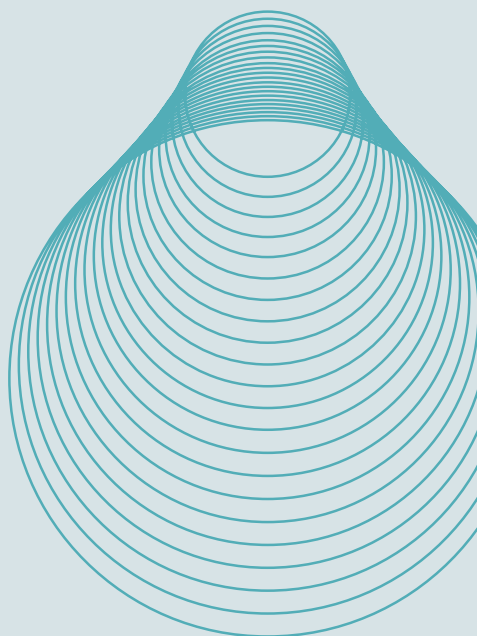


개념

수학의 시작 개념원리

대수

정답 및 풀이



1

지수

I. 지수함수와 로그함수

01

거듭제곱과 거듭제곱근

● 본책 10~16쪽

1

- (1) -64 의 세제곱근은 방정식 $x^3 = -64$ 의 근이므로
 $x^3 + 64 = 0, \quad (x+4)(x^2 - 4x + 16) = 0$
 $\therefore x = -4$ 또는 $x = 2 \pm 2\sqrt{3}i$
- (2) 81 의 네제곱근은 방정식 $x^4 = 81$ 의 근이므로
 $x^4 - 81 = 0, \quad (x^2 + 9)(x+3)(x-3) = 0$
 $\therefore x = \pm 3i$ 또는 $x = \pm 3$

답 (1) $-4, 2+2\sqrt{3}i, 2-2\sqrt{3}i$ (2) $-3i, 3i, -3, 3$

2

- (1) $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$
- (2) $\sqrt[10]{(-3)^{10}} = |-3| = 3$
- (3) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$
- (4) $-\sqrt[4]{256} = -\sqrt[4]{4^4} = -4$
- (5) $\sqrt[3]{-0.008} = \sqrt[3]{(-0.2)^3} = -0.2$
- (6) $-\sqrt[6]{\left(-\frac{3}{2}\right)^6} = -\left|-\frac{3}{2}\right| = -\frac{3}{2}$

답 (1) 2 (2) 3 (3) -3

(4) -4 (5) -0.2 (6) $-\frac{3}{2}$

3

- (1) $\sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3 \times 27} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$
- (2) $\sqrt[5]{16} \times \sqrt[5]{64} = \sqrt[5]{2^4} \times \sqrt[5]{2^6} = \sqrt[5]{2^4 \times 2^6}$
 $= \sqrt[5]{2^{10}} = \sqrt[5]{(2^2)^5} = 4$
- (3) $\sqrt[3]{\frac{2}{16}} = \sqrt[3]{\frac{2}{2^4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{2}$
- (4) $\sqrt[4]{\frac{3}{27}} = \sqrt[4]{\frac{3}{3^3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{9}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- (5) $(\sqrt[6]{25})^3 = \sqrt[6]{25^3} = \sqrt[6]{(5^2)^3} = \sqrt[6]{5^6} = 5$
- (6) $(\sqrt[8]{81})^4 = \sqrt[8]{81^4} = \sqrt[8]{(3^4)^4} = \sqrt[8]{3^{16}}$
 $= \sqrt[8]{(3^2)^8} = 9$

(7) $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt[3 \times 2]{3^3} = \sqrt{3}$

(8) $\sqrt[3]{\sqrt{4}} = \sqrt[2 \times 3]{2^2} = \sqrt[3]{2}$

(9) $\sqrt[12]{3^4} \times \sqrt[9]{3^6} = \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3^2}$
 $= \sqrt[3]{3 \times 3^2} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

(10) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{8}} \times \sqrt[4]{\sqrt[4]{64}} = \sqrt[12]{2^3} \times \sqrt[8]{2^6}$
 $= \sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{2 \times 2^3}$
 $= \sqrt[4]{2^4} = 2$

답 (1) 3 (2) 4 (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (5) 5
 (6) 9 (7) $\sqrt{3}$ (8) $\sqrt[3]{2}$ (9) 3 (10) 2

4

- ① -4 의 제곱근을 x 라 하면 $x^2 = -4$ 이므로
 $x = \pm 2i$
- ② 네제곱근 16은 $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$
- ③ 27의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = 27$ 이므로
 $x^3 - 27 = 0, \quad (x-3)(x^2 + 3x + 9) = 0$
 $\therefore x = 3$ 또는 $x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$
- ④ 9의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 9$ 이므로
 $x^4 - 9 = 0, \quad (x^2 + 3)(x^2 - 3) = 0$
 $\therefore x = \pm \sqrt{3}i$ 또는 $x = \pm \sqrt{3}$
 따라서 9의 네제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$ 의 2개이다.
- ⑤ -16 의 네제곱근을 x 라 하면
 $x^4 = -16$
 이를 만족시키는 실수 x 는 존재하지 않으므로 -16 의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.
- 따라서 옳은 것은 ④이다. 답 ④

5

- -10 의 네제곱근 중 실수인 것은 없으므로
 $a = 0$
- -10 의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-10}$ 의 1개이므로
 $b = 1$
- 10 의 네제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt[4]{10}, \sqrt[4]{10}$ 의 2개이므로
 $c = 2$

10의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{10}$ 의 1개이므로

$$d=1$$

$$\therefore ab - cd = 0 - 2 = -2$$

답 -2

6

$$\begin{aligned} (1) \sqrt[5]{32^2} \div (\sqrt[3]{2})^6 - \sqrt[3]{64} &= \sqrt[5]{(2^5)^2} \div \sqrt[3]{2^6} - \sqrt[3]{2^6} \\ &= \sqrt[5]{(2^2)^5} \div \sqrt[3]{(2^2)^3} - 2 \\ &= 2^2 \div 2^2 - 2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}{\sqrt[3]{27}} \\ &= \frac{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2}+1)}{\sqrt[3]{3^3}} \\ &= \frac{(\sqrt[3]{2}+1)\{(\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}+1\}}{3} \\ &= \frac{(\sqrt[3]{2})^3+1^3}{3} \\ &= \frac{2+1}{3} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[9]{125}}} \times \sqrt[6]{\frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[125]{125}}} \times \sqrt[9]{\frac{\sqrt[4]{125}}{\sqrt[125]{125}}} \\ &= \frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{125}}}{\sqrt[4]{\sqrt[9]{125}}} \times \frac{\sqrt[6]{\sqrt[3]{125}}}{\sqrt[6]{\sqrt[125]{125}}} \times \frac{\sqrt[9]{\sqrt[4]{125}}}{\sqrt[9]{\sqrt[125]{125}}} \\ &= \frac{\sqrt[12]{125}}{\sqrt[36]{125}} \times \frac{\sqrt[18]{125}}{\sqrt[12]{125}} \times \frac{\sqrt[36]{125}}{\sqrt[18]{125}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \sqrt{\frac{81^2+9^5}{27^4+9^5}} &= \sqrt{\frac{(3^4)^2+(3^2)^5}{(3^3)^4+(3^2)^5}} = \sqrt{\frac{3^8+3^{10}}{3^{12}+3^{10}}} \\ &= \sqrt{\frac{3^8(1+3^2)}{3^{10}(3^2+1)}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{3^2}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

답 (1) -1 (2) 1 (3) 1 (4) $\frac{1}{3}$

7

$$\begin{aligned} (1) \sqrt[4]{xy^2} \times \sqrt[8]{x^2y} \div \sqrt[6]{x^2y^3} \\ &= \sqrt[24]{x^6y^{12}} \times \sqrt[24]{x^6y^3} \div \sqrt[24]{x^8y^{12}} \\ &= \frac{\sqrt[24]{x^6y^{12}} \times \sqrt[24]{x^6y^3}}{\sqrt[24]{x^8y^{12}}} = \sqrt[24]{\frac{x^{12}y^{15}}{x^8y^{12}}} \\ &= \sqrt[24]{x^4y^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}} \\ &= \frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[5]{\sqrt{x}}} \times \frac{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{\sqrt[5]{x}}} \times \frac{\sqrt{\sqrt[5]{x}}}{\sqrt{\sqrt[3]{x}}} \\ &= \frac{\sqrt[15]{x}}{\sqrt[10]{x}} \times \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[15]{x}} \times \frac{\sqrt[10]{x}}{\sqrt[6]{x}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \sqrt[5]{x \times \sqrt[4]{x^3} \times \sqrt[3]{x}} &= \sqrt[5]{x \times \sqrt[4]{x^3 \times \sqrt[3]{x}}} \\ &= \sqrt[5]{x} \times \sqrt[20]{x^3 \times \sqrt[3]{x}} \\ &= \sqrt[5]{x} \times \sqrt[20]{x^3 \times \sqrt[20]{\sqrt[3]{x}}} \\ &= \sqrt[5]{x} \times \sqrt[20]{x^3 \times \sqrt[60]{x}} \\ &= \sqrt[60]{x^{12} \times \sqrt[60]{x^9} \times \sqrt[60]{x}} \\ &= \sqrt[60]{x^{12} \times x^9 \times x} = \sqrt[60]{x^{12+9+1}} \\ &= \sqrt[60]{x^{22}} = \sqrt[30]{x^{11}} \end{aligned}$$

답 (1) $\sqrt[24]{x^4y^3}$ (2) 1 (3) $\sqrt[30]{x^{11}}$

8

$$A = \sqrt[3]{\sqrt[6]{15}} = \sqrt[6]{15}, B = \sqrt[4]{6}, C = \sqrt[3]{4}$$

6, 4, 3의 최소공배수는 12이므로

$$A = \sqrt[6]{15} = \sqrt[12]{15^2} = \sqrt[12]{225},$$

$$B = \sqrt[4]{6} = \sqrt[12]{6^3} = \sqrt[12]{216},$$

$$C = \sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256}$$

이때 $\sqrt[12]{216} < \sqrt[12]{225} < \sqrt[12]{256}$ 이므로

$$B < A < C$$

답 $B < A < C$

02

지수의 확장

● 본책 17~25쪽

9

$$(1) (2\sqrt{2})^0 = 1$$

$$(2) 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$(3) \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16$$

$$(4) 8^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{16}} = 17$$

$$\text{답 (1) 1 (2) } \frac{1}{9} \text{ (3) 16 (4) 17}$$

10

$$(1) (2^{\frac{3}{4}})^2 \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$$

$$(2) 5^{\frac{4}{3}} \times 25^{-\frac{1}{6}} = 5^{\frac{4}{3}} \times (5^2)^{-\frac{1}{6}} = 5^{\frac{4}{3}} \times 5^{-\frac{1}{3}} = 5^1 = 5$$

$$(3) 3^{\frac{1}{2}} \div (3^{\frac{1}{4}})^6 = 3^{\frac{1}{2}} \div 3^{\frac{3}{2}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$(4) 32^{\frac{1}{2}} \div 4^{\frac{1}{4}} = (2^5)^{\frac{1}{2}} \div (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{5}{2}} \div 2^{\frac{1}{2}} = 2^2 = 4$$

$$(5) \left\{ \left(\frac{1}{100} \right)^{\frac{3}{4}} \right\}^{-\frac{8}{3}} = \left(\frac{1}{100} \right)^{-2} = (100^{-1})^{-2} = 100^2 = 10000$$

$$(6) \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^{-\frac{10}{3}} \right\}^{\frac{12}{5}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{-8} = (2^{-1})^{-8} = 2^8 = 256$$

$$(7) (4^{\sqrt{3}})^{\sqrt{12}} = 4^6 = 4096$$

$$(8) 5^{3\sqrt{5}} \div 5^{\sqrt{5}} = 5^{2\sqrt{5}}$$

$$(9) 3^{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} \times 3^{2-\sqrt{2}} = 3^{2+\sqrt{2}} \times 3^{2-\sqrt{2}} = 3^4 = 81$$

$$(10) 5^{\sqrt{3}} \times 5^{1-\sqrt{3}} \times 3^{\pi} \times 3^{2-\pi} = 5^1 \times 3^2 = 45$$

$$\text{답 (1) 8 (2) 5 (3) } \frac{1}{3}$$

$$(4) 4 (5) 10000$$

$$(6) 256 (7) 4096$$

$$(8) 5^{2\sqrt{5}} (9) 81 (10) 45$$

11

$$(1) \sqrt{a} \times \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}}$$

$$(2) \sqrt[4]{a^5} \div \sqrt[6]{a^9} = a^{\frac{5}{4}} \div a^{\frac{3}{2}} = a^{-\frac{1}{4}}$$

$$\text{답 (1) } a^{\frac{5}{6}} \text{ (2) } a^{-\frac{1}{4}}$$

12

$$(1) 8^{\frac{1}{4}} \times 32^{-\frac{1}{2}} \div 2^{-\frac{3}{4}} = (2^3)^{\frac{1}{4}} \times (2^5)^{-\frac{1}{2}} \div 2^{-\frac{3}{4}}$$

$$= 2^{\frac{3}{4}} \times 2^{-\frac{5}{2}} \div 2^{-\frac{3}{4}}$$

$$= 2^{\frac{3}{4} - \frac{5}{2} - (-\frac{3}{4})}$$

$$= 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \left\{ \left(\frac{125}{216} \right)^{-\frac{1}{3}} \right\}^{\frac{5}{2}} \div \left(\frac{6}{125} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\left\{ \left(\frac{5}{6} \right)^3 \right\}^{-\frac{1}{3}} \right]^{\frac{5}{2}} \div \left(\frac{6}{5^3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{5}{6} \right)^{-\frac{5}{2}} \div \frac{6^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{3}{2}}} = \frac{5^{-\frac{5}{2}}}{6^{-\frac{5}{2}}} \times \frac{5^{\frac{3}{2}}}{6^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{5^{-1}}{6^{-2}} = \frac{36}{5}$$

$$(3) 3^{2+2\sqrt{2}} \div 3^{2\sqrt{2}-1} - \{(-3)^6\}^{\frac{1}{2}} = 3^3 - (3^6)^{\frac{1}{2}} = 3^3 - 3^3 = 0$$

$$\text{답 (1) } \frac{1}{2} \text{ (2) } \frac{36}{5} \text{ (3) 0}$$

13

$$\left(\frac{1}{8} \right)^{\frac{x}{3}} = (2^{-3})^{\frac{x}{3}} = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \frac{1}{3}$$

$$\text{답 } \frac{1}{3}$$

14

$$(1) \sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[4]{a} \times \sqrt[12]{a} = a^{\frac{2}{3}} \div a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{12}}$$

$$= a^{\frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12}} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}$$

$$(2) \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[4]{a\sqrt{a^k}} \text{에서}$$

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}},$$

$$\sqrt[4]{a\sqrt{a^k}} = (a \times a^{\frac{k}{2}})^{\frac{1}{4}} = (a^{\frac{2+k}{2}})^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{2+k}{8}}$$

$$\text{따라서 } a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2+k}{8}} \text{ 이므로}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2+k}{8}, \quad 16 = 6 + 3k$$

$$\therefore k = \frac{10}{3}$$

$$\text{답 (1) } \frac{1}{2} \text{ (2) } \frac{10}{3}$$

15

$$\sqrt[3]{6\sqrt{6} \times \frac{6}{\sqrt[4]{6}}} = (6 \times 6^{\frac{1}{2}} \times 6 \div 6^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}$$

$$= (6^{1+\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}$$

$$= (6^{\frac{9}{4}})^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{3}{4}}$$

$$\therefore k = \frac{3}{4}$$

$$\text{답 } \frac{3}{4}$$

16

$\sqrt[5]{2^n} = 2^{\frac{n}{5}}$ 이므로 $\sqrt[5]{2^n}$ 이 자연수가 되려면 n 은 5의 배수이어야 한다.

따라서 100 이하의 자연수 n 은

$$5, 10, 15, \dots, 100$$

의 20개이다.

답 20

17

$2^3 = a$ 에서 $2 = a^{\frac{1}{3}}$, $3^4 = b$ 에서 $3 = b^{\frac{1}{4}}$ 이므로

$$12^8 = (2^2 \times 3)^8 = 2^{16} \times 3^8$$

$$= (a^{\frac{1}{3}})^{16} (b^{\frac{1}{4}})^8$$

$$= a^{\frac{16}{3}} b^2$$

답 $a^{\frac{16}{3}} b^2$

18

$a = \sqrt[3]{6}$ 에서 $a^3 = 6$, $b = \sqrt[4]{7}$ 에서 $b^4 = 7$ 이므로

$$\sqrt[9]{42} = 42^{\frac{1}{9}} = (6 \times 7)^{\frac{1}{9}}$$

$$= (a^3 b^2)^{\frac{1}{9}} = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{9}}$$

답 $a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{9}}$

19

$$(1) (a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})$$

$$= (a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})\{(a^{\frac{1}{3}})^2 + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + (b^{\frac{1}{3}})^2\}$$

$$= (a^{\frac{1}{3}})^3 - (b^{\frac{1}{3}})^3$$

$$= a - b$$

$$(2) (3^{\frac{1}{2}} + 1)(3^{\frac{1}{2}} - 1)(8^{\frac{1}{6}} + 1)(8^{\frac{1}{6}} - 1)$$

$$= \{(3^{\frac{1}{2}})^2 - 1\}\{(8^{\frac{1}{6}})^2 - 1\}$$

$$= (3 - 1)(8^{\frac{1}{3}} - 1)$$

$$= 2 \times \{(2^3)^{\frac{1}{3}} - 1\}$$

$$= 2 \times (2 - 1) = 2$$

답 (1) $a - b$ (2) 2

20

$x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 1$ 의 양변을 제곱하면

$$x - 2 + x^{-1} = 1$$

$$\therefore x + x^{-1} = 3$$

..... ㉠

㉠의 양변을 제제곱하면

$$x^3 + (x^{-1})^3 + 3(x + x^{-1}) = 27$$

$$x^3 + x^{-3} + 3 \times 3 = 27$$

$$\therefore x^3 + x^{-3} = 18$$

답 18

다른 풀이 곱셈 공식의 변형을 이용하면

$$x + x^{-1} = (x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^2 + 2 = 1^2 + 2 = 3$$

$$\therefore x^3 + x^{-3} = (x + x^{-1})^3 - 3(x + x^{-1})$$

$$= 3^3 - 3 \times 3 = 18$$

21

$$a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$a + 2 + a^{-1} = 16$$

$$\therefore a + a^{-1} = 14 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉡의 양변을 제곱하면

$$a^2 + 2 + a^{-2} = 196$$

$$\therefore a^2 + a^{-2} = 194$$

㉢의 양변을 제제곱하면

$$(a^{\frac{1}{2}})^3 + (a^{-\frac{1}{2}})^3 + 3(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}) = 64$$

$$a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 3 \times 4 = 64$$

$$\therefore a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} = 52$$

$$\therefore \frac{a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} - 4}{a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} - 2} = \frac{52 - 4}{14 - 2} = \frac{48}{12} = 4$$

답 $\frac{1}{4}$

22

$$x = 4^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} \text{에서}$$

$$x^3 = (2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}})^3$$

$$= (2^{\frac{2}{3}})^3 + (2^{\frac{1}{3}})^3 + 3 \times 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} (2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}})$$

$$= 2^2 + 2 + 3 \times 2 \times x$$

$$= 6 + 6x$$

$$\therefore x^3 - 6x = 6$$

답 6

23

$$x^{-2} = 6, \text{ 즉 } \frac{1}{x^2} = 6 \text{에서} \quad x^2 = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{x^3-x^{-3}}{x+x^{-1}} &= \frac{x(x^3-x^{-3})}{x(x+x^{-1})} = \frac{x^4-x^{-2}}{x^2+1} \\ &= \frac{(x^2)^2-(x^2)^{-1}}{x^2+1} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2-6}{\frac{1}{6}+1} = -\frac{215}{42}\end{aligned}$$

답 $-\frac{215}{42}$

24

$$\begin{aligned}\frac{27^x-27^{-x}}{3^x+3^{-x}} &= \frac{3^{3x}-3^{-3x}}{3^x+3^{-x}} = \frac{3^x(3^{3x}-3^{-3x})}{3^x(3^x+3^{-x})} \\ &= \frac{3^{4x}-3^{-2x}}{3^{2x}+1} = \frac{(3^{2x})^2-(3^{2x})^{-1}}{3^{2x}+1} \\ &= \frac{(9^x)^2-(9^x)^{-1}}{9^x+1} \\ &= \frac{2^2-\frac{1}{2}}{2+1} = \frac{7}{6}\end{aligned}$$

답 $\frac{7}{6}$

25

$$\begin{aligned}\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}} &= 2 \text{에서} \\ \frac{a^x(a^x+a^{-x})}{a^x(a^x-a^{-x})} &= 2, \quad \frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1} = 2 \\ a^{2x}+1 &= 2(a^{2x}-1) \quad \therefore a^{2x} = 3\end{aligned}$$

이때 $a > 0$ 에서 $a^x > 0$ 이므로

$$a^x = \sqrt{3} \quad \text{답 } \sqrt{3}$$

다른 풀이 $\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}} = 2$ 에서

$$\begin{aligned}a^x+a^{-x} &= 2(a^x-a^{-x}) \\ a^x+a^{-x} &= 2a^x-2a^{-x} \quad \therefore a^x = 3a^{-x}\end{aligned}$$

양변에 a^x 을 곱하면

$$a^{2x} = 3 \quad \therefore a^x = \sqrt{3} \quad (\because a^x > 0)$$

26

$4^x=9^y=6^z=k$ ($k>0$)라 하면

$$4^x=k \text{에서} \quad 4=k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$9^y=k \text{에서} \quad 9=k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$6^z=k \text{에서} \quad 6=k^{\frac{1}{z}}, \text{ 즉 } 36=k^{\frac{2}{z}} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠} \times \textcircled{㉡} \div \textcircled{㉢}$ 을 하면

$$4 \times 9 \div 36 = k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} \div k^{\frac{2}{z}}$$

$$\therefore 1 = k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z}}$$

이때 $xyz \neq 0$ 에서 $k \neq 1$ 이므로

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z} = 0$$

답 0

연습문제

● 본책 26~28쪽

27

전략 A의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{A}$ 임을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

8의 세제곱근 중 실수인 것은

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2 \quad \therefore a = 2$$

-64의 세제곱근 중 실수인 것은

$$\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4 \quad \therefore b = -4$$

$$\therefore a+b = -2$$

$a+b$ 가 실수 x의 세제곱근이므로

$$x = (a+b)^3 = (-2)^3 = -8 \quad \text{답 } -8$$

28

전략 거듭제곱근의 정의를 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

㉠. $\sqrt[4]{16}=4$ 의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=4$ 이므로

$$x^4-4=0, \quad (x^2+2)(x^2-2)=0$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{2}i \text{ 또는 } x = \pm\sqrt{2}$$

따라서 $\sqrt[4]{16}$ 의 네제곱근은 $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}i$ 이다.

(거짓)

㉡. $\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$ (참)

㉢. -49의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=-49$

이를 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로

-49의 네제곱근 중 실수인 것은 없다. (거짓)

㉣. -11의 세제곱근 중 실수인 것은 1개이고

$$(-\sqrt[3]{11})^3 = -(\sqrt[3]{11})^3 = -11$$

이므로 -11의 세제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt[3]{11}$ 이다.

(참)

이상에서 옳은 것은 ㉡, ㉣이다.

답 ㉡, ㉣

29

전략 A, B, C를 각각 $\sqrt[6]{k}$ 의 꼴로 변형한다.

$$A = \sqrt{2 \times \sqrt[3]{3}} = \sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{2^3 \times 3^2}$$

$$= \sqrt[6]{2^3 \times 3} = \sqrt[6]{24}$$

$$B = \sqrt[3]{3\sqrt{2}} = \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{3^2 \times 2}$$

$$= \sqrt[6]{3^2 \times 2} = \sqrt[6]{18}$$

$$C = \sqrt[3]{2\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{\sqrt{3}} = \sqrt[6]{2^2 \times 3}$$

$$= \sqrt[6]{2^2 \times 3} = \sqrt[6]{12}$$

이때 $\sqrt[6]{12} < \sqrt[6]{18} < \sqrt[6]{24}$ 이므로

$$C < B < A$$

답 $C < B < A$

30

전략 거듭제곱근을 유리수인 지수로 나타낸 후 지수법칙을 이용한다.

$$\sqrt[4]{81a\sqrt{a}} \div \sqrt[8]{a^3} = \{81 \times (a \times a^{\frac{1}{2}})\}^{\frac{1}{4}} \div a^{\frac{3}{8}}$$

$$= (3^4)^{\frac{1}{4}} \times (a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{4}} \div a^{\frac{3}{8}}$$

$$= 3 \times a^{\frac{3}{8}} \div a^{\frac{3}{8}} = 3$$

답 3

다른 풀이 $\sqrt[4]{81a\sqrt{a}} \div \sqrt[8]{a^3} = \sqrt[8]{(81a\sqrt{a})^2} \div \sqrt[8]{a^3}$

$$= \sqrt[8]{\frac{81^2 a^3}{a^3}} = \sqrt[8]{81^2}$$

$$= \sqrt[8]{(3^4)^2} = \sqrt[8]{3^8} = 3$$

31

전략 거듭제곱근을 유리수인 지수로 나타낸 후 지수법칙을 이용한다.

$$\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[4]{4} \times \sqrt[6]{6} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{1}{4}} \times 6^{\frac{1}{6}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times (2^2)^{\frac{1}{4}} \times (2 \times 3)^{\frac{1}{6}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{6}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}$$

$$= 2^{\frac{7}{6}} \times 3^{\frac{1}{2}}$$

따라서 $a = \frac{7}{6}$, $b = \frac{1}{2}$ 이므로

$$a + b = \frac{5}{3}$$

답 $\frac{5}{3}$

32

전략 $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ 임을 이용하여 거듭제곱근을 유리수인 지수로 나타낸다.

$$\sqrt[3]{a\sqrt{a^4\sqrt[3]{a}}} = [a \times \{a \times (a \times a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}}\}^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}}$$

$$= [a \times \{a \times (a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{4}}\}^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}}$$

$$= \{a \times (a \times a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \{a \times (a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} = (a \times a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{3}}$$

$$= (a^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{9}}$$

$$\therefore k = \frac{5}{9}$$

답 $\frac{5}{9}$

다른 풀이 $\sqrt[3]{a\sqrt{a^4\sqrt[3]{a}}} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[6]{a} \times \sqrt[24]{a} \times \sqrt[72]{a}$

$$= a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{6}} \times a^{\frac{1}{24}} \times a^{\frac{1}{72}}$$

$$= a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{72}} = a^{\frac{5}{9}}$$

33

전략 주어진 식의 양변을 제곱, 세제곱하여 $a + a^{-1}$, $a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}}$ 의 값을 구한다.

$a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 3$ 의 양변을 제곱하면

$$a - 2 + a^{-1} = 9$$

$$\therefore a + a^{-1} = 11$$

$a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 3$ 의 양변을 세제곱하면

$$(a^{\frac{1}{2}})^3 - (a^{-\frac{1}{2}})^3 - 3(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}) = 27$$

$$a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}} - 3 \times 3 = 27$$

$$\therefore a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}} = 36$$

$$\therefore \frac{a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}} + 9}{a + a^{-1} + 4} = \frac{36 + 9}{11 + 4} = 3$$

답 3

34

전략 주어진 식의 양변을 세제곱하여 x^3 을 포함한 식의 값을 구한다.

$$x = \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{1}{3}} \text{에서}$$

$$x^3 = (3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{1}{3}})^3$$

$$= (3^{\frac{2}{3}})^3 - (3^{\frac{1}{3}})^3 - 3 \times 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} (3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{1}{3}})$$

$$= 3^2 - 3 - 3 \times 3 \times x$$

$$= 6 - 9x$$

즉 $x^3 + 9x = 6$ 이므로

$$2x^3 + 18x - 5 = 2(x^3 + 9x) - 5$$

$$= 2 \times 6 - 5 = 7$$

답 7

35

전략 분모, 분자에 적당한 식을 곱하여 공통부분을 만든다.

분모, 분자에 각각 a^{11} 을 곱하면

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + a^{10}}{a^{-1} + a^{-3} + a^{-5} + a^{-7} + a^{-9}} \\ &= \frac{a^{11}(a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + a^{10})}{a^{11}(a^{-1} + a^{-3} + a^{-5} + a^{-7} + a^{-9})} \\ &= \frac{a^{11}(a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + a^{10})}{a^{10} + a^8 + a^6 + a^4 + a^2} \\ &= a^{11} \end{aligned}$$

답 a^{11}

36

전략 $f_n(a)$ 의 의미를 파악한다.

-2 의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-2}$ 의 1개이므로

$$f_3(-2) = 1$$

8 의 네제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt[4]{8}, \sqrt[4]{8}$ 의 2개이므로

$$f_4(8) = 2$$

4 의 다섯제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[5]{4}$ 의 1개이므로

$$f_5(4) = 1$$

$$\therefore f_3(-2) - f_4(8) + f_5(4) = 1 - 2 + 1 = 0$$

답 0

해설 Focus

$f_n(a)$ 의 값은 다음과 같다.

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n 이 짝수	2	1	0
n 이 홀수	1	1	1

37

전략 $-n^2 + 9n - 18$ 의 값이 양수인 경우와 음수인 경우로 나누어 주어진 조건을 만족시키는 n 의 조건을 구한다.

(i) $-n^2 + 9n - 18 > 0$ 일 때

n 이 짝수이면 $-n^2 + 9n - 18$ 의 n 제곱근 중에서 음의 실수가 존재한다.

$$\begin{aligned} n^2 - 9n + 18 < 0 \text{에서} \quad (n-3)(n-6) < 0 \\ \therefore 3 < n < 6 \end{aligned}$$

이때 n 은 짝수이어야 하므로 $n = 4$

(ii) $-n^2 + 9n - 18 < 0$ 일 때

n 이 홀수이면 $-n^2 + 9n - 18$ 의 n 제곱근 중에서 음의 실수가 존재한다.

$$n^2 - 9n + 18 > 0 \text{에서} \quad (n-3)(n-6) > 0$$

$$\therefore n < 3 \text{ 또는 } n > 6$$

이때 $2 \leq n \leq 11$ 이고 n 은 홀수이어야 하므로

$$n = 7, 9, 11$$

(i), (ii)에서 $n = 4, 7, 9, 11$

따라서 모든 n 의 값의 합은

$$4 + 7 + 9 + 11 = 31$$

답 ①

참고 $-n^2 + 9n - 18 = 0$ 이면 $-n^2 + 9n - 18$ 의 n 제곱근은 항상 0이므로 음의 실수가 존재하지 않는다.

38

전략 거듭제곱근을 유리수인 지수로 나타내어 간단히 한다.

$(\sqrt[3]{3^4})^{\frac{1}{3}}$ 이 자연수 x 의 n 제곱근이라 하면

$$x = \{(\sqrt[3]{3^4})^{\frac{1}{3}}\}^n = \{(3^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{3}}\}^n = 3^{\frac{4}{9}n}$$

이때 x 가 자연수이므로 $\frac{4}{9}n$ 이 자연수이어야 한다.

따라서 자연수 n 은 9의 배수이어야 하므로 두 자리 자연수 n 은 18, 27, 36, ..., 99의 10개이다. **답** 10

39

전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

$x^2 - 6x + 2 = 0$ 의 두 근이 $2^a, 2^b$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2^a + 2^b = 6, 2^a \times 2^b = 2$$

$$\therefore 8^a + 8^b = (2^a)^3 + (2^b)^3$$

$$= (2^a + 2^b)^3 - 3 \times 2^a \times 2^b (2^a + 2^b)$$

$$= 6^3 - 3 \times 2 \times 6 = 180$$

답 180

40

전략 $\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0$ 임을 이용하여 $\alpha + \alpha^{-1}$ 의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 의 한 근이 α 이므로

$$\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0$$

이때 $\alpha \neq 0$ 이므로 양변을 α 로 나누면

$$\alpha - 4 + \frac{1}{\alpha} = 0 \quad \therefore \alpha + \alpha^{-1} = 4$$

$(\alpha - \alpha^{-1})^2 = (\alpha + \alpha^{-1})^2 - 4 = 4^2 - 4 = 12$ 이고 $\alpha > 2$ 에서 $\alpha - \alpha^{-1} > 0$ 이므로

$$\alpha - \alpha^{-1} = 2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore a^2 - a^{-2} &= (a + a^{-1})(a - a^{-1}) \\ &= 4 \times 2\sqrt{3} \\ &= 8\sqrt{3}\end{aligned}$$

답 8√3

41

전략 $2^x = 5^y = 10^z = k$ ($k > 0$)로 놓고 식을 변형한다.

$$2^x = 5^y = 10^z = k \quad (k > 0) \text{라 하면}$$

$$2^x = k \text{에서} \quad 2 = k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$5^y = k \text{에서} \quad 5 = k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$10^z = k \text{에서} \quad 10 = k^{\frac{1}{z}} \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉠ $\times$ ㉡ $\div$ ㉢을 하면

$$2 \times 5 \div 10 = k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} \div k^{\frac{1}{z}}$$

$$\therefore k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}} = 1$$

이때 $xyz \neq 0$ 에서 $k \neq 1$ 이므로

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$$

$$\therefore \frac{yz + zx - xy}{xyz} = 0$$

따라서 $yz + zx - xy = 0$ 이므로

$$xy - yz - zx = 0$$

답 0

42

전략 5, 80, a 를 10^k 의 꼴로 변형한다.

$$5^x = 10 \text{에서} \quad 5 = 10^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$80^y = 10 \text{에서} \quad 80 = 10^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$a^z = 10 \text{에서} \quad a = 10^{\frac{1}{z}} \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉠ $\times$ ㉡ $\div$ ㉢을 하면

$$5 \times 80 \div a = 10^{\frac{1}{x}} \times 10^{\frac{1}{y}} \div 10^{\frac{1}{z}}$$

$$\frac{400}{a} = 10^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}} = 10^2$$

$$\therefore a = 4$$

답 4

43

전략 지수법칙을 이용하여 지수를 간단히 한다.

$$(x^{\frac{1}{a-b}})^{\frac{1}{b-c}} \times (x^{\frac{1}{b-c}})^{\frac{1}{c-a}} \times (x^{\frac{1}{c-a}})^{\frac{1}{a-b}}$$

$$= x^{\frac{1}{(a-b)(b-c)}} \times x^{\frac{1}{(b-c)(c-a)}} \times x^{\frac{1}{(c-a)(a-b)}}$$

$$= x^{\frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)}}$$

지수 부분을 정리하면

$$\frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)}$$

$$+ \frac{1}{(c-a)(a-b)}$$

$$= \frac{(c-a) + (a-b) + (b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= 0$$

$$\therefore x^{\frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)}} = x^0 = 1$$

답 1

44

전략 양수 p, q 에 대하여 $p^x = q$ 이면 $p = q^{\frac{1}{x}}$ 임을 이용한다.

(단, $x \neq 0$)

$$a^6 = 5, b^5 = 7, c^2 = 11 \text{에서}$$

$$a = 5^{\frac{1}{6}}, b = 7^{\frac{1}{5}}, c = 11^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore (abc)^n = (5^{\frac{1}{6}} \times 7^{\frac{1}{5}} \times 11^{\frac{1}{2}})^n$$

$$= 5^{\frac{n}{6}} \times 7^{\frac{n}{5}} \times 11^{\frac{n}{2}}$$

$(abc)^n$, 즉 $5^{\frac{n}{6}} \times 7^{\frac{n}{5}} \times 11^{\frac{n}{2}}$ 이 자연수가 되려면

$\frac{n}{6}, \frac{n}{5}, \frac{n}{2}$ 이 모두 자연수이어야 한다.

따라서 자연수 n 의 최솟값은 세 수 6, 5, 2의 최소공배수인 30이다.

답 30

45

전략 먼저 $f(x)$ 를 간단히 한 후 주어진 조건을 이용하여 a^{2p}, a^{2q} 의 값을 구한다.

$$f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{a^x(a^x - a^{-x})}{a^x(a^x + a^{-x})} = \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1}$$

$$f(p) = \frac{a^{2p} - 1}{a^{2p} + 1} = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$2(a^{2p} - 1) = a^{2p} + 1 \quad \therefore a^{2p} = 3$$

$$f(q) = \frac{a^{2q} - 1}{a^{2q} + 1} = \frac{1}{3} \text{에서}$$

$$3(a^{2q} - 1) = a^{2q} + 1, \quad 2a^{2q} = 4$$

$$\therefore a^{2q} = 2$$

$$\therefore f(p+q) = \frac{a^{2(p+q)} - 1}{a^{2(p+q)} + 1} = \frac{a^{2p} \times a^{2q} - 1}{a^{2p} \times a^{2q} + 1}$$

$$= \frac{3 \times 2 - 1}{3 \times 2 + 1} = \frac{5}{7}$$

답 5/7

2 로그

I. 지수함수와 로그함수

01 로그

• 본책 30~32쪽

46

답 (1) $2 = \log_4 16$ (2) $-3 = \log_{10} 0.001$

(3) $0 = \log_4 1$ (4) $1 = \log_5 5$

(5) $\frac{1}{2} = \log_5 \sqrt{5}$ (6) $4 = \log_{\sqrt{3}} 9$

47

답 (1) $3^4 = 81$ (2) $(\sqrt{2})^4 = 4$

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ (4) $5^0 = 1$

48

(1) $\log_2 16 = x$ 라 하면 로그의 정의에 의하여

$$2^x = 16 = 2^4 \quad \therefore x = 4$$

(2) $\log_3 \frac{1}{81} = x$ 라 하면 로그의 정의에 의하여

$$3^x = \frac{1}{81} = 3^{-4} \quad \therefore x = -4$$

(3) $\log_4 64 = x$ 라 하면 로그의 정의에 의하여

$$4^x = 64 = 4^3 \quad \therefore x = 3$$

(4) $\log_{\frac{1}{5}} 125 = x$ 라 하면 로그의 정의에 의하여

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x = 125, \quad 5^{-x} = 5^3$$

$$\therefore x = -3$$

답 (1) 4 (2) -4 (3) 3 (4) -3

49

(1) $N = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

(2) $N = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$

(3) $N = 2^1 = 2$

(4) $N = 6^0 = 1$

답 (1) $\frac{1}{9}$ (2) $\frac{1}{64}$ (3) 2 (4) 1

50

(1) 진수의 조건에서 $x + 4 > 0 \quad \therefore x > -4$

(2) 밑의 조건에서 $2x > 0, 2x \neq 1$

$$x > 0, x \neq \frac{1}{2}$$

$$\therefore 0 < x < \frac{1}{2} \text{ 또는 } x > \frac{1}{2}$$

답 (1) $x > -4$ (2) $0 < x < \frac{1}{2}$ 또는 $x > \frac{1}{2}$

51

(1) $\log_8 0.25 = x$ 에서

$$8^x = 0.25, \quad (2^3)^x = \frac{1}{4}$$

$$2^{3x} = 2^{-2}, \quad 3x = -2$$

$$\therefore x = -\frac{2}{3}$$

(2) $\log_{0.1} 0.001 = x$ 에서

$$0.1^x = 0.001, \quad 0.1^x = 0.1^3$$

$$\therefore x = 3$$

(3) $\log_x 81 = -\frac{4}{3}$ 에서

$$x^{-\frac{4}{3}} = 81$$

$$\therefore x = 81^{-\frac{3}{4}} = (3^4)^{-\frac{3}{4}} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$$

(4) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x = -2$ 에서

$$x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

(5) $\log_4 \{\log_3 (\log_2 x)\} = 0$ 에서

$$\log_3 (\log_2 x) = 4^0 = 1$$

$$\log_2 x = 3^1 = 3$$

$$\therefore x = 2^3 = 8$$

답 (1) $-\frac{2}{3}$ (2) 3 (3) $\frac{1}{27}$ (4) 2 (5) 8

52

$\log_a 27 = -2$ 에서 $a^{-2} = 27$

$$\therefore a = 27^{-\frac{1}{2}} = (3^3)^{-\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{3}{2}}$$

$\log_{\sqrt{3}} b = 3$ 에서

$$b = (\sqrt{3})^3 = (3^{\frac{1}{2}})^3 = 3^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore ab = 3^{-\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} = 3^0 = 1$$

답 1

53

$\log_{x-2}(-x^2+8x-7)$ 이 정의되려면
밑의 조건에서 $x-2>0, x-2\neq 1$

$$\therefore x>2, x\neq 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

진수의 조건에서 $-x^2+8x-7>0$

$$x^2-8x+7<0, \quad (x-1)(x-7)<0$$

$$\therefore 1<x<7 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분은

$$2<x<3 \text{ 또는 } 3<x<7$$

따라서 자연수 x 는 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$$4+5+6=15 \quad \text{답 15}$$

02 로그의 성질

● 본책 33~41쪽

54

$$\text{답 (1) 1 (2) 0 (3) 1 (4) 0}$$

55

$$(1) \log_4 8 + \log_4 2 = \log_4 (8 \times 2) = \log_4 16 = 2$$

$$(2) \log_{10} 50 - \log_{10} 5 = \log_{10} \frac{50}{5} = \log_{10} 10 = 1$$

$$(3) \log_3 \frac{3}{4} + \log_3 12 = \log_3 \left(\frac{3}{4} \times 12 \right) = \log_3 9 = 2$$

$$(4) \log_3 27\sqrt{3} = \log_3 (3^3 \times 3^{\frac{1}{2}}) = \log_3 3^{\frac{7}{2}} \\ = \frac{7}{2} \log_3 3 = \frac{7}{2} \quad \text{답 (1) 2 (2) 1 (3) 2 (4) } \frac{7}{2}$$

56

$$(1) \log_{10} 6 = \log_{10} (2 \times 3) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = a + b$$

$$(2) \log_{10} 18 = \log_{10} (2 \times 3^2) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3^2 \\ = \log_{10} 2 + 2\log_{10} 3 = a + 2b$$

$$(3) \log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - a$$

$$(4) \log_{10} \frac{9}{8} = \log_{10} \frac{3^2}{2^3} = \log_{10} 3^2 - \log_{10} 2^3 \\ = 2\log_{10} 3 - 3\log_{10} 2 \\ = 2b - 3a \quad \text{답 (1) } a+b \text{ (2) } a+2b \text{ (3) } 1-a \text{ (4) } 2b-3a$$

57

$$(1) \log_{16} 8 = \log_{2^4} 2^3 = \frac{3}{4} \log_2 2 = \frac{3}{4}$$

$$(2) \log_{1000} \frac{1}{10} = \log_{10^3} 10^{-1} = -\frac{1}{3} \log_{10} 10 = -\frac{1}{3}$$

$$(3) 2^{\log_2 5} = 5$$

$$(4) 4^{\log_2 9} = 9^{\log_2 4} = 9^2 = 81$$

$$\text{답 (1) } \frac{3}{4} \text{ (2) } -\frac{1}{3} \text{ (3) } 5 \text{ (4) } 81$$

58

$$(2) \log_3 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 3} = \frac{\log_{10} 2^3}{\log_{10} 3} = \frac{3\log_{10} 2}{\log_{10} 3}$$

$$(3) \log_3 100 = \frac{\log_{10} 100}{\log_{10} 3} = \frac{2}{\log_{10} 3}$$

$$\text{답 (1) } \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 7} \text{ (2) } \frac{3\log_{10} 2}{\log_{10} 3} \text{ (3) } \frac{2}{\log_{10} 3}$$

59

$$(1) \frac{1}{2} \log_2 \frac{9}{49} - \log_2 \frac{3}{14} \\ = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{3}{7} \right)^2 - \log_2 \frac{3}{14} \\ = \log_2 \frac{3}{7} - \log_2 \frac{3}{14} \\ = \log_2 \left(\frac{3}{7} \div \frac{3}{14} \right) = \log_2 \left(\frac{3}{7} \times \frac{14}{3} \right) \\ = \log_2 2 = 1$$

$$(2) \frac{1}{2} \log_2 3 + 3\log_2 \sqrt{2} - \log_2 \sqrt{6} \\ = \log_2 3^{\frac{1}{2}} + \log_2 (\sqrt{2})^3 - \log_2 \sqrt{6} \\ = \log_2 \sqrt{3} + \log_2 2\sqrt{2} - \log_2 \sqrt{6} \\ = \log_2 \frac{\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \log_2 2 = 1$$

$$(3) 2\log_{10} \frac{5}{3} - \log_{10} \frac{7}{4} + 2\log_{10} 3 + \frac{1}{2} \log_{10} 49 \\ = \log_{10} \left(\frac{5}{3} \right)^2 - \log_{10} \frac{7}{4} + \log_{10} 3^2 + \log_{10} (7^2)^{\frac{1}{2}} \\ = \log_{10} \left\{ \left(\frac{5}{3} \right)^2 \div \frac{7}{4} \times 3^2 \times 7 \right\} \\ = \log_{10} \left(\frac{25}{9} \times \frac{4}{7} \times 9 \times 7 \right) \\ = \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 \\ = 2$$

$$(4) 3\log_5 \sqrt[3]{2} + \log_5 \sqrt{10} - \frac{1}{2} \log_5 8$$

$$\begin{aligned} &= \log_5 (\sqrt[3]{2})^3 + \log_5 \sqrt{10} - \log_5 8^{\frac{1}{2}} \\ &= \log_5 2 + \log_5 \sqrt{10} - \log_5 2\sqrt{2} \\ &= \log_5 \frac{2 \times \sqrt{10}}{2\sqrt{2}} \\ &= \log_5 \sqrt{5} = \log_5 5^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 (1) 1 (2) 1 (3) 2 (4) $\frac{1}{2}$

다른 풀이 (2) $\frac{1}{2} \log_2 3 + 3\log_2 \sqrt{2} - \log_2 \sqrt{6}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \log_2 3 + \frac{3}{2} \log_2 2 - \frac{1}{2} (\log_2 2 + \log_2 3) \\ &= \frac{1}{2} \log_2 3 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_2 3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) 2\log_{10} \frac{5}{3} - \log_{10} \frac{7}{4} + 2\log_{10} 3 + \frac{1}{2} \log_{10} 49 \\ &= 2(\log_{10} 5 - \log_{10} 3) - (\log_{10} 7 - \log_{10} 2^2) \\ &\quad + 2\log_{10} 3 + \log_{10} 7 \\ &= 2(\log_{10} 5 + \log_{10} 2) \\ &= 2\log_{10} (5 \times 2) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) 3\log_5 \sqrt[3]{2} + \log_5 \sqrt{10} - \frac{1}{2} \log_5 8 \\ &= \log_5 2 + \frac{1}{2} (\log_5 5 + \log_5 2) - \frac{3}{2} \log_5 2 \\ &= \log_5 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_5 2 - \frac{3}{2} \log_5 2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

60

$$\begin{aligned} f(x) &= \log_2 \left(1 - \frac{1}{x+2} \right) = \log_2 \frac{x+1}{x+2} \text{ 이므로} \\ f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(30) \\ &= \log_2 \frac{2}{3} + \log_2 \frac{3}{4} + \log_2 \frac{4}{5} + \dots + \log_2 \frac{31}{32} \\ &= \log_2 \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{31}{32} \right) \\ &= \log_2 \frac{2}{32} = \log_2 2^{-4} \\ &= -4 \end{aligned}$$

답 -4

61

$$\begin{aligned} (1) (\log_2 3 + \log_8 9) (\log_9 2 + \log_{27} 16) \\ &= (\log_2 3 + \log_{3^2} 3^2) (\log_{3^2} 2 + \log_{3^3} 2^4) \\ &= \left(\log_2 3 + \frac{2}{3} \log_2 3 \right) \left(\frac{1}{2} \log_3 2 + \frac{4}{3} \log_3 2 \right) \\ &= \frac{5}{3} \log_2 3 \times \frac{11}{6} \log_3 2 \\ &= \frac{55}{18} \log_2 3 \times \log_3 2 \\ &= \frac{55}{18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) 2\log_5 4 - 3\log_5 2 &= 2\log_5 2^2 - 3\log_5 2 \\ &= 4\log_5 2 - 3\log_5 2 \\ &= \log_5 2 \\ \therefore 5^{2\log_5 4 - 3\log_5 2} &= 5^{\log_5 2} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) 4^{\log_3 7} + 27^{\log_3 2} &= 7^{\log_3 4} + 2^{\log_3 27} \\ &= 7^2 + 2^3 = 57 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \log_2 3 \times \log_3 5 \times \log_5 6 \times \log_6 8 \\ &= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \times \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \times \frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 5} \times \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 6} \\ &= \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 2} = \frac{3\log_{10} 2}{\log_{10} 2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{55}{18}$ (2) 2 (3) 57 (4) 3

62

$$\begin{aligned} (1) \log_2 3 \times \log_4 a &= \log_4 3 \text{에서} \\ \log_2 3 \times \log_{2^2} a &= \log_{2^2} 3 \\ \log_2 3 \times \frac{1}{2} \log_2 a &= \frac{1}{2} \log_2 3 \\ \log_2 a &= 1 \\ \therefore a &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (\log_2 3 + 2\log_4 5) \log_{\sqrt{15}} a \\ &= (\log_2 3 + 2\log_{2^2} 5) \log_{15^{\frac{1}{2}}} a \\ &= (\log_2 3 + \log_2 5) \times 2\log_{15} a \\ &= \log_2 15 \times 2 \times \frac{\log_2 a}{\log_2 15} \\ &= 2\log_2 a \\ \text{즉 } 2\log_2 a &= 6 \text{ 이므로} \\ \log_2 a &= 3 \quad \therefore a = 8 \end{aligned}$$

답 (1) 2 (2) 8

63

$$A = \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{4}} 8 = \frac{1}{3} \log_{2^{-2}} 2^3 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$B = 8^{\log_{\frac{1}{8}} 16} = 16^{\log_{\frac{1}{8}} 8} = 16^{-1} = \frac{1}{16}$$

$$C = \frac{1}{7} \log_{27} 3\sqrt{3} = \frac{1}{7} \log_{3^3} 3^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{7} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{14}$$

$$\therefore A < B < C \quad \text{답 } A < B < C$$

64

$a^2 b^3 = 1$ 의 양변에 a 를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_a a^2 b^3 = \log_a 1, \quad \log_a a^2 + \log_a b^3 = 0$$

$$2 + 3 \log_a b = 0$$

$$\therefore \log_a b = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore \log_a a^3 b^2 = \log_a a^3 + \log_a b^2$$

$$= 3 + 2 \log_a b$$

$$= 3 + 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3} \quad \text{답 } \frac{5}{3}$$

65

$$(1) \log_{10} 25 = 2 \log_{10} 5$$

$$= 2 \log_{10} \frac{10}{2}$$

$$= 2(\log_{10} 10 - \log_{10} 2)$$

$$= 2(1 - a)$$

$$(2) \log_{10} 0.72 = \log_{10} \frac{72}{100}$$

$$= \log_{10} 72 - \log_{10} 100$$

$$= \log_{10} (2^3 \times 3^2) - \log_{10} 10^2$$

$$= \log_{10} 2^3 + \log_{10} 3^2 - 2$$

$$= 3 \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3 - 2$$

$$= 3a + 2b - 2$$

$$(3) \log_{\frac{1}{10}} 15 = \log_{10^{-1}} 15$$

$$= -\log_{10} 15$$

$$= -\log_{10} (3 \times 5)$$

$$= -(\log_{10} 3 + \log_{10} 5)$$

$$= -\left(\log_{10} 3 + \log_{10} \frac{10}{2}\right)$$

$$= -(\log_{10} 3 + \log_{10} 10 - \log_{10} 2)$$

$$= -(b + 1 - a)$$

$$= a - b - 1$$

$$\begin{aligned} (4) \log_4 \sqrt{30} &= \frac{1}{4} \log_2 30 = \frac{1}{4} \times \frac{\log_{10} 30}{\log_{10} 2} \\ &= \frac{\log_{10} (3 \times 10)}{4 \log_{10} 2} \\ &= \frac{\log_{10} 3 + \log_{10} 10}{4 \log_{10} 2} \\ &= \frac{b+1}{4a} \end{aligned}$$

$$\text{답 } (1) 2(1-a) \quad (2) 3a+2b-2$$

$$(3) a-b-1 \quad (4) \frac{b+1}{4a}$$

66

$$3^x = a, \quad 3^y = b \text{에서} \quad x = \log_3 a, \quad y = \log_3 b$$

$$\therefore \log_{a^3} \sqrt[4]{a^3 b} = \log_{a^3} (a^3 b)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{12} \log_a a^3 b$$

$$= \frac{1}{12} (\log_a a^3 + \log_a b)$$

$$= \frac{1}{12} \left(3 + \frac{\log_3 b}{\log_3 a}\right)$$

$$= \frac{1}{12} \left(3 + \frac{y}{x}\right)$$

$$= \frac{3x+y}{12x} \quad \text{답 } \frac{3x+y}{12x}$$

67

$$32^x = 216 \text{에서 } x = \log_{32} 216 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\log_{32} 216} = \log_{216} 32$$

$$243^y = 216 \text{에서 } y = \log_{243} 216 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{\log_{243} 216} = \log_{216} 243$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \log_{216} 32 + \log_{216} 243$$

$$= \log_{216} 2^5 + \log_{216} 3^5$$

$$= \log_{216} (2^5 \times 3^5)$$

$$= \log_{6^3} 6^5 = \frac{5}{3} \quad \text{답 } \frac{5}{3}$$

$$\text{다른 풀이 } 32^x = 216 \text{에서} \quad 32 = 216^{\frac{1}{x}} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$243^y = 216 \text{에서} \quad 243 = 216^{\frac{1}{y}} \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7} \times \textcircled{8} \text{을 하면} \quad 32 \times 243 = 216^{\frac{1}{x}} \times 216^{\frac{1}{y}}$$

$$2^5 \times 3^5 = 216^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

$$6^5 = (6^3)^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \quad \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{3}$$

68

$3.45^x = 100$ 에서 $x = \log_{3.45} 100$ 이므로

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\log_{3.45} 100} = \log_{100} 3.45$$

$0.00345^y = 100$ 에서 $y = \log_{0.00345} 100$ 이므로

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{\log_{0.00345} 100} = \log_{100} 0.00345$$

$$\therefore \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \log_{100} 3.45 - \log_{100} 0.00345$$

$$= \log_{100} \frac{3.45}{0.00345}$$

$$= \log_{100} 1000$$

$$= \log_{10^2} 10^3$$

$$= \frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

다른 풀이 $3.45^x = 100$ 에서

$$3.45 = 100^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$0.00345^y = 100$ 에서

$$0.00345 = 100^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} \div \textcircled{㉡}$ 을 하면

$$3.45 \div 0.00345 = 100^{\frac{1}{x}} \div 100^{\frac{1}{y}}$$

$$1000 = 100^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}, \quad 10^3 = 10^{2(\frac{1}{x} - \frac{1}{y})}$$

$$\therefore \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{3}{2}$$

69

이차방정식 $x^2 - 9x + 3 = 0$ 의 두 실근이 α, β 이므로 근

과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 9, \alpha\beta = 3$$

$$\therefore \alpha^{-1} + \beta^{-1} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{9}{3} = 3$$

$$\therefore \log_3 (\alpha^{-1} + \beta^{-1}) = \log_3 3 = 1$$

답 1

70

이차방정식 $x^2 - 5x + 3 = 0$ 의 두 실근이 $\log_{10} \alpha$,

$\log_{10} \beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_{10} \alpha + \log_{10} \beta = 5, \log_{10} \alpha \times \log_{10} \beta = 3$$

$$\therefore \log_{\alpha} \beta + \log_{\beta} \alpha$$

$$= \frac{\log_{10} \beta}{\log_{10} \alpha} + \frac{\log_{10} \alpha}{\log_{10} \beta}$$

$$= \frac{(\log_{10} \alpha)^2 + (\log_{10} \beta)^2}{\log_{10} \alpha \times \log_{10} \beta}$$

$$= \frac{(\log_{10} \alpha + \log_{10} \beta)^2 - 2 \times \log_{10} \alpha \times \log_{10} \beta}{\log_{10} \alpha \times \log_{10} \beta}$$

$$= \frac{5^2 - 2 \times 3}{3} = \frac{19}{3}$$

답 $\frac{19}{3}$

71

$\log_5 25 = 2, \log_5 125 = 3$ 이므로

$$2 < \log_5 100 < 3$$

즉 $\log_5 100$ 의 정수 부분은 2이므로

$$a = 2$$

따라서 $\log_5 100$ 의 소수 부분은

$$\log_5 100 - 2 = \log_5 100 - \log_5 5^2$$

$$= \log_5 \frac{100}{25}$$

$$= \log_5 4$$

즉 $b = \log_5 4$ 이므로

$$4^a + 4^{\frac{1}{b}} = 4^2 + 4^{\frac{1}{\log_5 4}}$$

$$= 16 + 4^{\log_4 5}$$

$$= 16 + 5 = 21$$

답 21



연습 문제

● 본책 42~43쪽

72

전략 로그의 정의를 이용한다.

$x = \log_2 (2 + \sqrt{3})$ 에서

$$2^x = 2 + \sqrt{3}$$

$$\therefore 2^x + 2^{-x} = 2^x + \frac{1}{2^x}$$

$$= 2 + \sqrt{3} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

$$= 2 + \sqrt{3} + (2 - \sqrt{3})$$

$$= 4$$

답 4

73

전략 로그의 성질을 이용하여 식을 간단히 한 후 a 의 값을 대입한다.

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{3}+1 \\ \therefore \log_3(a^3-1) - \log_3(a^2+a+1) \\ &= \log_3 \frac{a^3-1}{a^2+a+1} \\ &= \log_3 \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1} \\ &= \log_3(a-1) \\ &= \log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

74

전략 로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 좌변을 간단히 한다.

$$\begin{aligned} &\log_a(\log_3 2) + \log_a(\log_4 3) + \log_a(\log_5 4) + \cdots \\ &+ \log_a(\log_{64} 63) \\ &= \log_a(\log_3 2 \times \log_4 3 \times \log_5 4 \times \cdots \times \log_{64} 63) \\ &= \log_a \left(\frac{\log_a 2}{\log_a 3} \times \frac{\log_a 3}{\log_a 4} \times \frac{\log_a 4}{\log_a 5} \times \cdots \times \frac{\log_a 63}{\log_a 64} \right) \\ &= \log_a \left(\frac{\log_a 2}{\log_a 64} \right) \\ &= \log_a(\log_{64} 2) = \log_a(\log_{2^6} 2) \\ &= \log_a \frac{1}{6} \\ \text{즉 } \log_a \frac{1}{6} &= -1 \text{ 이므로} \\ a^{-1} &= \frac{1}{6} \quad \therefore a=6 \end{aligned}$$

답 6

75

전략 로그의 밑의 변환 공식을 이용하여 로그의 밑을 x 로 변형한다.

$$\begin{aligned} \log_a x &= \frac{1}{4}, \log_b x = \frac{1}{5}, \log_c x = \frac{1}{6} \text{에서} \\ \log_x a &= 4, \log_x b = 5, \log_x c = 6 \\ \therefore \frac{2}{\log_{abc} x} &= 2 \log_x abc \\ &= 2(\log_x a + \log_x b + \log_x c) \\ &= 2 \times (4 + 5 + 6) \\ &= 30 \end{aligned}$$

답 30

76

전략 로그의 여러 가지 성질을 이용하여 A, B, C 의 값을 구한다.

$$\begin{aligned} A &= (\sqrt{3})^{\log_3 12 - \log_3 3} = (\sqrt{3})^{\log_3 \frac{12}{3}} \\ &= (\sqrt{3})^{\log_3 4} = (\sqrt{3})^2 \\ &= 3 \\ B &= (4\sqrt{2})^{-\log_3 \frac{\sqrt{3}}{3}} = (4\sqrt{2})^{\log_3 \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-1}} \\ &= (4\sqrt{2})^{\log_3 \sqrt{3}} \\ &= (\sqrt{3})^{\log_3 4\sqrt{2}} = (\sqrt{3})^{\log_3 2^{\frac{5}{2}}} \\ &= (3^{\frac{1}{2}})^{\frac{5}{2}} = 3^{\frac{5}{4}} \\ C &= \log_4 2 + \log_9 3 \\ &= \log_{2^2} 2 + \log_{3^2} 3 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore C < A < B$$

답 $C < A < B$

$$\begin{aligned} \text{참고 } 3 &= \sqrt[4]{3^4}, 3^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{3^5} \text{ 이므로} \\ \sqrt[4]{3^4} &< \sqrt[4]{3^5} \quad \therefore 3 < 3^{\frac{5}{4}} \end{aligned}$$

77

전략 로그의 성질을 이용하여 $\log_5 \sqrt{2.4}$ 를 $\log_5 2$ 와 $\log_5 3$ 으로 나타낸다.

$$\begin{aligned} \log_5 \sqrt{2.4} &= \frac{1}{2} \log_5 2.4 = \frac{1}{2} \log_5 \frac{12}{5} \\ &= \frac{1}{2} (\log_5 12 - \log_5 5) \\ &= \frac{1}{2} \{ \log_5 (2^2 \times 3) - 1 \} \\ &= \frac{1}{2} (2 \log_5 2 + \log_5 3 - 1) \\ &= \frac{1}{2} (2a + b - 1) \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2} (2a + b - 1)$

78

전략 로그의 밑의 변환 공식을 이용하여 로그의 밑을 b 로 변형한다.

$$\begin{aligned} \log_a b &= \frac{1}{5} \text{에서} \quad \log_b a = 5 \\ \therefore \log_{b^2} a &= \frac{1}{2} \log_b a \\ &= \frac{1}{2} \times 5 = 2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\log_{b^2} a$ 의 정수 부분은 2이다.

답 2

79

전략 로그의 밑의 조건과 진수의 조건을 이용하여 부등식을 세운다.

$\log_{a-1}(ax^2 - ax + 2)$ 가 정의되려면
밑의 조건에서 $a-1 > 0, a-1 \neq 1$

$$\therefore a > 1, a \neq 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

진수의 조건에서 $ax^2 - ax + 2 > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$

㉠에서 $a > 0$ 이므로 부등식 ㉡이 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 이차방정식 $ax^2 - ax + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$D = (-a)^2 - 4 \times a \times 2 < 0$$

$$a(a-8) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 8 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉢의 공통부분은

$$1 < a < 2 \text{ 또는 } 2 < a < 8$$

따라서 정수 a 는 3, 4, 5, 6, 7이므로 구하는 합은

$$3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25 \quad \text{답 25}$$



개념 노트

모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 이 성립하려면

$$a > 0, b^2 - 4ac < 0$$

80

전략 로그의 정의와 성질을 이용하여 $a+b$, ab 의 값을 구한다.

$\log_2(a+b) = 3$ 에서

$$a+b = 2^3 = 8$$

$\log_2 a + \log_2 b = 3$ 에서 $\log_2 ab = 3$

$$\therefore ab = 2^3 = 8$$

$$\therefore a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$= 8^3 - 3 \times 8 \times 8$$

$$= 320 \quad \text{답 320}$$

81

전략 두 점을 지나는 직선의 방정식을 세워서 y 절편을 구한다.

두 점 $(a, \log_2 a)$, $(b, \log_2 b)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - \log_2 a = \frac{\log_2 b - \log_2 a}{b - a}(x - a)$$

$$\begin{aligned} \therefore y &= \frac{\log_2 b - \log_2 a}{b - a}x \\ &\quad - \frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b - a} + \log_2 a \end{aligned}$$

또 두 점 $(a, \log_4 a)$, $(b, \log_4 b)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - \log_4 a = \frac{\log_4 b - \log_4 a}{b - a}(x - a)$$

$$\begin{aligned} \therefore y &= \frac{\log_4 b - \log_4 a}{b - a}x \\ &\quad - \frac{a(\log_4 b - \log_4 a)}{b - a} + \log_4 a \end{aligned}$$

이때 두 직선의 y 절편이 같으므로

$$- \frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b - a} + \log_2 a$$

$$= - \frac{a(\log_4 b - \log_4 a)}{b - a} + \log_4 a$$

$$\log_2 a - \frac{1}{2} \log_2 a$$

$$= \frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b - a} - \frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{2(b - a)}$$

$$\frac{1}{2} \log_2 a = \frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{2(b - a)}$$

$$b \log_2 a - a \log_2 a = a \log_2 b - a \log_2 a$$

$$\log_2 a^b = \log_2 b^a$$

$$\therefore a^b = b^a$$

한편 $f(x) = a^{bx} + b^{ax}$ 에 대하여 $f(1) = a^b + b^a = 40$ 이므로

$$a^b = b^a = 20$$

$$\therefore f(2) = a^{2b} + b^{2a} = (a^b)^2 + (b^a)^2$$

$$= 20^2 + 20^2 = 800 \quad \text{답 ②}$$

82

전략 $5^x = 2^y = (\sqrt[3]{10})^z = k$ ($k > 0$)로 놓고 로그의 정의를 이용하여 x, y, z 를 k 에 대한 식으로 나타낸다.

$5^x = 2^y = (\sqrt[3]{10})^z = k$ ($k > 0$)라 하면

$xyz \neq 0$ 에서 $k \neq 1$

$5^x = k$ 에서 $x = \log_5 k$ 이므로

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\log_5 k} = \log_k 5$$

$2^y = k$ 에서 $y = \log_2 k$ 이므로

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{\log_2 k} = \log_k 2$$

$(\sqrt[3]{10})^z = 10^{\frac{z}{3}} = k$ 에서 $\frac{z}{3} = \log_{10} k$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{3}{z} &= \frac{1}{\log_{10} k} = \log_k 10 \\ \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z} &= \log_k 5 + \log_k 2 - \log_k 10 \\ &= \log_k \frac{5 \times 2}{10} \\ &= \log_k 1 = 0\end{aligned}$$

답 0

다른 풀이 $5^x = 2^y = (\sqrt[3]{10})^z = k$ ($k > 0$)라 하면

$$5^x = k \text{에서} \quad 5 = k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$2^y = k \text{에서} \quad 2 = k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{10})^z = k \text{에서} \\ 10^{\frac{z}{3}} = k \quad \therefore 10 = k^{\frac{3}{z}} \quad \dots\dots \text{㉢}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{㉠} \times \text{㉡} \div \text{㉢} \text{을 하면} \quad 5 \times 2 \div 10 &= k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} \div k^{\frac{3}{z}} \\ \therefore 1 &= k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z}}\end{aligned}$$

$$\text{이때 } xyz \neq 0 \text{에서 } k \neq 1 \text{이므로} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z} = 0$$

83

전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\log_{10} \alpha$, $\log_{10} \beta$ 사이의 관계식을 구한다.

이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 실근이 $\log_{10} \alpha$, $\log_{10} \beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\log_{10} \alpha + \log_{10} \beta &= 3, \log_{10} \alpha \times \log_{10} \beta = 1 \\ \therefore (\log_{10} \beta - \log_{10} \alpha)^2 &= (\log_{10} \beta + \log_{10} \alpha)^2 - 4 \log_{10} \beta \times \log_{10} \alpha \\ &= 3^2 - 4 \times 1 = 5\end{aligned}$$

이때 $\log_{10} \beta > \log_{10} \alpha$ 이므로

$$\begin{aligned}\log_{10} \beta - \log_{10} \alpha &= \sqrt{5} \\ \therefore 2 \log_{10} \beta - \frac{1}{3} \log_{10} \alpha^3 &= \log_{10} \beta - \log_{10} \alpha = \frac{\log_{10} \beta}{\log_{10} \alpha} - \frac{\log_{10} \alpha}{\log_{10} \beta} \\ &= \frac{(\log_{10} \beta)^2 - (\log_{10} \alpha)^2}{\log_{10} \alpha \times \log_{10} \beta} \\ &= \frac{(\log_{10} \beta + \log_{10} \alpha)(\log_{10} \beta - \log_{10} \alpha)}{\log_{10} \alpha \times \log_{10} \beta} \\ &= \frac{3 \times \sqrt{5}}{1} = 3\sqrt{5}\end{aligned}$$

답 $3\sqrt{5}$

84

전략 주어진 식에서 로그의 밑을 4로 통일하여 간단히 한다.

$$\begin{aligned}\log_4 2n^2 - \frac{1}{2} \log_2 \sqrt{n} &= \log_4 2n^2 - \log_4 \sqrt{n} \\ &= \log_4 \frac{2n^2}{\sqrt{n}} \\ &= \log_4 2n^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

따라서 40 이하의 자연수 k 에 대하여

$$\log_4 2n^{\frac{3}{2}} = k$$

$$\text{라 하면} \quad 2n^{\frac{3}{2}} = 4^k = 2^{2k}, \quad n^{\frac{3}{2}} = 2^{2k-1}$$

$$\therefore n = 2^{(2k-1) \times \frac{2}{3}}$$

이때 n 이 자연수이므로 $2k-1$ 이 3의 배수이어야 한다.

$1 \leq k \leq 40$ 에서 $1 \leq 2k-1 \leq 79$ 이므로

$$2k-1 = 3, 6, 9, \dots, 75, 78$$

$$\therefore k = 2, \frac{7}{2}, 5, \dots, 38, \frac{79}{2}$$

이때 k 는 자연수이므로

$$k = 2, 5, 8, \dots, 38$$

즉 자연수 k 의 개수가 13이므로 n 의 개수도 13이다.

답 13

85

전략 주어진 조건을 이용하여 a , b , c 를 한 문자로 나타낸다.

$a^2 = b^3 = c^5 = k$ ($k > 0$)라 하면

$$a = k^{\frac{1}{2}}, b = k^{\frac{1}{3}}, c = k^{\frac{1}{5}} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$\log_4 a + \log_4 b + \log_4 c = 31$ 에 ㉠을 대입하면

$$\begin{aligned}\log_4 k^{\frac{1}{2}} + \log_4 k^{\frac{1}{3}} + \log_4 k^{\frac{1}{5}} &= 31 \\ \frac{1}{2} \log_4 k + \frac{1}{3} \log_4 k + \frac{1}{5} \log_4 k &= 31 \\ \frac{31}{30} \log_4 k &= 31, \quad \log_4 k = 30 \\ \therefore k &= 4^{30}\end{aligned}$$

㉠에 이를 대입하면

$$a = (4^{30})^{\frac{1}{2}} = 4^{15}, b = (4^{30})^{\frac{1}{3}} = 4^{10},$$

$$c = (4^{30})^{\frac{1}{5}} = 4^6$$

$$\begin{aligned}\therefore \log_8 a \times \log_8 b \times \log_8 c &= \log_8 4^{15} \times \log_8 4^{10} \times \log_8 4^6 \\ &= \frac{30}{3} \times \frac{20}{3} \times \frac{12}{3} = \frac{800}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{800}{3}$

03 상용로그

● 본책 44~52쪽

86

- (1) $\log 10000 = \log 10^4 = 4$
 (2) $\log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2$
 (3) $\log 0.001 = \log 10^{-3} = -3$
 (4) $\log \sqrt[4]{10^3} = \log 10^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$
 (5) $\log 10\sqrt{10} = \log 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$
 (6) $\log \sqrt[3]{100} = \log \sqrt[3]{10^2} = \log 10^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

답 (1) 4 (2) -2 (3) -3 (4) $\frac{3}{4}$ (5) $\frac{3}{2}$ (6) $\frac{2}{3}$

87

답 (1) 0.7126 (2) 0.8195 (3) 0.3945

88

답 (가) 2 (나) 0.5587 (다) 2.5587

89

- (1) $\log 3240 = \log (3.24 \times 10^3)$
 $= \log 3.24 + \log 10^3$
 $= 0.5105 + 3 = 3.5105$
 (2) $\log 0.00324 = \log (3.24 \times 10^{-3})$
 $= \log 3.24 + \log 10^{-3}$
 $= 0.5105 - 3 = -2.4895$
 (3) $\log \sqrt[5]{324} = \log (3.24 \times 10^2)^{\frac{1}{5}}$
 $= \frac{1}{5} (\log 3.24 + \log 10^2)$
 $= \frac{1}{5} (0.5105 + 2) = 0.5021$
- 답 (1) 3.5105 (2) -2.4895 (3) 0.5021

90

- (2) $\log N = -0.0693 = -1 + 0.9307$
 따라서 $\log N$ 의 정수 부분은 -1, 소수 부분은 0.9307이다.

- (3) $\log N = -2.6021 = -3 + 0.3979$
 따라서 $\log N$ 의 정수 부분은 -3, 소수 부분은 0.3979이다.

답 (1) 정수 부분: 3, 소수 부분: 0.5593
 (2) 정수 부분: -1, 소수 부분: 0.9307
 (3) 정수 부분: -3, 소수 부분: 0.3979

91

- (1) $\log 18 = \log (2 \times 3^2) = \log 2 + 2 \log 3$
 $= 0.3010 + 2 \times 0.4771$
 $= 1.2552$
 (2) $\log \frac{5}{3} = \log \frac{10}{6} = \log 10 - \log (2 \times 3)$
 $= 1 - (\log 2 + \log 3)$
 $= 1 - (0.3010 + 0.4771)$
 $= 0.2219$
 (3) $\log \sqrt{6} = \frac{1}{2} \log 6 = \frac{1}{2} \log (2 \times 3)$
 $= \frac{1}{2} (\log 2 + \log 3)$
 $= \frac{1}{2} (0.3010 + 0.4771)$
 $= 0.38905$
- 답 (1) 1.2552 (2) 0.2219 (3) 0.38905

92

- (1) $\log 52.3 = \log (5.23 \times 10)$
 $= \log 5.23 + \log 10$
 $= 1 + 0.7185$
 $= 1.7185$
 따라서 정수 부분은 1, 소수 부분은 0.7185이다.
 (2) $\log 0.0523 = \log (5.23 \times 10^{-2})$
 $= \log 5.23 + \log 10^{-2}$
 $= -2 + 0.7185$
 $= -1.2815$

따라서 정수 부분은 -2, 소수 부분은 0.7185이다.

