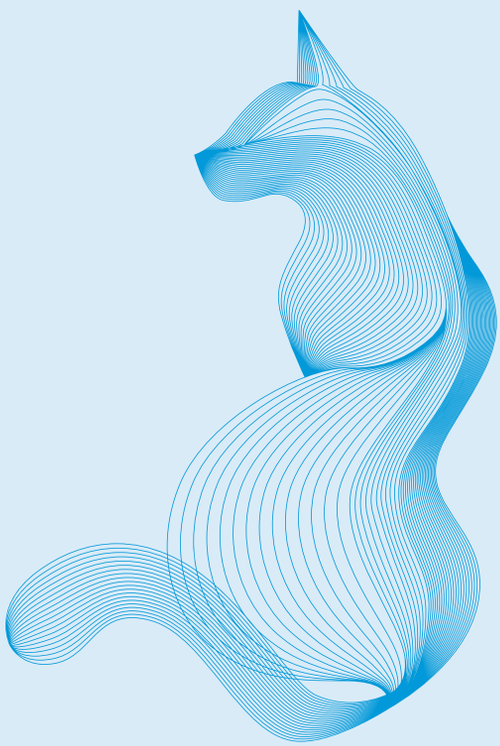
RPM Pro

AI 튜터와 함께 푸는 RPM Pro

공통수학 2

정답 및 풀이



01 평면좌표

셀프 CHECK → 본책 8쪽

A 답 (1) $3\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{13}$ (3) $\sqrt{37}$

B 답 (1) 3 (2) 4

C 답 (1) $(2, -3)$ (2) $(1, -2)$ (3) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

D 답 (1) $(0, 1)$ (2) $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

내신유형 다지기

→ 본책 9~15쪽

유형 001 두 점 사이의 거리

→ 본책 9쪽

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리
➜ $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

0001 $\overline{OA}=\overline{AB}$이므로

$\sqrt{7^2+(-2)^2}=\sqrt{(5-7)^2+\{a-(-2)\}^2}$

양변을 제곱하면

$53=a^2+4a+8$, $a^2+4a-45=0$

$(a+9)(a-5)=0$ $\therefore a=5$ ($\because a>0$)

답 5

0002 $2\overline{AB}=\overline{CD}$이므로

$2\sqrt{a^2+(-2-1)^2}=\sqrt{(-3-1)^2+\{-1-(a+3)\}^2}$

양변을 제곱하면

$4a^2+36=a^2+8a+32$, $3a^2-8a+4=0$

$(3a-2)(a-2)=0$ $\therefore a=\frac{2}{3}$ 또는 $a=2$

따라서 모든 a의 값의 합은 $\frac{8}{3}$이다.

답 ⑤

0003 $\overline{AB}=\sqrt{\{-4-(t-1)\}^2+(2t-4)^2}$

$=\sqrt{5t^2-10t+25}$

$=\sqrt{5(t-1)^2+20}$ … ❶

따라서 $t=1$일 때 선분 AB의 길이가 최소가 되고 그 길이는 $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$이므로

$a=1$, $l=2\sqrt{5}$ … ❷

$\therefore a+l^2=1+20=21$ … ❸

답 21

단계	채점 요소	비율
❶	$\overline{AB}$의 길이를 t에 대한 식으로 나타내기	60 %
❷	a, l의 값 구하기	30 %
❸	$a+l^2$의 값 구하기	10 %

0004 $\overline{PA}:\overline{PB}=1:2$, 즉 $2\overline{PA}=\overline{PB}$이므로

$2|a-a^2-(-3)|=|a-a^2-8|$

$\therefore 2(a-a^2+3)=\pm(a-a^2-8)$

(i) $2(a-a^2+3)=a-a^2-8$일 때

이차방정식 $a^2-a-14=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-1)^2-4\times1\times(-14)>0$

따라서 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 가지고 그 합은

$-(-1)=1$

(ii) $2(a-a^2+3)=-(a-a^2-8)$일 때

이차방정식 $3a^2-3a+2=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-3)^2-4\times3\times2<0$

따라서 이 이차방정식은 실근을 갖지 않는다.

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은 1이다.

답 1

0005 O 지점을 원점, 지영이의 출발점의 위치를 점 $(9, 0)$, 현수의 출발점의 위치를 점 $(0, -8)$로 하는 좌표평면을 잡자. 지영이와 현수의 위치를 나타내는 점을 각각 P, Q라 하면 두 사람이 출발한 지 t시간 후의 두 점 P, Q의 좌표는

$P(9-3t, 0)$, $Q(0, -8+t)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(-9+3t)^2+(-8+t)^2}$

$=\sqrt{10t^2-70t+145}$

$=\sqrt{10\left(t-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{45}{2}}$

따라서 $t=\frac{7}{2}$일 때 선분 PQ의 길이가 최소가 되므로 두 사람 사이의 거리는 출발한 지 $\frac{7}{2}$시간 후에 가장 가까워진다.

답 ②

유형 002 같은 거리에 있는 점의 좌표

→ 본책 9쪽

두 점 A, B에서 같은 거리에 있는 점 P의 좌표는
$\overline{AP}=\overline{BP}$, 즉 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$
임을 이용하여 구한다. 이때 점 P의 위치에 따라 좌표를 다음과 같이 정한다.

① x축 위의 점 ➜ $(a, 0)$
② y축 위의 점 ➜ $(0, b)$
③ 직선 $y=mx+n$ 위의 점 ➜ $(a, am+n)$

0006 $P(a, 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-5)^2+6^2=(a+4)^2+(-3)^2$

$a^2-10a+61=a^2+8a+25$

$-18a=-36$ $\therefore a=2$

$\therefore P(2, 0)$

$Q(0, b)$라 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$(-5)^2+(b+6)^2=4^2+(b-3)^2$

$b^2+12b+61=b^2-6b+25$

$18b=-36$ $\therefore b=-2$

$\therefore Q(0, -2)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$

답 $2\sqrt{2}$

0007 점 P는 직선 $y=-x$ 위의 점이므로 $P(a, -a)$라 하면
$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$(a-3)^2+(-a-4)^2=(a-5)^2+(-a-3)^2$
$2a^2+2a+25=2a^2-4a+34$
$6a=9 \quad \therefore a=\frac{3}{2}$
즉 $P\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$이므로
$\overline{OP}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 답 ②

0008 삼각형 ABC의 외심을 $P(a, b)$라 하면
$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$
$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$(a+2)^2+(b-1)^2=(a-3)^2+(b+2)^2$
$a^2+4a+b^2-2b+5=a^2-6a+b^2+4b+13$
$\therefore 5a-3b=4$ …… ㉠
$\overline{AP}=\overline{CP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$이므로
$(a+2)^2+(b-1)^2=a^2+(b+7)^2$
$a^2+4a+b^2-2b+5=a^2+b^2+14b+49$
$\therefore a-4b=11$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1, b=-3$
따라서 $P(-1, -3)$이므로 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는
$\overline{CP}=\sqrt{(-1)^2+(-3+7)^2}=\sqrt{17}$ 답 $\sqrt{17}$

만점 공략 노트
삼각형의 외심
① 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점까지의 거리는 모두 같다.
② 직각삼각형의 외심은 빗변의 중점이다.

0009 $P(-3, 4)$라 하면 $\overline{AP}=|4-9|=5$
곡선 $y=x^2$ 위에 있고 점 P에서 거리가 5인 점의 좌표를 (k, k^2) $(k>0)$이라 하면
$(k+3)^2+(k^2-4)^2=5^2, \quad k^4-7k^2+6k=0$
$k(k-1)(k-2)(k+3)=0$
$\therefore k=1$ 또는 $k=2$ ($\because k>0$)
따라서 $B(1, 1)$, $C(2, 4)$ 또는 $B(2, 4)$, $C(1, 1)$이므로
$\overline{BC}^2=(2-1)^2+(4-1)^2=10$ 답 10

유형 003 삼각형의 세 변의 길이와 모양 본책 10쪽

세 점 A, B, C의 좌표를 이용하여 $\overline{AB}^2$, $\overline{BC}^2$, $\overline{CA}^2$의 값을 구한 후 다음과 같이 삼각형 ABC의 모양을 판정한다.
(1) $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$ ➡ 정삼각형
(2) $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$ ➡ $\angle C=90°$인 직각삼각형
(3) $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$ (또는 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$ 또는 $\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$)
➡ 이등변삼각형

0010 $\overline{AB}^2=(3-1)^2+(-4)^2=20$
$\overline{BC}^2=(5-3)^2+1^2=5$
$\overline{CA}^2=(1-5)^2+(4-1)^2=25$
따라서 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이므로 삼각형 ABC는 $\angle B=90°$인 직각삼각형이다.
$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}$
$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$ 답 5

0011 삼각형 ABC가 $\angle A>90°$인 둔각삼각형이 되려면
$\overline{BC}^2>\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$
이어야 한다. … ❶
$\overline{AB}^2=5^2+(-4-a)^2=a^2+8a+41$,
$\overline{BC}^2=(2-5)^2+(3+4)^2=58$,
$\overline{CA}^2=(-2)^2+(a-3)^2=a^2-6a+13$
이므로
$58>(a^2+8a+41)+(a^2-6a+13)$ … ❷
$a^2+a-2<0, \quad (a+2)(a-1)<0$
$\therefore -2<a<1$ … ❸
답 $-2<a<1$

단계	채점 요소	비율
❶	둔각삼각형이 되기 위한 조건 알기	20 %
❷	부등식 세우기	50 %
❸	a의 값의 범위 구하기	30 %

0012 삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$
$C(a, b)$ $(a>0, b>0)$라 하면 $\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로
$2^2+(-1-3)^2=a^2+(b+1)^2$
$\therefore a^2+b^2+2b-19=0$ …… ㉠
$\overline{BC}=\overline{CA}$에서 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이므로
$a^2+(b+1)^2=(-2-a)^2+(3-b)^2$
$\therefore a=2b-3$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $(2b-3)^2+b^2+2b-19=0$
$b^2-2b-2=0 \quad \therefore b=1+\sqrt{3}$ ($\because b>0$)
$b=1+\sqrt{3}$을 ㉡에 대입하면
$a=2(1+\sqrt{3})-3=-1+2\sqrt{3}$
따라서 점 C의 x좌표는 $-1+2\sqrt{3}$이다. 답 ②

0013 $\overline{AB}^2=(7-1)^2+(-3-1)^2=52$
$\overline{BC}^2=(6-7)^2+(2+3)^2=26$
$\overline{CA}^2=(1-6)^2+(1-2)^2=26$
따라서 $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$이고 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$에서 $\overline{BC}=\overline{CA}$이므로 삼각형 ABC는 $\angle C=90°$인 직각이등변삼각형이다.
이때 직각이등변삼각형의 내접원은 빗변의 중점에서 빗변과 접하므로 점 D는 선분 AB의 중점이다.
$\therefore \overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{13}=\sqrt{13}$ 답 ②

유형 004 두 점 사이의 거리의 활용 → 본책 10쪽

(1) 실수 x, y, a, b에 대하여

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$

➜ 두 점 (x, y), (a, b) 사이의 거리

(2) 두 점 A, B와 임의의 점 P에 대하여

$\overline{AP}+\overline{BP}\geq\overline{AB}$

➜ $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $\overline{AB}$의 길이와 같고 이때 점 P는 선분 AB 위에 있다.

0014 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 값이 최소인 경우는 점 P가 선분 AB 위에 있을 때이므로

$\overline{AP}+\overline{PB}\geq\overline{AB}$

$=\sqrt{(1+3)^2+(4-6)^2}=2\sqrt{5}$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{5}$이다. 답 ⑤

0015 A(x, y), B$(0, 2)$, C$(5, -k)$라 하면

$\sqrt{x^2+(y-2)^2}=\overline{AB}$, $\sqrt{(x-5)^2+(y+k)^2}=\overline{AC}$

$\therefore \sqrt{x^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y+k)^2}$

$=\overline{AB}+\overline{AC}$

$\geq\overline{BC}=\sqrt{5^2+(-k-2)^2}$

즉 $\sqrt{5^2+(-k-2)^2}=5\sqrt{2}$이므로 양변을 제곱하면

$k^2+4k+29=50$, $k^2+4k-21=0$

$(k+7)(k-3)=0$ $\therefore k=3$ ($\because k>0$) 답 3

0016 오른쪽 그림에서

$\overline{PO}+\overline{PB}\geq\overline{OB}$,

$\overline{PA}+\overline{PC}\geq\overline{AC}$

$\therefore \overline{PO}+\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$

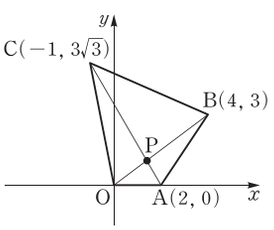
$=(\overline{PO}+\overline{PB})$

$+(\overline{PA}+\overline{PC})$

$\geq\overline{OB}+\overline{AC}$

$=\sqrt{4^2+3^2}+\sqrt{(-1-2)^2+(3\sqrt{3})^2}$

$=5+6=11$



따라서 구하는 최솟값은 11이다. 답 ⑤

유형 005 거리의 제곱의 합의 최솟값 → 본책 11쪽

두 점 A, B의 좌표가 주어질 때, $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 점 P의 좌표를 (a, b)라 하고, 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$을 a 또는 b에 대한 이차식으로 나타낸다.

(ii) (i)에서 구한 이차식을 완전제곱식을 포함한 꼴로 변형하여 최솟값을 구한다.

0017 P$(a, a+1)$이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(a-5)^2+(a-2)^2+(a+3)^2+(a+2)^2$

$=4a^2-4a+42$

$=4\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+41$

따라서 $a=\frac{1}{2}$일 때 주어진 식의 값이 최소이므로 구하는 점 P의 x좌표는 $\frac{1}{2}$이다. 답 ⑤

0018 P$(a, 0)$이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(a-1)^2+(-k)^2+(a+3)^2+(-6)^2$

$=2a^2+4a+46+k^2$ … ❶

$=2(a+1)^2+44+k^2$

따라서 $a=-1$일 때 주어진 식의 최솟값이 $44+k^2$이므로

$44+k^2=48$ … ❷

$k^2=4$

$\therefore k=2$ ($\because k>0$) … ❸

답 2

단계	채점 요소	비율
❶	$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$을 a에 대한 이차식으로 나타내기	40 %
❷	최솟값을 이용하여 k에 대한 식 세우기	30 %
❸	양수 k의 값 구하기	30 %

0019 P(a, b)라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$

$=(a+8)^2+b^2+a^2+(b+1)^2+(a-2)^2+(b-4)^2$

$=3a^2+3b^2+12a-6b+85$

$=3(a+2)^2+3(b-1)^2+70$

이때 a, b가 실수이므로

$(a+2)^2\geq0$, $(b-1)^2\geq0$

$\therefore \overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2\geq70$

따라서 $a=-2$, $b=1$일 때 주어진 식의 최솟값은 70이다.

답 ③

유형 006 좌표를 이용한 도형의 성질의 증명 → 본책 11쪽

좌표를 이용하여 도형의 성질을 증명할 때에는 다음과 같은 순서로 한다.

(i) 도형의 한 변이 좌표축 위에 오도록 도형을 좌표평면 위에 놓는다.

(ii) 도형의 꼭짓점에 해당하는 점의 좌표를 정한다.

(iii) 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 주어진 등식이 성립함을 증명한다.

0020 선분 BC의 중점이 원점이므로

B((가) $-c$, 0)

따라서

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}$

$=(a^2+2ac+c^2+b^2)+(a^2-2ac+c^2+b^2)$

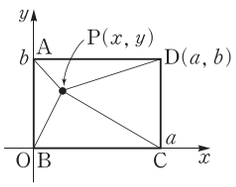
$=2(\boxed{(나)\ a^2+b^2+c^2})$

$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=a^2+b^2+\boxed{(다)\ c^2}$

$\therefore\ \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

답 (가) $-c$ (나) $a^2+b^2+c^2$ (다) c^2

0021 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이다.



이때 $A(0, b)$, $C(a, 0)$, $D(a, b)$라 하고 $P(x, y)$라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\{x^2+(y-b)^2\}+\{(x-a)^2+y^2\}$

$=x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2$

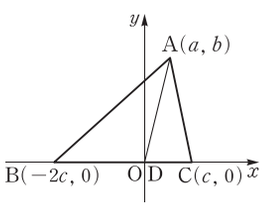
$\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=(x^2+y^2)+\{(x-a)^2+(y-b)^2\}$

$=x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2$

$\therefore\ \overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$

답 풀이 참조

0022 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 D는 원점이다.



이때 $A(a, b)$, $B(-2c, 0)$, $C(c, 0)$이라 하면

$\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=(a+2c)^2+b^2+2\{(a-c)^2+b^2\}$

$=3(a^2+b^2+2c^2)$

$\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2=a^2+b^2+2c^2$

따라서 $3(a^2+b^2+2c^2)=k(a^2+b^2+2c^2)$에서

$k=3$

답 3

유형 007 선분의 내분점 본책 12쪽

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

참고 중점은 선분을 1 : 1로 내분하는 점이다.

0023 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times2+2\times a}{1+2}, \frac{1\times b+2\times1}{1+2}\right)$, 즉 $\left(\frac{2+2a}{3}, \frac{b+2}{3}\right)$

이 점이 점 $(0, 3)$과 일치하므로

$\frac{2+2a}{3}=0$, $\frac{b+2}{3}=3$

$\therefore\ a=-1$, $b=7$

따라서 $A(-1, 1)$, $B(2, 7)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(2+1)^2+(7-1)^2}=3\sqrt{5}$

답 ②

0024 선분 AB를 $a:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{a\times5+1\times(-1)}{a+1}, \frac{a\times2+1\times(-7)}{a+1}\right)$,

즉 $\left(\frac{5a-1}{a+1}, \frac{2a-7}{a+1}\right)$ … ❶

이 점이 점 $(b, -1)$과 일치하므로

$\frac{5a-1}{a+1}=b$, $\frac{2a-7}{a+1}=-1$

$\therefore\ a=2$, $b=3$ … ❷

따라서 $C(2, 3)$이므로 선분 BC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{5+2}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$ … ❸

답 $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$

단계	채점 요소	비율
❶	선분 AB를 $a:1$로 내분하는 점의 좌표를 a로 나타내기	30 %
❷	a, b의 값 구하기	40 %
❸	선분 BC의 중점의 좌표 구하기	30 %

0025 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$라 하면 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

이 점이 점 $(1, 4)$와 일치하므로

$x_1+x_2=2$, $y_1+y_2=8$

선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{3x_2+x_1}{3+1}, \frac{3y_2+y_1}{3+1}\right)$,

즉 $\left(\frac{x_1+3x_2}{4}, \frac{y_1+3y_2}{4}\right)$

이 점이 점 $(4, 5)$와 일치하므로

$x_1+3x_2=16$, $y_1+3y_2=20$

$x_1+x_2=2$, $x_1+3x_2=16$을 연립하여 풀면

$x_1=-5$, $x_2=7$

$y_1+y_2=8$, $y_1+3y_2=20$을 연립하여 풀면

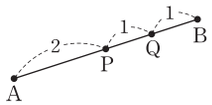
$y_1=2$, $y_2=6$

따라서 $A(-5, 2)$, $B(7, 6)$이므로

$\overline{AB}^2=(7+5)^2+(6-2)^2=160$

답 ③

다른 풀이 $P(1, 4)$, $Q(4, 5)$라 하면 오른쪽 그림에서



$\overline{PQ}=\frac{1}{4}\overline{AB}$

$\therefore\ \overline{AB}=4\overline{PQ}$

$=4\times\sqrt{(4-1)^2+(5-4)^2}$

$=4\sqrt{10}$

$\therefore\ \overline{AB}^2=160$

유형 008 선분의 내분점의 활용 → 본책 12쪽

두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 내분하는 점의 좌표를 구한 후 주어진 조건을 만족시키는 방정식 또는 부등식을 세운다.

0026 선분 AB를 $k:(1-k)$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{k\times1+(1-k)\times(-5)}{k+(1-k)}, \frac{k\times(-3)+(1-k)\times3}{k+(1-k)}\right)$,

즉 $(6k-5, -6k+3)$

이 점이 제3사분면 위에 있으므로 $6k-5<0$, $-6k+3<0$에서

$k<\frac{5}{6}$, $k>\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{2}<k<\frac{5}{6}$ 답 $\frac{1}{2}<k<\frac{5}{6}$

0027 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{m\times9+n\times2}{m+n}, \frac{m\times4+n\times(-5)}{m+n}\right)$,

즉 $\left(\frac{9m+2n}{m+n}, \frac{4m-5n}{m+n}\right)$

이 점이 x축 위에 있으므로

$\frac{4m-5n}{m+n}=0$, $4m=5n$

$\therefore m:n=5:4$

이때 m, n은 서로소인 자연수이므로 $m=5$, $n=4$

$\therefore mn=20$ 답 ⑤

0028 $2\overline{AC}=k\overline{BC}$에서 $\overline{AC}:\overline{BC}=k:2$이므로 점 C는 선분 AB를 $k:2$로 내분하는 점이다.

따라서 점 C의 좌표는

$\left(\frac{k\times(-4)+2\times6}{k+2}, \frac{k\times(-4)+2\times1}{k+2}\right)$,

즉 $\left(\frac{-4k+12}{k+2}, \frac{-4k+2}{k+2}\right)$

이때 점 C는 직선 $y=-2x-2$ 위의 점이므로

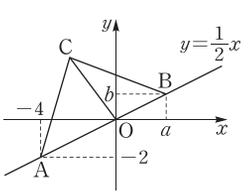
$\frac{-4k+2}{k+2}=-2\times\frac{-4k+12}{k+2}-2$

$-4k+2=8k-24-2(k+2)$

$-10k=-30$ $\therefore k=3$ 답 3

0029 세 점 O, A, B가 한 직선 위에 있으므로 두 삼각형 AOC, BOC의 넓이의 비는 두 선분 AO, BO의 길이의 비와 같다.

$\therefore \overline{AO}:\overline{BO}=3:2$



이때 $a>0$에서 원점 O는 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점이므로

$\left(\frac{3\times a+2\times(-4)}{3+2}, \frac{3\times b+2\times(-2)}{3+2}\right)$,

즉 $\left(\frac{3a-8}{5}, \frac{3b-4}{5}\right)$

이 점이 점 $(0, 0)$과 일치하므로

$\frac{3a-8}{5}=0$, $\frac{3b-4}{5}=0$

따라서 $a=\frac{8}{3}$, $b=\frac{4}{3}$이므로

$a+b=4$ 답 4

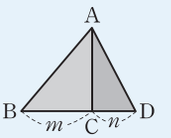
만점 공략 노트

높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비

높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

$\overline{BC}:\overline{CD}=m:n$이면

$\triangle ABC:\triangle ACD=m:n$



유형 009 선분의 내분점의 활용 – 이차함수의 그래프 → 본책 13쪽

두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 내분하는 점의 좌표를 구한 후 두 점 A, B가 이차함수의 그래프와 직선의 두 교점이면 두 식을 연립한 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

0030 이차함수 $y=-x^2+4$의 그래프와 직선 $y=kx$가 만나는 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 α, β는 방정식

$-x^2+4=kx$, 즉 $x^2+kx-4=0$

의 두 실근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-k$ …… ㉠

$\alpha\beta=-4$ …… ㉡

한편 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 O의 x좌표가 0이므로

$\frac{2\times\beta+\alpha}{2+1}=0$ $\therefore \alpha=-2\beta$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$\alpha=-2\sqrt{2}$, $\beta=\sqrt{2}$ $(\because \alpha<\beta)$

따라서 ㉠에서

$-2\sqrt{2}+\sqrt{2}=-k$

$\therefore k=\sqrt{2}$ 답 $\sqrt{2}$

0031 두 점 P, Q는 직선 $y=\frac{3}{2}x+1$ 위의 점이므로

$P\left(\alpha, \frac{3}{2}\alpha+1\right)$, $Q\left(\beta, \frac{3}{2}\beta+1\right)$ $(\alpha<\beta)$이라 하면 α, β는 방정식

$ax^2=\frac{3}{2}x+1$, 즉 $2ax^2-3x-2=0$

의 두 실근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{3}{2a}$, $\alpha\beta=-\frac{1}{a}$ …… ㉠

한편 $\overline{MH}=3$에서 선분 PQ의 중점 M의 x좌표가 3이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=3$ $\therefore \alpha+\beta=6$

㉠에서 $\alpha+\beta=\frac{3}{2a}=6$이므로

$12a=3$ $\therefore a=\frac{1}{4}$

㉠에서 $\alpha\beta=-\frac{1}{a}=-4$이므로

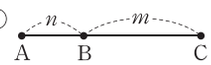
$$\overline{PQ}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\left\{\left(\frac{3}{2}\beta+1\right)-\left(\frac{3}{2}\alpha+1\right)\right\}^2}$$
$$=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\frac{9}{4}(\beta-\alpha)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{13}}{2}\sqrt{(\beta-\alpha)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{13}}{2}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$
$$=\frac{\sqrt{13}}{2}\times\sqrt{6^2-4\times(-4)}$$
$$=\frac{\sqrt{13}}{2}\times 2\sqrt{13}=13$$

답 ③

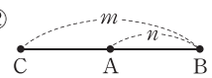
유형 010 등식을 만족시키는 선분의 연장선 위의 점 본책 13쪽

$m\overline{AB}=n\overline{BC}$ $(m>0, n>0)$이면

$\overline{AB}:\overline{BC}=n:m$

① 

➜ 점 B는 $\overline{AC}$를 $n:m$으로 내분한다.

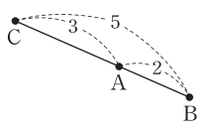
② 

➜ 점 A는 $\overline{CB}$를 $(m-n):n$으로 내분한다. (단, $m>n$)

0032 $5\overline{AB}=2\overline{BC}$에서

$\overline{AB}:\overline{BC}=2:5$

이때 $a<0$에서 세 점 A, B, C의 위치는 오른쪽 그림과 같으므로 점 A는 선분 BC를 $2:3$으로 내분하는 점이다.



따라서 $\frac{2\times a+3\times 4}{2+3}=0$, $\frac{2\times b+3\times(-1)}{2+3}=1$이므로

$2a+12=0$, $2b-3=5$

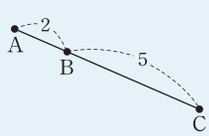
$\therefore a=-6$, $b=4$

$\therefore a+b=-2$

답 -2

만점 공략 노트

세 점 A, B, C의 위치가 오른쪽 그림과 같을 때에도 $\overline{AB}:\overline{BC}=2:5$이지만 $a>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.



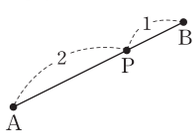
0033 세 점 A, B, P가 한 직선 위에 있으므로 두 삼각형 AOP, BOP의 넓이의 비는 두 선분 AP, BP의 길이의 비와 같다.

$\therefore \overline{AP}:\overline{BP}=2:1$ … ❶

(i) 점 P가 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점인 경우

$\frac{2\times 2+1\times(-2)}{2+1}=a$,

$\frac{2\times(-1)+1\times(-3)}{2+1}=b$이므로

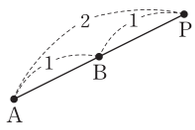


$a=\frac{2}{3}$, $b=-\frac{5}{3}$

$\therefore a-b=\frac{7}{3}$ … ❷

(ii) 점 B가 선분 AP의 중점인 경우

$\frac{-2+a}{2}=2$, $\frac{-3+b}{2}=-1$이므로



$a=6$, $b=1$

$\therefore a-b=5$ … ❸

(i), (ii)에서 $a-b$의 최댓값은 5이다. … ❹

답 5

단계	채점 요소	비율
❶	$\overline{AP}:\overline{BP}$ 구하기	10 %
❷	점 P가 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점일 때 $a-b$의 값 구하기	40 %
❸	점 B가 선분 AP의 중점일 때 $a-b$의 값 구하기	40 %
❹	$a-b$의 최댓값 구하기	10 %

0034 직선 BC와 DE가 평행하고 두 직선 AB, AC가 점 A에서 만나므로

$\triangle ABC\backsim\triangle ADE$ (AA 닮음)

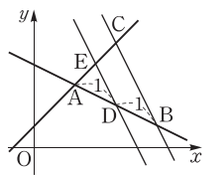
이때 삼각형 ABC와 ADE의 넓이의 비가 $4:1$이므로

$\overline{AB}:\overline{AD}=2:1$

D(a, b)라 하면

(i) 점 D가 선분 AB의 중점인 경우

$\frac{2+7}{2}=a$, $\frac{3+1}{2}=b$이므로



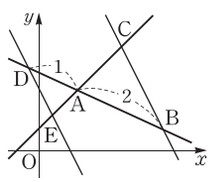
$a=\frac{9}{2}$, $b=2$

$\therefore$ D$\left(\frac{9}{2}, 2\right)$

(ii) 점 A가 선분 BD를 $2:1$로 내분하는 점인 경우

$\frac{2\times a+1\times 7}{2+1}=2$, $\frac{2\times b+1\times 1}{2+1}=3$

이므로



$a=-\frac{1}{2}$, $b=4$

$\therefore$ D$\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$

(i), (ii)에서 모든 점 D의 y좌표의 곱은

$2\times 4=8$

답 ①

유형 011 평행사변형에서 중점의 활용 본책 13쪽

(1) 평행사변형 ➜ 두 대각선의 중점이 일치한다.

(2) 마름모 ➜ 두 대각선의 중점이 일치하고 이웃하는 두 변의 길이가 같다.

0035 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로

$\frac{1-2}{2}=\frac{a+b}{2}$, $\frac{-ab}{2}=\frac{4+2}{2}$

$\therefore a+b=-1$, $ab=-6$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(-1)^2-2\times(-6)=13$

답 ④

0036 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치한다.

대각선 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+4}{2}, \frac{a+c}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{3}{2}, \frac{a+c}{2}\right)$

이 점이 곡선 $y=x^2$ 위에 있으므로

$\frac{a+c}{2}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$ $\therefore a+c=\frac{9}{2}$

또 대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{b}{2}, \frac{2+d}{2}\right)$이고 이 점은 대각선 AC의 중점 $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$와 일치하므로

$\frac{b}{2}=\frac{3}{2}, \frac{2+d}{2}=\frac{9}{4}$ $\therefore b=3, d=\frac{5}{2}$

$\therefore a+b+c+d=10$ 답 ①

0037 마름모 ABCD의 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로

$\frac{a+7}{2}=\frac{4+b}{2}$ $\therefore b=a+3$ …… ㉠

또 $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로

$\sqrt{(6-3)^2+(4-a)^2}=\sqrt{(8-6)^2+(7-4)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $a^2-8a+12=0$

$(a-2)(a-6)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=6$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=2, b=5$ 또는 $a=6, b=9$

$\therefore ab=10$ 또는 $ab=54$

따라서 ab의 최댓값은 54이다. 답 54

유형 012 삼각형의 무게중심 → 본책 14쪽

세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

0038 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{4+8-a}{3}, \frac{a-1+7}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{12-a}{3}, \frac{a+6}{3}\right)$

직선 $y=x$가 이 점을 지나므로

$\frac{a+6}{3}=\frac{12-a}{3}$, $2a=6$ $\therefore a=3$ 답 3

0039 $\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(a-2)^2+(b+1)^2=a^2+(b-3)^2$

$\therefore a=2b-1$ …… ㉠ … ❶

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{2+0+a}{3}, \frac{-1+3+b}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{a+2}{3}, \frac{b+2}{3}\right)$

이 점이 x축 위에 있으므로 $\frac{b+2}{3}=0$ $\therefore b=-2$

$b=-2$를 ㉠에 대입하면 $a=-5$ … ❷

$\therefore ab=10$ … ❸

답 10

단계	채점 요소	비율
❶	$\overline{AC}=\overline{BC}$임을 이용하여 a, b에 대한 식 세우기	30 %
❷	a, b의 값 구하기	60 %
❸	ab의 값 구하기	10 %

0040 삼각형 PQR의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치하므로 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-4+2+8}{3}, \frac{5-6+4}{3}\right)$, 즉 $(2, 1)$

따라서 $a=2$, $b=1$이므로 $a-b=1$ 답 ④

다른 풀이 점 P의 좌표는

$\left(\frac{3\times2+2\times(-4)}{3+2}, \frac{3\times(-6)+2\times5}{3+2}\right)$, 즉 $\left(-\frac{2}{5}, -\frac{8}{5}\right)$

점 Q의 좌표는

$\left(\frac{3\times8+2\times2}{3+2}, \frac{3\times4+2\times(-6)}{3+2}\right)$, 즉 $\left(\frac{28}{5}, 0\right)$

점 R의 좌표는

$\left(\frac{3\times(-4)+2\times8}{3+2}, \frac{3\times5+2\times4}{3+2}\right)$, 즉 $\left(\frac{4}{5}, \frac{23}{5}\right)$

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-\frac{2}{5}+\frac{28}{5}+\frac{4}{5}}{3}, \frac{-\frac{8}{5}+0+\frac{23}{5}}{3}\right)$, 즉 $(2, 1)$

0041 두 점 A, B는 직선 $y=3x+6$ 위의 점이므로

$A(\alpha, 3\alpha+6)$, $B(\beta, 3\beta+6)$이라 하자.

이때 α, β는 방정식

$x^2-6x+2=3x+6$, 즉 $x^2-9x-4=0$

의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=9$ …… ㉠

삼각형 OAB의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{0+\alpha+\beta}{3}, \frac{0+3\alpha+6+3\beta+6}{3}\right)$,

즉 $\left(\frac{\alpha+\beta}{3}, \alpha+\beta+4\right)$

이므로 ㉠을 대입하면 $(3, 13)$

따라서 $a=3$, $b=13$이므로 $a+b=16$ 답 16

0042 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이라 하면

선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times x_2+3\times x_1}{1+3}, \frac{1\times y_2+3\times y_1}{1+3}\right)$, 즉 $\left(\frac{3x_1+x_2}{4}, \frac{3y_1+y_2}{4}\right)$

이 점이 점 $(2, 1)$과 일치하므로

$\frac{3x_1+x_2}{4}=2$에서 $3x_1+x_2=8$ …… ㉠

$\frac{3y_1+y_2}{4}=1$에서 $3y_1+y_2=4$ …… ㉡

선분 BC를 2 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times x_3+3\times x_2}{2+3}, \frac{2\times y_3+3\times y_2}{2+3}\right)$,

즉 $\left(\frac{3x_2+2x_3}{5}, \frac{3y_2+2y_3}{5}\right)$

이 점이 점 $(-4, -1)$과 일치하므로

$\frac{3x_2+2x_3}{5}=-4$에서 $3x_2+2x_3=-20$ …… ㉣

$\frac{3y_2+2y_3}{5}=-1$에서 $3y_2+2y_3=-5$ …… ㉤

선분 CA를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times x_1+2\times x_3}{1+2}, \frac{1\times y_1+2\times y_3}{1+2}\right)$,

즉 $\left(\frac{x_1+2x_3}{3}, \frac{y_1+2y_3}{3}\right)$

이 점이 점 $(0, -5)$와 일치하므로

$\frac{x_1+2x_3}{3}=0$에서 $x_1+2x_3=0$ …… ㉥

$\frac{y_1+2y_3}{3}=-5$에서 $y_1+2y_3=-15$ …… ㉦

㉠+㉣+㉥을 하면

$(3x_1+x_2)+(3x_2+2x_3)+(x_1+2x_3)=-12$

$4(x_1+x_2+x_3)=-12$ $\therefore x_1+x_2+x_3=-3$

㉡+㉤+㉦을 하면

$(3y_1+y_2)+(3y_2+2y_3)+(y_1+2y_3)=-16$

$4(y_1+y_2+y_3)=-16$ $\therefore y_1+y_2+y_3=-4$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$, 즉 $\left(-1, -\frac{4}{3}\right)$

답 $\left(-1, -\frac{4}{3}\right)$

0043 점 P는 직선 $y=\frac{1}{2}x+2$ 위의 점이므로 $P(2k, k+2)$라 하면 삼각형 ABP의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{4+0+2k}{3}, \frac{0-2+k+2}{3}\right)$,

즉 $\left(\frac{2k+4}{3}, \frac{k}{3}\right)$ …… ㉠

$\therefore \overline{OG}=\sqrt{\left(\frac{2k+4}{3}\right)^2+\left(\frac{k}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}(5k^2+16k+16)}$

$=\sqrt{\frac{5}{9}\left(k+\frac{8}{5}\right)^2+\frac{16}{45}}$

즉 $k=-\frac{8}{5}$일 때 선분 OG의 길이가 최소가 되므로 이때의 점 G의 좌표는 ㉠에서 $\left(\frac{4}{15}, -\frac{8}{15}\right)$

따라서 $a=\frac{4}{15}$, $b=-\frac{8}{15}$이므로

$3a-b=3\times\frac{4}{15}-\left(-\frac{8}{15}\right)=\frac{4}{3}$

답 $\frac{4}{3}$

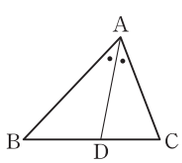
유형 013 삼각형의 내각의 이등분선의 성질 본책 15쪽

삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선이 $\overline{BC}$와 만나는 점을 D라 하면

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

$=\triangle ABD:\triangle ACD$

➜ 점 D는 $\overline{BC}$를 $\overline{AB}:\overline{AC}$로 내분하는 점이다.



0044 선분 AD는 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$

$\overline{AB}=\sqrt{(4+2)^2+2^2}=2\sqrt{10}$,

$\overline{AC}=\sqrt{(-3+2)^2+(1+2)^2}=\sqrt{10}$

이므로 $\overline{BD}:\overline{CD}=2\sqrt{10}:\sqrt{10}=2:1$

즉 점 D는 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$\left(\frac{2\times(-3)+1\times4}{2+1}, \frac{2\times1+1\times0}{2+1}\right)$, 즉 $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

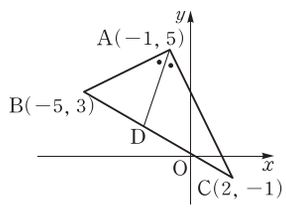
따라서 삼각형 OBD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

답 ④

0045 선분 AD는 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$ … ❶



$\overline{AB}=\sqrt{(-5+1)^2+(3-5)^2}$

$=2\sqrt{5}$,

$\overline{AC}=\sqrt{(2+1)^2+(-1-5)^2}=3\sqrt{5}$

이므로 $\overline{BD}:\overline{CD}=2\sqrt{5}:3\sqrt{5}=2:3$ … ❷

$\therefore \triangle ABD:\triangle ACD=\overline{BD}:\overline{CD}=2:3$ … ❸

따라서 $m=2$, $n=3$이므로 $m+n=5$ … ❹

답 5

단계	채점 요소	비율
❶	$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$임을 알기	20 %
❷	$\overline{BD}:\overline{CD}$ 구하기	50 %
❸	$\triangle ABD:\triangle ACD$ 구하기	20 %
❹	$m+n$의 값 구하기	10 %

0046 $\angle ABC$의 이등분선이 선분 AC의 중점을 지나므로 $\triangle ABC$는 $\overline{BA}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다.

$\overline{BA}=\sqrt{4^2+a^2}=\sqrt{16+a^2}$, $\overline{BC}=|2-(-4)|=6$이므로

$\sqrt{16+a^2}=6$

양변을 제곱하면 $16+a^2=36$, $a^2=20$

$\therefore a=2\sqrt{5}$ ($\because a>0$)

답 ③

유형 014 자취의 방정식 본책 15쪽

조건을 만족시키는 점의 좌표를 (x, y)로 놓고 두 점 사이의 거리 또는 내분점의 좌표 또는 무게중심의 좌표를 이용하여 x와 y 사이의 관계식을 세운다.

0047 $P(x, y)$라 하면 $\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=-1$이므로

$(x+2)^2+y^2-\{(x-4)^2+(y+1)^2\}=-1$

$x^2+4x+y^2+4-(x^2-8x+y^2+2y+17)=-1$

$12x-2y-12=0$

$\therefore y=6x-6$

따라서 $m=6$, $n=-6$이므로

$m-n=12$

답 ⑤

0048 P(a, b)라 하고, 삼각형 PAB의 무게중심 G의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\dfrac{a+1+2}{3}$, $y=\dfrac{b+2+1}{3}$

$\therefore a=3x-3$, $b=3y-3$ …… ㉠

이때 점 P는 직선 $y=-x+6$ 위의 점이므로

$b=-a+6$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $3y-3=-(3x-3)+6$

$3x+3y-12=0$ $\therefore x+y-4=0$ 답 ③

0049 A(a, b)라 하고, 선분 AB를 4 : 3으로 내분하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\dfrac{4\times0+3\times a}{4+3}$, $y=\dfrac{4\times(-5)+3\times b}{4+3}$

$\therefore a=\dfrac{7}{3}x$, $b=\dfrac{7y+20}{3}$ …… ㉠

이때 점 A는 직선 $x-y+2=0$ 위의 점이므로

$a-b+2=0$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\dfrac{7}{3}x-\dfrac{7y+20}{3}+2=0$

$\therefore x-y-2=0$

따라서 $p=-1$, $q=-2$이므로

$p^2+q^2=(-1)^2+(-2)^2=5$ 답 5

1등급 유형 도전하기

→ 본책 16~17쪽

0050 Step 1 세 점 A, B, C의 좌표를 이용하여 l을 주어진 식의 꼴로 나타낸다.

(1) $l=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2$
$+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2$

$=3x^2-2(x_1+x_2+x_3)x+x_1^2+x_2^2+x_3^2$
$+3y^2-2(y_1+y_2+y_3)y+y_1^2+y_2^2+y_3^2$

$=3\left(x-\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+3\left(y-\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2$
$+x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2$
$-\dfrac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3}-\dfrac{(y_1+y_2+y_3)^2}{3}$

$=3\left(x-\boxed{\text{(가) }\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}}\right)^2+3\left(y-\boxed{\text{(나) }\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}}\right)^2+k$

Step 2 l의 값이 최소일 때의 점 P의 좌표를 구하고, 삼각형 ABC에서 점 P의 위치를 생각해 본다.

