑤

0597 전략 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

$\alpha+3=\alpha'$, $\beta-4=\beta'$, $\gamma-1=\gamma'$이라 하면 삼차방정식 $x^3+5x^2-2x-1=0$의 세 근이 α', β', γ'이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha'+\beta'+\gamma'=-5$, $\alpha'\beta'+\beta'\gamma'+\gamma'\alpha'=-2$, $\alpha'\beta'\gamma'=1$

$\therefore (\alpha+5)(\beta-2)(\gamma+1)$

$=(\alpha'+2)(\beta'+2)(\gamma'+2)$

$=\alpha'\beta'\gamma'+2(\alpha'\beta'+\beta'\gamma'+\gamma'\alpha')$

$+4(\alpha'+\beta'+\gamma')+8$

$=1+2\times(-2)+4\times(-5)+8$

$=-15$ 답 ③

0598 전략 $P(-1)=P(2)=P(4)=k$ (k는 상수)라 하고 삼차방정식 $P(x)-k=0$의 세 근이 -1, 2, 4임을 이용한다.

$P(-1)=P(2)=P(4)=k$ (k는 상수)라 하면

$P(-1)-k=P(2)-k=P(4)-k=0$

이므로 삼차방정식 $P(x)-k=0$의 세 근이 -1, 2, 4이다.

이때 -1, 2, 4를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$(x+1)(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x^3-5x^2+2x+8=0$

따라서 $P(x)-k=x^3-5x^2+2x+8$이므로

$P(x)=x^3-5x^2+2x+8+k$

$P(x)=0$의 한 근이 3이므로

$27-45+6+8+k=0$ $\therefore k=4$

즉 $P(x)=x^3-5x^2+2x+12$이므로 $P(x)=0$에서

$x^3-5x^2+2x+12=0$, $(x-3)(x^2-2x-4)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=1\pm\sqrt{5}$

따라서 나머지 두 근의 차는

$1+\sqrt{5}-(1-\sqrt{5})=2\sqrt{5}$ 답 ③

0599 전략 삼차방정식의 켤레근의 성질을 이용한다.

$\alpha=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면

$\alpha^2=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$

이때 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $a+bi$가 근이면 $a-bi$도 근이다.

따라서 $\alpha^2=a-bi$이므로

$(a^2-b^2)+2abi=a-bi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a^2-b^2=a$, $2ab=-b$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$ ($\because b\neq0$), $b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

즉 두 근은 $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$이므로 나머지 한 실근을 k라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+k=7$

$-1+k=7$ $\therefore k=8$

따라서

$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+8\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$+8\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=p$,

$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\times8=-q$

이므로 $p=-7$, $q=-8$

$\therefore p-2q=9$ 답 ⑤

0600 전략 ω가 $x^3=-1$의 한 근임을 이용하여 $\omega^n=\omega^{2n+1}$을 만족시키기 위한 자연수 n의 조건을 찾는다.

$x^2-x+1=0$의 양변에 $x+1$을 곱하면

$(x+1)(x^2-x+1)=0$, $x^3+1=0$ $\therefore x^3=-1$

이때 ω는 $x^3=-1$의 한 근이므로 $\omega^3=-1$

한편 $\omega^n=\omega^{2n+1}$에서 $\omega^n=\omega^n\times\omega^{n+1}$이므로

$\omega^{n+1}=1$

$\omega^3=-1$에서 $\omega^6=1$이므로 $n+1$은 6의 배수이어야 한다.

따라서 50 이하의 자연수 n은

5, 11, 17, …, 47

의 8개이다. 답 ④

0601 전략 일차방정식을 y에 대하여 정리한 후 이차방정식에 대입하여 푼다.

$\begin{cases}2x-y=1 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2-2y^2=-1 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $y=2x-1$ ····· ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2-2(2x-1)^2=-1$, $7x^2-8x+1=0$

$(7x-1)(x-1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{7}$ 또는 $x=1$

$x=\frac{1}{7}$을 ㉢에 대입하면 $y=-\frac{5}{7}$

$x=1$을 ㉢에 대입하면 $y=1$

그런데 $\alpha\neq\beta$이므로

$\alpha=\frac{1}{7}$, $\beta=-\frac{5}{7}$

$\therefore 7(\alpha-\beta)=6$ 답 ②

0602 전략 일차방정식을 이차방정식에 대입한 후 (판별식)$=0$임을 이용한다.

$\begin{cases}x-3y=2k & \cdots\cdots ㉠\\ x^2-xy+y^2=6 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $x=3y+2k$

이것을 ㉡에 대입하면

$(3y+2k)^2-(3y+2k)y+y^2=6$

$\therefore 7y^2+10ky+4k^2-6=0$ ····· ㉢

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 이차방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 ㉢의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(5k)^2-7(4k^2-6)=0$

$-3k^2+42=0$, $k^2=14$

$\therefore k=\sqrt{14}$ ($\because k>0$) 답 ③

0603 전략 $\overline{PQ}=x$, $\overline{PR}=y$ ($x>y$)라 하고 x, y에 대한 연립이차방정식을 세운다.

$\overline{PQ}=x$, $\overline{PR}=y$ ($x>y$)라 하면

$\begin{cases}2(x+y)=16 & \cdots ㉠\\ (10-x)^2+(10-y)^2=10^2 & \cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $x+y=8$

$\therefore y=8-x$ ··· ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(10-x)^2+\{10-(8-x)\}^2=100$

$(10-x)^2+(2+x)^2=100$

$x^2-8x+2=0$ $\therefore x=4\pm\sqrt{14}$

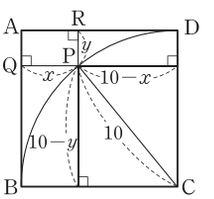
이것을 ㉢에 대입하면

$x=4+\sqrt{14}$, $y=4-\sqrt{14}$ 또는 $x=4-\sqrt{14}$, $y=4+\sqrt{14}$

이때 $x>y$이므로

$x=4+\sqrt{14}$, $y=4-\sqrt{14}$

따라서 $\overline{PQ}$의 길이는 $4+\sqrt{14}$이다. 답 ⑤



0604 전략 주어진 식의 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리한 후 (판별식)≥ 0임을 이용한다.

$x^2-2xy+y^2+2x-3=0$에서

$x^2-2(y-1)x+y^2-3=0$ …… ㉠

x가 자연수이므로 x에 대한 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 한다.

㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(y-1)\}^2-(y^2-3)\geq 0$

$-2y+4\geq 0$ $\therefore y\leq 2$

그런데 y는 자연수이므로 $y=1$ 또는 $y=2$

(i) $y=1$일 때, ㉠에서 $x^2-2=0$이므로

$x^2=2$ $\therefore x=\pm\sqrt{2}$

그런데 x가 자연수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $y=2$일 때, ㉠에서 $x^2-2x+1=0$이므로

$(x-1)^2=0$ $\therefore x=1$

(i), (ii)에서 $x=1$, $y=2$이므로

$4x-3y=-2$

답 ②

0605 전략 먼저 인수정리를 이용하여 주어진 사차방정식의 좌변을 인수분해한다.

$f(x)=x^4+2x^3+2x^2+7x+6$이라 하면

$f(-1)=1-2+2-7+6=0$,

$f(-2)=16-16+8-14+6=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	2	2	7	6
		-1	-1	-1	-6
-2	1	1	1	6	0
		-2	2	-6	
	1	-1	3	0	

$f(x)=(x+1)(x+2)(x^2-x+3)$

즉 주어진 방정식은

$(x+1)(x+2)(x^2-x+3)=0$

이때 방정식 $f(x)=0$의 허근 α는 이차방정식 $x^2-x+3=0$의 한 근이므로

$\alpha^2-\alpha+3=0$ $\therefore \alpha^2=\alpha-3$ …… ㉡

한편 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 3α이므로

$9\alpha^2+3a\alpha+b=0$

이 식에 ㉡을 대입하면 $9(\alpha-3)+3a\alpha+b=0$

$\therefore (3a+9)\alpha+b-27=0$

이때 a, b는 실수이고 α는 허수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3a+9=0$, $b-27=0$

$\therefore a=-3$, $b=27$ $\therefore a+b=24$

답 24

다른 풀이 $x^4+2x^3+2x^2+7x+6=0$에서

$(x+1)(x+2)(x^2-x+3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$

이때 $\alpha=\frac{1+\sqrt{11}i}{2}$라 하면 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $\frac{3+3\sqrt{11}i}{2}$이고 a, b가 실수이므로 다른 한 근은 $\frac{3-3\sqrt{11}i}{2}$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{3+3\sqrt{11}i}{2}+\frac{3-3\sqrt{11}i}{2}=-a$,

$\frac{3+3\sqrt{11}i}{2}\times\frac{3-3\sqrt{11}i}{2}=b$

$\therefore a=-3$, $b=27$ $\therefore a+b=24$

0606 전략 주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해한 후 삼차방정식의 근이 될 수 있는 정수를 구한다.

$f(x)=ax^3+3bx^2+9bx+27a$라 하면

$f(-3)=-27a+27b-27b+27a=0$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-3	a	$3b$	$9b$	$27a$
		$-3a$	$9a-9b$	$-27a$
	a	$3b-3a$	$9a$	0

$f(x)=(x+3)\{ax^2+(3b-3a)x+9a\}$

방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 정수를 근으로 가지므로 이차방정식 $ax^2+(3b-3a)x+9a=0$은 $x\neq -3$인 서로 다른 두 정수를 근으로 갖는다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 9이므로 두 근은

1, 9 또는 -9, -1

따라서 두 근의 합은 10 또는 -10이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{3a-3b}{a}=10$ 또는 $\frac{3a-3b}{a}=-10$

$\therefore b=-\frac{7}{3}a$ 또는 $b=\frac{13}{3}a$

(i) $b=-\frac{7}{3}a$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(3, -7)$, $(6, -14)$, $(9, -21)$, $(12, -28)$,

$(-3, 7)$, $(-6, 14)$, $(-9, 21)$, $(-12, 28)$

의 8개이다.

(ii) $b=\frac{13}{3}a$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(3, 13)$, $(6, 26)$, $(-3, -13)$, $(-6, -26)$

의 4개이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$8+4=12$

답 12

0607 전략 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β, γ 사이의 관계를 식으로 나타낸다.

$\frac{1}{\alpha\beta}$, $\frac{1}{\beta\gamma}$, $\frac{1}{\gamma\alpha}$이 삼차방정식 $x^3-2x^2+4x-1=0$의 세 근이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=2,$$
$$\frac{1}{\alpha\beta}\times\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\times\frac{1}{\gamma\alpha}+\frac{1}{\gamma\alpha}\times\frac{1}{\alpha\beta}=4,$$
$$\frac{1}{\alpha\beta}\times\frac{1}{\beta\gamma}\times\frac{1}{\gamma\alpha}=1$$
$$\therefore\ \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=2,\ \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{(\alpha\beta\gamma)^2}=4,\ \frac{1}{(\alpha\beta\gamma)^2}=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 α, β, γ가 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=-c$

이것을 ㉠의 각 식에 대입하면

$$\frac{-a}{-c}=2,\ \frac{b}{(-c)^2}=4,\ \frac{1}{(-c)^2}=1$$

따라서 $a=2c$, $b=4c^2$, $c^2=1$이므로

$a^2=4c^2=4$, $b^2=16c^4=16$, $c^2=1$

$\therefore\ a^2-b^2+c^2=4-16+1=-11$ 답 -11

0608 전략 사차방정식의 켤레근의 성질을 이용하여 다른 한 근을 구한다.

조건 (가)에서 계수가 모두 실수인 사차방정식 $P(x)=0$의 한 근이 $1+i$이므로 $1-i$도 근이다.

이때 $(1+i)+(1-i)=2$, $(1+i)(1-i)=2$이므로

$x^4-3x^3+ax^2+bx+c$

$=(x^2-2x+2)(x^2+mx+n)$ (m, n은 실수)

이라 하자.

좌변의 x^3의 계수는 -3이고, 우변의 x^3의 계수는 $m-2$이므로

$-3=m-2$ $\therefore\ m=-1$

$\therefore\ P(x)=(x^2-2x+2)(x^2-x+n)$

조건 (나)에서 $P(-1)=0$이므로

$5(2+n)=0$, $2+n=0$ $\therefore\ n=-2$

따라서 $P(x)=(x^2-2x+2)(x^2-x-2)$이므로 $P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$P(3)=20$ 답 20

0609 전략 한 이차방정식에서 이차식을 인수분해하여 얻은 두 일차방정식을 다른 이차방정식에 각각 대입하여 푼다.

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-4xy+3y^2=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $(x-y)(x-3y)=0$

$\therefore\ x=y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=y$를 ㉠에 대입하면

$y^2+y^2=10$, $y^2=5$ $\therefore\ y=\pm\sqrt{5}$

$x=y$이므로

$x=\sqrt{5}$, $y=\sqrt{5}$ 또는 $x=-\sqrt{5}$, $y=-\sqrt{5}$

(ii) $x=3y$를 ㉠에 대입하면

$9y^2+y^2=10$, $y^2=1$ $\therefore\ y=\pm1$

$x=3y$이므로

$x=3$, $y=1$ 또는 $x=-3$, $y=-1$

(i), (ii)에서

$\alpha+\beta=-2\sqrt{5}$ 또는 $\alpha+\beta=-4$ 또는

$\alpha+\beta=4$ 또는 $\alpha+\beta=2\sqrt{5}$

따라서 $\alpha+\beta$의 최댓값은 $2\sqrt{5}$, 최솟값은 $-2\sqrt{5}$이므로 구하는 곱은 $2\sqrt{5}\times(-2\sqrt{5})=-20$ 답 -20

0610 전략 두 이차방정식에 각각 $x=\alpha$를 대입한 후 두 식을 연립한다.

두 이차방정식의 공통인 근이 α이므로

$$\begin{cases} \alpha^2+(m+1)\alpha+6=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2+4\alpha+2m=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠−㉡을 하면 $(m-3)\alpha-2(m-3)=0$

$(m-3)(\alpha-2)=0$ $\therefore\ m=3$ 또는 $\alpha=2$

(i) $m=3$일 때, 두 이차방정식은 모두 $x^2+4x+6=0$으로 일치하므로 서로 다른 두 이차방정식이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha=2$일 때, 이것을 ㉡에 대입하면

$4+8+2m=0$ $\therefore\ m=-6$

(i), (ii)에서 $m=-6$, $\alpha=2$이므로

$m+\alpha=-4$ 답 -4

0611 전략 먼저 방정식의 한 근이 3임을 이용하여 a의 값을 구한다.

$f(x)=x^4+2ax^3+(a+5)x^2-ax-6$이라 하면 주어진 방정식의 한 근이 3이므로 $f(3)=0$에서

$81+54a+9(a+5)-3a-6=0$

$60a+120=0$ $\therefore\ a=-2$ … ❶

즉 $f(x)=x^4-4x^3+3x^2+2x-6$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

3	1	−4	3	2	−6
		3	−3	0	6
−1	1	−1	0	2	0
		−1	2	−2	
	1	−2	2	0	

$f(x)=(x-3)(x+1)(x^2-2x+2)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-3)(x+1)(x^2-2x+2)=0$

이때 방정식 $f(x)=0$의 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2-2x+2=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=2$ … ❷

$$\therefore\ \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{2^2-2\times2}{2}=0 \quad \cdots ❸$$

답 0

단계	채점 요소	배점
❶	a의 값 구하기	2점
❷	$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 구하기	2점
❸	$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$의 값 구하기	1점

0612 전략 직육면체의 부피 공식을 이용하여 x에 대한 삼차방정식을 세운다.

직육면체 모양의 상자의 밑면의 가로의 길이는 $(20-2x)$ cm, 세로의 길이는 $(16-2x)$ cm이므로

$x(20-2x)(16-2x)=384$ … ❶

$x^3-18x^2+80x-96=0$

$(x-2)(x-4)(x-12)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=12$

그런데 $0<x<8$이어야 하므로

$x=2$ 또는 $x=4$ … ❷

한편 이 상자의 겉넓이는 $(20\times16-4x^2)$ cm^{2}이므로 $x=4$일 때 상자의 겉넓이가 최소가 된다.

따라서 구하는 상자의 겉넓이는

$20\times16-4\times4^2=256$ (cm^2) … ❸

답 256 cm^2

단계	채점 요소	배점
❶	삼차방정식 세우기	2점
❷	x의 값 구하기	2점
❸	상자의 겉넓이 구하기	2점

0613 전략 미지수가 없는 두 식을 연립하여 푼다.

두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases} x^2+y^2=34 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy=15 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

를 만족시킨다.

㉠에서 $(x+y)^2-2xy=34$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$(x+y)^2-30=34$, $(x+y)^2=64$

$\therefore x+y=\pm8$

이때 a는 자연수이므로

$a=x+y=8$ … ❶

즉 $x+y=8$, $xy=15$이므로 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-8t+15=0$의 두 근이다.

$t^2-8t+15=0$에서 $(t-3)(t-5)=0$

$\therefore t=3$ 또는 $t=5$

$\therefore x=3, y=5$ 또는 $x=5, y=3$

$x=3, y=5$를 $x-by=-2$에 대입하면

$3-5b=-2$ $\therefore b=1$

$x=5, y=3$을 $x-by=-2$에 대입하면

$5-3b=-2$ $\therefore b=\frac{7}{3}$

이때 b는 자연수이므로 $b=1$ … ❷

$\therefore a-b=7$ … ❸

답 7

단계	채점 요소	배점
❶	a의 값 구하기	2점
❷	b의 값 구하기	2점
❸	$a-b$의 값 구하기	1점

0614 전략 먼저 주어진 방정식을 (일차식)×(일차식)=(정수)의 꼴로 변형한다.

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$에서 $\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{4}$

$xy-4x-4y=0$

$x(y-4)-4(y-4)-16=0$

$\therefore (x-4)(y-4)=16$ … ❶

이때 x, y는 자연수이므로 $x-4$, $y-4$는 정수이고 $x-4\geq-3$, $y-4\geq-3$이다.

따라서 $x-4$, $y-4$의 값은 다음 표와 같다.

$x-4$	1	2	4	8	16
$y-4$	16	8	4	2	1

(i) $x-4=1$, $y-4=16$일 때, $x=5$, $y=20$

$\therefore x+3y=65$

(ii) $x-4=2$, $y-4=8$일 때, $x=6$, $y=12$

$\therefore x+3y=42$

(iii) $x-4=4$, $y-4=4$일 때, $x=8$, $y=8$

$\therefore x+3y=32$

(iv) $x-4=8$, $y-4=2$일 때, $x=12$, $y=6$

$\therefore x+3y=30$

(v) $x-4=16$, $y-4=1$일 때, $x=20$, $y=5$

$\therefore x+3y=35$

이상에서 $x+3y$의 최댓값은 65, 최솟값은 30이므로

$M=65$, $m=30$ … ❷

$\therefore M-m=35$ … ❸

답 35

단계	채점 요소	배점
❶	주어진 방정식을 (일차식)×(일차식)=(정수)의 꼴로 변형하기	2점
❷	M, m의 값 구하기	3점
❸	$M-m$의 값 구하기	1점

08 연립일차부등식

셀프 CHECK → 본책 124쪽

A 답 (1) $2<x<5$ (2) $x\le 2$ (3) 해는 없다.

B 답 (1) $-7<x\le 2$ (2) $-6\le x<4$

C 답 (1) $-1<x<7$ (2) $x\le -\frac{3}{2}$ 또는 $x\ge \frac{11}{2}$

D 답 (1) $-\frac{7}{2}<x<-2$ (2) $-2\le x<3$

(3) $3\le x<\frac{9}{2}$ (4) $-\frac{7}{2}<x<\frac{9}{2}$

내신유형 다지기 → 본책 125~131쪽

유형 114 연립일차부등식의 풀이 → 본책 125쪽

연립일차부등식을 풀 때에는 각 일차부등식의 해를 구한 후 구한 해를 수직선 위에 나타내어 공통부분을 찾는다. 이때

① 괄호가 있는 경우

➜ 분배법칙을 이용하여 괄호를 푼다.

② 계수가 분수 또는 소수인 경우

➜ 양변에 적당한 수를 곱하여 계수를 정수로 고친 후 푼다.

0615 $\frac{3}{5}x-\frac{1}{2}\le 0.2x+0.7$의 양변에 10을 곱하면

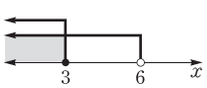
$6x-5\le 2x+7$, $4x\le 12$ $\therefore x\le 3$

$7x<4(x+2)+10$에서

$7x<4x+8+10$, $3x<18$ $\therefore x<6$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x\le 3$



즉 자연수 x는 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$1+2+3=6$ 답 ②

0616 $0.2(x-5)<0.5(x+4)$의 양변에 10을 곱하면

$2(x-5)<5(x+4)$, $2x-10<5x+20$

$-3x<30$ $\therefore x>-10$

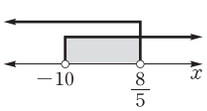
$\frac{x}{4}-\frac{2x+1}{3}>-1$의 양변에 12를 곱하면

$3x-4(2x+1)>-12$, $3x-8x-4>-12$

$-5x>-8$ $\therefore x<\frac{8}{5}$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$-10<x<\frac{8}{5}$



이므로 $a=-10$, $b=\frac{8}{5}$

$\therefore ab=-16$ 답 -16

0617 $2x-3\le 5x+9$에서

$-3x\le 12$ $\therefore x\ge -4$

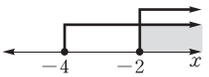
$4(x+1)\ge x-2$에서

$4x+4\ge x-2$, $3x\ge -6$

$\therefore x\ge -2$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x\ge -2$ … ❶



이므로

$-x\le 2$, $-x+3\le 5$

$\therefore A\le 5$ … ❷

답 $A\le 5$

단계	채점 요소	비율
❶	주어진 연립부등식의 해 구하기	50 %
❷	A의 값의 범위 구하기	50 %

0618 $6+5(x-1)\ge 3(x-3)$에서

$6+5x-5\ge 3x-9$, $2x\ge -10$

$\therefore x\ge -5$

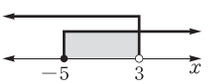
$\frac{x+3}{2}<4-\frac{x}{3}$의 양변에 6을 곱하면

$3(x+3)<24-2x$, $3x+9<24-2x$

$5x<15$ $\therefore x<3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$-5\le x<3$



이므로 $a=-5$, $b=3$

이것을 $bx-a<0$에 대입하면

$3x+5<0$, $3x<-5$ $\therefore x<-\frac{5}{3}$

즉 정수 x의 최댓값은 -2이다. 답 -2

유형 115 $A<B<C$의 꼴의 부등식 → 본책 125쪽

$A<B<C$의 꼴의 부등식은 연립부등식 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$의 꼴로 고쳐서 푼다.

0619 주어진 부등식은

$$\begin{cases} \frac{x-2}{3}<x+2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+2\le \frac{7-x}{2} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠의 양변에 3을 곱하면

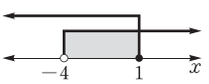
$x-2<3x+6$, $-2x<8$ $\therefore x>-4$

㉡의 양변에 2를 곱하면

$2x+4\le 7-x$, $3x\le 3$ $\therefore x\le 1$

따라서 주어진 부등식의 해는

$-4<x\le 1$



이므로 $a=-4$, $b=1$

$\therefore a+b=-3$ 답 -3

0620 주어진 부등식은

$$\begin{cases} -1<\frac{1}{4}x+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ \frac{1}{4}x+1<\frac{1}{3}x+2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

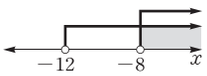
㉠에서 $\frac{1}{4}x>-2$ $\therefore x>-8$

㉡의 양변에 12를 곱하면

$3x+12<4x+24$ $\therefore x>-12$

따라서 주어진 부등식의 해는

$x>-8$



이므로 정수 x의 최솟값은 -7이다.

답 -7

0621 $2x-y=1$에서 $y=2x-1$

이것을 주어진 부등식에 대입하면

$4x-1<(2x-1)-2\le 3x+2$

$\therefore 4x-1<2x-3\le 3x+2$

즉

$$\begin{cases} 4x-1<2x-3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-3\le 3x+2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

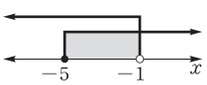
이므로 ㉠에서

$2x<-2$ $\therefore x<-1$

㉡에서 $x\ge -5$

따라서 주어진 부등식의 해는

$-5\le x<-1$



이므로 정수 x는 -5, -4, -3, -2의 4개이고, 구하는 해의 개수는 4이다.

답 4

0622 주어진 부등식은

$$\begin{cases} 0.6x-1\le 0.2x+\frac{3}{5} & \cdots\cdots ㉠ \\ 0.2x+\frac{3}{5}\le x+1.6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠의 양변에 10을 곱하면

$6x-10\le 2x+6$, $4x\le 16$

$\therefore x\le 4$

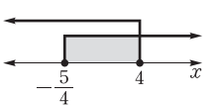
㉡의 양변에 10을 곱하면

$2x+6\le 10x+16$, $-8x\le 10$

$\therefore x\ge -\frac{5}{4}$

따라서 주어진 부등식의 해는

$-\frac{5}{4}\le x\le 4$



ㄱ. 정수인 해는 -1, 0, 1, 2, 3, 4의 6개이다. (참)

ㄴ. 자연수인 해는 1, 2, 3, 4의 4개이다. (참)

ㄷ. $x=-\frac{4}{3}$는 부등식의 해가 아니다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

유형 116 특수한 해를 갖는 연립일차부등식 본책 126쪽

(1) 연립부등식의 해가 없는 경우

➜ 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내었을 때 공통부분이 없다.

(2) 연립부등식의 해가 하나뿐인 경우

➜ 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내었을 때 공통부분이 한 점뿐이다.

0623 ① $5x+1\ge x+9$에서

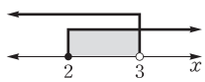
$4x\ge 8$ $\therefore x\ge 2$

$7-2x>4-x$에서

$x<3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$2\le x<3$



② $3(x-2)<-2x+4$에서

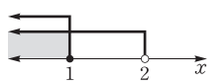
$3x-6<-2x+4$, $5x<10$ $\therefore x<2$

$9-4x\ge 5$에서

$-4x\ge -4$ $\therefore x\le 1$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x\le 1$



③ $4x-3\le 2(x-3)+1$에서

$4x-3\le 2x-6+1$, $2x\le -2$

$\therefore x\le -1$

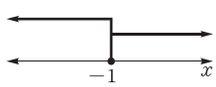
$2x\ge -1+\frac{x-1}{2}$의 양변에 2를 곱하면

$4x\ge -2+x-1$, $3x\ge -3$

$\therefore x\ge -1$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x=-1$



④ $5(5-x)>2(x+2)$에서

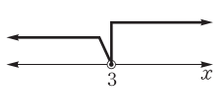
$25-5x>2x+4$, $-7x>-21$ $\therefore x<3$

$\frac{x+1}{4}\le\frac{2x-3}{3}$의 양변에 12를 곱하면

$3(x+1)\le 4(2x-3)$, $3x+3\le 8x-12$

$-5x\le -15$ $\therefore x\ge 3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.



⑤ $1.5x+0.4>-\frac{1}{5}x-3$의 양변에 10을 곱하면

$15x+4>-2x-30$, $17x>-34$

$\therefore x>-2$

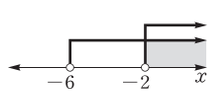
$0.5(x-4)<4+\frac{3}{2}x$의 양변에 10을 곱하면

$5(x-4)<40+15x$, $5x-20<40+15x$

$-10x<60$ $\therefore x>-6$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x>-2$



따라서 해가 없는 것은 ④이다.

답 ④

0624 주어진 부등식은

$$\begin{cases} \dfrac{2x+3}{5} \le \dfrac{x+1}{2} & \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{x+1}{2} \le \dfrac{4-x}{3} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases} \quad \cdots ❶$$

㉠의 양변에 10을 곱하면

$2(2x+3) \le 5(x+1)$, $4x+6 \le 5x+5$

$\therefore x \ge 1$

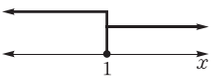
㉡의 양변에 6을 곱하면

$3(x+1) \le 2(4-x)$, $3x+3 \le 8-2x$

$5x \le 5$ $\therefore x \le 1$ … ❷

따라서 주어진 부등식의 해는

$x=1$ … ❸



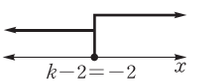
답 $x=1$

단계	채점 요소	비율
❶	연립부등식으로 변형하기	20 %
❷	각 부등식의 해 구하기	60 %
❸	주어진 부등식의 해 구하기	20 %

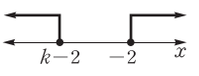
0625 $3x-k \le 2x-2$에서 $x \le k-2$

$6x+5 \ge x-5$에서 $5x \ge -10$ $\therefore x \ge -2$

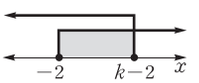
ㄱ. $k=0$이면 $k-2=-2$이므로 주어진 연립부등식의 해는 $x=-2$이다. (참)



ㄴ. $k<0$이면 $k-2<-2$이므로 주어진 연립부등식의 해는 없다. (참)



ㄷ. $k>0$이면 $k-2>-2$이므로 주어진 연립부등식은 반드시 해를 갖는다. (참)



이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

유형 117 연립일차부등식의 해가 주어진 경우 → 본책 126쪽

각 부등식을 풀고, 주어진 연립부등식의 해와 비교하여 미정계수를 구한다.

0626 $4(x-a) \le x-3$에서

$4x-4a \le x-3$, $3x \le 4a-3$

$\therefore x \le \dfrac{4a-3}{3}$

$x+1<3x+5$에서

$-2x<4$ $\therefore x>-2$

주어진 연립부등식의 해가 $b<x\le 3$이므로

$\dfrac{4a-3}{3}=3$, $b=-2$ $\therefore a=3$, $b=-2$

$\therefore ab=-6$ 답 -6

0627 $2x+a \ge 6-5x$에서

$7x \ge 6-a$ $\therefore x \ge \dfrac{6-a}{7}$

$\dfrac{1}{3}(x-10) \le b$에서

$x-10 \le 3b$ $\therefore x \le 3b+10$

주어진 연립부등식의 해가 $x=-2$이므로

$\dfrac{6-a}{7}=-2$, $3b+10=-2$ $\therefore a=20$, $b=-4$

$\therefore a+b=16$ 답 ④

0628 $-2(x+a) \le -3x+1$에서

$-2x-2a \le -3x+1$ $\therefore x \le 2a+1$

$-3x+1 \le 5x+b$에서

$-8x \le b-1$ $\therefore x \ge \dfrac{1-b}{8}$

주어진 부등식의 해가 $-1 \le x \le 5$이므로

$2a+1=5$, $\dfrac{1-b}{8}=-1$ $\therefore a=2$, $b=9$

$\therefore b-a=7$ 답 7

0629 $5x+a \le 3x+b$에서

$2x \le b-a$ $\therefore x \le \dfrac{b-a}{2}$

$2x+3<3x+b$에서 $x>3-b$

그런데 잘못 변형한 연립부등식의 해가 $-2<x\le 4$이므로

$3-b=-2$, $\dfrac{b-a}{2}=4$ $\therefore a=-3$, $b=5$

원래 부등식은 $5x-3 \le 2x+3<3x+5$이므로

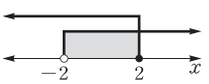
$5x-3 \le 2x+3$에서

$3x \le 6$ $\therefore x \le 2$

$2x+3<3x+5$에서 $x>-2$

따라서 원래 부등식의 해는

$-2<x\le 2$



답 $-2<x\le 2$

0630 $3x-4 \ge 2x-a$에서 $x \ge 4-a$

$4x-7 \ge x+2a$에서

$3x \ge 2a+7$ $\therefore x \ge \dfrac{2a+7}{3}$

(i) $4-a \ge \dfrac{2a+7}{3}$일 때

$12-3a \ge 2a+7$, $-5a \ge -5$

$\therefore a \le 1$ …… ㉠

이때 주어진 연립부등식의 해는 $x \ge 4-a$이므로

$4-a=5$ $\therefore a=-1$

$a=-1$은 ㉠을 만족시키므로 a의 값이 될 수 있다.

(ii) $4-a<\dfrac{2a+7}{3}$일 때

$12-3a<2a+7$, $-5a<-5$

$\therefore a>1$ …… ㉡

이때 주어진 연립부등식의 해는 $x \ge \dfrac{2a+7}{3}$이므로

$\dfrac{2a+7}{3}=5$, $2a+7=15$ $\therefore a=4$

$a=4$는 ㉡을 만족시키므로 a의 값이 될 수 있다.

(i), (ii)에서 $a=-1$ 또는 $a=4$ 답 -1, 4

유형 118 연립일차부등식이 해를 갖거나 갖지 않는 경우

본책 127쪽

(1) 연립부등식이 해를 갖는 경우
➜ 공통부분이 있도록 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타낸다.
(2) 연립부등식의 해가 없는 경우
➜ 공통부분이 없도록 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타낸다.

0631 $\frac{x-1}{3} \geq \frac{2x-3}{5}$의 양변에 15를 곱하면

$5(x-1) \geq 3(2x-3)$, $5x-5 \geq 6x-9$

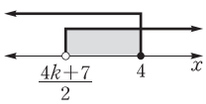
$\therefore x \leq 4$

$2x+7<4(x-k)$에서

$2x+7<4x-4k$, $-2x<-4k-7$

$\therefore x>\frac{4k+7}{2}$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\frac{4k+7}{2}<4$, $4k+7<8$

$\therefore k<\frac{1}{4}$ 답 ②

참고 $\frac{4k+7}{2}=4$, 즉 $k=\frac{1}{4}$이면 주어진 연립부등식의 해는 없다.

0632 $1.4x+6 \leq 0.4(x+5)$의 양변에 10을 곱하면

$14x+60 \leq 4(x+5)$, $14x+60 \leq 4x+20$

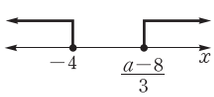
$10x \leq -40$ $\therefore x \leq -4$

$3(x+1) \geq a-5$에서

$3x+3 \geq a-5$, $3x \geq a-8$

$\therefore x \geq \frac{a-8}{3}$ … ❶

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\frac{a-8}{3}>-4$, $a-8>-12$

$\therefore a>-4$ … ❷

따라서 정수 a의 최솟값은 -3이다. … ❸

답 -3

단계	채점 요소	비율
❶	각 부등식의 해 구하기	40 %
❷	a의 값의 범위 구하기	50 %
❸	정수 a의 최솟값 구하기	10 %

0633 주어진 부등식은

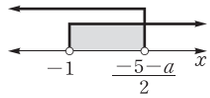
$\begin{cases} \frac{5x+7}{2}<4x+5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+5<2x-a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 양변에 2를 곱하면

$5x+7<8x+10$, $-3x<3$ $\therefore x>-1$

㉡에서 $2x<-5-a$ $\therefore x<\frac{-5-a}{2}$

주어진 부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\frac{-5-a}{2}>-1$, $-5-a>-2$

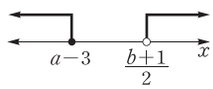
$\therefore a<-3$

따라서 정수 a의 최댓값은 -4이다. 답 -4

0634 $4x+3 \leq 3x+a$에서 $x \leq a-3$

$3x-1>x+b$에서 $2x>b+1$ $\therefore x>\frac{b+1}{2}$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$a-3 \leq \frac{b+1}{2}$, $2a-6 \leq b+1$

$\therefore 2a-b \leq 7$

따라서 $2a-b$의 최댓값은 7이다. 답 ③

유형 119 정수인 해의 개수가 주어진 연립일차부등식

본책 127쪽

연립부등식의 정수인 해가 n개인 경우에는 다음과 같은 순서로 푼다.
(i) 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타낸다.
(ii) 공통부분이 n개의 정수를 포함하도록 하는 미지수의 값의 범위를 구한다.

0635 $0.3(x+4)>x-3$의 양변에 10을 곱하면

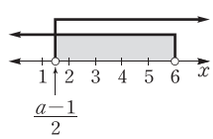
$3(x+4)>10x-30$, $3x+12>10x-30$

$-7x>-42$ $\therefore x<6$

$2x-1<4x-a$에서

$-2x<-a+1$ $\therefore x>\frac{a-1}{2}$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 4개이려면 오른쪽 그림에서



$1 \leq \frac{a-1}{2}<2$

$2 \leq a-1<4$ $\therefore 3 \leq a<5$ 답 ②

0636 주어진 부등식은

$\begin{cases} \frac{14-x}{4}<x+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+1 \leq \frac{x+a}{2} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

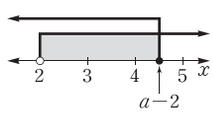
㉠의 양변에 4를 곱하면

$14-x<4x+4$, $-5x<-10$ $\therefore x>2$

㉡의 양변에 2를 곱하면

$2x+2 \leq x+a$ $\therefore x \leq a-2$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이려면 오른쪽 그림에서



$4 \leq a-2<5$ $\therefore 6 \leq a<7$

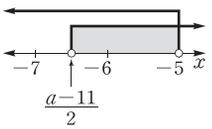
따라서 자연수 a의 값은 6이다. 답 6

0637 $2x>a-11$에서 $x>\frac{a-11}{2}$

$\frac{4x-1}{3}<x-2$의 양변에 3을 곱하면

$4x-1<3x-6$ $\therefore x<-5$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 -6뿐이려면 오른쪽 그림에서



$-7\le\frac{a-11}{2}<-6$

$-14\le a-11<-12$

$\therefore -3\le a<-1$

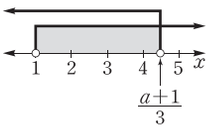
답 $-3\le a<-1$

0638 $7x-5>3-x$에서 $8x>8$ $\therefore x>1$

$3x<a+1$에서 $x<\frac{a+1}{3}$

주어진 연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 9이려면 오른쪽 그림에서

└ 2+3+4=9



$4<\frac{a+1}{3}\le 5$, $12<a+1\le 15$

$\therefore 11<a\le 14$

따라서 자연수 a의 최댓값은 14이다. 답 ⑤

0639 $x+\frac{1}{4}\ge\frac{1}{2}x+\frac{a}{4}$의 양변에 4를 곱하면

$4x+1\ge 2x+a$, $2x\ge a-1$

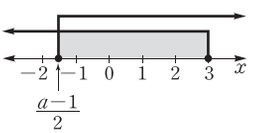
$\therefore x\ge\frac{a-1}{2}$

$0.5x+1\le 0.3x+1.6$의 양변에 10을 곱하면

$5x+10\le 3x+16$, $2x\le 6$

$\therefore x\le 3$

주어진 연립부등식을 만족시키는 음의 정수 x가 1개이려면 오른쪽 그림에서



$-2<\frac{a-1}{2}\le -1$

$-4<a-1\le -2$ $\therefore -3<a\le -1$

답 $-3<a\le -1$

유형 120 연립일차부등식의 활용 → 본책 128쪽

연립일차부등식의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 푼다.

(i) 구하려는 것을 미지수 x로 놓는다.

(ii) 주어진 조건을 이용하여 연립부등식을 세운다.

(iii) 연립부등식을 풀고 구한 해가 문제의 조건에 맞는지 확인한다.

0640 연속하는 세 홀수를 x, $x+2$, $x+4$라 하면

$\begin{cases} x+(x+2)+(x+4)>48 \\ 4(x+4)+2\le 82 \end{cases}$

$x+(x+2)+(x+4)>48$에서

$3x+6>48$, $3x>42$

$\therefore x>14$ …… ㉠

$4(x+4)+2\le 82$에서

$4x+16+2\le 82$, $4x\le 64$

$\therefore x\le 16$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $14<x\le 16$

x는 홀수이므로 $x=15$

따라서 연속하는 세 홀수는 15, 17, 19이므로 가장 작은 수는 15이다. 답 15

0641 가로의 길이를 x cm라 하면 세로의 길이는

$\frac{1}{2}(120-2x)=60-x\,(\text{cm})$

이므로 $x+10\le 60-x<2x$

$x+10\le 60-x$에서

$2x\le 50$ $\therefore x\le 25$ …… ㉠

$60-x<2x$에서

$-3x<-60$ $\therefore x>20$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $20<x\le 25$

따라서 가로의 길이는 20 cm 초과 25 cm 이하이다. 답 ②

0642 장난감 B를 x개 만든다고 하면 장난감 A는 $(10-x)$개 만들 수 있으므로

$\begin{cases} 90(10-x)+80x\le 850 \\ 15(10-x)+20x\le 180 \end{cases}$ … ❶

$90(10-x)+80x\le 850$에서

$900-90x+80x\le 850$

$-10x\le -50$ $\therefore x\ge 5$ …… ㉠

$15(10-x)+20x\le 180$에서

$150-15x+20x\le 180$

$5x\le 30$ $\therefore x\le 6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $5\le x\le 6$ … ❷

따라서 장난감 B는 최대 6개 만들 수 있다. … ❸

답 6개

단계	채점 요소	비율
❶	연립부등식 세우기	50 %
❷	연립부등식의 해 구하기	40 %
❸	장난감 B는 최대 몇 개 만들 수 있는지 구하기	10 %

0643 농도가 25 %인 소금물 200 g에 들어 있는 소금의 양은

$\frac{25}{100}\times 200=50\,(\text{g})$

농도가 10 %인 소금물을 x g 섞는다고 하면

$\frac{14}{100}(200+x)\le 50+\frac{10}{100}x\le\frac{16}{100}(200+x)$

$\frac{14}{100}(200+x)\le 50+\frac{10}{100}x$에서

$2800+14x\le 5000+10x$

$4x\le 2200$ $\therefore x\le 550$ …… ㉠

$50+\frac{10}{100}x\le\frac{16}{100}(200+x)$에서

$5000+10x\le 3200+16x$

$-6x\le -1800$ $\therefore x\ge 300$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $300 \le x \le 550$

따라서 농도가 10 %인 소금물을 300 g 이상 550 g 이하로 섞어야 한다. 답 300 g 이상 550 g 이하

만점 공략 노트

(1) (소금물의 농도) $= \dfrac{(\text{소금의 양})}{(\text{소금물의 양})} \times 100\,(\%)$

(2) (소금의 양) $= \dfrac{(\text{소금물의 농도})}{100} \times (\text{소금물의 양})$

0644 처음 자연수의 십의 자리의 숫자를 x라 하면 일의 자리의 숫자는 $x+2$이므로

$$\begin{cases} x+(x+2) \le 15 \\ 10(x+2)+x < 2\{10x+(x+2)\}-40 \end{cases}$$

$x+(x+2) \le 15$에서

$2x+2 \le 15, \quad 2x \le 13$

$\therefore x \le \dfrac{13}{2}$ …… ㉠

$10(x+2)+x < 2\{10x+(x+2)\}-40$에서

$11x+20 < 22x-36, \quad -11x < -56$

$\therefore x > \dfrac{56}{11}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\dfrac{56}{11} < x \le \dfrac{13}{2}$

x는 자연수이므로 $x=6$

따라서 처음 자연수는 68이다. 답 68

유형 121 연립일차부등식의 활용 – 과부족 본책 129쪽

(1) 물건을 한 상자에 n개씩 담는 경우

➜ 상자의 개수를 x로 놓는다.

(2) 물건을 한 사람에게 k개씩 나누어 주는 경우

➜ 사람 수를 x로 놓는다.

(3) 한 의자에 n명씩 앉으면 k개의 의자가 남는 경우

➜ 의자의 개수를 x로 놓고 마지막 의자에는 최소 1명에서 최대 n명까지 앉을 수 있음을 이용한다.

0645 의자의 개수를 x라 하면 학생 수는 $4x+6$이므로

$5(x-3)+1 \le 4x+6 \le 5(x-3)+5$

$5(x-3)+1 \le 4x+6$에서

$5x-15+1 \le 4x+6 \quad \therefore x \le 20$ …… ㉠

$4x+6 \le 5(x-3)+5$에서

$4x+6 \le 5x-15+5 \quad \therefore x \ge 16$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$16 \le x \le 20$

x는 자연수이므로 $x=16, 17, 18, 19, 20$

이때 학생 수는

$4x+6=70, 74, 78, 82, 86$

따라서 학생 수가 될 수 있는 것은 ③이다. 답 ③

만점 공략 노트

한 의자에 a명씩 앉으면 n개의 의자가 남는다.

➜ 남는 의자를 제외한 나머지 의자 중에서 마지막 의자에는 학생이 최소 1명에서 최대 a명까지 앉을 수 있다.

➜ 의자의 개수를 x라 하면

(i) 남는 의자의 개수는 n

(ii) a명씩 앉은 의자의 개수는 $x-(n+1)$

(iii) 최소 학생 수는 $a\{x-(n+1)\}+1$

최대 학생 수는 $a\{x-(n+1)\}+a$

0646 상자의 개수를 x라 하면

$25x+30 \le 400 \le 35x-90$

$25x+30 \le 400$에서

$25x \le 370 \quad \therefore x \le \dfrac{74}{5}$ …… ㉠

$400 \le 35x-90$에서

$-35x \le -490 \quad \therefore x \ge 14$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$14 \le x \le \dfrac{74}{5}$

따라서 상자의 개수는 14이다. 답 14

0647 학생 수를 x라 하면 연필은 $(5x+14)$자루이므로

$7(x-1)+1 \le 5x+14 < 7(x-1)+5$ … ❶

$7(x-1)+1 \le 5x+14$에서

$7x-7+1 \le 5x+14, \quad 2x \le 20$

$\therefore x \le 10$ …… ㉠

$5x+14 < 7(x-1)+5$에서

$5x+14 < 7x-7+5, \quad -2x < -16$

$\therefore x > 8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$8 < x \le 10$ … ❷

따라서 최대 학생 수는 10이다. … ❸

답 10

단계	채점 요소	비율
❶	부등식 세우기	50 %
❷	부등식의 해 구하기	40 %
❸	최대 학생 수 구하기	10 %

0648 학생 수를 x라 하면 피자 조각의 개수는 $4(x-4)$이므로

$3x+1 \le 4(x-4) \le 3x+8$

$3x+1 \le 4(x-4)$에서

$3x+1 \le 4x-16 \quad \therefore x \ge 17$ …… ㉠

$4(x-4) \le 3x+8$에서

$4x-16 \le 3x+8 \quad \therefore x \le 24$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$17 \le x \le 24$

x는 자연수이고, $4(x-4)$가 8의 배수이어야 하므로

$x=18, 20, 22, 24$

따라서 최소 학생 수는 18이다. 답 ③

유형 122 $|ax+b|<c$, $|ax+b|>c$의 꼴의 부등식 → 본책 129쪽

$|ax+b|<c$ 또는 $|ax+b|>c$ $(c>0)$의 꼴의 부등식은

(1) $|ax+b|<c$ ➡ $-c<ax+b<c$

(2) $|ax+b|>c$ ➡ $ax+b<-c$ 또는 $ax+b>c$

임을 이용하여 절댓값 기호를 없앤 후 푼다.

0649 $|3x-a|\le 9$에서 $-9\le 3x-a\le 9$

$a-9\le 3x\le a+9$

$\therefore \frac{1}{3}a-3\le x\le \frac{1}{3}a+3$

주어진 부등식의 해가 $b\le x\le 5$이므로

$\frac{1}{3}a-3=b,\ \frac{1}{3}a+3=5$ $\therefore a=6,\ b=-1$

$\therefore a+b=5$ 답 ④

0650 $|2x+1|>5$에서

$2x+1<-5$ 또는 $2x+1>5$

$2x<-6$ 또는 $2x>4$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>2$ ····· ㉠

$3(x-1)+4\le 13+x$에서

$3x-3+4\le 13+x,$ $2x\le 12$

$\therefore x\le 6$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $x<-3$ 또는 $2<x\le 6$

따라서 자연수 x는 3, 4, 5, 6의 4개이다. 답 4

0651 $|x-k|<5$에서 $-5<x-k<5$

$\therefore k-5<x<k+5$

이때 정수 x의 최댓값이 8이어야 하므로

$8<k+5\le 9$ $\therefore 3<k\le 4$ 답 ①

0652 $|x-5|\le 2a$에서 $-2a\le x-5\le 2a$

$\therefore -2a+5\le x\le 2a+5$

이때 $-2a+5$, $2a+5$가 정수이므로 모든 정수 x의 개수는

$(2a+5)-(-2a+5)+1=4a+1$

따라서 $4a+1=9$이므로 $4a=8$

$\therefore a=2$ 답 ②

0653 $|x+a|>b$에서

$x+a<-b$ 또는 $x+a>b$

$\therefore x<-a-b$ 또는 $x>-a+b$

이 부등식의 해가 $x<-1$ 또는 $x>5$이므로

$-a-b=-1,\ -a+b=5$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=3$

$(3a+b)x>2x-2b+c$에 $a=-2,\ b=3$을 대입하면

$-3x>2x-6+c,$ $-5x>-6+c$

$\therefore x<\frac{6-c}{5}$

이 부등식의 해가 $x<\frac{c}{10}$이므로

$\frac{6-c}{5}=\frac{c}{10},$ $2(6-c)=c$

$12-2c=c,$ $3c=12$ $\therefore c=4$

$\therefore a+b+c=5$ 답 5

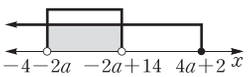
0654 $2x-3\le 8a+1$에서

$2x\le 8a+4$ $\therefore x\le 4a+2$

$|x+2a-5|<9$에서 $-9<x+2a-5<9$

$\therefore -4-2a<x<-2a+14$ ····· ㉠

주어진 연립부등식의 해가 부등식 $|x+2a-5|<9$의 해, 즉 ㉠과 같으려면 오른쪽 그림에서



$-2a+14\le 4a+2$

$-6a\le -12$ $\therefore a\ge 2$ 답 $a\ge 2$

유형 123 $|ax+b|<cx+d$의 꼴의 부등식 → 본책 130쪽

$|ax+b|<cx+d$의 꼴의 부등식은 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값인 $-\frac{b}{a}$를 기준으로 하여 x의 값의 범위를

(i) $x<-\frac{b}{a}$ (ii) $x\ge -\frac{b}{a}$

로 나누어 푼다.

0655 $5|x-3|-x\ge 9$에서

(i) $x<3$일 때, $x-3<0$이므로

$-5(x-3)-x\ge 9,$ $-5x+15-x\ge 9$

$-6x\ge -6$ $\therefore x\le 1$

그런데 $x<3$이므로 $x\le 1$

(ii) $x\ge 3$일 때, $x-3\ge 0$이므로

$5(x-3)-x\ge 9,$ $5x-15-x\ge 9$

$4x\ge 24$ $\therefore x\ge 6$

그런데 $x\ge 3$이므로 $x\ge 6$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x\le 1$ 또는 $x\ge 6$

따라서 10 미만의 자연수 x는 1, 6, 7, 8, 9의 5개이다. 답 ④

0656 $x+6<|3x-2|$에서

(i) $x<\frac{2}{3}$일 때, $3x-2<0$이므로

$x+6<-(3x-2),$ $x+6<-3x+2$

$4x<-4$ $\therefore x<-1$

그런데 $x<\frac{2}{3}$이므로 $x<-1$

(ii) $x\ge\frac{2}{3}$일 때, $3x-2\ge 0$이므로

$x+6<3x-2,$ $-2x<-8$ $\therefore x>4$

그런데 $x\ge\frac{2}{3}$이므로 $x>4$

(i), (ii)에서 부등식 $x+6<|3x-2|$의 해는

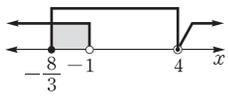
$x<-1$ 또는 $x>4$ ····· ㉠

$|3x-2|\le 10$에서 $-10\le 3x-2\le 10$

$-8\le 3x\le 12$ $\therefore -\frac{8}{3}\le x\le 4$ ····· ㉡

따라서 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-\frac{8}{3}\le x<-1$



답 $-\frac{8}{3}\le x<-1$

0657 $|x-2|<3x-10$에서

(i) $x<2$일 때, $x-2<0$이므로

$-(x-2)<3x-10$, $-x+2<3x-10$

$-4x<-12$ $\therefore x>3$

그런데 $x<2$이므로 해는 없다.

(ii) $x\ge 2$일 때, $x-2\ge 0$이므로

$x-2<3x-10$, $-2x<-8$ $\therefore x>4$

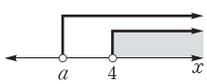
그런데 $x\ge 2$이므로 $x>4$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $x>4$

따라서 $x>4$가 $x>a$에 포함되려면

오른쪽 그림에서

$a\le 4$



답 $a\le 4$

0658 $|5x+7|<-x+5$에서

(i) $x<-\frac{7}{5}$일 때, $5x+7<0$이므로

$-(5x+7)<-x+5$, $-5x-7<-x+5$

$-4x<12$ $\therefore x>-3$

그런데 $x<-\frac{7}{5}$이므로 $-3<x<-\frac{7}{5}$

(ii) $x\ge -\frac{7}{5}$일 때, $5x+7\ge 0$이므로

$5x+7<-x+5$, $6x<-2$ $\therefore x<-\frac{1}{3}$

그런데 $x\ge -\frac{7}{5}$이므로 $-\frac{7}{5}\le x<-\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 부등식 $|5x+7|<-x+5$의 해는

$-3<x<-\frac{1}{3}$ ··· ❶

또 $|x+a|<b$에서 $-b<x+a<b$

$\therefore -a-b<x<-a+b$ ··· ❷

이때 주어진 두 부등식의 해가 같으므로

$-a-b=-3$, $-a+b=-\frac{1}{3}$

두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{5}{3}$, $b=\frac{4}{3}$ ··· ❸

답 $a=\frac{5}{3}$, $b=\frac{4}{3}$

단계	채점 요소	비율
❶	부등식 $|5x+7|<-x+5$의 해 구하기	50 %
❷	부등식 $|x+a|<b$의 해 구하기	30 %
❸	a, b의 값 구하기	20 %

유형 124 절댓값 기호가 두 개인 부등식 본책 130쪽

두 일차식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(a)=0$, $g(b)=0$ $(a<b)$일 때, $|f(x)|+|g(x)|<c$의 꼴의 부등식

➜ x의 값의 범위를 $x<a$, $a\le x<b$, $x\ge b$로 나누어 푼다.

0659 $3|x-2|+2|x+1|<11$에서

(i) $x<-1$일 때, $x-2<0$, $x+1<0$이므로

$-3(x-2)-2(x+1)<11$

$-3x+6-2x-2<11$

$-5x<7$ $\therefore x>-\frac{7}{5}$

그런데 $x<-1$이므로 $-\frac{7}{5}<x<-1$

(ii) $-1\le x<2$일 때, $x-2<0$, $x+1\ge 0$이므로

$-3(x-2)+2(x+1)<11$

$-3x+6+2x+2<11$

$-x<3$ $\therefore x>-3$

그런데 $-1\le x<2$이므로 $-1\le x<2$

(iii) $x\ge 2$일 때, $x-2\ge 0$, $x+1>0$이므로

$3(x-2)+2(x+1)<11$

$3x-6+2x+2<11$

$5x<15$ $\therefore x<3$

그런데 $x\ge 2$이므로 $2\le x<3$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$-\frac{7}{5}<x<3$

따라서 $a=-\frac{7}{5}$, $b=3$이므로

$a+b=\frac{8}{5}$

답 ⑤

0660 $|x+5|-|3x-6|\ge -9$에서

(i) $x<-5$일 때, $x+5<0$, $3x-6<0$이므로

$-(x+5)+(3x-6)\ge -9$

$-x-5+3x-6\ge -9$

$2x\ge 2$ $\therefore x\ge 1$

그런데 $x<-5$이므로 해는 없다.