답 풀이 참조

93

- $\log 10 = 1, \log 100 = 2$ 이므로
 $1 < \log 50 < 2$

따라서 $\log 50$ 의 정수 부분이 1이므로

$$\begin{aligned} \alpha &= \log 50 - 1 = \log 50 - \log 10 \\ &= \log \frac{50}{10} = \log 5 \\ \therefore 1000^\alpha &= 1000^{\log 5} = 5^{\log 1000} = 5^3 = 125 \end{aligned}$$

답 125

94

$$(1) \log x = 2.3692 = 2 + 0.3692$$

$$\begin{aligned} &= \log 10^2 + \log 2.34 \\ &= \log (2.34 \times 10^2) = \log 234 \\ \therefore x &= 234 \end{aligned}$$

$$(2) \log x = -0.6308 = -1 + 0.3692$$

$$\begin{aligned} &= \log 10^{-1} + \log 2.34 \\ &= \log (2.34 \times 10^{-1}) = \log 0.234 \\ \therefore x &= 0.234 \end{aligned}$$

$$(3) \log x = -2.6308 = -2 - 0.6308$$

$$\begin{aligned} &= -3 + 0.3692 \\ &= \log 10^{-3} + \log 2.34 \\ &= \log (2.34 \times 10^{-3}) = \log 0.00234 \\ \therefore x &= 0.00234 \end{aligned}$$

답 (1) 234 (2) 0.234 (3) 0.00234

다른 풀이 (1) $\log x$ 의 정수 부분이 2, 소수 부분이

0.3692이므로 x 의 정수 부분은 세 자리이고 2.34와 숫자의 배열이 같다.

$$\therefore x = 234$$

$$(2) \log x = -0.6308 = -1 + 0.3692$$

$\log x$ 의 정수 부분이 -1, 소수 부분이 0.3692이므로 x 는 소수점 아래 첫째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나고, 2.34와 숫자의 배열이 같다.

$$\therefore x = 0.234$$

95

$\log A = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 \leq \alpha < 1$)라 하면 n 과 α 가 이차방정식 $2x^2 + 5x + k = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$n + \alpha = -\frac{5}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$n\alpha = \frac{k}{2} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

n 은 정수이고, $0 \leq \alpha < 1$ 이므로 $\textcircled{7}$ 에서

$$n + \alpha = -\frac{5}{2} = -2 - \frac{1}{2} = -3 + \frac{1}{2}$$

$$\therefore n = -3, \alpha = \frac{1}{2}$$

이를 $\textcircled{8}$ 에 대입하면

$$-3 \times \frac{1}{2} = \frac{k}{2} \quad \therefore k = -3 \quad \text{답 } -3$$

96

$$\begin{aligned} (1) \log 5^{30} &= 30 \log \frac{10}{2} = 30(\log 10 - \log 2) \\ &= 30 \times (1 - 0.3010) = 20.97 \end{aligned}$$

따라서 $\log 5^{30}$ 의 정수 부분이 20이므로 5^{30} 은 21자리의 정수이다.

$$\begin{aligned} (2) \log (2^{30} \times 3^{30}) &= \log 2^{30} + \log 3^{30} \\ &= 30 \log 2 + 30 \log 3 \\ &= 30(\log 2 + \log 3) \\ &= 30 \times (0.3010 + 0.4771) \\ &= 23.343 \end{aligned}$$

따라서 $\log (2^{30} \times 3^{30})$ 의 정수 부분이 23이므로 $2^{30} \times 3^{30}$ 은 24자리의 정수이다.

답 (1) 21자리 (2) 24자리

97

$$\begin{aligned} (1) \log 2^{-20} &= -20 \log 2 = -20 \times 0.3010 \\ &= -6.02 = -6 - 0.02 \\ &= -7 + 0.98 \end{aligned}$$

따라서 $\log 2^{-20}$ 의 정수 부분이 -7이므로 2^{-20} 을 소수로 나타내면 소수점 아래 7째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$$\begin{aligned} (2) \log \left(\frac{1}{8}\right)^{100} &= \log 2^{-300} = -300 \log 2 \\ &= -300 \times 0.3010 = -90.3 \\ &= -90 - 0.3 = -91 + 0.7 \end{aligned}$$

따라서 $\log \left(\frac{1}{8}\right)^{100}$ 의 정수 부분이 -91이므로

$\left(\frac{1}{8}\right)^{100}$ 을 소수로 나타내면 소수점 아래 91째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

답 (1) 소수점 아래 7째 자리 (2) 소수점 아래 91째 자리

98

$$\begin{aligned}\log 5^{20} &= 20 \log 5 = 20 \log \frac{10}{2} \\ &= 20(\log 10 - \log 2) \\ &= 20 \times (1 - 0.3010) \\ &= 13.98\end{aligned}$$

$\log 5^{20}$ 의 정수 부분이 13이므로 5^{20} 은 14자리의 정수이다.

$$\therefore a = 14$$

한편 $\log 5^{20}$ 의 소수 부분이 0.98이고

$$\log 9 = 2 \log 3 = 2 \times 0.4771 = 0.9542$$

이므로

$$\begin{aligned}\log 9 &< 0.98 < \log 10 \\ \log 9 + 13 &< 13.98 < \log 10 + 13 \\ \log 9 + \log 10^{13} &< \log 5^{20} < \log 10 + \log 10^{13} \\ \log(9 \times 10^{13}) &< \log 5^{20} < \log(10 \times 10^{13}) \\ \therefore 9 \times 10^{13} &< 5^{20} < 10 \times 10^{13}\end{aligned}$$

따라서 5^{20} 의 최고 자리의 숫자는 9이므로

$$b = 9$$

$$\therefore a + b = 23$$

답 23

99

$$\begin{aligned}\log x^2 - \log \frac{1}{x} &= 2 \log x + \log x \\ &= 3 \log x = (\text{정수})\end{aligned}$$

$\log x$ 의 정수 부분이 2이므로

$$2 \leq \log x < 3$$

따라서 $6 \leq 3 \log x < 9$ 이고, $3 \log x$ 는 정수이므로

$$3 \log x = 6 \text{ 또는 } 3 \log x = 7 \text{ 또는 } 3 \log x = 8$$

$$\log x = 2 \text{ 또는 } \log x = \frac{7}{3} \text{ 또는 } \log x = \frac{8}{3}$$

$$\therefore x = 10^2 \text{ 또는 } x = 10^{\frac{7}{3}} \text{ 또는 } x = 10^{\frac{8}{3}}$$

답 $10^2, 10^{\frac{7}{3}}, 10^{\frac{8}{3}}$

100

$\log x$ 의 소수 부분과 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분의 합이 1이므로

$$\begin{aligned}\log x + \log \sqrt{x} &= \log x + \frac{1}{2} \log x \\ &= \frac{3}{2} \log x = (\text{정수})\end{aligned}$$

$\log x$ 의 정수 부분이 4이므로

$$4 < \log x < 5$$

따라서 $6 < \frac{3}{2} \log x < \frac{15}{2}$ 이고, $\frac{3}{2} \log x$ 는 정수이므로

$$\frac{3}{2} \log x = 7 \quad \therefore \log x = \frac{14}{3}$$

$$\therefore \log \sqrt[4]{x} = \frac{1}{4} \log x = \frac{1}{4} \times \frac{14}{3}$$

$$= \frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{6}$$

따라서 $\log \sqrt[4]{x}$ 의 소수 부분은 $\frac{1}{6}$ 이다.

답 $\frac{1}{6}$

다른 풀이 $\log x$ 의 소수 부분을 α 라 하면

$$\log x = 4 + \alpha \quad (0 < \alpha < 1)$$

$$\therefore \log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x = \frac{1}{2} (4 + \alpha) = 2 + \frac{\alpha}{2}$$

따라서 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분은 $\frac{\alpha}{2}$ 이므로

$$\alpha + \frac{\alpha}{2} = 1 \quad \therefore \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \log x = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \text{ 이므로}$$

$$\log \sqrt[4]{x} = \frac{1}{4} \log x = \frac{1}{4} \times \frac{14}{3}$$

$$= \frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{6}$$

따라서 구하는 소수 부분은 $\frac{1}{6}$ 이다.

101

$$T = T_a + (T_0 - T_a)10^{-0.02t} \text{에}$$

$T_a = 20, T_0 = 120, T = 25$ 를 대입하면

$$25 = 20 + (120 - 20) \times 10^{-0.02t}$$

$$5 = 100 \times 10^{-0.02t} \quad \therefore 10^{-0.02t} = \frac{1}{20}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 10^{-0.02t} = \log \frac{1}{20}$$

$$\begin{aligned}-0.02t &= -\log 20 = -(\log 10 + \log 2) \\ &= -1.3\end{aligned}$$

$$\therefore t = \frac{1.3}{0.02} = 65$$

따라서 물체의 온도가 25°C 가 되는 것은 65분 후이다.

답 65분

102

밀폐된 용기 속의 온도가 30°C 일 때의 포화증기압이 P_1 이므로

$$\log P_1 = 9 - \frac{2200}{30 + 180} = 9 - \frac{220}{21} \dots\dots \textcircled{㉠}$$

밀폐된 용기 속의 온도가 40°C 일 때의 포화증기압이 P_2 이므로

$$\log P_2 = 9 - \frac{2200}{40 + 180} = -1 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉡} - \textcircled{㉠}$ 을 하면

$$\log P_2 - \log P_1 = \frac{220}{21} - 10$$

$$\log \frac{P_2}{P_1} = \frac{10}{21}$$

$$\therefore \frac{P_2}{P_1} = 10^{\frac{10}{21}} \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

연습 문제

• 본책 53~55쪽

103

전략 3230을 3, 23과 10의 거듭제곱으로 나타낸다.

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{3230} &= \log 3230^{-1} \\ &= -\log (3.23 \times 10^3) \\ &= -(\log 3.23 + \log 10^3) \\ &= -(0.5092 + 3) \\ &= -3.5092 \quad \text{답 } -3.5092 \end{aligned}$$

104

전략 $\log A$ 의 값을 이용하여 $\log \frac{1}{\sqrt[4]{A}}$ 의 값을 구한다.

$\log A = 1.2$ 이므로

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{\sqrt[4]{A}} &= \log A^{-\frac{1}{4}} \\ &= -\frac{1}{4} \log A \\ &= -\frac{1}{4} \times 1.2 = -0.3 \\ &= -1 + 0.7 \end{aligned}$$

따라서 $\log \frac{1}{\sqrt[4]{A}}$ 의 정수 부분은 -1 , 소수 부분은 0.7 이므로

$$a = -1, b = 0.7$$

$$\therefore 100ab = 100 \times (-1) \times 0.7 = -70$$

답 -70

105

전략 $\log x$ 의 소수 부분을 상용로그표에서 찾는다.

$$\log x = -0.4260 = -1 + 0.5740$$

주어진 상용로그표에서 $\log 3.75 = 0.5740$ 이므로

$$\log x = \log 10^{-1} + \log 3.75$$

$$= \log (10^{-1} \times 3.75)$$

$$= \log 0.375$$

$$\therefore x = 0.375$$

답 0.375

106

전략 $\log 200$ 의 정수 부분과 소수 부분을 구한다.

$$\log 100 = 2, \log 1000 = 3 \text{이므로}$$

$$2 < \log 200 < 3$$

즉 $\log 200$ 의 정수 부분은 2이므로 소수 부분은

$$\log 200 - 2 = \log \frac{200}{100} = \log 2$$

따라서 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 2, $\log 2$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$2 + \log 2 = -a, 2 \times \log 2 = b$$

$$\therefore a = -2 - \log 2, b = 2 \log 2$$

$$\therefore 2a + b = 2(-2 - \log 2) + 2 \log 2$$

$$= -4$$

답 -4

107

전략 $\log 2$, $\log 3$ 의 값을 이용하여 $\log 3^{100}$, $\log \left(\frac{1}{2}\right)^{200}$ 의 값을 구한다.

$$\log 3^{100} = 100 \log 3 = 100 \times 0.4771 = 47.71$$

따라서 $\log 3^{100}$ 의 정수 부분이 47이므로 3^{100} 은 48자리의 정수이다.

$$\log \left(\frac{1}{2}\right)^{200} = \log 2^{-200}$$

$$= -200 \log 2$$

$$= -200 \times 0.3010 = -60.2$$

$$= -61 + 0.8$$

따라서 $\log\left(\frac{1}{2}\right)^{200}$ 의 정수 부분이 -61 이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{200}$ 을 소수로 나타내면 소수점 아래 61째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

따라서 $a=48$, $b=61$ 이므로

$$a+b=109$$

답 109

108

전략 로그의 성질을 이용하여 $\log \frac{1}{x}$ 의 값을 구한다.

$$\log_3 x = 20 \text{이므로} \quad x = 3^{20}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log \frac{1}{x} &= \log \frac{1}{3^{20}} = \log 3^{-20} \\ &= -20 \log 3 = -20 \times 0.4771 \\ &= -9.542 = -10 + 0.458 \end{aligned}$$

따라서 $\alpha = 0.458$ 이므로

$$1000\alpha = 458$$

답 458

109

전략 $10 < 12 < 100$ 임을 이용하여 $\log 12$ 의 정수 부분과 소수 부분을 구한다.

$$\log 10 = 1, \log 100 = 2 \text{이므로} \quad 1 < \log 12 < 2$$

따라서 $\log 12$ 의 정수 부분은 1이므로

$$x = 1$$

$$\therefore y = \log 12 - 1 = \log 12 - \log 10 = \log \frac{6}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore 10^x + 10^{-y} &= 10^1 + 10^{-\log \frac{6}{5}} \\ &= 10 + 10^{\log \frac{5}{6}} \\ &= 10 + \frac{5}{6} = \frac{65}{6} \end{aligned}$$

답 $\frac{65}{6}$

110

전략 $66 \leq \log A^{50} < 67$ 임을 이용하여 $\log A^{20}$ 의 값의 범위를 구한다.

A^{50} 이 67자리의 정수이므로 $\log A^{50}$ 의 정수 부분은 66이다.

따라서 $66 \leq \log A^{50} < 67$ 이므로

$$66 \leq 50 \log A < 67$$

$$\text{각 변에 } \frac{2}{5} \text{를 곱하면} \quad \frac{132}{5} \leq 20 \log A < \frac{134}{5}$$

$$\therefore 26.4 \leq \log A^{20} < 26.8$$

따라서 $\log A^{20}$ 의 정수 부분이 26이므로 A^{20} 은 27자리의 정수이다.

답 27자리

111

전략 두 상용로그의 차가 정수임을 이용한다.

$\log x^4$ 의 소수 부분과 $\log x^2$ 의 소수 부분이 같으므로

$$\begin{aligned} \log x^4 - \log x^2 &= 4 \log x - 2 \log x \\ &= 2 \log x = (\text{정수}) \end{aligned}$$

$2 < \log x < 3$ 에서 $4 < 2 \log x < 6$ 이고, $2 \log x$ 는 정수이므로

$$2 \log x = 5, \quad \log x = \frac{5}{2}$$

$$\therefore x = 10^{\frac{5}{2}}$$

답 $10^{\frac{5}{2}}$

112

전략 두 상용로그의 합을 이용하여 가능한 $\log x$ 의 값을 모두 구한다.

$$\begin{aligned} \log x^3 + \log x^2 &= 3 \log x + 2 \log x \\ &= 5 \log x = (\text{정수}) \end{aligned}$$

$\log x$ 의 정수 부분이 2이므로

$$2 \leq \log x < 3$$

따라서 $10 \leq 5 \log x < 15$ 이고, $5 \log x$ 는 정수이므로

$$\begin{aligned} 5 \log x &= 10 \text{ 또는 } 5 \log x = 11 \text{ 또는 } 5 \log x = 12 \\ &\text{또는 } 5 \log x = 13 \text{ 또는 } 5 \log x = 14 \end{aligned}$$

$$\log x = 2 \text{ 또는 } \log x = \frac{11}{5} \text{ 또는 } \log x = \frac{12}{5}$$

$$\text{또는 } \log x = \frac{13}{5} \text{ 또는 } \log x = \frac{14}{5}$$

$$\therefore x = 10^2 \text{ 또는 } x = 10^{\frac{11}{5}} \text{ 또는 } x = 10^{\frac{12}{5}}$$

$$\text{또는 } x = 10^{\frac{13}{5}} \text{ 또는 } x = 10^{\frac{14}{5}}$$

따라서 구하는 x 의 개수는 5이다.

답 5

113

전략 주어진 조건을 대입하여 D_1 , D_2 를 P_1 에 대한 식으로 나타낸다.

상품의 판매 가격이 P_1 일 때의 수요량이 D_1 이므로

$$\log D_1 = \log c - \frac{1}{3} \log P_1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

상품의 판매 가격이 $4P_1$ 일 때의 수요량이 D_2 이므로

$$\log D_2 = \log c - \frac{1}{3} \log 4P_1 \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$$

$\textcircled{C} - \textcircled{A}$ 을 하면

$$\log D_2 - \log D_1 = \frac{1}{3} \log P_1 - \frac{1}{3} \log 4P_1$$

$$\therefore \log \frac{D_2}{D_1} = -\frac{1}{3} (\log 4P_1 - \log P_1)$$

$$= -\frac{1}{3} \log \frac{4P_1}{P_1}$$

$$= -\frac{1}{3} \log 4$$

$$= \log 4^{-\frac{1}{3}}$$

따라서 $\frac{D_2}{D_1} = 4^{-\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{2}{3}}$ 이므로

$$k = -\frac{2}{3} \quad \text{답 } -\frac{2}{3}$$

114

전략 $\log z = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 < \alpha < 1$)로 놓고 $\log \frac{1}{z}$ 의 정수 부분과 소수 부분을 n, α 로 나타낸다.

$\log z = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 < \alpha < 1$)라 하면 n, α 가 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$n + \alpha = a \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$n\alpha = b \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$\log \frac{1}{z} = -\log z = -n - \alpha = (-1 - n) + (1 - \alpha)$$

에서 $0 < 1 - \alpha < 1$ 이므로 $\log \frac{1}{z}$ 의 정수 부분은

$-1 - n$, 소수 부분은 $1 - \alpha$ 이다.

따라서 $-1 - n, 1 - \alpha$ 가 이차방정식

$x^2 + ax + b - \frac{3}{2} = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(-1 - n)(1 - \alpha) = b - \frac{3}{2}$$

$$\therefore -1 + \alpha - n + n\alpha = b - \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{B} \text{에 의하여 } n - \alpha = \frac{1}{2}$$

이때 $0 < \alpha < 1$ 이고 n 은 정수이므로

$$n - \alpha = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

따라서 $n = 1, \alpha = \frac{1}{2}$ 이므로 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서

$$a = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, b = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{답 } a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$$

참고 $b \neq 0$ 이므로 $n \neq 0, \alpha \neq 0$

115

전략 $-14 \leq \log \left(\frac{3}{5}\right)^n < -13$ 임을 이용하여 n 의 값의 범위를 구한다.

$\left(\frac{3}{5}\right)^n$ 을 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 14째 자리에 서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나므로 $\log \left(\frac{3}{5}\right)^n$ 의 정수 부분은 -14 이다.

따라서 $-14 \leq \log \left(\frac{3}{5}\right)^n < -13$ 이므로

$$-14 \leq n \log \frac{6}{10} < -13$$

$$-14 \leq n(\log 2 + \log 3 - \log 10) < -13$$

$$-14 \leq n(0.30 + 0.48 - 1) < -13$$

$$-14 \leq -0.22n < -13$$

$$\therefore 59. \times \times \times < n \leq 63. \times \times \times \leftarrow \frac{13}{0.22} < n \leq \frac{14}{0.22}$$

따라서 자연수 n 은 60, 61, 62, 63의 4개이다.

답 4

116

전략 로그의 성질을 이용하여 $\log (27^{100} \div 5^{200})$ 의 값을 구한다.

$$\log (27^{100} \div 5^{200})$$

$$= \log 27^{100} - \log 5^{200}$$

$$= 100 \log 3^3 - 200 \log \frac{10}{2}$$

$$= 300 \log 3 - 200(\log 10 - \log 2)$$

$$= 300 \times 0.4771 - 200 \times (1 - 0.3010)$$

$$= 3.33$$

따라서 $\log (27^{100} \div 5^{200})$ 의 정수 부분이 3이므로 $27^{100} \div 5^{200}$ 의 정수 부분은 4자리이다.

$$\therefore a = 4$$

또 $\log (27^{100} \div 5^{200})$ 의 소수 부분이 0.33이고

$$\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771 \text{이므로}$$

$$\log 2 < 0.33 < \log 3$$

$$\log 2 + 3 < 3.33 < \log 3 + 3$$

$$\log(2 \times 10^3) < \log(27^{100} \div 5^{200}) < \log(3 \times 10^3)$$

$$\therefore 2 \times 10^3 < 27^{100} \div 5^{200} < 3 \times 10^3$$

따라서 $27^{100} \div 5^{200}$ 의 최고 자리의 숫자는 2이므로

$$b=2$$

$$\therefore ab=8$$

답 8

117

전략 $\log x$ 의 소수 부분을 α 로 놓고 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분을 α 에 대한 식으로 나타낸다.

$\log x$ 의 소수 부분을 α 라 하면

$$\log x = 3 + \alpha \quad (0 < \alpha < 1)$$

$$\therefore \log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x = \frac{1}{2}(3 + \alpha)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{\alpha}{2} = 1 + \frac{1+\alpha}{2}$$

이때 $0 < \alpha < 1$ 이므로 $\frac{1}{2} < \frac{1+\alpha}{2} < 1$

즉 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분은 $\frac{1+\alpha}{2}$ 이므로

$$\alpha + \frac{1+\alpha}{2} = \frac{3}{4}, \quad \frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{6}$$

따라서 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분은

$$\frac{1+\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{6}\right) = \frac{7}{12}$$

답 $\frac{7}{12}$

118

전략 48시간 후의 세균의 수를 3의 거듭제곱을 이용하여 나타내고, $\log x$ 의 값을 구한다.

처음 세균의 수를 A 라 하면

$$2\text{시간 후의 세균의 수는 } 3A$$

$$4\text{시간 후의 세균의 수는 } 3 \times 3A = 3^2 A$$

$$6\text{시간 후의 세균의 수는 } 3 \times 3^2 A = 3^3 A$$

⋮

$$48\text{시간 후의 세균의 수는 } 3^{24} A$$

따라서 $x = 3^{24}$ 이므로 양변에 상용로그를 취하면

$$\log x = \log 3^{24} = 24 \log 3$$

$$= 24 \times 0.48 = 11.52$$

즉 $\log x$ 의 정수 부분이 11이므로 x 는 12자리의 정수이다.

답 12자리

3 지수함수

I. 지수함수와 로그함수

01 지수함수의 뜻과 그래프

● 본책 58~64쪽

119

ㄷ, ㄴ. 다항함수

$$\text{ㄹ. } y = 2 \times 3^x \text{에서 } y = 3^{\log_3 2} \times 3^x = 3^{x + \log_3 2}$$

$$\text{ㅂ. } y = \frac{1}{2^x} \text{에서 } y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

이상에서 지수함수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅂ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅂ

120

$$(1) f(2) = 2^2 = 4$$

$$(2) f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(3) f(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

$$(4) g(0) = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$

$$(5) g(3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$(6) g(-2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$$

답 (1) 4 (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{1}{8}$

(4) 1 (5) $\frac{1}{27}$ (6) 9

121

답 (1) 실수 (2) 양의 실수 (3) < (4) > (5) x 축

122

(1) 함수 $y = 3^{x-1}$ 의 그래프는 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

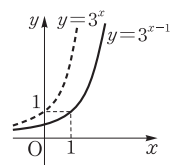
따라서 함수 $y = 3^{x-1}$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같고,

정의역은 $\{x \mid x \text{는 실수}\}$

치역은 $\{y \mid y > 0\}$

접근선의 방정식은 $y = 0$



- (2) 함수 $y=3^x+2$ 의 그래프는 $y=3^x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

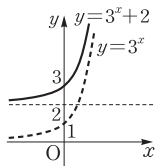
따라서 함수 $y=3^x+2$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같고,

정의역은 $\{x|x \text{는 실수}\}$

치역은 $\{y|y>2\}$

점근선의 방정식은 $y=2$



- (3) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x=3^{-x}$ 이므로 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프는 $y=3^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

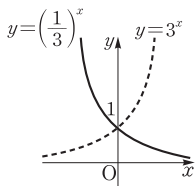
따라서 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그

래프는 오른쪽 그림과 같고,

정의역은 $\{x|x \text{는 실수}\}$

치역은 $\{y|y>0\}$

점근선의 방정식은 $y=0$



- (4) 함수 $y=-3^x$ 의 그래프는 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

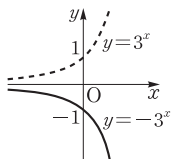
따라서 함수 $y=-3^x$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같고,

정의역은 $\{x|x \text{는 실수}\}$

치역은 $\{y|y<0\}$

점근선의 방정식은 $y=0$



답 풀이 참조

123

$$(1) \sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{9}=\sqrt[4]{3^2}=3^{\frac{1}{2}}$$

이때 $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ 이고, 함수 $y=3^x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$$3^{\frac{1}{3}} < 3^{\frac{1}{2}} \quad \therefore \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{9}$$

- (2) $-2 < 0.5$ 이고, 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} > \left(\frac{1}{5}\right)^{0.5}$$

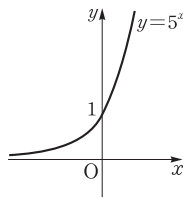
$$\text{답 (1) } \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{9} \quad (2) \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} > \left(\frac{1}{5}\right)^{0.5}$$

124

함수 $y=5^x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ. $x=0$ 일 때 $y=1$ 이므로 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지난다.

(참)



ㄴ. 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$ 이다. (거짓)

ㄷ. x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다. (참)

ㄹ. 함수 $y=5^x$ 은 일대일함수이므로 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

125

$$\text{ㄱ. } f(x+1)=a^{x+1}=a \times a^x=af(x) \quad (\text{참})$$

$$\text{ㄴ. } f(-x)=a^{-x}=\frac{1}{a^x}=\frac{1}{f(x)} \quad (\text{참})$$

$$\text{ㄷ. } f(x^2)=a^{x^2}, \{f(x)\}^2=(a^x)^2=a^{2x} \text{이므로 } f(x^2) \neq \{f(x)\}^2 \quad (\text{거짓})$$

$$\text{ㄹ. } f(x+y)=a^{x+y}=a^x \times a^y=f(x)f(y) \quad (\text{참})$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

$$\text{참고 } \{f(x)\}^n=(a^x)^n=a^{nx}=f(nx)$$

126

- (1) $y=2^{-x}-1$ 의 그래프는 $y=2^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

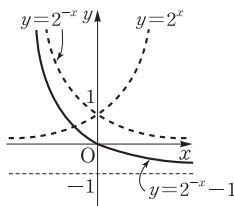
따라서 함수 $y=2^{-x}-1$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,

정의역은 $\{x|x \text{는 실수}\}$

치역은 $\{y|y>-1\}$

점근선의 방정식은 $y=-1$



- (2) $y=-2^{-x}$ 의 그래프는 $y=2^x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.

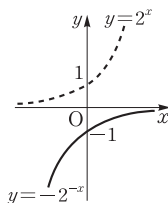
따라서 함수 $y=-2^{-x}$ 의 그래

프는 오른쪽 그림과 같고,

정의역은 $\{x|x \text{는 실수}\}$

치역은 $\{y|y<0\}$

점근선의 방정식은 $y=0$



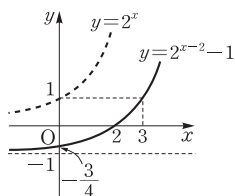
- (3) $y=2^{x-2}-1$ 의 그래프는 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=2^{x-2}-1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,

정의역은 $\{x|x \text{는 실수}\}$

치역은 $\{y|y > -1\}$

점근선의 방정식은 $y = -1$



- (4) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}+2$ 의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수

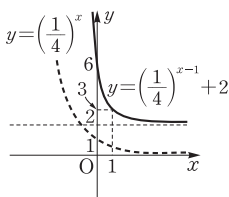
$y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}+2$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같고,

정의역은 $\{x|x \text{는 실수}\}$

치역은 $\{y|y > 2\}$

점근선의 방정식은 $y=2$



- (5) $y=3^{-x+1}=3^{-(x-1)}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$

이므로 함수 $y=3^{-x+1}$ 의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=3^{-x+1}$ 의

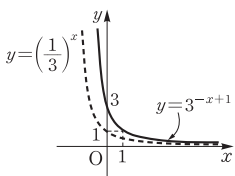
그래프는 오른쪽 그림과

같고,

정의역은 $\{x|x \text{는 실수}\}$

치역은 $\{y|y > 0\}$

점근선의 방정식은 $y=0$

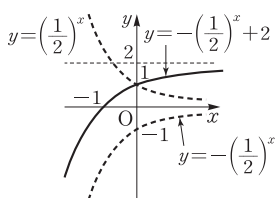


- (6) $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+2$ 의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수

$y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+2$ 의

그래프는 오른쪽 그림과 같고,



정의역은 $\{x|x \text{는 실수}\}$

치역은 $\{y|y < 2\}$

점근선의 방정식은 $y=2$

답 풀이 참조

127

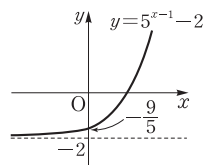
$y=5^{x-1}-2$ 의 그래프는 $y=5^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

또 $x=0$ 일 때

$$y=5^{-1}-2=-\frac{9}{5}<0$$

이므로 함수 $y=5^{x-1}-2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 그래프는 제 1, 3, 4 사분면을 지난다.



답 제 1, 3, 4 사분면

128

$y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=3^{x-3}-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y=3^{-x-3}-2$$

$$\therefore y=-3^{-x-3}+2=-3^{-x} \times 3^{-3}+2$$

$$=-\frac{1}{27} \times 3^{-x}+2$$

$$\therefore a=-\frac{1}{27}, b=2$$

$$\text{답 } a=-\frac{1}{27}, b=2$$

129

$y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{-x+1} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉔의 그래프가 두 점 $(-1, m)$, $(2, n)$ 을 지나므로

$$m = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, n = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore mn = \frac{2}{3} \quad \text{답 } \frac{2}{3}$$

130

$$(1) \sqrt{2^3} = 2^{\frac{3}{2}}, 0.5^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{1}{3}}, \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$$

이때 $-\frac{1}{3} < \frac{2}{3} < \frac{3}{2}$ 이고, 함수 $y = 2^x$ 에서 x 의 값

이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$$2^{-\frac{1}{3}} < 2^{\frac{2}{3}} < 2^{\frac{3}{2}} \quad \therefore 0.5^{\frac{1}{3}} < \sqrt[3]{4} < \sqrt{2^3}$$

$$(2) \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1, \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{27}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$$

이때 $\frac{1}{3} < \frac{3}{4} < 1$ 이고, 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 에서 x 의 값

이 증가하면 y 의 값은 감소하므로

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}} > \left(\frac{1}{3}\right)^1$$

$$\therefore \sqrt{\frac{1}{9}} < \sqrt[4]{\frac{1}{27}} < \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

$$\text{답 } (1) 0.5^{\frac{1}{3}} < \sqrt[3]{4} < \sqrt{2^3}$$

$$(2) \sqrt{\frac{1}{9}} < \sqrt[4]{\frac{1}{27}} < \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

131

함수 $y = 2^x$ 의 그래프는 점

$(0, 1)$ 을 지나므로

$$a = 1$$

직선 $y = x$ 가 점 $(b, 1)$ 을

지나므로

$$b = 1$$

함수 $y = 2^x$ 의 그래프가 점 $(1, c)$ 를 지나므로

$$c = 2$$

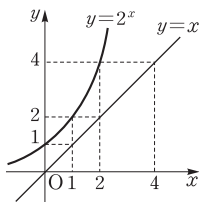
이때 직선 $y = x$ 는 점 $(2, 2)$ 를 지나고, 함수 $y = 2^x$ 의 그래프는 점 $(2, 4)$ 를 지난다.

따라서 직선 $y = x$ 가 점 $(d, 4)$ 를 지나므로

$$d = 4$$

$$\therefore a + b + c + d = 8$$

답 8

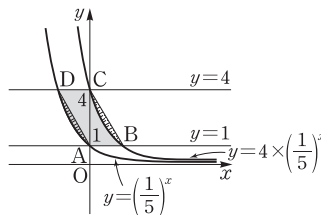


132

$$y = 4 \times \left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5 4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^x \\ = \left(\frac{1}{5}\right)^{x + \log_5 4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x - \log_5 4}$$

이므로 $y = 4 \times \left(\frac{1}{5}\right)^x$ 의 그래프는 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ 의 그래프

를 x 축의 방향으로 $\log_5 4$ 만큼 평행이동한 것이다.



따라서 위의 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 구하는 넓이는 평행사변형 ABCD의 넓이와 같다.

즉 구하는 넓이는

$$(4-1) \times \log_5 4 = 3 \log_5 4 = 6 \log_5 2$$

답 $6 \log_5 2$

연습 문제

● 본책 65~67쪽

133

전략 $f(2) = 16$ 임을 이용하여 a 의 값을 구한다.

$$f(2) = 16 \text{이므로 } a^2 = 16$$

$$\therefore a = 4 (\because a > 0)$$

따라서 $f(x) = 4^x$ 이므로

$$\frac{f(-1)f(3)}{f(1)} = \frac{4^{-1} \times 4^3}{4} = \frac{4^2}{4} = 4$$

답 4

134

전략 함수식을 $y = a^{x-m} + n$ 의 꼴로 변형한다.

$$y = 3^{2x-1} + 1 = 3^{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} + 1 = 9^{x-\frac{1}{2}} + 1$$

① 치역은 $\{y | y > 1\}$ 이다.

② x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

③ 그래프는 $y = 9^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

⑤ 그래프는 평행이동에 의하여 $y = 3^x$ 의 그래프와 겹쳐질 수 없다.

답 ④

135

전략 평행이동한 그래프의 식이 $y = \frac{1}{2} \times 2^{2x} - 1$ 과 일치함을 이용한다.

함수 $y = 4^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = 4^{x-m} + n = 2^{2x-2m} + n \\ = 2^{-2m} \times 2^{2x} + n$$

이 식이 $y = \frac{1}{2} \times 2^{2x} - 1$ 과 일치하므로

$$2^{-2m} = \frac{1}{2} = 2^{-1}, n = -1$$

$$\therefore m = \frac{1}{2}, n = -1$$

$$\therefore m + n = -\frac{1}{2} \quad \text{답 } -\frac{1}{2}$$

136

전략 그래프의 점근선과 그래프가 지나는 점을 이용한다.

$y = 3^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = 3^{-x} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

㉠의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = 3^{-(x-a)} + b \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉡의 그래프의 점근선의 방정식은 $y = b$ 이므로

$$b = -3$$

또 ㉡의 그래프가 원점을 지나므로

$$0 = 3^a - 3 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore a + b = -2 \quad \text{답 } -2$$

137

전략 두 곡선 $y = a^x$, $y = a^{2x}$ 이 지나는 점의 좌표를 이용하여 p , q 에 대한 식을 세운다.

곡선 $y = a^x$ 이 점 $(p, -p)$ 를 지나므로

$$-p = a^p \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

곡선 $y = a^{2x}$ 이 점 $(q, -q)$ 를 지나므로

$$-q = a^{2q} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 변끼리 곱하면

$$pq = a^p a^{2q} = a^{p+2q}$$

이때 $\log_a pq = -8$ 이므로 $\log_a a^{p+2q} = -8$

$$\therefore p + 2q = -8 \quad \text{답 } \textcircled{㉤}$$

138

전략 그래프 위의 점의 좌표를 이용하여 α , β 를 a , b 에 대한 식으로 나타낸다.

함수 $y = 3^x$ 의 그래프가 두 점 (a, α) , (b, β) 를 지나므로

$$3^a = \alpha, 3^b = \beta$$

이때 $\alpha\beta = 27$ 이므로

$$3^a \times 3^b = 27, \quad 3^{a+b} = 3^3$$

$$\therefore a + b = 3 \quad \text{답 } \textcircled{㉢}$$

139

전략 역함수의 정의를 이용한다.

주어진 그래프에서

$$g(k) = 3$$

이때 $f(x) = 2^x$ 이라 하면 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 각각 서로의 역함수이므로

$$f(3) = k$$

$$\therefore k = 2^3 = 8 \quad \text{답 } 8$$

140

전략 주어진 등식을 a 에 대한 식으로 나타낸다.

$8f(x+2) = 2f(x+1) + f(x)$ 에서

$$8a^{x+2} = 2a^{x+1} + a^x$$

$a^x > 0$ 이므로 양변을 a^x 으로 나누면

$$8a^2 = 2a + 1, \quad 8a^2 - 2a - 1 = 0$$

$$(4a+1)(2a-1) = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} \quad (\because a > 0)$$

즉 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 이므로

$$f(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \quad \text{답 } \frac{1}{8}$$

141

전략 그래프를 평행이동하여 함수 $y = 4^x$ 의 그래프와 겹쳐질 수 있는 함수는 $y = 4^{x-m} + n$ 의 꼴임을 이용한다.

ㄱ. $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^{-x}$ 이므로 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 의 그래프는

$y = 4^x$ 의 그래프와 y 축에 대하여 대칭이다.

따라서 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 의 그래프는 평행이동에 의하여

$y = 4^x$ 의 그래프와 겹쳐질 수 없다.

$$\therefore y = \left(\frac{1}{4}\right)^{3-x} = (4^{-1})^{3-x} = 4^{x-3}$$

이므로 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{3-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하면 $y = 4^x$ 의 그래프와 겹쳐진다.

$$\therefore y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = -\left(\frac{1}{4}\right)^x = -4^{-x}$$

이므로 $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$ 의 그래프는 $y = 4^x$ 의 그래프와 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$ 의 그래프는 평행이동에 의하여 $y = 4^x$ 의 그래프와 겹쳐질 수 없다.

$$\therefore y = 2^{2x-1} = 2^{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} = 4^{x-\frac{1}{2}}$$

이므로 $y = 2^{2x-1}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$

만큼 평행이동하면 $y = 4^x$ 의 그래프와 겹쳐진다.

이상에서 그래프를 평행이동하여 $y = 4^x$ 의 그래프와 겹쳐질 수 있는 함수인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄹ

142

전략 함수 $y = a^{f(x)} + k$ 의 그래프가 a 의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 x 좌표는 $f(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값이다.

$y = a^{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = a^{2(x-2)} + 3 = a^{2x-4} + 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①이 a 의 값에 관계없이 항상 성립하려면 a 의 지수가 0이어야 한다.

$$\text{즉 } 2x - 4 = 0 \text{에서 } x = 2$$

$$\textcircled{1} \text{에 } x = 2 \text{를 대입하면 } y = a^0 + 3 = 4$$

따라서 ①의 그래프는 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(2, 4)$ 를 지나므로

$$a = 2, \beta = 4 \quad \therefore a\beta = 8 \quad \text{답 8}$$

143

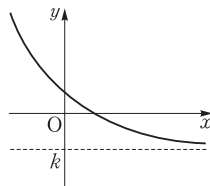
전략 주어진 조건을 만족시키도록 함수 $y = 2^{-3x+6} + k$ 의 그래프를 그려 본다.

$$y = 2^{-3x+6} + k = 2^{-3(x-2)} + k \text{에서}$$

$$y = \left(\frac{1}{8}\right)^{x-2} + k$$

따라서 $y = 2^{-3x+6} + k$ 의 그래프는 $y = \left(\frac{1}{8}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

이때 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로 $x = 0$ 일 때 $y \geq 0$ 이어야 한다.



$$\text{즉 } \left(\frac{1}{8}\right)^{-2} + k \geq 0 \text{이므로}$$

$$64 + k \geq 0 \quad \therefore k \geq -64$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 -64 이다. **답 -64**

144

전략 거듭제곱근을 유리수인 지수로 나타낸 후 지수의 대소를 비교한다.

$$A = {}^{n-1}\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{n-1}}, B = {}^n\sqrt{a^{n+1}} = a^{\frac{n+1}{n}},$$

$$C = {}^{n+1}\sqrt{a^{n+2}} = a^{\frac{n+2}{n+1}}$$

이때

$$\frac{n}{n-1} - \frac{n+1}{n} = \frac{n^2 - (n+1)(n-1)}{n(n-1)}$$

$$= \frac{1}{n(n-1)} > 0,$$

$$\frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

이므로

$$\frac{n}{n-1} > \frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1}$$

그런데 $0 < a < 1$ 이므로 함수 $y = a^x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

$$\text{즉 } a^{\frac{n}{n-1}} < a^{\frac{n+1}{n}} < a^{\frac{n+2}{n+1}} \text{이므로}$$

$$A < B < C$$

$$\text{답 } A < B < C$$

개념 노트

두 수 A, B 에 대하여

$$\textcircled{1} A - B > 0 \iff A > B$$

$$\textcircled{2} A - B = 0 \iff A = B$$

$$\textcircled{3} A - B < 0 \iff A < B$$

다른 풀이 $\frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1},$

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}, \quad \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

이때 $\frac{1}{n-1} > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ 이므로

$$\frac{n}{n-1} > \frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1}$$

145

전략 점 A의 x좌표를 미지수로 놓고, 직선 OA와 직선 AB의 기울기를 각각 구한다.

점 A의 좌표를 $(k, \sqrt{3})$ 이라 하면 직선 OA의 기울기는

$$\frac{\sqrt{3}}{k}$$

직선 AB의 기울기는 $\frac{\sqrt{3}}{k-4}$

이때 직선 OA와 직선 AB가 수직이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{k} \times \frac{\sqrt{3}}{k-4} = -1, \quad k(k-4) = -3$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0, \quad (k-1)(k-3) = 0$$

$$\therefore k=1 \text{ 또는 } k=3$$

따라서 점 $(1, \sqrt{3})$ 또는 점 $(3, \sqrt{3})$ 이 함수 $y=a^x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$\sqrt{3} = a \text{ 또는 } \sqrt{3} = a^3$$

$$\therefore a=3^{\frac{1}{2}} \text{ 또는 } a=3^{\frac{1}{6}}$$

즉 모든 a의 값의 곱은

$$3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = 3^{\frac{2}{3}}$$

답 ②

146

전략 두 점 A, B의 x좌표의 비가 1 : 2임을 이용한다.

$$\overline{PA} : \overline{PB} = \triangle OAP : \triangle OBP = 1 : 2 \text{ 이므로}$$

두 점 A, B의 x좌표를 각각 m, 2m이라 하면

$$a^m = 3^{2m} = k, \quad a^m = (3^2)^m$$

$$\therefore a=3^2=9$$

답 9

다른 풀이 $a^x = k$ 에서 $x = \log_a k$

$$\therefore A(\log_a k, k)$$

$$3^x = k \text{에서 } x = \log_3 k$$

$$\therefore B(\log_3 k, k)$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle OAP : \triangle OBP &= \overline{PA} : \overline{PB} \\ &= \log_a k : \log_3 k \end{aligned}$$

즉 $\log_a k : \log_3 k = 1 : 2$ 이므로

$$\log_3 k = 2 \log_a k, \quad 3 = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore a = 3^2 = 9$$

147

전략 그래프의 평행이동을 이용하여 구하는 부분과 넓이가 같은 도형을 찾는다.

$y=2^{x-2}-2$ 의 그래프는 $y=2^x$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

오른쪽 그림과 같이 두 함수

$y=2^x, y=2^{x-2}-2$ 의

그래프와 두 직선

$y=-x+1, y=-x+3$

의 교점을 각각 A, B, C,

D라 하면 두 점 A, D를

x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행

이동한 점이 각각 B, C이므로 $y=2^x$ 의 그래프와 $\overline{AD}$

로 둘러싸인 부분과 $y=2^{x-2}-2$ 의 그래프와 $\overline{BC}$ 로 둘러

싸인 부분의 넓이가 같다. 즉 구하는 넓이는 평행사

변형 ABCD의 넓이와 같다.

이때 점 A의 좌표가 (0, 1)이므로 점 B의 좌표는

$$(2, -1)$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

또 점 A와 직선 $y=-x+3$, 즉 $x+y-3=0$ 사이의

$$\text{거리는 } \frac{|1-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{따라서 구하는 넓이는 } 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$$

답 4

해설 Focus

점 A를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점을 P라 하면 점 P는 $y=2^{x-2}-2$ 의 그래프 위의 점이다.

또 직선 AP의 기울기가 -1이므로 점 P는 직선

$y=-x+1$ 위의 점이다.

즉 점 P는 $y=2^{x-2}-2$ 의 그래프와 직선 $y=-x+1$ 의 교점이므로 점 B와 일치한다.

같은 방법으로 하면 점 D를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점이 점 C임을 알 수 있다.

02 지수함수의 최대·최소

● 본책 68~73쪽

148

답 증가, 2, 16, $-1, \frac{1}{4}$

149

답 감소, $-2, 9, 3, \frac{1}{27}$

150

(1) 함수 $y=2^x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

따라서 $0 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $y=2^x$ 은

$$x=3 \text{에서 최댓값 } 2^3=8,$$

$$x=0 \text{에서 최솟값 } 2^0=1$$

을 갖는다.

(2) 함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

따라서 $-2 \leq x \leq 2$ 일 때, 함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 은

$$x=-2 \text{에서 최댓값 } \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=4^2=16,$$

$$x=2 \text{에서 최솟값 } \left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$$

을 갖는다.

(3) 함수 $y=5^x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

따라서 $x \geq 1$ 일 때, 함수 $y=5^x$ 은 최댓값을 갖지 않고,

$$x=1 \text{에서 최솟값 } 5^1=5$$

를 갖는다.

(4) 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

따라서 $x \leq -4$ 일 때, 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 은 최댓값을 갖지 않고,

$$x=-4 \text{에서 최솟값 } \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=3^4=81$$

을 갖는다.

답 (1) 최댓값: 8, 최솟값: 1

(2) 최댓값: 16, 최솟값: $\frac{1}{16}$

(3) 최솟값: 5, 최댓값: 없다.

(4) 최솟값: 81, 최댓값: 없다.

151

(1) 함수 $y=3^{x+1}-2$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

따라서 $-1 \leq x \leq 2$ 일 때, 함수 $y=3^{x+1}-2$ 는

$$x=2 \text{에서 최댓값 } 3^3-2=25,$$

$$x=-1 \text{에서 최솟값 } 3^0-2=-1$$

을 갖는다.

(2) 함수 $y=2^{x-1}+4$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

따라서 $-1 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $y=2^{x-1}+4$ 는

$$x=3 \text{에서 최댓값 } 2^2+4=8,$$

$$x=-1 \text{에서 최솟값 } 2^{-2}+4=\frac{17}{4}$$

을 갖는다.

(3) $y=2^{2-x}=2^{-(x-2)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ 이므로 함수 $y=2^{2-x}$

에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

따라서 $-2 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $y=2^{2-x}$ 은

$$x=-2 \text{에서 최댓값 } 2^4=16,$$

$$x=1 \text{에서 최솟값 } 2$$

를 갖는다.

(4) $y=2^x \times 3^{1-x}=2^x \times 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x=3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^x$

이므로 함수 $y=2^x \times 3^{1-x}$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

따라서 $-1 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $y=2^x \times 3^{1-x}$ 은

$$x=-1 \text{에서 최댓값 } 2^{-1} \times 3^2=\frac{9}{2},$$

$$x=1 \text{에서 최솟값 } 2^1 \times 3^0=2$$

를 갖는다.

답 (1) 최댓값: 25, 최솟값: -1

(2) 최댓값: 8, 최솟값: $\frac{17}{4}$

(3) 최댓값: 16, 최솟값: 2

(4) 최댓값: $\frac{9}{2}$, 최솟값: 2

I -3

지수함수

152

(1) $f(x) = x^2 + 4x + 2$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$y = 3^{f(x)}$$

$y = 3^{f(x)}$ 의 밑 3이 1보다 크므로 $f(x)$ 가 최소일 때 $y = 3^{f(x)}$ 도 최소가 된다.

$f(x) = x^2 + 4x + 2 = (x+2)^2 - 2$ 이므로 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 최솟값 -2 를 갖는다.

따라서 함수 $y = 3^{f(x)}$ 은 $x = -2$ 에서 최솟값

$$3^{-2} = \frac{1}{9} \text{을 가지므로}$$

$$a = -2, b = \frac{1}{9}$$

(2) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ 으로 놓으면 주어진 함수는

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}$$

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}$ 의 밑 $\frac{1}{3}$ 이 1보다 작은 양수이므로

$f(x)$ 가 최대일 때 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}$ 은 최소가 된다.

$f(x) = -x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4$ 이므로 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 최댓값 4를 갖는다.

따라서 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}$ 은 $x = -1$ 에서 최솟값

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \text{을 가지므로}$$

$$a = -1, b = \frac{1}{81}$$

$$\text{답 (1) } a = -2, b = \frac{1}{9}$$

$$(2) a = -1, b = \frac{1}{81}$$

153

$f(x) = -x^2 - 2x + 1$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$y = a^{f(x)}$$

$y = a^{f(x)}$ 의 밑 a 가 1보다 크므로 $f(x)$ 가 최대일 때 $y = a^{f(x)}$ 도 최대가 된다.

$f(x) = -x^2 - 2x + 1 = -(x+1)^2 + 2$ 이므로 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 최댓값 2를 갖는다.

따라서 함수 $y = a^{f(x)}$ 은 $x = -1$ 에서 최댓값 a^2 을 가지므로

$$a^2 = 16 \quad \therefore a = 4 \quad (\because a > 1)$$

답 4

154

(1) $f(x) = -x^2 - 3x + 5$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$y = 2^{f(x)}$$

$y = 2^{f(x)}$ 의 밑 2가 1보다 크므로 $y = 2^{f(x)}$ 은 $f(x)$ 가 최대일 때 최대가 되고, $f(x)$ 가 최소일 때 최소가 된다.

$$f(x) = -x^2 - 3x + 5 = -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{29}{4} \text{이므로}$$

$-1 \leq x \leq 1$ 일 때, $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 최댓값 7, $x = 1$ 에서 최솟값 1을 갖는다.

따라서 $-1 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $y = 2^{f(x)}$ 은

$$x = -1 \text{에서 최댓값 } 2^7 = 128,$$

$$x = 1 \text{에서 최솟값 } 2$$

를 갖는다.

(2) $f(x) = -x^2 + 4x - 7$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 의 밑 $\frac{1}{2}$ 이 1보다 작은 양수이므로

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 은 $f(x)$ 가 최소일 때 최대가 되고,

$f(x)$ 가 최대일 때 최소가 된다.

$$f(x) = -x^2 + 4x - 7 = -(x-2)^2 - 3 \text{이므로}$$

$1 \leq x \leq 4$ 일 때, $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 최댓값 -3 , $x = 4$ 에서 최솟값 -7 을 갖는다.

따라서 $1 \leq x \leq 4$ 일 때, 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 은

$$x = 4 \text{에서 최댓값 } \left(\frac{1}{2}\right)^{-7} = 128,$$

$$x = 2 \text{에서 최솟값 } \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$$

을 갖는다.

$$\text{답 (1) 최댓값: 128, 최솟값: 2}$$

$$(2) \text{ 최댓값: 128, 최솟값: 8}$$

155

$$(1) y = 9^x - 4 \times 3^x + 6 = (3^x)^2 - 4 \times 3^x + 6$$

$$3^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면 } -1 \leq x \leq 1 \text{에서}$$

$$3^{-1} \leq 3^x \leq 3^1$$

$$\therefore \frac{1}{3} \leq t \leq 3$$

이때 주어진 함수는

$$y = t^2 - 4t + 6 = (t-2)^2 + 2$$

따라서 $\frac{1}{3} \leq t \leq 3$ 일 때, 함수 $y = (t-2)^2 + 2$ 는

$$t = \frac{1}{3} \text{에서 최댓값 } \frac{43}{9},$$

$$t = 2 \text{에서 최솟값 } 2$$

를 갖는다.

$$(2) y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 3$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^2 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $-1 \leq x \leq 2$ 에서

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\therefore \frac{1}{4} \leq t \leq 2$$

이때 주어진 함수는

$$y = t^2 - 2t + 3 = (t-1)^2 + 2$$

따라서 $\frac{1}{4} \leq t \leq 2$ 일 때, 함수 $y = (t-1)^2 + 2$ 는

$$t = 2 \text{에서 최댓값 } 3,$$

$$t = 1 \text{에서 최솟값 } 2$$

를 갖는다.

$$(3) y = 4^x - 2^{x+2} + 2 = (2^x)^2 - 4 \times 2^x + 2$$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $x \leq 3$ 에서

$$2^x \leq 2^3 \quad \therefore 0 < t \leq 8 \quad (\because t > 0)$$

이때 주어진 함수는

$$y = t^2 - 4t + 2 = (t-2)^2 - 2$$

따라서 $0 < t \leq 8$ 일 때, 함수 $y = (t-2)^2 - 2$ 는

$$t = 8 \text{에서 최댓값 } 34,$$

$$t = 2 \text{에서 최솟값 } -2$$

를 갖는다.

답 (1) 최댓값: $\frac{43}{9}$, 최솟값: 2

(2) 최댓값: 3, 최솟값: 2

(3) 최댓값: 34, 최솟값: -2

참고 (2) $t = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 에서 x 의 값이 증가하면 t 의 값은 감소하므로

로 $-1 \leq x \leq 2$ 에서

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \therefore \frac{1}{4} \leq t \leq 2$$

156

$$y = 9^x + k \times 3^{x+1} + 3 = (3^x)^2 + 3k \times 3^x + 3$$

$3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 주어진 함수는

$$y = t^2 + 3kt + 3 = \left(t + \frac{3}{2}k\right)^2 - \frac{9}{4}k^2 + 3$$

(i) $-\frac{3}{2}k > 0$, 즉 $k < 0$ 인 경우

$t > 0$ 일 때, 함수

$$y = \left(t + \frac{3}{2}k\right)^2 - \frac{9}{4}k^2 + 3$$

은 $t = -\frac{3}{2}k$ 에서 최솟값

$$-\frac{9}{4}k^2 + 3 \text{을 가지므로}$$

$$-\frac{9}{4}k^2 + 3 = -6, \quad -\frac{9}{4}k^2 = -9$$

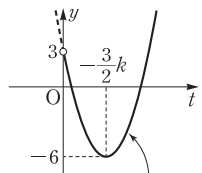
$$k^2 = 4 \quad \therefore k = -2 \quad (\because k < 0)$$

(ii) $-\frac{3}{2}k \leq 0$, 즉 $k \geq 0$ 인 경우

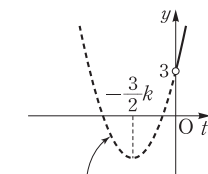
$t > 0$ 일 때, 함수

$$y = \left(t + \frac{3}{2}k\right)^2 - \frac{9}{4}k^2 + 3$$

은 최솟값을 갖지 않는다.



$$y = \left(t + \frac{3}{2}k\right)^2 - \frac{9}{4}k^2 + 3$$



$$y = \left(t + \frac{3}{2}k\right)^2 - \frac{9}{4}k^2 + 3$$

(i), (ii)에서 $k = -2$

답 -2

157

$5^x > 0$, $5^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$y = 5^x + 5^{-x} \geq 2\sqrt{5^x \times 5^{-x}} = 2$$

이때 등호는 $5^x = 5^{-x}$ 일 때 성립하므로

$$x = -x \quad \therefore x = 0$$

따라서 $a = 0$, $b = 2$ 이므로

$$a + b = 2$$

답 2

개념 노트

산술평균과 기하평균의 관계

$a > 0$, $b > 0$ 일 때,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

이때 $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$ 를 각각 a 와 b 의 산술평균, 기하평균이라 한다.

158

$10^{2x-1} > 0$, $10^{3-2x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} y &= 10^{2x-1} + 10^{3-2x} \\ &\geq 2\sqrt{10^{2x-1} \times 10^{3-2x}} \\ &= 2\sqrt{10^2} = 20 \end{aligned}$$

이때 등호는 $10^{2x-1} = 10^{3-2x}$ 일 때 성립하므로

$$2x-1=3-2x \quad \therefore x=1$$

따라서 $a=1$, $\beta=20$ 이므로

$$\beta - a = 19$$

답 19

159

$3^x + 3^{-x} = t$ 로 놓으면 $3^x > 0$, $3^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} t &= 3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \times 3^{-x}} = 2 \\ &\quad (\text{단, 등호는 } 3^x = 3^{-x}, \text{ 즉 } x=0 \text{일 때 성립}) \end{aligned}$$

또 $9^x + 9^{-x} = (3^x + 3^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$ 이므로 주어진 함수는

$$y = t^2 - 2 + 2t + 5 = (t+1)^2 + 2$$

따라서 $t \geq 2$ 일 때, 함수 $y = (t+1)^2 + 2$ 는

$$t=2 \text{에서 최솟값 } 11$$

을 갖는다.

답 11



연습문제

● 본책 74쪽

160

전략 주어진 함수를 $y = k \times a^x$ 의 꼴로 정리한다.

$$y = 2^{x+1} \times 5^{1-x} = 2^x \times 2 \times 5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^x = 10 \times \left(\frac{2}{5}\right)^x$$

밑이 1보다 작은 양수이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

따라서 $0 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $y = 10 \times \left(\frac{2}{5}\right)^x$ 은

$$x=0 \text{에서 최댓값 } 10,$$

$$x=1 \text{에서 최솟값 } 10 \times \frac{2}{5} = 4$$

를 가지므로 $M=10$, $m=4$

$$\therefore M - m = 6$$

답 6

161

전략 주어진 함수가 $x=3$ 에서 최솟값, $x=a$ 의 최댓값을 가짐을 이용한다.

$y = 3^{-x} + b = \left(\frac{1}{3}\right)^x + b$ 에서 밑이 1보다 작은 양수이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

따라서 $a \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $y = 3^{-x} + b$ 는 $x=3$ 에서 최솟값을 가지므로

$$3^{-3} + b = \frac{1}{27} + b = \frac{1}{9} \quad \therefore b = \frac{2}{27}$$

또 $x=a$ 에서 최댓값을 가지므로

$$3^{-a} + \frac{2}{27} = \frac{5}{27}, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^a = \frac{1}{9}$$

$$\therefore a=2$$

$$\text{답 } a=2, b=\frac{2}{27}$$

162

전략 $1 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 구한다.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 의 밑 $\frac{1}{2}$ 이 1보다 작은 양수이므로

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 은 $f(x)$ 가 최대일 때 최소가 되고, $f(x)$

가 최소일 때 최대가 된다.

$$f(x) = -x^2 + 4x - 5 = -(x-2)^2 - 1 \text{이므로}$$

$1 \leq x \leq 4$ 일 때, $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 -1 ,

$x=4$ 에서 최솟값 -5 를 갖는다.

따라서 $1 \leq x \leq 4$ 일 때, 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 은

$$x=4 \text{에서 최댓값 } \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32,$$

$$x=2 \text{에서 최솟값 } \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$$

를 가지므로 구하는 합은

$$32 + 2 = 34$$

답 34

163

전략 함수 $y=2^x$ 의 그래프를 대칭이동, 평행이동한 그래프의 식을 이용하여 $f(x)$ 를 구한다.

$y=2^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의

$$\text{식은 } y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉗의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 3$$

즉 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 3$ 이므로 x 의 값이 증가하면

$f(x)$ 의 값은 감소한다.

따라서 $-3 \leq x \leq -1$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는

$$x = -3 \text{에서 최댓값 } \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 3 = 5,$$

$$x = -1 \text{에서 최솟값 } \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$$

을 가지므로 구하는 곱은

$$5 \times \frac{7}{2} = \frac{35}{2}$$

답 $\frac{35}{2}$

164

전략 $2^x = t$ 로 치환하여 주어진 함수를 t 에 대한 이차함수로 변형한다.

$$y = -4^x + 2^{x+2} + k = -(2^x)^2 + 4 \times 2^x + k$$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $-1 \leq x \leq 3$ 에서

$$2^{-1} \leq 2^x \leq 2^3 \quad \therefore \frac{1}{2} \leq t \leq 8$$

이때 주어진 함수는

$$y = -t^2 + 4t + k = -(t-2)^2 + k + 4$$

$\frac{1}{2} \leq t \leq 8$ 일 때, 함수 $y = -(t-2)^2 + k + 4$ 는

$t = 2$ 에서 최댓값 $k + 4$ 를 가지므로

$$k + 4 = 5 \quad \therefore k = 1$$

따라서 함수 $y = -(t-2)^2 + 5$ 는

$$t = 8 \text{에서 최솟값 } -31$$

을 갖는다.

답 -31

165

전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$$y = 3^{x+k} + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-k} = 3^{x+k} + 3^{-x+k}$$

$3^{x+k} > 0$, $3^{-x+k} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$y = 3^{x+k} + 3^{-x+k} \geq 2\sqrt{3^{x+k} \times 3^{-x+k}}$$

$$= 2\sqrt{3^{2k}} = 2 \times 3^k$$

(단, 등호는 $3^{x+k} = 3^{-x+k}$, 즉 $x = 0$ 일 때 성립)

이때 주어진 함수의 최솟값이 18이므로

$$2 \times 3^k = 18, \quad 3^k = 9$$

$$\therefore k = 2$$

답 2

166

전략 $2^x + 2^{-x} = t$ 로 치환하여 주어진 함수를 t 에 대한 함수로 변형한다.

$2^x + 2^{-x} = t$ 로 놓으면 $2^x > 0$, $2^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \times 2^{-x}} = 2$$

(단, 등호는 $2^x = 2^{-x}$, 즉 $x = 0$ 일 때 성립)

또 $4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$ 이므로 주어진 함수는

$$y = t^2 - 2 - 2kt = (t-k)^2 - k^2 - 2$$

(i) $k \geq 2$ 인 경우

$t \geq 2$ 일 때, 함수 $y = (t-k)^2 - k^2 - 2$ 는

$$t = k \text{에서 최솟값 } -k^2 - 2$$

를 가지므로 $-k^2 - 2 = -2$

$$\therefore k = 0$$

그런데 $k \geq 2$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k < 2$ 인 경우

$t \geq 2$ 일 때, 함수 $y = (t-k)^2 - k^2 - 2$ 는

$$t = 2 \text{에서 최솟값 } -4k + 2$$

를 가지므로 $-4k + 2 = -2$

$$\therefore k = 1$$

(i), (ii)에서 $k = 1$

답 1

03 지수함수의 활용; 방정식

● 본책 75~80쪽

167

(1) $2^x = 8 = 2^3$ 이므로 $x = 3$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$ 이므로 $x = 4$

(3) $3^x = \frac{1}{81} = 3^{-4}$ 이므로 $x = -4$

(4) $5^x = 125 = 5^3$ 이므로 $x = 3$

$$(5) \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \text{이므로} \quad x=2$$

$$(6) \left(\frac{1}{5}\right)^x = 25 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \text{이므로} \quad x=-2$$

$$\text{답 (1) } x=3 \quad (2) x=4 \quad (3) x=-4$$

$$(4) x=3 \quad (5) x=2 \quad (6) x=-2$$

168

$$(1) 2^{2x} = 2^{3-x} \text{에서} \quad 2x = 3-x$$

$$3x = 3 \quad \therefore x = 1$$

$$(2) \left(\frac{1}{5}\right)^{-2x-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{4x+3} \text{에서}$$

$$-2x-3 = 4x+3, \quad -6x = 6$$

$$\therefore x = -1$$

$$(3) 3^{2x-4} - 3^{3x+1} = 0 \text{에서} \quad 3^{2x-4} = 3^{3x+1}$$

$$2x-4 = 3x+1$$

$$\therefore x = -5$$

$$(4) \left(\frac{1}{81}\right)^{4x+4} - \left(\frac{1}{81}\right)^{x-1} = 0 \text{에서}$$

$$\left(\frac{1}{81}\right)^{4x+4} = \left(\frac{1}{81}\right)^{x-1}$$

$$4x+4 = x-1, \quad 3x = -5$$

$$\therefore x = -\frac{5}{3}$$

$$\text{답 (1) } x=1 \quad (2) x=-1$$

$$(3) x=-5 \quad (4) x=-\frac{5}{3}$$

169

$$(1) 2^{2x-3} = 128 = 2^7 \text{이므로}$$

$$2x-3 = 7, \quad 2x = 10$$

$$\therefore x = 5$$

$$(2) 2^{-x+2} = 16^{2x} \text{에서}$$

$$2^{-x+2} = (2^4)^{2x}, \quad 2^{-x+2} = 2^{8x}$$

$$-x+2 = 8x, \quad 9x = 2$$

$$\therefore x = \frac{2}{9}$$

$$(3) 25^{x+3} = \left(\frac{1}{125}\right)^{2x-1} \text{에서}$$

$$(5^2)^{x+3} = (5^{-3})^{2x-1}, \quad 5^{2x+6} = 5^{-6x+3}$$

$$2x+6 = -6x+3, \quad 8x = -3$$

$$\therefore x = -\frac{3}{8}$$

$$(4) \left(\frac{1}{9}\right)^{-x+2} = 81\sqrt{3} \text{에서}$$

$$(3^{-2})^{-x+2} = 3^4 \times 3^{\frac{1}{2}}, \quad 3^{2x-4} = 3^{\frac{9}{2}}$$

$$2x-4 = \frac{9}{2}, \quad 2x = \frac{17}{2}$$

$$\therefore x = \frac{17}{4}$$

$$(5) \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = (\sqrt{2})^{x-3} \text{에서}$$

$$(2^{-1})^{x+1} = (2^{\frac{1}{2}})^{x-3}, \quad 2^{-x-1} = 2^{\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}}$$

$$-x-1 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}, \quad \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{1}{3}$$

$$(6) 4^{x+2} - 8^{x-7} = 0 \text{에서}$$

$$4^{x+2} = 8^{x-7}, \quad (2^2)^{x+2} = (2^3)^{x-7}$$

$$2^{2x+4} = 2^{3x-21}, \quad 2x+4 = 3x-21$$

$$\therefore x = 25$$

$$\text{답 (1) } x=5 \quad (2) x=\frac{2}{9} \quad (3) x=-\frac{3}{8}$$

$$(4) x=\frac{17}{4} \quad (5) x=\frac{1}{3} \quad (6) x=25$$

170

$$4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 \text{이므로 방정식 } 4^x - 3 \times 2^x + 2 = 0$$

$$\text{에서 } 2^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$\boxed{t^2} - 3 \times \boxed{t} + 2 = 0$$

$$(t-1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = \boxed{2}$$

$$\text{즉 } 2^x = 1 \text{ 또는 } 2^x = \boxed{2} \text{이므로}$$

$$x = \boxed{0} \text{ 또는 } x = \boxed{1}$$

답 풀이 참조

171

$$(1) 9^{x^2+3x} = 3^{x^2+4x+3} \text{에서}$$

$$(3^2)^{x^2+3x} = 3^{x^2+4x+3}, \quad 3^{2x^2+6x} = 3^{x^2+4x+3}$$

$$2x^2+6x = x^2+4x+3, \quad x^2+2x-3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

(2) $(2\sqrt{2})^{2x^2+12}=2^{15x}$ 에서

$$(2^{\frac{3}{2}})^{2x^2+12}=2^{15x}, \quad 2^{3x^2+18}=2^{15x}$$

$$3x^2+18=15x, \quad x^2-5x+6=0$$

$$(x-2)(x-3)=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=3$$

(3) $\frac{3^{x^2+1}}{3^{x-1}}=81$ 에서

$$3^{x^2+1-(x-1)}=3^4, \quad 3^{x^2-x+2}=3^4$$

$$x^2-x+2=4, \quad x^2-x-2=0$$

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

(4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2-3x}$ 에서

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]^{2-3x}, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2}$$

$$x^2=3x-2, \quad x^2-3x+2=0$$

$$(x-1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

답 (1) $x=-3$ 또는 $x=1$

(2) $x=2$ 또는 $x=3$

(3) $x=-1$ 또는 $x=2$

(4) $x=1$ 또는 $x=2$

172

(1) $9^x-6 \times 3^x-27=0$ 에서

$$(3^x)^2-6 \times 3^x-27=0$$

$$3^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2-6t-27=0$$

$$(t+3)(t-9)=0$$

$$\therefore t=9 \ (\because t>0)$$

$$\text{즉 } 3^x=9 \text{이므로 } x=2$$

(2) $4^{x+1}-5 \times 2^{x+2}+16=0$ 에서

$$4 \times (2^x)^2-20 \times 2^x+16=0$$

$$2^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$4t^2-20t+16=0, \quad t^2-5t+4=0$$

$$(t-1)(t-4)=0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=4$$

$$\text{즉 } 2^x=1 \text{ 또는 } 2^x=4 \text{이므로}$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=2$$

(3) $3^x-9 \times 3^{-x}=8$ 의 양변에 3^x 을 곱하면

$$(3^x)^2-9=8 \times 3^x$$

$$\therefore (3^x)^2-8 \times 3^x-9=0$$

$3^x=t \ (t>0)$ 로 놓으면

$$t^2-8t-9=0$$

$$(t+1)(t-9)=0$$

$$\therefore t=9 \ (\because t>0)$$

즉 $3^x=9$ 이므로 $x=2$

(4) $\left(\frac{1}{9}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x=12$ 에서

$$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]^2+\left(\frac{1}{3}\right)^x-12=0$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2+t-12=0$$

$$(t+4)(t-3)=0$$

$$\therefore t=3 \ (\because t>0)$$

$$\text{즉 } \left(\frac{1}{3}\right)^x=3 \text{이므로 } x=-1$$

답 (1) $x=2$ (2) $x=0$ 또는 $x=2$

(3) $x=2$ (4) $x=-1$

173

(1) 지수가 같으므로 밑이 같거나 지수가 0이어야 한다.

(i) $x+7=4$ 에서

$$x=-3$$

(ii) $x-1=0$, 즉 $x=1$ 이면 $8^0=4^0$ 이므로 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

(2) 지수가 같으므로 밑이 같거나 지수가 0이어야 한다.

(i) $2x-1=3x-5$ 에서

$$x=4$$

(ii) $x-3=0$, 즉 $x=3$ 이면 $5^0=4^0$ 이므로 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $x=3$ 또는 $x=4$

(3) 밑이 같으므로 지수가 같거나 밑이 1이어야 한다.

(i) $3x+1=2x+3$ 에서

$$x=2$$

(ii) $x=1$ 이면 $1^4=1^5$ 이므로 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=2$

(4) 밑이 같으므로 지수가 같거나 밑이 1이어야 한다.

(i) $x^2=2x+3$ 에서

$$x^2-2x-3=0, \quad (x+1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=3 \quad (\because x>1)$$

(ii) $x-1=1$, 즉 $x=2$ 이면 $1^4=1^7$ 이므로 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $x=2$ 또는 $x=3$

답 (1) $x=-3$ 또는 $x=1$

(2) $x=3$ 또는 $x=4$

(3) $x=1$ 또는 $x=2$

(4) $x=2$ 또는 $x=3$

174

$x^x=x^{2x+8}$ 에서 밑이 같으므로 지수가 같거나 밑이 1이어야 한다.

(i) $x^2=2x+8$ 에서

$$x^2-2x-8=0, \quad (x+2)(x-4)=0$$

$$\therefore x=4 \quad (\because x>0)$$

(ii) $x=1$ 이면 $1^1=1^{10}$ 이므로 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 합은 $1+4=5$

답 5

175

(1) $4^x-5 \times 2^x+2=0$ 에서 $(2^x)^2-5 \times 2^x+2=0$
 $2^x=t \quad (t>0)$ 로 놓으면

$$t^2-5t+2=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

방정식 $4^x-5 \times 2^x+2=0$ 의 두 근이 α, β 이므로
 방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근은 $2^\alpha, 2^\beta$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2^\alpha \times 2^\beta=2, \quad 2^{\alpha+\beta}=2$$

$$\therefore \alpha+\beta=1$$

(2) $2^{2x+1}-2^x+k=0$ 에서 $2 \times (2^x)^2-2^x+k=0$
 $2^x=t \quad (t>0)$ 로 놓으면

$$2t^2-t+k=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

방정식 $2^{2x+1}-2^x+k=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
 방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근은 $2^\alpha, 2^\beta$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2^\alpha \times 2^\beta = \frac{k}{2} \quad \therefore 2^{\alpha+\beta} = \frac{k}{2}$$

$$\text{이때 } \alpha+\beta=-5 \text{이므로} \quad 2^{-5}=\frac{k}{2}$$

$$\therefore k=2^{-4}=\frac{1}{16}$$

답 (1) 1 (2) $\frac{1}{16}$

176

주어진 방정식의 양변에 3^x 을 곱하면

$$(3^x)^2-3 \times 3^x+k+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$3^x=t \quad (t>0)$ 로 놓으면

$$t^2-3t+k+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

방정식 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면 방정식 $\textcircled{2}$
 이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

따라서 이차방정식 $\textcircled{2}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=(-3)^2-4 \times 1 \times (k+1)>0$$

$$5-4k>0 \quad \therefore k<\frac{5}{4} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

또 이차방정식 $\textcircled{2}$ 의 두 근의 합과 곱이 모두 양수이어야 하므로

$$k+1>0 \quad \therefore k>-1 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{에서} \quad -1<k<\frac{5}{4} \quad \text{답} \quad -1<k<\frac{5}{4}$$

개념 노트

이차방정식의 실근의 부호

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을 α, β , 판별식을 D 라 할 때

① 두 근이 모두 양수일 조건

$$\Rightarrow D \geq 0, \alpha+\beta>0, \alpha\beta>0$$

② 두 근이 모두 음수일 조건

$$\Rightarrow D \geq 0, \alpha+\beta<0, \alpha\beta>0$$

③ 두 근이 서로 다른 부호일 조건

$$\Rightarrow \alpha\beta<0$$

177

정수 필터를 1개 통과할 때마다 물에 잔류하는 불순물의 양이 $\frac{1}{2}$ 로 줄어들므로 x 개 통과한 후 물에 잔류하는 불순물의 양이 12.5%, 즉 $\frac{1}{8}$ 로 줄어들었다고 하면

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8} \quad \therefore x=3$$

답 3

178

$T_1=1200$, $T=960$, $t=6$ 을 주어진 등식에 대입하면

$$960=1200 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{5} \times k \times 6}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{12}{5}k} = \frac{960}{1200} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{12}{5}k=1 \quad \therefore k=\frac{5}{12}$$

답 $\frac{5}{12}$

연습 문제

● 본책 81~82쪽

179

전략 밑을 같게 한 후 지수에 대한 방정식을 세운다.