$x=\boxed{\text{(가) }\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}}$, $y=\boxed{\text{(나) }\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}}$일 때, 즉 점 P의 좌표가 $\left(\boxed{\text{(가) }\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}}, \boxed{\text{(나) }\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}}\right)$일 때 l의 값이 최소이고, 이때의 점 P는 삼각형 ABC의 $\boxed{\text{(다) 무게중심}}$이다.

Step 3 조건을 만족시키는 점 P의 좌표를 구한 후 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값을 구한다.

(2) $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이므로 그 좌표는

$\left(\dfrac{0+5-5}{3}, \dfrac{9+4-1}{3}\right)$, 즉 $(0, 4)$

$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$
$=(9-4)^2+5^2+(-5)^2+(-1-4)^2=100$

답 (1) (가) $\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$ (나) $\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$ (다) 무게중심

(2) P$(0, 4)$, 100

0051 Step 1 $\overline{AC}^2$, $\overline{BC}^2$을 n에 대한 식으로 나타내고, 삼각형 ABC가 둔각삼각형이 되도록 하는 n의 값의 범위를 구한다.

삼각형 ABC가 둔각삼각형이 되려면 $\angle C$가 둔각이어야 하므로

$\overline{AB}^2>\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$

이어야 한다.

$\overline{AB}^2=(-4n)^2=16n^2$,

$\overline{AC}^2=(1-2n)^2+(n+3)^2=5n^2+2n+10$,

$\overline{BC}^2=(1+2n)^2+(n+3)^2=5n^2+10n+10$

이므로

$16n^2>\boxed{\text{(가) }10n^2+12n+20}$, $3n^2-6n-10>0$

$\therefore n>1+\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{(나) }39}}}{3}$ ($\because n>0$) …… ㉠

Step 2 자연수 n의 최솟값을 구한다.

이때 $2<\dfrac{\sqrt{39}}{3}<3$에서 $3<1+\dfrac{\sqrt{39}}{3}<4$이므로 ㉠을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 $\boxed{\text{(다) }4}$이다.

Step 3 $f\left(\dfrac{p}{13}\right)+f\left(\dfrac{q}{2}\right)$의 값을 구한다.

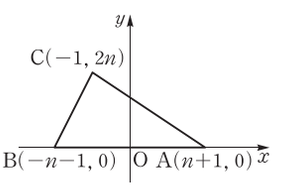
$f(n)=10n^2+12n+20$, $p=39$, $q=4$이므로

$f\left(\dfrac{p}{13}\right)+f\left(\dfrac{q}{2}\right)=f(3)+f(2)=146+84=230$ 답 230

논리 Check

세 점 A$(n+1, 0)$, B$(-n-1, 0)$, C$(-1, 2n)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 이 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 양수 n의 값의 범위를 구하시오.

풀이 오른쪽 그림에서 삼각형 ABC가 둔각삼각형이려면 $\angle C$가 둔각이어야 하므로



$\overline{AB}^2>\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$

이어야 한다.

$\overline{AB}^2=(-2n-2)^2=4n^2+8n+4$,

$\overline{AC}^2=(-n-2)^2+(2n)^2=5n^2+4n+4$,

$\overline{BC}^2=n^2+(2n)^2=5n^2$

이므로 $4n^2+8n+4>10n^2+4n+4$

$3n^2-2n<0$, $n(3n-2)<0$

$\therefore 0<n<\dfrac{2}{3}$ 답 $0<n<\dfrac{2}{3}$

0052 Step 1 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표와 선분 AC를 $n:m$으로 내분하는 점의 좌표를 이용하여 a, b에 대한 식을 구한다.

선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{m\times(-2)+n\times a}{m+n},\ \frac{m\times 2+n\times b}{m+n}\right)$,

즉 $\left(\frac{-2m+an}{m+n},\ \frac{2m+bn}{m+n}\right)$

이 점이 y축 위에 있으므로 $\frac{-2m+an}{m+n}=0$

$2m=an$ $\therefore \frac{n}{m}=\frac{2}{a}$ …… ㉠

선분 AC를 $n:m$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{n\times 1+m\times a}{n+m},\ \frac{n\times(-2)+m\times b}{n+m}\right)$,

즉 $\left(\frac{am+n}{m+n},\ \frac{bm-2n}{m+n}\right)$

이 점이 x축 위에 있으므로 $\frac{bm-2n}{m+n}=0$

$bm=2n$ $\therefore \frac{n}{m}=\frac{b}{2}$ …… ㉡

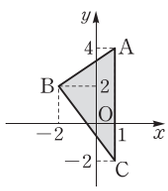
㉠, ㉡에서 $\frac{2}{a}=\frac{b}{2}$ $\therefore ab=4$

Step 2 자연수 a, b의 순서쌍을 구하고, 각 경우에 삼각형 ABC의 넓이를 구한다.

(i) $a=1$, $b=4$일 때

A(1, 4)이므로 삼각형 ABC의 넓이는

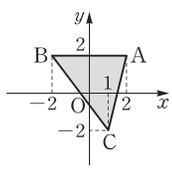
$\frac{1}{2}\times 6\times 3=9$



(ii) $a=2$, $b=2$일 때

A(2, 2)이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$



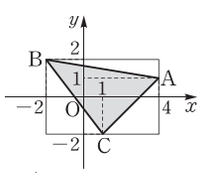
(iii) $a=4$, $b=1$일 때

A(4, 1)이므로 삼각형 ABC의 넓이는

6×4

$-\left(\frac{1}{2}\times 3\times 4+\frac{1}{2}\times 3\times 3+\frac{1}{2}\times 6\times 1\right)$

$=\frac{21}{2}$



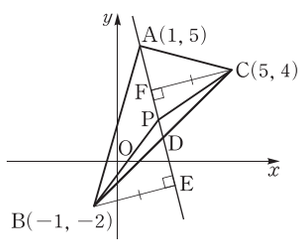
Step 3 모든 S의 값의 합을 구한다.

이상에서 모든 S의 값의 합은 $9+8+\frac{21}{2}=\frac{55}{2}$ 답 $\frac{55}{2}$

0053 Step 1 조건 (가)를 이용하여 직선 AP와 선분 BC가 만나는 점의 좌표를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 직선 AP가 선분 BC와 만나는 점을 D라 하고, 두 점 B, C에서 직선 AP에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하면 조건 (가)에 의하여

$\overline{BE}=\overline{CF}$



따라서 △BED≡△CFD (ASA 합동)이므로

$\overline{BD}=\overline{CD}$

즉 점 D는 선분 BC의 중점이므로 그 좌표는

$\left(\frac{-1+5}{2},\ \frac{-2+4}{2}\right)$, 즉 (2, 1)

Step 2 조건 (나)를 이용하여 $\overline{AP}:\overline{PD}$를 구한다.

△BCP=S라 하면

$\triangle ABP=2S$, $\triangle BDP=\frac{1}{2}\triangle BCP=\frac{1}{2}S$

이므로

$\triangle ABP:\triangle BDP=2S:\frac{1}{2}S=4:1$

$\therefore \overline{AP}:\overline{PD}=4:1$

Step 3 $\overline{AP}:\overline{PD}$를 이용하여 $a+b$의 값을 구한다.

점 P는 선분 AD를 4 : 1로 내분하는 점이므로 그 좌표는

$\left(\frac{4\times 2+1\times 1}{4+1},\ \frac{4\times 1+1\times 5}{4+1}\right)$, 즉 $\left(\frac{9}{5},\ \frac{9}{5}\right)$

따라서 $a=\frac{9}{5}$, $b=\frac{9}{5}$이므로

$a+b=\frac{18}{5}$ 답 $\frac{18}{5}$

0054 Step 1 주어진 조건을 이용하여 두 점 A, C의 좌표를 구한다.

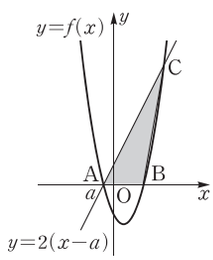
점 C는 직선 $y=2(x-a)$ 위의 점이므로

C$(b, 2(b-a))$라 하면 선분 AC를

1 : 5로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times b+5\times a}{1+5},\ \frac{1\times 2(b-a)+5\times 0}{1+5}\right)$,

즉 $\left(\frac{5a+b}{6},\ \frac{2(b-a)}{6}\right)$



이 점이 y축 위에 있으므로

$\frac{5a+b}{6}=0$

$\therefore 5a+b=0$ …… ㉠

$\overline{AC}=6\sqrt{5}$에서 $\overline{AC}^2=180$이므로

$(b-a)^2+\{2(b-a)\}^2=180$

$(b-a)^2=36$

$\therefore b-a=6$ ($\because a<b$) …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=5$

$\therefore$ A$(-1, 0)$, C$(5, 12)$

Step 2 $f(x)$를 구한 후 점 B의 좌표를 구한다.

두 점 A, C의 x좌표가 각각 -1, 5이므로 이차방정식 $f(x)=2(x+1)$, 즉 $f(x)-2(x+1)=0$의 두 실근이 -1, 5이다.

$f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)-2(x+1)=(x+1)(x-5)$

$\therefore f(x)=(x+1)(x-5)+2(x+1)$

$=(x+1)(x-3)$

이때 $f(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$이므로 점 B의 좌표는 (3, 0)이다.

Step 3 삼각형 ABC의 넓이를 구한다.

따라서 A(−1, 0), B(3, 0), C(5, 12)이므로

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\{3-(-1)\}\times 12=24$$ 답 24

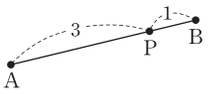
0055 Step 1 점 P가 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점일 때, $a+b$의 값을 구한다.

조건 (가)에서 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:1$

(i) 점 P가 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점인 경우

점 P의 좌표는

$$\left(\frac{3\times 3+1\times(-1)}{3+1},\ \frac{3\times 2+1\times 1}{3+1}\right),$$



즉 $\left(2,\ \frac{7}{4}\right)$

이때 조건 (나)에서 평행사변형 OAPQ의 두 대각선 OP와 AQ의 중점이 일치하므로

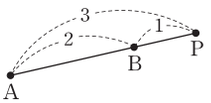
$$\frac{0+2}{2}=\frac{-1+a}{2},\ \frac{0+\frac{7}{4}}{2}=\frac{1+b}{2}$$

$$\therefore a=3,\ b=\frac{3}{4}\qquad \therefore a+b=\frac{15}{4}$$

Step 2 점 B가 선분 AP를 2 : 1로 내분하는 점일 때, $a+b$의 값을 구한다.

(ii) 점 B가 선분 AP를 2 : 1로 내분하는 점인 경우

P(p, q)라 하면



$$\frac{2\times p+1\times(-1)}{2+1}=3,$$

$$\frac{2\times q+1\times 1}{2+1}=2$$이므로

$$p=5,\ q=\frac{5}{2}\qquad \therefore \mathrm{P}\left(5,\ \frac{5}{2}\right)$$

이때 조건 (나)에서 평행사변형 OAPQ의 두 대각선 OP와 AQ의 중점이 일치하므로

$$\frac{0+5}{2}=\frac{-1+a}{2},\ \frac{0+\frac{5}{2}}{2}=\frac{1+b}{2}$$

$$\therefore a=6,\ b=\frac{3}{2}\qquad \therefore a+b=\frac{15}{2}$$

Step 3 $M-m$의 값을 구한다.

(i), (ii)에서 $M=\frac{15}{2}$, $m=\frac{15}{4}$이므로

$$M-m=\frac{15}{4}$$ 답 $\frac{15}{4}$

0056 Step 1 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 이용하여 a의 값과 b, c에 대한 식을 구한다.

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $\left(\frac{11}{3},\ 4\right)$이므로

$$\frac{a+6+0}{3}=\frac{11}{3},\ \frac{b+1+c}{3}=4$$

$$\therefore a=5,\ c=11-b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

Step 2 $\overline{AB}=\overline{AC}$임을 이용하여 b, c의 값을 구한다.

A(5, b), C(0, $11-b$)이고 $\overline{AB}=\overline{AC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$이므로

$$(6-5)^2+(1-b)^2=(-5)^2+(11-2b)^2$$

$$b^2-2b+2=4b^2-44b+146$$

$$b^2-14b+48=0,\qquad (b-6)(b-8)=0$$

$$\therefore b=6 \text{ 또는 } b=8$$

이때 $b=6$이면 ㉠에서 $a=c=5$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$$\therefore b=8,\ c=3$$

Step 3 삼각형 ABC의 넓이를 이용하여 내접원의 반지름의 길이를 구한 후 $(2r+\sqrt{10})^2$의 값을 구한다.

A(5, 8), C(0, 3)이므로

$$\overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{(-5)^2+(3-8)^2}=5\sqrt{2}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(-6)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{10}$$

한편 이등변삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 밑변 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\overline{BM}=\overline{CM}$이므로 점 M의 좌표는

$$\left(\frac{6+0}{2},\ \frac{1+3}{2}\right),\ \text{즉 } (3,\ 2)$$

$$\therefore \overline{AM}=\sqrt{(3-5)^2+(2-8)^2}=2\sqrt{10}$$

△ABC의 넓이에서

$$\frac{1}{2}\times r\times(5\sqrt{2}+2\sqrt{10}+5\sqrt{2})=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{10}\times 2\sqrt{10}$$

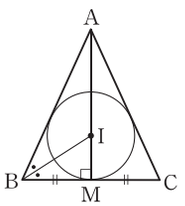
$$(5\sqrt{2}+\sqrt{10})r=20$$

$$\therefore r=\frac{20}{5\sqrt{2}+\sqrt{10}}=\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$$

$$\therefore (2r+\sqrt{10})^2=(5\sqrt{2})^2=50$$ 답 50

다른 풀이 이등변삼각형 ABC의 내접원과 선분 BC는 점 M에서 접한다.

이때 내접원의 중심을 I라 하면 선분 BI는 ∠ABM의 이등분선이므로



$\overline{BA}:\overline{BM}=\overline{AI}:\overline{MI}$에서

$$5\sqrt{2}:\sqrt{10}=(2\sqrt{10}-r):r$$

$$5\sqrt{2}r=20-\sqrt{10}r,\qquad (5\sqrt{2}+\sqrt{10})r=20$$

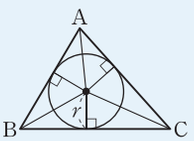
$$\therefore r=\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$$

만점 공략 노트

삼각형의 넓이와 내접원의 반지름의 길이

△ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}r(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$$



시험 만점 완성하기

→ 본책 18~21쪽

0057 전략 삼각형 ABC가 직각삼각형임을 이용하여 빗변의 길이를 구한다.

삼각형 ABC는 변 BC를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

M(−1, 4)라 하면

$$\overline{AM}=\sqrt{(-1-1)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{2}$$

이때 삼각형의 외심에서 각 꼭짓점에 이르는 거리는 같으므로

$$\overline{BM}=\overline{AM}=2\sqrt{2}$$

$\therefore \overline{BC}=2\overline{BM}=4\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2=32$ 답 ⑤

0058 전략 주어진 규칙에 따라 $L(A)$, $L(B)$를 구한다.

ㄱ. $L(A)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$L(B)=\sqrt{(-x_2+x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$\therefore L(A)=L(B)$ (참)

ㄴ. $-A=\begin{pmatrix}-x_1 & -x_2\\ -y_1 & -y_2\end{pmatrix}$이므로

$L(-A)=\sqrt{(-x_2+x_1)^2+(-y_2+y_1)^2}$

$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=L(A)$ (거짓)

ㄷ. $A+B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2y_1 & 2y_2\end{pmatrix}$이므로

$L(A+B)=|2y_2-2y_1|=2|y_2-y_1|$

$A-B=\begin{pmatrix}2x_1 & 2x_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$이므로

$L(A-B)=|2x_2-2x_1|=2|x_2-x_1|$

이때 $2|x_2-x_1|+2|y_2-y_1|\geq 2\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$이므로 $L(A+B)+L(A-B)\geq 2L(A)$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

0059 전략 $P(0, a)$라 하고 $\overline{AP}=\overline{BP}$임을 이용한다.

$P(0, a)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$3^2+(a-1)^2=(-1)^2+(a+5)^2$

$a^2-2a+10=a^2+10a+26,\quad -12a=16$

$\therefore a=-\frac{4}{3}$

따라서 $P\left(0, -\frac{4}{3}\right)$이므로 $\overline{OP}=\frac{4}{3}$ 답 ②

0060 전략 주어진 식을 변형하여 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리로 나타내어 본다.

$\sqrt{x^2+y^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

$\sqrt{x^2+y^2+2x-8y+17}=\sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2}$

이때 $A(x, y)$, $B(2, 0)$, $C(-1, 4)$라 하면

$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\overline{AB}$, $\sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2}=\overline{AC}$

$\therefore$ (주어진 식)$=\overline{AB}+\overline{AC}$

$\geq\overline{BC}$

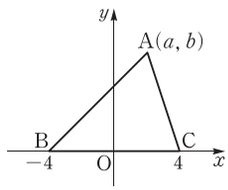
$=\sqrt{(-1-2)^2+4^2}=5$

따라서 구하는 최솟값은 5이다. 답 ⑤

0061 전략 세 점 A, B, C의 위치를 좌표평면에 나타내어 본다.

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, 선분 BC의 중점을 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면

$B(-4, 0)$, $C(4, 0)$



$A(a, b)$라 하면 삼각형 ABC의 넓이가 24이므로

$\frac{1}{2}\times 8\times|b|=24\quad\therefore |b|=6$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=(-4-a)^2+6^2+(4-a)^2+6^2$

$=2a^2+104$

따라서 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$은 $a=0$일 때 최솟값 104를 갖는다.

답 ⑤

0062 전략 점 P의 y좌표가 0임을 이용하여 t의 값을 먼저 구한다.

선분 AB를 $t:(1-t)$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{t\times 6+(1-t)\times(-2)}{t+(1-t)}, \frac{t\times 1+(1-t)\times(-3)}{t+(1-t)}\right)$,

즉 $(8t-2, 4t-3)$

이 점이 x축 위에 있으므로

$4t-3=0\quad\therefore t=\frac{3}{4}$

$\therefore P(4, 0)$

이때 $(2-t):t=\left(2-\frac{3}{4}\right):\frac{3}{4}=5:3$이므로 선분 OP를 5 : 3으로 내분하는 점의 x좌표는

$\frac{5\times 4+3\times 0}{5+3}=\frac{5}{2}$ 답 ④

0063 전략 평행선 사이의 선분의 길이의 비를 이용하여 선분 BC와 선분 PC의 길이의 비를 구한다.

$\overline{AP}/\!/\overline{DC}$이므로 $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{PB}:\overline{PC}$

$\overline{AB}=\sqrt{6^2+(-4+1)^2}=3\sqrt{5}$,

$\overline{AD}=\overline{AC}=\sqrt{1^2+(1+1)^2}=\sqrt{5}$이므로

$\overline{PB}:\overline{PC}=3\sqrt{5}:\sqrt{5}=3:1$

따라서 점 C는 선분 BP를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\frac{2\times a+1\times 6}{2+1}=1$, $\frac{2\times b+1\times(-4)}{2+1}=1$

$2a+6=3$, $2b-4=3$

$\therefore a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{7}{2}$

$\therefore a-b=-5$ 답 ③

0064 전략 두 그래프의 식을 연립한 방정식의 실근이 교점의 x좌표임을 이용한다.

이차함수 $y=x^2-2x$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 만나는 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 α, β는 방정식

$x^2-2x=-x+k$, 즉 $x^2-x-k=0$

의 두 실근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$ …… ㉠

$\alpha\beta=-k$ …… ㉡

한편 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점의 x좌표가 $\frac{3}{2}$이므로

$\frac{3\times\beta+\alpha}{3+1}=\frac{3}{2}\quad\therefore \alpha+3\beta=6$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $\alpha=-\frac{3}{2}$, $\beta=\frac{5}{2}$

따라서 ㉡에서 $-\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}=-k$ $\therefore k=\frac{15}{4}$ 답 ②

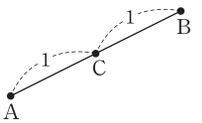
0065 전략 먼저 주어진 조건에서 $\overline{AC}$와 $\overline{BC}$의 길이 사이의 관계를 구한다.

$3\overline{AC}^2-5\overline{AC}\times\overline{BC}+2\overline{BC}^2=0$에서

$(\overline{AC}-\overline{BC})(3\overline{AC}-2\overline{BC})=0$

$\therefore \overline{AC}=\overline{BC}$ 또는 $3\overline{AC}=2\overline{BC}$

(i) $\overline{AC}=\overline{BC}$, 즉 점 C가 선분 AB의 중점인 경우



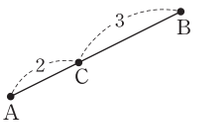
점 C의 좌표는

$\left(\frac{-3+3}{2}, \frac{-2+1}{2}\right)$,

즉 $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

$\therefore \overline{OC}=\frac{1}{2}$ $\therefore l=\frac{1}{2}$

(ii) $3\overline{AC}=2\overline{BC}$, 즉 $\overline{AC}:\overline{BC}=2:3$에서 점 C가 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점인 경우



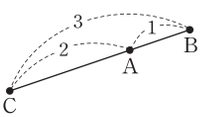
점 C의 좌표는

$\left(\frac{2\times3+3\times(-3)}{2+3}, \frac{2\times1+3\times(-2)}{2+3}\right)$,

즉 $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

$\therefore \overline{OC}=\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=1$ $\therefore l=1$

(iii) $3\overline{AC}=2\overline{BC}$, 즉 $\overline{AC}:\overline{BC}=2:3$에서 점 A가 선분 CB를 2 : 1로 내분하는 점인 경우



C(a, b)라 하면

$\frac{2\times3+1\times a}{2+1}=-3$, $\frac{2\times1+1\times b}{2+1}=-2$

이므로 $a=-15$, $b=-8$

따라서 C$(-15, -8)$이므로

$\overline{OC}=\sqrt{(-15)^2+(-8)^2}=17$ $\therefore l=17$

이상에서 모든 l의 값의 합은 $\frac{1}{2}+1+17=\frac{37}{2}$ 답 ③

0066 전략 평행사변형의 두 대각선의 교점이 각 대각선의 중점임을 이용한다.

평행사변형의 두 대각선의 교점은 두 선분 AC, BD의 중점이다.

C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)라 하면

선분 AC의 중점의 좌표가 $(5, 2)$이므로

$\frac{1+x_1}{2}=5$, $\frac{-5+y_1}{2}=2$

$\therefore x_1=9$, $y_1=9$ $\therefore$ C$(9, 9)$

선분 BD의 중점의 좌표가 $(5, 2)$이므로

$\frac{4+x_2}{2}=5$, $\frac{0+y_2}{2}=2$

$\therefore x_2=6$, $y_2=4$ $\therefore$ D$(6, 4)$

따라서 $a=15$, $b=13$이므로 $a-b=2$ 답 ①

0067 전략 먼저 점 C의 좌표를 구한 후 삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계를 알아본다.

C(a, b)라 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-2+0+a}{3}, \frac{3-1+b}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{a-2}{3}, \frac{b+2}{3}\right)$

이 점이 점 $(1, 2)$와 일치하므로

$\frac{a-2}{3}=1$, $\frac{b+2}{3}=2$ $\therefore a=5$, $b=4$

$\therefore$ C$(5, 4)$

$\overline{AB}^2=2^2+(-1-3)^2=20$, $\overline{BC}^2=5^2+(4+1)^2=50$,

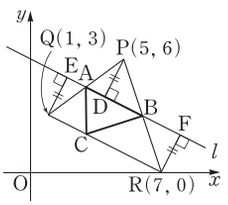
$\overline{CA}^2=(-2-5)^2+(3-4)^2=50$

이므로 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$ $\therefore \overline{BC}=\overline{CA}$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AC}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다. 답 ④

0068 전략 직선 l이 두 선분 PQ, PR의 중점을 지남을 이용하여 두 점 A, B의 좌표를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 세 점 P, Q, R에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하면



△ADP≡△AEQ (ASA 합동),

△BDP≡△BFR (ASA 합동)

점 A는 선분 PQ의 중점이므로 그 좌표는

$\left(\frac{5+1}{2}, \frac{6+3}{2}\right)$, 즉 $\left(3, \frac{9}{2}\right)$

점 B는 선분 PR의 중점이므로 그 좌표는

$\left(\frac{5+7}{2}, \frac{6+0}{2}\right)$, 즉 $(6, 3)$

또 선분 QR를 1 : 2로 내분하는 점 C의 좌표는

$\left(\frac{1\times7+2\times1}{1+2}, \frac{1\times0+2\times3}{1+2}\right)$, 즉 $(3, 2)$

이때 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (a, b)이므로

$a=\frac{3+6+3}{3}=4$, $b=\frac{\frac{9}{2}+3+2}{3}=\frac{19}{6}$

$\therefore a-b=\frac{5}{6}$ 답 ①

0069 전략 먼저 정삼각형 ABC의 넓이를 이용하여 한 변의 길이를 구한다.

정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a $(a>0)$라 하면 넓이가 $9\sqrt{3}$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=9\sqrt{3}$, $a^2=36$ $\therefore a=6$ ($\because a>0$)

$\overline{BC}$의 중점을 D라 하면 중선 AD는 정삼각형의 높이이므로

$\overline{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times6=3\sqrt{3}$

삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면

$\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AD}=\frac{2}{3}\times3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

즉 $\overline{AG}^2=12$이므로 $(5-2)^2+(-1-k)^2=12$

$(k+1)^2=3$, $k+1=\pm\sqrt{3}$ $\therefore k=-1\pm\sqrt{3}$

따라서 모든 k의 값의 곱은

$(-1-\sqrt{3})\times(-1+\sqrt{3})=-2$ 답 -2

0070 전략 주어진 식을 a에 대한 이차식으로 나타낸다.

점 P가 직선 $y=-x+2$ 위에 있으므로

$b=-a+2$ …… ㉠

따라서 $P(a,\ -a+2)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$

$=(a-2)^2+(-a-5)^2+(a+3)^2+(-a+2)^2$

$+(a-1)^2+(-a+1)^2$

$=6a^2+4a+44=6\left(a+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{130}{3}$

즉 $a=-\frac{1}{3}$일 때 주어진 식의 값이 최소이므로 ㉠에서

$b=\frac{7}{3}$

$\therefore\ 2a-b=2\times\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{7}{3}=-3$ 답 -3

0071 전략 자전거 대여소 A, B, C의 위치를 수직선 위의 좌표로 나타낸 후 수리점에서 각 대여소까지의 거리의 제곱의 합을 구한다.

자전거 대여소 A, B, C의 위치를 각각 $A(-3a)$, $B(0)$, $C(a)$ $(a>0)$라 하자.

수리점의 위치를 $P(x)$라 하면 수리점에서 각 대여소까지의 거리의 제곱의 합은

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=(x+3a)^2+x^2+(x-a)^2$

$=3x^2+4ax+10a^2$

$=3\left(x+\frac{2}{3}a\right)^2+\frac{26}{3}a^2$

즉 $x=-\frac{2}{3}a$일 때 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 값이 최소이고 총비용도 최소이므로

$\overline{AP}=\left|-\frac{2}{3}a-(-3a)\right|=\frac{7}{3}a$, $\overline{BP}=\left|-\frac{2}{3}a\right|=\frac{2}{3}a$

에서 $\overline{AP}:\overline{BP}=7:2$

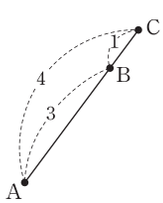
따라서 수리점 P의 위치는 $\overline{AB}$를 $7:2$로 내분하는 점이므로

$m=7$, $n=2$ $\therefore\ 2m+3n=14+6=20$ 답 20

0072 전략 선분 AC와 BC의 길이의 비를 이용하여 점 C의 위치를 찾는다.

$\overline{AC}=4\overline{BC}$에서 $\overline{AC}:\overline{BC}=4:1$

점 C가 선분 AB의 연장선 위에 있으므로 세 점 A, B, C의 위치는 오른쪽 그림과 같고, 점 B는 선분 AC를 $3:1$로 내분하는 점이다.



따라서 $\frac{3\times a+1\times(-3)}{3+1}=2$,

$\frac{3\times b+1\times 2}{3+1}=5$이므로

$3a-3=8$, $3b+2=20$

$\therefore\ a=\frac{11}{3}$, $b=6$ $\therefore\ ab=22$ 답 22

0073 전략 두 선분 BO, BA의 길이를 각각 구한 후 삼각형의 내각의 이등분선의 성질을 이용하여 점 C의 좌표를 구한다.

선분 BC는 $\angle B$의 이등분선이므로

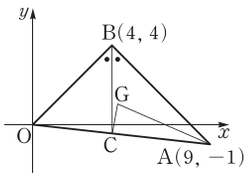
$\overline{OC}:\overline{AC}=\overline{BO}:\overline{BA}$

$\overline{BO}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$,

$\overline{BA}=\sqrt{(9-4)^2+(-1-4)^2}=5\sqrt{2}$

이므로

$\overline{OC}:\overline{AC}=4\sqrt{2}:5\sqrt{2}=4:5$



즉 점 C는 선분 OA를 $4:5$로 내분하는 점이므로 점 C의 좌표는

$\left(\frac{4\times 9+5\times 0}{4+5},\ \frac{4\times(-1)+5\times 0}{4+5}\right)$, 즉 $\left(4,\ -\frac{4}{9}\right)$

점 G의 좌표는

$\left(\frac{0+9+4}{3},\ \frac{0-1+4}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{13}{3},\ 1\right)$

따라서 삼각형 GCA의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{\frac{13}{3}+4+9}{3},\ \frac{1-\frac{4}{9}-1}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{52}{9},\ -\frac{4}{27}\right)$

$\therefore\ a=\frac{52}{9}$, $b=-\frac{4}{27}$

$\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{52}{9}\times\left(-\frac{27}{4}\right)=-39$ 답 -39

0074 전략 $P(a,\ b)$라 하고 선분 AP를 내분하는 점의 좌표를 이용하여 a, b에 대한 식을 구한다.

$P(a,\ b)$라 하면 점 P는 직선 $y=2x-1$ 위의 점이므로

$b=2a-1$ …… ㉠

두 점 $A(2,\ 0)$, $P(a,\ b)$에 대하여 선분 AP를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=\frac{2\times a+1\times 2}{2+1}$, $y=\frac{2\times b+1\times 0}{2+1}$

$\therefore\ a=\frac{3x-2}{2}$, $b=\frac{3}{2}y$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\frac{3}{2}y=2\times\frac{3x-2}{2}-1$ $\therefore\ y=2x-2$

이때 직선 $y=2x-2$와 이차함수 $y=mx^2$의 그래프가 접하므로 $mx^2=2x-2$에서

$mx^2-2x+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-2m=0$ $\therefore\ m=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0075 전략 $P(a,\ b)$라 하고 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$임을 이용하여 a, b에 대한 식을 구한다.

$P(a,\ b)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-2)^2+(b+7)^2=(a-5)^2+(b-2)^2$

$6a+18b+24=0$ $\therefore a+3b=-4$ …… ㉠ … ❶

$\overline{AP}=\overline{CP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$(a-2)^2+(b+7)^2=(a-6)^2+(b+5)^2$

$8a+4b-8=0$ $\therefore 2a+b=2$ …… ㉡ … ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-2$

$\therefore P(2, -2)$ … ❸

답 $(2, -2)$

단계	채점 요소	배점
❶	$\overline{AP}=\overline{BP}$임을 이용하여 a, b에 대한 식 세우기	1점
❷	$\overline{AP}=\overline{CP}$임을 이용하여 a, b에 대한 식 세우기	1점
❸	점 P의 좌표 구하기	1점

0076 전략 $\overline{AB}=\overline{BC}$ 또는 $\overline{BC}=\overline{AC}$ 또는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 경우로 나누어 생각한다.

$\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{13}$

$\overline{BC}=\sqrt{(a-3)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{a^2-6a+10}$

$\overline{AC}=\sqrt{(a-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{a^2-2a+5}$

(i) $\overline{AB}=\overline{BC}$인 경우

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$13=a^2-6a+10$, $a^2-6a-3=0$

$\therefore a=3+2\sqrt{3}$ ($\because a>0$) … ❶

(ii) $\overline{BC}=\overline{AC}$인 경우

$\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$이므로

$a^2-6a+10=a^2-2a+5$

$-4a=-5$ $\therefore a=\frac{5}{4}$ … ❷

(iii) $\overline{AB}=\overline{AC}$인 경우

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$이므로

$13=a^2-2a+5$, $a^2-2a-8=0$

$(a+2)(a-4)=0$ $\therefore a=4$ ($\because a>0$) … ❸

이상에서 모든 양수 a의 값의 곱은

$(3+2\sqrt{3})\times\frac{5}{4}\times4=15+10\sqrt{3}$ … ❹

답 $15+10\sqrt{3}$

단계	채점 요소	배점
❶	$\overline{AB}=\overline{BC}$일 때, 양수 a의 값 구하기	1점
❷	$\overline{BC}=\overline{AC}$일 때, 양수 a의 값 구하기	1점
❸	$\overline{AB}=\overline{AC}$일 때, 양수 a의 값 구하기	1점
❹	모든 a의 값의 곱 구하기	1점

0077 전략 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $P(2, -1)$, $Q(0, -2)$라 하고 점 P가 선분 AQ의 중점이고 점 Q가 선분 BP의 중점임을 이용한다.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $P(2, -1)$, $Q(0, -2)$라 하자.

점 P는 선분 AQ의 중점이므로

$\frac{x_1+0}{2}=2$, $\frac{y_1-2}{2}=-1$

$\therefore x_1=4$, $y_1=0$ $\therefore A(4, 0)$ … ❶

점 Q는 선분 BP의 중점이므로

$\frac{x_2+2}{2}=0$, $\frac{y_2-1}{2}=-2$

$\therefore x_2=-2$, $y_2=-3$ $\therefore B(-2, -3)$ … ❷

답 $A(4, 0)$, $B(-2, -3)$

단계	채점 요소	배점
❶	점 A의 좌표 구하기	2점
❷	점 B의 좌표 구하기	2점

다른 풀이 점 P는 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$\frac{x_2+2x_1}{3}=2$, $\frac{y_2+2y_1}{3}=-1$

$\therefore 2x_1+x_2=6$, $2y_1+y_2=-3$ …… ㉠

점 Q는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\frac{2x_2+x_1}{3}=0$, $\frac{2y_2+y_1}{3}=-2$

$\therefore x_1+2x_2=0$, $y_1+2y_2=-6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x_1=4$, $x_2=-2$, $y_1=0$, $y_2=-3$

0078 전략 삼각형의 무게중심은 중선을 꼭짓점으로부터 2 : 1로 내분하는 점임을 이용한다.

$P\left(-\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}\right)$, $Q(-2, -2)$라 하고 두 대각선 AC, BD의 교점을 $M(m, n)$이라 하자.

삼각형 ABD에서 점 Q는 중선 AM을 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\frac{2\times m+1\times(-4)}{2+1}=-2$, $\frac{2\times n+1\times0}{2+1}=-2$

$2m-4=-6$, $2n=-6$

$\therefore m=-1$, $n=-3$ $\therefore M(-1, -3)$ … ❶

삼각형 ABC에서 점 P는 중선 BM을 2 : 1로 내분하는 점이므로

$\frac{2\times(-1)+1\times a}{2+1}=-\frac{4}{3}$, $\frac{2\times(-3)+1\times b}{2+1}=-\frac{10}{3}$

$-2+a=-4$, $-6+b=-10$

$\therefore a=-2$, $b=-4$ … ❷

$\therefore a+b=-6$ … ❸

답 -6

단계	채점 요소	배점
❶	두 대각선 AC, BD의 교점의 좌표 구하기	3점
❷	a, b의 값 구하기	2점
❸	$a+b$의 값 구하기	1점

다른 풀이 $\overline{CM}=\overline{AM}$이므로 $\overline{AQ} : \overline{QM} : \overline{MC}=2 : 1 : 3$

$\therefore \overline{AQ} : \overline{QC}=2 : (1+3)=1 : 2$

즉 점 Q는 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점이므로 $C(c, d)$라 하면

$\frac{1\times c+2\times(-4)}{1+2}=-2$, $\frac{1\times d+2\times0}{1+2}=-2$

$\therefore c=2$, $d=-6$ $\therefore C(2, -6)$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-4+a+2}{3}, \frac{0+b-6}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{a-2}{3}, \frac{b-6}{3}\right)$

이 점이 점 $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}\right)$과 일치하므로

$\frac{a-2}{3}=-\frac{4}{3}$, $\frac{b-6}{3}=-\frac{10}{3}$

$\therefore a=-2$, $b=-4$

02 직선의 방정식

셀프 CHECK 본책 22쪽

A 답 (1) $y=3x-5$ (2) $y=-\frac{1}{2}x+1$
(3) $x=-3$ (4) $-\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1$

B 답 $(2,\ -2)$

C 답 (1) $y=-x+5$ (2) $y=-3x+2$

D 답 $\sqrt{5}$

내신유형 다지기 본책 23~33쪽

유형 015 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식 본책 23쪽

(1) 기울기가 m이고 y절편이 n인 직선의 방정식
➡ $y=mx+n$
(2) 기울기가 m이고 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나는 직선의 방정식
➡ $y-y_1=m(x-x_1)$
참고 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ일 때
(직선의 기울기)$=\tan\theta$ (단, $0^\circ<\theta<90^\circ$)

0079 두 점 $(-6,\ 3)$, $(4,\ -7)$을 이은 선분의 중점의 좌표는
$\left(\frac{-6+4}{2},\ \frac{3-7}{2}\right)$, 즉 $(-1,\ -2)$
따라서 점 $(-1,\ -2)$를 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은
$y-(-2)=-2\{x-(-1)\}$
$\therefore\ y=-2x-4$ 답 $y=-2x-4$

0080 직선 $6x-4y+1=0$, 즉 $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$의 기울기는 $\frac{3}{2}$이므로 점 $(-2,\ -1)$을 지나고 기울기가 $\frac{3}{2}$인 직선의 방정식은
$y-(-1)=\frac{3}{2}\{x-(-2)\}$
$\therefore\ 3x-2y+4=0$
따라서 $a=3$, $b=-2$이므로
$a-b=5$ 답 ③
다른 풀이 $ax+by+4=0$에서
$y=-\frac{a}{b}x-\frac{4}{b}$
이 직선이 직선 $6x-4y+1=0$, 즉 $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$과 기울기가 같으므로
$-\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$ $\therefore\ 2a+3b=0$ …… ㉠
직선 $ax+by+4=0$이 점 $(-2,\ -1)$을 지나므로
$-2a-b+4=0$, 즉 $2a+b=4$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-2$

0081 주어진 직선의 기울기는 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$
점 $(4,\ 3)$을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선의 방정식은
$y-3=\sqrt{3}(x-4)$
$\therefore\ \sqrt{3}x-y+3-4\sqrt{3}=0$
따라서 $m=\sqrt{3}$, $n=4\sqrt{3}$이므로
$mn=12$ 답 ⑤

유형 016 두 점을 지나는 직선의 방정식 본책 23쪽

두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식
(1) $x_1\neq x_2$일 때, $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$
(2) $x_1=x_2$일 때, $x=x_1$

0082 두 점 $(-1,\ 9)$, $(5,\ -3)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-9=\frac{-3-9}{5-(-1)}\{x-(-1)\}$
$\therefore\ y=-2x+7$
직선 $y=-2x+7$이 점 $(k,\ 2k-1)$을 지나므로
$2k-1=-2k+7$, $4k=8$
$\therefore\ k=2$ 답 ④

0083 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{-2-4+1}{3},\ \frac{-7-1+2}{3}\right)$, 즉 $\left(-\frac{5}{3},\ -2\right)$
따라서 두 점 $\left(-\frac{5}{3},\ -2\right)$, $(6,\ -2)$를 지나는 직선의 방정식은
$y=-2$ 답 $y=-2$

0084 선분 AB의 중점 P의 좌표는
$\left(\frac{-5-3}{2},\ \frac{2+0}{2}\right)$, 즉 $(-4,\ 1)$
선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점 Q의 좌표는
$\left(\frac{2\times 3+1\times(-3)}{2+1},\ \frac{2\times 9+1\times 0}{2+1}\right)$, 즉 $(1,\ 6)$ … ❶
따라서 직선 PQ의 방정식은
$y-1=\frac{6-1}{1-(-4)}\{x-(-4)\}$
$\therefore\ y=x+5$ … ❷
즉 구하는 x절편은 -5이다. … ❸
답 -5

단계	채점 요소	비율
❶	두 점 P, Q의 좌표 구하기	50 %
❷	직선 PQ의 방정식 구하기	40 %
❸	직선 PQ의 x절편 구하기	10 %

0085 두 점 A(5, −1), C(1, 3)을 지나는 직선의 방정식은
$y-(-1)=\frac{3-(-1)}{1-5}(x-5)$
$\therefore\ y=-x+4$ …… ㉠

두 점 O(0, 0), B(5, 3)을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{3}{5}x$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\frac{5}{2}$, $y=\frac{3}{2}$

따라서 두 대각선의 교점의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$이다.

답 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$

0086 두 점 A(−20, −7), B(10, 13)을 지나는 직선의 방정식은

$y-(-7)=\frac{13-(-7)}{10-(-20)}\{x-(-20)\}$

$\therefore y=\frac{2}{3}(x+20)-7$

선분 AB 위의 점 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수이려면

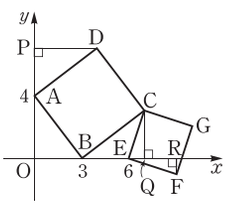
$-20\le x\le 10$, $x+20=3k$ (k는 정수)

이어야 하므로

$-20\le 3k-20\le 10$ $\therefore 0\le k\le 10$

따라서 정수 k는 0, 1, 2, …, 10의 11개이므로 구하는 점의 개수도 11이다. 답 11

0087 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 y축에 내린 수선의 발을 P라 하고, 두 점 C, F에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하자.