(ii) $-5\le x<2$일 때, $x+5\ge 0$, $3x-6<0$이므로

$(x+5)+(3x-6)\ge -9$

$4x\ge -8$ $\therefore x\ge -2$

그런데 $-5\le x<2$이므로 $-2\le x<2$

(iii) $x\ge 2$일 때, $x+5>0$, $3x-6\ge 0$이므로

$(x+5)-(3x-6)\ge -9$

$x+5-3x+6\ge -9$

$-2x\ge -20$ $\therefore x\le 10$

그런데 $x\ge 2$이므로 $2\le x\le 10$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$-2\le x\le 10$

따라서 $M=10$, $m=-2$이므로

$Mm=-20$

답 -20

0661 $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$이므로 주어진 부등식은

$|x+2|+|x-1|\le x+4$ … ❶

(i) $x<-2$일 때, $x+2<0$, $x-1<0$이므로

$-(x+2)-(x-1)\le x+4$

$-x-2-x+1\le x+4$

$-3x\le 5$ $\therefore x\ge -\frac{5}{3}$

그런데 $x<-2$이므로 해는 없다.

(ii) $-2\le x<1$일 때, $x+2\ge 0$, $x-1<0$이므로

$(x+2)-(x-1)\le x+4$

$x+2-x+1\le x+4$ $\therefore x\ge -1$

그런데 $-2\le x<1$이므로

$-1\le x<1$

(iii) $x\ge 1$일 때, $x+2>0$, $x-1\ge 0$이므로

$(x+2)+(x-1)\le x+4$ $\therefore x\le 3$

그런데 $x\ge 1$이므로

$1\le x\le 3$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$-1\le x\le 3$ … ❷

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다. … ❸

답 5

단계	채점 요소	비율
❶	$\sqrt{A^2}=\|A\|$임을 이용하여 주어진 부등식 변형하기	20 %
❷	주어진 부등식의 해 구하기	60 %
❸	정수 x의 개수 구하기	20 %

0662 $|x-3|+|x+1|\le k$에서

(i) $x<-1$일 때, $x-3<0$, $x+1<0$이므로

$-(x-3)-(x+1)\le k$

$-x+3-x-1\le k$, $-2x\le k-2$

$\therefore x\ge \frac{-k+2}{2}$

이때 $k>4$에서 $\frac{-k+2}{2}<-1$이고, $x<-1$이므로

$\frac{-k+2}{2}\le x<-1$

(ii) $-1\le x<3$일 때, $x-3<0$, $x+1\ge 0$이므로

$-(x-3)+(x+1)\le k$

$\therefore 0\times x\le k-4$ …… ㉠

이때 $k>4$에서 $k-4>0$이므로 ㉠은 모든 실수에서 성립하고, $-1\le x<3$이므로

$-1\le x<3$

(iii) $x\ge 3$일 때, $x-3\ge 0$, $x+1>0$이므로

$(x-3)+(x+1)\le k$

$2x\le k+2$ $\therefore x\le \frac{k+2}{2}$

이때 $k>4$에서 $\frac{k+2}{2}>3$이고, $x\ge 3$이므로

$3\le x\le \frac{k+2}{2}$

이상에서 주어진 부등식의 해는

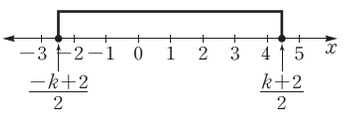
$\frac{-k+2}{2}\le x\le \frac{k+2}{2}$

이때

$\frac{-k+2}{2}=1-\frac{k}{2}$, $\frac{k+2}{2}=1+\frac{k}{2}$

이므로 $\frac{-k+2}{2}$, $\frac{k+2}{2}$는 수직선 위에서 1로부터 양쪽으로 각각 $\frac{k}{2}$만큼씩 떨어져 있다.

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 7개 이려면 오른쪽 그림에서



$4\le \frac{k+2}{2}<5$, $8\le k+2<10$

$\therefore 6\le k<8$

답 ④

참고 $-3<\frac{-k+2}{2}\le -2$에서 k의 값의 범위를 구해도 $6\le k<8$로 같다.

0663 $0<a<b$에서 $a^2<b^2$

$|x-a^2|-|x-b^2|>0$에서

(i) $x<a^2$일 때, $x-a^2<0$, $x-b^2<0$이므로

$-(x-a^2)+(x-b^2)>0$

$\therefore 0\times x>b^2-a^2$ …… ㉠

이때 $a^2<b^2$에서 $b^2-a^2>0$이므로 ㉠의 해는 없다.

(ii) $a^2\le x<b^2$일 때, $x-a^2\ge 0$, $x-b^2<0$이므로

$(x-a^2)+(x-b^2)>0$

$2x>a^2+b^2$

$\therefore x>\frac{a^2+b^2}{2}$

이때 $a^2<b^2$에서 $a^2<\frac{a^2+b^2}{2}<b^2$이고, $a^2\le x<b^2$이므로

$\frac{a^2+b^2}{2}<x<b^2$

(iii) $x\ge b^2$일 때, $x-a^2>0$, $x-b^2\ge 0$이므로

$(x-a^2)-(x-b^2)>0$

$\therefore 0\times x>a^2-b^2$ …… ㉡

이때 $a^2<b^2$에서 $a^2-b^2<0$이므로 ㉡은 모든 실수에서 성립하고, $x\ge b^2$이므로

$x\ge b^2$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$x>\frac{a^2+b^2}{2}$ …… ㉢

$x\ge 12$인 모든 실수 x에 대하여 ㉢이 성립해야 하므로

$\frac{a^2+b^2}{2}<12$ $\therefore a^2+b^2<24$

이때 a, b는 자연수이고 $a<b$이므로 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$

의 5개이다.

답 ②

유형 125 절댓값 기호를 포함한 부등식의 해가 없거나 무수히 많은 경우 본책 131쪽

(1) $|ax+b|<c$의 해가 없다. ➜ $c\le 0$
(2) $|ax+b|\le c$의 해가 없다. ➜ $c<0$
(3) $|ax+b|>c$의 해가 모든 실수이다. ➜ $c<0$
(4) $|ax+b|\ge c$의 해가 모든 실수이다. ➜ $c\le 0$

0664 주어진 부등식의 해가 존재하지 않으려면

$\frac{1}{3}a-3<0$, $\frac{1}{3}a<3$

$\therefore a<9$

따라서 정수 a의 최댓값은 8이다. 답 ③

0665 $\left|4x-\frac{5}{4}\right|+2a\ge 6$에서 $\left|4x-\frac{5}{4}\right|\ge 6-2a$

이 부등식의 해가 모든 실수이려면

$6-2a\le 0$, $-2a\le -6$

$\therefore a\ge 3$ 답 ⑤

0666 (i) $x<2$일 때, $3x-6<0$이므로

$2x-|3x-6|=2x+(3x-6)=5x-6$

그런데 $x<2$이므로

$5x<10$ $\therefore 5x-6<4$

(ii) $x\ge 2$일 때, $3x-6\ge 0$이므로

$2x-|3x-6|=2x-(3x-6)=-x+6$

그런데 $x\ge 2$이므로

$-x\le -2$ $\therefore -x+6\le 4$

(i), (ii)에서 $2x-|3x-6|\le 4$이므로 주어진 부등식이 해를 가지려면

$a<4$ 답 $a<4$

0667 (i) $x<-1$일 때, $x-1<0$, $x+1<0$이므로

$2|x-1|-|x+1|=-2(x-1)+(x+1)$

$=-2x+2+x+1$

$=-x+3$

그런데 $x<-1$이므로

$-x>1$ $\therefore -x+3>4$

(ii) $-1\le x<1$일 때, $x-1<0$, $x+1\ge 0$이므로

$2|x-1|-|x+1|=-2(x-1)-(x+1)$

$=-2x+2-x-1$

$=-3x+1$

그런데 $-1\le x<1$이므로

$-3<-3x\le 3$ $\therefore -2<-3x+1\le 4$

(iii) $x\ge 1$일 때, $x-1\ge 0$, $x+1>0$이므로

$2|x-1|-|x+1|=2(x-1)-(x+1)$

$=2x-2-x-1$

$=x-3$

그런데 $x\ge 1$이므로 $x-3\ge -2$

이상에서 $2|x-1|-|x+1|\ge -2$이므로 주어진 부등식이 해를 갖지 않으려면 $a\le -2$

따라서 실수 a의 최댓값은 -2이다. 답 -2

1등급 유형 도전하기 본책 132~133쪽

0668 Step 1 부등식 $ax+b>0$의 해를 구한다.

$ax+b>0$에서 $ax>-b$

이때 a는 자연수이므로 $x>-\frac{b}{a}$ …… ㉠

Step 2 a의 값에 따라 부등식 $(a-2)x+b+3>0$의 해를 구한 후 연립부등식의 해가 $x>3$인 경우를 찾는다.

$(a-2)x+b+3>0$에서

(i) $a=1$일 때, $-x+b+3>0$

$\therefore x<b+3$ …… ㉡

이때 ㉠, ㉡의 공통부분은 $\alpha<x<\beta$의 꼴이거나 공통부분이 없다.

따라서 연립부등식의 해가 $x>3$이 될 수 없으므로

$a\ne 1$

(ii) $a=2$일 때, $0\times x+b+3>0$

$\therefore 0\times x>-b-3$ …… ㉢

이때 ㉠, ㉢의 공통부분은 $x>-\frac{b}{a}$, 즉 $x>-\frac{b}{2}$이거나 공통부분이 없다.

따라서 연립부등식의 해가 $x>3$이 되려면

$-\frac{b}{2}=3$ $\therefore b=-6$

그런데 ㉢에 $b=-6$을 대입하면 $0\times x>3$이므로 연립부등식의 해가 없다.

$\therefore a\ne 2$

(iii) $a=3$일 때, $x+b+3>0$

$\therefore x>-b-3$ …… ㉣

이때 ㉠, ㉣의 공통부분은 $x>-\frac{b}{a}$, 즉 $x>-\frac{b}{3}$이거나 $x>-b-3$이다.

따라서 연립부등식의 해가 $x>3$이려면 $-\frac{b}{3}$와 $-b-3$ 중 큰 수가 3이어야 한다.

$-\frac{b}{3}>-b-3$인 경우에는 $-\frac{b}{3}=3$이어야 하므로

$b=-9$

그런데 $b=-9$를 $-\frac{b}{3}>-b-3$에 대입하면 $3>6$이 되어 모순이다.

또 $-\frac{b}{3}<-b-3$인 경우에는 $-b-3=3$이어야 하므로

$b=-6$

이때 $b=-6$을 $-\frac{b}{3}<-b-3$에 대입하면 $2<3$이 되어 조건을 만족시킨다.

즉 $a=3$일 때, $b=-6$

(iv) $a=4$일 때, $2x+b+3>0$

$\therefore x>\dfrac{-b-3}{2}$ …… ㉣

이때 ㉠, ㉣의 공통부분은 $x>-\dfrac{b}{a}$, 즉 $x>-\dfrac{b}{4}$이거나 $x>\dfrac{-b-3}{2}$이다.

따라서 연립부등식의 해가 $x>3$이려면 $-\dfrac{b}{4}$와 $\dfrac{-b-3}{2}$ 중 큰 수가 3이어야 한다.

$-\dfrac{b}{4}>\dfrac{-b-3}{2}$인 경우에는 $-\dfrac{b}{4}=3$이어야 하므로

$b=-12$

그런데 $b=-12$를 $-\dfrac{b}{4}>\dfrac{-b-3}{2}$에 대입하면 $3>\dfrac{9}{2}$가 되어 모순이다.

또 $-\dfrac{b}{4}<\dfrac{-b-3}{2}$인 경우에는 $\dfrac{-b-3}{2}=3$이어야 하므로

$b=-9$

이때 $b=-9$를 $-\dfrac{b}{4}<\dfrac{-b-3}{2}$에 대입하면 $\dfrac{9}{4}<3$이 되어 조건을 만족시킨다.

즉 $a=4$일 때, $b=-9$

Step 3 순서쌍 (a, b)의 개수를 구한다.

이상에서 연립부등식의 해가 $x>3$이 되도록 하는 순서쌍 (a, b)는

$(3, -6), (4, -9)$

의 2개이다. 답 2

0669 Step 1 조건 (가)를 이용하여 x, z를 각각 y에 대한 식으로 나타낸 후 조건 (나)의 부등식에 대입하여 푼다.

조건 (가)의

$x+3y=8$에서 $x=8-3y$ …… ㉠

$y+z=5$에서 $z=5-y$ …… ㉡

㉠, ㉡을 조건 (나)의 부등식에 대입하면

$8-3y<2y<4(5-y)$

$8-3y<2y$에서

$-5y<-8$ $\therefore y>\dfrac{8}{5}$ …… ㉢

$2y<4(5-y)$에서 $2y<20-4y$

$6y<20$ $\therefore y<\dfrac{10}{3}$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$\dfrac{8}{5}<y<\dfrac{10}{3}$

Step 2 조건 (가)를 이용하여 y를 x에 대한 식으로 나타낸 후 $\dfrac{8}{5}<y<\dfrac{10}{3}$에 대입하여 x의 값의 범위를 구한다.

$x+3y=8$에서 $3y=8-x$ $\therefore y=\dfrac{8-x}{3}$

이 식을 $\dfrac{8}{5}<y<\dfrac{10}{3}$에 대입하면 $\dfrac{8}{5}<\dfrac{8-x}{3}<\dfrac{10}{3}$

각 변에 15를 곱하면

$24<5(8-x)<50$, $24<40-5x<50$

$-16<-5x<10$ $\therefore -2<x<\dfrac{16}{5}$

Step 3 $5(a+b)$의 값을 구한다.

$a=-2$, $b=\dfrac{16}{5}$이므로

$5(a+b)=5\times\left(-2+\dfrac{16}{5}\right)=6$ 답 ①

0670 Step 1 세 변 중 가장 긴 변의 길이가 8이 될 수 없음을 확인한다.

둔각삼각형이 되려면 가장 긴 변의 길이의 제곱이 나머지 두 변의 길이의 제곱의 합보다 커야 한다.

(i) 가장 긴 변의 길이가 8일 때

$(x+2)^2+(10-x)^2=2x^2-16x+104$

$=2(x-4)^2+72>8^2$

이므로 예각삼각형이다.

Step 2 가장 긴 변의 길이가 $x+2$일 때, 둔각삼각형이 되도록 하는 자연수 x의 값을 구한다.

(ii) 가장 긴 변의 길이가 $x+2$일 때

둔각삼각형이 되려면

$\begin{cases} x+2<8+(10-x) & \cdots\cdots ㉠ \\ (x+2)^2>8^2+(10-x)^2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

이 성립해야 한다.

㉠에서 $2x<16$ $\therefore x<8$

㉡에서 $x^2+4x+4>64+100-20x+x^2$

$24x>160$ $\therefore x>\dfrac{20}{3}$

따라서 $\dfrac{20}{3}<x<8$이므로 조건을 만족시키는 자연수 x의 값은 7이다.

Step 3 가장 긴 변의 길이가 $10-x$일 때, 둔각삼각형이 되도록 하는 자연수 x의 값을 구한다.

(iii) 가장 긴 변의 길이가 $10-x$일 때

둔각삼각형이 되려면

$\begin{cases} 10-x<8+(x+2) & \cdots\cdots ㉢ \\ (10-x)^2>8^2+(x+2)^2 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

이 성립해야 한다.

㉢에서 $-2x<0$ $\therefore x>0$

㉣에서 $100-20x+x^2>64+x^2+4x+4$

$-24x>-32$ $\therefore x<\dfrac{4}{3}$

따라서 $0<x<\dfrac{4}{3}$이므로 조건을 만족시키는 자연수 x의 값은 1이다.

Step 4 모든 자연수 x의 값의 합을 구한다.

이상에서 구하는 모든 자연수 x의 값의 합은

$1+7=8$

답 8

만점 공략 노트

△ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$이고 c가 가장 긴 변의 길이일 때

① $c^2<a^2+b^2$ ➜ $\angle C<90°$인 예각삼각형이다.

② $c^2=a^2+b^2$ ➜ $\angle C=90°$인 직각삼각형이다.

③ $c^2>a^2+b^2$ ➜ $\angle C>90°$인 둔각삼각형이다.

0671 Step 1 주어진 부등식의 해가 $x>2$임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

부등식 $(a-2b)x<a-3b-2$의 해가 $x>2$이므로

$a-2b<0$ $\therefore x>\dfrac{a-3b-2}{a-2b}$

따라서 $\dfrac{a-3b-2}{a-2b}=2$이므로

$a-3b-2=2a-4b$ $\therefore b=a+2$

이때 $a-2b<0$에서 $a-2(a+2)<0$이므로

$-a-4<0$ $\therefore a>-4$

Step 2 $b=a+2$를 연립부등식을 이루는 두 부등식에 각각 대입하여 해를 구한다.

$b=a+2$를 $ax+5a<b(x-1)+4$에 대입하면

$ax+5a<(a+2)(x-1)+4$

$ax+5a<ax-a+2x-2+4$

$2x>6a-2$

$\therefore x>3a-1$ …… ㉠

$b=a+2$를 $ax-2b+4<x(b-3)+2a$에 대입하면

$ax-2(a+2)+4<x(a-1)+2a$

$ax-2a-4+4<ax-x+2a$

$\therefore x<4a$ …… ㉡

Step 3 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수 $f(a)$를 구한다.

주어진 연립부등식의 해가 존재하려면 ㉠, ㉡에서

$3a-1<4a$, 즉 $a>-1$

이어야 한다.

이때 연립부등식의 해는 $3a-1<x<4a$이고, a가 정수이므로

$f(a)=4a-(3a-1)-1=a$

한편 $-4<a\le-1$일 때는 주어진 연립부등식의 해가 존재하지 않으므로 $f(a)=0$이다.

$\therefore f(a)=\begin{cases}a & (a>-1)\\ 0 & (-4<a\le-1)\end{cases}$

Step 4 부등식을 만족시키는 정수 a의 개수를 구한다.

$-10-a<f(a)<10-a$에서

(i) $a>-1$일 때, $f(a)=a$이므로

$-10-a<a<10-a$

$-10-a<a$에서 $-2a<10$ $\therefore a>-5$

$a<10-a$에서 $2a<10$ $\therefore a<5$

즉 $-5<a<5$이고 $a>-1$이므로

$-1<a<5$

(ii) $-4<a\le-1$일 때, $f(a)=0$이므로

$-10-a<0<10-a$

$-10-a<0$에서 $a>-10$

$0<10-a$에서 $a<10$

즉 $-10<a<10$이고 $-4<a\le-1$이므로

$-4<a\le-1$

(i), (ii)에서 $-4<a<5$이므로 구하는 정수 a는

-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4

의 8개이다. 답 8

0672 Step 1 $|x-1|<4$를 만족시키는 정수 x의 값을 구한 후 주어진 연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 7이 되는 경우를 찾는다.

$|x-1|<4$에서 $-4<x-1<4$

$\therefore -3<x<5$

즉 $|x-1|<4$를 만족시키는 정수 x는

-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4

이 중 주어진 연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 7이 되는 경우는

$3+4=7$ 또는 $-2+(-1)+0+1+2+3+4=7$

이다.

Step 2 각 경우에 대하여 a의 값의 범위를 구한다.

$2x-5\le3x-a$에서

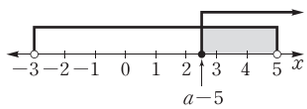
$x\ge a-5$

(i) 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 3, 4일 때

오른쪽 그림에서

$2<a-5\le3$이어야 하므로

$7<a\le8$

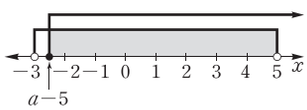


(ii) 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4일 때

오른쪽 그림에서

$a-5\le-2$이어야 하므로

$a\le3$



Step 3 자연수 a의 개수를 구한다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는

$a\le3$ 또는 $7<a\le8$

이므로 자연수 a는 1, 2, 3, 8의 4개이다. 답 ③

0673 Step 1 $f(x)=|3x-6|+|2x+4|$라 하고 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

$f(x)=|3x-6|+|2x+4|$라 하면

(i) $x<-2$일 때, $3x-6<0$, $2x+4<0$이므로

$f(x)=-(3x-6)-(2x+4)$

$=-5x+2$

(ii) $-2\le x<2$일 때, $3x-6<0$, $2x+4\ge0$이므로

$f(x)=-(3x-6)+(2x+4)$

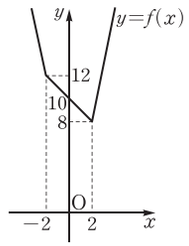
$=-x+10$

(iii) $x\ge2$일 때, $3x-6\ge0$, $2x+4>0$이므로

$f(x)=(3x-6)+(2x+4)$

$=5x-2$

이상에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



Step 2 주어진 부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 0이 되도록 하는 자연수 k의 조건을 구한다.

부등식 $|3x-6|+|2x+4|\le k$를 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 0이 되려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=k$와 만나거나 직선 $y=k$보다 아래쪽에 위치할 때의 x의 값의 범위에 포함되는 정수가 자연수 n에 대하여 $-n$, $-n+1$, …, $n-1$, n이어야 한다.

$n\ge2$일 때

$x=-n-1$에서 $f(-n-1)=-5\times(-n-1)+2=5n+7$

$x=-n$에서 $f(-n)=-5\times(-n)+2=5n+2$

$x=n$에서 $f(n)=5n-2$

$x=n+1$에서 $f(n+1)=5(n+1)-2=5n+3$

즉 $5n+2\le k<5n+3$일 때 부등식 $|3x-6|+|2x+4|\le k$를 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 0이 된다.

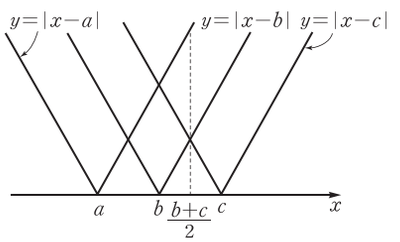
따라서 $n\ge2$인 자연수 n에 대하여 $k=5n+2$일 때 조건을 만족시킨다.

Step 3 40 이하의 자연수 k의 개수를 구한다.

40 이하의 자연수 k는 12, 17, 22, 27, 32, 37의 6개이다. 답 6

0674 Step 1 $a<b<c$일 때, 세 함수 $y=|x-a|$, $y=|x-b|$, $y=|x-c|$의 그래프를 그린다.

$a<b<c$일 때, 세 함수 $y=|x-a|$, $y=|x-b|$, $y=|x-c|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



Step 2 그래프를 이용하여 x의 값의 범위를 구한다.

위의 그림에서 부등식 $|x-a|>|x-b|>|x-c|$의 해는 두 직선 $y=x-b$, $y=-x+c$의 교점의 x좌표인 $\frac{b+c}{2}$보다 클 때이므로 $x>\frac{b+c}{2}$ 답 ⑤

참고 두 직선 $y=x-b$, $y=-x+c$의 교점의 x좌표는

$x-b=-x+c$에서 $2x=b+c$ $\therefore x=\frac{b+c}{2}$

0675 Step 1 부등식 $|x-2|+|x-4|+|x-6|>5$의 해를 구한다.

$|x-2|+|x-4|+|x-6|>5$에서

(i) $x<2$일 때, $x-2<0$, $x-4<0$, $x-6<0$이므로

$-(x-2)-(x-4)-(x-6)>5$

$-3x+12>5$, $-3x>-7$ $\therefore x<\frac{7}{3}$

그런데 $x<2$이므로 $x<2$

(ii) $2\le x<4$일 때, $x-2\ge0$, $x-4<0$, $x-6<0$이므로

$(x-2)-(x-4)-(x-6)>5$

$-x+8>5$ $\therefore x<3$

그런데 $2\le x<4$이므로 $2\le x<3$

(iii) $4\le x<6$일 때, $x-2>0$, $x-4\ge0$, $x-6<0$이므로

$(x-2)+(x-4)-(x-6)>5$

$\therefore x>5$

그런데 $4\le x<6$이므로 $5<x<6$

(iv) $x\ge6$일 때, $x-2>0$, $x-4>0$, $x-6\ge0$이므로

$(x-2)+(x-4)+(x-6)>5$

$3x-12>5$, $3x>17$

$\therefore x>\frac{17}{3}$

그런데 $x\ge6$이므로 $x\ge6$

이상에서 부등식 $|x-2|+|x-4|+|x-6|>5$의 해는

$x<3$ 또는 $x>5$

Step 2 부등식 $|2x-a|\le4$의 해를 구한다.

$|2x-a|\le4$에서

$-4\le2x-a\le4$, $a-4\le2x\le a+4$

$\therefore \frac{a-4}{2}\le x\le\frac{a+4}{2}$ …… ㉠

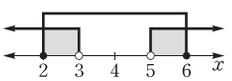
Step 3 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개 존재하도록 하는 자연수 a의 값의 범위를 구한다.

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수인 해가 존재하려면

$\frac{a-4}{2}\le2$ 또는 $\frac{a+4}{2}\ge6$이어야 한다.

(i) $\frac{a-4}{2}=2$ 또는 $\frac{a+4}{2}=6$, 즉 $a=8$일 때

㉠에서 $2\le x\le6$이므로 오른쪽 그림에서 주어진 연립부등식의 해는

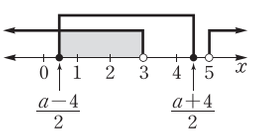


$2\le x<3$ 또는 $5<x\le6$

이때 이를 만족시키는 정수 x는 2, 6의 2개이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $\frac{a-4}{2}<2$일 때

오른쪽 그림에서 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이려면

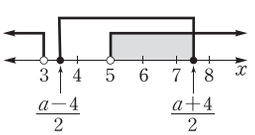


$0<\frac{a-4}{2}\le1$

$0<a-4\le2$ $\therefore 4<a\le6$

(iii) $\frac{a+4}{2}>6$일 때

오른쪽 그림에서 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이려면



$7\le\frac{a+4}{2}<8$

$14\le a+4<16$ $\therefore 10\le a<12$

이상에서

$4<a\le6$ 또는 $a=8$ 또는 $10\le a<12$

Step 4 모든 자연수 a의 값의 합을 구한다.

자연수 a는

5, 6, 8, 10, 11

이므로 구하는 합은

$5+6+8+10+11=40$ 답 40

시험 만점 완성하기

본책 134~137쪽

0676 전략 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 공통부분을 구한다.

$5x-(x-4)\geq 2x$에서 $5x-x+4\geq 2x$

$2x\geq -4$ $\therefore x\geq -2$

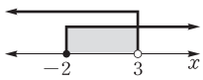
$\frac{x-1}{2}<\frac{x+2}{5}$의 양변에 10을 곱하면

$5(x-1)<2(x+2)$, $5x-5<2x+4$

$3x<9$ $\therefore x<3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$-2\leq x<3$



이므로 x의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0677 전략 주어진 부등식을 연립부등식의 꼴로 나타낸 후 그 해를 구한다.

주어진 부등식은

$\begin{cases} 3(x-2)\leq x+8 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+8\leq 5+4(x-1) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $3x-6\leq x+8$

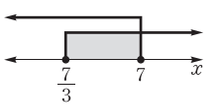
$2x\leq 14$ $\therefore x\leq 7$

㉡에서 $x+8\leq 5+4x-4$

$-3x\leq -7$ $\therefore x\geq \frac{7}{3}$

따라서 주어진 부등식의 해는

$\frac{7}{3}\leq x\leq 7$



즉 정수 x는 3, 4, 5, 6, 7이므로 그 합은

$3+4+5+6+7=25$ 답 ③

0678 전략 연립부등식을 푼 후 주어진 해와 비교한다.

$\frac{x}{8}>a+\frac{x}{4}$의 양변에 8을 곱하면

$x>8a+2x$ $\therefore x<-8a$

$0.9-0.5x<\frac{1}{5}x-\frac{1}{2}$의 양변에 10을 곱하면

$9-5x<2x-5$, $-7x<-14$ $\therefore x>2$

주어진 연립부등식의 해가 $b<x<8$이므로

$-8a=8$, $b=2$ $\therefore a=-1$, $b=2$

$\therefore a+b=1$ 답 ②

0679 전략 주어진 부등식을 연립부등식의 꼴로 나타내어 푼 후 주어진 해와 비교한다.

주어진 부등식은

$\begin{cases} ax-4<a(x+1)-b & \cdots\cdots ㉠ \\ a(x+1)-b<3x-b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $ax-4<ax+a-b$

$\therefore 0\times x<a-b+4$ $\cdots\cdots ㉢$

주어진 부등식의 해가 존재하므로

$a-b+4>0$ $\cdots\cdots ㉣$

이고, 부등식 ㉢의 해는 모든 실수이다.

㉡에서 $ax+a-b<3x-b$

$\therefore (a-3)x<-a$ $\cdots\cdots ㉤$

주어진 부등식의 해가 $x>2$이므로 ㉤에서 $a-3<0$이고

$x>-\frac{a}{a-3}$

즉 $-\frac{a}{a-3}=2$이므로 $2a-6=-a$

$3a=6$ $\therefore a=2$

㉣에 $a=2$를 대입하면

$2-b+4>0$ $\therefore b<6$

따라서 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$

의 5개이다. 답 ④

0680 전략 각 부등식의 해를 구한 후 주어진 조건을 만족시키도록 수직선 위에 나타낸다.

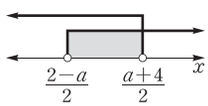
$6x+a>4x+2$에서

$2x>2-a$ $\therefore x>\frac{2-a}{2}$

$5x-8<x+2a$에서

$4x<2a+8$ $\therefore x<\frac{a+4}{2}$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$\frac{2-a}{2}<\frac{a+4}{2}$

$2-a<a+4$, $-2a<2$

$\therefore a>-1$ $\cdots\cdots ㉠$

주어진 연립부등식을 만족시키는 음수 x는 존재하지 않으므로

$\frac{2-a}{2}\geq 0$, $2-a\geq 0$

$\therefore a\leq 2$ $\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1<a\leq 2$ 답 ④

0681 전략 각 부등식의 해를 구한 후 주어진 조건을 만족시키도록 수직선 위에 나타낸다.

$\frac{1+x}{3}\leq 2-x$에서

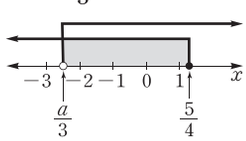
$1+x\leq 3(2-x)$, $1+x\leq 6-3x$

$4x\leq 5$ $\therefore x\leq \frac{5}{4}$

$3x-(x+a)>-x$에서

$3x-x-a>-x$, $3x>a$ $\therefore x>\frac{a}{3}$

주어진 연립부등식을 만족시키는 음의 정수 x가 -1과 -2뿐이므로 오른쪽 그림에서



$-3\leq \frac{a}{3}<-2$

$\therefore -9\leq a<-6$

따라서 실수 a의 최솟값은 -9이다. 답 ②

0682 전략 동아리의 회원 수를 x라 하고 연립부등식을 세운다.

동아리의 회원 수를 x라 하면 필요한 경비는

$(3000x-2000)$원

이므로

$$\begin{cases}(3000x-2000)-2500x<3500\\3500x-(3000x-2000)\geq 7000\end{cases}$$

$(3000x-2000)-2500x<3500$에서

$500x<5500$ $\therefore x<11$ …… ㉠

$3500x-(3000x-2000)\geq 7000$에서

$3500x-3000x+2000\geq 7000$

$500x\geq 5000$ $\therefore x\geq 10$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$10\leq x<11$

따라서 회원 수는 10이다. 답 ③

0683 전략 부등식 $|x-a|<b$ $(b>0)$의 해는 $a-b<x<a+b$임을 이용한다.

$|x-3a|<3$에서 $-3<x-3a<3$

$\therefore 3a-3<x<3a+3$

a는 자연수이므로 부등식을 만족시키는 정수 x는

$3a-2$, $3a-1$, $3a$, $3a+1$, $3a+2$

즉 $(3a-2)+(3a-1)+3a+(3a+1)+(3a+2)=45$이므로

$15a=45$ $\therefore a=3$ 답 ①

0684 전략 주어진 이차방정식이 서로 다른 두 허근을 가짐을 이용하여 a, b의 부호를 구한다.

이차방정식 $ax^2-b=0$이 서로 다른 두 허근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$D=4ab<0$ $\therefore ab<0$

또 부등식 $|ax-6|\geq b$의 해가 존재하므로 $a<0$, $b>0$이어야 한다.

$|ax-6|\geq b$에서 $ax-6\leq -b$ 또는 $ax-6\geq b$

$ax\leq 6-b$ 또는 $ax\geq 6+b$

$\therefore x\geq \dfrac{6-b}{a}$ 또는 $x\leq \dfrac{6+b}{a}$

이것이 $x\leq -5$ 또는 $x\geq 1$과 같아야 하므로

$\dfrac{6-b}{a}=1$, $\dfrac{6+b}{a}=-5$

$\therefore a+b=6$, $5a+b=-6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=9$

$\therefore b-a=12$ 답 ④

0685 전략 $x<3$, $x\geq 3$으로 범위를 나누어 부등식을 푼다.

$|4x-12|>2x+3$에서

(i) $x<3$일 때, $4x-12<0$이므로

$-(4x-12)>2x+3$, $-4x+12>2x+3$

$-6x>-9$ $\therefore x<\dfrac{3}{2}$

그런데 $x<3$이므로 $x<\dfrac{3}{2}$

(ii) $x\geq 3$일 때, $4x-12\geq 0$이므로

$4x-12>2x+3$, $2x>15$

$\therefore x>\dfrac{15}{2}$

그런데 $x\geq 3$이므로 $x>\dfrac{15}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x<\dfrac{3}{2}$ 또는 $x>\dfrac{15}{2}$

따라서 10 이하의 자연수 x는 1, 8, 9, 10의 4개이다. 답 ②

0686 전략 $x<1$, $1\leq x<3$, $x\geq 3$으로 범위를 나누어 부등식을 푼다.

$2|x-3|+|x-1|\geq 13$에서

(i) $x<1$일 때, $x-3<0$, $x-1<0$이므로

$-2(x-3)-(x-1)\geq 13$

$-2x+6-x+1\geq 13$

$-3x\geq 6$ $\therefore x\leq -2$

그런데 $x<1$이므로 $x\leq -2$

(ii) $1\leq x<3$일 때, $x-3<0$, $x-1\geq 0$이므로

$-2(x-3)+(x-1)\geq 13$

$-2x+6+x-1\geq 13$

$-x\geq 8$ $\therefore x\leq -8$

그런데 $1\leq x<3$이므로 해는 없다.

(iii) $x\geq 3$일 때, $x-3\geq 0$, $x-1>0$이므로

$2(x-3)+(x-1)\geq 13$

$2x-6+x-1\geq 13$

$3x\geq 20$ $\therefore x\geq \dfrac{20}{3}$

그런데 $x\geq 3$이므로 $x\geq \dfrac{20}{3}$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$x\leq -2$ 또는 $x\geq \dfrac{20}{3}$

따라서 자연수 x의 최솟값은 7이다. 답 ②

0687 전략 부등식 $|ax+b|<c$가 해를 가지려면 $c>0$이어야 함을 이용한다.

$\left|\dfrac{1}{2}x-1\right|+2k<6$에서

$\left|\dfrac{1}{2}x-1\right|<6-2k$

이 부등식이 해를 가지려면

$6-2k>0$, $-2k>-6$

$\therefore k<3$ 답 ③

0688 전략 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 값을 구한 후 일차방정식에 대입한다.

$0.4(x-1)<x+2$의 양변에 10을 곱하면

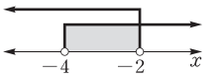
$4(x-1)<10x+20$, $4x-4<10x+20$

$-6x<24$ $\therefore x>-4$

$3x-2>5x+2$에서 $-2x>4$

$\therefore x<-2$

따라서 주어진 연립부등식의 해는



$-4<x<-2$

이므로 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 값은 -3이다.

$x=-3$을 $ax-7=5$에 대입하면

$-3a-7=5$, $-3a=12$

$\therefore a=-4$ 답 -4

0689 전략 먼저 가능한 소수 x의 값을 구한 후 각 경우에 대하여 소수 y의 값을 구한다.

$x+14<y<30-2x$에서 $x+14<30-2x$이므로

$3x<16$ $\therefore x<\frac{16}{3}$

이때 x는 소수이므로 가능한 x의 값은 2, 3, 5이다.

(i) $x=2$일 때, $16<y<26$이므로 가능한 y의 값은 17, 19, 23

(ii) $x=3$일 때, $17<y<24$이므로 가능한 y의 값은 19, 23

(iii) $x=5$일 때, $19<y<20$이므로 가능한 y의 값은 없다.

이상에서 $x+y$의 최댓값은 $x=3$, $y=23$일 때이므로

$x+y=26$ 답 26

0690 전략 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분이 없도록 해를 수직선 위에 나타낸다.

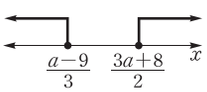
$4x+9\le x+a$에서 $3x\le a-9$

$\therefore x\le\frac{a-9}{3}$

$-x+3a\le x-8$에서 $-2x\le-3a-8$

$\therefore x\ge\frac{3a+8}{2}$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$\frac{a-9}{3}<\frac{3a+8}{2}$

$2(a-9)<3(3a+8)$, $2a-18<9a+24$

$-7a<42$ $\therefore a>-6$

따라서 음의 정수 a는 -5, -4, -3, -2, -1의 5개이다.

답 5

0691 전략 우리의 개수를 x라 하고 부등식을 세운다.

우리의 개수를 x라 하면 돼지는 $(5x+3)$마리이므로

$6(x-2)+1\le5x+3\le6(x-2)+6$

$6(x-2)+1\le5x+3$에서

$6x-12+1\le5x+3$ $\therefore x\le14$ …… ㉠

$5x+3\le6(x-2)+6$에서

$5x+3\le6x-12+6$ $\therefore x\ge9$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$9\le x\le14$

따라서 돼지는 최대 $5\times14+3=73$(마리)이다. 답 73마리

0692 전략 부등식 $|x-a|<b$ $(b>0)$의 해는 $a-b<x<a+b$임을 이용한다.

$|x+2k|<k^2$에서 $-k^2<x+2k<k^2$

$\therefore -k^2-2k<x<k^2-2k$

이 부등식의 해가 $-3<x<15$이므로

$-k^2-2k=-3$, $k^2-2k=15$

(i) $-k^2-2k=-3$에서

$k^2+2k-3=0$, $(k+3)(k-1)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=1$

(ii) $k^2-2k=15$에서

$k^2-2k-15=0$, $(k+3)(k-5)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=5$

(i), (ii)에서 $k=-3$

이때 $|x-1|<-k$에서 $|x-1|<3$이므로

$-3<x-1<3$ $\therefore -2<x<4$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3이므로 그 합은

$-1+0+1+2+3=5$ 답 5

0693 전략 $a=n$, $b=n+6$일 때 주어진 부등식의 해를 구한다.

$f(n, n+6)$의 값은 부등식

$|x|+|x-n|<n+6$ …… ㉠

을 만족시키는 정수 x의 개수와 같다.

(i) $x<0$일 때, $x<0$, $x-n<0$이므로 ㉠에서

$-x-(x-n)<n+6$

$-2x<6$ $\therefore x>-3$

그런데 $x<0$이므로 $-3<x<0$

(ii) $0\le x<n$일 때, $x\ge0$, $x-n<0$이므로 ㉠에서

$x-(x-n)<n+6$

$\therefore 0\times x<6$

즉 해는 모든 실수이다.

그런데 $0\le x<n$이므로 $0\le x<n$

(iii) $x\ge n$일 때, $x>0$, $x-n\ge0$이므로 ㉠에서

$x+(x-n)<n+6$

$2x<2n+6$ $\therefore x<n+3$

그런데 $x\ge n$이므로 $n\le x<n+3$

이상에서 부등식 ㉠의 해는 $-3<x<n+3$이고, n이 자연수이므로 정수 x의 개수는

$(n+3)-(-3)-1=n+5$

$\therefore f(n, n+6)=n+5$

따라서 $f(n, n+6)=12$에서

$n+5=12$ $\therefore n=7$ 답 7

0694 전략 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분이 주어진 연립부등식의 해가 되도록 하는 a의 값을 구한다.

$\frac{3x+a}{2}\le\frac{x}{6}+5$의 양변에 6을 곱하면

$3(3x+a)\le x+30$, $9x+3a\le x+30$

$8x\le30-3a$ $\therefore x\le\frac{30-3a}{8}$

$\frac{x}{3}-\frac{2x+1}{4}\geq\frac{x-3}{6}$의 양변에 12를 곱하면

$4x-3(2x+1)\geq2(x-3)$, $4x-6x-3\geq2x-6$

$-4x\geq-3$ $\therefore x\leq\frac{3}{4}$ … ❶

주어진 연립부등식의 해가 $x\leq-\frac{3}{4}$이므로

$\frac{30-3a}{8}=-\frac{3}{4}$, $30-3a=-6$

$-3a=-36$ $\therefore a=12$ … ❷

답 12

단계	채점 요소	배점
❶	각 부등식의 해 구하기	2점
❷	a의 값 구하기	3점

0695 전략 연립부등식의 꼴로 나타내어 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분에 속하는 정수가 1개뿐이도록 하는 a의 값의 범위를 구한다.

주어진 부등식은

$\begin{cases}\frac{2(a-x)}{5}<3-x & \cdots\cdots ㉠\\ 3-x<\frac{5-x}{3} & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

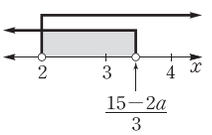
㉠의 양변에 5를 곱하면 $2(a-x)<5(3-x)$

$2a-2x<15-5x$, $3x<15-2a$ $\therefore x<\frac{15-2a}{3}$

㉡의 양변에 3을 곱하면 $3(3-x)<5-x$

$9-3x<5-x$, $-2x<-4$ $\therefore x>2$ … ❶

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 1개뿐이려면 오른쪽 그림에서



$3<\frac{15-2a}{3}\leq4$

$9<15-2a\leq12$

$-6<-2a\leq-3$ $\therefore \frac{3}{2}\leq a<3$ … ❷

따라서 자연수 a의 값은 2이다. … ❸

답 2

단계	채점 요소	배점
❶	각 부등식의 해 구하기	2점
❷	a의 값의 범위 구하기	2점
❸	자연수 a의 값 구하기	1점

0696 전략 부등식 $|x-a|<b$ $(b>0)$의 해는 $a-b<x<a+b$임을 이용한다.

$|6-|x-2||<8$에서 $-8<6-|x-2|<8$

$-14<-|x-2|<2$ $\therefore -2<|x-2|<14$

그런데 $|x-2|\geq0$이므로

$0\leq|x-2|<14$, $-14<x-2<14$

$\therefore -12<x<16$

$\left|\frac{1}{2}x+b\right|<a$에서

$-a<\frac{1}{2}x+b<a$, $-a-b<\frac{1}{2}x<a-b$

$\therefore -2a-2b<x<2a-2b$ … ❶

두 부등식의 해가 서로 같으므로

$-2a-2b=-12$, $2a-2b=16$

$\therefore a+b=6$, $a-b=8$

두 식을 연립하여 풀면 $a=7$, $b=-1$ … ❷

$\therefore ab=-7$ … ❸

답 -7

단계	채점 요소	배점
❶	각 부등식의 해 구하기	3점
❷	a, b의 값 구하기	2점
❸	ab의 값 구하기	1점

0697 전략 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분이 없도록 해를 수직선 위에 나타낸다.

$|10-3x|<x+2$에서

(i) $x<\frac{10}{3}$일 때, $10-3x>0$이므로

$10-3x<x+2$, $-4x<-8$ $\therefore x>2$

그런데 $x<\frac{10}{3}$이므로 $2<x<\frac{10}{3}$

(ii) $x\geq\frac{10}{3}$일 때, $10-3x\leq0$이므로

$-(10-3x)<x+2$, $-10+3x<x+2$

$2x<12$ $\therefore x<6$

그런데 $x\geq\frac{10}{3}$이므로 $\frac{10}{3}\leq x<6$

(i), (ii)에서 부등식 $|10-3x|<x+2$의 해는

$2<x<6$ … ❶

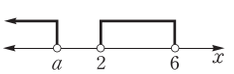
$ax-a^2>2(x-a)$에서 $ax-a^2>2x-2a$

$\therefore (a-2)x>a(a-2)$ …… ㉠ … ❷

(iii) $a<2$일 때, $a-2<0$이므로 부등식 ㉠의 해는

$x<a$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



$a\leq2$

그런데 $a<2$이므로 $a<2$

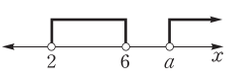
(iv) $a=2$일 때, 부등식 ㉠은 $0\times x>0$이므로 그 해는 없다.

즉 주어진 연립부등식의 해는 없다.

(v) $a>2$일 때, $a-2>0$이므로 부등식 ㉠의 해는

$x>a$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



$a\geq6$

그런데 $a>2$이므로 $a\geq6$

(iii)~(v)에서 a의 값의 범위는

$a\leq2$ 또는 $a\geq6$ … ❸

답 $a\leq2$ 또는 $a\geq6$

단계	채점 요소	배점
❶	부등식 $|10-3x|<x+2$의 해 구하기	2점
❷	부등식 $ax-a^2>2(x-a)$ 정리하기	1점
❸	a의 값의 범위 구하기	3점

Ⅱ 방정식과 부등식

09 이차부등식과 연립이차부등식

셀프 CHECK

본책 138~139쪽

A 답 (1) $x<-1$ 또는 $x>4$ (2) $-1\le x\le 4$

B 답 (1) $-2<x<5$ (2) $x\le\frac{1}{2}$ 또는 $x\ge 4$
(3) 모든 실수 (4) 해는 없다.

C 답 (1) $x^2+4x-12<0$ (2) $x^2-5x+4\ge 0$

D 답 (1) $0<k<12$ (2) $k\ge\frac{13}{4}$

E 답 (1) $-1\le x<2$ (2) $0\le x<5$
(3) $-3\le x<-2$ 또는 $2<x\le 4$

F 답 $-\frac{3}{2}\le k<\frac{1}{2}$

G 답 $k\le 2$

내신유형 다지기

본책 140~151쪽

유형 126 그래프를 이용한 부등식의 풀이

본책 140쪽

(1) 부등식 $f(x)>0$의 해
➜ $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위
(2) 부등식 $f(x)>g(x)$의 해
➜ $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위

0698 $f(x)g(x)>0$에서
$f(x)>0,\ g(x)>0$ 또는 $f(x)<0,\ g(x)<0$
(i) $f(x)>0,\ g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는
$a<x<b$
(ii) $f(x)<0,\ g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는
$c<x<d$
(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는
$a<x<b$ 또는 $c<x<d$ 답 ④

0699 $ax^2+(b-m)x+c-n\le 0$에서
$ax^2+bx+c-(mx+n)\le 0$
$\therefore\ ax^2+bx+c\le mx+n$
$ax^2+bx+c\le mx+n$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로
$-4\le x\le 1$ 답 $-4\le x\le 1$

0700 $\{f(x)\}^2\ge f(x)g(x)$에서
$\{f(x)\}^2-f(x)g(x)\ge 0,\quad f(x)\{f(x)-g(x)\}\ge 0$
$\therefore\ f(x)\ge 0,\ f(x)\ge g(x)$ 또는 $f(x)\le 0,\ f(x)\le g(x)$
(i) $f(x)\ge 0,\ f(x)\ge g(x)$를 만족시키는 x의 값의 범위는
$-1\le x\le 3$
(ii) $f(x)\le 0,\ f(x)\le g(x)$를 만족시키는 x의 값의 범위는
$x\le -2$ 또는 $x\ge 3$
(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는
$x\le -2$ 또는 $x\ge -1$ 답 $x\le -2$ 또는 $x\ge -1$

유형 127 이차부등식의 풀이

본책 140쪽

이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 할 때, 이차부등식 $f(x)>0$의 해는 다음과 같이 구한다.
(1) $D>0$이면 $f(x)$를 인수분해하거나 근의 공식을 이용한다.
(2) $D\le 0$이면 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 꼴로 변형한다.

0701 $(2x+3)(x-2)\le 3x$에서
$2x^2-4x-6\le 0,\quad x^2-2x-3\le 0$
$(x+1)(x-3)\le 0\quad\therefore\ -1\le x\le 3$
따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다. 답 5

0702 ① $x^2+8x+16=(x+4)^2\ge 0$
즉 $x^2+8x+16>0$의 해는 $x\ne -4$인 모든 실수이다.
② $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$
즉 $x^2-x+1>0$의 해는 모든 실수이다.
③ $9x^2-6x+1=(3x-1)^2\ge 0$
즉 $9x^2-6x+1\le 0$의 해는 $x=\frac{1}{3}$이다.
④ $4x^2<20x-25$에서 $4x^2-20x+25<0$
그런데 $4x^2-20x+25=(2x-5)^2\ge 0$이므로 주어진 부등식의 해는 없다.
⑤ $3x^2+2\ge -x$에서 $3x^2+x+2\ge 0$
그런데 $3x^2+x+2=3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{23}{12}\ge\frac{23}{12}$이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.
따라서 해가 존재하지 않는 것은 ④이다. 답 ④

0703 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-4,\ 0)$, $(1,\ 0)$에서 만나므로
$f(x)=a(x+4)(x-1)\ (a>0)$
이라 하자.
이 그래프가 점 $(0,\ -2)$를 지나므로
$-4a=-2\quad\therefore\ a=\frac{1}{2}$
$\therefore\ f(x)=\frac{1}{2}(x+4)(x-1)$ … ❶
$f(x)<3$에서 $\frac{1}{2}(x+4)(x-1)<3$
$(x+4)(x-1)<6,\quad x^2+3x-10<0$
$(x+5)(x-2)<0\quad\therefore\ -5<x<2$ … ❷

따라서 $\alpha=-5$, $\beta=2$이므로

$\alpha+\beta=-3$ … ❸

답 -3

단계	채점 요소	비율
❶	$f(x)$ 구하기	40 %
❷	부등식 $f(x)<3$의 해 구하기	50 %
❸	$\alpha+\beta$의 값 구하기	10 %

0704 $ax^2-4ax+5a>0$에서

$a(x^2-4x+5)>0$ …… ㉠

ㄱ. $a=0$이면 부등식 ㉠은

$0\times(x^2-4x+5)>0$

이므로 해는 없다. (참)

ㄴ. $a>0$이면 부등식 ㉠은

$x^2-4x+5>0$, 즉 $(x-2)^2+1>0$

이므로 해는 모든 실수이다. (거짓)

ㄷ. $a<0$이면 부등식 ㉠은

$x^2-4x+5<0$, 즉 $(x-2)^2+1<0$

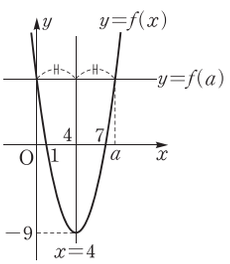
이므로 해는 없다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

0705 $f(x)=(x-1)(x-7)=x^2-8x+7$

$=(x-4)^2-9$

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이고 부등식 $f(x)<f(a)$의 해가 $0<x<a$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(a)$가 만나는 두 점의 x좌표는 0, a이다.



즉 $4-0=a-4$에서 $a=8$

$f(x)<2a$에서 $(x-1)(x-7)<16$

$x^2-8x-9<0$, $(x+1)(x-9)<0$

$\therefore -1<x<9$

따라서 정수 x는 0, 1, 2, …, 8의 9개이다. 답 9

유형 128 절댓값 기호를 포함한 이차부등식 → 본책 141쪽

$|A|=\begin{cases} A & (A\geq 0) \\ -A & (A<0) \end{cases}$임을 이용하여 절댓값 기호를 없앤다.

이때 A가 x에 대한 다항식이면 $A=0$이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 푼다.

0706 $x^2-2x-15<6|x-1|$에서

(i) $x<1$일 때, $x-1<0$이므로

$x^2-2x-15<-6(x-1)$, $x^2+4x-21<0$

$(x+7)(x-3)<0$ $\therefore -7<x<3$

그런데 $x<1$이므로 $-7<x<1$

(ii) $x\geq 1$일 때, $x-1\geq 0$이므로

$x^2-2x-15<6(x-1)$, $x^2-8x-9<0$

$(x+1)(x-9)<0$ $\therefore -1<x<9$

그런데 $x\geq 1$이므로 $1\leq x<9$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-7<x<9$

이므로 $\alpha=-7$, $\beta=9$ $\therefore \beta-\alpha=16$ 답 ④

0707 $|x^2-5|>4x$에서

(i) $x^2<5$, 즉 $-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$일 때, $x^2-5<0$이므로

$-(x^2-5)>4x$, $x^2+4x-5<0$

$(x+5)(x-1)<0$ $\therefore -5<x<1$

그런데 $-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$이므로

$-\sqrt{5}<x<1$ … ❶

(ii) $x^2\geq 5$, 즉 $x\leq-\sqrt{5}$ 또는 $x\geq\sqrt{5}$일 때, $x^2-5\geq 0$이므로

$x^2-5>4x$, $x^2-4x-5>0$

$(x+1)(x-5)>0$ $\therefore x<-1$ 또는 $x>5$

그런데 $x\leq-\sqrt{5}$ 또는 $x\geq\sqrt{5}$이므로

$x\leq-\sqrt{5}$ 또는 $x>5$ … ❷

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x<1$ 또는 $x>5$ … ❸

답 $x<1$ 또는 $x>5$

단계	채점 요소	비율
❶	$x^2<5$일 때, 부등식의 해 구하기	40 %
❷	$x^2\geq 5$일 때, 부등식의 해 구하기	40 %
❸	주어진 부등식의 해 구하기	20 %

0708 $x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$에서

$|x^2+2x+2|=x^2+2x+2$

이므로 주어진 부등식은 $x^2+2x+2\leq|2x+8|$

(i) $x<-4$일 때, $2x+8<0$이므로

$x^2+2x+2\leq-(2x+8)$, $x^2+4x+10\leq 0$

$\therefore (x+2)^2+6\leq 0$

그런데 모든 실수 x에 대하여 $(x+2)^2+6>0$이므로 해는 없다.