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{x^3+6} = \left(\frac{7}{5}\right)^{-2x^2-5x} \text{에서}$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{x^3+6} = \left\{\left(\frac{5}{7}\right)^{-1}\right\}^{-2x^2-5x}$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{x^3+6} = \left(\frac{5}{7}\right)^{2x^2+5x}$$

$$x^3+6=2x^2+5x, \quad x^3-2x^2-5x+6=0$$

$$(x+2)(x-1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

$$\therefore a^2+\beta^2+\gamma^2=(-2)^2+1^2+3^2=14$$

답 14

180

전략 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ 로 치환하여 t 에 대한 이차방정식을 푼다.

$$\frac{1}{4^x} - 3 \times \frac{1}{2^{x-2}} + 32 = 0 \text{에서}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 32 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t \quad (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 12t + 32 = 0, \quad (t-4)(t-8) = 0$$

$$\therefore t=4 \text{ 또는 } t=8$$

$$\text{즉 } \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \text{ 또는 } \left(\frac{1}{2}\right)^x = 8 \text{이므로}$$

$$x=-2 \text{ 또는 } x=-3$$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=-3$ 또는 $\alpha=-3$, $\beta=-2$ 이므로

$$4^{-\alpha} + 4^{-\beta} = 4^2 + 4^3 = 80$$

답 80

181

전략 $a^x=t$ 로 치환하여 t 에 대한 이차방정식을 푼다.

$$a^{2x}-a^x=2 \text{에서}$$

$$(a^x)^2-a^x-2=0$$

$$a^x=t \quad (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2-t-2=0, \quad (t+1)(t-2)=0$$

$$\therefore t=2 \quad (\because t>0)$$

즉 $a^x=2$ 이고 이때의 x 의 값이 $\frac{1}{7}$ 이므로

$$a^{\frac{1}{7}}=2 \quad \therefore a=2^7=128$$

답 128

182

전략 $3^x=t$ 로 치환한 다음 t 에 대한 이차방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 함을 이용한다.

$$9^x=2 \times 3^{x+1}-2k \text{에서}$$

$$(3^x)^2-6 \times 3^x+2k=0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$3^x=t \quad (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2-6t+2k=0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 방정식 ㉡

이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

따라서 이차방정식 ㉡의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-2k>0$$

$$\therefore k<\frac{9}{2} \quad \dots\dots \text{㉢}$$

또 이차방정식 ㉡의 두 근의 합과 곱이 모두 양수이어야 하므로

$$2k>0 \quad \therefore k>0 \quad \dots\dots \text{㉣}$$

$$\text{㉢, ㉣에서 } 0<k<\frac{9}{2}$$

따라서 정수 k 는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

답 4

183

전략 주어진 조건을 이용하여 식을 세운다.

10시간 후 미생물의 수가 처음의 16배가 되므로

$$10^{10a}=16 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

n 시간 후 미생물의 수가 처음의 64배가 되므로

$$10^{na}=64=2^6=(2^4)^{\frac{3}{2}}$$

$$=16^{\frac{3}{2}}=(10^{10a})^{\frac{3}{2}} \quad (\because \text{㉠})$$

$$=10^{15a}$$

따라서 $na=15a$ 이므로

$$n=15 \quad (\because a \neq 0) \quad \text{답 15}$$

참고 $a=0$ 이면 $10^{ax}=10^0=1$

따라서 x 의 값에 관계없이 미생물의 수가 동일하므로 조건을 만족시키지 않는다.

184

전략 $3^x=X$, $3^y=Y$ 로 치환하여 X , Y 에 대한 연립방정식을 푼다.

$3^x=X$, $3^y=Y$ ($X>0$, $Y>0$)로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} 3X+Y=18 & \dots\dots \text{㉠} \\ \frac{XY}{3}=9 & \dots\dots \text{㉡} \end{cases}$$

$$\text{㉠에서 } Y=18-3X \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉡에 ㉢을 대입하면

$$\frac{X(18-3X)}{3}=9, \quad 6X-X^2=9$$

$$X^2-6X+9=0, \quad (X-3)^2=0$$

$$\therefore X=3$$

$$\text{㉢에 이것을 대입하면 } Y=9$$

따라서 $3^x=3$, $3^y=9$ 이므로

$$x=1, y=2$$

즉 $a=1$, $\beta=2$ 이므로

$$a^2+\beta^2=1^2+2^2=5 \quad \text{답 5}$$

185

전략 주어진 조건을 이용하여 두 점 A, B의 좌표에 대한 식을 세운다.

점 A의 좌표를 $(a, 3^a)$ 이라 하면 선분 AB의 중점의 x 좌표가 0이므로 점 B의 x 좌표는 $-a$ 이다.

$$\therefore B(-a, 3^{-a})$$

또 선분 AB의 중점의 y 좌표가 $\frac{5}{3}$ 이므로

$$\frac{3^a+3^{-a}}{2}=\frac{5}{3}$$

$$\therefore 3^a+\frac{1}{3^a}=\frac{10}{3}$$

양변에 3×3^a 을 곱하여 정리하면

$$3 \times (3^a)^2 - 10 \times 3^a + 3 = 0$$

$3^a=t$ ($t>0$)로 놓으면

$$3t^2-10t+3=0, \quad (3t-1)(t-3)=0$$

$$\therefore t=\frac{1}{3} \text{ 또는 } t=3$$

즉 $3^a=\frac{1}{3}$ 또는 $3^a=3$ 이므로

$$a=-1 \text{ 또는 } a=1$$

따라서 한 교점의 좌표가 $(1, 3)$ 이므로 함수

$$y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x+k \text{의 그래프가 점 } (1, 3) \text{을 지난다.}$$

$$\text{즉 } 3=-\frac{1}{3}+k \text{이므로 } k=\frac{10}{3} \quad \text{답 } \frac{10}{3}$$

참고 한 교점의 좌표가 $(-1, \frac{1}{3})$ 임을 이용하여 k 의 값을 구할 수도 있다.

186

전략 $2^x=t$ 로 치환하여 t 에 대한 이차방정식을 세운 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

$$\frac{1}{3} \times 2^{2x+1} - 11 \times 2^x + k = 0 \text{에서}$$

$$\frac{2}{3} \times (2^x)^2 - 11 \times 2^x + k = 0$$

$2^x=t$ ($t>0$)로 놓으면

$$\frac{2}{3}t^2 - 11t + k = 0$$

$$\therefore 2t^2 - 33t + 3k = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

방정식 $\frac{1}{3} \times 2^{2x+1} - 11 \times 2^x + k = 0$ 의 두 근을 α , β 라

하면 방정식 ㉠의 두 근은 2^α , 2^β 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2^\alpha \times 2^\beta = \frac{3k}{2} \quad \therefore 2^{\alpha+\beta} = \frac{3}{2}k$$

이때 $\alpha+\beta=3$ 이므로

$$2^3 = \frac{3}{2}k \quad \therefore k = \frac{16}{3}$$

따라서 이차방정식 ㉠은

$$2t^2 - 33t + 16 = 0, \quad (2t-1)(t-16) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } t = 16$$

즉 $2^x = \frac{1}{2}$ 또는 $2^x = 16$ 이므로

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 두 근의 곱은

$$-1 \times 4 = -4$$

답 -4

187

전략 $2^x=t$ 로 치환하여 t 에 대한 이차방정식을 세운 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

$$4^x - 5 \times 2^{x+1} + k = 0 \text{에서}$$

$$(2^x)^2 - 10 \times 2^x + k = 0$$

$$2^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 10t + k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

방정식 $4^x - 5 \times 2^{x+1} + k = 0$ 의 두 근을 α, β ($\alpha < \beta$)

라 하면 방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근은 $2^\alpha, 2^\beta$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2^\alpha + 2^\beta = 10, \quad 2^\alpha \times 2^\beta = k$$

이때 $\beta = \alpha + 2$ 이므로 $2^\alpha + 2^\beta = 10$ 에서

$$2^\alpha + 2^{\alpha+2} = 10, \quad 2^\alpha + 4 \times 2^\alpha = 10$$

$$5 \times 2^\alpha = 10, \quad 2^\alpha = 2 \quad \therefore \alpha = 1$$

따라서 $\beta = \alpha + 2 = 3$ 이므로

$$k = 2^\alpha \times 2^\beta = 2 \times 2^3 = 16$$

답 16

188

전략 $3^x=t$ 로 치환한 후 이차방정식의 근이 3^α 임을 이용한다.

$$9^x - k \times 3^{x-1} + 1 = 0 \text{에서}$$

$$(3^x)^2 - \frac{k}{3} \times 3^x + 1 = 0$$

$$3^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - \frac{k}{3} \times t + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

방정식 $9^x - k \times 3^{x-1} + 1 = 0$ 의 실근이 α 뿐이므로 방정식 $\textcircled{1}$ 의 양의 실근은 3^α 뿐이어야 한다.

이때 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근의 곱이 양수이므로 $\textcircled{1}$ 은 3^α 을 중근으로 가져야 한다.

이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = \left(-\frac{k}{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$$

$$\frac{k^2}{9} = 4, \quad k^2 = 36$$

$$\therefore k = 6 \ (\because k > 0)$$

따라서 이차방정식 $\textcircled{1}$ 은

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t-1)^2 = 0 \quad \therefore t = 1$$

$$\text{즉 } 3^\alpha = 1 \text{이므로 } \alpha = 0$$

$$\therefore k + \alpha = 6$$

답 6

참고 $k \leq 0$ 이면 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근의 합 $\frac{k}{3}$ 가 0 또는 음수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $k > 0$ 이어야 한다.

189

전략 두 점 P, Q가 직선 $y=2x+k$ 위의 점임을 이용하여 두 점의 좌표를 정한다.

점 P의 좌표를 $(p, 2p+k)$, 점 Q의 좌표를 $(q, 2q+k)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \sqrt{(q-p)^2 + (2q+k-2p-k)^2} \\ &= \sqrt{5} (q-p) \ (\because q > p) \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \sqrt{5} (q-p) = \sqrt{5} \text{이므로 } q-p=1$$

$$\therefore q = p+1$$

$$\therefore Q(p+1, 2p+2+k)$$

한편 점 P $(p, 2p+k)$ 가 $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+3} + 1$ 의 그래프 위의 점이므로

$$2p+k = \left(\frac{2}{3}\right)^{p+3} + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 Q $(p+1, 2p+2+k)$ 가 $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} + \frac{8}{3}$ 의 그래프 위의 점이므로

$$2p+2+k = \left(\frac{2}{3}\right)^{p+2} + \frac{8}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$-2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{p+3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{p+2} - \frac{5}{3}$$

$$\frac{8}{27} \times \left(\frac{2}{3}\right)^p - \frac{4}{9} \times \left(\frac{2}{3}\right)^p + \frac{1}{3} = 0$$

$$\frac{4}{27} \times \left(\frac{2}{3}\right)^p = \frac{1}{3}, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^p = \frac{9}{4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$

$$\therefore p = -2$$

$$\textcircled{1} \text{에 } p = -2 \text{를 대입하면 } -4+k = \frac{2}{3} + 1$$

$$\therefore k = \frac{17}{3}$$

답 ④

190

전략 9^x+9^{-x} 을 3^x+3^{-x} 에 대한 식으로 나타낸다.

$3^x+3^{-x}=t$ 로 놓으면 $3^x > 0, 3^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t = 3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \times 3^{-x}} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(단, 등호는 $3^x = 3^{-x}$, 즉 $x=0$ 일 때 성립)

또 $9^x + 9^{-x} = (3^x + 3^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$ 이므로

$3(9^x + 9^{-x}) - (3^x + 3^{-x}) - 24 = 0$ 에서

$$3(t^2 - 2) - t - 24 = 0$$

$$3t^2 - t - 30 = 0, \quad (t+3)(3t-10)=0$$

$$\therefore t = \frac{10}{3} \quad (\because \text{㉑})$$

즉 $3^x + 3^{-x} = \frac{10}{3}$ 이므로 양변에 3×3^x 을 곱하여 정리

$$\text{하면} \quad 3 \times (3^x)^2 - 10 \times 3^x + 3 = 0$$

$3^x = u \ (u > 0)$ 로 놓으면

$$3u^2 - 10u + 3 = 0, \quad (3u-1)(u-3) = 0$$

$$\therefore u = \frac{1}{3} \text{ 또는 } u = 3$$

즉 $3^x = \frac{1}{3}$ 또는 $3^x = 3$ 이므로

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 1 \quad \text{답 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

191

전략 $2^x = t$ 로 치환한 후 이차방정식의 근의 조건을 이용한다.

$4^x + a \times 2^x - 4a = 0$ 에서

$$(2^x)^2 + a \times 2^x - 4a = 0$$

$2^x = t \ (t > 0)$ 로 놓으면

$$t^2 + at - 4a = 0$$

$a > 0$ 일 때 이차방정식 ㉑의

두 근의 곱은 음수이므로 ㉑의

양의 실근이 2^a 뿐이다.

이때 $1 < a < 2$ 에서 $2 < 2^a < 4$

이므로 $y = t^2 + at - 4a$ 의 그

래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

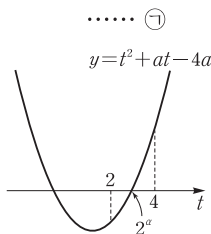
(i) $t = 2$ 일 때, $y = 4 + 2a - 4a < 0$

$$\therefore a > 2$$

(ii) $t = 4$ 일 때, $y = 16 + 4a - 4a > 0$

(i), (ii)에서 $a > 2$

답 $a > 2$



04 지수함수의 활용: 부등식

● 본책 83~88쪽

192

(1) $3^x < 9$ 에서 $3^x < 3^2$

밑이 1보다 크므로 $x < 2$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 8$ 에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

밑이 1보다 작은 양수이므로 $x < -3$

(3) $\left(\frac{5}{3}\right)^x \geq \left(\frac{5}{3}\right)^6$ 에서 밑이 1보다 크므로

$$x \geq 6$$

(4) $5^x \geq 125$ 에서 $5^x \geq 5^3$

밑이 1보다 크므로 $x \geq 3$

(5) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \frac{1}{81}$ 에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^4$

밑이 1보다 작은 양수이므로 $x \geq 4$

(6) $2^x < \frac{1}{64}$ 에서 $2^x < 2^{-6}$

밑이 1보다 크므로 $x < -6$

답 (1) $x < 2$ (2) $x < -3$ (3) $x \geq 6$

(4) $x \geq 3$ (5) $x \geq 4$ (6) $x < -6$

193

(1) $2^{3x} \leq 2^{4+x}$ 에서 밑이 1보다 크므로

$$3x \leq 4 + x, \quad 2x \leq 4$$

$$\therefore x \leq 2$$

(2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-5x+1} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-4x-1}$ 에서 밑이 1보다 작은 양수

이므로

$$-5x + 1 < -4x - 1, \quad -x < -2$$

$$\therefore x > 2$$

(3) $2^{2x} - 2^{x+1} < 0$ 에서 $2^{2x} < 2^{x+1}$

밑이 1보다 크므로

$$2x < x + 1 \quad \therefore x < 1$$

(4) $\left(\frac{1}{25}\right)^{-4x-5} - \left(\frac{1}{25}\right)^{2x+1} \geq 0$ 에서

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{-4x-5} \geq \left(\frac{1}{25}\right)^{2x+1}$$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$-4x - 5 \leq 2x + 1, \quad -6x \leq 6$$

$$\therefore x \geq -1$$

답 (1) $x \leq 2$ (2) $x > 2$

(3) $x < 1$ (4) $x \geq -1$

194

(1) $2^{-x+1} < 16$ 에서 $2^{-x+1} < 2^4$

밑이 1보다 크므로 $-x + 1 < 4$

$$\therefore x > -3$$

$$(2) 3^{3x-1} \leq 9 \text{에서 } 3^{3x-1} \leq 3^2$$

밑이 1보다 크므로

$$3x-1 \leq 2, \quad 3x \leq 3$$

$$\therefore x \leq 1$$

$$(3) \left(\frac{1}{5}\right)^{x+3} > \frac{1}{25} \text{에서 } \left(\frac{1}{5}\right)^{x+3} > \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$x+3 < 2 \quad \therefore x < -1$$

$$(4) \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} \leq \frac{1}{27} \text{에서 } \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$x-2 \geq 3 \quad \therefore x \geq 5$$

$$\text{답 (1) } x > -3 \quad (2) x \leq 1$$

$$(3) x < -1 \quad (4) x \geq 5$$

195

$$4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 \text{이므로 부등식 } 4^x - 5 \times 2^x + 4 < 0$$

에서 $2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$\boxed{t^2} - 5 \times \boxed{t} + 4 < 0$$

$$(t-1)(t-4) < 0$$

$$\therefore \boxed{1} < t < \boxed{4}$$

즉 $\boxed{1} < 2^x < \boxed{4}$ 이므로

$$2^0 < 2^x < 2^2$$

밑이 1보다 크므로

$$\boxed{0} < x < \boxed{2}$$

답 풀이 참조

196

$$(1) 9^{-x} \geq (3\sqrt{3})^{-2-5x} \text{에서}$$

$$(3^2)^{-x} \geq (3^{\frac{3}{2}})^{-2-5x} \quad \therefore 3^{-2x} \geq 3^{-3-\frac{15}{2}x}$$

밑이 1보다 크므로

$$-2x \geq -3 - \frac{15}{2}x, \quad \frac{11}{2}x \geq -3$$

$$\therefore x \geq -\frac{6}{11}$$

$$(2) \left(\frac{5}{4}\right)^{x+2} > \left(\frac{4}{5}\right)^{2-3x} \text{에서}$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{x+2} > \left\{\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}\right\}^{2-3x}$$

$$\therefore \left(\frac{5}{4}\right)^{x+2} > \left(\frac{5}{4}\right)^{3x-2}$$

밑이 1보다 크므로

$$x+2 > 3x-2, \quad -2x > -4$$

$$\therefore x < 2$$

$$(3) (2\sqrt{2})^{x+1} \geq 8^{-10x-2} \text{에서}$$

$$(2^{\frac{3}{2}})^{x+1} \geq (2^3)^{-10x-2}$$

$$\therefore 2^{\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}} \geq 2^{-30x-6}$$

밑이 1보다 크므로

$$\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \geq -30x - 6, \quad \frac{63}{2}x \geq -\frac{15}{2}$$

$$\therefore x \geq -\frac{5}{21}$$

$$(4) \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+x+12} \leq \left(\frac{1}{16}\right)^{x^2+x} \text{에서}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+x+12} \leq \left\{\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}^{x^2+x}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+x+12} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{2x^2+2x}$$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$x^2+x+12 \geq 2x^2+2x$$

$$x^2+x-12 \leq 0, \quad (x+4)(x-3) \leq 0$$

$$\therefore -4 \leq x \leq 3$$

$$\text{답 (1) } x \geq -\frac{6}{11} \quad (2) x < 2$$

$$(3) x \geq -\frac{5}{21} \quad (4) -4 \leq x \leq 3$$

197

$\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ 에서 밑이 1보다 작은 양수
이므로

$$x-1 < x^2 < 4x-3$$

$$(i) x-1 < x^2 \text{에서}$$

$$x^2-x+1 > 0$$

$$\text{이때 } x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{이므로 모든}$$

실수 x 에 대하여 부등식이 성립한다.

$$(ii) x^2 < 4x-3 \text{에서 } x^2-4x+3 < 0$$

$$(x-1)(x-3) < 0$$

$$\therefore 1 < x < 3$$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$$1 < x < 3$$

$$\text{답 } 1 < x < 3$$

198

(1) $4^x - 3 \times 2^{x+1} + 8 < 0$ 에서

$$(2^x)^2 - 6 \times 2^x + 8 < 0$$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 6t + 8 < 0, \quad (t-2)(t-4) < 0$$

$$\therefore 2 < t < 4$$

$$\text{즉 } 2 < 2^x < 4 \text{이므로} \quad 2^1 < 2^x < 2^2$$

$$\text{밑이 1보다 크므로} \quad 1 < x < 2$$

(2) $9^x + 3^{x+1} \leq 3^{x+2} + 27$ 에서

$$(3^x)^2 + 3 \times 3^x \leq 9 \times 3^x + 27$$

$3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 + 3t \leq 9t + 27, \quad t^2 - 6t - 27 \leq 0$$

$$(t+3)(t-9) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq t \leq 9$$

$$\text{그런데 } t > 0 \text{이므로} \quad 0 < t \leq 9$$

$$\text{즉 } 0 < 3^x \leq 9 \text{이므로} \quad 0 < 3^x \leq 3^2$$

$$\text{밑이 1보다 크므로} \quad x \leq 2$$

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} + 1$ 에서

$$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 + \frac{1}{9} \times \left(\frac{1}{3}\right)^x > 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t$$
 ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 + \frac{1}{9}t > 9t + 1$$

$$9t^2 - 80t - 9 > 0, \quad (9t+1)(t-9) > 0$$

$$\therefore t < -\frac{1}{9} \text{ 또는 } t > 9$$

$$\text{그런데 } t > 0 \text{이므로} \quad t > 9$$

$$\text{즉 } \left(\frac{1}{3}\right)^x > 9 \text{이므로} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

$$\text{밑이 1보다 작은 양수이므로}$$

$$x < -2$$

$$\text{답 (1) } 1 < x < 2 \quad (2) x \leq 2 \quad (3) x < -2$$

199

$4^x + a \times 2^x + b > 0$ 에서

$$(2^x)^2 + a \times 2^x + b > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 + at + b > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

부등식 ㉠의 해가 $x < -1$ 또는 $x > 2$ 이므로

$$2^x < 2^{-1} \text{ 또는 } 2^x > 2^2 \quad \leftarrow \text{밑이 1보다 크므로 부등호 방향 그대로}$$

$$\therefore t < \frac{1}{2} \text{ 또는 } t > 4$$

해가 $t < \frac{1}{2}$ 또는 $t > 4$ 이고 t^2 의 계수가 1인 이차부등식

식은

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)(t - 4) > 0 \quad \therefore t^2 - \frac{9}{2}t + 2 > 0$$

이 부등식이 ㉡과 일치하므로

$$a = -\frac{9}{2}, b = 2 \quad \text{답 } a = -\frac{9}{2}, b = 2$$

개념 노트

이차부등식의 작성

(1) 해가 $x < \alpha$ 또는 $x > \beta$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x - \alpha)(x - \beta) > 0, \text{ 즉 } x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta > 0$$

(2) 해가 $\alpha < x < \beta$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x - \alpha)(x - \beta) < 0, \text{ 즉 } x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta < 0$$

200

(1) $x^{x+1} \leq x^5$ ($x > 0$)에서

(i) $0 < x < 1$ 일 때

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$x + 1 \geq 5 \quad \therefore x \geq 4$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $x = 1$ 일 때

$$1^2 \leq 1^5 \text{이므로 부등식이 성립한다.}$$

(iii) $x > 1$ 일 때

$$\text{밑이 1보다 크므로} \quad x + 1 \leq 5 \quad \therefore x \leq 4$$

$$\text{그런데 } x > 1 \text{이므로} \quad 1 < x \leq 4$$

이상에서 구하는 해는 $1 \leq x \leq 4$

(2) $(x+1)^{-2x-3} < (x+1)^5$ ($x > -1$)에서

(i) $0 < x+1 < 1$, 즉 $-1 < x < 0$ 일 때

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$-2x - 3 > 5, \quad -2x > 8$$

$$\therefore x < -4$$

그런데 $-1 < x < 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $x+1=1$, 즉 $x=0$ 일 때
 $1^{-3} < 1^5$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x+1>1$, 즉 $x>0$ 일 때
 밑이 1보다 크므로
 $-2x-3<5, \quad -2x<8$
 $\therefore x>-4$

그런데 $x>0$ 이므로 $x>0$
 이상에서 구하는 해는 $x>0$

답 (1) $1 \leq x \leq 4$ (2) $x>0$

201

$x^{2x-5} > x^9$ ($x>0$)에서

(i) $0<x<1$ 일 때
 밑이 1보다 작은 양수이므로

$$2x-5<9, \quad 2x<14$$

$$\therefore x<7$$

그런데 $0<x<1$ 이므로 $0<x<1$

(ii) $x=1$ 일 때
 $1^{-3} > 1^9$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x>1$ 일 때
 밑이 1보다 크므로
 $2x-5>9, \quad 2x>14$
 $\therefore x>7$

이상에서 구하는 해는

$$0<x<1 \text{ 또는 } x>7$$

따라서 정수 x 의 최솟값은 8이다.

답 8

202

(1) $25^x - 2 \times 5^{x+1} + k - 2 \geq 0$ 에서
 $(5^x)^2 - 10 \times 5^x + k - 2 \geq 0$

$5^x = t$ ($t>0$)로 놓으면

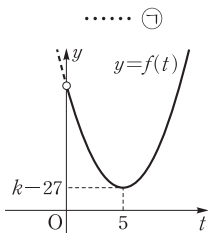
$$t^2 - 10t + k - 2 \geq 0$$

$$f(t) = t^2 - 10t + k - 2$$

$$= (t-5)^2 + k - 27$$

이라 할 때, $t>0$ 에서 부등식 ㉠이 항상 성립하려면
 $y=f(t)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$f(5) = k - 27 \geq 0 \quad \therefore k \geq 27$$



(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + k + 1 > 0$ 에서

$$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 + 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x + k + 1 > 0$$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t$ ($t>0$)로 놓으면

$$t^2 + 6t + k + 1 > 0$$

$$f(t) = t^2 + 6t + k + 1$$

$$= (t+3)^2 + k - 8$$

이라 할 때, $t>0$ 에서 부등식

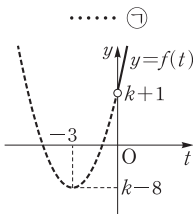
㉡이 항상 성립하려면

$y=f(t)$ 의 그래프가 오른쪽

그림과 같아야 하므로

$$f(0) = k + 1 \geq 0 \quad \therefore k \geq -1$$

답 (1) $k \geq 27$ (2) $k \geq -1$



203

주어진 식에 $A=2000, A_0=4000, t=1$ 을 대입하면

$$2000 = 4000k^1 \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

n 년 후에 자동차의 가격이 250만 원 이하로 떨어진다고 하면

$$4000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 250, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{16}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$n \geq 4$$

따라서 자동차의 가격이 250만 원 이하로 떨어지는 것은 최소 4년 후이므로

$$m=4$$

답 4

연습 문제

● 본책 89~90쪽

204

전략 밑을 같게 한 후 지수에 대한 부등식을 세운다.

$$4^{x^2} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8x} \text{에서}$$

$$(2^2)^{x^2} \leq (2^{-\frac{1}{2}})^{8x} \quad \therefore 2^{2x^2} \leq 2^{-4x}$$

밑이 1보다 크므로

$$2x^2 \leq -4x$$

$$2x^2 + 4x \leq 0, \quad x(x+2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 0$$

따라서 $M=0, m=-2$ 이므로

$$M+m=-2$$

답 -2

205

전략 두 집합 A, B 의 공통인 원소를 구한다.

$$(i) 3^{2x+2} - 82 \times 3^x + 9 = 0 \text{에서}$$

$$9 \times (3^x)^2 - 82 \times 3^x + 9 = 0$$

$$3^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$9t^2 - 82t + 9 = 0, \quad (9t-1)(t-9) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{9} \text{ 또는 } t = 9$$

$$\text{즉 } 3^x = \frac{1}{9} \text{ 또는 } 3^x = 9 \text{이므로}$$

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\therefore A = \{-2, 2\}$$

$$(ii) \left(\frac{1}{4}\right)^x + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x > 8 \text{에서}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x - 8 > 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = u \quad (u > 0) \text{로 놓으면}$$

$$u^2 + 2u - 8 > 0, \quad (u+4)(u-2) > 0$$

$$\therefore u < -4 \text{ 또는 } u > 2$$

$$\text{그런데 } u > 0 \text{이므로 } u > 2$$

$$\text{즉 } \left(\frac{1}{2}\right)^x > 2 \text{이므로 } \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$\text{밑이 1보다 작은 양수이므로 } x < -1$$

$$\therefore B = \{x \mid x < -1\}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } A \cap B = \{-2\}$$

따라서 $A \cap B$ 의 모든 원소의 합은 -2 이다.

답 -2

206

전략 부등식 $A \leq B \leq C$ 는 연립부등식 $\begin{cases} A \leq B \\ B \leq C \end{cases}$ 의 꼴로 변형하여 풀다.

$$(i) 48 \leq 3^{2x} + 21 \text{에서}$$

$$27 \leq 3^{2x} \quad \therefore 3^3 \leq 3^{2x}$$

$$\text{밑이 1보다 크므로}$$

$$3 \leq 2x \quad \therefore x \geq \frac{3}{2}$$

$$(ii) 3^{2x} + 21 \leq 4 \times 3^{x+1} - 6 \text{에서}$$

$$3^{2x} - 4 \times 3^{x+1} + 27 \leq 0$$

$$\therefore (3^x)^2 - 12 \times 3^x + 27 \leq 0$$

$$3^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 12t + 27 \leq 0, \quad (t-3)(t-9) \leq 0$$

$$\therefore 3 \leq t \leq 9$$

$$\text{즉 } 3 \leq 3^x \leq 9 \text{이므로 } 3^1 \leq 3^x \leq 3^2$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } 1 \leq x \leq 2$$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$$\frac{3}{2} \leq x \leq 2$$

답 $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$

207

전략 $0 < x < 1, x=1, x>1$ 인 경우로 나누어 푼다.

$$x^{2x+5} \geq x^{3x-2} \quad (x > 0) \text{에서}$$

(i) $0 < x < 1$ 일 때

$$\text{밑이 1보다 작은 양수이므로}$$

$$2x+5 \leq 3x-2 \quad \therefore x \geq 7$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $x=1$ 일 때

$$1^7 \geq 1^1 \text{이므로 부등식이 성립한다.}$$

(iii) $x>1$ 일 때

$$\text{밑이 1보다 크므로}$$

$$2x+5 \geq 3x-2 \quad \therefore x \leq 7$$

$$\text{그런데 } x>1 \text{이므로 } 1 < x \leq 7$$

$$\text{이상에서 부등식의 해는 } 1 \leq x \leq 7$$

따라서 정수 x 는 1, 2, 3, ..., 7의 7개이다.

답 7

208

전략 밑을 같게 한 후 지수에 대한 부등식을 세운다.

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x^3+2x} \leq 25^{x+k} \text{에서 } (5^{-1})^{x^3+2x} \leq (5^2)^{x+k}$$

$$\therefore 5^{-x^3-2x} \leq 5^{2x+2k}$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } -x^3-2x \leq 2x+2k$$

$$\therefore x^3+4x+2k \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $\textcircled{1}$ 이 성립하려면 이차방

정식 $x^2+4x+2k=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4} = 2^2 - 2k \leq 0 \quad \therefore k \geq 2$$

따라서 k 의 최솟값은 2이다.

답 2

209

전략 부등식의 해를 k 를 이용하여 나타낸다.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} > (\sqrt{2})^{kx} \text{에서} \quad (2^{-2})^{x^2} > (2^{\frac{1}{2}})^{kx}$$

$$\therefore 2^{-2x^2} > 2^{\frac{1}{2}kx}$$

밑이 1보다 크므로

$$-2x^2 > \frac{1}{2}kx, \quad 2x^2 + \frac{1}{2}kx < 0$$

$$\therefore x(4x+k) < 0$$

그런데 k 가 자연수이므로

$$-\frac{k}{4} < x < 0$$

이를 만족시키는 정수 x 가 $-3, -2, -1$ 의 3개이어야 하므로

$$-4 \leq -\frac{k}{4} < -3$$

$$\therefore 12 < k \leq 16$$

따라서 자연수 k 의 최댓값은 16, 최솟값은 13이므로

$$M=16, m=13$$

$$\therefore M+m=29$$

답 29

210

전략 $6^x = t$ 로 치환한 부등식의 해가 $6^{-1} \leq t \leq 6^1$ 임을 이용한다.

$a \times 6^x + 6^{1-x} - b \leq 0$ 의 양변에 6^x 을 곱하면

$$a \times (6^x)^2 - b \times 6^x + 6 \leq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$6^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$at^2 - bt + 6 \leq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

부등식 $\textcircled{1}$ 의 해가 $-1 \leq x \leq 1$ 이므로

$$6^{-1} \leq 6^x \leq 6^1 \quad \therefore \frac{1}{6} \leq t \leq 6$$

해가 $\frac{1}{6} \leq t \leq 6$ 이고 t^2 의 계수가 a ($a > 0$)인 이차부등식은

$$a\left(t - \frac{1}{6}\right)(t - 6) \leq 0$$

$$\therefore at^2 - \frac{37}{6}at + a \leq 0$$

이 부등식이 $\textcircled{2}$ 과 일치하므로

$$-b = -\frac{37}{6}a, \quad 6 = a$$

즉 $a=6, b=37$ 이므로

$$a+b=43$$

답 43

211

전략 이차방정식의 판별식을 이용하여 k 에 대한 부등식을 세운다.

모든 실수 x 에 대하여 부등식

$x^2 - (2^{k+1} - 4)x + 2^k > 0$ 이 성립하려면 이차방정식

$x^2 - (2^{k+1} - 4)x + 2^k = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4} = (2^k - 2)^2 - 2^k < 0$$

$$2^{2k} - 4 \times 2^k + 4 - 2^k < 0$$

$$\therefore (2^k)^2 - 5 \times 2^k + 4 < 0$$

$2^k = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 5t + 4 < 0, \quad (t-1)(t-4) < 0$$

$$\therefore 1 < t < 4$$

즉 $1 < 2^k < 4$ 이므로 $2^0 < 2^k < 2^2$

밑이 1보다 크므로 $0 < k < 2$

답 $0 < k < 2$

212

전략 $2^x = t$ 로 치환한 후 $x \geq 0$ 일 때 $t \geq 1$ 임을 이용한다.

$4^{x+1} - 2^{x+1} + k + 1 > 0$ 에서

$$4 \times (2^x)^2 - 2 \times 2^x + k + 1 > 0$$

$2^x = t$ 로 놓으면 $x \geq 0$ 에서 $2^x \geq 2^0$, 즉 $t \geq 1$ 이고

$$4t^2 - 2t + k + 1 > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(t) = 4t^2 - 2t + k + 1$$

$$= 4\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + k + \frac{3}{4}$$

이라 할 때, $t \geq 1$ 에서 부등식

$\textcircled{1}$ 이 항상 성립하려면

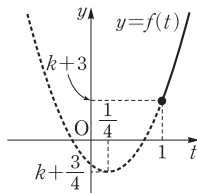
$y = f(t)$ 의 그래프가 오른쪽 그

림과 같아야 하므로

$$f(1) = k + 3 > 0 \quad \therefore k > -3$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 -2 이다.

답 -2



213

전략 $3^x = t$ 로 치환한 후 주어진 부등식을 t 에 대한 이차부등식으로 변형한다.

$9^x - 2k \times 3^x + 16 \geq 0$ 에서

$$(3^x)^2 - 2k \times 3^x + 16 \geq 0$$

$3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 2kt + 16 \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $f(t) = t^2 - 2kt + 16 = (t-k)^2 + 16 - k^2$ 이라 하자.

(i) $k > 0$ 일 때

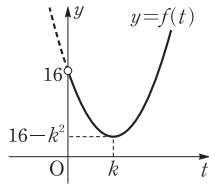
$t > 0$ 에서 부등식 ㉠이 항상 성립하려면 $y=f(t)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$f(k) = 16 - k^2 \geq 0$$

$$(k+4)(k-4) \leq 0$$

$$\therefore -4 \leq k \leq 4$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $0 < k \leq 4$



(ii) $k = 0$ 일 때

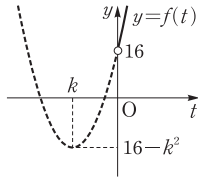
모든 실수 t 에 대하여

$$f(t) = t^2 + 16 \geq 0$$

이므로 $t > 0$ 에서 부등식 ㉠이 항상 성립한다.

(iii) $k < 0$ 일 때

$y=f(t)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 $t > 0$ 에서 부등식 ㉠이 항상 성립한다.



이상에서 구하는 k 의 값의 범위는 $k \leq 4$

답 $k \leq 4$

214

전략 주어진 상황을 부등식으로 나타낸다.

미생물 A, B를 각각 10마리씩 동시에 배양했을 때, n 주 후 미생물 A, B의 수의 합이 2720마리 이상이 된다고 하면

$$10 \times 2^n + 10 \times 4^n \geq 2720$$

$$4^n + 2^n - 272 \geq 0$$

$$\therefore (2^n)^2 + 2^n - 272 \geq 0$$

$2^n = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 + t - 272 \geq 0, \quad (t+17)(t-16) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -17 \text{ 또는 } t \geq 16$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $t \geq 16$

즉 $2^n \geq 16$ 이므로 $2^n \geq 2^4$

밑이 1보다 크므로 $n \geq 4$

따라서 미생물 A, B의 수의 합이 2720마리 이상인 것은 최소 4주 후이므로

$$m = 4$$

답 4

4 로그함수

I. 지수함수와 로그함수

01 로그함수의 뜻과 그래프

● 본책 92~99쪽

215

$$(1) f(4) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$$

$$(2) f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$$

$$(3) f(1) = \log_2 1 = 0$$

$$(4) g\left(\frac{1}{9}\right) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2$$

$$(5) g(27) = \log_{\frac{1}{3}} 27 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = -3$$

$$(6) g(1) = \log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$$

답 (1) 2 (2) -1 (3) 0 (4) 2 (5) -3 (6) 0

216

답 (1) 양의 실수 (2) 실수 (3) $<$ (4) $>$ (5) y 축

217

(1) 함수 $y = \log_3(x-1)$ 의

그래프는 $y = \log_3 x$ 의

그래프를 x 축의 방향으로

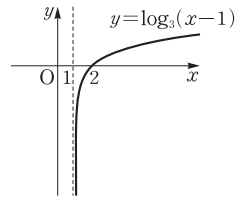
1만큼 평행이동한 것이므로

오른쪽 그림과 같고,

정의역은 $\{x | x > 1\}$

치역은 $\{y | y \text{는 실수}\}$

점근선의 방정식은 $x = 1$



(2) 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x + 2$ 의 그래

프는 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프를

y 축의 방향으로 2만큼 평행

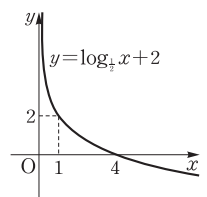
이동한 것이므로 오른쪽 그림과

같고,

정의역은 $\{x | x > 0\}$

치역은 $\{y | y \text{는 실수}\}$

점근선의 방정식은 $x = 0$



답 풀이 참조

218

답 (1) $y = \log_2(x+1) + 4$ (2) $y = \log_2 \frac{1}{x}$

219

답 (가) 양의 실수 (나) 일대일대응 (다) $\log_6 y$ (라) $\log_6 x$

220

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3 \text{ 이므로}$$

$$(g \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right) = g\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \\ = g(3) = \log_3 3^2 = 2$$

답 2

221

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는
오른쪽 그림과 같다.

ㄱ. $f(1)=0$ 이므로 그래프는
점 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 을 지나지 않
는다. (거짓)

ㄴ. 그래프의 점근선의 방정식은 $x=0$ 이다. (참)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은
감소하므로 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$ 이다.

(거짓)

ㄹ. 함수 $y=f(x)$ 는 일대일함수이므로 $x_1 \neq x_2$ 이면
 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다. (참)

ㅁ. $y = \log_2 x = -\log_{\frac{1}{2}} x$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프
는 $y = \log_2 x$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭이다.
(거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄹ

222

(1) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+2) + 1$

의 그래프는

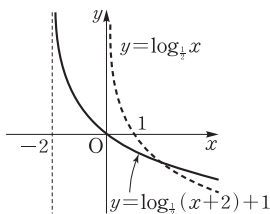
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프

를 x 축의 방향으로

-2 만큼, y 축의 방향

으로 1 만큼 평행이동

한 것이므로 위의 그림과 같고,



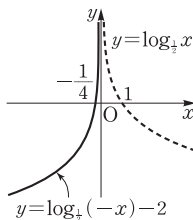
정의역은 $\{x | x > -2\}$

치역은 $\{y | y \text{는 실수}\}$

점근선의 방정식은 $x = -2$

(2) $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x) - 2$ 의 그래프

는 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프를 y
축에 대하여 대칭이동한 후
 y 축의 방향으로 -2 만큼 평
행이동한 것이므로 오른쪽
그림과 같고,



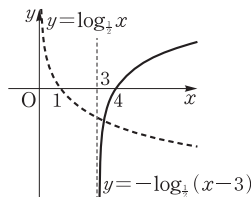
정의역은 $\{x | x < 0\}$

치역은 $\{y | y \text{는 실수}\}$

점근선의 방정식은 $x = 0$

(3) $y = -\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$ 의

그래프는 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의
그래프를 x 축에 대하
여 대칭이동한 후 x 축
의 방향으로 3 만큼 평
행이동한 것이므로 위의 그림과 같고,



정의역은 $\{x | x > 3\}$

치역은 $\{y | y \text{는 실수}\}$

점근선의 방정식은 $x = 3$

답 풀이 참조

223

$$y = \log_3(27x+9) = \log_3\left\{27\left(x+\frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$= \log_3 27 + \log_3\left(x+\frac{1}{3}\right) = \log_3\left(x+\frac{1}{3}\right) + 3$$

따라서 함수 $y = \log_3(27x+9)$ 의 그래프는

$y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$ 만큼, y 축
의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이므로

$$m = -\frac{1}{3}, n = 3$$

$$\therefore mn = -1$$

답 -1

224

$y = \log_{\frac{1}{5}} x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래
프의 식은 $-y = \log_{\frac{1}{5}} x$

$$\therefore y = \log_5 x$$

..... ㉠

㉠의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \log_5(x-2) - 3$$

답 $y = \log_5(x-2) - 3$

225

(1) $\log_4 25 = \log_{2^2} 5^2 = \log_2 5 = \log_{2^3} 5^3 = \log_8 125$

$$2 = \log_8 8^2 = \log_8 64$$

이때 $64 < 80 < 125$ 이고, 함수 $y = \log_8 x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$$\log_8 64 < \log_8 80 < \log_8 125$$

$$\therefore 2 < \log_8 80 < \log_4 25$$

(2) $-2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{2}} 4$

$3 < 4 < 5$ 이고, 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로

$$\log_{\frac{1}{2}} 3 > \log_{\frac{1}{2}} 4 > \log_{\frac{1}{2}} 5$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{2}} 5 < -2 < \log_{\frac{1}{2}} 3$$

답 (1) $2 < \log_8 80 < \log_4 25$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} 5 < -2 < \log_{\frac{1}{2}} 3$

226

(1) $y = 2^{-x+1} - 3$ 에서 $y + 3 = 2^{-x+1}$

로그의 정의에 의하여

$$-x + 1 = \log_2(y + 3)$$

$$\therefore x = -\log_2(y + 3) + 1$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = -\log_2(x + 3) + 1$$

(2) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-2) + 1$ 에서

$$y - 1 = \log_{\frac{1}{3}}(x-2)$$

로그의 정의에 의하여

$$x - 2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{y-1} \therefore x = \left(\frac{1}{3}\right)^{y-1} + 2$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 2$$

답 (1) $y = -\log_2(x + 3) + 1$

(2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 2$

227

$y = \log_4(x + a) - 3$ 에서

$$y + 3 = \log_4(x + a)$$

로그의 정의에 의하여 $x + a = 4^{y+3}$

$$\therefore x = 4^{y+3} - a$$

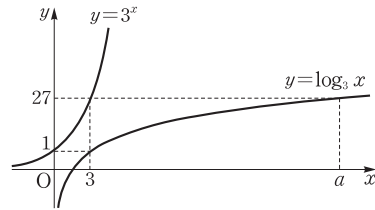
x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = 4^{x+3} - a$

따라서 $a = 1$, $b = 3$ 이므로

$$a + b = 4$$

답 4

228



$y = \log_3 x$ 에서 $y = 1$ 일 때

$$\log_3 x = 1 \therefore x = 3$$

$y = 3^x$ 에서 $x = 3$ 일 때

$$y = 3^3 = 27$$

따라서 $y = \log_3 x$ 의 그래프가 점 $(a, 27)$ 을 지나므로

$$27 = \log_3 a \therefore a = 3^{27}$$

답 3^{27}

229

두 점 A, B의 x 좌표가 k 이므로

$$A(k, \log_2 k), B(k, \log_4 k)$$

$\overline{AB} = 2$ 이므로 $\log_2 k - \log_4 k = 2$

$$\log_2 k - \frac{1}{2} \log_2 k = 2, \quad \log_2 k = 4$$

$$\therefore k = 2^4 = 16$$

답 16

230

$y = \log_3 x + 1$ 의 그래프는 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 오른쪽 그림에서

빛금 친 두 부분의 넓이

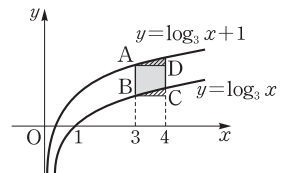
가 같으므로 구하는 넓이

는 직사각형 ABCD

의 넓이와 같다.

즉 구하는 넓이는 $(4-3) \times 1 = 1$

답 1



231

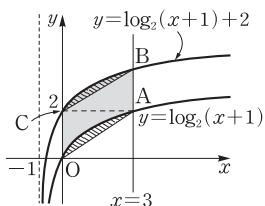
$y = \log_2(x+1) + 2$ 의 그래프는 $y = \log_2(x+1)$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 구하는 넓이는 평행사변형 OABC의 넓이와 같다.

즉 구하는 넓이는

$$3 \times 2 = 6$$

답 6



연습문제

● 본책 100~102쪽

232

전략 함숫값을 k 에 대한 식으로 나타낸다.

$$f(27) = \log_3 27 + k \log_{27} 81 = 3 + \frac{4}{3}k$$

$$f(9) = \log_3 9 + k \log_9 81 = 2 + 2k$$

$$f(27) = f(9) \text{ 이므로}$$

$$3 + \frac{4}{3}k = 2 + 2k, \quad \frac{2}{3}k = 1$$

$$\therefore k = \frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

233

전략 그래프의 점근선과 그래프가 지나는 점을 이용하여 a , b 의 값을 구한다.

함수 $y = \log_2(x-a) + b$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x = a$ 이므로

$$a = -2$$

따라서 $y = \log_2(x+2) + b$ 의 그래프가 원점을 지나므로

$$0 = \log_2 2 + b \quad \therefore b = -1$$

$$\therefore ab = 2$$

답 2

234

전략 로그함수의 성질을 이용한다.

$$\textcircled{3} y = \log_3(x-5) + 2 \text{에서}$$

$$y-2 = \log_3(x-5)$$

$$\text{로그의 정의에 의하여} \quad 3^{y-2} = x-5$$

$$\therefore x = 3^{y-2} + 5$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 함수 $y = \log_3(x-5) + 2$ 의 역함수는

$$y = 3^{x-2} + 5$$

⑤ 밑 3이 1보다 크므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

답 ③

235

전략 먼저 주어진 로그함수의 역함수 $f(x)$ 를 구한다.

$$y = \log_a(x+b) - 2 \text{에서}$$

$$y+2 = \log_a(x+b)$$

로그의 정의에 의하여 $x+b = a^{y+2}$

$$\therefore x = a^{y+2} - b$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = a^{x+2} - b$

$$\therefore f(x) = a^{x+2} - b$$

따라서 $y = f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$y = -b \text{ 이므로}$$

$$-b = -2 \quad \therefore b = 2$$

또 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$1 = a^2 - 2, \quad a^2 = 3$$

$$\therefore a = \sqrt{3} \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore ab = 2\sqrt{3}$$

답 $2\sqrt{3}$

236

전략 네 점 A, B, C, D의 좌표를 차례대로 구한다.

점 A의 y 좌표가 1이므로 $y = \log_2 x$ 에서 $y = 1$ 일 때

$$1 = \log_2 x \quad \therefore x = 2$$

$$\therefore A(2, 1)$$

점 B의 x 좌표가 2이므로 $y = 2^x$ 에서 $x = 2$ 일 때

$$y = 2^2 = 4 \quad \therefore B(2, 4)$$

점 C의 y 좌표가 4이므로 $y = \log_2 x$ 에서 $y = 4$ 일 때

$$4 = \log_2 x \quad \therefore x = 2^4 = 16$$

$$\therefore C(16, 4)$$

점 D의 x 좌표가 16이므로 $y = 2^x$ 에서 $x = 16$ 일 때

$$y = 2^{16}$$

따라서 점 D의 y 좌표는 2^{16} 이다.

답 2^{16}

237

전략 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 구한다.

두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_a x$ 가 모두 점 (1, 0)을 지나므로

$$A(1, 0)$$

두 점 B, C의 x 좌표가 4이므로

$$B(4, 2), C(4, \log_a 4)$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (4-1) \times (2-\log_a 4) = \frac{3}{2} (2-\log_a 4)$$

즉 $\frac{3}{2} (2-\log_a 4) = \frac{9}{2}$ 이므로

$$2-\log_a 4=3, \quad \log_a 4=-1$$

$$a^{-1}=4 \quad \therefore a=\frac{1}{4} \quad \text{답 ④}$$

238

전략 주어진 로그함수의 식을 $y=\log_2 x$ 를 포함한 식으로 나타낸다.

$$\neg. y=\log_{\frac{1}{2}} 4x = \log_{\frac{1}{2}} 4 + \log_{\frac{1}{2}} x = -2 - \log_2 x$$

따라서 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭 이동한 후 y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 $y=\log_{\frac{1}{2}} 4x$ 의 그래프와 겹쳐진다.

$$\neg. y=\log_2 \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_2 x$$

ㄷ. $y=\log_2 x$ 의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭 이동한 후 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $y=2^{x-1}$ 의 그래프와 겹쳐진다.

$$\text{ㄹ. } y=\log_2 \frac{1}{x} = \log_2 x^{-1} = -\log_2 x$$

따라서 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭 이동하면 $y=\log_2 \frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹쳐진다.

이상에서 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 $\neg$, ㄷ, ㄹ이다.

답 $\neg$, ㄷ, ㄹ

239

전략 먼저 $y=\log_2 x+1$ 의 그래프를 평행이동한 그래프의 식을 구한다.

$y=\log_2 x+1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\log_2 (x-a)+1+b$$

$$\therefore f(x)=\log_2 (x-a)+1+b$$

이때 $f(7)=0$, $f(11)=1$ 이므로

$$\log_2 (7-a)+1+b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_2 (11-a)+1+b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}-\textcircled{1}$ 을 하면

$$\log_2 (11-a)-\log_2 (7-a)=1$$

$$\log_2 \frac{11-a}{7-a}=1, \quad \frac{11-a}{7-a}=2$$

$$11-a=14-2a \quad \therefore a=3$$

$\textcircled{1}$ 에 $a=3$ 을 대입하면

$$\log_2 4+1+b=0 \quad \therefore b=-3$$

$$\therefore a+b=0 \quad \text{답 0}$$

240

전략 밑을 2로 같게 한 후 $\log_2 a$ 의 값의 범위를 이용한다.

$$B=\log_2 \frac{1}{a} = \log_2 a^{-1} = -\log_2 a$$

$$C=\log_a 2 = \frac{1}{\log_2 a}$$

이때 $1 < a < 2$ 이고, 함수 $y=\log_2 x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$$\log_2 1 < \log_2 a < \log_2 2$$

$$\therefore 0 < \log_2 a < 1$$

따라서 $-1 < -\log_2 a < 0$, $\frac{1}{\log_2 a} > 1$ 이므로

$$0 < A < 1, -1 < B < 0, C > 1$$

$$\therefore B < A < C \quad \text{답 } B < A < C$$

241

전략 $\overline{CD}=4$ 임을 이용하여 점 C의 좌표를 구한다.

사각형 ABCD는 한 변의 길이가 4인 정사각형이므로

$$\overline{CD}=4$$

따라서 점 C의 x 좌표를 k 라 하면

$$\log_2 k=4 \quad \therefore k=2^4=16$$

$\overline{BC}=4$ 이므로 점 B의 x 좌표는

$$16-4=12$$

$$\therefore \overline{BE}=\log_2 12=\log_2 (2^2 \times 3)$$

$$=2+\log_2 3 \quad \text{답 ③}$$

242

전략 함수 $y=g(x)$ 가 함수 $y=\log_2(x-1)$ 의 역함수임을 이용한다.

$y=g(x)$ 의 그래프와 $y=\log_2(x-1)$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $y=g(x)$ 는 함수 $y=\log_2(x-1)$ 의 역함수이다.

$y=\log_2(x-1)$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$2^y = x-1 \quad \therefore x = 2^y + 1$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = 2^x + 1$

$$\therefore g(x) = 2^x + 1$$

$y=g(x)$ 의 그래프가 점 $P(2, b)$ 를 지나므로

$$b = 2^2 + 1 = 5$$

$y=\log_2(x-1)$ 의 그래프가 점 $Q(a, 5)$ 를 지나므로

$$5 = \log_2(a-1), \quad a-1 = 2^5$$

$$\therefore a = 33$$

$$\therefore a+b = 38$$

답 38

다른 풀이 $y=g(x)$ 의 그래프가 점 $P(2, b)$ 를 지나므로 $y=\log_2(x-1)$ 의 그래프는 점 $(b, 2)$ 를 지난다.

따라서 $2 = \log_2(b-1)$ 에서 $b-1 = 2^2$

$$\therefore b = 5$$

243

전략 두 점 A, C의 좌표를 이용하여 두 점 D, F의 좌표를 구한다.

$A(2, 0)$ 이므로 점 D의 y 좌표는 $\log_2 2 = 1$

$$\therefore D(0, 1)$$

$C(16, 0)$ 이므로 점 F의 y 좌표는 $\log_2 16 = 4$

$$\therefore F(0, 4)$$

점 E가 선분 DF를 1:2로 내분하는 점이므로 점 E의

좌표는 $\left(0, \frac{1 \times 4 + 2 \times 1}{1+2}\right)$, 즉 $(0, 2)$

따라서 점 B의 x 좌표를 a 라 하면 $\log_2 a = 2$ 에서

$$a = 2^2 = 4$$

즉 점 B의 x 좌표는 4이다.

답 4

244

전략 주어진 조건을 이용하여 α, β 에 대한 식을 세운다.

두 점 P, R의 x 좌표가 각각 α, β 이므로

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{9}{4} \quad \therefore \alpha + \beta = \frac{9}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 점 P, Q의 y 좌표가 각각 $\log_4 \alpha, -\log_2 \alpha$ 이므로

$$\overline{PQ} = -\log_2 \alpha - \log_4 \alpha$$

$$= -\log_2 \alpha - \frac{1}{2} \log_2 \alpha = -\frac{3}{2} \log_2 \alpha$$

두 점 R, S의 y 좌표가 각각 $\log_4 \beta, -\log_2 \beta$ 이므로

$$\overline{RS} = \log_4 \beta - (-\log_2 \beta)$$

$$= \frac{1}{2} \log_2 \beta + \log_2 \beta = \frac{3}{2} \log_2 \beta$$

이때 $\overline{PQ} : \overline{RS} = 1 : 2$ 에서 $\overline{RS} = 2\overline{PQ}$ 이므로

$$\frac{3}{2} \log_2 \beta = -3 \log_2 \alpha$$

$$\log_2 \beta = -2 \log_2 \alpha, \quad \log_2 \beta = \log_2 \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\therefore \beta = \frac{1}{\alpha^2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①에 ②를 대입하면

$$\alpha + \frac{1}{\alpha^2} = \frac{9}{2}, \quad 2\alpha^3 - 9\alpha^2 + 2 = 0$$

$$(2\alpha - 1)(\alpha^2 - 4\alpha - 2) = 0$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \alpha = 2 \pm \sqrt{6}$$

이때 $0 < \alpha < 1$ 이므로 $\alpha = \frac{1}{2}$

②에 $\alpha = \frac{1}{2}$ 을 대입하면 $\beta = 4$

$$\therefore \beta - \alpha = \frac{7}{2} \quad \text{답 } \frac{7}{2}$$

245

전략 평행사변형 ACBD의 넓이가 $\log_2 125$ 임을 이용한다.

$$y = \log_2 5x = \log_2 x + \log_2 5$$

이므로 곡선 $y = \log_2 5x$ 는 곡선 $y = \log_2 x$ 를 y 축의 방향으로 $\log_2 5$ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 오른쪽 그림

에서 빗금 친 두 부분

의 넓이가 같으므로

평행사변형 ACBD

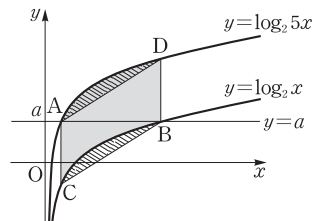
의 넓이가 $\log_2 125$

이다.

이때 $\overline{AC} = \overline{DB} = \log_2 5$ 이므로

$$\log_2 5 \times \overline{AB} = \log_2 125$$

$$\therefore \overline{AB} = \frac{\log_2 125}{\log_2 5} = \log_5 125 = 3$$



한편 두 점 A, B의 y 좌표가 a 이므로

$$a = \log_2 5x \text{에서 } 5x = 2^a \quad \therefore x = \frac{1}{5} \times 2^a$$

$$\therefore A\left(\frac{1}{5} \times 2^a, a\right)$$

$$a = \log_2 x \text{에서 } x = 2^a$$

$$\therefore B(2^a, a)$$

$$\text{따라서 } \overline{AB} = 2^a - \frac{1}{5} \times 2^a = \frac{4}{5} \times 2^a \text{이므로}$$

$$\frac{4}{5} \times 2^a = 3 \quad \therefore 2^a = \frac{15}{4} \quad \text{답 } \frac{15}{4}$$

02 로그함수의 최대·최소

● 본책 103~108쪽

246

답 증가, 1, 0, $\frac{1}{2}$, -1

247

답 감소, $\frac{1}{9}$, 2, 3, -1

248

(1) 함수 $y = \log_3 x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

따라서 $3 \leq x \leq 9$ 일 때, 함수 $y = \log_3 x$ 는

$$x=9 \text{에서 최댓값 } \log_3 9 = 2,$$

$$x=3 \text{에서 최솟값 } \log_3 3 = 1$$

을 갖는다.

(2) 함수 $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

따라서 $\frac{1}{16} \leq x \leq 4$ 일 때, 함수 $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ 는

$$x = \frac{1}{16} \text{에서 최댓값 } \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{16} = 2,$$

$$x=4 \text{에서 최솟값 } \log_{\frac{1}{4}} 4 = -1$$

을 갖는다.

(3) 함수 $y = \log_5 x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

따라서 $x \geq 1$ 일 때, 함수 $y = \log_5 x$ 는 최댓값을 갖지 않고,

$$x=1 \text{에서 최솟값 } \log_5 1 = 0$$

을 갖는다.

(4) 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

따라서 $x \geq \frac{1}{16}$ 일 때, 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 는

$$x = \frac{1}{16} \text{에서 최댓값 } \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$$

를 갖고, 최솟값은 갖지 않는다.

답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: 1

(2) 최댓값: 2, 최솟값: -1

(3) 최솟값: 0, 최댓값: 없다.

(4) 최댓값: 4, 최솟값: 없다.

249

(1) 함수 $y = \log_2(x+1) - 3$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

따라서 $1 \leq x \leq 7$ 일 때, 함수 $y = \log_2(x+1) - 3$ 은

$$x=7 \text{에서 최댓값 } \log_2 8 - 3 = 0,$$

$$x=1 \text{에서 최솟값 } \log_2 2 - 3 = -2$$

를 갖는다.

(2) 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(2x+1) + 3$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

따라서 $1 \leq x \leq 4$ 일 때, 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(2x+1) + 3$ 은

$$x=1 \text{에서 최댓값 } \log_{\frac{1}{3}} 3 + 3 = 2,$$

$$x=4 \text{에서 최솟값 } \log_{\frac{1}{3}} 9 + 3 = 1$$

을 갖는다.

답 (1) 최댓값: 0, 최솟값: -2

(2) 최댓값: 2, 최솟값: 1

250

함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-a)$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

따라서 $6 \leq x \leq 8$ 일 때, 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-a)$ 는

$x=6$ 에서 최댓값, $x=8$ 에서 최솟값을 갖는다.

이때 최솟값이 -2 이므로

$$\log_{\frac{1}{2}}(8-a) = -2$$

$$8-a = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \quad \therefore a=4$$

따라서 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)$ 이므로 구하는 최댓값은

$$\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$$

답 -1

251

$f(x) = -x^2 + 6x + 7$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$y = \log_2 f(x)$$

함수 $y = \log_2 f(x)$ 의 밑 2가 1보다 크므로 $f(x)$ 가 최대일 때 함수 $y = \log_2 f(x)$ 도 최대가 된다.

$$f(x) = -x^2 + 6x + 7 = -(x-3)^2 + 16 \text{이므로}$$

$f(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값 16을 갖는다.

따라서 함수 $y = \log_2 f(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값

$\log_2 16 = 4$ 를 가지므로

$$a=3, b=4$$

$$\therefore a+b=7$$

답 7

252

$f(x) = x^2 - 2x + 5$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$y = \log_a f(x)$$

함수 $y = \log_a f(x)$ 의 밑 a 가 1보다 작은 양수이므로 $f(x)$ 가 최소일 때 함수 $y = \log_a f(x)$ 는 최대가 된다.

$$f(x) = x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 \text{이므로 } f(x) \text{는}$$

$x=1$ 에서 최솟값 4를 갖는다.

따라서 함수 $y = \log_a f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 $\log_a 4$ 를 가지므로

$$\log_a 4 = -2, \quad a^{-2} = 4$$

$$a^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore a = \frac{1}{2} \quad (\because 0 < a < 1)$$

답 $\frac{1}{2}$

253

$f(x) = x^2 + 4x + 8$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$$

함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$ 의 밑 $\frac{1}{2}$ 이 1보다 작은 양수이므로

함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$ 는 $f(x)$ 가 최소일 때 최대가 되고, $f(x)$ 가 최대일 때 최소가 된다.

$$f(x) = x^2 + 4x + 8 = (x+2)^2 + 4 \text{이므로}$$

$-3 \leq x \leq 0$ 일 때, $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최댓값 8,

$x=-2$ 에서 최솟값 4를 갖는다.

따라서 $-3 \leq x \leq 0$ 일 때, 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$ 는

$$x=-2 \text{에서 최댓값 } \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2,$$

$$x=0 \text{에서 최솟값 } \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$$

을 갖는다.

답 최댓값: -2 , 최솟값: -3

254

$$(1) y = (\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - \log_{\frac{1}{3}} x^2 + 2$$

$$= (\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - 2 \log_{\frac{1}{3}} x + 2$$

$\log_{\frac{1}{3}} x = t$ 로 놓으면 $3 \leq x \leq 9$ 에서

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} 3$$

$$\therefore -2 \leq t \leq -1$$

이때 주어진 함수는

$$y = t^2 - 2t + 2 = (t-1)^2 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 $-2 \leq t \leq -1$ 일 때, $\textcircled{1}$ 은

$$t=-2 \text{에서 최댓값 } 10,$$

$$t=-1 \text{에서 최솟값 } 1$$

를 갖는다.

$$(2) y = \log_3 \frac{x}{9} \times \log_3 \frac{3}{x}$$

$$= (\log_3 x - \log_3 9)(\log_3 3 - \log_3 x)$$

$$= (\log_3 x - 2)(1 - \log_3 x)$$

$$= -(\log_3 x)^2 + 3 \log_3 x - 2$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면 $1 \leq x \leq 27$ 에서

$$\log_3 1 \leq \log_3 x \leq \log_3 27$$

$$\therefore 0 \leq t \leq 3$$

이때 주어진 함수는

$$y = -t^2 + 3t - 2$$

$$= -\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 $0 \leq t \leq 3$ 일 때, ㉠은

$$t = \frac{3}{2} \text{에서 최댓값 } \frac{1}{4},$$

$t=0$ 또는 $t=3$ 에서 최솟값 -2 를 갖는다.

답 (1) 최댓값: 10, 최솟값: 5

(2) 최댓값: $\frac{1}{4}$, 최솟값: -2

255

$$y = 2(\log_3 x)^2 + a \log_3 \frac{1}{x^2} + b$$

$$= 2(\log_3 x)^2 - 2a \log_3 x + b$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$y = 2t^2 - 2at + b$$

$$= 2\left(t - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} + b \quad \dots\dots \text{㉠}$$

㉠이 $x = \frac{1}{3}$, 즉 $t = \log_3 \frac{1}{3} = -1$ 에서 최솟값 1을 가지므로

$$\frac{a}{2} = -1, -\frac{a^2}{2} + b = 1$$

$$\therefore a = -2, b = 3$$

$$\therefore a + b = 1$$

답 1

256

$y = (100x)^{6-\log x}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log y = \log (100x)^{6-\log x}$$

$$= (6 - \log x)(2 + \log x)$$

$$= -(\log x)^2 + 4 \log x + 12 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$\log x = t$ 로 놓으면 $1 \leq x \leq 1000$ 에서

$$\log 1 \leq \log x \leq \log 1000$$

$$\therefore 0 \leq t \leq 3$$

이때 ㉠은

$$\log y = -t^2 + 4t + 12 = -(t-2)^2 + 16$$

따라서 $0 \leq t \leq 3$ 일 때, $\log y$ 는

$$t=2 \text{에서 최댓값 } 16$$

을 갖는다.

$$\log x = 2 \text{에서 } x = 10^2$$

$$\log y = 16 \text{에서 } y = 10^{16}$$

즉 $a = 10^2$, $b = 10^{16}$ 이므로

$$ab = 10^2 \times 10^{16} = 10^{18}$$

답 10^{18}

연습 문제

● 본책 109~110쪽

257

전략 정의역의 양 끝 값에서의 함수값을 구한다.

함수 $y = \log_2(x+3) - 1$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

따라서 $1 \leq x \leq 5$ 일 때, 함수 $y = \log_2(x+3) - 1$ 은

$$x=5 \text{에서 최댓값 } \log_2 8 - 1 = 2,$$

$$x=1 \text{에서 최솟값 } \log_2 4 - 1 = 1$$

을 갖는다.

즉 $M=2$, $m=1$ 이므로

$$Mm = 2$$

답 2

258

전략 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에서 x 의 값이 증가할 때 함수값의 증가·감소를 파악한다.

$$f(x) = -\log_{\frac{1}{3}} x^2 = 2 \log_3 x$$

에서 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값도 증가한다.

따라서 $21 \leq x \leq 27$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=27$ 에서 최댓값을 가지므로

$$M = f(27) = 2 \log_3 27 = 6$$

한편 $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x-18) + 2$ 에서 x 의 값이 증가하면 $g(x)$ 의 값은 감소한다.

따라서 $21 \leq x \leq 27$ 일 때, 함수 $g(x)$ 는 $x=27$ 에서 최솟값을 가지므로

$$m = g(27) = \log_{\frac{1}{3}} 9 + 2 = 0$$

$$\therefore M + m = 6$$

답 6

259

전략 함수 $g(x)$ 의 최솟값을 이용한다.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \log_{\frac{1}{2}} g(x)$$

의 밑 $\frac{1}{2}$ 이 1보다 작은 양수이므로 $g(x)$ 가 최소일 때

함수 $(f \circ g)(x)$ 는 최대가 된다.

$$g(x) = x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b \text{이므로}$$

$$g(x) \text{는 } x = -\frac{a}{2} \text{에서 최솟값 } -\frac{a^2}{4} + b \text{를 갖는다.}$$

따라서 함수 $(f \circ g)(x)$ 는 $x = -\frac{a}{2}$ 에서 최댓값

$\log_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{a^2}{4}+b\right)$ 를 가지므로

$$-\frac{a}{2} = -3, \log_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{a^2}{4}+b\right) = -1$$

$$\therefore a=6, b=11$$

$$\therefore a+b=17$$

답 17

260

전략 진수가 최대일 때 주어진 함수가 최솟값을 가짐을 이용한다.

$f(x) = x^2 - 4x + 8$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$$

함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$ 에서 밑 $\frac{1}{2}$ 이 1보다 작은 양수이므로 $f(x)$ 가 최대일 때 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$ 는 최소가 된다.

$f(x) = x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 + 4$ 이므로 $1 \leq x \leq 4$ 일 때, $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 최댓값 8을 갖는다.

따라서 $1 \leq x \leq 4$ 일 때 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$ 는

$$x=4 \text{에서 최솟값 } \log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$$

을 갖는다.

답 -3

261

전략 로그의 성질을 이용하여 주어진 함수의 식을 변형한다.

$$y = \log_3 3x \times \log_3 \frac{9}{x}$$

$$= (1 + \log_3 x)(2 - \log_3 x)$$

$$= -(\log_3 x)^2 + \log_3 x + 2$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$y = -t^2 + t + 2 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 에서 최댓값 $\frac{9}{4}$ 를 갖는다.

답 $\frac{9}{4}$

262

전략 밑이 1보다 큰 경우와 1보다 작은 양수인 경우로 나누어 생각한다.

진수의 조건에서 $x+2 > 0, 4-x > 0$

$$\therefore -2 < x < 4$$

이때 주어진 함수는

$$y = \log_a (x+2) + \log_a (4-x)$$

$$= \log_a (x+2)(4-x)$$

$$= \log_a (-x^2 + 2x + 8)$$

$$= \log_a \{-(x-1)^2 + 9\} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $a > 1$ 일 때

①에서 $-(x-1)^2 + 9$ 가 최소일 때 y 도 최소가 된다.

그러나 $-2 < x < 4$ 일 때, $-(x-1)^2 + 9$ 의 최솟값은 존재하지 않으므로 ①의 최솟값도 존재하지 않는다.

(ii) $0 < a < 1$ 일 때

①에서 $-(x-1)^2 + 9$ 가 최대일 때 y 는 최소가 된다.

$-2 < x < 4$ 일 때, $-(x-1)^2 + 9$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 9를 가지므로 ①의 최솟값은 $\log_a 9$ 이다.

따라서 $\log_a 9 = -2$ 이므로

$$a^{-2} = 9, \quad a^2 = \frac{1}{9}$$

$$\therefore a = \frac{1}{3} \quad (\because 0 < a < 1)$$

(i), (ii)에서 $a = \frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

263

전략 지수함수의 최솟값을 이용하여 k 의 값을 구한다.

함수 $f(x)$ 의 밑 $\frac{1}{5}$ 이 1보다 작은 양수이므로

$-x^2 - 4x - 5$ 의 값이 최대일 때 $f(x)$ 는 최소가 된다.

$-x^2 - 4x - 5 = -(x+2)^2 - 1$ 에서 $x = -2$ 일 때 최댓값 -1 을 가지므로 $f(x)$ 의 최솟값은

$$f(-2) = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$$

한편 함수 $g(x)$ 의 밑 2가 1보다 크므로 $x^2 + 4x + k$ 의 값이 최소일 때 $g(x)$ 는 최소가 된다.

$x^2 + 4x + k = (x+2)^2 + k - 4$ 에서 $x = -2$ 일 때 최솟값 $k-4$ 를 가지므로 $g(x)$ 의 최솟값은

$$g(-2) = \log_2 (k-4)$$

즉 $\log_2 (k-4) = 5$ 이므로

$$k-4 = 2^5$$

$$\therefore k = 36$$

답 36

264

전략 주어진 범위에서 진수의 최솟값과 최댓값을 각각 k 에 대한 식으로 나타낸다.

함수 $f(x)$ 의 밑 3이 1보다 크므로 $f(x)$ 는

$x^2 - 2x + k$ 의 값이 최소일 때 최소가 되고,

$x^2 - 2x + k$ 의 값이 최대일 때 최대가 된다.

$x^2 - 2x + k = (x-1)^2 + k - 1$ 이므로 $-1 \leq x \leq 2$ 일

때, $x^2 - 2x + k$ 는 $x=1$ 에서 최솟값 $k-1$, $x=-1$ 에서 최댓값 $k+3$ 을 갖는다.

이때 $f(x)$ 의 최솟값이 -1 이므로

$$\log_3(k-1) = -1, \quad k-1 = 3^{-1}$$

$$\therefore k = \frac{4}{3}$$

따라서 $f(x)$ 의 최댓값은

$$\log_3(k+3) = \log_3 \frac{13}{3}$$

$$\therefore M = \frac{13}{3} \quad \text{답 } \frac{13}{3}$$

265

전략 $\log_2 x = t$ 로 치환하여 주어진 함수를 t 에 대한 이차함수로 변형한다.

$$y = (\log_2 x)^2 + a \log_2 x + 2$$

$$= (\log_2 x)^2 + \frac{a}{2} \log_2 x + 2$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$\begin{aligned} y &= t^2 + \frac{a}{2}t + 2 \\ &= \left(t + \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{16} + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

따라서 $\textcircled{1}$ 이 $x = \frac{1}{4}$, 즉 $t = \log_2 \frac{1}{4} = -2$ 에서 최솟값

b 를 가지므로

$$-\frac{a}{4} = -2, \quad -\frac{a^2}{16} + 2 = b$$

$$\therefore a = 8, \quad b = -2$$

$$\therefore a + b = 6 \quad \text{답 } 6$$

266

전략 $S(x)$ 를 $\log_2 x$ 에 대한 식으로 나타낸다.

$$\overline{AC} = \log_4 \frac{16}{x} = \frac{1}{2} \log_2 \frac{16}{x}$$

$$= \frac{1}{2} (4 - \log_2 x) = 2 - \frac{1}{2} \log_2 x$$

$$\begin{aligned} \therefore S(x) &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \log_2 x \times \left(2 - \frac{1}{2} \log_2 x\right) \\ &= -\frac{1}{2} (\log_2 x)^2 + 2 \log_2 x \\ &= -\frac{1}{2} \{(\log_2 x)^2 - 4 \log_2 x\} \\ &= -\frac{1}{2} (\log_2 x - 2)^2 + 2 \end{aligned}$$

따라서 $S(x)$ 는 $\log_2 x = 2$ 일 때 최댓값 2를 갖는다.

$$\log_2 x = 2 \text{에서} \quad x = 2^2 = 4$$

$$\text{즉 } a = 4, \quad M = 2 \text{이므로} \quad a + M = 6 \quad \text{답 } \textcircled{1}$$

267

전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$x > 1$ 에서 $\log_4 x > 0$, $\log_x 256 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} y &= \log_4 x + \log_x 256 \\ &\geq 2\sqrt{\log_4 x \times \log_x 256} \\ &= 2\sqrt{\log_4 256} = 2\sqrt{4} = 4 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $\log_4 x = \log_x 256$, 즉 $x = 16$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 4이다. 답 4

268

전략 양변에 밑이 2인 로그를 취한다.

$y = 16x^{\log_2 x^3 - 6}$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\begin{aligned} \log_2 y &= \log_2 (16x^{\log_2 x^3 - 6}) \\ &= \log_2 16 + \log_2 x^{\log_2 x^3 - 6} \\ &= 4 + (3 \log_2 x - 6) \log_2 x \\ &= 3(\log_2 x)^2 - 6 \log_2 x + 4 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면 $1 \leq x \leq 4$ 에서

$$\log_2 1 \leq \log_2 x \leq \log_2 4$$

$$\therefore 0 \leq t \leq 2$$

이때 $\textcircled{1}$ 은

$$\log_2 y = 3t^2 - 6t + 4 = 3(t-1)^2 + 1$$

따라서 $0 \leq t \leq 2$ 일 때, $\log_2 y$ 는

$$t=1 \text{에서 최솟값 } 1,$$

$$t=0 \text{ 또는 } t=2 \text{에서 최댓값 } 4$$

를 갖는다.