△DPA≡△AOB≡△BQC (RHA 합동)이므로

$\overline{DP}=\overline{BQ}=\overline{AO}=4$, $\overline{PA}=\overline{QC}=\overline{OB}=3$

$\therefore$ D(4, 7)

또 △CEQ≡△EFR (RHA 합동)이므로

$\overline{ER}=\overline{CQ}=3$, $\overline{RF}=\overline{QE}=\overline{BQ}-\overline{BE}=4-3=1$

$\therefore$ F(9, −1)

두 점 D, F를 지나는 직선의 방정식은

$y-7=\frac{-1-7}{9-4}(x-4)$ $\therefore 8x+5y-67=0$

따라서 $a=8$, $b=-67$이므로 $a-b=75$ 답 75

만점 공략 노트

△AOB와 △DPA에서

$\angle AOB=\angle DPA=90^\circ$, $\overline{AB}=\overline{DA}$,

$\angle ABO=90^\circ-\angle BAO=\angle DAP$

$\therefore$ △AOB≡△DPA (RHA 합동)

유형 017 x절편과 y절편이 주어진 직선의 방정식 → 본책 24쪽

x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식

➜ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (단, $ab\neq 0$)

0088 x절편이 6, y절편이 −2인 직선의 방정식은

$\frac{x}{6}+\frac{y}{-2}=1$

이 직선이 점 $(p, -4)$를 지나므로

$\frac{p}{6}+\frac{-4}{-2}=1$ $\therefore p=-6$

또 점 $(2, q)$를 지나므로

$\frac{2}{6}+\frac{q}{-2}=1$ $\therefore q=-\frac{4}{3}$

$\therefore pq=8$ 답 ⑤

0089 x절편과 y절편의 합이 1이므로 x절편을 a ($a\neq 0$, $a\neq 1$)라 하면 y절편은 $1-a$이다.

따라서 주어진 직선의 방정식은

$\frac{x}{a}+\frac{y}{1-a}=1$

이 직선이 점 (4, 9)를 지나므로

$\frac{4}{a}+\frac{9}{1-a}=1$, $4(1-a)+9a=a(1-a)$

$a^2+4a+4=0$, $(a+2)^2=0$

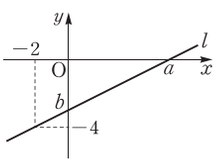
$\therefore a=-2$

따라서 구하는 x절편은 −2이다. 답 −2

0090 직선 l의 x절편을 a, y절편을 b라 하면 직선 l의 방정식은

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

이때 직선 l은 점 $(-2, -4)$를 지나고 제2사분면을 지나지 않으므로 직선 l의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore a>0$, $b<0$

직선 l이 점 $(-2, -4)$를 지나므로

$\frac{-2}{a}+\frac{-4}{b}=1$ $\therefore -2b-4a=ab$ …… ㉠

직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 9이므로

$\frac{1}{2}\times a\times(-b)=9$ $\therefore b=-\frac{18}{a}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$-2\times\left(-\frac{18}{a}\right)-4a=a\times\left(-\frac{18}{a}\right)$

$\frac{36}{a}-4a=-18$, $2a^2-9a-18=0$

$(2a+3)(a-6)=0$ $\therefore a=6$ ($\because a>0$)

이것을 ㉡에 대입하면 $b=-\frac{18}{6}=-3$

따라서 직선 l의 방정식은 $\frac{x}{6}+\frac{y}{-3}=1$, 즉 $y=\frac{1}{2}x-3$이므로 기울기는 $\frac{1}{2}$이다. 답 ④

유형 018 세 점이 한 직선 위에 있을 조건 → 본책 24쪽

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있다.

➜ (직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)
=(직선 AC의 기울기)

➜ 세 점 A, B, C가 삼각형을 이루지 않는다.

0091 세 점 A(4, −3), B(k, 3), C(5, −3k)가 한 직선 위에 있으므로 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기가 같아야 한다.

즉 $\frac{3-(-3)}{k-4}=\frac{-3k-(-3)}{5-4}$이므로

$6=(k-4)(-3k+3)$

$k^2-5k+6=0$, $(k-2)(k-3)=0$

$\therefore k=2$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$2+3=5$ 답 ②

0092 세 점이 삼각형을 이루지 않으려면 세 점은 한 직선 위에 있어야 하므로 직선 AC의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같아야 한다. … ❶

즉 $\frac{7-3}{2-(-a-2)}=\frac{7-(a+1)}{2-(-2)}$이므로 … ❷

$16=(4+a)(6-a)$

$a^2-2a-8=0$, $(a+2)(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$) … ❸

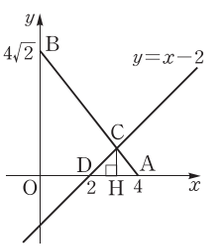
답 4

단계	채점 요소	비율
❶	세 점 A, B, C가 삼각형을 이루지 않을 조건 알기	40 %
❷	a에 대한 식 세우기	20 %
❸	양수 a의 값 구하기	40 %

0093 출발한 지 4초 후의 두 점 A, B의 좌표는

A(4, 0), B(0, $4\sqrt{2}$)

오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있을 때, 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



D(2, 0)이라 하면 점 C가 4초 동안 움직인 거리는 $4a$이므로

$\overline{CD}=4a$

이때 직각이등변삼각형 CDH에서

$\overline{DH}=\overline{CH}=\frac{\overline{CD}}{\sqrt{2}}=\frac{4a}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}a$

$\therefore$ C($2+2\sqrt{2}a$, $2\sqrt{2}a$)

두 직선 AB, AC의 기울기가 같으므로

$\frac{4\sqrt{2}-0}{0-4}=\frac{2\sqrt{2}a-0}{(2+2\sqrt{2}a)-4}$

$-1=\frac{a}{\sqrt{2}a-1}$, $\sqrt{2}a-1=-a$

$(\sqrt{2}+1)a=1$ $\therefore a=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$ 답 $\sqrt{2}-1$

다른 풀이 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있을 때 A(4, 0), B(0, $4\sqrt{2}$)이므로 직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{4}+\frac{y}{4\sqrt{2}}=1$ $\therefore y=-\sqrt{2}x+4\sqrt{2}$

이때 점 C는 직선 AB와 직선 $y=x-2$의 교점이므로 점 C의 x좌표는

$-\sqrt{2}x+4\sqrt{2}=x-2$, $(\sqrt{2}+1)x=4\sqrt{2}+2$

$\therefore x=\frac{4\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+1}=6-2\sqrt{2}$

즉 앞의 그림에서 점 H의 x좌표가 $6-2\sqrt{2}$이므로

$\overline{DH}=(6-2\sqrt{2})-2=4-2\sqrt{2}$

이때 $\overline{CD}=\sqrt{2}\,\overline{DH}$이므로

$4a=\sqrt{2}(4-2\sqrt{2})$ $\therefore a=\sqrt{2}-1$

유형 019 도형의 넓이를 분할하는 직선의 방정식 본책 25쪽

(1) 삼각형에서 한 꼭짓점을 지나면서 그 넓이를 $m:n$으로 분할하는 직선

➜ 꼭짓점의 대변을 $m:n$으로 내분하는 점을 지난다.

(2) 평행사변형의 넓이를 이등분하는 직선

➜ 평행사변형의 두 대각선의 교점을 지난다.

0094 두 삼각형 ABD, DBC의 넓이의 비가 1 : 2이므로 두 선분 AD, DC의 길이의 비가 1 : 2이다.

즉 점 D는 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점이므로 그 좌표는

$\left(\frac{1\times1+2\times(-5)}{1+2}, \frac{1\times1+2\times4}{1+2}\right)$, 즉 (−3, 3)

따라서 직선 BD의 방정식은

$y-(-1)=\frac{3-(-1)}{-3-(-7)}\{x-(-7)\}$

$\therefore y=x+6$

즉 구하는 y절편은 6이다. 답 6

0095 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 각 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나야 한다.

직사각형 OABC의 두 대각선의 교점의 좌표는

$\left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+8}{2}\right)$, 즉 (3, 4)

직사각형 EFBD의 두 대각선의 교점의 좌표는

$\left(\frac{3+6}{2}, \frac{2+8}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{9}{2}, 5\right)$

따라서 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{5-4}{\frac{9}{2}-3}(x-3)$ $\therefore y=\frac{2}{3}x+2$

이 직선이 점 (k, −2)를 지나므로

$-2=\frac{2}{3}k+2$ $\therefore k=-6$ 답 ③

0096 직선 AB의 기울기는 $\frac{0-4}{1-3}=2$이고, 직선 CD의 기울기는 $\frac{6-2}{8-6}=2$이므로

$\overline{AB}/\!/\overline{CD}$

$\overline{AB}=\sqrt{(1-3)^2+(0-4)^2}=2\sqrt{5}$,

$\overline{CD}=\sqrt{(8-6)^2+(6-2)^2}=2\sqrt{5}$

이므로 $\overline{AB}=\overline{CD}$

즉 사각형 ABCD는 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같으므로 평행사변형이다.

평행사변형 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선은 두 대각선의 교점을 지나야 한다.

두 대각선의 교점의 좌표는

$\left(\frac{3+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{9}{2}, 3\right)$

따라서 직선 $2x+y+k=0$이 점 $\left(\frac{9}{2}, 3\right)$을 지나므로

$2\times\frac{9}{2}+3+k=0$ $\therefore k=-12$ 답 ①

0097 도형 OABCDE의 넓이는

$6\times6-2\times3=30$

두 직선 PQ, QR가 도형 OABCDE의 넓이를 삼등분하므로 사각형 EPQD의 넓이는

$30\times\frac{1}{3}=10$

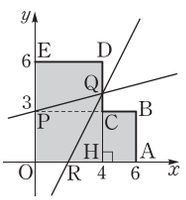
이때 $\overline{DQ}=a$라 하면

$\frac{1}{2}\times(a+3)\times4=10$ $\therefore a=2$

$\therefore$ Q(4, 4) … ❶

점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{RH}=b$라 하자.

삼각형 QRH와 사각형 CHAB의 넓이의 합은 10이므로



$\frac{1}{2}\times b\times4+2\times3=10$ $\therefore b=2$

$\therefore$ R(2, 0) … ❷

따라서 직선 QR의 방정식은

$y-0=\frac{4-0}{4-2}(x-2)$ $\therefore y=2x-4$ … ❸

답 $y=2x-4$

단계	채점 요소	비율
❶	점 Q의 좌표 구하기	40 %
❷	점 R의 좌표 구하기	40 %
❸	직선 QR의 방정식 구하기	20 %

0098 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{2\times7+1\times(-8)}{2+1}, \frac{2\times3+1\times a}{2+1}\right)$, 즉 $\left(2, \frac{a+6}{3}\right)$

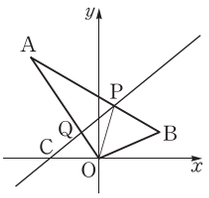
직선 PC의 방정식은

$y-0=\frac{\frac{a+6}{3}-0}{2-(-6)}\{x-(-6)\}$

$\therefore y=\frac{a+6}{24}(x+6)$ …… ㉠

$\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$이므로 두 삼각형 AOP, POB의 넓이의 비는 2 : 1이다.

오른쪽 그림과 같이 선분 AO와 직선 PC의 교점을 Q라 하고 $\triangle AOP=2S$, $\triangle POB=S$라 하면 직선 PC가 삼각형 AOB의 넓이를 이등분하므로



$\triangle AQP=\frac{1}{2}(2S+S)=\frac{3}{2}S$

$\therefore \triangle PQO=\triangle AOP-\triangle AQP=2S-\frac{3}{2}S=\frac{1}{2}S$

따라서 두 삼각형 AQP, PQO의 넓이의 비가 $\frac{3}{2}S:\frac{1}{2}S=3:1$이므로 $\overline{AQ}:\overline{QO}=3:1$

즉 점 Q는 선분 AO를 3 : 1로 내분하는 점이므로 점 Q의 좌표는

$\left(\frac{3\times0+1\times(-8)}{3+1}, \frac{3\times0+1\times a}{3+1}\right)$, 즉 $\left(-2, \frac{1}{4}a\right)$

이때 점 $Q\left(-2, \frac{1}{4}a\right)$는 직선 PC 위의 점이므로 ㉠에서

$\frac{1}{4}a=\frac{a+6}{24}(-2+6)$, $3a=2a+12$

$\therefore a=12$ 답 ④

유형 020 계수의 부호와 그래프의 개형 → 본책 26쪽

$ax+by+c=0$ $(b\neq0)$을 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 꼴로 변형한 후 기울기와 y절편의 부호를 파악하여 그래프의 개형을 그린다.

0099 $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $ab>0$, $ac<0$에서 b와 c의 부호가 서로 다르므로

$-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}>0$

따라서 기울기는 음수, y절편은 양수이므로 주어진 직선의 개형은 ③이다. 답 ③

참고 $ab>0$, $ac<0$이므로

$a>0, b>0, c<0$ 또는 $a<0, b<0, c>0$ $\therefore bc<0$

0100 $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이 직선이 제1, 3, 4사분면을 지나므로 기울기는 양수, y절편은 음수이다.

즉 $-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}<0$이므로

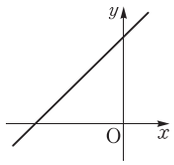
$ab<0$, $bc>0$ …… ㉠

$bx-cy-a=0$에서 $y=\frac{b}{c}x-\frac{a}{c}$

이때 ㉠에서 a와 c의 부호가 서로 다르므로

$\frac{b}{c}>0$, $-\frac{a}{c}>0$

즉 기울기와 y절편이 모두 양수이므로 직선 $bx-cy-a=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



따라서 이 직선은 제4사분면을 지나지 않는다. 답 ④

0101 ㄱ. $b\neq0$이므로 $ax+by+c=0$에서

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $ab<0$에서 $-\frac{a}{b}>0$이므로 직선의 기울기는 양수이다.

따라서 주어진 직선은 제3사분면을 지난다. (참)

ㄴ. $b\neq0$이므로 $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $bc>0$에서 $-\frac{c}{b}<0$이므로 직선의 y절편은 음수이다.

따라서 주어진 직선은 제4사분면을 지난다. (거짓)

ㄷ. $a=0$이면 $by+c=0$ $\therefore y=-\frac{c}{b}$ ($\because b\neq0$)

이때 $bc<0$에서 $-\frac{c}{b}>0$이므로 주어진 직선은 제1, 2사분면을 지난다. (참)

ㄹ. $b\neq0$이므로 $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $ac>0$에서 a와 c는 부호가 서로 같으므로 $-\frac{a}{b}$와 $-\frac{c}{b}$도 부호가 서로 같다.

기울기와 y절편이 모두 양수인 직선은 제1, 2, 3사분면을 지나고, 기울기와 y절편이 모두 음수인 직선은 제2, 3, 4사분면을 지난다.

따라서 주어진 직선은 제3사분면을 지난다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

다른 풀이 ㄹ. $ax+by+c=0$에 $y=0$을 대입하면

$ax+c=0$ $\therefore x=-\frac{c}{a}$ ($\because a\neq0$)

이때 $ac>0$에서 $-\frac{c}{a}<0$이므로 직선의 x절편은 음수이다.

따라서 주어진 직선은 제3사분면을 지난다.

유형 021 직선이 항상 지나는 점 본책 26쪽

직선 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표는 연립방정식

$ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$

의 해와 같다.

0102 $(m+1)x-y-2m+5=0$을 m에 대하여 정리하면

$m(x-2)+x-y+5=0$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$x-2=0$, $x-y+5=0$

$\therefore x=2$, $y=7$

따라서 주어진 직선은 항상 점 $(2, 7)$을 지난다. 답 $(2, 7)$

0103 $(3k+4)x+(k-2)y-2k+a=0$을 k에 대하여 정리하면

$(3x+y-2)k+4x-2y+a=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$3x+y-2=0$, $4x-2y+a=0$

이 연립방정식의 해가 $x=b$, $y=-4$이므로

$3b-4-2=0$, $4b+8+a=0$

$\therefore a=-16$, $b=2$

$\therefore a+b=-14$ 답 ②

0104 점 (a, b)가 직선 $x+2y-4=0$ 위의 점이므로

$a+2b-4=0$ $\therefore 2b=-a+4$

이것을 $2bx-ay=8$에 대입하면

$(-a+4)x-ay=8$

이 식을 a에 대하여 정리하면

$(x+y)a-4x+8=0$ … ❶

이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$x+y=0$, $-4x+8=0$

$\therefore x=2$, $y=-2$

즉 $\mathrm{P}(2, -2)$이므로 … ❷

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$ … ❸

답 $2\sqrt{2}$

단계	채점 요소	비율
❶	$2bx-ay=8$을 a에 대하여 정리하기	40 %
❷	점 P의 좌표 구하기	40 %
❸	$\overline{\mathrm{OP}}$의 길이 구하기	20 %

유형 022 직선이 항상 지나는 점의 활용 본책 27쪽

직선 $mx+y+am+b=0$에서 주어진 조건을 만족시키는 실수 m의 값의 범위는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 직선의 방정식을 m에 대하여 정리한다.

➡ $m(x+a)+y+b=0$

(ii) 직선이 실수 m의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구한다.

➡ $(-a, -b)$

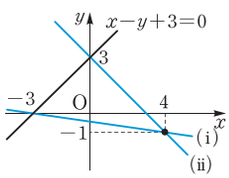
(iii) 점 $(-a, -b)$를 지나는 직선을 그려 주어진 조건을 만족시키는 실수 m의 값의 범위를 구한다.

0105 직선

$y=m(x-4)-1$ …… ㉠

은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(4, -1)$을 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 $(-3, 0)$을 지날 때

$0=-7m-1$

$\therefore m=-\frac{1}{7}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0, 3)$을 지날 때

$3=-4m-1$ $\therefore m=-1$

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는

$-1<m<-\frac{1}{7}$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=-\frac{1}{7}$이므로

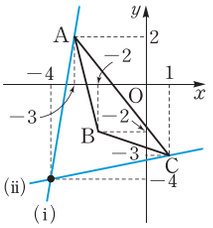
$\beta-\alpha=\frac{6}{7}$ 답 $\frac{6}{7}$

0106 $mx-y+4m-4=0$에서

$m(x+4)-y-4=0$ …… ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-4, -4)$를 지난다.

오른쪽 그림에서



(ⅰ) 직선 ㉠이 점 A(−3, 2)를 지날 때

$m-6=0$ $\therefore m=6$

(ⅱ) 직선 ㉠이 점 C(1, −3)을 지날 때

$5m-1=0$ $\therefore m=\frac{1}{5}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 m의 값의 범위는

$m<\frac{1}{5}$ 또는 $m>6$ 답 ①

0107 $y=kx-3k+1$에서

$y=k(x-3)+1$

이므로 이 직선은 실수 k의 값에 관계없이 항상 점 (3, 1)을 지난다.

즉 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표가 (3, 1)이어야 하므로 C(a, b)라 하면

$\frac{1+a}{2}=3$, $\frac{4+b}{2}=1$

$\therefore a=5$, $b=-2$

따라서 점 C의 좌표는 (5, −2) 답 (5, −2)

0108 $(5-2m)x-2y+m+1=0$에서

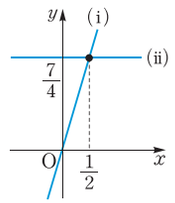
$m(-2x+1)+5x-2y+1=0$ …… ㉠

$-2x+1=0$, $5x-2y+1=0$에서

$x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{7}{4}$

즉 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$을 지난다. … ❶

오른쪽 그림에서



(ⅰ) 직선 ㉠이 원점을 지날 때

$m+1=0$ $\therefore m=-1$

(ⅱ) 직선 ㉠이 x축에 평행할 때

$5-2m=0$ $\therefore m=\frac{5}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 m의 값의 범위는

$-1\le m\le\frac{5}{2}$ … ❷

따라서 정수 m은 −1, 0, 1, 2의 4개이다. … ❸

답 4

단계	채점 요소	비율
❶	직선이 항상 지나는 점의 좌표 구하기	30 %
❷	조건을 만족시키는 m의 값의 범위 구하기	50 %
❸	정수 m의 개수 구하기	20 %

0109 $(3k+1)x+(k-2)y-9k+4=0$에서

$k(3x+y-9)+x-2y+4=0$ …… ㉠

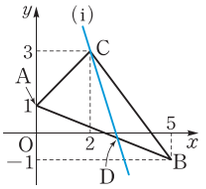
$3x+y-9=0$, $x-2y+4=0$을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=3$

즉 직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 점 C(2, 3)을 지난다.

직선 ㉠과 선분 AB의 교점을 D라 하자.

(ⅰ) $\triangle CAD=\frac{3}{2}\triangle CDB$일 때



$\triangle CAD : \triangle CDB=3 : 2$이므로

$\overline{AD} : \overline{DB}=3 : 2$

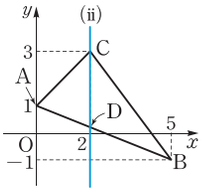
점 D는 선분 AB를 3 : 2로 내분하므로 그 좌표는

$\left(\frac{3\times5+2\times0}{3+2}, \frac{3\times(-1)+2\times1}{3+2}\right)$, 즉 $\left(3, -\frac{1}{5}\right)$

이때 점 $D\left(3, -\frac{1}{5}\right)$이 직선 ㉠ 위의 점이므로

$-\frac{1}{5}k+\frac{37}{5}=0$ $\therefore k=37$

(ⅱ) $\triangle CDB=\frac{3}{2}\triangle CAD$일 때



$\triangle CAD : \triangle CDB=2 : 3$이므로

$\overline{AD} : \overline{DB}=2 : 3$

점 D는 선분 AB를 2 : 3으로 내분하므로 그 좌표는

$\left(\frac{2\times5+3\times0}{2+3}, \frac{2\times(-1)+3\times1}{2+3}\right)$, 즉 $\left(2, \frac{1}{5}\right)$

이때 점 $D\left(2, \frac{1}{5}\right)$이 직선 ㉠ 위의 점이므로

$-\frac{14}{5}k+\frac{28}{5}=0$ $\therefore k=2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 실수 k의 값의 합은

$37+2=39$ 답 ④

유형 023 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식 본책 27쪽

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식

➜ $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$ (단, k는 실수이다.)

0110 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x-3y+12+k(x+2y-1)=0$ (k는 실수) …… ㉠

이라 하면 직선 ㉠이 점 (3, 0)을 지나므로

$18+2k=0$ $\therefore k=-9$

이것을 ㉠에 대입하면

$2x-3y+12-9(x+2y-1)=0$

$-7x-21y+21=0$ $\therefore y=-\frac{1}{3}x+1$

따라서 구하는 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다. 답 ③

다른 풀이 $2x-3y+12=0$, $x+2y-1=0$을 연립하여 풀면

$x=-3$, $y=2$

따라서 두 직선의 교점의 좌표가 (−3, 2)이므로 두 점 (−3, 2), (3, 0)을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{0-2}{3-(-3)}=-\frac{1}{3}$

0111 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x-y+3+k(x-y+4)=0$ (k는 실수) …… ㉠

이라 하면 직선 ㉠이 점 (2, 2)를 지나므로

$5+4k=0$ $\therefore k=-\frac{5}{4}$

이것을 ㉠에 대입하면 $2x-y+3-\frac{5}{4}(x-y+4)=0$

$\therefore 3x+y-8=0$

따라서 $A\left(\frac{8}{3}, 0\right)$, $B(0, 8)$이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\times 8=\frac{32}{3}$ 답 $\frac{32}{3}$

0112 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$(a-1)x+ay+2+k\{2ax-(a-2)y+1\}=0$ (k는 실수) …… ㉠

이라 하면 직선 ㉠이 원점을 지나므로

$2+k=0$ $\therefore k=-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$(a-1)x+ay+2-2\{2ax-(a-2)y+1\}=0$

$\therefore (-3a-1)x+(3a-4)y=0$

이 직선의 기울기가 2이므로

$\frac{3a+1}{3a-4}=2$, $3a+1=6a-8$

$3a=9$ $\therefore a=3$ 답 3

유형 024 두 직선의 평행·수직 본책 28쪽

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이

(1) 평행하다. ➡ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ (단, $a'b'c'\neq 0$)

(2) 수직이다. ➡ $aa'+bb'=0$

0113 두 직선이 각각 점 $(1, -4)$를 지나므로

$a-4b+13=0$에서 $a-4b=-13$ …… ㉠

$4-4c-16=0$에서 $c=-3$

두 직선 $ax+by+13=0$, $4x-3y-16=0$이 수직이므로

$a\times 4+b\times(-3)=0$ $\therefore 4a-3b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=4$

$\therefore a+b-c=10$ 답 ⑤

0114 두 직선이 평행하려면

$\frac{k}{3}=\frac{-2}{1-k}\neq\frac{-2}{3}$

$\frac{k}{3}=\frac{-2}{1-k}$에서 $k-k^2=-6$

$k^2-k-6=0$, $(k+2)(k-3)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=3$ …… ㉠

$\frac{k}{3}\neq\frac{-2}{3}$에서 $k\neq -2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k=3$

또 두 직선이 수직이려면

$3\times k+(1-k)\times(-2)=0$

$5k-2=0$ $\therefore k=\frac{2}{5}$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=\frac{2}{5}$이므로 $\alpha\beta=\frac{6}{5}$ 답 ⑤

0115 직선 $ax+2y-3=0$이 직선 $bx-y+7=0$과 수직이므로

$a\times b+2\times(-1)=0$ $\therefore ab=2$ … ❶

직선 $ax+2y-3=0$이 직선 $(b+4)x+2y-1=0$과 평행하므로 $\frac{b+4}{a}=\frac{2}{2}\neq\frac{-1}{-3}$

$\frac{b+4}{a}=1$에서 $a-b=4$ … ❷

$\therefore a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$=4^3+3\times 2\times 4=88$ … ❸

답 88

단계	채점 요소	비율
❶	두 직선이 수직일 조건을 이용하여 ab의 값 구하기	40 %
❷	두 직선이 평행할 조건을 이용하여 $a-b$의 값 구하기	40 %
❸	a^3-b^3의 값 구하기	20 %

0116 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대응하는 직선은 두 점 (a, b), (c, d)를 지나므로 이 직선의 기울기는 $\frac{d-b}{c-a}$이다. (단, $a\neq c$)

ㄱ. $2\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

이 행렬에 대응하는 직선의 기울기는

$\frac{8-2}{2-6}=-\frac{3}{2}$

ㄴ. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

이 행렬에 대응하는 직선의 기울기는

$\frac{-2-4}{5-1}=-\frac{3}{2}$

ㄷ. $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

이 행렬에 대응하는 직선의 기울기는

$\frac{-2-1}{1-4}=1$

ㄹ. $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -7 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}$

이 행렬에 대응하는 직선의 기울기는

$\frac{-10-(-7)}{2-(-7)}=-\frac{1}{3}$

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$에 대응하는 직선의 기울기는

$\frac{4-1}{1-3}=-\frac{3}{2}$

이므로 이 직선과 기울기가 같은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

이때 ㄴ의 직선은 점 $(1, 4)$를 지나므로 이 직선과 일치한다.

따라서 이 직선과 평행한 것은 ㄱ이다.

(2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$에 대응하는 직선의 기울기는

$\frac{5-2}{-4-(-1)}=-1$

따라서 이 직선과 수직인 것은 ㄷ이다.

답 (1) ㄱ (2) ㄷ

0117 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y-a=m(x-a)$

$\therefore y=m(x-a)+a$

이 직선이 곡선 $y=x^2-4x+10$에 접하므로 이차방정식

$x^2-4x+10=m(x-a)+a$,

즉 $x^2-(m+4)x+am-a+10=0$

이 중근을 갖는다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(m+4)^2-4(am-a+10)=0$

$\therefore m^2-(4a-8)m+4a-24=0$ ····· ㉠

두 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2라 하면 m_1, m_2는 m에 대한 이차방정식 ㉠의 두 실근이다.

이때 두 접선이 서로 수직이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$m_1m_2=4a-24=-1$

$\therefore a=\frac{23}{4}$

따라서 구하는 두 직선의 기울기의 합은

$m_1+m_2=4a-8=4\times\frac{23}{4}-8=15$ 답 15

유형 025 한 직선에 평행 또는 수직인 직선의 방정식 본책 29쪽

(1) 평행한 두 직선 ➡ 기울기는 같고, y절편은 다르다.

(2) 수직인 두 직선 ➡ 기울기의 곱이 -1이다.

0118 두 점 A$(-4, 1)$, B$(4, 5)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{5-1}{4-(-4)}=\frac{1}{2}$

이므로 직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 -2이다.

선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times4+3\times(-4)}{1+3}, \frac{1\times5+3\times1}{1+3}\right)$, 즉 $(-2, 2)$

따라서 기울기가 -2이고 점 $(-2, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=-2\{x-(-2)\}$

$\therefore y=-2x-2$

이 직선이 점 $(a, 8)$을 지나므로

$8=-2a-2$ $\therefore a=-5$ 답 ②

0119 두 직선이 y축에서 만나므로 두 직선의 y절편은 같다.

$(k-3)x+2y-6=0$에 $x=0$을 대입하면

$2y-6=0$ $\therefore y=3$

따라서 두 점 $(0, 3)$, $(-6, -5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{-5-3}{-6-0}(x-0)$

$\therefore 4x-3y+9=0$

두 직선 $(k-3)x+2y-6=0$, $4x-3y+9=0$이 수직이므로

$(k-3)\times4+2\times(-3)=0$

$4k-18=0$ $\therefore k=\frac{9}{2}$ 답 ④

0120 두 직선 $5x-y+8=0$, $x-y-4=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$5x-y+8+k(x-y-4)=0$ (k는 실수)

이라 하면

$(k+5)x+(-k-1)y-4k+8=0$ ····· ㉠

직선 ㉠이 직선 $x-3y+2=0$과 수직이므로

$(k+5)\times1+(-k-1)\times(-3)=0$

$4k+8=0$ $\therefore k=-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$3x+y+16=0$ 답 $3x+y+16=0$

다른 풀이 $5x-y+8=0$, $x-y-4=0$을 연립하여 풀면 $x=-3$, $y=-7$이므로 두 직선 $5x-y+8=0$, $x-y-4=0$의 교점의 좌표는 $(-3, -7)$이다.

직선 $x-3y+2=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$에 수직인 직선의 기울기는 -3이므로 점 $(-3, -7)$을 지나고 기울기가 -3인 직선의 방정식은

$y-(-7)=-3\{x-(-3)\}$

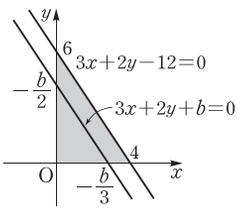
$\therefore 3x+y+16=0$

0121 두 직선 $3x+2y-12=0$, $3x+ay+b=0$이 평행하므로

$\frac{3}{3}=\frac{a}{2}\neq\frac{b}{-12}$

$\frac{3}{3}=\frac{a}{2}$에서 $a=2$ … ❶

오른쪽 그림에서 직선 $3x+2y+b=0$의 x절편은 $-\frac{b}{3}$, y절편은 $-\frac{b}{2}$이고 이 직선이 색칠한 도형의 넓이를 이등분하므로



$\frac{1}{2}\times\left(-\frac{b}{3}\right)\times\left(-\frac{b}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times4\times6\right)$

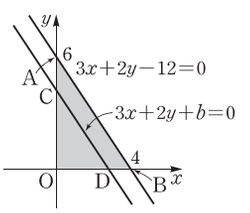
$\therefore b^2=72$ … ❷

$\therefore a^2+b^2=4+72=76$ … ❸

답 76

단계	채점 요소	비율
❶	a의 값 구하기	40 %
❷	b^2의 값 구하기	40 %
❸	a^2+b^2의 값 구하기	20 %

다른 풀이 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이므로



△AOB∽△COD (AA 닮음)

이때 두 삼각형의 넓이의 비가 $2:1$이므로 닮음비는 $\sqrt{2}:1$이다.

즉 $\overline{AO}:\overline{CO}=\sqrt{2}:1$이므로

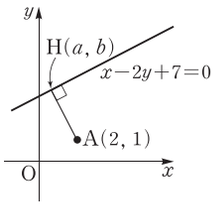
$6:\left(-\frac{b}{2}\right)=\sqrt{2}:1$, $-\frac{b}{\sqrt{2}}=6$

$\therefore b=-6\sqrt{2}$

0122 점 (a, b)는 점 $(2, 1)$에서 직선 $x-2y+7=0$에 내린 수선의 발과 같다.

H(a, b)라 하면 오른쪽 그림에서 직선 AH와 직선 $x-2y+7=0$은 수직이다.

이때 직선 $x-2y+7=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 직선 AH의 기울기는 -2이다.



따라서 직선 AH의 방정식은

$y-1=-2(x-2)$ $\therefore 2x+y-5=0$

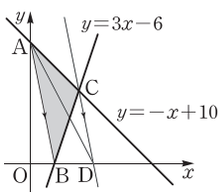
이때 점 H는 직선 AH와 직선 $x-2y+7=0$의 교점이므로

$2x+y-5=0$, $x-2y+7=0$을 연립하여 풀면

$x=\frac{3}{5}$, $y=\frac{19}{5}$

즉 $a=\frac{3}{5}$, $b=\frac{19}{5}$이므로 $a+b=\frac{22}{5}$ 답 ④

0123 두 삼각형 ABC, ABD의 밑변을 선분 AB라 할 때, 두 삼각형의 넓이가 같으려면 높이가 같아야 하므로 점 D는 오른쪽 그림과 같이 직선 AB에 평행하고 점 C를 지나는 직선 위에 있어야 한다.



두 점 A$(0, 10)$, B$(2, 0)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{0-10}{2-0}=-5$

$y=-x+10$, $y=3x-6$을 연립하여 풀면

$x=4$, $y=6$ $\therefore$ C$(4, 6)$

따라서 기울기가 -5이고 점 C$(4, 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-6=-5(x-4)$ $\therefore y=-5x+26$

점 D$(a, 0)$이 이 직선 위의 점이므로

$0=-5a+26$ $\therefore a=\frac{26}{5}$ 답 ②

다른 풀이 직선 AB의 기울기와 직선 CD의 기울기가 같으므로

$\frac{0-10}{2-0}=\frac{0-6}{a-4}$, $-12=-10(a-4)$

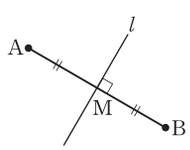
$a-4=\frac{6}{5}$ $\therefore a=\frac{26}{5}$

유형 026 선분의 수직이등분선의 방정식 본책 30쪽

선분 AB의 수직이등분선을 l이라 하면

(1) 직선 l이 선분 AB의 중점 M을 지난다.

(2) 직선 l과 직선 AB의 기울기의 곱은 -1이다.



0124 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{5-4}{2}, \frac{2+5}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

직선 AB의 기울기는

$\frac{5-2}{-4-5}=-\frac{1}{3}$

따라서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 3이고 점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$을 지나므로 그 방정식은

$y-\frac{7}{2}=3\left(x-\frac{1}{2}\right)$ $\therefore 3x-y+2=0$

즉 $a=3$, $b=2$이므로 $ab=6$ 답 6

0125 B(a, b)라 하면 직선 $3x+2y+6=0$은 선분 AB의 중점 $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2}\right)$를 지나므로

$3\times\frac{a+1}{2}+2\times\frac{b+2}{2}+6=0$

$\therefore 3a+2b=-19$ …… ㉠

또 직선 $3x+2y+6=0$, 즉 $y=-\frac{3}{2}x-3$의 기울기가 $-\frac{3}{2}$이므로 직선 AB의 기울기는 $\frac{2}{3}$이다.

즉 $\frac{b-2}{a-1}=\frac{2}{3}$이므로

$2a-3b=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=-2$

따라서 점 B의 좌표는 $(-5, -2)$ 답 $(-5, -2)$

0126 $\overline{AC}=\sqrt{(0+2)^2+(a+3)^2}=2\sqrt{5}$이므로

$4+(a+3)^2=20$, $(a+3)^2=16$

$a+3=\pm4$ $\therefore a=1$ ($\because a>0$)

$\therefore$ C$(0, 1)$ … ❶

마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로 직선 BD는 선분 AC의 수직이등분선이다.

선분 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-2+0}{2}, \frac{-3+1}{2}\right)$, 즉 $(-1, -1)$

직선 AC의 기울기는

$\frac{1-(-3)}{0-(-2)}=2$

따라서 선분 AC의 수직이등분선은 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 점 $(-1, -1)$을 지나므로 직선 BD의 방정식은

$y-(-1)=-\frac{1}{2}\{x-(-1)\}$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ … ❷

이 직선의 x절편, y절편은 각각 -3, $-\frac{3}{2}$이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$ … ❸

답 $\frac{9}{4}$

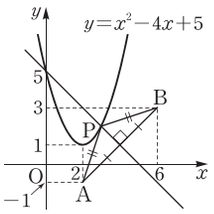
단계	채점 요소	비율
❶	점 C의 좌표 구하기	30 %
❷	직선 BD의 방정식 구하기	40 %
❸	도형의 넓이 구하기	30 %

만점 공략 노트

x절편이 a, y절편이 b인 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times|a|\times|b|=\frac{|ab|}{2}\ (\text{단, } ab\neq0)$$

0127 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 점 P는 선분 AB의 수직이등분선 위에 있다.



선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+6}{2},\ \frac{-1+3}{2}\right),\ \text{즉 } (4,\ 1)$$

직선 AB의 기울기는

$$\frac{3-(-1)}{6-2}=1$$

따라서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 -1이고 점 $(4,\ 1)$을 지나므로 그 방정식은

$y-1=-(x-4)$ $\therefore y=-x+5$ …… ㉠

곡선 $y=x^2-4x+5$와 직선 $y=-x+5$의 교점의 x좌표는

$x^2-4x+5=-x+5$에서

$x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

이때 점 P는 제1사분면 위의 점이므로 $P(3,\ 2)$ ($\because$ ㉠)

따라서 $a=3$, $b=2$이므로 $ab=6$ 답 ②

유형 027 세 직선의 위치 관계 → 본책 30쪽

서로 다른 세 직선에 대하여

(1) 세 직선이 모두 평행할 때

① 세 직선의 기울기가 모두 같다.

② 좌표평면을 네 부분으로 나눈다.

(2) 세 직선 중 두 직선만 평행할 때

① 두 직선의 기울기는 같고 다른 한 직선의 기울기는 다르다.

② 교점이 2개 생기고 좌표평면을 여섯 부분으로 나눈다.

(3) 세 직선이 한 점에서 만날 때

① 세 직선의 기울기는 모두 다르고 두 직선의 교점을 다른 한 직선이 지난다.

② 교점이 1개 생기고 좌표평면을 여섯 부분으로 나눈다.

0128 $x-3y-2=0$ …… ㉠

$2x+3y-4=0$ …… ㉡

$ax+(2-a)y-2=0$ …… ㉢

이때 직선 ㉠과 ㉡은 평행하지 않다.

(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 평행한 경우

$\frac{a}{1}=\frac{2-a}{-3}\neq\frac{-2}{-2}$이므로 $-3a=2-a$

$\therefore a=-1$

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 평행한 경우

$\frac{a}{2}=\frac{2-a}{3}\neq\frac{-2}{-4}$이므로 $3a=2(2-a)$

$\therefore a=\frac{4}{5}$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=0$

따라서 직선 ㉢이 점 $(2,\ 0)$을 지나야 하므로

$2a-2=0$ $\therefore a=1$

이상에서 $a=-1$ 또는 $a=\frac{4}{5}$ 또는 $a=1$

따라서 모든 a의 값의 합은

$-1+\frac{4}{5}+1=\frac{4}{5}$ 답 ④

만점 공략 노트

서로 다른 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우

(1) 세 직선이 모두 평행할 때

(2) 세 직선 중 두 직선이 평행할 때

(3) 세 직선이 한 점에서 만날 때

0129 $x+4y-7=0$ …… ㉠

$2x-y+4=0$ …… ㉡

$ax+y+3=0$ …… ㉢

두 직선 ㉠, ㉡은 한 점에서 만나므로 교점이 2개가 되려면 직선 ㉢이 두 직선 ㉠, ㉡ 중 하나와 평행해야 한다.

(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 평행한 경우

$\frac{a}{1}=\frac{1}{4}\neq\frac{3}{-7}$이므로 $a=\frac{1}{4}$

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 평행한 경우

$\frac{a}{2}=\frac{1}{-1}\neq\frac{3}{4}$이므로 $a=-2$

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{4}$ 또는 $a=-2$ 답 $\frac{1}{4}$, -2

0130 $3x-y=0$ …… ㉠

$x+y-4=0$ …… ㉡

$kx-y-2=0$ …… ㉢

세 직선 ㉠, ㉡, ㉢으로 둘러싸인 삼각형이 직각삼각형이 되려면 세 직선 중 어느 두 직선이 수직이어야 한다.

이때 두 직선 ㉠, ㉡은 수직이 아니다.

(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 수직인 경우

$3\times k+(-1)\times(-1)=0$이므로 $k=-\frac{1}{3}$

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 수직인 경우

$1\times k+1\times(-1)=0$이므로 $k=1$

(i), (ii)에서 $k=-\frac{1}{3}$ 또는 $k=1$

따라서 정수 k의 값은 1이다. 답 1

0131 서로 다른 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나누려면 세 직선이 모두 평행해야 한다.

두 직선 $x-4y-12=0$, $ax+by+5=0$이 평행하려면

$\frac{a}{1}=\frac{b}{-4}\neq\frac{5}{-12}$ $\therefore 4a+b=0$ …… ㉠

두 직선 $x-4y-12=0$, $(b+1)x-2ay+2=0$이 평행하려면

$\frac{b+1}{1}=\frac{-2a}{-4}\neq\frac{2}{-12}$ $\therefore a-2b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{2}{9}$, $b=-\frac{8}{9}$

$\therefore a+b=-\frac{2}{3}$ 답 $-\frac{2}{3}$

유형 028 점과 직선 사이의 거리 본책 31쪽

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리

➜ $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

0132 $\frac{|9+2a-2|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\sqrt{13}$이므로

$|7+2a|=13$, $7+2a=\pm13$

$\therefore a=3$ 또는 $a=-10$

따라서 모든 a의 값의 합은

$3+(-10)=-7$ 답 -7

0133 직선 $y=-\frac{3}{4}x-1$에 평행하고 제3사분면을 지나지 않는 직선의 방정식을 $y=-\frac{3}{4}x+k$ $(k\geq0)$라 하자.