(ii) $x\geq -4$일 때, $2x+8\geq 0$이므로

$x^2+2x+2\leq 2x+8$, $x^2\leq 6$

$\therefore -\sqrt{6}\leq x\leq\sqrt{6}$

그런데 $x\geq -4$이므로 $-\sqrt{6}\leq x\leq\sqrt{6}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-\sqrt{6}\leq x\leq\sqrt{6}$ 답 ⑤

유형 129 해가 주어진 이차부등식 → 본책 141쪽

(1) 해가 $\alpha<x<\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식

➡ $(x-\alpha)(x-\beta)<0$

(2) 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$ $(\alpha<\beta)$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식

➡ $(x-\alpha)(x-\beta)>0$

0709 $ax^2+6x+b>0$의 해가 $x<-4$ 또는 $x>1$이므로
$a>0$
해가 $x<-4$ 또는 $x>1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+4)(x-1)>0$, 즉 $x^2+3x-4>0$
$a>0$이므로 양변에 a를 곱하면
$ax^2+3ax-4a>0$
이 부등식이 $ax^2+6x+b>0$과 같으므로
$3a=6$, $-4a=b$ $\therefore a=2$, $b=-8$
이것을 $x^2-ax+3b<0$에 대입하면
$x^2-2x-24<0$, $(x+4)(x-6)<0$
$\therefore -4<x<6$ 답 $-4<x<6$

0710 해가 $x=-5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+5)^2\le 0$ $\therefore x^2+10x+25\le 0$
이 부등식이 $x^2+ax+b\le 0$과 같으므로
$a=10$, $b=25$
이것을 $ax^2+15x-b<0$에 대입하면
$10x^2+15x-25<0$, $2x^2+3x-5<0$
$(2x+5)(x-1)<0$ $\therefore -\frac{5}{2}<x<1$
따라서 정수 x는 -2, -1, 0이므로 구하는 합은
$-2+(-1)+0=-3$ 답 ②

0711 해가 $x\le\alpha$ 또는 $x\ge\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-\alpha)(x-\beta)\ge 0$
$\therefore x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\ge 0$
이 부등식이 $x^2+ax+3\ge 0$과 같으므로
$a=-(\alpha+\beta)$, $3=\alpha\beta$ …… ㉠
해가 $\alpha+2\le x\le\beta+2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$\{x-(\alpha+2)\}\{x-(\beta+2)\}\le 0$
$\therefore x^2-(\alpha+\beta+4)x+(\alpha+2)(\beta+2)\le 0$
이 부등식이 $x^2-8x+b\le 0$과 같으므로
$8=\alpha+\beta+4$, $b=(\alpha+2)(\beta+2)$ …… ㉡
㉡에서 $\alpha+\beta=4$이므로 ㉠에서 $a=-(\alpha+\beta)=-4$
㉠에서 $\alpha\beta=3$이므로 ㉡에서
$b=(\alpha+2)(\beta+2)=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4$
$=3+2\times 4+4=15$
$\therefore a+b=11$ 답 11

0712 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{3}$이므로
$a<0$
해가 $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{3}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)<0$ $\therefore x^2-\frac{7}{12}x+\frac{1}{12}<0$
양변에 a를 곱하면
$ax^2-\frac{7}{12}ax+\frac{1}{12}a>0$ ($\because a<0$)
이 부등식이 $ax^2+bx+c>0$과 같으므로
$b=-\frac{7}{12}a$, $c=\frac{1}{12}a$
이것을 $cx^2+bx+a>0$에 대입하면
$\frac{1}{12}ax^2-\frac{7}{12}ax+a>0$
$x^2-7x+12<0$ ($\because a<0$)
$(x-3)(x-4)<0$ $\therefore 3<x<4$ 답 $3<x<4$

0713 $x^2-6x+5>3|x-3|$에서
(i) $x<3$일 때, $x-3<0$이므로
$x^2-6x+5>-3(x-3)$, $x^2-3x-4>0$
$(x+1)(x-4)>0$ $\therefore x<-1$ 또는 $x>4$
그런데 $x<3$이므로 $x<-1$
(ii) $x\ge 3$일 때, $x-3\ge 0$이므로
$x^2-6x+5>3(x-3)$, $x^2-9x+14>0$
$(x-2)(x-7)>0$ $\therefore x<2$ 또는 $x>7$
그런데 $x\ge 3$이므로 $x>7$
(i), (ii)에서 $x^2-6x+5>3|x-3|$의 해는
$x<-1$ 또는 $x>7$
따라서 $ax^2+bx+14<0$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>7$이므로
$a<0$
해가 $x<-1$ 또는 $x>7$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+1)(x-7)>0$, 즉 $x^2-6x-7>0$
양변에 a를 곱하면
$ax^2-6ax-7a<0$ ($\because a<0$)
이 부등식이 $ax^2+bx+14<0$과 같으므로
$-6a=b$, $-7a=14$ $\therefore a=-2$, $b=12$
$\therefore b-a=14$ 답 14

유형 130 부등식 $f(x)<0$과 부등식 $f(ax+b)<0$의 관계 본책 142쪽

(1) $f(x)=p(x-\alpha)(x-\beta)$이면
$f(ax+b)=p(ax+b-\alpha)(ax+b-\beta)$
(2) $f(x)<0$의 해가 $\alpha<x<\beta$이면 $f(ax+b)<0$의 해는
$\alpha<ax+b<\beta$
를 만족시키는 x의 값의 범위

0714 $f(x)<0$의 해가 $-4<x<8$이므로
$f(x)=a(x+4)(x-8)$ $(a>0)$
이라 하면
$f(3x-1)=a(3x-1+4)(3x-1-8)$
$=9a(x+1)(x-3)$
$f(3x-1)<0$, 즉 $9a(x+1)(x-3)<0$에서
$(x+1)(x-3)<0$ ($\because a>0$)
$\therefore -1<x<3$ 답 $-1<x<3$
다른 풀이 $f(x)<0$의 해가 $-4<x<8$이므로 $f(3x-1)<0$의 해는
$-4<3x-1<8$, $-3<3x<9$ $\therefore -1<x<3$

0715 $f(x)\le 0$의 해가 $x\le -3$ 또는 $x\ge 3$이므로

$f(x)=a(x+3)(x-3)$ $(a<0)$

이라 하면

$f(1000-x)=a(1000-x+3)(1000-x-3)$

$=a(x-997)(x-1003)$

$f(1000-x)>0$, 즉 $a(x-997)(x-1003)>0$에서

$(x-997)(x-1003)<0$ ($\because a<0$)

$\therefore\ 997<x<1003$

따라서 정수 x는 998, 999, 1000, 1001, 1002의 5개이다.

답 ③

다른 풀이 $f(x)\le 0$의 해가 $x\le -3$ 또는 $x\ge 3$이므로 $f(x)>0$의 해는 $-3<x<3$

따라서 $f(1000-x)>0$의 해는

$-3<1000-x<3$, $-1003<-x<-997$

$\therefore\ 997<x<1003$

0716 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-2, 0)$, $(1, 0)$에서 만나므로

$f(x)=a(x+2)(x-1)$ $(a<0)$

이라 하면

$f\left(\frac{3x-k}{5}\right)=a\left(\frac{3x-k}{5}+2\right)\left(\frac{3x-k}{5}-1\right)$

$=\frac{a}{25}(3x-k+10)(3x-k-5)$

$f\left(\frac{3x-k}{5}\right)>0$, 즉 $\frac{a}{25}(3x-k+10)(3x-k-5)>0$에서

$(3x-k+10)(3x-k-5)<0$ ($\because a<0$)

$\therefore\ \frac{k-10}{3}<x<\frac{k+5}{3}$

이것이 $-1<x<4$와 같으므로

$\frac{k-10}{3}=-1$, $\frac{k+5}{3}=4$ $\therefore\ k=7$

답 7

다른 풀이 $f\left(\frac{3x-k}{5}\right)>0$에서 $\frac{3x-k}{5}=t$로 놓으면 주어진 그래프에서 $f(t)>0$을 만족시키는 t의 값의 범위는 $-2<t<1$이므로 $-2<\frac{3x-k}{5}<1$, $-10<3x-k<5$

$k-10<3x<k+5$ $\therefore\ \frac{k-10}{3}<x<\frac{k+5}{3}$

0717 $f(x)>0$의 해가 $-6<x<1$이므로

$f(x)=a(x+6)(x-1)$ $(a<0)$

이라 하면

$f(2x-5)=a(2x-5+6)(2x-5-1)$

$=2a(2x+1)(x-3)$

이때 $f(0)=-6a$이므로 $f(2x-5)\le f(0)$에서

$2a(2x+1)(x-3)\le -6a$

$(2x+1)(x-3)+3\ge 0$ ($\because a<0$)

$2x^2-5x\ge 0$, $x(2x-5)\ge 0$

$\therefore\ x\le 0$ 또는 $x\ge\frac{5}{2}$

따라서 자연수 x의 최솟값은 3이다.

답 3

유형 131 정수인 해의 개수가 주어진 이차부등식 → 본책 142쪽

이차부등식의 정수인 해가 n개인 경우에는 다음과 같은 순서로 푼다.

(i) 주어진 부등식의 해를 수직선 위에 나타낸다.

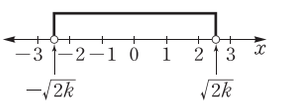
(ii) 해가 n개의 정수를 포함하도록 하는 미지수의 값의 범위를 구한다.

0718 $x^2-2k<0$에서

$(x+\sqrt{2k})(x-\sqrt{2k})<0$

$\therefore\ -\sqrt{2k}<x<\sqrt{2k}$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 5개이려면 오른쪽 그림에서



$2<\sqrt{2k}\le 3$, $4<2k\le 9$

$\therefore\ 2<k\le\frac{9}{2}$

따라서 자연수 k는 3, 4이므로 구하는 합은

$3+4=7$

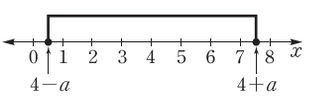
답 ③

0719 $x^2-8x+16-a^2\le 0$에서

$(x-4+a)(x-4-a)\le 0$

$\therefore\ 4-a\le x\le 4+a$ ($\because a>0$) … ❶

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 7개이려면 오른쪽 그림에서



$0<4-a\le 1$, $7\le 4+a<8$

$\therefore\ 3\le a<4$ … ❷

따라서 자연수 a의 값은 3이다. … ❸

답 3

단계	채점 요소	비율
❶	주어진 부등식의 해를 a에 대한 식으로 나타내기	40 %
❷	a의 값의 범위 구하기	50 %
❸	자연수 a의 값 구하기	10 %

0720 $3x^2-7x<3nx-7n$에서

$3x^2-(7+3n)x+7n<0$

$\therefore\ (x-n)(3x-7)<0$ …… ㉠

(i) $n<\frac{7}{3}$일 때, ㉠의 해는 $n<x<\frac{7}{3}$

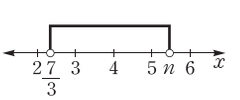
이 부등식을 만족시키는 자연수 x는 3개가 될 수 없다.

(ii) $n=\frac{7}{3}$일 때, ㉠에서 $3\left(x-\frac{7}{3}\right)^2<0$

이 부등식을 만족시키는 자연수 x는 3개가 될 수 없다.

(iii) $n>\frac{7}{3}$일 때, ㉠의 해는 $\frac{7}{3}<x<n$

이 부등식을 만족시키는 자연수 x가 3개이려면 오른쪽 그림에서



$5<n\le 6$

이상에서 구하는 정수 n의 값은 6이다.

답 6

0721 $f(x)=x^2+px+p=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+p$에서

$\mathrm{A}\left(-\frac{p}{2},\ -\frac{p^2}{4}+p\right)$, $\mathrm{B}(0,\ p)$

이므로 직선 l의 방정식은

$y=\frac{p}{2}x+p$ $\quad\therefore\ g(x)=\frac{p}{2}x+p$

$f(x)-g(x)\le 0$에서

$x^2+px+p-\left(\frac{p}{2}x+p\right)\le 0$, $\quad x^2+\frac{p}{2}x\le 0$

$\therefore\ x\left(x+\frac{p}{2}\right)\le 0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

(i) $p<0$일 때, ㉠에서

$0\le x\le -\frac{p}{2}$

이 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 10이려면

$9\le -\frac{p}{2}<10$이어야 하므로

$-20<p\le -18$

(ii) $p>0$일 때, ㉠에서

$-\frac{p}{2}\le x\le 0$

이 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 10이려면

$-10<-\frac{p}{2}\le -9$이어야 하므로

$18\le p<20$

(i), (ii)에서 정수 p의 최댓값은 19, 최솟값은 -19이므로

$M=19$, $m=-19$

$\therefore\ M-m=38$ 답 ④

유형 132 이차부등식의 해가 한 개일 조건 본책 143쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

(1) 이차부등식 $ax^2+bx+c\le 0$이 해를 한 개만 가질 조건

➡ $a>0$, $D=0$

(2) 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge 0$이 해를 한 개만 가질 조건

➡ $a<0$, $D=0$

0722 이차부등식 $(a+3)x^2+8x+a+3\ge 0$이 해를 한 개만 가지려면

$a+3<0$ $\quad\therefore\ a<-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 이차방정식 $(a+3)x^2+8x+a+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4^2-(a+3)^2=0$

$a^2+6a-7=0$, $\quad(a+7)(a-1)=0$

$\therefore\ a=-7$ 또는 $a=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a=-7$ 답 ②

0723 이차부등식 $(k-1)x^2+2(k-1)x+2k-3\le 0$이 오직 하나의 해를 가지므로

$k-1>0$ $\quad\therefore\ k>1$

이차방정식 $(k-1)x^2+2(k-1)x+2k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k-1)(2k-3)=0$

$k^2-3k+2=0$, $\quad(k-1)(k-2)=0$

$\therefore\ k=1$ 또는 $k=2$

그런데 $k>1$이므로 $\quad k=2$ $\quad\therefore\ \alpha=2$ $\quad\cdots$ ❶

이것을 주어진 부등식에 대입하면

$x^2+2x+1\le 0$, $\quad(x+1)^2\le 0$ $\quad\therefore\ x=-1$

$\therefore\ \beta=-1$ $\quad\cdots$ ❷

$\therefore\ \alpha+\beta=1$ $\quad\cdots$ ❸

답 1

단계	채점 요소	비율
❶	α의 값 구하기	60 %
❷	β의 값 구하기	30 %
❸	$\alpha+\beta$의 값 구하기	10 %

0724 이차부등식 $(k+2)x^2-4(k+2)x-12<0$을 만족시키지 않는 x의 값이 오직 한 개이려면 이차부등식 $(k+2)x^2-4(k+2)x-12\ge 0$의 해가 오직 한 개이어야 한다.

즉 $k+2<0$에서 $\quad k<-2$

또 이차방정식 $(k+2)x^2-4(k+2)x-12=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-2(k+2)\}^2+12(k+2)=0$

$4k^2+28k+40=0$, $\quad k^2+7k+10=0$

$(k+5)(k+2)=0$ $\quad\therefore\ k=-5$ 또는 $k=-2$

그런데 $k<-2$이므로 $\quad k=-5$ 답 -5

유형 133 이차부등식이 해를 가질 조건 본책 143쪽

이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 해를 가질 조건

(1) $a>0$ ➡ 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(2) $a<0$ ➡ $b^2-4ac>0$

0725 $ax^2+2(3-a)x+4a>0$에서

(i) $a>0$일 때

이차함수 $y=ax^2+2(3-a)x+4a$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a<0$일 때

주어진 부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $ax^2+2(3-a)x+4a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이때 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(3-a)^2-4a^2>0$

$-3a^2-6a+9>0$, $\quad a^2+2a-3<0$

$(a+3)(a-1)<0$ $\quad\therefore\ -3<a<1$

그런데 $a<0$이므로 $\quad -3<a<0$

이상에서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는

$-3<a<0$ 또는 $a>0$ 답 $-3<a<0$ 또는 $a>0$

0726 $f(x)=3x^2+4x-a$에 대하여 이차부등식 $f(x)<0$이 해를 가지려면 이차방정식 $3x^2+4x-a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이때 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2+3a>0 \quad \therefore a>-\frac{4}{3}$

따라서 정수 a의 최솟값은 -1이다. 답 ③

0727 (i) $a>-1$일 때

이차함수 $y=(a+1)x^2-2(a+1)x-3$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 부등식의 해는 항상 존재한다.

(ii) $a=-1$일 때

$0\times x^2-0\times x-3>0$이므로 주어진 부등식의 해는 존재하지 않는다.

(iii) $a<-1$일 때

주어진 부등식의 해가 존재하려면 이차방정식 $(a+1)x^2-2(a+1)x-3=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이때 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2+3(a+1)>0$

$a^2+5a+4>0, \quad (a+4)(a+1)>0$

$\therefore a<-4$ 또는 $a>-1$

그런데 $a<-1$이므로 $a<-4$

이상에서 a의 값의 범위는

$a<-4$ 또는 $a>-1$

따라서 a의 값이 아닌 것은 ②이다. 답 ②

유형 134 이차부등식이 항상 성립할 조건 → 본책 144쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여

(1) $ax^2+bx+c>0$이 성립할 조건 ➡ $a>0$, $D<0$

(2) $ax^2+bx+c\geq 0$이 성립할 조건 ➡ $a>0$, $D\leq 0$

(3) $ax^2+bx+c<0$이 성립할 조건 ➡ $a<0$, $D<0$

(4) $ax^2+bx+c\leq 0$이 성립할 조건 ➡ $a<0$, $D\leq 0$

0728 x의 값에 관계없이 $ax^2+4ax+a-12<0$이 항상 성립하므로

$a<0$ ····· ㉠

또 이차방정식 $ax^2+4ax+a-12=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2a)^2-a(a-12)<0$

$a^2+4a<0, \quad a(a+4)<0$

$\therefore -4<a<0$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $-4<a<0$

따라서 정수 a는 -3, -2, -1이므로 구하는 합은

$-3+(-2)+(-1)=-6$ 답 -6

0729 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2ax-a+6>0$이 성립하려면 이차방정식 $x^2-2ax-a+6=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(-a+6)<0$

$a^2+a-6<0, \quad (a+3)(a-2)<0$

$\therefore -3<a<2$

따라서 정수 a의 최댓값은 1, 최솟값은 -2이므로 그 합은

$1+(-2)=-1$ 답 ②

0730 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{3x^2+2(k-2)x+k-2}$가 실수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 $3x^2+2(k-2)x+k-2\geq 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $3x^2+2(k-2)x+k-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-3(k-2)\leq 0$

$k^2-7k+10\leq 0, \quad (k-2)(k-5)\leq 0$

$\therefore 2\leq k\leq 5$ 답 $2\leq k\leq 5$

0731 $(k-1)x^2-4(k-1)x+8>0$에서

(i) $k=1$일 때

$0\times x^2-0\times x+8>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립한다. … ❶

(ii) $k\neq 1$일 때

모든 실수 x에 대하여 $(k-1)x^2-4(k-1)x+8>0$이 성립하므로

$k-1>0 \quad \therefore k>1$ ····· ㉠

또 이차방정식 $(k-1)x^2-4(k-1)x+8=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-2(k-1)\}^2-8(k-1)<0$

$k^2-4k+3<0, \quad (k-1)(k-3)<0$

$\therefore 1<k<3$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $1<k<3$ … ❷

(i), (ii)에서 $1\leq k<3$

따라서 정수 k는 1, 2의 2개이다. … ❸

답 2

단계	채점 요소	비율
❶	$k=1$일 때, 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립함을 알기	30 %
❷	$k\neq 1$일 때, 조건을 만족시키는 k의 값의 범위 구하기	50 %
❸	정수 k의 개수 구하기	20 %

0732 조건 (가)에서 $\frac{1-x}{4}=t$라 하면 $x=1-4t$

부등식 $f\left(\frac{1-x}{4}\right)\leq 0$의 해가 $-7\leq x\leq 9$이므로

$-7\leq 1-4t\leq 9$에서 $-8\leq -4t\leq 8$

$\therefore -2\leq t\leq 2$

즉 부등식 $f(t)\leq 0$의 해가 $-2\leq t\leq 2$이므로

$f(x)=k(x+2)(x-2)=kx^2-4k \ (k>0)$

라 하자.

조건 (나)에서 부등식 $f(x) \geq 2x-\frac{13}{3}$이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 이차부등식 $kx^2-2x-4k+\frac{13}{3} \geq 0$의 해는 모든 실수이다.

이차방정식 $kx^2-2x-4k+\frac{13}{3}=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-k\left(-4k+\frac{13}{3}\right) \leq 0$$

$$4k^2-\frac{13}{3}k+1 \leq 0, \quad 12k^2-13k+3 \leq 0$$

$$(3k-1)(4k-3) \leq 0$$

$$\therefore \frac{1}{3} \leq k \leq \frac{3}{4}$$

이때 $f(3)=5k$이므로

$$\frac{5}{3} \leq 5k \leq \frac{15}{4} \quad \therefore \frac{5}{3} \leq f(3) \leq \frac{15}{4}$$

따라서 $M=\frac{15}{4}$, $m=\frac{5}{3}$이므로

$$M-m=\frac{25}{12}$$

답 ⑤

유형 135 이차부등식이 해를 갖지 않을 조건

본책 144쪽

이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 해를 갖지 않는다.

➜ 이차부등식 $ax^2+bx+c \leq 0$의 해는 모든 실수이다.

➜ 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c \leq 0$이 성립한다.

➜ $a<0$, $b^2-4ac \leq 0$

0733 $-x^2+6(a-1)x+4(a-1)>0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $-x^2+6(a-1)x+4(a-1) \leq 0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $-x^2+6(a-1)x+4(a-1)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{3(a-1)\}^2+4(a-1) \leq 0$$

$$9a^2-14a+5 \leq 0, \quad (9a-5)(a-1) \leq 0$$

$$\therefore \frac{5}{9} \leq a \leq 1$$

따라서 정수 a의 값은 1이다.

답 ④

0734 $a(x^2+4x+5)<2x$에서

$$ax^2+2(2a-1)x+5a<0$$

이 이차부등식의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+2(2a-1)x+5a \geq 0$이 성립해야 하므로

$$a>0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이차방정식 $ax^2+2(2a-1)x+5a=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(2a-1)^2-5a^2 \leq 0$$

$$a^2+4a-1 \geq 0$$

$$\therefore a \leq -2-\sqrt{5} \text{ 또는 } a \geq -2+\sqrt{5} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $a \geq -2+\sqrt{5}$

답 ⑤

0735 $(k-2)x^2+2(k-2)x+2 \leq 0$이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여

$$(k-2)x^2+2(k-2)x+2>0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 성립해야 한다. … ❶

(i) $k=2$일 때

$0 \times x^2+0 \times x+2>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립한다. … ❷

(ii) $k \neq 2$일 때

모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하려면

$$k-2>0 \quad \therefore k>2$$

이차방정식 $(k-2)x^2+2(k-2)x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(k-2)^2-2(k-2)<0$$

$$k^2-6k+8<0, \quad (k-2)(k-4)<0$$

$$\therefore 2<k<4$$

그런데 $k>2$이므로 $2<k<4$ … ❸

(i), (ii)에서 주어진 조건을 만족시키는 k의 값의 범위는

$$2 \leq k<4$$

따라서 정수 k는 2, 3이므로 구하는 합은

$$2+3=5$$ … ❹

답 5

단계	채점 요소	비율
❶	주어진 부등식이 해를 갖지 않을 조건 구하기	20 %
❷	$k=2$일 때, 주어진 부등식이 해를 갖지 않음을 알기	20 %
❸	$k \neq 2$일 때, 조건을 만족시키는 k의 값의 범위 구하기	40 %
❹	모든 정수 k의 값의 합 구하기	20 %

유형 136 제한된 범위에서 항상 성립하는 이차부등식

본책 145쪽

(1) $\alpha \leq x \leq \beta$에서 이차부등식 $f(x)>0$이 항상 성립한다.

➜ $\alpha \leq x \leq \beta$에서 ($f(x)$의 최솟값)>0이다.

(2) $\alpha \leq x \leq \beta$에서 이차부등식 $f(x)<0$이 항상 성립한다.

➜ $\alpha \leq x \leq \beta$에서 ($f(x)$의 최댓값)<0이다.

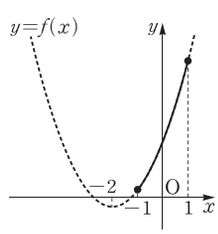
0736 $x^2+4x+2 \geq 8-4a^2$에서

$$x^2+4x+4a^2-6 \geq 0$$

$f(x)=x^2+4x+4a^2-6$이라 하면

$$f(x)=(x+2)^2+4a^2-10$$

$-1 \leq x \leq 1$에서 $f(x) \geq 0$이 항상 성립하려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$f(-1) \geq 0$에서

$$1-4+4a^2-6 \geq 0$$

$$4a^2-9 \geq 0$$

$$(2a+3)(2a-3) \geq 0$$

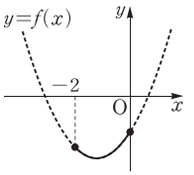
$$\therefore a \leq -\frac{3}{2} \text{ 또는 } a \geq \frac{3}{2}$$

따라서 자연수 a의 최솟값은 2이다.

답 ②

0737 $f(x)=x^2-2ax+2a+4$라 하자.

$-2\le x\le 0$에서 $f(x)\le 0$이 항상 성립하려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$f(-2)\le 0$에서

$6a+8\le 0 \quad \therefore a\le -\frac{4}{3}$ …… ㉠

$f(0)\le 0$에서

$2a+4\le 0 \quad \therefore a\le -2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a\le -2$

답 $a\le -2$

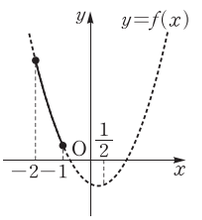
0738 $x^2+3x+2\le 0$에서 $(x+2)(x+1)\le 0$

$\therefore -2\le x\le -1$

$3x^2-x-2\ge -x^2+3x-k$에서 $4x^2-4x+k-2\ge 0$

$f(x)=4x^2-4x+k-2$라 하면 $f(x)=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+k-3$

$-2\le x\le -1$에서 $f(x)\ge 0$이 항상 성립하려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$f(-1)\ge 0$에서

$6+k\ge 0 \quad \therefore k\ge -6$

따라서 k의 최솟값은 -6이다.

답 -6

0739 $f(x)>g(x)$에서

$x^2-6ax+2a^2-4>-2x^2-a^2+4a$

$\therefore 3x^2-6ax+3a^2-4a-4>0$

$h(x)=3x^2-6ax+3a^2-4a-4$라 하면

$h(x)=3(x-a)^2-4a-4$

이고, $0\le x\le 4$에서 $h(x)>0$이다.

(i) $a<0$일 때

$0\le x\le 4$에서 $h(x)$는 $x=0$일 때 최소이므로 $h(0)>0$에서

$3a^2-4a-4>0, \quad (3a+2)(a-2)>0$

$\therefore a<-\frac{2}{3}$ 또는 $a>2$

그런데 $a<0$이므로 $a<-\frac{2}{3}$

(ii) $0\le a\le 4$일 때

$0\le x\le 4$에서 $h(x)$는 $x=a$일 때 최소이므로 $h(a)>0$에서

$-4a-4>0 \quad \therefore a<-1$

그런데 $0\le a\le 4$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $a>4$일 때

$0\le x\le 4$에서 $h(x)$는 $x=4$일 때 최소이므로 $h(4)>0$에서

$3a^2-28a+44>0, \quad (a-2)(3a-22)>0$

$\therefore a<2$ 또는 $a>\frac{22}{3}$

그런데 $a>4$이므로 $a>\frac{22}{3}$

이상에서 a의 값의 범위는

$a<-\frac{2}{3}$ 또는 $a>\frac{22}{3}$

답 $a<-\frac{2}{3}$ 또는 $a>\frac{22}{3}$

0740 $\left|[x]+\frac{1}{2}\right|\le\frac{5}{2}$에서 $-\frac{5}{2}\le[x]+\frac{1}{2}\le\frac{5}{2}$

$\therefore -3\le[x]\le 2$

이때 $[x]$는 정수이므로

$[x]=-3$일 때, $-3\le x<-2$

$[x]=-2$일 때, $-2\le x<-1$

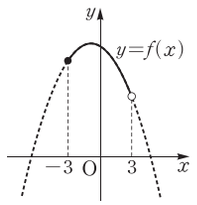
⋮

$[x]=2$일 때, $2\le x<3$

$\therefore -3\le x<3$

$f(x)=-x^2+3ax+a^2-1$이라 하자.

$-3\le x<3$에서 $f(x)>0$이 항상 성립하려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$f(-3)>0$에서

$-9-9a+a^2-1>0$

$a^2-9a-10>0$

$(a+1)(a-10)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>10$ …… ㉠

$f(3)\ge 0$에서 $-9+9a+a^2-1\ge 0$

$a^2+9a-10\ge 0, \quad (a+10)(a-1)\ge 0$

$\therefore a\le -10$ 또는 $a\ge 1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a\le -10$ 또는 $a>10$

답 $a\le -10$ 또는 $a>10$

만점 공략 노트

실수 x에 대하여 x보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$로 나타내고, 이를 가우스 기호라 한다. 이때 정수 n에 대하여

(i) $x=n$이면 $[x]=n$

(ii) $n\le x<n+1$이면 $[x]=n$

또한 $[x]=n$이면 $n\le x<n+1$이 성립한다.

유형 137 이차부등식과 두 그래프의 위치 관계 — 특정한 범위에서 성립하는 경우 → 본책 145쪽

함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다

(1) 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위

➜ 부등식 $f(x)>g(x)$의 해

(2) 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위

➜ 부등식 $f(x)<g(x)$의 해

0741 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 직선 $y=x+3$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 부등식

$x^2+ax+b>x+3$,

즉 $x^2+(a-1)x+b-3>0$ …… ㉠

의 해이다.

해가 $x<1$ 또는 $x>5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-5)>0$

$\therefore x^2-6x+5>0$ …… ㉡

㉠, ㉡이 같아야 하므로

$a-1=-6$, $b-3=5$ $\therefore a=-5$, $b=8$

$\therefore b-a=13$ 답 13

0742 이차함수 $y=x^2+ax-4$의 그래프가 직선 $y=b$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 부등식

$x^2+ax-4<b$, 즉 $x^2+ax-4-b<0$ …… ㉠

의 해이다.

해가 $-2<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-3)<0$

$\therefore x^2-x-6<0$ …… ㉡

㉠, ㉡이 같아야 하므로

$a=-1$, $-4-b=-6$ $\therefore a=-1$, $b=2$

$\therefore a+b=1$ 답 1

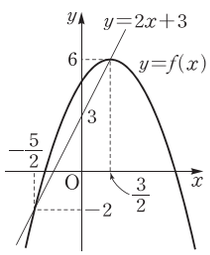
0743 $y=2x+3$에 $y=-2$를 대입하면

$-2=2x+3$ $\therefore x=-\frac{5}{2}$

$y=2x+3$에 $y=6$을 대입하면

$6=2x+3$ $\therefore x=\frac{3}{2}$

따라서 x^2의 계수가 음수인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x+3$의 두 교점의 좌표가 $\left(-\frac{5}{2}, -2\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 6\right)$이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(x)-2x-3>0$에서

$f(x)>2x+3$

이 부등식의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2x+3$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$-\frac{5}{2}<x<\frac{3}{2}$

따라서 정수 x는 -2, -1, 0, 1의 4개이다. 답 4

유형 138 이차부등식과 두 그래프의 위치 관계 — 항상 성립하는 경우 본책 146쪽

함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다

(1) 항상 위쪽에 있다.

➜ 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>g(x)$가 성립

(2) 항상 아래쪽에 있다.

➜ 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)<g(x)$가 성립

0744 이차함수 $y=x^2-4(k-1)x+7$의 그래프가 직선 $y=4x-1$보다 항상 위쪽에 있으려면 이차부등식

$x^2-4(k-1)x+7>4x-1$, 즉 $x^2-4kx+8>0$

이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-4kx+8=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-8<0$, $k^2<2$

$\therefore -\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

따라서 $\alpha=-\sqrt{2}$, $\beta=\sqrt{2}$이므로

$\alpha\beta=-2$ 답 -2

0745 이차함수 $y=x^2+(k+3)x+2$의 그래프가 직선 $y=-2$와 만나지 않으려면 $y=x^2+(k+3)x+2$의 그래프가 직선 $y=-2$보다 항상 위쪽에 있어야 한다. … ❶

즉 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$x^2+(k+3)x+2>-2$, 즉 $x^2+(k+3)x+4>0$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+(k+3)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k+3)^2-16<0$

$k^2+6k-7<0$, $(k+7)(k-1)<0$

$\therefore -7<k<1$ … ❷

따라서 정수 k는 -6, -5, …, -1, 0의 7개이다. … ❸

답 7

단계	채점 요소	비율
❶	이차함수의 그래프가 직선보다 항상 위쪽에 있어야 함을 알기	30 %
❷	k의 값의 범위 구하기	60 %
❸	정수 k의 개수 구하기	10 %

0746 이차함수 $y=-x^2+2kx$의 그래프가 함수 $y=kx^2-2x+3$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있으려면 이차부등식

$-x^2+2kx<kx^2-2x+3$,

즉 $(k+1)x^2-2(k+1)x+3>0$ …… ㉠

이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 한다.

(i) $k=-1$일 때

$0\times x^2-0\times x+3>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립한다.

(ii) $k\neq-1$일 때

모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하려면

$k+1>0$ $\therefore k>-1$ …… ㉡

또 이차방정식 $(k+1)x^2-2(k+1)x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-3(k+1)<0$

$k^2-k-2<0$, $(k+1)(k-2)<0$

$\therefore -1<k<2$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $-1<k<2$

(i), (ii)에서 k의 값의 범위는

$-1\le k<2$ 답 $-1\le k<2$

유형 139 이차부등식의 활용 본책 146쪽

이차부등식의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 푼다.

(i) 주어진 조건에 맞게 부등식을 세운다.

(ii) 부등식을 풀어 해를 구한다. 이때 미지수의 값의 범위에 주의한다.

0747 도로의 폭을 x m라 하면 도로를 제외한 땅을 직사각형 모양으로 이어 붙였을 때 가로, 세로의 길이는 각각

$(60-x)$ m, $(40-x)$ m

따라서 도로를 제외한 땅의 넓이가 1500 m^2 이상이 되려면

$(60-x)(40-x) \geq 1500$

$x^2-100x+900 \geq 0$, $(x-10)(x-90) \geq 0$

$\therefore x \leq 10$ 또는 $x \geq 90$

이때 $0<x<40$이므로 $0<x \leq 10$

따라서 도로의 최대 폭은 10 m이다. 답 10 m

0748 t초 후의 물체의 높이가 120 m 이상이 되려면

$50t-5t^2 \geq 120$, $t^2-10t+24 \leq 0$

$(t-4)(t-6) \leq 0$

$\therefore 4 \leq t \leq 6$

따라서 물체의 높이가 120 m 이상인 시간은 $6-4=2$(초) 동안이다. 답 ②

0749 축사의 둘레의 길이가 100 m이므로 축사의 밑면의 가로의 길이를 x m라 하면 세로의 길이는

$\frac{100-2x}{2}=50-x$(m)

축사의 밑면의 넓이가 600 m^2 이상이어야 하므로

$x(50-x) \geq 600$, $x^2-50x+600 \leq 0$

$(x-20)(x-30) \leq 0$

$\therefore 20 \leq x \leq 30$

따라서 축사의 밑면의 가로의 길이는 20 m 이상 30 m 이하이다.

답 20 m 이상 30 m 이하

0750 가격을 $100x$원 할인한다고 하면 판매량이 $50x$개 늘어나므로 쿠키의 하루 총 판매 금액이 150만 원 이상이려면

$(2500-100x)(500+50x) \geq 1500000$

$x^2-15x+50 \leq 0$, $(x-5)(x-10) \leq 0$

$\therefore 5 \leq x \leq 10$

이때 쿠키 한 개의 가격은 $(2500-100x)$원이고

$500 \leq 100x \leq 1000$이므로

$1500 \leq 2500-100x \leq 2000$

따라서 쿠키 한 개의 최소 가격은 1500원이다. 답 1500원

0751 영화표 가격을 a원, 관람객 수를 b라 하자.

가격을 x % 인상하면 영화표 가격은 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$(원)이고, 이때 관람객 수는 $b\left(1-\frac{x}{200}\right)$이다.

총매출이 8 % 이상 증가해야 하므로

$a\left(1+\frac{x}{100}\right) \times b\left(1-\frac{x}{200}\right) \geq ab\left(1+\frac{8}{100}\right)$

$(100+x)(200-x) \geq 21600$

$x^2-100x+1600 \leq 0$

$(x-20)(x-80) \leq 0$ $\therefore 20 \leq x \leq 80$

따라서 x의 최댓값은 80이다. 답 ⑤

유형 140 연립이차부등식의 풀이 → 본책 147쪽

각 부등식의 해를 구한 다음 공통부분을 찾아 주어진 연립이차부등식의 해를 구한다. 이때 $A<B<C$의 꼴의 부등식은 연립부등식 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$의 꼴로 고쳐서 푼다.

0752 $x^2-x-4 \leq -x^2+x+8$에서

$x^2-x-6 \leq 0$, $(x+2)(x-3) \leq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 3$ …… ㉠

$2x^2-5>x-2$에서

$2x^2-x-3>0$, $(x+1)(2x-3)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>\frac{3}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-2 \leq x<-1$ 또는 $\frac{3}{2}<x \leq 3$

따라서 정수 x는 -2, 2, 3의 3개이다. 답 3

0753 주어진 부등식은

$\begin{cases} 3x^2-2x-5 \leq 2x^2+4x+2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+4x+2<4x^2-2x-6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x^2-6x-7 \leq 0$, $(x+1)(x-7) \leq 0$

$\therefore -1 \leq x \leq 7$ …… ㉢ … ❶

㉡에서 $x^2-3x-4>0$, $(x+1)(x-4)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>4$ …… ㉣ … ❷

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$4<x \leq 7$ … ❸

따라서 자연수 x는 5, 6, 7이므로 그 합은

$5+6+7=18$ … ❹

답 18

단계	채점 요소	비율
❶	$3x^2-2x-5 \leq 2x^2+4x+2$의 해 구하기	30 %
❷	$2x^2+4x+2<4x^2-2x-6$의 해 구하기	30 %
❸	주어진 부등식의 해 구하기	20 %
❹	모든 자연수 x의 값의 합 구하기	20 %

0754 $x^2-8 \leq -2x$에서

$x^2+2x-8 \leq 0$, $(x+4)(x-2) \leq 0$

$\therefore -4 \leq x \leq 2$ …… ㉠

$x^2-2x \geq 2x^2+3x-6$에서

$x^2+5x-6 \leq 0$, $(x+6)(x-1) \leq 0$

$\therefore -6 \leq x \leq 1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-4 \leq x \leq 1$

해가 $-4 \leq x \leq 1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+4)(x-1) \leq 0$ $\therefore x^2+3x-4 \leq 0$

양변에 -2를 곱하면 $-2x^2-6x+8 \geq 0$

이 부등식이 $ax^2+bx+8 \geq 0$과 같으므로

$a=-2$, $b=-6$ $\therefore a+b=-8$ 답 -8

0755 $\frac{\sqrt{3x^2-4x-7}}{\sqrt{x^2+3x-4}}=-\sqrt{\frac{3x^2-4x-7}{x^2+3x-4}}$이므로

$3x^2-4x-7>0$, $x^2+3x-4<0$

또는 $3x^2-4x-7=0$, $x^2+3x-4\neq 0$

(i) $3x^2-4x-7>0$에서 $(x+1)(3x-7)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>\frac{7}{3}$ …… ㉠

$x^2+3x-4<0$에서 $(x+4)(x-1)<0$

$\therefore -4<x<1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-4<x<-1$

(ii) $3x^2-4x-7=0$에서 $(x+1)(3x-7)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{7}{3}$

이 x의 값은 $x^2+3x-4\neq 0$을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $-4<x\leq -1$ 또는 $x=\frac{7}{3}$

따라서 실수 x의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0756 $f(x_1)<g(x_1)$의 해가 존재하지 않으므로 부등식

$x^2+4x+6<-x^2+2ax-7$, 즉 $2x^2-2(a-2)x+13<0$

의 해는 존재하지 않는다.

따라서 모든 실수 x에 대하여

$2x^2-2(a-2)x+13\geq 0$

이 성립해야 하므로 이차방정식 $2x^2-2(a-2)x+13=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a-2)\}^2-26\leq 0$

$(a-2)^2\leq 26$, $-\sqrt{26}\leq a-2\leq\sqrt{26}$

$\therefore 2-\sqrt{26}\leq a\leq 2+\sqrt{26}$ …… ㉠

또 $f(x_1)\leq g(x_2)$의 해가 존재하므로

($f(x)$의 최솟값)$\leq$($g(x)$의 최댓값)이다.

이때 $f(x)=x^2+4x+6=(x+2)^2+2$,

$g(x)=-x^2+2ax-7=-(x-a)^2+a^2-7$이므로 $f(x)$의 최솟값은 2이고, $g(x)$의 최댓값은 a^2-7이다.

즉 $2\leq a^2-7$이므로

$a^2-9\geq 0$, $(a+3)(a-3)\geq 0$

$\therefore a\leq -3$ 또는 $a\geq 3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$2-\sqrt{26}\leq a\leq -3$ 또는 $3\leq a\leq 2+\sqrt{26}$

따라서 정수 a는 -3, 3, 4, 5, 6, 7이므로 구하는 합은

$-3+3+4+5+6+7=22$ 답 22

0757 $x^2-4x-21>0$에서 $(x+3)(x-7)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>7$ …… ㉠

$x^2-7|x|+12\leq 0$에서

(i) $x<0$일 때

$x^2+7x+12\leq 0$, $(x+4)(x+3)\leq 0$

$\therefore -4\leq x\leq -3$

그런데 $x<0$이므로 $-4\leq x\leq -3$

(ii) $x\geq 0$일 때

$x^2-7x+12\leq 0$, $(x-3)(x-4)\leq 0$

$\therefore 3\leq x\leq 4$

그런데 $x\geq 0$이므로 $3\leq x\leq 4$

(i), (ii)에서 $x^2-7|x|+12\leq 0$의 해는

$-4\leq x\leq -3$ 또는 $3\leq x\leq 4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-4\leq x<-3$

따라서 $\alpha=-4$, $\beta=-3$이므로

$\alpha+\beta=-7$ 답 -7

0758 $|3x+4|>8$에서

$3x+4<-8$ 또는 $3x+4>8$

$\therefore x<-4$ 또는 $x>\frac{4}{3}$ …… ㉠

$2x^2-3x-2<0$에서 $(2x+1)(x-2)<0$

$\therefore -\frac{1}{2}<x<2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{4}{3}<x<2$ 답 $\frac{4}{3}<x<2$

0759 $|x+3|<4$에서 $-4<x+3<4$

$\therefore -7<x<1$ …… ㉠

$[x]^2+[x]-12<0$에서

$([x]+4)([x]-3)<0$

$\therefore -4<[x]<3$

이때 $[x]$는 정수이므로

$[x]=-3$에서 $-3\leq x<-2$

$[x]=-2$에서 $-2\leq x<-1$

⋮

$[x]=2$에서 $2\leq x<3$

$\therefore -3\leq x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3\leq x<1$ 답 ②

유형 141 **절댓값 기호를 포함한 연립부등식의 풀이** 본책 147쪽

$|A|=\begin{cases} A & (A\geq 0) \\ -A & (A<0) \end{cases}$임을 이용하여 절댓값 기호를 없앤다.

이때 A가 x에 대한 다항식이면 $A=0$이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 푼다.

유형 142 **해가 주어진 연립이차부등식** 본책 148쪽

연립이차부등식에서 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분이 주어진 연립이차부등식의 해가 되도록 수직선 위에 나타내어 미지수의 값의 범위를 구한다.

0760 $x^2+3x-18<0$에서

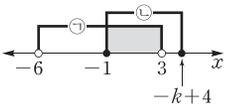
$(x+6)(x-3)<0$

$\therefore\ -6<x<3$ …… ㉠

$x^2+(k-3)x+k-4\le 0$에서

$(x+1)(x+k-4)\le 0$ …… ㉡

㉠과 ㉡의 해의 공통부분이 $-1\le x<3$이므로 오른쪽 그림에서



$-k+4\ge 3$

$\therefore\ k\le 1$

답 $k\le 1$

0761 주어진 부등식은

$\begin{cases} 3x^2-4x-3<4x & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x\le 10x+a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

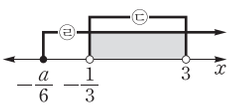
㉠에서 $3x^2-8x-3<0$, $(3x+1)(x-3)<0$

$\therefore\ -\frac{1}{3}<x<3$ …… ㉢

㉡에서 $6x\ge -a$

$\therefore\ x\ge -\frac{a}{6}$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분이 $-\frac{1}{3}<x<3$이므로 오른쪽 그림에서



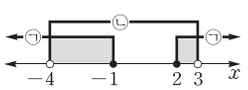
$-\frac{a}{6}\le -\frac{1}{3}$

$\therefore\ a\ge 2$

답 ⑤

0762 $\begin{cases} x^2-x+a\ge 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+x+b<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $-4<x\le -1$ 또는 $2\le x<3$이므로 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



해가 $x\le -1$ 또는 $x\ge 2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-2)\ge 0$

$\therefore\ x^2-x-2\ge 0$

이 부등식이 ㉠과 같아야 하므로

$a=-2$ … ❶

해가 $-4<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+4)(x-3)<0$

$\therefore\ x^2+x-12<0$

이 부등식이 ㉡과 같아야 하므로

$b=-12$ … ❷

$\therefore\ a-b=10$ … ❸

답 10

단계	채점 요소	비율
❶	a의 값 구하기	40 %
❷	b의 값 구하기	40 %
❸	$a-b$의 값 구하기	20 %

0763 $x^2-(a^2-3)x-3a^2<0$에서

$(x-a^2)(x+3)<0$

$\therefore\ -3<x<a^2$ …… ㉠

$x^2+(a-8)x-8a>0$에서

$(x+a)(x-8)>0$

$\therefore\ x<-a$ 또는 $x>8$ …… ㉡

$a>2$에서 $-a<-2$이므로 ㉠, ㉡의 공통부분에 정수 x가 존재하지 않기 위한 a의 값의 범위는

$a^2\le 9$

$\therefore\ 2<a\le 3$ ($\because\ a>2$)

따라서 실수 a의 최댓값은 3이므로

$M=3$ $\therefore\ M^2=9$

답 9

유형 143 정수인 해의 조건이 주어진 연립이차부등식 → 본책 148쪽

연립부등식의 정수인 해가 n개인 경우에는 다음과 같은 순서로 푼다.

(i) 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타낸다.

(ii) 공통부분이 n개의 정수를 포함하도록 하는 미지수의 값의 범위를 구한다.

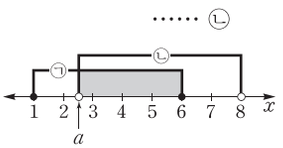
0764 $x^2-7x+6\le 0$에서 $(x-1)(x-6)\le 0$

$\therefore\ 1\le x\le 6$ …… ㉠

$x^2-(a+8)x+8a<0$에서

$(x-a)(x-8)<0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 4개이므로 오른쪽 그림에서



$2\le a<3$

답 ③

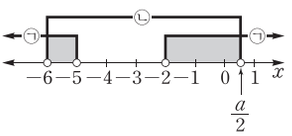
0765 $x^2+7x+10>0$에서 $(x+5)(x+2)>0$

$\therefore\ x<-5$ 또는 $x>-2$ …… ㉠

$2x^2-(a-12)x-6a<0$에서

$(x+6)(2x-a)<0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 -1과 0뿐이므로 오른쪽 그림에서



$0<\frac{a}{2}\le 1$ $\therefore\ 0<a\le 2$

답 $0<a\le 2$

0766 $\begin{cases} (x+4)(x-a^2+4a)\le 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x-3a)(x-3a+12)\le 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $a^2-4a=(a-2)^2-4\ge -4$이므로

$a=2$일 때, $x=-4$

$a\ne 2$일 때, $-4\le x\le a^2-4a$

㉡에서 $3a>3a-12$이므로

$3a-12\le x\le 3a$

(i) $a=2$일 때, ㉠의 해는 $x=-4$

㉡의 해는 $-6\le x\le 6$이므로 연립부등식을 만족시키는 실수 x의 값은 -4뿐이다.

(ii) $a\neq 2$일 때, ㉠의 해는 $-4\le x\le a^2-4a$

연립부등식을 만족시키는 실수 x가 오직 하나 존재하려면

$3a=-4$ 또는 $a^2-4a=3a-12$

$3a=-4$에서 $a=-\frac{4}{3}$

$a^2-4a=3a-12$에서

$a^2-7a+12=0$, $(a-3)(a-4)=0$

$\therefore a=3$ 또는 $a=4$

(i), (ii)에서 연립부등식을 만족시키는 실수 x가 오직 하나 존재하도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은

$2+\left(-\frac{4}{3}\right)+3+4=\frac{23}{3}$ 답 ②

0767 $|x-6|\le 3$에서 $-3\le x-6\le 3$

$\therefore 3\le x\le 9$ …… ㉠

$x^2-(4a+1)x+3a^2+a\le 0$에서

$(x-a)(x-3a-1)\le 0$ …… ㉡

(i) $a\ge 3a+1$, 즉 $a\le -\frac{1}{2}$일 때

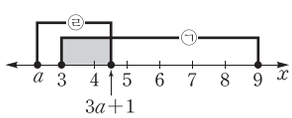
㉡에서 $3a+1\le x\le a$ …… ㉢

이때 $a\le -\frac{1}{2}$이므로 ㉠, ㉢을 동시에 만족시키는 정수 x는 존재하지 않는다.

(ii) $a\le 3a+1$, 즉 $a\ge -\frac{1}{2}$일 때

㉡에서 $a\le x\le 3a+1$ …… ㉣

$a\le 3$일 때, ㉠, ㉣을 동시에 만족시키는 정수 x가 2개이려면 오른쪽 그림에서

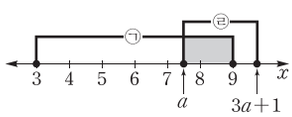


$4\le 3a+1<5$

$3\le 3a<4$ $\therefore 1\le a<\frac{4}{3}$

이때 $a\le 3$이므로 $1\le a<\frac{4}{3}$ …… ㉤

$3a+1\ge 9$, 즉 $a\ge\frac{8}{3}$일 때, ㉠, ㉣을 동시에 만족시키는 정수 x가 2개이려면 오른쪽 그림에서



$7<a\le 8$

이때 $a\ge\frac{8}{3}$이므로 $7<a\le 8$ …… ㉥

㉤, ㉥에서

$1\le a<\frac{4}{3}$ 또는 $7<a\le 8$

(i), (ii)에서 정수 a는 1, 8이므로 구하는 합은

$1+8=9$ 답 ⑤

유형 144 연립이차부등식의 활용

본책 149쪽

연립이차부등식의 활용 문제는 다음과 같은 순서로 푼다.

(i) 주어진 조건에 맞게 부등식을 세운다.

(ii) 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분을 구한다. 이때 미지수의 값의 범위에 주의한다.

0768 삼각형의 세 변의 길이는 모두 양수이므로

$3x-1>0$, $x>0$, $3x+1>0$

$\therefore x>\frac{1}{3}$ …… ㉠

세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $3x+1$이고, 삼각형에서 가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로

$3x+1<x+(3x-1)$

$\therefore x>2$ …… ㉡

둔각삼각형이기 위해서는 가장 긴 변의 길이의 제곱이 나머지 두 변의 길이의 제곱의 합보다 커야 하므로

$(3x+1)^2>x^2+(3x-1)^2$

$x^2-12x<0$, $x(x-12)<0$

$\therefore 0<x<12$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$2<x<12$

따라서 자연수 x는 3, 4, …, 11의 9개이다. 답 9

만점 공략 노트

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c $(a<b<c)$일 때

① $c^2<a^2+b^2$ ➜ 예각삼각형

② $c^2=a^2+b^2$ ➜ 직각삼각형

③ $c^2>a^2+b^2$ ➜ 둔각삼각형

0769 주어진 그림에서 길의 넓이는

$(2x+12)(2x+10)-12\times 10=4x^2+44x\,(\text{m}^2)$

길의 넓이가 104 m^2 이상 240 m^2 이하이어야 하므로

$104\le 4x^2+44x\le 240$ … ❶

$\therefore 26\le x^2+11x\le 60$

$26\le x^2+11x$에서 $x^2+11x-26\ge 0$

$(x+13)(x-2)\ge 0$

$\therefore x\le -13$ 또는 $x\ge 2$

그런데 $x>0$이므로 $x\ge 2$ …… ㉠

$x^2+11x\le 60$에서 $x^2+11x-60\le 0$

$(x+15)(x-4)\le 0$

$\therefore -15\le x\le 4$

그런데 $x>0$이므로 $0<x\le 4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$2\le x\le 4$ … ❷

답 $2\le x\le 4$

단계	채점 요소	비율
❶	부등식 세우기	50 %
❷	x의 값의 범위 구하기	50 %

0770 $\overline{AB}=3x$라 하면 $\overline{BC}=3x+3$

삼각형 AP_1D에서 밑변의 길이는 $\overline{AD}=3x+3$, 높이는 $\overline{AB}=3x$이므로

$$S_1=\frac{1}{2}\times(3x+3)\times 3x=\frac{9}{2}x(x+1)$$

삼각형 P_1CQ_2에서 밑변의 길이는 $\overline{P_1C}=2x+2$, 높이는 $\overline{Q_2C}=2x$이므로

$$\triangle P_1CQ_2=\frac{1}{2}\times(2x+2)\times 2x=2x(x+1)$$

삼각형 P_2CQ_1에서 밑변의 길이는 $\overline{P_2C}=x+1$, 높이는 $\overline{Q_1C}=x$이므로

$$\triangle P_2CQ_1=\frac{1}{2}\times(x+1)\times x=\frac{1}{2}x(x+1)$$

$$\therefore S_2=\triangle P_1CQ_2-\triangle P_2CQ_1$$
$$=2x(x+1)-\frac{1}{2}x(x+1)$$
$$=\frac{3}{2}x(x+1)$$

$$\therefore S_1+S_2=\frac{9}{2}x(x+1)+\frac{3}{2}x(x+1)$$
$$=6x(x+1)$$

$120\le S_1+S_2\le 180$에서 $120\le 6x(x+1)\le 180$

$\therefore 20\le x(x+1)\le 30$

$20\le x(x+1)$에서 $x^2+x-20\ge 0$

$(x+5)(x-4)\ge 0$

$\therefore x\le -5$ 또는 $x\ge 4$

그런데 $x>0$이므로 $x\ge 4$ …… ㉠

$x(x+1)\le 30$에서 $x^2+x-30\le 0$

$(x+6)(x-5)\le 0$

$\therefore -6\le x\le 5$

그런데 $x>0$이므로 $0<x\le 5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$4\le x\le 5$

이때 $\overline{AB}=3x$이므로 $12\le\overline{AB}\le 15$

따라서 변 AB의 길이의 최댓값은 15, 최솟값은 12이므로 구하는 합은

$15+12=27$ 답 27

유형 145 이차방정식의 근의 판별과 이차부등식 → 본책 150쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

(1) 서로 다른 두 실근 ➜ $D>0$

(2) 중근 ➜ $D=0$

(3) 서로 다른 두 허근 ➜ $D<0$

0771 이차방정식 $x^2+kx-k^2+4k=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=k^2-4(-k^2+4k)<0$

$5k^2-16k<0$, $k(5k-16)<0$

$\therefore 0<k<\frac{16}{5}$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-2(k+1)x-k+11=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=\{-(k+1)\}^2-(-k+11)\ge 0$

$k^2+3k-10\ge 0$

$(k+5)(k-2)\ge 0$

$\therefore k\le -5$ 또는 $k\ge 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$2\le k<\frac{16}{5}$

따라서 정수 k는 2, 3이므로 구하는 합은

$2+3=5$ 답 5

0772 이차방정식 $x^2-4kx-k+3=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-(-k+3)>0$

$4k^2+k-3>0$

$(k+1)(4k-3)>0$

$\therefore k<-1$ 또는 $k>\frac{3}{4}$

따라서 실수 k의 값이 아닌 것은 ③이다. 답 ③

0773 주어진 식이 이차방정식이므로

$k+2\ne 0$ $\therefore k\ne -2$ …… ㉠ … ❶

이차방정식 $(k+2)x^2-6x+k-2=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(k+2)(k-2)\ge 0$

$13-k^2\ge 0$, $k^2\le 13$

$\therefore -\sqrt{13}\le k\le\sqrt{13}$ …… ㉡ … ❷

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-\sqrt{13}\le k<-2$ 또는 $-2<k\le\sqrt{13}$

따라서 정수 k는 -3, -1, 0, 1, 2, 3의 6개이다. … ❸

답 6

단계	채점 요소	비율
❶	이차방정식이 되기 위한 k의 조건 구하기	30 %
❷	이차방정식이 실근을 갖도록 하는 k의 값의 범위 구하기	50 %
❸	정수 k의 개수 구하기	20 %

0774 이차방정식 $x^2+2(2k+1)x+3k^2+ak+1=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(2k+1)^2-(3k^2+ak+1)\ge 0$

$\therefore k^2+(4-a)k\ge 0$ …… ㉠

㉠이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 k에 대한 이차방정식 $k^2+(4-a)k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(4-a)^2-4\times 1\times 0\le 0$

$(4-a)^2\le 0$

$\therefore a=4$ 답 4

유형 146 이차방정식의 실근의 부호 본책 150쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

(1) 두 근이 모두 양수이다. ➜ $D\geq 0,\ -\frac{b}{a}>0,\ \frac{c}{a}>0$

(2) 두 근이 모두 음수이다. ➜ $D\geq 0,\ -\frac{b}{a}<0,\ \frac{c}{a}>0$

(3) 두 근이 서로 다른 부호이다. ➜ $\frac{c}{a}<0$

0775 이차방정식 $kx^2-6kx+8=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 양수이므로

(i) $\frac{D}{4}=(-3k)^2-k\times 8\geq 0$

$9k^2-8k\geq 0,\quad k(9k-8)\geq 0$

$\therefore\ k<0$ 또는 $k\geq\frac{8}{9}$ ($\because\ k\neq 0$)

(ii) $\alpha+\beta=-\frac{-6k}{k}=6>0$

(iii) $\alpha\beta=\frac{8}{k}>0\quad\therefore\ k>0$

이상에서 공통부분을 구하면

$k\geq\frac{8}{9}$

따라서 실수 k의 최솟값은 $\frac{8}{9}$이다. 답 ③

0776 이차방정식 $x^2+2\sqrt{3}kx+k+2=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 음수이므로

(i) $\frac{D}{4}=(\sqrt{3}k)^2-(k+2)\geq 0$

$3k^2-k-2\geq 0,\quad (3k+2)(k-1)\geq 0$

$\therefore\ k\leq-\frac{2}{3}$ 또는 $k\geq 1$

(ii) $\alpha+\beta=-2\sqrt{3}k<0\quad\therefore\ k>0$

(iii) $\alpha\beta=k+2>0\quad\therefore\ k>-2$

이상에서 공통부분을 구하면

$k\geq 1$ 답 $k\geq 1$

0777 이차방정식 $x^2-(k^2-7k+10)x-2k+5=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=-2k+5<0\quad\therefore\ k>\frac{5}{2}$ ····· ㉠

또 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 크므로

$\alpha+\beta=k^2-7k+10<0$

$(k-2)(k-5)<0\quad\therefore\ 2<k<5$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{5}{2}<k<5$ 답 $\frac{5}{2}<k<5$

0778 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D_1이라 하면 이 이차방정식이 중근을 가지므로

$D_1=a^2-4b=0\quad\therefore\ b=\frac{1}{4}a^2$

이차방정식 $x^2-2(a+1)x+5-a=0$의 판별식을 D_2, 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 음수이므로

(i) $\frac{D_2}{4}=\{-(a+1)\}^2-(5-a)\geq 0$

$a^2+3a-4\geq 0,\quad (a+4)(a-1)\geq 0$

$\therefore\ a\leq-4$ 또는 $a\geq 1$

(ii) $\alpha+\beta=2(a+1)<0\quad\therefore\ a<-1$

(iii) $\alpha\beta=5-a>0\quad\therefore\ a<5$

이상에서 공통부분을 구하면

$a\leq-4$

이때

$a+b=a+\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{4}(a+2)^2-1$

이므로 $a\leq-4$에서 $a+b$는 $a=-4$일 때 최솟값

$\frac{1}{4}\times(-4+2)^2-1=0$

을 갖는다. 답 0

유형 147 이차방정식의 실근의 위치 본책 151쪽

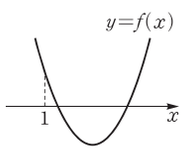
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$의 판별식을 D라 하고, $f(x)=ax^2+bx+c$라 할 때

(1) 두 근이 모두 p보다 크다. ➜ $D\geq 0,\ f(p)>0,\ -\frac{b}{2a}>p$

(2) 두 근이 모두 p보다 작다. ➜ $D\geq 0,\ f(p)>0,\ -\frac{b}{2a}<p$

(3) 두 근 사이에 p가 있다. ➜ $f(p)<0$

0779 $f(x)=x^2-2(k+1)x+3k+7$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 크므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-(3k+7)\geq 0$

$k^2-k-6\geq 0,\quad (k+2)(k-3)\geq 0$

$\therefore\ k\leq-2$ 또는 $k\geq 3$

(ii) $f(1)=1-2(k+1)+3k+7>0$

$k+6>0\quad\therefore\ k>-6$

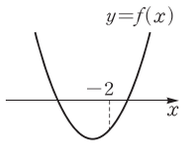
(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k+1$이므로

$k+1>1\quad\therefore\ k>0$

이상에서 공통부분을 구하면

$k\geq 3$ 답 $k\geq 3$

0780 $f(x)=x^2+2kx+k^2-9$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 -2가 있어야 하므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $f(-2)<0$이어야 하므로

$4-4k+k^2-9<0$, $k^2-4k-5<0$

$(k+1)(k-5)<0$

$\therefore -1<k<5$

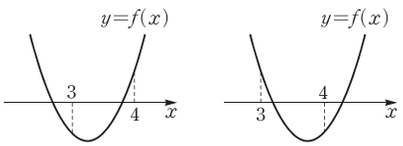
따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4이므로 그 합은

$1+2+3+4=10$ 답 ④

0781 $x^2-7x+12=0$에서 $(x-3)(x-4)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=4$

즉 $x^2-(2a-1)x+6=0$의 두 근 중 한 근만이 3과 4 사이에 있어야 하므로 $f(x)=x^2-(2a-1)x+6$이라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $f(3)f(4)<0$이어야 하므로

$(9-6a+3+6)(16-8a+4+6)<0$

$(18-6a)(26-8a)<0$

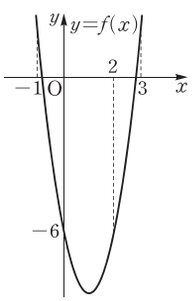
$(a-3)(4a-13)<0$

$\therefore 3<a<\frac{13}{4}$ 답 $3<a<\frac{13}{4}$

0782 $f(x)=ax^2-(a^2-6)x-6$이라 하면

(i) $a>0$일 때

$f(0)=-6$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$f(-1)>0$에서

$a+a^2-6-6>0$

$a^2+a-12>0$

$(a+4)(a-3)>0$

$\therefore a<-4$ 또는 $a>3$ …… ㉠

$f(2)<0$에서

$4a-2(a^2-6)-6<0$

$a^2-2a-3>0$

$(a+1)(a-3)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>3$ …… ㉡

$f(3)>0$에서

$9a-3(a^2-6)-6>0$

$a^2-3a-4<0$

$(a+1)(a-4)<0$

$\therefore -1<a<4$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$3<a<4$

(ii) $a<0$일 때

$f(0)=-6$이므로 조건을 만족시키는 $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 없다.