$\log_2 y = 1$ 에서 $y = 2$, $\log_2 y = 4$ 에서 $y = 2^4 = 16$ 이므로

$$M = 16, m = 2$$

$$\therefore M + m = 18$$

답 18

269

전략 $x^{\log 3} = 3^{\log x}$ 임을 이용하여 식을 정리한다.

$$x^{\log 3} = 3^{\log x} \text{ 이므로}$$

$$y = 3^{\log x} \times x^{\log 3} - 3(3^{\log x} + x^{\log 3}) + 7$$

$$= 3^{\log x} \times 3^{\log x} - 3(3^{\log x} + 3^{\log x}) + 7$$

$$= (3^{\log x})^2 - 6 \times 3^{\log x} + 7$$

$$3^{\log x} = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$y = t^2 - 6t + 7 = (t - 3)^2 - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①은 $t = 3$ 에서 최솟값 -2 를 가지므로 주어진 함수는

$t = 3$, 즉 $3^{\log x} = 3$ 일 때 최솟값 -2 를 갖는다.

$$3^{\log x} = 3 \text{에서}$$

$$\log x = 1 \quad \therefore x = 10$$

따라서 $a = 10$, $b = -2$ 이므로

$$\frac{a}{b} = -5$$

답 -5

03 로그함수의 활용: 방정식

• 본책 111~116쪽

270

(1) $\log_2 x = 3$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$x = 2^3 = 8$$

(2) $\log_{\frac{1}{3}} x = -3$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$$

(3) $\log_5 x = 0$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$x = 5^0 = 1$$

답 (1) $x = 8$ (2) $x = 27$ (3) $x = 1$

271

(1) $\log_2 (3x - 1) = 3$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$3x - 1 = 2^3, \quad 3x = 9$$

$$\therefore x = 3$$

(2) $\log_{\frac{1}{3}} (-x + 6) = -2$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$-x + 6 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \quad \therefore x = -3$$

(3) $\log_3 (x + 2) = 2$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$x + 2 = 3^2 \quad \therefore x = 7$$

(4) $\log_{\frac{1}{2}} (-3x + 4) = -1$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$-3x + 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}, \quad -3x = -2$$

$$\therefore x = \frac{2}{3}$$

(5) $\log_{0.1} (x - 2) = -1$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$x - 2 = 0.1^{-1} \quad \therefore x = 12$$

(6) $\log_{\frac{1}{3}} (-3x + 1) = -1$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$-3x + 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}, \quad -3x = 2$$

$$\therefore x = -\frac{2}{3}$$

답 (1) $x = 3$ (2) $x = -3$ (3) $x = 7$

(4) $x = \frac{2}{3}$ (5) $x = 12$ (6) $x = -\frac{2}{3}$

272

(1) 진수의 조건에서 $2 - x > 0, 2x + 5 > 0$

$$x < 2, x > -\frac{5}{2}$$

$$\therefore -\frac{5}{2} < x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

양변의 밑이 2로 같으므로 $2 - x = 2x + 5$

$$-3x = 3 \quad \therefore x = -1$$

이는 ①을 만족시키므로 구하는 해는

$$x = -1$$

(2) 진수의 조건에서 $-3x + 1 > 0, x + 9 > 0$

$$x < \frac{1}{3}, x > -9$$

$$\therefore -9 < x < \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

양변의 밑이 $\frac{1}{5}$ 로 같으므로

$$-3x + 1 = x + 9, \quad -4x = 8$$

$$\therefore x = -2$$

이는 ①을 만족시키므로 구하는 해는

$$x = -2$$

답 (1) $x = -1$ (2) $x = -2$

273

방정식 $(\log x)^2 - 4 \log x + 3 = 0$ 에서 $\log x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 4 \times t + 3 = 0, \quad (t-1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 3$$

즉 $\log x = 1$ 또는 $\log x = 3$ 이므로

$$x = 10 \text{ 또는 } x = 1000 \quad \text{답 풀이 참조}$$

274

(1) $\log(x^2 + 3x) = 1$ 에서

$$x^2 + 3x = 10, \quad x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$(x+5)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 2$$

(2) 밑의 조건에서 $x-2 > 0, x-2 \neq 1$

$$\therefore 2 < x < 3 \text{ 또는 } x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_{x-2} 4 = 2 \text{에서} \quad (x-2)^2 = 4$$

$$x^2 - 4x = 0, \quad x(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 4$$

그런데 $\textcircled{1}$ 에서 구하는 해는 $x = 4$

(3) 진수의 조건에서 $x > 0, x-10 > 0$

$$\therefore x > 10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log x + \log(x-10) = 2 + \log 2 \text{에서}$$

$$\log x(x-10) = \log 100 + \log 2$$

$$\log(x^2 - 10x) = \log 200$$

$$x^2 - 10x = 200, \quad x^2 - 10x - 200 = 0$$

$$(x+10)(x-20) = 0$$

$$\therefore x = -10 \text{ 또는 } x = 20$$

그런데 $\textcircled{1}$ 에서 구하는 해는 $x = 20$

(4) 진수의 조건에서 $3x+1 > 0, x+1 > 0$

$$\therefore x > -\frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(3x+1) = \log_{\frac{1}{2}}(x+1) \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(3x+1) = \log_{\frac{1}{4}}(x+1)^2$$

$$3x+1 = (x+1)^2, \quad x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

이는 모두 $\textcircled{1}$ 을 만족시키므로 구하는 해는

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

(5) 진수의 조건에서 $x-1 > 0, x+5 > 0$

$$\therefore x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_{\sqrt{3}}(x-1) = \log_3(x+5) + 1 \text{에서}$$

$$\log_3(x-1)^2 = \log_3(x+5) + \log_3 3$$

$$\log_3(x-1)^2 = \log_3\{3(x+5)\}$$

$$(x-1)^2 = 3(x+5)$$

$$x^2 - 5x - 14 = 0, \quad (x+2)(x-7) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 7$$

그런데 $\textcircled{1}$ 에서 구하는 해는 $x = 7$

(6) 진수의 조건에서 $2x-1 > 0, x^2+5 > 0$

$$\therefore x > \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_3(2x-1) = \frac{1}{2} \log_3(x^2+5) \text{에서}$$

$$2 \log_3(2x-1) = \log_3(x^2+5)$$

$$\log_3(2x-1)^2 = \log_3(x^2+5)$$

$$(2x-1)^2 = x^2+5, \quad 3x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$(3x+2)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{2}{3} \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 $\textcircled{1}$ 에서 구하는 해는 $x = 2$

답 (1) $x = -5$ 또는 $x = 2$

$$(2) x = 4$$

$$(3) x = 20$$

$$(4) x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

$$(5) x = 7$$

$$(6) x = 2$$

275

(1) $(\log x)^2 = 3 + \log x^2$ 에서

$$(\log x)^2 - 2 \log x - 3 = 0$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 2t - 3 = 0, \quad (t+1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 3$$

즉 $\log x = -1$ 또는 $\log x = 3$ 이므로

$$x = \frac{1}{10} \text{ 또는 } x = 1000$$

(2) $\log x - \log_x 100 = 1$ 에서

$$\log x - 2 \log_x 10 = 1$$

$$\therefore \log x - \frac{2}{\log x} = 1$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$t - \frac{2}{t} = 1, \quad t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t+1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 2$$

즉 $\log x = -1$ 또는 $\log x = 2$ 이므로

$$x = \frac{1}{10} \text{ 또는 } x = 100$$

(3) $(2 + \log x)^2 + (\log x - 1)^2 = (1 + \log x^2)^2$ 에서

$$(2 + \log x)^2 + (\log x - 1)^2 = (1 + 2 \log x)^2$$

$$2(\log x)^2 + 2 \log x + 5$$

$$= 4(\log x)^2 + 4 \log x + 1$$

$$\therefore (\log x)^2 + \log x - 2 = 0$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + t - 2 = 0, \quad (t+2)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 1$$

즉 $\log x = -2$ 또는 $\log x = 1$ 이므로

$$x = \frac{1}{100} \text{ 또는 } x = 10$$

(4) $\log_2 2x \times \log_2 \frac{x}{2} = 3$ 에서

$$(\log_2 2 + \log_2 x)(\log_2 x - \log_2 2) = 3$$

$$(\log_2 x + 1)(\log_2 x - 1) = 3$$

$$\therefore (\log_2 x)^2 - 4 = 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 4 = 0, \quad (t+2)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 2$$

즉 $\log_2 x = -2$ 또는 $\log_2 x = 2$ 이므로

$$x = \frac{1}{4} \text{ 또는 } x = 4$$

(5) $\log_2 x + \log_8 x = 2 \log_2 x \times \log_8 x$ 에서

$$\log_2 x + \frac{1}{3} \log_2 x = 2 \log_2 x \times \frac{1}{3} \log_2 x$$

$$\frac{4}{3} \log_2 x = \frac{2}{3} \times (\log_2 x)^2$$

$$\therefore (\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x = 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 2t = 0, \quad t(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = 2$$

즉 $\log_2 x = 0$ 또는 $\log_2 x = 2$ 이므로

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

(6) $(\log_3 x)^3 - 4(\log_3 x)^2 + \log_{81} x = 0$ 에서

$$(\log_3 x)^3 - 4\left(\frac{1}{2} \log_3 x\right)^2 + \frac{1}{4} \log_3 x = 0$$

$$\therefore 4(\log_3 x)^3 - 4(\log_3 x)^2 + \log_3 x = 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$4t^3 - 4t^2 + t = 0, \quad t(2t-1)^2 = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = \frac{1}{2}$$

즉 $\log_3 x = 0$ 또는 $\log_3 x = \frac{1}{2}$ 이므로

$$x = 1 \text{ 또는 } x = \sqrt{3}$$

답 (1) $x = \frac{1}{10}$ 또는 $x = 1000$

(2) $x = \frac{1}{10}$ 또는 $x = 100$

(3) $x = \frac{1}{100}$ 또는 $x = 10$

(4) $x = \frac{1}{4}$ 또는 $x = 4$

(5) $x = 1$ 또는 $x = 4$

(6) $x = 1$ 또는 $x = \sqrt{3}$

276

(1) $x^{\log x} = \frac{1000}{x^2}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log x^{\log x} = \log \frac{1000}{x^2}$$

$$\log x \times \log x = 3 - 2 \log x$$

$$\therefore (\log x)^2 + 2 \log x - 3 = 0$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 2t - 3 = 0, \quad (t+3)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 1$$

즉 $\log x = -3$ 또는 $\log x = 1$ 이므로

$$x = \frac{1}{1000} \text{ 또는 } x = 10$$

(2) $2^{\log x} + 2^{2-\log x} = 4$ 에서

$$2^{\log x} + \frac{4}{2^{\log x}} = 4$$

$2^{\log x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t + \frac{4}{t} = 4, \quad t^2 - 4t + 4 = 0$$

$$(t-2)^2 = 0 \quad \therefore t = 2$$

즉 $2^{\log x} = 2$ 이므로

$$\log x = 1 \quad \therefore x = 10$$

$$(3) x^{\log 3} \times 3^{\log x} - 5(x^{\log 3} + 3^{\log x}) + 9 = 0 \text{에서}$$

$$3^{\log x} \times 3^{\log x} - 5(3^{\log x} + 3^{\log x}) + 9 = 0$$

$$\therefore (3^{\log x})^2 - 10 \times 3^{\log x} + 9 = 0$$

$$3^{\log x} = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 10t + 9 = 0, \quad (t-1)(t-9) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=9$$

$$\text{즉 } 3^{\log x} = 1 \text{ 또는 } 3^{\log x} = 9 \text{이므로}$$

$$\log x = 0 \text{ 또는 } \log x = 2$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=100$$

$$\text{답 (1) } x = \frac{1}{1000} \text{ 또는 } x=10 \quad (2) x=10$$

$$(3) x=1 \text{ 또는 } x=100$$

277

$$(1) (\log_2 x)^2 - 4 \log_2 x + 3 = 0 \text{에서 } \log_2 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

방정식 $(\log_2 x)^2 - 4 \log_2 x + 3 = 0$ 의 두 실근이 α, β 이므로 이차방정식 ㉠의 두 근은 $\log_2 \alpha, \log_2 \beta$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 4, \quad \log_2 \alpha \beta = 4$$

$$\therefore \alpha \beta = 16$$

$$(2) \log_2 x - 5 \log_x 2 - 2 = 0 \text{에서}$$

$$\log_2 x - \frac{5}{\log_2 x} - 2 = 0$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면} \quad t - \frac{5}{t} - 2 = 0$$

$$\therefore t^2 - 2t - 5 = 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

방정식 $\log_2 x - 5 \log_x 2 - 2 = 0$ 의 두 실근이 α, β 이므로 이차방정식 ㉡의 두 근은 $\log_2 \alpha, \log_2 \beta$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 2, \quad \log_2 \alpha \beta = 2$$

$$\therefore \alpha \beta = 4$$

$$\text{답 (1) } 16 \quad (2) 4$$

다른 풀이 (1) 이차방정식 ㉠에서

$$(t-1)(t-3) = 0 \quad \therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

따라서 $\log_2 x = 1$ 또는 $\log_2 x = 3$ 이므로

$$x=2 \text{ 또는 } x=8$$

$$\therefore \alpha \beta = 2 \times 8 = 16$$

참고 (2) 이차방정식 ㉡의 두 근은 모두 0이 아닌 실수이므로

$$x=2' > 0, \quad x=2' \neq 1$$

즉 진수와 밑의 조건을 만족시킨다.

278

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (1 + \log_2 a)^2 - (5 \log_2 a - 1) = 0$$

$$\therefore (\log_2 a)^2 - 3 \log_2 a + 2 = 0$$

$\log_2 a = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 3t + 2 = 0, \quad (t-1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=2$$

즉 $\log_2 a = 1$ 또는 $\log_2 a = 2$ 이므로

$$a=2 \text{ 또는 } a=4$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$2 \times 4 = 8$$

답 8

참고 $5 \log_2 a - 1 \neq 0$ 이므로 $\log_2 a \neq \frac{1}{5}$

$$\therefore a \neq \sqrt[5]{2}$$

279

주어진 식에 $a=1.7, l=10$ 을 대입하면

$$1.7 = -2 \log_k \left(1 - \frac{10}{30} \right) - 0.3$$

$$2 = -2 \log_k \frac{2}{3}, \quad -1 = \log_k \frac{2}{3}$$

$$k^{-1} = \frac{2}{3} \quad \therefore k = \frac{3}{2}$$

물고기의 연령이 3.7세일 때의 길이를 x (cm)라 하면

$$3.7 = -2 \log_{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{x}{30} \right) - 0.3$$

$$4 = -2 \log_{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{x}{30} \right)$$

$$-2 = \log_{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{x}{30} \right)$$

$$\left(\frac{3}{2} \right)^{-2} = 1 - \frac{x}{30}, \quad \frac{4}{9} = 1 - \frac{x}{30}$$

$$\frac{x}{30} = \frac{5}{9}$$

$$\therefore x = \frac{50}{3}$$

따라서 연령이 3.7세일 때의 길이는 $\frac{50}{3}$ cm이다.

$$\text{답 } \frac{50}{3} \text{ cm}$$

연습문제

● 본책 117~118쪽

280

전략 $\log f(x) = \log g(x)$ 의 꼴로 변형한 후 진수의 조건을 만족시키는 $f(x) = g(x)$ 의 실근을 구한다.

진수의 조건에서 $x > 0, (4-x)^2 > 0, 14-3x > 0$

$$\therefore 0 < x < 4 \text{ 또는 } 4 < x < \frac{14}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\log x + \log(4-x)^2 = \log(14-3x)$ 에서

$$\log x(4-x)^2 = \log(14-3x)$$

$$x(4-x)^2 = 14-3x$$

$$x^3 - 8x^2 + 19x - 14 = 0$$

$$(x-2)(x^2-6x+7) = 0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=3 \pm \sqrt{2}$$

이는 모두 ①을 만족시키므로 모든 x 의 값의 합은

$$2 + (3 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}) = 8 \quad \text{답 8}$$

281

전략 먼저 주어진 근을 대입하여 k 의 값을 구한다.

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x^4 + k = 0 \text{에서}$$

$$(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x + k = 0$$

이 방정식의 한 근이 2이므로 $x=2$ 를 대입하면

$$1 - 4 + k = 0 \quad \therefore k = 3$$

따라서 $(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x + 3 = 0$ 이므로 $\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 4t + 3 = 0, \quad (t-1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

즉 $\log_2 x = 1$ 또는 $\log_2 x = 3$ 이므로

$$x=2 \text{ 또는 } x=8$$

따라서 나머지 한 근은 8이다. 답 8

282

전략 $\log_2 x = X, \log_2 y = Y$ 로 치환하여 연립방정식의 해를 구한다.

$$\begin{cases} \log_2 x^2 - 2\log_2 y = 3 \\ \log_2 x^3 + \log_2 y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{에서}$$

$$\begin{cases} 2\log_2 x - 2\log_2 y = 3 \\ 3\log_2 x + \log_2 y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\log_2 x = X, \log_2 y = Y$ 로 놓으면

$$\begin{cases} 2X - 2Y = 3 \\ 3X + Y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \therefore X = \frac{1}{2}, Y = -1$$

따라서 $\log_2 x = \frac{1}{2}, \log_2 y = -1$ 이므로

$$x = \sqrt{2}, y = \frac{1}{2}$$

즉 $\alpha = \sqrt{2}, \beta = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{(\sqrt{2})^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 8 \quad \text{답 8}$$

283

전략 $x^{\log 5} = 5^{\log x}$ 임을 이용한다.

$$5^{\log x} \times x^{\log 5} - 6 \times 5^{\log x} + 5 = 0 \text{에서}$$

$$5^{\log x} \times 5^{\log x} - 6 \times 5^{\log x} + 5 = 0$$

$$\therefore (5^{\log x})^2 - 6 \times 5^{\log x} + 5 = 0$$

$5^{\log x} = t \ (t > 0)$ 로 놓으면

$$t^2 - 6t + 5 = 0, \quad (t-1)(t-5) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=5$$

즉 $5^{\log x} = 1$ 또는 $5^{\log x} = 5$ 이므로

$$\log x = 0 \text{ 또는 } \log x = 1$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=10$$

따라서 구하는 합은 $1 + 10 = 11$ 답 11

284

전략 $\log x = t$ 로 치환하여 t 에 대한 이차방정식으로 변형한 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

$(\log x)^2 - k \log x - 2 = 0$ 에서 $\log x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - kt - 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

방정식 $(\log x)^2 - k \log x - 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 방정식 ①의 두 근은 $\log \alpha, \log \beta$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} k &= \log \alpha + \log \beta \\ &= \log \alpha \beta = 1 \quad (\because \alpha \beta = 10) \end{aligned} \quad \text{답 1}$$

285

전략 로그의 성질을 이용하여 좌변을 $\log_3 x$ 에 대한 식으로 변형한다.

$$\log_3 3x \times \log_3 9x - 1 = 0 \text{에서}$$

$$(1 + \log_3 x)(2 + \log_3 x) - 1 = 0$$

$$\therefore (\log_3 x)^2 + 3\log_3 x + 1 = 0$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 + 3t + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

방정식 $\log_3 3x \times \log_3 9x - 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식 $\textcircled{7}$ 의 두 근은 $\log_3 \alpha, \log_3 \beta$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_3 \alpha + \log_3 \beta = -3$$

$$\log_3 \alpha \beta = -3 \quad \therefore \alpha \beta = \frac{1}{27} \quad \text{답 } \frac{1}{27}$$

참고 이차방정식 $\textcircled{7}$ 은 서로 다른 두 실근을 가지므로

$$x = 3^t > 0$$

따라서 진수의 조건을 만족시킨다.

286

전략 로그의 정의를 이용한다.

$$\text{밑의 조건에서 } k > 0, k \neq 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$\log_3 \{\log_2 (\log_k x)\} = 0$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$\log_2 (\log_k x) = 3^0 = 1$$

$$\log_k x = 2^1 = 2$$

$$\therefore x = k^2$$

이때 방정식의 해가 $x = 49$ 이므로

$$k^2 = 49 \quad \therefore k = 7 (\because \textcircled{7}) \quad \text{답 } 7$$

287

전략 밑이 같은 경우와 진수가 1인 경우의 해를 각각 구한다.

밑과 진수의 조건에서

$$x + 9 > 0, x + 9 \neq 1,$$

$$x^2 - 2x + 5 > 0, x^2 - 2x + 5 \neq 1, x - 1 > 0$$

$$\therefore x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log_{x+9} (x-1) = \log_{x^2-2x+5} (x-1) \text{에서}$$

$$x + 9 = x^2 - 2x + 5 \text{ 또는 } x - 1 = 1$$

$$(i) x + 9 = x^2 - 2x + 5 \text{에서}$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0, (x+1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 4$$

$$\text{그런데 } \textcircled{7} \text{에서 } x = 4$$

$$(ii) x - 1 = 1 \text{에서 } x = 2$$

$$\text{이는 } \textcircled{7} \text{을 만족시키므로 } x = 2$$

$$(i), (ii) \text{에서 } x = 2 \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 방정식의 모든 근의 합은

$$2 + 4 = 6 \quad \text{답 } 6$$

$$\text{참고 } x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 \geq 4 \text{이므로}$$

$\log_{x^2-2x+5} (x-1)$ 에서 밑의 조건은 항상 성립한다.

288

전략 양변에 상용로그를 취하여 $\log x$ 에 대한 식으로 변형한다.

$$x^{\log_{0.1} x} = \frac{1}{1000x^2} \text{의 양변에 상용로그를 취하면}$$

$$\log x^{\log_{0.1} x} = \log \frac{1}{1000x^2}$$

$$\log_{0.1} x \times \log x = -\log 1000x^2$$

$$-\log x \times \log x = -(3 + 2\log x)$$

$$\therefore (\log x)^2 - 2\log x - 3 = 0$$

$$\log x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t+1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 3$$

$$\text{즉 } \log x = -1 \text{ 또는 } \log x = 3 \text{이므로}$$

$$x = \frac{1}{10} \text{ 또는 } x = 1000$$

$$\therefore \alpha \beta = \frac{1}{10} \times 1000 = 100 \quad \text{답 } 100$$

289

전략 주어진 두 방정식에서 각각 $\log x$ 를 한 문자로 치환한 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

$$(\log x)^2 - 6\log x - 2 = 0 \text{에서 } \log x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 6t - 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\text{방정식 } (\log x)^2 - 6\log x - 2 = 0 \text{의 두 근이 } \alpha, \beta \text{이}$$

므로 방정식 $\textcircled{7}$ 의 두 근은 $\log \alpha, \log \beta$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log \alpha + \log \beta = 6, \log \alpha \times \log \beta = -2$$

한편 $(\log x)^2 - p\log x + q = 0$ 에서 $\log x = k$ 로 놓으면

$$k^2 - pk + q = 0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\text{방정식 } (\log x)^2 - p\log x + q = 0 \text{의 두 근이 } \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$$

$$\text{이므로 방정식 } \textcircled{8} \text{의 두 근은 } \log \frac{1}{\alpha}, \log \frac{1}{\beta}, \text{ 즉}$$

$$-\log \alpha, -\log \beta \text{이다.}$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} p &= -\log \alpha - \log \beta = -(\log \alpha + \log \beta) = -6, \\ q &= -\log \alpha \times (-\log \beta) = \log \alpha \times \log \beta = -2 \\ \therefore p - q &= -4 \end{aligned}$$

답 -4

290

전략 진수의 조건을 만족시키는 x 의 값의 범위에서 주어진 방정식이 해를 갖도록 하는 a 의 값의 범위를 구한다.

진수의 조건에서

$$\begin{aligned} x+2 > 0, 4-x > 0, a > 0 \\ \therefore -2 < x < 4, a > 0 \end{aligned} \quad \text{..... ㉠}$$

$$\log_2(x+2) + \log_2(4-x) = \log_2 a \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \log_2(x+2)(4-x) &= \log_2 a \\ \therefore \log_2(-x^2+2x+8) &= \log_2 a \end{aligned}$$

따라서 $-x^2+2x+8=a$ 이므로

$$x^2-2x+a-8=0 \quad \text{..... ㉡}$$

$y=x^2-2x+a-8=(x-1)^2+a-9$ 라 하면 이 이차함수는 $-2 < x < 4$ 일 때 $x=1$ 에서 최솟값 $a-9$ 를 갖는다.

이때 $x=-2$ 또는 $x=4$ 에서 $y=a > 0$ 이므로 $-2 < x < 4$ 에서 방정식 ㉡의 해가 존재하려면

$$a-9 \leq 0 \quad \therefore 0 < a \leq 9 \quad (\because \text{㉠})$$

즉 정수 a 는 1, 2, ..., 9의 9개이다.

답 9

291

전략 양변에 밑이 5인 로그를 취하여 $\log_5 x$ 에 대한 식으로 변형한다.

$$\left(\frac{x}{4}\right)^{\log_5 4} - \left(\frac{x}{3}\right)^{\log_5 3} = 0, \text{ 즉 } \left(\frac{x}{4}\right)^{\log_5 4} = \left(\frac{x}{3}\right)^{\log_5 3} \text{의 양변}$$

에 밑이 5인 로그를 취하면

$$\begin{aligned} \log_5 \left(\frac{x}{4}\right)^{\log_5 4} &= \log_5 \left(\frac{x}{3}\right)^{\log_5 3} \\ \log_5 4 \times (\log_5 x - \log_5 4) &= \log_5 3 \times (\log_5 x - \log_5 3) \\ &= \log_5 3 \times (\log_5 x - \log_5 3) \\ \log_5 4 \times \log_5 x - (\log_5 4)^2 &= \log_5 3 \times \log_5 x - (\log_5 3)^2 \\ (\log_5 4 - \log_5 3) \log_5 x &= (\log_5 4)^2 - (\log_5 3)^2 \\ \log_5 x &= \frac{(\log_5 4 + \log_5 3)(\log_5 4 - \log_5 3)}{\log_5 4 - \log_5 3} \\ &= \log_5 4 + \log_5 3 = \log_5 12 \\ \therefore x &= 12 \end{aligned}$$

답 $x=12$

292

전략 정수 시설을 10번 가동하였을 때의 물속의 불순물의 양을 x 에 대한 식으로 나타낸다.

정수 시설을 1번 가동하면 불순물의 양의 $x\%$ 가 제거되므로 남은 불순물의 양은 가동하기 전의 불순물의 양의 $1 - \frac{x}{100}$ 이다.

정수 시설을 10번 가동하였더니 물속의 불순물의 양이 처음 불순물의 양의 10% 가 되었으므로

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{x}{100}\right)^{10} &= \frac{10}{100} \\ \therefore \left(\frac{100-x}{100}\right)^{10} &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{100-x}{100}\right)^{10} &= \log \frac{1}{10} \\ 10 \log \frac{100-x}{100} &= -1 \\ 10\{\log(100-x) - 2\} &= -1 \\ \log(100-x) - 2 &= -\frac{1}{10} \\ \therefore \log(100-x) &= \frac{19}{10} = 1.9 \end{aligned}$$

이때 $\log 80 = 1.9$ 이므로

$$\begin{aligned} 100-x &= 80 \\ \therefore x &= 20 \end{aligned}$$

답 20

04 로그함수의 활용: 부등식

• 본책 119~125쪽

293

$$(1) \text{ 진수의 조건에서 } x > 0 \quad \text{..... ㉠}$$

$$\begin{aligned} \log_2 x < 3 \text{에서 } \log_2 x &< \log_2 8 \\ \text{밑이 1보다 크므로 } x &< 8 \end{aligned} \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 구하는 해는 } 0 < x < 8$$

$$(2) \text{ 진수의 조건에서 } x > 0 \quad \text{..... ㉢}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x \geq 2 \text{에서 } \log_{\frac{1}{3}} x \geq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$x \leq \frac{1}{9} \quad \text{..... ㉣}$$

$$\text{㉢, ㉣에서 구하는 해는 } 0 < x \leq \frac{1}{9}$$

(3) 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$\log_5 x > 0 \text{에서 } \log_5 x > \log_5 1$$

밑이 1보다 크므로 $x > 1$ ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 해는 $x > 1$

$$\text{답 (1) } 0 < x < 8 \quad (2) 0 < x \leq \frac{1}{9} \quad (3) x > 1$$

294

(1) 진수의 조건에서

$$x-1 > 0, -5x+11 > 0$$

$$\therefore 1 < x < \frac{11}{5} \quad \text{..... ㉠}$$

$\log_2(x-1) \geq \log_2(-5x+11)$ 에서 밑이 1보다 크므로

$$x-1 \geq -5x+11, \quad 6x \geq 12$$

$$\therefore x \geq 2 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서 구하는 해는 $2 \leq x < \frac{11}{5}$

(2) 진수의 조건에서

$$2x-5 > 0, x-3 > 0$$

$$\therefore x > 3 \quad \text{..... ㉢}$$

$\log_{\frac{1}{3}}(2x-5) < \log_{\frac{1}{3}}(x-3)$ 에서 밑이 1보다 작은 양수이므로

$$2x-5 > x-3$$

$$\therefore x > 2 \quad \text{..... ㉣}$$

㉢, ㉣에서 구하는 해는 $x > 3$

$$\text{답 (1) } 2 \leq x < \frac{11}{5} \quad (2) x > 3$$

295

(1) 진수의 조건에서 $2x-4 > 0$

$$\therefore x > 2 \quad \text{..... ㉠}$$

$\log_2(2x-4) \leq 3$ 에서

$$\log_2(2x-4) \leq \log_2 8$$

밑이 1보다 크므로

$$2x-4 \leq 8, \quad 2x \leq 12$$

$$\therefore x \leq 6 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서 구하는 해는 $2 < x \leq 6$

(2) 진수의 조건에서 $3-x > 0$

$$\therefore x < 3 \quad \text{..... ㉢}$$

$\log_{\frac{1}{3}}(3-x) \geq 1$ 에서

$$\log_{\frac{1}{3}}(3-x) \geq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$$

밑이 1보다 작은 양수이므로 $3-x \leq \frac{1}{3}$

$$\therefore x \geq \frac{8}{3} \quad \text{..... ㉣}$$

㉢, ㉣에서 구하는 해는 $\frac{8}{3} \leq x < 3$

$$\text{답 (1) } 2 < x \leq 6 \quad (2) \frac{8}{3} \leq x < 3$$

296

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

부등식 $(\log_2 x)^2 + \log_2 x - 2 \leq 0$ 에서 $\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + t - 2 \leq 0, \quad (t+2)(t-1) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq t \leq 1$$

즉 $-2 \leq \log_2 x \leq 1$ 이므로

$$\log_2 2^{-2} \leq \log_2 x \leq \log_2 2$$

밑이 1보다 크므로

$$\frac{1}{4} \leq x \leq 2 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서 구하는 해는

$$\frac{1}{4} \leq x \leq 2$$

답 풀이 참조

297

(1) 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$-1 < \log_{\frac{1}{2}} x \leq 2$ 에서

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} < \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$\frac{1}{4} \leq x < 2 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서 구하는 해는 $\frac{1}{4} \leq x < 2$

(2) 진수의 조건에서 $x-5 > 0, x-6 > 0$

$$\therefore x > 6 \quad \text{..... ㉢}$$

$\log_{\frac{1}{2}}(x-5) + \log_{\frac{1}{2}}(x-6) > -1$ 에서

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-5)(x-6) > \log_{\frac{1}{2}} 2$$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$(x-5)(x-6) < 2$$

$$x^2 - 11x + 28 < 0$$

$$(x-4)(x-7) < 0$$

$$\therefore 4 < x < 7 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡에서 구하는 해는 $6 < x < 7$

(3) 진수의 조건에서 $x-3 > 0, x-5 > 0$

$$\therefore x > 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$\log_{0.5}(x-3) \geq 2 \log_{0.5}(x-5)$ 에서

$$\log_{0.5}(x-3) \geq \log_{0.5}(x-5)^2$$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$x-3 \leq (x-5)^2$$

$$x^2 - 11x + 28 \geq 0, \quad (x-4)(x-7) \geq 0$$

$$\therefore x \leq 4 \text{ 또는 } x \geq 7 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡에서 구하는 해는 $x \geq 7$

(4) 진수의 조건에서 $11-x > 0, x > 0$

$$\therefore 0 < x < 11 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$\log(11-x) + \log x < 1$ 에서

$$\log x(11-x) < \log 10$$

밑이 1보다 크므로

$$x(11-x) < 10$$

$$x^2 - 11x + 10 > 0, \quad (x-1)(x-10) > 0$$

$$\therefore x < 1 \text{ 또는 } x > 10 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡에서 구하는 해는

$$0 < x < 1 \text{ 또는 } 10 < x < 11$$

(5) 진수의 조건에서 $x-1 > 0, 2x+6 > 0$

$$\therefore x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$\log_{\frac{1}{3}}(x-1) > \log_{\frac{1}{9}}(2x+6)$ 에서

$$\log_{\frac{1}{9}}(x-1)^2 > \log_{\frac{1}{9}}(2x+6)$$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$(x-1)^2 < 2x+6$$

$$x^2 - 4x - 5 < 0$$

$$(x+1)(x-5) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 5 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡에서 구하는 해는 $1 < x < 5$

(6) 진수의 조건에서

$$x+1 > 0, 2x-1 > 0, x-1 > 0$$

$$\therefore x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$\log_2(x+1) - \log_4(2x-1) \geq \log_4(x-1)$ 에서

$$\log_2(x+1) \geq \log_4(x-1) + \log_4(2x-1)$$

$$\therefore \log_4(x+1)^2 \geq \log_4(x-1)(2x-1)$$

밑이 1보다 크므로

$$(x+1)^2 \geq (x-1)(2x-1)$$

$$x^2 - 5x \leq 0, \quad x(x-5) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 5 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡에서 구하는 해는 $1 < x \leq 5$

$$\text{답 (1) } \frac{1}{4} \leq x < 2 \quad (2) 6 < x < 7 \quad (3) x \geq 7$$

$$(4) 0 < x < 1 \text{ 또는 } 10 < x < 11$$

$$(5) 1 < x < 5 \quad (6) 1 < x \leq 5$$

298

(i) 부등식 $\log_5 x > \log_5 8$ 의 진수의 조건에서

$$x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

밑이 1보다 크므로

$$x > 8 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡에서 부등식 $\log_5 x > \log_5 8$ 의 해는

$$x > 8$$

(ii) 부등식 $\log_2 x + \log_2(x-4) \leq \log_2(x+5) + 2$ 의 진수의 조건에서

$$x > 0, x-4 > 0, x+5 > 0$$

$$\therefore x > 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$\log_2 x + \log_2(x-4) \leq \log_2(x+5) + 2$ 에서

$$\log_2 x(x-4) \leq \log_2(x+5) + \log_2 4$$

$$\therefore \log_2 x(x-4) \leq \log_2 \{4(x+5)\}$$

밑이 1보다 크므로 $x(x-4) \leq 4(x+5)$

$$x^2 - 8x - 20 \leq 0$$

$$(x+2)(x-10) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 10 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 부등식

$\log_2 x + \log_2(x-4) \leq \log_2(x+5) + 2$ 의 해는

$$4 < x \leq 10$$

(i), (ii)에서 구하는 해는 $8 < x \leq 10$

$$\text{답 } 8 < x \leq 10$$

299

(1) 진수의 조건에서 $\log_2 x - 1 > 0, x > 0$

$\log_2 x > 1$, 즉 $\log_2 x > \log_2 2$ 에서 밑이 1보다 크므로 $x > 2$

$$\therefore x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$\log_4 (\log_2 x - 1) \leq 1$ 에서

$$\log_4 (\log_2 x - 1) \leq \log_4 4$$

밑이 1보다 크므로 $\log_2 x - 1 \leq 4$

$$\log_2 x \leq 5$$

$$\therefore \log_2 x \leq \log_2 32$$

밑이 1보다 크므로 $x \leq 32 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 구하는 해는 $2 < x \leq 32$

(2) 진수의 조건에서 $\log_3 x > 0, x > 0$

$\log_3 x > 0$, 즉 $\log_3 x > \log_3 1$ 에서 밑이 1보다 크므로 $x > 1$

$$\therefore x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$\log_{\frac{1}{2}} (\log_3 x) \geq -1$ 에서

$$\log_{\frac{1}{2}} (\log_3 x) \geq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

밑이 1보다 작은 양수이므로 $\log_3 x \leq 2$

$$\therefore \log_3 x \leq \log_3 9$$

밑이 1보다 크므로 $x \leq 9 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$

$\textcircled{㉢}, \textcircled{㉣}$ 에서 구하는 해는 $1 < x \leq 9$

$$\textcircled{㉠} \textcircled{㉡} (1) 2 < x \leq 32 \quad (2) 1 < x \leq 9$$

300

(1) 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$

$2(\log_3 x)^2 + 5\log_3 x - 3 < 0$ 에서 $\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$2t^2 + 5t - 3 < 0, \quad (t+3)(2t-1) < 0$$

$$\therefore -3 < t < \frac{1}{2}$$

즉 $-3 < \log_3 x < \frac{1}{2}$ 이므로

$$\log_3 3^{-3} < \log_3 x < \log_3 3^{\frac{1}{2}}$$

밑이 1보다 크므로

$$\frac{1}{27} < x < \sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 구하는 해는 $\frac{1}{27} < x < \sqrt{3}$

(2) 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$

$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x - 12 > 0$ 에서 $\log_{\frac{1}{2}} x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - t - 12 > 0, \quad (t+3)(t-4) > 0$$

$$\therefore t < -3 \text{ 또는 } t > 4$$

즉 $\log_{\frac{1}{2}} x < -3$ 또는 $\log_{\frac{1}{2}} x > 4$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \text{ 또는}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$x > 8 \text{ 또는 } x < \frac{1}{16} \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

$\textcircled{㉢}, \textcircled{㉣}$ 에서 구하는 해는

$$0 < x < \frac{1}{16} \text{ 또는 } x > 8$$

(3) 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉤}$

$\log_{\frac{1}{3}} x \times \log_{\frac{1}{3}} 9x \leq 3$ 에서

$$\log_{\frac{1}{3}} x \times (\log_{\frac{1}{3}} 9 + \log_{\frac{1}{3}} x) \leq 3$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x \times (-2 + \log_{\frac{1}{3}} x) \leq 3$$

$$\therefore (\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - 2\log_{\frac{1}{3}} x - 3 \leq 0$$

$\log_{\frac{1}{3}} x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 2t - 3 \leq 0, \quad (t+1)(t-3) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq t \leq 3$$

즉 $-1 \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq 3$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$\frac{1}{27} \leq x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉥}$$

$\textcircled{㉤}, \textcircled{㉥}$ 에서 구하는 해는 $\frac{1}{27} \leq x \leq 3$

(4) 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉦}$

$\log_2 8x^2 \times \log_{\frac{1}{2}} \frac{4}{x} \geq 9$ 에서

$$\log_2 8x^2 \times \log_2 \frac{x}{4} \geq 9$$

$$(3 + 2\log_2 x)(\log_2 x - 2) \geq 9$$

$$\therefore 2(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 15 \geq 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$2t^2 - t - 15 \geq 0, \quad (2t+5)(t-3) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -\frac{5}{2} \text{ 또는 } t \geq 3$$

즉 $\log_2 x \leq -\frac{5}{2}$ 또는 $\log_2 x \geq 3$ 이므로

$$\log_2 x \leq \log_2 2^{-\frac{5}{2}} \text{ 또는 } \log_2 x \geq \log_2 2^3$$

밑이 1보다 크므로

$$x \leq \frac{\sqrt{2}}{8} \text{ 또는 } x \geq 8 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡에서 구하는 해는

$$0 < x \leq \frac{\sqrt{2}}{8} \text{ 또는 } x \geq 8$$

답 (1) $\frac{1}{27} < x < \sqrt{3}$

(2) $0 < x < \frac{1}{16}$ 또는 $x > 8$

(3) $\frac{1}{27} \leq x \leq 3$

(4) $0 < x \leq \frac{\sqrt{2}}{8}$ 또는 $x \geq 8$

301

(1) 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$x^{\log_3 x} < 9x$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 x^{\log_3 x} < \log_3 9x$$

$$\log_3 x \times \log_3 x < 2 + \log_3 x$$

$$\therefore (\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 < 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - t - 2 < 0, \quad (t+1)(t-2) < 0$$

$$\therefore -1 < t < 2$$

즉 $-1 < \log_3 x < 2$ 이므로

$$\log_3 3^{-1} < \log_3 x < \log_3 3^2$$

밑이 1보다 크므로

$$\frac{1}{3} < x < 9 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡에서 구하는 해는 $\frac{1}{3} < x < 9$

(2) 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$\left(\frac{1}{2}x\right)^{\log_{\frac{1}{2}} x - 2} \geq \frac{1}{16}$ 의 양변에 밑이 $\frac{1}{2}$ 인 로그를 취

하면 $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}x\right)^{\log_{\frac{1}{2}} x - 2} \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$

$$(\log_{\frac{1}{2}} x - 2) \times \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} x \leq 4$$

$$(\log_{\frac{1}{2}} x - 2)(1 + \log_{\frac{1}{2}} x) \leq 4$$

$$\therefore (\log_{\frac{1}{2}} x)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x - 6 \leq 0$$

$\log_{\frac{1}{2}} x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - t - 6 \leq 0, \quad (t+2)(t-3) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq t \leq 3$$

즉 $-2 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq 3$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$\frac{1}{8} \leq x \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡에서 구하는 해는 $\frac{1}{8} \leq x \leq 4$

답 (1) $\frac{1}{3} < x < 9$ (2) $\frac{1}{8} \leq x \leq 4$

다른 풀이 (2) $\left(\frac{1}{2}x\right)^{\log_{\frac{1}{2}} x - 2} \geq \frac{1}{16}$ 에서

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^{-\log_2 x - 2} \geq \frac{1}{16}$$

양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 \left(\frac{1}{2}x\right)^{-\log_2 x - 2} \geq \log_2 \frac{1}{16}$$

$$(-\log_2 x - 2) \times \log_2 \frac{1}{2} x \geq -4$$

$$(-\log_2 x - 2)(-1 + \log_2 x) \geq -4$$

$$\therefore (\log_2 x)^2 + \log_2 x - 6 \leq 0$$

$\log_2 x = k$ 로 놓으면

$$k^2 + k - 6 \leq 0, \quad (k+3)(k-2) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq k \leq 2$$

즉 $-3 \leq \log_2 x \leq 2$ 이므로

$$\log_2 2^{-3} \leq \log_2 x \leq \log_2 2^2$$

밑이 1보다 크므로

$$\frac{1}{8} \leq x \leq 4$$

302

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$2^{\log_5 x} \times x^{\log_5 2} \geq 10 \times 2^{\log_5 x} - 16$ 에서

$$2^{\log_5 x} \times 2^{\log_5 x} \geq 10 \times 2^{\log_5 x} - 16$$

$$\therefore (2^{\log_5 x})^2 - 10 \times 2^{\log_5 x} + 16 \geq 0$$

$2^{\log_5 x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 10t + 16 \geq 0$$

$$(t-2)(t-8) \geq 0$$

$$\therefore 0 < t \leq 2 \text{ 또는 } t \geq 8 \quad (\because t > 0)$$

즉 $0 < 2^{\log_5 x} \leq 2$ 또는 $2^{\log_5 x} \geq 8$ 이므로

$$0 < 2^{\log_5 x} \leq 2^1 \text{ 또는 } 2^{\log_5 x} \geq 2^3$$

밑이 1보다 크므로

$$\log_5 x \leq 1 \text{ 또는 } \log_5 x \geq 3$$

$$\therefore \log_5 x \leq \log_5 5 \text{ 또는 } \log_5 x \geq \log_5 125$$

밑이 1보다 크므로

$$x \leq 5 \text{ 또는 } x \geq 125 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡에서 구하는 해는

$$0 < x \leq 5 \text{ 또는 } x \geq 125$$

$$\text{답 } 0 < x \leq 5 \text{ 또는 } x \geq 125$$

303

$(\log_2 x)^2 \geq \log_2 \frac{x^4}{a}$ 에서

$$(\log_2 x)^2 \geq 4 \log_2 x - \log_2 a$$

$$\therefore (\log_2 x)^2 - 4 \log_2 x + \log_2 a \geq 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 4t + \log_2 a \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

모든 실수 t 에 대하여 부등식 ㉠이 성립해야 하므로 이

차방정식 $t^2 - 4t + \log_2 a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - \log_2 a \leq 0$$

$$\log_2 a \geq 4 \quad \therefore \log_2 a \geq \log_2 16$$

밑이 1보다 크므로 $a \geq 16$

따라서 양수 a 의 최솟값은 16이다.

답 16

304

이차방정식 $x^2 - 2(1 - \log_2 a)x - 3(\log_2 a - 1) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (1 - \log_2 a)^2 - \{-3(\log_2 a - 1)\} < 0$$

$$\therefore (\log_2 a)^2 + \log_2 a - 2 < 0$$

$\log_2 a = t$ 로 놓으면

$$t^2 + t - 2 < 0, \quad (t+2)(t-1) < 0$$

$$\therefore -2 < t < 1$$

즉 $-2 < \log_2 a < 1$ 이므로

$$\log_2 2^{-2} < \log_2 a < \log_2 2^1$$

밑이 1보다 크므로

$$\frac{1}{4} < a < 2$$

$$\text{답 } \frac{1}{4} < a < 2$$

305

화학 물질 500 kg이 바다로 유입되었을 때, n 년 후에 바닷속에 남은 화학 물질의 양이 5 kg 이하가 된다고 하면

$$500 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{50}} \leq 5 \quad \therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{50}} \leq \frac{1}{100}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\frac{n}{50} \log \frac{1}{3} \leq \log \frac{1}{100}$$

$$-\frac{n}{50} \log 3 \leq -2$$

$$n \log 3 \geq 100$$

$$\therefore n \geq \frac{100}{\log 3}$$

$$= \frac{100}{0.4771} = 209. \times \times \times$$

따라서 바닷속에 남은 화학 물질의 양이 5 kg 이하가 되려면 최소 210년이 지나야 하므로

$$m = 210$$

답 210

306

폐수 처리 기계를 1번 통과하면 오염 물질의 10 %가 제거되므로 남은 오염 물질의 양은 처음 오염 물질의 양의 $\frac{9}{10}$ 이다.

따라서 폐수 처리 기계를 n 번 통과한 후 남은 오염 물질의 양은 처음 오염 물질의 양의 $\left(\frac{9}{10}\right)^n$ 이고, 오염

물질의 양을 처음의 $\frac{2}{100}$ 이하로 줄여야 하므로

$$\left(\frac{9}{10}\right)^n \leq \frac{2}{100}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$n \log \frac{9}{10} \leq \log \frac{2}{100}$$

$$n(2 \log 3 - 1) \leq \log 2 - 2$$

$$\therefore n \geq \frac{\log 2 - 2}{2 \log 3 - 1} \quad \leftarrow 2 \log 3 - 1 < 0$$

$$= \frac{0.3010 - 2}{2 \times 0.4771 - 1}$$

$$= \frac{-1.699}{-0.0458} = 37. \times \times \times$$

따라서 폐수 처리 기계를 최소 38번 통과시켜야 한다.

답 ③



연습문제

● 본책 126~127쪽

307

전략 로그부등식의 해를 구한 후 정수인 해의 개수가 3일 조건을 생각한다.

$$\text{진수의 조건에서} \quad x+2>0, \frac{1}{3}x+k>0$$

$$x>-2, x>-3k$$

$$\therefore x>-2 \quad (\because k \text{는 자연수}) \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\log_2(x+2) \leq \log_2\left(\frac{1}{3}x+k\right) \text{에서 밑이 1보다 크므로}$$

$$x+2 \leq \frac{1}{3}x+k, \quad \frac{2}{3}x \leq k-2$$

$$\therefore x \leq \frac{3}{2}k-3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 부등식의 해는

$$-2 < x \leq \frac{3}{2}k-3$$

이를 만족시키는 정수 x 가 $-1, 0, 1$ 의 3개이어야 하므로

$$1 \leq \frac{3}{2}k-3 < 2, \quad 4 \leq \frac{3}{2}k < 5$$

$$\therefore \frac{8}{3} \leq k < \frac{10}{3}$$

따라서 자연수 k 의 값은 3이다.

답 3

308

전략 진수의 조건과 밑의 조건을 만족시키는 x 의 값의 범위를 먼저 구한다.

$$\text{진수의 조건에서} \quad 2x^2-11x+14>0$$

$$(x-2)(2x-7)>0$$

$$\therefore x<2 \text{ 또는 } x>\frac{7}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\text{밑의 조건에서} \quad x-2>0, x-2 \neq 1$$

$$\therefore x>2, x \neq 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서} \quad x>\frac{7}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\log_{x-2}(2x^2-11x+14) < 2 \text{에서}$$

$$\log_{x-2}(2x^2-11x+14) < \log_{x-2}(x-2)^2$$

㉢에서 $x-2>1$ 이므로

$$2x^2-11x+14 < (x-2)^2$$

$$x^2-7x+10 < 0, \quad (x-2)(x-5) < 0$$

$$\therefore 2 < x < 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

㉣, ㉢에서 구하는 해는

$$\frac{7}{2} < x < 5$$

답 $\frac{7}{2} < x < 5$

309

전략 밑이 같은 부등식은 진수에 대한 부등식을 세워 풀고, $\log_2 x$ 가 반복되는 부등식은 치환하여 푼다.

(i) $2\log_{\frac{1}{2}}(x-5) > \log_{\frac{1}{2}}(x+7)$ 의 진수의 조건에서

$$x-5>0, x+7>0$$

$$\therefore x>5 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$2\log_{\frac{1}{2}}(x-5) > \log_{\frac{1}{2}}(x+7) \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-5)^2 > \log_{\frac{1}{2}}(x+7)$$

밑이 1보다 작은 양수이므로

$$(x-5)^2 < x+7, \quad x^2-11x+18 < 0$$

$$(x-2)(x-9) < 0$$

$$\therefore 2 < x < 9 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서} \quad 5 < x < 9$$

(ii) $\left(\log_2 \frac{x}{2}\right)^2 - \log_2 x^2 + 2 < 0$ 의 진수의 조건에서

$$\frac{x}{2} > 0, x^2 > 0$$

$$\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\left(\log_2 \frac{x}{2}\right)^2 - \log_2 x^2 + 2 < 0 \text{에서}$$

$$(\log_2 x - 1)^2 - 2\log_2 x + 2 < 0$$

$$\therefore (\log_2 x)^2 - 4\log_2 x + 3 < 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 4t + 3 < 0, \quad (t-1)(t-3) < 0$$

$$\therefore 1 < t < 3$$

즉 $1 < \log_2 x < 3$ 이므로

$$\log_2 2^1 < \log_2 x < \log_2 2^3$$

$$\text{밑이 1보다 크므로} \quad 2 < x < 8 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉢}, \textcircled{㉣} \text{에서} \quad 2 < x < 8$$

(i), (ii)에서 연립부등식의 해는 $5 < x < 8$

따라서 $a=5, \beta=8$ 이므로

$$a\beta=40$$

답 40

310

전략 로그의 성질을 이용하여 부등식의 좌변을 $\log_2 x$ 에 대한 식으로 변형한다.

I -4

로그 함수

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$\log_{\frac{1}{2}} 8x \times \log_2 \frac{x}{2} > -5 \text{에서}$$

$$-\log_2 8x \times \log_2 \frac{x}{2} > -5$$

$$(3 + \log_2 x)(\log_2 x - 1) < 5$$

$$\therefore (\log_2 x)^2 + 2\log_2 x - 8 < 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 2t - 8 < 0$$

$$(t+4)(t-2) < 0$$

$$\therefore -4 < t < 2$$

즉 $-4 < \log_2 x < 2$ 이므로

$$\log_2 2^{-4} < \log_2 x < \log_2 2^2$$

밑이 1보다 크므로

$$\frac{1}{16} < x < 4 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서 주어진 부등식의 해는

$$\frac{1}{16} < x < 4$$

따라서 $\alpha = \frac{1}{16}$, $\beta = 4$ 이므로

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{4}{\frac{1}{16}} = 64 \quad \text{답 64}$$

311

전략 $\log_3 x = t$ 로 치환한 후 t 에 대한 이차부등식의 해를 이용한다.

$(1 + \log_3 x)(a - \log_3 x) > 0$ 에서

$$(\log_3 x)^2 + (1-a)\log_3 x - a < 0 \quad \text{..... ㉠}$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + (1-a)t - a < 0 \quad \text{..... ㉡}$$

한편 부등식 ㉠의 해가 $\frac{1}{3} < x < 9$ 이므로

$$\log_3 \frac{1}{3} < \log_3 x < \log_3 9$$

$$\therefore -1 < t < 2$$

해가 $-1 < t < 2$ 이고 t^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(t+1)(t-2) < 0$$

$$\therefore t^2 - t - 2 < 0$$

이 부등식이 ㉡과 일치하므로

$$1-a = -1, -a = -2$$

$$\therefore a = 2 \quad \text{답 2}$$

다른 풀이 주어진 부등식의 해가 $\frac{1}{3} < x < 9$ 이므로 방정

식 $(1 + \log_3 x)(a - \log_3 x) = 0$ 의 근이 $x = \frac{1}{3}$ 또는 $x = 9$ 이다.

$(1 + \log_3 x)(a - \log_3 x) = 0$ 에서

$$\log_3 x = -1 \text{ 또는 } \log_3 x = a$$

$$\therefore x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 3^a$$

따라서 $3^a = 9$ 이므로 $a = 2$

312

전략 $3 = \log_3 27$ 임을 이용하여 진수에 대한 부등식을 세운다.

$$\log_3 (x^2 - 2kx + 36) \geq 3 \text{에서}$$

$$\log_3 (x^2 - 2kx + 36) \geq \log_3 27$$

밑이 1보다 크므로

$$x^2 - 2kx + 36 \geq 27$$

$$\therefore x^2 - 2kx + 9 \geq 0$$

모든 실수 x 에 대하여 위의 부등식이 성립하려면 이차

방정식 $x^2 - 2kx + 9 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - 9 \leq 0$$

$$(k+3)(k-3) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq k \leq 3$$

따라서 $M = 3$, $m = -3$ 이므로

$$Mm = -9 \quad \text{답 -9}$$

313

전략 거듭제곱의 밑이 1보다 작은 양수이므로 지수의 부등호의 방향이 바뀔을 이용하여 지수에 대한 부등식을 세운다.

진수의 조건에서 $x^2 - 4x > 0$, $x - 3 > 0$

$$x^2 - 4x > 0 \text{에서 } x(x-4) > 0$$

$$\therefore x < 0 \text{ 또는 } x > 4 \quad \text{..... ㉠}$$

$$x - 3 > 0 \text{에서 } x > 3 \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } x > 4 \quad \text{..... ㉢}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2+\log_2(x^2-4x)} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_2(x-3)} \text{에서 밑이 1보다 작은}$$

양수이므로

$$-2 + \log_2(x^2 - 4x) \leq \log_2(x - 3)$$

$$\log_2(x^2 - 4x) \leq \log_2(x - 3) + 2$$

$$\therefore \log_2(x^2 - 4x) \leq \log_2\{4(x - 3)\}$$

$$\begin{aligned} \text{밑이 1보다 크므로 } & x^2 - 4x \leq 4(x-3) \\ & x^2 - 8x + 12 \leq 0, \quad (x-2)(x-6) \leq 0 \\ & \therefore 2 \leq x \leq 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉔} \end{aligned}$$

㉔, ㉔에서 구하는 해는

$$4 < x \leq 6 \quad \text{답 } 4 < x \leq 6$$

314

전략 밑이 1보다 큰 경우와 1보다 작은 양수인 경우로 나누어 푼다.

$$\begin{aligned} \text{진수의 조건에서 } & x+3 > 0, 1-x > 0 \\ & \therefore -3 < x < 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉑} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_a(x+3) - \log_a(1-x) > 1 \text{에서} \\ \log_a(x+3) > \log_a(1-x) + 1 \\ \therefore \log_a(x+3) > \log_a\{a(1-x)\} \end{aligned}$$

(i) $a > 1$ 일 때

$$\begin{aligned} x+3 > a(1-x) \text{에서 } & (a+1)x > a-3 \\ \therefore x > \frac{a-3}{a+1} \quad (\because a+1 > 0) \quad \dots\dots \textcircled{㉒} \end{aligned}$$

㉑, ㉒의 공통부분이 $-\frac{1}{3} < x < 1$ 이려면

$$\begin{aligned} \frac{a-3}{a+1} = -\frac{1}{3}, \quad 3a-9 = -a-1 \\ \therefore a = 2 \end{aligned}$$

(ii) $0 < a < 1$ 일 때

$$\begin{aligned} x+3 < a(1-x) \text{에서 } & (a+1)x < a-3 \\ \therefore x < \frac{a-3}{a+1} \quad (\because a+1 > 0) \quad \dots\dots \textcircled{㉓} \end{aligned}$$

그런데 ㉑, ㉓의 공통부분이 $-\frac{1}{3} < x < 1$ 이 될 수 없으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a = 2$ 답 2

315

전략 부등식 $(\log_2 4x)^2 - 4 \log_{\sqrt{2}} x - 1 < 0$ 의 좌변을 $\log_2 x$ 에 대한 식으로 변형한다.

$$\text{진수의 조건에서 } x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

$$\begin{aligned} (\log_2 4x)^2 - 4 \log_{\sqrt{2}} x - 1 < 0 \text{에서} \\ (2 + \log_2 x)^2 - 8 \log_2 x - 1 < 0 \\ \therefore (\log_2 x)^2 - 4 \log_2 x + 3 < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_2 x = t \text{로 놓으면} \\ t^2 - 4t + 3 < 0, \quad (t-1)(t-3) < 0 \\ \therefore 1 < t < 3 \end{aligned}$$

즉 $1 < \log_2 x < 3$ 이므로

$$\log_2 2^1 < \log_2 x < \log_2 2^3$$

밑이 1보다 크므로 $2 < x < 8$ ㉒

㉑, ㉒에서 부등식 $(\log_2 4x)^2 - 4 \log_{\sqrt{2}} x - 1 < 0$ 의 해는 $2 < x < 8$

한편 해가 $2 < x < 8$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은 $(x-2)(x-8) < 0$

$$\therefore x^2 - 10x + 16 < 0$$

이 부등식이 $x^2 + mx + n < 0$ 과 일치하므로

$$m = -10, n = 16$$

$$\therefore m + n = 6$$

답 6

316

전략 이차방정식의 판별식을 이용하여 로그부등식을 세운다.

$3 + \log_2 a \neq 0$ 이어야 하므로

$$\log_2 a \neq -3 \quad \therefore a \neq \frac{1}{8} \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

진수의 조건에서 $a > 0$ ㉒

이차방정식 $(3 + \log_2 a)x^2 + 2(1 + \log_2 a)x + 1 = 0$

이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (1 + \log_2 a)^2 - (3 + \log_2 a) > 0 \\ \therefore (\log_2 a)^2 + \log_2 a - 2 &> 0 \end{aligned}$$

$\log_2 a = t$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} t^2 + t - 2 > 0, \quad (t+2)(t-1) > 0 \\ \therefore t < -2 \text{ 또는 } t > 1 \end{aligned}$$

즉 $\log_2 a < -2$ 또는 $\log_2 a > 1$ 이므로

$$\log_2 a < \log_2 2^{-2} \text{ 또는 } \log_2 a > \log_2 2^1$$

밑이 1보다 크므로

$$a < \frac{1}{4} \text{ 또는 } a > 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉓}$$

㉑, ㉒, ㉓에서

$$0 < a < \frac{1}{8} \text{ 또는 } \frac{1}{8} < a < \frac{1}{4} \text{ 또는 } a > 2$$

따라서 a 의 값이 될 수 있는 것은 ㉓이다. 답 5

317

전략 주어진 조건을 이용하여 부등식을 세운다.

한 번 클릭할 때마다 파일의 크기를 2배로 증가시키므로 n 번을 클릭한 후의 파일의 크기는

$$1000 \times 2^n \text{ (Byte)}$$

파일의 크기가 5 GB, 즉 5×10^9 Byte보다 커지면 시스템이 다운되므로

$$1000 \times 2^n > 5 \times 10^9 \quad \therefore 2^n > 5 \times 10^6$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 2^n > \log (5 \times 10^6)$$

$$n \log 2 > \log \frac{10}{2} + 6, \quad n \log 2 > 7 - \log 2$$

$$\therefore n > \frac{7 - \log 2}{\log 2} = \frac{6.7}{0.3} = 22. \times \times \times$$

따라서 마우스를 23번 클릭하면 시스템이 다운된다.

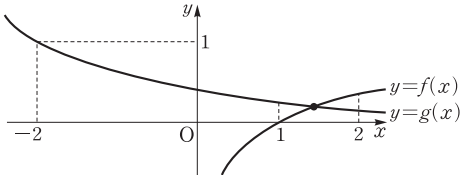
답 23번

318

전략 두 함수 $y = \log_n x$, $y = -\log_n (x+3) + 1$ 의 $x=1$, $x=2$ 에서의 함숫값의 대소 관계를 이용한다.

$f(x) = \log_n x$, $g(x) = -\log_n (x+3) + 1$ 이라 하면 곡선 $y = g(x)$ 는 곡선 $y = f(x)$ 를 x 축에 대하여 대칭 이동한 후 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

이때 $n \geq 2$ 이므로 주어진 조건을 만족시키려면 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 가 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $f(1) < g(1)$, $f(2) > g(2)$ 이므로

$$0 < -\log_n 4 + 1, \quad \log_n 2 > -\log_n 5 + 1$$

$$0 < -\log_n 4 + 1 \text{에서} \quad \log_n 4 < \log_n n$$

$$n \geq 2 \text{이므로} \quad n > 4 \quad \dots \dots \textcircled{㉠}$$

$$\log_n 2 > -\log_n 5 + 1 \text{에서}$$

$$\log_n 2 + \log_n 5 > 1 \quad \therefore \log_n 10 > \log_n n$$

$$n \geq 2 \text{이므로} \quad n < 10 \quad \dots \dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서} \quad 4 < n < 10$$

따라서 자연수 n 은 5, 6, 7, 8, 9이므로 구하는 합은

$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35 \quad \text{답 ㉢}$$

다른 풀이 두 곡선 $y = \log_n x$, $y = -\log_n (x+3) + 1$ 의 교점의 x 좌표는 방정식

$$\log_n x = -\log_n (x+3) + 1 \quad \dots \dots \textcircled{㉢}$$

의 실근과 같다.

$$\textcircled{㉢} \text{에서} \quad \log_n x + \log_n (x+3) = 1$$

$$\log_n x(x+3) = \log_n n$$

$$x(x+3) = n, \quad x^2 + 3x - n = 0$$

$$\therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{4n+9}}{2}$$

이때 진수의 조건에서 $x > 0$ 이므로

$$x = \frac{-3 + \sqrt{4n+9}}{2}$$

$$\text{따라서} \quad 1 < \frac{-3 + \sqrt{4n+9}}{2} < 2 \text{이므로}$$

$$2 < -3 + \sqrt{4n+9} < 4$$

$$\therefore 5 < \sqrt{4n+9} < 7$$

$$\text{각 변을 제곱하면} \quad 25 < 4n+9 < 49$$

$$16 < 4n < 40 \quad \therefore 4 < n < 10$$

319

전략 x 에 대한 이차부등식이 항상 성립할 조건을 이용한다.

모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$(1 + 2 \log a)x^2 + 2(2 + \log a)x + \log a < 0$$

이 항상 성립해야 한다.

$$(i) \text{진수의 조건에서} \quad a > 0$$

$$(ii) 1 + 2 \log a < 0 \text{에서} \quad \log a < -\frac{1}{2}$$

$$\text{밑이 1보다 크므로} \quad a < \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$(iii) \text{이차방정식}$$

$$(1 + 2 \log a)x^2 + 2(2 + \log a)x + \log a = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$\frac{D}{4} = (2 + \log a)^2 - (1 + 2 \log a) \log a < 0$$

$$\therefore (\log a)^2 - 3 \log a - 4 > 0$$

$$\log a = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 3t - 4 > 0, \quad (t+1)(t-4) > 0$$

$$\therefore t < -1 \text{ 또는 } t > 4$$

$$\text{즉 } \log a < -1 \text{ 또는 } \log a > 4 \text{이므로}$$

$$\log a < \log 10^{-1} \text{ 또는 } \log a > \log 10^4$$

$$\text{밑이 1보다 크므로}$$

$$a < \frac{1}{10} \text{ 또는 } a > 10000$$

$$\text{이상에서} \quad 0 < a < \frac{1}{10}$$

$$\text{답 } 0 < a < \frac{1}{10}$$

1

삼각함수

II. 삼각함수

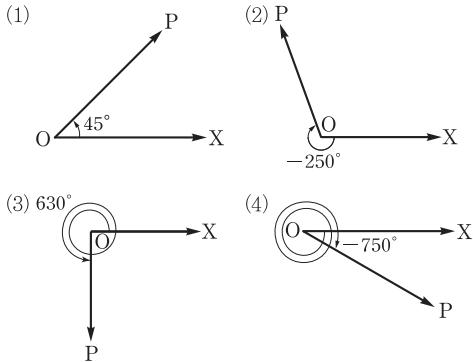
01

일반각

● 본책 130~134쪽

320

답 (1)



321

답 (1) $360^\circ \times n + 70^\circ$ (2) $360^\circ \times n + 150^\circ$

(3) $360^\circ \times n + 220^\circ$ (4) $360^\circ \times n + 315^\circ$

322

(2) $420^\circ = 360^\circ \times 1 + 60^\circ$ 이므로

$$360^\circ \times n + 60^\circ$$

(3) $-1000^\circ = 360^\circ \times (-3) + 80^\circ$ 이므로

$$360^\circ \times n + 80^\circ$$

(4) $-1300^\circ = 360^\circ \times (-4) + 140^\circ$ 이므로

$$360^\circ \times n + 140^\circ$$

답 (1) $360^\circ \times n + 80^\circ$ (2) $360^\circ \times n + 60^\circ$

(3) $360^\circ \times n + 80^\circ$ (4) $360^\circ \times n + 140^\circ$

323

(1) $620^\circ = 360^\circ \times 1 + 260^\circ$

따라서 620° 는 제 3 사분면의 각이다.

(2) $-680^\circ = 360^\circ \times (-2) + 40^\circ$

따라서 -680° 는 제 1 사분면의 각이다.

(3) $1230^\circ = 360^\circ \times 3 + 150^\circ$

따라서 1230° 는 제 2 사분면의 각이다.

(4) $-1500^\circ = 360^\circ \times (-5) + 300^\circ$

따라서 -1500° 는 제 4 사분면의 각이다.

답 (1) 제 3 사분면 (2) 제 1 사분면

(3) 제 2 사분면 (4) 제 4 사분면

324

① $-310^\circ = 360^\circ \times (-1) + 50^\circ$

③ $410^\circ = 360^\circ \times 1 + 50^\circ$

④ $660^\circ = 360^\circ \times 1 + 300^\circ$

⑤ $1130^\circ = 360^\circ \times 3 + 50^\circ$

따라서 각을 나타내는 동경이 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다.

답 ④

325

2θ 가 제 4 사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 270^\circ < 2\theta < 360^\circ \times n + 360^\circ$$

(n 은 정수)

$$\therefore 180^\circ \times n + 135^\circ < \theta < 180^\circ \times n + 180^\circ$$

(i) $n = 2k$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 135^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 180^\circ$$

따라서 θ 는 제 2 사분면의 각이다.

(ii) $n = 2k + 1$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 315^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 360^\circ$$

따라서 θ 는 제 4 사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 θ 를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제 2 사분면, 제 4 사분면이다.

답 제 2 사분면, 제 4 사분면

326

각 θ 를 나타내는 동경과 각 7θ 를 나타내는 동경이 일 직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$$7\theta - \theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$6\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 60^\circ \times n + 30^\circ \quad \dots\dots ㉠$$

그런데 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로

$$90^\circ < 60^\circ \times n + 30^\circ < 180^\circ$$

$$\therefore 1 < n < \frac{5}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n = 2$

㉠에 $n=2$ 를 대입하면

$$\theta = 60^\circ \times 2 + 30^\circ = 150^\circ$$

답 150°

327

각 θ 를 나타내는 동경과 각 4θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 4\theta = 360^\circ \times n \quad (n \text{은 정수})$$

$$5\theta = 360^\circ \times n$$

$$\therefore \theta = 72^\circ \times n$$

..... ㉠

그런데 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로

$$0^\circ < 72^\circ \times n < 180^\circ$$

$$\therefore 0 < n < \frac{5}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=1, 2$

㉠에 이것을 대입하면 $\theta = 72^\circ, 144^\circ$

따라서 모든 각 θ 의 크기의 합은

$$72^\circ + 144^\circ = 216^\circ$$

답 216°

328

각 θ 를 나타내는 동경과 각 3θ 를 나타내는 동경이 y 축에 대하여 대칭이므로

$$3\theta + \theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$4\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 90^\circ \times n + 45^\circ$$

..... ㉠

그런데 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로

$$0^\circ < 90^\circ \times n + 45^\circ < 180^\circ$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0, 1$

㉠에 이것을 대입하면 $\theta = 45^\circ, 135^\circ$

답 45°, 135°

$$(2) -315^\circ = -315 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{7}{4}\pi$$

$$(3) -144^\circ = -144 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{4}{5}\pi$$

$$(4) 330^\circ = 330 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11}{6}\pi$$

답 (1) $\frac{2}{3}\pi$ (2) $-\frac{7}{4}\pi$ (3) $-\frac{4}{5}\pi$ (4) $\frac{11}{6}\pi$

330

$$(1) \frac{5}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 150^\circ$$

$$(2) \frac{5}{4}\pi = \frac{5}{4}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 225^\circ$$

$$(3) -\frac{4}{3}\pi = -\frac{4}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -240^\circ$$

$$(4) -\frac{31}{6}\pi = -\frac{31}{6}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -930^\circ$$

답 (1) 150° (2) 225° (3) -240° (4) -930°

331

$$(1) \frac{17}{6}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{5}{6}\pi \text{이므로}$$

$$2n\pi + \frac{5}{6}\pi$$

$$(2) -\frac{2}{3}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{4}{3}\pi \text{이므로}$$

$$2n\pi + \frac{4}{3}\pi$$

$$(3) \frac{28}{5}\pi = 2\pi \times 2 + \frac{8}{5}\pi \text{이므로}$$

$$2n\pi + \frac{8}{5}\pi$$

$$(4) -\frac{15}{4}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{\pi}{4} \text{이므로}$$

$$2n\pi + \frac{\pi}{4}$$

답 (1) $2n\pi + \frac{5}{6}\pi$ (2) $2n\pi + \frac{4}{3}\pi$

(3) $2n\pi + \frac{8}{5}\pi$ (4) $2n\pi + \frac{\pi}{4}$

02 호도법

• 본책 135~139쪽

329

$$(1) 120^\circ = 120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2}{3}\pi$$

332

$$(1) l = 3 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi$$

$$(2) 60^\circ = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{이므로}$$

$$l = 4 \times \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{4}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi$$

$$\text{답 (1) } l = \frac{\pi}{2}, S = \frac{3}{4}\pi \quad (2) l = \frac{4}{3}\pi, S = \frac{8}{3}\pi$$

333

$$\neg. 1 = \frac{180^\circ}{\pi} \text{ (거짓)}$$

$$\angle. \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 90^\circ \text{ (참)}$$

$$\sqsubset. -\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi} = -60^\circ \text{ (참)}$$

$$\square. \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{45^\circ}{\pi} \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 $\angle, \sqsubset$ 이다.

답 $\angle, \sqsubset$

334

$$(1) 345^\circ = 345 \times \frac{\pi}{180} = \frac{23}{12}\pi \text{이므로}$$

$$2n\pi + \frac{23}{12}\pi$$

$$(2) 900^\circ = 360^\circ \times 2 + 180^\circ \text{이고}$$

$$180^\circ = 180 \times \frac{\pi}{180} = \pi \text{이므로}$$

$$2n\pi + \pi$$

$$(3) -960^\circ = 360^\circ \times (-3) + 120^\circ \text{이고}$$

$$120^\circ = 120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2}{3}\pi \text{이므로}$$

$$2n\pi + \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{답 (1) } 2n\pi + \frac{23}{12}\pi \quad (2) 2n\pi + \pi \quad (3) 2n\pi + \frac{2}{3}\pi$$

335

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면 중심각의 크기가

$$\frac{4}{3}\pi \text{이고 넓이가 } 6\pi \text{이므로}$$

$$6\pi = \frac{1}{2}r^2 \times \frac{4}{3}\pi$$

$$r^2 = 9 \quad \therefore r = 3 \quad (\because r > 0)$$

따라서 호의 길이는 $3 \times \frac{4}{3}\pi = 4\pi$ 이므로 부채꼴의 둘레의 길이는

$$2 \times 3 + 4\pi = 6 + 4\pi$$

$$\text{답 } 6 + 4\pi$$

336

원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로 $2\pi \times 1 = 2\pi$

따라서 옆면인 부채꼴의 넓이는

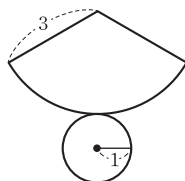
$$\frac{1}{2} \times 3 \times 2\pi = 3\pi$$

밑면인 원의 넓이는 $\pi \times 1^2 = \pi$

즉 원뿔의 겉넓이는

$$3\pi + \pi = 4\pi$$

$$\text{답 } 4\pi$$



337

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면 호의 길이는

$$20 - 2r \quad (0 < r < 10)$$

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}r(20 - 2r) = -r^2 + 10r$$

$$= -(r - 5)^2 + 25$$

따라서 $r = 5$ 일 때, S 는 최댓값 25를 갖는다.

이때 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면 $S = \frac{1}{2}r^2\theta$ 이

$$\text{므로 } 25 = \frac{1}{2} \times 5^2 \times \theta \quad \therefore \theta = 2$$

따라서 부채꼴의 최대 넓이는 25이고 그때의 중심각의 크기는 2이다.

답 최대 넓이: 25, 중심각의 크기: 2



연습 문제

● 본책 140~141쪽

338

전략 주어진 각을 일반각으로 나타낸다.

① $-660^\circ = 360^\circ \times (-2) + 60^\circ$ 이므로 제 1 사분면의 각이다.