점 $(-1, 0)$과 직선 $y=-\frac{3}{4}x+k$, 즉 $3x+4y-4k=0$ 사이의 거리가 2이므로

$\frac{|-3-4k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$, $|-3-4k|=10$

$-3-4k=\pm10$ $\therefore k=\frac{7}{4}$ $(\because k\geq0)$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$ 답 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$

0134 직선 l의 방정식은

$\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$ $\therefore x+2y-6=0$

점 A와 직선 l 사이의 거리는

$\frac{|a+12-6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|a+6|}{\sqrt{5}}$

정사각형의 한 변의 길이가 $\frac{9}{\sqrt{5}}$이므로

$\frac{|a+6|}{\sqrt{5}}=\frac{9}{\sqrt{5}}$, $|a+6|=9$

$a+6=\pm9$ $\therefore a=3$ $(\because a>0)$ 답 ⑤

0135 $(k+4)x+(k-1)y+2k+18=0$에서

$k(x+y+2)+4x-y+18=0$

$x+y+2=0$, $4x-y+18=0$을 연립하여 풀면

$x=-4$, $y=2$

$\therefore$ A$(-4, 2)$ … ❶

직선 $x+ay+b=0$이 점 A$(-4, 2)$를 지나므로

$-4+2a+b=0$ $\therefore b=-2a+4$ …… ㉠

또 직선 $x+ay+b=0$과 원점 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$\frac{|b|}{\sqrt{1^2+a^2}}=\sqrt{10}$

$\therefore |b|=\sqrt{10(1+a^2)}$

양변을 제곱하면 $b^2=10(1+a^2)$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(-2a+4)^2=10(1+a^2)$

$3a^2+8a-3=0$

$(a+3)(3a-1)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

이때 a는 정수이므로 $a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $b=10$ … ❷

$\therefore ab=-30$ … ❸

답 -30

단계	채점 요소	비율
❶	점 A의 좌표 구하기	30 %
❷	정수 a, b의 값 구하기	60 %
❸	ab의 값 구하기	10 %

0136 두 직선 AG와 BC의 교점을 D라 하면

$\overline{GD}=\frac{1}{2}\overline{AG}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{(-2+4)^2+(2-6)^2}=\sqrt{5}$

정삼각형의 무게중심은 외심과 일치하므로 점 G는 정삼각형 ABC의 외심이다. 외심은 세 변의 수직이등분선의 교점이므로 직선 AG는 직선 BC와 수직이다.

이때 직선 AG의 기울기는

$\frac{2-6}{-2-(-4)}=-2$

이므로 직선 BC의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 직선 BC의 방정식을

$y=\frac{1}{2}x+k$, 즉 $x-2y+2k=0$ (k는 상수)

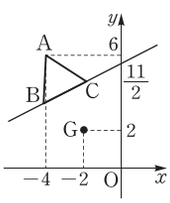
이라 하면 점 G와 직선 BC 사이의 거리가 $\overline{GD}$의 길이와 같으므로

$\frac{|-2-4+2k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$, $|2k-6|=5$

$2k-6=\pm5$

$\therefore k=\frac{11}{2}$ 또는 $k=\frac{1}{2}$

그런데 $k=\frac{11}{2}$이면 직선 BC가 오른쪽 그림과 같으므로 무게중심 G가 삼각형 ABC의 외부에 존재한다.



따라서 $k=\frac{1}{2}$이므로 구하는 y절편은 $\frac{1}{2}$이다. 답 $\frac{1}{2}$

참고 점 G가 직선 BC의 위쪽에 존재해야 하므로

$\frac{1}{2}\times(-2)+k<2$ $\therefore k<3$

유형 029 점과 직선 사이의 거리의 최댓값 본책 31쪽

점 P와 직선 사이의 거리를 $f(k)$라 할 때

$$f(k)=\frac{|a|}{\sqrt{g(k)}}\ (a\text{는 상수})$$

의 꼴이면 $f(k)$는 $g(k)$가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

0137 주어진 식을 x, y에 대하여 정리하면

$$(k+2)x+(-k+3)y-1=0$$

$$\therefore f(k)=\frac{|-1|}{\sqrt{(k+2)^2+(-k+3)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2k^2-2k+13}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{2}}}$$

따라서 $2\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{2}$가 최소일 때 $f(k)$가 최대이므로 구하는 최댓값은

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{25}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{5}$$

답 ②

다른 풀이 $2x+3y-1+k(x-y)=0$에서 $2x+3y-1=0$, $x-y=0$을 연립하여 풀면

$$x=\frac{1}{5},\ y=\frac{1}{5}$$

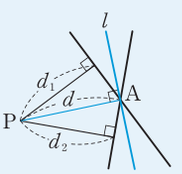
즉 직선 $2x+3y-1+k(x-y)=0$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $\left(\frac{1}{5},\ \frac{1}{5}\right)$을 지난다.

따라서 주어진 직선과 원점 사이의 거리의 최댓값은 점 $\left(\frac{1}{5},\ \frac{1}{5}\right)$과 원점 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{5}$$

만점 공략 노트

오른쪽 그림에서 $d_1<d$, $d_2<d$이므로 점 P와 점 A를 지나는 임의의 직선 사이의 거리의 최댓값은 점 P로부터 선분 AP와 수직인 직선 l에 이르는 거리 d와 같다.



0138 점 $(-1,\ -3)$과 직선 $2x+(k+1)y+3k-5=0$ 사이의 거리를 $f(k)$라 하면

$$f(k)=\frac{|-2-3(k+1)+3k-5|}{\sqrt{2^2+(k+1)^2}}$$

$$=\frac{10}{\sqrt{(k+1)^2+4}}$$

따라서 $(k+1)^2+4$가 최소일 때, 즉 $k=-1$일 때 $f(k)$가 최대이므로

$$\alpha=-1,\ \beta=\frac{10}{\sqrt{4}}=5$$

$$\therefore \alpha+\beta=4$$

답 4

0139 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$$3x-4y+8+k(2x-y-3)=0$$

$3x-4y+8=0$, $2x-y-3=0$을 연립하여 풀면

$$x=4,\ y=5$$

즉 직선 $3x-4y+8+k(2x-y-3)=0$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(4,\ 5)$를 지난다.

따라서 선분 AH의 길이는 점 H의 좌표가 $(4,\ 5)$일 때 최대이므로

$$a=4,\ b=5$$

$$\therefore M=\sqrt{(1-4)^2+(1-5)^2}=5$$

$$\therefore ab+M=25$$

답 25

유형 030 평행한 두 직선 사이의 거리 본책 32쪽

평행한 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 직선 l_1 위의 한 점 $(x_1,\ y_1)$을 정한다.

(ii) 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 l_2 사이의 거리를 구한다.

0140 평행한 두 직선 $3x+4y+4=0$, $3x+4y+k=0$ 사이의 거리는 직선 $3x+4y+4=0$ 위의 점 $(0,\ -1)$과 직선 $3x+4y+k=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-4+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1,\qquad |k-4|=5$$

$$k-4=\pm5\qquad \therefore k=9\ (\because k>0)$$

답 9

만점 공략 노트

직선 위의 한 점을 정할 때, 좌표가 정수인 점이나 직선과 x축 또는 y축의 교점으로 정하면 계산이 간편하다.

0141 두 직선 $x+ay+1=0$, $(a+2)x+3y+3=0$이 평행하므로

$$\frac{a+2}{1}=\frac{3}{a}\neq\frac{3}{1}$$

$\frac{a+2}{1}=\frac{3}{a}$에서 $\qquad a(a+2)=3$

$$a^2+2a-3=0,\qquad (a+3)(a-1)=0$$

$$\therefore a=-3 \text{ 또는 } a=1$$

그런데 $\frac{3}{a}\neq\frac{3}{1}$에서 $a\neq1$이므로 $\qquad a=-3$

$a=-3$일 때, 두 직선의 방정식은

$$x-3y+1=0,\ -x+3y+3=0$$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-3y+1=0$ 위의 점 $(-1,\ 0)$과 직선 $-x+3y+3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$d=\frac{|1+3|}{\sqrt{(-1)^2+3^2}}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$$\therefore 5ad=-6\sqrt{10}$$

답 $-6\sqrt{10}$

0142 $x-2y-2=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x-1$에서 직선 l_1의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 직선 l_2의 기울기도 $\frac{1}{2}$이다.

직선 l_2의 y절편이 양수이므로

$l_2: y=\frac{1}{2}x+k\ (k>0)$

라 하자.

A(2, 0), B(0, −1), C(−2k, 0), D(0, k)이므로 사각형 ADCB의 넓이는

$\triangle DCB+\triangle DBA=\frac{1}{2}\times(k+1)\times 2k+\frac{1}{2}\times(k+1)\times 2$

$=k^2+2k+1$

즉 $k^2+2k+1=25$이므로

$k^2+2k-24=0,\quad (k+6)(k-4)=0$

$\therefore k=4\ (\because k>0)$

따라서 직선 l_2의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x+4$, 즉 $x-2y+8=0$

두 직선 $x-2y-2=0$, $x-2y+8=0$ 사이의 거리는 점 A(2, 0)과 직선 $x-2y+8=0$ 사이의 거리와 같으므로

$d=\frac{|2+8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

$\therefore d^2=20$

답 20

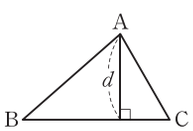
유형 031 꼭짓점의 좌표가 주어진 삼각형의 넓이 본책 32쪽

삼각형 ABC의 넓이는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $\overline{BC}$의 길이를 구한다.

(ii) 점 A와 직선 BC 사이의 거리 d를 구한다.

(iii) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times d$



0143 $\overline{AC}=\sqrt{(-6-0)^2+(5+1)^2}=6\sqrt{2}$

직선 AC의 방정식은

$y+1=\frac{5+1}{-6-0}(x-0)$

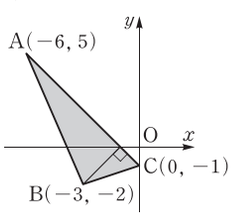
$\therefore x+y+1=0$

점 B(−3, −2)와 직선 AC 사이의 거리는

$\frac{|-3-2+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=12$

답 ③



0144 $\overline{OA}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$

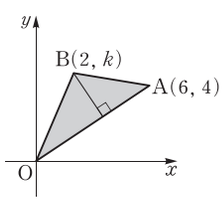
직선 OA의 방정식은

$y=\frac{4}{6}x$

$\therefore 2x-3y=0$

점 B(2, k)와 직선 OA 사이의 거리는

$\frac{|4-3k|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|4-3k|}{\sqrt{13}}$



이때 삼각형 OAB의 넓이가 10이므로

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{13}\times\frac{|4-3k|}{\sqrt{13}}=10$

$|4-3k|=10,\quad 4-3k=\pm 10$

$\therefore k=\frac{14}{3}\ (\because k>0)$

답 $\frac{14}{3}$

0145 $x-y+8=0$ …… ㉠

$3x+4y+10=0$ …… ㉡

$5x+2y-2=0$ …… ㉢

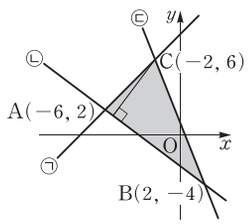
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=-6,\ y=2$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x=2,\ y=-4$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x=-2,\ y=6$ … ❶



세 직선의 교점을 A(−6, 2), B(2, −4), C(−2, 6)이라 하면

$\overline{AB}=\sqrt{(-6-2)^2+(2+4)^2}=10$

점 C(−2, 6)과 직선 ㉡ 사이의 거리는

$\frac{|-6+24+10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{28}{5}$ … ❷

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 10\times\frac{28}{5}=28$ … ❸

답 28

단계	채점 요소	비율
❶	세 직선의 교점의 좌표 구하기	40 %
❷	삼각형의 밑변의 길이와 높이 구하기	40 %
❸	삼각형의 넓이 구하기	20 %

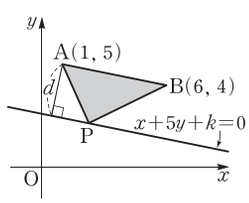
0146 직선 AB의 기울기는 $\frac{4-5}{6-1}=-\frac{1}{5}$

직선 AB와 직선 $x+5y+k=0$, 즉 $y=-\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}k$의 기울기가 $-\frac{1}{5}$로 같으므로 두 직선은 평행하다.

$\overline{AB}=\sqrt{(6-1)^2+(4-5)^2}=\sqrt{26}$이고 삼각형 ABP의 넓이가 7이므로 두 직선 사이의 거리를 d라 하면

$\frac{1}{2}\times\sqrt{26}\times d=7$

$\therefore d=\frac{14}{\sqrt{26}}$



즉 점 A(1, 5)와 직선 $x+5y+k=0$ 사이의 거리가 $\frac{14}{\sqrt{26}}$이므로

$\frac{|1+25+k|}{\sqrt{1^2+5^2}}=\frac{14}{\sqrt{26}}$

$|k+26|=14,\quad k+26=\pm 14$

$\therefore k=-12$ 또는 $k=-40$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-12+(-40)=-52$

답 −52

유형 032 자취의 방정식 — 점이 나타내는 도형의 방정식 본책 33쪽

P(x, y)라 하고 주어진 조건을 이용하여 x, y에 대한 식을 세운 후 정리하여 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구한다.

0147 P(x, y)라 하면 $\overline{PR}=2\overline{PS}$이므로

$$\frac{|3x-y-4|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=2\times\frac{|x+3y+2|}{\sqrt{1^2+3^2}}$$

$$|3x-y-4|=2|x+3y+2|$$

$$3x-y-4=\pm2(x+3y+2)$$

$\therefore x-7y-8=0$ 또는 $x+y=0$

답 $x-7y-8=0$ 또는 $x+y=0$

0148 $\overline{AB}=\sqrt{(-4-2)^2+(-3-0)^2}=3\sqrt{5}$

직선 AB의 방정식은

$$y-0=\frac{-3-0}{-4-2}(x-2) \qquad \therefore x-2y-2=0$$

점 P와 직선 AB 사이의 거리를 d라 하면 삼각형 ABP의 넓이가 15이므로

$$\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times d=15 \qquad \therefore d=2\sqrt{5}$$

즉 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$이므로 P(x, y)라 하면

$$\frac{|x-2y-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$$

$$|x-2y-2|=10, \qquad x-2y-2=\pm10$$

$\therefore x-2y-12=0$ 또는 $x-2y+8=0$

따라서 구하는 도형의 방정식은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

유형 033 자취의 방정식 — 각의 이등분선의 방정식 본책 33쪽

두 직선 l, l'이 이루는 각의 이등분선의 방정식

➜ 각의 이등분선 위의 임의의 점을 P(x, y)라 하고 점 P에서 두 직선 l, l'까지의 거리가 같음을 이용하여 식을 세운다.

0149 주어진 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 P(x, y)라 하면 점 P에서 두 직선까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|x+7y-3|}{\sqrt{1^2+7^2}}=\frac{|5x-5y-1|}{\sqrt{5^2+(-5)^2}}$$

$$|x+7y-3|=|5x-5y-1|$$

$$x+7y-3=\pm(5x-5y-1)$$

$\therefore 2x-6y+1=0$ 또는 $3x+y-2=0$

이때 기울기가 음수인 직선의 방정식은

$3x+y-2=0$ 답 $3x+y-2=0$

0150 주어진 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점 $(5, 2)$에서 두 직선까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|5-6+3|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|5+6+a|}{\sqrt{1^2+3^2}} \quad \cdots ❶$$

$$2=|11+a|, \qquad 11+a=\pm2$$

$\therefore a=-9$ 또는 $a=-13$ … ❷

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$-9+(-13)=-22$ … ❸

답 -22

단계	채점 요소	비율
❶	주어진 조건을 이용하여 a에 대한 식 세우기	40 %
❷	a의 값 구하기	40 %
❸	모든 실수 a의 값의 합 구하기	20 %

0151 y축과 직선 $y=\frac{5}{12}x$가 이루는 예각의 이등분선 위의 임의의 점을 P(x, y)라 하면 점 P에서 직선 $y=\frac{5}{12}x$, 즉 $5x-12y=0$과 y축까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|5x-12y|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=|x|$$

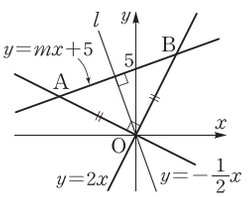
$$|5x-12y|=13|x|, \qquad 5x-12y=\pm13x$$

$$\therefore y=-\frac{2}{3}x \text{ 또는 } y=\frac{3}{2}x$$

이때 y축과 직선 $y=\frac{5}{12}x$가 이루는 예각을 이등분하는 직선의 기울기는 양수이므로 구하는 직선의 방정식은 $y=\frac{3}{2}x$이다.

답 ④

0152 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=mx+5$와 두 직선 $y=-\frac{1}{2}x$, $y=2x$의 교점을 각각 A, B라 하면



$\overline{OA}=\overline{OB}$

이등변삼각형 OAB에서 $\angle AOB$를 이등분하는 직선을 l이라 하면

$\overline{AB}\perp l$

직선 l 위의 한 점을 P(x, y)라 하면 점 P에서 두 직선 $y=-\frac{1}{2}x$와 $y=2x$, 즉 $x+2y=0$과 $2x-y=0$까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|x+2y|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2x-y|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$|x+2y|=|2x-y|, \qquad x+2y=\pm(2x-y)$$

$$\therefore y=\frac{1}{3}x \text{ 또는 } y=-3x$$

이때 직선 l과 직선 $y=mx+5$는 수직이므로

$$\frac{1}{3}m=-1 \text{ 또는 } -3m=-1$$

$$\therefore m=\frac{1}{3} \ (\because m>0)$$

답 ①

1등급 유형 도전하기 본책 34~35쪽

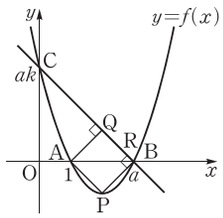
0153 Step 1 두 직선 AP와 BC가 평행함을 이용하여 a의 값을 구한다.

$f(x)=kx^2-k(a+1)x+ak=k\left(x-\frac{a+1}{2}\right)^2-\frac{k(a-1)^2}{4}$

직선 AP의 기울기는

$$\frac{-\frac{k(a-1)^2}{4}}{\frac{a+1}{2}-1}=\frac{-\frac{k(a-1)^2}{4}}{\frac{a-1}{2}}$$

$$=\boxed{\text{(가) } \frac{k}{2}}\times(1-a)$$



직선 BC의 기울기는 $\frac{ak}{-a}=-k$

두 직선 AP와 BC가 평행하므로

$\frac{k(1-a)}{2}=-k$

$\frac{1-a}{2}=-1\ (\because k\neq0)$ $\therefore a=\boxed{\text{(나) } 3}$

Step 2 $\overline{AQ}=\overline{AP}$임을 이용하여 k의 값을 구한다.

B(3, 0), C(0, 3k), P(2, −k)이므로 직선 BC의 방정식은

$y=-k(x-\boxed{\text{(나) } 3})$

$\therefore kx+y-3k=0$

이때 $\overline{AQ}$는 점 A와 직선 BC 사이의 거리와 같고, $\overline{AQ}=\overline{AP}$이므로

$\frac{|k-3k|}{\sqrt{k^2+1^2}}=\sqrt{(1-2)^2+k^2}$

$\frac{2k}{\sqrt{k^2+1}}=\boxed{\text{(다) } \sqrt{k^2+1}}\ (\because k>0)$

$2k=k^2+1$, $(k-1)^2=0$

$\therefore k=\boxed{\text{(라) } 1}$

Step 3 $g(p)\times h(q)$의 값을 구한다.

$g(k)=\frac{k}{2}$, $h(k)=\sqrt{k^2+1}$, $p=3$, $q=1$이므로

$g(p)\times h(q)=g(3)\times h(1)$

$=\frac{3}{2}\times\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 답 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

논리 Check

최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 A$(a, 0)(0<a<6)$, B$(6, 0)$에서 만나고 y축과 점 C에서 만난다. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점을 P, 두 점 A, P에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하자. 사각형 APRQ가 정사각형일 때, $f(10)$의 값을 구하시오.

풀이 $f(x)=k(x-a)(x-6)$ $(k>0)$이라 하면

$f(x)=kx^2-k(a+6)x+6ak=k\left(x-\frac{a+6}{2}\right)^2-\frac{k(a-6)^2}{4}$이므로

C$(0, 6ak)$, P$\left(\frac{a+6}{2}, -\frac{k(a-6)^2}{4}\right)$

직선 AP의 기울기는

$$\frac{-\frac{k(a-6)^2}{4}}{\frac{a+6}{2}-a}=\frac{\frac{k(a-6)^2}{4}}{\frac{a-6}{2}}=\frac{k(a-6)}{2}$$

직선 BC의 기울기는 $\frac{6ak}{-6}=-ak$

두 직선 AP와 BC가 평행하므로

$\frac{k(a-6)}{2}=-ak$

$\frac{a-6}{2}=-a\ (\because k\neq0)$ $\therefore a=2$

따라서 A$(2, 0)$, C$(0, 12k)$, P$(4, -4k)$이므로 직선 BC의 방정식은

$y-0=-2k(x-6)$ $\therefore 2kx+y-12k=0$

이때 $\overline{AQ}=\overline{AP}$이므로

$\frac{|4k-12k|}{\sqrt{(2k)^2+1^2}}=\sqrt{(4-2)^2+(-4k)^2}$

$\frac{8k}{\sqrt{4k^2+1}}=\sqrt{4+16k^2}\ (\because k>0)$, $4k=1+4k^2$

$(2k-1)^2=0$ $\therefore k=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)(x-6)$이므로

$f(10)=16$ 답 16

0154 Step 1 사각형 BEFD와 삼각형 OFC의 넓이 사이의 관계를 이용하여 선분 CE와 선분 BD의 길이 사이의 관계를 구한다.

$\triangle OFC+6=\square BEFD$에서

$\triangle OFC+6+\triangle CFE=\square BEFD+\triangle CFE$

$\therefore \triangle OEC+6=\triangle CDB$

따라서 $\frac{1}{2}\times6\times\overline{CE}+6=\frac{1}{2}\times6\times\overline{BD}$에서

$3\overline{CE}+6=3\overline{BD}$ $\therefore \overline{CE}+2=\overline{BD}$

Step 2 직선 OE와 직선 CD의 기울기의 합을 이용하여 선분 CE의 길이를 구한다.

$\overline{CE}=k$라 하면 $\overline{BD}=k+2$이므로 E$(k, 6)$, D$(6, 4-k)$

직선 OE의 기울기는 $\frac{6}{k}$, 직선 CD의 기울기는 $-\frac{k+2}{6}$이고 두 직선의 기울기의 합이 $\frac{7}{3}$이므로

$\frac{6}{k}-\frac{k+2}{6}=\frac{7}{3}$, $36-k(k+2)=14k$

$k^2+16k-36=0$, $(k+18)(k-2)=0$

$\therefore k=2\ (\because k>0)$

Step 3 두 직선 OE, CD의 방정식을 각각 구하고 교점의 좌표를 구하여 $11(a+b)$의 값을 구한다.

직선 OE는 기울기가 3이고 원점을 지나므로 그 방정식은

$y=3x$ …… ㉠

직선 CD는 기울기가 $-\frac{2}{3}$이고 점 C$(0, 6)$을 지나므로 그 방정식은

$y=-\frac{2}{3}x+6$ …… ㉡

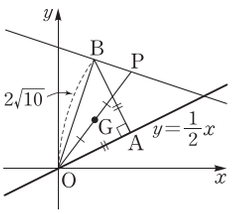
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\frac{18}{11}$, $y=\frac{54}{11}$

따라서 $a=\frac{18}{11}$, $b=\frac{54}{11}$이므로

$11(a+b)=11\times\left(\frac{18}{11}+\frac{54}{11}\right)=72$ 답 72

0155 Step 1 직각삼각형의 외심은 빗변의 중점임을 이용하여 점 A의 좌표를 구한다.

직각삼각형의 외접원의 지름의 길이는 빗변의 길이와 같으므로 직각이등변삼각형 OAB에서



$\overline{OB}=2\sqrt{10}$

$\therefore \overline{OA}=\overline{AB}=\dfrac{\overline{OB}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{5}$

$A(2a, a)$ $(a>0)$라 하면

$\overline{OA}=\sqrt{(2a)^2+a^2}=\sqrt{5}a$

이므로 $\sqrt{5}a=2\sqrt{5}$ $\therefore a=2$ $\therefore A(4, 2)$

Step 2 점 A를 지나고 직선 $y=\dfrac{1}{2}x$에 수직인 직선의 방정식을 구한 후 점 B의 좌표를 구한다.

점 $A(4, 2)$를 지나고 직선 $y=\dfrac{1}{2}x$에 수직인 직선의 방정식은

$y-2=-2(x-4)$ $\therefore y=-2x+10$

점 B가 이 직선 위의 점이므로 $B(b, -2b+10)$ $(0<b<5)$이라 하면

$\overline{OB}^2=b^2+(-2b+10)^2=40$

$b^2-8b+12=0$, $(b-2)(b-6)=0$

$\therefore b=2$ ($\because 0<b<5$) $\therefore B(2, 6)$

Step 3 점 P의 좌표를 구한 후 직선 BP의 방정식을 구하여 y절편을 구한다.

삼각형 OAB의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\dfrac{4+2}{3}, \dfrac{2+6}{3}\right)$, 즉 $\left(2, \dfrac{8}{3}\right)$

$P(p, q)$라 하면 점 G는 선분 OP의 중점이므로

$\dfrac{p}{2}=2$, $\dfrac{q}{2}=\dfrac{8}{3}$ $\therefore p=4$, $q=\dfrac{16}{3}$

즉 $P\left(4, \dfrac{16}{3}\right)$이므로 직선 BP의 방정식은

$y-6=\dfrac{\frac{16}{3}-6}{4-2}(x-2)$ $\therefore y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{20}{3}$

따라서 직선 BP의 y절편은 $\dfrac{20}{3}$이다. 답 $\dfrac{20}{3}$

0156 Step 1 두 점 A, B의 좌표를 각각 구한다.

$l: 2x-y-4=0$에서 $y=0$일 때 $x=2$이므로 $A(2, 0)$

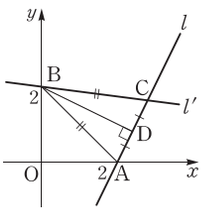
$l': mx-y+2=0$에서 직선 l'은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 2)$를 지나므로 $B(0, 2)$

Step 2 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형에서 밑변 AC의 수직이등분선이 점 B를 지남을 이용하여 점 C의 좌표와 그때의 m의 값을 구한다.

(i) $\overline{AB}=\overline{BC}$인 경우

오른쪽 그림과 같이 선분 AC의 중점을 D라 하면 직선 BD는 선분 AC의 수직이등분선이다.

직선 l의 기울기가 2이므로 직선 BD는 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$이고 점 $B(0, 2)$를 지나는 직선이다.



따라서 직선 BD의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{2}x+2$ …… ㉠

$2x-y-4=0$과 ㉠을 연립하여 풀면

$x=\dfrac{12}{5}$, $y=\dfrac{4}{5}$

$\therefore D\left(\dfrac{12}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$

$C(a, b)$라 하면 점 D가 선분 AC의 중점이므로

$\dfrac{a+2}{2}=\dfrac{12}{5}$, $\dfrac{b}{2}=\dfrac{4}{5}$

$\therefore a=\dfrac{14}{5}$, $b=\dfrac{8}{5}$

따라서 점 $C\left(\dfrac{14}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$이 직선 l' 위의 점이므로

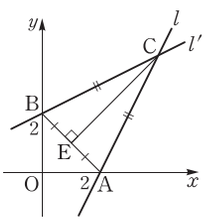
$\dfrac{14}{5}m-\dfrac{8}{5}+2=0$

$\therefore m=-\dfrac{1}{7}$

Step 3 $\overline{BC}=\overline{AC}$인 이등변삼각형에서 밑변 AB의 수직이등분선이 점 C를 지남을 이용하여 점 C의 좌표와 그때의 m의 값을 구한다.

(ii) $\overline{BC}=\overline{AC}$인 경우

오른쪽 그림과 같이 선분 AB의 중점을 E라 하면 직선 CE는 선분 AB의 수직이등분선이다.



직선 AB의 기울기는

$\dfrac{2-0}{0-2}=-1$

점 E의 좌표는

$\left(\dfrac{2+0}{2}, \dfrac{0+2}{2}\right)$, 즉 $(1, 1)$

직선 CE는 기울기가 1이고 점 $E(1, 1)$을 지나는 직선이므로 그 방정식은 $y=x$ …… ㉡

$2x-y-4=0$과 ㉡을 연립하여 풀면

$x=4$, $y=4$

따라서 점 $C(4, 4)$가 직선 l' 위의 점이므로

$4m-4+2=0$

$\therefore m=\dfrac{1}{2}$

Step 4 m_1+m_2의 값을 구한다.

(i), (ii)에서 $m_1=-\dfrac{1}{7}$, $m_2=\dfrac{1}{2}$이므로

$m_1+m_2=\dfrac{5}{14}$ 답 $\dfrac{5}{14}$

0157 Step 1 삼각형 PQR가 직각삼각형이 되기 위한 조건을 생각해 본다.

삼각형 PQR가 직각삼각형이 되려면 세 직선 중 어느 두 직선이 수직이어야 한다.

이때 직선 l_2와 직선 $x=k$는 수직이 아니므로 두 직선 l_1, l_2가 수직이거나 두 직선 l_1, $x=k$가 수직이어야 한다.

Step 2 두 직선 l_1, l_2가 수직인 경우의 a의 값을 구하고, 삼각형 PQR의 넓이를 이용하여 k의 값을 구한다.

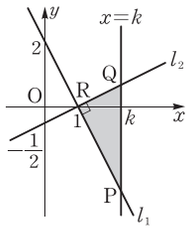
(i) 두 직선 l_1, l_2가 수직인 경우

$a\times1+1\times(-2)=0$이므로

$a=2$

$2x+y-2=0$, $x-2y-1=0$을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=0$ $\therefore$ R(1, 0)



이때 $P(k,\ -2k+2)$, $Q\left(k,\ \frac{k-1}{2}\right)$이므로

$\overline{PQ}=\left|-2k+2-\frac{k-1}{2}\right|=\left|\frac{5k-5}{2}\right|$

삼각형 PQR에서 선분 PQ를 밑변으로 생각하면 높이는 $|k-1|$이므로

$\frac{1}{2}\times\left|\frac{5k-5}{2}\right|\times|k-1|=\frac{5}{2}$

$\frac{5}{4}(k-1)^2=\frac{5}{2}$, $(k-1)^2=2$

$k-1=\pm\sqrt{2}$ $\therefore k=1\pm\sqrt{2}$

Step 3 두 직선 l_1, $x=k$가 수직인 경우의 a의 값을 구하고, 삼각형 PQR의 넓이를 이용하여 k의 값을 구한다.

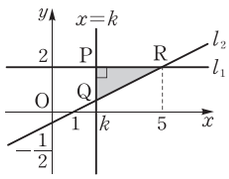
(ii) 두 직선 l_1, $x=k$가 수직인 경우

직선 $ax+y-2=0$은 y축에 수직이어야 하므로 $a=0$

$y-2=0$, $x-2y-1=0$을 연립하여 풀면

$x=5$, $y=2$

$\therefore$ R(5, 2)



이때 $P(k,\ 2)$, $Q\left(k,\ \frac{k-1}{2}\right)$이므로

$\overline{PQ}=\left|2-\frac{k-1}{2}\right|=\left|\frac{k-5}{2}\right|$, $\overline{PR}=|k-5|$

삼각형 PQR의 넓이가 $\frac{5}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times\left|\frac{k-5}{2}\right|\times|k-5|=\frac{5}{2}$

$\frac{1}{4}(k-5)^2=\frac{5}{2}$, $(k-5)^2=10$

$k-5=\pm\sqrt{10}$ $\therefore k=5\pm\sqrt{10}$

Step 4 모든 실수 k의 값의 곱을 구한다.

(i), (ii)에서 $k=1\pm\sqrt{2}$ 또는 $k=5\pm\sqrt{10}$이므로 모든 실수 k의 값의 곱은

$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})(5-\sqrt{10})(5+\sqrt{10})=-15$

답 -15

0158 Step 1 직선 $x-y+2=0$ 위의 점 중에서 직선 $3x-y+4=0$에 이르는 거리가 $\sqrt{10}$인 두 점 A, B의 좌표를 구한다.

직선 $x-y+2=0$ 위의 점 $(a,\ a+2)$와 직선 $3x-y+4=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이면

$\frac{|3a-a-2+4|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$

$|2a+2|=10$, $2a+2=\pm10$

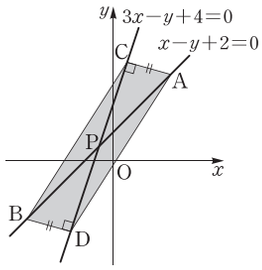
$\therefore a=4$ 또는 $a=-6$

$\therefore$ A(4, 6), B(−6, −4)

Step 2 □ACBD가 평행사변형임을 이용하여 넓이를 구한다.

$\overline{AC}\parallel\overline{BD}$, $\overline{AC}=\overline{BD}$에서

□ACBD는 평행사변형이므로 두 직선 $x-y+2=0$, $3x-y+4=0$의 교점을 P라 하면



$\overline{AP}=\overline{BP}=\frac{1}{2}\overline{AB}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(-6-4)^2+(-4-6)^2}$

$=5\sqrt{2}$

직각삼각형 ACP에서

$\overline{PC}=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-(\sqrt{10})^2}=2\sqrt{10}$

$\therefore$ □ACBD$=4\triangle$ACP

$=4\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times2\sqrt{10}\right)$

$=40$

답 40

다른 풀이 $C(b,\ 3b+4)$라 하면 $\overline{AC}=\sqrt{10}$이므로

$\sqrt{(b-4)^2+(3b+4-6)^2}=\sqrt{10}$

$10b^2-20b+10=0$, $(b-1)^2=0$

$\therefore b=1$ $\therefore$ C(1, 7)

$D(c,\ 3c+4)$라 하면 $\overline{BD}=\sqrt{10}$이므로

$\sqrt{(c+6)^2+(3c+4+4)^2}=\sqrt{10}$

$10c^2+60c+90=0$, $(c+3)^2=0$

$\therefore c=-3$ $\therefore$ D(−3, −5)

따라서 $\overline{CD}=\sqrt{(-3-1)^2+(-5-7)^2}=4\sqrt{10}$이므로 사각형 ACBD의 넓이는

$\triangle$ACD$+\triangle$BDC

$=\frac{1}{2}\times4\sqrt{10}\times\sqrt{10}+\frac{1}{2}\times4\sqrt{10}\times\sqrt{10}$

$=40$

0159 Step 1 두 점 A, B의 좌표를 k에 대한 식으로 나타낸다.

$f(x)=kx^2-2kx-k+2$

$=k(x-1)^2-2k+2$

이므로 $A(1,\ -2k+2)$, $B(0,\ -k+2)$

Step 2 직선 AB가 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 이용하여 점 C와 직선 AB 사이의 거리가 최대일 때의 k의 값을 구한다.

직선 AB의 기울기는

$\frac{(-2k+2)-(-k+2)}{1-0}=-k$

이므로 직선 AB의 방정식은

$y=-kx-k+2=-k(x+1)+2$

따라서 직선 AB는 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 2)$를 지난다.

D(−1, 2)라 하면 점 C와 직선 AB 사이의 거리는 직선 AB와 직선 CD가 서로 수직일 때 최대이다.

직선 CD의 기울기는 $\frac{2-(-1)}{-1-5}=-\frac{1}{2}$이므로

$-k\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ $\therefore k=-2$

Step 3 두 점 A, B의 좌표를 구하여 $\left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\right)^2$의 값을 구한다.

A(1, 6), B(0, 4)이므로

$\overline{AC}^2=(5-1)^2+(-1-6)^2=65$

$\overline{BC}^2=(5-0)^2+(-1-4)^2=50$

$\therefore \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\right)^2=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2}=\frac{50}{65}=\frac{10}{13}$ 답 $\frac{10}{13}$

시험 만점 완성하기

본책 36~39쪽

0160 전략 x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ $(ab\neq0)$임을 이용한다.

직선 $x+\frac{y}{3}=1$의 x절편은 1이고 직선 $\frac{x}{3}-\frac{y}{5}=-1$의 y절편은 5이므로 직선 PQ의 방정식은

$x+\frac{y}{5}=1$

이때 직선 PQ가 점 $(3, k)$를 지나므로

$3+\frac{k}{5}=1$ $\therefore k=-10$ 답 ①

0161 전략 네 점 A, B, C, D가 한 직선 위에 있으면 세 직선 AC, BC, CD의 기울기가 모두 같음을 이용한다.

네 점 $A(5, a)$, $B(-a, -1)$, $C(0, 2)$, $D(b+2, b)$가 한 직선 위에 있으므로 세 직선 AC, BC, CD의 기울기가 모두 같다.

따라서 $\frac{a-2}{5-0}=\frac{-1-2}{-a-0}=\frac{b-2}{(b+2)-0}$이므로

$\frac{a-2}{5}=\frac{3}{a}=\frac{b-2}{b+2}$

$\frac{a-2}{5}=\frac{3}{a}$에서 $a^2-2a-15=0$

$(a+3)(a-5)=0$ $\therefore a=5$ $(\because a>0)$

$\frac{3}{a}=\frac{b-2}{b+2}$, 즉 $\frac{3}{5}=\frac{b-2}{b+2}$에서

$3(b+2)=5(b-2)$, $2b=16$ $\therefore b=8$

$\therefore ab=40$ 답 ⑤

0162 전략 삼각형의 한 꼭짓점과 그 대변의 중점을 지나는 직선은 삼각형의 넓이를 이등분함을 이용한다.

꼭짓점 A를 지나는 직선이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 선분 BC의 중점을 지나야 한다.

선분 BC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{0+6}{2}, \frac{-3+3}{2}\right)$, 즉 $(3, 0)$

두 점 $A(2, 4)$, $(3, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-0=\frac{4-0}{2-3}(x-3)$ $\therefore y=-4x+12$

따라서 구하는 y절편은 12이다. 답 ④

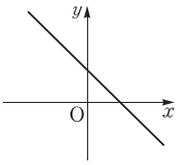
0163 전략 주어진 직선의 방정식을 $y=px+q$의 꼴로 변형한 후 기울기와 y절편의 부호를 파악하여 그래프의 개형을 그린다.

$ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $ab>0$, $bc<0$에서 $-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}>0$

즉 기울기는 음수이고 y절편은 양수이므로 주어진 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 이 직선은 제3사분면을 지나지 않는다. 답 ③



0164 전략 주어진 직선의 방정식을 k에 대하여 정리한 후 k의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 x, y의 값을 구한다.

$(2k+3)x+(k+4)y+3k-3=0$을 k에 대하여 정리하면

$k(2x+y+3)+3x+4y-3=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$2x+y+3=0$, $3x+4y-3=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-3$, $y=3$

따라서 점 $P(-3, 3)$과 원점 사이의 거리는

$\sqrt{(-3)^2+3^2}=3\sqrt{2}$ 답 ②

0165 전략 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$임을 이용한다.

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x-4y+3+k(x+2y-9)=0$ (k는 실수) …… ㉠

이라 하면 직선 ㉠이 점 $(3, 6)$을 지나므로

$-18+6k=0$ $\therefore k=3$

이것을 ㉠에 대입하면 $x-4y+3+3(x+2y-9)=0$

$\therefore 2x+y-12=0$

⑤ $2\times7-2-12=0$이므로 점 $(7, -2)$는 직선 l 위의 점이다.

답 ⑤

0166 전략 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 수직이 되려면 $aa'+bb'=0$이어야 함을 이용한다.

두 직선이 수직이 되려면

$(k+1)(k^2-2k-8)+(k+2)(k-2)=0$

$(k+1)(k+2)(k-4)+(k+2)(k-2)=0$

$(k+2)\{(k+1)(k-4)+(k-2)\}=0$

$(k+2)(k^2-2k-6)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=1\pm\sqrt{7}$

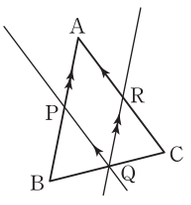
따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$-2\times(1+\sqrt{7})\times(1-\sqrt{7})=12$ 답 ④

0167 전략 직선 AB는 직선 QR와 평행하고, 직선 AC는 직선 PQ와 평행함을 이용한다.

세 점 P, Q, R는 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 중점이므로 직선 AB는 직선 QR와 평행하고, 직선 AC는 직선 PQ와 평행하다.

직선 QR의 기울기가 5이므로 직선 AB는 기울기가 5이고 점 $P(-1, 2)$를 지나는



직선이다. 즉 직선 AB의 방정식은

$y-2=5\{x-(-1)\}$

$\therefore y=5x+7$ …… ㉠

직선 PQ의 기울기가 $-\frac{4}{3}$이므로 직선 AC는 기울기가 $-\frac{4}{3}$이고 점 R(3, 3)을 지나는 직선이다. 즉 직선 AC의 방정식은

$y-3=-\frac{4}{3}(x-3)$ $\therefore y=-\frac{4}{3}x+7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=0$, $y=7$

$\therefore$ A(0, 7)

따라서 $a=0$, $b=7$이므로 $a+b=7$ 답 ④

다른 풀이 $4x+3y-2=0$, $5x-y-12=0$을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=-2$ $\therefore$ Q(2, −2)

사각형 APQR는 평행사변형이므로 두 대각선의 중점이 일치한다.

즉 $\frac{a+2}{2}=\frac{-1+3}{2}$, $\frac{b-2}{2}=\frac{2+3}{2}$이므로

$a=0$, $b=7$ $\therefore a+b=7$

0168 전략 직선 AG가 선분 BC의 수직이등분선임을 이용한다.

삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이고 이등변삼각형의 무게중심은 밑변의 수직이등분선 위에 있으므로 직선 AG는 선분 BC의 수직이등분선이다.