(i), (ii)에서 $3<a<4$ 답 $3<a<4$

유형 148 사차방정식의 근의 판별 본책 151쪽

사차방정식 $x^4+ax^2+b=0$ (a, b는 실수)이

(1) 서로 다른 네 실근을 갖는다.

➡ $x^2=X$로 놓으면 이차방정식 $X^2+aX+b=0$의 두 근이 서로 다른 양수이다.

➡ $a^2-4b>0$, $-a>0$, $b>0$

(2) 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을 갖는다.

➡ $x^2=X$로 놓으면 이차방정식 $X^2+aX+b=0$의 두 근이 서로 다른 부호이다.

➡ $b<0$

0783 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-2kX+2k+3=0$ …… ㉠

이때 주어진 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 방정식 ㉠의 두 근이 서로 다른 양수이어야 하므로

(i) ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(2k+3)>0$

$k^2-2k-3>0$, $(k+1)(k-3)>0$

$\therefore k<-1$ 또는 $k>3$

(ii) (두 근의 합)$=2k>0$ $\therefore k>0$

(iii) (두 근의 곱)$=2k+3>0$ $\therefore k>-\frac{3}{2}$

이상에서 공통부분을 구하면

$k>3$ 답 $k>3$

0784 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+kX+k^2-5k+4=0$ …… ㉠

이때 주어진 사차방정식이 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을 가지려면 방정식 ㉠의 두 근이 서로 다른 부호이어야 하므로

(두 근의 곱)$=k^2-5k+4<0$

$(k-1)(k-4)<0$

$\therefore 1<k<4$

따라서 자연수 k는 2, 3의 2개이다. 답 ②

0785 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-2(k-2)X+k^2-10k+16=0$ …… ㉠

이때 주어진 사차방정식이 실근만을 가지려면 방정식 ㉠의 두 근이 모두 음이 아닌 실수이어야 하므로

(i) ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-2)\}^2-(k^2-10k+16)\geq 0$

$6k-12\geq 0$ $\therefore k\geq 2$

(ii) (두 근의 합)$=2(k-2)\geq 0$ $\therefore k\geq 2$

(iii) (두 근의 곱)$=k^2-10k+16\geq 0$

$(k-2)(k-8)\geq 0$

$\therefore k\leq 2$ 또는 $k\geq 8$

이상에서 공통부분을 구하면

$k=2$ 또는 $k\geq 8$

따라서 10 이하의 자연수 k는 2, 8, 9, 10이므로 그 합은

$2+8+9+10=29$ 답 ③

1등급 유형 도전하기

본책 152~153쪽

0786 Step 1 $a\geq 3$일 때, 조건을 만족시키는 a의 값을 찾는다.

$$\begin{cases} |a-3|(x^2-a^2)\geq 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x-2a+1)(x-a-2)\leq 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

(i) $a=3$일 때

부등식 ㉠에서 $0\geq 0$이므로 부등식 ㉠의 해는 모든 실수이다.

부등식 ㉡에서

$(x-5)^2\leq 0$ $\therefore x=5$

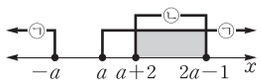
즉 주어진 연립부등식의 해는 $x=$ (가) 5 이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $a>3$일 때

$a>3$에서 $a+2<2a-1$이므로

부등식 ㉠의 해는 $x\leq -a$ 또는 $x\geq a$

부등식 ㉡의 해는 $a+2\leq x\leq 2a-1$



이때 $a<a+2$이므로 연립부등식의 해는

$a+2\leq x\leq$ (나) $2a-1$ 이고, 이 범위의 실수는 무수히 많으므로 조건을 만족시키는 a의 값은 없다.

Step 2 $a<3$일 때, 조건을 만족시키는 a의 값을 찾는다.

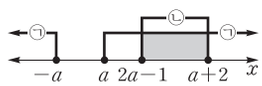
(iii) $a<3$일 때

$a<3$에서 $2a-1<a+2$이므로 부등식 ㉡의 해는

$2a-1\leq x\leq a+2$

① $1\leq a<3$이면

부등식 ㉠의 해는 $x\leq -a$ 또는 $x\geq a$

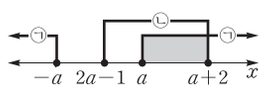


이때 $a\leq 2a-1$이므로 연립부등식의 해는

$2a-1\leq x\leq a+2$이고, 이 범위의 실수는 무수히 많으므로 조건을 만족시키는 a의 값은 없다.

② $0\leq a<1$이면

부등식 ㉠의 해는 $x\leq -a$ 또는 $x\geq a$

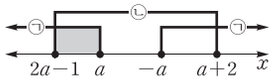


이때 $2a-1<a$이므로 연립부등식의 해에는

$a\leq x\leq$ (다) $a+2$ 가 반드시 포함되고, 이 범위의 실수는 무수히 많으므로 조건을 만족시키는 a의 값은 없다.

③ $a<0$이면

부등식 ㉠의 해는 $x\leq a$ 또는 $x\geq -a$



이때 $2a-1<a$이므로 연립부등식의 해에는

$2a-1\leq x\leq a$가 반드시 포함되고, 이 범위의 실수는 무수히 많으므로 조건을 만족시키는 a의 값은 없다.

이상에서 조건을 만족시키는 a의 값은 3이다.

Step 3 $f(p)+g(p)$의 값을 구한다.

$p=5$, $f(a)=2a-1$, $g(a)=a+2$이므로

$f(p)+g(p)=f(5)+g(5)=9+7=16$ 답 16

논리 Check

x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} |a-2|(x^2-4a^2)\geq 0 \\ (x-a-1)(x+a-5)\leq 0 \end{cases}$$

을 만족시키는 실수 x가 오직 하나 존재하도록 하는 실수 a의 값을 모두 구하시오.

풀이 $$\begin{cases} |a-2|(x^2-4a^2)\geq 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x-a-1)(x+a-5)\leq 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

(i) $a=2$일 때

부등식 ㉠에서 $0\geq 0$이므로 부등식 ㉠의 해는 모든 실수이다.

부등식 ㉡에서

$(x-3)^2\leq 0$ $\therefore x=3$

즉 주어진 연립부등식의 해는 $x=3$이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $a>2$일 때

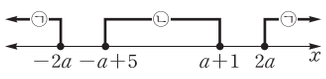
부등식 ㉠에서

$(x+2a)(x-2a)\geq 0$

$\therefore x\leq -2a$ 또는 $x\geq 2a$

$a>2$에서 $a+1>-a+5$이므로 부등식 ㉡의 해는

$-a+5\leq x\leq a+1$



연립부등식을 만족시키는 실수 x가 오직 하나 존재하려면

$-2a=-a+5$, $2a>a+1$ 또는

$2a=a+1$, $-2a<-a+5$

$-2a=-a+5$에서 $a=-5$

$2a>a+1$에서 $a>1$

즉 $-2a=-a+5$, $2a>a+1$을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

$2a=a+1$에서 $a=1$

$-2a<-a+5$에서 $a>-5$

즉 $2a=a+1$, $-2a<-a+5$에서

$a=1$

이때 $a>2$이므로 $a=1$은 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 연립부등식을 만족시키는 실수 x가 오직 하나 존재하도록 하는 실수 a의 값은 없다.

(iii) $a<2$일 때

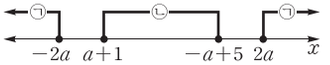
$a<2$에서 $a+1<-a+5$이므로 부등식 ㉡의 해는

$a+1\le x\le -a+5$

① $0\le a<2$이면

부등식 ㉠의 해는

$x\le -2a$ 또는 $x\ge 2a$



연립부등식을 만족시키는 실수 x가 오직 하나 존재하려면

$-2a=a+1$, $2a>-a+5$ 또는

$2a=-a+5$, $-2a<a+1$

$-2a=a+1$에서 $a=-\frac{1}{3}$

$2a>-a+5$에서 $a>\frac{5}{3}$

즉 $-2a=a+1$, $2a>-a+5$를 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

$2a=-a+5$에서 $a=\frac{5}{3}$

$-2a<a+1$에서 $a>-\frac{1}{3}$

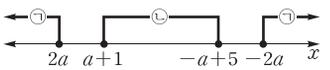
즉 $2a=-a+5$, $-2a<a+1$에서

$a=\frac{5}{3}$

② $a<0$이면

부등식 ㉠의 해는

$x\le 2a$ 또는 $x\ge -2a$



연립부등식을 만족시키는 실수 x가 오직 하나 존재하려면

$a+1=2a$, $-a+5<-2a$ 또는

$-a+5=-2a$, $2a<a+1$

$a+1=2a$에서 $a=1$

$-a+5<-2a$에서 $a<-5$

즉 $a+1=2a$, $-a+5<-2a$를 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

$-a+5=-2a$에서 $a=-5$

$2a<a+1$에서 $a<1$

즉 $-a+5=-2a$, $2a<a+1$에서

$a=-5$

①, ②에서 $a=-5$ 또는 $a=\frac{5}{3}$이면 연립부등식을 만족시키는 실수 x가 오직 하나 존재한다.

이상에서 구하는 실수 a의 값은 -5, $\frac{5}{3}$, 2이다.

답 -5, $\frac{5}{3}$, 2

0787 Step 1 부등식의 정수인 해가 존재하기 위한 n의 값의 범위를 구한다.

주어진 부등식의 정수인 해가 존재하려면 이차방정식 $x^2+nx+n=0$이 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+nx+n=0$의 판별식을 D라 하면

$D=n^2-4n\ge 0$

$n(n-4)\ge 0$ $\therefore n\ge 4$ ($\because n$은 자연수)

즉 $n\le 3$일 때, $f(n)=0$

또 $n=4$일 때, 주어진 부등식은 $x^2+4x+4\le 0$이므로

$(x+2)^2\le 0$ $\therefore x=-2$

$\therefore f(4)=1$

Step 2 $n\ge 5$일 때, $f(n)$을 구한다.

$n\ge 5$일 때, 이차방정식 $x^2+nx+n=0$의 해는

$x=\frac{-n\pm\sqrt{n^2-4n}}{2}$

이므로 주어진 부등식의 해는

$\frac{-n-\sqrt{n^2-4n}}{2}\le x\le \frac{-n+\sqrt{n^2-4n}}{2}$

$n\ge 5$일 때

$n^2-4n=(n-2)^2-4<(n-2)^2$,

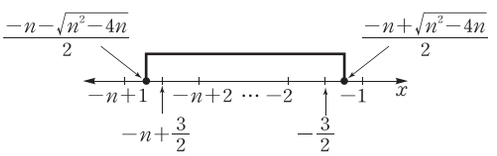
$(n^2-4n)-(n-3)^2=2n-9>0$

이므로 $n-3<\sqrt{n^2-4n}<n-2$

$\therefore -n+1<\frac{-n-\sqrt{n^2-4n}}{2}<-n+\frac{3}{2}$,

$-\frac{3}{2}<\frac{-n+\sqrt{n^2-4n}}{2}<-1$

이것을 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



따라서 주어진 부등식의 정수인 해는 $-n+2$, $-n+3$, …, -2이므로 그 개수는

$-2-(-n+2)+1=n-3$

즉 $n\ge 5$일 때, $f(n)=n-3$

Step 3 $f(n)+f(n+1)+f(n+2)=12$인 n의 값을 구한다.

$f(n)=\begin{cases}0 & (1\le n\le 3)\\ 1 & (n=4)\\ n-3 & (n\ge 5)\end{cases}=\begin{cases}0 & (1\le n\le 2)\\ n-3 & (n\ge 3)\end{cases}$ 이므로

$f(n)+f(n+1)+f(n+2)=\begin{cases}0 & (n=1)\\ 1 & (n=2)\\ 3n-6 & (n\ge 3)\end{cases}$

따라서 $f(n)+f(n+1)+f(n+2)=12$에서

$3n-6=12$ $\therefore n=6$

답 6

0788 Step 1 연립부등식을 이루는 부등식 중 하나는 일차부등식임을 추론한 후 a, b의 조건을 구한다.

연립부등식의 해가 $x<p$이려면 연립부등식을 이루는 두 부등식 중 적어도 하나는 일차부등식이어야 한다.

즉 $a=0$ 또는 $b=0$이어야 한다.

이때 $a=b=0$이면 부등식 $ax^2+bx+1<0$에서 $1<0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a=0$, $b\ne 0$ 또는 $a\ne 0$, $b=0$이어야 한다.

Step 2 $a=0$, $b\neq0$일 때, 연립부등식의 해를 구한다.

(i) $a=0$, $b\neq0$일 때

주어진 연립부등식에서 $\begin{cases} bx+1<0 \\ bx^2+x<0 \end{cases}$

① $b>0$이면

$bx+1<0$에서 $x<-\frac{1}{b}$ …… ㉠

$bx^2+x<0$에서 $x(bx+1)<0$

$\therefore -\frac{1}{b}<x<0$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 없으므로 해는 없다.

② $b<0$이면

$bx+1<0$에서 $x>-\frac{1}{b}$ …… ㉢

$bx^2+x<0$에서 $x(bx+1)<0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>-\frac{1}{b}$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분은 $x>-\frac{1}{b}$

즉 해가 $x<p$의 꼴이 아니므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

Step 3 $a\neq0$, $b=0$일 때, 연립부등식의 해를 구한다.

(ii) $a\neq0$, $b=0$일 때

주어진 연립부등식에서 $\begin{cases} ax^2+1<0 \\ x+a<0 \end{cases}$

① $a>0$이면

$ax^2+1<0$의 해는 없으므로 연립부등식의 해는 없다.

② $a<0$이면

$ax^2+1<0$에서

$x<-\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 또는 $x>\sqrt{-\frac{1}{a}}$ …… ㉤

$x+a<0$에서 $x<-a$ …… ㉥

㉤, ㉥의 공통부분이 $x<p$의 꼴이 되려면

$0<-a\leq\sqrt{-\frac{1}{a}}$

이어야 한다.

이때 연립부등식의 해는 $x<-\sqrt{-\frac{1}{a}}$이다.

Step 4 $p^2=1$일 때, $a+b+p$의 값을 구한다.

$p=-\sqrt{-\frac{1}{a}}<0$이므로 $p^2=1$에서 $p=-1$

즉 $\sqrt{-\frac{1}{a}}=1$이므로 $a=-1$

따라서 $a=-1$, $b=0$, $p=-1$이므로

$a+b+p=-2$ 답 -2

0789 Step 1 조건 (가), (나)를 이용하여 p의 값을 구한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수가 각각 a, $2a$이므로 조건 (가)에 의하여

$h(x)=-a(x-p)^2+q$

로 놓을 수 있다.

$a<0$이면 부등식 $h(x)\geq0$, 즉 $f(x)\geq g(x)$의 해는 $x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$의 꼴이므로 이 범위에 속하는 정수는 무수히 많다.

따라서 조건 (나)에서 정수인 해가 유한개이려면 $a>0$이어야 한다.

이때 이차함수 $y=h(x)$의 그래프는 직선 $x=p$에 대하여 대칭이므로 부등식 $h(x)\geq0$의 정수인 해는 $p-2$, $p-1$, p, $p+1$, $p+2$의 5개이다.

따라서 $(p-2)+(p-1)+p+(p+1)+(p+2)=10$이므로

$5p=10$ $\therefore p=2$

Step 2 조건 (나), (다)를 이용하여 a의 값을 구한다.

조건 (다)에서 방정식 $|h(x)|=6$의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 $y=h(x)$의 그래프의 꼭짓점의 y좌표가 6이어야 한다.

$\therefore h(x)=-a(x-2)^2+6$

조건 (나)에서 $h(4)\geq0$, $h(5)<0$이므로

$h(4)\geq0$에서 $-a\times2^2+6\geq0$ $\therefore a\leq\frac{3}{2}$

$h(5)<0$에서 $-a\times3^2+6<0$ $\therefore a>\frac{2}{3}$

따라서 $\frac{2}{3}<a\leq\frac{3}{2}$이고 a가 정수이므로

$a=1$

Step 3 $h(x)=f(x)-g(x)$임을 이용하여 $p\times\{f(a)-g(a)\}$의 값을 구한다.

$h(x)=-(x-2)^2+6$이므로

$p\times\{f(a)-g(a)\}=2\times h(1)=2\times5=10$ 답 10

0790 Step 1 $g(x)=f(x)-\frac{|f(x)|}{4}$로 놓고 $f(x)$의 부호에 따라 범위를 나누어 $g(x)$를 구한다.

$f(x)=x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는

-4, 2

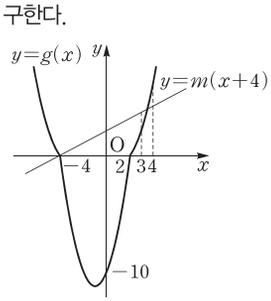
$x\leq-4$ 또는 $x\geq2$일 때 $f(x)\geq0$이고, $-4<x<2$일 때 $f(x)<0$이므로 $g(x)=f(x)-\frac{|f(x)|}{4}$라 하면

$$g(x)=\begin{cases} \frac{3}{4}f(x) & (x\leq-4 \text{ 또는 } x\geq2) \\ \frac{5}{4}f(x) & (-4<x<2) \end{cases}$$

Step 2 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=m(x+4)$를 이용하여 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 값을 구한다.

$y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

또 직선 $y=m(x+4)$는 기울기 m이 양수이고 점 $(-4, 0)$을 지나므로 오른쪽 그림과 같다.



이때 부등식 $g(x)<m(x+4)$를 만족시키는 x의 값의 범위는 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=m(x+4)$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 같으므로 부등식을 만족시키는 정수 x는 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3의 7개이어야 한다.

Step 3 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 7이 되도록 하는 m의 값의 범위를 구한다.

즉 $g(3)<m(3+4)$이고 $g(4)\geq m(4+4)$이어야 한다.

(i) $g(3)<m(3+4)$에서

$$\frac{3}{4}f(3)<7m, \qquad \frac{3}{4}\times 7<7m$$

$$\therefore\ m>\frac{3}{4}$$

(ii) $g(4)\geq m(4+4)$에서

$$\frac{3}{4}f(4)\geq 8m, \qquad \frac{3}{4}\times 16\geq 8m$$

$$\therefore\ m\leq\frac{3}{2}$$

(i), (ii)에서 $\frac{3}{4}<m\leq\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{4}<m\leq\frac{3}{2}$

0791 Step 1 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 좌표를 이용하여 $f(x)$, $g(x)$의 식을 세운다.

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 최고차항의 계수의 절댓값이 같고 그 그래프가 서로 다른 두 점 $(-2,\ k)$, $(4,\ k)$에서 만나므로 양수 a에 대하여

$$f(x)=a(x+2)(x-4)+k,$$
$$g(x)=-a(x+2)(x-4)+k$$

로 놓을 수 있다.

Step 2 함수 $y=h(x)$의 그래프가 지나는 점의 좌표와 $y=h(x)$가 최솟값을 갖는 x의 값을 이용하여 $h(x)$의 식을 세운다.

함수 $y=h(x)$의 그래프가 점 $(4,\ k)$를 지나고 $y=h(x)$가 $x=5$에서 최솟값을 가지므로 $y=h(x)$의 그래프는 점 $(6,\ k)$를 지난다.

또 함수 $h(x)$의 최고차항의 계수가 a이므로

$$h(x)=a(x-4)(x-6)+k$$

이다.

Step 3 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수를 구한다.

부등식 $f(x)+h(x)\leq 2g(x)$에서

$$a(x+2)(x-4)+k+a(x-4)(x-6)+k$$
$$\leq -2a(x+2)(x-4)+2k$$
$$3a(x+2)(x-4)+a(x-4)(x-6)\leq 0$$
$$(x-4)\{3(x+2)+(x-6)\}\leq 0\ (\because\ a>0)$$
$$x(x-4)\leq 0$$
$$\therefore\ 0\leq x\leq 4$$

따라서 정수 x는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다. 답 5

0792 Step 1 경우를 나누어 이차부등식의 해를 구한다.

이차방정식 $(6x-k^2+6k)(6x-4k)=0$의 해가

$$x=\frac{k^2-6k}{6}\ \text{또는}\ x=\frac{2k}{3}$$

이므로 이차부등식 $(6x-k^2+6k)(6x-4k)\leq 0$의 해는

$\frac{2k}{3}\leq\frac{k^2-6k}{6}$일 때, $\frac{2k}{3}\leq x\leq\frac{k^2-6k}{6}$

$\frac{2k}{3}>\frac{k^2-6k}{6}$일 때, $\frac{k^2-6k}{6}\leq x\leq\frac{2k}{3}$

Step 2 조건 (가), (나)를 이용하여 $\beta-\alpha=4$임을 파악한 후 이차부등식의 해에 따라 k의 값을 구한다.

조건 (가)에서 $\beta-\alpha$는 자연수이고, α, β가 정수가 아닌 실수이므로 조건 (나)에서 $\alpha\leq x\leq\beta$를 만족시키는 정수 x의 개수가 4이려면 $\beta-\alpha=4$이다.

(i) 이차부등식의 해가 $\frac{2k}{3}\leq x\leq\frac{k^2-6k}{6}$일 때

$\frac{k^2-6k}{6}-\frac{2k}{3}=4$에서 $k^2-6k-4k=24$

$k^2-10k-24=0$, $(k+2)(k-12)=0$

$\therefore\ k=-2$ 또는 $k=12$

$k=-2$일 때, $\frac{k^2-6k}{6}=\frac{8}{3}$, $\frac{2k}{3}=-\frac{4}{3}$이므로 α, β는 정수가 아니다.

즉 조건을 만족시킨다.

$k=12$일 때, $\frac{k^2-6k}{6}=12$, $\frac{2k}{3}=8$이므로 α, β는 정수이다.

즉 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 이차부등식의 해가 $\frac{k^2-6k}{6}\leq x\leq\frac{2k}{3}$일 때

$\frac{2k}{3}-\frac{k^2-6k}{6}=4$에서 $4k-k^2+6k=24$

$k^2-10k+24=0$, $(k-4)(k-6)=0$

$\therefore\ k=4$ 또는 $k=6$

$k=4$일 때, $\frac{k^2-6k}{6}=-\frac{4}{3}$, $\frac{2k}{3}=\frac{8}{3}$이므로 α, β는 정수가 아니다.

즉 조건을 만족시킨다.

$k=6$일 때, $\frac{k^2-6k}{6}=0$, $\frac{2k}{3}=4$이므로 α, β는 정수이다.

즉 조건을 만족시키지 않는다.

Step 3 실수 k의 값의 곱을 구한다.

(i), (ii)에서 실수 k의 값은 -2, 4이므로 구하는 곱은

$-2\times 4=-8$ 답 -8

시험 만점 완성하기

본책 154~157쪽

0793 전략 주어진 그래프에서 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위를 찾는다.

부등식 $f(x)<g(x)<0$의 해는 $y=g(x)$의 그래프가 $y=f(x)$의 그래프보다 위쪽에 있고 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$$-4<x<-2$$

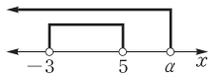
따라서 정수 x는 -3의 1개이다. 답 ①

0794 전략 주어진 이차부등식의 좌변을 인수분해하여 해를 구한다.

$x^2-2x-15<0$에서

$(x+3)(x-5)<0$ $\therefore\ -3<x<5$

이때 $x<\alpha$가 이차부등식 $x^2-2x-15<0$의 해를 포함하려면 오른쪽 그림에서



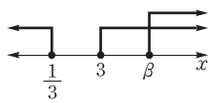
$\alpha \geq 5$ ····· ㉠

$-3x^2+10x-3 \leq 0$에서

$3x^2-10x+3 \geq 0$, $(3x-1)(x-3) \geq 0$

$\therefore x \leq \frac{1}{3}$ 또는 $x \geq 3$

이때 $x \geq \beta$가 이차부등식 $-3x^2+10x-3 \leq 0$의 해에 포함되려면 오른쪽 그림에서



$\beta \geq 3$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha+\beta \geq 8$이므로 구하는 최솟값은 8이다. 답 ③

0795 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 절댓값 기호를 포함한 이차부등식을 푼다.

$x^2-2|x|-24<0$에서

(i) $x<0$일 때

$x^2+2x-24<0$, $(x+6)(x-4)<0$

$\therefore -6<x<4$

그런데 $x<0$이므로 $-6<x<0$

(ii) $x \geq 0$일 때

$x^2-2x-24<0$, $(x+4)(x-6)<0$

$\therefore -4<x<6$

그런데 $x \geq 0$이므로 $0 \leq x<6$

(i), (ii)에서 $-6<x<6$ ····· ㉠

$|2x-a|<b$에서 $-b<2x-a<b$

$a-b<2x<a+b$

$\therefore \frac{a-b}{2}<x<\frac{a+b}{2}$ ····· ㉡

㉠, ㉡이 서로 같으므로

$\frac{a-b}{2}=-6$, $\frac{a+b}{2}=6$

$\therefore a-b=-12$, $a+b=12$

두 식을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=12$

$\therefore 3a+b=12$ 답 ①

0796 전략 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$ $(\alpha<\beta)$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$이다.

이차부등식 $(a+b)x^2+(b+c)x+(c+a)<0$의 해가 $x<-2$ 또는 $x>0$이므로

$a+b<0$

해가 $x<-2$ 또는 $x>0$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$x(x+2)>0$ $\therefore x^2+2x>0$

양변에 $a+b$를 곱하면

$(a+b)x^2+2(a+b)x<0$ $(\because a+b<0)$

이 부등식이 $(a+b)x^2+(b+c)x+(c+a)<0$과 같으므로

$b+c=2(a+b)$, $c+a=0$

$\therefore b=-3a$, $c=-a$

이때 $a+b<0$이고 $b=-3a$이므로

$a+(-3a)<0$, $-2a<0$ $\therefore a>0$

이차부등식 $bx^2+ax-4c>0$, 즉 $-3ax^2+ax+4a>0$에서 $a>0$이므로

$3x^2-x-4<0$, $(x+1)(3x-4)<0$

$\therefore -1<x<\frac{4}{3}$ 답 ④

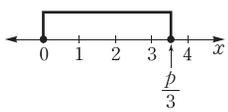
0797 전략 주어진 부등식의 해를 4개의 정수를 포함하도록 수직선 위에 나타낸다.

$3x^2-px \leq 0$에서 $x(3x-p) \leq 0$ ····· ㉠

(i) $p>0$일 때

㉠에서 $0 \leq x \leq \frac{p}{3}$

이 부등식을 만족시키는 정수 x가 4개이려면 오른쪽 그림에서



$3 \leq \frac{p}{3}<4$ $\therefore 9 \leq p<12$

(ii) $p=0$일 때

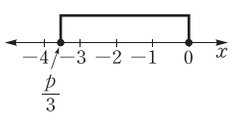
㉠에서 $3x^2 \leq 0$

이 부등식을 만족시키는 정수 x는 0뿐이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $p<0$일 때

㉠에서 $\frac{p}{3} \leq x \leq 0$

이 부등식을 만족시키는 정수 x가 4개이려면 오른쪽 그림에서



$-4<\frac{p}{3} \leq -3$

$\therefore -12<p \leq -9$

이상에서 $-12<p \leq -9$ 또는 $9 \leq p<12$

따라서 정수 p의 최댓값은 11, 최솟값은 -11이므로

$M=11$, $m=-11$

$\therefore M-m=22$ 답 ⑤

0798 전략 이차부등식 $ax^2+bx+c \leq 0$이 해를 한 개만 가질 조건은 $a>0$, $b^2-4ac=0$이다.

이차부등식 $kx^2-2(k^2-3k)x-2k+6 \leq 0$이 해를 한 개만 가지려면

$k>0$ ····· ㉠

또 이차방정식 $kx^2-2(k^2-3k)x-2k+6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k^2-3k)\}^2-k(-2k+6)=0$

$k^2(k-3)^2+2k(k-3)=0$

$k(k-3)\{k(k-3)+2\}=0$

$k(k-3)(k^2-3k+2)=0$

$k(k-1)(k-2)(k-3)=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=1$ 또는 $k=2$ 또는 $k=3$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $k=1$ 또는 $k=2$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$1+2+3=6$ 답 ③

0799 전략 임의의 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\geq 0$이 성립할 조건은 $a>0$, $b^2-4ac\leq 0$이다.

임의의 실수 x에 대하여 $ax^2-2bx+c\geq 0$이 성립하려면

$a>0$, $b^2-ac\leq 0$ …… ㉠

마찬가지 방법으로 임의의 실수 x에 대하여 $bx^2-2cx+a\geq 0$, $cx^2-2ax+b\geq 0$이 성립하려면

$b>0$, $c^2-ab\leq 0$ …… ㉡

$c>0$, $a^2-bc\leq 0$ …… ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면 $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\leq 0$

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\leq 0$

$\therefore a=b=c$

$ax^2+3cx-10b\leq 0$에서

$ax^2+3ax-10a\leq 0$, $x^2+3x-10\leq 0$ ($\because a>0$)

$(x+5)(x-2)\leq 0$ $\therefore -5\leq x\leq 2$

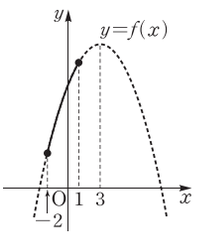
따라서 정수 x는 -5, -4, …, 2의 8개이다. 답 ③

0800 전략 $a\leq x\leq b$에서 이차부등식 $f(x)\geq 0$이 항상 성립하려면 $a\leq x\leq b$에서 ($f(x)$의 최솟값) ≥ 0이어야 한다.

$f(x)=-x^2+6x-a^2+27$이라 하면

$f(x)=-(x-3)^2-a^2+36$

$-2\leq x\leq 1$에서 $f(x)\geq 0$이 항상 성립하려면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$f(-2)\geq 0$에서

$-25-a^2+36\geq 0$, $a^2\leq 11$

$\therefore -\sqrt{11}\leq a\leq \sqrt{11}$

따라서 $\alpha=-\sqrt{11}$, $\beta=\sqrt{11}$이므로

$\alpha^2+\beta^2=22$ 답 ①

0801 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=g(x)$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>g(x)$가 성립해야 한다.

이차함수 $y=x^2+4x+6$의 그래프가 직선 $y=kx+2$보다 항상 위쪽에 있으려면 이차부등식

$x^2+4x+6>kx+2$, 즉 $x^2+(4-k)x+4>0$

이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+(4-k)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(4-k)^2-16<0$

$k^2-8k<0$, $k(k-8)<0$

$\therefore 0<k<8$

따라서 정수 k의 최댓값은 7, 최솟값은 1이므로

$M=7$, $m=1$ $\therefore Mm=7$ 답 ⑤

0802 전략 주어진 조건을 이용하여 x에 대한 이차부등식을 세운다.

새로 만든 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각

$(30-x)$ cm, $(20+x)$ cm

이므로

$30-x>0$ $\therefore 0<x<30$ ($\because x>0$)

넓이가 576 cm^2 이상이 되려면

$(30-x)(20+x)\geq 576$

$x^2-10x-24\leq 0$, $(x+2)(x-12)\leq 0$

$\therefore -2\leq x\leq 12$

이때 $0<x<30$이므로 $0<x\leq 12$

따라서 x의 최댓값은 12이다. 답 ④

0803 전략 각 부등식의 해를 구하여 공통부분이 존재하도록 하는 k의 값의 범위를 구한다.

$x^2+8x-20\leq 0$에서 $(x+10)(x-2)\leq 0$

$\therefore -10\leq x\leq 2$ …… ㉠

$x^2-2kx-8k^2>0$에서 $(x+2k)(x-4k)>0$

$\therefore x<-2k$ 또는 $x>4k$ ($\because k>0$) …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 존재하려면

$-2k>-10$ 또는 $4k<2$

$k<5$ 또는 $k<\frac{1}{2}$

$\therefore k<5$

따라서 양의 정수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다. 답 ③

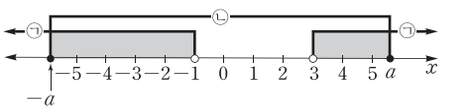
0804 전략 각 부등식의 해를 구하여 공통부분에 포함되는 정수가 6개 이상이도록 하는 a의 값의 범위를 구한다.

$x^2-2x-3>0$에서 $(x+1)(x-3)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>3$ …… ㉠

$x^2-a^2\leq 0$에서 $(x+a)(x-a)\leq 0$

$\therefore -a\leq x\leq a$ ($\because a>0$) …… ㉡



㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 6개 이상이려면 위의 그림에서

$a\geq 5$

따라서 a의 최솟값은 5이다. 답 ②

0805 전략 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 실근을 가지면 $D\geq 0$이다.

이차방정식 $x^2+(a+3)x+2a+3=0$이 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 할 때

$D_1=(a+3)^2-4(2a+3)\geq 0$

$a^2-2a-3\geq 0$, $(a+1)(a-3)\geq 0$

$\therefore a\leq -1$ 또는 $a\geq 3$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+(2+a)x+1=0$이 실근을 가지려면 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 할 때

$D_2=(2+a)^2-4\geq 0$

$a^2+4a\geq 0$, $a(a+4)\geq 0$

$\therefore a\leq -4$ 또는 $a\geq 0$ …… ㉡

주어진 두 이차방정식 중 적어도 하나가 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는 ㉠, ㉡을 합친 범위이므로

$a\leq -1$ 또는 $a\geq 0$ 답 ③

다른 풀이 적어도 하나가 실근을 갖는 경우는 주어진 두 이차방정식이 모두 허근을 갖는 경우를 제외하면 된다.

이차방정식 $x^2+(a+3)x+2a+3=0$의 판별식을 D_1이라 할 때, 이 이차방정식이 허근을 가지려면

$D_1=(a+3)^2-4(2a+3)<0$

$a^2-2a-3<0$, $(a+1)(a-3)<0$

$\therefore -1<a<3$ …… ㉢

이차방정식 $x^2+(2+a)x+1=0$의 판별식을 D_2라 할 때, 이 이차방정식이 허근을 가지려면

$D_2=(2+a)^2-4<0$

$a^2+4a<0$, $a(a+4)<0$

$\therefore -4<a<0$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$-1<a<0$

따라서 주어진 두 이차방정식 중 적어도 하나가 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는

$a\le -1$ 또는 $a\ge 0$

0806 전략 이차방정식의 두 근 α, β의 부호가 서로 다르고 절댓값이 같으면 $\alpha\beta<0$, $\alpha+\beta=0$임을 이용한다.

이차방정식 $2x^2+(m^2+2m-15)x+m^2-16=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=\dfrac{m^2-16}{2}<0$, $m^2-16<0$

$(m+4)(m-4)<0$

$\therefore -4<m<4$ …… ㉠

또 두 근의 절댓값이 같으므로

$\alpha+\beta=-\dfrac{m^2+2m-15}{2}=0$

$m^2+2m-15=0$

$(m+5)(m-3)=0$

$\therefore m=-5$ 또는 $m=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$m=3$

답 ④

0807 전략 $f(x)=p(x-\alpha)(x-\beta)$이면 $f(ax+b)=p(ax+b-\alpha)(ax+b-\beta)$이다.

$ax^2+bx+c<0$의 해가 $-3<x<1$이므로

$ax^2+bx+c=a(x+3)(x-1)$ $(a>0)$

이라 하면

$a(x-6)^2+b(x-6)+c=a\{(x-6)+3\}\{(x-6)-1\}$

$=a(x-3)(x-7)$

따라서 $a(x-6)^2+b(x-6)+c\le 0$, 즉 $a(x-3)(x-7)\le 0$에서

$(x-3)(x-7)\le 0$ $(\because a>0)$

$\therefore 3\le x\le 7$

즉 정수 x는 3, 4, 5, 6, 7이므로 그 합은

$3+4+5+6+7=25$

답 25

0808 전략 이차부등식 $x^2+ax+b<0$이 해를 가지려면 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식 D에 대하여 $D>0$이어야 한다.

$(x-2)(x-p)<4(x-k)$에서

$x^2-(p+2)x+2p<4x-4k$

$\therefore x^2-(p+6)x+2p+4k<0$

이 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $x^2-(p+6)x+2p+4k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=\{-(p+6)\}^2-4(2p+4k)>0$

$\therefore p^2+4p+36-16k>0$ …… ㉠

㉠이 p의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 p에 대한 이차방정식 $p^2+4p+36-16k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=2^2-(36-16k)<0$

$-32+16k<0$ $\therefore k<2$

답 $k<2$

0809 전략 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해이다.

이차함수 $y=mx^2+2nx+mn+14$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는 이차부등식

$mx^2+2nx+mn+14>0$ …… ㉠

의 해이다.

㉠의 해가 $-1<x<4$이므로

$m<0$

해가 $-1<x<4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-4)<0$

$\therefore x^2-3x-4<0$

양변에 m을 곱하면

$mx^2-3mx-4m>0$ $(\because m<0)$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$2n=-3m$, $mn+14=-4m$

$2n=-3m$에서 $n=-\dfrac{3}{2}m$

이것을 $mn+14=-4m$에 대입하면

$-\dfrac{3}{2}m^2+14=-4m$

$3m^2-8m-28=0$

$(m+2)(3m-14)=0$

$\therefore m=-2$ $(\because m<0)$

따라서 $n=-\dfrac{3}{2}m=-\dfrac{3}{2}\times(-2)=3$이므로

$m+n=1$

답 1

0810 전략 각 부등식의 해를 구한 후 공통부분을 구한다.

$|x^2-9|<8x$에서

(i) $x^2-9<0$, 즉 $-3<x<3$일 때

$-(x^2-9)<8x$, $x^2+8x-9>0$

$(x+9)(x-1)>0$

$\therefore x<-9$ 또는 $x>1$

그런데 $-3<x<3$이므로 $1<x<3$

(ii) $x^2-9\ge 0$, 즉 $x\le -3$ 또는 $x\ge 3$일 때

$x^2-9<8x$, $x^2-8x-9<0$

$(x+1)(x-9)<0$ $\therefore -1<x<9$

그런데 $x\le -3$ 또는 $x\ge 3$이므로 $3\le x<9$

(i), (ii)에서 $1<x<9$ …… ㉠

또 $3x^2-4x-20<0$에서 $(x+2)(3x-10)<0$

$\therefore -2<x<\frac{10}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$1<x<\frac{10}{3}$ 답 $1<x<\frac{10}{3}$

0811 전략 부등식 $A\le B\le C$가 항상 성립하려면 부등식 $A\le B$, $B\le C$가 각각 항상 성립해야 한다.

모든 실수 x에 대하여

$-x^2+2x-1\le mx+n$, 즉 $x^2+(m-2)x+n+1\ge 0$

이 성립하므로 이차방정식 $x^2+(m-2)x+n+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(m-2)^2-4(n+1)\le 0$

$m^2-4m-4n\le 0$

$\therefore 4n\ge m^2-4m$ …… ㉠

모든 실수 x에 대하여

$mx+n\le x^2-6x+7$, 즉 $x^2-(m+6)x+7-n\ge 0$

이 성립하므로 이차방정식 $x^2-(m+6)x+7-n=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=\{-(m+6)\}^2-4(7-n)\le 0$

$m^2+12m+4n+8\le 0$

$\therefore 4n\le -m^2-12m-8$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$m^2-4m\le 4n\le -m^2-12m-8$ …… ㉢

이므로 $m^2-4m\le -m^2-12m-8$에서

$m^2+4m+4\le 0$, $(m+2)^2\le 0$

$\therefore m=-2$

이것을 ㉢에 대입하면

$12\le 4n\le 12$, $4n=12$ $\therefore n=3$

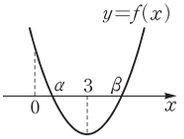
$\therefore m^2+n^2=(-2)^2+3^2=13$ 답 13

0812 전략 서로 다른 두 실근 중 한 실근이 0과 3 사이에 있거나 두 실근이 모두 0과 3 사이에 있는 경우로 나누어 해결한다.

$f(x)=x^2-(k+2)x+2k-8$이라 하고, $\alpha<\beta$라 하여 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) $0\le\alpha\le 3<\beta$인 경우

오른쪽 그림과 같이 $f(0)\ge 0$, $f(3)\le 0$이어야 하므로



$f(0)=2k-8\ge 0$에서

$k\ge 4$ …… ㉠

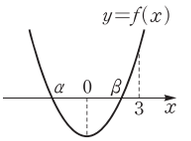
$f(3)=-k-5\le 0$에서

$k\ge -5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k\ge 4$

(ii) $\alpha<0\le\beta\le 3$인 경우

오른쪽 그림과 같이 $f(0)\le 0$, $f(3)\ge 0$이어야 하므로



$f(0)=2k-8\le 0$에서

$k\le 4$ …… ㉢

$f(3)=-k-5\ge 0$에서

$k\le -5$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $k\le -5$

(iii) $0\le\alpha<\beta\le 3$인 경우

이차방정식 $x^2-(k+2)x+2k-8=0$의 판별식을 D라 하면

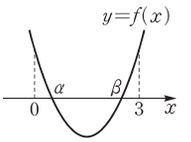
$D=\{-(k+2)\}^2-4(2k-8)$

$=k^2-4k+36$

$=(k-2)^2+32>0$

이므로 주어진 방정식은 k의 값에 관계없이 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 오른쪽 그림과 같이 $f(0)\ge 0$, $f(3)\ge 0$이고, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이 두 직선 $x=0$, $x=3$ 사이에 존재해야 하므로



$f(0)=2k-8\ge 0$에서

$k\ge 4$ …… ㉤

$f(3)=-k-5\ge 0$에서

$k\le -5$ …… ㉥

그래프의 축이 직선 $x=\frac{k+2}{2}$이므로 $0<\frac{k+2}{2}<3$에서

$-2<k<4$ …… ㉦

㉤~㉦을 모두 만족시키는 k의 값은 존재하지 않는다.

이상에서 실수 k의 값의 범위는

$k\le -5$ 또는 $k\ge 4$ 답 $k\le -5$ 또는 $k\ge 4$

0813 전략 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고 주어진 조건을 이용하여 $h(x)$를 구한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 부등식 $h(x)\ge 0$의 해가 $-5\le x\le 3$이므로 함수 $h(x)$의 최고차항의 계수가 음수이고, 이차방정식 $h(x)=0$의 두 실근은 $x=-5$ 또는 $x=3$이다.

$\therefore h(x)=a(x+5)(x-3)$ $(a<0)$ … ❶

$f(2)-g(2)=21$에서 $h(2)=21$이므로

$a\times 7\times(-1)=21$

$\therefore a=-3$

$\therefore h(x)=-3(x+5)(x-3)$ … ❷

$f(4)-g(4)=h(4)$이므로

$f(4)-g(4)=-3\times 9\times 1=-27$ … ❸

답 -27

단계	채점 요소	배점
❶	$h(x)=f(x)-g(x)$라 하고 $h(x)$의 식 세우기	2점
❷	$h(x)$ 구하기	1점
❸	$f(4)-g(4)$의 값 구하기	1점

0814 전략 이차부등식 $x^2+ax+b\le0$의 해가 존재하지 않으려면 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식 D에 대하여 $D<0$이어야 한다.

이차부등식 $x^2-2(a-1)x+3a+7\le0$의 해가 존재하지 않으므로 이차방정식 $x^2-2(a-1)x+3a+7=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a-1)\}^2-(3a+7)<0$

$a^2-5a-6<0$, $(a+1)(a-6)<0$

$\therefore -1<a<6$ … ❶

$a(x-3)+18>6x$에서

$ax-3a+18>6x$

$\therefore (a-6)x>3(a-6)$

이때 $a-6<0$이므로 $x<3$ … ❷

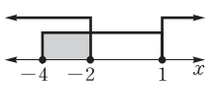
따라서 정수 x의 최댓값은 2이다. … ❸

답 2

단계	채점 요소	배점
❶	a의 값의 범위 구하기	2점
❷	부등식 $a(x-3)+18>6x$의 해 구하기	1점
❸	정수 x의 최댓값 구하기	1점

0815 전략 주어진 연립부등식의 해를 이용하여 두 부등식 $x^2+ax+b\ge0$, $x^2+cx+d\le0$의 해를 수직선 위에 나타낸다.

해가 $-4\le x\le-2$ 또는 $x=1$이므로 주어진 연립부등식에서 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



따라서 이차부등식 $x^2+ax+b\ge0$의 해는 $x\le-2$ 또는 $x\ge1$이고, 이차부등식 $x^2+cx+d\le0$의 해는 $-4\le x\le1$이다. … ❶

해가 $x\le-2$ 또는 $x\ge1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-1)\ge0$ $\therefore x^2+x-2\ge0$

$\therefore a=1$, $b=-2$ … ❷

해가 $-4\le x\le1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+4)(x-1)\le0$ $\therefore x^2+3x-4\le0$

$\therefore c=3$, $d=-4$ … ❸

$\therefore ab-cd=-2-(-12)=10$ … ❹

답 10

단계	채점 요소	배점
❶	두 부등식 $x^2+ax+b\ge0$, $x^2+cx+d\le0$의 해 구하기	1점
❷	a, b의 값 구하기	1점
❸	c, d의 값 구하기	1점
❹	$ab-cd$의 값 구하기	1점

0816 전략 $\overline{QC}$의 길이를 미지수로 놓고 주어진 조건을 이용하여 식을 세운다.

$\overline{QC}=a$라 하면 $\overline{BQ}=10-a$

이때

$\triangle ABC\backsim\triangle APR\backsim\triangle PBQ$ (AA 닮음)

이므로 두 삼각형 APR, PBQ는 모두 직각이등변삼각형이다.

즉 $\overline{AR}=\overline{PR}=\overline{QC}=a$, $\overline{PQ}=\overline{BQ}=10-a$이므로

$\triangle APR=\frac{1}{2}a^2$, $\triangle PBQ=\frac{1}{2}(10-a)^2$,

$\square PQCR=a(10-a)$ … ❶

주어진 조건에서 직사각형 PQCR의 넓이가 각각 삼각형 APR의 넓이와 삼각형 PBQ의 넓이보다 크므로

$$\begin{cases} a(10-a)>\frac{1}{2}a^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ a(10-a)>\frac{1}{2}(10-a)^2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$ … ❷

㉠에서 $2a(10-a)>a^2$

$3a^2-20a<0$, $a(3a-20)<0$

$\therefore 0<a<\frac{20}{3}$ …… ㉢

㉡에서 $2a(10-a)>(10-a)^2$

$3a^2-40a+100<0$, $(3a-10)(a-10)<0$

$\therefore \frac{10}{3}<a<10$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$\frac{10}{3}<a<\frac{20}{3}$

$\therefore \frac{10}{3}<\overline{QC}<\frac{20}{3}$ … ❸

답 $\frac{10}{3}<\overline{QC}<\frac{20}{3}$

단계	채점 요소	배점
❶	$\overline{QC}$의 길이를 a라 하고 $\triangle APR$, $\triangle PBQ$, $\square PQCR$의 넓이를 각각 a에 대한 식으로 나타내기	2점
❷	연립이차부등식 세우기	2점
❸	$\overline{QC}$의 길이의 범위 구하기	2점

10 경우의 수와 순열

셀프 CHECK → 본책 160쪽

A 답 (1) 14 (2) 16

B 답 8

C 답 (1) 120 (2) 1 (3) 120

D 답 (1) 24 (2) 210

내신유형 다지기 → 본책 161~169쪽

유형 149 합의 법칙 → 본책 161쪽

두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n일 때, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는

(1) 두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않으면

$m+n$

(2) 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수가 l이면

$m+n-l$

0817 (i) 각 자리의 숫자의 합이 6인 두 자리 자연수를 택하는 경우는

15, 24, 33, 42, 51, 60의 6가지

(ii) 각 자리의 숫자의 합이 10인 두 자리 자연수를 택하는 경우는

19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91의 9가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$6+9=15$ 답 15

0818 정팔면체를 두 번 던져서 바닥에 오는 면에 적힌 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 두 수의 합이 13인 경우는

(5, 8), (6, 7), (7, 6), (8, 5)의 4가지

(ii) 두 수의 합이 14인 경우는

(6, 8), (7, 7), (8, 6)의 3가지

(iii) 두 수의 합이 15인 경우는

(7, 8), (8, 7)의 2가지

(iv) 두 수의 합이 16인 경우는

(8, 8)의 1가지

(i)~(iv)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$4+3+2+1=10$ 답 10

0819 1부터 100까지의 자연수 중에서

(i) 3으로 나누어떨어지는 수는

3, 6, 9, …, 99의 33개

(ii) 5로 나누어떨어지는 수는

5, 10, 15, …, 100의 20개

(iii) 3과 5로 모두 나누어떨어지는 수는

15, 30, 45, …, 90의 6개

이상에서 3 또는 5로 나누어떨어지는 자연수의 개수는

$33+20-6=47$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$100-47=53$ 답 ③

0820 (i) A 화병에 장미를 꽂는 경우

B 화병에 튤립 a송이, 국화 b송이를 꽂는다고 하면 순서쌍 (a, b)는

(4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1)의 5가지 … ❶

(ii) A 화병에 튤립을 꽂는 경우

B 화병에 장미 a송이, 국화 b송이를 꽂는다고 하면 순서쌍 (a, b)는

(4, 5), (5, 4), (6, 3)의 3가지 … ❷

(iii) A 화병에 국화를 꽂는 경우

B 화병에 장미 a송이, 튤립 b송이를 꽂는다고 하면 순서쌍 (a, b)는

(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)의 6가지 … ❸

(i), (ii), (iii)은 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는

$5+3+6=14$ … ❹

답 14

단계	채점 요소	비율
❶	A 화병에 장미를 꽂는 경우의 수 구하기	30 %
❷	A 화병에 튤립을 꽂는 경우의 수 구하기	30 %
❸	A 화병에 국화를 꽂는 경우의 수 구하기	30 %
❹	A, B 화병에 꽃을 꽂는 경우의 수 구하기	10 %

유형 150 방정식과 부등식의 해의 개수 → 본책 161쪽

x, y, z에 대한 방정식 또는 부등식을 만족시키는 순서쌍의 개수

➜ 계수의 절댓값이 가장 큰 항을 기준으로 수를 대입한다.