- ② $-315^\circ = 360^\circ \times (-1) + 45^\circ$ 이므로 제 1 사분면의 각이다.
 ③ $436^\circ = 360^\circ \times 1 + 76^\circ$ 이므로 제 1 사분면의 각이다.
 ④ $863^\circ = 360^\circ \times 2 + 143^\circ$ 이므로 제 2 사분면의 각이다.
 ⑤ $1150^\circ = 360^\circ \times 3 + 70^\circ$ 이므로 제 1 사분면의 각이다.
 따라서 각을 나타내는 동경이 존재하는 사분면이 다른 하나는 ④이다. 답 ④

339

전략 두 각 α, β 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이면 $\alpha + \beta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)임을 이용한다.

각 3θ 를 나타내는 동경과 각 θ 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\begin{aligned} 3\theta + \theta &= 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n \text{은 정수}) \\ 4\theta &= 2n\pi + \frac{\pi}{2} \\ \therefore \theta &= \frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{8} \quad \dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

그런데 $0 < \theta < \frac{2}{3}\pi$ 이므로

$$0 < \frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{8} < \frac{2}{3}\pi \quad \therefore -\frac{1}{4} < n < \frac{13}{12}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0, 1$

㉠에 이것을 대입하면 $\theta = \frac{\pi}{8}, \frac{5}{8}\pi$

따라서 모든 각 θ 의 크기의 합은

$$\frac{\pi}{8} + \frac{5}{8}\pi = \frac{3}{4}\pi \quad \text{답 } \frac{3}{4}\pi$$

340

전략 $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ 임을 이용하여 주어진 각을 호도법으로 나타낸다.

$$\neg, 132^\circ = 132 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11}{15}\pi \quad (\text{참})$$

ㄴ, $\frac{13}{4}\pi = 2\pi + \frac{5}{4}\pi$ 이므로 $\frac{13}{4}\pi$ 는 제 3 사분면의 각이다. (거짓)

ㄷ, $150^\circ = 150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{6}\pi, \frac{29}{6}\pi = 2\pi \times 2 + \frac{5}{6}\pi, -\frac{7}{6}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{5}{6}\pi$ 이므로 주어진 각을 나타내는 동경은 모두 일치한다. (참)

이상에서 옳은 것은 $\neg, \text{ㄷ}$ 이다. 답 $\neg, \text{ㄷ}$

341

전략 중심각의 크기가 θ 이고 반지름의 길이가 r 인 부채꼴의 호의 길이를 l , 넓이를 S 라 하면 $l=r\theta, S=\frac{1}{2}rl$ 임을 이용한다.

반지름의 길이가 r 인 부채꼴의 호의 길이는 12, 넓이는 36이므로

$$36 = \frac{1}{2} \times r \times 12 \quad \therefore r=6$$

이때 $12=6 \times \theta$ 이므로 $\theta=2$

$$\therefore r+\theta=8 \quad \text{답 } 8$$

342

전략 중심각의 크기를 호도법으로 나타내어 부채꼴의 넓이를 구한다.

중심각의 크기가 $50^\circ = 50 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{18}\pi$ 이고 반지름의 길이가 6cm인 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{5}{18}\pi = 5\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

또 중심각의 크기가 θ 이고 반지름의 길이가 10cm인 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 10^2 \times \theta = 50\theta \text{ (cm}^2\text{)}$$

이때 두 부채꼴의 넓이가 같으므로

$$5\pi = 50\theta \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{10} \quad \text{답 } \frac{\pi}{10}$$

343

전략 θ 가 제 2 사분면의 각이면 정수 n 에 대하여 $360^\circ \times n + 90^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 180^\circ$ 임을 이용한다.

θ 가 제 2 사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 90^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

(i) $120^\circ \times n + 30^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times n + 60^\circ$ 이므로

$n=3k$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 30^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 60^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제 1 사분면의 각이다.

$n=3k+1$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 150^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 180^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제 2 사분면의 각이다.

$n=3k+2$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 270^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 300^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제 4 사분면의 각이다.

이상에서 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제 1, 2, 4 사분면이다.

(ii) $360^\circ \times 2n + 180^\circ < 2\theta < 360^\circ \times 2n + 360^\circ$ 이므로 각 2θ 를 나타내는 동경이 존재하는 사분면은 제 3, 4 사분면이다.

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경과 각 2θ 를 나타내는 동경이 모두 존재하는 사분면은 제 4 사분면이다.

답 제 4 사분면

344

전략 두 각 α, β 를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이면 $\alpha - \beta = 360^\circ \times n + 180^\circ$ (n 은 정수)임을 이용한다.

두 각 $5\theta, 2\theta$ 를 나타내는 동경은 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$$5\theta - 2\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$3\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 120^\circ \times n + 60^\circ \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

그런데 $180^\circ < \theta < 360^\circ$ 이므로

$$180^\circ < 120^\circ \times n + 60^\circ < 360^\circ \quad \therefore 1 < n < \frac{5}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=2$

$\textcircled{1}$ 에 $n=2$ 를 대입하면

$$\theta = 120^\circ \times 2 + 60^\circ = 300^\circ$$

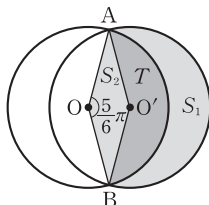
답 300°

345

전략 부채꼴의 넓이를 S_1, S_2 로 나타낸다.

$\square AOB O'$ 이 마름모이므로

$$\angle AO'B = \angle AOB = \frac{5}{6}\pi$$



앞의 그림과 같이 $\overline{O'A}, \overline{O'B}$ 와 호 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 T 라 하면

$$\begin{aligned} S_1 + T &= \frac{1}{2} \times 3^2 \times \left(2\pi - \frac{5}{6}\pi\right) \\ &= \frac{21}{4}\pi \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 + T &= \frac{1}{2} \times 3^2 \times \frac{5}{6}\pi \\ &= \frac{15}{4}\pi \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{을 하면} \quad S_1 - S_2 = \frac{3}{2}\pi \quad \text{답 ④}$$

346

전략 중심각의 크기와 호의 길이를 이용하여 부채꼴의 반지름의 길이를 구한다.

부채꼴의 반지름의 길이를 x 라 하면

$$x \times \frac{\pi}{3} = 2\pi \text{에서} \quad x=6$$

오른쪽 그림과 같이 부채꼴에 내

접하는 원의 반지름의 길이를 r

라 하면 $\triangle OAH \equiv \triangle OAH'$

(RHS 합동)이므로

$$\angle OAH = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

직각삼각형 OAH에서

$$\overline{OA} = \frac{\overline{OH}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{r}{\frac{1}{2}} = 2r$$

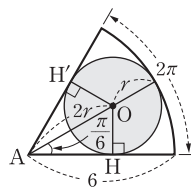
이때 부채꼴의 반지름의 길이가 6이므로

$$2r + r = 6 \quad \therefore r = 2$$

따라서 부채꼴에 내접하는 원의 넓이는

$$\pi \times 2^2 = 4\pi$$

답 4π



347

전략 θ 가 제 1 사분면의 각이면 $2n\pi < \theta < 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)임을 이용한다.

θ 가 제 1 사분면의 각이므로

$$2n\pi < \theta < 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore n\pi < \frac{\theta}{2} < n\pi + \frac{\pi}{4}$$

(i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때

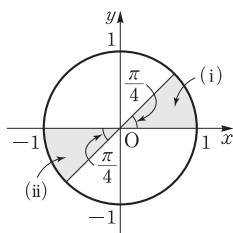
$$2k\pi < \frac{\theta}{2} < 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

(ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때

$$2k\pi + \pi < \frac{\theta}{2} < 2k\pi + \frac{5}{4}\pi$$

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내

는 동경이 존재하는 범위를
단위원의 내부에 나타내면
오른쪽 그림과 같으므로 구
하는 넓이는



$$2 \times \left(\frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{4} \right) \\ = \frac{\pi}{4}$$

답 $\frac{\pi}{4}$

348

전략 부채꼴의 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이와 호의 길이를 구한다.

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면

$$l = 24\pi - 2r \quad (0 < r < 12\pi)$$

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}r(24\pi - 2r) = -r^2 + 12\pi r \\ = -(r - 6\pi)^2 + 36\pi^2$$

즉 $r=6\pi$ 일 때, S 는 최댓값 $36\pi^2$ 을 갖는다.

한편 $r=6\pi$ 일 때

$$l = 24\pi - 2 \times 6\pi = 12\pi$$

반지름의 길이가 6π , 호의
길이가 12π 인 부채꼴을 옆
면으로 하여 만든 원뿔의 밑
면인 원의 반지름의 길이를
 R 라 하면

$$2\pi R = 12\pi \\ \therefore R = 6$$

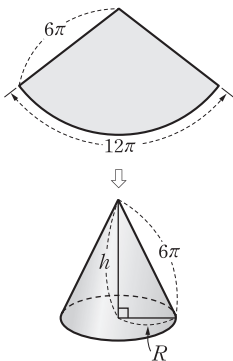
또 원뿔의 높이를 h 라 하면

$$h = \sqrt{(6\pi)^2 - 6^2} \\ = 6\sqrt{\pi^2 - 1}$$

따라서 구하는 원뿔의 부피는

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 6\sqrt{\pi^2 - 1} = 72\pi\sqrt{\pi^2 - 1}$$

답 $72\pi\sqrt{\pi^2 - 1}$



03 삼각함수

● 본책 142~151쪽

349

$\angle ABD + \angle BAD = \angle ADC$ 이므로

$$22.5^\circ + \angle BAD = 45^\circ$$

$$\therefore \angle BAD = 22.5^\circ$$

즉 삼각형 ABD는 이등변삼각형이다.

따라서 오른쪽 그림과 같

이 $\overline{AC} = \overline{CD} = a$ 라 하면

직각삼각형 ADC에서

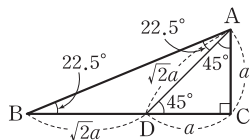
$$\overline{AD} = \sqrt{a^2 + a^2}$$

$$= \sqrt{2}a$$

$$\therefore \overline{BD} = \overline{AD} = \sqrt{2}a$$

$$\therefore \tan 22.5^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{a}{(\sqrt{2}+1)a} = \sqrt{2} - 1$$

답 $\sqrt{2} - 1$



350

(1) $\overline{OP} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$ 이므로

$$\sin \theta = -\frac{3}{5}, \cos \theta = -\frac{4}{5}, \tan \theta = \frac{3}{4}$$

(2) $\overline{OP} = \sqrt{15^2 + (-8)^2} = 17$ 이므로

$$\sin \theta = -\frac{8}{17}, \cos \theta = \frac{15}{17}, \tan \theta = -\frac{8}{15}$$

답 풀이 참조

351

(1) 삼각형 PHO에서 $\overline{OP} = 1$ 이고 $\angle POH = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\overline{OH} = \overline{OP} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\overline{PH} = \overline{OP} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 점 P가 제2사분면 위의 점이므로

$$P\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$(2) \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(3) \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

$$(4) \tan \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

답 (1) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $-\frac{1}{2}$ (4) $-\sqrt{3}$

352

(1) $\theta = 400^\circ = 360^\circ + 40^\circ$ 이므로 θ 는 제 1 사분면의 각이다.

$$\therefore \sin \theta > 0, \cos \theta > 0, \tan \theta > 0$$

(2) $\theta = -\frac{17}{6}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{7}{6}\pi$ 이므로 θ 는 제 3 사분면의 각이다.

$$\therefore \sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$$

(3) $\theta = -760^\circ = 360^\circ \times (-3) + 320^\circ$ 이므로 θ 는 제 4 사분면의 각이다.

$$\therefore \sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$$

(4) $\theta = \frac{29}{10}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{9}{10}\pi$ 이므로 θ 는 제 2 사분면의 각이다.

$$\therefore \sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$$

답 풀이 참조

353

(1) $\sin \theta > 0$ 이면 θ 는 제 1 사분면 또는 제 2 사분면의 각이고, $\cos \theta < 0$ 이면 θ 는 제 2 사분면 또는 제 3 사분면의 각이다.

따라서 θ 는 제 2 사분면의 각이다.

(2) $\cos \theta > 0$ 이면 θ 는 제 1 사분면 또는 제 4 사분면의 각이고, $\tan \theta < 0$ 이면 θ 는 제 2 사분면 또는 제 4 사분면의 각이다.

따라서 θ 는 제 4 사분면의 각이다.

(3) $\sin \theta \cos \theta < 0$ 에서

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0 \text{ 또는 } \sin \theta < 0, \cos \theta > 0$$

따라서 θ 는 제 2 사분면 또는 제 4 사분면의 각이다.

답 (1) 제 2 사분면

(2) 제 4 사분면

(3) 제 2 사분면 또는 제 4 사분면

354

$$\overline{OP} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2 \text{이므로}$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{2}, \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(1) \frac{\tan \theta - \cos \theta}{\sqrt{3}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{5}{6}$$

$$(2) 4\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta = 4\sqrt{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -3$$

답 (1) $-\frac{5}{6}$ (2) -3

355

오른쪽 그림과 같이 각 $-\frac{\pi}{3}$

를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

삼각형 OPH에서 $\overline{OP} = 1$ 이고

$$\angle POH = \frac{\pi}{3} \text{이므로}$$

$$\overline{OH} = \overline{OP} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\overline{PH} = \overline{OP} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

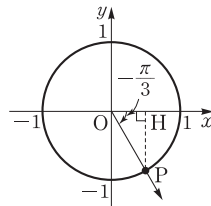
이때 점 P가 제 4 사분면 위의 점이므로

$$P\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = \frac{1}{2}, \tan \theta = -\sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{\cos \theta}{\sin \theta - \tan \theta} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - (-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$



356

(i) $\sin \theta \tan \theta > 0$ 에서

$\sin \theta > 0, \tan \theta > 0$ 일 때, θ 는 제 1 사분면의 각이다.

$\sin \theta < 0, \tan \theta < 0$ 일 때, θ 는 제 3 사분면의 각이다.

(ii) $\frac{\cos \theta}{\tan \theta} < 0$ 에서

$\cos \theta > 0, \tan \theta < 0$ 일 때, θ 는 제 4 사분면의 각이다.

$\cos \theta < 0, \tan \theta > 0$ 일 때, θ 는 제 3 사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제 4 사분면의 각이다.

답 제 4 사분면

357

θ 가 제 3 사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \tan \theta > 0$$

따라서 $\sin \theta - \tan \theta < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\sin \theta - \tan \theta)^2} - |\sin \theta| - \sqrt{\tan^3 \theta} \\ &= -(\sin \theta - \tan \theta) + \sin \theta - \tan \theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

답 0

358

$$\frac{\sqrt{\sin \theta}}{\sqrt{\cos \theta}} = -\sqrt{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \text{ 에서}$$

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$$

따라서 θ 는 제 2 사분면의 각이므로

$$\tan \theta < 0, \cos \theta + \tan \theta < 0, \tan \theta - \sin \theta < 0$$

$$\begin{aligned} \therefore & |\cos \theta + \tan \theta| + \sqrt{\sin^2 \theta} \\ &= -(\cos \theta + \tan \theta) + \sin \theta + (\tan \theta - \sin \theta) \\ &= -\cos \theta \end{aligned}$$

답 $-\cos \theta$



개념 노트

음수의 제곱근의 성질

실수 a, b 에 대하여

① $a < 0, b < 0$ 이면

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$$

그 외에는 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

② $a > 0, b < 0$ 이면

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$$

그 외에는 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ (단, $b \neq 0$)

359

$$\begin{aligned} (1) & \frac{1 - \sin^4 \theta}{\cos^2 \theta} + \cos^2 \theta \\ &= \frac{(1 + \sin^2 \theta)(1 - \sin^2 \theta)}{\cos^2 \theta} + \cos^2 \theta \\ &= \frac{(1 + \sin^2 \theta)\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \cos^2 \theta \\ &= 1 + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 1 = 2 \\ (2) & \left(\sin \theta - \frac{1}{\sin \theta} \right)^2 + \left(\cos \theta - \frac{1}{\cos \theta} \right)^2 \\ &\quad - \left(\tan \theta - \frac{1}{\tan \theta} \right)^2 \\ &= \left(\sin^2 \theta - 2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) + \left(\cos^2 \theta - 2 + \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) \\ &\quad - \left(\tan^2 \theta - 2 + \frac{1}{\tan^2 \theta} \right) \\ &= -2 + \sin^2 \theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} + \cos^2 \theta + \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ &\quad - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= -2 + 1 + \frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= -2 + 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= -2 + 1 + 1 + 1 \\ &= 1 \\ (3) & \frac{\sin \theta + \sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} - \frac{\sin \theta - \sin^2 \theta}{1 + \cos \theta} \\ &= \frac{\sin \theta(1 + \sin \theta)(1 + \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)} \\ &\quad - \frac{\sin \theta(1 - \sin \theta)(1 - \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)} \\ &= \frac{\sin \theta(1 + \cos \theta + \sin \theta + \sin \theta \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} \\ &\quad - \frac{\sin \theta(1 - \cos \theta - \sin \theta + \sin \theta \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{2 \sin \theta(\sin \theta + \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \\ &= 2 \left(1 + \frac{1}{\tan \theta} \right) \end{aligned}$$

답 (1) 2 (2) 1 (3) $2 \left(1 + \frac{1}{\tan \theta} \right)$

360

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

이때 θ 는 제 3 사분면의 각이므로

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5} \quad (\because \cos \theta < 0)$$

따라서 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{2\sqrt{5}}{5}}{-\frac{\sqrt{5}}{5}} = 2$ 이므로

$$\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta = \frac{1}{-\frac{\sqrt{5}}{5}} + 2 = 2 - \sqrt{5}$$

답 $2 - \sqrt{5}$

361

$|\sin \theta| = |2 \cos \theta|$ 이므로

$$\sin^2 \theta = 4 \cos^2 \theta$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$4 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad 5 \cos^2 \theta = 1$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

이때 θ 가 제 2 사분면의 각이므로

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5} \quad (\because \cos \theta < 0)$$

또 $|\sin \theta| = |2 \cos \theta|$ 에서

$$\sin \theta = -2 \cos \theta = -2 \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{답} \quad \frac{\sqrt{5}}{5}$$

362

$$\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$= \frac{(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta}{\sin \theta (1 + \cos \theta)}$$

$$= \frac{1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta (1 + \cos \theta)}$$

$$= \frac{2(1 + \cos \theta)}{\sin \theta (1 + \cos \theta)}$$

$$= \frac{2}{\sin \theta}$$

$$\text{즉 } \frac{2}{\sin \theta} = -3 \text{에서 } \sin \theta = -\frac{2}{3}$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

이때 θ 는 제 4 사분면의 각이므로

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad (\because \cos \theta > 0)$$

따라서 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin \theta + \tan \theta &= -\frac{2}{3} + \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \\ &= -\frac{10 + 6\sqrt{5}}{15} \end{aligned}$$

답 $-\frac{10 + 6\sqrt{5}}{15}$

363

$\sin \theta - \cos \theta = -\frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin^3 \theta - \cos^3 \theta &= (\sin \theta - \cos \theta) \\ &\quad \times (\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= -\frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{4}{9}\right) = -\frac{13}{27} \end{aligned}$$

답 $-\frac{13}{27}$

다른 풀이 $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta$

$$= (\sin \theta - \cos \theta)^3 + 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \times \frac{4}{9} \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= -\frac{13}{27}$$

364

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 + 2 \times \frac{1}{8}$$

$$= \frac{5}{4}$$

이때 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\sin \theta < 0$, $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta < 0$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} &= \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{-\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{8}} = -4\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\text{답 } -4\sqrt{5}$$

365

$$\begin{aligned} \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -2 \text{이므로}$$

$$\sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

이때 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta > 0$$

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2}$$

$$\text{답 } \sqrt{2}$$

다른 풀이 $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = -2$ 에서

$$\tan^2 \theta + 2 \tan \theta + 1 = 0$$

$$(\tan \theta + 1)^2 = 0$$

$$\therefore \tan \theta = -1$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{이므로 } \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -1$$

$$\therefore \sin \theta = -\cos \theta \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\text{또 } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$(-\cos \theta)^2 + \cos^2 \theta = 1, \quad 2 \cos^2 \theta = 1$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{1}{2}$$

이때 θ 는 제2사분면의 각이므로

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because \cos \theta < 0)$$

$$\text{㉠에서 } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2}$$

366

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{2}{3} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{k}{3} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{5}{18} \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$$\text{㉡, ㉢에서 } \frac{k}{3} = -\frac{5}{18}$$

$$\therefore k = -\frac{5}{6} \quad \text{답 } -\frac{5}{6}$$

367

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\cos \theta + \tan \theta = -\frac{k}{5} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\cos \theta \tan \theta = -\frac{3}{5} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{이므로 ㉡에서}$$

$$\cos \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sin \theta = -\frac{3}{5}$$

$$\therefore \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

이때 θ 는 제3사분면의 각이므로

$$\cos \theta = -\frac{4}{5} \quad (\because \cos \theta < 0)$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4}$$

따라서 ㉠에서

$$k = -5(\cos \theta + \tan \theta)$$

$$= -5 \times \left(-\frac{4}{5} + \frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \quad \text{답 } \frac{1}{4}$$

368

이차방정식 $2x^2 - \sqrt{2}x + k = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

양변을 제곱하면

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{4}$$

이때

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{1}{4}}$$

$$= -2\sqrt{2},$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{-\frac{1}{4}}$$

$$= -4$$

이므로 x^2 의 계수가 1이고 $\frac{1}{\sin \theta}, \frac{1}{\cos \theta}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2 + 2\sqrt{2}x - 4 = 0$$

따라서 $a = 2\sqrt{2}, b = -4$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 8 + 16 = 24$$

답 24

참고 이차방정식 $2x^2 - \sqrt{2}x + k = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{k}{2}$$

따라서 $\frac{k}{2} = -\frac{1}{4}$ 이므로 $k = -\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 직선

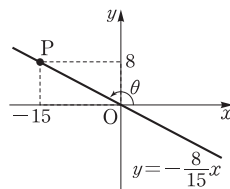
$$y = -\frac{8}{15}x \text{ 위의 점}$$

$P(-15, 8)$ 에 대하여

$$\begin{aligned} OP &= \sqrt{(-15)^2 + 8^2} \\ &= 17 \end{aligned}$$

따라서 $\sin \theta = \frac{8}{17}, \cos \theta = -\frac{15}{17}$ 이므로

$$17(\sin \theta - \cos \theta) = 17 \times \frac{23}{17} = 23 \quad \text{답 23}$$



370

전략 $AB < 0$ 이면 $A > 0, B < 0$ 또는 $A < 0, B > 0$ 이다.

$\sin \theta \tan \theta < 0$ 에서

$\sin \theta > 0, \tan \theta < 0$ 또는 $\sin \theta < 0, \tan \theta > 0$

(i) $\sin \theta > 0, \tan \theta < 0$ 일 때

θ 는 제 2 사분면의 각이다.

(ii) $\sin \theta < 0, \tan \theta > 0$ 일 때

θ 는 제 3 사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제 2 사분면 또는 제 3 사분면의 각이므로 $\cos \theta < 0$ 이다. 답 ②

371

전략 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서 각 삼각함수의 값의 부호를 조사한다.

θ 가 제 3 사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$$

$$\therefore \sqrt{\sin^2 \theta} + \sqrt{\cos^2 \theta} + |\tan \theta|$$

$$= -\sqrt{(\sin \theta + \cos \theta)^2}$$

$$= -\sin \theta - \cos \theta + \tan \theta + (\sin \theta + \cos \theta)$$

$$= \tan \theta$$

답 $\tan \theta$

372

전략 $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ 임을 이용하여 $\cos \theta$ 의 값을 먼저 구한다.

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

이때 θ 는 제 3 사분면의 각이므로

$$\cos \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (\because \cos \theta < 0)$$

연습 문제

● 본책 152~153쪽

369

전략 직선 위의 한 점의 좌표를 이용하여 $\sin \theta, \cos \theta$ 의 값을 구한다.

$$8x + 15y = 0 \text{에서} \quad y = -\frac{8}{15}x$$

$$\begin{aligned}\therefore \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{-\frac{1}{3} \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)} \\ &= \frac{9}{2\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

답 $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

다른 풀이 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ 이므로

$$\begin{aligned}\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + 2\sqrt{2} \\ &= \frac{9\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

373

전략 주어진 등식의 양변을 제곱하여 $\sin \theta \cos \theta$ 의 값을 구한다.

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\begin{aligned}1 + 2 \sin \theta \cos \theta &= \frac{1}{4} \\ \therefore \sin \theta \cos \theta &= -\frac{3}{8} \\ \therefore \frac{1 + \tan \theta}{\sin \theta} &= \frac{1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\sin \theta} = \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{8}} = -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

답 ②

374

전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}-\sin \theta + \cos \theta &= \frac{3}{4} \quad \dots\dots ㉠ \\ -\sin \theta \cos \theta &= \frac{k}{4} \\ \therefore \sin \theta \cos \theta &= -\frac{k}{4} \quad \dots\dots ㉡\end{aligned}$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{9}{16}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{7}{32} \quad \dots\dots ㉢$$

㉡, ㉢에서 $-\frac{k}{4} = \frac{7}{32}$

$$\therefore k = -\frac{7}{8} \quad \text{답 } -\frac{7}{8}$$

375

전략 $\sin \alpha$ 의 값을 점 P의 x좌표, y좌표를 나타낸다.

점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$Q(b, a), R(-b, -a)$$

$$\overline{OP} = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ 이므로}$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{즉 } \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{3} \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 3b$$

양변을 제곱하면 $a^2 + b^2 = 9b^2$

$$\therefore a^2 = 8b^2$$

$$\text{한편 } \overline{OQ} = \sqrt{b^2 + a^2} \text{ 이므로}$$

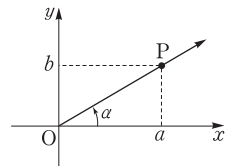
$$\sin^2 \beta = \left(\frac{a}{\sqrt{b^2 + a^2}} \right)^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{8b^2}{8b^2 + b^2} = \frac{8}{9}$$

$$\tan^2 \gamma = \left(\frac{-a}{-b} \right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = \frac{8b^2}{b^2} = 8$$

$$\therefore 9(\sin^2 \beta + \tan^2 \gamma) = 9 \times \left(\frac{8}{9} + 8 \right) = 80$$

답 80



개념 노트

좌표평면 위의 점 $P(a, b)$ 에 대하여 점 P를

① x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표

$$\Rightarrow (a, -b)$$

② y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표

$$\Rightarrow (-a, b)$$

③ 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표

$$\Rightarrow (-a, -b)$$

④ 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표

$$\Rightarrow (b, a)$$

376

전략 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 임을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

$$\begin{aligned} \neg. & \cos^4 \theta - \sin^4 \theta \\ &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) \\ &= 2\cos^2 \theta - 1 \quad (\text{참}) \\ \cup. & (1 + \sin \theta - \cos \theta)^2 \\ &= 1 + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2\sin \theta - 2\sin \theta \cos \theta \\ &\quad - 2\cos \theta \\ &= 2(1 + \sin \theta - \cos \theta - \sin \theta \cos \theta) \\ &= 2\{(1 + \sin \theta) - \cos \theta(1 + \sin \theta)\} \\ &= 2(1 + \sin \theta)(1 - \cos \theta) \quad (\text{거짓}) \\ \cap. & \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \\ &= \frac{\cos \theta(1 + \sin \theta) - \cos \theta(1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{\cos \theta + \cos \theta \sin \theta - \cos \theta + \cos \theta \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} \\ &= \frac{2\cos \theta \sin \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= 2 \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 2 \tan \theta \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\cap$ 이다.

답 $\neg$, $\cap$

377

전략 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 임을 이용하여 주어진 식의 좌변을 간단히 한다.

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 - \cos \theta}{\tan \theta} &= 1 \text{에서} \\ \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{(1 - \cos \theta) \cos \theta}{\sin \theta} &= 1 \\ \frac{\sin^2 \theta \cos \theta + (1 - \cos \theta)^2 \cos \theta}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} &= 1 \\ \frac{(\sin^2 \theta + 1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta) \cos \theta}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} &= 1 \\ \frac{2(1 - \cos \theta) \cos \theta}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} &= 1 \\ \frac{2\cos \theta}{\sin \theta} &= 1 \\ \therefore \sin \theta &= 2\cos \theta \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$(2\cos \theta)^2 + \cos^2 \theta = 1, \quad 5\cos^2 \theta = 1$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

이때 $\textcircled{1}$ 을 만족시키려면 $\sin \theta$, $\cos \theta$ 의 값의 부호가 같아야 하므로

$$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \quad (\because \pi < \theta < 2\pi)$$

즉 $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

답 $\textcircled{2}$

378

전략 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta + \tan \theta = -\frac{a}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \tan \theta + \tan \theta \sin \theta &= \frac{b}{4} \\ \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\sin \theta \cos \theta \tan \theta = \frac{3}{4} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 이므로 $\textcircled{3}$ 에서

$$\sin^2 \theta = \frac{3}{4}$$

이때 θ 는 제2사분면의 각이므로

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because \sin \theta > 0)$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{1}{2} \quad \left(\because \frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\sqrt{3}$$

따라서 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서

$$\begin{aligned} a &= -4(\sin \theta + \cos \theta + \tan \theta) \\ &= -4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) \\ &= 2\sqrt{3} + 2 \end{aligned}$$

$$b = 4(\sin \theta \cos \theta + \cos \theta \tan \theta + \tan \theta \sin \theta)$$

$$= 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\right)$$

$$= \sqrt{3} - 6$$

$$\therefore a + b = 3\sqrt{3} - 4$$

$$\text{답 } 3\sqrt{3} - 4$$

379

전략 0이 아닌 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이면 $a < 0, b < 0$ 임을 이용한다.

$$\sqrt{\sin \theta} \sqrt{\cos \theta} = -\sqrt{\sin \theta \cos \theta} \text{에서}$$

$$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0 \quad (\because \sin \theta \cos \theta \neq 0)$$

즉 θ 는 제 3 사분면의 각이므로

$$a < 0, b < 0$$

$$|a| - |b| = 1 \text{에서} \quad -a + b = 1$$

$$\therefore b = a + 1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\overline{OP} = 5 \text{에서} \quad a^2 + b^2 = 25 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉡에 ㉠을 대입하면

$$a^2 + (a+1)^2 = 25, \quad a^2 + a - 12 = 0$$

$$(a+4)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = -4 \quad (\because a < 0)$$

㉠에 $a = -4$ 를 대입하면

$$b = -3$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{b}{\overline{OP}} = -\frac{3}{5},$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\overline{OP}} = -\frac{4}{5},$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta + \tan \theta = -\frac{13}{20}$$

$$\text{답 } -\frac{13}{20}$$

2 삼각함수의 그래프

II. 삼각함수

01 삼각함수의 그래프

● 본책 156~167쪽

380

답 (1) $\{x | x \text{는 실수}\}$ (2) 3, -3 (3) 원점

(4) 2π

(5) $y, 3$

381

답 (1) $\{x | x \text{는 실수}\}$ (2) $\{y | -1 \leq y \leq 1\}$ (3) y 축

(4) 4π

(5) $x, 2$

382

(1) $3x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$x \neq \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{6} \quad (n \text{은 정수})$$

따라서 함수 $y = \tan 3x$ 의 정의역은

$$\left\{x \mid x \neq \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{6} \text{인 실수, } n \text{은 정수}\right\}$$

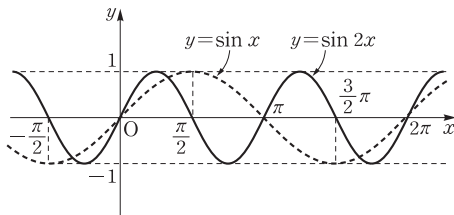
답 (1) $\frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{6}$ (2) 원점 (3) $\frac{\pi}{3}$

(4) $x = \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{6}$ (5) $x, \frac{1}{3}$

383

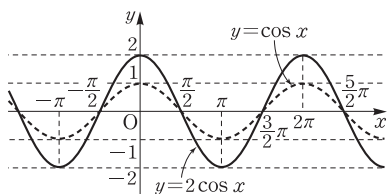
(1) $y = \sin 2x$ 의 그래프는 $y = \sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배 한 것과 같다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고, 최댓값은 1, 최솟값은 -1, 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 이다.



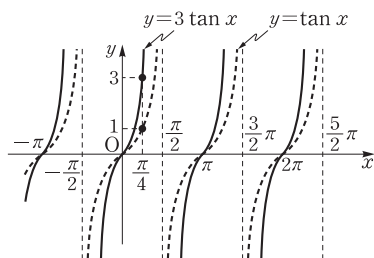
(2) $y = 2 \cos x$ 의 그래프는 $y = \cos x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배 한 것과 같다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고, **최댓값은 2, 최솟값은 -2, 주기는 2π** 이다.



(3) $y = 3 \tan x$ 의 그래프는 $y = \tan x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3배 한 것과 같다.

따라서 그래프는 다음 그림과 같고, **최댓값과 최솟값은 없고, 주기는 π** 이다.

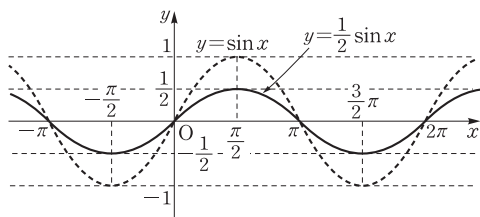


답 풀이 참조

384

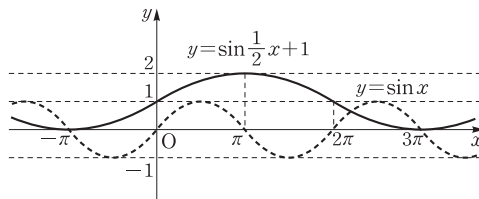
(1) **최댓값은 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 $-\frac{1}{2}$ 이고, 주기는 2π** 이다.

$y = \frac{1}{2} \sin x$ 의 그래프는 $y = \sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



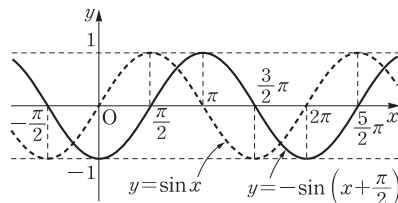
(2) **최댓값은 $1+1=2$, 최솟값은 $-1+1=0$ 이고, 주기는 $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$** 이다.

$y = \sin \frac{1}{2}x + 1$ 의 그래프는 $y = \sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2배 한 후 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



(3) **최댓값은 $|-1|=1$, 최솟값은 $-|-1|=-1$ 이고, 주기는 2π** 이다.

$y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 $y = \sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 후 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



답 풀이 참조

385

주기는 $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$

최댓값은 $M = 1 + 3 = 4$

최솟값은 $m = -1 + 3 = 2$

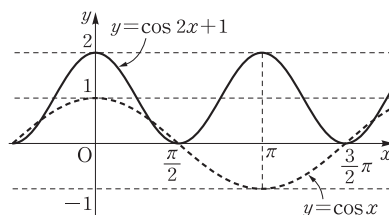
$\therefore p + M + m = 12$

답 12

386

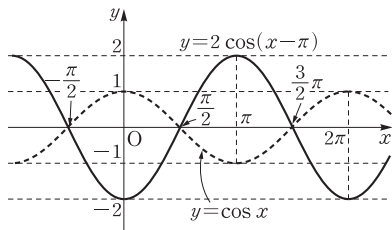
(1) **최댓값은 $1+1=2$, 최솟값은 $-1+1=0$ 이고, 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$** 이다.

$y = \cos 2x + 1$ 의 그래프는 $y = \cos x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배 한 후 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



(2) 최댓값은 2, 최솟값은 -2 이고, 주기는 2π 이다.

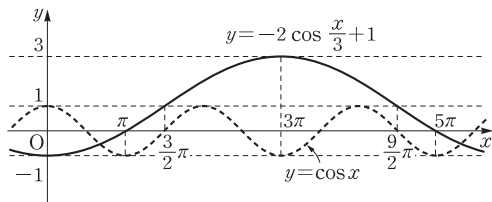
$y = 2 \cos(x - \pi)$ 의 그래프는 $y = \cos x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 π 만큼 평행이동한 후 y 축의 방향으로 2배 한 것이므로 다음 그림과 같다.



(3) 최댓값은 $|-2| + 1 = 3$, 최솟값은

$-|-2| + 1 = -1$, 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$ 이다.

$y = -2 \cos \frac{x}{3} + 1$ 의 그래프는 $y = \cos x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 3배, y 축의 방향으로 2배 하고, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



답 풀이 참조

387

주기는 $p = \frac{2\pi}{|-2\pi|} = 1$

최댓값은 $M = |-3| + 6 = 9$

최솟값은 $m = -|-3| + 6 = 3$

$\therefore p + M + m = 13$

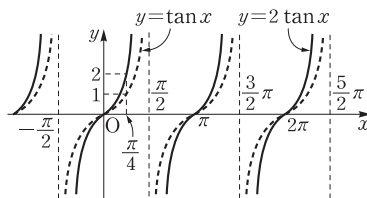
답 13

388

(1) 주기는 π

점근선의 방정식은 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)

$y = 2 \tan x$ 의 그래프는 $y = \tan x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배 한 것이므로 다음 그림과 같다.

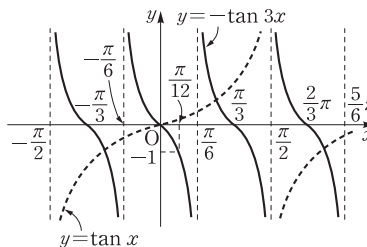


(2) 주기는 $\frac{\pi}{3}$

점근선의 방정식은 $3x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 에서

$$x = \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{6} \quad (n \text{은 정수})$$

$y = -\tan 3x$ 의 그래프는 $y = \tan x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{3}$ 배 한 후 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

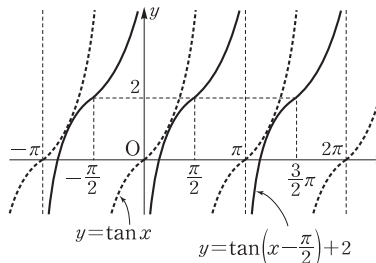


(3) 주기는 π

점근선의 방정식은 $x - \frac{\pi}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 에서

$$x = n\pi + \pi \quad \therefore x = n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$y = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$ 의 그래프는 $y = \tan x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



답 풀이 참조

389

주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이므로 $a = \frac{1}{2}$

점근선의 방정식은 $2x - \frac{\pi}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 에서

$$x = \frac{n+1}{2}\pi \quad \therefore x = \frac{n}{2}\pi \quad (n \text{은 정수})$$

따라서 $b = \frac{1}{2}$ 이므로 $a+b=1$

답 1

390

(1) 최댓값은 $|-2|+1=3$
 최솟값은 $-|-2|+1=-1$

주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$

(2) 최댓값은 $\left|-\frac{1}{4}\right|-4 = -\frac{15}{4}$
 최솟값은 $-\left|-\frac{1}{4}\right|-4 = -\frac{17}{4}$

주기는 $\frac{2}{3}\pi$

(3) 최댓값과 최솟값은 없고, 주기는 $\frac{\pi}{\pi} = 1$

답 (1) 최댓값: 3, 최솟값: -1, 주기: π

(2) 최댓값: $-\frac{15}{4}$, 최솟값: $-\frac{17}{4}$, 주기: $\frac{2}{3}\pi$

(3) 최댓값, 최솟값: 없다., 주기: 1

391

$y = \cos 2x + 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{8}$ 만큼

평행이동한 그래프의 식은

$$y = \cos 2\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + 1 = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

이 함수의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프

의 식은 $-y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

$$\therefore y = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$$

$$\text{답 } y = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$$

392

최댓값이 3이고 $a > 0$ 이므로

$$a - c = 3 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

주기가 4π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{\frac{1}{b}} = 4\pi \quad \therefore b = 2$$

$f(x) = a \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) - c$ 에서 $f(\pi) = 2$ 이므로

$$a \sin \frac{\pi}{6} - c = 2$$

$$\therefore \frac{a}{2} - c = 2 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 2, c = -1$

따라서 $f(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ 이므로 $f(x)$ 의 최

솟값은 $-2 + 1 = -1$ **답 -1**

393

함수 $f(x)$ 의 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore b = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= a \tan(2x + c) + d \\ &= a \tan 2\left(x + \frac{c}{2}\right) + d \end{aligned}$$

즉 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 $y = a \tan 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{c}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 d 만큼 평행이동한 것이므로

$$-\frac{c}{2} = \frac{\pi}{4}, d = -1 \quad \therefore c = -\frac{\pi}{2}, d = -1$$

따라서 $f(x) = a \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = a \tan \frac{\pi}{6} - 1 = \sqrt{3} - 1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}a - 1 = \sqrt{3} - 1 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore abcd = 3 \times 2 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) \times (-1) = 3\pi \quad \text{답 } 3\pi$$

394

주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 3, 최솟값이 -1이고 $a > 0$ 이므로

$$a + d = 3, -a + d = -1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 2, d = 1$

또 주기가 $\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$$

따라서 주어진 함수의 식은 $y = 2 \sin(2x + c) + 1$ 이고, 그 그래프가 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$3 = 2 \sin c + 1 \quad \therefore \sin c = 1$$

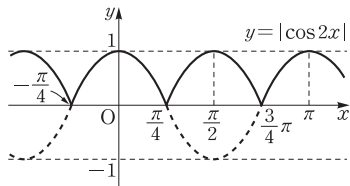
$$0 < c < \pi \text{이므로} \quad c = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore abcd = 2 \times 2 \times \frac{\pi}{2} \times 1 = 2\pi$$

답 2π

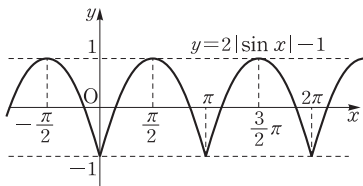
395

- (1) $y = |\cos 2x|$ 의 그래프는 $y = \cos 2x$ 의 그래프에서 $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 최댓값은 1, 최솟값은 0이고, 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

- (2) $y = 2|\sin x| - 1$ 의 그래프는 $y = |\sin x|$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배 한 다음 y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 최댓값은 1, 최솟값은 -1이고, 주기는 π 이다.

답 (1) 최댓값: 1, 최솟값: 0, 주기: $\frac{\pi}{2}$

(2) 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: π

다른 풀이 (2) $0 \leq |\sin x| \leq 1$ 이므로

$$0 \leq 2|\sin x| \leq 2$$

$$\therefore -1 \leq 2|\sin x| - 1 \leq 1$$

따라서 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.

396

주기는 $\frac{\pi}{\pi} = 1$ 이므로 $a = 1$

또 $0 \leq |\cos \pi x| \leq 1$ 이므로

$$0 \leq 7|\cos \pi x| \leq 7$$

$$\therefore 3 \leq 7|\cos \pi x| + 3 \leq 10$$

따라서 $M = 10$, $m = 3$ 이므로

$$a + M + m = 14$$

답 14

397

$f(x) = a|\sin bx| + c$ 에서 최댓값이 5이고 $a > 0$ 이므로

$$a + c = 5 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

주기가 $\frac{\pi}{3}$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{3} \quad \therefore b = 3$$

따라서 $f(x) = a|\sin 3x| + c$ 에서

$$f\left(\frac{\pi}{18}\right) = a\left|\sin \frac{\pi}{6}\right| + c = \frac{7}{2}$$

$$\therefore \frac{a}{2} + c = \frac{7}{2} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $a = 3$, $c = 2$

$$\therefore abc = 18$$

답 18

연습 문제

● 본책 168~169쪽

398

전략 주어진 함수의 주기를 각각 구한다.

주어진 함수의 주기는 다음과 같다.

$$\textcircled{1} \frac{2\pi}{2} = \pi \quad \textcircled{2} \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi \quad \textcircled{3} 2\pi$$

$$\textcircled{4} \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi \quad \textcircled{5} \frac{\pi}{2}$$

따라서 주기가 가장 큰 것은 $\textcircled{4}$ 이다.

답 ④

399

전략 평행이동한 그래프의 식을 구한 후 주어진 점의 좌표를 대입한다.

$y = 3\sin \frac{\pi}{4}x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{4}$ 만큼, y

축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = 3\sin \frac{\pi}{4}\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}$$

이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{11}{12}, a\right)$ 를 지나므로

$$a = 3\sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} = 3 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

답 2

400

전략 $y = a \tan(bx - c) + d$ 의 그래프는 $y = a \tan bx$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{c}{b}$ 만큼, y 축의 방향으로 d 만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄱ. 주기는 $\frac{\pi}{3}$ 이다. (거짓)

ㄴ. $x = \frac{\pi}{4}$ 를 대입하면 $y = 2 \tan \frac{\pi}{4} + 1 = 3$

따라서 그래프는 점 $(\frac{\pi}{4}, 3)$ 을 지난다. (참)

ㄷ. 그래프의 점근선의 방정식은 $3x - \frac{\pi}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 에서

$$3x = n\pi \quad \therefore x = \frac{n}{3}\pi \quad (n \text{은 정수})$$

이때 $n = -3$ 이면 $x = -\pi$

따라서 직선 $x = -\pi$ 는 점근선이므로 그래프와 직선 $x = -\pi$ 는 만나지 않는다. (참)

ㄹ. $y = 2 \tan(3x - \frac{\pi}{2}) + 1 = 2 \tan 3(x - \frac{\pi}{6}) + 1$

따라서 그래프는 $y = 2 \tan 3x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$ 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다. **답** ㄴ, ㄷ, ㄹ

401

전략 주기를 이용하여 b 의 값을 구하고, 최솟값을 이용하여 a 의 값을 구한다.

함수 $f(x)$ 의 주기가 4π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 4\pi \quad \therefore b = \frac{1}{2}$$

또 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -1 이고 $a > 0$ 이므로

$$-a + 3 = -1 \quad \therefore a = 4$$

$$\therefore a + b = \frac{9}{2} \quad \text{답 } ①$$

402

전략 최댓값, 최솟값을 이용하여 a, b 의 값을 구하고, 주기를 이용하여 c 의 값을 구한다.

$$y = a \sin \frac{\pi}{6}(2x - 1) + b$$

$$= a \sin\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) + b$$

주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 1, 최솟값이 -3 이고 $a > 0$ 이므로

$$a + b = 1, -a + b = -3$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 2, b = -1$

또 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ 이므로 그래프에서

$$c = 3 + 6 = 9$$

$$\therefore abc = -18 \quad \text{답 } -18$$

403

전략 함수 $y = \cos ax$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{|a|}$ 임을 이용하여 선분 AB의 길이를 구한다.

$\overline{CD}$ 가 x 축에 평행하고 함수 $y = \cos \frac{\pi}{4}x$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로 사각형 ABCD는 등변사다리꼴이다.

함수 $y = \cos \frac{\pi}{4}x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$ 이므로

$$\overline{OA} = \overline{OB} = 2 \quad \therefore \overline{AB} = 4$$

한편 $\overline{CD} = 2$ 에서 점 C의 x 좌표는 1이므로 등변사다리꼴 ABCD의 높이를 h 라 하면

$$h = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \square ABCD = \frac{1}{2} \times (\overline{AB} + \overline{CD}) \times h$$

$$= \frac{1}{2} \times (4 + 2) \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

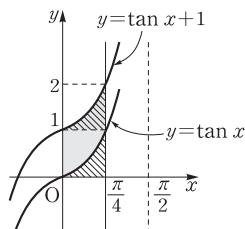
$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{답 } \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

404

전략 평행이동해도 그래프의 모양은 변하지 않음을 이용하여 넓이가 같은 부분을 찾는다.

함수 $y = \tan x + 1$ 의 그래프를 $y = \tan x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같다.



즉 구하는 부분의 넓이는 네 점 $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{4}, 0)$,
 $(\frac{\pi}{4}, 1)$, $(0, 1)$ 을 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이
 와 같으므로 $\frac{\pi}{4} \times 1 = \frac{\pi}{4}$ 답 $\frac{\pi}{4}$

405

전략 주기를 이용하여 두 점 A, B의 x 좌표를 구한다.

오른쪽 그림과 같이

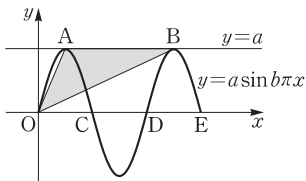
곡선 $y = a \sin b\pi x$

$(0 \leq x \leq \frac{3}{b})$ 가 x 축

과 만나는 점 중 원

점이 아닌 세 점을

차례대로 C, D, E라 하자.



함수 $y = a \sin b\pi x$ 의 주기가 $\frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{b}$ ($\because b > 0$)

이므로 점 D의 좌표는 $(\frac{2}{b}, 0)$

따라서 점 A의 x 좌표는 $\frac{2}{b} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2b}$

점 B의 x 좌표는 $\frac{1}{2b} + \frac{2}{b} = \frac{5}{2b}$

이때 삼각형 OAB의 넓이가 5이므로

$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times a = 5$ 에서

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2b} - \frac{1}{2b} \right) \times a = 5$$

$$\frac{a}{b} = 5 \quad \therefore a = 5b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 직선 OA의 기울기는

$$\frac{\frac{a}{2b}}{\frac{1}{2b}} = 2ab = 10b^2 \quad (\because \textcircled{1})$$

직선 OB의 기울기는 $\frac{\frac{a}{5}}{\frac{2}{b}} = \frac{2ab}{5} = 2b^2 \quad (\because \textcircled{1})$

두 직선의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$ 이므로

$$10b^2 \times 2b^2 = \frac{5}{4}, \quad b^4 = \frac{1}{16}$$

$$\therefore b = \frac{1}{2} \quad (\because b > 0)$$

$\textcircled{1}$ 에 $b = \frac{1}{2}$ 을 대입하면 $a = \frac{5}{2}$

$$\therefore a + b = 3$$

답 $\textcircled{3}$

406

전략 $f(x+p) = f(x)$ 를 만족시키는 양수 p 의 최솟값은 함수 $f(x)$ 의 주기를 이용한다.

$a > 0$ 이므로 주어진 함수의 최댓값은 $a+c$, 최솟값은 $-a+c$ 이다.

이때 최댓값과 최솟값의 합이 6이므로

$$a+c+(-a+c)=6$$

$$2c=6 \quad \therefore c=3$$

한편 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$ 이고, $0 < b < 5$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore b=4$$

따라서 $f(x) = a \cos 4x + 3$ 의 그래프가 점 $(\frac{\pi}{12}, 4)$ 를 지나므로

$$a \cos \frac{\pi}{3} + 3 = 4$$

$$\frac{a}{2} + 3 = 4 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore a+b+c = 2+4+3 = 9$$

답 9

🔍 해설 Focus

$f(x + \frac{\pi}{2}) = f(x)$ 가 성립한다고 해서 함수 $f(x)$ 의 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 것은 아니다. 주기가 $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{8}, \dots$ 인 함수

$f(x)$ 도 $f(x + \frac{\pi}{2}) = f(x)$ 를 만족시키기 때문이다.

그런데 $0 < b < 5$ 에서 $\frac{2\pi}{b} > \frac{2}{5}\pi$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

407

전략 함수 $y = a|\sin bx| + c$ 의 주기는 $\frac{\pi}{|b|}$ 임을 이용한다.

$a < 0$ 이므로 $0 \leq |\sin bx| \leq 1$ 에서

$$a \leq a|\sin bx| \leq 0$$

$$\therefore a+c \leq a|\sin bx| + c \leq c$$

이때 조건 (가)에서 최댓값과 최솟값의 차가 3이므로

$$c - (a+c) = 3 \quad \therefore a = -3$$

또 $b > 0$ 에서 주어진 함수의 주기는 $\frac{\pi}{b}$

함수 $y = \cos 4x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

즉 조건 (나)에서 $\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $b=2$

따라서 조건 (다)에서 $f(x) = -3|\sin 2x| + c$ 의 그래프가 점 $(0, 5)$ 를 지나므로

$$-3|\sin 0| + c = 5 \quad \therefore c = 5$$

$$\therefore a + b + c = 4$$

답 4

02 일반각에 대한 삼각함수의 성질

• 본책 170~176쪽

408

$$(1) \sin 750^\circ = \sin (360^\circ \times 2 + 30^\circ)$$

$$= \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$(2) \cos 420^\circ = \cos (360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$(3) \tan \frac{7}{3}\pi = \tan \left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\text{답 (1) } 30^\circ, 30^\circ, \frac{1}{2} \quad (2) \frac{1}{2} \quad (3) \sqrt{3}$$

409

$$(1) \tan \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(2) \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(3) \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{답 (1) } \frac{\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2) -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3) \frac{1}{2}$$

410

$$(1) \cos \frac{7}{6}\pi = \cos \left(\frac{\pi}{2} \times 2 + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) \sin 135^\circ = \sin (90^\circ \times 1 + 45^\circ)$$

$$= \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(3) \tan 240^\circ = \tan (90^\circ \times 2 + 60^\circ)$$

$$= \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$(4) \cos \frac{23}{6}\pi = \cos \left(\frac{\pi}{2} \times 7 + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{답 (1) } 2, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) 1, 45^\circ, 45^\circ, \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(3) \sqrt{3} \quad (4) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

411

$$(1) \sin 769^\circ = \sin (360^\circ \times 2 + 49^\circ) = \sin 49^\circ$$

삼각함수표에서 $\sin 49^\circ = 0.7547$ 이므로

$$\sin 769^\circ = 0.7547$$

$$(2) \cos 1029^\circ = \cos (360^\circ \times 3 - 51^\circ)$$

$$= \cos (-51^\circ) = \cos 51^\circ$$

삼각함수표에서 $\cos 51^\circ = 0.6293$ 이므로

$$\cos 1029^\circ = 0.6293$$

$$(3) \tan (-410^\circ) = -\tan 410^\circ$$

$$= -\tan (360^\circ + 50^\circ)$$

$$= -\tan 50^\circ$$

삼각함수표에서 $\tan 50^\circ = 1.1918$ 이므로

$$\tan (-410^\circ) = -1.1918$$

$$\text{답 (1) } 0.7547 \quad (2) 0.6293 \quad (3) -1.1918$$

412

$$\sin \left(-\frac{17}{6}\pi\right) = -\sin \frac{17}{6}\pi = -\sin \left(\frac{\pi}{2} \times 6 - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\cos \left(-\frac{10}{3}\pi\right) = \cos \frac{10}{3}\pi = \cos \left(\frac{\pi}{2} \times 6 + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = -\frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} = -2$$

답 -2

413

$$\cos (\pi + \theta) = -\cos \theta, \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta,$$

$$\cos (2\pi + \theta) = \cos \theta, \cos \left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = \sin \theta$$

∴ (주어진 식)

$$= -\cos \theta - (-\sin \theta) + \cos \theta - \sin \theta$$

$$= 0$$

답 0

414

(1) $\cos 85^\circ = \cos (90^\circ - 5^\circ) = \sin 5^\circ$

$$\cos 80^\circ = \cos (90^\circ - 10^\circ) = \sin 10^\circ$$

⋮

$$\cos 50^\circ = \cos (90^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ$$

∴ (주어진 식)

$$= \cos^2 0^\circ + (\cos^2 5^\circ + \cos^2 85^\circ) + \cdots$$

$$+ (\cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ)$$

$$+ \cos^2 45^\circ + \cos^2 90^\circ$$

$$= 1 + (\cos^2 5^\circ + \sin^2 5^\circ) + \cdots$$

$$+ (\cos^2 40^\circ + \sin^2 40^\circ) + \frac{1}{2} + 0$$

$$= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{8\text{개}} + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{19}{2}$$

(2) $\tan 89^\circ = \tan (90^\circ - 1^\circ) = \frac{1}{\tan 1^\circ}$

$$\tan 88^\circ = \tan (90^\circ - 2^\circ) = \frac{1}{\tan 2^\circ}$$

⋮

$$\tan 46^\circ = \tan (90^\circ - 44^\circ) = \frac{1}{\tan 44^\circ}$$

$$\therefore \tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \tan 3^\circ \times \cdots$$

$$\times \tan 88^\circ \times \tan 89^\circ$$

$$= (\tan 1^\circ \times \tan 89^\circ)$$

$$\times (\tan 2^\circ \times \tan 88^\circ) \times \cdots$$

$$\times (\tan 44^\circ \times \tan 46^\circ) \times \tan 45^\circ$$

$$= \left(\tan 1^\circ \times \frac{1}{\tan 1^\circ} \right)$$

$$\times \left(\tan 2^\circ \times \frac{1}{\tan 2^\circ} \right) \times \cdots$$

$$\times \left(\tan 44^\circ \times \frac{1}{\tan 44^\circ} \right) \times \tan 45^\circ$$

$$= \underbrace{1 \times 1 \times \cdots \times 1}_{44\text{개}} \times 1 = 1$$

답 (1) $\frac{19}{2}$ (2) 1

415

$$\theta = \frac{\pi}{12} \text{ 이므로 } 12\theta = \pi$$

$$\therefore \cos 11\theta = \cos (12\theta - \theta) = \cos (\pi - \theta)$$

$$= -\cos \theta$$

$$\cos 10\theta = \cos (12\theta - 2\theta) = \cos (\pi - 2\theta)$$

$$= -\cos 2\theta$$

⋮

$$\cos 7\theta = \cos (12\theta - 5\theta) = \cos (\pi - 5\theta)$$

$$= -\cos 5\theta$$

∴ (주어진 식)

$$= \cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos 6\theta$$

$$- \cos 5\theta - \cos 4\theta - \cdots - \cos \theta$$

$$+ \cos 12\theta$$

$$= \cos 6\theta + \cos 12\theta$$

$$= \cos \frac{\pi}{2} + \cos \pi$$

$$= 0 + (-1) = -1$$

답 -1

연습 문제

• 본책 177~178쪽

416

전략 함수 $f(x)$ 의 주기를 이용하여 a 의 값을 구한다.

함수 $f(x) = \sin\left(ax + \frac{\pi}{6}\right)$ 의 주기가 4π 이고 $a > 0$ 이

므로

$$\frac{2\pi}{a} = 4\pi \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

따라서 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$ 이므로

$$f(\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 ④

417

전략 함수 $y = \cos \frac{x}{2}$ 의 그래프를 주어진 순서대로 평행이동, 대칭이동한 그래프의 식을 구한다.

$y = \cos \frac{x}{2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 π 만큼 평행이

동한 그래프의 식은

$$\begin{aligned} y &= \cos \frac{x-\pi}{2} = \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \cos \left[- \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) \right] \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) \\ &= \sin \frac{x}{2} \end{aligned}$$

이 함수의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = \sin \frac{x}{2} \quad \therefore y = -\sin \frac{x}{2}$$

답 ④

418

전략 삼각형의 세 내각의 크기의 합이 π 임을 이용한다.

삼각형 ABC에서

$$A + B + C = \pi$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \tan \frac{A+B}{2} &= \tan \frac{\pi-C}{2} \\ &= \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) \\ &= \frac{1}{\tan \frac{C}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \sin \frac{A}{2} &= \sin \left\{ \frac{\pi - (B+C)}{2} \right\} \\ &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2} \right) \\ &= \cos \frac{B+C}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \cos A &= \cos \{ \pi - (B+C) \} \\ &= -\cos (B+C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \sin A &= \sin \{ \pi - (B+C) \} \\ &= \sin (B+C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \cos \frac{A}{2} &= \cos \left\{ \frac{\pi - (B+C)}{2} \right\} \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2} \right) \\ &= \sin \frac{B+C}{2} \end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

419

전략 각 θ 의 삼각함수로 변형하여 주어진 식을 간단히 한다.

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta, \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = -\cos \theta,$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta, \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta,$$

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta, \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = \sin \theta$$

$\therefore$ (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{-\cos \theta}{-\cos \theta \times (-\cos \theta)^2} \\ &\quad + \frac{-\sin \theta \times (-\tan \theta)^2}{\sin \theta} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta \\ &= \frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 1 \end{aligned}$$

답 1

420

전략 함수 $f(x)$ 의 주기가 p 이면 $f(x+p) = f(x)$ 임을 이용한다.

함수 $f(x)$ 의 주기가 p 이므로

$$f(x+p) = f(x)$$

$$\therefore f\left(\frac{2}{3}\pi - p\right)$$

$$= f\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$= \sin \frac{4}{3}\pi + 3 \cos^2 \frac{2}{3}\pi + \tan \frac{\pi}{3}$$

$$= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 3 \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \tan \frac{\pi}{3}$$

$$= -\sin \frac{\pi}{3} + 3 \times \left(-\cos \frac{\pi}{3}\right)^2 + \sqrt{3}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \sqrt{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}$

421

전략 함수 $y = a \sin(bx - c) + d$ 의 그래프는 $y = a \sin bx$ 의 그래프와 평행이동에 의하여 겹쳐진다.

$$\textcircled{1} y = \sin(2x - \pi) = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

이므로 $y = \sin 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$

만큼 평행이동한 것과 겹쳐진다.

$$\begin{aligned}\textcircled{2} y &= \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 \\ &= \cos\left\{-\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right\} + 1 \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 1 \\ &= \sin 2x + 1\end{aligned}$$

이므로 $y = \sin 2x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 겹쳐진다.

$\textcircled{3} y = 2 \sin 2x$ 의 그래프는 $y = \sin 2x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배 한 것이므로 평행이동하여 겹쳐지지 않는다.

$\textcircled{4} y = \sin 2x + 2$ 의 그래프는 $y = \sin 2x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것과 겹쳐진다.

$\textcircled{5} y = -\sin(2x + \pi) - 1 = \sin 2x - 1$
이므로 $y = \sin 2x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것과 겹쳐진다.

따라서 평행이동하여 겹쳐지지 않는 것은 $\textcircled{3}$ 이다.

답 $\textcircled{3}$

422

전략 $A+B+C=\pi$ 임을 이용하여 좌변을 변형한다.

$A+B+C=\pi$ 이므로

$$\begin{aligned}A+C &= \pi - B \\ \therefore 2 \sin \frac{A-B+C}{2} &= 2 \sin \frac{\pi-2B}{2} \\ &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) \\ &= 2 \cos B\end{aligned}$$

따라서 주어진 식은

$$\begin{aligned}2 \cos B &= \cos A \times (-\cos A) + \sin A \times (-\sin A) \\ 2 \cos B &= -\cos^2 A - \sin^2 A = -1 \\ \therefore \cos B &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 $-\frac{1}{2}$

423

전략 각의 크기의 합이 90° 또는 180° 인 것끼리 짝 지어 간단히 한다.

$$\textcircled{1}. \sin 50^\circ = \sin(90^\circ - 40^\circ) = \cos 40^\circ$$

$$\sin 60^\circ = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ$$

$$\sin 70^\circ = \sin(90^\circ - 20^\circ) = \cos 20^\circ$$

$$\sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \cos 10^\circ$$

$$\therefore \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \cdots$$

$$+ \sin^2 80^\circ + \sin^2 90^\circ$$

$$= (\sin^2 10^\circ + \sin^2 80^\circ)$$

$$+ (\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ)$$

$$+ (\sin^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ)$$

$$+ (\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ)$$

$$+ \sin^2 90^\circ$$

$$= (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ)$$

$$+ (\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ)$$

$$+ (\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ)$$

$$+ (\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ)$$

$$+ \sin^2 90^\circ$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$= 5 \text{ (참)}$$

$$\textcircled{2}. \cos 100^\circ = \cos(180^\circ - 80^\circ) = -\cos 80^\circ$$

$$\cos 110^\circ = \cos(180^\circ - 70^\circ) = -\cos 70^\circ$$

$\vdots$

$$\cos 170^\circ = \cos(180^\circ - 10^\circ) = -\cos 10^\circ$$

$$\therefore \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cdots$$

$$+ \cos 170^\circ + \cos 180^\circ$$

$$= \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cdots + \cos 90^\circ$$

$$+ (-\cos 80^\circ) + (-\cos 70^\circ) + \cdots$$

$$+ (-\cos 10^\circ) + \cos 180^\circ$$

$$= \cos 90^\circ + \cos 180^\circ$$

$$= 0 + (-1)$$

$$= -1 \text{ (거짓)}$$

$$\textcircled{3}. \tan 85^\circ = \tan(90^\circ - 5^\circ) = \frac{1}{\tan 5^\circ}$$

$$\tan 80^\circ = \tan(90^\circ - 10^\circ) = \frac{1}{\tan 10^\circ}$$

$\vdots$

$$\tan 50^\circ = \tan(90^\circ - 40^\circ) = \frac{1}{\tan 40^\circ}$$

$$\begin{aligned}
 &\therefore \tan 5^\circ \times \tan 10^\circ \times \tan 15^\circ \times \cdots \\
 &\quad \times \tan 80^\circ \times \tan 85^\circ \\
 &= (\tan 5^\circ \times \tan 85^\circ) \\
 &\quad \times (\tan 10^\circ \times \tan 80^\circ) \times \cdots \\
 &\quad \times (\tan 40^\circ \times \tan 50^\circ) \times \tan 45^\circ \\
 &= \left(\tan 5^\circ \times \frac{1}{\tan 5^\circ} \right) \\
 &\quad \times \left(\tan 10^\circ \times \frac{1}{\tan 10^\circ} \right) \times \cdots \\
 &\quad \times \left(\tan 40^\circ \times \frac{1}{\tan 40^\circ} \right) \times \tan 45^\circ \\
 &= 1 \times 1 \times \cdots \times 1 \times 1 \\
 &= 1 \text{ (참)}
 \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

424

전략 주어진 식을 각 θ 의 삼각함수로 나타낸다.

$$\begin{aligned}
 \sin(\pi - \theta) &= \sin \theta, \cos(3\pi + \theta) = -\cos \theta, \\
 \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) &= -\cos \theta, \cos\left(\frac{5}{2}\pi - \theta\right) = \sin \theta \\
 \therefore (\text{주어진 식}) \\
 &= \sin \theta \times (-\cos \theta) + (-\cos \theta) \times \sin \theta \\
 &= -2\sin \theta \cos \theta \quad \cdots \cdots ㉠ \\
 &= -2 \times \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \times \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
 &= \frac{-2ab}{a^2 + b^2} \quad \cdots \cdots ㉡
 \end{aligned}$$

한편 점 $P(a, b)$ 가 직선 $y = -\frac{3}{2}x$ 위의 점이므로

$$b = -\frac{3}{2}a \quad \cdots \cdots ㉢$$

㉡에 ㉢을 대입하면

$$\begin{aligned}
 (\text{주어진 식}) &= \frac{-2a \times \left(-\frac{3}{2}a\right)}{a^2 + \left(-\frac{3}{2}a\right)^2} = \frac{3a^2}{\frac{13}{4}a^2} \\
 &= \frac{12}{13} \quad (\because a \neq 0) \quad \text{답 } \frac{12}{13}
 \end{aligned}$$

다른 풀이 직선 $y = -\frac{3}{2}x$ 의 기울기가 $-\frac{3}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \tan \theta &= -\frac{3}{2}, \quad \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{3}{2} \\
 \therefore \sin \theta &= -\frac{3}{2} \cos \theta \quad \cdots \cdots ㉣
 \end{aligned}$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \left(-\frac{3}{2} \cos \theta\right)^2 + \cos^2 \theta &= 1 \\
 \frac{13}{4} \cos^2 \theta &= 1 \quad \therefore \cos^2 \theta = \frac{4}{13}
 \end{aligned}$$

이때 $a < 0$ 에서 점 P 는 제 2 사분면 위의 점이므로

$$\cos \theta = -\frac{2\sqrt{13}}{13} \quad (\because \cos \theta < 0)$$

㉣에서

$$\sin \theta = -\frac{3}{2} \times \left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}\right) = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

따라서 ㉠에서 구하는 식의 값은

$$-2 \times \frac{3\sqrt{13}}{13} \times \left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}\right) = \frac{12}{13}$$

425

전략 $4\theta = \pi$ 임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$4\theta = \pi$ 이므로

$$\begin{aligned}
 &\sin \theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin 8\theta \\
 &= \sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta \\
 &\quad + \sin(4\theta + \theta) + \sin(4\theta + 2\theta) \\
 &\quad + \sin(4\theta + 3\theta) + \sin(4\theta + 4\theta) \\
 &= \sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta + \sin(\pi + \theta) \\
 &\quad + \sin(\pi + 2\theta) + \sin(\pi + 3\theta) + \sin(\pi + 4\theta) \\
 &= \sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta \\
 &\quad - \sin \theta - \sin 2\theta - \sin 3\theta - \sin 4\theta \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

답 0

03 삼각함수를 포함한 식의 최대·최소 ● 본책 179~182쪽

426

$$\text{답 } |t-2|+1, -1, 1, t-1, -t+3, -1, 4, 1, 2$$

427

$$\begin{aligned}
 \text{답 } &-|t-3|+2, -1, 1, -t+5, t-1, 1, 0, \\
 &-1, -2
 \end{aligned}$$

428

$$(1) y = 3 \cos(x + \pi) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 3$$

$$= -3 \cos x + \cos x - 3$$

$$= -2 \cos x - 3$$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$-2 \leq -2 \cos x \leq 2$$

$$\therefore -5 \leq -2 \cos x - 3 \leq -1$$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 -1 , 최솟값은 -5 이다.

$$(2) \cos x = t \text{로 놓으면 } -1 \leq t \leq 1$$

주어진 함수는 $y = |2 - 3t| + 1$ 이므로

$$t \geq \frac{2}{3} \text{ 일 때, } y = 3t - 1$$

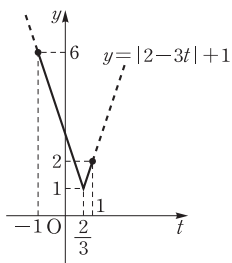
$$t < \frac{2}{3} \text{ 일 때, } y = -3t + 3$$

따라서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$t = -1 \text{에서 최댓값 } 6,$$

$$t = \frac{2}{3} \text{에서 최솟값 } 1$$

을 갖는다.



답 (1) 최댓값: -1 , 최솟값: -5

(2) 최댓값: 6 , 최솟값: 1

429

$\sin 2x = t$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$y = a|t + 2| + b$$

$$-1 \leq t \leq 1 \text{이므로 } 1 \leq t + 2 \leq 3$$

$$\therefore a + b \leq a|t + 2| + b \leq 3a + b \quad (\because a > 0)$$

이때 주어진 함수의 최댓값이 4 , 최솟값이 2 이므로

$$3a + b = 4, \quad a + b = 2$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 1$

$$\therefore ab = 1$$

답 1

430

$$(1) y = -\cos^2 x + 2 \sin x + 1$$

$$= -(1 - \sin^2 x) + 2 \sin x + 1$$

$$= \sin^2 x + 2 \sin x$$

$\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = t^2 + 2t = (t + 1)^2 - 1$$

$-1 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는

$$t = 1 \text{에서 최댓값 } 3,$$

$$t = -1 \text{에서 최솟값 } -1$$

을 갖는다.

$$(2) \sin x = t \text{로 놓으면 } -1 \leq t \leq 1 \text{이고}$$

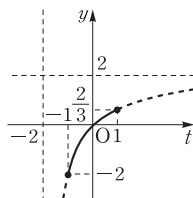
$$y = \frac{2t}{t+2} = -\frac{4}{t+2} + 2$$

$-1 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는

$$t = 1 \text{에서 최댓값 } \frac{2}{3},$$

$$t = -1 \text{에서 최솟값 } -2$$

를 갖는다.



$$(3) y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2(x + \pi)$$

$$= \cos x - (-\cos x)^2$$

$$= \cos x - \cos^2 x$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = t - t^2 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

$-1 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는

$$t = \frac{1}{2} \text{에서 최댓값 } \frac{1}{4},$$

$$t = -1 \text{에서 최솟값 } -2$$

를 갖는다.