직선 $3x-y-9=0$이 선분 BC의 중점 $\left(\frac{a+4}{2}, \frac{-1+b}{2}\right)$를 지나므로

$3\times\frac{a+4}{2}-\frac{-1+b}{2}-9=0$

$\therefore 3a-b=5$ …… ㉠

또 직선 $3x-y-9=0$, 즉 $y=3x-9$의 기울기가 3이므로 직선 BC의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

$\frac{-1-b}{a-4}=-\frac{1}{3}$에서 $3+3b=a-4$

$\therefore a-3b=7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-2$

$\therefore ab=-2$ 답 ③

0169 전략 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용한다.

점 (2, 3)에서 두 직선 $ax+y-3=0$, $3x-y-5=0$까지의 거리가 같으므로

$\frac{|2a+3-3|}{\sqrt{a^2+1^2}}=\frac{|6-3-5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$

$\frac{|2a|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{10}}$, $\sqrt{10}|a|=\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하면 $10a^2=a^2+1$

$a^2=\frac{1}{9}$ $\therefore a=\frac{1}{3}$ ($\because a>0$) 답 ①

0170 전략 이차함수 $y=x^2-4x+6$의 그래프의 접선 중 직선 $y=-2x+a$에 평행한 접선을 이용한다.

이차함수 $y=x^2-4x+6$의 그래프에 접하고 직선 $y=-2x+a$에 평행한 직선의 방정식을

$y=-2x+k$ (k는 상수)

라 하자.

이차방정식 $x^2-4x+6=-2x+k$, 즉 $x^2-2x+6-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(6-k)=0$ $\therefore k=5$

직선 $y=-2x+5$ 위의 점 (0, 5)와 직선 $y=-2x+a$, 즉 $2x+y-a=0$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$이므로

$\frac{|5-a|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\sqrt{5}$

$|5-a|=10$, $5-a=\pm10$

$\therefore a=-5$ 또는 $a=15$

그런데 $a=15$이면 이차함수 $y=x^2-4x+6$의 그래프와 직선 $y=-2x+15$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 거리의 최솟값이 0이 된다.

$\therefore a=-5$ 답 ②

0171 전략 점 P에서 두 직선에 이르는 거리를 각각 식으로 나타낸 후 $3d_1=2d_2$임을 이용하여 식을 세운다.

P(x, y)라 하면 $3d_1=2d_2$이므로

$3\times\frac{|2x-3y-4|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=2\times\frac{|3x-2y-1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}$

$3|2x-3y-4|=2|3x-2y-1|$

$3(2x-3y-4)=\pm2(3x-2y-1)$

$\therefore y+2=0$ 또는 $12x-13y-14=0$

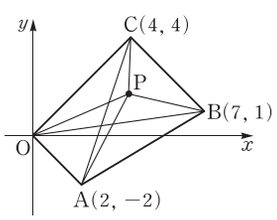
이 중 그래프가 제1사분면을 지나지 않는 것은

$y+2=0$ 답 ②

0172 전략 $\overline{PO}+\overline{PB}$, $\overline{PA}+\overline{PC}$의 값이 각각 최소가 되기 위한 점 P의 위치를 찾는다.

오른쪽 그림에서 $\overline{PO}+\overline{PB}\geq\overline{OB}$이므로 $\overline{PO}+\overline{PB}$의 값이 최소가 되려면 점 P는 선분 OB 위에 있어야 한다.

또 $\overline{PA}+\overline{PC}\geq\overline{AC}$이므로 $\overline{PA}+\overline{PC}$의 값이 최소가 되려면 점 P는 선분 AC 위에 있어야 한다.



이때 위의 두 조건을 모두 만족시키는 점 P는 두 선분 OB와 AC의 교점이다.

직선 OB의 방정식은 $y=\frac{1}{7}x$ …… ㉠

직선 AC의 방정식은

$y-(-2)=\frac{4+2}{4-2}(x-2)$

$\therefore y=3x-8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=\frac{14}{5}$, $y=\frac{2}{5}$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $\left(\frac{14}{5}, \frac{2}{5}\right)$ 답 $\left(\frac{14}{5}, \frac{2}{5}\right)$

0173 전략 직선 l 위의 세 점이 한 직선 위에 있을 조건을 이용한다.

$\square BCQP=2\square OAPQ$이므로

$$\square OAPQ=\frac{1}{3}\square OABC=\frac{1}{3}\times(4\times6)=8$$

$P(4,\ a)$, $Q(0,\ b)$라 하면

$$\frac{1}{2}\times(a+b)\times4=8 \qquad \therefore\ a+b=4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$R(-2,\ 0)$이라 하면 세 점 P, Q, R가 한 직선 위에 있으므로 직선 PR와 직선 QR의 기울기가 같아야 한다.

즉 $\frac{a}{4+2}=\frac{b}{2}$이므로 $\qquad a=3b \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\qquad a=3,\ b=1$

$\therefore\ \overline{AP}\times\overline{OQ}=3\times1=3$ 답 3

0174 전략 직선 l의 방정식을 k에 대하여 정리해 본다.

ㄱ. $k=1$이면 직선 l의 방정식은

$$2x-4y-2=0 \qquad \therefore\ x-2y-1=0$$

이때 $\frac{1}{3}=\frac{-2}{-6}\neq\frac{-1}{2}$이므로 직선 l과 직선 $3x-6y+2=0$은 평행하다. (참)

ㄴ. $(k+1)x+(-k-3)y-2k=0$을 k에 대하여 정리하면

$$k(x-y-2)+x-3y=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x-y-2=0$, $x-3y=0$을 연립하여 풀면

$$x=3,\ y=1$$

즉 직선 l은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(3,\ 1)$을 지나므로 제1사분면을 반드시 지난다. (참)

ㄷ. ㉠에서 $x-y-2=0$이 되도록 하는 실수 k의 값은 존재하지 않는다.

따라서 직선 l은 두 직선 $x-y-2=0$, $x-3y=0$의 교점을 지나는 직선 중 직선 $x-y-2=0$을 나타낼 수 없다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

0175 전략 네 직선 중 평행한 두 직선을 먼저 찾는다.

두 직선 $2x+ay-5=0$과 $2x+ay-1=0$이 평행하므로 나머지 두 직선 $x+2by+1=0$과 $x+(b-a)y+2=0$이 평행하다.

즉 $\frac{1}{1}=\frac{2b}{b-a}\neq\frac{1}{2}$이므로

$$b-a=2b \qquad \therefore\ a+b=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 두 직선 $2x+ay-5=0$과 $x+2by+1=0$은 수직이므로

$$2\times1+a\times2b=0 \qquad \therefore\ ab=-1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=1,\ b=-1 \text{ 또는 } a=-1,\ b=1$$

$\therefore\ a^2+b^2=1+1=2$ 답 2

0176 전략 점 A와 직선 $x-y+3=0$ 사이의 거리가 정삼각형 ABC의 높이와 같음을 이용한다.

점 $A(3,\ a)$와 직선 $x-y+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3-a+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|6-a|}{\sqrt{2}}$$

정삼각형 ABC의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{6}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$이므로

$$\frac{|6-a|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$|6-a|=3, \qquad 6-a=\pm3$$

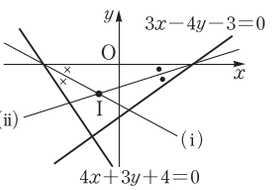
$\therefore\ a=3$ 또는 $a=9$

따라서 모든 a의 값의 합은

$$3+9=12$$ 답 12

0177 전략 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점에서 세 변에 이르는 거리가 같음을 이용한다.

두 직선 $4x+3y+4=0$, $3x-4y-3=0$과 x축으로 둘러싸인 삼각형은 오른쪽 그림과 같다.



이때 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점에서 세 변에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|4a+3b+4|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|3a-4b-3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=|b|$$

(i) $\frac{|4a+3b+4|}{\sqrt{4^2+3^2}}=|b|$에서

$$|4a+3b+4|=5|b|, \qquad 4a+3b+4=\pm5b$$

$\therefore\ 2a-b+2=0$ 또는 $a+2b+1=0$

이때 위의 그림에서 각의 이등분선의 기울기가 음수이므로

$$a+2b+1=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) $\frac{|3a-4b-3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=|b|$에서

$$|3a-4b-3|=5|b|, \qquad 3a-4b-3=\pm5b$$

$\therefore\ a-3b-1=0$ 또는 $3a+b-3=0$

이때 위의 그림에서 각의 이등분선의 기울기가 양수이므로

$$a-3b-1=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\qquad a=-\frac{1}{5},\ b=-\frac{2}{5}$

$\therefore\ a+b=-\frac{3}{5}$ 답 $-\frac{3}{5}$

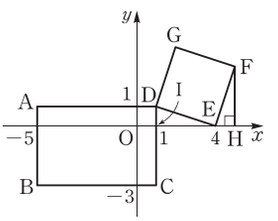
0178 전략 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나는 직선은 직사각형의 넓이를 이등분함을 이용한다.

주어진 두 사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 각 사각형의 두 대각선의 교점을 지나야 한다.

$A(-5,\ 1)$, $C(1,\ -3)$에서 직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표는

$$\left(\frac{-5+1}{2},\ \frac{1-3}{2}\right),\ \text{즉 } (-2,\ -1) \qquad \cdots ❶$$

오른쪽 그림과 같이 점 F에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고 $I(1,\ 0)$이라 하면 $\triangle DIE\equiv\triangle EHF$ (RHA 합동)이므로



$$\overline{EH}=\overline{DI}=1,\ \overline{FH}=\overline{EI}=3$$

$\therefore\ F(5,\ 3)$

D(1, 1), F(5, 3)에서 정사각형 DEFG의 두 대각선의 교점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$, 즉 (3, 2) … ❷

따라서 두 점 (−2, −1), (3, 2)를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{2+1}{3+2}=\frac{3}{5}$ … ❸

답 $\frac{3}{5}$

단계	채점 요소	배점
❶	직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표 구하기	1점
❷	정사각형 DEFG의 두 대각선의 교점의 좌표 구하기	2점
❸	두 사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 기울기 구하기	1점

0179 전략 주어진 직선이 항상 지나는 점의 좌표를 구한 후 그 점을 지나는 직선을 그려 본다.

$mx-y+5m-2=0$에서

$m(x+5)-y-2=0$ …… ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 (−5, −2)를 지난다. … ❶

오른쪽 그림에서

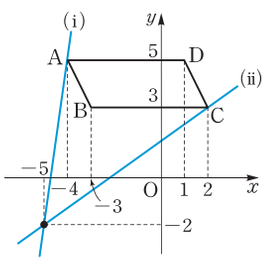
(i) 직선 ㉠이 점 A(−4, 5)를 지날 때

$m-7=0$ $\therefore m=7$

(ii) 직선 ㉠이 점 C(2, 3)을 지날 때

$7m-5=0$

$\therefore m=\frac{5}{7}$



(i), (ii)에서 m의 값의 범위는 $\frac{5}{7}\le m\le 7$ … ❷

따라서 $\alpha=\frac{5}{7}$, $\beta=7$이므로 $\alpha\beta=5$ … ❸

답 5

단계	채점 요소	배점
❶	주어진 직선이 항상 지나는 점의 좌표 구하기	1점
❷	m의 값의 범위 구하기	2점
❸	$\alpha\beta$의 값 구하기	1점

0180 전략 좌표평면이 여섯 부분으로 나누어지도록 하는 세 직선의 위치 관계를 구한다.

세 직선이 좌표평면을 여섯 부분으로 나누려면 두 직선만 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

$3x+y-3=0$ …… ㉠

$x+2y+9=0$ …… ㉡

$x+ay+4=0$ …… ㉢

(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 평행한 경우

$\frac{1}{3}=\frac{a}{1}\ne\frac{4}{-3}$이므로 $a=\frac{1}{3}$ … ❶

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 평행한 경우

$\frac{1}{1}=\frac{a}{2}\ne\frac{4}{9}$이므로 $a=2$ … ❷

(iii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=-6$

따라서 직선 ㉢이 점 (3, −6)을 지나야 하므로

$3-6a+4=0$

$\therefore a=\frac{7}{6}$ … ❸

이상에서 $a=\frac{1}{3}$ 또는 $a=2$ 또는 $a=\frac{7}{6}$

따라서 모든 a의 값의 합은

$\frac{1}{3}+2+\frac{7}{6}=\frac{7}{2}$ … ❹

답 $\frac{7}{2}$

단계	채점 요소	배점
❶	두 직선 $3x+y-3=0$, $x+ay+4=0$이 평행한 경우의 a의 값 구하기	1점
❷	두 직선 $x+2y+9=0$, $x+ay+4=0$이 평행한 경우의 a의 값 구하기	1점
❸	세 직선이 한 점에서 만나는 경우의 a의 값 구하기	2점
❹	모든 a의 값의 합 구하기	1점

0181 전략 평행한 두 직선 사이의 거리와 삼각형 AOB의 넓이를 이용하여 원점과 직선 AB 사이의 거리를 구한다.

평행한 두 직선 $y=2x+2$, $y=2x-5$ 사이의 거리는 직선 $y=2x+2$ 위의 점 (0, 2)와 직선 $y=2x-5$, 즉 $2x-y-5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|-2-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{7}{\sqrt{5}}$

$\therefore \overline{AB}=\frac{7}{\sqrt{5}}$ … ❶

원점과 직선 AB 사이의 거리를 d라 하면 삼각형 AOB의 넓이가 7이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{7}{\sqrt{5}}\times d=7$ $\therefore d=2\sqrt{5}$ … ❷

직선 AB는 직선 $y=2x+2$와 수직이므로 그 방정식을

$y=-\frac{1}{2}x+k$, 즉 $x+2y-2k=0$ (k는 상수)이라 하면

$d=2\sqrt{5}$이므로

$\frac{|-2k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$

$|2k|=10$ $\therefore k=\pm 5$

그런데 두 점 A, B가 제1사분면 위의 점이므로 직선 AB의 y절편은 양수이다.

$\therefore k=5$

따라서 직선 AB의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}x+5$ … ❸

답 $y=-\frac{1}{2}x+5$

단계	채점 요소	배점
❶	선분 AB의 길이 구하기	2점
❷	원점과 직선 AB 사이의 거리 구하기	1점
❸	직선 AB의 방정식 구하기	3점

03 원의 방정식

셀프 CHECK → 본책 40쪽

A 답 (1) 중심의 좌표: $(-1, 4)$, 반지름의 길이: 1
(2) 중심의 좌표: $(2, 0)$, 반지름의 길이: 3

B 답 $(x+3)^2+(y-3)^2=9$

C 답 (1) 만나지 않는다. (2) 서로 다른 두 점에서 만난다.

D 답 (1) $y=-2x\pm\sqrt{5}$ (2) $2x-y=5$

E 답 (1) $x-y-2=0$ (2) $x^2+y^2-x-3y-6=0$

내신유형 다지기 → 본책 41~53쪽

유형 034 중심에 대한 조건이 주어진 원의 방정식 → 본책 41쪽

(1) 중심이 x축 위에 있는 원의 방정식
➜ $(x-a)^2+y^2=r^2$
(2) 중심이 y축 위에 있는 원의 방정식
➜ $x^2+(y-b)^2=r^2$
(3) 중심이 $y=f(x)$의 그래프 위에 있는 원의 방정식
➜ $(x-a)^2+\{y-f(a)\}^2=r^2$

0182 원 $(x+2)^2+(y-2)^2=1$의 중심의 좌표가 $(-2, 2)$이므로 이 원과 중심이 같은 원의 방정식을
$(x+2)^2+(y-2)^2=r^2$
이라 하면 이 원이 원점을 지나므로
$r^2=2^2+(-2)^2=8$
또 점 $(a, 4)$를 지나므로
$(a+2)^2+(4-2)^2=8$
$(a+2)^2=4$, $a+2=\pm2$
$\therefore a=0$ 또는 $a=-4$
따라서 모든 a의 값의 합은 -4이다. 답 ①

0183 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{1\times1+2\times(-5)}{1+2}, \frac{1\times4+2\times7}{1+2}\right)$, 즉 $(-3, 6)$
이므로 이 점을 중심으로 하는 원의 방정식을
$(x+3)^2+(y-6)^2=r^2$
이라 하면 이 원이 점 $A(-5, 7)$을 지나므로
$r^2=(-5+3)^2+(7-6)^2=5$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+3)^2+(y-6)^2=5$ 답 $(x+3)^2+(y-6)^2=5$

다른 풀이 원의 중심 $(-3, 6)$과 점 $A(-5, 7)$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이이므로
$r^2=(-5+3)^2+(7-6)^2=5$

0184 원의 중심 (a, b)가 직선 $y=-2x+3$ 위에 있으므로
$b=-2a+3$ …… ㉠
따라서 원 $(x-a)^2+(y+2a-3)^2=r^2$이 두 점 $(-1, -3)$, $(3, 5)$를 지나므로
$(-1-a)^2+(-3+2a-3)^2=r^2$,
$(3-a)^2+(5+2a-3)^2=r^2$
$\therefore 5a^2-22a+37=r^2$, $5a^2+2a+13=r^2$
두 식을 연립하여 풀면
$a=1$, $r^2=20$
$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=1$
$\therefore a+b+r^2=22$ 답 ③

다른 풀이 원의 중심 $(a, -2a+3)$에서 두 점 $(-1, -3)$, $(3, 5)$까지의 거리가 같으므로
$(a+1)^2+(-2a+3+3)^2=(a-3)^2+(-2a+3-5)^2$
$5a^2-22a+37=5a^2+2a+13$
$-24a=-24$ $\therefore a=1$

0185 원의 중심의 좌표를 $(a, 0)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은
$(x-a)^2+y^2=r^2$
이 원이 두 점 $(1, 0)$, $(-3, -4)$를 지나므로
$(1-a)^2=r^2$, $(-3-a)^2+(-4)^2=r^2$
$\therefore a^2-2a+1=r^2$, $a^2+6a+25=r^2$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $r^2=16$
즉 주어진 원의 방정식은
$(x+3)^2+y^2=16$
원의 방정식에 $y=2$를 대입하면
$(x+3)^2+4=16$
$(x+3)^2=12$, $x+3=\pm2\sqrt{3}$
$\therefore x=-3+2\sqrt{3}$ 또는 $x=-3-2\sqrt{3}$
따라서 구하는 두 점 사이의 거리는
$-3+2\sqrt{3}-(-3-2\sqrt{3})=4\sqrt{3}$ 답 $4\sqrt{3}$

0186 선분 AB의 중점의 좌표는
$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+6}{2}\right)$, 즉 $(2, 4)$
직선 AB의 기울기는 $\frac{6-2}{3-1}=2$
따라서 선분 AB의 수직이등분선의 방정식은
$y-4=-\frac{1}{2}(x-2)$ $\therefore y=-\frac{1}{2}x+5$ … ❶
이 직선과 y축의 교점의 좌표는 $(0, 5)$ … ❷
점 $(0, 5)$를 중심으로 하는 원의 방정식을
$x^2+(y-5)^2=r^2$
이라 하면 이 원이 점 $(3, 1)$을 지나므로
$r^2=3^2+(1-5)^2=25$

즉 원의 반지름의 길이가 5이므로 원의 둘레의 길이는

$2\pi\times5=10\pi$ … ❸

답 10π

단계	채점 요소	비율
❶	선분 AB의 수직이등분선의 방정식 구하기	40 %
❷	원의 중심의 좌표 구하기	20 %
❸	원의 둘레의 길이 구하기	40 %

유형 035 지름의 양 끝 점이 주어진 원의 방정식 본책 41쪽

두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원

➜ (원의 중심)=($\overline{AB}$의 중점), (반지름의 길이)=$\frac{1}{2}\overline{AB}$

0187 $2x-3y+12=0$에 $y=0$을 대입하면

$2x+12=0$ $\therefore x=-6$

$2x-3y+12=0$에 $x=0$을 대입하면

$-3y+12=0$ $\therefore y=4$

$\therefore$ P$(-6, 0)$, Q$(0, 4)$

두 점 P, Q를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심은 선분 PQ의 중점이므로 그 좌표는

$\left(\frac{-6+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right)$, 즉 $(-3, 2)$

원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{13}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y-2)^2=13$ 답 $(x+3)^2+(y-2)^2=13$

0188 원 $(x+3)^2+(y-c)^2=10$이 점 A$(-4, 3)$을 지나므로

$(-4+3)^2+(3-c)^2=10$, $(3-c)^2=9$

$3-c=\pm3$ $\therefore c=6$ ($\because c>0$)

따라서 원의 중심의 좌표는 $(-3, 6)$이고 이 점은 선분 AB의 중점과 같으므로

$\frac{-4+a}{2}=-3$, $\frac{3+b}{2}=6$

$\therefore a=-2$, $b=9$

$\therefore a+b+c=13$ 답 ③

0189 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심은 선분 AB의 중점이므로 그 좌표는

$\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$, 즉 $(2, 0)$

원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times|6-(-2)|=4$

따라서 원의 방정식은 $(x-2)^2+y^2=16$

점 P(a, b)가 이 원 위의 점이므로

$(a-2)^2+b^2=16$ $\therefore b^2=-(a-2)^2+16$

$\therefore b^2+4a=-(a-2)^2+16+4a=-a^2+8a+12$

$=-(a-4)^2+28$

이때 $-2\le a\le6$이므로 b^2+4a는 $a=4$일 때 최댓값 28을 갖고, $a=-2$일 때 최솟값 -8을 갖는다.

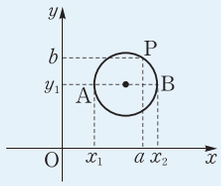
따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 20이다. 답 20

만점 공략 노트

원 위의 점 P(a, b)에 대하여

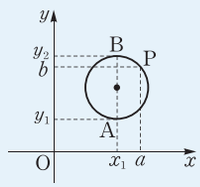
(1) 두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_1)이 지름의 양 끝 점이면

$x_1\le a\le x_2$ (단, $x_1<x_2$)



(2) 두 점 A(x_1, y_1), B(x_1, y_2)가 지름의 양 끝 점이면

$y_1\le b\le y_2$ (단, $y_1<y_2$)



유형 036 이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 나타내는 도형 본책 42쪽

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$

➜ $\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}$

➜ 중심의 좌표가 $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$인 원을 나타낸다. (단, $A^2+B^2-4C>0$)

0190 $x^2+y^2+ax-2y-4=0$에서

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{a^2}{4}+5$

원의 반지름의 길이가 3이므로

$\frac{a^2}{4}+5=9$, $a^2=16$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

따라서 원의 중심의 좌표는 $(-2, 1)$이다. 답 $(-2, 1)$

0191 $x^2+y^2-6x+ay-2a+1=0$에서

$(x-3)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+2a+8$

원의 중심의 y좌표가 $-a-8$이므로

$-\frac{a}{2}=-a-8$ $\therefore a=-16$

따라서 주어진 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-8)^2=40$

⑤ $(9-3)^2+(6-8)^2=40$이므로 점 $(9, 6)$은 원 위의 점이다.

답 ⑤

0192 $x^2+y^2+4x-8y+16=0$에서

$(x+2)^2+(y-4)^2=4$

두 직선 $y=ax$와 $y=bx+c$에 의하여 원의 넓이가 4등분되려면 두 직선이 모두 원의 중심을 지나고 서로 수직이어야 한다.

두 직선이 모두 점 $(-2, 4)$를 지나므로

$4=-2a$, $4=-2b+c$ …… ㉠

두 직선이 수직이므로

$ab=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=\frac{1}{2},\ c=5$

$\therefore\ a+b+c=\frac{7}{2}$ 답 $\frac{7}{2}$

유형 037 원의 방정식이 되기 위한 조건 본책 42쪽

방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 원을 나타낸다.
➜ 주어진 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=c$의 꼴로 변형하면 $c>0$이다.

0193 $x^2+y^2-2(m+1)x+2my+4m^2-3=0$에서

$(x-m-1)^2+(y+m)^2=-2m^2+2m+4$

이 방정식이 원을 나타내려면

$-2m^2+2m+4>0,\quad m^2-m-2<0$

$(m+1)(m-2)<0$

$\therefore\ -1<m<2$

따라서 정수 m은 0, 1의 2개이다. 답 ②

0194 $x^2+y^2+2x+2y+4a^2-4a-1=0$에서

$(x+1)^2+(y+1)^2=-4a^2+4a+3$ … ❶

이 방정식이 원을 나타내므로

$-4a^2+4a+3>0,\quad 4a^2-4a-3<0$

$(2a+1)(2a-3)<0$

$\therefore\ -\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$ … ❷

원의 넓이는 반지름의 길이가 최대일 때 최대이고, 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{-4a^2+4a+3}=\sqrt{-4\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+4}$

이므로 $-\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$에서 $a=\frac{1}{2}$일 때 최대이다.

따라서 구하는 반지름의 길이는 $\sqrt{4}=2$이다. … ❸

답 2

단계	채점 요소	비율
❶	주어진 방정식을 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$의 꼴로 변형하기	20 %
❷	a의 값의 범위 구하기	40 %
❸	넓이가 최대인 원의 반지름의 길이 구하기	40 %

0195 $x^2+y^2-10x+6y+4k+2=0$에서

$(x-5)^2+(y+3)^2=-4k+32$

이 방정식이 원을 나타내므로

$-4k+32>0\quad\therefore\ k<8$ …… ㉠

원점을 O, 원의 중심을 P(5, −3)이라 할 때, 원이 제2사분면을 지나지 않으려면 원의 반지름의 길이가 선분 OP의 길이보다 작거나 같아야 하므로

$\sqrt{-4k+32}\le\sqrt{5^2+(-3)^2}$

$-4k+32\le34\quad\therefore\ k\ge-\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{1}{2}\le k<8$ 답 ④

유형 038 세 점을 지나는 원의 방정식 본책 43쪽

세 점을 지나는 원의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 원의 중심의 좌표를 (a, b)로 놓는다.
(ii) 원의 중심과 세 점 사이의 거리가 모두 같음을 이용하여 a, b의 값을 구한다.
(iii) (ii)를 이용하여 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구한다.

0196 원의 중심을 P(a, b)라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$a^2+(b-5)^2=(a+4)^2+(b-1)^2$

$\therefore\ a+b=1$ …… ㉠

$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$a^2+(b-5)^2=(a-6)^2+(b+1)^2$

$\therefore\ a-b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=0$

즉 원의 중심은 P(1, 0)이므로 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{1^2+(-5)^2}=\sqrt{26}$

따라서 원의 방정식은 $(x-1)^2+y^2=26$

ㄱ. 중심의 좌표는 (1, 0)이다. (참)

ㄴ. 넓이는 26π이다. (참)

ㄷ. $(2-1)^2+(-5)^2=26$이므로 점 (2, −5)를 지난다. (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

다른 풀이 원의 방정식을 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ (a, b, c는 상수)이라 하면 이 원이 세 점 A(0, 5), B(−4, 1), C(6, −1)을 지나므로

$25+5b+c=0$ …… ㉢

$16+1-4a+b+c=0$ …… ㉣

$36+1+6a-b+c=0$ …… ㉤

㉢에서 $c=-5b-25$ …… ㉥

㉣, ㉤에 각각 ㉥을 대입하여 정리하면

$a+b=-2,\ a-b=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=0$

$b=0$을 ㉥에 대입하면 $c=-25$

따라서 원의 방정식은

$x^2+y^2-2x-25=0$

$\therefore\ (x-1)^2+y^2=26$

0197 원의 중심을 P(a, b)라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a+4)^2+(b-5)^2=(a-1)^2+b^2$

$\therefore\ a-b=-4$ …… ㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a-1)^2+b^2=(a-2)^2+(b-1)^2$

$\therefore\ a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=3$

즉 원의 중심은 P(−1, 3)이므로 반지름의 길이는

$\overline{PB}=\sqrt{(-1-1)^2+3^2}=\sqrt{13}$

따라서 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-3)^2=13$ … ❶

점 D(−3, k)가 이 원 위의 점이므로

$(-3+1)^2+(k-3)^2=13$

$(k-3)^2=9$, $k-3=\pm3$

$\therefore k=6$ ($\because k>0$) … ❷

답 6

단계	채점 요소	비율
❶	세 점 A, B, C를 지나는 원의 방정식 구하기	60 %
❷	k의 값 구하기	40 %

0198 원의 중심을 P(a, b)라 하면

$\overline{PO}=\overline{PA}=\overline{PB}$

$\overline{PO}=\overline{PA}$에서 $\overline{PO}^2=\overline{PA}^2$이므로

$a^2+b^2=(a-1)^2+(b+3)^2$

$\therefore a-3b=5$ …… ㉠

$\overline{PO}=\overline{PB}$에서 $\overline{PO}^2=\overline{PB}^2$이므로

$a^2+b^2=(a-6)^2+(b-2)^2$

$\therefore 3a+b=10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{7}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$

즉 원의 중심은 P$\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$이고 이 점이 직선 $y=kx+3$ 위에 있으므로

$-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}k+3$ $\therefore k=-1$ 답 ②

다른 풀이 직선 OA의 기울기는 $\frac{-3}{1}=-3$

직선 OB의 기울기는 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

두 직선의 기울기의 곱이 −1이므로 두 직선은 수직이다.

즉 삼각형 OAB는 $\angle AOB=90°$인 직각삼각형이므로 세 점 O, A, B를 지나는 원의 중심은 빗변 AB의 중점과 같다.

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+6}{2}, \frac{-3+2}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

0199 $x-y+2=0$ …… ㉠

$2x-y+8=0$ …… ㉡

$x+3y-10=0$ …… ㉢

두 직선 ㉠, ㉡의 교점을 A, 두 직선 ㉡, ㉢의 교점을 B, 두 직선 ㉠, ㉢의 교점을 C라 하자.

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=-6$, $y=-4$ $\therefore$ A(−6, −4)

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x=-2$, $y=4$ $\therefore$ B(−2, 4)

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=3$ $\therefore$ C(1, 3)

삼각형 ABC의 외접원의 중심을 P(a, b)라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a+6)^2+(b+4)^2=(a+2)^2+(b-4)^2$

$\therefore a+2b=-4$ …… ㉣

$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a+6)^2+(b+4)^2=(a-1)^2+(b-3)^2$

$\therefore a+b=-3$ …… ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=-1$

즉 외접원의 중심은 P(−2, −1)이므로 반지름의 길이는

$\overline{PB}=|4-(-1)|=5$ 답 ②

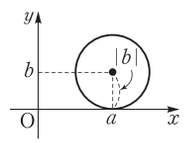
유형 039 x축 또는 y축에 접하는 원의 방정식 본책 43쪽

(1) 중심의 좌표가 (a, b)이고 x축에 접하는 원

➡ (반지름의 길이)=|(중심의 y좌표)|

$=|b|$

➡ $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$

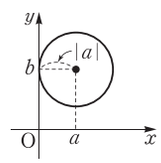


(2) 중심의 좌표가 (a, b)이고 y축에 접하는 원

➡ (반지름의 길이)=|(중심의 x좌표)|

$=|a|$

➡ $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$



0200 원의 중심의 좌표를 (a, b)라 하면 원이 y축에 접하므로 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$

이 원이 두 점 (−2, −1), (−1, 0)을 지나므로

$(-2-a)^2+(-1-b)^2=a^2$, $(-1-a)^2+(-b)^2=a^2$

$\therefore b^2+4a+2b+5=0$, $b^2+2a+1=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=-1$ 또는 $a=-5$, $b=3$

이때 원의 반지름의 길이는 $|a|$이고 $|-1|<|-5|$이므로 두 원 중 큰 원의 반지름의 길이는 5이다.

따라서 구하는 원의 둘레의 길이는

$2\pi\times5=10\pi$ 답 ③

0201 $x^2+y^2+8x-2ay+13=0$에서

$(x+4)^2+(y-a)^2=a^2+3$

따라서 이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{a^2+3}$이고 이 원이 y축에 접하므로

$|-4|=\sqrt{a^2+3}$

양변을 제곱하면 $16=a^2+3$

$a^2=13$ $\therefore a=\pm\sqrt{13}$

이때 원의 중심이 제3사분면 위에 있으므로 $a<0$

$\therefore a=-\sqrt{13}$ 답 ①

0202 원의 중심이 직선 $y=2x+1$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a,\ 2a+1)$이라 하자.

원이 x축에 접하므로 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-2a-1)^2=(2a+1)^2$

이 원이 점 $(1,\ -3)$을 지나므로

$(1-a)^2+(-3-2a-1)^2=(2a+1)^2$

$a^2+10a+16=0$

$(a+8)(a+2)=0$

$\therefore a=-8$ 또는 $a=-2$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는

$(-8,\ -15)$ 또는 $(-2,\ -3)$

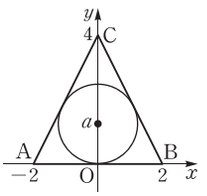
답 $(-8,\ -15)$, $(-2,\ -3)$

0203 △ABC에서

$\overline{AB}=|2-(-2)|=4$,

$\overline{AC}=\overline{BC}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

이므로 △ABC는 $\overline{AC}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이다.



이등변삼각형의 내심은 꼭지각의 이등분선 위에 있으므로 내심의 좌표를 $(0,\ a)$ $(0<a<4)$라 하면 내접원이 x축에 접하므로 원의 방정식은

$x^2+(y-a)^2=a^2$

$\therefore x^2+y^2-2ay=0$ …… ㉠

삼각형 ABC의 넓이에서

$\frac{1}{2}a(4+2\sqrt{5}+2\sqrt{5})=\frac{1}{2}\times4\times4$

$(\sqrt{5}+1)a=4$

$\therefore a=\frac{4}{\sqrt{5}+1}=\sqrt{5}-1$

㉠에서 $x^2+y^2+(2-2\sqrt{5})y=0$

따라서 $p=0$, $q=2-2\sqrt{5}$, $r=0$이므로

$p+q+r=2-2\sqrt{5}$ 답 ①

다른 풀이 직선 AC의 방정식은

$\frac{x}{-2}+\frac{y}{4}=1$ $\therefore 2x-y+4=0$

내심과 직선 AC 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|-a+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=a$, $|a-4|=\sqrt{5}a$

양변을 제곱하면 $a^2-8a+16=5a^2$

$a^2+2a-4=0$ $\therefore a=-1+\sqrt{5}$ $(\because a>0)$

유형 040 x축, y축에 동시에 접하는 원의 방정식 → 본책 44쪽

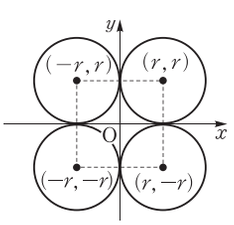
x축, y축에 동시에 접하고 반지름의 길이가 r인 원

→ (반지름의 길이)

$=|$(중심의 x좌표)$|$

$=|$(중심의 y좌표)$|$

→ $(x\pm r)^2+(y\pm r)^2=r^2$



0204 점 $\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)$을 지나고 x축과 y축에 동시에 접하려면 원의 중심이 제4사분면 위에 있어야 하므로 반지름의 길이를 r라 하면 원의 중심의 좌표는 $(r,\ -r)$이다.

따라서 원의 방정식은

$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$

이 원이 점 $\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)$을 지나므로

$(1-r)^2+\left(-\frac{1}{2}+r\right)^2=r^2$

$4r^2-12r+5=0$

$(2r-1)(2r-5)=0$

$\therefore r=\frac{1}{2}$ 또는 $r=\frac{5}{2}$

따라서 두 원의 중심의 좌표가 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)^2}=2\sqrt{2}$ 답 ③

0205 $x^2+y^2+2ax-6y+b-12=0$에서

$(x+a)^2+(y-3)^2=a^2-b+21$

따라서 이 원의 중심의 좌표는 $(-a,\ 3)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{a^2-b+21}$이다.

이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$|-a|=3=\sqrt{a^2-b+21}$

$\therefore a=-3$, $b=21$ $(\because a<0)$

$\therefore a+b=18$ 답 ④

0206 원의 중심이 직선 $2x+y-3=0$, 즉 $y=-2x+3$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a,\ -2a+3)$이라 하자.

이 원이 x축, y축에 동시에 접하므로

$|a|=|-2a+3|$ … ❶

$-2a+3=\pm a$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$ … ❷

따라서 두 원의 반지름의 길이는 각각 1, 3이므로 두 원의 넓이의 합은

$\pi\times1^2+\pi\times3^2=10\pi$ … ❸

답 10π

단계	채점 요소	비율
❶	a에 대한 식 세우기	50 %
❷	a의 값 구하기	30 %
❸	두 원의 넓이의 합 구하기	20 %

0207 주어진 원의 반지름의 길이를 r $(r>0)$라 하면 x축과 y축에 동시에 접하고 원의 중심이 제2사분면에 있으므로 원의 중심의 좌표는 $(-r,\ r)$이다.

이때 점 $(-r,\ r)$는 곡선 $y=x^2-x-4$ 위의 점이므로

$r=(-r)^2-(-r)-4$

$r^2=4$ $\therefore r=2$ $(\because r>0)$

즉 중심의 좌표가 $(-2, 2)$이고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-2)^2=4$

$\therefore x^2+y^2+4x-4y+4=0$

따라서 $a=4$, $b=-4$, $c=4$이므로

$a-b+c=12$ 답 12

유형 041 자취의 방정식 본책 45쪽

조건을 만족시키는 점 P의 좌표를 (x, y)로 놓고 x, y 사이의 관계식을 세운다.

0208 P(x, y)라 하면 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=20$에서

$(x+1)^2+(y+1)^2+(x-1)^2+(y-3)^2=20$

$x^2+y^2-2y-4=0$

$\therefore x^2+(y-1)^2=5$

답 $x^2+(y-1)^2=5$

0209 $\overline{PA}:\overline{PB}=3:2$에서

$2\overline{PA}=3\overline{PB}$ $\therefore 4\overline{PA}^2=9\overline{PB}^2$

P(x, y)라 하면

$4\{(x+3)^2+(y-1)^2\}=9\{(x-2)^2+(y+4)^2\}$

$x^2+y^2-12x+16y+28=0$

$\therefore (x-6)^2+(y+8)^2=72$ 답 ⑤

0210 P(a, b)라 하면 점 P는 원 위의 점이므로

$a^2+b^2=18$ …… ㉠

G(x, y)라 하면

$x=\dfrac{a+6-2}{3}$, $y=\dfrac{b-3-5}{3}$

$\therefore a=3x-4$, $b=3y+8$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(3x-4)^2+(3y+8)^2=18$

$\therefore \left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(y+\dfrac{8}{3}\right)^2=2$

따라서 점 G가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{8}{3}\right)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이므로 구하는 넓이는

$\pi\times(\sqrt{2})^2=2\pi$ 답 ④

0211 $\overline{AC}=2$, $\overline{BC}=4$이고 $\overline{PC}$는 $\angle P$의 이등분선이므로

$\overline{PA}:\overline{PB}=2:4$

$2\overline{PA}=\overline{PB}$

$\therefore 4\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$

P(x, y) $(x>0, y>0)$라 하면

$4\{(x-2)^2+y^2\}=(x-8)^2+y^2$

$\therefore x^2+y^2=16$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 4인 원에서 $x>0$, $y>0$인 부분이므로 구하는 길이는

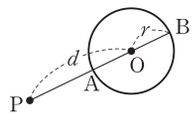
$\dfrac{1}{4}\times(2\pi\times4)=2\pi$ 답 2π

유형 042 원 밖의 점과 원 위의 점 사이의 거리 본책 45쪽

원 밖의 점과 원 위의 점 사이의 거리의 최대·최소

➜ 최댓값: $\overline{PB}=\overline{PO}+\overline{OB}=d+r$

최솟값: $\overline{PA}=\overline{PO}-\overline{OA}=d-r$



0212 점 $(-2, 7)$과 원의 중심 $(3, 2)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(3+2)^2+(2-7)^2}=5\sqrt{2}$

이때 원의 반지름의 길이가 r이므로 점 $(-2, 7)$과 원 위의 점 사이의 거리의 최댓값은 $5\sqrt{2}+r$

즉 $5\sqrt{2}+r=7\sqrt{2}$이므로 $r=2\sqrt{2}$ 답 ②

0213 $x^2+y^2-12x+6y+41=0$에서

$(x-6)^2+(y+3)^2=4$ … ❶

두 원의 중심 $(0, 0)$과 $(6, -3)$ 사이의 거리는

$\sqrt{6^2+(-3)^2}=3\sqrt{5}$ … ❷

이때 두 원의 반지름의 길이가 각각 3, 2이므로 오른쪽 그림에서

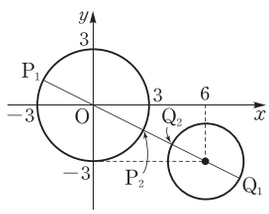
$M=\overline{P_1Q_1}=3+3\sqrt{5}+2$

$=3\sqrt{5}+5$

$m=\overline{P_2Q_2}=3\sqrt{5}-3-2$

$=3\sqrt{5}-5$ … ❸

$\therefore Mm=(3\sqrt{5}+5)(3\sqrt{5}-5)=20$ … ❹



답 20

단계	채점 요소	비율
❶	원의 방정식을 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$의 꼴로 변형하기	20 %
❷	두 원의 중심 사이의 거리 구하기	30 %
❸	M, m의 값 구하기	40 %
❹	Mm의 값 구하기	10 %

0214 $\sqrt{a^2+b^2}$의 값은 점 P(a, b)와 원점 사이의 거리와 같다.