0821 (i) $z=1$일 때, $x+3y=16$이므로 순서쌍 (x, y)는

(13, 1), (10, 2), (7, 3), (4, 4), (1, 5)의 5개

(ii) $z=2$일 때, $x+3y=11$이므로 순서쌍 (x, y)는

(8, 1), (5, 2), (2, 3)의 3개

(iii) $z=3$일 때, $x+3y=6$이므로 순서쌍 (x, y)는

(3, 1)의 1개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$5+3+1=9$ 답 ①

0822 (i) $y=0$일 때, $x\le5$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (5, 0)$의 6개
(ii) $y=1$일 때, $x\le3$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1)$의 4개
(iii) $y=2$일 때, $x\le1$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(0, 2), (1, 2)$의 2개
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$6+4+2=12$ 답 12

다른 풀이 x, y가 음이 아닌 정수이므로 $x+2y\le5$를 만족시키는 경우는
$x+2y=0$, $x+2y=1$, $x+2y=2$,
$x+2y=3$, $x+2y=4$, $x+2y=5$
(i) $x+2y=0$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(0, 0)$의 1개
(ii) $x+2y=1$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 0)$의 1개
(iii) $x+2y=2$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(0, 1), (2, 0)$의 2개
(iv) $x+2y=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 1), (3, 0)$의 2개
(v) $x+2y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(0, 2), (2, 1), (4, 0)$의 3개
(vi) $x+2y=5$일 때, 순서쌍 (x, y)는
$(1, 2), (3, 1), (5, 0)$의 3개
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$1+1+2+2+3+3=12$

0823 가격이 1000원, 2000원, 4000원인 노트를 각각 x권, y권, z권 산다고 하면
$1000x+2000y+4000z=20000$
$\therefore x+2y+4z=20$
이때 3종류의 노트가 적어도 한 권씩 포함되어야 하므로 x, y, z는 자연수이다.
(i) $z=1$일 때, $x+2y=16$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(14, 1), (12, 2), (10, 3), (8, 4),$
$(6, 5), (4, 6), (2, 7)$의 7가지
(ii) $z=2$일 때, $x+2y=12$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(10, 1), (8, 2), (6, 3), (4, 4), (2, 5)$의 5가지
(iii) $z=3$일 때, $x+2y=8$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(6, 1), (4, 2), (2, 3)$의 3가지
(iv) $z=4$일 때, $x+2y=4$이므로 순서쌍 (x, y)는
$(2, 1)$의 1가지
이상에서 구하는 경우의 수는
$7+5+3+1=16$ 답 16

0824 이차함수 $y=x^2+1$의 그래프와 직선 $y=(a+b)x-ab$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2+1=(a+b)x-ab$, 즉 $x^2-(a+b)x+ab+1=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=\{-(a+b)\}^2-4(ab+1)>0$
$a^2-2ab+b^2-4>0$, $(a-b)^2-4>0$
$(a-b)^2>4$ $\therefore |a-b|>2$
이때 $a-b$의 값은 정수이므로
$|a-b|=3$, $|a-b|=4$, $|a-b|=5$
(i) $|a-b|=3$일 때, 순서쌍 (a, b)는
$(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)$의 6개
(ii) $|a-b|=4$일 때, 순서쌍 (a, b)는
$(1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)$의 4개
(iii) $|a-b|=5$일 때, 순서쌍 (a, b)는
$(1, 6), (6, 1)$의 2개
이상에서 구하는 순서쌍의 개수는
$6+4+2=12$ 답 12

유형 151 곱의 법칙 본책 162쪽

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는
$m\times n$

0825 백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
1, 2, 3, 6의 4개
십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
2, 3, 5, 7의 4개
일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은
0, 5의 2개
따라서 구하는 5의 배수의 개수는
$4\times4\times2=32$ 답 ②

0826 $(a+b)^2(x-y)^3$
$=(a^2+2ab+b^2)(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)$
에서 a^2, $2ab$, b^2에 곱해지는 항이 각각 x^3, $-3x^2y$, $3xy^2$, $-y^3$의 4개이므로 구하는 항의 개수는
$3\times4=12$ 답 12

0827 서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 전체 경우의 수는 $6\times6\times6=216$ … ❶
서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 세 눈의 수의 곱이 홀수인 경우는 세 눈의 수가 모두 홀수인 경우뿐이므로 이 경우의 수는 $3\times3\times3=27$ … ❷
따라서 서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 세 눈의 수의 곱이 짝수인 경우의 수는 $216-27=189$ … ❸
답 189

단계	채점 요소	비율
❶	전체 경우의 수 구하기	20 %
❷	나오는 세 눈의 수의 곱이 홀수인 경우의 수 구하기	40 %
❸	나오는 세 눈의 수의 곱이 짝수인 경우의 수 구하기	40 %

0828 요리, 미술 영역의 강좌를 수강하는 경우의 수는
$3\times4=12$
미술, 음악 영역의 강좌를 수강하는 경우의 수는 $4\times6=24$
요리, 음악 영역의 강좌를 수강하는 경우의 수는 $3\times6=18$
따라서 구하는 경우의 수는
$12+24+18=54$ 답 54

0829 조건 (나)에서 백의 자리의 수와 일의 자리의 수의 곱이 홀수이므로 백의 자리의 수와 일의 자리의 수는 모두 홀수인 자연수이다.
(i) 백의 자리의 수가 7인 경우
십의 자리에 올 수 있는 수는 7을 제외하고 0, 1, 2, …, 9의 9개, 일의 자리에 올 수 있는 수는 1, 3, 5, 9의 4개이므로
$9\times4=36$
(ii) 십의 자리의 수가 7인 경우
백의 자리에 올 수 있는 수는 1, 3, 5, 9의 4개, 일의 자리에 올 수 있는 수는 1, 3, 5, 9의 4개이므로
$4\times4=16$
(iii) 일의 자리의 수가 7인 경우
백의 자리에 올 수 있는 수는 1, 3, 5, 9의 4개, 십의 자리에 올 수 있는 수는 7을 제외하고 0, 1, 2, …, 9의 9개이므로
$4\times9=36$
이상에서 구하는 세 자리 자연수의 개수는
$36+16+36=88$ 답 88

0830 (i) 세 자리 자연수 중 대칭수인 경우
백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, …, 9의 9개, 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 1, 2, …, 9의 10개이고, 일의 자리의 숫자는 백의 자리의 숫자와 같다.
따라서 세 자리 자연수 중 대칭수의 개수는
$9\times10=90$
(ii) 네 자리 자연수 중 대칭수인 경우
천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, …, 9의 9개, 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 1, 2, …, 9의 10개이고, 십의 자리의 숫자는 백의 자리의 숫자와 같고, 일의 자리의 숫자는 천의 자리의 숫자와 같다.
따라서 네 자리 자연수 중 대칭수의 개수는
$9\times10=90$
(i), (ii)에서 구하는 대칭수의 개수는
$90+90=180$ 답 ④

유형 152 약수의 개수 → 본책 162쪽

자연수 N이
$N=p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}$ (p, q, r는 서로 다른 소수, α, β, γ는 자연수)
의 꼴로 소인수분해될 때
(1) N의 양의 약수의 개수 ➜ $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$
(2) N의 양의 약수의 총합
➜ $(1+p^1+\cdots+p^{\alpha})(1+q^1+\cdots+q^{\beta})(1+r^1+\cdots+r^{\gamma})$

0831 180을 소인수분해하면
$180=2^2\times3^2\times5$
이므로 180의 양의 약수의 개수는
$(2+1)\times(2+1)\times(1+1)=18$
$\therefore x=18$
180의 양의 약수의 총합은
$(1+2+2^2)\times(1+3+3^2)\times(1+5)=7\times13\times6=546$
$\therefore y=546$
$\therefore y-x=528$ 답 ①

0832 144와 216의 양의 공약수의 개수는 144와 216의 최대공약수의 양의 약수의 개수와 같다.
144를 소인수분해하면 $144=2^4\times3^2$
216을 소인수분해하면 $216=2^3\times3^3$
즉 144와 216의 최대공약수는 $2^3\times3^2$
따라서 구하는 양의 공약수의 개수는
$(3+1)\times(2+1)=12$ 답 ③

0833 264를 소인수분해하면 $264=2^3\times3\times11$
$264\times n=2^3\times3\times11\times n$의 양의 약수의 개수가 홀수이려면 소인수의 지수가 모두 짝수이어야 하므로
$n=2\times3\times11\times k^2$ (k는 자연수)
의 꼴이어야 한다.
따라서 자연수 n의 최솟값은
$2\times3\times11=66$ 답 66

만점 공략 노트
자연수 N이
$N=p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}$ (p, q, r는 서로 다른 소수, α, β, γ는 자연수)
일 때, N의 양의 약수의 개수는 $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$이므로 약수의 개수가 홀수이려면 $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$은 모두 홀수이어야 한다.
즉 α, β, γ가 모두 짝수이어야 한다.

0834 504를 소인수분해하면
$504=2^3\times3^2\times7$ … ❶
짝수는 2를 소인수로 가지므로 504의 양의 약수 중 짝수의 개수는 $2^2\times3^2\times7$의 양의 약수의 개수와 같다.
$\therefore m=(2+1)\times(2+1)\times(1+1)=18$ … ❷
3의 배수는 3을 소인수로 가지므로 504의 양의 약수 중 3의 배수의 개수는 $2^3\times3\times7$의 양의 약수의 개수와 같다.
$\therefore n=(3+1)\times(1+1)\times(1+1)=16$ … ❸
$\therefore m+n=34$ … ❹
답 34

단계	채점 요소	비율
❶	504를 소인수분해하기	10 %
❷	m의 값 구하기	40 %
❸	n의 값 구하기	40 %
❹	$m+n$의 값 구하기	10 %

0835 방정식 $2x+y+z=8$에서

(i) $x=1$일 때, $y+z=6$이므로 순서쌍 (x, y, z)는

$(1, 1, 5), (1, 2, 4), (1, 3, 3), (1, 4, 2), (1, 5, 1)$

(ii) $x=2$일 때, $y+z=4$이므로 순서쌍 (x, y, z)는

$(2, 1, 3), (2, 2, 2), (2, 3, 1)$

(iii) $x=3$일 때, $y+z=2$이므로 순서쌍 (x, y, z)는

$(3, 1, 1)$

이상에서

$x_1x_2\cdots x_n=1^5\times2^3\times3=2^3\times3$,

$y_1y_2\cdots y_n=1\times2\times3\times4\times5\times1\times2\times3\times1$

$=1^3\times2^2\times3^2\times4\times5=2^4\times3^2\times5$,

$z_1z_2\cdots z_n=5\times4\times3\times2\times1\times3\times2\times1\times1$

$=1^3\times2^2\times3^2\times4\times5=2^4\times3^2\times5$

이므로

$T=(2^3\times3)\times(2^4\times3^2\times5)\times(2^4\times3^2\times5)=2^{11}\times3^5\times5^2$

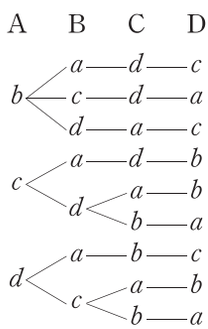
따라서 T의 모든 양의 약수의 개수는

$(11+1)\times(5+1)\times(2+1)=216$ 답 216

유형 153 수형도를 이용하는 경우의 수 본책 163쪽

규칙성을 찾기 어려운 경우의 수를 구할 때에는 수형도를 이용한다. 이때 중복되거나 빠진 것이 없도록 주의한다.

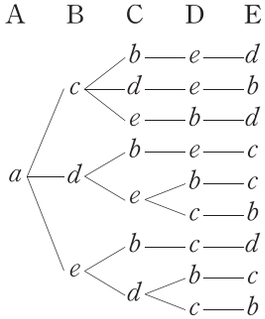
0836 A, B, C, D 네 명의 학생의 이름표를 각각 a, b, c, d라 할 때, 모든 학생이 자신의 이름표를 받지 않는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는 9이다. 답 ②

0837 서로 다른 5개의 자물쇠 A, B, C, D, E에 맞는 열쇠를 각각 a, b, c, d, e라 하자.

자물쇠 A만 열리고 나머지 자물쇠 B, C, D, E는 열리지 않는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.

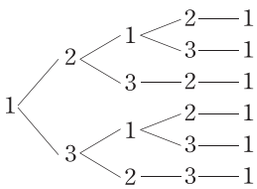


같은 방법으로 구해 보면 자물쇠 B, C, D, E 중 한 개만 열리는 경우도 각각 9가지씩이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$9\times5=45$ 답 45

0838 만의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자가 모두 1인 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



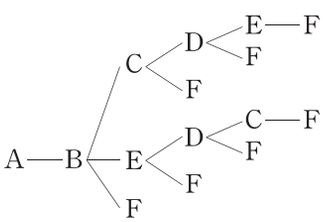
즉 만의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자가 모두 1인 다섯 자리 자연수는 6개이다.

같은 방법으로 구해 보면 만의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자가 모두 2인 다섯 자리 자연수와 3인 다섯 자리 자연수도 각각 6개이다.

따라서 구하는 다섯 자리 자연수의 개수는

$6\times3=18$ 답 ③

0839 주어진 정팔면체의 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 B를 지나 꼭짓점 F로 가는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



같은 방법으로 구해 보면 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 C, D, E 중 한 점을 지나 꼭짓점 F로 가는 경우도 각각 7가지씩이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$7\times4=28$ 답 28

유형 154 지불 방법의 수와 지불 금액의 수 본책 164쪽

(1) 지불 방법의 수

x원짜리 동전 n개로 지불할 수 있는 방법

➡ 0개, 1개, 2개, …, n개의 $(n+1)$가지

(2) 지불 금액의 수

x원짜리 동전 n개로 지불할 수 있는 금액과 y원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액이 같을 때

➡ y원짜리 동전 1개를 x원짜리 동전 n개로 바꾸어 생각한다.

0840 500원짜리 동전 4개를 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

100원짜리 동전 5개를 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개, 5개의 6가지

50원짜리 동전 3개를 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불하는 방법의 수는

$5\times6\times4-1=119$ 답 119

0841 5000원짜리 지폐 2장으로 지불하는 금액과 10000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액이 같으므로 10000원짜리 지폐 2장을 5000원짜리 지폐 4장으로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 5000원짜리 지폐 7장, 50000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

5000원짜리 지폐 7장으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 5000원, 10000원, …, 35000원의 8가지

50000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 50000원, 100000원의 3가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는

$8\times3-1=23$ 답 ①

0842 (i) 지불하는 방법의 수

100원짜리 동전 4개를 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

50원짜리 동전 3개를 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

10원짜리 동전 6개를 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개, 5개, 6개의 7가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불하는 방법의 수는

$5\times4\times7-1=139$

$\therefore a=139$ … ❶

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

50원짜리 동전 2개로 지불하는 금액과 100원짜리 동전 1개로 지불하는 금액이 같고, 10원짜리 동전 5개로 지불하는 금액과 50원짜리 동전 1개로 지불하는 금액이 같으므로 100원짜리 동전 4개와 50원짜리 동전 3개를 모두 10원짜리 동전 55개로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 10원짜리 동전 61개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

10원짜리 동전 61개로 지불할 수 있는 금액은

0원, 10원, 20원, …, 610원의 62가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는

$62-1=61$

$\therefore b=61$ … ❷

(i), (ii)에서

$a+b=139+61=200$ … ❸

답 200

단계	채점 요소	비율
❶	a의 값 구하기	40 %
❷	b의 값 구하기	50 %
❸	$a+b$의 값 구하기	10 %

0843 9000원 이상의 금액을 지불하려면 5000원짜리 지폐가 적어도 1장 사용되어야 한다.

(i) 5000원짜리 지폐를 1장 사용하는 경우

1000원짜리 지폐와 500원짜리 동전으로 4000원 이상의 금액을 지불하려면 1000원짜리 지폐가 적어도 2장 사용되어야 한다.

1000원짜리 지폐를 2장 사용하는 경우에는 500원짜리 동전을 4개 모두 사용해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는 1이다.

1000원짜리 지폐를 3장 사용하는 경우에는 500원짜리 동전을 적어도 2개 사용해야 하므로 500원짜리 동전을 2개 또는 3개 또는 4개 지불해야 한다.

즉 지불할 수 있는 방법의 수는 3이다.

(ii) 5000원짜리 지폐를 2장 사용하는 경우

5000원짜리 지폐 2장이 9000원 이상이므로 1000원짜리 지폐를 0장 또는 1장 또는 2장 또는 3장 지불할 수 있고, 500원짜리 동전을 0개 또는 1개 또는 2개 또는 3개 또는 4개 지불할 수 있다.

즉 지불할 수 있는 방법의 수는

$4\times5=20$

(i), (ii)에서 9000원 이상의 금액을 지불할 수 있는 방법의 수는

$1+3+20=24$ 답 24

유형 155 도로망에서의 경우의 수 → 본책 164쪽

(1) 동시에 갈 수 없는 길 ➜ 합의 법칙을 이용

(2) 연이어 갈 수 있는 길 ➜ 곱의 법칙을 이용

0844 (i) 집 → A → 학교로 가는 경우의 수는

$3\times2=6$

(ii) 집 → B → 학교로 가는 경우의 수는

$2\times4=8$

(iii) 집 → A → B → 학교로 가는 경우의 수는

$3\times2\times4=24$

(iv) 집 → B → A → 학교로 가는 경우의 수는

$2\times2\times2=8$

이상에서 구하는 경우의 수는

$6+8+24+8=46$ 답 ④

0845 매표소에서 약수터를 거쳐 정상까지 올라가는 경우의 수는

$5\times3=15$

내려올 때에는 올라갈 때 이용한 등산로를 이용하지 않으므로 정상에서 약수터를 거쳐 매표소로 내려오는 경우의 수는

$2\times4=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times8=120$ 답 120

0846 B 도시와 D 도시를 잇는 도로를 x개 건설한다고 하면
(i) A → B → C로 가는 경우의 수는
$4\times2=8$
(ii) A → D → C로 가는 경우의 수는
$3\times3=9$
(iii) A → B → D → C로 가는 경우의 수는
$4\times x\times3=12x$
(iv) A → D → B → C로 가는 경우의 수는
$3\times x\times2=6x$
이상에서 A 도시에서 C 도시로 가는 경우의 수는
$8+9+12x+6x=17+18x$
이때 $17+18x\geq80$에서 $18x\geq63$
$\therefore x\geq3.5$
따라서 B 도시와 D 도시를 잇는 도로를 최소 4개 건설해야 한다. 답 4개

유형 156 색칠하는 방법의 수 본책 165쪽

다음과 같이 각 영역을 색칠하는 경우의 수를 구한 후 곱의 법칙을 이용하여 색칠하는 모든 경우의 수를 구한다.
(1) 인접한 영역이 가장 많은 영역에 색칠하는 경우의 수를 먼저 구한다.
(2) 같은 색을 칠할 수 있는 영역은 같은 색인 경우와 다른 색인 경우로 나누어 생각한다.

0847 D에 칠할 수 있는 색은 5가지
B에 칠할 수 있는 색은 D에 칠한 색을 제외한 4가지
A에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한 3가지
C에 칠할 수 있는 색은 A와 D에 칠한 색을 제외한 3가지
E에 칠할 수 있는 색은 C와 D에 칠한 색을 제외한 3가지
따라서 구하는 방법의 수는
$5\times4\times3\times3\times3=540$ 답 ⑤

0848 (i) A와 C에 같은 색을 칠하는 경우
A에 칠할 수 있는 색은 4가지
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지
C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지
D에 칠할 수 있는 색은 A(C)에 칠한 색을 제외한 3가지
즉 A와 C에 같은 색을 칠하는 방법의 수는
$4\times3\times1\times3=36$ … ❶
(ii) A와 C에 다른 색을 칠하는 경우
A에 칠할 수 있는 색은 4가지
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지
C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지
D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 2가지
즉 A와 C에 다른 색을 칠하는 방법의 수는
$4\times3\times2\times2=48$ … ❷
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$36+48=84$ … ❸
답 84

단계	채점 요소	비율
❶	A와 C에 같은 색을 칠하는 방법의 수 구하기	40 %
❷	A와 C에 다른 색을 칠하는 방법의 수 구하기	40 %
❸	색을 칠하는 방법의 수 구하기	20 %

0849 1과 6이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 5가지
2가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 4가지
3이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2와 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 3가지
5가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2와 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 3가지
4가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1과 5가 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 3가지
따라서 구하는 경우의 수는
$5\times4\times3\times3\times3=540$ 답 ③

0850 A에 파란색을 칠한 후 B, C, D, E의 순서로 칠할 때, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.
(i) B와 D에 같은 색을 칠하는 경우
D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지,
E에 칠할 수 있는 색은 A와 B(D)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 방법의 수는
$4\times3\times1\times3=36$
(ii) B와 D에 다른 색을 칠하는 경우
D에 칠할 수 있는 색은 A, B, C에 칠한 색을 제외한 2가지,
E에 칠할 수 있는 색은 A, B, D에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 방법의 수는
$4\times3\times2\times2=48$
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$36+48=84$ 답 84

유형 157 이웃하는 순열의 수 본책 165쪽

이웃하는 것이 있는 경우의 수는 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 이웃하는 것을 한 묶음으로 생각하여 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한다.
(ii) 한 묶음 안에서 자리를 바꾸는 경우의 수를 구한다.
(iii) (i)과 (ii)의 경우의 수를 곱한다.

0851 I와 E를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$5!=120$

I와 E가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\times2=240$ 답 ②

0852 3쌍의 부부를 각각 한 사람으로 생각하여 3명이 일렬로 앉는 경우의 수는

$3!=6$

3쌍의 부부가 각각 부부끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!\times2!\times2!=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times8=48$ 답 48

0853 소설책 3권을 한 권, 만화책 4권을 한 권으로 생각하여 4권을 일렬로 꽂는 경우의 수는

$4!=24$

소설책끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

만화책끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times6\times24=3456$ 답 ④

0854 2학년 학생 3명을 한 사람으로 생각하여 $(n+1)$명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$(n+1)!$

2학년 학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 2학년 학생끼리 이웃하게 세우는 경우의 수는

$(n+1)!\times6$ … ❶

즉 $(n+1)!\times6=144$이므로

$(n+1)!=24=4\times3\times2\times1$

$n+1=4 \quad \therefore n=3$ … ❷

답 3

단계	채점 요소	비율
❶	2학년 학생끼리 이웃하게 세우는 경우의 수를 n에 대한 식으로 나타내기	60 %
❷	n의 값 구하기	40 %

0855 (i) 발라드 2곡이 연속하도록 순서를 정하는 경우

발라드 2곡을 한 곡으로 생각하여 5곡의 순서를 정하는 경우의 수는

$5!=120$

발라드 2곡의 순서를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 발라드 2곡이 연속하도록 순서를 정하는 경우의 수는

$120\times2=240$

(ii) 힙합 2곡이 연속하도록 순서를 정하는 경우

(i)과 같은 방법으로 구하면 힙합 2곡이 연속하도록 순서를 정하는 경우의 수는

$5!\times2!=120\times2=240$

(iii) 발라드 2곡과 힙합 2곡이 각각 같은 장르끼리 연속하도록 순서를 정하는 경우

발라드 2곡, 힙합 2곡을 각각 한 곡으로 생각하여 4곡의 순서를 정하는 경우의 수는

$4!=24$

발라드 2곡과 힙합 2곡이 각각 같은 장르끼리 순서를 바꾸는 경우의 수는

$2!\times2!=4$

따라서 발라드 2곡과 힙합 2곡이 각각 같은 장르끼리 연속하도록 순서를 정하는 경우의 수는

$24\times4=96$

이상에서 구하는 경우의 수는

$240+240-96=384$ 답 384

유형 158 이웃하지 않는 순열의 수 → 본책 166쪽

이웃하지 않는 것이 있는 경우의 수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 이웃해도 상관없는 것을 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한다.

(ii) (i)에서 나열한 것의 사이사이와 양 끝에 이웃하지 않는 것을 나열하는 경우의 수를 구한다.

(iii) (i)과 (ii)의 경우의 수를 곱한다.

0856 도자기 4점을 일렬로 전시하는 경우의 수는

$4!=24$

도자기 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 그림 2점을 전시하는 경우의 수는

${}_5P_2=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times20=480$ 답 ⑤

0857 짝수 2, 4, 6이 각각 하나씩 적혀 있는 세 장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

짝수가 적혀 있는 세 장의 카드 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 홀수 1, 3, 5가 각각 하나씩 적혀 있는 세 장의 카드를 나열하는 경우의 수는

${}_4P_3=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times24=144$ 답 144

0858 차 3대를 주차하므로 빈자리는 5개이다.

빈자리들 사이사이와 양 끝의 6개의 자리에 차 3대를 주차하면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_6P_3=120$ 답 ③

0859 초등학생 2명을 한 명으로 생각하여 중학생 3명을 제외한 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$3!=6$

초등학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

일렬로 세운 3명 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 중학생 3명을 세우는 경우의 수는

${}_4P_3=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times2\times24=288$ 답 288

0860 아이 6명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$6!$

아이를 ○, 어른을 △라 하면 어른끼리는 이웃하지 않고 아이끼리는 2명 이상씩 이웃한 경우는 다음 그림과 같이 아이가 2명, 2명, 2명으로 서는 경우뿐이다.

△○○△○○△○○△

즉 아이 6명을 2명씩 묶어서 일렬로 세운 후 그 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 어른 4명을 세우는 경우의 수는

$4!$

따라서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$6!\times4!$

이므로 $a=6,\ b=4\ (\because a>b)$

$\therefore a-b=2$ 답 2

유형 159 자리에 대한 조건이 있는 순열의 수 본책 167쪽

특정한 자리에 대한 조건이 있는 경우

➜ 특정한 자리에 오는 것을 먼저 나열한 후 나머지를 나열한다.

0861 남자 4명 중 2명을 양 끝에 세우는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

양 끝의 남자 2명을 제외한 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\times120=1440$ 답 ④

0862 자음은 p, n, t, r의 4개, 모음은 a, i, e의 3개이므로 자음 4개를 일렬로 나열한 후 그 사이사이에 모음 3개를 나열하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$4!\times3!=24\times6=144$ 답 144

0863 A와 B를 제외한 4명의 학생 중 한 명을 택하여 A와 B 사이에 세우는 경우의 수는

${}_4P_1=4$

A, B와 그 사이의 한 명을 1명으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=24$

A와 B가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times24\times2=192$ 답 ⑤

0864 유리컵 2개를 세 군데의 짝수 번째 자리 중 두 군데에 놓는 경우의 수는

${}_3P_2=6$ … ❶

나머지 빈 다섯 자리에 머그컵 5개를 놓는 경우의 수는

$5!=120$ … ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times120=720$ … ❸

답 720

단계	채점 요소	비율
❶	유리컵을 짝수 번째 자리에 놓는 경우의 수 구하기	40 %
❷	머그컵을 놓는 경우의 수 구하기	40 %
❸	컵을 놓는 경우의 수 구하기	20 %

0865 2학년 학생 5명이 일렬로 앉는 경우의 수는

$5!=120$

2학년 학생이 앉은 사이사이의 4개의 자리에 1학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\times12=1440$ 답 ③

다른 풀이 2학년 학생은 5명이므로 조건 (나)에 의하여 양 끝에 2학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는

${}_5P_2=20$

1학년 학생을 ○, 2학년 학생을 △라 하면 나머지 5개의 의자에 1학년 학생 2명과 2학년 학생 3명이 조건 (가)를 만족시키도록 앉는 경우는 다음의 6가지이다.

○△○△△, ○△△○△, ○△△△○,

△○△○△, △○△△○, △△○△○

이때 위의 각각에 대하여 1학년 학생 2명과 2학년 학생 3명이 앉는 경우의 수는

$2!\times3!=12$

따라서 구하는 경우의 수는 $20\times6\times12=1440$

0866 조건 (가)에서 4명은 6층부터 15층까지 10개의 층에서 내릴 수 있고, 조건 (나)에서 서로 연속하지 않는 4개의 층에서 한 명씩 내린다.

따라서 구하는 경우의 수는 일렬로 나열된 10개의 의자에 4명이 서로 이웃하지 않게 앉는 경우의 수와 같다.

즉 다음과 같이 빈 의자 6개를 일렬로 나열한 후 빈 의자 사이사이와 양 끝의 7개의 자리 중 4개의 자리를 정해서 앉는 경우의 수와 같다.

∨○∨○∨○∨○∨○∨

따라서 구하는 경우의 수는

${}_7P_4=840$ 답 ④

유형 160 '적어도 ~'의 조건이 있는 순열의 수 본책 168쪽

(사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수)
=(모든 경우의 수)−(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)

0867 꽃 5송이를 일렬로 심는 경우의 수는
$5!=120$
양 끝에 모두 노란색 꽃이 오도록 심는 경우의 수는
${}_3P_2\times 3!=6\times 6=36$
따라서 구하는 경우의 수는
$120-36=84$ 답 84

0868 2000부터 4999까지의 자연수의 개수는
$4999-2000+1=3000$
2000부터 4999까지의 자연수 중 각 자리의 숫자가 모두 다른 네 자리 자연수의 개수를 구하면 다음과 같다.
천의 자리에 올 수 있는 숫자는
2, 3, 4의 3개
백의 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리에 온 숫자를 제외한 9개
십의 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리와 백의 자리에 온 숫자를 제외한 8개
일의 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리와 백의 자리, 십의 자리에 온 숫자를 제외한 7개
즉 각 자리의 숫자가 모두 다른 네 자리 자연수의 개수는
$3\times 9\times 8\times 7=1512$
따라서 구하는 자연수의 개수는
$3000-1512=1488$ 답 ④

0869 14명의 학생 중 반장 1명, 부반장 1명을 뽑는 경우의 수는 14명 중에서 2명을 뽑는 순열의 수와 같으므로
${}_{14}P_2=182$
남학생 수를 n이라 하면 여학생 수는 $14-n$이므로 반장, 부반장이 모두 여학생이 뽑히는 경우의 수는
${}_{14-n}P_2=(14-n)(13-n)$
따라서 반장, 부반장 중 적어도 한 명은 남학생이 뽑히는 경우의 수는
$182-(14-n)(13-n)=126$
$n^2-27n+126=0,\quad (n-6)(n-21)=0$
$\therefore n=6$ 또는 $n=21$
이때 $n\le 14$이어야 하므로 $n=6$
따라서 구하는 남학생 수는 6이다. 답 6

0870 연기자 2명, 가수 5명이 일렬로 서는 경우의 수는
$7!=5040$ … ❶
(i) 연기자 사이에 가수가 서지 않는 경우
이 경우의 수는 연기자 2명이 이웃하게 서는 경우의 수와 같으므로
$6!\times 2!=720\times 2=1440$ … ❷
(ii) 연기자 사이에 가수 1명만 서는 경우
연기자 사이에 서는 가수 1명을 선택하는 경우의 수는
5
연기자 2명과 그 사이에 서는 가수 1명을 한 명으로 생각하여 5명이 일렬로 서는 경우의 수는
$5!=120$
연기자끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$
즉 연기자 사이에 가수 1명만 서는 경우의 수는
$5\times 120\times 2=1200$ … ❸
(i), (ii)에서 연기자 사이에 가수가 서지 않거나 1명만 서는 경우의 수는
$1440+1200=2640$
따라서 구하는 경우의 수는
$5040-2640=2400$ … ❹
답 2400

단계	채점 요소	비율
❶	연기자 2명과 가수 5명이 일렬로 서는 경우의 수 구하기	20 %
❷	연기자 사이에 가수가 서지 않는 경우의 수 구하기	20 %
❸	연기자 사이에 가수 1명만 서는 경우의 수 구하기	40 %
❹	연기자 사이에 가수가 적어도 2명 서는 경우의 수 구하기	20 %

유형 161 순열을 이용한 자연수의 개수 본책 168쪽

(1) 서로 다른 n개의 한 자리 자연수 중에서 서로 다른 r개를 사용하여 만들 수 있는 r자리 자연수의 개수
➡ ${}_nP_r$
(2) 0과 서로 다른 n개의 한 자리 자연수 중에서 서로 다른 r개를 사용하여 만들 수 있는 r자리 자연수의 개수
➡ $n\times {}_nP_{r-1}$
└맨 앞자리에는 0이 올 수 없다.

0871 네 자리 자연수가 짝수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 짝수이어야 한다.
(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우
천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개의 숫자 중 3개를 택하여 나열하면 되므로
${}_6P_3=120$
(ii) 일의 자리의 숫자가 2 또는 4 또는 6인 경우
천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리의 숫자를 제외한 5개, 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 5개, 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리와 백의 자리, 일의 자리의 숫자를 제외한 4개이므로
$3\times 5\times 5\times 4=300$
(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는
$120+300=420$ 답 ②

0872 3의 배수는 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이다.

6개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 3개를 택했을 때, 그 합이 3의 배수가 되는 경우는

(0, 1, 2), (0, 1, 5), (0, 2, 4), (0, 4, 5),
(1, 2, 3), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (3, 4, 5)

의 8가지이다.

이때 (0, 1, 2), (0, 1, 5), (0, 2, 4), (0, 4, 5)로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 각각

$2\times2!=4$

이고, (1, 2, 3), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (3, 4, 5)로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 각각

$3!=6$

따라서 구하는 3의 배수의 개수는

$4\times4+4\times6=40$ 답 40

0873 6개의 숫자로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

${}_6P_4=360$

백의 자리와 십의 자리의 숫자가 모두 짝수인 네 자리 자연수의 개수는 짝수 2, 4, 6 중에서 2개를 택하여 백의 자리와 십의 자리에 나열하고 나머지 4개의 숫자 중 2개를 택하여 천의 자리와 일의 자리에 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_3P_2\times{}_4P_2=6\times12=72$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$360-72=288$ 답 ③

0874 5000보다 크고 8000보다 작은 짝수이므로 천의 자리의 숫자는 5, 6, 7만 가능하고, 일의 자리의 숫자는 0, 2, 4, 6, 8만 가능하다.

(i) 천의 자리의 숫자가 5 또는 7인 경우

일의 자리에 올 수 있는 숫자를 고르는 경우의 수는

5

이고, 백의 자리와 십의 자리에 올 수 있는 숫자를 고르는 경우의 수는

${}_8P_2=56$

이므로 $2\times5\times56=560$ … ❶

(ii) 천의 자리의 숫자가 6인 경우

일의 자리에 올 수 있는 숫자를 고르는 경우의 수는

4

이고, 백의 자리와 십의 자리에 올 수 있는 숫자를 고르는 경우의 수는

${}_8P_2=56$

이므로 $4\times56=224$ … ❷

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$560+224=784$ … ❸

답 784

단계	채점 요소	비율
❶	천의 자리의 숫자가 5 또는 7인 짝수의 개수 구하기	40 %
❷	천의 자리의 숫자가 6인 짝수의 개수 구하기	40 %
❸	짝수의 개수 구하기	20 %

0875 4장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

이고, 각 카드의 앞면 또는 뒷면을 선택하는 경우의 수는

$2!\times2!\times2!\times2!=16$

이므로 $24\times16=384$

이때 천의 자리의 숫자가 0이면 네 자리 자연수가 아니다.

천의 자리에 숫자 0과 1이 적힌 카드를 0이 보이도록 놓은 후 나머지 세 장의 카드를 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 놓고 앞면 또는 뒷면을 선택하는 경우의 수는

$3!\times(2!\times2!\times2!)=48$

따라서 구하는 네 자리 자연수의 개수는

$384-48=336$ 답 ④

유형 162 사전식 배열에 의한 경우의 수

본책 169쪽

문자를 사전식으로 배열하거나 자연수를 크기순으로 나열하는 경우의 수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 기준이 되는 문자열 또는 수의 꼴을 살핀 후 먼저 정할 수 있는 자리에 문자 또는 수를 배열한다.

(ii) 순열을 이용하여 나머지 자리에 올 수 있는 것을 배열하는 경우의 수를 구한다.

0876 A□□□□의 꼴의 문자열의 개수는

$4!=24$

BA□□□의 꼴의 문자열의 개수는

$3!=6$

BC□□□의 꼴의 문자열의 개수는

$3!=6$

BD□□□의 꼴의 문자열의 개수는

$3!=6$

BEA□□의 꼴의 문자열의 개수는

$2!=2$

BEC□□의 꼴의 문자열은 순서대로

BECAD, BECDA의 2개

따라서 BECAD는

$24+6+6+6+2+1=45$(번째)

에 오는 문자열이다. 답 ⑤

0877 3400보다 큰 수는

34□□, 35□□, 4□□□, 5□□□

의 꼴이다.

34□□의 꼴의 자연수의 개수는

${}_4P_2=12$

35□□의 꼴의 자연수의 개수는

${}_4P_2=12$

4□□□의 꼴의 자연수의 개수는

${}_5P_3=60$

5□□□의 꼴의 자연수의 개수는

$_5P_3=60$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$12+12+60+60=144$ 답 144

0878 a□□□□□의 꼴의 문자열의 개수는

$5!=120$

e□□□□□의 꼴의 문자열의 개수는

$5!=120$

la□□□□의 꼴의 문자열의 개수는

$4!=24$

le□□□□의 꼴의 문자열의 개수는

$4!=24$

ln□□□□의 꼴의 문자열의 개수는

$4!=24$

a로 시작하는 문자열부터 ln으로 시작하는 문자열까지의 총개수는

$120+120+24+24+24=312$

따라서 313번째에 오는 문자열은 lpaent이다. 답 ③

0879 1□□□□3, 1□□□□5의 꼴의 수의 개수는

$2\times{}_5P_4=2\times120=240$

20□□□1, 20□□□3, 20□□□5의 꼴의 수의 개수는

$3\times{}_4P_3=3\times24=72$

210□□3, 210□□5, 213□□5의 꼴의 수의 개수는

$3\times{}_3P_2=3\times6=18$

이때 $240+72+18=330$이므로 335번째로 작은 수는

214□□□의 꼴의 홀수 중에서 다섯 번째로 작은 수이다.

214□□□의 꼴의 홀수를 작은 수부터 차례대로 나열하면

214035, 214053, 214063, 214065, 214305, …

이므로 구하는 수는 214305이다. 답 ②

1등급 유형 도전하기

→ 본책 170~171쪽

0880 Step 1 세 수에 7이 포함되는 경우의 수를 구한다.

(i) 세 수에 7이 포함되는 경우

세 수의 합이 7의 배수가 되려면 남은 두 수는 7로 나눈 나머지가 각각

1, 6 또는 2, 5 또는 3, 4

인 수이어야 한다.

이를 만족시키는 세 수를 택하는 경우의 수는

(1, 6, 7), (8, 6, 7), (2, 5, 7), (9, 5, 7), (3, 4, 7)

의 (가) 5 이다.

Step 2 세 수에 7이 포함되지 않는 경우의 수를 구한다.

(ii) 세 수에 7이 포함되지 않는 경우

세 수의 합이 7의 배수가 되려면 세 수는 7로 나눈 나머지가 각각

1, 1, 5 또는 1, 2, 4 또는 2, 2, 3 또는 3, 5, 6

인 수이어야 한다.

이를 만족시키는 세 수를 택하는 경우의 수는

(1, 8, 5), (1, 2, 4), (8, 2, 4), (1, 9, 4),

(8, 9, 4), (2, 9, 3), (3, 5, 6)

의 (나) 7 이다.

Step 3 세 자리 자연수 중 각 자리의 숫자의 합이 7의 배수가 아닌 수의 개수를 구한다.

(i), (ii)에서 각 자리의 숫자의 합이 7의 배수인 수의 개수는

$(5+7)\times3!=72$

따라서 7의 배수가 아닌 수의 개수는

$504-72=$ (다) 432

Step 4 $\frac{c}{b-a}$의 값을 구한다.

$a=5$, $b=7$, $c=432$이므로

$\frac{c}{b-a}=\frac{432}{7-5}=216$ 답 216

논리 Check

8개의 숫자 1, 2, 3, …, 8에서 서로 다른 세 개를 사용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수 중 각 자리의 숫자의 합이 6의 배수가 아닌 수의 개수를 구하시오.

풀이 8개의 숫자 중에서 서로 다른 세 개를 사용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$_8P_3=336$

(i) 세 수에 6이 포함되는 경우

세 수의 합이 6의 배수가 되려면 남은 두 수는 6으로 나눈 나머지가 각각

1, 5 또는 2, 4

인 수이어야 한다.

이를 만족시키는 세 수를 택하는 경우의 수는

(1, 5, 6), (7, 5, 6), (2, 4, 6), (8, 4, 6)

의 4이다.

(ii) 세 수에 6이 포함되지 않는 경우

세 수의 합이 6의 배수가 되려면 세 수는 6으로 나눈 나머지가 각각

1, 1, 4 또는 1, 2, 3 또는 3, 4, 5

인 수이어야 한다.

이를 만족시키는 세 수를 택하는 경우의 수는

(1, 7, 4), (1, 2, 3), (1, 8, 3), (7, 2, 3),

(7, 8, 3), (3, 4, 5)

의 6이다.

(i), (ii)에서 각 자리의 숫자의 합이 6의 배수인 수의 개수는

$(4+6)\times3!=60$

따라서 6의 배수가 아닌 수의 개수는

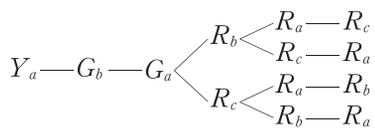
$336-60=276$ 답 276

0881 Step 1 빨간색 카드를 R, 초록색 카드를 G, 노란색 카드를 Y라 하고 (Y, G, G, R, R, R), (Y, R, R, R, G, G), (G, G, Y, R, R, R)로 나열된 경우의 수를 각각 수형도를 이용하여 구한다.

a, b, c가 각각 하나씩 적힌 빨간색 카드 3장을 R_a, R_b, R_c, a, b가 각각 하나씩 적힌 초록색 카드 2장을 G_a, G_b, a가 적힌 노란색 카드 1장을 Y_a라 하자.

(i) Y, G, G, R, R, R로 나열된 경우

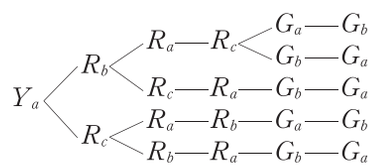
같은 문자가 적힌 카드끼리는 이웃하지 않는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



즉 4가지이다.

(ii) Y, R, R, R, G, G로 나열된 경우

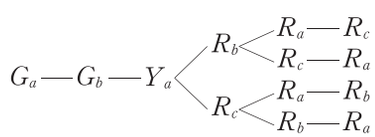
같은 문자가 적힌 카드끼리는 이웃하지 않는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



즉 5가지이다.

(iii) G, G, Y, R, R, R로 나열된 경우

같은 문자가 적힌 카드끼리는 이웃하지 않는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



즉 4가지이다.

Step 2 (R, R, R, G, G, Y), (G, G, R, R, R, Y), (R, R, R, Y, G, G)로 나열된 경우의 수를 각각 구한다.

(iv) R, R, R, G, G, Y로 나열된 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 4가지이다.

(v) G, G, R, R, R, Y로 나열된 경우

(ii)와 같은 방법으로 하면 5가지이다.

(vi) R, R, R, Y, G, G로 나열된 경우

(iii)과 같은 방법으로 하면 4가지이다.

Step 3 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한다.

이상에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$4+5+4+4+5+4=26$ 답 26

0882 Step 1 A를 1단의 1번, 1단의 2번, 1단의 3번에 진열하는 경우의 수를 각각 구한다.

다음 그림과 같이 각 단의 칸을 왼쪽부터 차례대로 1번, 2번, 3번, 4번, 5번, 6번이라 하자.

2단→	1번	2번	3번	4번	5번	6번
1단→	1번	2번	3번	4번	5번	6번

(i) A를 1단의 1번에 진열하는 경우

A를 B 또는 C와 이웃하도록 진열하는 경우의 수는

(B와 C를 1단에 진열하는 경우의 수)

−(B와 C가 1단에서 A와 이웃하지 않는 경우의 수)

$={}_5\mathrm{P}_2-{}_4\mathrm{P}_2=20-12=8$

D와 E를 2단의 2번, 3번, 4번, 5번, 6번에 이웃하게 진열하는 경우의 수는

$4\times2!=8$

즉 A를 1단의 1번에 진열하는 경우의 수는

$8\times8=64$

(ii) A를 1단의 2번에 진열하는 경우

A를 B 또는 C와 이웃하도록 진열하는 경우의 수는

(B와 C를 1단에 진열하는 경우의 수)

−(B와 C가 1단에서 A와 이웃하지 않는 경우의 수)

$={}_5\mathrm{P}_2-{}_3\mathrm{P}_2=20-6=14$

D와 E를 2단의 3번, 4번, 5번, 6번에 이웃하게 진열하는 경우의 수는

$3\times2!=6$

즉 A를 1단의 2번에 진열하는 경우의 수는

$14\times6=84$

(iii) A를 1단의 3번에 진열하는 경우

A를 B 또는 C와 이웃하도록 진열하는 경우의 수는

(B와 C를 1단에 진열하는 경우의 수)

−(B와 C가 1단에서 A와 이웃하지 않는 경우의 수)

$={}_5\mathrm{P}_2-{}_3\mathrm{P}_2=20-6=14$

D와 E를 2단의 1번, 2번, 4번, 5번, 6번에 이웃하게 진열하는 경우의 수는

$3\times2!=6$

즉 A를 1단의 3번에 진열하는 경우의 수는

$14\times6=84$

Step 2 A를 1단의 4번, 1단의 5번, 1단의 6번에 진열하는 경우의 수를 각각 구한다.

(iv) A를 1단의 4번에 진열하는 경우

A를 1단의 3번에 진열하는 경우의 수와 같으므로

84

(v) A를 1단의 5번에 진열하는 경우

A를 1단의 2번에 진열하는 경우의 수와 같으므로

84

(vi) A를 1단의 6번에 진열하는 경우

A를 1단의 1번에 진열하는 경우의 수와 같으므로

64

Step 3 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한다.

이상에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$64+84+84+84+84+64=464$ 답 464

0883 Step 1 학생 A의 양옆에 2학년 학생이 앉는 경우와 학생 B의 양옆에 1학년 학생이 앉는 경우의 수를 각각 구한다.

(i) 학생 A의 양옆에 2학년 학생이 앉는 경우, 즉 (②, A, ②)로 앉는 경우

학생 A의 양옆에 2학년 학생 2명을 뽑아 앉히는 경우의 수는

$${}_3P_2=6$$

이때 (②, A, ②)를 한 묶음으로 생각하고 나머지 1학년 학생 2명과 2학년 학생 1명, 총 4명을 일렬로 앉히는 경우의 수는

$$4!=24$$

따라서 이 경우의 수는

$$6\times24=144$$

(ii) 학생 B의 양옆에 1학년 학생이 앉는 경우, 즉 (①, B, ①)로 앉는 경우

학생 B의 양옆에 1학년 학생 2명을 뽑아 앉히는 경우의 수는

$${}_3P_2=6$$

이때 (①, B, ①)을 한 묶음으로 생각하고 나머지 1학년 학생 1명과 2학년 학생 2명, 총 4명을 일렬로 앉히는 경우의 수는

$$4!=24$$

따라서 이 경우의 수는

$$6\times24=144$$

Step 2 학생 A의 양옆에 2학년 학생이 앉고, 학생 B의 양옆에 1학년 학생이 앉는 경우의 수를 구한다.

(iii) 학생 A의 양옆에 2학년 학생이 앉고, 학생 B의 양옆에 1학년 학생이 앉으면서 A와 B가 이웃한 경우, 즉

(②, A, B, ①) 또는 (①, B, A, ②)인 경우

학생 A의 옆에 앉을 학생 B를 제외한 2학년 학생 1명과 학생 B의 옆에 앉을 학생 A를 제외한 1학년 학생 1명을 뽑는 경우의 수는

$$2\times2=4$$

(②, A, B, ①) 또는 (①, B, A, ②)를 한 묶음으로 생각하고 나머지 1학년 학생 1명과 2학년 학생 1명, 총 3명을 일렬로 앉히는 경우의 수는

$$3!=6$$

따라서 이 경우의 수는

$$2\times4\times6=48$$

(iv) 학생 A의 양옆에 2학년 학생이 앉고, 학생 B의 양옆에 1학년 학생이 앉으면서 A와 B가 이웃하지 않은 경우, 즉

(②, A, ②, ①, B, ①) 또는 (①, B, ①, ②, A, ②)인 경우

학생 A의 양옆에 학생 B가 아닌 2학년 학생 2명을 앉히는 경우의 수는 2, 학생 B의 양옆에 학생 A가 아닌 1학년 학생 2명을 앉히는 경우의 수는 2이다.

따라서 이 경우의 수는

$$2\times2\times2=8$$

Step 3 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한다.

이상에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$144+144-48-8=232$$

답 232

0884 Step 1 백의 자리의 숫자가 1, 2, 3, 4, 5인 세 자리 자연수의 개수를 각각 구하여 백의 자리의 숫자들의 자릿값의 총합을 구한다.

백의 자리의 숫자가 1인 세 자리 자연수의 개수는

$${}_5P_2=20$$

이므로 100은 20번 더해진다.

백의 자리의 숫자가 2, 3, 4, 5일 때도 마찬가지로 200, 300, 400, 500이 각각 20번씩 더해진다.

따라서 백의 자리의 숫자들의 자릿값의 총합은

$$20\times(100+200+300+400+500)=30000$$

Step 2 십의 자리의 숫자가 1, 2, 3, 4, 5인 세 자리 자연수의 개수를 각각 구하여 십의 자리의 숫자들의 자릿값의 총합을 구한다.

십의 자리의 숫자가 1인 세 자리 자연수의 개수는

$$4\times4=16$$

이므로 10은 16번 더해진다.

십의 자리의 숫자가 2, 3, 4, 5일 때도 마찬가지로 20, 30, 40, 50이 각각 16번씩 더해진다.

따라서 십의 자리의 숫자들의 자릿값의 총합은

$$16\times(10+20+30+40+50)=2400$$

Step 3 일의 자리의 숫자가 1, 2, 3, 4, 5인 세 자리 자연수의 개수를 각각 구하여 일의 자리의 숫자들의 자릿값의 총합을 구한다.

일의 자리의 숫자가 1인 세 자리 자연수의 개수는

$$4\times4=16$$

이므로 1은 16번 더해진다.

일의 자리의 숫자가 2, 3, 4, 5일 때도 마찬가지로 2, 3, 4, 5가 각각 16번씩 더해진다.

따라서 일의 자리의 숫자들의 자릿값의 총합은

$$16\times(1+2+3+4+5)=240$$

Step 4 모든 세 자리 자연수의 합을 구한다.

모든 세 자리 자연수의 합은

$$30000+2400+240=32640$$

답 ③

0885 Step 1 2행 2열의 칸에 홀수가 들어가는 경우의 수를 구한다.

1부터 9까지의 자연수 중 짝수는 4개, 홀수는 5개이므로 짝수가 들어갈 칸과 홀수가 들어갈 칸을 결정한 후 9개의 자연수를 배열하는 경우의 수는 $4!\times5!$이다.

조건을 만족시키도록 짝수와 홀수가 들어갈 칸을 고르는 경우의 수를 생각하자.

이때 짝수가 4개이므로 2행 2열의 칸에 홀수가 들어가는 경우와 짝수가 들어가는 경우로 나눈다.

(i) 2행 2열의 칸에 홀수가 들어가는 경우

	1열	2열	3열
1행	짝		
2행		홀	짝
3행	짝		

두 대각선의 양쪽에 짝수가 적어도 하나씩 들어가야 한다.

그런데 4칸 모두 짝수이면 2행과 2열의 곱이 모두 홀수가 되고, 3칸에만 짝수가 있으면 나머지 하나의 짝수를 어디에 넣어도 2행 또는 2열의 곱이 홀수가 된다.

따라서 짝수는 4칸 중 같은 행 또는 같은 열에 2개만 들어가야 하므로 경우의 수는 4이다.

1행과 3행의 1열에 짝수를 넣은 경우에는 2행 3열에 짝수를 넣고, 남은 하나의 짝수는 2열의 남은 두 칸 중 하나에 넣으면 되므로 경우의 수는 2이다.

따라서 2행 2열의 칸에 홀수가 들어가는 경우의 수는

$4\times2=8$

Step 2 2행 2열의 칸에 짝수가 들어가는 경우의 수를 구한다.

(ii) 2행 2열의 칸에 짝수가 들어가는 경우

ⓐ 대각선 중 하나에 모두 짝수가 들어가는 경우

	1열	2열	3열
1행	짝		
2행		짝	
3행			짝

두 대각선 중 하나를 선택하는 경우의 수는 2, 이미 조건을 만족하므로 나머지 짝수는 남은 6칸 중 어디에 들어가도 상관없으므로 경우의 수는 6이다.

따라서 이 경우의 수는

$2\times6=12$

ⓑ 어느 대각선도 짝수로 채워지지 않는 경우

두 대각선의 양 끝 4칸 중 2칸이 짝수인 경우와 1칸이 짝수인 경우로 나누어 생각한다.

	1열	2열	3열
1행	짝		홀
2행		짝	짝
3행	짝		홀

두 대각선의 양 끝 중 2칸이 짝수인 경우의 수는 4, 나머지 2칸에는 홀수가 있고 그 열 또는 행에는 반드시 짝수가 들어가야 하므로 나머지 하나의 짝수의 칸을 고르는 경우의 수는 1이다.

따라서 이 경우의 수는

$4\times1=4$

	1열	2열	3열
1행	짝		홀
2행		짝	짝
3행	홀	짝	홀

두 대각선의 양 끝 중 1칸이 짝수인 경우의 수는 4, 나머지 행과 열에 짝수를 하나씩 넣는 경우의 수는 1이다.

따라서 이 경우의 수는

$4\times1=4$

Step 3 $a+b+c+d$의 값을 구한다.

(i), (ii)에서 짝수와 홀수의 칸을 고르는 경우의 수는

$8+12+4+4=28$

이고, 짝수와 홀수를 배열하는 경우의 수를 곱하면

$28\times4!\times5!=2^8\times3^2\times5\times7$

이다.

따라서 $a=8$, $b=2$, $c=1$, $d=1$이므로

$a+b+c+d=12$

답 12

0886 Step 1 $N=a\times7^3+b\times7^2+c\times7+d$라 할 때, $a=0$인 경우 b, c, d로 가능한 순서쌍을 찾고, 각각을 나열하는 경우의 수를 구한다.

$1000=2\times7^3+6\times7^2+2\times7+6$이므로 1000 이하의 자연수 N에 대하여

$N=a\times7^3+b\times7^2+c\times7+d$

($a=0$, 1, 2이고, b, c, d는 0 또는 6 이하의 자연수)

로 나타낼 수 있다.

$f(N)=12$에서 $a+b+c+d=12$이므로 a의 값에 따라 구하면 다음과 같다.

(i) $a=0$인 경우

$b+c+d=12$이므로 b, c, d로 가능한 순서쌍은

$(0, 6, 6)$, $(1, 5, 6)$, $(2, 4, 6)$, $(2, 5, 5)$,
$(3, 3, 6)$, $(3, 4, 5)$, $(4, 4, 4)$

이다.

이때 $(1, 5, 6)$, $(2, 4, 6)$, $(3, 4, 5)$를 나열하는 경우의 수는 각각 $3!=6$이고, $(0, 6, 6)$, $(2, 5, 5)$, $(3, 3, 6)$을 나열하는 경우의 수는 각각 3, $(4, 4, 4)$를 나열하는 경우의 수는 1이다.

따라서 $a=0$인 경우의 수는

$3\times6+3\times3+1=28$

Step 2 $a=1$인 경우 b, c, d로 가능한 순서쌍을 찾고, 각각을 나열하는 경우의 수를 구한다.

(ii) $a=1$인 경우

$b+c+d=11$이므로 b, c, d로 가능한 순서쌍은

$(0, 5, 6)$, $(1, 4, 6)$, $(1, 5, 5)$, $(2, 3, 6)$,
$(2, 4, 5)$, $(3, 3, 5)$, $(3, 4, 4)$

이다.

이때 $(0, 5, 6)$, $(1, 4, 6)$, $(2, 3, 6)$, $(2, 4, 5)$를 나열하는 경우의 수는 각각 $3!=6$이고, $(1, 5, 5)$, $(3, 3, 5)$, $(3, 4, 4)$를 나열하는 경우의 수는 각각 3이다.

따라서 $a=1$인 경우의 수는

$4\times6+3\times3=33$

Step 3 $a=2$인 경우 b, c, d로 가능한 순서쌍을 찾고, 각각을 나열하는 경우의 수를 구한다.

(iii) $a=2$인 경우

$b+c+d=10$이므로 b, c, d로 가능한 순서쌍은

$(0, 4, 6)$, $(0, 5, 5)$, $(1, 3, 6)$, $(1, 4, 5)$,
$(2, 2, 6)$, $(2, 3, 5)$, $(2, 4, 4)$, $(3, 3, 4)$

이다.