답 (1) 최댓값: 3 , 최솟값: -1

(2) 최댓값: $\frac{2}{3}$, 최솟값: -2

(3) 최댓값: $\frac{1}{4}$, 최솟값: -2

개념 노트

제한된 범위에서 이차함수의 최대·최소

$\alpha \leq x \leq \beta$ 에서 이차함수 $f(x) = a(x - p)^2 + q$ 의 최댓값과 최솟값은

① $\alpha \leq p \leq \beta$ 일 때

$\Rightarrow f(p), f(\alpha), f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

② $p < \alpha$ 또는 $p > \beta$ 일 때

$\Rightarrow f(\alpha), f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

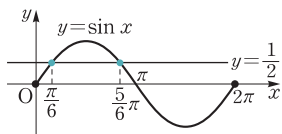
04 삼각함수가 포함된 방정식과 부등식 • 본책 183~191쪽

431

답 $\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$

432

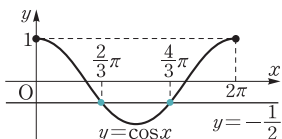
- (1) $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의



교점의 x 좌표가 $\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ 이므로 구하는 해는

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

- (2) $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선

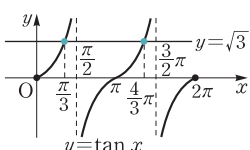


$y = -\frac{1}{2}$ 의 교점의

x 좌표가 $\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ 이므로 구하는 해는

$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi$$

- (3) $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = \sqrt{3}$ 의 교점의 x 좌표가 $\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi$ 이므로



구하는 해는 $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$

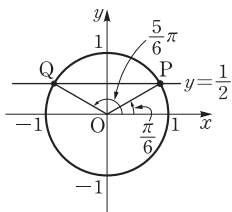
답 (1) $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$

(2) $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$

(3) $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$

다른 풀이 (1) 직선 $y = \frac{1}{2}$ 과

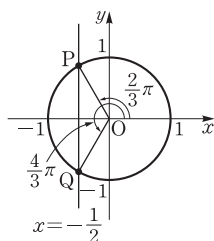
단위원의 교점 P, Q에 대하여 동경 OP, OQ가 나타내는 각이 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 해는



$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

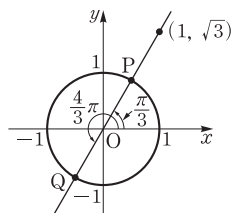
- (2) 직선 $x = -\frac{1}{2}$ 과 단위원의

교점 P, Q에 대하여 동경 OP, OQ가 나타내는 각이 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 해는



$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi$$

- (3) 두 점 $(0, 0), (1, \sqrt{3})$ 을 지나는 직선과 단위원의 교점 P, Q에 대하여 동경 OP, OQ가 나타내는 각이 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 해는

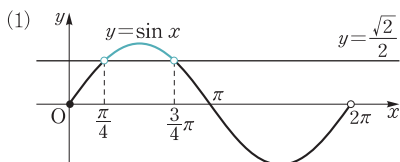


$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi$$

433

답 $\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi \leq x < \frac{3}{2}\pi$

434



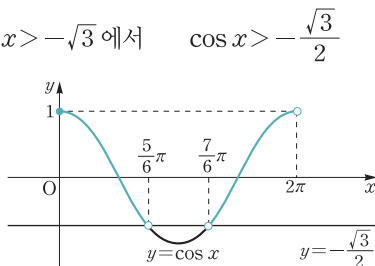
함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$$

따라서 구하는 해는

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$$

- (2) $2 \cos x > -\sqrt{3}$ 에서 $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$



II-2

삼각함수의 그래프

함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점
의 x 좌표는

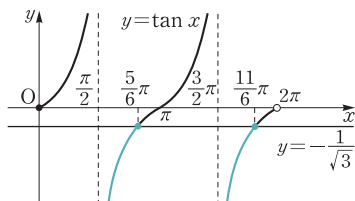
$$\frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi$$

따라서 구하는 해는

$$0 \leq x < \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{7}{6}\pi < x < 2\pi$$

(3) $\sqrt{3} \tan x + 1 \leq 0$ 에서

$$\tan x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$$



함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ 의 교점
의 x 좌표는

$$\frac{5}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$$

따라서 구하는 해는

$$\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi < x \leq \frac{11}{6}\pi$$

$$\text{답 (1) } \frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$$

$$(2) 0 \leq x < \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{7}{6}\pi < x < 2\pi$$

$$(3) \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi < x \leq \frac{11}{6}\pi$$

다른 풀이 (1) 직선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 와

단위원의 교점 P, Q에 대
하여 동경 OP, OQ가 나타
내는 각의 크기는 각각

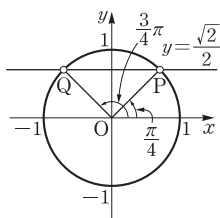
$$\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$$

이때 부등식 $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해는 단위원 위의 점 중

에서 y 좌표가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 보다 큰 점을 R라 할 때 동경

OR가 나타내는 각의 범위이므로

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$$



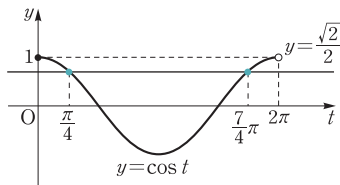
435

(1) $2x = t$ 로 놓으면

$$\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

한편 $0 \leq x < \pi$ 에서 $0 \leq 2x < 2\pi$

$$\therefore 0 \leq t < 2\pi$$



$0 \leq t < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos t$ 의 그래프와 직선

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 교점의 t 좌표는 $\frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi$ 이므로

$$2x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } 2x = \frac{7}{4}\pi$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{8} \text{ 또는 } x = \frac{7}{8}\pi$$

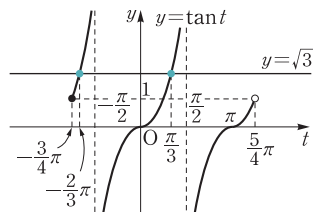
(2) $x + \frac{\pi}{4} = t$ 로 놓으면

$$\tan t = \sqrt{3}$$

한편 $-\pi \leq x < \pi$ 에서

$$-\frac{3}{4}\pi \leq x + \frac{\pi}{4} < \frac{5}{4}\pi$$

$$\therefore -\frac{3}{4}\pi \leq t < \frac{5}{4}\pi$$



$-\frac{3}{4}\pi \leq t < \frac{5}{4}\pi$ 에서 함수 $y = \tan t$ 의 그래프와

직선 $y = \sqrt{3}$ 의 교점의 t 좌표는 $-\frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$x + \frac{\pi}{4} = -\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore x = -\frac{11}{12}\pi \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{12}$$

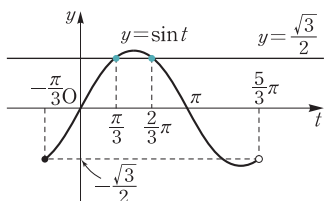
(3) $2 \sin(x - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ 에서

$$\sin(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x - \frac{\pi}{3} = t \text{로 놓으면} \quad \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{한편 } 0 \leq x < 2\pi \text{에서} \quad -\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$$

$$\therefore -\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{5}{3}\pi$$



$-\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{5}{3}\pi$ 에서 함수 $y = \sin t$ 의 그래프와 직

선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 t 좌표는 $\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$ 이므로

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \pi$$

답 (1) $x = \frac{\pi}{8}$ 또는 $x = \frac{7}{8}\pi$

(2) $x = -\frac{11}{12}\pi$ 또는 $x = \frac{\pi}{12}$

(3) $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \pi$

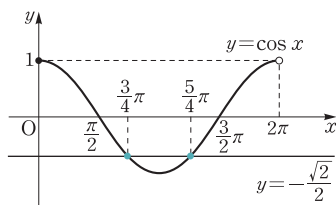
436

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x, \cos(\pi - x) = -\cos x$$

이므로 주어진 방정식은

$$\cos x - (-\cos x) = -\sqrt{2}$$

$$\therefore \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



이때 $0 \leq x < 2\pi$ 이므로

$$x = \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } x = \frac{5}{4}\pi$$

따라서 두 실근의 차는

$$\frac{5}{4}\pi - \frac{3}{4}\pi = \frac{\pi}{2}$$

답 $\frac{\pi}{2}$

437

(1) $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$ 에서

$$(\cos x + 1)(\cos x - 2) = 0$$

$$\therefore \cos x = -1 \text{ 또는 } \cos x = 2$$

그런데 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로 $\cos x = -1$

이때 $0 \leq x < 2\pi$ 이므로 $x = \pi$

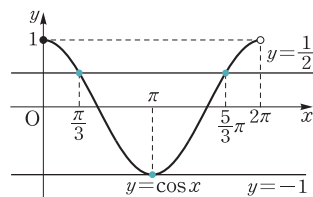
(2) $2 \sin^2 x - \cos x - 1 = 0$ 에서

$$2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 = 0$$

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$(\cos x + 1)(2 \cos x - 1) = 0$$

$$\therefore \cos x = -1 \text{ 또는 } \cos x = \frac{1}{2}$$



(i) $\cos x = -1$ 일 때, $x = \pi$

(ii) $\cos x = \frac{1}{2}$ 일 때, $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \pi \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi$$

(3) $\tan x + \frac{3}{\tan x} = 2\sqrt{3}$ 에서 $\tan x \neq 0$ 이므로 양변

에 $\tan x$ 를 곱하면

$$\tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x + 3 = 0$$

$$(\tan x - \sqrt{3})^2 = 0 \quad \therefore \tan x = \sqrt{3}$$

이때 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $x = \frac{\pi}{3}$

답 (1) $x = \pi$

(2) $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \pi$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

(3) $x = \frac{\pi}{3}$

438

$2 \cos^2 x + \sin(\pi + x) - 2 = 0$ 에서

$$2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 2 = 0$$

$$2 \sin^2 x + \sin x = 0, \quad \sin x(2 \sin x + 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = 0 \text{ 또는 } \sin x = -\frac{1}{2}$$

(i) $\sin x = 0$ 일 때, $x = \pi$

(ii) $\sin x = -\frac{1}{2}$ 일 때

$$x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = \pi \text{ 또는 } x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi$$

따라서 $M = \frac{11}{6}\pi$, $m = \pi$ 이므로

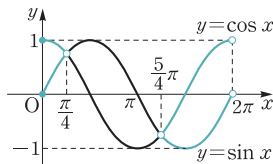
$$M + m = \frac{17}{6}\pi$$

답 $\frac{17}{6}\pi$

439

(1) $\sin x < \cos x$ 의 해

는 $y = \cos x$ 의 그래프가 $y = \sin x$ 의 그래프보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서

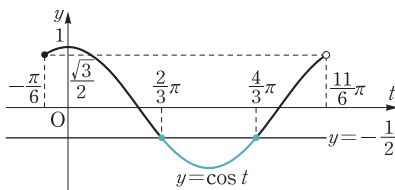


$$0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{5}{4}\pi < x < 2\pi$$

(2) $x - \frac{\pi}{6} = t$ 로 놓으면 $\cos t \leq -\frac{1}{2}$

한편 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $-\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$

$$\therefore -\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{11}{6}\pi$$



$-\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{11}{6}\pi$ 에서 $\cos t \leq -\frac{1}{2}$ 의 해는

$$\frac{2}{3}\pi \leq t \leq \frac{4}{3}\pi$$

따라서 $\frac{2}{3}\pi \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{4}{3}\pi$ 이므로

$$\frac{5}{6}\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$$

답 (1) $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi < x < 2\pi$

(2) $\frac{5}{6}\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$

440

(1) $2\sin^2(x + \frac{3}{2}\pi) + 3\sin x - 3 \geq 0$ 에서

$$2\cos^2 x + 3\sin x - 3 \geq 0$$

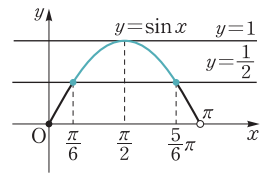
$$2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x - 3 \geq 0$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 \leq 0$$

$$(2\sin x - 1)(\sin x - 1) \leq 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$$

따라서 오른쪽 그림에서 주어진 부등식의 해는



$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$$

(2) $2\cos x > 3\tan x$ 에서 $2\cos x > \frac{3\sin x}{\cos x}$

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos x > 0$ 이므로 양변에

$\cos x$ 를 곱하면

$$2\cos^2 x > 3\sin x$$

$$2(1 - \sin^2 x) > 3\sin x$$

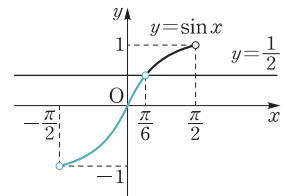
$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 < 0$$

$$\therefore (\sin x + 2)(2\sin x - 1) < 0$$

그런데 $\sin x + 2 > 0$ 이므로

$$2\sin x - 1 < 0 \quad \therefore \sin x < \frac{1}{2}$$

따라서 오른쪽 그림에서 주어진 부등식의 해는



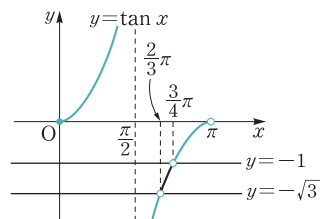
$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{6}$$

(3) $\tan^2 x + (\sqrt{3} + 1)\tan x > -\sqrt{3}$ 에서

$$\tan^2 x + (\sqrt{3} + 1)\tan x + \sqrt{3} > 0$$

$$(\tan x + \sqrt{3})(\tan x + 1) > 0$$

$$\therefore \tan x < -\sqrt{3} \text{ 또는 } \tan x > -1$$



따라서 위의 그림에서 주어진 부등식의 해는

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2} < x < \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{또는 } \frac{3}{4}\pi < x < \pi$$

답 (1) $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$ (2) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{6}$

(3) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{3}{4}\pi < x < \pi$

441

이차함수 $y = x^2 + 2(2 \sin \theta + 1)x + 4$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2 + 2(2 \sin \theta + 1)x + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

즉 이차방정식 $x^2 + 2(2 \sin \theta + 1)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때

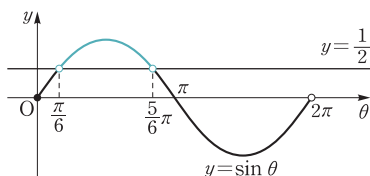
$$\frac{D}{4} = (2 \sin \theta + 1)^2 - 4 > 0$$

$$4 \sin^2 \theta + 4 \sin \theta - 3 > 0$$

$$\therefore (2 \sin \theta + 3)(2 \sin \theta - 1) > 0$$

그런데 $2 \sin \theta + 3 > 0$ 이므로

$$2 \sin \theta - 1 > 0 \quad \therefore \sin \theta > \frac{1}{2}$$



따라서 위의 그림에서 구하는 θ 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi \quad \text{답 } \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$$

442

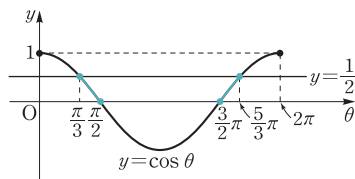
모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - (2 \cos \theta)x + \frac{1}{2} \cos \theta \geq 0$

이 성립하려면 이차방정식

$x^2 - (2 \cos \theta)x + \frac{1}{2} \cos \theta = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4} = \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \leq 0$$

$$\cos \theta \left(\cos \theta - \frac{1}{2} \right) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq \cos \theta \leq \frac{1}{2}$$



따라서 위의 그림에서 구하는 θ 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$$

답 $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi$

개념 노트

이차부등식이 항상 성립할 조건

① $ax^2 + bx + c \geq 0 \iff a > 0, b^2 - 4ac \leq 0$

② $ax^2 + bx + c \leq 0 \iff a < 0, b^2 - 4ac \leq 0$

연습 문제

● 본책 192~194쪽

443

전략 주어진 함수를 $\cos x$ 에 대한 이차식의 꼴로 변형한다.

$$y = \sin^2 x + \cos x + a - 2$$

$$= (1 - \cos^2 x) + \cos x + a - 2$$

$$= -\cos^2 x + \cos x + a - 1$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = -t^2 + t + a - 1 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + a - \frac{3}{4}$$

$-1 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는

$$t = -1 \text{에서 최솟값 } a - 3$$

을 가지므로

$$a - 3 = -\frac{1}{4} \quad \therefore a = \frac{11}{4}$$

답 $\frac{11}{4}$

444

전략 $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ 임을 이용하여 주어진 함수를 $\tan x$ 에 대한 이차식의 꼴로 변형한다.

$$y = \frac{\sin^2 x + \sin x \cos x - 4 \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x} - 4$$

$$= \tan^2 x + \tan x - 4$$

$\tan x = t$ 로 놓으면 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 $-1 \leq t \leq 1$ 이

고 $y = t^2 + t - 4 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$

$-1 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는

$t = 1$ 에서 최댓값 -2 ,

$t = -\frac{1}{2}$ 에서 최솟값 $-\frac{17}{4}$

을 가지므로 $M = -2, m = -\frac{17}{4}$

$\therefore M + m = -\frac{25}{4}$ 답 $-\frac{25}{4}$

445

전략 $f^{-1}(a) = b$ 이면 $f(b) = a$ 임을 이용한다.

$g^{-1}(f(x)) = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$f(x) = g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

즉 $\cos x = \frac{1}{2}$ 이므로

$x = -\frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{\pi}{3}$ ($\because -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$)

답 $x = -\frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{\pi}{3}$

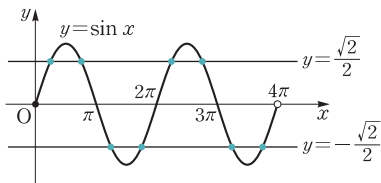
참고 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $g(x) = \sin x$ 는 일대일대응이므로 역함수 $g^{-1}(x)$ 가 존재한다.

446

전략 그래프의 교점의 개수를 이용하여 실근의 개수를 구한다.

$2|\sin x| = \sqrt{2}$, 즉 $|\sin x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서

$\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$



위의 그림에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 두 직선

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 교점이 각각 4개이므로 방정식

$|\sin x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 실근의 개수는 8이다. 답 8

447

전략 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ 임을 이용하여 주어진 방정식을 $\sin x$ 에 대한 이차방정식의 꼴로 변형한다.

$2 \cos x + 3 \tan x = 0$ 에서

$2 \cos x + 3 \times \frac{\sin x}{\cos x} = 0$

$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\cos x \neq 0$ 이므로 양변에 $\cos x$ 를 곱하면

$2 \cos^2 x + 3 \sin x = 0$

$2(1 - \sin^2 x) + 3 \sin x = 0$

$2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$

$(2 \sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$

$\therefore \sin x = -\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x = 2$

그런데 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로

$\sin x = -\frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{7}{6}\pi$ ($\because \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$) 답 $x = \frac{7}{6}\pi$

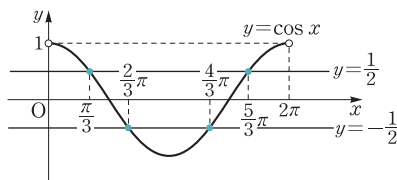
448

전략 방정식의 해를 구한 후 그중에서 부등식을 만족시키는 x 의 값을 찾는다.

$4 \cos^2 x - 1 = 0$ 에서

$(2 \cos x + 1)(2 \cos x - 1) = 0$

$\therefore \cos x = -\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x = \frac{1}{2}$



위의 그림에서

(i) $\cos x = -\frac{1}{2}$ 일 때, $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$

(ii) $\cos x = \frac{1}{2}$ 일 때, $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$

또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

이때 $\sin x \cos x < 0$ 을 만족시키는 x 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이므로

$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi$$

따라서 구하는 x 의 값의 합은

$$\frac{2}{3}\pi + \frac{5}{3}\pi = \frac{7}{3}\pi \quad \text{답 ②}$$

449

전략 삼각함수의 그래프를 이용하여 주어진 부등식의 해를 구한다.

$$\tan^2 x - (\sqrt{3} - 1)\tan x < \sqrt{3} \text{에서}$$

$$\tan^2 x - (\sqrt{3} - 1)\tan x - \sqrt{3} < 0$$

$$(\tan x + 1)(\tan x - \sqrt{3}) < 0$$

$$\therefore -1 < \tan x < \sqrt{3}$$

오른쪽 그림에서 부등식의 해는

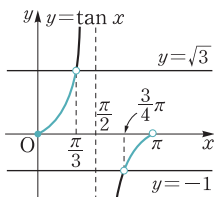
$$0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ 또는}$$

$$\frac{3}{4}\pi < x < \pi$$

$$\therefore A = \left\{ x \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{3}{4}\pi < x < \pi \right\}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{\pi}{3} < \frac{2}{3}\pi < \frac{3}{4}\pi \text{이므로} \quad \frac{2}{3}\pi \notin A$$

답 ④



450

전략 $\tan x = t$ 로 치환하여 t 에 대한 유리함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

$$\tan x = t \text{로 놓으면 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{에서 } 0 \leq t \leq 1 \text{이고}$$

$$y = \frac{2t+1}{t+2} = -\frac{3}{t+2} + 2$$

$0 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는

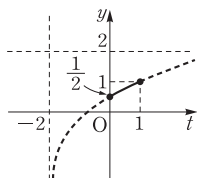
$$t=1 \text{에서 최댓값 } 1,$$

$$t=0 \text{에서 최솟값 } \frac{1}{2}$$

을 갖는다.

$$\text{따라서 } M=1, m=\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$M-m = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$

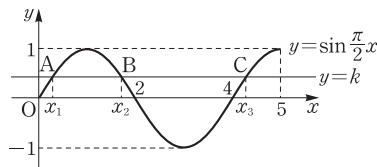


451

전략 $y = \sin \frac{\pi}{2}x$ 의 주기와 그래프의 대칭성을 이용하여 세 점 A, B, C의 x 좌표 사이의 관계식을 구한다.

함수 $y = \sin \frac{\pi}{2}x$ 의 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ 이므로 곡선

$y = \sin \frac{\pi}{2}x$ ($0 \leq x \leq 5$)가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 0, 2, 4이다.



세 점 A, B, C의 x 좌표를 각각 x_1, x_2, x_3 이라 하면

$$x_2 = 2 - x_1, x_3 = 4 + x_1$$

이때 세 점 A, B, C의 x 좌표의 합이 $\frac{25}{4}$ 이므로

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{25}{4} \text{에서}$$

$$x_1 + (2 - x_1) + (4 + x_1) = \frac{25}{4}$$

$$x_1 + 6 = \frac{25}{4}$$

$$\therefore x_1 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \overline{AB} = x_2 - x_1 = (2 - x_1) - x_1 = 2 - 2x_1$$

$$= 2 - 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

답 ③

해설 Focus

곡선 $y = \sin \frac{\pi}{2}x$ 는 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 1 \quad \therefore x_2 = 2 - x_1$$

또 함수 $y = \sin \frac{\pi}{2}x$ 의 주기가 4이므로

$$x_3 = 4 + x_1$$

452

전략 각 부등식을 풀어 연립부등식의 해를 구한다.

$$(i) \quad 2 \cos x < 1 \text{에서} \quad \cos x < \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$$

(ii) $2 \sin x > 1$ 에서 $\sin x > \frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$$

(i), (ii)에서 연립부등식의 해는

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{6}\pi$$

즉 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{5}{6}\pi$ 이므로

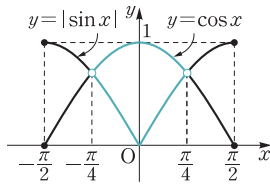
$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5}{6}\pi\right) \\ &= \sin \frac{7}{6}\pi \\ &= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\sin \frac{\pi}{6} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 $-\frac{1}{2}$

453

전략 $y = |\sin x|$, $y = \cos x$ 의 그래프를 이용하여 주어진 부등식의 해를 구한다.

부등식 $|\sin x| < \cos x$ 의 해는 $y = |\sin x|$ 의 그래프가 $y = \cos x$ 의 그래프보다 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서



$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$$

답 $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$

454

전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 - 2\sin^2 \theta = 0$ 이 부호가 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$1 - 2\sin^2 \theta < 0, \quad \sin^2 \theta > \frac{1}{2}$$

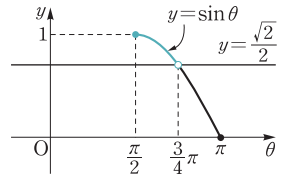
$$\therefore \sin \theta < -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } \sin \theta > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \text{에서 } 0 \leq \sin \theta \leq 1 \text{이므로}$$

$$\sin \theta > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

오른쪽 그림에서 조건을 만족시키는 θ 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3}{4}\pi$$



따라서 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{3}{4}\pi$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin \alpha - \tan \beta &= \sin \frac{\pi}{2} - \tan \frac{3}{4}\pi \\ &= 1 - \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 1 + \tan \frac{\pi}{4} \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

답 2

455

전략 $\cos^2 \theta - 3\cos \theta - a + 9$ 의 최솟값이 0 이상임을 이용한다.

$\cos \theta = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고 주어진 부등식은

$$t^2 - 3t - a + 9 \geq 0$$

$f(t) = t^2 - 3t - a + 9$ 라 하면

$$f(t) = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - a + \frac{27}{4}$$

$-1 \leq t \leq 1$ 일 때, $f(t)$ 는 $t = 1$ 에서 최솟값을 가지므로

부등식 $f(t) \geq 0$ 이 성립하려면

$$f(1) = 1 - 3 - a + 9 \geq 0$$

$$7 - a \geq 0 \quad \therefore a \leq 7$$

답 $a \leq 7$

456

전략 $0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ 에서의 $\pi \cos x$ 의 값의 범위를 구한다.

$$0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi \text{이므로} \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\therefore -\pi \leq \pi \cos x \leq \pi$$

즉 $\cos(\pi \cos x) = 0$ 에서

$$\pi \cos x = -\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \pi \cos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \cos x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos x = \frac{1}{2}$$

(i) $\cos x = -\frac{1}{2}$ 일 때, $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$

(ii) $\cos x = \frac{1}{2}$ 일 때, $x = \frac{\pi}{3}$

(i), (ii)에서 모든 실근의 합은

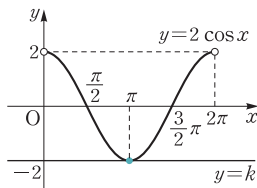
$$\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi = \frac{7}{3}\pi$$

답 $\frac{7}{3}\pi$

457

전략 두 함수의 그래프가 한 점에서 만나려면 방정식 $\cos x = \cos(\pi + x) + k$ 가 한 개의 실근을 가져야 함을 이용한다.

$\cos(\pi + x) = -\cos x$ 이므로 두 함수 $y = \cos x$, $y = -\cos x + k$ 의 그래프가 한 점에서 만나려면 방정식 $\cos x = -\cos x + k$, 즉 $2\cos x = k$ 가 한 개의 실근을 가져야 한다.



따라서 위의 그림과 같이 $y = 2\cos x$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점이 1개이어야 하므로

$$k = -2 \quad \text{답 -2}$$

참고 (i) $k < -2$ 또는 $k \geq 2$ 이면 방정식은 실근을 갖지 않는다.

(ii) $-2 < k < 2$ 이면 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

458

전략 한 종류의 삼각함수로 통일한 후 삼각함수의 최댓값과 최솟값을 이용한다.

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta - \cos \theta - a + 1 &= 0 \text{에서} \\ (1 - \cos^2 \theta) - \cos \theta - a + 1 &= 0 \\ \therefore \cos^2 \theta + \cos \theta - 2 &= -a \end{aligned}$$

$\cos \theta = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$t^2 + t - 2 = -a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$y = t^2 + t - 2$ 라 하면

$$y = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

$-1 \leq t \leq 1$ 일 때, 이 함수는

$t = 1$ 에서 최댓값 0,

$t = -\frac{1}{2}$ 에서 최솟값 $-\frac{9}{4}$

를 갖는다.

따라서 방정식 ①의 실근이 존재하려면

$$-\frac{9}{4} \leq -a \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq \frac{9}{4} \quad \text{답 } 0 \leq a \leq \frac{9}{4}$$

459

전략 주어진 포물선의 꼭짓점의 좌표를 구한 후 θ 에 대한 부등식을 세운다.

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2x \sin \theta + \cos^2 \theta \\ &= (x - \sin \theta)^2 - \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{aligned}$$

이므로 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$$(\sin \theta, -\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

이때 그래프의 꼭짓점이 직선 $y = \sqrt{3}x + 1$ 의 아래쪽에 있으므로

$$\begin{aligned} -\sin^2 \theta + \cos^2 \theta &< \sqrt{3} \sin \theta + 1 \\ -\sin^2 \theta + (1 - \sin^2 \theta) &< \sqrt{3} \sin \theta + 1 \\ 2\sin^2 \theta + \sqrt{3} \sin \theta &> 0 \\ \sin \theta (2\sin \theta + \sqrt{3}) &> 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \sin \theta < -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 또는 } \sin \theta > 0$$

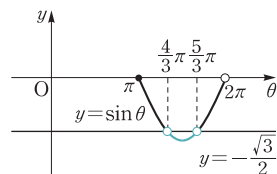
$\pi \leq \theta < 2\pi$ 에서 $-1 \leq \sin \theta \leq 0$ 이므로

$$\sin \theta < -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

오른쪽 그림에서 구하는

θ 의 값의 범위는

$$\frac{4}{3}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$$



$$\text{답 } \frac{4}{3}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$$

3 삼각함수의 활용

II. 삼각함수

01 사인법칙

● 본책 196~200쪽

460

삼각형 ABC에서

$$C = 180^\circ - (45^\circ + 105^\circ) = 30^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{20}{\sin 30^\circ}$ 이므로

$$a \sin 30^\circ = 20 \times \sin 45^\circ$$

$$\therefore a = 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = 20\sqrt{2} \quad \text{답 } 20\sqrt{2}$$

461

(1) 사인법칙에 의하여 $\frac{15}{\sin 30^\circ} = \frac{30}{\sin C}$ 이므로

$$15 \sin C = 30 \sin 30^\circ$$

$$\therefore \sin C = 30 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{15} = 1$$

$$0^\circ < C < 180^\circ \text{ 이므로 } C = 90^\circ$$

이때 삼각형 ABC에서

$$B = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ$$

(2) 사인법칙에 의하여

$$\frac{15}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ}$$

$$b \sin 30^\circ = 15 \sin 60^\circ$$

$$\therefore b = 15 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = 15\sqrt{3}$$

답 (1) 60° (2) $15\sqrt{3}$

다른 풀이 (2) 삼각형 ABC는 $C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이

므로 피타고라스 정리에 의하여

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{30^2 - 15^2} = 15\sqrt{3}$$

462

사인법칙에 의하여 $\frac{6}{\sin 60^\circ} = \frac{4}{\sin B}$ 이므로

$$6 \sin B = 4 \sin 60^\circ$$

$$\therefore \sin B = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \cos^2 B = 1 - \sin^2 B$$

$$= 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \quad \text{답 } \frac{2}{3}$$

463

삼각형 ABC에서

$$B = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라

하면 사인법칙에 의하여

$$2R = \frac{3\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6$$

$$\therefore R = 3$$

따라서 외접원의 넓이는

$$\pi \times 3^2 = 9\pi$$

답 9π

464

$A + B + C = 180^\circ$ 이고, $A : B : C = 3 : 2 : 1$ 이므로

$$A = 180^\circ \times \frac{3}{6} = 90^\circ$$

$$B = 180^\circ \times \frac{2}{6} = 60^\circ$$

$$C = 180^\circ \times \frac{1}{6} = 30^\circ$$

따라서 사인법칙에 의하여

$$a : b : c = \sin 90^\circ : \sin 60^\circ : \sin 30^\circ$$

$$= 1 : \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2}$$

$$= 2 : \sqrt{3} : 1$$

답 $2 : \sqrt{3} : 1$

465

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}$$

이것을 주어진 식에 대입하면

$$a \times \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = b \times \left(\frac{b}{2R}\right)^2$$

$$a^3 - b^3 = 0, \quad (a-b)(a^2 + ab + b^2) = 0$$

$$\therefore a = b \text{ 또는 } a^2 + ab + b^2 = 0$$

그런데 $a > 0, b > 0$ 에서 $a^2 + ab + b^2 \neq 0$ 이므로

$$a = b$$

따라서 삼각형 ABC는 $a = b$ 인 이등변삼각형이다.

답 $a = b$ 인 이등변삼각형

466

거울의 반지름의 길이를 R 라 하면 $\triangle ABC$ 에서 사인 법칙에 의하여

$$2R = \frac{40}{\sin 45^\circ} = \frac{40}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 40\sqrt{2}$$

$$\therefore R = 20\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

따라서 거울의 둘레의 길이는

$$2\pi R = 2\pi \times 20\sqrt{2} = 40\sqrt{2}\pi \text{ (cm)}$$

답 $40\sqrt{2}\pi \text{ cm}$

02 코사인법칙

● 본책 201~205쪽

467

(1) 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} a^2 &= (\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2 \times \sqrt{2} \times 3 \cos 135^\circ \\ &= 2 + 9 - 6\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 17 \end{aligned}$$

$$\text{그런데 } a > 0 \text{ 이므로 } a = \sqrt{17}$$

(2) 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{2^2 + 3^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \times 2 \times 3} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{그런데 } 0^\circ < A < 180^\circ \text{ 이므로 } A = 60^\circ$$

답 (1) $\sqrt{17}$ (2) 60°

468

삼각형 ABC 에서 b 가 가장 짧은 변의 길이이므로 B 가 최소각의 크기이다.

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{6})^2 - 2^2}{2 \times (\sqrt{3}+1) \times \sqrt{6}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\text{그런데 } 0^\circ < B < 180^\circ \text{ 이므로 } B = 45^\circ$$

따라서 최소각의 크기는 45° 이다.

답 45°

469

삼각형 ABC 에서 $B+C=180^\circ-A$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin \frac{B+C-A}{2} &= \sin \frac{180^\circ-A-A}{2} \\ &= \sin (90^\circ-A) = \cos A \end{aligned}$$

$$\text{한편 } \frac{\sin A}{6} = \frac{\sin B}{5} = \frac{\sin C}{4} \text{ 에서}$$

$$\sin A : \sin B : \sin C = 6 : 5 : 4$$

사인법칙에 의하여

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 6 : 5 : 4$$

따라서 $a=6k$, $b=5k$, $c=4k$ ($k>0$)라 하면 코사인 법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{(5k)^2 + (4k)^2 - (6k)^2}{2 \times 5k \times 4k} = \frac{1}{8} \quad \text{답 } \frac{1}{8}$$

470

$a \cos B = b \cos A + c$ 에서

$$a \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + c$$

$$c^2 + a^2 - b^2 = b^2 + c^2 - a^2 + 2c^2$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC 는 $A=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

답 $A=90^\circ$ 인 직각삼각형

471

삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \cos 120^\circ \\ &= 36 + 100 - 120 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 196 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{BC} = 14 \text{ (m)} \quad (\because \overline{BC} > 0)$$

이때 연못의 반지름의 길이를 R 라 하면 R 는 삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이이므로 사인법칙에 의하여

$$2R = \frac{14}{\sin 120^\circ} = \frac{14}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{28\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore R = \frac{14\sqrt{3}}{3} \text{ (m)}$$

따라서 연못의 반지름의 길이는 $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ m이다.

답 $\frac{14\sqrt{3}}{3} \text{ m}$



472

전략 먼저 사인법칙을 이용하여 B 의 크기를 구한다.

사인법칙에 의하여

$$\frac{4}{\sin B} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}, \quad 4\sqrt{3} \sin B = 4 \sin 60^\circ$$

$$\therefore \sin B = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

그런데 $C=60^\circ$ 에서 $0^\circ < B < 120^\circ$ 이므로

$$B = 30^\circ$$

$$\therefore A = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ$$

따라서 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin 90^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore a = 4\sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 8$$

답 8

473

전략 사인법칙을 이용하여 주어진 식을 삼각형의 변의 길이에 대한 식으로 변형한다.

삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$R=3, a+b+c=12$$

사인법칙에 의하여

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R}$$

$$= \frac{a+b+c}{2R}$$

$$= \frac{12}{6} = 2$$

답 2

474

전략 a, b 를 c 에 대한 식으로 나타낸다.

$$a+b-2c=0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$2a-3b+3c=0 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면} \quad a = \frac{3}{5}c, b = \frac{7}{5}c$$

$$\therefore \sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$$

$$= \frac{3}{5}c : \frac{7}{5}c : c$$

$$= 3 : 7 : 5$$

답 3 : 7 : 5

475

전략 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합이 180° 임을 이용하여 $\cos D$ 의 값을 구한다.

사각형 $ABCD$ 가 원에 내접하므로 $B+D=180^\circ$ 에서

$$D = 180^\circ - B$$

$$\therefore \cos D = \cos (180^\circ - B)$$

$$= -\cos B = -\frac{1}{4}$$

따라서 삼각형 ACD 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \cos D$$

$$= 4 + 9 - 12 \times \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$= 16$$

$$\therefore \overline{AC} = 4 \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

답 4

476

전략 삼각형에서 길이가 가장 긴 변의 대각이 최대각임을 이용한다.

$$\sin A = \sqrt{2} \sin B = 2 \sin C \text{에서}$$

$$\sin A : \sin B : \sin C = 2 : \sqrt{2} : 1$$

$$\therefore a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

$$= 2 : \sqrt{2} : 1$$

$a=2k, b=\sqrt{2}k, c=k (k>0)$ 라 하면 a 가 가장 긴 변의 길이이므로 최대각의 크기는 A 이다.

따라서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \cos A = \frac{(\sqrt{2}k)^2 + k^2 - (2k)^2}{2 \times \sqrt{2}k \times k}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

답 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

477

전략 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 각에 대한 식을 변에 대한 식으로 변형한다.

삼각형 ABC 에서

$$A+C=180^\circ-B$$

$$\therefore \sin \frac{A-B+C}{2} = \sin \frac{180^\circ-2B}{2}$$

$$= \sin (90^\circ - B)$$

$$= \cos B$$

$$\text{즉 } \sin \frac{A+B+C}{2} \sin C = \sin A \text{에서}$$

$$\cos B \sin C = \sin A$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \times \frac{c}{2R} = \frac{a}{2R}$$

$$c^2 + a^2 - b^2 = 2a^2 \quad \therefore c^2 = a^2 + b^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

답 ②

478

전략 출발한 지 10분 후의 두 사람과 학교 사이의 거리를 구한 후 코사인법칙을 이용한다.

학교의 위치를 O, 10분 후의 재현이와 혜리의 위치를 각각 A, B라 하면

$$\overline{OA} = 10 \times 100 = 1000 \text{ (m)} = 1 \text{ (km)}$$

$$\overline{OB} = 10 \times 60 = 600 \text{ (m)} = 0.6 \text{ (km)}$$

삼각형 OAB에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= 1^2 + 0.6^2 - 2 \times 1 \times 0.6 \times \cos 120^\circ \\ &= 1 + 0.36 - 1.2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 1.96 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AB} = 1.4 \text{ (km)}$$

따라서 두 사람 사이의 거리는 1.4 km이다.

답 1.4 km

479

전략 먼저 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{BC}$ 의 길이를 구한다.

꼭짓점 A에서 선분 BC

에 내린 수선의 발을 H

라 하면 삼각형 AHC는

직각이등변삼각형이므로

$$\overline{AH} = \overline{HC} = 1$$

또 직각삼각형 ABH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{BH}^2 = (\sqrt{5})^2 - 1^2 = 4$$

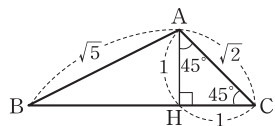
$$\therefore \overline{BH} = 2 \quad (\because \overline{BH} > 0)$$

$$\therefore \overline{BC} = \overline{BH} + \overline{HC} = 2 + 1 = 3$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{3}{\sin A} = \frac{\sqrt{5}}{\sin 45^\circ}$$

$$\sqrt{5} \sin A = 3 \sin 45^\circ$$



$$\therefore \sin A = 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{답 } \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

480

전략 사인법칙을 이용하여 드론의 높이를 구한다.

드론의 높이를 h m라 하면 직각삼각형 PAQ에서

$$h = \overline{AP} \times \sin 30^\circ$$

$$\therefore \overline{AP} = 2h \text{ (m)}$$

삼각형 PAB에서

$$\angle APB = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$$

이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{2h}{\sin 60^\circ} = \frac{40}{\sin 45^\circ}$$

$$h \sin 45^\circ = 20 \sin 60^\circ$$

$$\therefore h = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{6}$$

따라서 드론의 높이는 $10\sqrt{6}$ m이다.

답 $10\sqrt{6}$ m

481

전략 먼저 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{AF}$, $\overline{AH}$, $\overline{FH}$ 의 길이를 구한다.

주어진 직육면체에서

$$\overline{AF} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \overline{AH} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

$$\overline{FH} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

삼각형 AFH에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{답 } \frac{\sqrt{10}}{10}$$

다른 풀이 삼각형 AFH는

$\overline{AH} = \overline{FH} = \sqrt{5}$ 인 이등변삼각형이

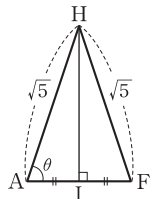
므로 점 H에서 $\overline{AF}$ 에 내린 수선의

발을 I라 하면

$$\overline{AI} = \overline{FI} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 직각삼각형 AIH에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{AI}}{\overline{AH}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$



482

전략 먼저 코사인법칙을 이용하여 $\overline{BD}$ 의 길이를 구한다.

$\overline{AC} = 6\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{CE} = \frac{1}{3} \overline{AC} = 2\sqrt{2}$$

삼각형 ABD에서 $A = 45^\circ$ 이므로 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= 6^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \times 6 \times 2\sqrt{2} \cos 45^\circ \\ &= 36 + 8 - 24\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 20 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{BD} = 2\sqrt{5} \quad (\because \overline{BD} > 0)$$

이때 $\triangle ABD \cong \triangle CBE$ (SAS 합동)이므로

$$\overline{BE} = \overline{BD} = 2\sqrt{5}$$

따라서 삼각형 DBE에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{(2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \times 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

답 $\frac{4}{5}$

483

전략 $\triangle ABD$ 와 $\triangle BCD$ 에서 각각 코사인법칙을 이용한다.

$\square ABCD$ 가 원에 내접하므로

$$A + C = 180^\circ$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= 1^2 + 4^2 - 2 \times 1 \times 4 \cos A \\ &= 17 - 8 \cos A \end{aligned} \quad \dots\dots ㉑$$

또 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \cos (180^\circ - A) \\ &= 13 + 12 \cos A \end{aligned} \quad \dots\dots ㉒$$

$$㉑, ㉒ \text{에서} \quad 17 - 8 \cos A = 13 + 12 \cos A$$

$$20 \cos A = 4 \quad \therefore \cos A = \frac{1}{5} \quad \text{답} \quad \frac{1}{5}$$

484

전략 한 원에서 중심각의 크기가 같은 현의 길이는 서로 같음을 이용하여 $\cos (\angle BAC)$ 의 값을 구한다.

$\angle BAC = \angle CAD = \theta$ 라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= 5^2 + (3\sqrt{5})^2 - 2 \times 5 \times 3\sqrt{5} \cos \theta \\ &= 70 - 30\sqrt{5} \cos \theta \end{aligned} \quad \dots\dots ㉑$$

또 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{CD}^2 &= (3\sqrt{5})^2 + 7^2 - 2 \times 3\sqrt{5} \times 7 \cos \theta \\ &= 94 - 42\sqrt{5} \cos \theta \end{aligned}$$

이때 $\angle BAC = \angle CAD$ 에서 $\overline{BC} = \overline{CD}$ 이므로

$$\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2$$

즉 $70 - 30\sqrt{5} \cos \theta = 94 - 42\sqrt{5} \cos \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} 12\sqrt{5} \cos \theta &= 24 \\ \therefore \cos \theta &= \frac{24}{12\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned} \quad \dots\dots ㉒$$

㉑에 ㉒을 대입하면

$$\overline{BC}^2 = 70 - 30\sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 10$$

$$\therefore \overline{BC} = \sqrt{10} \quad (\because \overline{BC} > 0)$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ 에서 $\sin \theta > 0$ 이므로 ㉒에 의하여

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

이때 구하는 원의 반지름의 길이를 R 라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$2R = \frac{\overline{BC}}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 5\sqrt{2}$$

$$\therefore R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 이다.

답 ①

485

전략 삼각형의 닮음과 합동을 이용하여 $\sin (\angle CAD)$ 의 값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 삼각형

ABC와 내접원의 접점을

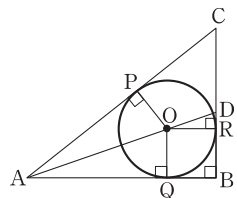
각각 P, Q, R라 하면

$\square OQBR$ 는 정사각형이므로

로

$$\overline{RB} = \overline{OR} = 3$$

$$\therefore \overline{DR} = \overline{DB} - \overline{RB} = 4 - 3 = 1$$



따라서 직각삼각형 DOR에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{OD} &= \sqrt{\overline{OR}^2 + \overline{DR}^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}\end{aligned}$$

이때 $\angle DOR = \theta$ 라 하면 직각삼각형 DOR에서

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

한편 두 선분 AB, OR는 서로 평행하고

$\triangle OAP \equiv \triangle OAQ$ (RHS 합동)이므로

$$\angle OAP = \angle OAQ = \angle DOR = \theta$$

$$\begin{aligned}\therefore \sin(\angle CAD) &= \sin(\angle OAP) \\ &= \sin \theta \\ &= \frac{\sqrt{10}}{10}\end{aligned}$$

또 $\triangle ORD \sim \triangle ABD$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{OR} : \overline{AB} = \overline{DR} : \overline{DB} \text{에서}$$

$$3 : \overline{AB} = 1 : 4 \quad \therefore \overline{AB} = 12$$

$$\therefore \overline{AP} = \overline{AQ} = \overline{AB} - \overline{QB} = 12 - 3 = 9$$

$\overline{CR} = \overline{CP} = x$ 라 하면 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned}12^2 + (3+x)^2 &= (9+x)^2 \\ 144 + 9 + 6x + x^2 &= 81 + 18x + x^2 \\ 12x &= 72 \quad \therefore x = 6\end{aligned}$$

즉 $\overline{CR} = 6$ 이므로

$$\overline{CD} = \overline{CR} - \overline{DR} = 6 - 1 = 5$$

삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}2R &= \frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)} = \frac{5}{\frac{\sqrt{10}}{10}} = 5\sqrt{10} \\ \therefore R &= \frac{5\sqrt{10}}{2}\end{aligned}$$

따라서 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는

$$\pi R^2 = \pi \times \left(\frac{5\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \frac{125}{2}\pi \quad \text{답 ①}$$

참고 두 삼각형 OAP, OAQ에서

$$\overline{AO} \text{는 공통, } \overline{OP} = \overline{OQ}, \angle OPA = \angle OQA = 90^\circ$$

이므로 $\triangle OAP \equiv \triangle OAQ$ (RHS 합동)

또 두 삼각형 ORD, ABD에서

$$\angle D \text{는 공통, } \angle ORD = \angle ABD = 90^\circ$$

이므로 $\triangle ORD \sim \triangle ABD$ (AA 닮음)

486

전략 $p - q > 0$ 이면 $p > q$ 임을 이용하여 가장 긴 변의 길이를 구한다.

각 변의 길이는 양수이므로 $2x + 1 > 0$, $x^2 - 1 > 0$ 에서 $x > 1$

이때 $x^2 + x + 1 - (2x + 1) = x(x - 1) > 0$ 이므로

$$x^2 + x + 1 > 2x + 1$$

$x^2 + x + 1 - (x^2 - 1) = x + 2 > 0$ 이므로

$$x^2 + x + 1 > x^2 - 1$$

즉 가장 긴 변의 길이가 $x^2 + x + 1$ 이므로 최대각은 길이가 $x^2 + x + 1$ 인 변의 대각이다.

최대각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{(2x+1)^2 + (x^2-1)^2 - (x^2+x+1)^2}{2(2x+1)(x^2-1)} \\ &= \frac{-2x^3 - x^2 + 2x + 1}{2(2x^3 + x^2 - 2x - 1)} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

그런데 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로 $\theta = 120^\circ$

따라서 최대각의 크기는 120° 이다.

답 120°

487

전략 주어진 관계식을 이용하여 $\cos A$ 의 값을 구한다.

$a : b = \sin A : \sin B = \sqrt{2} : 1$ 이므로

$$a = \sqrt{2}b$$

$$\therefore c^2 = b^2 + ac = b^2 + \sqrt{2}bc$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{b^2 + (b^2 + \sqrt{2}bc) - 2b^2}{2bc} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

그런데 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 45^\circ$

이때 $a : b = \sqrt{2} : 1$ 에서 $a = \sqrt{2}k$, $b = k$ ($k > 0$)라 하면 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}k}{\sin 45^\circ} &= \frac{k}{\sin B}, \quad \sqrt{2} \sin B = \sin 45^\circ \\ \therefore \sin B &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

그런데 $0^\circ < B < 135^\circ$ 이므로 $B = 30^\circ$

$$\therefore C = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 105^\circ \quad \text{답 105°}$$

03 삼각형의 넓이

• 본책 209~215쪽

488

$$(1) S = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \sin 60^\circ = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$(2) S = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 \times \sin 45^\circ = 9 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

$$(3) S = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \sin 150^\circ = 15 \times \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

답 (1) $5\sqrt{3}$ (2) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{15}{2}$

489

(1) 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{6^2 + 5^2 - 5^2}{2 \times 6 \times 5} = \frac{3}{5}$$

(2) $0^\circ < A < 180^\circ$ 에서 $\sin A > 0$ 이므로

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$(3) \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 \times \frac{4}{5} = 12$$

답 (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{4}{5}$ (3) 12

490

$$(1) \square ABCD = 4 \times \sqrt{3} \times \sin 30^\circ$$

$$= 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$$

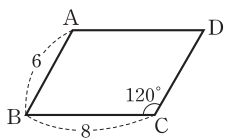
(2) 평행사변형 ABCD에서

$$\begin{aligned} B &= 180^\circ - C \\ &= 180^\circ - 120^\circ \\ &= 60^\circ \end{aligned}$$

$$\therefore \square ABCD = 6 \times 8 \times \sin 60^\circ$$

$$= 48 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$$

답 (1) $2\sqrt{3}$ (2) $24\sqrt{3}$



491

$$(1) S = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin 60^\circ = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$(2) S = \frac{1}{2} \times 10 \times 8 \times \sin 120^\circ = 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$$

답 (1) $6\sqrt{3}$ (2) $20\sqrt{3}$

492

삼각형 ABC의 넓이가 7이므로

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 7 \times \sin A = 7$$

$$\therefore \sin A = \frac{1}{2}$$

그런데 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로

$$A = 30^\circ \text{ 또는 } A = 150^\circ$$

답 30° 또는 150°

493

$0^\circ < C < 180^\circ$ 에서 $\sin C > 0$ 이므로

$$\sin C = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \frac{2}{3} = 16$$

답 16

494

$\overline{AD} = x$ 라 하면 $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$ 에서

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times x \times \sin 30^\circ$$

$$+ \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times x \times \sin 30^\circ$$

$$\frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{4} x$$

$$\therefore x = \frac{18}{5}$$

따라서 선분 AD의 길이는 $\frac{18}{5}$ 이다.

답 $\frac{18}{5}$

495

코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{13^2 + 14^2 - 15^2}{2 \times 13 \times 14} = \frac{5}{13}$$

$0^\circ < C < 180^\circ$ 에서 $\sin C > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin C &= \sqrt{1 - \cos^2 C} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13} \end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 13 \times 14 \times \frac{12}{13} = 84$$

답 84

496

코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{13^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 13 \times 8} = \frac{23}{26}$$

$0^\circ < C < 180^\circ$ 에서 $\sin C > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin C &= \sqrt{1 - \cos^2 C} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{23}{26}\right)^2} = \frac{7\sqrt{3}}{26} \end{aligned}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 13 \times 8 \times \frac{7\sqrt{3}}{26} = 14\sqrt{3}$$

이때 $\triangle ABC = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ab \times \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$ 에서

$$14\sqrt{3} = \frac{13 \times 8 \times 7}{4R} \quad \therefore R = \frac{13\sqrt{3}}{3}$$

또 $\triangle ABC = \frac{1}{2}r(a+b+c)$ 에서

$$14\sqrt{3} = \frac{1}{2}r \times (13+8+7) \quad \therefore r = \sqrt{3}$$

$$\text{답 } R = \frac{13\sqrt{3}}{3}, r = \sqrt{3}$$

497

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{4^2 + 8^2 - (4\sqrt{2})^2}{2 \times 4 \times 8} = \frac{3}{4}$$

$0^\circ < C < 180^\circ$ 에서 $\sin C > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin C &= \sqrt{1 - \cos^2 C} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore \square ABCD$$

$$= \triangle ABD + \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{14} \times 4\sqrt{2} \times \sin 30^\circ$$

$$+ \frac{1}{2} \times 4 \times 8 \times \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$= 2\sqrt{7} + 4\sqrt{7} = 6\sqrt{7}$$

답 6√7

498

$\overline{AD} = \overline{BC} = 7$ 이고, 평행사변형 ABCD의 넓이가 $21\sqrt{3}$ 이므로

$$6 \times 7 \times \sin A = 21\sqrt{3} \quad \therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

그런데 $90^\circ < A < 180^\circ$ 이므로

$$A = 120^\circ$$

답 120°

499

등변사다리꼴은 두 대각선의 길이가 같으므로 한 대각선의 길이를 x 라 하면

$$\frac{1}{2} \times x \times x \times \sin 150^\circ = 8, \quad x^2 = 32$$

$$\therefore x = 4\sqrt{2} \quad (\because x > 0)$$

답 4√2

500

헤론의 공식을 이용하면 $s = \frac{5+6+7}{2} = 9$ 이므로 삼

각형 ABC의 넓이는

$$\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = 6\sqrt{6} \quad \text{답 } 6\sqrt{6}$$

다른 풀이 $\cos A = \frac{7^2 + 6^2 - 5^2}{2 \times 7 \times 6} = \frac{5}{7}$ 이므로

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 7 \times 6 \times \frac{2\sqrt{6}}{7} = 6\sqrt{6}$$

연습 문제

● 본책 216~217쪽

501

전략 먼저 코사인법칙을 이용하여 $\overline{BC}$ 의 길이를 구한다.

코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \times 8 \times 6 \cos 60^\circ$$

$$= 64 + 36 - 96 \times \frac{1}{2}$$

$$= 52$$

$$\therefore \overline{BC} = 2\sqrt{13} \quad (\because \overline{BC} > 0)$$

삼각형 ABC의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{13} \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \sin 60^\circ$$

$$\sqrt{13} \times \overline{AH} = 24 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \overline{AH} = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{12\sqrt{39}}{13}$$

답 12√39/13

502

전략 삼각형 ABC의 넓이를 이용하여 $\sin \theta$ 의 값을 구한다.

삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{6}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{7} \times \sin \theta = \sqrt{6}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$$

이때 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$ 이고 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서

$\cos \theta > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{7} \end{aligned}$$

답 ⑤

503

전략 코사인법칙을 이용하여 $\cos C$ 의 값을 구한다.

코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{4^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 4 \times 5} = -\frac{1}{5}$$

$0^\circ < C < 180^\circ$ 에서 $\sin C > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin C &= \sqrt{1 - \cos^2 C} \\ &= \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = 4\sqrt{6}$$

답 $4\sqrt{6}$

504

전략 두 대각선의 길이가 a , b 이고 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ 인 사각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab \sin \theta$ 임을 이용한다.

사각형 ABCD의 넓이가 3이므로

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{3} \times \sin \theta = 3$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 $\sin^2 \theta = \frac{1}{3}$ 이므로

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

505

전략 코사인법칙을 이용하여 $\overline{AC}$ 의 길이를 구한다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{13})^2 = 3^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times 3 \times \overline{AC} \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\overline{AC}^2 - 3\overline{AC} - 4 = 0$$

$$(\overline{AC} + 1)(\overline{AC} - 4) = 0$$

$$\therefore \overline{AC} = 4 \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이 S_1 은

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin \frac{\pi}{3} \\ &= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

$\overline{AD} \times \overline{CD} = 9$ 이므로 삼각형 ACD의 넓이 S_2 는

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{CD} \times \sin(\angle ADC) \\ &= \frac{9}{2} \times \sin(\angle ADC) \end{aligned}$$

이때 $S_2 = \frac{5}{6} S_1$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{9}{2} \times \sin(\angle ADC) &= \frac{5}{6} \times 3\sqrt{3} \\ \therefore \sin(\angle ADC) &= \frac{5\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$$2R = \frac{4}{\frac{5\sqrt{3}}{9}} = \frac{36}{5\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{5}$$

$$\therefore R = \frac{6\sqrt{3}}{5}$$

$$\therefore \frac{R}{\sin(\angle ADC)} = \frac{\frac{6\sqrt{3}}{5}}{\frac{5\sqrt{3}}{9}} = \frac{54}{25}$$

답 ①

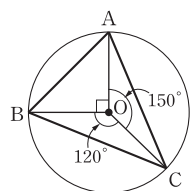
506

전략 한 원에서 호에 대한 중심각의 크기는 호의 길이에 정비례함을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을

O라 할 때

$$\begin{aligned} \angle AOB : \angle BOC : \angle COA \\ &= \widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA} \\ &= 3 : 4 : 5 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\therefore \angle AOB &= 360^\circ \times \frac{3}{12} = 90^\circ, \\ \angle BOC &= 360^\circ \times \frac{4}{12} = 120^\circ, \\ \angle COA &= 360^\circ \times \frac{5}{12} = 150^\circ\end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned}& \triangle AOB + \triangle BOC + \triangle COA \\ &= \frac{1}{2} \times 20^2 \times \sin 90^\circ + \frac{1}{2} \times 20^2 \times \sin 120^\circ \\ & \quad + \frac{1}{2} \times 20^2 \times \sin 150^\circ \\ &= 200 + 100\sqrt{3} + 100 \\ &= 100(3 + \sqrt{3})\end{aligned}$$

답 100(3+√3)

507

전략 $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ACD$ 임을 이용한다.

$\overline{BD} : \overline{CD} = 3 : 4 = \overline{AB} : \overline{AC}$ 이므로 $\overline{AD}$ 는 $\angle BAC$ 의 이등분선이다.

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD = 60^\circ$$

이때 $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ACD$ 이므로

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2} \times 15 \times 20 \times \sin 120^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 15 \times \overline{AD} \times \sin 60^\circ \\ & \quad + \frac{1}{2} \times 20 \times \overline{AD} \times \sin 60^\circ \\ 75\sqrt{3} &= \frac{15\sqrt{3}}{4} \times \overline{AD} + 5\sqrt{3} \times \overline{AD} \\ 75\sqrt{3} &= \frac{35\sqrt{3}}{4} \times \overline{AD} \\ \therefore \overline{AD} &= \frac{60}{7} \text{ (km)}\end{aligned}$$

따라서 구하는 직선 도로의 길이는 $\frac{60}{7}$ km이다.

답 $\frac{60}{7}$ km

508

전략 코사인법칙을 이용하여 $\overline{AB}$ 의 길이를 구한다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}(\sqrt{7})^2 &= \overline{AB}^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\overline{AB} \times \sqrt{3} \cos 30^\circ \\ 7 &= \overline{AB}^2 + 3 - 3\overline{AB}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 - 3\overline{AB} - 4 &= 0 \\ (\overline{AB} + 1)(\overline{AB} - 4) &= 0 \\ \therefore \overline{AB} &= 4 \quad (\because \overline{AB} > 0)\end{aligned}$$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$4 \times \sqrt{3} \times \sin 30^\circ = 2\sqrt{3}$$

답 $2\sqrt{3}$

509

전략 $\triangle APQ = \frac{1}{2} \triangle ABC$ 임을 이용하여 $\overline{AP} \times \overline{AQ}$ 의 값을 구한다.

$\overline{AP} = x$, $\overline{AQ} = y$ 라 하면 $\triangle APQ = \frac{1}{2} \triangle ABC$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \times x \times y \times \sin 60^\circ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin 60^\circ \\ \frac{\sqrt{3}}{4} xy &= 3\sqrt{3} \quad \therefore xy = 12\end{aligned}$$

삼각형 APQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos 60^\circ \\ &= x^2 + y^2 - 2 \times 12 \times \frac{1}{2} = x^2 + y^2 - 12\end{aligned}$$

이때 $x^2 > 0$, $y^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 12 &\geq 2\sqrt{x^2 y^2} - 12 \\ &= 2 \times 12 - 12 \\ &= 12 \quad (\text{단, 등호는 } x = y \text{일 때 성립})\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{PQ} \geq \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{3}$ 이다.

답 $2\sqrt{3}$

510

전략 $\triangle ACD + \triangle ABC = \triangle ABD + \triangle BCD$ 임을 이용한다.

삼각형 ACD는 $\angle D = 90^\circ$

인 직각삼각형이므로

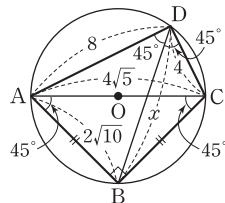
$$\begin{aligned}\overline{AC} &= \sqrt{8^2 + 4^2} \\ &= 4\sqrt{5}\end{aligned}$$

또 삼각형 ABC는

$\overline{AB} = \overline{BC}$ 인 직각이등변삼

각형이므로 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ 에서

$$\begin{aligned}2\overline{AB}^2 &= (4\sqrt{5})^2, \quad \overline{AB}^2 = 40 \\ \therefore \overline{AB} &= \overline{BC} = 2\sqrt{10}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\therefore \square ABCD &= \triangle ACD + \triangle ABC \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 4 + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times 2\sqrt{10} \\ &= 36 \quad \dots\dots \textcircled{7}\end{aligned}$$

한편 원주각의 성질에 의하여

$$\begin{aligned}\angle ADB &= \angle ACB = 45^\circ, \\ \angle CDB &= \angle CAB = 45^\circ\end{aligned}$$

이므로 $\overline{BD} = x$ 라 하면

$$\begin{aligned}\square ABCD &= \triangle ABD + \triangle BCD \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times x \times \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \times 4 \times x \times \sin 45^\circ \\ &= 3\sqrt{2}x \quad \dots\dots \textcircled{8}\end{aligned}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서} \quad 3\sqrt{2}x = 36$$

$$\therefore x = 6\sqrt{2}$$

따라서 선분 BD의 길이는 $6\sqrt{2}$ 이다.

답 $6\sqrt{2}$

다른 풀이 원주각의 성질에 의하여

$$\begin{aligned}\angle ADB &= \angle ACB = 45^\circ, \\ \angle CDB &= \angle CAB = 45^\circ\end{aligned}$$

$\overline{BD} = x$ 라 하면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= 8^2 + x^2 - 2 \times 8 \times x \times \cos 45^\circ \\ &= x^2 - 8\sqrt{2}x + 64\end{aligned}$$

또 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= x^2 + 4^2 - 2 \times x \times 4 \times \cos 45^\circ \\ &= x^2 - 4\sqrt{2}x + 16\end{aligned}$$

이때 삼각형 ABC는 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각이등변삼각형

이므로 $\overline{AB} = \overline{BC}$

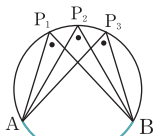
즉 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로

$$\begin{aligned}x^2 - 8\sqrt{2}x + 64 &= x^2 - 4\sqrt{2}x + 16 \\ 4\sqrt{2}x &= 48 \quad \therefore x = 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

개념 노트

원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \angle AP_1B &= \angle AP_2B \\ &= \angle AP_3B\end{aligned}$$



1 등차수열과 등비수열

III. 수열

01 등차수열

● 본책 220~226쪽

511

(1) 수열 $\{3n\}$ 의 일반항 $a_n = 3n$ 에 $n=1, 2, 3, 4$ 를 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned}a_1 &= 3 \times 1 = 3, a_2 = 3 \times 2 = 6, \\ a_3 &= 3 \times 3 = 9, a_4 = 3 \times 4 = 12\end{aligned}$$

(2) 수열 $\{2^n + 1\}$ 의 일반항 $a_n = 2^n + 1$ 에 $n=1, 2, 3, 4$ 를 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned}a_1 &= 2^1 + 1 = 3, a_2 = 2^2 + 1 = 5, \\ a_3 &= 2^3 + 1 = 9, a_4 = 2^4 + 1 = 17\end{aligned}$$

(3) 수열 $\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}$ 의 일반항 $a_n = \frac{1}{2n-1}$ 에 $n=1, 2, 3, 4$ 를 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{1}{2 \times 1 - 1} = 1, a_2 = \frac{1}{2 \times 2 - 1} = \frac{1}{3}, \\ a_3 &= \frac{1}{2 \times 3 - 1} = \frac{1}{5}, a_4 = \frac{1}{2 \times 4 - 1} = \frac{1}{7}\end{aligned}$$

(4) 수열 $\left\{\cos \frac{n\pi}{2}\right\}$ 의 일반항 $a_n = \cos \frac{n\pi}{2}$ 에 $n=1, 2, 3, 4$ 를 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned}a_1 &= \cos \frac{\pi}{2} = 0, a_2 = \cos \pi = -1, \\ a_3 &= \cos \frac{3\pi}{2} = 0, a_4 = \cos 2\pi = 1\end{aligned}$$

답 (1) 3, 6, 9, 12 (2) 3, 5, 9, 17

(3) 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$ (4) 0, -1, 0, 1

512

$$(1) a_1 = \frac{1}{1}, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, \dots$$

$$\text{이므로} \quad a_n = \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned}(2) a_1 &= 1 \times 3 = (2 \times 1 - 1) \times (2 \times 1 + 1), \\ a_2 &= 3 \times 5 = (2 \times 2 - 1) \times (2 \times 2 + 1), \\ a_3 &= 5 \times 7 = (2 \times 3 - 1) \times (2 \times 3 + 1), \\ a_4 &= 7 \times 9 = (2 \times 4 - 1) \times (2 \times 4 + 1), \dots \\ \text{이므로} \quad a_n &= (2n-1)(2n+1)\end{aligned}$$

- (3) $a_1 = \log 3 = \log 3^1$, $a_2 = \log 9 = \log 3^2$,
 $a_3 = \log 27 = \log 3^3$, $a_4 = \log 81 = \log 3^4$, ...
 이므로 $a_n = \log 3^n$

답 (1) $a_n = \frac{1}{n}$ (2) $a_n = (2n-1)(2n+1)$
 (3) $a_n = \log 3^n$

513

- (1) $33 - 27 = 6$ 에서 공차가 6이므로 주어진 수열은

$\boxed{9}$, 15, $\boxed{21}$, 27, 33, ...

- (2) $\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$ 에서 공차가 $-\frac{1}{2}$ 이므로 주어진 수열은

$\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\boxed{-\frac{1}{4}}$, $-\frac{3}{4}$, $\boxed{-\frac{5}{4}}$, ...

답 (1) 9, 21 (2) $-\frac{1}{4}$, $-\frac{5}{4}$

514

- (1) $a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$
 (2) $a_n = 10 + (n-1) \times (-2) = -2n + 12$
 (3) 첫째항이 1, 공차가 $6 - 1 = 5$ 이므로
 $a_n = 1 + (n-1) \times 5 = 5n - 4$
 (4) 첫째항이 3, 공차가 $\frac{8}{3} - 3 = -\frac{1}{3}$ 이므로

$a_n = 3 + (n-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}n + \frac{10}{3}$

답 (1) $a_n = 3n - 1$ (2) $a_n = -2n + 12$

(3) $a_n = 5n - 4$ (4) $a_n = -\frac{1}{3}n + \frac{10}{3}$

515

- 세 수 1, x , 7이 이 순서대로 등차수열을 이루면 x 가 1과 7의 등차중항이므로

$x = \frac{1+7}{2} = 4$

답 4

516

- (1) 주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면

$a_3 = 2 + 2d = 12$

$\therefore d = 5$

$\therefore a_n = 2 + (n-1) \times 5 = 5n - 3$

- (2) 주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면

$a_5 = 3 + 4d = -5$

$\therefore d = -2$

$\therefore a_n = 3 + (n-1) \times (-2) = -2n + 5$

답 (1) $a_n = 5n - 3$ (2) $a_n = -2n + 5$

517

- 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면

$a_3 = a + 2 \times (-7) = 12 \quad \therefore a = 26$

$\therefore a_n = 26 + (n-1) \times (-7) = -7n + 33$

$a_k = -7k + 33 = -23$ 이므로

$-7k = -56 \quad \therefore k = 8$

답 8

518

- 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$a_2 = a + d = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$a_7 = a + 6d = 13 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

- $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = 1$, $d = 2$

$\therefore a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1$

- 199를 제 n 항이라 하면

$2n - 1 = 199, \quad 2n = 200$

$\therefore n = 100$

- 따라서 199는 제 100 항이다.

답 제 100 항

519

- 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$a_6 + a_{15} = 61$ 에서

$(a + 5d) + (a + 14d) = 61$

$\therefore 2a + 19d = 61 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$a_8 + a_{16} = 70$ 에서

$(a + 7d) + (a + 15d) = 70$

$\therefore a + 11d = 35 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

- $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = 2$, $d = 3$

- 따라서 $a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$ 이므로

$a_{31} = 3 \times 31 - 1 = 92$

답 92

520

- 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$a_7 = a + 6d = 65 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$a_{10} = a + 9d = 53 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=89, d=-4$

$$\therefore a_n = 89 + (n-1) \times (-4)$$

$$= -4n + 93$$

$$a_n < 0 \text{에서} \quad -4n + 93 < 0$$

$$\therefore n > \frac{93}{4} = 23.25$$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제 24 항이다.

답 제24항

521

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_5 - a_3 = -4$ 에서

$$(2+4d) - (2+2d) = -4$$

$$\therefore d = -2$$

$$\therefore a_n = 2 + (n-1) \times (-2)$$

$$= -2n + 4$$

$$a_n < -50 \text{에서} \quad -2n + 4 < -50$$

$$-2n < -54 \quad \therefore n > 27$$

따라서 처음으로 -50보다 작아지는 항은 제 28 항이다.

답 제28항

522

주어진 등차수열의 첫째항이 -8, 제 $(n+2)$ 항이 30이므로

$$-8 + (n+1) \times 2 = 30$$

$$2n = 36 \quad \therefore n = 18$$

답 18

523

$f(x) = x^2 + ax + 2$ 를 $x+1, x-1, x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 각각

$$f(-1) = 3-a, f(1) = 3+a, f(2) = 6+2a$$

따라서 세 수 $3-a, 3+a, 6+2a$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2(3+a) = (3-a) + (6+2a)$$

$$\therefore a = 3$$

답 3



개념 노트

다항식 $f(x)$ 를 일차식 $x-a$ 로 나누었을 때의 나머지를 R 라 하면

$$R = f(a)$$

524

세 근을 $a-d, a, a+d$ 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a-d) + a + (a+d) = 3, \quad 3a = 3$$

$$\therefore a = 1$$

따라서 $x^3 - 3x^2 - 6x + k = 0$ 의 한 근이 1이므로

방정식에 $x=1$ 을 대입하면

$$1 - 3 - 6 + k = 0 \quad \therefore k = 8$$

답 8

02 등차수열의 합

● 본책 227~234쪽

525

$$(1) \frac{20(2+18)}{2} = 200$$

$$(2) \frac{8(-2+15)}{2} = 52$$

$$(3) \frac{10\{2 \times 1 + (10-1) \times 3\}}{2} = 145$$

$$(4) \frac{11\left\{2 \times \frac{1}{2} + (11-1) \times \left(-\frac{3}{2}\right)\right\}}{2} = -77$$

(5) 첫째항이 -10, 공차가 $-8 - (-10) = 2$ 이므로 구하는 합은

$$\frac{16\{2 \times (-10) + (16-1) \times 2\}}{2} = 80$$

답 (1) 200 (2) 52 (3) 145

(4) -77 (5) 80

526

(1) 수열 1, 3, 5, 7, ...은 첫째항이 1, 공차가

$3-1=2$ 인 등차수열이므로

$$a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1$$

(2) 23을 제 n 항이라 하면

$$2n-1=23 \quad \therefore n=12$$

따라서 23은 제 12 항이다.

$$(3) 1+3+5+7+\dots+23 = \frac{12(1+23)}{2} = 144$$

답 (1) $a_n = 2n-1$ (2) 제 12 항 (3) 144

527

- (1) 수열 15, 11, 7, 3, ..., -41은 첫째항이 15, 공차가 $11-15=-4$ 인 등차수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 15 + (n-1) \times (-4) = -4n + 19$$

-41을 제 n 항이라 하면

$$-4n + 19 = -41 \quad \therefore n = 15$$

$$\therefore 15 + 11 + 7 + 3 + \dots + (-41)$$

$$= \frac{15\{15 + (-41)\}}{2}$$

$$= -195$$

- (2) 수열 -12, -9, -6, -3, ..., 15는 첫째항이 -12, 공차가 $-9 - (-12) = 3$ 인 등차수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -12 + (n-1) \times 3 = 3n - 15$$

15를 제 n 항이라 하면

$$3n - 15 = 15 \quad \therefore n = 10$$

$$\therefore -12 + (-9) + (-6) + (-3) + \dots + 15$$

$$= \frac{10(-12 + 15)}{2}$$

$$= 15$$

- (3) 수열 $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1, -\frac{4}{3}, \dots, -5$ 는 첫째항이 $-\frac{1}{3}$, 공차가 $-\frac{2}{3} - (-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}$ 인 등차수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -\frac{1}{3} + (n-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{n}{3}$$

-5를 제 n 항이라 하면

$$-\frac{n}{3} = -5 \quad \therefore n = 15$$

$$\therefore -\frac{1}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) + (-1) + \left(-\frac{4}{3}\right) + \dots + (-5)$$

$$= \frac{15\left\{-\frac{1}{3} + (-5)\right\}}{2}$$

$$= -40$$

답 (1) -195 (2) 15 (3) -40

528

- (1) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \times 1 = 3$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 2n - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ &= 2n + 1 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $a_1=3$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 2n + 1$$

- (2) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 - 1 = 1$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 - 1 - \{2(n-1)^2 - 1\} \\ &= 4n - 2 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 구하는 수열의 일반항은

$$a_1 = 1, a_n = 4n - 2 \quad (n \geq 2)$$

답 (1) $a_n = 2n + 1$

(2) $a_1 = 1, a_n = 4n - 2 \quad (n \geq 2)$

참고 (2) $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입하면

$$a_1 = 4 \times 1 - 2 = 2$$

이 값은 $a_1 = S_1$ 을 이용하여 얻은 값과 다르다.

529

$$a_1 = 2 \times 1 - 6 = -4, a_{15} = 2 \times 15 - 6 = 24$$

따라서 첫째항부터 제 15 항까지의 합은

$$\frac{15(-4 + 24)}{2} = 150$$

답 150

530

첫째항이 50, 제 n 항이 -10인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 220이므로

$$\frac{n\{50 + (-10)\}}{2} = 220, \quad 20n = 220$$

$$\therefore n = 11$$

즉 제 11 항이 -10이므로 공차를 d 라 하면

$$50 + 10d = -10 \quad \therefore d = -6$$

따라서 주어진 등차수열의 제 10 항은

$$50 + 9 \times (-6) = -4$$

답 -4

531

$$-5 + x_1 + x_2 + \dots + x_n + 15 = -5 + 90 + 15$$

$$= 100$$

즉 첫째항이 -5 , 끝항이 15 , 항수가 $n+2$ 인 등차수열의 합이 100 이므로

$$\frac{(n+2)(-5+15)}{2}=100$$

$$5(n+2)=100 \quad \therefore n=18 \quad \text{답 18}$$

532

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_8 = \frac{8(2a+7d)}{2} = 104 \text{에서}$$

$$2a+7d=26 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

첫째항부터 제 16 항까지의 합이 $104+360=464$ 이므로

$$S_{16} = \frac{16(2a+15d)}{2} = 464 \text{에서}$$

$$2a+15d=58 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=-1$, $d=4$

따라서 구하는 합은

$$S_{24} = \frac{24\{2 \times (-1) + 23 \times 4\}}{2} = 1080$$

답 1080

533

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_6 = a+5d = -9 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a_{10} = a+9d = 7 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=-29$, $d=4$

$$\therefore a_n = -29 + (n-1) \times 4 = 4n - 33$$

$$a_n > 0 \text{에서} \quad 4n - 33 > 0 \quad \therefore n > \frac{33}{4} = 8.25$$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 제 9 항부터 양수이므로 첫째항부터 제 8 항까지의 합이 최소이다.