이때 원점과 원의 중심 $(-3, 4)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

이고 원의 반지름의 길이가 1이므로 원점과 원 위의 점 P 사이의 거리의 최솟값은

$5-1=4$ 답 4

유형 043 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만날 때 본책 46쪽

(1) 원과 직선의 방정식에서 한 문자를 소거하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D>0$

(2) 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$d<r$

0215 $x^2+y^2+4x-6y-5=0$에서

$(x+2)^2+(y-3)^2=18$

원의 중심 $(-2, 3)$과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2-3+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k-5|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k-5|}{\sqrt{2}}<3\sqrt{2}, \quad |k-5|<6$$

$$-6<k-5<6 \quad \therefore -1<k<11$$

따라서 정수 k는 0, 1, 2, …, 10의 11개이다. 답 ④

다른 풀이 $y=x+k$를 $x^2+y^2+4x-6y-5=0$에 대입하면

$$x^2+(x+k)^2+4x-6(x+k)-5=0$$

$$\therefore 2x^2+2(k-1)x+k^2-6k-5=0$$

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 x에 대한 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(k-1)^2-2(k^2-6k-5)>0$$

$$k^2-10k-11<0, \quad (k+1)(k-11)<0$$

$$\therefore -1<k<11$$

0216 원의 중심 $(-1, a)$와 직선 $ax+y+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-a+a+3|}{\sqrt{a^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{a^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{3}{\sqrt{a^2+1}}<2, \quad \sqrt{a^2+1}>\frac{3}{2}$$

양변을 제곱하면

$$a^2+1>\frac{9}{4}, \quad a^2>\frac{5}{4}$$

$$\therefore a<-\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } a>\frac{\sqrt{5}}{2}$$

따라서 자연수 a의 최솟값은 2이다. 답 ①

0217 원이 점 $(1, 0)$에서 x축에 접하므로 원의 중심의 좌표를 $(1, a)$라 하면 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-a)^2=a^2$$

이 원이 점 $(0, -1)$을 지나므로

$$(-1)^2+(-1-a)^2=a^2$$

$$2a=-2 \quad \therefore a=-1$$

$$\therefore (x-1)^2+(y+1)^2=1 \quad \cdots ❶$$

따라서 원의 중심 $(1, -1)$과 직선 $mx-y+2m=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|m+1+2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}<1 \quad \cdots ❷$$

$$|3m+1|<\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$(3m+1)^2<m^2+1, \quad 4m^2+3m<0$$

$$m(4m+3)<0$$

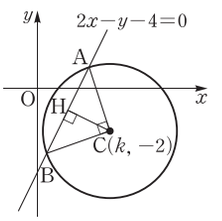
$$\therefore -\frac{3}{4}<m<0 \quad \cdots ❸$$

답 $-\frac{3}{4}<m<0$

단계	채점 요소	비율
❶	원의 방정식 구하기	40 %
❷	m에 대한 부등식 세우기	30 %
❸	m의 값의 범위 구하기	30 %

0218 $\overline{AC}=\overline{BC}$이므로 삼각형 ABC는 $\angle ACB=90^\circ$인 직각이등변삼각형이다.

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 직선 $2x-y-4=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 AHC는 $\overline{HA}=\overline{HC}$인 직각이등변삼각형이므로



$$\overline{CH}:\overline{CA}=1:\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{CH}=\frac{\overline{AC}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=\sqrt{5}$$

즉 원의 중심 $C(k, -2)$와 직선 $2x-y-4=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$$\frac{|2k+2-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}, \quad |2k-2|=5$$

$$2k-2=\pm5 \quad \therefore k=\frac{7}{2} \ (\because k>0)$$

답 ②

유형 044 원과 직선이 접할 때 본책 46쪽

(1) 원과 직선의 방정식에서 한 문자를 소거하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=0$$

(2) 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$d=r$$

0219 원의 중심 $(-1, 0)$과 직선 $3x+y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3+k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|k-3|}{\sqrt{10}}$$

넓이가 10π인 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|k-3|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}, \quad |k-3|=10$$

$$k-3=\pm10 \quad \therefore k=-7 \text{ 또는 } k=13$$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$$-7+13=6$$

답 ②

다른 풀이 중심의 좌표가 $(-1, 0)$이고 넓이가 10π인 원의 방정식은

$$(x+1)^2+y^2=10$$

$y=-3x-k$를 이 원의 방정식에 대입하면

$(x+1)^2+(-3x-k)^2=10$

$\therefore\ 10x^2+2(3k+1)x+k^2-9=0$

원과 직선이 접해야 하므로 x에 대한 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(3k+1)^2-10(k^2-9)=0$

$k^2-6k-91=0,\quad (k+7)(k-13)=0$

$\therefore\ k=-7$ 또는 $k=13$

0220 원의 중심이 제1사분면 위에 있고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 중심의 좌표는 (r, r)이다.

원의 중심 (r, r)와 직선 $x+\sqrt{3}y-6=0$ 사이의 거리는

$\frac{|r+\sqrt{3}r-6|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=\frac{|(1+\sqrt{3})r-6|}{2}$

원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|(1+\sqrt{3})r-6|}{2}=r\quad \therefore\ (1+\sqrt{3})r-6=\pm 2r$ … ❶

(i) $(1+\sqrt{3})r-6=2r$일 때

$(\sqrt{3}-1)r=6\quad \therefore\ r=\frac{6}{\sqrt{3}-1}=3+3\sqrt{3}$

(ii) $(1+\sqrt{3})r-6=-2r$일 때

$(3+\sqrt{3})r=6\quad \therefore\ r=\frac{6}{3+\sqrt{3}}=3-\sqrt{3}$ … ❷

(i), (ii)에서 두 원의 반지름의 길이는 $3+3\sqrt{3}$, $3-\sqrt{3}$이므로 구하는 합은

$(3+3\sqrt{3})+(3-\sqrt{3})=6+2\sqrt{3}$ … ❸

답 $6+2\sqrt{3}$

단계	채점 요소	비율
❶	r에 대한 방정식 세우기	40 %
❷	r의 값 구하기	40 %
❸	두 원의 반지름의 길이의 합 구하기	20 %

0221 원의 중심 (a, a)와 직선 $y=3x$, 즉 $3x-y=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$\frac{|3a-a|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}\quad \therefore\ a=5\ (\because\ a>0)$

따라서 원의 중심 $(5, 5)$와 직선 $y=kx$, 즉 $kx-y=0$ 사이의 거리는

$\frac{|5k-5|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{|5k-5|}{\sqrt{k^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|5k-5|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{5},\quad |5k-5|=\sqrt{5(k^2+1)}$

양변을 제곱하면

$(5k-5)^2=5(k^2+1),\quad 2k^2-5k+2=0$

$(2k-1)(k-2)=0$

$\therefore\ k=\frac{1}{2}\ (\because\ 0<k<1)$

답 ②

0222 원의 중심의 좌표를 (a, a^2+1)이라 하면 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 $|a|$이다.

원의 중심 (a, a^2+1)과 직선 $3x-4y+1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3a-4(a^2+1)+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-4a^2+3a-3|}{5}$

원과 직선이 접하려면

$\frac{|-4a^2+3a-3|}{5}=|a|$

$\therefore\ 4a^2-3a+3=\pm 5a$

(i) $4a^2-3a+3=5a$일 때

$4a^2-8a+3=0,\quad (2a-1)(2a-3)=0$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{3}{2}$

(ii) $4a^2-3a+3=-5a$일 때

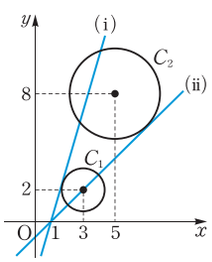
$4a^2+2a+3=4\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{11}{4}>0$이므로 방정식은 실근을 갖지 않는다.

(i), (ii)에서 두 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{13}{4}-\frac{5}{4}\right)^2}=\sqrt{5}$

답 $\sqrt{5}$

0223 직선 $y=m(x-1)$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 0)$을 지나고 직선 $y=m(x-1)$, 즉 $mx-y-m=0$이 주어진 두 원과 서로 다른 세 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 직선이 한 원과는 접하고 다른 한 원과는 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



이때 원 C_1의 중심 $(3, 2)$와 직선 $mx-y-m=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3m-2-m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|2m-2|}{\sqrt{m^2+1}}$

원 C_2의 중심 $(5, 8)$과 직선 $mx-y-m=0$ 사이의 거리는

$\frac{|5m-8-m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|4m-8|}{\sqrt{m^2+1}}$

(i) 직선이 원 C_1과 접하고 원 C_2와 서로 다른 두 점에서 만날 때

원 C_1의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이므로 원 C_1과 직선이 접하려면

$\frac{|2m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2},\quad |2m-2|=\sqrt{2(m^2+1)}$

양변을 제곱하면

$(2m-2)^2=2(m^2+1)$

$m^2-4m+1=0\quad \therefore\ m=2\pm\sqrt{3}$ …… ㉠

원 C_2의 반지름의 길이는 $\sqrt{8}$이므로 원 C_2와 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{|4m-8|}{\sqrt{m^2+1}}<\sqrt{8},\quad |4m-8|<\sqrt{8(m^2+1)}$

양변을 제곱하면 $(4m-8)^2<8(m^2+1)$

$m^2-8m+7<0,\quad (m-1)(m-7)<0$

$\therefore\ 1<m<7$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $m=2+\sqrt{3}$

(ii) 직선이 원 C_2와 접하고 원 C_1과 서로 다른 두 점에서 만날 때
원 C_2와 직선이 접하려면

$\frac{|4m-8|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{8}$, $|4m-8|=\sqrt{8(m^2+1)}$

$m^2-8m+7=0$, $(m-1)(m-7)=0$

$\therefore m=1$ 또는 $m=7$ ····· ㉢

원 C_1과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{|2m-2|}{\sqrt{m^2+1}}<\sqrt{2}$, $|2m-2|<\sqrt{2(m^2+1)}$

$m^2-4m+1<0$

$\therefore 2-\sqrt{3}<m<2+\sqrt{3}$ ····· ㉣

㉢, ㉣에서 $m=1$

(i), (ii)에서 모든 m의 값의 합은

$(2+\sqrt{3})+1=3+\sqrt{3}$ 답 $3+\sqrt{3}$

0224 선분 AB를 1 : 4로 내분하는 점은 x축 위에 있고 선분 CD의 중점은 y축 위에 있다. 이때 x축 위에 있으면서 동시에 y축 위에 있는 점은 원점 O뿐이므로 조건 ㈎에서

$\overline{AO}:\overline{BO}=1:4$, $\overline{CO}=\overline{DO}$

또 직선 AB는 선분 CD의 수직이등분선이므로 선분 AB는 원 O의 지름이다.

$A(-a, 0)$ $(a>0)$이라 하면 $B(4a, 0)$이고, 원 O의 중심은 선분 AB의 중점과 같으므로 그 좌표는

$\left(\frac{-a+4a}{2}, 0\right)$, 즉 $\left(\frac{3}{2}a, 0\right)$

원 O의 반지름의 길이는 $\frac{4a-(-a)}{2}=\frac{5}{2}a$

조건 ㈏에서 원 O의 중심과 직선 $4x-3y+13=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|6a+13|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{5}{2}a$, $2|6a+13|=25a$

$2(6a+13)=\pm 25a$ $\therefore a=2$ $(\because a>0)$

즉 $A(-2, 0)$, $B(8, 0)$이므로 $\overline{AB}=10$

따라서 원 O는 중심이 점 $(3, 0)$이고 반지름의 길이가 5이므로 원 O의 방정식은

$(x-3)^2+y^2=25$

위의 식에 $x=0$을 대입하면

$9+y^2=25$ $\therefore y=\pm 4$

즉 $C(0, -4)$, $D(0, 4)$이므로 $\overline{CD}=8$

따라서 사각형 ACBD의 넓이는

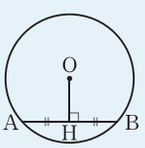
$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CD}=\frac{1}{2}\times 10\times 8=40$ 답 40

만점 공략 노트

현의 수직이등분선

(1) 원의 중심에서 현에 그은 수선은 그 현을 수직이등분한다.
➜ $\overline{OH}\perp\overline{AB}$이면 $\overline{AH}=\overline{BH}$

(2) 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.
➜ $\overline{AH}=\overline{BH}$이면 $\overline{OH}\perp\overline{AB}$



유형 045 원과 직선이 만나지 않을 때 본책 47쪽

(1) 원과 직선의 방정식에서 한 문자를 소거하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D<0$

(2) 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 하면
$d>r$

0225 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $mx-y-3m=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-3m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|3m|}{\sqrt{m^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|3m|}{\sqrt{m^2+1}}>\sqrt{6}$

$|3m|>\sqrt{6(m^2+1)}$

양변을 제곱하면

$9m^2>6(m^2+1)$, $m^2>2$

$\therefore m<-\sqrt{2}$ 또는 $m>\sqrt{2}$

답 $m<-\sqrt{2}$ 또는 $m>\sqrt{2}$

다른 풀이 $y=mx-3m$을 $x^2+y^2=6$에 대입하면

$x^2+(mx-3m)^2=6$

$\therefore (m^2+1)x^2-6m^2x+9m^2-6=0$

원과 직선이 만나지 않아야 하므로 x에 대한 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3m^2)^2-(m^2+1)(9m^2-6)<0$

$-3m^2+6<0$, $m^2>2$

$\therefore m<-\sqrt{2}$ 또는 $m>\sqrt{2}$

0226 $x^2+y^2+6ay+9a^2-2=0$에서

$x^2+(y+3a)^2=2$

원의 중심 $(0, -3a)$와 직선 $x-y-4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3a-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|3a-4|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|3a-4|}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$

$|3a-4|>2$

$3a-4<-2$ 또는 $3a-4>2$

$\therefore a<\frac{2}{3}$ 또는 $a>2$

따라서 a의 값이 될 수 없는 것은 ④이다. 답 ④

0227 $x^2+y^2-6x-10y+30=0$에서

$(x-3)^2+(y-5)^2=4$

이 원의 중심 $(3, 5)$와 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|9-20+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|k-11|}{5}$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 만나려면

$\frac{|k-11|}{5} \le 2$, $|k-11| \le 10$

$-10 \le k-11 \le 10$

$\therefore 1 \le k \le 21$ …… ㉠ … ❶

$x^2+y^2+4x+3=0$에서 $(x+2)^2+y^2=1$

이 원의 중심 $(-2, 0)$과 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-6+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|k-6|}{5}$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|k-6|}{5} > 1$, $|k-6| > 5$

$k-6 < -5$ 또는 $k-6 > 5$

$\therefore k < 1$ 또는 $k > 11$ …… ㉡ … ❷

㉠, ㉡에서 $11 < k \le 21$

따라서 정수 k는 12, 13, …, 21의 10개이다. … ❸

답 10

단계	채점 요소	비율
❶	직선이 원 $x^2+y^2-6x-10y+30=0$과 만나도록 하는 k의 값의 범위 구하기	40 %
❷	직선이 원 $x^2+y^2+4x+3=0$과 만나지 않도록 하는 k의 값의 범위 구하기	40 %
❸	정수 k의 개수 구하기	20 %

0228 원 $x^2+y^2=2$의 중심의 좌표는 $(0, 0)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

$i=1$, $j=1$일 때, 원의 중심과 직선 $x-y=0$ 사이의 거리는

$\frac{|0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 0 < \sqrt{2}$

즉 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만나므로 $a_{11}=2$

$i=1$, $j=2$일 때, 원의 중심과 직선 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{2}$

즉 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만나므로 $a_{12}=2$

$i=2$, $j=1$일 때, 원의 중심과 직선 $x-y+3=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} > \sqrt{2}$

즉 원과 직선은 만나지 않으므로 $a_{21}=0$

$i=2$, $j=2$일 때, 원의 중심과 직선 $x-y+2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{2}$

즉 원과 직선은 접하므로 $a_{22}=1$

따라서 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore A^4=(A^2)^2=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & 30 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

즉 행렬 A^4의 모든 성분의 합은

$16+30+0+1=47$

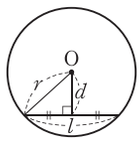
답 ②

유형 046 현의 길이

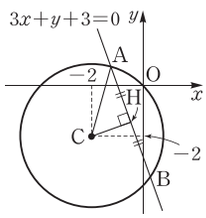
본책 48쪽

반지름의 길이가 r인 원에서 중심으로부터 d만큼 떨어진 현의 길이를 l이라 하면

$l=2\sqrt{r^2-d^2}$



0229 오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 중심을 C$(-2, -2)$라 하고, 점 C에서 직선 $3x+y+3=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{CH}=\frac{|-6-2+3|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$

직각삼각형 ACH에서

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-\left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right)^2}$

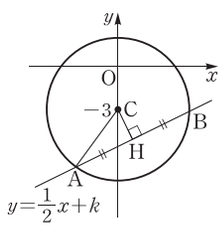
$=\sqrt{\frac{11}{2}}=\frac{\sqrt{22}}{2}$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=\sqrt{22}$

답 ⑤

0230 $x^2+y^2+6y-16=0$에서 $x^2+(y+3)^2=25$

오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B, 원의 중심을 C$(0, -3)$이라 하고, 점 C에서 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

직각삼각형 AHC에서

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{5^2-(2\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}$

즉 점 C와 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$, 즉 $x-2y+2k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{|6+2k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$, $|6+2k|=5$

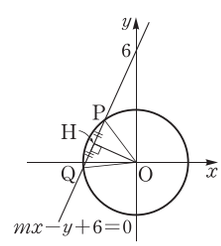
$6+2k=\pm 5$ $\therefore k=-\frac{1}{2}$ 또는 $k=-\frac{11}{2}$

따라서 모든 k의 값의 합은

$-\frac{1}{2}+\left(-\frac{11}{2}\right)=-6$

답 ①

0231 오른쪽 그림과 같이 원점 O에서 직선 $mx-y+6=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 OPQ는 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$인 정삼각형이므로



$\overline{OH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{6}$

즉 원의 중심 O$(0, 0)$과 직선 $mx-y+6=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{6}$이므로

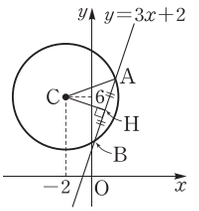
$\frac{|6|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{6}$, $6=\sqrt{6(m^2+1)}$

양변을 제곱하면

$36=6(m^2+1)$, $m^2=5$

$\therefore m=\sqrt{5}$ ($\because m>0$) 답 $\sqrt{5}$

0232 오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하면 두 점 A, B를 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 것은 선분 AB를 지름으로 하는 원이다. … ❶



원의 중심을 C(−2, 6)이라 하고 점 C에서 직선 $y=3x+2$, 즉 $3x-y+2=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{CH}=\dfrac{|-6-6+2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$ … ❷

직각삼각형 CHA에서

$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}$

$=\sqrt{4^2-(\sqrt{10})^2}=\sqrt{6}$ … ❸

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{6})^2=6\pi$ … ❹

답 6π

단계	채점 요소	비율
❶	넓이가 최소인 원은 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원임을 알기	30 %
❷	$\overline{CH}$의 길이 구하기	30 %
❸	$\overline{AH}$의 길이 구하기	30 %
❹	원의 넓이 구하기	10 %

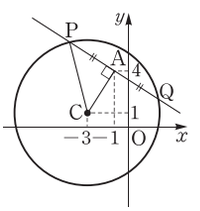
0233 $x^2+y^2+6x-2y-18=0$에서

$(x+3)^2+(y-1)^2=28$

선분 PQ의 길이의 최댓값은 원의 지름의 길이와 같으므로

$M=2\times2\sqrt{7}=4\sqrt{7}$

주어진 원의 중심을 C(−3, 1)이라 하면 오른쪽 그림과 같이 $\overline{CA}\perp\overline{PQ}$일 때 점 C와 직선 PQ 사이의 거리가 최대이고 선분 PQ의 길이는 최소이다.



$\overline{CA}=\sqrt{(-3+1)^2+(1-4)^2}=\sqrt{13}$이므로 직각삼각형 CAP에서

$\overline{PA}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CA}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{28})^2-(\sqrt{13})^2}=\sqrt{15}$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은

$m=2\overline{PA}=2\sqrt{15}$

$\therefore M^2+m^2=112+60=172$ 답 172

0234 A(3, 3)이므로

$\overline{OA}^2=3^2+3^2=18$

$\overline{BH}=a$라 하면 $\overline{OH}:\overline{BH}=\sqrt{3}:1$이므로

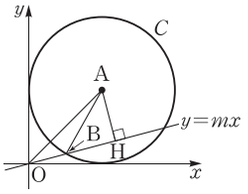
$\overline{OH}=\sqrt{3}a$

직각삼각형 AOH에서

$\overline{AH}^2=\overline{OA}^2-\overline{OH}^2$

$=18-(\sqrt{3}a)^2$

$=18-3a^2$ …… ㉠



직각삼각형 ABH에서

$\overline{AH}^2=\overline{AB}^2-\overline{BH}^2=9-a^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $18-3a^2=9-a^2$ $\therefore a^2=\dfrac{9}{2}$

$a^2=\dfrac{9}{2}$를 ㉡에 대입하면

$\overline{AH}^2=9-\dfrac{9}{2}=\dfrac{9}{2}$ $\therefore \overline{AH}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

따라서 점 A와 직선 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$ 사이의 거리가 $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$이므로

$\dfrac{|3m-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}\,|m-1|=\sqrt{m^2+1}$

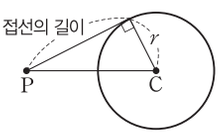
양변을 제곱하면

$2(m-1)^2=m^2+1$, $m^2-4m+1=0$

$\therefore m=2-\sqrt{3}$ ($\because 0<m<1$) 답 ③

유형 047 접선의 길이 본책 49쪽

중심이 C이고 반지름의 길이가 r인 원 밖의 점 P에서 원에 그은 접선의 길이는



$\sqrt{\overline{CP}^2-r^2}$

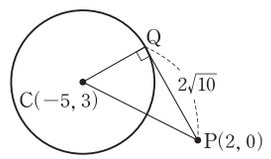
0235 $x^2+y^2+10x-6y+k=0$에서

$(x+5)^2+(y-3)^2=34-k$

원의 중심을 C(−5, 3)이라 하면

$\overline{CP}=\sqrt{(2+5)^2+(-3)^2}$

$=\sqrt{58}$



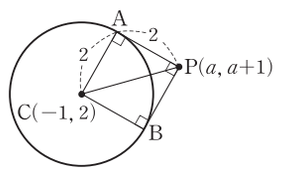
접점을 Q라 하면 $\overline{PQ}=2\sqrt{10}$이므로 직각삼각형 CPQ에서

$\overline{CQ}^2=\overline{CP}^2-\overline{PQ}^2=(\sqrt{58})^2-(2\sqrt{10})^2=18$

즉 $34-k=18$이므로

$k=16$ 답 ⑤

0236 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 원에 그은 두 접선의 접점을 A, B라 하고 원의 중심을 C(−1, 2)라 하면 두 접선이 수직이므로 사각형 ACBP는 정사각형이다.



즉 $\overline{AP}=\overline{AC}=2$이므로 직각삼각형 ACP에서

$\overline{CP}^2=\overline{AC}^2+\overline{AP}^2$

$(a+1)^2+(a-1)^2=2^2+2^2$

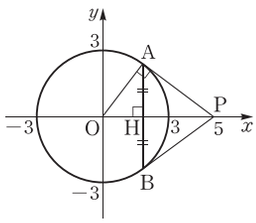
$a^2=3$ $\therefore a=\sqrt{3}$ ($\because a>0$) 답 $\sqrt{3}$

0237 직각삼각형 AOP에서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}$

$=\sqrt{5^2-3^2}=4$

오른쪽 그림과 같이 선분 AB와 x축의 교점을 H라 하면 $\overline{AB}\perp\overline{OP}$이므로 삼각형 AOP의 넓이에서



$\frac{1}{2}\times3\times4=\frac{1}{2}\times5\times\overline{AH}$

$\therefore\ \overline{AH}=\frac{12}{5}$

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AH}=\frac{24}{5}$

답 ③

유형 048 원 위의 점과 직선 사이의 거리 본책 50쪽

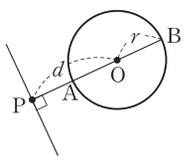
원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최대·최소

➡ 최댓값: $\overline{PB}=\overline{PO}+\overline{OB}$

$=d+r$

최솟값: $\overline{PA}=\overline{PO}-\overline{OA}$

$=d-r$



0238 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은 $\frac{|k|}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}$

즉 $\frac{|k|}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$이므로 $|k|=4$

$\therefore\ k=4\ (\because\ k>0)$

답 4

0239 $x^2+y^2+4x-8y+11=0$에서

$(x+2)^2+(y-4)^2=9$

원의 중심 $(-2, 4)$와 직선 $2x+3y+5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-4+12+5|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로 원 위의 점 P와 직선 사이의 거리를 d라 하면

$\sqrt{13}-3\le d\le\sqrt{13}+3$

따라서 정수 d의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이고, 각각의 거리에 해당하는 점 P가 2개씩 있으므로 구하는 점 P의 개수는

$6\times2=12$

답 12

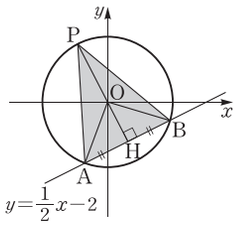
0240 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=\frac{1}{2}x-2$, 즉 $x-2y-4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 삼각형 PAB에서 선분 AB를 밑변으로 생각하면 높이의 최댓값은

$\frac{4\sqrt{5}}{5}+\sqrt{5}=\frac{9\sqrt{5}}{5}$

오른쪽 그림과 같이 점 O에서 직선 $y=\frac{1}{2}x-2$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 OAH에서



$\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}$

$=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AH}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\frac{6\sqrt{5}}{5}\times\frac{9\sqrt{5}}{5}=\frac{27}{5}$

답 $\frac{27}{5}$

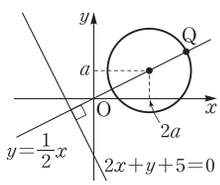
0241 조건 (가)에서 $(2-2a)^2+(5-a)^2=r^2$ …… ㉠

직선 $2x+y+5=0$, 즉 $y=-2x-5$의 기울기가 -2이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

즉 원의 중심 $(2a, a)$를 지나고 직선 $2x+y+5=0$에 수직인 직선의 방정식은

$y-a=\frac{1}{2}(x-2a)$ $\therefore\ y=\frac{1}{2}x$

오른쪽 그림과 같이 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 원과 만나는 두 점 중 x좌표가 더 큰 점을 Q라 하자.



점 Q는 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 위의 점이므로

$Q(2k, k)$ $(k>0)$라 하면 점 Q와 직선 $2x+y+5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4k+k+5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5k+5}{\sqrt{5}}\ (\because\ k>0)$

즉 $\frac{5k+5}{\sqrt{5}}=6\sqrt{5}$이므로

$5k+5=30$ $\therefore\ k=5$

$\therefore\ Q(10, 5)$

이때 점 Q는 원 $(x-2a)^2+(y-a)^2=r^2$ 위의 점이므로

$(10-2a)^2+(5-a)^2=r^2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $r^2=20$

$\therefore\ a+r^2=23$

답 23

유형 049 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식 본책 50쪽

원 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식

➡ $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$

0242 직선 $2x+y-3=0$, 즉 $y=-2x+3$의 기울기가 -2이므로 이 직선에 평행한 직선의 기울기도 -2이다.

원 $x^2+y^2=8$에 접하고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y=-2x\pm2\sqrt{2}\times\sqrt{(-2)^2+1}$

$\therefore\ y=-2x+2\sqrt{10}$ 또는 $y=-2x-2\sqrt{10}$

따라서 두 직선의 y절편은 각각 $2\sqrt{10}$, $-2\sqrt{10}$이므로

$\overline{PQ}=2\sqrt{10}-(-2\sqrt{10})=4\sqrt{10}$ 답 ⑤

0243 직선 $x-\sqrt{2}y+2=0$, 즉 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}x+\sqrt{2}$의 기울기는 $\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\sqrt{2}$이다.

원 $x^2+y^2=3$에 접하고 기울기가 $-\sqrt{2}$인 직선의 방정식은

$y=-\sqrt{2}x\pm\sqrt{3}\times\sqrt{(-\sqrt{2})^2+1}$

$\therefore y=-\sqrt{2}x+3$ 또는 $y=-\sqrt{2}x-3$

답 $y=-\sqrt{2}x+3$, $y=-\sqrt{2}x-3$

0244 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $60°$인 직선의 기울기는

$\tan 60°=\sqrt{3}$

원 $x^2+y^2=3$에 접하고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선의 방정식은

$y=\sqrt{3}x\pm\sqrt{3}\times\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}$

$\therefore y=\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$ 또는 $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$ … ❶

직선 $y=\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각

$(-2, 0)$, $(0, 2\sqrt{3})$

직선 $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각

$(2, 0)$, $(0, -2\sqrt{3})$ … ❷

따라서 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형은 마름모이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times 4\times 4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$ … ❸

답 $8\sqrt{3}$

단계	채점 요소	비율
❶	원의 접선의 방정식 구하기	40 %
❷	두 접선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표 구하기	30 %
❸	사각형의 넓이 구하기	30 %

유형 050 원 위의 점에서의 접선의 방정식 → 본책 51쪽

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식

➜ $x_1x+y_1y=r^2$

0245 점 $(a, 4)$는 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점이므로

$a^2+16=20$, $a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

따라서 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(2, 4)$에서의 접선의 방정식은

$2x+4y=20$ $\therefore x+2y=10$

이 접선이 점 $(5, b)$를 지나므로

$5+2b=10$ $\therefore b=\frac{5}{2}$

$\therefore ab=5$ 답 ④

0246 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(1, -3)$에서의 접선의 방정식은

$x-3y=10$ $\therefore y=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}$

이 직선과 수직인 직선의 기울기는 -3이므로 원 $x^2+y^2=10$에 접하고 기울기가 -3인 직선의 방정식은

$y=-3x\pm\sqrt{10}\times\sqrt{(-3)^2+1}$

$\therefore y=-3x+10$ 또는 $y=-3x-10$

이때 y절편이 양수인 직선의 방정식은

$y=-3x+10$

따라서 $a=-3$, $b=10$이므로

$a+b=7$ 답 ①

0247 점 $P(a, b)$는 원 $x^2+y^2=12$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=12$ …… ㉠ … ❶

원 $x^2+y^2=12$ 위의 점 $P(a, b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=12$

이 직선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각

$\left(\frac{12}{a}, 0\right)$, $\left(0, \frac{12}{b}\right)$

이때 $a>0$, $b>0$이고 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 12이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{12}{a}\times\frac{12}{b}=12$

$\therefore ab=6$ …… ㉡ … ❷

㉠, ㉡에서

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=12+2\times 6=24$

$\therefore a+b=2\sqrt{6}$ ($\because a+b>0$) … ❸

답 $2\sqrt{6}$

단계	채점 요소	비율
❶	a^2+b^2의 값 구하기	30 %
❷	ab의 값 구하기	40 %
❸	$a+b$의 값 구하기	30 %

0248 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(3, -4)$에서의 접선의 방정식은

$3x-4y=25$ $\therefore 3x-4y-25=0$

원 $(x-6)^2+(y-8)^2=r^2$의 중심 $(6, 8)$과 직선 $3x-4y-25=0$ 사이의 거리는

$\frac{|18-32-25|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{39}{5}$

이때 원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 만나려면

$r\geq\frac{39}{5}$

따라서 구하는 자연수 r의 최솟값은 8이다. 답 8

유형 051 원 밖의 점에서 원에 그은 접선의 방정식 → 본책 51쪽

원 밖의 점 P에서 이 원에 그은 접선의 방정식은 다음과 같이 구한다.

(1) 원의 중심이 원점인 경우

➜ 원 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선이 점 P를 지남을 이용한다.

(2) 원의 중심이 원점이 아닌 경우

➜ 기울기가 m이고 점 P를 지나는 직선과 원의 중심 사이의 거리가 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

0249 점 (2, 1)을 지나는 접선의 기울기를 m ($m>0$)이라 하면 접선의 방정식은

$y-1=m(x-2)$

$\therefore mx-y-2m+1=0$ …… ㉠

원과 직선 ㉠이 접하려면 원의 중심 (1, −2)와 직선 ㉠ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같아야 하므로

$\frac{|m+2-2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

$|m-3|=\sqrt{5(m^2+1)}$

양변을 제곱하면

$(m-3)^2=5(m^2+1)$

$2m^2+3m-2=0,\quad (m+2)(2m-1)=0$

$\therefore m=\frac{1}{2}$ ($\because m>0$)

따라서 ㉠에서 구하는 직선의 방정식은

$\frac{1}{2}x-y=0\quad \therefore x-2y=0$ 답 $x-2y=0$

0250 원 O에 접하는 직선을 l이라 하고 접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 직선 l의 방정식은

$x_1x+y_1y=4$ …… ㉠

이때 직선 l이 원 O'의 넓이를 이등분하므로 직선 l은 원 O'의 중심 (−4, 0)을 지난다.

즉 $-4x_1=4$이므로 $x_1=-1$

또 점 (x_1, y_1)이 원 O 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=4$

$x_1=-1$을 대입하면 $(-1)^2+y_1^2=4$

$y_1^2=3\quad \therefore y_1=\pm\sqrt{3}$

따라서 ㉠에서 직선 l의 방정식은

$-x\pm\sqrt{3}y=4$

$\therefore y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{4}{\sqrt{3}}$

즉 두 직선의 기울기의 곱은

$\frac{1}{\sqrt{3}}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{3}$ 답 ②

다른 풀이 원 O'의 중심 (−4, 0)을 지나는 직선의 기울기를 m이라 하면 직선의 방정식은

$y=m(x+4)\quad \therefore mx-y+4m=0$

이 직선이 원 O에 접하려면 원의 중심 (0, 0)과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 2와 같아야 하므로

$\frac{|4m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2,\quad |2m|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $4m^2=m^2+1$

$m^2=\frac{1}{3}\quad \therefore m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 두 직선의 기울기의 곱은 $-\frac{1}{3}$이다.

0251 (1) $B(x_1, y_1)$ ($x_1>0$, $y_1>0$)이라 하면 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 B에서의 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=9$

이 직선이 점 P(−3, 6)을 지나므로

$-3x_1+6y_1=9$

$\therefore x_1=2y_1-3$ …… ㉠

또 점 $B(x_1, y_1)$이 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=9$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(2y_1-3)^2+y_1^2=9$

$5y_1^2-12y_1=0,\quad y_1(5y_1-12)=0$

$\therefore y_1=\frac{12}{5}$ ($\because y_1>0$)

$y_1=\frac{12}{5}$를 ㉠에 대입하면 $x_1=\frac{9}{5}$

$\therefore B\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$

(2) $\overline{PA}=6$이고 삼각형 PAB에서 선분 PA를 밑변으로 생각하면 높이는

$\frac{9}{5}-(-3)=\frac{24}{5}$

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times6\times\frac{24}{5}=\frac{72}{5}$ 답 (1) $\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$ (2) $\frac{72}{5}$

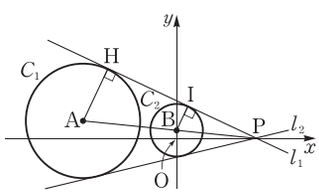
0252 두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 A, B라 하면

$A(-7, 2)$, $B(0, b)$

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 직선 l_1에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면

△APH∽△BPI (AA 닮음)

이고 닮음비는



$\overline{AH}:\overline{BI}=2\sqrt{5}:\sqrt{5}=2:1$

따라서 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$에서 점 B는 선분 AP의 중점이므로

$\frac{-7+a}{2}=0,\quad \frac{2+0}{2}=b$

$\therefore a=7,\ b=1$

즉 두 원에 동시에 접하는 직선은 점 P(7, 0)을 지나므로 기울기를 m이라 하면 직선의 방정식은

$y=m(x-7)\quad \therefore mx-y-7m=0$

원 C_2의 중심 B(0, 1)과 이 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같아야 하므로

$\frac{|-1-7m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

$|1+7m|=\sqrt{5(m^2+1)}$

양변을 제곱하면

$(1+7m)^2=5(m^2+1),\quad 22m^2+7m-2=0$

$(2m+1)(11m-2)=0$

$\therefore m=-\frac{1}{2}$ 또는 $m=\frac{2}{11}$

$\therefore c=-\frac{1}{2}\times\frac{2}{11}=-\frac{1}{11}$

$\therefore 11(a+b+c)=11\times\left(7+1-\frac{1}{11}\right)=87$ 답 87

유형 052 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식 본책 52쪽

두 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$의 두 교점을 지나는 직선의 방정식

➡ $x^2+y^2+ax+by+c-(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$

0253 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+4x+2y-(x^2+y^2-2x-8)=0$

$\therefore 3x+y+4=0$

이 직선이 점 $(k, k+2)$를 지나므로

$3k+(k+2)+4=0$

$\therefore k=-\frac{3}{2}$ 답 $-\frac{3}{2}$

0254 $(x+1)^2+(y+4)^2=4$에서

$x^2+y^2+2x+8y+13=0$

$(x+a)^2+y^2=8$에서

$x^2+y^2+2ax+a^2-8=0$

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+2x+8y+13-(x^2+y^2+2ax+a^2-8)=0$

$\therefore (2-2a)x+8y-a^2+21=0$

이 직선이 직선 $3x-2y=0$과 수직이므로

$3(2-2a)-16=0$

$\therefore a=-\frac{5}{3}$ 답 ③

0255 $x^2+y^2+4y+3=0$에서

$x^2+(y+2)^2=1$ …… ㉠

원 $x^2+y^2+6x+2ay-a^2=0$이 원 ㉠의 둘레를 이등분하므로 두 원의 교점을 지나는 직선이 원 ㉠의 중심 $(0, -2)$를 지난다. … ❶

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+6x+2ay-a^2-(x^2+y^2+4y+3)=0$

$\therefore 6x+(2a-4)y-a^2-3=0$ … ❷

이 직선이 점 $(0, -2)$를 지나므로

$-2(2a-4)-a^2-3=0$

$a^2+4a-5=0$

$(a+5)(a-1)=0$

$\therefore a=-5$ 또는 $a=1$

따라서 모든 a의 값의 합은

$-5+1=-4$ … ❸

답 -4

단계	채점 요소	비율
❶	한 원이 다른 원의 둘레를 이등분하는 조건 알기	30 %
❷	두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식 구하기	30 %
❸	모든 a의 값의 합 구하기	40 %

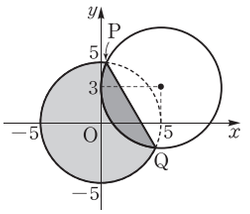
0256 $x^2+y^2=25$에서

$x^2+y^2-25=0$ …… ㉠

호 PQ는 반지름의 길이가 5이고 점 $(0, 3)$에서 y축에 접하는 원의 일부이므로 그 원의 방정식은

$(x-5)^2+(y-3)^2=25$

$\therefore x^2+y^2-10x-6y+9=0$ …… ㉡



두 원 ㉠, ㉡의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-25-(x^2+y^2-10x-6y+9)=0$

$\therefore 5x+3y-17=0$

따라서 $a=3$, $b=-17$이므로

$ab=-51$ 답 -51

유형 053 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식 본책 53쪽

두 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$의 두 교점을 지나는 원의 방정식

➡ $x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$ (단, $k\neq-1$)

0257 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2+5x-3y-3+k(x^2+y^2+6y+5)=0$ (단, $k\neq-1$) …… ㉠

이 원이 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$-9+9k=0$ $\therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2+5x-3y-3+(x^2+y^2+6y+5)=0$

$x^2+y^2+\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}y+1=0$

$\therefore \left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\left(y+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{8}$

따라서 원의 중심의 좌표는 $\left(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right)$이므로

$a=-\frac{5}{4}$, $b=-\frac{3}{4}$

$\therefore a+b=-2$ 답 -2

0258 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2+4x+ay-16+k(x^2+y^2-8)=0$ (단, $k\neq-1$) …… ㉠

이 원이 원점을 지나므로

$-16-8k=0$ $\therefore k=-2$

$k=-2$를 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2+4x+ay-16-2(x^2+y^2-8)=0$

$x^2+y^2-4x-ay=0$

$\therefore (x-2)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+4$

이 원의 넓이가 29π이므로

$\frac{a^2}{4}+4=29$, $a^2=100$

$\therefore a=10$ ($\because a>0$) 답 ④

0259 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2+4x-8y+10+k(x^2+y^2-8x-2y-8)=0$

(단, $k\neq-1$)

$\therefore (1+k)x^2+(1+k)y^2+(4-8k)x$

$+(-8-2k)y+10-8k=0$ …… ㉠

이 원의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 중심의 x좌표와 y좌표가 같다. 즉 ㉠의 x의 계수와 y의 계수가 같으므로

$4-8k=-8-2k$ $\therefore k=2$

$k=2$를 ㉠에 대입하면

$3x^2+3y^2-12x-12y-6=0$

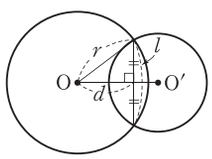
$x^2+y^2-4x-4y-2=0$

$\therefore (x-2)^2+(y-2)^2=10$

따라서 원의 넓이는 10π이다. 답 ②

유형 054 공통인 현의 길이 본책 53쪽

두 원 O, O'의 공통인 현의 길이는 다음과 같은 순서로 구한다.

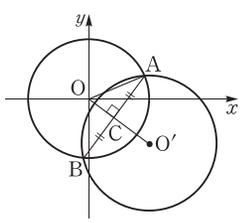


(i) 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구한다.

(ii) 한 원의 중심과 (i)의 직선 사이의 거리 d를 구한다.

(iii) 공통인 현의 길이 l은 $l=2\sqrt{r^2-d^2}$임을 이용한다.

0260 오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=15$, $(x-4)^2+(y+3)^2=20$의 중심을 각각 O, O′, 두 원의 교점을 A, B라 하고, $\overline{OO'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라 하자.



$(x-4)^2+(y+3)^2=20$에서

$x^2+y^2-8x+6y+5=0$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-15-(x^2+y^2-8x+6y+5)=0$

$\therefore 4x-3y-10=0$

원 $x^2+y^2=15$의 중심 O(0, 0)과 공통인 현 사이의 거리는

$\overline{OC}=\dfrac{|-10|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{10}{5}=2$

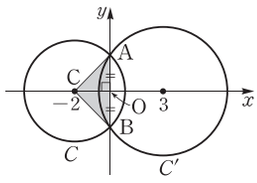
직각삼각형 OCA에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OC}^2}=\sqrt{(\sqrt{15})^2-2^2}=\sqrt{11}$

따라서 공통인 현의 길이는

$\overline{AB}=2\overline{AC}=2\sqrt{11}$ 답 ⑤

0261 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은



x^2+y^2+4x-4

$-(x^2+y^2-6x-4)=0$

$\therefore x=0$

$x^2+y^2+4x-4=0$에서

$(x+2)^2+y^2=8$ $\therefore$ C(−2, 0)

따라서 점 C와 공통인 현 사이의 거리는 $\overline{CO}=2$

또 $x=0$을 $x^2+y^2+4x-4=0$에 대입하면

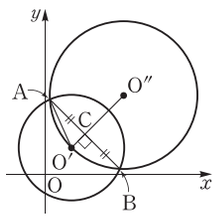
$y^2-4=0$ $\therefore y=\pm2$

$\therefore \overline{AB}=|2-(-2)|=4$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times4\times2=4$ 답 4

0262 오른쪽 그림과 같이 두 원의 중심을 각각 O′, O″, 두 원의 교점을 A, B라 하고, $\overline{O'O''}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라 하자.