이때 $(0, 4, 6)$, $(1, 3, 6)$, $(1, 4, 5)$, $(2, 3, 5)$를 나열하는 경우의 수는 각각 $3!=6$이고, $(0, 5, 5)$, $(2, 2, 6)$, $(2, 4, 4)$, $(3, 3, 4)$를 나열하는 경우의 수는 각각 3이다.

그런데 $a=2$이고 순서쌍 (b, c, d)가 $(6, 4, 0)$, $(6, 3, 1)$인 경우에는 N이 1000보다 크므로 제외해야 한다.

따라서 $a=2$인 경우의 수는

$4\times6+4\times3-2=34$

Step 4 1000 이하의 자연수 N의 개수를 구한다.

이상에서 1000 이하의 자연수 N의 개수는

$28+33+34=95$

답 95

시험 만점 완성하기

→ 본책 172~175쪽

0887 전략 뽑힌 두 장의 카드에 적힌 수의 합이 8 또는 10이 되어야 한다.

뽑힌 두 장의 카드에 적힌 수를 각각 x, y $(x<y)$라 하면 평균이 4 또는 5가 되는 경우는

$\frac{x+y}{2}=4$ 또는 $\frac{x+y}{2}=5$

$\therefore x+y=8$ 또는 $x+y=10$

(i) $x+y=8$일 때, 순서쌍 (x, y)는

$(1, 7)$, $(2, 6)$, $(3, 5)$의 3가지

(ii) $x+y=10$일 때, 순서쌍 (x, y)는

$(2, 8)$, $(3, 7)$, $(4, 6)$의 3가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$3+3=6$ 답 ③

0888 전략 x의 계수의 절댓값이 가장 크므로 x에 1부터 차례대로 대입하여 순서쌍 (y, z)의 개수를 구한다.

$3x+2y+z=14$에서 x, y, z는 12 이하의 자연수이다.

(i) $x=1$일 때, $2y+z=11$이므로 순서쌍 (y, z)는

$(1, 9)$, $(2, 7)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$, $(5, 1)$의 5개

(ii) $x=2$일 때, $2y+z=8$이므로 순서쌍 (y, z)는

$(1, 6)$, $(2, 4)$, $(3, 2)$의 3개

(iii) $x=3$일 때, $2y+z=5$이므로 순서쌍 (y, z)는

$(1, 3)$, $(2, 1)$의 2개

(iv) $x=4$일 때, $2y+z=2$이므로 순서쌍 (y, z)는 없다.

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$5+3+2=10$ 답 ①

0889 전략 숫자 5가 백의 자리 또는 십의 자리 또는 일의 자리에 있을 때 만들 수 있는 자연수의 개수를 각각 구한다.

(i) 숫자 5가 백의 자리의 숫자인 경우

십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자는 각각 0, 1, 2, …, 9 중에서 하나씩 선택하면 되므로 자연수의 개수는

$10\times10=100$

(ii) 숫자 5가 십의 자리의 숫자인 경우

백의 자리의 숫자는 0, 1, 2, 3, 4, 5 중 하나이고, 일의 자리의 숫자는 0, 1, 2, …, 9 중 하나이므로 자연수의 개수는

$6\times10=60$

(iii) 숫자 5가 일의 자리의 숫자인 경우

백의 자리의 숫자는 0, 1, 2, 3, 4, 5 중 하나이고, 십의 자리의 숫자는 0, 1, 2, …, 9 중 하나이므로 자연수의 개수는

$6\times10=60$

이상에서 숫자 5를 쓰는 횟수는

$100+60+60=220$ 답 ③

참고 (ii)에서 백의 자리의 숫자가 0이면 두 자리 자연수가 만들어지고, (iii)에서 백의 자리와 십의 자리의 숫자가 모두 0이면 한 자리 자연수가 만들어진다고 생각할 수 있다.

0890 전략 72^n의 양의 약수의 개수를 n에 대한 식으로 나타낸다.

72를 소인수분해하면 $72=2^3\times3^2$

$72^n=(2^3\times3^2)^n=2^{3n}\times3^{2n}$의 양의 약수의 개수가 70이므로

$(3n+1)(2n+1)=70$, $6n^2+5n-69=0$

$(6n+23)(n-3)=0$

$\therefore n=3$ ($\because n$은 자연수) 답 ②

0891 전략 $ABCD=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$ 또는 $C=0$ 또는 $D=0$임을 이용한다.

$(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)(a_4-4)=0$에서

$a_1=1$ 또는 $a_2=2$ 또는 $a_3=3$ 또는 $a_4=4$

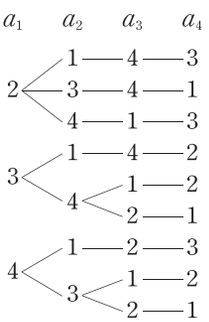
이므로 구하는 경우의 수는 모든 경우의 수에서

$a_i\neq i$ $(i=1, 2, 3, 4)$

인 경우의 수를 뺀 것과 같다.

모든 경우의 수는 $4!=24$

$a_1\neq1$, $a_2\neq2$, $a_3\neq3$, $a_4\neq4$인 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는

$24-9=15$ 답 ④

0892 전략 1000원짜리 지폐를 500원짜리 동전으로 바꾸어 생각한다.

500원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 1000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 1000원짜리 지폐 1장을 500원짜리 동전 2개로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 100원짜리 동전 3개, 500원짜리 동전 5개로 지불할 수 있는 금액과 같다.

100원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액은

0원, 100원, 200원, 300원의 4가지

500원짜리 동전 5개로 지불할 수 있는 금액은

0원, 500원, 1000원, …, 2500원의 6가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는

$4\times6-1=23$ 답 ③

0893 전략 A → B → C → B → A로 가는 경우의 수를 구한다.

A 지점에서 B 지점까지 가는 경우의 수는 2, B 지점에서 C 지점까지 가는 경우의 수는 도로 f를 제외한 3, C 지점에서 B 지점까지 가는 경우의 수는 4, B 지점에서 A 지점까지 가는 경우의 수는 도로 a를 제외한 1이다.

따라서 A → B → C → B → A로 가는 경우의 수는

$2\times3\times4\times1=24$ 답 ①

0894 전략 같은 문자를 한 문자로 생각하고 일렬로 나열하는 경우의 수를 구한다.

2개의 문자 s와 2개의 문자 n을 각각 한 문자로 생각하여 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$

문자 s끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 1

문자 n끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 1

따라서 구하는 경우의 수는

$720\times1\times1=720$ 답 ③

0895 전략 1반 학생 2명을 한 묶음으로 보고, 이 묶음과 빈 의자 3개를 일렬로 나열한 후 2반 학생들이 앉을 자리를 정한다.

1반 학생 2명을 한 묶음으로 보고 이 한 묶음과 빈 의자 3개를 일렬로 나열하는 방법은 다음과 같이 4가지이다.

1 1 ○ ○ ○, ○ 1 1 ○ ○, ○ ○ 1 1 ○,
○ ○ ○ 1 1

이때 2반 학생들끼리는 서로 이웃하지 않아야 하므로 위에서 1학년 학생들의 묶음과 빈 의자 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중 3개의 자리를 택하여 앉아야 한다.

따라서 2반 학생 3명이 앉을 자리를 정하는 경우의 수는

${}_5P_3=60$

또 1반 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times60\times2=480$ 답 ④

0896 전략 먼저 (가)에 들어갈 수 있는 숫자를 구한 후 그 값에 따라 경우의 수를 구한다.

(가)에 들어가는 수를 x, (가)를 포함한 가로줄의 칸에 쓴 5개의 수의 합을 y라 하면 가로줄의 수의 합과 세로줄의 수의 합이 같으므로

$1+2+3+4+5+6+7+x=2y$

$\therefore y=\frac{28+x}{2}$ …… ㉠

이때 ㉠에서 y는 자연수이므로 x는 짝수이어야 한다.

즉 x의 값이 될 수 있는 수는

2, 4, 6

(i) $x=2$일 때

$y=\frac{28+2}{2}=15$이므로 세로줄의 나머지 두 수의 합은 13이다.

즉 (가)를 제외한 세로줄의 칸에는 6, 7, (가)를 제외한 가로줄의 칸에는 1, 3, 4, 5를 쓰면 된다.

세로줄에 6, 7을 써넣는 경우의 수는

$2!=2$

가로줄에 1, 3, 4, 5를 써넣는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 이 경우의 수는

$2\times24=48$

(ii) $x=4$일 때

$y=\frac{28+4}{2}=16$이므로 세로줄의 나머지 두 수의 합은 12이다.

즉 (가)를 제외한 세로줄의 칸에는 5, 7, (가)를 제외한 가로줄의 칸에는 1, 2, 3, 6을 쓰면 된다.

세로줄에 5, 7을 써넣는 경우의 수는

$2!=2$

가로줄에 1, 2, 3, 6을 써넣는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 이 경우의 수는

$2\times24=48$

(iii) $x=6$일 때

$y=\frac{28+6}{2}=17$이므로 세로줄의 나머지 두 수의 합은 11이다.

즉 (가)를 제외한 세로줄의 칸에는 4, 7, (가)를 제외한 가로줄의 칸에는 1, 2, 3, 5를 쓰면 된다.

세로줄에 4, 7을 써넣는 경우의 수는

$2!=2$

가로줄에 1, 2, 3, 5를 써넣는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 이 경우의 수는

$2\times24=48$

이상에서 구하는 경우의 수는

$48+48+48=144$ 답 ②

0897 전략 5명을 일렬로 세우는 경우의 수에서 A, B가 이웃하도록 세우는 경우의 수를 뺀다.

5명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는

$5!=120$

A와 B 사이에 한 명도 없도록, 즉 A와 B가 이웃하도록 세우는 경우의 수는

$4!\times2!=48$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-48=72$ 답 ①

0898 전략 365보다 큰 홀수는 백의 자리의 숫자가 4 이상이고 일의 자리의 숫자가 홀수임을 이용한다.

365보다 큰 홀수는 4□1, 4□3, 4□5, 5□1, 5□3, 6□1, 6□3, 6□5의 꼴이다.

(i) 4□1, 4□3, 4□5의 꼴인 자연수의 개수는

$3\times{}_5P_1=15$

(ii) 5□1, 5□3의 꼴인 자연수의 개수는

$2\times{}_5P_1=10$

(iii) 6□1, 6□3, 6□5의 꼴인 자연수의 개수는

$3\times{}_5P_1=15$

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$15+10+15=40$ 답 ④

0899 전략 108과 서로소인 수는 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아님을 이용한다.

$108=2^2\times3^3$이므로 108과 서로소인 수는 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니다.

108개의 공 중에서

2의 배수가 적힌 공은

2, 4, 6, …, 108의 54개

3의 배수가 적힌 공은

3, 6, 9, …, 108의 36개

6의 배수가 적힌 공은

6, 12, 18, …, 108의 18개

따라서 2의 배수 또는 3의 배수가 적힌 공의 개수는

$54+36-18=72$

이므로 구하는 경우의 수는

$108-72=36$ 답 36

0900 전략 a, b, c가 모두 홀수인 경우, 짝수가 1개인 경우, 짝수가 2개 이상인 경우로 나누어 생각한다.

(i) a, b, c가 모두 홀수인 경우

ab, bc, ca, abc가 모두 홀수이므로 $ab+bc+ca+abc$의 값이 짝수이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) a, b, c 중 짝수가 1개인 경우

ab, bc, ca 중 2개가 짝수, 1개가 홀수이고, abc는 짝수이므로 $ab+bc+ca+abc$의 값은 홀수이다.

즉 a만 짝수인 경우의 수는

$3\times3\times3=27$

이고, b만 짝수인 경우의 수와 c만 짝수인 경우의 수도 각각 27이므로 그 경우의 수는

$27\times3=81$

(iii) a, b, c 중 짝수가 2개 이상인 경우

ab, bc, ca, abc가 모두 짝수이므로 $ab+bc+ca+abc$의 값이 짝수이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 구하는 경우의 수는

81 답 81

0901 전략 B와 E에 같은 색을 칠할 때와 다른 색을 칠할 때로 나누어 각각의 경우의 수를 구한다.

(i) B와 E에 같은 색을 칠하는 경우

B에 칠할 수 있는 색은 4가지

E에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지

A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지

C에 칠할 수 있는 색은 B(E)에 칠한 색을 제외한 3가지

D에 칠할 수 있는 색은 B(E)에 칠한 색을 제외한 3가지

F에 칠할 수 있는 색은 E에 칠한 색을 제외한 3가지

즉 B와 E에 같은 색을 칠하는 방법의 수는

$4\times1\times3\times3\times3\times3=324$

(ii) B와 E에 다른 색을 칠하는 경우

B에 칠할 수 있는 색은 4가지

E에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지

A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지

C에 칠할 수 있는 색은 B, E에 칠한 색을 제외한 2가지

D에 칠할 수 있는 색은 B, E에 칠한 색을 제외한 2가지

F에 칠할 수 있는 색은 E에 칠한 색을 제외한 3가지

즉 B와 E에 다른 색을 칠하는 방법의 수는

$4\times3\times3\times2\times2\times3=432$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$324+432=756$ 답 756

0902 전략 맨 앞에 홀수가 나올 때와 짝수가 나올 때로 나누어 각각의 경우의 수를 구한다.

홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개, 짝수는 2, 4, 6, 8의 4개이다.

(i) 맨 앞에 홀수가 나오는 경우

맨 앞에 홀수가 나오면 비밀번호는 홀 짝 홀의 꼴이어야 한다.

홀수 5개 중 2개를 택하여 나열하는 경우의 수는

${}_5P_2=20$

짝수 4개 중 1개를 택하여 두 홀수 사이에 넣는 경우의 수는

4

즉 맨 앞에 홀수가 나오는 경우의 수는

$20\times4=80$

(ii) 맨 앞에 짝수가 나오는 경우

맨 앞에 짝수가 나오면 비밀번호는 짝 홀 짝의 꼴이어야 한다.

짝수 4개 중 2개를 택하여 나열하는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

홀수 5개 중 1개를 택하여 두 짝수 사이에 넣는 경우의 수는

5

즉 맨 앞에 짝수가 나오는 경우의 수는

$12\times5=60$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$80+60=140$ 답 140

0903 전략 초등학생이 왼쪽 끝의 둥근 의자에 앉을 때와 앉지 않을 때로 나누어 각각의 경우의 수를 구한다.

(i) 초등학생이 왼쪽 끝의 둥근 의자에 앉을 때

●□●□○□ 또는 ●□○□●□

위의 그림과 같이 초등학생이 앉을 둥근 의자를 택하는 경우의 수는 2

초등학생이 2개의 둥근 의자에 앉는 경우의 수는

$2!=2$

ⓐ 초등학생이 앉지 않은 둥근 의자에 중학생이 앉는다면 중학생이 앉은 둥근 의자와 이웃한 2개의 사각 의자에는 고등학생만 앉아야 하므로 경우의 수는

$2!\times2!=4$

ⓑ 초등학생이 앉지 않은 둥근 의자에 고등학생이 앉는다면 고등학생이 앉은 둥근 의자와 이웃한 2개의 사각 의자에는 중학생만 앉아야 하므로 경우의 수는

$2!\times2!=4$

따라서 이 경우의 수는

$2\times2\times(4+4)=32$

(ii) 초등학생이 왼쪽 끝의 둥근 의자에 앉지 않을 때

○□●□●□

왼쪽 끝이 아닌 나머지 2개의 둥근 의자에 초등학생이 앉는 경우의 수는

$2!=2$

ⓐ 왼쪽 끝의 둥근 의자에 중학생이 앉는다면 중학생이 앉은 둥근 의자와 이웃한 사각 의자에 고등학생이 앉아야 하므로 경우의 수는

$2\times2\times2!=8$

ⓑ 왼쪽 끝의 둥근 의자에 고등학생이 앉는다면 고등학생이 앉은 둥근 의자와 이웃한 사각 의자에 중학생이 앉아야 하므로 경우의 수는

$2\times2\times2!=8$

따라서 이 경우의 수는

$2\times(8+8)=32$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$32+32=64$ 답 64

0904 전략 BDC□□의 꼴과 DBA□□의 꼴 사이의 문자열의 개수를 생각한다.

BDCAE 다음의 BDC□□의 꼴의 문자열은

BDCEA의 1개

BDE□□의 꼴의 문자열의 개수는 $2!=2$

BE□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $3!=6$

C□□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $4!=24$

DA□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $3!=6$

DBAEC 이전의 DBA□□의 꼴의 문자열은

DBACE의 1개

따라서 구하는 문자열의 개수는

$1+2+6+24+6+1=40$ 답 40

0905 전략 $a\le b$인 순서쌍의 개수와 $ab\ge20$인 순서쌍의 개수를 더한 후 $a\le b$, $ab\ge20$을 동시에 만족시키는 순서쌍의 개수를 뺀다.

(i) $a\le b$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$a=1$이면 $(1, 1), (1, 2), \cdots, (1, 6)$의 6개

$a=2$이면 $(2, 2), (2, 3), \cdots, (2, 6)$의 5개

$a=3$이면 $(3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)$의 4개

$a=4$이면 $(4, 4), (4, 5), (4, 6)$의 3개

$a=5$이면 $(5, 5), (5, 6)$의 2개

$a=6$이면 $(6, 6)$의 1개

이므로 순서쌍의 개수는

$6+5+4+3+2+1=21$ … ❶

(ii) $ab\ge20$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6),$

$(6, 4), (6, 5), (6, 6)$의 8개 … ❷

(iii) $a\le b$, $ab\ge20$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6)$의 5개 … ❸

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$21+8-5=24$ … ❹

답 24

단계	채점 요소	배점
❶	$a\le b$일 때, 순서쌍의 개수 구하기	1점
❷	$ab\ge20$일 때, 순서쌍의 개수 구하기	1점
❸	$a\le b$, $ab\ge20$일 때, 순서쌍의 개수 구하기	1점
❹	$a\le b$ 또는 $ab\ge20$일 때, 순서쌍의 개수 구하기	1점

0906 전략 두 다항식 A, B의 각 항의 문자가 모두 다르면 AB의 전개식에서 항의 개수는 (A의 항의 개수)×(B의 항의 개수)임을 이용한다.

$(a+b)(m+n)(x+y+z)$

$=a(m+n)(x+y+z)+b(m+n)(x+y+z)$

이므로 a를 포함하는 항의 개수는 $(m+n)(x+y+z)$의 전개식의 항의 개수와 같다.

$(m+n)(x+y+z)$를 전개할 때, m, n에 x, y, z를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 항의 개수는

$2\times3=6$ $\therefore p=6$ … ❶

$(a+b)(m+n)(x+y+z)$

$=(a+b)(m+n)(x+y)+(a+b)(m+n)z$

이므로 z를 포함하지 않는 항의 개수는

$(a+b)(m+n)(x+y)$의 전개식의 항의 개수와 같다.

$(a+b)(m+n)(x+y)=(am+an+bm+bn)(x+y)$에서 이 식을 전개할 때, am, an, bm, bn에 x, y를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 항의 개수는

$4\times2=8$ $\therefore q=8$ … ❷

$\therefore pq=48$ … ❸

답 48

단계	채점 요소	배점
❶	p의 값 구하기	2점
❷	q의 값 구하기	2점
❸	pq의 값 구하기	1점

0907 전략 여학생 2명을 앞줄에 세우는 경우의 수와 뒷줄에 세우는 경우의 수를 각각 구한다.

(i) 여학생 2명을 앞줄에 세우는 경우

앞줄의 3자리 중에서 이웃하는 여학생 2명의 위치를 정하는 경우의 수는 2

여학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

나머지 5개의 자리에 남학생을 세우는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 여학생 2명을 앞줄에 이웃하게 세우는 경우의 수는

$2\times2\times120=480$ … ❶

(ii) 여학생 2명을 뒷줄에 세우는 경우

뒷줄의 4자리 중에서 이웃하는 여학생 2명의 위치를 정하는 경우의 수는 3

여학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

나머지 5개의 자리에 남학생을 세우는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 여학생 2명을 뒷줄에 이웃하게 세우는 경우의 수는

$3\times2\times120=720$ … ❷

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$480+720=1200$ … ❸

답 1200

단계	채점 요소	배점
❶	여학생 2명을 앞줄에 세우는 경우의 수 구하기	2점
❷	여학생 2명을 뒷줄에 세우는 경우의 수 구하기	2점
❸	여학생 2명을 같은 줄에 이웃하게 세우는 경우의 수 구하기	1점

0908 전략 4의 배수이려면 마지막 두 자리 수가 4의 배수이어야 하고, 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

4의 배수이려면 마지막 두 자리 수가 4의 배수이어야 한다.

(i) 마지막 두 자리 수가 04, 20, 40, 60인 경우

천의 자리, 백의 자리의 숫자를 정하는 경우의 수는 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$_5P_2=20$

즉 4의 배수의 개수는

$4\times20=80$

(ii) 마지막 두 자리 수가 12, 16, 24, 32, 36, 52, 56, 64인 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 제외한 4개, 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 제외한 4개이므로 그 경우의 수는

$4\times4=16$

즉 4의 배수의 개수는

$8\times16=128$

(i), (ii)에서 4의 배수의 개수는

$80+128=208$

$\therefore a=208$ … ❶

한편 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

(iii) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

5의 배수의 개수는 일의 자리의 숫자 0을 제외한 6개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$_6P_3=120$

(iv) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리의 숫자를 제외한 5개이다.

백의 자리, 십의 자리의 숫자를 정하는 경우의 수는 천의 자리와 일의 자리의 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$_5P_2=20$

즉 5의 배수의 개수는

$5\times20=100$

(iii), (iv)에서 5의 배수의 개수는

$120+100=220$ $\therefore b=220$ … ❷

$\therefore a+b=428$ … ❸

답 428

단계	채점 요소	배점
❶	a의 값 구하기	3점
❷	b의 값 구하기	2점
❸	$a+b$의 값 구하기	1점

III 경우의 수

11 조합

셀프 CHECK 본책 176쪽

A 답 (1) 35 (2) 1 (3) 1

B 답 (1) 126 (2) 21

C 답 (1) 21 (2) 35 (3) 15

D 답 (1) 1260 (2) 378 (3) 280

내신유형 다지기

본책 177~183쪽

유형 163 ${}_nC_r$의 계산

본책 177쪽

(1) ${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ (단, $0\le r\le n$)

(2) ${}_nC_0=1$, ${}_nC_n=1$

(3) ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ (단, $0\le r\le n$)

0909 ${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}$이므로 $56=\frac{336}{r!}$

$r!=6=3\times2\times1$ $\therefore r=3$

따라서 ${}_nP_3=336=8\times7\times6$이므로 $n=8$

$\therefore n+r=11$ 답 ②

0910 ${}_{11-n}C_2=15$에서 $\frac{(11-n)(10-n)}{2}=15$

$(11-n)(10-n)=30$, $n^2-21n+80=0$

$(n-5)(n-16)=0$ $\therefore n=5$ ($\because 3\le n\le 9$)

$\therefore {}_nP_2-{}_nC_3={}_5P_2-{}_5C_3=20-10=10$ 답 10

0911 이차방정식 ${}_nC_4x^2-5{}_nC_3x+{}_nC_5=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5\frac{{}_nC_3}{{}_nC_4}$, $\alpha\beta=\frac{{}_nC_5}{{}_nC_4}$

이때 $\alpha\beta=1$이므로 $\frac{{}_nC_5}{{}_nC_4}=1$, ${}_nC_5={}_nC_4$

$n-5=4$ $\therefore n=9$ … ❶

$\therefore \alpha+\beta=5\frac{{}_9C_3}{{}_9C_4}=\frac{420}{126}=\frac{10}{3}$ … ❷

답 $\frac{10}{3}$

단계	채점 요소	비율
❶	n의 값 구하기	60 %
❷	$\alpha+\beta$의 값 구하기	40 %

0912 $\frac{{}_nC_r}{14}=\frac{{}_nC_{r+1}}{7}$에서 ${}_nC_r=2\times{}_nC_{r+1}$

$\frac{n!}{r!(n-r)!}=2\times\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}$

$r+1=2(n-r)$

$\therefore 2n-3r=1$ …… ㉠

$\frac{{}_nC_{r+1}}{7}=\frac{{}_nC_{r+2}}{2}$에서 $2\times{}_nC_{r+1}=7\times{}_nC_{r+2}$

$2\times\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}=7\times\frac{n!}{(r+2)!(n-r-2)!}$

$2(r+2)=7(n-r-1)$

$\therefore 7n-9r=11$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $n=8$, $r=5$

$\therefore nr=40$ 답 40

유형 164 ${}_nC_r$를 이용한 증명

본책 177쪽

${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ ($0\le r\le n$)임을 이용하여 주어진 등식이 성립함을 증명한다.

0913 ${}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

$=\frac{(n-1)!}{r!\{(n-1)-r\}!}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$=\frac{(n-1)!}{r!\boxed{(가)\ (n-r-1)!}}+\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$

$=\frac{(n-r)\times(n-1)!}{r!(n-r)!}+\frac{\boxed{(나)\ r}\times(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\frac{\{(n-r)+r\}\times(n-1)!}{r!(n-r)!}=\frac{\boxed{(다)\ n}\times(n-1)!}{r!(n-r)!}$

$=\frac{n!}{r!(n-r)!}={}_nC_r$

답 (가) $(n-r-1)!$ (나) r (다) n

0914 ${}_nC_k\times{}_{n-k}C_{r-k}$

$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{(n-k)!}{(r-k)!\{(n-k)-(r-k)\}!}$

$=\frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{(n-k)!}{(r-k)!\boxed{(가)\ (n-r)!}}$

$=\frac{\boxed{(나)\ n!}}{k!(r-k)!(n-r)!}$

$=\frac{n!}{r!(n-r)!}\times\frac{r!}{k!\boxed{(다)\ (r-k)!}}$

$={}_nC_r\times{}_rC_k$ 답 ⑤

유형 165 조합의 수

본책 178쪽

(1) 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 경우의 수 ➡ ${}_nC_r$

(2) 서로 다른 n개에서 a개를 택한 후 나머지에서 b개를 택하는 경우의 수 ➡ ${}_nC_a\times{}_{n-a}C_b$

0915 남자 회원 5명 중에서 남자 복식에 출전할 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

여자 회원 4명 중에서 여자 복식에 출전할 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

남은 남자 회원 3명, 여자 회원 2명 중에서 남녀 혼합 복식에 출전할 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_2C_1=3\times2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times6\times6=360$ 답 360

0916 경찰관 8명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_8C_2=28$

소방관 n명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_nC_2$

이때 2명의 직업이 같은 경우의 수가 83이므로

$28+{}_nC_2=83,\quad {}_nC_2=55$

$\frac{n(n-1)}{2\times1}=55,\quad n(n-1)=11\times10$

$\therefore n=11$ 답 11

0917 1끼리는 어느 것도 이웃하지 않아야 하므로 다음과 같이 5개의 0을 일렬로 나열하면 ∨가 표시된 자리에만 1이 올 수 있다.

∨0∨0∨0∨0∨0∨

이때 아홉 자리 자연수를 만들어야 하므로 가장 왼쪽에는 반드시 1을 넣어야 한다.

따라서 구하는 자연수의 개수는 0의 사이사이와 가장 오른쪽의 5개의 자리에 남은 3개의 1을 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_3={}_5C_2=10$ 답 ①

0918 세 수의 합이 홀수가 되기 위해서는 세 수가 모두 홀수이거나 한 개는 홀수, 두 개는 짝수이어야 한다.

(i) 세 수가 모두 홀수인 경우

홀수 1, 3, 5, 7, 9가 적힌 5장의 카드 중에서 3장을 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_3={}_5C_2=10$

(ii) 한 개는 홀수, 두 개는 짝수인 경우

홀수 1, 3, 5, 7, 9가 적힌 5장의 카드 중에서 1장을 뽑고, 짝수 2, 4, 6, 8이 적힌 4장의 카드 중에서 2장을 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_1\times{}_4C_2=5\times6=30$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$10+30=40$ 답 40

0919 서로 다른 네 종류의 인형이 각각 2개씩 있으므로 4개의 인형을 선택하려면 두 종류의 인형을 각각 2개, 2개 선택하거나 세 종류의 인형을 각각 1개, 1개, 2개 선택하거나 네 종류의 인형을 각각 1개, 1개, 1개, 1개 선택해야 한다.

(i) 두 종류의 인형을 선택하는 경우

서로 다른 네 종류의 인형 중에서 두 종류를 선택하면 되므로 이 경우의 수는

${}_4C_2=6$

(ii) 세 종류의 인형을 선택하는 경우

서로 다른 네 종류의 인형 중에서 세 종류를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_3={}_4C_1=4$

선택한 세 종류의 인형 중에서 2개를 선택하는 인형의 종류를 정하면 남은 두 종류의 인형은 각각 1개씩 선택하면 되므로 이때의 경우의 수는

${}_3C_1=3$

따라서 이 경우의 수는 $4\times3=12$

(iii) 네 종류의 인형을 선택하는 경우

네 종류의 인형을 각각 1개씩 선택하면 되므로 이 경우의 수는 1

이상에서 구하는 경우의 수는

$6+12+1=19$ 답 19

0920 (i) 3종류의 색의 공을 각각 1개, 1개, 4개 꺼내는 경우

4개 이상인 것은 흰 공뿐이므로 흰 공을 4개 꺼내야 한다.

남은 검은 공, 빨간 공, 파란 공, 노란 공 중에서 1개의 공을 꺼낼 2가지 색을 고르는 경우의 수는

${}_4C_2=6$ … ❶

(ii) 3종류의 색의 공을 각각 1개, 2개, 3개 꺼내는 경우

3개 이상인 것은 흰 공뿐이므로 흰 공을 3개 꺼내야 한다.

흰 공을 제외하고 2개 이상인 것은 검은 공, 빨간 공, 파란 공이므로 이 중에서 2개의 공을 꺼낼 1가지 색을 고르는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

남은 3가지 색의 공 중에서 1개의 공을 꺼낼 1가지 색을 고르는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

따라서 이 경우의 수는

$3\times3=9$ … ❷

(iii) 3종류의 색의 공을 각각 2개, 2개, 2개 꺼내는 경우

2개 이상인 것은 흰 공, 검은 공, 빨간 공, 파란 공이므로 이 중에서 2개의 공을 꺼낼 3가지 색을 고르는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$ … ❸

이상에서 구하는 경우의 수는

$6+9+4=19$ … ❹

답 19

단계	채점 요소	비율
❶	3종류의 색의 공을 각각 1개, 1개, 4개 꺼내는 경우의 수 구하기	30 %
❷	3종류의 색의 공을 각각 1개, 2개, 3개 꺼내는 경우의 수 구하기	30 %
❸	3종류의 색의 공을 각각 2개, 2개, 2개 꺼내는 경우의 수 구하기	30 %
❹	꺼낸 공의 색이 3종류인 경우의 수 구하기	10 %

유형 166 **'적어도 ~'의 조건이 있는 조합의 수** → 본책 178쪽

(사건 A가 적어도 한 번 일어나는 경우의 수)

=(모든 경우의 수)−(사건 A가 일어나지 않는 경우의 수)

0921 13명의 학생 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는
$${}_{13}C_4=715$$
남학생 8명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는
$${}_8C_4=70$$
여학생 5명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는
$${}_5C_4={}_5C_1=5$$
따라서 구하는 경우의 수는
$$715-(70+5)=640$$
답 ⑤

0922 12장의 스티커 중에서 5장을 꺼내는 경우의 수는
$${}_{12}C_5=792$$ … ❶
파란색 스티커가 포함되지 않도록 5장을 꺼내는 경우의 수는 빨간색 스티커와 노란색 스티커 중에서 5장을 꺼내는 경우의 수와 같으므로
$${}_7C_5={}_7C_2=21$$ … ❷
파란색 스티커가 1장만 포함되도록 5장을 꺼내는 경우의 수는 파란색 스티커 중에서 1장을 꺼내고, 빨간색 스티커와 노란색 스티커 중에서 4장을 꺼내는 경우의 수와 같으므로
$${}_5C_1\times{}_7C_4={}_5C_1\times{}_7C_3=5\times35=175$$ … ❸
따라서 구하는 경우의 수는
$$792-(21+175)=596$$ … ❹
답 596

단계	채점 요소	비율
❶	12장의 스티커 중에서 5장을 꺼내는 경우의 수 구하기	20 %
❷	파란색 스티커가 포함되지 않도록 5장을 꺼내는 경우의 수 구하기	30 %
❸	파란색 스티커가 1장만 포함되도록 5장을 꺼내는 경우의 수 구하기	30 %
❹	파란색 스티커가 적어도 2장 포함되도록 꺼내는 경우의 수 구하기	20 %

0923 10마리 중에서 3마리를 선정하는 경우의 수는
$${}_{10}C_3=120$$
고양이가 $n(n\geq3)$마리 있다고 할 때, 고양이만 3마리를 선정하는 경우의 수는 $${}_nC_3$$
이때 강아지가 적어도 한 마리 포함되도록 선정하는 경우의 수가 116이므로
$$120-{}_nC_3=116,\quad {}_nC_3=4$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=4,\quad n(n-1)(n-2)=4\times3\times2$$
$$\therefore\ n=4$$
따라서 고양이가 4마리 있으므로 강아지는 $10-4=6$(마리)가 있다.
답 ④

0924 9개의 공 중에서 5개를 꺼내는 경우의 수는
$${}_9C_5={}_9C_4=126$$
A가 적힌 공이 포함되지 않도록 5개의 공을 꺼내는 경우의 수는 B가 적힌 공과 C가 적힌 공 중에서 5개를 꺼내는 경우의 수와 같으므로
$${}_6C_5={}_6C_1=6$$
같은 방법으로 하면 B가 적힌 공이 포함되지 않도록 5개의 공을 꺼내는 경우의 수와 C가 적힌 공이 포함되지 않도록 5개의 공을 꺼내는 경우의 수가 각각 6이므로 구하는 경우의 수는
$$126-6\times3=108$$
답 108

유형 167 특정한 것을 포함하거나 포함하지 않는 조합의 수
본책 179쪽

서로 다른 n개에서 r개를 뽑을 때
(1) 특정한 k개를 포함하여 뽑는 경우의 수 ➜ ${}_{n-k}C_{r-k}$
(2) 특정한 k개를 제외하고 뽑는 경우의 수 ➜ ${}_{n-k}C_r$

0925 딸기 맛은 고르고 바닐라 맛은 고르지 않는 경우의 수는 딸기 맛과 바닐라 맛을 제외한 7가지 맛 중에서 4가지를 고르는 경우의 수와 같으므로
$${}_7C_4={}_7C_3=35$$
바닐라 맛은 고르고 딸기 맛은 고르지 않는 경우의 수는 바닐라 맛과 딸기 맛을 제외한 7가지 맛 중에서 4가지를 고르는 경우의 수와 같으므로
$${}_7C_4={}_7C_3=35$$
따라서 구하는 경우의 수는
$$35+35=70$$
답 ③
다른 풀이 딸기 맛과 바닐라 맛 중에서 1가지를 고르고, 딸기 맛과 바닐라 맛을 제외한 7가지 맛 중에서 4가지를 고르면 되므로 구하는 경우의 수는
$${}_2C_1\times{}_7C_4={}_2C_1\times{}_7C_3=2\times35=70$$

0926 지수를 포함하여 4명을 뽑는 경우의 수는 지수를 제외한 11명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수와 같으므로
$$a={}_{11}C_3=165$$
지수와 준기를 포함하지 않고 4명을 뽑는 경우의 수는 지수와 준기를 제외한 10명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수와 같으므로
$$b={}_{10}C_4=210$$
$$\therefore\ a+b=375$$
답 375

0927 (i) 공통으로 관람하는 영화가 없는 경우
A가 7편의 영화 중에서 2편을 고르는 경우의 수는
$${}_7C_2=21$$
B가 A가 고르지 않은 5편의 영화 중에서 2편을 고르는 경우의 수는 $${}_5C_2=10$$
따라서 이 경우의 수는 $$21\times10=210$$
(ii) 공통으로 관람하는 영화가 1편인 경우
A가 7편의 영화 중에서 2편을 고르는 경우의 수는
$${}_7C_2=21$$
B가 A가 고른 2편의 영화 중에서 1편을 고르고, A가 고르지 않은 5편의 영화 중에서 1편을 고르는 경우의 수는
$${}_2C_1\times{}_5C_1=2\times5=10$$
따라서 이 경우의 수는 $$21\times10=210$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$210+210=420$

답 420

다른 풀이 (ii) 공통으로 관람하는 영화가 1편인 경우

7편의 영화 중에서 A와 B가 공통으로 관람할 영화 1편을 고르는 경우의 수는

$_7C_1=7$

남은 6편의 영화 중에서 A와 B가 각각 1편씩 고르는 경우의 수는

$_6P_2=30$

따라서 이 경우의 수는 $7\times30=210$

0928 짝이 맞는 신발 한 켤레를 택하는 경우의 수는

$_8C_1=8$

한 켤레를 제외한 신발 14짝 중에서 2짝을 택하는 경우의 수는

$_{14}C_2=91$

이때 신발 14짝 중에서 짝이 맞는 2짝, 즉 신발 7켤레 중에서 한 켤레를 택하는 경우의 수는

$_7C_1=7$

이므로 신발 14짝 중에서 짝이 맞지 않는 2짝을 택하는 경우의 수는

$91-7=84$

따라서 구하는 경우의 수는

$8\times84=672$

답 672

0929 5개의 동아리 중에서 3개를 선택하는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$

3개의 체육 동아리 중에서 3개를 선택하는 경우의 수는

$_3C_3=1$

따라서 1개 이상의 체육 동아리와 1개 이상의 음악 동아리를 포함한 서로 다른 3개의 동아리를 선택하는 경우의 수는

$10-1=9$

이므로 조건 (가)를 만족시키도록 A와 B가 동아리를 선택하는 경우의 수는

$9\times9=81$

이때 A는 선택하고 B는 선택하지 않은 동아리가 없으려면 A와 B가 선택한 동아리가 모두 같아야 하므로 이 경우의 수는

$9\times1=9$

따라서 구하는 경우의 수는

$81-9=72$

답 ⑤

유형 168 뽑아서 나열하는 경우의 수 → 본책 180쪽

서로 다른 m개 중에서 r개, 서로 다른 n개 중에서 s개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수

➜ $_mC_r\times{}_nC_s\times(r+s)!$

0930 소설책 6권 중에서 2권을 고르는 경우의 수는

$_6C_2=15$

시집 4권 중에서 2권을 고르는 경우의 수는

$_4C_2=6$

택한 4권의 읽는 순서를 정하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times6\times24=2160$

답 2160

0931 1부터 9까지의 자연수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개, 짝수는 2, 4, 6, 8의 4개이다.

4개의 짝수 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

$_4C_1=4$

5개의 홀수 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_5C_2=10$

택한 3개의 자연수를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 세 자리 비밀번호의 개수는

$4\times10\times6=240$

답 240

0932 민준이와 서윤이를 제외한 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=10$ … ❶

이 3명을 일렬로 세우고 그 사이사이와 양 끝의 4개의 자리 중 2개의 자리에 민준이와 서윤이를 세우는 경우의 수는

$3!\times{}_4P_2=6\times12=72$ … ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times72=720$ … ❸

답 720

단계	채점 요소	비율
❶	민준이와 서윤이를 포함하여 5명을 뽑는 경우의 수 구하기	40 %
❷	민준이와 서윤이가 서로 이웃하지 않도록 세우는 경우의 수 구하기	40 %
❸	조건을 만족시키는 경우의 수 구하기	20 %

유형 169 직선의 개수 → 본책 180쪽

(1) 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 서로 다른 n개의 점으로 만들 수 있는 직선의 개수 ➜ $_nC_2$

(2) 일직선 위에 있는 서로 다른 $n\,(n\geq2)$개의 점으로 만들 수 있는 직선의 개수 ➜ 1

0933 10개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_{10}C_2=45$

직선 l 위에 있는 6개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_6C_2=15$

직선 m 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$_4C_2=6$

이때 주어진 두 직선을 포함하면 구하는 직선의 개수는

$45-15-6+2=26$

답 26

다른 풀이 두 직선 l, m 위의 점을 각각 하나씩 택하여 연결한 직선의 개수는

${}_6C_1 \times {}_4C_1 = 6 \times 4 = 24$

한 직선 위에 있는 점 중에서 2개를 택하여 연결한 직선의 개수는 2

따라서 구하는 직선의 개수는

$24 + 2 = 26$

0934 8개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_8C_2 = 28$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2 = 10$

이때 주어진 한 직선을 포함하면 구하는 직선의 개수는

$28 - 10 + 1 = 19$ **답** ②

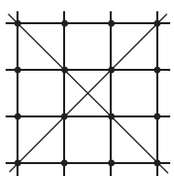
0935 16개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_{16}C_2 = 120$

(i) 일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2 = 6$

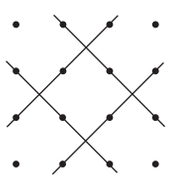
이고, 4개의 점을 지나는 직선은 오른쪽 그림과 같이 10개이다.



(ii) 일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$

이고, 3개의 점을 지나는 직선은 오른쪽 그림과 같이 4개이다.



(i), (ii)에서 구하는 직선의 개수는

$120 - 6 \times 10 - 3 \times 4 + 10 + 4 = 62$ **답** 62

유형 170 대각선의 개수 본책 181쪽

n각형의 대각선의 개수는 n개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 선분의 개수에서 변의 개수를 뺀 것과 같다.

➜ ${}_nC_2 - n$

0936 구하는 대각선의 개수는 9개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 9를 뺀 것과 같으므로

${}_9C_2 - 9 = 36 - 9 = 27$ **답** ③

0937 십일각형의 대각선의 개수는 11개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 11을 뺀 것과 같으므로

$a = {}_{11}C_2 - 11 = 55 - 11 = 44$

팔각형의 대각선의 개수는 8개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 8을 뺀 것과 같으므로

$b = {}_8C_2 - 8 = 28 - 8 = 20$

$\therefore a - b = 24$ **답** 24

0938 구하는 다각형의 꼭짓점의 개수를 $n\,(n \geq 3)$이라 하면 n각형의 대각선의 개수는 n개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 n을 뺀 것과 같으므로

${}_nC_2 - n = 65$, $\dfrac{n(n-1)}{2 \times 1} - n = 65$

$n^2 - 3n - 130 = 0$, $(n+10)(n-13) = 0$

$\therefore n = 13$ ($\because n \geq 3$)

따라서 구하는 다각형의 꼭짓점의 개수는 13이다. **답** ②

유형 171 다각형의 개수 — 꼭짓점 본책 181쪽

(1) 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 서로 다른 n개의 점이 있을 때

① 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수 ➜ ${}_nC_3$

② 4개의 점을 꼭짓점으로 하는 사각형의 개수 ➜ ${}_nC_4$

(2) 일직선 위에 있는 서로 다른 n개의 점으로는 다각형을 만들 수 없다.

0939 8개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_8C_3 = 56$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$

이고, 4개의 점을 지나는 직선은 2개이다.

일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_3 = 1$

이고, 3개의 점을 지나는 직선은 1개이다.

일직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$56 - 4 \times 2 - 1 = 47$ **답** ④

0940 직선 l 위의 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2 = 6$

직선 m 위의 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2 = 10$

따라서 구하는 사각형의 개수는 $6 \times 10 = 60$ **답** 60

다른 풀이 9개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

${}_9C_4 = 126$

직선 l 위의 점 중에서 3개를 택하고, 직선 m 위의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3 \times {}_5C_1 = {}_4C_1 \times {}_5C_1 = 4 \times 5 = 20$

직선 m 위의 점 중에서 3개를 택하고, 직선 l 위의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_3 \times {}_4C_1 = {}_5C_2 \times {}_4C_1 = 10 \times 4 = 40$

직선 l 위의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_4 = 1$

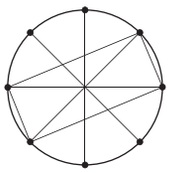
직선 m 위의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$126 - (20 + 40 + 1 + 5) = 60$

0941 (i) 직사각형의 개수



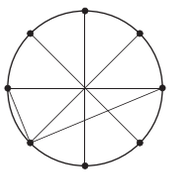
원에 내접하는 직사각형의 두 대각선의 교점은 원의 중심이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 원 위에 같은 간격으로 놓인 8개의 점 중에서 두 점을 연결한 선분 중 원의 중심을 지나는 선분은 4개이다.

따라서 주어진 8개의 점 중에서 4개의 점을 꼭짓점으로 하는 직사각형의 개수는 원의 중심을 지나는 4개의 선분 중 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$m={}_4C_2=6$ … ❶

(ii) 직각삼각형의 개수



원에 내접하는 직각삼각형의 빗변의 중점은 원의 중심이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 원 위에 같은 간격으로 놓인 8개의 점 중에서 두 점을 연결한 선분 중 원의 중심을 지나는 선분은 4개이다.

따라서 주어진 8개의 점 중에서 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 직각삼각형의 개수는 원의 중심을 지나는 4개의 선분 중 1개를 택하고 남은 6개의 점 중 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$n={}_4C_1\times{}_6C_1=4\times6=24$ … ❷

(i), (ii)에서

$m+n=30$ … ❸

답 30

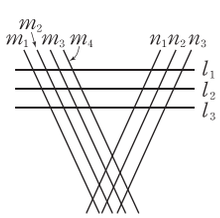
단계	채점 요소	비율
❶	m의 값 구하기	40 %
❷	n의 값 구하기	40 %
❸	$m+n$의 값 구하기	20 %

유형 172 다각형의 개수 — 변 → 본책 182쪽

m개의 평행선과 이와 평행하지 않은 n개의 평행선이 만날 때 생기는 평행사변형의 개수

➜ ${}_mC_2\times{}_nC_2$

0942 오른쪽 그림과 같이 각각의 평행선을 l_i, m_j, n_k $(i=1, 2, 3, j=1, 2, 3, 4, k=1, 2, 3)$라 하자.



(i) l_1, l_2, l_3 중에서 2개를 택하고 m_1, m_2, m_3, m_4 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2\times{}_4C_2={}_3C_1\times{}_4C_2=3\times6=18$

(ii) l_1, l_2, l_3 중에서 2개를 택하고 n_1, n_2, n_3 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2\times{}_3C_2={}_3C_1\times{}_3C_1=3\times3=9$

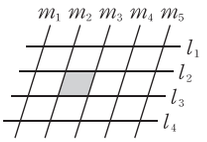
(iii) m_1, m_2, m_3, m_4 중에서 2개를 택하고 n_1, n_2, n_3 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_3C_2={}_4C_2\times{}_3C_1=6\times3=18$

이상에서 구하는 평행사변형의 개수는

$18+9+18=45$ 답 45

0943 오른쪽 그림과 같이 각각의 평행선을 l_i, m_j $(i=1, 2, 3, 4, j=1, 2, 3, 4, 5)$라 하자.



색칠한 부분을 포함하는 평행사변형을 만들려면 가로 방향의 평행선 2개는 l_1, l_2 중에서 1개, l_3, l_4 중에서 1개를 택해야 하므로 가로 방향의 평행선을 택하는 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_2C_1=2\times2=4$

세로 방향의 평행선 2개는 m_1, m_2 중에서 1개, m_3, m_4, m_5 중에서 1개를 택해야 하므로 세로 방향의 평행선을 택하는 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_3C_1=2\times3=6$

따라서 구하는 평행사변형의 개수는

$4\times6=24$ 답 24

0944 꼭짓점 A와 선분 BC 위의 한 점을 지나는 선분 5개 중에서 2개, 선분 AB 위의 한 점과 선분 AC 위의 한 점을 지나는 선분 4개 중에서 1개를 택하면 한 개의 삼각형을 만들 수 있으므로 구하는 삼각형의 개수는

${}_5C_2\times{}_4C_1=10\times4=40$ 답 ④

0945 가로 방향의 5개의 평행선 중에서 2개, 세로 방향의 5개의 평행선 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형을 만들 수 있으므로 모든 직사각형의 개수는

${}_5C_2\times{}_5C_2=10\times10=100$

이 중에서 넓이가 2인 직사각형의 개수는 $4\times4=16$

넓이가 4인 직사각형의 개수는 $3\times4+4\times3=24$

넓이가 6인 직사각형의 개수는 $2\times4+4\times2=16$

따라서 넓이가 8 미만인 직사각형의 개수는

$16+24+16=56$

이므로 넓이가 8 이상인 직사각형의 개수는

$100-56=44$ 답 44

유형 173 분할하는 경우의 수 → 본책 182쪽

서로 다른 n개의 물건을 p개, q개, r개 $(p+q+r=n)$의 세 묶음으로 나누는 경우의 수

(1) p, q, r가 모두 다른 수인 경우 ➜ ${}_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_rC_r$

(2) p, q, r 중 어느 두 수가 같은 경우 ➜ ${}_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_rC_r\times\frac{1}{2!}$

(3) p, q, r가 모두 같은 수인 경우 ➜ ${}_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_rC_r\times\frac{1}{3!}$

0946 5송이의 꽃을 세 묶음으로 나누는 경우는
(1송이, 1송이, 3송이) 또는 (1송이, 2송이, 2송이)
(i) 1송이, 1송이, 3송이로 나누는 경우의 수는
$${}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=5\times4\times1\times\frac{1}{2}=10$$
(ii) 1송이, 2송이, 2송이로 나누는 경우의 수는
$${}_5C_1\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=5\times6\times1\times\frac{1}{2}=15$$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$10+15=25$ 답 25

0947 6명의 학생을 2명, 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는
$${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}=15\times6\times1\times\frac{1}{6}=15$$
$\therefore a=15$
6명의 학생을 1명, 2명, 3명으로 나누는 경우의 수는
${}_6C_1\times{}_5C_2\times{}_3C_3=6\times10\times1=60$
$\therefore b=60$
$\therefore b-a=45$ 답 ⑤

0948 10명을 5명, 5명으로 나누는 경우의 수는
$${}_{10}C_5\times{}_5C_5\times\frac{1}{2!}=252\times1\times\frac{1}{2}=126$$ … ❶
이때 의사 4명이 모두 같은 팀이 되는 경우의 수는 간호사 6명을 1명, 5명으로 나누는 경우의 수와 같으므로
${}_6C_1\times{}_5C_5=6\times1=6$ … ❷
따라서 구하는 경우의 수는
$126-6=120$ … ❸
답 120

단계	채점 요소	비율
❶	5명, 5명으로 나누는 경우의 수 구하기	40 %
❷	의사 4명이 모두 같은 팀이 되는 경우의 수 구하기	40 %
❸	각 팀에 적어도 한 명의 의사가 포함되도록 나누는 경우의 수 구하기	20 %

유형 174 분배하는 경우의 수 본책 183쪽

n묶음으로 나누어 n명에게 나누어 주는 경우의 수
➜ (n묶음으로 나누는 경우의 수)$\times n!$

0949 8명의 자원봉사자를 2명, 2명, 4명으로 나누는 경우의 수는
$${}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}=28\times15\times1\times\frac{1}{2}=210$$
이 세 개의 조를 복지관, 도서관, 아동센터에 배정하는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$210\times6=1260$ 답 ③

0950 7개의 쿠키를 조건에 맞게 세 묶음으로 나누는 경우는
(1개, 1개, 5개) 또는 (1개, 2개, 4개)
또는 (1개, 3개, 3개) 또는 (2개, 2개, 3개)
(i) 1개, 1개, 5개로 나누는 경우의 수는
$${}_7C_1\times{}_6C_1\times{}_5C_5\times\frac{1}{2!}=7\times6\times1\times\frac{1}{2}=21$$
(ii) 1개, 2개, 4개로 나누는 경우의 수는
${}_7C_1\times{}_6C_2\times{}_4C_4=7\times15\times1=105$
(iii) 1개, 3개, 3개로 나누는 경우의 수는
$${}_7C_1\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=7\times20\times1\times\frac{1}{2}=70$$
(iv) 2개, 2개, 3개로 나누는 경우의 수는
$${}_7C_2\times{}_5C_2\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=21\times10\times1\times\frac{1}{2}=105$$
이상에서 세 묶음으로 나누는 경우의 수는
$21+105+70+105=301$
이 세 묶음을 3명의 어린이에게 나누어 주는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$301\times6=1806$ 답 1806

0951 2층부터 11층까지 10개의 층 중에서 사람들이 내리는 3개의 층을 택하는 경우의 수는
$${}_{10}C_3=120$$ … ❶
5명을 1명, 1명, 3명의 3개의 조로 나누는 경우의 수는
$${}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=5\times4\times1\times\frac{1}{2}=10$$ … ❷
3개의 조를 3개의 층에 분배하는 경우의 수는
$3!=6$ … ❸
따라서 구하는 경우의 수는
$120\times10\times6=7200$ … ❹
답 7200

단계	채점 요소	비율
❶	사람들이 내리는 3개의 층을 택하는 경우의 수 구하기	30 %
❷	5명을 1명, 1명, 3명의 3개의 조로 나누는 경우의 수 구하기	30 %
❸	3개의 조를 3개의 층에 분배하는 경우의 수 구하기	30 %
❹	3개의 층에서 각각 1명, 1명, 3명이 내리는 경우의 수 구하기	10 %

0952 6명의 학생을 2개의 조로 나누는 경우는
(1명, 5명) 또는 (2명, 4명) 또는 (3명, 3명)
(i) 1명, 5명으로 나누는 경우의 수는
${}_6C_1\times{}_5C_5=6\times1=6$
(ii) 2명, 4명으로 나누는 경우의 수는
${}_6C_2\times{}_4C_4=15\times1=15$
(iii) 3명, 3명으로 나누는 경우의 수는
$${}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=20\times1\times\frac{1}{2}=10$$
이상에서 2개의 조로 나누는 경우의 수는
$6+15+10=31$
이때 독서 동아리, 영화 동아리, 농구 동아리, 댄스 동아리 중 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

2개의 조를 택한 2개의 동아리에 배정하는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$31\times6\times2=372$ 답 372

유형 175 대진표 작성하기 본책 183쪽

주어진 그림을 보고 분할하는 경우의 수를 이용하여 대진표를 작성하는 경우의 수를 구한다.

0953 6명의 선수를 4명, 2명으로 나누는 경우의 수는

${}_6C_4\times{}_2C_2={}_6C_2\times{}_2C_2=15\times1=15$

나누어진 4명의 선수를 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=6\times1\times\frac{1}{2}=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times3=45$ 답 45

0954 7개의 팀을 4팀, 3팀으로 나누는 경우의 수는

${}_7C_4\times{}_3C_3={}_7C_3\times{}_3C_3=35\times1=35$

나누어진 4개의 팀을 2팀, 2팀으로 나누는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=6\times1\times\frac{1}{2}=3$

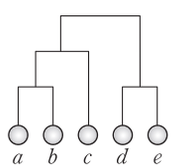
나누어진 3개의 팀 중에서 부전승으로 올라가는 한 팀을 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$35\times3\times3=315$ 답 ④

0955 오른쪽 그림과 같이 주어진 대진표에서 배정받을 수 있는 5개의 자리를 왼쪽에서부터 차례대로 a, b, c, d, e라 하자.



이때 A 선수가 한 번만 이기고 결승에 진출하려면 A 선수가 c 자리에 들어가거나 d 또는 e 자리에 들어가야 한다.

(i) A 선수가 c 자리에 들어가는 경우

나머지 4명의 선수를 2명, 2명의 2개의 조로 나눈 후 a, b와 d, e의 자리에 배정하면 되므로 이 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\times2!=6\times1\times\frac{1}{2}\times2=6$

(ii) A 선수가 d 또는 e 자리에 들어가는 경우

A 선수와 대결할 한 선수를 고르는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

나머지 3명의 선수 중에서 부전승으로 올라가는 1명을 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

따라서 이 경우의 수는 $4\times3=12$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$6+12=18$ 답 18

1등급 유형 도전하기 본책 184~185쪽

0956 Step 1 $a<b<c$인 경우와 $a=b<c$인 경우로 나누어 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 구한다.

(1)(i) $a<b<c$인 경우

1, 2, 3, …, 8의 8개의 자연수 중에서 서로 다른 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 a, b, c의 값으로 정하면 되므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

${}_8C_3=$ (가) 56

(ii) $a=b<c$인 경우

1, 2, 3, …, 8의 8개의 자연수 중에서 서로 다른 2개를 택하여 작은 수부터 차례대로 $a(=b)$, c의 값으로 정하면 되므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

${}_8C_2=$ (나) 28

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

(가) 56 + (나) 28 = (다) 84

Step 2 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$인 경우의 수를 구한다.