이때 $a_8 = 4 \times 8 - 33 = -1$ 이므로 구하는 최솟값은

$$S_8 = \frac{8\{-29 + (-1)\}}{2} = -120 \quad \text{답 -120}$$

다른 풀이 $S_n = \frac{n\{2 \times (-29) + (n-1) \times 4\}}{2}$

$$= 2n^2 - 31n = 2\left(n - \frac{31}{4}\right)^2 - \frac{961}{8}$$

따라서 n 이 $\frac{31}{4}$ 에 가장 가까운 자연수, 즉 $n=8$ 일 때

S_n 은 최소이므로 구하는 최솟값은

$$S_8 = 2 \times 8^2 - 31 \times 8 = -120$$

534

100과 200 사이에 있는 자연수 중에서 5로 나누었을 때의 나머지가 2인 수를 작은 것부터 순서대로 나열하면

$$102, 107, 112, \dots, 197$$

이것은 첫째항이 102, 공차가 5인 등차수열이므로 일항 a_n 은

$$a_n = 102 + (n-1) \times 5 = 5n + 97$$

197을 제 n 항이라 하면

$$5n + 97 = 197 \quad \therefore n = 20$$

따라서 구하는 총합은 첫째항이 102, 끝항이 197, 항수가 20인 등차수열의 합이므로

$$\frac{20(102+197)}{2} = 2990 \quad \text{답 2990}$$

535

삼각형 $PF'F$ 가 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{OP} = \overline{OF} = \overline{OF'}$$

따라서 점 $P(0, n)$ 에 대하여

$$F(n, 0), F'(-n, 0)$$

$n=1$ 일 때, $F'(-1, 0)$, $F(1, 0)$ 이므로 삼각형

$PF'F$ 의 세 변 위에 있는 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점은

$$(-1, 0), (0, 0), (0, 1), (1, 0) \text{의 4개}$$

$$\therefore a_1 = 4$$

$n=2$ 일 때, $F'(-2, 0)$, $F(2, 0)$ 이므로 삼각형

$PF'F$ 의 세 변 위에 있는 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점은

$$(-2, 0), (-1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0),$$

$$(-1, 1), (0, 2), (1, 1) \text{의 8개}$$

$$\therefore a_2 = 8$$

$n=3$ 일 때, $F'(-3, 0)$, $F(3, 0)$ 이므로 삼각형

$PF'F$ 의 세 변 위에 있는 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점은

$$(-3, 0), (-2, 0), (-1, 0), (0, 0), (1, 0),$$

$$(2, 0), (3, 0), (-2, 1), (-1, 2), (0, 3),$$

$$(1, 2), (2, 1) \text{의 12개}$$

$$\therefore a_3 = 12$$

$\vdots$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 4, 공차가 4인 등차수열이므로
 $a_n = 4 + (n-1) \times 4 = 4n$
 따라서 첫째항부터 제 8 항까지의 합은

$$\frac{8(4+32)}{2} = 144$$

답 144

해설 Focus

세 점 $P(0, n)$, $F(n, 0)$, $F'(-n, 0)$ 에 대하여 삼각형 $PF'F$ 의 세 변 위에 있는 점 중에서 x 좌표, y 좌표가 모두 정수인 점은

$$\begin{aligned} &(-n, 0), (-n+1, 0), \dots, (n, 0) \Rightarrow (2n+1)\text{개} \\ &(-n+1, 1), (-n+2, 2), \dots, (-1, n-1), \\ &(0, n), (1, n-1), \dots, (n-2, 2), \\ &(n-1, 1) \Rightarrow (2n-1)\text{개} \\ \therefore a_n &= (2n+1) + (2n-1) = 4n \end{aligned}$$

536

$n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 = -1$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 - 3n) - \{2(n-1)^2 - 3(n-1)\} \\ &= 4n - 5 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $a_1 = -1$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 4n - 5$$

$$1 \leq a_n \leq 50 \text{에서} \quad 1 \leq 4n - 5 \leq 50, \quad 6 \leq 4n \leq 55$$

$$\therefore \frac{3}{2} \leq n \leq \frac{55}{4}$$

따라서 자연수 n 은 2, 3, 4, ..., 13의 12개이다.

답 12

537

$n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 2 \times 1 + k = k - 1$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 - 2n + k) - \{(n-1)^2 - 2(n-1) + k\} \\ &= 2n - 3 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등차수열을 이루려면

$a_1 = k - 1$ 과 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값이 같아야 하므로

$$k - 1 = 2 \times 1 - 3 \quad \therefore k = 0$$

답 0

연습 문제

● 본책 235~237쪽

538

전략 주어진 조건을 이용하여 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공차를 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 = a + 2d = \log_3 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_5 = a + 4d = \log_3 32 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{을 하면} \quad 2d = \log_3 32 - \log_3 8 = \log_3 4$$

$$\therefore d = \frac{1}{2} \log_3 4 = \log_3 2$$

$\textcircled{1}$ 에 이것을 대입하면

$$a + 2 \log_3 2 = \log_3 8$$

$$\therefore a = 3 \log_3 2 - 2 \log_3 2 = \log_3 2$$

따라서 $a_n = \log_3 2 + (n-1) \log_3 2 = n \log_3 2$ 이므로

$$a_{10} = 10 \log_3 2 \quad \textbf{답 10} \log_3 2$$

다른 풀이 $a_{10} = a_5 + 5d$

$$= \log_3 32 + 5 \log_3 2$$

$$= 10 \log_3 2$$

539

전략 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하고 주어진 조건을 이용하여 a 와 d 에 대한 방정식을 세운다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 제 2 항과 제 6 항은 절댓값이 같고 부호가 반대이므로

$$a_2 + a_6 = 0 \text{에서}$$

$$(a + d) + (a + 5d) = 0$$

$$\therefore a + 3d = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 제 3항이 -2 이므로

$$a + 2d = -2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면} \quad a = -6, d = 2$$

따라서 첫째항은 -6 , 공차는 2이다.

답 첫째항: -6 , 공차: 2

540

전략 $a_n > 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2 = -37 \text{에서} \quad a + d = -37 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_6 - a_3 = 9 \text{에서} \quad (a + 5d) - (a + 2d) = 9$$

$$\therefore d = 3$$

㉠에 $d=3$ 을 대입하면

$$a+3=-37 \quad \therefore a=-40$$

$$\therefore a_n = -40 + (n-1) \times 3 = 3n - 43$$

$$a_n > 0 \text{에서} \quad 3n - 43 > 0$$

$$\therefore n > \frac{43}{3} = 14.\times\times\times$$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제 15 항이다.

답 제 15 항

541

전략 세 수 p, q, r 가 이 순서대로 등차수열을 이루면

$$q = \frac{p+r}{2} \text{임을 이용한다.}$$

세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$b = \frac{a+c}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

세 수 $-c, 2b, 4a$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2b = \frac{-c+4a}{2}$$

$$\therefore b = \frac{4a-c}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서} \quad \frac{a+c}{2} = \frac{4a-c}{4}$$

$$2(a+c) = 4a-c$$

$$3c = 2a \quad \therefore a = \frac{3}{2}c$$

$$\textcircled{㉠} \text{에 이것을 대입하면} \quad b = \frac{5}{4}c$$

$$\therefore \frac{a+b}{c} = \frac{\frac{3}{2}c + \frac{5}{4}c}{c} = \frac{\frac{11}{4}c}{c} = \frac{11}{4}$$

답 $\frac{11}{4}$

542

전략 연속하는 자연수는 공차가 1 또는 -1인 등차수열을 이룬다.

연속하는 10개의 자연수 중에서 가장 작은 수를 k 라 하면 10개의 자연수는 첫째항이 k , 공차가 1인 등차수열을 이루므로

$$\frac{10(2 \times k + 9 \times 1)}{2} = 525$$

$$2k + 9 = 105 \quad \therefore k = 48$$

따라서 구하는 가장 작은 수는 48이다.

답 48

543

전략 등차수열의 합의 공식을 이용하여

$1+a_1+a_2+a_3+\dots+a_{18}+2$ 의 값을 구한다.

첫째항이 1, 끝항이 2, 항수가 20인 등차수열의 합은

$$\frac{20(1+2)}{2} = 30$$

즉 $1+a_1+a_2+a_3+\dots+a_{18}+2=30$ 이므로

$$a_1+a_2+a_3+\dots+a_{18}=27$$

답 27

544

전략 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$a_{10}=S_{10}-S_9$ 임을 이용한다.

$S_n=n^2+kn+1, T_n=2n^2-3n-1$ 이라 하면

$$a_{10}=b_{10} \text{이므로} \quad S_{10}-S_9=T_{10}-T_9$$

$$(10^2+10k+1)-(9^2+9k+1)$$

$$=(2 \times 10^2-3 \times 10-1)-(2 \times 9^2-3 \times 9-1)$$

$$19+k=35 \quad \therefore k=16$$

답 16

545

전략 주어진 조건을 이용하여 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면 $a_3a_6=220$ 에서

$$\{a+2 \times (-4)\}\{a+5 \times (-4)\}=220$$

$$(a-8)(a-20)=220$$

$$a^2-28a-60=0, \quad (a+2)(a-30)=0$$

$$\therefore a=-2 \text{ 또는 } a=30$$

(i) $a=-2$ 이면

$$a_7=-2+6 \times (-4)=-26 < 0$$

(ii) $a=30$ 이면

$$a_7=30+6 \times (-4)=6 > 0$$

(i), (ii)에서 $a=30$

$$\therefore a_4=30+3 \times (-4)=18$$

답 18

546

전략 α 가 1과 β 의 등차중항임을 이용하여 n 의 값을 구한다.

세 수 1, α , β 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$\alpha = \frac{1+\beta}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

한편 $x^2-nx+4(n-4)=0$ 에서

$$(x-4)(x-n+4)=0$$

$$\therefore x=4 \text{ 또는 } x=n-4$$

(i) $\alpha=4, \beta=n-4$ 이면

$$\textcircled{㉠} \text{에서} \quad 4 = \frac{1+(n-4)}{2}$$

$$8=n-3 \quad \therefore n=11$$

(ii) $\alpha=n-4, \beta=4$ 이면

$$\textcircled{㉠} \text{에서} \quad n-4 = \frac{1+4}{2}$$

$$\therefore n = \frac{13}{2}$$

이때 n 은 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $n=11$ 답 ③

547

전략 직각삼각형의 세 변의 길이를 $a-d, a, a+d$ 라 하고 식을 세운다.

직각삼각형의 세 변의 길이를 각각 $a-d, a, a+d$ ($d>0$)라 하면 피타고라스 정리에 의하여

$$(a+d)^2 = (a-d)^2 + a^2$$

$$a^2 - 4ad = 0, \quad a(a-4d) = 0$$

$$\therefore a=4d \quad (\because a \neq 0)$$

따라서 세 변의 길이는 각각 $3d, 4d, 5d$ 이다.

이때 삼각형의 넓이가 54이므로

$$\frac{1}{2} \times 3d \times 4d = 54, \quad d^2 = 9$$

$$\therefore d=3 \quad (\because d>0)$$

따라서 구하는 세 변의 길이의 합은

$$3d+4d+5d=12d=12 \times 3=36 \quad \text{답 36}$$

548

전략 주어진 수열의 합을 두 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 첫째항과 공차를 이용하여 나타낸다.

두 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 공차를 각각 d_1, d_2 라 하면

$$a_1+b_1=5, \quad d_1+d_2=-2$$

$$\therefore (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{18})$$

$$+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{18})$$

$$= \frac{18(2a_1+17d_1)}{2} + \frac{18(2b_1+17d_2)}{2}$$

$$= 9(2a_1+17d_1) + 9(2b_1+17d_2)$$

$$= 9\{2(a_1+b_1)+17(d_1+d_2)\}$$

$$= 9\{2 \times 5 + 17 \times (-2)\}$$

$$= -216 \quad \text{답 -216}$$

다른 풀이 수열 $\{a_n+b_n\}$ 은 첫째항이 5, 공차가 -2 인 등차수열이므로

$$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{18})$$

$$+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{18})$$

$$= (a_1+b_1) + (a_2+b_2) + (a_3+b_3) + \cdots$$

$$+(a_{18}+b_{18})$$

$$= \frac{18\{2 \times 5 + 17 \times (-2)\}}{2}$$

$$= -216$$

549

전략 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하고 주어진 조건을 이용하여 a, d 의 값을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=10 \text{에서}$$

$$S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2} = 10$$

$$\therefore 2a+9d=2 \quad \text{..... ㉠}$$

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=10+50=60$ 이므로

$$S_{20} = \frac{20(2a+19d)}{2} = 60$$

$$\therefore 2a+19d=6 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -\frac{4}{5}, \quad d = \frac{2}{5}$$

$$\therefore a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{40}$$

$$= S_{40} - S_{20}$$

$$= \frac{40\left\{2 \times \left(-\frac{4}{5}\right) + 39 \times \frac{2}{5}\right\}}{2} - 60$$

$$= 280 - 60 = 220 \quad \text{답 220}$$

550

전략 S_n 의 최댓값은 첫째항부터 양수인 마지막 항까지의 합이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3=a+2d=17 \quad \text{..... ㉠}$$

또 $a_2:a_7=4:1$ 에서

$$(a+d):(a+6d)=4:1$$

$$4(a+6d)=a+d$$

$$\therefore 3a+23d=0 \quad \text{..... ㉡}$$

㉑, ㉒을 연립하여 풀면

$$a=23, d=-3$$

$$\therefore a_n=23+(n-1)\times(-3)=-3n+26$$

$$a_n < 0 \text{에서} \quad -3n+26 < 0$$

$$\therefore n > \frac{26}{3} = 8.\times\times\times$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 은 제9항부터 음수이므로 첫째 항부터 제8항까지의 합이 최대이다.

이때 $a_8 = -3 \times 8 + 26 = 2$ 이므로 구하는 최댓값은

$$\frac{8(23+2)}{2} = 100$$

답 100

551

전략 두 자리 자연수 중에서 4로 나누어떨어지는 수, 7로 나누어떨어지는 수의 수열을 구한다.

두 자리 자연수 중에서 4로 나누어떨어지는 수는

$$12, 16, 20, \dots, 96$$

$96 = 12 + 4 \times 21$ 에서 4로 나누어떨어지는 수의 총합은 첫째항이 12, 끝항이 96, 항수가 22인 등차수열의 합이므로

$$\frac{22(12+96)}{2} = 1188$$

두 자리 자연수 중에서 7로 나누어떨어지는 수는

$$14, 21, 28, \dots, 98$$

$98 = 14 + 7 \times 12$ 에서 7로 나누어떨어지는 수의 총합은 첫째항이 14, 끝항이 98, 항수가 13인 등차수열의 합이므로

$$\frac{13(14+98)}{2} = 728$$

한편 두 자리 자연수 중에서 4와 7의 최소공배수인 28로 나누어떨어지는 수는

$$28, 56, 84$$

이므로 그 합은 $28+56+84=168$

따라서 두 자리 자연수 중에서 4 또는 7로 나누어떨어지는 수의 총합은

$$1188+728-168=1748$$

답 1748

552

전략 $S_{k+2}-S_k=a_{k+1}+a_{k+2}$ 임을 이용하여 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 k 사이의 관계식을 구한다.

$$S_{k+2}-S_k=a_{k+1}+a_{k+2} \text{이므로}$$

$$a_{k+1}+a_{k+2}=-12-(-16)=4$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면

$$(a+k \times 2) + \{a+(k+1) \times 2\} = 4$$

$$2a+4k+2=4$$

$$\therefore a=-2k+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 $S_k=-16$ 에서

$$\frac{k\{2(-2k+1)+(k-1) \times 2\}}{2} = -16$$

$$k^2=16$$

$$\therefore k=4 (\because k \text{는 자연수})$$

$$\textcircled{1} \text{에 } k=4 \text{를 대입하면} \quad a=-7$$

$$\therefore a_{2k}=a_8=-7+7 \times 2=7$$

답 ②

553

전략 세 수 p, q, r 가 이 순서대로 등차수열을 이루면 $2q=p+r$ 임을 이용한다.

세 수 $a, 1, e$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a+e=2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

세 수 $e, 6, f$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$e+f=12 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2} \text{을 하면} \quad a-f=-10$$

세 수 $b, c, 6$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$b+6=2c \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

세 수 $1, c, d$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$1+d=2c \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}-\textcircled{4} \text{을 하면}$$

$$b-d+5=0 \quad \therefore b-d=-5$$

$$\therefore a+b-(d+f)=(a-f)+(b-d)$$

$$=-15$$

답 -15

554

전략 조건 (가), (나)를 이용하여 a_1+a_n 의 값을 구한다.

조건 (가)에서

$$a_1+a_2+a_3+a_4=24 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서

$$a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=156 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}+\textcircled{2} \text{을 하면}$$

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=180$$

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) \\ & + (a_4 + a_{n-3}) \\ & = 180 \end{aligned}$$

$$4(a_1 + a_n) = 180 \quad \therefore a_1 + a_n = 45$$

따라서 조건 (다)에서

$$\frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 540, \quad \frac{45n}{2} = 540$$

$$\therefore n = 24$$

답 24

다른 풀이 주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면 조건 (가)에서

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{4(2a_1 + 3d)}{2} = 24$$

$$\therefore 2a_1 + 3d = 12 \quad \dots\dots \textcircled{a}$$

조건 (나)에서

$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} = \frac{4(2a_n - 3d)}{2} = 156$$

$$\therefore 2a_n - 3d = 78 \quad \dots\dots \textcircled{b}$$

$\textcircled{a} + \textcircled{b}$ 을 하면 $2(a_1 + a_n) = 90$

$$\therefore a_1 + a_n = 45$$

해설 Focus

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_1 + a_n = a + \{a + (n-1)d\}$$

$$= 2a + (n-1)d$$

$$a_2 + a_{n-1} = (a+d) + \{a + (n-2)d\}$$

$$= 2a + (n-1)d$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a+2d) + \{a + (n-3)d\}$$

$$= 2a + (n-1)d$$

$$a_4 + a_{n-3} = (a+3d) + \{a + (n-4)d\}$$

$$= 2a + (n-1)d$$

$$\therefore a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3}$$

555

전략 조건 (가)에서 a_{k-2} 가 a_{k-3} 과 a_{k-1} 의 등차중항임을 이용하여 a_{k-2} 의 값을 구한다.

세 수 a_{k-3} , a_{k-2} , a_{k-1} 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 조건 (가)에 의하여

$$a_{k-2} = \frac{a_{k-3} + a_{k-1}}{2} = \frac{-24}{2} = -12$$

조건 (나)에서 $S_k = k^2$ 이므로

$$\frac{k(a_1 + a_k)}{2} = k^2 \quad \therefore a_1 + a_k = 2k \quad (\because k \neq 0)$$

이때 $a_1 + a_k = (a_1 + 2d) + (a_k - 2d) = a_3 + a_{k-2}$ 이

$$\text{므로} \quad a_3 + a_{k-2} = 2k$$

$$\therefore k = \frac{a_3 + a_{k-2}}{2} = \frac{42 + (-12)}{2} = 15$$

답 ③

다른 풀이 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 = a + 2d = 42 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (가)에 의하여 $a_{k-2} = \frac{a_{k-3} + a_{k-1}}{2} = -12$ 이므로

$$a + (k-3)d = -12 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

조건 (나)에서 $\frac{k\{2a + (k-1)d\}}{2} = k^2$

$$\therefore 2a + (k-1)d = 2k \quad (\because k \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ 을 하면 $a + (k-3)d = 2k - 42$

이 식에 $\textcircled{2}$ 을 대입하면

$$-12 = 2k - 42 \quad \therefore k = 15$$

556

전략 S_n 을 이용하여 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구한 후 수열 $\{a_n\}$ 이 제 몇 항에서 처음으로 양수가 되는지 구한다.

$n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 20 \times 1 = -19$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 - 20n) - \{(n-1)^2 - 20(n-1)\} \\ &= 2n - 21 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때 $a_1 = -19$ 는 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 2n - 21$$

$$a_n > 0 \text{에서} \quad 2n - 21 > 0$$

$$\therefore n > \frac{21}{2} = 10.5$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 제 10 항까지는 음수이고 제 11 항부터는 양수이므로

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_{15}|$$

$$= -(a_1 + a_2 + \dots + a_{10})$$

$$+ (a_{11} + a_{12} + \dots + a_{15})$$

$$= -S_{10} + (S_{15} - S_{10})$$

$$= S_{15} - 2S_{10}$$

$$= (15^2 - 20 \times 15) - 2(10^2 - 20 \times 10)$$

$$= 125$$

답 125

03 등비수열

• 본책 238~244쪽

557

(1) $\frac{-2}{1} = -2$ 에서 공비가 -2 이므로 주어진 수열은

$$1, -2, \boxed{4}, -8, \boxed{16}, \dots$$

(2) $\frac{1}{32} \div \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$ 에서 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로 주어진 수열은

$$\frac{1}{2}, \boxed{\frac{1}{4}}, \boxed{\frac{1}{8}}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

(3) $\frac{-54}{18} = -3$ 에서 공비가 -3 이므로 주어진 수열은

$$\boxed{2}, \boxed{-6}, 18, -54, 162, \dots$$

(4) $\frac{-1}{-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 공비가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 주어진 수열은

$$-\sqrt{2}, -1, \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}, -\frac{1}{2}, \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{4}}, \dots$$

답 (1) 4, 16 (2) $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}$

(3) 2, -6 (4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}$

558

(4) 첫째항이 3, 공비가 $\frac{-6}{3} = -2$ 이므로

$$a_n = 3 \times (-2)^{n-1}$$

(5) 첫째항이 -2 , 공비가 $-\frac{3}{2}$ 이므로

$$a_n = -2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

(6) 첫째항이 2, 공비가 $\frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ 이므로

$$a_n = 2 \times (\sqrt{3})^{n-1}$$

답 (1) $a_n = 2^{n-1}$

(2) $a_n = 5 \times (-1)^{n-1}$

(3) $a_n = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(4) $a_n = 3 \times (-2)^{n-1}$

(5) $a_n = -2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

(6) $a_n = 2 \times (\sqrt{3})^{n-1}$

559

세 수 2, x , 18이 이 순서대로 등비수열을 이루면 x 가 2와 18의 등비중항이므로

$$x^2 = 2 \times 18 = 36 \quad \therefore x = \pm 6$$

답 -6 또는 6

560

(1) 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면

$$a_3 = a \times (-2)^2 = 8 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore a_n = 2 \times (-2)^{n-1}$$

(2) $a_k = 2 \times (-2)^{k-1} = -64$ 이므로

$$(-2)^{k-1} = -32 = (-2)^5$$

$$k-1=5 \quad \therefore k=6$$

답 (1) $a_n = 2 \times (-2)^{n-1}$ (2) 6

561

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_3 = ar^2 = \frac{1}{9} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$a_6 = ar^5 = -3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{8} \div \textcircled{7}$ 을 하면

$$r^3 = -27 \quad \therefore r = -3$$

$\textcircled{7}$ 에 $r = -3$ 을 대입하면

$$9a = \frac{1}{9} \quad \therefore a = \frac{1}{81}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{81} \times (-3)^{n-1}$$

$$= (-3)^{-4} \times (-3)^{n-1}$$

$$= (-3)^{n-5}$$

-27 을 제 n 항이라 하면

$$(-3)^{n-5} = -27 = (-3)^3$$

$$n-5=3 \quad \therefore n=8$$

따라서 -27 은 제 8 항이다.

답 제 8 항

562

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$a_1 - a_4 = 56$ 에서

$$a - ar^3 = 56$$

$$\therefore a(1-r)(1+r+r^2) = 56 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 14 \text{에서}$$

$$a + ar + ar^2 = 14$$

$$\therefore a(1+r+r^2) = 14 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\textcircled{I} \div \textcircled{L} \text{을 하면} \quad 1-r=4$$

$$\therefore r = -3$$

$$\textcircled{L} \text{에 } r = -3 \text{을 대입하면} \quad 7a = 14$$

$$\therefore a = 2$$

$$\text{따라서 } a_n = 2 \times (-3)^{n-1} \text{이므로}$$

$$a_5 = 2 \times (-3)^4 = 162 \quad \text{답 162}$$

563

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면

$$a_2 = a \times 3 = 6 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

$$a_n > 1000 \text{에서} \quad 2 \times 3^{n-1} > 1000$$

$$\therefore 3^{n-1} > 500$$

$$\text{이때 } 3^5 = 243, 3^6 = 729 \text{이므로}$$

$$n-1 \geq 6 \quad \therefore n \geq 7$$

따라서 처음으로 1000보다 커지는 항은 제 7 항이다.

답 제 7 항

564

주어진 등비수열의 첫째항이 1, 제 $(n+2)$ 항이 729이므로

$$1 \times (\sqrt{3})^{n+1} = 729 = (\sqrt{3})^{12}$$

$$n+1 = 12 \quad \therefore n = 11 \quad \text{답 11}$$

565

$f(x) = x^2 + 2x + a$ 를 $x+1$, $x-1$, $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 각각

$$f(-1) = a-1, f(1) = a+3, f(2) = a+8$$

따라서 세 수 $a-1$, $a+3$, $a+8$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(a+3)^2 = (a-1)(a+8)$$

$$a^2 + 6a + 9 = a^2 + 7a - 8$$

$$\therefore a = 17$$

즉 $f(x) = x^2 + 2x + 17$ 이므로 $f(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(-2) = 17 \quad \text{답 17}$$

566

4, a , b 와 b , c , 64가 각각 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a^2 = 4b \quad \dots\dots \textcircled{I}$$

$$c^2 = 64b \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

또 a , b , c 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2b = a + c \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

$$\textcircled{I}, \textcircled{L} \text{에서} \quad c^2 = 16a^2$$

$$\therefore c = 4a \quad (\because a, c \text{는 양수})$$

$$\textcircled{E} \text{에 이것을 대입하면} \quad 2b = a + 4a$$

$$\therefore b = \frac{5}{2}a$$

$$\textcircled{I} \text{에 이것을 대입하면} \quad a^2 = 4 \times \frac{5}{2}a$$

$$a^2 - 10a = 0, \quad a(a-10) = 0$$

$$\therefore a = 10 \quad (\because a > 0)$$

$$\text{따라서 } b = \frac{5}{2} \times 10 = 25, c = 4 \times 10 = 40 \text{이므로}$$

$$a + b + c = 75 \quad \text{답 75}$$

567

세 근을 a , ar , ar^2 이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + ar + ar^2 = 6 \text{이므로}$$

$$a(1+r+r^2) = 6 \quad \dots\dots \textcircled{I}$$

$$a \times ar + ar \times ar^2 + ar^2 \times a = -24 \text{이므로}$$

$$a^2 r(1+r+r^2) = -24 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$a \times ar \times ar^2 = -k \text{이므로}$$

$$(ar)^3 = -k \quad \therefore k = -(ar)^3 \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

$$\textcircled{L} \div \textcircled{I} \text{을 하면} \quad ar = -4$$

$$\textcircled{E} \text{에 이것을 대입하면}$$

$$k = -(-4)^3 = 64 \quad \text{답 64}$$

568

$\overline{AA_1} = \overline{AD_1} = 2$ 이므로 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 한 변의 길이는

$$\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$\overline{A_1A_2} = \overline{A_1D_2} = \sqrt{2}$ 이므로 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 한 변의 길이는

$$\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$$

$\overline{A_2A_3} = \overline{A_2D_3} = 1$ 이므로 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$ 의 한 변의 길이는

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

∴

정사각형 $A_nB_nC_nD_n$ 의 한 변의 길이는

$$2\sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

따라서 정사각형 $A_{10}B_{10}C_{10}D_{10}$ 의 한 변의 길이는

$$2\sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^9 = \frac{1}{8}$$

이므로 둘레의 길이는

$$4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

04 등비수열의 합

• 본책 245~253쪽

569

$$(1) \frac{2(3^6 - 1)}{3 - 1} = 3^6 - 1 = 728$$

$$(2) \frac{4\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{8}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^8\right\} = \frac{85}{32}$$

$$(3) \frac{\sqrt{2}\{(\sqrt{2})^7 - 1\}}{\sqrt{2} - 1} = (2 + \sqrt{2})(8\sqrt{2} - 1) \\ = 14 + 15\sqrt{2}$$

$$(4) \text{첫째항이 } 1, \text{ 공비가 } \frac{-2}{1} = -2 \text{이므로 구하는 합은}$$

$$\frac{1 \times \{1 - (-2)^{10}\}}{1 - (-2)} = \frac{1}{3}\{1 - (-2)^{10}\} \\ = -341$$

$$(5) \text{첫째항이 } 0.1, \text{ 공비가 } \frac{0.01}{0.1} = 0.1 \text{이므로}$$

$$\frac{0.1 \times (1 - 0.1^{12})}{1 - 0.1} = \frac{1 - 0.1^{12}}{9}$$

답 (1) 728 (2) $\frac{85}{32}$ (3) $14 + 15\sqrt{2}$

(4) -341 (5) $\frac{1 - 0.1^{12}}{9}$

570

$$(1) \text{수열 } 1, 2, 4, 8, \dots \text{은 첫째항이 } 1, \text{ 공비가 } \frac{2}{1} = 2 \text{인}$$

등비수열이므로

$$a_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$(2) 256 \text{을 제 } n \text{ 항이라 하면}$$

$$2^{n-1} = 256 = 2^8, \quad n - 1 = 8$$

$$\therefore n = 9$$

따라서 256은 제9항이다.

$$(3) 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 256 = \frac{1 \times (2^9 - 1)}{2 - 1} = 511$$

답 (1) $a_n = 2^{n-1}$ (2) 제9항 (3) 511

571

$$(1) \text{수열 } \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{1024} \text{은 첫째항이 } \frac{1}{2},$$

공비가 $\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 일반항 a_n

은

$$a_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$\frac{1}{1024}$ 을 제 n 항이라 하면

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1024} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \quad \therefore n = 10$$

$$\therefore \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{1024}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1023}{1024}$$

$$(2) \text{주어진 식은 첫째항이 } \frac{2}{3}, \text{ 공비가 } -\frac{2}{9} \div \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

인 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 합이므로

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{2}{27} - \frac{2}{81} + \frac{2}{243}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^5\right\}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^5\right\} = \frac{122}{243}$$

$$(3) \text{수열 } 5, 10, 20, 40, \dots, 320 \text{은 첫째항이 } 5, \text{ 공비가}$$

$\frac{10}{5} = 2$ 인 등비수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 5 \times 2^{n-1}$$

320을 제 n 항이라 하면

$$5 \times 2^{n-1} = 320, \quad 2^{n-1} = 64 = 2^6$$

$$n-1=6 \quad \therefore n=7$$

$$\therefore 5+10+20+40+\cdots+320$$

$$= \frac{5(2^7-1)}{2-1}$$

$$= 5(2^7-1) = 635$$

$$\begin{aligned} (4) \log_2 4 + \log_2 4^3 + \log_2 4^9 + \log_2 4^{27} + \log_2 4^{81} \\ = \log_2 2^2 + \log_2 2^6 + \log_2 2^{18} + \log_2 2^{54} + \log_2 2^{162} \\ = 2+6+18+54+162 \end{aligned}$$

따라서 첫째항이 2, 공비가 $\frac{6}{2}=3$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 5 항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식}) &= \frac{2(3^5-1)}{3-1} \\ &= 3^5-1=242 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{답} \quad (1) \frac{1023}{1024} \quad (2) \frac{122}{243} \\ (3) 635 \quad (4) 242 \end{aligned}$$

572

(1) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2^1 - 1 = 1$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2^n - 1 - (2^{n-1} - 1) = 2^{n-1}(2-1) \\ &= 2^{n-1} \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $a_1=1$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 2^{n-1}$$

(2) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 3^1 + 2 = 5$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3^n + 2 - (3^{n-1} + 2) = 3^{n-1}(3-1) \\ &= 2 \times 3^{n-1} \end{aligned}$$

따라서 구하는 수열의 일반항은

$$a_1=5, a_n=2 \times 3^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$\begin{aligned} \text{답} \quad (1) a_n &= 2^{n-1} \\ (2) a_1 &= 5, a_n = 2 \times 3^{n-1} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

573

주어진 등비수열의 일반항을 a_n , 공비를 r 라 하면

$$a_4 = 2r^3 = -54$$

$$r^3 = -27 \quad \therefore r = -3$$

따라서 첫째항부터 제 10 항까지의 합은

$$\frac{2\{1-(-3)^{10}\}}{1-(-3)} = \frac{1-3^{10}}{2}$$

$$\text{답} \quad \frac{1-3^{10}}{2}$$

574

주어진 등비수열의 일반항을 a_n , 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_1 + a_3 = a + ar^2 = -10$$

$$\therefore a(1+r^2) = -10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $\textcircled{1}$ 에서 $r=1$ 이면

$$2a = -10 \quad \therefore a = -5$$

그런데 $a=-5, r=1$ 이면 첫째항부터 제 4 항까지의 합이 $4 \times (-5) = -20$ 이므로

$$r \neq 1$$

$$\therefore \frac{a(1-r^4)}{1-r} = 20 \text{이므로}$$

$$\frac{a(1+r^2)(1+r)(1-r)}{1-r} = 20$$

$$\therefore a(1+r^2)(1+r) = 20 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면} \quad 1+r = -2$$

$$\therefore r = -3$$

$\textcircled{1}$ 에 $r=-3$ 을 대입하면

$$10a = -10$$

$$\therefore a = -1$$

$$\text{답} \quad -1$$

575

주어진 등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 첫째항부터 제 10 항까지의 합이 2이므로

$$\frac{a(1-r^{10})}{1-r} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 제 21 항부터 제 30 항까지의 합은 첫째항이 ar^{20} , 공비가 r 인 등비수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합과 같고 그 합이 8이므로

$$\frac{ar^{20}(1-r^{10})}{1-r} = 8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉔ ÷ ㉑을 하면 $r^{20}=4$

$\therefore r^{10}=2$ ($\because r^{10}>0$)

제 11 항부터 제 20 항까지의 합은 첫째항이 ar^{10} , 공비가 r 인 등비수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합과 같으므로

$$\frac{ar^{10}(1-r^{10})}{1-r} = \frac{a(1-r^{10})}{1-r} \times r^{10} \\ = 2 \times 2 = 4$$

답 4

다른 풀이 주어진 등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_{10} = \frac{a(1-r^{10})}{1-r} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{a}$$

$S_{30} - S_{20} = 8$ 이므로

$$\frac{a(1-r^{30})}{1-r} - \frac{a(1-r^{20})}{1-r} = 8 \\ \frac{a(1-r^{10})(1+r^{10}+r^{20}) - a(1-r^{10})(1+r^{10})}{1-r} \\ = 8 \\ \frac{a(1-r^{10})}{1-r} \times r^{20} = 8$$

이 식에 ㉔을 대입하면 $r^{20}=4$

$\therefore r^{10}=2$ ($\because r^{10}>0$)

따라서 구하는 합은

$$S_{20} - S_{10} = \frac{a(1-r^{20})}{1-r} - \frac{a(1-r^{10})}{1-r} \\ = \frac{a(1-r^{10})(1+r^{10}) - a(1-r^{10})}{1-r} \\ = \frac{a(1-r^{10})}{1-r} \times r^{10} \\ = 2 \times 2 = 4$$

576

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 = ar = 4 \quad \dots\dots \textcircled{a}$$

$$a_5 = ar^4 = 32 \quad \dots\dots \textcircled{b}$$

㉔ ÷ ㉑을 하면 $r^3=8$ $\therefore r=2$

㉑에 $r=2$ 를 대입하면

$$2a=4 \quad \therefore a=2$$

따라서 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{2(2^n-1)}{2-1} \\ = 2^{n+1}-2$$

$S_n > 1000$ 에서 $2^{n+1}-2 > 1000$

$\therefore 2^{n+1} > 1002$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$ 이므로

$n+1 \geq 10 \quad \therefore n \geq 9$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 9 항까지의 합이 처음으로 1000보다 커진다. **답 제9항**

577

규칙 (가), (나)를 만족시키도록

나머지 칸에 수를 써넣으면

오른쪽 그림과 같다.

						2					
				8	4	2					
		32	16	8	4	2					
	128	64	32	16	8	4	2				

따라서 네 번째 줄의 7개의

수의 합은 첫째항이 128이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 7 항까지의 합과 같으므로

$$\frac{128 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^7 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 254$$

답 254

578

1회 시행에서 색칠한 부분의 넓이는 한 변의 길이가 3

인 정사각형의 넓이의 $\frac{1}{9}$ 이므로

$$9 \times \frac{1}{9} = 1$$

2회 시행에서 색칠한 부분의 넓이는

$$1 \times \frac{1}{9} \times 8 = \frac{8}{9}$$

3회 시행에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\frac{1}{9} \times \frac{1}{9} \times 8^2 = \left(\frac{8}{9} \right)^2$$

$\vdots$

따라서 시행을 8회 반복했을 때 색칠한 부분의 넓이의 합은

$$1 + \frac{8}{9} + \left(\frac{8}{9} \right)^2 + \dots + \left(\frac{8}{9} \right)^7$$

$$= \frac{1 \times \left\{ 1 - \left(\frac{8}{9} \right)^8 \right\}}{1 - \frac{8}{9}}$$

$$= 9 \left\{ 1 - \left(\frac{8}{9} \right)^8 \right\}$$

답 $9 \left\{ 1 - \left(\frac{8}{9} \right)^8 \right\}$

579

$$\log_3 (S_n + 3) = n + 1 \text{에서} \quad S_n + 3 = 3^{n+1}$$

$$\therefore S_n = 3^{n+1} - 3$$

$n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 3^2 - 3 = 6$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (3^{n+1} - 3) - (3^n - 3) \\ &= 2 \times 3^n \end{aligned} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이때 $a_1=6$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 2 \times 3^n$$

따라서 $p=2$, $q=3$ 이므로

$$p - q = -1 \quad \text{답} \quad -1$$

580

$n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2 \times 3^1 + k = 6 + k$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2 \times 3^n + k) - (2 \times 3^{n-1} + k) \\ &= 4 \times 3^{n-1} \end{aligned} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열을 이루려면

$a_1=6+k$ 와 ㉡에 $n=1$ 을 대입한 값이 같아야 하므로

$$6 + k = 4 \quad \therefore k = -2 \quad \text{답} \quad -2$$

581

매년 초에 적립한 금액의 원리합계는 다음과 같다.



따라서 12년째 말의 적립금의 원리합계를 S 만 원이라 하면

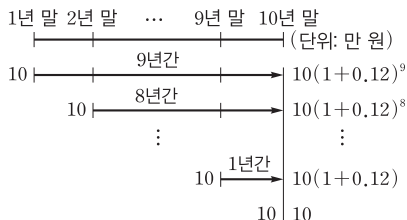
$$\begin{aligned} S &= 4(1+0.05) + 4(1+0.05)^2 + \dots \\ &\quad + 4(1+0.05)^{12} \\ &= \frac{4(1+0.05)\{(1+0.05)^{12}-1\}}{(1+0.05)-1} \\ &= \frac{4 \times 1.05 \times (1.8-1)}{0.05} = 67.2 \end{aligned}$$

따라서 적립금의 원리합계는 67만 2천 원이다.

답 67만 2천 원

582

매년 말에 적립한 금액의 원리합계는 다음과 같다.



따라서 10년째 말의 적립금의 원리합계를 S 만 원이라 하면

$$\begin{aligned} S &= 10 + 10(1+0.12) + 10(1+0.12)^2 + \dots \\ &\quad + 10(1+0.12)^9 \end{aligned}$$

이것은 첫째항이 10, 공비가 $1+0.12$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} S &= \frac{10\{(1+0.12)^{10}-1\}}{(1+0.12)-1} \\ &= \frac{10(3.1-1)}{0.12} = 175 \end{aligned}$$

따라서 적립금의 원리합계는 175만 원이다.

답 175만 원

583

매년 초에 적립해야 하는 금액을 a 만 원이라 하면 10년째 말의 적립금의 원리합계는

$$\begin{aligned} &a(1+0.04) + a(1+0.04)^2 + \dots \\ &\quad + a(1+0.04)^{10} \text{ (만 원)} \end{aligned}$$

이것은 첫째항이 $a(1+0.04)$, 공비가 $1+0.04$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 10 항까지의 합이므로 원리합계가 260만 원이 되려면

$$\begin{aligned} &\frac{a(1+0.04)\{(1+0.04)^{10}-1\}}{(1+0.04)-1} = 260 \\ &\frac{a \times 1.04 \times (1.5-1)}{0.04} = 260 \end{aligned}$$

$$13a = 260 \quad \therefore a = 20$$

따라서 매년 20만 원씩 적립해야 한다.

답 20만 원

584

전략 $a_5=8a_2$ 에서 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_5=8a_2 \text{이므로}$$

$$ar^4=8ar, \quad r^3=8 \quad (\because a \neq 0, r \neq 0)$$

$$\therefore r=2$$

$$\therefore \frac{a_3a_4}{a_2a_6} = \frac{ar^2 \times ar^3}{ar \times ar^5} = \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$

585

전략 첫째항이 1, 제5항이 100임을 이용하여 주어진 등비수열의 공비를 구한다.

주어진 등비수열의 공비를 r 라 하면 첫째항이 1,

제5항이 100이므로

$$1 \times r^4 = 100 \quad \therefore r^2 = 10 \quad (\because r^2 > 0)$$

따라서 $a_2 = 1 \times r^2 = 10$ 이므로

$$4 \log a_2 = 4 \log 10 = 4 \quad \text{답 } 4$$

다른 풀이 주어진 등비수열의 공비를 r 라 하면 세 수 1, a_2 , 100은 이 순서대로 공비가 r^2 인 등비수열을 이루므로

$$a_2^2 = 1 \times 100 \quad \therefore a_2 = 10 \quad (\because a_2 > 0)$$

586

전략 a 가 5와 b 의 등비중항임을 이용하여 a 와 b 사이의 관계식을 구한다.

세 실수 5, a , b 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a^2 = 5b \quad \dots\dots ㉠$$

$$\log_a 5b + \log_b 5 = \frac{7}{3} \text{에 } ㉠ \text{을 대입하면}$$

$$\log_a a^2 + \log_b 5 = \frac{7}{3}$$

$$2 + \log_b 5 = \frac{7}{3}$$

$$\log_b 5 = \frac{1}{3}, \quad b^{\frac{1}{3}} = 5$$

$$\therefore b = 5^3 = 125$$

㉠에 $b=125$ 를 대입하면

$$a^2 = 5 \times 125 = 25^2$$

$$\therefore a = -25 \text{ 또는 } a = 25$$

이때 로그의 밑의 조건에서 $a > 0$, $a \neq 1$ 이므로

$$a = 25$$

$$\therefore a + b = 150$$

답 150

587

전략 먼저 주어진 조건을 이용하여 등비수열의 공비를 구한다.

주어진 등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

제10항이 6이므로

$$ar^9 = 6 \quad \dots\dots ㉠$$

제15항이 192이므로

$$ar^{14} = 192 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠ $\div$ ㉡을 하면

$$r^5 = 32 \quad \therefore r = 2$$

㉠에 $r=2$ 를 대입하면 $a \times 2^9 = 6$

$$\therefore a = \frac{3}{2^8}$$

즉 제9항은 $ar^8 = \frac{3}{2^8} \times 2^8 = 3$ 이므로 제9항부터

제16항까지의 합은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제8항까지의 합과 같다.

따라서 구하는 합은

$$\frac{3(2^8 - 1)}{2 - 1} = 765 \quad \text{답 } 765$$

588

전략 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 이용하여 수열 $\{a_n a_{n+1}\}$ 의 일반항을 구한다.

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n a_{n+1} = 2^{n-1} \times 2^n = 2^{2n-1}$$

$$n=1 \text{일 때, } a_1 a_2 = 2$$

$$n=2 \text{일 때, } a_2 a_3 = 2^3 = 8$$

$$n=3 \text{일 때, } a_3 a_4 = 2^5 = 32$$

$\vdots$

즉 수열 $\{a_n a_{n+1}\}$ 은 첫째항이 2이고 공비가 $8 \div 2 = 4$

인 등비수열이므로 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{2(4^{10} - 1)}{4 - 1} = \frac{2}{3}(4^{10} - 1)$$

$$\text{답 } \frac{2}{3}(4^{10} - 1)$$

다른 풀이 $a_n a_{n+1} = 2^{n-1} \times 2^n = 2 \times 4^{n-1}$

즉 수열 $\{a_n a_{n+1}\}$ 은 첫째항이 2이고 공비가 4인 등비수열이다.

해설 Focus

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 각각 공비가 r_1 , r_2 인 등비수열일 때

$$a_n = a_1 r_1^{n-1}, b_n = b_1 r_2^{n-1}$$

$$\therefore a_n b_n = a_1 b_1 \times (r_1 r_2)^{n-1}$$

따라서 수열 $\{a_n b_n\}$ 은 첫째항이 $a_1 b_1$, 공비가 $r_1 r_2$ 인 등비수열이다.

589

전략 주어진 등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하고 등비수열의 합의 공식을 이용한다.

주어진 등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_6 = \frac{a(1-r^6)}{1-r} = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{a(1-r^{12})}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^6)(1+r^6)}{1-r} = 12 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$1+r^6=3 \quad \therefore r^6=2$$

따라서 첫째항부터 제 18 항까지의 합은

$$\begin{aligned} S_{18} &= \frac{a(1-r^{18})}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^6)(1+r^6+r^{12})}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^6)}{1-r} \times (1+r^6+r^{12}) \\ &= 4 \times (1+2+2^2) = 28 \end{aligned}$$

답 28

590

전략 주어진 등비수열의 첫째항과 공비를 이용하여 S_n 을 구한다.

주어진 등비수열의 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

이므로

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$|S_n - 1| < 10^{-3} \text{에서} \quad \left| 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right| < \frac{1}{1000}$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^n < \frac{1}{1000}$$

$$\therefore 2^n > 1000$$

이때 $2^9 = 512$, $2^{10} = 1024$ 이므로

$$n \geq 10$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 10이다.

답 10

591

전략 주어진 조건을 이용하여 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차와 등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비 사이의 관계식을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d , 등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$b_3 = -a_2 \text{에서} \quad 3r^2 = -(3+d)$$

$$\therefore d = -3r^2 - 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_2 + b_2 = a_3 + b_3 \text{에서}$$

$$(3+d) + 3r = (3+2d) + 3r^2$$

$$\therefore d = -3r^2 + 3r \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서

$$-3r^2 - 3 = -3r^2 + 3r$$

$$\therefore r = -1$$

$\textcircled{1}$ 에 $r = -1$ 을 대입하면

$$d = -3 - 3 = -6$$

$$\therefore a_3 = 3 + 2 \times (-6) = -9$$

답 ①

592

전략 주어진 등비수열의 일반항 a_n 에 대하여 $a_n > 1000$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구한다.

주어진 등비수열의 첫째항이 1, 공비가 $\frac{5}{2} \div 1 = \frac{5}{2}$ 이

므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 1 \times \left(\frac{5}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{5}{2} \right)^{n-1}$$

$$a_n > 1000 \text{에서} \quad \left(\frac{5}{2} \right)^{n-1} > 1000$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log \left(\frac{5}{2} \right)^{n-1} > \log 1000$$

$$(n-1) \log \frac{5}{2} > 3$$

$$(n-1)(\log 10 - 2 \log 2) > 3$$

$$n-1 > \frac{3}{1-2 \log 2}$$

$$\therefore n > \frac{3}{1-2 \log 2} + 1$$

$$= \frac{3}{1-2 \times 0.3} + 1$$

$$= 8.5$$

따라서 처음으로 1000보다 커지는 항은 제9항이다.

답 제9항

593

전략 y 는 x 와 z 의 등비중항이고 $2y$ 는 x 와 $3z$ 의 등차중항임을 이용한다.

세 수 x, y, z 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$y^2 = xz \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

세 수 $x, 2y, 3z$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2y = \frac{x+3z}{2} \quad \therefore x = 4y - 3z$$

①에 이것을 대입하면

$$y^2 = (4y - 3z)z$$

$$y^2 - 4yz + 3z^2 = 0, \quad (y-z)(y-3z) = 0$$

$$\therefore y = z \text{ 또는 } y = 3z$$

이때 $y \neq z$ 이므로 $y = 3z$

$$\therefore r = \frac{z}{y} = \frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

다른 풀이 세 수 x, y, z 는 이 순서대로 공비가 r 인 등비수열을 이루므로

$$y = xr, \quad z = xr^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

세 수 $x, 2y, 3z$ 는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$4y = x + 3z$$

이 식에 ①을 대입하면 $4xr = x + 3xr^2$

$$\therefore 3xr^2 - 4xr + x = 0$$

이때 $x \neq 0$ 이므로 양변을 x 로 나누면

$$3r^2 - 4r + 1 = 0, \quad (3r-1)(r-1) = 0$$

$$\therefore r = \frac{1}{3} \quad (\because r \neq 1)$$

참고 $x=0$ 이면 $y=0, z=0$ 이므로

$$x=y=z$$

또 $r=1$ 이면 $x=y=z$

이때 x, y, z 는 서로 다른 세 수이므로

$$x \neq 0, r \neq 1$$

594

전략 수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하고 $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2k-1}$ 과 $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2k}$ 를 각각 r 에 대한 식으로 나타낸다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 수열 $\{a_{2n-1}\}, \{a_{2n}\}$ 은 모두 공비가 r^2 인 등비수열이므로

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2k-1}$$

$$= \frac{r^{2k} - 1}{r^2 - 1} = 91 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2k}$$

$$= \frac{r(r^{2k} - 1)}{r^2 - 1} = 273 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

② ÷ ①을 하면 $r = 3$

①에 $r = 3$ 을 대입하면

$$\frac{3^{2k} - 1}{8} = 91, \quad 3^{2k} = 729 = 3^6$$

$$2k = 6 \quad \therefore k = 3$$

답 3

다른 풀이 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2k-1}$$

$$= 1 + r^2 + r^4 + \dots + r^{2k-2} = 91 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2k}$$

$$= r + r^3 + r^5 + \dots + r^{2k-1}$$

$$= r(1 + r^2 + r^4 + \dots + r^{2k-2})$$

$$= 273 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

② ÷ ①을 하면 $r = 3$

595

전략 주어진 수열의 제 n 항이 $10^n - 1$ 임을 이용한다.

주어진 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999 \dots 9}_{n \text{ 개}}$$

$$= (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \dots + (10^n - 1)$$

$$= (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n) - n$$

$$= \frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n \quad \begin{array}{l} \text{첫째항이 10, 공비가 10인} \\ \text{등비수열의 첫째항부터} \\ \text{제 } n \text{ 항까지의 합} \end{array}$$

$$= \frac{10}{9} (10^n - 1) - n$$

$$= \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{9}$$

답 $\frac{10^{n+1} - 9n - 10}{9}$

596

전략 $\frac{S_{3n}}{S_n}$ 을 r 에 대한 식으로 나타낸 후 r^n 의 값을 구한다.

주어진 등비수열의 첫째항을 a 라 하면

$$\begin{aligned}\frac{S_{3n}}{S_n} &= \frac{\frac{a(r^{3n}-1)}{r-1}}{\frac{a(r^n-1)}{r-1}} = \frac{r^{3n}-1}{r^n-1} \\ &= \frac{(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)}{r^n-1} \\ &= r^{2n}+r^n+1\end{aligned}$$

즉 $r^{2n}+r^n+1=7$ 이므로

$$\begin{aligned}(r^n)^2+r^n-6 &= 0, & (r^n+3)(r^n-2) &= 0 \\ \therefore r^n &= 2 \quad (\because r > 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{S_{2n}}{S_n} &= \frac{\frac{a(r^{2n}-1)}{r-1}}{\frac{a(r^n-1)}{r-1}} = \frac{r^{2n}-1}{r^n-1} \\ &= \frac{(r^n+1)(r^n-1)}{r^n-1} \\ &= r^n+1 \\ &= 2+1=3\end{aligned}$$

답 3

597

전략 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하고 주어진 조건을 a, r 에 대한 식으로 나타낸다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$\begin{aligned}a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n \\ = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = 36\end{aligned}\quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots+a_{2n} \\ = ar^n+ar^{n+1}+ar^{n+2}+\cdots+ar^{2n-1} \\ = \frac{ar^n(1-r^n)}{1-r} = 18\end{aligned}\quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면} \quad r^n = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore a_{2n+1}+a_{2n+2}+a_{2n+3}+\cdots+a_{3n} \\ = ar^{2n}+ar^{2n+1}+ar^{2n+2}+\cdots+ar^{3n-1} \\ = \frac{ar^{2n}(1-r^n)}{1-r} \\ = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \times (r^n)^2 \\ = 36 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 9\end{aligned}$$

답 9

598

전략 주어진 식을 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공비에 대한 식으로 변형한다.

$$S_{n+3}-S_n=13 \times 3^{n-1} \text{에서}$$

$$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=13 \times 3^{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하고

$\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입하면

$$a_2+a_3+a_4=13$$

$$ar+ar^2+ar^3=13$$

$$\therefore ar(1+r+r^2)=13 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 에 $n=2$ 를 대입하면

$$a_3+a_4+a_5=13 \times 3$$

$$ar^2+ar^3+ar^4=39$$

$$\therefore ar^2(1+r+r^2)=39 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \div \textcircled{2} \text{을 하면} \quad r=3$$

$\textcircled{2}$ 에 $r=3$ 을 대입하면

$$a \times 3 \times (1+3+3^2)=13$$

$$\therefore a = \frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } a_n = \frac{1}{3} \times 3^{n-1} = 3^{n-2} \text{이므로}$$

$$a_4 = 3^2 = 9$$

답 9

다른 풀이 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $\textcircled{1}$ 에서

$$\begin{aligned}ar^n+ar^{n+1}+ar^{n+2} &= ar(1+r+r^2) \times r^{n-1} \\ &= 13 \times 3^{n-1}\end{aligned}$$

$$\text{따라서 } ar(1+r+r^2)=13, r=3 \text{이므로}$$

$$a = \frac{1}{3}$$

599

전략 주어진 조건을 이용하여 등비수열의 공비에 대한 식을 세운다.

$$\text{주어진 등비수열의 공비를 } r \text{라 하면 첫째항이 } \frac{1}{2},$$

제 $(n+2)$ 항이 8이므로

$$\frac{1}{2} \times r^{n+1} = 8$$

$$\therefore r^{n+1} = 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n \times 8 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} r \times \frac{1}{2} r^2 \times \cdots \times \frac{1}{2} r^n \times 8 \\ &= 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times r^{\frac{1+2+\cdots+n}{2}} \\ &= 2^{-n+2} \times r^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{첫째항이 1, 끝항이 } n, \text{ 항수가 } n \text{ 인 등차수열의 합} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} 2^{-n+2} \times r^{\frac{n(n+1)}{2}} &= 512 \\ 2^{-n+2} \times (r^{n+1})^{\frac{n}{2}} &= 512 \end{aligned}$$

이 식에 ①을 대입하면

$$\begin{aligned} 2^{-n+2} \times 16^{\frac{n}{2}} &= 512 \\ 2^{n+2} &= 2^9, \quad n+2=9 \\ \therefore n &= 7 \end{aligned}$$

①에 $n=7$ 을 대입하면 $r^8=16$

$$\therefore r = \sqrt[4]{2} \quad (\because r > 0)$$

이때 a_4 는 주어진 수열의 제5항이므로

$$a_4 = \frac{1}{2} \times (\sqrt[4]{2})^4 = 2$$

답 2

600

전략 $x_1, x_2, x_3, \dots$ 을 직접 구하고 규칙을 찾아 수열 $\{x_n\}$ 의 일반항을 구한다.

두 점 P_1, A 의 y 좌표가 같으므로 점 P_1 의 x 좌표는

$$\begin{aligned} 16^x &= 2^{64} \text{에서} \\ 2^{4x} &= 2^{64} \quad 4x=64 \\ \therefore x &= 16 \end{aligned}$$

이때 두 점 P_1, Q_1 의 x 좌표가 같으므로

$$x_1 = 16$$

두 점 P_2, Q_1 의 y 좌표가 같고 $Q_1(16, 2^{16})$ 이므로 점 P_2 의 x 좌표는 $16^x = 2^{16}$ 에서

$$\begin{aligned} 2^{4x} &= 2^{16}, \quad 4x=16 \\ \therefore x &= 4 \end{aligned}$$

이때 두 점 P_2, Q_2 의 x 좌표가 같으므로

$$x_2 = 4$$

두 점 P_3, Q_2 의 y 좌표가 같고 $Q_2(4, 2^4)$ 이므로 점 P_3 의 x 좌표는 $16^x = 2^4$ 에서

$$\begin{aligned} 2^{4x} &= 2^4, \quad 4x=4 \\ \therefore x &= 1 \end{aligned}$$

이때 두 점 P_3, Q_3 의 x 좌표가 같으므로

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{x_n\}$ 은 첫째항이 16이고 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로

$$\begin{aligned} x_n &= 16 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ &= 2^4 \times 2^{-2n+2} = 2^{6-2n} \end{aligned}$$

한편 $x_n < \frac{1}{k}$ 을 만족시키는 n 의 최솟값이 6이 되려면

$$x_5 \geq \frac{1}{k}, \quad x_6 < \frac{1}{k} \text{ 이어야 한다.}$$

$$\text{즉 } \frac{1}{2^4} \geq \frac{1}{k}, \quad \frac{1}{2^6} < \frac{1}{k} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{64} &< \frac{1}{k} \leq \frac{1}{16} \\ \therefore 16 &\leq k < 64 \end{aligned}$$

따라서 자연수 k 는 16, 17, 18, ..., 63의 48개이다.

답 ①

601

전략 등비수열의 합의 공식을 이용하여 유리와 서준이가 받는 금액을 각각 구해 본다.

유리와 서준이가 받는 금액을 각각 A 만 원, B 만 원이라 하면

$$\begin{aligned} A &= 20(1+0.05) + 20(1+0.05)^2 + \cdots \\ &\quad + 20(1+0.05)^{10} \\ &= \frac{20(1+0.05)\{(1+0.05)^{10}-1\}}{(1+0.05)-1} \\ &= 420(1.05^{10}-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 40(1+0.05) + 40(1+0.05)^2 + \cdots \\ &\quad + 40(1+0.05)^5 \\ &= \frac{40(1+0.05)\{(1+0.05)^5-1\}}{(1+0.05)-1} \\ &= 840(1.05^5-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{A}{B} &= \frac{420(1.05^{10}-1)}{840(1.05^5-1)} \\ &= \frac{1.05^5+1}{2} = \frac{1.28+1}{2} \\ &= 1.14 \end{aligned}$$

따라서 유리가 받는 금액은 서준이가 받는 금액의 1.14배이다.

답 1.14배

2 수열의 합

Ⅲ. 수열

01 Σ 의 뜻과 그 성질

● 본책 258~264쪽

602

- (1) 수열 1, 3, 5, ...의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$\begin{aligned} a_k &= 2k-1 \\ \therefore 1+3+5+\cdots+(2n-1) \\ &= \sum_{k=1}^n (2k-1) \end{aligned}$$

- (2) 수열 2, 4, 8, ...의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$\begin{aligned} a_k &= 2^k \\ \therefore 2+4+8+\cdots+2^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} 2^k \end{aligned}$$

- (3) 수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{k+1} \\ \therefore \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

- (4) 수열 2, 5, 8, ...은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이므로 제 k 항을 a_k 라 하면

$$\begin{aligned} a_k &= 2 + (k-1) \times 3 = 3k-1 \\ \text{이때 } 3k-1 &= 29 \text{에서} \\ k &= 10 \\ \therefore 2+5+8+\cdots+29 \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (3k-1)$$

- (5) 수열 4, 4, 4, ...의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$\begin{aligned} a_k &= 4 \\ \therefore 4+4+4+4+4 &= \sum_{k=1}^5 4 \end{aligned}$$

- (6) 수열 $1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, \dots$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$\begin{aligned} a_k &= k(k+1) \\ \text{이때 } 12 \times 13 &= k(k+1) \text{에서} \\ k &= 12 \\ \therefore 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + 12 \times 13 \\ &= \sum_{k=1}^{12} k(k+1) \end{aligned}$$

답 풀이 참조

603

- (1) $\sum_{k=1}^{10} (5k+1)$
 $= (5 \times 1 + 1) + (5 \times 2 + 1) + (5 \times 3 + 1) + \cdots$
 $+ (5 \times 10 + 1)$
 $= 6 + 11 + 16 + \cdots + 51$
- (2) $\sum_{i=1}^7 3^{i-1} = 3^{1-1} + 3^{2-1} + 3^{3-1} + \cdots + 3^{7-1}$
 $= 1 + 3 + 9 + \cdots + 729$
- (3) $\sum_{k=1}^6 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$
- (4) $\sum_{n=1}^8 \{(-1)^n \times n\}$
 $= -1 \times 1 + (-1)^2 \times 2 + (-1)^3 \times 3 + \cdots$
 $+ (-1)^8 \times 8$
 $= -1 + 2 - 3 + \cdots + 8$
- (5) $\sum_{k=3}^n 2^k = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^n$
 $= 8 + 16 + 32 + \cdots + 2^n$
- (6) $\sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)}$
 $= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$
 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

답 풀이 참조

604

- (1) $\sum_{k=1}^{20} (4a_k + 1) = 4 \sum_{k=1}^{20} a_k + \sum_{k=1}^{20} 1$
 $= 4 \times 10 + 1 \times 20 = 60$
- (2) $\sum_{k=1}^{20} (3a_k - 2b_k) = 3 \sum_{k=1}^{20} a_k - 2 \sum_{k=1}^{20} b_k$
 $= 3 \times 10 - 2 \times (-30) = 90$

답 (1) 60 (2) 90

605

- $\sum_{k=1}^{99} k(a_k - a_{k+1})$
 $= (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + \cdots$
 $+ 98(a_{98} - a_{99}) + 99(a_{99} - a_{100})$
 $= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{98} + a_{99} - 99a_{100}$
 $= \sum_{k=1}^{99} a_k - 99a_{100} = 15 - 99 \times \frac{1}{9} = 4$

답 4

Ⅲ-2

수열의
합

606

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{10} (a_k + a_{k+1}) \\
 &= (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) + \cdots \\
 & \quad + (a_9 + a_{10}) + (a_{10} + a_{11}) \\
 &= a_1 + 2(a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}) + a_{11} \\
 &= 1 + 2(a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}) + a_{11} \\
 &= 30 \quad \dots \textcircled{㉠}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{또 } \sum_{k=1}^{10} a_k = 10 \text{에서} \\
 & \quad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 10 \\
 & \quad \therefore a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 10 - a_1 \\
 & \quad \quad \quad = 10 - 1 \\
 & \quad \quad \quad = 9 \quad \dots \textcircled{㉡}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{㉠} \text{에 } \textcircled{㉡} \text{을 대입하면} \\
 & \quad 1 + 2 \times 9 + a_{11} = 30 \\
 & \quad \therefore a_{11} = 11
 \end{aligned}$$

답 11

607

$$\begin{aligned}
 & \neg. \sum_{k=1}^9 (a_k - a_{10-k}) \\
 &= (a_1 - a_9) + (a_2 - a_8) + (a_3 - a_7) + \cdots \\
 & \quad + (a_9 - a_1) \\
 &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9) \\
 & \quad - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9) \\
 &= 0 \text{ (참)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sqcup. \sum_{k=1}^5 \{2k \times (-1)^k\} \\
 &= 2 \times (-1) + 4 \times (-1)^2 + 6 \times (-1)^3 \\
 & \quad + 8 \times (-1)^4 + 10 \times (-1)^5 \\
 &= -2 + 4 - 6 + 8 - 10 \text{ (거짓)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sqsubset. \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) + \cdots \\
 & \quad + \left(\frac{1}{19} + \frac{1}{20} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k} \text{ (참)}
 \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\sqsubset$ 이다.

답 $\neg, \sqsubset$

608

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^9 (2a_k + 1)^2 - \sum_{k=1}^9 (a_k - 2)^2 \\
 &= \sum_{k=1}^9 \{ (2a_k + 1)^2 - (a_k - 2)^2 \} \\
 &= \sum_{k=1}^9 (3a_k^2 + 8a_k - 3) \\
 &= 3 \sum_{k=1}^9 a_k^2 + 8 \sum_{k=1}^9 a_k - \sum_{k=1}^9 3 \\
 &= 3 \times 15 + 8 \times (-5) - 3 \times 9 \\
 &= -22
 \end{aligned}$$

답 -22

609

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^n (a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2) \\
 &= \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k
 \end{aligned}$$

이므로

$$60 = 40 + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k, \quad 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k = 20$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n a_k b_k = 10$$

답 10

610

$$\begin{aligned}
 (1) & \sum_{k=1}^{30} (3 \times 2^k) - \sum_{k=16}^{30} (3 \times 2^k) \\
 &= \sum_{k=1}^{15} (3 \times 2^k) = 3 \sum_{k=1}^{15} 2^k \\
 &= 3 \times \frac{2(2^{15} - 1)}{2 - 1} = 6(2^{15} - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & \sum_{k=1}^{10} \frac{5^k + (-3)^k}{4^k} \\
 &= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{5}{4} \right)^k + \sum_{k=1}^{10} \left(-\frac{3}{4} \right)^k \\
 &= \frac{\frac{5}{4} \left\{ \left(\frac{5}{4} \right)^{10} - 1 \right\}}{\frac{5}{4} - 1} + \frac{-\frac{3}{4} \left\{ 1 - \left(-\frac{3}{4} \right)^{10} \right\}}{1 - \left(-\frac{3}{4} \right)} \\
 &= 5 \left\{ \left(\frac{5}{4} \right)^{10} - 1 \right\} - \frac{3}{7} \left\{ 1 - \left(-\frac{3}{4} \right)^{10} \right\} \\
 &= 5 \times \left(\frac{5}{4} \right)^{10} - 5 - \frac{3}{7} + \frac{3}{7} \times \left(\frac{3}{4} \right)^{10} \\
 &= 5 \times \left(\frac{5}{4} \right)^{10} + \frac{3}{7} \times \left(\frac{3}{4} \right)^{10} - \frac{38}{7}
 \end{aligned}$$

답 (1) $6(2^{15} - 1)$

$$(2) 5 \times \left(\frac{5}{4} \right)^{10} + \frac{3}{7} \times \left(\frac{3}{4} \right)^{10} - \frac{38}{7}$$

611

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_5 - a_2 = 15$ 에서

$$3d = 15 \quad \therefore d = 5$$

$$\therefore a_n = 3 + (n-1) \times 5 = 5n - 2$$

따라서 $a_{11} = 5 \times 11 - 2 = 53$, $a_{20} = 5 \times 20 - 2 = 98$ 이

므로

$$\sum_{k=11}^{20} a_k = \frac{10(53+98)}{2} = 755$$

답 755

다른 풀이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 5이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=11}^{20} a_k &= \sum_{k=1}^{20} a_k - \sum_{k=1}^{10} a_k \\ &= \frac{20(2 \times 3 + 19 \times 5)}{2} - \frac{10(2 \times 3 + 9 \times 5)}{2} \\ &= 1010 - 255 = 755 \end{aligned}$$

612

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 a_k + \sum_{k=1}^6 b_k &= \frac{a_1\{(\sqrt{2})^6 - 1\}}{\sqrt{2} - 1} + \frac{b_1\{1 - (-\sqrt{2})^6\}}{1 - (-\sqrt{2})} \\ &= 7(\sqrt{2} + 1)a_1 - 7(\sqrt{2} - 1)b_1 \\ &= 14a_1 \quad (\because a_1 = b_1) \end{aligned}$$

$$= 14a_1 \quad (\because a_1 = b_1)$$

즉 $14a_1 = 168$ 이므로

$$a_1 = b_1 = 12$$

$$\therefore a_3 + b_3 = 12 \times (\sqrt{2})^2 + 12 \times (-\sqrt{2})^2 = 48$$

답 48

다른 풀이 $\sum_{k=1}^6 a_k + \sum_{k=1}^6 b_k$

$$\begin{aligned} &= a_1 + \sqrt{2}a_1 + 2a_1 + 2\sqrt{2}a_1 + 4a_1 + 4\sqrt{2}a_1 \\ &\quad + b_1 - \sqrt{2}b_1 + 2b_1 - 2\sqrt{2}b_1 + 4b_1 - 4\sqrt{2}b_1 \\ &= 14a_1 \quad (\because a_1 = b_1) \end{aligned}$$

02 자연수의 거듭제곱의 합

● 본책 265~269쪽

613

$$\begin{aligned} (1) \sum_{k=1}^{10} (2k+1) &= 2 \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= 2 \times \frac{10 \times 11}{2} + 1 \times 10 \\ &= 110 + 10 = 120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{k=1}^7 (k^2 + k - 1) &= \sum_{k=1}^7 k^2 + \sum_{k=1}^7 k - \sum_{k=1}^7 1 \\ &= \frac{7 \times 8 \times 15}{6} + \frac{7 \times 8}{2} - 1 \times 7 \\ &= 140 + 28 - 7 = 161 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \sum_{k=1}^5 (4k^3 - 3k^2) &= 4 \sum_{k=1}^5 k^3 - 3 \sum_{k=1}^5 k^2 \\ &= 4 \times \left(\frac{5 \times 6}{2} \right)^2 - 3 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} \\ &= 900 - 165 = 735 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \sum_{k=1}^8 (2k+1)(3k-1) &= \sum_{k=1}^8 (6k^2 + k - 1) \\ &= 6 \sum_{k=1}^8 k^2 + \sum_{k=1}^8 k - \sum_{k=1}^8 1 \\ &= 6 \times \frac{8 \times 9 \times 17}{6} + \frac{8 \times 9}{2} - 1 \times 8 \\ &= 1224 + 36 - 8 = 1252 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \sum_{k=1}^6 k(k^2 + 2) &= \sum_{k=1}^6 (k^3 + 2k) = \sum_{k=1}^6 k^3 + 2 \sum_{k=1}^6 k \\ &= \left(\frac{6 \times 7}{2} \right)^2 + 2 \times \frac{6 \times 7}{2} \\ &= 441 + 42 = 483 \end{aligned}$$

답 (1) 120 (2) 161 (3) 735

(4) 1252 (5) 483

614

$$\begin{aligned} (1) \sum_{k=1}^9 (2k-3)^2 - \sum_{k=1}^9 (2k)^2 &= \sum_{k=1}^9 \{(2k-3)^2 - (2k)^2\} \\ &= \sum_{k=1}^9 (-12k + 9) = -12 \sum_{k=1}^9 k + \sum_{k=1}^9 9 \\ &= -12 \times \frac{9 \times 10}{2} + 9 \times 9 \\ &= -540 + 81 = -459 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{k=1}^5 (k+1)^3 - \sum_{k=1}^5 (k-1)^3 &= \sum_{k=1}^5 \{(k+1)^3 - (k-1)^3\} \\ &= \sum_{k=1}^5 (6k^2 + 2) = 6 \sum_{k=1}^5 k^2 + \sum_{k=1}^5 2 \\ &= 6 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + 2 \times 5 \\ &= 330 + 10 = 340 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \sum_{k=1}^{10} (k^2 - k + 1) + \sum_{i=1}^{10} (i^2 + i - 1) \\
= \sum_{k=1}^{10} (k^2 - k + 1) + \sum_{k=1}^{10} (k^2 + k - 1) \\
= \sum_{k=1}^{10} \{ (k^2 - k + 1) + (k^2 + k - 1) \} \\
= \sum_{k=1}^{10} 2k^2 = 2 \sum_{k=1}^{10} k^2 \\
= 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 770
\end{aligned}$$

답 (1) -459 (2) 340 (3) 770

615

(1) 수열 2, 4, 6, ...의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
a_n &= 2n \\
a_n &= 50 \text{에서} \quad 2n = 50 \quad \therefore n = 25 \\
\therefore 2 + 4 + 6 + \dots + 50 &= \sum_{k=1}^{25} 2k \\
&= 2 \times \frac{25 \times 26}{2} \\
&= 650
\end{aligned}$$

(2) 수열 $1^2, 3^2, 5^2, \dots$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
a_n &= (2n-1)^2 \\
a_n &= 19^2 \text{에서} \quad (2n-1)^2 = 19^2 \\
2n-1 &= 19 \quad \therefore n = 10 \\
\therefore 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 19^2 \\
&= \sum_{k=1}^{10} (2k-1)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{10} (4k^2 - 4k + 1) \\
&= 4 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 4 \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 1 \\
&= 4 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 4 \times \frac{10 \times 11}{2} + 1 \times 10 \\
&= 1540 - 220 + 10 = 1330
\end{aligned}$$

(3) $5^3 + 6^3 + 7^3 + \dots + 15^3$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=5}^{15} k^3 = \sum_{k=1}^{15} k^3 - \sum_{k=1}^4 k^3 \\
&= \left(\frac{15 \times 16}{2} \right)^2 - \left(\frac{4 \times 5}{2} \right)^2 \\
&= 14400 - 100 = 14300
\end{aligned}$$

답 (1) 650 (2) 1330 (3) 14300

다른 풀이 (3) 수열 $5^3, 6^3, 7^3, \dots$ 의 일반항을 a_n 이라 하면 $a_n = (n+4)^3$

$$\begin{aligned}
a_n &= 15^3 \text{에서} \quad (n+4)^3 = 15^3 \\
n+4 &= 15 \quad \therefore n = 11 \\
\therefore 5^3 + 6^3 + 7^3 + \dots + 15^3 \\
&= \sum_{k=1}^{11} (k+4)^3 \\
&= \sum_{k=1}^{11} (k^3 + 12k^2 + 48k + 64) \\
&= \left(\frac{11 \times 12}{2} \right)^2 + 12 \times \frac{11 \times 12 \times 23}{6} \\
&\quad + 48 \times \frac{11 \times 12}{2} + 64 \times 11 \\
&= 4356 + 6072 + 3168 + 704 \\
&= 14300
\end{aligned}$$

616

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{10} \frac{k^3}{k+3} + \sum_{k=1}^{10} \frac{k(4k+3)}{k+3} \\
&= \sum_{k=1}^{10} \frac{k^3 + 4k^2 + 3k}{k+3} \\
&= \sum_{k=1}^{10} \frac{k(k+1)(k+3)}{k+3} \\
&= \sum_{k=1}^{10} k(k+1) = \sum_{k=1}^{10} (k^2 + k) \\
&= \sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k \\
&= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{10 \times 11}{2} \\
&= 385 + 55 = 440
\end{aligned}$$

답 440

617

$a_n = 2n^2 - n + 1$ 이므로

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^8 a_k &= \sum_{k=1}^8 (2k^2 - k + 1) \\
&= 2 \sum_{k=1}^8 k^2 - \sum_{k=1}^8 k + \sum_{k=1}^8 1 \\
&= 2 \times \frac{8 \times 9 \times 17}{6} - \frac{8 \times 9}{2} + 1 \times 8 \\
&= 408 - 36 + 8 = 380
\end{aligned}$$

답 380

618

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ 이므로

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^5 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2) \\
&= \sum_{k=1}^5 \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^5 \frac{2k^3 + 3k^2 + k}{6} \\
 &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^5 k^3 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^5 k^2 + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^5 k \\
 &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{5 \times 6}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} \\
 &\quad + \frac{1}{6} \times \frac{5 \times 6}{2} \\
 &= 75 + \frac{55}{2} + \frac{5}{2} = 105
 \end{aligned}$$

답 105

619

(1) 주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$a_k = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

따라서 구하는 합은

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^8 \frac{k(k+1)}{2} \\
 &= \sum_{k=1}^8 \frac{k^2 + k}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^8 k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^8 k \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{8 \times 9 \times 17}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{8 \times 9}{2} \\
 &= 102 + 18 = 120
 \end{aligned}$$

(2) 주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$a_k = (k+1)k^2 = k^3 + k^2$$

따라서 구하는 합은

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^8 (k^3 + k^2) &= \sum_{k=1}^8 k^3 + \sum_{k=1}^8 k^2 \\
 &= \left(\frac{8 \times 9}{2} \right)^2 + \frac{8 \times 9 \times 17}{6} \\
 &= 1296 + 204 = 1500
 \end{aligned}$$

답 (1) 120 (2) 1500

620

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라

하면 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 3^n - 1$

$n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 3^1 - 1 = 2$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}
 a_n &= S_n - S_{n-1} = (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1) \\
 &= 2 \times 3^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

이때 $a_1 = 2$ 는 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^{11} \frac{ka_k}{a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{11} \frac{k \times 2 \times 3^{k-1}}{2 \times 3^k} \\
 &= \sum_{k=1}^{11} \frac{k}{3} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{11} k \\
 &= \frac{1}{3} \times \frac{11 \times 12}{2} = 22
 \end{aligned}$$

답 22

621

$$\begin{aligned}
 (1) \sum_{l=1}^6 \left(\sum_{k=1}^l kl \right) &= \sum_{l=1}^6 \left(l \sum_{k=1}^l k \right) = \sum_{l=1}^6 \left\{ l \times \frac{l(l+1)}{2} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^6 (l^3 + l^2) \\
 &= \frac{1}{2} \times \left\{ \left(\frac{6 \times 7}{2} \right)^2 + \frac{6 \times 7 \times 13}{6} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \times (441 + 91) \\
 &= 266
 \end{aligned}$$

(2) $\sum_{i=1}^j 2 = 2j$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^j 2 \right) &= \sum_{j=1}^k 2j = 2 \sum_{j=1}^k j \\
 &= 2 \times \frac{k(k+1)}{2} = k^2 + k \\
 \therefore \sum_{k=1}^9 \left\{ \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^j 2 \right) \right\} &= \sum_{k=1}^9 (k^2 + k) \\
 &= \frac{9 \times 10 \times 19}{6} + \frac{9 \times 10}{2} \\
 &= 285 + 45 \\
 &= 330
 \end{aligned}$$

답 (1) 266 (2) 330

622

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^m \left(\sum_{i=1}^n i \right) &= \sum_{n=1}^m \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^m n^2 + \sum_{n=1}^m n \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{m(m+1)}{2} \right\} \\
 &= \frac{m(m+1)(m+2)}{6}
 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{m(m+1)(m+2)}{6} = 56$ 이므로

$$m(m+1)(m+2) = 6 \times 7 \times 8$$

$$\therefore m = 6$$

답 6

623

전략 $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ 임을 이용한다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^9 (2k+2)^2 + \sum_{k=1}^{10} (2k-1)^2 \\ = (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2) \\ + (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 19^2) \\ = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2 \\ = \sum_{k=1}^{20} k^2 \end{aligned}$$

답 ②

624

전략 n 이 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 a_n 을 구한다.