공통인 현의 길이가 $\sqrt{14}$이므로

$\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

$x^2+y^2-2x-2y-2=0$에서

$(x-1)^2+(y-1)^2=4$

이때 $\overline{AO'}=2$이므로 직각삼각형 AO′C에서

$\overline{O'C}=\sqrt{\overline{AO'}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

한편 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-2x-2y-2-(x^2+y^2-6x-6y+k)=0$

$\therefore 4x+4y-2-k=0$

점 O′(1, 1)과 공통인 현 사이의 거리는

$\overline{O'C}=\dfrac{|4+4-2-k|}{\sqrt{4^2+4^2}}=\dfrac{|k-6|}{4\sqrt{2}}$

즉 $\dfrac{|k-6|}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$|k-6|=4$, $k-6=\pm4$

$\therefore k=2$ 또는 $k=10$

따라서 모든 k의 값의 합은 $2+10=12$ 답 12

0263 두 원의 중심을 지나는 직선은 공통인 현을 수직이등분하므로 공통인 현의 중점은 두 원의 공통인 현과 두 원의 중심을 지나는 직선의 교점이다.

$(x+1)^2+y^2=9$에서 $x^2+y^2+2x-8=0$

$(x-1)^2+(y+4)^2=5$에서 $x^2+y^2-2x+8y+12=0$

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+2x-8-(x^2+y^2-2x+8y+12)=0$

$\therefore x-2y-5=0$ …… ㉠ … ❶

또 두 원의 중심 $(-1, 0)$, $(1, -4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\dfrac{-4}{1+1}(x+1)$ $\therefore 2x+y+2=0$ …… ㉡ … ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\dfrac{1}{5}$, $y=-\dfrac{12}{5}$

따라서 공통인 현의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{5}, -\dfrac{12}{5}\right)$이므로

$a=\dfrac{1}{5}$, $b=-\dfrac{12}{5}$

$\therefore 5(a-b)=5\times\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{12}{5}\right)=13$ … ❸

답 13

단계	채점 요소	비율
❶	두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식 구하기	40 %
❷	두 원의 중심을 지나는 직선의 방정식 구하기	30 %
❸	$5(a-b)$의 값 구하기	30 %

1등급 유형 도전하기

→ 본책 54~55쪽

0264 Step❶ 원 위의 점 P에서의 접선의 방정식을 구하고, 이 직선이 지나는 점의 좌표를 대입하여 x_n을 구한다.

원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_n, y_n)$에서의 접선의 방정식은

$x_nx+y_ny=4$

이 직선이 점 $(2n, 0)$을 지나므로

$2nx_n=4 \quad \therefore x_n=\boxed{(가)\ \frac{2}{n}}$

Step❷ 점 P의 좌표를 원의 방정식에 대입하여 y_n을 구한다.

이때 점 $\mathrm{P}\left(\frac{2}{n}, y_n\right)$은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$$\left(\boxed{(가)\ \frac{2}{n}}\right)^2+{y_n}^2=4, \quad {y_n}^2=4-\frac{4}{n^2}$$

$$\therefore y_n=\sqrt{4-\frac{4}{n^2}}=\sqrt{\frac{4(n^2-1)}{n^2}}$$

$$=2\sqrt{\frac{\boxed{(나)\ n^2-1}}{n^2}}\ (\because y_n>0) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

Step❸ $y_2\times y_3\times \cdots \times y_7$의 값을 구한다.

㉠에서

$$y_n=2\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}}=2\sqrt{\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}}$$

$$=2\sqrt{\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}}$$

$$\therefore y_2\times y_3\times \cdots \times y_7$$

$$=2^6\times\sqrt{\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\times \cdots \times\left(\frac{6}{7}\times\frac{8}{7}\right)}$$

$$=2^6\times\sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{8}{7}}=2^6\times\sqrt{\frac{4}{7}}=2^7\times\boxed{(다)\ \frac{1}{\sqrt{7}}}$$

Step❹ $f(p^2)\times g(p)$의 값을 구한다.

따라서 $f(n)=\frac{2}{n}$, $g(n)=n^2-1$, $p=\frac{1}{\sqrt{7}}$이므로

$$f(p^2)\times g(p)=f\left(\frac{1}{7}\right)\times g\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)=14\times\left(-\frac{6}{7}\right)=-12$$

답 -12

논리 Check

2 이상의 자연수 n에 대하여 점 $(n, 0)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선 중 제1사분면에서 원과 접하는 접선의 접점을 $\mathrm{P}(x_n, y_n)$이라 하자. $y_3\times y_4\times \cdots \times y_k=\frac{5}{6}$를 만족시키는 자연수 k의 값을 구하시오.

풀이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_n, y_n)$에서의 접선의 방정식은

$x_nx+y_ny=1$

이 직선이 점 $(n, 0)$을 지나므로

$nx_n=1 \quad \therefore x_n=\frac{1}{n}$

이때 점 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{n}, y_n\right)$은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2+{y_n}^2=1, \quad {y_n}^2=1-\frac{1}{n^2}$$

$$\therefore y_n=\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}=\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}}=\sqrt{\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}}\ (\because y_n>0)$$

$$\therefore y_3\times y_4\times \cdots \times y_k$$

$$=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\right)\times \cdots \times\left(\frac{k-1}{k}\times\frac{k+1}{k}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{2(k+1)}{3k}}$$

즉 $\sqrt{\frac{2(k+1)}{3k}}=\frac{5}{6}$이므로

$$\frac{2(k+1)}{3k}=\frac{25}{36}, \quad 24(k+1)=25k$$

$\therefore k=24$

답 24

0265 Step❶ 원의 중심과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이와 같음을 이용하여 원의 중심의 x좌표와 반지름의 길이에 대한 관계식을 구한다.

원의 중심의 좌표를 (a, a^2-1), 반지름의 길이를 r라 하면 원의 중심과 직선 $y=x+3$, 즉 $x-y+3=0$ 사이의 거리가 r이므로

$$\frac{|a-a^2+1+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=r, \quad |a^2-a-4|=\sqrt{2}r$$

$a^2-a-4=\pm\sqrt{2}r \quad \therefore a^2-a-4\pm\sqrt{2}r=0$

따라서 직선 $y=x+3$에 접하는 서로 다른 네 원의 중심의 x좌표는 a에 대한 이차방정식 $a^2-a-4+\sqrt{2}r=0$, $a^2-a-4-\sqrt{2}r=0$의 실근이다.

Step❷ 네 원의 중심의 x좌표의 곱을 이용하여 반지름의 길이를 구한다.

이차방정식 $a^2-a-4+\sqrt{2}r=0$의 두 실근을 a_1, a_2라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$a_1a_2=-4+\sqrt{2}r$

이차방정식 $a^2-a-4-\sqrt{2}r=0$의 두 실근을 a_3, a_4라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$a_3a_4=-4-\sqrt{2}r$

네 원의 중심의 x좌표가 a_1, a_2, a_3, a_4이고 그 곱이 12이므로

$a_1a_2a_3a_4=(-4+\sqrt{2}r)(-4-\sqrt{2}r)=12$

$16-2r^2=12, \quad r^2=2 \quad \therefore r=\sqrt{2}\ (\because r>0)$

Step❸ 네 원의 중심의 y좌표의 합을 구한다.

$r=\sqrt{2}$이므로

$a^2-a-2=0$, $a^2-a-6=0$

$a^2-a-2=0$에서 $\quad (a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

$a^2-a-6=0$에서 $\quad (a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=3$

즉 중심의 좌표가 $(-1, 0)$, $(2, 3)$, $(-2, 3)$, $(3, 8)$이므로 y 좌표의 합은

$0+3+3+8=14$ 답 14

0266 Step 1 행렬 A^2을 구한 후 원 C_2의 방정식을 구한다.

원 C_1의 중심의 좌표는 $(1, 1)$, 반지름의 길이는 1이므로

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\therefore A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

따라서 원 C_2의 중심의 좌표는 $(1, 3)$이고 반지름의 길이를 r라 하면

$2r^2=4 \quad \therefore r^2=2$

$\therefore C_2: (x-1)^2+(y-3)^2=2$

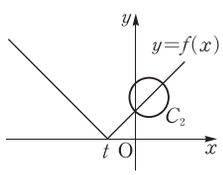
Step 2 $x\ge t$, $x<t$인 경우로 나누어 $g(t)>1$을 만족시키는 t의 값의 범위를 구한다.

$$f(x)=|x-t|=\begin{cases}x-t & (x\ge t)\\ -x+t & (x<t)\end{cases}$$

이때 $g(t)>1$이려면 원 C_2와 $y=f(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

(i) 원 C_2가 $x\ge t$에서 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나는 경우

원의 중심 $(1, 3)$과 직선 $y=x-t$, 즉 $x-y-t=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{2}$보다 작아야 하므로



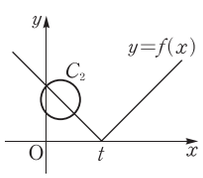
$$\frac{|1-3-t|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}<\sqrt{2}$$

$|t+2|<2, \quad -2<t+2<2$

$\therefore -4<t<0$

(ii) 원 C_2가 $x<t$에서 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나는 경우

원의 중심 $(1, 3)$과 직선 $y=-x+t$, 즉 $x+y-t=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{2}$보다 작아야 하므로



$$\frac{|1+3-t|}{\sqrt{1^2+1^2}}<\sqrt{2}$$

$|t-4|<2, \quad -2<t-4<2$

$\therefore 2<t<6$

Step 3 정수 t의 개수를 구한다.

(i), (ii)에서 $-4<t<0$ 또는 $2<t<6$

따라서 정수 t는 -3, -2, -1, 3, 4, 5의 6개이다. 답 6

0267 Step 1 두 원 C_1, C_2의 중심의 좌표를 구한다.

x축에 접하는 원 C_1의 반지름의 길이가 2이고 중심이 제2사분면에 있으므로 원 C_1의 중심을 $C_1(a, 2)$라 하면 점 C_1이 직선 $y=-\frac{1}{2}x$ 위에 있으므로

$2=-\frac{1}{2}a \quad \therefore a=-4$

$\therefore C_1(-4, 2)$

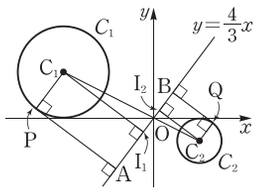
x축에 접하는 원 C_2의 반지름의 길이가 1이고 중심이 제4사분면 위에 있으므로 원 C_2의 중심을 $C_2(b, -1)$이라 하면 점 C_2가 직선 $y=-\frac{1}{2}x$ 위에 있으므로

$-1=-\frac{1}{2}b \quad \therefore b=2$

$\therefore C_2(2, -1)$

Step 2 두 원의 중심과 직선 $y=\frac{4}{3}x$ 사이의 거리를 각각 구하고, 이를 이용하여 선분 H_1H_2의 길이의 최댓값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 직선 $y=\frac{4}{3}x$와 수직이면서 두 원 C_1, C_2에 각각 접하는 접선을 그으면 선분 H_1H_2의 길이의 최댓값은 선분 AB의 길이와 같다.



두 점 C_1, C_2에서 직선 $y=\frac{4}{3}x$에 내린 수선의 발을 각각 I_1, I_2라 하면

$\overline{AI_1}=\overline{PC_1}=2$, $\overline{BI_2}=\overline{QC_2}=1$

점 $C_1(-4, 2)$와 직선 $y=\frac{4}{3}x$, 즉 $4x-3y=0$ 사이의 거리는

$$\overline{C_1I_1}=\frac{|-16-6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{22}{5}$$

직각삼각형 OC_1I_1에서 $\overline{OC_1}=\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5}$이므로

$$\overline{OI_1}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-\left(\frac{22}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

또 점 $C_2(2, -1)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는

$$\overline{C_2I_2}=\frac{|8+3|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{11}{5}$$

직각삼각형 OC_2I_2에서 $\overline{OC_2}=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$이므로

$$\overline{OI_2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\frac{11}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{25}}=\frac{2}{5}$$

$$\therefore \overline{AB}=\overline{AI_1}+\overline{OI_1}+\overline{OI_2}+\overline{BI_2}=2+\frac{4}{5}+\frac{2}{5}+1=\frac{21}{5}$$

Step 3 사각형 PH_1QH_2의 넓이를 구한다.

따라서 $\overline{H_1H_2}=\overline{AB}=\frac{21}{5}$일 때 사각형 PH_1QH_2의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{22}{5}+\frac{11}{5}\right)\times\frac{21}{5}=\frac{693}{50}$$ 답 $\frac{693}{50}$

0268 Step 1 원점과 두 점 P, Q를 각각 지나는 두 직선의 위치 관계를 구한다.

$x_1x_2=-y_1y_2$에서 $\frac{y_1}{x_1}\times\frac{y_2}{x_2}=-1$이므로 원점 O에 대하여 두 직선 OP와 OQ는 서로 수직이다.

Step 2 직선 OQ의 기울기의 범위를 구한다.

직선 OQ의 방정식을 $y=kx$ $(k\ne0)$, 즉 $kx-y=0$이라 하면 원 $(x+3)^2+(y-\sqrt{3})^2=3$이 이 직선과 만나므로

$$\frac{|-3k-\sqrt{3}|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}\le\sqrt{3}, \quad |3k+\sqrt{3}|\le\sqrt{3(k^2+1)}$$

양변을 제곱하면

$(3k+\sqrt{3})^2 \le 3(k^2+1)$, $6k^2+6\sqrt{3}k \le 0$

$k(k+\sqrt{3}) \le 0$ $\therefore -\sqrt{3} \le k < 0$ ($\because k \ne 0$)

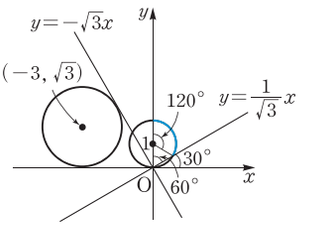
Step 3 점 P가 나타내는 도형의 길이를 구한다.

직선 OP의 방정식은 $y=-\frac{1}{k}x$

$-\sqrt{3} \le k < 0$에서 $0 < -k \le \sqrt{3}$ $\therefore -\frac{1}{k} \ge \frac{1}{\sqrt{3}}$

이때 $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기는 30°이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 점 P가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 120°인 부채꼴의 호이므로 구하는 길이는



$2\pi \times 1 \times \frac{120}{360} = \frac{2}{3}\pi$

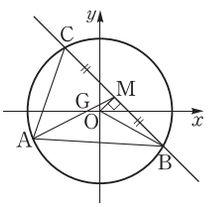
답 $\frac{2}{3}\pi$

0269 Step 1 삼각형 ABC의 무게중심을 이용하여 선분 BC의 중점 M의 좌표를 구하고, 선분 BC의 길이를 구한다.

세 점 A, B, C를 지나는 원의 반지름의 길이는

$\overline{OA}=\sqrt{(-5)^2+(-2)^2}=\sqrt{29}$

선분 BC의 중점을 M(a, b), 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면 점 G$(-1, 0)$은 선분 AM을 2 : 1로 내분하는 점이므로



$\frac{2a-5}{2+1}=-1$, $\frac{2b-2}{2+1}=0$

$\therefore a=1, b=1$

즉 M$(1, 1)$이므로

$\overline{OM}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\overline{OB}=\overline{OA}=\sqrt{29}$이므로 직각삼각형 OBM에서

$\overline{BM}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{OM}^2}=\sqrt{(\sqrt{29})^2-(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{3}$

$\therefore \overline{BC}=2\overline{BM}=6\sqrt{3}$

Step 2 직선 BC의 방정식을 구한 후 점 A와 직선 BC 사이의 거리를 구한다.

직선 OM의 기울기는 1이고 직선 BC는 직선 OM과 수직이므로 기울기가 -1이다.

이때 직선 BC는 점 M$(1, 1)$을 지나므로 그 방정식은

$y-1=-(x-1)$ $\therefore x+y-2=0$

점 A$(-5, -2)$와 직선 $x+y-2=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-5-2-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$

Step 3 삼각형 ABC의 넓이를 이용하여 $p+q$의 값을 구한다.

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 6\sqrt{3}\times\frac{9\sqrt{2}}{2}=\frac{27}{2}\sqrt{6}$

따라서 $p=2$, $q=27$이므로

$p+q=29$ 답 29

0270 Step 1 원 위의 점 A에서의 접선의 방정식을 구한 후 두 점 C, D의 x좌표의 합을 이용하여 직선 BD의 방정식을 구한다.

원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 A$(-2, 1)$에서의 접선의 방정식은

$-2x+y=5$ $\therefore y=2x+5$

$\therefore$ B$\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$

직선 BD의 기울기를 m ($m>0$)이라 하면 그 방정식은

$y=m\left(x+\frac{5}{2}\right)$

$y=m\left(x+\frac{5}{2}\right)$를 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$x^2+m^2\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=5$

$\therefore (1+m^2)x^2+5m^2x+\frac{25}{4}m^2-5=0$

x에 대한 이 이차방정식의 두 실근이 두 점 C, D의 x좌표이고 두 점의 x좌표의 합이 -1이므로

$-\frac{5m^2}{1+m^2}=-1$

$5m^2=1+m^2$

$m^2=\frac{1}{4}$ $\therefore m=\frac{1}{2}$ ($\because m>0$)

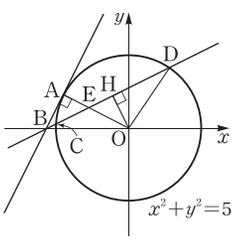
따라서 직선 BD의 방정식은

$y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{2}\right)$

$\therefore 2x-4y+5=0$

Step 2 합동인 삼각형을 이용하여 $(S_1-S_2)^2$의 값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 원점 O$(0, 0)$에서 직선 BD에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{OH}=\frac{|5|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

직각삼각형 ODH에서

$\overline{DH}=\sqrt{\overline{OD}^2-\overline{OH}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$

또 직각삼각형 ABO에서

$\overline{AB}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{OA}^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

이므로

$\triangle ABE \equiv \triangle HOE$ (ASA 합동)

즉 $S_2=\triangle ABE=\triangle HOE$이므로

$S_1-S_2=\triangle ODE-\triangle HOE=\triangle ODH$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{8}$

$\therefore (S_1-S_2)^2=\frac{75}{64}$ 답 $\frac{75}{64}$

다른 풀이 $S_1-S_2=\triangle ODE-\triangle ABE$

$=(\triangle ODE+\triangle BOE)-(\triangle ABE+\triangle BOE)$

$=\triangle BOD-\triangle ABO$

$\triangle ABO=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times 1=\frac{5}{4}$

직선 BD의 방정식 $2x-4y+5=0$, 즉 $x=2y-\frac{5}{2}$를

$x^2+y^2=5$에 대입하면

$\left(2y-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=5, \quad 4y^2-8y+1=0$

$\therefore y=1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 점 D의 y좌표는 $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\triangle BOD=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5}{4}+\frac{5\sqrt{3}}{8}$

$\therefore S_1-S_2=\left(\frac{5}{4}+\frac{5\sqrt{3}}{8}\right)-\frac{5}{4}=\frac{5\sqrt{3}}{8}$

0271 Step 1 네 원 중 어느 두 원의 교점을 지나는 직선은 모두 일치함을 이용하여 공통인 현의 방정식과 k의 값을 구한다.

$x^2+y^2=k$에서 $x^2+y^2-k=0$ …… ㉠

$(x-5)^2+(y-4)^2=13$에서

$x^2+y^2-10x-8y+28=0$ …… ㉡

원 C_1은 중심이 점 $(15, 12)$이고 y축에 접하므로 그 방정식은

$(x-15)^2+(y-12)^2=15^2$

$\therefore x^2+y^2-30x-24y+144=0$

원 C_2의 중심의 좌표를 (a, b)라 하면 y축에 접하므로 그 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$

$\therefore x^2+y^2-2ax-2by+b^2=0$

두 원 ㉠, ㉡의 교점을 A, B라 하면 네 원은 모두 두 점 A, B를 지나므로 네 원 중 어느 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은 모두 같다.

두 원 ㉠, ㉡의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-k-(x^2+y^2-10x-8y+28)=0$

$\therefore 10x+8y-k-28=0$ …… ㉢

두 원 ㉡, C_1의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-10x-8y+28-(x^2+y^2-30x-24y+144)=0$

$\therefore 5x+4y-29=0$ …… ㉣

두 직선 ㉢과 ㉣이 일치하므로 $\frac{10}{5}=\frac{8}{4}=\frac{-k-28}{-29}$

$k+28=58 \quad \therefore k=30$

Step 2 원 C_2의 반지름의 길이를 구하고, $4kR$의 값을 구한다.

두 원 ㉠, C_2의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-30-(x^2+y^2-2ax-2by+b^2)=0$

$\therefore 2ax+2by-b^2-30=0$ …… ㉤

두 직선 ㉣과 ㉤이 일치하므로 $\frac{2a}{5}=\frac{2b}{4}=\frac{-b^2-30}{-29}$

$\frac{2b}{4}=\frac{-b^2-30}{-29}$에서 $2b^2-29b+60=0$

$(b-12)(2b-5)=0 \quad \therefore b=\frac{5}{2}\ (\because b\neq 12)$

$\frac{2a}{5}=\frac{2b}{4}$에서 $\frac{2a}{5}=\frac{5}{4} \quad \therefore a=\frac{25}{8}$

$\therefore R=|a|=\frac{25}{8}$

$\therefore 4kR=4\times 30\times\frac{25}{8}=375$ 답 375

시험 만점 완성하기

본책 56~59쪽

0272 전략 직선의 x절편, y절편을 이용하여 원의 중심과 원이 지나는 점의 좌표를 구한다.

직선 $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각

$(3, 0), (0, -4)$

즉 원의 중심의 좌표가 $(3, 0)$이므로 원의 방정식을

$(x-3)^2+y^2=r^2$

이라 하면 이 원이 점 $(0, -4)$를 지나므로

$r^2=9+16=25$

따라서 원 $(x-3)^2+y^2=25$가 점 $(a, 3)$을 지나므로

$(a-3)^2+9=25$

$(a-3)^2=16, \quad a-3=\pm 4$

$\therefore a=7$ 또는 $a=-1$

즉 모든 a의 값의 합은 $7+(-1)=6$ 답 ④

0273 전략 지름의 양 끝 점을 이은 선분의 중점이 원의 중심임을 이용하여 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구한다.

$x^2+y^2+4x-2y+1=0$에서 $(x+2)^2+(y-1)^2=4$

$x^2+y^2-10y+16=0$에서 $x^2+(y-5)^2=9$

A$(-2, 1)$, B$(0, 5)$라 하면 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심은 선분 AB의 중점이므로 그 좌표는

$\left(\frac{-2+0}{2}, \frac{1+5}{2}\right)$, 즉 $(-1, 3)$

원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(5-1)^2}=\sqrt{5}$

즉 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-3)^2=5$

$\therefore x^2+y^2+2x-6y+5=0$

따라서 $a=2$, $b=-6$, $c=5$이므로

$a+b+c=1$ 답 ③

0274 전략 주어진 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 a에 대한 식으로 나타낸다.

$x^2+y^2+2(a-1)x-4ay+3a-1=0$에서

$(x+a-1)^2+(y-2a)^2=5a^2-5a+2$

이므로 원의 중심의 좌표는 $(-a+1, 2a)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{5a^2-5a+2}$이다.

ㄱ. $\sqrt{5a^2-5a+2}=\sqrt{5\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

따라서 반지름의 길이의 최솟값은 $\sqrt{\frac{3}{4}}$이므로 넓이의 최솟값은 $\frac{3}{4}\pi$이다. (거짓)

ㄴ. 원이 y축에 접하려면

$|-a+1|=\sqrt{5a^2-5a+2}$

양변을 제곱하면 $(-a+1)^2=5a^2-5a+2$

$\therefore 4a^2-3a+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times4\times1=-7<0$

이므로 실근이 존재하지 않는다. (참)

ㄷ. 원이 x축에 접하려면

$|2a|=\sqrt{5a^2-5a+2}$

양변을 제곱하면 $4a^2=5a^2-5a+2$

$\therefore a^2-5a+2=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 이 이차방정식의 두 실근의 합이 5이므로 모든 a의 값의 합은 5이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0275 전략 반지름의 길이가 r이고 x축과 y축에 동시에 접하는 원에서 $|(\text{중심의 } x\text{좌표})|=|(\text{중심의 } y\text{좌표})|=r$임을 이용한다.

점 $(2, -4)$가 제4사분면의 점이므로 주어진 원의 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는

$(r, -r)$

이때 점 $(2, -4)$가 원의 내부에 있으려면 두 점 $(2, -4)$, $(r, -r)$ 사이의 거리가 r보다 작아야 하므로

$\sqrt{(r-2)^2+(-r+4)^2}<r$

양변을 제곱하면

$(r-2)^2+(-r+4)^2<r^2$

$r^2-12r+20<0$, $(r-2)(r-10)<0$

$\therefore 2<r<10$

따라서 자연수 r는 3, 4, 5, …, 9의 7개이므로 원의 개수도 7이다. 답 ②

0276 전략 $P(a, b)$라 하고 선분 AP의 중점의 좌표를 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

$P(a, b)$라 하면 점 P는 원 위의 점이므로

$(a-3)^2+(b-8)^2=16$ …… ㉠

선분 AP의 중점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\frac{a+4}{2}$, $y=\frac{b+2}{2}$

$\therefore a=2x-4$, $b=2y-2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(2x-7)^2+(2y-10)^2=16$

$\therefore \left(x-\frac{7}{2}\right)^2+(y-5)^2=4$

따라서 선분 AP의 중점이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $\left(\frac{7}{2}, 5\right)$이고 반지름의 길이가 2인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$2\pi\times2=4\pi$ 답 ③

0277 전략 원점이 원 밖에 있는 경우와 원 안에 있는 경우로 나누어 k의 값을 구한다.

주어진 원의 중심의 좌표는 $(-3, 1)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{k}$이다.

원점과 원의 중심 $(-3, 1)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$

원점이 원 위의 점이면 원점과 점 P 사이의 거리의 최솟값은 0이므로 $Mm\neq6$

(i) 원점이 원 밖에 있는 경우

$\sqrt{k}<\sqrt{10}$이므로

$M=\sqrt{10}+\sqrt{k}$, $m=\sqrt{10}-\sqrt{k}$

$Mm=6$에서

$(\sqrt{10}+\sqrt{k})(\sqrt{10}-\sqrt{k})=6$

$10-k=6$ $\therefore k=4$

(ii) 원점이 원 안에 있는 경우

$\sqrt{k}>\sqrt{10}$이므로

$M=\sqrt{k}+\sqrt{10}$, $m=\sqrt{k}-\sqrt{10}$

$Mm=6$에서

$(\sqrt{k}+\sqrt{10})(\sqrt{k}-\sqrt{10})=6$

$k-10=6$ $\therefore k=16$

(i), (ii)에서 모든 k의 값의 합은

$4+16=20$ 답 ③

0278 전략 원의 중심에서 두 직선에 이르는 거리가 같음을 이용한다.

구하는 원의 중심의 좌표를 (a, b), 반지름의 길이를 r라 하면 이 점에서 두 직선 $2x-y+7=0$, $2x+y-7=0$에 이르는 거리가 같으므로

$r=\frac{|2a-b+7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|2a+b-7|}{\sqrt{2^2+1^2}}$ …… ㉠

$|2a-b+7|=|2a+b-7|$

$\therefore 2a-b+7=\pm(2a+b-7)$

(i) $2a-b+7=2a+b-7$일 때

$b=7$에서 원의 중심의 좌표가 $(a, 7)$이므로 두 직선에 모두 접하는 원은 점 $(-1, 0)$을 지날 수 없다.

(ii) $2a-b+7=-(2a+b-7)$일 때

$a=0$이므로 ㉠에서 $r=\frac{|b-7|}{\sqrt{5}}$

이때 원의 중심 $(0, b)$와 점 $(-1, 0)$ 사이의 거리가 r와 같으므로

$\sqrt{1^2+b^2}=\frac{|b-7|}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{5(b^2+1)}=|b-7|$

양변을 제곱하면

$5(b^2+1)=(b-7)^2$

$2b^2+7b-22=0$

$(2b+11)(b-2)=0$

$\therefore b=-\frac{11}{2}$ 또는 $b=2$

(i), (ii)에서 원의 중심의 좌표는 $\left(0, -\frac{11}{2}\right)$, $(0, 2)$

따라서 선분 O_1O_2의 길이는

$2-\left(-\frac{11}{2}\right)=\frac{15}{2}$ 답 ②

0279 전략 점 A와 원의 중심, 접점을 이용하여 직각삼각형을 만들고 피타고라스 정리를 이용한다.

C_2: $x^2+y^2-6x-8y+24=0$에서
$(x-3)^2+(y-4)^2=1$
원 C_2의 중심을 $O'(3, 4)$라 하면 직각삼각형 $AO'Q$에서
$\overline{AQ}^2=\overline{O'A}^2-\overline{O'Q}^2$
$=\{(a-3)^2+(-4)^2\}-1^2$
$=a^2-6a+24$
또 직각삼각형 OAP에서
$\overline{AP}^2=\overline{OA}^2-\overline{OP}^2=a^2-2^2=a^2-4$
이때 $\overline{AP}=\overline{AQ}$, 즉 $\overline{AP}^2=\overline{AQ}^2$이므로
$a^2-4=a^2-6a+24$ $\therefore a=\frac{14}{3}$ 답 ①

0280 전략 원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하고, 이 직선과 주어진 곡선이 접하기 위한 조건을 이용한다.

원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(-2, -1)$에서의 접선의 방정식은
$-2x-y=5$ $\therefore y=-2x-5$
$y=-2x-5$를 $y=x^2+2ax+4$에 대입하면
$-2x-5=x^2+2ax+4$
$\therefore x^2+2(a+1)x+9=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 직선과 곡선이 접하므로
$\frac{D}{4}=(a+1)^2-9=0$
$a^2+2a-8=0$, $(a+4)(a-2)=0$
$\therefore a=2$ ($\because a>0$) 답 ②

0281 전략 점 $(-1, -3)$과 원 위의 점 $P(a, b)$를 지나는 직선의 기울기가 최대 또는 최소인 경우를 생각해 본다.

$\frac{b+3}{a+1}$의 값은 두 점 (a, b), $(-1, -3)$을 지나는 직선의 기울기와 같다. 이때 점 $P(a, b)$는 원 $x^2+y^2+8x-2y+12=0$ 위의 점이므로 점 $(-1, -3)$을 지나고 이 원과 만나는 직선의 기울기의 최댓값과 최솟값을 구하면 된다.
$x^2+y^2+8x-2y+12=0$에서 $(x+4)^2+(y-1)^2=5$
점 $(-1, -3)$을 지나는 직선의 방정식을
$y+3=m(x+1)$, 즉 $mx-y+m-3=0$
이라 하면 원의 중심 $(-4, 1)$과 직선 사이의 거리는
$\frac{|-4m-1+m-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|3m+4|}{\sqrt{m^2+1}}$
원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 만나려면
$\frac{|3m+4|}{\sqrt{m^2+1}}\le\sqrt{5}$, $|3m+4|\le\sqrt{5(m^2+1)}$
양변을 제곱하면 $(3m+4)^2\le5(m^2+1)$
$4m^2+24m+11\le0$, $(2m+11)(2m+1)\le0$
$\therefore -\frac{11}{2}\le m\le-\frac{1}{2}$
따라서 $\frac{b+3}{a+1}$의 최댓값은 $-\frac{1}{2}$, 최솟값은 $-\frac{11}{2}$이므로 최댓값과 최솟값의 차는
$-\frac{1}{2}-\left(-\frac{11}{2}\right)=5$ 답 ②

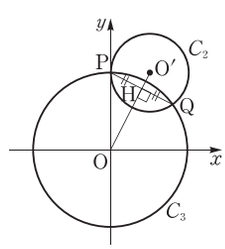
0282 전략 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구한 후 주어진 조건을 이용한다.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x^2+y^2+5x+ay-(x^2+y^2-ax-y+b)=0$
$\therefore (a+5)x+(a+1)y-b=0$ …… ㉠
직선 ㉠이 점 $(-3, 1)$을 지나므로
$-3(a+5)+a+1-b=0$
$\therefore 2a+b=-14$ …… ㉡
또 직선 ㉠이 직선 $3x+y=0$에 수직이므로
$3(a+5)+(a+1)=0$ $\therefore a=-4$
$a=-4$를 ㉡에 대입하면 $-8+b=-14$ $\therefore b=-6$
$\therefore a+b=-10$ 답 ①

다른 풀이 점 $(-3, 1)$을 지나고 직선 $3x+y=0$, 즉 $y=-3x$에 수직인 직선의 방정식은
$y-1=\frac{1}{3}(x+3)$ $\therefore x-3y+6=0$
이것이 ㉠과 같으므로 $\frac{a+5}{1}=\frac{a+1}{-3}=\frac{-b}{6}$
$\frac{a+5}{1}=\frac{a+1}{-3}$에서 $-3a-15=a+1$ $\therefore a=-4$
$1=\frac{-b}{6}$에서 $b=-6$

0283 전략 원 C_1의 접선의 방정식을 이용하여 a의 값을 구한 후 두 원 C_2, C_3의 공통인 현의 방정식을 구한다.

원 C_1: $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(-3, 4)$에서의 접선의 방정식은
$-3x+4y=25$
이 직선이 원 C_2의 넓이를 이등분하려면 원 C_2의 중심 $(a, 2a)$를 지나야 하므로
$-3a+8a=25$ $\therefore a=5$
C_2: $(x-5)^2+(y-10)^2=25$에서
$x^2+y^2-10x-20y+100=0$
C_3: $x^2+y^2=100$에서 $x^2+y^2-100=0$
두 원 C_2, C_3의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x^2+y^2-10x-20y+100-(x^2+y^2-100)=0$
$\therefore x+2y-20=0$
오른쪽 그림과 같이 두 원 C_2, C_3의 중심을 각각 O', O라 하고 선분 PQ와 선분 OO'의 교점을 H라 하면 원 C_3의 중심 $O(0, 0)$과 공통인 현 사이의 거리는
$\overline{OH}=\frac{|-20|}{\sqrt{1^2+2^2}}=4\sqrt{5}$



직각삼각형 OHP에서
$\overline{PH}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{10^2-(4\sqrt{5})^2}=2\sqrt{5}$
$\therefore \overline{PQ}=2\overline{PH}=4\sqrt{5}$ 답 ⑤

0284 전략 주어진 원의 방정식을 $(x+a)^2+(y+b)^2=c$의 꼴로 변형한 후 c의 값의 범위를 생각해 본다.

$x^2+y^2+2kx-2k^2-12k-9=0$에서
$(x+k)^2+y^2=3k^2+12k+9$

이 방정식이 반지름의 길이가 3 이하인 원을 나타내려면

$0<\sqrt{3k^2+12k+9}\le 3$, $0<3k^2+12k+9\le 9$

$\therefore\ 0<k^2+4k+3\le 3$

(i) $k^2+4k+3>0$에서 $(k+3)(k+1)>0$

$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>-1$ ····· ㉠

(ii) $k^2+4k+3\le 3$에서 $k^2+4k\le 0$

$k(k+4)\le 0$ $\therefore\ -4\le k\le 0$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $-4\le k<-3$ 또는 $-1<k\le 0$

따라서 정수 k는 -4, 0이다. 답 -4, 0

0285 전략 x축에 접하는 원의 반지름의 길이는 중심의 y좌표의 절댓값과 같음을 이용한다.

원 $x^2+y^2-2x+2ay+b=0$이 점 $(-1,\ -1)$을 지나므로

$1+1+2-2a+b=0$ $\therefore\ 2a-b=4$ ····· ㉠

$x^2+y^2-2x+2ay+b=0$에서

$(x-1)^2+(y+a)^2=a^2-b+1$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(1,\ -a)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{a^2-b+1}$이고 이 원이 x축에 접하므로

$|-a|=\sqrt{a^2-b+1}$

양변을 제곱하면 $a^2=a^2-b+1$ $\therefore\ b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면

$2a-1=4$ $\therefore\ a=\frac{5}{2}$ $\therefore\ a+b=\frac{7}{2}$ 답 $\frac{7}{2}$

0286 전략 주어진 식을 $(x+a)^2+(y+b)^2$의 꼴로 나타내고 이 식의 값이 나타내는 것을 생각해 본다.

주어진 원의 중심의 좌표는 $(3,\ -3)$이므로 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+3)^2=9$ ····· ㉠

$x^2+y^2-8x-2y+17=(x-4)^2+(y-1)^2$

이때 $(x-4)^2+(y-1)^2$의 값은 두 점 $(x,\ y)$, $(4,\ 1)$ 사이의 거리의 제곱과 같다.

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 원 ㉠ 위의 점이므로

$M=\{\sqrt{(3-4)^2+(-3-1)^2}+3\}^2=(\sqrt{17}+3)^2$

$=26+6\sqrt{17}$

$m=\{\sqrt{(3-4)^2+(-3-1)^2}-3\}^2=(\sqrt{17}-3)^2$

$=26-6\sqrt{17}$

$\therefore\ M+m=52$ 답 52

0287 전략 원과 직선이 만나려면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이보다 작거나 같아야 한다.

주어진 원의 중심의 좌표는 모두 $(3,\ -2)$이다.

원과 직선이 만나려면 원의 중심 $(3,\ -2)$와 직선 $3x-4y-2=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{n}$보다 작거나 같아야 하므로

$\frac{|9+8-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\le\sqrt{n}$, $\sqrt{n}\ge 3$ $\therefore\ n\ge 9$

즉 직선과 접하는 원은 $n=9$일 때의 1개이고, 직선과 서로 다른 두 점에서 만나는 원은 $n=10,\ 11,\ \cdots,\ 20$일 때의 11개이다.

따라서 교점의 개수의 합은

$1+2\times 11=23$ 답 23

0288 전략 원의 중심과 접선 사이의 거리가 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

$x^2+y^2-10x-4y+25=0$에서

$(x-5)^2+(y-2)^2=4$

점 $\mathrm{A}(0,\ a)$를 지나는 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y=mx+a$ $\therefore\ mx-y+a=0$

원과 이 직선이 접하려면 원의 중심 $(5,\ 2)$와 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 2와 같아야 하므로

$\frac{|5m-2+a|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$, $|5m-2+a|=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $(5m-2+a)^2=4(m^2+1)$

$25m^2+10(-2+a)m+(-2+a)^2=4m^2+4$

$\therefore\ 21m^2+10(-2+a)m+a^2-4a=0$

m에 대한 이 이차방정식의 두 실근을 m_1, m_2라 하면 두 접선의 기울기가 m_1, m_2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$m_1m_2=\frac{a^2-4a}{21}=1$, $a^2-4a-21=0$

$(a+3)(a-7)=0$ $\therefore\ a=7$ ($\because\ a>0$) 답 7

0289 전략 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을 구한 후 원이 지나는 두 점의 좌표를 대입한다.

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-2ax+ay+1+k(x^2+y^2-4x-3y)=0$

(단, $k\ne -1$) ····· ㉠

이 원이 두 점 $(0,\ 1)$, $(0,\ 2)$를 지나므로

$a-2k+2=0$, $2a-2k+5=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $k=-\frac{1}{2}$

$a=-3$, $k=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2+6x-3y+1-\frac{1}{2}(x^2+y^2-4x-3y)=0$

$\therefore\ x^2+y^2+16x-3y+2=0$

따라서 $A=16$, $B=-3$, $C=2$이므로

$A+B+C=15$ 답 15

0290 전략 원의 중심을 지나는 직선은 그 원의 넓이를 이등분한다.

$x^2+y^2-2x+8y+13=0$에서

$(x-1)^2+(y+4)^2=4$ ····· ㉠

$x^2+y^2+2bx=0$에서

$(x+b)^2+y^2=b^2$ ····· ㉡

따라서 원 ㉠의 중심의 좌표는 $(1,\ -4)$, 원 ㉡의 중심의 좌표는 $(-b,\ 0)$이다. … ❶

직선 $ax+y+6=0$이 두 원 ㉠, ㉡의 넓이를 동시에 이등분하려면 두 원의 중심을 모두 지나야 하므로

$a-4+6=0$, $-ab+6=0$

$\therefore\ a=-2$, $b=-3$

$\therefore\ a+b=-5$ … ❷

답 -5

단계	채점 요소	배점
❶	두 원의 중심의 좌표 구하기	2점
❷	$a+b$의 값 구하기	1점

0291 전략 $a+b=3$이려면 $a=1$, $b=2$ 또는 $a=2$, $b=1$이어야 한다.

a, b는 원과 직선의 교점의 개수이므로 0 또는 1 또는 2이다.
따라서 $a+b=3$이려면 $a=1$, $b=2$ 또는 $a=2$, $b=1$
이때 원 C_1은 중심의 좌표가 $(-2, 0)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이고, 원 C_2는 중심의 좌표가 $(2, 2)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이다.
(i) $a=1$, $b=2$일 때
직선 $x-y+k=0$이 원 C_1과 접해야 하므로

$$\frac{|-2+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}, \quad |k-2|=2$$

$k-2=\pm 2$ $\therefore k=0$ 또는 $k=4$ …… ㉠

또 직선 $x-y+k=0$이 원 C_2와 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$$\frac{|2-2+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}<\sqrt{2}, \quad |k|<2$$

$\therefore -2<k<2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k=0$ … ❶

(ii) $a=2$, $b=1$일 때
직선 $x-y+k=0$이 원 C_1과 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$$\frac{|-2+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}<\sqrt{2}, \quad |k-2|<2$$

$-2<k-2<2$ $\therefore 0<k<4$ …… ㉢

또 직선 $x-y+k=0$이 원 C_2와 접해야 하므로

$$\frac{|2-2+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}, \quad |k|=2$$

$\therefore k=\pm 2$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $k=2$ … ❷

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은 $0+2=2$ … ❸

답 2

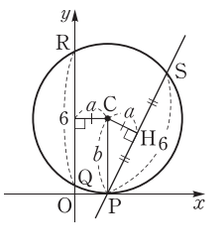
단계	채점 요소	배점
❶	$a=1$, $b=2$일 때의 k의 값 구하기	2점
❷	$a=2$, $b=1$일 때의 k의 값 구하기	2점
❸	모든 k의 값의 합 구하기	1점

0292 전략 원의 중심에서 y축과 직선 PS에 이르는 거리가 같음을 이용한다.