(2)(i) $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$인 경우

1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 5개를 택하여 작은 수부터 차례대로 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5의 값으로 정하면 되므로 이 경우의 수는

${}_6C_5={}_6C_1=6$

Step 3 $a_1=a_2<a_3<a_4<a_5$인 경우와 $a_1<a_2<a_3<a_4=a_5$인 경우의 수를 구한다.

(ii) $a_1=a_2<a_3<a_4<a_5$인 경우

1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 $a_1(=a_2)$, a_3, a_4, a_5의 값으로 정하면 되므로 이 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

(iii) $a_1<a_2<a_3<a_4=a_5$인 경우

(ii)와 같은 방법으로 하면 이 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

Step 4 $a_1=a_2<a_3<a_4=a_5$인 경우의 수를 구한다.

(iv) $a_1=a_2<a_3<a_4=a_5$인 경우

1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 $a_1(=a_2)$, a_3, $a_4(=a_5)$의 값으로 정하면 되므로 이 경우의 수는

${}_6C_3=20$

Step 5 $a_1\le a_2<a_3<a_4\le a_5$인 경우의 수를 구한다.

이상에서 구하는 경우의 수는

$6+15+15+20=56$

답 (1) (가) 56 (나) 28 (다) 84 (2) 56

0957 Step 1 $B(1, n)$, $B(2, n)$, $B(3, n)$, …, $B(k, n)$을 $(n+1)!$에 대한 식으로 나타낸다.

$B(1, n)=(1+2n+1)A(1, n)$

$=2(n+1)\times1\times2\times\cdots\times n$

$=2\times\{1\times2\times\cdots\times n\times(n+1)\}=2(n+1)!$

$B(2, n)=(2+2n+1)A(2, n)$
$=(2n+3)\times 2\times 3\times \cdots \times(n+1)$
$=(2n+3)\times\{1\times 2\times \cdots \times n\times(n+1)\}$
$=(2n+3)(n+1)!$
$B(3, n)=(3+2n+1)A(3, n)$
$=2(n+2)\times 3\times 4\times \cdots \times(n+2)$
$=(n+2)^2\times\{1\times 2\times \cdots \times n\times(n+1)\}$
$=(n+2)^2(n+1)!$
$\vdots$
$B(k, n)=(k+2n+1)A(k, n)$
$=(k+2n+1)\times k\times(k+1)\times \cdots \times(k+n-1)$
$=\{(k+n)+(n+1)\}\times k\times(k+1)\times \cdots \times(k+n-1)$
$=(k+n)\times k\times(k+1)\times \cdots \times(k+n-1)$
$+(n+1)\times k\times(k+1)\times \cdots \times(k+n-1)$
$\cdots\cdots$ ㉠

이때
$(k+n)\times k\times(k+1)\times \cdots \times(k+n-1)$
$=(k+n)\times(k+n-1)\times \cdots \times(k+1)\times k$
$={}_{k+n}\mathrm{P}_{n+1}$
$={}_{k+n}\mathrm{C}_{n+1}\times(n+1)!$

이고
$(n+1)\times k\times(k+1)\times \cdots \times(k+n-1)$
$=(n+1)\times(k+n-1)\times \cdots \times(k+1)\times k$
$=(n+1)\times {}_{k+n-1}\mathrm{P}_{n}$
$=(n+1)\times {}_{k+n-1}\mathrm{C}_{n}\times n!$
$={}_{k+n-1}\mathrm{C}_{n}\times(n+1)!$

이므로 ㉠에서
$B(k, n)={}_{k+n}\mathrm{C}_{n+1}\times(n+1)!+{}_{k+n-1}\mathrm{C}_{n}\times(n+1)!$
$=({}_{k+n}\mathrm{C}_{n+1}+{}_{k+n-1}\mathrm{C}_{n})\times(n+1)!$

Step 2 $f(5)$의 값을 구한다.

$B(1, n)$, $B(2, n)$, $B(3, n)$, …, $B(k, n)$은 모두 $(n+1)!$의 배수이고 $B(1, n)$과 $B(2, n)$에서 2와 $2n+3$은 서로소이므로

$f(n)=(n+1)!$
$\therefore f(5)=6!=720$ 답 720

0958 Step 1 더 이상 카드를 꺼내지 않을 때까지 뽑은 카드의 개수가 5인 경우의 수 $f(5)$의 값을 구한다.

1부터 9까지의 자연수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개이고, 짝수는 2, 4, 6, 8의 4개이다.

(i) $n=5$인 경우
5번째에 뽑은 카드가 홀수가 적힌 마지막 카드이어야 하므로 홀수가 적힌 카드 5장을 연달아 뽑아야 한다.
$\therefore f(5)=5!$

Step 2 더 이상 카드를 꺼내지 않을 때까지 뽑은 카드의 개수가 6인 경우의 수 $f(6)$의 값을 구한다.

(ii) $n=6$인 경우
6번째에 뽑은 카드가 홀수가 적힌 마지막 카드이어야 하므로 5번째까지 홀수가 적힌 카드 4장과 짝수가 적힌 카드 1장을 뽑아야 한다.
홀수 5개 중에서 4개를 택하는 경우의 수는
${}_5\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_1=5$
짝수 4개 중에서 1개를 택하는 경우의 수는
${}_4\mathrm{C}_1=4$
이때 남은 홀수가 적힌 카드를 마지막에 뽑으면 되므로
$f(6)=5\times 4\times 5!=20\times 5!$

Step 3 더 이상 카드를 꺼내지 않을 때까지 뽑은 카드의 개수가 7인 경우의 수 $f(7)$의 값을 구한다.

(iii) $n=7$인 경우
7번째에 뽑은 카드가 홀수가 적힌 마지막 카드이어야 하므로 6번째까지 홀수가 적힌 카드 4장과 짝수가 적힌 카드 2장을 뽑아야 한다.
홀수 5개 중에서 4개를 택하는 경우의 수는
${}_5\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_1=5$
짝수 4개 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
${}_4\mathrm{C}_2=6$
이때 남은 홀수가 적힌 카드를 마지막에 뽑으면 되므로
$f(7)=5\times 6\times 6!=180\times 5!$

Step 4 N의 값을 구한다.

이상에서
$f(5)+f(6)+f(7)=5!+20\times 5!+180\times 5!$
$=(1+20+180)\times 5!$
$=201\times 5!$

이므로 $N=201$ 답 201

0959 Step 1 4가지 색을 사용하여 칠하는 방법의 수를 구한다.

4가지 색을 사용하여 칠하는 방법의 수를 구해 보자.

(i) C와 E를 같은 색으로 칠하는 경우
C, E에 칠할 수 있는 색은 4가지
A에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 3가지
B에 칠할 수 있는 색은 $C(E)$에 칠한 색을 제외한 3가지
D에 칠할 수 있는 색은 E에 칠한 색을 제외한 3가지
F에 칠할 수 있는 색은 $C(E)$에 칠한 색을 제외한 3가지
따라서 C와 E에 같은 색을 칠하는 방법의 수는
$4\times 3\times 3\times 3\times 3=324$

(ii) C와 E를 서로 다른 색으로 칠하는 경우
C에 칠할 수 있는 색은 4가지
E에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 3가지
A에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 3가지
B에 칠할 수 있는 색은 C, E에 칠한 색을 제외한 2가지
D에 칠할 수 있는 색은 E에 칠한 색을 제외한 3가지
F에 칠할 수 있는 색은 C, E에 칠한 색을 제외한 2가지
따라서 C와 E에 서로 다른 색을 칠하는 방법의 수는
$4\times 3\times 3\times 2\times 3\times 2=432$

(i), (ii)에서 4가지 색을 사용하여 칠하는 방법의 수는
$324+432=756$

Step 2 3가지 이하의 색을 사용하여 칠하는 방법의 수를 구한다.

3가지 색을 사용하여 칠하는 방법의 수를 구해 보자.

(iii) C와 E를 같은 색으로 칠하는 경우

C, E에 칠할 수 있는 색은 3가지

A에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 2가지

B에 칠할 수 있는 색은 $C(E)$에 칠한 색을 제외한 2가지

D에 칠할 수 있는 색은 E에 칠한 색을 제외한 2가지

F에 칠할 수 있는 색은 $C(E)$에 칠한 색을 제외한 2가지

따라서 C와 E에 같은 색을 칠하는 방법의 수는

$3\times2\times2\times2\times2=48$

(iv) C와 E를 서로 다른 색으로 칠하는 경우

C에 칠할 수 있는 색은 3가지

E에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 2가지

A에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 2가지

B에 칠할 수 있는 색은 C, E에 칠한 색을 제외한 1가지

D에 칠할 수 있는 색은 E에 칠한 색을 제외한 2가지

F에 칠할 수 있는 색은 C, E에 칠한 색을 제외한 1가지

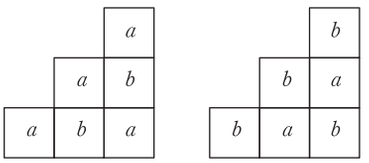
따라서 C와 E에 서로 다른 색을 칠하는 방법의 수는

$3\times2\times2\times1\times2\times1=24$

(iii), (iv)에서 3가지 색을 사용하여 칠하는 방법의 수는

$48+24=72$

한편 서로 다른 2가지 색 a, b를 사용하여 칠하는 방법은 다음과 같이 두 가지뿐이다.



이때 3가지 색을 고르는 방법의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

이고, 2가지 색을 고르는 방법의 수는

${}_4C_2=6$

이므로 3가지 이하의 색을 사용하여 칠하는 방법의 수는

$4\times72-6\times2=276$

Step 3 4가지 색을 모두 사용하여 칠하는 방법의 수를 구한다.

구하는 방법의 수는

$756-276=480$ 답 480

만점 공략 노트

빨강, 파랑, 노랑, 보라의 4가지 색 중에서 3가지 색을 고르는 경우는
(빨강, 파랑, 노랑), (빨강, 파랑, 보라),
(빨강, 노랑, 보라), (파랑, 노랑, 보라)
의 4가지이다.
이때 (빨강, 파랑, 노랑)을 사용하여 칠하는 경우와
(빨강, 파랑, 보라)를 사용하여 칠하는 경우에 모두 빨강, 파랑만을 사용하여 칠하는 경우가 속해 있다.
따라서 3가지 이하의 색을 사용하여 칠하는 방법의 수는 4가지 색 중에서 3가지 색을 골라 칠하는 방법의 수에서 2가지 색을 골라 칠하는 방법의 수를 뺀 것과 같다.

0960 Step 1 12개의 구슬을 넣는 경우의 수를 구한다.

12개의 칸에 흰 구슬 6개, 검은 구슬 6개를 넣는 경우의 수는

${}_{12}C_6\times{}_6C_6=924\times1=924$

Step 2 어떤 가로줄이나 세로줄도 같은 색의 구슬로 채워지지 않는 경우의 수를 구한다.

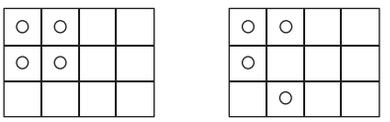
어떤 가로줄이나 세로줄도 같은 색의 구슬로 채워지지 않으려면 4개의 세로줄에는 각각 흰 구슬을 2개 또는 1개만 넣을 수 있다.

이때 $6=2+2+1+1$이므로 2개의 세로줄에는 흰 구슬을 2개씩, 나머지 2개의 세로줄에는 흰 구슬을 1개씩 넣어야 한다.

세로줄 2개를 고르는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

이고, 택한 2개의 세로줄에 흰 구슬을 2개씩 넣는 경우는 아래 그림과 같이 빈 가로줄이 있는 경우와 빈 가로줄이 없는 경우로 나눌 수 있다.



(i) 빈 가로줄이 있음 (ii) 빈 가로줄이 없음

각각의 경우에 흰 구슬을 넣는 경우의 수를 구해 보자.

(i) 빈 가로줄이 있는 경우

2개의 세로줄에 흰 구슬을 2개씩 넣었을 때 생기는 빈 가로줄을 고르는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

나머지 2개의 세로줄에 흰 구슬을 1개씩 넣는 모든 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_3C_1=3\times3=9$

이고 흰 구슬을 모두 넣었을 때 빈 가로줄이 생기도록 나머지 2개의 세로줄에 흰 구슬을 1개씩 넣는 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_2C_1=2\times2=4$

따라서 어떤 가로줄도 같은 색의 구슬로 채워지지 않도록 흰 구슬을 넣는 경우의 수는

$3\times(9-4)=15$

(ii) 빈 가로줄이 없는 경우

빈 가로줄이 생기지 않도록 2개의 세로줄에 흰 구슬을 2개씩 넣는 경우의 수는

${}_3C_2\times{}_3C_2-3=3\times3-3=6$

나머지 2개의 세로줄에 흰 구슬을 1개씩 넣는 모든 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_3C_1=3\times3=9$

이고 흰 구슬로 모두 채워진 가로줄이 생기도록 나머지 2개의 세로줄에 흰 구슬을 1개씩 넣는 경우의 수는 1이다.

따라서 어떤 가로줄도 같은 색의 구슬로 채워지지 않도록 흰 구슬을 넣는 경우의 수는

$6\times(9-1)=48$

(i), (ii)에서 어떤 가로줄이나 세로줄도 같은 색의 구슬로 채워지지 않도록 12개의 구슬을 넣는 경우의 수는

$6\times(15+48)=378$

Step 3 적어도 한 개의 가로줄 또는 세로줄이 모두 같은 색의 구슬로만 채워지도록 12개의 구슬을 넣는 경우의 수를 구한다.

구하는 경우의 수는

$924-378=546$ 답 546

0961 Step 1 한 번에 공을 모두 꺼내는 경우의 수를 구한다.

(i) 한 번에 공을 모두 꺼내는 경우

12개의 공을 한 번에 모두 꺼내는 경우의 수는

${}_{12}C_{12}=1$

Step 2 두 번에 나누어 공을 모두 꺼내는 경우의 수를 구한다.

(ii) 두 번에 나누어 공을 모두 꺼내는 경우

주어진 조건을 만족시키면서 12개의 공을 두 번에 나누어 모두 꺼내는 경우는

(11개, 1개) 또는 (10개, 2개) 또는 (9개, 3개) 또는 (8개, 4개)

따라서 이 경우의 수는

$${}_{12}C_{11}\times{}_1C_1+{}_{12}C_{10}\times{}_2C_2+{}_{12}C_9\times{}_3C_3+{}_{12}C_8\times{}_4C_4$$
$$={}_{12}C_1\times{}_1C_1+{}_{12}C_2\times{}_2C_2+{}_{12}C_3\times{}_3C_3+{}_{12}C_4\times{}_4C_4$$
$$=12\times1+66\times1+220\times1+495\times1$$
$$=793$$

Step 3 세 번에 나누어 공을 모두 꺼내는 경우의 수를 구한다.

(iii) 세 번에 나누어 공을 모두 꺼내는 경우

주어진 조건을 만족시키면서 12개의 공을 세 번에 나누어 모두 꺼내는 경우는

(9개, 2개, 1개) 또는 (8개, 3개, 1개)

따라서 이 경우의 수는

$${}_{12}C_9\times{}_3C_2\times{}_1C_1+{}_{12}C_8\times{}_4C_3\times{}_1C_1$$
$$={}_{12}C_3\times{}_3C_1\times{}_1C_1+{}_{12}C_4\times{}_4C_1\times{}_1C_1$$
$$=220\times3\times1+495\times4\times1$$
$$=660+1980=2640$$

Step 4 주머니의 공을 남김없이 꺼내는 경우의 수를 구한다.

이상에서 구하는 경우의 수는

$1+793+2640=3434$ 답 3434

참고 네 번 이상의 횟수로 공을 꺼내는 경우는 불가능하다.

0962 Step 1 어른 3명과 어린이 6명을 두 개의 조로 나누는 경우의 수를 구한다.

어른 3명과 어린이 6명을 각 조에 반드시 어른이 한 명 이상 들어가도록 두 개의 조로 나누는 경우의 수를 구해 보자.

(i) (어른 1명, 어린이 2명), (어른 2명, 어린이 4명)인 경우

어른 3명 중 1명, 어린이 6명 중 2명을 택하여 한 조로 정하고 나머지 어른 2명과 어린이 4명을 다른 한 조로 정하면 되므로 이 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_6C_2=3\times15=45$

(ii) (어른 1명, 어린이 3명), (어른 2명, 어린이 3명)인 경우

어른 3명 중 1명, 어린이 6명 중 3명을 택하여 한 조로 정하고 나머지 어른 2명과 어린이 3명을 다른 한 조로 정하면 되므로 이 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_6C_3=3\times20=60$

(iii) (어른 1명, 어린이 4명), (어른 2명, 어린이 2명)인 경우

어른 3명 중 1명, 어린이 6명 중 4명을 택하여 한 조로 정하고 나머지 어른 2명과 어린이 2명을 다른 한 조로 정하면 되므로 이 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_6C_4={}_3C_1\times{}_6C_2=3\times15=45$

(iv) (어른 1명, 어린이 5명), (어른 2명, 어린이 1명)인 경우

어른 3명 중 1명, 어린이 6명 중 5명을 택하여 한 조로 정하고 나머지 어른 2명과 어린이 1명을 다른 한 조로 정하면 되므로 이 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_6C_5={}_3C_1\times{}_6C_1=3\times6=18$

이상에서 어른 3명과 어린이 6명을 두 개의 조로 나누는 경우의 수는

$45+60+45+18=168$

Step 2 2대의 차량을 택하여 탑승하는 경우의 수를 구한다.

5대의 차량 중에서 2대를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

이 2대의 차량에 두 개의 조가 탑승하는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$168\times10\times2=3360$ 답 3360

시험 만점 완성하기

→ 본책 186~189쪽

0963 전략 ${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}\ (0\le r\le n)$임을 이용한다.

${}_{n+2}P_4=8k\times{}_{n+2}C_4$에서

${}_{n+2}P_4=8k\times\frac{{}_{n+2}P_4}{4!}$, $8k=4!=24$

$\therefore k=3$ 답 ②

0964 전략 n명이 서로 한 번씩 악수한 총횟수는 n명 중에서 2명을 택하는 조합의 수와 같다.

회의의 참석자 수를 n이라 하면 n명이 서로 한 번씩 악수한 총횟수가 36이므로

${}_nC_2=36$, $\frac{n(n-1)}{2}=36$

$n(n-1)=9\times8$ $\therefore n=9$

따라서 구하는 참석자 수는 9이다. 답 ③

0965 전략 6개의 운동 종목 중 3개를 택하고, 택한 3개의 운동 종목에서 각각 1명씩 뽑는 경우의 수를 구한다.

6개의 운동 종목 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

택한 3개의 운동 종목에서 각각 1명씩 뽑는 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_3C_1\times{}_3C_1=3\times3\times3=27$

따라서 구하는 경우의 수는

$20\times27=540$ 답 ④

0966 전략 꺼내는 초콜릿의 개수에 따라 경우를 나누어 생각한다.

초콜릿은 최대 2개까지만 꺼낼 수 있으므로 초콜릿은 0개 또는 1개 또는 2개 꺼낼 수 있다.

(i) 초콜릿 0개, 젤리 4개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}C_0 \times {}_6C_4 = {}_{10}C_0 \times {}_6C_2 = 1 \times 15 = 15$$

(ii) 초콜릿 1개, 젤리 3개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}C_1 \times {}_6C_3 = 10 \times 20 = 200$$

(iii) 초콜릿 2개, 젤리 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}C_2 \times {}_6C_2 = 45 \times 15 = 675$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$15 + 200 + 675 = 890$$

답 ⑤

0967 전략 모든 경우의 수에서 홀수만 3개를 택하거나 짝수만 3개를 택하는 경우의 수를 뺀다.

1부터 9까지의 자연수 중에서 서로 다른 3개의 자연수를 택하는 경우의 수는

$${}_9C_3 = 84$$

1부터 9까지의 자연수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개, 짝수는 2, 4, 6, 8의 4개이다.

5개의 홀수 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

4개의 짝수 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$84 - (10 + 4) = 70$$

답 ①

0968 전략 특정한 3개의 과일은 이미 뽑았다고 생각하고 나머지 $(n-3)$개의 과일 중에서 3개를 뽑는 경우의 수를 생각한다.

특정한 3개의 과일을 제외한 $(n-3)$개의 과일 중에서 3개를 택하는 경우의 수가 120이므로

$${}_{n-3}C_3 = 120, \quad \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

$$(n-3)(n-4)(n-5) = 10 \times 9 \times 8$$

$$\therefore n = 13$$

답 ④

0969 전략 연속하는 자연수에 따라 경우를 나누어 생각한다.

(i) 연속하는 자연수가 1, 2, 3 또는 8, 9, 10인 경우

연속하는 자연수가 1, 2, 3이면 나머지 한 장의 카드에는 4를 제외한 6개의 자연수 중에서 하나가 적혀 있어야 한다.

따라서 연속하는 자연수가 1, 2, 3인 경우의 수는

$${}_6C_1 = 6$$

같은 방법으로 하면 연속하는 자연수가 8, 9, 10인 경우의 수도 6이므로 이 경우의 수는

$$6 \times 2 = 12$$

(ii) 연속하는 자연수가 2, 3, 4 또는 3, 4, 5 또는 4, 5, 6 또는 5, 6, 7 또는 6, 7, 8 또는 7, 8, 9인 경우

연속하는 자연수가 2, 3, 4이면 나머지 한 장의 카드에는 1과 5를 제외한 5개의 자연수 중에서 하나가 적혀 있어야 한다.

따라서 연속하는 자연수가 2, 3, 4인 경우의 수는

$${}_5C_1 = 5$$

같은 방법으로 하면 연속하는 자연수가 3, 4, 5 또는 4, 5, 6 또는 5, 6, 7 또는 6, 7, 8 또는 7, 8, 9인 경우의 수도 5이므로 이 경우의 수는

$$5 \times 6 = 30$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$12 + 30 = 42$$

답 ③

0970 전략 뽑은 여학생 수에 따라 경우를 나누어 생각한다.

(i) 여학생을 2명 뽑는 경우

남학생 6명 중에서 2명, 여학생 3명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_2 \times {}_3C_2 = 15 \times 3 = 45$$

뽑은 4명을 여학생 2명이 이웃하도록 앉히는 경우의 수는

$$3! \times 2! = 12$$

따라서 이 경우의 수는 $45 \times 12 = 540$

(ii) 여학생을 3명 뽑는 경우

남학생 6명 중에서 1명, 여학생 3명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_1 \times {}_3C_3 = 6 \times 1 = 6$$

뽑은 4명을 여학생 3명이 모두 이웃하도록 앉히는 경우의 수는

$$2! \times 3! = 12$$

따라서 이 경우의 수는 $6 \times 12 = 72$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$540 + 72 = 612$$

답 ④

0971 전략 일직선 위에 있는 서로 다른 4개의 점으로 만들 수 있는 직선의 개수는 1임을 이용한다.

12개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_{12}C_2 = 66$$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

이때 4개의 점을 지나는 직선은 6개이므로 구하는 직선의 개수는

$$66 - 6 \times 6 + 6 = 36$$

답 ③

0972 전략 일직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없다.

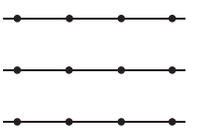
12개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_{12}C_3 = 220$$

(i) 일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

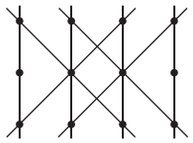
이고, 4개의 점을 지나는 직선은 오른쪽 그림과 같이 3개이다.



(ii) 일직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_3=1$$

이고, 3개의 점을 지나는 직선은 오른쪽 그림과 같이 8개이다.



(i), (ii)에서 구하는 삼각형의 개수는

$$220-4\times3-1\times8=200$$

답 ②

0973 전략 9명을 3명, 3명, 3명으로 나누는 경우의 수에서 지효와 시훈이가 같은 조가 되는 경우의 수를 뺀다.

9명을 3명, 3명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$${}_9C_3\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{3!}=84\times20\times1\times\frac{1}{6}=280$$

지효와 시훈이가 같은 조가 되는 경우의 수는 지효와 시훈이를 제외한 7명을 1명, 3명, 3명으로 나누는 경우의 수와 같으므로

$${}_7C_1\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=7\times20\times1\times\frac{1}{2}=70$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$280-70=210$$

답 ①

다른 풀이 지효와 시훈이를 제외한 7명을 2명, 2명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$${}_7C_2\times{}_5C_2\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=21\times10\times1\times\frac{1}{2}=105$$

2명씩인 조에 지효와 시훈이를 넣는 경우의 수는

$$2!=2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$105\times2=210$$

0974 전략 A 국가와 B 국가가 결승전 이전에 서로 대결하는 일이 없으려면 8개의 국가를 2개의 조로 나눌 때 A 국가와 B 국가가 서로 다른 조에 배정되어야 한다.

A 국가와 B 국가가 결승전 이전에 서로 대결하는 일이 없도록 하려면 8개의 국가를 4개, 4개의 2개의 조로 나눌 때, A 국가와 B 국가가 서로 다른 조에 배정되어야 한다.

A 국가와 B 국가를 제외한 6개의 국가를 3개, 3개의 2개의 조로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=20\times1\times\frac{1}{2}=10$$

2개의 조에 A 국가와 B 국가를 각각 배정하는 경우의 수는

$$2!=2$$

한 조에 포함된 4개의 국가를 2개, 2개로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=6\times1\times\frac{1}{2}=3$$

같은 방법으로 하면 다른 한 조에 포함된 4개의 국가를 2개, 2개로 나누는 경우의 수는 3

따라서 구하는 경우의 수는

$$10\times2\times3\times3=180$$

답 ⑤

0975 전략 ${}_nC_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ $(0\le r\le n)$임을 이용하여 빈칸에 알맞은 식을 구한다.

$${}_{n+3}C_n+{}_{n+3}C_{n-1}=\boxed{(가)\ (n+3)!}\times\left\{\frac{1}{n!3!}+\frac{1}{(n-1)!4!}\right\}$$

$$=\boxed{(가)\ (n+3)!}\times\frac{\boxed{(나)\ n+4}}{n!4!}$$

$$=\frac{n+4}{n}\times\frac{(n+3)!}{4!(n-1)!}$$

$$=\boxed{(다)\ \frac{n+4}{n}}\times{}_{n+3}C_4$$

따라서 $f(n)=(n+3)!$, $g(n)=n+4$, $h(n)=\dfrac{n+4}{n}$이므로

$$f(1)+\frac{g(2)}{h(2)}=4!+\frac{6}{3}=26$$

답 26

0976 전략 두 홀수의 합이 4의 배수가 되려면 두 홀수를 4로 나누었을 때의 나머지가 각각 1과 3이어야 한다.

1부터 30까지의 홀수 중에서 4로 나누었을 때의 나머지가 1인 수는

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29의 8개

4로 나누었을 때의 나머지가 3인 수는

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27의 7개

이때 택한 두 수의 합이 4의 배수가 되려면 4로 나누었을 때의 나머지가 1인 수와 3인 수를 각각 1개씩 택하면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_8C_1\times{}_7C_1=8\times7=56$$

답 56

0977 전략 삼각김밥, 컵라면, 샌드위치를 각각 적어도 하나씩 포함하여 모두 4개의 음식을 구매하려면 각각 몇 개씩 사야 하는지 생각한다.

(i) 삼각김밥 2개, 컵라면 1개, 샌드위치 1개를 구매하는 경우의 수는

$${}_3C_2\times{}_4C_1\times{}_5C_1=3\times4\times5=60$$

(ii) 삼각김밥 1개, 컵라면 2개, 샌드위치 1개를 구매하는 경우의 수는

$${}_3C_1\times{}_4C_2\times{}_5C_1=3\times6\times5=90$$

(iii) 삼각김밥 1개, 컵라면 1개, 샌드위치 2개를 구매하는 경우의 수는

$${}_3C_1\times{}_4C_1\times{}_5C_2=3\times4\times10=120$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$60+90+120=270$$

답 270

0978 전략 먼저 조건 (가)를 이용하여 f의 값을 구한 후 조건 (나)를 이용하여 c의 값을 구한다.

조건 (가)에서 여섯 자리 자연수 N이 5의 배수이므로

$$f=5$$

이때 조건 (나)에서 $c>d>e>5$이므로

$c=8$ 또는 $c=9$

(i) $c=8$일 때

d의 값이 될 수 있는 것은 7, e의 값이 될 수 있는 것은 6이다.

또 $a<b<8$에서 a, b의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4 중에서 2개이다.

이때 $a<b$에서 a, b의 값은 작은 수부터 차례대로 정하면 되므로

$${}_4C_2=6$$

따라서 이 경우의 N의 개수는

$$1\times1\times6=6$$

(ii) $c=9$일 때

d, e의 값이 될 수 있는 것은 6, 7, 8 중에서 2개이고, $d>e$에서 d, e의 값은 큰 수부터 차례대로 정하면 되므로

$${}_3C_2=3$$

또 $a<b<9$에서 a, b의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 중에서 d, e의 값을 제외한 5개의 수 중 2개이다.

이때 $a<b$에서 a, b의 값은 작은 수부터 차례대로 정하면 되므로

$${}_5C_2=10$$

따라서 이 경우의 N의 개수는

$$3\times10=30$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수 N의 개수는

$$6+30=36$$

답 36

0979 전략 십각형의 내부에서 만나는 두 대각선을 택하는 경우의 수를 구한다.

십각형의 10개의 꼭짓점 중에서 4개를 택하여 이 4개의 점을 꼭짓점으로 하는 사각형을 만들면 사각형의 두 대각선의 교점은 십각형의 내부에 있다.

따라서 십각형의 대각선 중에서 십각형의 내부에서 만나는 두 대각선을 택하는 경우의 수는 십각형의 10개의 꼭짓점 중에서 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로

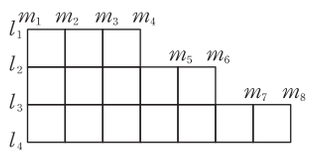
$${}_{10}C_4=210$$

이때 십각형의 대각선 중에서 어느 세 개도 한 점에서 만나지 않아야 교점의 개수가 최대가 되므로 구하는 교점의 최대 개수는 210이다.

답 210

0980 전략 직사각형을 만들려면 가로 방향의 평행선 중에서 2개, 세로 방향의 평행선 중에서 2개를 택해야 한다.

다음 그림과 같이 가로 방향의 평행선과 세로 방향의 평행선을 각각 l_i, m_j $(i=1, 2, 3, 4, j=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$라 하자.



직사각형을 만들기 위하여 가로 방향의 평행선 l_1, l_2 또는 l_1, l_3 또는 l_1, l_4를 택하면 세로 방향의 평행선 m_1, m_2, m_3, m_4 중에서 2개를 택해야 하므로 직사각형의 개수는

$${}_4C_2\times3=6\times3=18$$

가로 방향의 평행선 l_2, l_3 또는 l_2, l_4를 택하면 세로 방향의 평행선 m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 중에서 2개를 택해야 하므로 직사각형의 개수는

$${}_6C_2\times2=15\times2=30$$

가로 방향의 평행선 l_3, l_4를 택하면 세로 방향의 평행선 m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8 중에서 2개를 택해야 하므로 직사각형의 개수는

$${}_8C_2=28$$

따라서 구하는 직사각형의 개수는

$$18+30+28=76$$

답 76

0981 전략 a의 값에 따라 경우를 나누어 생각한다.

백의 자리의 숫자, 십의 자리의 숫자, 일의 자리의 숫자가 각각 a, b, c인 자연수가 600보다 크고 900보다 작으려면 $a=6$ 또는 $a=7$ 또는 $a=8$이어야 한다.

(i) $a=6$인 경우

$c<b<6$이므로 1부터 5까지의 5개의 자연수 중에서 2개를 뽑아 큰 수를 b, 작은 수를 c라 하면 된다.

따라서 이 경우의 자연수의 개수는 ${}_5C_2=10$ … ❶

(ii) $a=7$인 경우

$c<b<7$이므로 1부터 6까지의 6개의 자연수 중에서 2개를 뽑아 큰 수를 b, 작은 수를 c라 하면 된다.

따라서 이 경우의 자연수의 개수는 ${}_6C_2=15$ … ❷

(iii) $a=8$인 경우

$c<b<8$이므로 1부터 7까지의 7개의 자연수 중에서 2개를 뽑아 큰 수를 b, 작은 수를 c라 하면 된다.

따라서 이 경우의 자연수의 개수는 ${}_7C_2=21$ … ❸

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$$10+15+21=46$$ … ❹

답 46

단계	채점 요소	배점
❶	$a=6$일 때 자연수의 개수 구하기	1점
❷	$a=7$일 때 자연수의 개수 구하기	1점
❸	$a=8$일 때 자연수의 개수 구하기	1점
❹	600보다 크고 900보다 작은 자연수의 개수 구하기	2점

0982 전략 각 경우별로 A, B를 제외한 8명이 한식과 양식을 각각 몇 명씩 골라야 하는지 생각한다.

(i) A, B가 모두 한식을 고르는 경우

A, B를 제외한 8명 중에서 4명이 한식을 고르고 나머지 4명이 양식을 고르면 되므로 이 경우의 수는

$${}_8C_4\times{}_4C_4=70\times1=70$$

$\therefore x=70$ … ❶

(ii) A, B가 모두 양식을 고르는 경우

A, B를 제외한 8명 중에서 6명이 한식을 고르고 나머지 2명이 양식을 고르면 되므로 이 경우의 수는

$${}_8C_6\times{}_2C_2={}_8C_2\times{}_2C_2=28\times1=28$$

$\therefore y=28$ … ❷

(iii) A, B 중 한 사람만 한식을 고르는 경우

A, B 중 한식을 고를 한 사람을 정하는 경우의 수는

$${}_2C_1=2$$

이때 A, B를 제외한 8명 중에서 5명이 한식을 고르고 나머지 3명이 양식을 고르는 경우의 수는

$${}_8C_5\times{}_3C_3={}_8C_3\times{}_3C_3=56\times1=56$$

따라서 이 경우의 수는

$$2\times56=112$$

$$\therefore\ z=112$$ … ❸

이상에서

$$x-y+z=154$$ … ❹

답 154

단계	채점 요소	배점
❶	x의 값 구하기	1점
❷	y의 값 구하기	1점
❸	z의 값 구하기	1점
❹	$x-y+z$의 값 구하기	2점

0983 전략 구하는 경우의 수는

(4곳을 고르는 경우의 수)×(방문 순서를 정하는 경우의 수)이다.

자연 명소 4곳과 역사 유적지 5곳 중에서 4곳을 고르는 경우의 수는

$${}_9C_4=126$$

자연 명소 4곳 중에서 4곳을 고르는 경우의 수는

$${}_4C_4=1$$

역사 유적지 5곳 중에서 4곳을 고르는 경우의 수는

$${}_5C_4={}_5C_1=5$$

따라서 자연 명소와 역사 유적지를 적어도 한 곳씩 포함하여 총 4곳을 고르는 경우의 수는

$$126-(1+5)=120$$ … ❶

고른 4곳의 방문 순서를 정하는 경우의 수는

$$4!=24$$ … ❷

즉 구하는 경우의 수는

$$120\times24=2880$$ … ❸

답 2880

단계	채점 요소	배점
❶	4곳을 고르는 경우의 수 구하기	2점
❷	방문 순서를 정하는 경우의 수 구하기	1점
❸	4곳을 골라 1일차부터 4일차까지 하루에 한 곳씩 방문하는 경우의 수 구하기	1점

0984 전략 먼저 운전자를 정하는 경우의 수와 채호와 소민이가 서로 다른 차에 타도록 정하는 경우의 수를 구한다.

운전면허를 가지고 있는 사람이 3명이므로 2대의 차의 운전자를 정하는 경우의 수는

$${}_3P_2=6$$ … ❶

채호와 소민이가 서로 다른 차에 타도록 정하는 경우의 수는

$$2!=2$$ … ❷

2명의 운전자와 채호, 소민이를 제외한 나머지 6명이 2대의 차에 나누어 타는 경우의 수를 구하면 다음과 같다.

(i) 5인승, 8인승 차에 각각 3명, 3명이 타는 경우의 수는 6명 중에서 5인승 차에 탈 3명을 정하는 경우의 수와 같으므로

$${}_6C_3=20$$

(ii) 5인승, 8인승 차에 각각 2명, 4명이 타는 경우의 수는 6명 중에서 5인승 차에 탈 2명을 정하는 경우의 수와 같으므로

$${}_6C_2=15$$

(iii) 5인승, 8인승 차에 각각 1명, 5명이 타는 경우의 수는 6명 중에서 5인승 차에 탈 1명을 정하는 경우의 수와 같으므로

$${}_6C_1=6$$

(iv) 8인승 차에 6명이 모두 타는 경우의 수는 1

이상에서 나머지 6명이 2대의 차에 나누어 타는 경우의 수는

$$20+15+6+1=42$$ … ❸

따라서 구하는 경우의 수는

$$6\times2\times42=504$$ … ❹

답 504

단계	채점 요소	배점
❶	운전자를 정하는 경우의 수 구하기	1점
❷	채호와 소민이가 서로 다른 차에 타도록 정하는 경우의 수 구하기	1점
❸	나머지 6명이 2대의 차에 나누어 타는 경우의 수 구하기	3점
❹	10명이 2대의 차에 나누어 타는 경우의 수 구하기	1점

12 행렬

셀프 CHECK → 본책 192쪽

A 답 $a=1,\ b=3,\ c=-2$

B 답 (1) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -5 & 13 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$

C 답 (1) $\begin{pmatrix} 9 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$

D 답 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -15 & 1 \end{pmatrix}$

E 답 (1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

내신유형 다지기 → 본책 193~201쪽

유형 176 행렬 구하기 → 본책 193쪽

행렬 A의 $(i,\ j)$ 성분 a_{ij}가 식이나 설명으로 주어진 경우에는 뜻에 따라 a_{ij}의 i, j에 각각 1, 2, 3, …을 대입하여 행렬의 성분을 구한다.

0985 $a_{11}=1\times1+1^2+1=3$, $a_{12}=1\times2+2^2+1=7$,
$a_{21}=2\times1+1^2+1=4$, $a_{22}=2\times2+2^2+1=9$,
$a_{31}=3\times1+1^2+1=5$, $a_{32}=3\times2+2^2+1=11$이므로

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 9 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$3+7+4+9+5+11=39$ 답 ④

0986 지점 1에서 지점 2로 가는 일방통행로의 개수는 1이므로 $a_{12}=1$

지점 1에서 지점 3으로 가는 일방통행로의 개수는 1이므로

$a_{13}=1$

지점 2에서 지점 1로 가는 일방통행로의 개수는 1이므로

$a_{21}=1$

지점 2에서 지점 2로 가는 일방통행로의 개수는 1이므로

$a_{22}=1$

지점 2에서 지점 3으로 가는 일방통행로의 개수는 1이므로

$a_{23}=1$

지점 3에서 지점 1로 가는 일방통행로의 개수는 2이므로

$a_{31}=2$

지점 3에서 지점 3으로 가는 일방통행로의 개수는 1이므로

$a_{33}=1$

그 외의 다른 일방통행로는 없으므로 나머지 성분은 모두 0이다.

$$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 답 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

0987 $i>j$일 때, $a_{ij}=3i-j$이므로

$a_{21}=3\times2-1=5$

$i=j$일 때, $a_{ij}=i+j$이므로

$a_{22}=2+2=4$

$i<j$일 때, $a_{ij}=a_{ji}$이므로

$a_{23}=a_{32}=3\times3-2=7$, $a_{24}=a_{42}=3\times4-2=10$

따라서 행렬 A의 제2행의 모든 성분의 합은

$5+4+7+10=26$ 답 ⑤

0988 $b_{11}=a_{11}=1^2+(-1)^1=0$, $b_{12}=a_{21}=2^2+(-1)^1=3$,
$b_{21}=a_{12}=1^2+(-1)^2=2$, $b_{22}=a_{22}=2^2+(-1)^2=5$이므로

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$ 답 $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

0989 $a_{12}=m\times1+n\times2-1=m+2n-1$이므로

$m+2n-1=4$ $\therefore m+2n=5$ …… ㉠

$a_{21}=m\times2+n\times1-1=2m+n-1$이므로

$2m+n-1=0$ $\therefore 2m+n=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=-1,\ n=3$

따라서 $a_{ij}=\begin{cases} 2 & (i=j) \\ -i+3j-1 & (i\neq j) \end{cases}$이므로 … ❶

$x=a_{13}=-1+3\times3-1=7$

$y=a_{32}=-3+3\times2-1=2$

$\therefore xy=14$ … ❷

답 14

단계	채점 요소	비율
❶	a_{ij}를 나타내는 식 구하기	50 %
❷	xy의 값 구하기	50 %

0990 이차함수 $y=x^2-2(i+j)x+9$의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수는 이차방정식

$x^2-2(i+j)x+9=0$

의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(i+j)\}^2-9=(i+j)^2-9$ …… ㉠

(i) $i=1,\ j=1$일 때

㉠에서 $\frac{D}{4}=(1+1)^2-9=-5<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수는 0이므로 $a_{11}=0$

(ii) $i=1$, $j=2$일 때

㉠에서 $\frac{D}{4}=(1+2)^2-9=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수는 1이므로 $a_{12}=1$

(iii) $i=2$, $j=1$일 때

㉠에서 $\frac{D}{4}=(2+1)^2-9=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수는 1이므로 $a_{21}=1$

(iv) $i=2$, $j=2$일 때

㉠에서 $\frac{D}{4}=(2+2)^2-9=7>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수는 2이므로 $a_{22}=2$

이상에서 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ 답 ②

만점 공략 노트

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

(1) $D>0$ ➜ 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $D=0$ ➜ 한 점에서 만난다.(접한다.)

(3) $D<0$ ➜ 만나지 않는다.

유형 177 두 행렬이 서로 같을 조건

본책 194쪽

$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$이면 $a=p$, $b=q$, $c=r$, $d=s$

0991 두 행렬의 대응하는 성분이 서로 같아야 하므로

$a=xy$ …… ㉠

$3x+2y=4$ …… ㉡

$2x-y=5$ …… ㉢

$b=x+y$ …… ㉣

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=-1$

이것을 ㉠, ㉣에 각각 대입하면 $a=-2$, $b=1$

$\therefore ab=-2$ 답 ②

0992 두 행렬의 대응하는 성분이 서로 같아야 하므로

$2-x=y-1$, $x+y=xy+2$, $xy=2-xy$

$\therefore x+y=3$, $xy=1$

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=3^3-3\times1\times3=18$ 답 ①

0993 두 행렬의 대응하는 성분이 서로 같아야 하므로

$c^2+ac=-2$ …… ㉠

$3a=9$ …… ㉡

$0=b+4$ …… ㉢

$-2c=3c^2+2b$ …… ㉣

㉡에서 $a=3$

㉢에서 $b=-4$ … ❶

(i) $a=3$을 ㉠에 대입하면

$c^2+3c=-2$, $c^2+3c+2=0$

$(c+2)(c+1)=0$

$\therefore c=-2$ 또는 $c=-1$

(ii) $b=-4$를 ㉣에 대입하면

$-2c=3c^2-8$, $3c^2+2c-8=0$

$(c+2)(3c-4)=0$

$\therefore c=-2$ 또는 $c=\frac{4}{3}$

(i), (ii)에서 $c=-2$ … ❷

$\therefore a^2+b^2-c^2=3^2+(-4)^2-(-2)^2=21$ … ❸

답 21

단계	채점 요소	비율
❶	a, b의 값 구하기	30 %
❷	c의 값 구하기	50 %
❸	$a^2+b^2-c^2$의 값 구하기	20 %

0994 $a_{11}=m\times1+n\times1=m+n$,

$a_{12}=m\times1+n\times2=m+2n$,

$a_{21}=m\times2+n\times1=2m+n$,

$a_{22}=m\times2+n\times2=2m+2n$이므로

$A=\begin{pmatrix}m+n & m+2n\\ 2m+n & 2m+2n\end{pmatrix}$

$i+j$가 짝수일 때, $b_{ij}=4i$이므로

$b_{11}=4\times1=4$, $b_{22}=4\times2=8$

$i+j$가 홀수일 때, $b_{ij}=3^j$이므로

$b_{12}=3^2=9$, $b_{21}=3^1=3$

$\therefore B=\begin{pmatrix}4 & 9\\ 3 & 8\end{pmatrix}$

두 행렬의 대응하는 성분이 서로 같아야 하므로

$m+n=4$, $m+2n=9$, $2m+n=3$, $2m+2n=8$

$\therefore m+n=4$, $m+2n=9$, $2m+n=3$

$m+n=4$, $m+2n=9$를 연립하여 풀면

$m=-1$, $n=5$

$\therefore m^2+n^2=(-1)^2+5^2=26$ 답 ①

참고 $m=-1$, $n=5$이면

$2m+n=2\times(-1)+5=3$

유형 178 행렬의 덧셈, 뺄셈과 실수배

본책 194쪽

(1) 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$와 실수 k에 대하여

① $A\pm B=\begin{pmatrix}a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12}\\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22}\end{pmatrix}$ (복호동순)

② $kA=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12}\\ ka_{21} & ka_{22}\end{pmatrix}$

(2) 행렬을 포함하는 등식

➜ 이항하여 간단히 정리한 다음 행렬을 대입한다.

0995 $2(X-A)=3(B-X)$에서

$2X-2A=3B-3X$, $5X=2A+3B$

$\therefore X=\frac{1}{5}(2A+3B)$

$=\frac{1}{5}\left\{2\begin{pmatrix}1&-3\\-2&3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&2\\3&-1\end{pmatrix}\right\}$

$=\frac{1}{5}\left\{\begin{pmatrix}2&-6\\-4&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&6\\9&-3\end{pmatrix}\right\}$

$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2&0\\5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}&0\\1&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은

$\frac{2}{5}+0+1+\frac{3}{5}=2$ 답 2

0996 $a_{11}=1\times1-2^1=-1$, $a_{12}=1\times2-2^2=-2$,
$a_{13}=1\times3-2^3=-5$, $a_{21}=2\times1-2^1=0$,
$a_{22}=2\times2-2^2=0$, $a_{23}=2\times3-2^3=-2$이므로

$A=\begin{pmatrix}-1&-2&-5\\0&0&-2\end{pmatrix}$

$c_{11}=1-1+3=3$, $c_{12}=1-2+3=2$, $c_{13}=1-3+3=1$,
$c_{21}=2-1+3=4$, $c_{22}=2-2+3=3$, $c_{23}=2-3+3=2$이므로

$2A+B=\begin{pmatrix}3&2&1\\4&3&2\end{pmatrix}$

$\therefore B=\begin{pmatrix}3&2&1\\4&3&2\end{pmatrix}-2A$

$=\begin{pmatrix}3&2&1\\4&3&2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1&-2&-5\\0&0&-2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3&2&1\\4&3&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&-4&-10\\0&0&-4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}5&6&11\\4&3&6\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}5&6&11\\4&3&6\end{pmatrix}$

0997 $xA+yB=C$에서

$x\begin{pmatrix}1&4\\-2&3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-2&5\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&6\\4&-3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x&4x\\-2x&3x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2y&5y\\y&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&6\\4&-3\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}x-2y&4x+5y\\-2x+y&3x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&6\\4&-3\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x-2y=-5$, $4x+5y=6$, $-2x+y=4$, $3x=-3$

$\therefore x=-1$, $y=2$

$\therefore x+y=1$ 답 ①

0998 $\alpha\begin{pmatrix}\beta&1\\\alpha&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}\alpha&1\\\beta&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\alpha\beta&5\\15&0\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}\alpha\beta&\alpha\\\alpha^2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha\beta&\beta\\\beta^2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\alpha\beta&5\\15&0\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}2\alpha\beta&\alpha+\beta\\\alpha^2+\beta^2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\alpha\beta&5\\15&0\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha^2+\beta^2=15$

한편 α, β는 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$

따라서 $a=5$이고, $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$에서

$15=5^2-2b$ $\therefore b=5$

$\therefore ab=25$ 답 ④

0999 $a_{ij}=a_{ji}$이므로 $a_{12}=a_{21}$

$b_{ij}=-b_{ji}$이므로 $b_{11}=-b_{11}$, $b_{12}=-b_{21}$, $b_{22}=-b_{22}$

$\therefore b_{11}=0$, $b_{21}=-b_{12}$, $b_{22}=0$

따라서

$A+B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&b_{12}\\-b_{12}&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}+b_{12}\\a_{12}-b_{12}&a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&12\\-4&16\end{pmatrix}$

이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a_{11}=10$, $a_{12}+b_{12}=12$, $a_{12}-b_{12}=-4$, $a_{22}=16$

$a_{12}+b_{12}=12$, $a_{12}-b_{12}=-4$를 연립하여 풀면

$a_{12}=4$, $b_{12}=8$

$\therefore a_{12}+a_{22}=4+16=20$ 답 20

유형 179 조건을 만족시키는 행렬 → 본책 195쪽

행렬 A, B에 대한 두 등식이 주어진 경우

➜ A, B에 대한 연립방정식으로 생각하여 A 또는 B를 소거한다.

1000 $3A+2B=\begin{pmatrix}12&-5\\7&-1\end{pmatrix}$ …… ㉠

$A-4B=\begin{pmatrix}4&-11\\-21&9\end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠×2+㉡을 하면

$7A=2\begin{pmatrix}12&-5\\7&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-11\\-21&9\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}24&-10\\14&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-11\\-21&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28&-21\\-7&7\end{pmatrix}$

$\therefore A=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}28&-21\\-7&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-3\\-1&1\end{pmatrix}$

㉠−㉡×3을 하면

$14B=\begin{pmatrix}12&-5\\7&-1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}4&-11\\-21&9\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}12&-5\\7&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12&-33\\-63&27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&28\\70&-28\end{pmatrix}$

$\therefore B=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}0&28\\70&-28\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\5&-2\end{pmatrix}$

$\therefore A+B=\begin{pmatrix}4&-3\\-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\5&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1\\4&-1\end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix}4&-1\\4&-1\end{pmatrix}$

1001 $X+3Y=A$ …… ㉠

$2X-Y=B$ …… ㉡

㉠+㉡×3을 하면

$7X=A+3B \quad \therefore X=\frac{1}{7}(A+3B)$

㉠×2−㉡을 하면

$7Y=2A-B \quad \therefore Y=\frac{1}{7}(2A-B)$ … ❶

$$\begin{aligned}\therefore X-Y&=\frac{1}{7}(A+3B)-\frac{1}{7}(2A-B)\\&=\frac{1}{7}(A+3B-2A+B)\\&=-\frac{1}{7}(A-4B)\\&=-\frac{1}{7}\left\{\begin{pmatrix}-5&5\\13&13\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}4&3\\5&-16\end{pmatrix}\right\}\\&=-\frac{1}{7}\left\{\begin{pmatrix}-5&5\\13&13\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}16&12\\20&-64\end{pmatrix}\right\}\\&=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-21&-7\\-7&77\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3&1\\1&-11\end{pmatrix}\end{aligned}$$ … ❷

따라서 행렬 $X-Y$의 모든 성분의 곱은

$3\times1\times1\times(-11)=-33$ … ❸

답 −33

단계	채점 요소	비율
❶	두 행렬 X, Y를 각각 A, B에 대한 식으로 나타내기	30 %
❷	행렬 $X-Y$ 구하기	50 %
❸	행렬 $X-Y$의 모든 성분의 곱 구하기	20 %

유형 180 행렬의 곱셈 본책 195쪽

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x&u\\y&v\end{pmatrix}$에 대하여

$$AB=\begin{pmatrix}ax+by&au+bv\\cx+dy&cu+dv\end{pmatrix}$$

1002 $AB=\begin{pmatrix}a&14\\7&b\end{pmatrix}$에서

$$\begin{pmatrix}2&k\\4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5\\-3&k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&14\\7&b\end{pmatrix}$$

$$\therefore\begin{pmatrix}2-3k&10+k^2\\7&20-k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&14\\7&b\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2-3k=a$, $10+k^2=14$, $20-k=b$

$\therefore k=2$, $a=-4$, $b=18$ ($\because k>0$)

$\therefore a+b=14$ 답 ③

1003 $a_{11}=2\times1-1+2=3$, $a_{12}=2\times1-2+2=2$,

$a_{21}=2\times2-1+2=5$, $a_{22}=2\times2-2+2=4$이므로

$$A=\begin{pmatrix}3&2\\5&4\end{pmatrix}$$

$b_{11}=1+2\times1-1=2$, $b_{12}=1+2\times2-1=4$,

$b_{21}=2+2\times1-1=3$, $b_{22}=2+2\times2-1=5$이므로

$$B=\begin{pmatrix}2&4\\3&5\end{pmatrix}$$

$$\therefore AB=\begin{pmatrix}3&2\\5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&22\\22&40\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 AB의 (2, 2) 성분은 40이다. 답 40

1004 이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=3$ … ❶

$\begin{pmatrix}\alpha&0\\\alpha&\beta^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\alpha^2\\\beta&\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\alpha^3\\\beta^3&\alpha^3+\beta^3\end{pmatrix}$이므로 구하는 모든 성분의 합은

$$\begin{aligned}0+\alpha^3+\beta^3+(\alpha^3+\beta^3)&=2(\alpha^3+\beta^3)\\&=2\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}\\&=2\times(2^3-3\times3\times2)\\&=-20\end{aligned}$$ … ❷

답 −20

단계	채점 요소	비율
❶	$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 구하기	30 %
❷	행렬 $\begin{pmatrix}\alpha&0\\\alpha&\beta^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\alpha^2\\\beta&\beta\end{pmatrix}$의 모든 성분의 합 구하기	70 %

1005 $A+2B=\begin{pmatrix}9&2\\5&0\end{pmatrix}$에서 $2B=\begin{pmatrix}9&2\\5&0\end{pmatrix}-A$

$$\begin{aligned}\therefore B&=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}9&2\\5&0\end{pmatrix}-A\right\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}9&2\\5&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&a\\b&-2\end{pmatrix}\right\}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8&2-a\\5-b&2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$AB=O$에서

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&a\\b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&2-a\\5-b&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\begin{pmatrix}8+5a-ab&2+a\\10b-10&2b-ab-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$8+5a-ab=0$, $2+a=0$, $10b-10=0$, $2b-ab-4=0$

$\therefore a=-2$, $b=1$

$$\therefore B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8&4\\4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 B의 모든 성분의 합은

$4+2+2+1=9$ 답 ①

1006 $A\begin{pmatrix}0\\f(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix}1&2\\-4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\f(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\therefore\begin{pmatrix}2f(a)\\6f(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2f(a)=0,\ 6f(a)=0 \quad \therefore f(a)=0$

이때 주어진 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 -1, 4이므로 $f(a)=0$을 만족시키는 a의 값은

$-1,\ 4$

따라서 구하는 합은

$-1+4=3$ 답 ④

유형 181 행렬의 곱셈의 변형 본책 196쪽

이차정사각행렬 A에 대하여 $A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}$이면

$$A\begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p+r\\q+s\end{pmatrix}$$

1007 $\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$이므로

$$A\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}=A\left\{2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$
$$=2A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-5A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$=2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-13\end{pmatrix}$$

따라서 $p=9$, $q=-13$이므로

$p+q=-4$ 답 ②

다른 풀이 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$라 하면 $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$에서

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a=2,\ c=1$

$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$에서

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$b=-1,\ d=3$

따라서 $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}$이므로

$$A\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-13\end{pmatrix}$$

1008 두 등식을 변끼리 더하면

$$A\begin{pmatrix}4a\\3b\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}a\\2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}18\\-2\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}5a\\5b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\5\end{pmatrix}, \quad 5A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\5\end{pmatrix}$$

$$\therefore A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$ 답 $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

1009 실수 x, y에 대하여

$$\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+2y\\2x+y\end{pmatrix}$$

가 성립한다고 하면 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$7=3x+2y,\ 4=2x+y$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=2$

즉 $\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$이므로

$$A\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}=A\left\{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}=A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+2A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 곱은

$9\times4=36$ 답 ④

다른 풀이 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$라 하면 $A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$에서

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix}3a+2b\\3c+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$3a+2b=-1$ …… ㉠

$3c+2d=-4$ …… ㉡

또 $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$에서

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix}2a+b\\2c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2a+b=5$ …… ㉢

$2c+d=4$ …… ㉣

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=11,\ b=-17$

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $c=12,\ d=-20$

따라서 $A=\begin{pmatrix}11&-17\\12&-20\end{pmatrix}$이므로

$$A\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&-17\\12&-20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix}$$

유형 182 행렬의 거듭제곱 본책 197쪽

자연수 m, n에 대하여

① $A^{n+1}=A^nA$

② $A^mA^n=A^{m+n}$, $(A^m)^n=A^{mn}$

1010 $A^2=A$에서

$$\begin{pmatrix}3&a\\b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&a\\b&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&a\\b&-2\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}9+ab&a\\b&ab+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&a\\b&-2\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$9+ab=3,\ ab+4=-2 \quad \therefore ab=-6$

$\therefore (a-b)^2=a^2+b^2-2ab$

$=5-2\times(-6)=17$ 답 ②

1011 $A+3B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 4 & -5\end{pmatrix}$ …… ㉠

$A-3B=\begin{pmatrix}9 & -5\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 4 & -5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9 & -5\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -4\\ 6 & -6\end{pmatrix}$

$\therefore A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6 & -4\\ 6 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & -3\end{pmatrix}$

㉠−㉡을 하면

$6B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 4 & -5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9 & -5\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12 & 6\\ 2 & -4\end{pmatrix}$

$\therefore 3B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-12 & 6\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

$\therefore A^2-9B^2$

$=A^2-(3B)^2$

$=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}39 & -24\\ -8 & 7\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-36 & 24\\ 8 & -4\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^2-9B^2의 $(1, 2)$ 성분은 24이다. 답 24

1012 $A^2+4A-5E=O$에서

$\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a^2+b^2 & 2ab\\ 2ab & a^2+b^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4a & 4b\\ 4b & 4a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}a^2+b^2+4a-5 & 2ab+4b\\ 2ab+4b & a^2+b^2+4a-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a^2+b^2+4a-5=0,\ 2ab+4b=0$ … ❶

$2ab+4b=0$에서 $2b(a+2)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $b=0$

(i) $a=-2$일 때

$a^2+b^2+4a-5=0$에서

$4+b^2-8-5=0,\quad b^2=9$

$\therefore b=\pm 3$

(ii) $b=0$일 때

$a^2+b^2+4a-5=0$에서

$a^2+4a-5=0,\quad (a+5)(a-1)=0$

$\therefore a=-5$ 또는 $a=1$

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b)는

$(-2, -3), (-2, 3), (-5, 0), (1, 0)$

의 4개이다. … ❷

답 4

단계	채점 요소	비율
❶	a, b 사이의 관계식 구하기	50 %
❷	순서쌍 (a, b)의 개수 구하기	50 %

1013 $A\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\ s\end{pmatrix}$에서

$A\begin{pmatrix}r\\ s\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -5 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3q\\ -5p\end{pmatrix}$

이때 $\begin{pmatrix}p+r\\ q+s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}r\\ s\end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix}p+r\\ q+s\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}r\\ s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\ s\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3q\\ -5p\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3q+r\\ -5p+s\end{pmatrix}$ 답 ④

유형 183 행렬의 거듭제곱 — 규칙 찾기 본책 197쪽

$A^2, A^3, A^4, \cdots$을 차례대로 구하여 규칙을 찾는다.