자연수 k 에 대하여

(i) $n = 2k - 1$ 일 때

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k-1)^2 \\ &= 4k^2 - 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 - 2k) + 1 \end{aligned}$$

이므로 $a_{2k-1} = 1$

(ii) $n = 2k$ 일 때

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2 \text{이므로} \\ a_{2k} &= 0 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} a_k &= 1 + 0 + 1 + 0 + \dots + 1 + 0 \\ &= 1 \times 50 = 50 \end{aligned}$$

답 50

625

전략 $a_{10} = \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^9 a_k$ 임을 이용한다.

$$\sum_{k=1}^{15} a_k - \sum_{k=1}^9 \frac{a_k}{2} = 75 \text{에서}$$

$$2 \sum_{k=1}^{15} a_k - \sum_{k=1}^9 a_k = 150 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$\sum_{k=1}^{15} 2a_k - \sum_{k=1}^{10} a_k = 120 \text{에서}$$

$$2 \sum_{k=1}^{15} a_k - \sum_{k=1}^{10} a_k = 120 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡} \text{을 하면} \quad - \sum_{k=1}^9 a_k + \sum_{k=1}^{10} a_k = 30$$

$$\therefore a_{10} = 30$$

답 30

626

전략 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공비를 구한 후 등비수열의 합의 공식을 이용한다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^9 a_k &= 2 \cos \pi + 2^2 \cos 2\pi + 2^3 \cos 3\pi + \dots \\ &\quad + 2^9 \cos 9\pi \\ &= -2 + 2^2 - 2^3 + \dots - 2^9 \\ &= -2 + (-2)^2 + (-2)^3 + \dots + (-2)^9 \\ &= \frac{-2\{1 - (-2)^9\}}{1 - (-2)} \\ &= -342 \end{aligned}$$

답 -342

627

전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a_n 을 구한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n+2}{n^2+3n+2} = \frac{n+2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{11} \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^{11} (k+1) = \sum_{k=1}^{11} k + \sum_{k=1}^{11} 1 \\ &= \frac{11 \times 12}{2} + 1 \times 11 \\ &= 66 + 11 = 77 \end{aligned}$$

답 77

628

전략 주어진 식을 간단히 한 후 자연수의 거듭제곱의 합을 이용한다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (3k^2+2) + \sum_{k=2}^{10} (3k^2-2) \\ = \sum_{k=1}^{10} (3k^2+2) + \left\{ \sum_{k=1}^{10} (3k^2-2) - (3 \times 1^2 - 2) \right\} \\ = \sum_{k=1}^{10} \{(3k^2+2) + (3k^2-2)\} - 1 \\ = \sum_{k=1}^{10} 6k^2 - 1 = 6 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 1 \\ = 6 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 1 \\ = 2310 - 1 = 2309 \end{aligned}$$

답 2309

629

전략 수열 $1 \times 19, 2 \times 18, 3 \times 17, \dots$ 의 제 k 항을 구한다.

수열 $1 \times 19, 2 \times 18, 3 \times 17, \dots$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$a_k = k(20-k) = -k^2 + 20k$$

$$\begin{aligned} & \therefore 1 \times 19 + 2 \times 18 + 3 \times 17 + \cdots + 19 \times 1 \\ & = \sum_{k=1}^{19} (-k^2 + 20k) = -\sum_{k=1}^{19} k^2 + 20 \sum_{k=1}^{19} k \\ & = -\frac{19 \times 20 \times 39}{6} + 20 \times \frac{19 \times 20}{2} \\ & = -2470 + 3800 = 1330 \end{aligned}$$

답 1330

630

전략 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 라 하면 $a_1 = S_1$, $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$) 임을 이용한다.

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라

하면
$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{n}{n+1}$$

$n=1$ 일 때,
$$a_1 = S_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} \\ &= \frac{n^2 - (n-1)(n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

..... ㉠

이때 $a_1 = \frac{1}{2}$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n(n+1)} \\ \therefore \sum_{k=1}^{12} \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^{12} k(k+1) = \sum_{k=1}^{12} (k^2 + k) \\ &= \sum_{k=1}^{12} k^2 + \sum_{k=1}^{12} k \\ &= \frac{12 \times 13 \times 25}{6} + \frac{12 \times 13}{2} \\ &= 650 + 78 = 728 \end{aligned}$$

답 728

631

전략 $\frac{a_{k+1} - a_k}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}$ 임을 이용하여 $\sum_{k=1}^n \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k a_{k+1}}$ 를 합의 꼴로 나타낸 후 간단히 한다.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k a_{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} \right) + \cdots \\ & \quad + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{a_{n+1}} \\ \text{이므로} \quad & -\frac{1}{4} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{n} \\ \therefore \quad & \frac{1}{a_{n+1}} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

양변에 $n=12$ 를 대입하면

$$\frac{1}{a_{13}} = -\frac{1}{12} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore a_{13} = -3$$

답 ④

632

전략 $a_{10} = S_{10} - S_9$ 임을 이용한다.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} (k^2 + 1) - \sum_{k=1}^n (k^2 - 1) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 + \sum_{k=1}^{n+1} 1 - \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= (n+1)^2 + (n+1) + n \\ &= n^2 + 4n + 2 \\ \therefore a_{10} &= S_{10} - S_9 \\ &= (10^2 + 4 \times 10 + 2) - (9^2 + 4 \times 9 + 2) \\ &= 142 - 119 = 23 \end{aligned}$$

답 23

다른 풀이
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} (k^2 + 1) - \sum_{k=1}^n (k^2 - 1) \\ &= \left[\sum_{k=1}^n (k^2 + 1) + \{(n+1)^2 + 1\} \right] \\ & \quad - \sum_{k=1}^n (k^2 - 1) \\ &= \sum_{k=1}^n \{(k^2 + 1) - (k^2 - 1)\} + (n+1)^2 + 1 \\ &= \sum_{k=1}^n 2 + (n+1)^2 + 1 \\ &= 2 \times n + (n^2 + 2n + 1) + 1 \\ &= n^2 + 4n + 2 \end{aligned}$$

633

전략 등비수열의 합의 공식을 이용하여 $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1}$ 을 간단히 한다.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} &= \frac{1 \times (2^k - 1)}{2 - 1} \\ &= 2^k - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \sum_{k=1}^n (1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^n (2^k-1) \\
&= \sum_{k=1}^n 2^k - \sum_{k=1}^n 1 \\
&= \frac{2 \times (2^n-1)}{2-1} - 1 \times n \\
&= 2 \times 2^n - n - 2
\end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=-1$, $c=-2$ 이므로

$$abc=4$$

답 4

634

전략 Σ 의 정의를 이용하여 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d ($d>0$)라 하면

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=4}^8 |2a_k-30| \\
&= |2a_4-30| + |2a_5-30| + |2a_6-30| \\
&\quad + |2a_7-30| + |2a_8-30| \\
&= |2(15-2d)-30| + |2(15-d)-30| \\
&\quad + |2 \times 15-30| + |2(15+d)-30| \\
&\quad + |2(15+2d)-30| \\
&= |-4d| + |-2d| + 0 + |2d| + |4d| \\
&= 4d + 2d + 2d + 4d = 12d
\end{aligned}$$

따라서 $12d=24$ 이므로

$$d=2$$

$$\therefore a_7 = a_6 + d = 15 + 2 = 17$$

답 17

635

전략 주어진 식을 합의 꼴로 나타낸 후 자연수의 거듭제곱의 합을 이용한다.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=2}^{10} k^2 + \sum_{k=3}^{10} k^2 + \cdots + \sum_{k=10}^{10} k^2 \\
&= (1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2) \\
&\quad + (2^2+3^2+4^2+\cdots+10^2) \\
&\quad + (3^2+4^2+5^2+\cdots+10^2) + \cdots \\
&\quad + 10^2 \\
&= 1^2+2 \times 2^2+3 \times 3^2+\cdots+10 \times 10^2 \\
&= 1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3 \\
&= \sum_{k=1}^{10} k^3 = \left(\frac{10 \times 11}{2}\right)^2 \\
&= 3025
\end{aligned}$$

답 3025

636

전략 $\sum_{k=1}^n ka_k = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 임을 이용하여 수열 $\{na_n\}$ 의 일반항을 구한다.

수열 $\{na_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n ka_k = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}
na_n &= S_n - S_{n-1} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{(n-1)n(n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

이때 $a_1=1$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$na_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore a_n = \frac{n+1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} \frac{k+1}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 1 \right) \\
&= \frac{1}{2} \times \left(\frac{10 \times 11}{2} + 1 \times 10 \right) \\
&= \frac{65}{2}
\end{aligned}$$

답 $\frac{65}{2}$

637

전략 상수인 것과 상수가 아닌 것을 구분하여 안쪽에 있는 Σ 부터 차례대로 계산한다.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^5 (3k-1)2^{j-1} &= 2^{j-1} \sum_{k=1}^5 (3k-1) \\
&= 2^{j-1} \left(3 \sum_{k=1}^5 k - \sum_{k=1}^5 1 \right) \\
&= 2^{j-1} \left(3 \times \frac{5 \times 6}{2} - 1 \times 5 \right) \\
&= 40 \times 2^{j-1} \\
\therefore (\text{주어진 식}) &= \sum_{j=1}^5 (40 \times 2^{j-1}) \\
&= 40 \sum_{j=1}^5 2^{j-1} \\
&= 40 \times \frac{1 \times (2^5-1)}{2-1} \\
&= 1240
\end{aligned}$$

답 1240

638

전략 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 음수인 경우와 양수인 경우로 나누어 생각한다.

세 수 a_4, a_5, a_6 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a_5 = \frac{a_4 + a_6}{2} = 0$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d ($d \neq 0$)라 하면

$$a_1 = a_5 - 4d = -4d, a_2 = a_5 - 3d = -3d,$$

$$a_3 = a_5 - 2d = -2d, a_4 = a_5 - d = -d,$$

$$a_6 = a_5 + d = d, a_7 = a_5 + 2d = 2d,$$

$$a_8 = a_5 + 3d = 3d$$

(i) $d < 0$ 인 경우

$n \leq 4$ 일 때, $a_n > 0$ 이므로

$$|a_n| + a_n = a_n + a_n = 2a_n$$

$n \geq 6$ 일 때, $a_n < 0$ 이므로

$$|a_n| + a_n = -a_n + a_n = 0$$

$$\therefore \sum_{k=1}^8 (|a_k| + a_k)$$

$$= 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + 0 + 0 + 0 + 0$$

$$= 2 \times (-4d) + 2 \times (-3d)$$

$$+ 2 \times (-2d) + 2 \times (-d)$$

$$= -20d$$

따라서 $-20d = 48$ 이므로

$$d = -\frac{12}{5}$$

그런데 d 는 정수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $d > 0$ 인 경우

$n \leq 4$ 일 때, $a_n < 0$ 이므로

$$|a_n| + a_n = -a_n + a_n = 0$$

$n \geq 6$ 일 때, $a_n > 0$ 이므로

$$|a_n| + a_n = a_n + a_n = 2a_n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^8 (|a_k| + a_k)$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 2a_6 + 2a_7 + 2a_8$$

$$= 2 \times d + 2 \times 2d + 2 \times 3d$$

$$= 12d$$

따라서 $12d = 48$ 이므로 $d = 4$

(i), (ii)에서 $d = 4$

$$\therefore a_{10} = a_5 + 5d = 5 \times 4 = 20$$

답 20

참고 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 0이면 $a_1 = a_2 = \dots = a_8 = 0$

$$\text{이므로 } \sum_{k=1}^8 (|a_k| + a_k) = 0$$

639

전략 $\sum_{n=1}^{20} a_n$ 을 n 이 짝수인 항의 합과 홀수인 항의 합으로 나누어 나타낸다.

$$\sum_{n=1}^{20} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20}$$

$$= (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19})$$

$$+ (a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20})$$

$$= \sum_{n=1}^{10} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{10} a_{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{10} \frac{(2n-2)^2}{2} + \sum_{n=1}^{10} \left\{ \frac{(2n)^2}{2} - 2n \right\}$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{10} (n^2 - 2n + 1) + 2 \sum_{n=1}^{10} (n^2 - n)$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{10} \{ (n^2 - 2n + 1) + (n^2 - n) \}$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{10} (2n^2 - 3n + 1)$$

$$= 2 \times \left(2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 3 \times \frac{10 \times 11}{2} + 1 \times 10 \right)$$

$$= 2 \times (770 - 165 + 10)$$

$$= 1230$$

답 1230

640

전략 직선의 방정식을 이용하여 점 B_n 의 좌표를 구하고 S_n 을 n 에 대한 식으로 나타낸다.

점 $A_n(n, n^2)$ 을 지나고 직선 $y = nx$ 에 수직인 직선의 방정식은

$$y - n^2 = -\frac{1}{n}(x - n)$$

$$\therefore y = \boxed{(7)} - \frac{1}{n} \times x + n^2 + 1$$

이 식에 $y = 0$ 을 대입하면

$$0 = -\frac{1}{n}x + n^2 + 1 \quad \therefore x = n^3 + n$$

$$\therefore B_n(n^3 + n, 0)$$

두 점 A_n, B_n 의 좌표를 이용하여 S_n 을 구하면

$$S_n = \frac{1}{2} \times (n^3 + n) \times n^2$$

$$= \boxed{(4)} \frac{n^5 + n^3}{2}$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^8 \frac{S_n}{n^3} &= \sum_{n=1}^8 \frac{\frac{n^5+n^3}{2}}{n^3} = \sum_{n=1}^8 \frac{n^2+1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^8 n^2 + \sum_{n=1}^8 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{8 \times 9 \times 17}{6} + 1 \times 8 \right) \\ &= \frac{1}{2} \times (204 + 8) = \boxed{\text{답}} 106\end{aligned}$$

이다.

$$\text{즉 } f(n) = -\frac{1}{n}, g(n) = \frac{n^5+n^3}{2}, r=106 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}f(1)+g(2)+r &= -1 + \frac{2^5+2^3}{2} + 106 \\ &= 125\end{aligned}$$

답 ⑤



개념 노트

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$ 이 수직이면
 $mm'=-1$

03 여러 가지 수열의 합

● 본책 273~278쪽

641

주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{1+2+3+\cdots+k} = \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} \\ &= \frac{2}{k(k+1)} \\ &= 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)\end{aligned}$$

따라서 구하는 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^8 a_k &= \sum_{k=1}^8 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right) \right\} \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{9} \right) = \frac{16}{9}\end{aligned}$$

답 $\frac{16}{9}$

642

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 4n$$

$n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 4 \times 1 = 5$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 + 4n) - \{(n-1)^2 + 4(n-1)\} \\ &= 2n + 3\end{aligned}$$

..... ㉠

이때 $a_1=5$ 는 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 2n + 3$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+3)(2k+5)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k+3} - \frac{1}{2k+5} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2n+5} \right) \\ &= \frac{n}{5(2n+5)}\end{aligned}$$

답 $\frac{n}{5(2n+5)}$

643

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2})} \\ &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) \\ &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots \\ &\quad + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \\ &= \sqrt{n+2} - \sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{n+2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{n+2} = 3\sqrt{2}, \quad n+2=18$$

$$\therefore n=16$$

답 16

644

$x^2 - (2n+1)x + n(n+1) = 0$ 에서

$$(x-n)(x-n-1) = 0$$

$$\therefore x=n \text{ 또는 } x=n+1$$

따라서 $\alpha_n = n$, $\beta_n = n+1$ 또는 $\alpha_n = n+1$, $\beta_n = n$ 이

므로

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{\alpha_k} + \sqrt{\beta_k}} \\ &= \sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{80} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} \\ &= \sum_{k=1}^{80} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{81} - \sqrt{80}) \\ &= \sqrt{81} - 1 = 8 \end{aligned}$$

답 8

645

$$\begin{aligned} (1) & \sum_{k=1}^{999} \log \left(1 + \frac{1}{k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{999} \log \frac{k+1}{k} \\ &= \log \frac{2}{1} + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \cdots + \log \frac{1000}{999} \\ &= \log \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{1000}{999} \right) \\ &= \log 1000 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & \sum_{k=1}^{14} \log_2 \{ \log_{k+1} (k+2) \} \\ &= \log_2 (\log_2 3) + \log_2 (\log_3 4) \\ &\quad + \log_2 (\log_4 5) + \cdots + \log_2 (\log_{15} 16) \\ &= \log_2 (\log_2 3 \times \log_3 4 \times \log_4 5 \times \cdots \times \log_{15} 16) \\ &= \log_2 \left(\frac{\log 3}{\log 2} \times \frac{\log 4}{\log 3} \times \frac{\log 5}{\log 4} \times \cdots \times \frac{\log 16}{\log 15} \right) \\ &= \log_2 \left(\frac{\log 16}{\log 2} \right) = \log_2 (\log_2 16) \\ &= \log_2 4 = 2 \end{aligned}$$

답 (1) 3 (2) 2

646

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \log_2 (n^2 + n)$$

$n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = \log_2 2 = 1$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \log_2 (n^2 + n) - \log_2 \{ (n-1)^2 + (n-1) \} \\ &= \log_2 (n^2 + n) - \log_2 (n^2 - n) \\ &= \log_2 \frac{n^2 + n}{n^2 - n} \\ &= \log_2 \frac{n+1}{n-1} \end{aligned}$$

따라서 $k \geq 2$ 에서

$$a_{2k-1} = \log_2 \frac{2k}{2k-2} = \log_2 \frac{k}{k-1}$$

이므로

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{32} a_{2k-1} \\ &= \sum_{k=2}^{32} \log_2 \frac{k}{k-1} \\ &= \log_2 \frac{2}{1} + \log_2 \frac{3}{2} + \log_2 \frac{4}{3} + \cdots + \log_2 \frac{32}{31} \\ &= \log_2 \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{32}{31} \right) \\ &= \log_2 32 = 5 \end{aligned}$$

답 5

647

주어진 수열을 같은 수끼리 묶으면

$$(1), (3, 3), (5, 5, 5), (7, 7, 7, 7), \cdots$$

n 번째 묶음에 있는 수는 $2n-1$ 이므로 25가 처음으로 나타나는 항은 13번째 묶음의 첫 번째 항이다.

이때 n 번째 묶음의 항의 개수는 n 이므로 첫 번째 묶음부터 12번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{12} k = \frac{12 \times 13}{2} = 78$$

따라서 25가 처음으로 나타나는 항은 제 79 항이다.

답 제 79 항

648

(1) 주어진 수열을 분모가 같은 항끼리 묶으면

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4} \right), \\ & \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right), \cdots \end{aligned}$$

n 번째 묶음은

$$\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \frac{3}{n+1}, \dots, \frac{n}{n+1}$$

이므로 $\frac{17}{20}$ 은 19번째 묶음의 17번째 항이다.

이때 n 번째 묶음의 항의 개수는 n 이므로 첫 번째 묶음부터 18번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{18} k = \frac{18 \times 19}{2} = 171$$

따라서 $171 + 17 = 188$ 이므로 $\frac{17}{20}$ 은 제 188 항이다.

(2) 첫 번째 묶음부터 13번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{13} k = \frac{13 \times 14}{2} = 91$$

이므로 제 95 항은 14번째 묶음의 4번째 항이다.

이때 14번째 묶음은

$$\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{3}{15}, \frac{4}{15}, \dots, \frac{13}{15}, \frac{14}{15}$$

이므로 제 95 항은 $\frac{4}{15}$ 이다.

답 (1) 제 188 항 (2) $\frac{4}{15}$

연습 문제

• 본책 279~280쪽

649

전략 $\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ 을 부분분수로 변형한다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{n}{2n+1} = \frac{25}{51}$ 이므로

$$51n = 50n + 25$$

$$\therefore n = 25$$

답 25

650

전략 다항식 $a_n x^2 - a_n - 30$ 이 $x - n$ 으로 나누어떨어짐을 이용하여 $a_n (n \geq 2)$ 을 구한다.

다항식 $a_n x^2 - a_n - 30$ 이 $x - n$ 으로 나누어떨어지므로

$$a_n n^2 - a_n - 30 = 0, \quad (n^2 - 1)a_n = 3$$

$$n \geq 2 \text{ 일 때, } a_n = \frac{3}{n^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=2}^{10} a_k &= \sum_{k=2}^{10} \frac{3}{k^2 - 1} \\ &= \sum_{k=2}^{10} \frac{3}{(k-1)(k+1)} \\ &= \sum_{k=2}^{10} \frac{3}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{3}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) \right\} \\ &= \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \\ &= \frac{108}{55} \end{aligned}$$

답 $\frac{108}{55}$

651

전략 $\log a_k$ 에 $k=2, 3, 4, \dots, 20$ 을 차례대로 대입하여 합의 꼴로 나타낸 후 로그의 성질을 이용한다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{20} \log a_k &= \sum_{k=2}^{20} \log \left(1 + \frac{1}{k^2 - 1} \right) \\ &= \sum_{k=2}^{20} \log \frac{k^2}{k^2 - 1} \\ &= \sum_{k=2}^{20} \log \left(\frac{k}{k-1} \times \frac{k}{k+1} \right) \\ &= \log \left(\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \right) + \log \left(\frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \right) + \log \left(\frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \right) \\ &\quad + \dots + \log \left(\frac{20}{19} \times \frac{20}{21} \right) \\ &= \log \left\{ \left(\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \right) \times \left(\frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \right) \times \left(\frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \right) \times \dots \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{20}{19} \times \frac{20}{21} \right) \right\} \\ &= \log \left(2 \times \frac{20}{21} \right) = \log \frac{40}{21} \end{aligned}$$

따라서 $p=21, q=40$ 이므로 $p+q=61$ **답** 61

652

전략 먼저 수열 $\frac{3}{1^2}, \frac{5}{1^2+2^2}, \frac{7}{1^2+2^2+3^2}, \dots$ 의 제 k 항을 구한다.

수열 $\frac{3}{1^2}, \frac{5}{1^2+2^2}, \frac{7}{1^2+2^2+3^2}, \dots$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2k+1}{1^2+2^2+3^2+\dots+k^2} \\ &= \frac{2k+1}{\sum_{n=1}^k n^2} = \frac{2k+1}{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}} \\ &= \frac{6}{k(k+1)} \\ &= 6\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \end{aligned}$$

따라서 구하는 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} 6\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 6\left\{\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right)\right\} \\ &= 6\left(1 - \frac{1}{11}\right) = \frac{60}{11} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{60}{11}$$

653

전략 직선이 원의 중심을 지나를 이용하여 a_n 을 구한다.

직선 $y=x+a_n$ 이 원 $(x-2n)^2+(y-2n^2)^2=n^2$ 을 이등분하려면 직선 $y=x+a_n$ 이 원의 중심 $(2n, 2n^2)$ 을 지나야 하므로

$$\begin{aligned} 2n^2 &= 2n + a_n \\ \therefore a_n &= 2n^2 - 2n = 2n(n-1) \\ \therefore \sum_{k=2}^{15} \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=2}^{15} \frac{1}{2k(k-1)} \\ &= \sum_{k=2}^{15} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{14} - \frac{1}{15}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{15}\right) \\ &= \frac{7}{15} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{7}{15}$$

654

전략 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 a_n 을 구한다.

수열 $\left\{ \frac{1}{(2n-1)a_n} \right\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)a_k} = n^2 + 2n$$

$n=1$ 일 때

$$\frac{1}{a_1} = S_1 = 1^2 + 2 \times 1 = 3 \quad \therefore a_1 = \frac{1}{3}$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2n-1)a_n} &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 2n - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

이때 $a_1 = \frac{1}{3}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ \therefore \sum_{n=1}^{10} a_n &= \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{21}\right) = \frac{10}{21} \end{aligned} \quad \text{답 } \textcircled{1}$$

655

전략 $\sum_{k=1}^n a_k$ 를 이용하여 a_n 을 구한다.

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라

하면 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 2n^2 - n$

$n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 - 1 = 1$$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 - n) - \{2(n-1)^2 - (n-1)\} \\ &= 4n - 3 \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

이때 $a_1=1$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = 4n - 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4k-3} + \sqrt{4k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{4k-3} - \sqrt{4k+1}}{(\sqrt{4k-3} + \sqrt{4k+1})(\sqrt{4k-3} - \sqrt{4k+1})} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} (-\sqrt{4k-3} + \sqrt{4k+1}) \\ &= \frac{1}{4} \{(-1 + \sqrt{5}) + (-\sqrt{5} + \sqrt{9}) + \dots \\ &\quad + (-\sqrt{4n-3} + \sqrt{4n+1})\} \\ &= \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{4n+1}) \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{4} (-1 + \sqrt{4n+1}) = \frac{3}{2}$ 이므로

$$-1 + \sqrt{4n+1} = 6, \quad \sqrt{4n+1} = 7$$

$$4n+1=49$$

$$\therefore n=12$$

답 12

656

전략 $\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}}$ 을 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항에 대한 식으로 나타낸다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공차를 모두 a ($a > 0$)라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= a + (n-1)a = an \\ \therefore \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} &= \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{ak} + \sqrt{a(k+1)}} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \frac{\sqrt{ak} - \sqrt{a(k+1)}}{\{\sqrt{ak} + \sqrt{a(k+1)}\}\{\sqrt{ak} - \sqrt{a(k+1)}\}} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{a} \{-\sqrt{ak} + \sqrt{a(k+1)}\} \\ &= \frac{1}{a} \{(-\sqrt{a} + \sqrt{2a}) + (-\sqrt{2a} + \sqrt{3a}) \\ &\quad + \dots + (-\sqrt{15a} + \sqrt{16a})\} \\ &= \frac{1}{a} (-\sqrt{a} + \sqrt{16a}) \\ &= \frac{3\sqrt{a}}{a} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{3\sqrt{a}}{a} = 2 \text{이므로 } \frac{9}{a} = 4$$

$$\therefore a = \frac{9}{4}$$

$$\text{즉 } a_n = \frac{9}{4}n \text{이므로 } a_4 = \frac{9}{4} \times 4 = 9$$

답 ④

657

전략 각 줄에 나열된 수들의 규칙성을 찾는다.

위에서 k 번째 줄에 나열된 수들은 첫째항이 k , 공차가 1, 항수가 k 인 등차수열을 이루므로 위에서 k 번째 줄에 나열된 수들의 합은

$$\frac{k\{2k + (k-1) \times 1\}}{2} = \frac{3k^2 - k}{2}$$

따라서 위에서 첫 번째 줄부터 8번째 줄까지 나열된 모든 수의 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 \frac{3k^2 - k}{2} &= \frac{1}{2} \left(3 \sum_{k=1}^8 k^2 - \sum_{k=1}^8 k \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(3 \times \frac{8 \times 9 \times 17}{6} - \frac{8 \times 9}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times (612 - 36) = 288 \end{aligned}$$

답 288

658

전략 $\frac{1}{a_k a_{k+1}}$ 의 값의 부호를 조사하여 S의 값을 구한다.

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 -9 , 공차가 2인 등차수열이므로

$$a_n = -9 + (n-1) \times 2 = 2n - 11$$

이때 $a_n > 0$ 에서 $2n - 11 > 0$

$$\therefore n > \frac{11}{2}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 제5항까지는 음수이고, 제6항부터는 양수이다.

$$\begin{aligned} \therefore S &= \sum_{k=1}^{10} \left| \frac{1}{a_k a_{k+1}} \right| \\ &= \sum_{k=1}^4 \frac{1}{a_k a_{k+1}} - \frac{1}{a_5 a_6} + \sum_{k=6}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^4 \frac{1}{(2k-11)(2k-9)} \\ &\quad - \frac{1}{(2 \times 5 - 11)(2 \times 6 - 11)} \\ &\quad + \sum_{k=6}^{10} \frac{1}{(2k-11)(2k-9)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-11} - \frac{1}{2k-9} \right) + 1 \\
 &\quad + \sum_{k=6}^{10} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-11} - \frac{1}{2k-9} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{7} \right) + \left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{5} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) + \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) \right\} \\
 &\quad + 1 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{9} + 1 \right) + 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{11} \right) \\
 &= \frac{4}{9} + 1 + \frac{5}{11} = \frac{188}{99}
 \end{aligned}$$

$$\therefore 99S = 99 \times \frac{188}{99} = 188$$

답 188

해설 Focus

$\frac{1}{a_k a_{k+1}}$ 은 a_k 와 a_{k+1} 의 값의 부호가 같으면 양수이고 다르다면 음수이다.

이때 $k \leq 5$ 이면 $a_k < 0$, $k \geq 6$ 이면 $a_k > 0$ 이므로 $\frac{1}{a_k a_{k+1}}$ 의 값의 부호는 다음과 같다.

(i) $k+1 \leq 5$, 즉 $k \leq 4$ 일 때

a_k 와 a_{k+1} 이 모두 음수이므로 $\frac{1}{a_k a_{k+1}}$ 은 양수이다.

(ii) $k=5$ 일 때

a_5 는 음수, a_6 는 양수이므로 $\frac{1}{a_5 a_6}$ 은 음수이다.

(iii) $k \geq 6$ 일 때

a_k 와 a_{k+1} 이 모두 양수이므로 $\frac{1}{a_k a_{k+1}}$ 은 양수이다.

이상에서

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^{10} \left| \frac{1}{a_k a_{k+1}} \right| \\
 &= \sum_{k=1}^4 \frac{1}{a_k a_{k+1}} - \frac{1}{a_5 a_6} + \sum_{k=6}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}}
 \end{aligned}$$

659

전략 $a_{n+1} = a_n^2 + 3a_n$ 에서 $a_n + 3 = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 임을 이용한다.

$a_1 = 10$ 이고 $a_{n+1} = a_n^2 + 3a_n$ 이므로

$$a_{n+1} > a_n$$

따라서 $a_n \neq 0$ 이므로 $a_{n+1} = a_n^2 + 3a_n$ 의 양변을 a_n 으로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_n + 3$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{30} \log(a_k + 3)$$

$$= \sum_{k=1}^{30} \log \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

$$= \log \frac{a_2}{a_1} + \log \frac{a_3}{a_2} + \log \frac{a_4}{a_3} + \dots$$

$$+ \log \frac{a_{31}}{a_{30}}$$

$$= \log \left(\frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \dots \times \frac{a_{31}}{a_{30}} \right)$$

$$= \log \frac{a_{31}}{a_1} = \log a_{31} - \log a_1$$

$$= \log a_{31} - \log 10$$

$$= \log a_{31} - 1$$

답 ④

660

전략 $\sum_{k=1}^m a_k$ 를 m 에 대한 식으로 나타내고 그 값이 100 이하의 자연수가 되기 위한 조건을 구한다.

$$a_n = \log_2 \sqrt{\frac{2(n+1)}{n+2}} = \frac{1}{2} \log_2 \frac{2(n+1)}{n+2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^m a_k \\
 &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} \log_2 \frac{2(k+1)}{k+2} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \log_2 \frac{2 \times 2}{3} + \log_2 \frac{2 \times 3}{4} + \log_2 \frac{2 \times 4}{5} \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \log_2 \frac{2(m+1)}{m+2} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \log_2 \left\{ \frac{2 \times 2}{3} \times \frac{2 \times 3}{4} \times \frac{2 \times 4}{5} \times \dots \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{2(m+1)}{m+2} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \log_2 \frac{2^{m+1}}{m+2} \\
 &= \frac{1}{2} \{ m+1 - \log_2(m+2) \} \dots\dots ①
 \end{aligned}$$

따라서 $\sum_{k=1}^m a_k$ 의 값이 100 이하의 자연수가 되려면

$\log_2(m+2)$ 가 자연수가 되어야 하므로 $m+2$ 는 2의 거듭제곱의 꼴이어야 한다.

(i) $m+2=2^2$, 즉 $m=2$ 일 때 ㉠에서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m a_k &= \frac{1}{2}(2+1-\log_2 2^2) \\ &= \frac{1}{2}(2+1-2) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

이때 자연수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $m+2=2^3$, 즉 $m=6$ 일 때 ㉠에서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m a_k &= \frac{1}{2}(6+1-\log_2 2^3) \\ &= \frac{1}{2}(6+1-3) = 2\end{aligned}$$

(iii) $m+2=2^4$, 즉 $m=14$ 일 때 ㉠에서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m a_k &= \frac{1}{2}(14+1-\log_2 2^4) \\ &= \frac{1}{2}(14+1-4) = \frac{11}{2}\end{aligned}$$

이때 자연수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $m+2=2^5$, 즉 $m=30$ 일 때 ㉠에서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m a_k &= \frac{1}{2}(30+1-\log_2 2^5) \\ &= \frac{1}{2}(30+1-5) = 13\end{aligned}$$

(v) $m+2=2^6$, 즉 $m=62$ 일 때 ㉠에서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m a_k &= \frac{1}{2}(62+1-\log_2 2^6) \\ &= \frac{1}{2}(62+1-6) = \frac{57}{2}\end{aligned}$$

이때 자연수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(vi) $m+2=2^7$, 즉 $m=126$ 일 때 ㉠에서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m a_k &= \frac{1}{2}(126+1-\log_2 2^7) \\ &= \frac{1}{2}(126+1-7) = 60\end{aligned}$$

(vii) $m+2=2^8$, 즉 $m=254$ 일 때 ㉠에서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m a_k &= \frac{1}{2}(254+1-\log_2 2^8) \\ &= \frac{1}{2}(254+1-8) = \frac{247}{2}\end{aligned}$$

즉 $m+2 \geq 2^8$ 이면 $\sum_{k=1}^m a_k > 100$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 $m=6$ 또는 $m=30$ 또는 $m=126$

따라서 모든 m 의 값의 합은

$$6+30+126=162$$

답 ④

3 수학적 귀납법

III. 수열

01 수열의 귀납적 정의

● 본책 282~288쪽

661

(1) $a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n+3$ 이므로

$$a_2=2a_1+3=2 \times 2+3=7$$

$$a_3=2a_2+3=2 \times 7+3=17$$

$$a_4=2a_3+3=2 \times 17+3=37$$

(2) $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n^2-1$ 이므로

$$a_2=a_1^2-1=1^2-1=0$$

$$a_3=a_2^2-1=0^2-1=-1$$

$$a_4=a_3^2-1=(-1)^2-1=0$$

(3) $a_1=2$, $a_{n+1}=\frac{1}{a_n}$ 이므로

$$a_2=\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}$$

$$a_3=\frac{1}{a_2}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

$$a_4=\frac{1}{a_3}=\frac{1}{2}$$

(4) $a_1=\frac{1}{3}$, $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+2$ 이므로

$$\frac{1}{a_2}=\frac{1}{a_1}+2=\frac{1}{\frac{1}{3}}+2=5 \text{에서} \quad a_2=\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{a_3}=\frac{1}{a_2}+2=\frac{1}{\frac{1}{5}}+2=7 \text{에서} \quad a_3=\frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{a_4}=\frac{1}{a_3}+2=\frac{1}{\frac{1}{7}}+2=9 \text{에서} \quad a_4=\frac{1}{9}$$

(5) $a_1=5$, $a_2=2$, $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ 이므로

$$a_3=a_1+a_2=5+2=7$$

$$a_4=a_2+a_3=2+7=9$$

답 (1) 37 (2) 0 (3) $\frac{1}{2}$

(4) $\frac{1}{9}$ (5) 9

662

(1) $a_{n+1}-a_n=4$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 4인 등차수열이다.

이때 첫째항이 -4 이므로

$$a_n = -4 + (n-1) \times 4 = 4n - 8$$

- (2) $a_{n+1} = 3a_n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 3인 등비수열이다.

이때 첫째항이 1이므로

$$a_n = 1 \times 3^{n-1} = 3^{n-1}$$

- (3) $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

이때 첫째항이 12, 공차가 $a_2 - a_1 = 9 - 12 = -3$ 이므로

$$a_n = 12 + (n-1) \times (-3) = -3n + 15$$

- (4) $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

이때 첫째항이 5, 공비가 $a_2 \div a_1 = -10 \div 5 = -2$ 이므로

$$a_n = 5 \times (-2)^{n-1}$$

$$\text{답 (1) } a_n = 4n - 8 \quad (2) a_n = 3^{n-1}$$

$$(3) a_n = -3n + 15 \quad (4) a_n = 5 \times (-2)^{n-1}$$

663

- (1) $a_{n+1} = a_n + n^2$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 6을 차례대로 대입하면

$$a_2 = a_1 + 1^2$$

$$a_3 = a_2 + 2^2 = a_1 + 1^2 + 2^2$$

$$a_4 = a_3 + 3^2 = a_1 + 1^2 + 2^2 + 3^2$$

⋮

$$\therefore a_7 = a_6 + 6^2 = a_1 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 6^2$$

$$= 3 + \frac{6 \times 7 \times 13}{6} = 94$$

- (2) $a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 6을 차례대로 대입하면

$$a_2 = 2a_1$$

$$a_3 = \frac{3}{2} a_2 = \frac{3}{2} \times 2a_1$$

$$a_4 = \frac{4}{3} a_3 = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} \times 2a_1$$

⋮

$$\therefore a_7 = \frac{7}{6} a_6 = \frac{7}{6} \times \frac{6}{5} \times \frac{5}{4} \times \dots \times 2a_1$$

$$= 7a_1 = 7 \times 1 = 7$$

$$\text{답 (1) } 94 \quad (2) 7$$

664

$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

이때 첫째항이 -5 , 공차가 $a_2 - a_1 = -3 - (-5) = 2$ 이므로

$$a_n = -5 + (n-1) \times 2 = 2n - 7$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{20} (2k - 7) = 2 \sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{20} 7$$

$$= 2 \times \frac{20 \times 21}{2} - 7 \times 20$$

$$= 420 - 140 = 280$$

답 280

665

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\frac{a_6}{a_1} = \frac{a_8}{a_3} = \frac{a_{10}}{a_5} = r^5$$

$$\frac{a_6}{a_1} + \frac{a_8}{a_3} + \frac{a_{10}}{a_5} = 15 \text{에서}$$

$$r^5 + r^5 + r^5 = 15, \quad 3r^5 = 15$$

$$\therefore r^5 = 5$$

이때 첫째항이 1이므로

$$a_{21} = 1 \times r^{20} = (r^5)^4 = 5^4 = 625$$

답 625

666

$a_{n+1} - a_n = 2n$ 에서

$$a_{n+1} = a_n + 2n$$

n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$a_2 = a_1 + 2$$

$$a_3 = a_2 + 4 = a_1 + 2 + 4$$

$$a_4 = a_3 + 6 = a_1 + 2 + 4 + 6$$

⋮

$$\therefore a_n = a_1 + 2 + 4 + 6 + \dots + 2(n-1)$$

$$= 5 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k$$

$$= 5 + 2 \times \frac{(n-1)n}{2}$$

$$= n^2 - n + 5$$

따라서 $a_k = 115$ 에서 $k^2 - k + 5 = 115$

$$k^2 - k - 110 = 0, \quad (k+10)(k-11) = 0$$

$$\therefore k = 11 \quad (\because k \text{는 자연수})$$

답 11

667

$a_{n+1}=2^n a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 \\ a_3 &= 2^2 a_2 = 2^2 \times 2a_1 \\ a_4 &= 2^3 a_3 = 2^3 \times 2^2 \times 2a_1 \\ &\vdots \\ \therefore a_n &= 2^{n-1} \times 2^{n-2} \times 2^{n-3} \times \cdots \times 2a_1 \\ &= 2^{1+2+3+\cdots+(n-1)} \times 1 \\ &= 2^{\frac{(n-1)n}{2}} \end{aligned}$$

따라서 $a_k = 2^{36}$ 에서

$$\begin{aligned} 2^{\frac{(k-1)k}{2}} &= 2^{36}, \quad \frac{(k-1)k}{2} = 36 \\ k^2 - k - 72 &= 0, \quad (k+8)(k-9) = 0 \\ \therefore k &= 9 \quad (\because k \text{는 자연수}) \end{aligned}$$

답 9

668

$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n & (n \text{은 홀수}) \\ a_n - 1 & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 9를

차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 = 2 \times 3 = 6 \\ a_3 &= a_2 - 1 = 6 - 1 = 5 \\ a_4 &= 2a_3 = 2 \times 5 = 10 \\ a_5 &= a_4 - 1 = 10 - 1 = 9 \\ a_6 &= 2a_5 = 2 \times 9 = 18 \\ a_7 &= a_6 - 1 = 18 - 1 = 17 \\ a_8 &= 2a_7 = 2 \times 17 = 34 \\ a_9 &= a_8 - 1 = 34 - 1 = 33 \\ \therefore a_{10} &= 2a_9 = 2 \times 33 = 66 \end{aligned}$$

답 66

669

$a_1=3, a_2=4, a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=12$ 이므로

$$a_1+a_2+a_3=12 \text{에서} \quad 3+4+a_3=12$$

$$\therefore a_3=5$$

$$a_2+a_3+a_4=12 \text{에서} \quad 4+5+a_4=12$$

$$\therefore a_4=3$$

$$a_3+a_4+a_5=12 \text{에서} \quad 5+3+a_5=12$$

$$\therefore a_5=4$$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 3, 4, 5가 이 순서대로 반복된다.

이때 $50=3 \times 16 + 2$ 이므로

$$a_{50}=4$$

답 4

670

$S_n = -a_n + n$ 에서

$$S_{n+1} = -a_{n+1} + n + 1$$

한편 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= -a_{n+1} + n + 1 - (-a_n + n) \\ &= -a_{n+1} + a_n + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}$$

n 에 1, 2, 3, ..., 7을 차례대로 대입하면

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \right\} + \frac{1}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$a_4 = \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \right\} + \frac{1}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$\vdots$

$$\therefore a_8 = \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8 \right\}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{255}{256}$$

답 255/256

671

(1) 농도가 5%인 소금물 100g에서 소금물 20g을 덜어 낸 다음 물 20g을 넣은 후의 소금물에 들어 있는 소금의 양은

$$\frac{5}{100} \times (100 - 20) = 4 \text{ (g)}$$

이때 소금물의 농도는

$$\frac{4}{100} \times 100 = 4 \text{ (%)}$$

$$\therefore a_1 = 4$$

- (2) $(n+1)$ 회 시행 후 소금물에 들어 있는 소금의 양은 농도가 a_n %인 소금물 100 g에서 소금물 20 g을 덜어 낸 다음 물 20 g을 넣은 후의 소금물에 들어 있는 소금의 양이므로

$$\frac{a_n}{100} \times (100 - 20) = \frac{4}{5} a_n (\text{g})$$

이때 소금물의 농도는

$$\frac{\frac{4}{5} a_n}{100} \times 100 = \frac{4}{5} a_n (\%)$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{4}{5} a_n (n=1, 2, 3, \dots)$$

답 (1) 4 (2) $a_{n+1} = \frac{4}{5} a_n (n=1, 2, 3, \dots)$

개념 노트

- ① (소금물의 농도) = $\frac{(\text{소금의 양})}{(\text{소금물의 양})} \times 100 (\%)$
 ② (소금의 양) = $\frac{(\text{소금물의 농도})}{100} \times (\text{소금물의 양})$

연습 문제

● 본책 289~291쪽

672

전략 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열임을 이용하여 일반항 a_n 을 구한다.

$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$, 즉 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

이때 공차가 $a_2 - a_1 = 2a_1 - a_1 = a_1$ 이므로

$$a_n = a_1 + (n-1) \times a_1 = na_1$$

$$a_{10} = 20 \text{에서 } 10a_1 = 20 \quad \therefore a_1 = 2$$

따라서 $a_n = 2n$ 이므로

$$a_6 = 2 \times 6 = 12$$

답 12

673

전략 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열임을 이용하여 일반항 a_n 을 구한다.

$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

이때 첫째항이 1, 공비가 $a_2 \div a_1 = 3 \div 1 = 3$ 이므로

$$a_n = 1 \times 3^{n-1} = 3^{n-1}$$

따라서 $a_{10} = 3^9$ 이므로

$$\log_3 a_{10} = \log_3 3^9 = 9$$

답 9

674

전략 주어진 식의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하여 규칙을 찾는다.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \\ &= a_n + \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})} \\ &= a_n + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ a_3 &= a_2 + \sqrt{4} - \sqrt{3} = a_1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} \\ &= a_1 + \sqrt{4} - \sqrt{2} \\ a_4 &= a_3 + \sqrt{5} - \sqrt{4} = a_1 + \sqrt{4} - \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{4} \\ &= a_1 + \sqrt{5} - \sqrt{2} \\ &\vdots \\ \therefore a_n &= a_1 + \sqrt{n+1} - \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{n+1} - \sqrt{2} \\ &= \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

$a_n > 10$ 에서

$$\sqrt{n+1} > 10, \quad n+1 > 100$$

$$\therefore n > 99$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 100이다.

답 100

675

전략 a_{n+1} 을 a_n 에 대한 식으로 나타낸 후 n 에 1, 2, 3, ..., 15를 차례대로 대입하여 a_{16} 의 값을 구한다.

$$\sqrt{n+1} a_{n+1} = \sqrt{n} a_n \text{에서}$$

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} a_n$$

n 에 1, 2, 3, ..., 15를 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} a_1 \\ a_3 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} a_1 \\ a_4 &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} a_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} a_1 = \frac{1}{\sqrt{4}} a_1 \\ &\vdots \\ \therefore a_{16} &= \frac{1}{\sqrt{16}} a_1 = \frac{1}{4} \times 4 = 1 \end{aligned}$$

답 1

676

전략 a_{n+1} 을 a_n 에 대한 식으로 나타낸 후 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하여 $a_k > 12$ 인 자연수 k 의 최솟값을 구한다.

$$a_{n+1} + a_n = (-1)^{n+1} \times n \text{에서}$$

$$a_{n+1} = -a_n + (-1)^{n+1} \times n$$

n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$a_2 = -a_1 + (-1)^2 \times 1 = -12 + 1 = -11$$

$$a_3 = -a_2 + (-1)^3 \times 2 = 11 - 2 = 9$$

$$a_4 = -a_3 + (-1)^4 \times 3 = -9 + 3 = -6$$

$$a_5 = -a_4 + (-1)^5 \times 4 = 6 - 4 = 2$$

$$a_6 = -a_5 + (-1)^6 \times 5 = -2 + 5 = 3$$

$$a_7 = -a_6 + (-1)^7 \times 6 = -3 - 6 = -9$$

$$a_8 = -a_7 + (-1)^8 \times 7 = 9 + 7 = 16$$

⋮

따라서 $n \leq 7$ 일 때 $a_n \leq 12$ 이고 $a_8 > 12$ 이므로 구하는 자연수 k 의 최솟값은 8이다. **답 4**

677

전략 주어진 식의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하여 수가 반복되는 규칙을 찾는다.

$$a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n & (a_n < 8) \\ a_n - 8 & (a_n \geq 8) \end{cases} \text{의 } n \text{에 1, 2, 3, ...을 차례}$$

대로 대입하면

$$a_2 = 3a_1 = 3 \times 1 = 3$$

$$a_3 = 3a_2 = 3 \times 3 = 9$$

$$a_4 = a_3 - 8 = 9 - 8 = 1$$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 1, 3, 9가 이 순서대로 반복된다. 이때 $60 = 3 \times 20$ 이므로

$$a_{60} = 9$$

답 9

678

전략 주어진 상황을 이해하고 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

$(n+1)$ 일 후에 수족관에 남아 있는 물의 양 a_{n+1} L는 n 일 후에 수족관에 남아 있는 물의 양 a_n L의 $\frac{1}{2}$ 배에 30 L를 더한 것이므로

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 30 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{답 } a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 30 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

679

전략 주어진 관계식을 간단히 하고 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열임을 알아낸다.

$$(a_n + a_{n+1})^2 = 4a_n a_{n+1} + 4 \text{에서}$$

$$a_n^2 + 2a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2 = 4a_n a_{n+1} + 4$$

$$a_n^2 - 2a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2 = 4$$

$$\therefore (a_n - a_{n+1})^2 = 4$$

그런데 $a_{n+1} > a_n$ 이므로 $a_n - a_{n+1} = -2$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = 2$$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로

$$a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1$$

$$\therefore a_{20} = 2 \times 20 - 1 = 39$$

답 39

680

전략 주어진 식의 n 에 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입하여 a_6 을 p 에 대한 식으로 나타낸다.

$a_{n+1} = a_n + 3^n - p$ 의 n 에 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입하면

$$a_3 = a_2 + 3^2 - p = 3 + 3^2 - p$$

$$a_4 = a_3 + 3^3 - p = 3 + 3^2 + 3^3 - 2p$$

$$a_5 = a_4 + 3^4 - p$$

$$= 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 - 3p$$

$$\therefore a_6 = a_5 + 3^5 - p$$

$$= 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 - 4p$$

$$= \frac{3(3^5 - 1)}{3 - 1} - 4p$$

$$= 363 - 4p$$

즉 $363 - 4p = 355$ 이므로

$$4p = 8 \quad \therefore p = 2$$

답 2

681

전략 주어진 관계식을 이용하여 a_{11} , a_{12} , a_{13} 을 각각 a_4 에 대한 식으로 나타낸다.

$$a_{11} = 4a_4 - 1, a_{12} = 2a_4, a_{13} = a_4 + 5 \text{이므로}$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = (4a_4 - 1) + 2a_4 + (a_4 + 5)$$

$$= 7a_4 + 4$$

이때 $a_4 = a_1 + 5 = 2 + 5 = 7$ 이므로

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = 7 \times 7 + 4 = 53$$

답 53

682

전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 a_{n-1} 과 a_n 사이의 관계식을 구한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \alpha\beta = \frac{1}{a_{n-1}}$$

이므로

$$\begin{aligned} 3\alpha - \alpha\beta + 3\beta &= 3(\alpha + \beta) - \alpha\beta \\ &= 3 \times \frac{a_n}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-1}} \\ &= \frac{3a_n - 1}{a_{n-1}} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{3a_n - 1}{a_{n-1}} = 1$ 이므로

$$a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{1}{3}$$

n 에 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입하면

$$a_2 = \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{3} = 1$$

$$a_3 = \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$a_4 = \frac{1}{3}a_3 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$

$$\therefore a_5 = \frac{1}{3}a_4 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{9} + \frac{1}{3} = \frac{14}{27}$$

답 $\frac{14}{27}$

683

전략 주어진 식의 n 에 2, 3, 4, ...를 차례대로 대입하여 수가 반복되는 규칙을 찾는다.

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_{n-1}a_{n+1} = a_na_{n+2} \text{이므로}$$

$$a_1a_3 = a_2a_4 \text{에서} \quad 1 \times 4 = 2 \times a_4$$

$$\therefore a_4 = 2$$

$$a_2a_4 = a_3a_5 \text{에서} \quad 2 \times 2 = 4 \times a_5$$

$$\therefore a_5 = 1$$

$$a_3a_5 = a_4a_6 \text{에서} \quad 4 \times 1 = 2 \times a_6$$

$$\therefore a_6 = 2$$

$$a_4a_6 = a_5a_7 \text{에서} \quad 2 \times 2 = 1 \times a_7$$

$$\therefore a_7 = 4$$

$$a_5a_7 = a_6a_8 \text{에서} \quad 1 \times 4 = 2 \times a_8$$

$$\therefore a_8 = 2$$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 1, 2, 4, 2가 이 순서대로 반복되므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} a_k &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \\ &\quad + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots \\ &\quad + (a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20}) \\ &= 5 \times (1 + 2 + 4 + 2) \\ &= 45 \end{aligned}$$

답 45

684

전략 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 수열 $\{a_n\}$ 이 어떤 수열인지 찾는다.

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k = S_{n-1}$$

$$\therefore a_{n+1} = S_n$$

한편 $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n=2, 3, 4, \dots$)이므로

$$a_n = a_{n+1} - a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n \quad (n \geq 2)$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1, a_2 = S_1 = a_1 = 1$ 이고 둘째항부터 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_1 = 1, a_n = 2^{n-2} \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore a_{11} = 2^9 = 512$$

답 512

다른 풀이 $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$ 이므로

$$a_2 = a_1 = 1$$

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 2 + 2 = 4$$

$$a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4 + 4 = 8$$

$\vdots$

$$\therefore a_n = 2^{n-2} \quad (n \geq 2)$$

685

전략 주어진 식을 변형하여 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

$$2S_n = S_{n+1} + S_{n-1} - n^2 \text{에서}$$

$$S_{n+1} + S_{n-1} - 2S_n = n^2$$

$$(S_{n+1} - S_n) - (S_n - S_{n-1}) = n^2$$

$$a_{n+1} - a_n = n^2$$

$$\therefore a_{n+1} = a_n + n^2 \quad (n \geq 2)$$

n 에 2, 3, 4, ..., 9를 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + 2^2 = 1 + 2^2 \\ a_4 &= a_3 + 3^2 = 1 + 2^2 + 3^2 \\ a_5 &= a_4 + 4^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \\ &\vdots \\ \therefore a_{10} &= 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2 \\ &= \sum_{k=1}^9 k^2 = \frac{9 \times 10 \times 19}{6} \\ &= 285 \end{aligned}$$

답 285

참고 $a_1=0, a_2=10$ 이므로 $a_2=a_1+1^2$
따라서 $n \geq 1$ 일 때 $a_{n+1}=a_n+n^2$ 이 성립한다.

686

전략 주어진 과정을 이해하고 빈칸에 알맞은 것을 추론한다.

모든 자연수 n 에 대하여 점 P_n 의 좌표를 $(a_n, 0)$ 이라 하자.

$$\overline{OP_{n+1}} = \overline{OP_n} + \overline{P_nP_{n+1}} \text{이므로}$$

$$a_{n+1} = a_n + \overline{P_nP_{n+1}} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이다.

삼각형 OP_nQ_n 과 삼각형 $Q_nP_nP_{n+1}$ 이 닮음이므로

$\overline{OP_n} : \overline{P_nQ_n} = \overline{P_nQ_n} : \overline{P_nP_{n+1}}$ 이고, 점 Q_n 의 좌표는 $(a_n, \sqrt{3a_n})$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n : \sqrt{3a_n} &= \sqrt{3a_n} : \overline{P_nP_{n+1}} \\ a_n \times \overline{P_nP_{n+1}} &= 3a_n \\ \therefore \overline{P_nP_{n+1}} &= \boxed{(\textcircled{7}) 3} \quad (\because a_n \neq 0) \end{aligned}$$

이때 $\textcircled{1}$ 에서

$$a_{n+1} = a_n + 3$$

즉 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이므로

$$a_n = 1 + (n-1) \times 3 = 3n-2$$

따라서 삼각형 $OP_{n+1}Q_n$ 의 넓이 A_n 은

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2} \times \overline{OP_{n+1}} \times \overline{P_nQ_n} \\ &= \frac{1}{2} \times a_{n+1} \times \sqrt{3a_n} \\ &= \frac{1}{2} \times \{3(n+1)-2\} \times \sqrt{3(3n-2)} \\ &= \frac{1}{2} \times (\boxed{(\textcircled{4}) 3n+1}) \times \sqrt{9n-6} \end{aligned}$$

이다.

즉 $p=3, f(n)=3n+1$ 이므로

$$p+f(8)=3+25=28$$

답 ⑤

687

전략 주어진 조건을 이용하여 a_2 의 값을 구한다.

$$a_7 = a_2 \times a_3 - 2 \text{이므로}$$

$$2 = a_2 a_3 - 2 \quad \therefore a_2 a_3 = 4$$

이때 $a_3 = a_2 \times a_1 - 2$ 이므로

$$a_2(a_1 a_2 - 2) = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 $a_2 = a_2 \times a_1 + 1$ 이므로

$$a_1 a_2 = a_2 - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 에 $\textcircled{2}$ 을 대입하면

$$a_2(a_2 - 1 - 2) = 4$$

$$a_2^2 - 3a_2 - 4 = 0, \quad (a_2 + 1)(a_2 - 4) = 0$$

$$\therefore a_2 = -1 \text{ 또는 } a_2 = 4$$

(i) $a_2 = -1$ 이면 $\textcircled{2}$ 에서

$$-a_1 = -1 - 1 \quad \therefore a_1 = 2$$

(ii) $a_2 = 4$ 이면 $\textcircled{2}$ 에서

$$4a_1 = 4 - 1 \quad \therefore a_1 = \frac{3}{4}$$

그런데 $a_1 > 1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a_1 = 2, a_2 = -1$

따라서 $a_{2n} = -a_n + 1$ 이므로

$$a_{30} = -a_{15} + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$a_{2n+1} = -a_n - 2 \text{이므로}$$

$$a_{15} = -a_7 - 2 = -2 - 2 = -4$$

$\textcircled{3}$ 에 이것을 대입하면

$$a_{30} = 4 + 1 = 5$$

답 5

688

전략 $a_1 + a_2 + a_3$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 구한다.

조건 $(\textcircled{a})$ 에서 $a_4 = 3$ 이므로 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$\sum_{k=4}^{40} a_k$ 의 값은 하나로 정해진다.

따라서 M 은 $a_1 + a_2 + a_3$ 의 최댓값과 $\sum_{k=4}^{40} a_k$ 의 값의 합

이고 m 은 $a_1 + a_2 + a_3$ 의 최솟값과 $\sum_{k=4}^{40} a_k$ 의 값의 합이다.

이때 조건 $(\textcircled{b})$ 를 이용하여 a_3, a_2, a_1 의 값을 차례대로 구하면 다음과 같다.

(i) $a_3 \geq 0$ 이라 하면 $a_3 - 4 = 3$ 에서 $a_3 = 7$

$$a_3 < 0 \text{이라 하면 } -2a_3 + 1 = 3 \text{에서 } a_3 = -1$$

(ii) ㉠ $a_3=7$ 일 때

$$a_2 \geq 0 \text{이라 하면 } a_2 - 4 = 7 \text{에서 } a_2 = 11$$

$$a_2 < 0 \text{이라 하면 } -2a_2 + 1 = 7 \text{에서 } a_2 = -3$$

㉢ $a_3 = -1$ 일 때

$$a_2 \geq 0 \text{이라 하면 } a_2 - 4 = -1 \text{에서 } a_2 = 3$$

$$a_2 < 0 \text{이라 하면 } -2a_2 + 1 = -1 \text{에서 } a_2 = 1$$

이때 $a_2 < 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

㉠, ㉢에서

$$a_2 = 11, a_3 = 7 \text{ 또는 } a_2 = -3, a_3 = 7$$

$$\text{또는 } a_2 = 3, a_3 = -1$$

(iii) ㉠ $a_2 = 11$ 일 때

$$a_1 \geq 0 \text{이라 하면 } a_1 - 4 = 11 \text{에서 } a_1 = 15$$

$$a_1 < 0 \text{이라 하면 } -2a_1 + 1 = 11 \text{에서 } a_1 = -5$$

㉢ $a_2 = -3$ 일 때

$$a_1 \geq 0 \text{이라 하면 } a_1 - 4 = -3 \text{에서 } a_1 = 1$$

$$a_1 < 0 \text{이라 하면 } -2a_1 + 1 = -3 \text{에서 } a_1 = 2$$

이때 $a_1 < 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

㉠ $a_2 = 3$ 일 때

$$a_1 \geq 0 \text{이라 하면 } a_1 - 4 = 3 \text{에서 } a_1 = 7$$

$$a_1 < 0 \text{이라 하면 } -2a_1 + 1 = 3 \text{에서 } a_1 = -1$$

㉠, ㉢, ㉠에서

$$a_1 = 15, a_2 = 11, a_3 = 7$$

$$\text{또는 } a_1 = -5, a_2 = 11, a_3 = 7$$

$$\text{또는 } a_1 = 1, a_2 = -3, a_3 = 7$$

$$\text{또는 } a_1 = 7, a_2 = 3, a_3 = -1$$

$$\text{또는 } a_1 = -1, a_2 = 3, a_3 = -1$$

이상에서 $a_1 + a_2 + a_3$ 의 값은

$$15 + 11 + 7 = 33 \text{ 또는 } -5 + 11 + 7 = 13$$

$$\text{또는 } 1 + (-3) + 7 = 5 \text{ 또는 } 7 + 3 + (-1) = 9$$

$$\text{또는 } -1 + 3 + (-1) = 1$$

따라서 $M = 33 + \sum_{k=4}^{40} a_k$, $m = 1 + \sum_{k=4}^{40} a_k$ 이므로

$$M - m = 33 + \sum_{k=4}^{40} a_k - \left(1 + \sum_{k=4}^{40} a_k\right) = 32$$

답 32

참고 $a_4 = 3$, $a_5 = a_4 - 4 = -1$, $a_6 = -2a_5 + 1 = 3$, ...

이므로

$$a_{2k} = 3, a_{2k+1} = -1 \text{ (단, } k \text{는 } 2 \text{ 이상의 자연수)}$$

$$\therefore \sum_{k=4}^{40} a_k = 18 \times \{3 + (-1)\} + 3 = 39$$

02 수학적 귀납법

● 본책 292~295쪽

689

조건 (가)에서 $p(1)$ 이 참이므로 조건 (나)에 의하여 $p(3)$ 이 참이다.

$p(3)$ 이 참이므로 조건 (나)에 의하여 $p(6)$ 이 참이다.

$p(6)$ 이 참이므로 조건 (나)에 의하여 $p(10)$ 이 참이다.

$p(10)$ 이 참이므로 조건 (나)에 의하여 $p(16)$ 이 참이다.

따라서 반드시 참인 명제는 $p(16)$ 이다.

답 ⑤

690

ㄱ. 조건 (가)에서 $p(1)$ 이 참이므로

$$p(3), p(5), p(7), \dots, p(2l+1)$$

도 참이다. (단, l 은 자연수이다.)

이때 $51 = 2 \times 25 + 1$ 이므로 $p(51)$ 은 참이다.

ㄴ. 조건 (가)에서 $p(1)$ 이 참이므로

$$p(5), p(9), p(13), \dots, p(4l+1)$$

도 참이다. (단, l 은 자연수이다.)

그런데 $51 = 4 \times 12 + 3$ 이므로 $p(51)$ 이 참인지는 알 수 없다.

ㄷ. 조건 (가)에서 $p(1)$ 이 참이므로

$$p(2), p(5), p(14), p(41), p(122), \dots$$

도 참이다.

따라서 $p(51)$ 이 참인지는 알 수 없다.

이상에서 조건 (나)가 될 수 있는 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

691

$$(1) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \quad \dots\dots ㉠$$

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 1^2 = 1$$

$$(\text{우변}) = \frac{1}{6} \times 1 \times 2 \times 3 = 1$$

따라서 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2$$

$$= \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1)$$

III-3

수
학
문
화

양변에 $(k+1)^2$ 을 더하면

$$\begin{aligned} & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1) + 6(k+1)\} \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 ㉠이 성립한다.

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots \\ & + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(i) $n=1$ 일 때

$$\begin{aligned} (\text{좌변}) &= \frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{3} \\ (\text{우변}) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

따라서 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots \\ & + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \frac{k}{2k+1} \end{aligned}$$

양변에 $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ 을 더하면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots \\ & + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ & + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k(2k+3) + 1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{2k^2 + 3k + 1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3} \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 ㉠이 성립한다.

풀이 참조

692

$$(1) \quad 2^n > n^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(i) $n=5$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 2^5 = 32$$

$$(\text{우변}) = 5^2 = 25$$

이때 $32 > 25$ 이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 5$)일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$2^k > k^2$$

양변에 2를 곱하면

$$2^k \times 2 > 2k^2 \quad \therefore 2^{k+1} > 2k^2$$

그런데 $k \geq 5$ 이면

$$k^2 - 2k - 1 = (k-1)^2 - 2 > 0$$

$$\text{이므로} \quad k^2 > 2k + 1$$

$$\therefore 2^{k+1} > 2k^2 = k^2 + k^2$$

$$> k^2 + 2k + 1$$

$$= (k+1)^2$$

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 ㉠이 성립한다.

$$(2) \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(i) $n=2$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$$

$$(\text{우변}) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

이때 $\frac{5}{4} < \frac{3}{2}$ 이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$$

양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$ 을 더하면

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \\ & < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} & 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} - \left(2 - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \\ &= \frac{k+k(k+1)-(k+1)^2}{k(k+1)^2} \\ &= \frac{-1}{k(k+1)^2} < 0 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} & 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \\ & < 2 - \frac{1}{k+1} \quad \dots\dots \textcircled{c} \end{aligned}$$

㉠, ㉡에서

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \\ & < 2 - \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 ㉠이 성립한다.

답 풀이 참조

연습문제

● 본책 296~298쪽

693

전략 명제 $p(n)$ 이 참이면 명제 $p(n+3)$ 이 참임을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $p(1)$ 이 참이면 주어진 조건에 의하여

$$p(4), p(7), p(10), \dots, p(3k+1)$$

이 참이지만 $p(3k)$ 가 참인지는 알 수 없다. (거짓)

ㄴ. $p(2)$ 가 참이면 주어진 조건에 의하여

$$p(5), p(8), p(11), \dots, p(3k+2)$$

가 참이다. (참)

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서 $p(1)$ 이 참이면 $p(3k+1)$ 이 참이고,

$p(2)$ 가 참이면 $p(3k+2)$ 가 참이다.

또 $p(3)$ 이 참이면

$$p(6), p(9), p(12), \dots, p(3k)$$

가 참이다.

따라서 $p(1), p(2), p(3)$ 이 참이면 $p(k)$ 가 참이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

694

전략 조건 ㉠, ㉡를 이용하여 반드시 참인 명제의 꼴을 구한다.

조건 ㉠에서 $p(1)$ 이 참이고 조건 ㉡에서 $p(n)$ 이 참이면 $p(2n)$ 이 참이므로

$$p(2), p(4), p(8), \dots, p(2^\alpha)$$

이 참이다. (단, α 는 음이 아닌 정수이다.)

또 조건 ㉡에서 $p(n)$ 이 참이면 $p(3n)$ 이 참이므로

$$p(3), p(9), p(27), \dots, p(3^\beta)$$

이 참이다. (단, β 는 음이 아닌 정수이다.)

따라서 조건 ㉠, ㉡에 의하여 $p(2^\alpha \times 3^\beta)$ 이 참이다.

$$\textcircled{1} p(24) = p(2^3 \times 3)$$

$$\textcircled{2} p(30) = p(2 \times 3 \times 5)$$

$$\textcircled{3} p(36) = p(2^2 \times 3^2)$$

$$\textcircled{4} p(48) = p(2^4 \times 3)$$

$$\textcircled{5} p(96) = p(2^5 \times 3)$$

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 ㉡이다.

답 ㉡

695

전략 $n=k+1$ 일 때의 등식에 유의하여 양변에 적당한 식을 더한다.

(ii) $n=k$ 일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + k \times 2^k \\ &= (k-1) \times 2^{k+1} + 2 \end{aligned}$$

양변에 $\boxed{\textcircled{7}} (k+1) \times 2^{k+1}$ 을 더하면

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots \\ &+ k \times 2^k + \boxed{\textcircled{7}} (k+1) \times 2^{k+1} \\ &= (k-1) \times 2^{k+1} + 2 + \boxed{\textcircled{7}} (k+1) \times 2^{k+1} \\ &= 2k \times 2^{k+1} + 2 \\ &= \boxed{\textcircled{4}} k \times 2^{k+2} + 2 \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 ㉠이 성립한다.

즉 $f(k) = (k+1) \times 2^{k+1}$, $g(k) = k$ 이므로

$$f(2) + g(3) = 3 \times 2^3 + 3 = 27 \quad \text{답 27}$$

696

전략 $n=k$ 일 때 $9^n - 1$ 이 8의 배수라고 가정하면 $n=k+1$ 일 때도 $9^n - 1$ 이 8의 배수가 되도록 주어진 식을 변형한다.

(ii) $n=k$ 일 때, $9^n - 1$ 이 8의 배수라고 가정하면

$$9^k - 1 = 8N \quad (N \text{은 자연수})$$

으로 놓을 수 있다.

이때 $n=k+1$ 이면

$$\begin{aligned} 9^{k+1} - 1 &= \boxed{(\text{㉠})} 9 \times 9^k - 1 \\ &= 8 \times 9^k + 9^k - 1 \\ &= 8 \times 9^k + 8N \\ &= \boxed{(\text{㉡})} 8 \times (9^k + N) \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 $9^n - 1$ 은 8의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 $9^n - 1$ 은 8의 배수이다.

답 (㉠) 9 (㉡) 8

697

전략 $\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \sum_{k=1}^m a_k + a_{m+1}$ 임을 이용한다.

(ii) $n=m$ 일 때, $(*)$ 이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m a_k = 2^{m(m+1)} - (m+1) \times 2^{-m}$$

이다. $n=m+1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} a_k &= \sum_{k=1}^m a_k + a_{m+1} \\ &= 2^{m(m+1)} - (m+1) \times 2^{-m} \\ &\quad + (2^{2m+2} - 1) \times \boxed{(\text{㉠})} 2^{m(m+1)} + m \times 2^{-m-1} \\ &= 2^{m(m+1)} (1 + 2^{2m+2} - 1) \\ &\quad - \left(m+1 - \frac{m}{2}\right) \times 2^{-m} \\ &= \boxed{(\text{㉡})} 2^{m(m+1)} \times \boxed{(\text{㉢})} 2^{2m+2} - \frac{m+2}{2} \times 2^{-m} \\ &= 2^{(m+1)(m+2)} - (m+2) \times 2^{-(m+1)} \end{aligned}$$

이다.

따라서 $n=m+1$ 일 때에도 $(*)$ 이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = 2^{n(n+1)} - (n+1) \times 2^{-n}$$

이다.

즉 $f(m) = 2^{m(m+1)}$, $g(m) = 2^{2m+2}$ 이므로

$$\frac{g(7)}{f(3)} = \frac{2^{16}}{2^{12}} = 2^4 = 16$$

답 ④

698

전략 $n=k+1$ 일 때의 ㉠의 우변의 식을 이용하여 (㉡)에 알맞은 식을 구한다.

(i) $n=2$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 1 + \frac{1}{2} = \boxed{(\text{㉠})} \frac{3}{2}$$

$$(\text{우변}) = \frac{4}{3}$$

이때 $\frac{3}{2} > \frac{4}{3}$ 이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} > \frac{2k}{k+1}$$

양변에 $\frac{1}{k+1}$ 을 더하면

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \\ > \frac{2k}{k+1} + \frac{1}{k+1} = \frac{2k+1}{k+1} \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} \frac{2k+1}{k+1} - \boxed{(\text{㉡})} \frac{2k+2}{k+2} \\ &= \frac{(2k+1)(k+2) - (2k+2)(k+1)}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k}{(k+1)(k+2)} > 0 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \frac{2k+1}{k+1} &> \frac{2k+2}{k+2} \\ \therefore 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \\ &> \boxed{(\text{㉢})} \frac{2k+2}{k+2} \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 ㉠이 성립한다.

즉 $a = \frac{3}{2}$, $f(k) = \frac{2k+2}{k+2}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(a) &= f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2 \times \frac{3}{2} + 2}{\frac{3}{2} + 2} \\ &= \frac{10}{7} \end{aligned}$$

답 $\frac{10}{7}$

699

전략 $n = k+1$ 일 때의 ㉠의 좌변의 식을 이용하여 ㉡에 알맞은 식을 구한다.

(i) $n = 2$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 2 + a_1 = 2 + 1 = 3,$$

$$(\text{우변}) = 2a_2 = 2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3$$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n = k$ ($k \geq 2$)일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$k + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{k-1} = ka_k$$

양변에 $\boxed{(\text{㉡}) a_k + 1}$ 을 더하면

$$(k+1) + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{k-1} + a_k$$

$$= ka_k + \boxed{(\text{㉡}) a_k + 1}$$

$$= (k+1)a_k + 1$$

$$= (k+1)\left(a_{k+1} - \boxed{(\text{㉡}) \frac{1}{k+1}}\right) + 1$$

$$= (k+1)a_{k+1}$$

따라서 $n = k+1$ 일 때에도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 ㉠이 성립한다.

즉 $f(k) = a_k + 1$, $g(k) = \frac{1}{k+1}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(4) - g(11) &= a_4 + 1 - \frac{1}{11+1} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{12} \\ &= 3 \end{aligned}$$

답 3