1014 $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 9\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore A^n=\begin{pmatrix}1 & 3n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

이때 행렬 A^n의 모든 성분의 합이 101이므로

$1+3n+0+1=101\qquad \therefore n=33$ 답 ③

1015 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -6 & 1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2n & 1\end{pmatrix}$

즉 $A^{100}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -200 & 1\end{pmatrix}$이므로

$A^{100}B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -200 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 196 & 1\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A^{100}B$의 모든 성분의 합은

$-1+0+196+1=196$ 답 ①

1016 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -6\\ -3 & 6\end{pmatrix}=-3A$

$A^3=A^2A=-3AA=-3A^2=-3\times(-3A)=9A$

$A^4=A^3A=9AA=9A^2=9\times(-3A)=-27A$

$A^5=A^4A=-27AA=-27A^2=-27\times(-3A)=81A$

$\therefore A+A^2+A^3+A^4+A^5$

$=A+(-3A)+9A+(-27A)+81A=61A$

$\therefore k=61$ 답 61

다른 풀이 케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-\{-1+(-2)\}A+\{-1\times(-2)-2\times1\}E=O$

$A^2+3A=O \quad \therefore A^2=-3A$

1017 $A=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-1\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4\\-4&-3\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}5&4\\-4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&6\\-6&-5\end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore A^n=\begin{pmatrix}2n+1&2n\\-2n&-2n+1\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^n의 모든 성분의 합은

$(2n+1)+2n+(-2n)+(-2n+1)=2$

이므로 행렬 $A+A^2+A^3+\cdots+A^{50}$의 모든 성분의 합은

$2\times50=100$

$\therefore a+b+c+d=100$ 답 ①

유형 184 행렬의 거듭제곱 – $A^n=kE$의 꼴 → 본책 198쪽

A^2, A^3, A^4, …을 차례대로 구하여 $A^n=kE$ (k는 상수)를 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 찾은 다음 A^n의 규칙성을 이용한다.

1018 $A=\begin{pmatrix}3&-5\\2&-3\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}3&-5\\2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-5\\2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E$

$A^3=A^2A=-EA=-A$

$A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E$

$\therefore A^{2027}=(A^4)^{506}A^3=EA^3=A^3=-A=\begin{pmatrix}-3&5\\-2&3\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^{2027}의 모든 성분의 합은

$-3+5+(-2)+3=3$ 답 ⑤

다른 풀이 케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-\{3+(-3)\}A+\{3\times(-3)-(-5)\times2\}E=O$

$A^2+E=O \quad \therefore A^2=-E$

1019 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-3&-1\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}2&1\\-3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-3&-2\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&1\\-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$=-E$

$A^4=A^3A=-EA=-A$

$A^5=A^4A=-AA=-A^2$

$A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$

$A^7=A^6A=EA=A$

$\vdots$

따라서 $A^n=E$가 되는 경우는 $n=6k$ (k는 자연수)일 때이므로 두 자리 자연수 n의 값 중 가장 큰 수는 96이다. 답 ②

다른 풀이 케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-\{2+(-1)\}A+\{2\times(-1)-1\times(-3)\}E=O$

$\therefore A^2-A+E=O$

양변에 행렬 $A+E$를 곱하면

$(A+E)(A^2-A+E)=O$

$A^3+E=O \quad \therefore A^3=-E$

$\therefore A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$

1020 $A=\begin{pmatrix}2&2\\-6&-4\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}2&2\\-6&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\-6&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&-4\\12&4\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-8&-4\\12&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\-6&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0\\0&8\end{pmatrix}=8E$

$A^6=(A^3)^2=(8E)^2=64E$ … ❶

$\therefore A^6\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=64E\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=64\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}64\\64\end{pmatrix}$ … ❷

따라서 $a=64$, $b=64$이므로

$a+b=128$ … ❸

답 128

단계	채점 요소	비율
❶	행렬 A^6 구하기	50 %
❷	행렬 $A^6\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 구하기	30 %
❸	$a+b$의 값 구하기	20 %

1021 $a_{11}=1-1=0$, $a_{12}=1-2=-1$, $a_{21}=2-1=1$, $a_{22}=2-2=0$이므로

$A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

따라서

$A^2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E$,

$A^3=A^2A=-EA=-A$,

$A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E$

이므로

$A+A^2+A^3+\cdots+A^{2010}$

$=(A+A^2+A^3+A^4)+A^4(A+A^2+A^3+A^4)+\cdots$

$\quad+A^{2004}(A+A^2+A^3+A^4)+A^{2009}+A^{2010}$

$=A^{2009}+A^{2010}$ ($\because A+A^2+A^3+A^4=O$)

$=(A^4)^{502}A+(A^4)^{502}A^2=EA+EA^2$

$=A+A^2=A-E$

$=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$

즉 행렬 $A+A^2+A^3+\cdots+A^{2010}$의 (2, 1) 성분은 1이다. 답 ④

유형 185 행렬의 곱셈에 대한 실생활에의 활용 본책 199쪽

주어진 자료를 행렬로 표현하였을 때, 이 행렬들의 곱셈에서 각 성분이 의미하는 것을 파악한다.

1022 $PQ=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e & f\\ g & h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ae+bg & af+bh\\ ce+dg & cf+dh\end{pmatrix}$이므로

행렬 PQ의 $(1, 2)$ 성분은

$af+bh$

따라서 행렬 PQ의 $(1, 2)$ 성분은 준서가 A 제과점에서 타르트와 스콘을 구입하는 경우 지불해야 하는 금액이다.

답 ③

만점 공략 노트

행렬 PQ의 $(1, 1)$ 성분 $ae+bg$

➜ 세린이가 A 제과점에서 타르트와 스콘을 구입하는 경우 지불해야 하는 금액

행렬 PQ의 $(2, 1)$ 성분 $ce+dg$

➜ 세린이가 B 제과점에서 타르트와 스콘을 구입하는 경우 지불해야 하는 금액

행렬 PQ의 $(2, 2)$ 성분 $cf+dh$

➜ 준서가 B 제과점에서 타르트와 스콘을 구입하는 경우 지불해야 하는 금액

1023 B 고등학교에서 드럼을 배우는 남학생 수는

130×0.8

B 고등학교에서 드럼을 배우는 여학생 수는

140×0.3

따라서 B 고등학교에서 드럼을 배우는 모든 학생 수는

$130\times0.8+140\times0.3$

이때

$$PQ=\begin{pmatrix}120 & 160\\ 130 & 140\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.2 & 0.8\\ 0.7 & 0.3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}120\times0.2+160\times0.7 & 120\times0.8+160\times0.3\\ 130\times0.2+140\times0.7 & 130\times0.8+140\times0.3\end{pmatrix}$$

이므로 B 고등학교에서 드럼을 배우는 모든 학생 수는 행렬 PQ의 $(2, 2)$ 성분이다. 답 ③

1024 (경쟁률)$=\dfrac{\text{(지원자 수)}}{\text{(선발 인원수)}}$이므로

(지원자 수)=(선발 인원수)×(경쟁률)이다.

따라서 A 직무의 정규직 지원자 수는 30×20

B 직무의 정규직 지원자 수는 50×18

B 직무의 계약직 지원자 수는 15×7

$\therefore m=30\times20+50\times18,\ n=50\times18+15\times7$

이때

$$PQ=\begin{pmatrix}30 & 50\\ 10 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}20 & 12\\ 18 & 7\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}30\times20+50\times18 & 30\times12+50\times7\\ 10\times20+15\times18 & 10\times12+15\times7\end{pmatrix}$$

이므로 m의 값은 행렬 PQ의 $(1, 1)$ 성분이다.

또

$$QP=\begin{pmatrix}20 & 12\\ 18 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30 & 50\\ 10 & 15\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}20\times30+12\times10 & 20\times50+12\times15\\ 18\times30+7\times10 & 18\times50+7\times15\end{pmatrix}$$

이므로 n의 값은 행렬 QP의 $(2, 2)$ 성분이다.

따라서 $m+n$의 값은 행렬 PQ의 $(1, 1)$ 성분과 행렬 QP의 $(2, 2)$ 성분의 합이다.

답 ③

유형 186 행렬의 곱셈에 대한 성질 본책 200쪽

두 행렬 A, B에 대하여 일반적으로 $AB\neq BA$이므로 행렬에서는 곱셈 공식, 인수분해 공식을 적용할 수 없다.

➜ $(A\pm B)^2\neq A^2\pm2AB+B^2$ (복호동순)

1025 $(A-B)^2=(A-B)(A-B)$

$=A^2-AB-BA+B^2$

이므로 $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$에서

$A^2-AB-BA+B^2=A^2-2AB+B^2$

$\therefore AB=BA$

즉 $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix}3x-6 & 3y+4\\ 3x-3 & 3y+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+3y & -2x-y\\ 3 & -4\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$3x-6=3x+3y,\ 3y+4=-2x-y,$

$3x-3=3,\ 3y+2=-4$

$\therefore x=2,\ y=-2$

$\therefore xy=-4$ 답 -4

1026 $A^2+AB-BA-B^2$

$=A(A+B)-B(A+B)$

$=(A-B)(A+B)$

$=\left\{\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right\}\left\{\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right\}$

$=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-12 & 13\\ 5 & -3\end{pmatrix}$ 답 $\begin{pmatrix}-12 & 13\\ 5 & -3\end{pmatrix}$

1027 $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$이므로

$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$에서

$A^2-B^2=A^2-AB+BA-B^2$

$\therefore AB=BA$ … ❶

즉 $\begin{pmatrix}x^2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-y & 2\\ 1 & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y & 2\\ 1 & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix}-x^2y+2 & 2x^2+2y\\ -y+1 & 2+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x^2y+2 & -2y+2\\ x^2+y & 2+y\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x^2+2y=-2y+2,\ -y+1=x^2+y$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$, 즉 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ … ❷

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표는

$-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}=0$에서

$x^2-1=0,\quad (x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

$\therefore \overline{PQ}=1-(-1)=2$ … ❸

답 2

단계	채점 요소	비율
❶	$AB=BA$임을 알기	30 %
❷	$f(x)$ 구하기	40 %
❸	$\overline{PQ}$의 길이 구하기	30 %

1028 $AB-BA=\begin{pmatrix}0&2\\-1&0\end{pmatrix}$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$$A^2B-ABA=A\begin{pmatrix}0&2\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\-1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-2&-4\\-3&2\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$AB-BA=\begin{pmatrix}0&2\\-1&0\end{pmatrix}$의 양변의 오른쪽에 행렬 A를 곱하면

$$ABA-BA^2=\begin{pmatrix}0&2\\-1&0\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}0&2\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2\\1&3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2&6\\2&-2\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$A^2B-BA^2=\begin{pmatrix}-2&-4\\-3&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&6\\2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\-1&0\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A^2B-BA^2의 모든 성분의 합은

$0+2+(-1)+0=1$

답 1

유형 187 단위행렬의 성질 → 본책 200쪽

같은 꼴의 정사각행렬 A와 단위행렬 E에 대하여

① $AE=EA=A$

② $E^n=E$ (단, n은 자연수이다.)

③ $(A\pm E)(A^2\mp A+E)=A^3\pm E$ (복호동순)

1029 $(A-E)(A^2+A+E)=A^3-E^3=A^3-E$

이때 $A=\begin{pmatrix}-1&2\\-2&4\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}-1&2\\-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&6\\-6&12\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}-3&6\\-6&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&18\\-18&36\end{pmatrix}$$

$$\therefore A^3-E=\begin{pmatrix}-9&18\\-18&36\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&18\\-18&35\end{pmatrix}$$

답 ③

1030 $(A^2+A+E)(A^2-A+E)=A^4+A^2+E$ … ❶

$A^2=\begin{pmatrix}-3&5\\1&2\end{pmatrix}$에서

$$A^4=A^2A^2=\begin{pmatrix}-3&5\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&5\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&-5\\-1&9\end{pmatrix}$$

$$\therefore A^4+A^2+E=\begin{pmatrix}14&-5\\-1&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&5\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}12&0\\0&12\end{pmatrix} \quad \cdots ❷$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$12+0+0+12=24$ … ❸

답 24

단계	채점 요소	비율
❶	$(A^2+A+E)(A^2-A+E)$를 간단히 하기	30 %
❷	행렬 $(A^2+A+E)(A^2-A+E)$ 구하기	50 %
❸	행렬 $(A^2+A+E)(A^2-A+E)$의 모든 성분의 합 구하기	20 %

1031 $A^2+A^3=-3A-3E$이므로

$A^4+A^5=A^2(A^2+A^3)=A^2(-3A-3E)$

$=-3(A^2+A^3)=-3(-3A-3E)$

$=9A+9E$

이때 행렬 A의 모든 성분의 합이 0이므로 행렬 $9A$의 모든 성분의 합도 0이다.

따라서 행렬 A^4+A^5의 모든 성분의 합은 행렬 $9E$의 모든 성분의 합과 같으므로

$9\times(1+0+0+1)=18$

답 18

1032 $A+B=-E$에서 $\quad B=-A-E$

따라서 $AB=E$에서 $\quad A(-A-E)=E$

$-A^2-A=E \quad \therefore A^2+A+E=O$

양변에 행렬 $A-E$를 곱하면

$(A-E)(A^2+A+E)=O$

$A^3-E=O \quad \therefore A^3=E$

같은 방법으로 하면 $\quad B^2+B+E=O,\ B^3=E$

따라서

$A+A^2+A^3=A+A^2+E=O,$

$B+B^2+B^3=B+B^2+E=O$

이므로

$(A+B)+(A^2+B^2)+\cdots+(A^{100}+B^{100})$

$=(A+A^2+A^3+\cdots+A^{100})$

$\quad+(B+B^2+B^3+\cdots+B^{100})$

$=\{(A+A^2+A^3)+A^3(A+A^2+A^3)+\cdots$

$\quad+A^{96}(A+A^2+A^3)+A^{100}\}$

$\quad+\{(B+B^2+B^3)+B^3(B+B^2+B^3)+\cdots$

$\quad\quad+B^{96}(B+B^2+B^3)+B^{100}\}$

$=A^{100}+B^{100}=(A^3)^{33}A+(B^3)^{33}B$

$=EA+EB=A+B$

$=-E$

답 ③

1033 $X+Y=E$에서 $Y=-X+E$

따라서 $XY=O$에서 $X(-X+E)=O$

$-X^2+X=O$ $\therefore X^2=X$

같은 방법으로 하면 $Y^2=Y$

한편 $X+Y=E$이므로 $X(X+Y)=(X+Y)X$

$X^2+XY=X^2+YX$ $\therefore YX=XY=O$

따라서

$A^2=(4X+Y)^2=(4X+Y)(4X+Y)$

$=16X^2+4XY+4YX+Y^2$

$=16X+Y$

이므로

$A^3=A^2A=(16X+Y)(4X+Y)$

$=64X^2+16XY+4YX+Y^2$

$=64X+Y$

$\therefore a=64$ 답 64

다른 풀이 $X+Y=E$이므로 $X(X+Y)=X$

$X^2+XY=X$ $\therefore X^2=X$ ($\because XY=O$)

따라서

$X^3=X^2X=XX=X^2=X$,

$X^4=(X^2)^2=X^2=X$, …

이므로 $X^n=X$ (n은 자연수)

같은 방법으로 하면 $Y^n=Y$ (n은 자연수)

한편 $X(X+Y)=(X+Y)X$에서 $XY=YX$

$\therefore A^3=(4X+Y)^3$

$=64X^3+48X^2Y+12XY^2+Y^3$ ($\because XY=YX$)

$=64X+48X(XY)+12(XY)Y+Y$

$=64X+Y$

유형 188 행렬의 곱셈의 여러 가지 성질 본책 201쪽

① $A\neq O$, $B\neq O$이지만 $AB=O$인 경우가 있다.

② $AB=AC$, $A\neq O$이지만 $B\neq C$인 경우가 있다.

1034 ㄱ. $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$이면

$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$

이지만 $A\neq E$, $A\neq -E$ (거짓)

ㄴ. $A^2=E$, $B^2=B$이므로

$(ABA)^2=ABA^2BA=ABEBA$

$=AB^2A=ABA$ (참)

ㄷ. $AB=A$의 양변의 오른쪽에 행렬 A를 곱하면

$ABA=A^2$, $AB=A^2$ ($\because BA=B$)

$\therefore A^2=A$

$BA=B$의 양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면

$BAB=B^2$, $BA=B^2$ ($\because AB=A$)

$\therefore B^2=B$

$\therefore A^2+B^2=A+B$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

1035 ㄱ. $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$이면

$AB=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

따라서 $AB=O$, $A\neq O$이지만 $B\neq O$이다. (거짓)

ㄴ. $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$이면

$A-E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$\therefore (A-E)^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

따라서 $(A-E)^2=O$이지만 $A\neq E$이다. (거짓)

ㄷ. $A^7=A^3A^4$이므로

$E=EA^4$ $\therefore A^4=E$

$A^4=A^3A$이므로

$E=EA$ $\therefore A=E$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

1036 ㄱ. $(A+B)^2=(A+B)(A+B)$

$=A^2+AB+BA+B^2$

$=A^2+B^2$ (참)

ㄴ. $AB+BA=O$에서 $BA=-AB$이므로

$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$

$=A^2-AB-AB-B^2$

$=A^2-2AB-B^2$ (거짓)

ㄷ. $AB+BA=O$에서 $BA=-AB$이므로

$(AB)^3=ABABAB$

$=A(BA)(BA)B$

$=A(-AB)(-AB)B$

$=A^2(BA)B^2$

$=A^2(-AB)B^2$

$=-A^3B^3$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

1037 ㄱ. $A^2-A+E=O$의 양변에 행렬 $A+E$를 곱하면

$(A+E)(A^2-A+E)=O$

$A^3+E=O$ $\therefore A^3=-E$

$\therefore A^9=(A^3)^3=(-E)^3=-E$ (거짓)

ㄴ. $A-3B=E$에서 $A=3B+E$

$\therefore AB=(3B+E)B=3B^2+B$

$=B(3B+E)=BA$ (참)

ㄷ. $A(A+E)=E$에서 $A^2+A=E$

양변의 오른쪽에 행렬 B를 곱하면

$A^2B+AB=B$, $A(AB)+AB=B$

$A+E=B$ ($\because AB=E$)

$\therefore B^2=(A+E)^2=A^2+2A+E$

$=(A^2+A)+A+E$

$=E+A+E=A+2E$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

12 행렬

1등급 유형 도전하기

→ 본책 202~203쪽

1038 Step 1 (가)에 알맞은 수를 구한다.

$A^2+B=3E$에서 $B=3E-A^2$이므로

$$AB=A(3E-A^2)=3A-A^3$$
$$=(3E-A^2)A=BA$$

이때

$$(A^2+B)^2=A^4+A^2B+BA^2+B^2$$

이고

$$A^2B=A(AB)=A(BA)$$
$$=(AB)A=(BA)A=BA^2$$

이므로

$$(3E)^2=5E+2A^2B, \quad 9E=5E+2A^2B$$
$$\therefore A^2B=\boxed{\text{(가) } 2}E$$

Step 2 (나), (다)에 알맞은 수를 구한다.

$(A^4+B^2)(A^2+B)=A^6+A^4B+B^2A^2+B^3$이고

$$A^4B+B^2A^2=A^2(A^2B)+B(BA^2)$$
$$=A^2\times 2E+B\times 2E \ (\because BA^2=A^2B=2E)$$
$$=2A^2+2B$$
$$=2(A^2+B)$$
$$=2\times 3E$$
$$=\boxed{\text{(나) } 6}E$$

이므로

$$5E\times 3E=A^6+6E+B^3$$
$$15E=A^6+6E+B^3$$
$$\therefore A^6+B^3=\boxed{\text{(다) } 9}E$$

Step 3 $a+b+c$의 값을 구한다.

$a=2$, $b=6$, $c=9$이므로

$$a+b+c=17$$

답 17

논리 Check

$A^3+B=2E$, $A^6+B^2=8E$일 때, 다음 중 행렬 A^9+B^3과 같은 것은? (단, E는 단위행렬이다.)

① $-20E$ ② $-10E$ ③ E
④ $10E$ ⑤ $20E$

풀이 $A^3+B=2E$에서 $B=2E-A^3$이므로

$$AB=A(2E-A^3)=2A-A^4$$
$$=(2E-A^3)A=BA$$

이때

$$(A^3+B)^2=A^6+A^3B+BA^3+B^2$$

이고

$$A^3B=A^2(AB)=A^2(BA)=A(AB)A$$
$$=A(BA)A=(AB)A^2=(BA)A^2$$
$$=BA^3$$

이므로

$$(2E)^2=8E+2A^3B, \quad 4E=8E+2A^3B$$
$$\therefore A^3B=-2E$$

또

$$(A^6+B^2)(A^3+B)=A^9+A^6B+B^2A^3+B^3$$

이고

$$A^6B+B^2A^3=A^3(A^3B)+B(BA^3)$$
$$=A^3\times(-2E)+B\times(-2E)$$
$$(\because BA^3=A^3B=-2E)$$
$$=-2A^3-2B$$
$$=-2(A^3+B)$$
$$=-2\times 2E=-4E$$

이므로 $8E\times 2E=A^9-4E+B^3$

$$16E=A^9-4E+B^3$$
$$\therefore A^9+B^3=20E$$

답 ⑤

1039 Step 1 3×3 행렬 B의 (i, j) 성분 b_{ij}가 가로의 길이가 i, 세로의 길이가 j인 직사각형에서 만들 수 있는 직사각형의 개수일 때, 행렬 B를 구한다.

3×3 행렬 B의 (i, j) 성분 b_{ij}를 한 변의 길이가 1인 정사각형을 이어 붙여 가로의 길이가 i, 세로의 길이가 j인 직사각형을 만들었을 때, 이 직사각형에서 만들 수 있는 직사각형의 개수라 하자.

이때 가로의 길이가 i이고 세로의 길이가 j인 직사각형에서 만들 수 있는 직사각형의 개수는 $(i+1)$개의 세로선과 $(j+1)$개의 가로선 중에서 각각 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$$_{i+1}C_2\times {}_{j+1}C_2=\frac{(i+1)i}{2}\times\frac{(j+1)j}{2}$$
$$=\frac{ij(i+1)(j+1)}{4}$$

따라서 $b_{ij}=\frac{ij(i+1)(j+1)}{4}$이므로

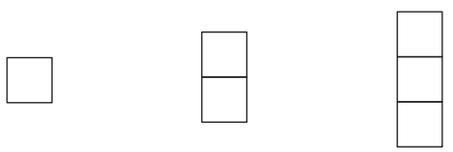
$$b_{11}=\frac{1\times 1\times 2\times 2}{4}=1,\ b_{12}=\frac{1\times 2\times 2\times 3}{4}=3,$$
$$b_{13}=\frac{1\times 3\times 2\times 4}{4}=6,\ b_{21}=\frac{2\times 1\times 3\times 2}{4}=3,$$
$$b_{22}=\frac{2\times 2\times 3\times 3}{4}=9,\ b_{23}=\frac{2\times 3\times 3\times 4}{4}=18,$$
$$b_{31}=\frac{3\times 1\times 4\times 2}{4}=6,\ b_{32}=\frac{3\times 2\times 4\times 3}{4}=18,$$
$$b_{33}=\frac{3\times 3\times 4\times 4}{4}=36$$

$$\therefore B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 6\\ 3 & 9 & 18\\ 6 & 18 & 36\end{pmatrix}$$

Step 2 3×3 행렬 C의 (i, j) 성분 c_{ij}가 가로의 길이가 i, 세로의 길이가 j인 직사각형에서 만들 수 있는 정사각형의 개수일 때, 행렬 C를 구한다.

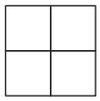
3×3 행렬 C의 (i, j) 성분 c_{ij}를 한 변의 길이가 1인 정사각형을 이어 붙여 가로의 길이가 i, 세로의 길이가 j인 직사각형을 만들었을 때, 이 직사각형에서 만들 수 있는 정사각형의 개수라 하자.

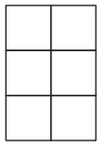
행렬 C의 성분을 구하면 다음과 같다.

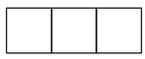


$c_{11}=1$ $c_{12}=2$ $c_{13}=3$

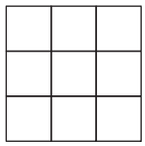

$c_{21}=2$


$c_{22}=5$


$c_{23}=8$


$c_{31}=3$


$c_{32}=8$


$c_{33}=14$

$\therefore C=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&8\\3&8&14\end{pmatrix}$

Step 3 행렬 A의 모든 성분의 합을 구한다.

$A=B-C=\begin{pmatrix}1&3&6\\3&9&18\\6&18&36\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&8\\3&8&14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&3\\1&4&10\\3&10&22\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$0+1+3+1+4+10+3+10+22=54$ 답 54

1040 Step 1 조건 (가)를 만족시키는 두 행렬 A, B를 구한다.

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}$라 하면 조건 (가)에서

$A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\therefore \begin{pmatrix}2a-b\\2c-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2a-b=0$, $2c-d=0$ $\therefore b=2a$, $d=2c$

$\therefore A=\begin{pmatrix}a&2a\\c&2c\end{pmatrix}$

또 $B\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\therefore \begin{pmatrix}2p-q\\2r-s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2p-q=0$, $2r-s=0$ $\therefore q=2p$, $s=2r$

$\therefore B=\begin{pmatrix}p&2p\\r&2r\end{pmatrix}$

Step 2 조건 (나)를 이용하여 a, c 사이의 관계식과 p, r 사이의 관계식을 구한다.

조건 (나)에서 $AB=3A$이므로

$\begin{pmatrix}a&2a\\c&2c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p&2p\\r&2r\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}a&2a\\c&2c\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}a(p+2r)&2a(p+2r)\\c(p+2r)&2c(p+2r)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a&6a\\3c&6c\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a(p+2r)=3a$, $c(p+2r)=3c$

이때 행렬 A가 영행렬이 아니므로 $p+2r=3$

또 $BA=2B$이므로

$\begin{pmatrix}p&2p\\r&2r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&2a\\c&2c\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}p&2p\\r&2r\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}p(a+2c)&2p(a+2c)\\r(a+2c)&2r(a+2c)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2p&4p\\2r&4r\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$p(a+2c)=2p$, $r(a+2c)=2r$

이때 행렬 B가 영행렬이 아니므로 $a+2c=2$

Step 3 행렬 $A+B$의 $(1, 1)$ 성분과 $(2, 2)$ 성분의 합을 구한다.

$A+B=\begin{pmatrix}a&2a\\c&2c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p&2p\\r&2r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+p&2a+2p\\c+r&2c+2r\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A+B$의 $(1, 1)$ 성분과 $(2, 2)$ 성분의 합은

$(a+p)+(2c+2r)=(a+2c)+(p+2r)$

$=2+3=5$ 답 5

1041 Step 1 $a_{12}\times b_{12}=0$, $a_{12}+b_{12}\neq 0$임을 이용하여 a_{11}과 a_{22} 사이의 관계식을 구한다.

$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$이므로

$B=A^2=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}{a_{11}}^2+a_{12}a_{21}&a_{12}(a_{11}+a_{22})\\a_{21}(a_{11}+a_{22})&a_{12}a_{21}+{a_{22}}^2\end{pmatrix}$

이때 조건 (가)에서 $a_{12}\times b_{12}=0$이므로

$a_{12}\times a_{12}(a_{11}+a_{22})=0$, ${a_{12}}^2(a_{11}+a_{22})=0$

$\therefore a_{12}=0$ 또는 $a_{11}+a_{22}=0$

그런데 $a_{12}=0$이면 $b_{12}=a_{12}(a_{11}+a_{22})=0$이므로

$a_{12}+b_{12}=0$

즉 조건 (나)를 만족시키지 못하므로

$a_{12}\neq 0$, $a_{11}+a_{22}=0$ $\therefore a_{22}=-a_{11}$

$\therefore A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&-a_{11}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}{a_{11}}^2+a_{12}a_{21}&0\\0&{a_{11}}^2+a_{12}a_{21}\end{pmatrix}$

Step 2 $a_{11}\times b_{11}=0$이고 행렬 B가 영행렬이 아님을 이용하여 a_{11}의 값을 구한다.

조건 (가)에서 $a_{11}\times b_{11}=0$이므로

$a_{11}({a_{11}}^2+a_{12}a_{21})=0$

$\therefore a_{11}=0$ 또는 ${a_{11}}^2+a_{12}a_{21}=0$

이때 ${a_{11}}^2+a_{12}a_{21}=0$이면 행렬 B가 영행렬이므로

${a_{11}}^2+a_{12}a_{21}\neq 0$, $a_{11}=0$

$\therefore A=\begin{pmatrix}0&a_{12}\\a_{21}&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a_{12}a_{21}&0\\0&a_{12}a_{21}\end{pmatrix}$

Step 3 ${a_{12}}^3+{a_{21}}^3$의 값을 구한다.

$A+B=\begin{pmatrix}0&a_{12}\\a_{21}&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{12}a_{21}&0\\0&a_{12}a_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{12}a_{21}&a_{12}\\a_{21}&a_{12}a_{21}\end{pmatrix}$

행렬 $A+B$의 모든 성분의 합이 -4이므로

$a_{12}a_{21}+a_{12}+a_{21}+a_{12}a_{21}=-4$

$\therefore a_{12}+a_{21}+2a_{12}a_{21}=-4$ …… ㉠

또 행렬 $A+B$의 모든 성분의 곱이 -27이므로

$a_{12}a_{21}\times a_{12}\times a_{21}\times a_{12}a_{21}=-27$, $(a_{12}a_{21})^3=-27$

$\therefore a_{12}a_{21}=-3$ ($\because a_{12}$, a_{21}은 실수)

이것을 ㉠에 대입하면 $a_{12}+a_{21}+2\times(-3)=-4$

$\therefore\ a_{12}+a_{21}=2$

$\therefore\ {a_{12}}^3+{a_{21}}^3=(a_{12}+a_{21})^3-3a_{12}a_{21}(a_{12}+a_{21})$

$=2^3-3\times(-3)\times2=26$ 답 26

1042 Step 1 행렬 A^n의 모든 성분의 합을 구한다.

$A=\begin{pmatrix} m & 0 \\ m-k & k \end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix} m & 0 \\ m-k & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ m-k & k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ m^2-k^2 & k^2 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ m^2-k^2 & k^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ m-k & k \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} m^3 & 0 \\ m^3-k^3 & k^3 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore\ A^n=\begin{pmatrix} m^n & 0 \\ m^n-k^n & k^n \end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^n의 모든 성분의 합은

$m^n+0+(m^n-k^n)+k^n=2m^n$

Step 2 순서쌍 (m, n)의 개수가 6이 되도록 하는 k의 조건을 구한다.

$2m^n=2^k$에서 $m^n=2^{k-1}$

이때 $m=2^a$이라 하면 $(2^a)^n=2^{k-1}$ $\therefore\ 2^{an}=2^{k-1}$

따라서 n은 $k-1$의 약수이어야 하므로 순서쌍 (m, n)의 개수가 6이려면 $k-1$의 약수의 개수가 6이어야 한다.

즉 $k-1$은

p^5 또는 $p^2\times q$ (p, q는 서로 다른 소수)

의 꼴이어야 한다.

Step 3 100 이하의 자연수 k의 개수를 구한다.

(i) $k-1=p^5$ (p는 소수)인 경우

$1\le k\le100$에서 $0\le k-1\le99$

$\therefore\ 0\le p^5\le99$

이를 만족시키는 소수 p는 2의 1개이다.

따라서 조건을 만족시키는 k의 개수는 1이다.

(ii) $k-1=p^2\times q$ (p, q는 서로 다른 소수)인 경우

$1\le k\le100$에서 $0\le k-1\le99$

$\therefore\ 0\le p^2\times q\le99$ ····· ㉠

$p=2$일 때, ㉠에서

$0\le4q\le99$ $\therefore\ 0\le q\le\frac{99}{4}$

이를 만족시키는 소수 q는

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23의 8개

$p=3$일 때, ㉠에서

$0\le9q\le99$ $\therefore\ 0\le q\le11$

이를 만족시키는 소수 q는

2, 5, 7, 11의 4개

$p=5$일 때, ㉠에서

$0\le25q\le99$ $\therefore\ 0\le q\le\frac{99}{25}$

이를 만족시키는 소수 q는

2, 3의 2개

$p=7$일 때, ㉠에서

$0\le49q\le99$ $\therefore\ 0\le q\le\frac{99}{49}$

이를 만족시키는 소수 q는

2의 1개

따라서 조건을 만족시키는 k의 개수는

$8+4+2+1=15$

(i), (ii)에서 구하는 k의 개수는

$1+15=16$ 답 16

1043 Step 1 2차 조사 결과 찬성, 반대하는 학생들의 비율을 행렬로 나타낸다.

2차 조사 결과 전체 학생 중에서 찬성하는 학생들의 비율을 p, 반대하는 학생들의 비율을 q라 하면

$p=$(1차에서 찬성한 학생 중 2차에서도 찬성한 비율)

+(1차에서 반대한 학생 중 2차에서 찬성으로 의견을 바꾼 비율)

$=0.7\times(1-0.4)+0.3\times0.1$

$=0.7\times0.6+0.3\times0.1$

$q=$(1차에서 찬성한 학생 중 2차에서 반대로 의견을 바꾼 비율)

+(1차에서 반대한 학생 중 2차에서도 반대한 비율)

$=0.7\times0.4+0.3\times(1-0.1)$

$=0.7\times0.4+0.3\times0.9$

이것을 행렬로 나타내면

$(p\quad q)=(0.7\quad 0.3)\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}=AB$

Step 2 3차 조사 결과 반대하는 학생들의 비율을 나타내는 행렬의 성분을 찾는다.

3차 조사 결과 전체 학생 중에서 반대하는 학생들의 비율은

(2차에서 찬성한 학생 중 3차에서 반대로 의견을 바꾼 비율)

+(2차에서 반대한 학생 중 3차에서도 반대한 비율)

$=p\times0.3+q\times(1-0.2)$

$=p\times0.3+q\times0.8$

이것을 행렬로 나타내면

$(p\quad q)\begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.8 \end{pmatrix}=AB\begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.8 \end{pmatrix}$

이때 $\begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.8 \end{pmatrix}$은 행렬 C의 제2열과 같으므로 구하는 것은 행렬 ABC의 $(1, 2)$ 성분과 같다.

답 ②

1044 Step 1 $B^2=O$이지만 $B\ne O$인 예를 찾아본다.

ㄱ. $A=O$이면 $(AB)^2=(BA)^2=A^2+B^2$에서

$B^2=O$

이때 $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이면

$B^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

이지만 $B\ne O$이다. (거짓)

Step 2 $(AB+BA)^2+(AB-BA)^2$을 전개하여 간단히 한다.

ㄴ. $(AB+BA)^2+(AB-BA)^2$

$=ABAB+ABBA+BAAB+BABA$

$+ABAB-ABBA-BAAB+BABA$

$=2(ABAB+BABA)$

$=2\{(AB)^2+(BA)^2\}$

$=2\{(A^2+B^2)+(A^2+B^2)\}$

$=4(A^2+B^2)$ (참)

Step 3 $(AB)^2=A^2+B^2$, $(BA)^2=A^2+B^2$에서 $B^2A=AB^2$임을 알아낸다.

ㄷ. $(AB)^2=A^2+B^2$에서

$ABAB=A^2+B^2$

양변의 오른쪽에 행렬 A를 곱하면

$ABABA=(A^2+B^2)A=A^3+B^2A$ …… ㉠

또 $(BA)^2=A^2+B^2$에서

$BABA=A^2+B^2$

양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$ABABA=A(A^2+B^2)=A^3+AB^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $A^3+B^2A=A^3+AB^2$이므로

$B^2A=AB^2$

$\therefore A^2B^2=A(AB^2)=A(B^2A)$

$=(AB^2)A=(B^2A)A=B^2A^2$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

시험 만점 완성하기

본책 204~207쪽

1045 전략 행렬 A의 각 성분을 k에 대한 식으로 나타낸다.

$a_{11}=1^3-(-2)^1+k=3+k$, $a_{12}=1^3-(-2)^2+k=-3+k$,

$a_{21}=2^3-(-2)^1+k=10+k$, $a_{22}=2^3-(-2)^2+k=4+k$

이때 행렬 A의 모든 성분의 합이 30이므로

$(3+k)+(-3+k)+(10+k)+(4+k)=30$

$4k+14=30$ $\therefore k=4$ 답 ④

1046 전략 두 행렬이 서로 같으면 두 행렬의 대응하는 성분이 서로 같음을 이용한다.

두 행렬의 대응하는 성분이 서로 같아야 하므로

$a^2=10-4\sqrt{6}$, $a+b=4$, $k=ab$, $b^2=10+4\sqrt{6}$

$a^2+b^2=(10-4\sqrt{6})+(10+4\sqrt{6})=20$이므로

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$20=4^2-2k$, $2k=-4$ $\therefore k=-2$ 답 ②

1047 전략 주어진 조건을 이용하여 행렬 $A-2B$를 X, Y에 대한 식으로 나타낸다.

$-2A+B=X$ …… ㉠

$A-B=Y$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$-A=X+Y$ $\therefore A=-X-Y$

㉠+㉡×2를 하면

$-B=X+2Y$ $\therefore B=-X-2Y$

$\therefore A-2B=-X-Y-2(-X-2Y)$

$=-X-Y+2X+4Y$

$=X+3Y$ …… ㉢

이때 $x_{11}=1+1-1=1$, $x_{12}=1+2-1=2$, $x_{21}=2+1-1=2$, $x_{22}=2+2-1=3$이므로

$X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

$y_{11}=1-1^2=0$, $y_{12}=1-2^2=-3$, $y_{21}=2-1^2=1$, $y_{22}=2-2^2=-2$이므로

$Y=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

따라서 ㉢에서

$A-2B=X+3Y=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -9\\ 3 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 5 & -3\end{pmatrix}$

이므로 행렬 $A-2B$의 모든 성분의 합은

$1+(-7)+5+(-3)=-4$ 답 ②

1048 전략 행렬의 곱셈을 이용하여 행렬 AB를 구한다.

$AB=2E$에서 $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & p\\ q & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}2 & 2p\\ 3+q & 3p+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2p=0$, $3+q=0$, $3p+2=2$

$\therefore p=0$, $q=-3$

$\therefore p^2+q^2=0^2+(-3)^2=9$ 답 ④

1049 전략 $AB=-E$임을 이용하여 행렬 A^8B^5을 간단히 한다.

$AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-E$

$\therefore A^8B^5=A^7(AB)B^4=A^7(-E)B^4=-A^7B^4$

$=-A^6(AB)B^3=-A^6(-E)B^3=A^6B^3$

$=A^5(AB)B^2=A^5(-E)B^2=-A^5B^2$

$=-A^4(AB)B=-A^4(-E)B=A^4B$

$=A^3(AB)=A^3(-E)=-A^3$

$=-\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

$=-\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

$=-\begin{pmatrix}4 & 3\\ -3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^8B^5의 모든 성분의 곱은

$-4\times(-3)\times3\times2=72$ 답 ⑤

1050 전략 행렬 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 5 & a \end{pmatrix}^2$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 5 & a \end{pmatrix}^3$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 5 & a \end{pmatrix}^4$, …을 차례대로 구하여 규칙을 찾아 행렬 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 5 & a \end{pmatrix}^n$을 구한다.

행렬 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 5 & a \end{pmatrix}$에서

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 5 & a \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 5 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 5 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 10a & a^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 5 & a \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 5 & a \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} a & 0 \\ 5 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 10a & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 5 & a \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 15a^2 & a^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 5 & a \end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 5 & a \end{pmatrix}^3\begin{pmatrix} a & 0 \\ 5 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 15a^2 & a^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 5 & a \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ 20a^3 & a^4 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a & 0 \\ 5 & a \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 5na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$$

이때 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 5 & a \end{pmatrix}^n$의 (1, 1) 성분과 (2, 1) 성분이 같아야 하므로

$a^n=5na^{n-1}$, $a^{n-1}(a-5n)=0$

$\therefore a=5n$ ($\because a^{n-1}>0$)

따라서 세 자리 자연수 a의 최솟값은 100이다. 답 ①

1051 전략 $A^2=3E$임을 이용하여 행렬 A^7을 구한다.

$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=3E$$

$\therefore A^7=(A^2)^3A=(3E)^3A=27EA=27A$

$$=27\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 81 & 54 \\ -81 & -81 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A^7의 모든 성분의 합은

$81+54+(-81)+(-81)=-27$ 답 ②

1052 전략 주어진 자료를 행렬로 표현한다.

제품 A를 1개 만드는 데 필요한 재료 P, Q의 총구매 가격을 a원, 제품 B를 1개 만드는 데 필요한 재료 P, Q의 총구매 가격을 b원이라 하면

$a=2x+5y$, $b=3x+4y$

이것을 행렬로 나타내면 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

이때 제품 A를 12개, 제품 B를 18개 만드는 데 필요한 재료 P, Q의 총구매 가격을 c원이라 하면

$c=12a+18b$

이므로

$$(c)=(12 \quad 18)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=(12 \quad 18)\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 행렬은 $(12 \quad 18)\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$이다. 답 ②

1053 전략 먼저 행렬 $(A+B)^2$을 구한 후 $(A+B)^{100}=\{(A+B)^2\}^{50}$임을 이용한다.

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$$

$$=(A^2+B^2)+(AB+BA)$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

이때

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

이므로 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} -n+1 & n \\ -n & n+1 \end{pmatrix}$

$\therefore (A+B)^{100}=\{(A+B)^2\}^{50}$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{50}=\begin{pmatrix} -49 & 50 \\ -50 & 51 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $(A+B)^{100}$의 (2, 2) 성분은 51이다. 답 ③

1054 전략 단위행렬의 성질을 이용한다.

$(A+E)^2=A+5E$에서 $A^2+2A+E=A+5E$

$\therefore A^2=-A+4E$

따라서

$$(A+E)^3=(A+E)^2(A+E)$$

$$=(A+5E)(A+E)$$

$$=A^2+6A+5E$$

$$=(-A+4E)+6A+5E$$

$$=5A+9E$$

이므로 $a=5$, $b=9$

$\therefore ab=45$ 답 ⑤

1055 전략 행렬의 곱셈을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $A+B=3E$에서 $B=-A+3E$

이것을 $BA=2A$에 대입하면

$(-A+3E)A=2A$, $-A^2+3A=2A$

$\therefore A^2=A$ (참)

ㄴ. $A+B=3E$에서 $A=-B+3E$

이것을 $BA=2A$에 대입하면

$B(-B+3E)=2(-B+3E)$

$-B^2+3B=-2B+6E$

$\therefore B^2-5B=-6E$ (거짓)

ㄷ. $A+B=3E$에서 $B=-A+3E$이므로

$AB=A(-A+3E)=-A^2+3A$

$=(-A+3E)A=BA$

따라서

$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$

$=A^2-B^2$

이므로

$A^2-B^2=(A+B)(A-B)=3E(A-B)$

$=3(A-B)$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

1056 전략 행렬 A_2, A_3, …을 차례대로 구하여 규칙을 찾아 행렬 A_n을 구한다.

$A_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}$에서

$A_2=A_1B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$

$A_3=A_2B=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

⋮

$\therefore A_{2n-1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $A_{2n}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

ㄱ. $A_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $A_6=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$이므로

$A_3\neq A_6$ (거짓)

ㄴ. $A_{2n}A_{2n+1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $A_{2n+1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$이므로 $A_{2n}A_{2n+1}=A_{2n+1}$ (참)

ㄷ. $A_{2n}A_{2n+2}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$, $A_{2n}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$이므로 $A_{2n}A_{2n+2}=A_{2n}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

1057 전략 나머지정리를 이용하여 행렬 A의 각 성분을 구한다.

$P(x)=x^4-3x-1$이라 하면 $P(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $P(a)$이다.

(i) $i=1$, $j=1$일 때

$P(x)$를 $x-(1-1)$, 즉 x로 나누었을 때의 나머지는

$P(0)=-1$ $\therefore a_{11}=-1$

(ii) $i=1$, $j=2$일 때

$P(x)$를 $x-(1-2)$, 즉 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(-1)=3$ $\therefore a_{12}=3$

(iii) $i=2$, $j=1$일 때

$P(x)$를 $x-(2-1)$, 즉 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(1)=-3$ $\therefore a_{21}=-3$

(iv) $i=2$, $j=2$일 때

$P(x)$를 $x-(2-2)$, 즉 x로 나누었을 때의 나머지는

$P(0)=-1$ $\therefore a_{22}=-1$

이상에서 $A=\begin{pmatrix}-1&3\\-3&-1\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 곱은

$-1\times3\times(-3)\times(-1)=-9$ 답 -9

1058 전략 주어진 등식을 이용하여 행렬 X를 A, B에 대한 식으로 나타낸다.

$4(X-2B)-A=2X+A$에서

$4X-8B-A=2X+A$, $2X=2A+8B$

$\therefore X=A+4B$

$=\begin{pmatrix}2k&k-1\\0&k\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1&3k\\-2&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2k&k-1\\0&k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&12k\\-8&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2k+4&13k-1\\-8&k\end{pmatrix}$

이때 행렬 X의 모든 성분의 합이 43이므로

$(2k+4)+(13k-1)+(-8)+k=43$

$16k-5=43$ $\therefore k=3$ 답 3

1059 전략 주어진 행렬의 성분을 x에 대한 식으로 나타낸다.

$\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-4\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+2y&-4x+y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$=(3x^2-2xy+y^2)$

이때 $3x-y+1=0$에서 $y=3x+1$이므로

$3x^2-2xy+y^2=3x^2-2x(3x+1)+(3x+1)^2$

$=3x^2-6x^2-2x+9x^2+6x+1$

$=6x^2+4x+1=6\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$

따라서 $a=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{3}$이므로

$b-2a=\frac{1}{3}-2\times\left(-\frac{1}{3}\right)=1$ 답 1

1060 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식 $x^2-2x-10=0$의 두 실근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-10$

한편 $A=\begin{pmatrix}k&\alpha\\\beta&k\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}k&\alpha\\\beta&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k&\alpha\\\beta&k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k^2+\alpha\beta&2k\alpha\\2k\beta&\alpha\beta+k^2\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^2의 모든 성분의 합은

$(k^2+\alpha\beta)+2k\alpha+2k\beta+(\alpha\beta+k^2)$

$=2k^2+2k(\alpha+\beta)+2\alpha\beta$

$=2k^2+2k\times2+2\times(-10)$

$=2k^2+4k-20$

즉 $2k^2+4k-20=28$이므로

$k^2+2k-24=0$, $(k+6)(k-4)=0$

$\therefore k=4$ ($\because k>0$) 답 4

1061 전략 행렬의 곱셈에 대한 성질과 거듭제곱을 이용하여 주어진 조건에서 a, b, c, d의 값을 구한다.

$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$에서

$A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2$

이므로 $AB=BA$

즉 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} bd & a \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & 1 \\ ad & bd \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$bd=c$, $a=1$, $d=ad$

$\therefore a=1$, $bd=c$ …… ㉠

한편 $A^2=2A$에서 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+b \\ ac+c & bc+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a^2+bc=2a$, $ab+b=2b$, $ac+c=2c$, $bc+1=2$

$\therefore bc=1$ …… ㉡

$B^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}=dE$이므로

$B^4=(B^2)^2=(dE)^2=d^2E$

이때 $B^4=\frac{1}{16}E$이므로 $d^2E=\frac{1}{16}E$

$d^2=\frac{1}{16}$ $\therefore d=\frac{1}{4}$ ($\because d>0$)

$d=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{4}b=c$

$c=\frac{1}{4}b$를 ㉡에 대입하면 $\frac{1}{4}b^2=1$

$b^2=4$ $\therefore b=2$ ($\because b>0$)

$\therefore c=\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2}$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=\frac{1}{2}$, $d=\frac{1}{4}$이므로

$a+b+c+d=\frac{15}{4}$ 답 $\frac{15}{4}$

1062 전략 조건 (가)를 이용하여 행렬 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$와 같은 행렬을 구한다.

조건 (가)에서 $A^2+3A=E$

$(A+3E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$A\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}=A(A+3E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(A^2+3A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$=E\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}=5A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=5\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ($\because$ 조건 (나))

$=\begin{pmatrix} -15 \\ -5 \end{pmatrix}$

따라서 $x=-15$, $y=-5$이므로

$xy=75$ 답 75

1063 전략 직선 $y=f(x)$와 이차함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같음을 이용한다.

직선 $y=-2x+1$과 이차함수 $y=x^2-2$의 그래프의 교점의 x좌표는 $-2x+1=x^2-2$에서

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

즉 두 교점의 좌표는 $(-3, 7)$, $(1, -1)$

$\therefore a=1$, $b=-1$, $c=-3$, $d=7$ ($\because a>0$)

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ … ❶

직선 $y=x+4$와 이차함수 $y=x^2+3x-4$의 그래프의 교점의 x좌표는 $x+4=x^2+3x-4$에서

$x^2+2x-8=0$, $(x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

즉 두 교점의 좌표는 $(-4, 0)$, $(2, 6)$

$\therefore e=2$, $f=6$, $g=-4$, $h=0$ ($\because e>0$)

$\therefore B=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ … ❷

따라서

$2A-(3B-2A)=2A-3B+2A$

$=4A-3B$

$=4\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -12 & 28 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 18 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2 & -22 \\ 0 & 28 \end{pmatrix}$

이므로 구하는 모든 성분의 합은

$-2+(-22)+0+28=4$ … ❸

답 4

단계	채점 요소	배점
❶	행렬 A 구하기	2점
❷	행렬 B 구하기	2점
❸	행렬 $2A-(3B-2A)$의 모든 성분의 합 구하기	2점

1064 전략 행렬 A_2, A_3, A_4, …를 차례대로 구하여 규칙을 찾아 행렬 A_n을 구한다.

$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에서

$A_2=A_1P=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

$A_3=PA_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$A_4=A_3P=\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$A_5=PA_4=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}=A_1$

⋮

$\therefore A_{4n-3}=A_1$, $A_{4n-2}=A_2$, $A_{4n-1}=A_3$, $A_{4n}=A_4$

(단, $n=1, 2, 3, \cdots$) … ❶

이때 $123=4\times31-1$이므로

$$A_{123}=A_3=\begin{pmatrix}7 & 5\\ 3 & 1\end{pmatrix} \quad \cdots ❷$$

따라서 행렬 A_{123}의 $(2,\ 1)$ 성분은 3이다. $\cdots ❸$

답 3

단계	채점 요소	배점
❶	행렬 A_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 구하기	3점
❷	행렬 A_{123} 구하기	2점
❸	행렬 A_{123}의 $(2,\ 1)$ 성분 구하기	1점

1065 전략 $A^m=A^n$을 만족시키기 위한 m, n의 조건을 찾는다.

$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

$$A^4=A^3A=EA=A$$

$$\vdots$$

$$\therefore\ A^{3k-2}=A,\ A^{3k-1}=A^2,\ A^{3k}=E\ (\text{단, } k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \quad \cdots ❶$$

따라서 $A^m=A^n$을 만족시키려면 두 자연수 m, n을 3으로 나누었을 때의 나머지가 같아야 한다.

이때 60 이하의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 0, 1, 2인 자연수는 각각 20개이므로 구하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

$$3\times{}_{20}\mathrm{C}_2=3\times\frac{20\times19}{2}=570 \quad \cdots ❷$$

답 570

단계	채점 요소	배점
❶	행렬 A^k $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 구하기	3점
❷	순서쌍 $(m,\ n)$의 개수 구하기	3점

1066 전략 주어진 등식을 이용하여 두 행렬 A^{13}, B^5을 간단히 한다.

$A^2-A+E=O$의 양변에 행렬 $A+E$를 곱하면

$$(A+E)(A^2-A+E)=O$$

$$A^3+E=O \qquad \therefore\ A^3=-E$$

$$\therefore\ A^{13}=(A^3)^4A=(-E)^4A=EA=A \quad \cdots ❶$$

$B^2-4B=O$에서

$$B^2=4B$$

$B^3=B^2B=4BB=4B^2=4\times4B=16B$이므로

$$B^5=B^2B^3=4B\times16B=64B^2$$

$$=64\times4B=256B \quad \cdots ❷$$

따라서

$$A^{13}B^5=A\times256B=256AB$$

이므로

$$k=256 \quad \cdots ❸$$

답 256

단계	채점 요소	배점
❶	행렬 A^{13}을 간단히 하기	2점
❷	행렬 B^5을 간단히 하기	2점
❸	k의 값 구하기	1점


ME
MO