원의 중심을 $C(a, b)$ $(a>0, b>0)$라 하면 원이 x축에 접하므로 반지름의 길이는 b이다.
또 $P(a, 0)$이므로 직선 PS의 방정식은

$y=3(x-a)$

$\therefore 3x-y-3a=0$



원의 중심 C에서 y축과 직선 PS까지의 거리가 같으므로

$$|a|=\frac{|3a-b-3a|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$$

$\therefore \sqrt{10}a=b$ ($\because a>0, b>0$) …… ㉠ … ❶

점 C에서 직선 PS에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PH}=\frac{1}{2}\overline{PS}=3$

직각삼각형 CPH에서

$b^2=a^2+9$ …… ㉡ … ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=\sqrt{10}$

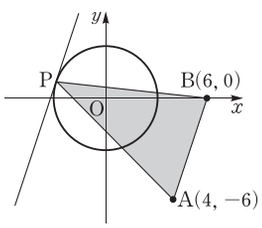
따라서 원의 중심의 좌표는 $(1, \sqrt{10})$이다. … ❸

답 $(1, \sqrt{10})$

단계	채점 요소	배점
❶	원의 중심에서 y축과 직선 PS까지의 거리가 같음을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	3점
❷	현의 길이를 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	2점
❸	원의 중심의 좌표 구하기	1점

0293 전략 삼각형의 넓이가 최대일 때 점 P에서의 접선은 직선 AB와 평행함을 이용한다.

삼각형 PAB의 넓이는 오른쪽 그림과 같이 점 P에서의 접선이 직선 AB와 평행하면서 y절편이 양수일 때 최대이다. … ❶



직선 AB의 기울기는

$\frac{6}{6-4}=3$

원 $x^2+y^2=10$에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{10}\times\sqrt{3^2+1}$

$\therefore y=3x+10$ 또는 $y=3x-10$

즉 점 P에서의 접선의 방정식은

$y=3x+10$ … ❷

$y=3x+10$을 $x^2+y^2=10$에 대입하면

$x^2+(3x+10)^2=10$, $x^2+6x+9=0$

$(x+3)^2=0$ $\therefore x=-3$

따라서 점 P의 x좌표는 -3이다. … ❸

답 -3

단계	채점 요소	배점
❶	삼각형 PAB의 넓이가 최대일 때의 점 P의 위치 알기	2점
❷	점 P에서의 접선의 방정식 구하기	2점
❸	점 P의 x좌표 구하기	1점

다른 풀이 △PAB의 넓이가 최대이려면 $\overleftrightarrow{PO}\perp\overline{AB}$이어야 한다.
원의 중심 $O(0, 0)$을 지나고 직선 AB와 수직인 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{3}x$

따라서 점 P는 직선 $y=-\frac{1}{3}x$와 원 $x^2+y^2=10$의 교점이므로

$x^2+\frac{1}{9}x^2=10$, $x^2=9$

$\therefore x=-3$ ($\because x<0$)

04 도형의 이동

셀프 CHECK → 본책 60~61쪽

A 답 (1) (4, −2) (2) (1, 1) (3) (2, 0) (4) (−1, −5)

B 답 (1) $x-3y-2=0$ (2) $y=x^2-6x+10$
(3) $(x-5)^2+(y+4)^2=5$

C 답 (1) (−2, −1) (2) (2, 1) (3) (2, −1) (4) (1, −2)

D 답 (1) $x+3y-5=0$ (2) $x+3y+5=0$
(3) $x-3y+5=0$ (4) $3x-y+5=0$

E 답 (1) $y=-x^2-2x+3$ (2) $y=x^2-2x-3$
(3) $y=-x^2+2x+3$

F 답 (1) (2, 3) (2) (6, −4)

G 답 (6, 1)

H 답 (1) $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b-2}{2}\right)$ (2) $\frac{b+2}{a-1}$ (3) (−4, 3)

내신유형 다지기 → 본책 62~71쪽

유형 055 점의 평행이동 → 본책 62쪽

점 (x, y)를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표
➜ $(x+m, y+n)$

0294 점 (−2, 5)를 점 (4, 3)으로 옮기는 평행이동을 $(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$이라 하면
$-2+m=4$, $5+n=3$
$\therefore m=6$, $n=-2$
따라서 이 평행이동에 의하여 점 (7, −1)로 옮겨지는 점의 좌표를 (a, b)라 하면
$a+6=7$, $b-2=-1$
$\therefore a=1$, $b=1$
즉 구하는 점의 좌표는 (1, 1)이다. 답 (1, 1)

0295 주어진 평행이동을 $(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$이라 하면
$a+m=3$, $-1+n=2$, $8+m=6$, $b+n=-5$
$\therefore m=-2$, $n=3$, $a=5$, $b=-8$
따라서 점 $(b, -a-b)$, 즉 (−8, 3)이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는
(−8−2, 3+3), 즉 (−10, 6) 답 (−10, 6)

0296 점 (−4, 3)을 x축의 방향으로 $-2a$만큼, y축의 방향으로 a^3만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(-4-2a, 3+a^3)$ … ❶
이 점의 x좌표와 y좌표의 합이 3이므로
$-4-2a+(3+a^3)=3$ … ❷
$a^3-2a-4=0$, $(a-2)(a^2+2a+2)=0$
이때 $a^2+2a+2=(a+1)^2+1>0$이므로
$a-2=0$ $\therefore a=2$ … ❸
답 2

단계	채점 요소	비율
❶	평행이동한 점의 좌표를 a로 나타내기	40 %
❷	a에 대한 방정식 세우기	20 %
❸	a의 값 구하기	40 %

0297 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이라 하면
$A'(x_1+3, y_1-1)$, $B'(x_2+3, y_2-1)$, $C'(x_3+3, y_3-1)$
이때 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (2, −4)이므로
$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=2$, $\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=-4$
$\therefore x_1+x_2+x_3=6$, $y_1+y_2+y_3=-12$
따라서
$a=x_1+3+(x_2+3)+(x_3+3)$
$=(x_1+x_2+x_3)+9$
$=6+9=15$,
$b=y_1-1+(y_2-1)+(y_3-1)$
$=(y_1+y_2+y_3)-3$
$=-12-3=-15$
이므로 $2a+b=2\times15+(-15)=15$ 답 ⑤

다른 풀이 삼각형 A′B′C′의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 −1만큼 평행이동한 것과 같으므로 그 좌표는
(2+3, −4−1), 즉 (5, −5)
따라서 $A'(x_1', y_1')$, $B'(x_2', y_2')$, $C'(x_3', y_3')$이라 하면
$\frac{x_1'+x_2'+x_3'}{3}=5$, $\frac{y_1'+y_2'+y_3'}{3}=-5$
$\therefore x_1'+x_2'+x_3'=15$, $y_1'+y_2'+y_3'=-15$
$\therefore a=15$, $b=-15$

0298 규칙 (가)에 의하여 점 P는
(11, 7) ⟶ (9, 7) ⟶ (7, 7) ⟶ (5, 7)
⟶ (3, 7) ⟶ (1, 7)
로 이동한다.
또 규칙 (나)에 의하여 점 P는
(1, 7) ⟶ (1, 5) ⟶ (1, 3)
으로 이동한다.
규칙 (다)에 의하여 점 P는 점 (1, 3)에서 더 이상 이동하지 않는다.
$\therefore$ B(1, 3)
따라서 점 P가 점 A(11, 7)에서 점 B(1, 3)에 이르기까지 이동한 횟수는 7이다. 답 7

유형 056 도형의 평행이동 — 직선 본책 62쪽

직선 $ax+by+c=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 직선의 방정식

➜ x 대신 $x-m$, y 대신 $y-n$을 대입한다.

➜ $a(x-m)+b(y-n)+c=0$

0299 직선 $ax-3y-2a-5=0$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$a(x-2)-3(y-b)-2a-5=0$

$\therefore ax-3y-4a+3b-5=0$

이 직선이 직선 $2x-3y-4=0$과 일치하므로

$a=2,\ -4a+3b-5=-4$

$\therefore a=2,\ b=3 \quad \therefore a+b=5$ 답 ②

0300 직선 $x-my+4=0$을 x축의 방향으로 n만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$x-n-m(y+3)+4=0$

$\therefore x-my-3m-n+4=0$

이 직선이 직선 $x-my+4=0$과 일치하므로

$-3m-n+4=4, \quad n=-3m$

$\therefore \dfrac{n}{m}=-3$ 답 ①

0301 점 $\mathrm{A}(4,\ -3)$을 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점 B의 좌표는 $(-1,\ -2)$이므로 직선 AB의 방정식은

$y-(-3)=\dfrac{-2-(-3)}{-1-4}(x-4)$

$\therefore x+5y+11=0$

이 직선을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$x-4+5(y-2)+11=0 \quad \therefore x+5y-3=0$

따라서 $p=5,\ q=3$이므로

$p-q=2$ 답 ②

다른 풀이 두 점 A, B를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점을 각각 A', B'이라 하면

$\mathrm{A}'(8,\ -1),\ \mathrm{B}'(3,\ 0)$

직선 $x+py-q=0$이 두 점 A', B'을 지나므로

$8-p-q=0,\ 3-q=0$

$\therefore p=5,\ q=3$

0302 직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-6=a(x-2)+b$

$\therefore y=ax-2a+b+6$ …… ㉠

직선 ㉠이 직선 $y=\dfrac{2}{3}x-2$와 수직이므로

$a\times\dfrac{2}{3}=-1 \quad \therefore a=-\dfrac{3}{2}$

또 직선 $y=\dfrac{2}{3}x-2$는 x축 위의 점 $(3,\ 0)$을 지나므로 직선 ㉠도 점 $(3,\ 0)$을 지난다.

즉 $0=3a-2a+b+6$에서 $a+b+6=0$

이때 $a=-\dfrac{3}{2}$이므로

$-\dfrac{3}{2}+b+6=0 \quad \therefore b=-\dfrac{9}{2}$

$\therefore ab=\dfrac{27}{4}$ 답 $\dfrac{27}{4}$

만점 공략 노트

두 직선 l, m이 x축 위에서 수직으로 만나면 두 직선 l, m의 x절편은 같고, 두 직선 l, m의 기울기의 곱은 -1이다.

유형 057 도형의 평행이동 — 포물선 본책 63쪽

(1) 포물선 $y=ax^2+bx+c$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식

➜ $y-n=a(x-m)^2+b(x-m)+c$

(2) 포물선의 평행이동은 꼭짓점의 평행이동으로 생각할 수 있다.

0303 주어진 평행이동에 의하여 포물선 $y=x^2+8x+9$가 옮겨지는 포물선의 방정식은

$y+2=(x-1)^2+8(x-1)+9$

$\therefore y=x^2+6x=(x+3)^2-9$

따라서 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ -9)$이므로

$m=-3,\ n=-9$

$\therefore m-n=6$ 답 ④

다른 풀이 $y=x^2+8x+9=(x+4)^2-7$

이 포물선의 꼭짓점 $(-4,\ -7)$을 평행이동한 점의 좌표가 $(m,\ n)$이므로

$m=-4+1=-3,\ n=-7-2=-9$

0304 포물선 $y=-2x^2+12x-8$, 즉 $y=-2(x-3)^2+10$을 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 $k+1$만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-k-1=-2(x-k-3)^2+10$

$\therefore y=-2(x-k-3)^2+k+11$

이 포물선의 꼭짓점 $(k+3,\ k+11)$이 y축 위에 있으므로

$k+3=0 \quad \therefore k=-3$

따라서 꼭짓점의 y좌표는 $-3+11=8$ 답 8

0305 포물선 $y=x^2+4x+3$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-3=(x-1)^2+4(x-1)+3$

$\therefore y=x^2+2x+3$ … ❶

이 포물선과 직선 $y=5x+1$의 교점의 x좌표는

$x^2+2x+3=5x+1$에서

$x^2-3x+2=0, \quad (x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

따라서 두 점 A, B의 좌표는

$(1, 6), (2, 11)$ … ❷

이므로 $\overline{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(11-6)^2}=\sqrt{26}$ … ❸

답 $\sqrt{26}$

단계	채점 요소	비율
❶	평행이동한 포물선의 방정식 구하기	40 %
❷	두 점 A, B의 좌표 구하기	40 %
❸	선분 AB의 길이 구하기	20 %

참고 직선 $y=5x+1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선과 포물선 $y=x^2+4x+3$이 만나는 두 점을 이은 선분의 길이는 선분 AB의 길이와 같다.

0306 $y=x^2-6x+7=(x-3)^2-2$

에서 포물선 $y=x^2-6x+7$의 꼭짓점의 좌표는

$(3, -2)$

$y=x^2-12x+33=(x-6)^2-3$

에서 포물선 $y=x^2-12x+33$의 꼭짓점의 좌표는

$(6, -3)$

주어진 평행이동은 점 $(3, -2)$를 점 $(6, -3)$으로 옮기므로 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

직선 $l: 3x+y-1=0$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선 l'의 방정식은

$3(x-3)+(y+1)-1=0$ $\therefore l': 3x+y-9=0$

두 직선 l, l'은 평행하므로 두 직선 사이의 거리 d는 직선 $3x+y-1=0$ 위의 점 $(0, 1)$과 직선 $3x+y-9=0$ 사이의 거리와 같다.

$\therefore d=\dfrac{|1-9|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{10}}$

$\therefore 5d^2=5\times\dfrac{64}{10}=32$ 답 32

다른 풀이 포물선 $y=x^2-6x+7$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-b=(x-a)^2-6(x-a)+7$

$\therefore y=x^2-2(a+3)x+a^2+6a+b+7$

이 포물선이 포물선 $y=x^2-12x+33$과 일치하므로

$2(a+3)=12$, $a^2+6a+b+7=33$

$\therefore a=3, b=-1$

유형 058 도형의 평행이동 — 원 → 본책 63쪽

(1) 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원의 방정식

➜ $(x-m-a)^2+(y-n-b)^2=r^2$

(2) 원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동으로 생각할 수 있다.

0307 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=c$를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+4-a)^2+(y-2-b)^2=c$

이 원이 원 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$, 즉 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$와 일치하므로

$4-a=-2$, $-2-b=1$, $c=4$

$\therefore a=6, b=-3, c=4$

$\therefore a+b+c=7$ 답 ③

다른 풀이 1 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=c$의 중심의 좌표는 (a, b)이므로 점 (a, b)를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a-4, b+2)$

이 점이 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$의 중심 $(2, -1)$과 일치하므로

$a-4=2$, $b+2=-1$

$\therefore a=6, b=-3$

원을 평행이동하여도 반지름의 길이는 변하지 않으므로

$c=4$

다른 풀이 2 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-4-2)^2+(y+2+1)^2=4$

$\therefore (x-6)^2+(y+3)^2=4$

이 원이 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=c$와 일치하므로

$a=6, b=-3, c=4$

0308 $x^2+y^2+2x-6y+1=0$에서

$(x+1)^2+(y-3)^2=9$

이 원을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 원 C_2의 방정식은

$(x-1+1)^2+(y-k-3)^2=9$

$\therefore x^2+(y-k-3)^2=9$

두 원 C_1, C_2의 중심의 좌표는 각각 $(-1, 3)$, $(0, k+3)$이고 두 원의 중심 사이의 거리가 5이므로

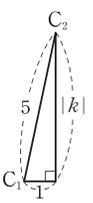
$\sqrt{1^2+\{(k+3)-3\}^2}=5$

$\sqrt{k^2+1}=5$, $k^2+1=25$

$\therefore k^2=24$ 답 ③

다른 풀이 두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 C_1, C_2라 하면 점 C_1을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 점이 C_2이고 두 점 C_1, C_2 사이의 거리가 5이므로 오른쪽 그림에서

$1^2+k^2=5^2$ $\therefore k^2=24$



0309 $x^2+y^2+4x-6y-12=0$에서

$(x+2)^2+(y-3)^2=25$

이 원을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-p+2)^2+(y-q-3)^2=25$

이 원의 중심 $(p-2, q+3)$이 제4사분면 위에 있으면서 이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$p-2=5$, $q+3=-5$ $\therefore p=7, q=-8$

$\therefore p-q=15$ 답 ⑤

0310 주어진 평행이동은

$(x, y) \longrightarrow (x-2, y+5)$ … ❶

$x^2+y^2+6x-4y+m=0$에서

$(x+3)^2+(y-2)^2=13-m$

이 원이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 원의 방정식은

$(x+2+3)^2+(y-5-2)^2=13-m$

$\therefore (x+5)^2+(y-7)^2=13-m$ … ❷

따라서 중심의 좌표가 $(-5, 7)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{13-m}$이므로

$n=-5$, $\sqrt{13-m}=4$ $\therefore m=-3$, $n=-5$ … ❸

$\therefore m-n=2$ … ❹

답 2

단계	채점 요소	비율
❶	주어진 평행이동 구하기	20 %
❷	평행이동한 원의 방정식 구하기	30 %
❸	m, n의 값 구하기	40 %
❹	$m-n$의 값 구하기	10 %

0311 $y=3x^2+6x-2=3(x+1)^2-5$

에서 포물선 $y=3x^2-9$는 포물선 $y=3(x+1)^2-5$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

C: $x^2+y^2+8x-2y=0$에서

$(x+4)^2+(y-1)^2=17$

원 C를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 원 C'의 방정식은

$(x-1+4)^2+(y+4-1)^2=17$

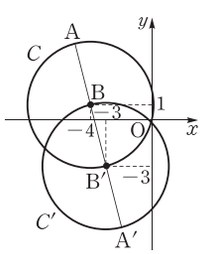
$\therefore (x+3)^2+(y+3)^2=17$

이때 두 원 C, C'의 중심을 각각 B, B′이라 하면 B$(-4, 1)$, B′$(-3, -3)$이므로

$\overline{BB'}=\sqrt{(-3+4)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{17}$

즉 오른쪽 그림과 같이 두 원 C, C'은 서로의 중심을 지난다.

선분 AA′의 길이는 직선 BB′이 원 C와 만나는 점 중 점 B′이 아닌 점이 A이고, 직선 BB′이 원 C'과 만나는 점 중 점 B가 아닌 점이 A′일 때 최대이다.



따라서 선분 AA′의 길이의 최댓값은

$\overline{AB}+\overline{BB'}+\overline{B'A'}=\sqrt{17}+\sqrt{17}+\sqrt{17}=3\sqrt{17}$ 답 $3\sqrt{17}$

유형 059 평행이동의 활용 본책 64쪽

(1) 직선이 원의 넓이를 이등분한다.
➜ 직선이 원의 중심을 지난다.

(2) 직선과 원의 위치 관계
➜ 직선과 원의 중심 사이의 거리를 이용한다.

(3) 직선과 포물선의 위치 관계
➜ 직선과 포물선의 방정식을 연립한 이차방정식의 판별식을 이용한다.

0312 원 $(x+2)^2+y^2=13$을 y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-m)^2=13$

이 원이 직선 $3x-2y+5=0$과 접하려면 원의 중심 $(-2, m)$과 직선 $3x-2y+5=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{13}$과 같아야 하므로

$\dfrac{|-6-2m+5|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\sqrt{13}$, $|2m+1|=13$

$2m+1=\pm 13$ $\therefore m=6$ ($\because m>0$) 답 ③

0313 직선 $y=2x+10$을 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 $3k$만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-3k=2(x-k)+10$

$\therefore y=2x+k+10$

이 직선이 원 $(x+3)^2+(y-1)^2=1$의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(-3, 1)$을 지나야 하므로

$1=-6+k+10$ $\therefore k=-3$ 답 -3

0314 포물선 $y=x^2+5x$를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y=x^2+5x+a$

이 포물선과 직선 $y=3x-2$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2+5x+a=3x-2$, 즉 $x^2+2x+a+2=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1^2-(a+2)>0$ $\therefore a<-1$

따라서 정수 a의 최댓값은 -2이다. 답 -2

만점 공략 노트

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$, 즉

$ax^2+(b-m)x+c-n=0$

의 판별식 D의 값의 부호에 따라 결정된다.

① $D>0$ ➜ 서로 다른 두 점에서 만난다.
② $D=0$ ➜ 한 점에서 만난다. (접한다.)
③ $D<0$ ➜ 만나지 않는다.

0315 원 C의 중심의 좌표가 $(2, 3)$이므로 원 C_1의 중심의 좌표는 $(2+m, 3)$

조건 ㈎에 의하여 점 $(2+m, 3)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리가 원 C_1의 반지름의 길이인 3보다 작으므로

$\dfrac{|4(2+m)-9|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3$, $|4m-1|<15$

$-15<4m-1<15$ $\therefore -\dfrac{7}{2}<m<4$

따라서 자연수 m의 값은 1, 2, 3이다.

(i) $m=1$일 때

원 C_2의 중심의 좌표는 $(3, 3+n)$이고, 조건 ㈏에 의하여 점 $(3, 3+n)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리가 원 C_2의 반지름의 길이인 3보다 작으므로

$\frac{|12-3(3+n)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3$, $|3n-3|<15$

$-15<3n-3<15$ $\therefore -4<n<6$

따라서 자연수 n은 1, 2, 3, 4, 5이므로 $m+n$의 최댓값은

$1+5=6$

(ii) $m=2$일 때

원 C_2의 중심의 좌표는 $(4, 3+n)$이고, 조건 (나)에 의하여 점 $(4, 3+n)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리가 원 C_2의 반지름의 길이인 3보다 작으므로

$\frac{|16-3(3+n)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3$, $|3n-7|<15$

$-15<3n-7<15$ $\therefore -\frac{8}{3}<n<\frac{22}{3}$

따라서 자연수 n은 1, 2, 3, …, 7이므로 $m+n$의 최댓값은

$2+7=9$

(iii) $m=3$일 때

원 C_2의 중심의 좌표는 $(5, 3+n)$이고, 조건 (나)에 의하여 점 $(5, 3+n)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리가 원 C_2의 반지름의 길이인 3보다 작으므로

$\frac{|20-3(3+n)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3$, $|3n-11|<15$

$-15<3n-11<15$ $\therefore -\frac{4}{3}<n<\frac{26}{3}$

따라서 자연수 n은 1, 2, 3, …, 8이므로 $m+n$의 최댓값은

$3+8=11$

이상에서 $m+n$의 최댓값은 11이다. 답 11

유형 060 점의 대칭이동 본책 65쪽

점 (x, y)를 대칭이동한 점의 좌표

(1) x축 ➜ y좌표의 부호를 바꾼다. ➜ $(x, -y)$

(2) y축 ➜ x좌표의 부호를 바꾼다. ➜ $(-x, y)$

(3) 원점 ➜ x좌표, y좌표의 부호를 모두 바꾼다. ➜ $(-x, -y)$

(4) 직선 $y=x$ ➜ x좌표와 y좌표를 서로 바꾼다. ➜ (y, x)

(5) 직선 $y=-x$

➜ x좌표와 y좌표를 서로 바꾼 후 x좌표, y좌표의 부호를 모두 바꾼다.

➜ $(-y, -x)$

0316 점 $(-7, 9)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점은

$P(7, 9)$

점 $(-7, 9)$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점은

$Q(-9, 7)$

따라서 두 점 $P(7, 9)$, $Q(-9, 7)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{7-9}{-9-7}=\frac{1}{8}$ 답 $\frac{1}{8}$

0317 점 $(a, a+3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a+3, a)$

이 점을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a+3, -a)$

이때 이 점이 직선 $y=-2x+3$ 위에 있으므로

$-a=-2(a+3)+3$

$\therefore a=-3$ 답 ②

0318 점 (a, b)를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a, -b)$

이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$a<0$, $-b>0$ $\therefore a<0$, $b<0$

점 $(-ab, a+b)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(ab, -a-b)$

이 점을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(ab, a+b)$

이때 $a<0$, $b<0$이므로 $ab>0$, $a+b<0$

따라서 점 $(ab, a+b)$는 제4사분면 위의 점이다.

답 제4사분면

0319 점 $(3, 4)$를 대칭이동한 점의 좌표는 다음과 같다.

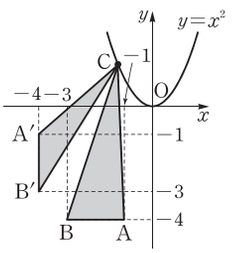
$(3, 4) \xrightarrow{f} (4, 3) \xrightarrow{g} (-4, -3) \xrightarrow{f} (-3, -4)$

$\xrightarrow{g} (3, 4) \xrightarrow{f} \cdots$

이때 점 $(3, 4)$를 f, g의 순서로 반복하여 네 번 이동하면 다시 점 $(3, 4)$가 된다.

$202=4\times50+2$에서 점 $(3, 4)$를 202번 이동한 점의 좌표는 2번 이동한 점의 좌표와 같으므로 $(-4, -3)$이다. 답 ①

0320 두 점 $A(-1, -4)$, $B(-3, -4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은



$A'(-4, -1)$, $B'(-4, -3)$

$\therefore \overline{AB}=\overline{A'B'}$

$=|-3-(-1)|=2$

점 $C(a, a^2)$과 직선 AB, 즉 직선 $y=-4$ 사이의 거리는

$|a^2-(-4)|=a^2+4$

점 $C(a, a^2)$과 직선 $A'B'$, 즉 직선 $x=-4$ 사이의 거리는

$|a-(-4)|=|a+4|$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 삼각형 $A'B'C$의 넓이의 2배이므로

$\frac{1}{2}\times2\times(a^2+4)=2\times\left(\frac{1}{2}\times2\times|a+4|\right)$

$a^2+4=2|a+4|$

$a^2+4=2(a+4)$ 또는 $a^2+4=-2(a+4)$

$\therefore a^2-2a-4=0$ 또는 $a^2+2a+12=0$

(i) $a^2-2a-4=0$일 때

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-1)^2-1\times(-4)=5>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 합은

$-(-2)=2$

(ii) $a^2+2a+12=0$일 때

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=1^2-1\times12=-11<0$

이므로 실근을 갖지 않는다.

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은 2이다. 답 2

유형 061 도형의 대칭이동 — 직선

본책 65쪽

직선 $ax+by+c=0$을 대칭이동한 직선의 방정식

(1) x축 ➜ y 대신 $-y$를 대입 ➜ $ax-by+c=0$

(2) y축 ➜ x 대신 $-x$를 대입 ➜ $-ax+by+c=0$

(3) 원점 ➜ x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입

➜ $-ax-by+c=0$

(4) 직선 $y=x$ ➜ x 대신 y, y 대신 x를 대입 ➜ $bx+ay+c=0$

(5) 직선 $y=-x$ ➜ x 대신 $-y$, y 대신 $-x$를 대입

➜ $-bx-ay+c=0$

0321 점 $(2, -5)$를 점 $(2, 5)$로 옮기는 대칭이동은 x축에 대한 대칭이동이다.

직선 $4x+3y-1=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$4x-3y-1=0$

이 직선이 점 $(1, k)$를 지나므로

$4-3k-1=0$ $\therefore k=1$ 답 ④

0322 직선 $ax+(2b+3)y+2=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-ax-(2b+3)y+2=0$

$\therefore ax+(2b+3)y-2=0$

이 직선이 직선 $(b+7)x-(a+2)y-2=0$과 일치하므로

$a=b+7$, $2b+3=-(a+2)$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-4$

$\therefore a-3b=15$ 답 ③

0323 직선 $2x+my+3=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-2x+my+3=0$ $\therefore y=\frac{2}{m}x-\frac{3}{m}$ … ❶

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{m}{2}$이다.

기울기가 $-\frac{m}{2}$이고 점 $(1, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=-\frac{m}{2}(x-1)$

$\therefore mx+2y-m-2=0$ … ❷

이 직선이 직선 $(m-3)x+y+n=0$, 즉 $2(m-3)x+2y+2n=0$과 일치하므로

$m=2(m-3)$, $-m-2=2n$

$\therefore m=6$, $n=-4$ … ❸

$\therefore m-n=10$ … ❹

답 10

단계	채점 요소	비율
❶	대칭이동한 직선의 방정식 구하기	30 %
❷	대칭이동한 직선에 수직이고 점 $(1, 1)$을 지나는 직선의 방정식 구하기	30 %
❸	m, n의 값 구하기	30 %
❹	$m-n$의 값 구하기	10 %

다른 풀이 두 직선 $-2x+my+3=0$, $(m-3)x+y+n=0$이 수직이므로

$-2\times(m-3)+m\times1=0$, $-m+6=0$ $\therefore m=6$

직선 $(m-3)x+y+n=0$이 점 $(1, 1)$을 지나므로

$m-3+1+n=0$ $\therefore n=-4$

0324 직선 $(k+1)x+(3k+5)y-4=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$(k+1)y+(3k+5)x-4=0$

$\therefore (3x+y)k+5x+y-4=0$

이 직선이 실수 k의 값에 관계없이 항상 점 (a, b)를 지나므로

$3a+b=0$, $5a+b-4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-6$

$\therefore a+b=-4$ 답 ①

유형 062 도형의 대칭이동 — 포물선

본책 66쪽

포물선 $y=ax^2+bx+c$를 대칭이동한 포물선의 방정식

(1) x축 ➜ y 대신 $-y$를 대입 ➜ $y=-ax^2-bx-c$

(2) y축 ➜ x 대신 $-x$를 대입 ➜ $y=ax^2-bx+c$

(3) 원점 ➜ x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입

➜ $y=-ax^2+bx-c$

0325 포물선 $y=-x^2+kx-4$를 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=-x^2+kx-4$

$\therefore y=x^2-kx+4=\left(x-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}+4$

이 포물선의 꼭짓점 $\left(\frac{k}{2}, -\frac{k^2}{4}+4\right)$가 직선 $2x+y-5=0$ 위에 있으므로

$k-\frac{k^2}{4}+4-5=0$, $k^2-4k+4=0$

$(k-2)^2=0$ $\therefore k=2$ 답 2

0326 포물선 $y=x^2+2ax+b+1$을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=(-x)^2+2a\times(-x)+b+1$

$\therefore y=-x^2+2ax-b-1$

이 포물선을 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=-(-x)^2+2a\times(-x)-b-1$

$\therefore y=-x^2-2ax-b-1=-(x+a)^2+a^2-b-1$

이 포물선의 꼭짓점 $(-a, a^2-b-1)$이 점 $(1, 7)$과 일치하므로

$-a=1$, $a^2-b-1=7$ $\therefore a=-1$, $b=-7$

$\therefore a-b=6$ 답 ③

다른 풀이 $y=x^2+2ax+b+1=(x+a)^2-a^2+b+1$

이 포물선의 꼭짓점 $(-a,\ -a^2+b+1)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a,\ a^2-b-1)$

이 점을 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a,\ a^2-b-1)$

0327 포물선 C: $y=6x^2-4x+1$에서

$y=6\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$

포물선 C를 x축에 대하여 대칭이동한 포물선 C'의 방정식은

$-y=6\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$

$\therefore\ y=-6\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}$

이때 포물선 C 위의 점 P와 포물선 C' 위의 점 P′에 대하여 선분 PP′의 길이의 최솟값은 두 포물선 C, C'의 두 꼭짓점 사이의 거리와 같다.

따라서 두 포물선 C, C'의 두 꼭짓점의 좌표는 각각 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$이므로 선분 PP′의 길이의 최솟값은

$\left|-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right|=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

유형 063 도형의 대칭이동 — 원 본책 66쪽

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$을 대칭이동한 원의 방정식

(1) x축 ➜ y 대신 $-y$를 대입 ➜ $(x-a)^2+(y+b)^2=r^2$

(2) y축 ➜ x 대신 $-x$를 대입 ➜ $(x+a)^2+(y-b)^2=r^2$

(3) 원점 ➜ x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입 ➜ $(x+a)^2+(y+b)^2=r^2$

(4) 직선 $y=x$ ➜ x 대신 y, y 대신 x를 대입 ➜ $(x-b)^2+(y-a)^2=r^2$

(5) 직선 $y=-x$ ➜ x 대신 $-y$, y 대신 $-x$를 대입 ➜ $(x+b)^2+(y+a)^2=r^2$

0328 중심이 점 $(-1,\ 4)$이고 반지름의 길이가 a인 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-4)^2=a^2$

이 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+1)^2+(-y-4)^2=a^2$

$\therefore\ (x+1)^2+(y+4)^2=a^2$

이 원이 점 $(-1,\ -7)$을 지나므로

$(-1+1)^2+(-7+4)^2=a^2$

$\therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$ 답 3

0329 원 C_1: $x^2+y^2-4x+6y+8=0$에서

$(x-2)^2+(y+3)^2=5$

이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원 C_2의 방정식은

$(-x-2)^2+(y+3)^2=5$

$\therefore\ (x+2)^2+(y+3)^2=5$ … ❶

원 C_1을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원 C_3의 방정식은

$(-y-2)^2+(-x+3)^2=5$

$\therefore\ (x-3)^2+(y+2)^2=5$ … ❷

따라서 두 원 C_2, C_3의 중심의 좌표는 각각 $(-2,\ -3)$, $(3,\ -2)$이므로 두 원 C_2, C_3의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(3+2)^2+(-2+3)^2}=\sqrt{26}$ … ❸

답 $\sqrt{26}$

단계	채점 요소	비율
❶	원 C_2의 방정식 구하기	40 %
❷	원 C_3의 방정식 구하기	40 %
❸	두 원 C_2, C_3의 중심 사이의 거리 구하기	20 %

다른 풀이 원 C_1: $(x-2)^2+(y+3)^2=5$의 중심의 좌표는

$(2,\ -3)$

원 C_2의 중심은 점 $(2,\ -3)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점이므로 그 좌표는

$(-2,\ -3)$

원 C_3의 중심은 점 $(2,\ -3)$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 그 좌표는

$(3,\ -2)$

0330 원 $x^2+y^2-8x+6y=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$x^2+y^2+8x-6y=0$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$x^2+y^2-6x+8y=0$

$y=0$을 대입하면

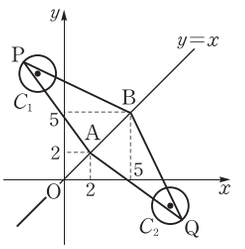
$x^2-6x=0,\quad x(x-6)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=6$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(0,\ 0)$, $(6,\ 0)$이므로

$\overline{AB}=6-0=6$ 답 ③

0331 두 점 A$(2,\ 2)$, B$(5,\ 5)$가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 사각형 APBQ의 넓이의 최댓값은 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값의 2배이다.



원 C_1: $x^2+y^2+4x-16y+66=0$에서

$(x+2)^2+(y-8)^2=2$

이므로 원 C_1은 중심의 좌표가 $(-2,\ 8)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이다.

점 $(-2,\ 8)$과 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-2-8|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=5\sqrt{2}$

이므로 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값은

$5\sqrt{2}+\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

두 점 A, B 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{(5-2)^2+(5-2)^2}=3\sqrt{2}$

이므로 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times6\sqrt{2}=18$

따라서 사각형 APBQ의 넓이의 최댓값은

$18\times2=36$ 답 ④

유형 064 대칭이동의 활용 본책 67쪽

(1) 직선이 원의 넓이를 이등분한다.

➜ 직선이 원의 중심을 지난다.

(2) 직선과 원의 위치 관계

➜ 직선과 원의 중심 사이의 거리를 이용한다.

(3) 직선과 포물선의 위치 관계

➜ 직선과 포물선의 방정식을 연립한 이차방정식의 판별식을 이용한다.

0332 직선 $-3x+4y+k=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$3x-4y+k=0$

이 직선이 원 $(x+4)^2+(y-1)^2=16$에 접하려면 원의 중심 $(-4,\ 1)$과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 4와 같아야 하므로

$$\frac{|-12-4+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=4$$

$|k-16|=20,\quad k-16=\pm20$

$\therefore\ k=36\ (\because\ k>0)$ 답 36

0333 원 $(x+2)^2+(y-m)^2=7$을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x+2)^2+(y-m)^2=7$

$\therefore\ (x-2)^2+(y-m)^2=7$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-m)^2+(y-2)^2=7$

이 원의 넓이가 직선 $-5x+2y+1=0$에 의하여 이등분되려면 직선이 원의 중심 $(m,\ 2)$를 지나야 하므로

$-5m+4+1=0\quad\therefore\ m=1$ 답 1

0334 포물선 $y=-x^2+6x-a$를 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=-x^2+6x-a\quad\therefore\ y=x^2-6x+a$

이 포물선을 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=(-x)^2-6\times(-x)+a\quad\therefore\ y=x^2+6x+a$ … ❶

이 포물선이 직선 $y=2x-5$와 접하려면 이차방정식 $x^2+6x+a=2x-5$, 즉 $x^2+4x+a+5=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-1\times(a+5)=0$

$\therefore\ a=-1$ … ❷

답 -1

단계	채점 요소	비율
❶	대칭이동한 포물선의 방정식 구하기	50 %
❷	a의 값 구하기	50 %

참고 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 것은 원점에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

0335 포물선 $y=kx^2+4x+1$을 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=k\times(-x)^2+4\times(-x)+1$

$\therefore\ y=kx^2-4x+1$

이 포물선이 직선 $y=4kx+3$보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $kx^2-4x+1<4kx+3$, 즉 $kx^2-4(k+1)x-2<0$이 성립해야 하므로

$k<0$

또 이차방정식 $kx^2-4(k+1)x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-2(k+1)\}^2+2k<0$

$2k^2+5k+2<0,\quad(k+2)(2k+1)<0$

$\therefore\ -2<k<-\frac{1}{2}$

따라서 k의 값이 될 수 없는 것은 ①이다. 답 ①

만점 공략 노트

이차부등식이 항상 성립할 조건

$a\neq0$일 때, 모든 실수 x에 대하여

① $ax^2+bx+c>0$ ➜ $a>0,\ b^2-4ac<0$

② $ax^2+bx+c\geq0$ ➜ $a>0,\ b^2-4ac\leq0$

③ $ax^2+bx+c<0$ ➜ $a<0,\ b^2-4ac<0$

④ $ax^2+bx+c\leq0$ ➜ $a<0,\ b^2-4ac\leq0$

0336 원 C_1: $(x-2)^2+(y-3)^2=a$를 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

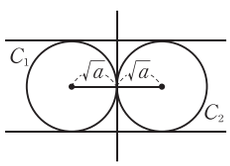
$(x-2)^2+(-y-3)^2=a$

$\therefore\ (x-2)^2+(y+3)^2=a$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원 C_2의 방정식은

$(x+3)^2+(y-2)^2=a$

두 원 C_1, C_2에 동시에 접하는 접선이 3개이려면 오른쪽 그림과 같이 두 원이 서로 외접해야 한다.



즉 두 원의 중심 $(2,\ 3)$과 $(-3,\ 2)$ 사이의 거리가 두 원의 반지름의 길이의 합과 같아야 하므로

$\sqrt{(-3-2)^2+(2-3)^2}=2\sqrt{a}$

$\therefore\ 4a=26$ 답 26

유형 065 도형의 평행이동과 대칭이동 본책 67쪽

점 또는 도형을 두 번 이상 평행이동·대칭이동하는 경우

➜ 이동 순서에 주의하여 점의 좌표 또는 도형의 방정식을 차례대로 구한다.

0337 포물선 $y=3x^2+6x+k$를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=3\times(-x)^2+6\times(-x)+k$

$\therefore\ y=-3x^2+6x-k$

이 포물선을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y=-3(x-2)^2+6(x-2)-k$

이 포물선의 y절편이 -8이므로

$-8=-12-12-k$

$\therefore\ k=-16$ 답 ①

0338 점 A$(-2,\ 5)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은

B$(5,\ -2)$

점 B$(5,\ -2)$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 점은

C$(8,\ a-2)$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같으므로

$\dfrac{-2-5}{5-(-2)}=\dfrac{a-2-(-2)}{8-5}$

$\therefore\ a=-3$ 답 ③

0339 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=r^2$을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-1)^2+(-y-a)^2=r^2$

$\therefore\ (x-1)^2+(y+a)^2=r^2$

이 원을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-2-1)^2+(y-1+a)^2=r^2$

$\therefore\ (x-3)^2+\{y-(1-a)\}^2=r^2$

이 원이 x축과 y축에 모두 접하므로 원의 중심의 x좌표와 y좌표의 절댓값은 반지름의 길이와 같다.

즉 $|3|=|1-a|=|r|$에서

$a=4,\ r=3\ (\because\ a>0,\ r>0)$

$\therefore\ a+r=7$ 답 ④

다른 풀이 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=r^2$의 중심 $(1,\ a)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(1,\ -a)$

이 점을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(3,\ 1-a)$

0340 직선 $l:y=-x+k$를 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=x+k$

이 직선을 x축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 직선 l'의 방정식은

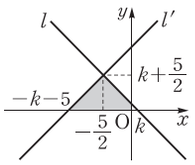
$y=x+5+k$ … ❶

두 직선 l, l'의 교점의 x좌표는 $-x+k=x+5+k$에서

$x=-\dfrac{5}{2}$

즉 교점의 좌표는 $\left(-\dfrac{5}{2},\ k+\dfrac{5}{2}\right)$ … ❷

오른쪽 그림에서 두 직선 l, l'과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 9이므로



$\dfrac{1}{2}\times\{k-(-k-5)\}\times\left(k+\dfrac{5}{2}\right)=9$ … ❸

$4k^2+20k-11=0$

$(2k+11)(2k-1)=0$

$\therefore\ k=\dfrac{1}{2}\ (\because\ k>0)$ … ❹

답 $\dfrac{1}{2}$

단계	채점 요소	비율
❶	직선 l'의 방정식 구하기	30 %
❷	두 직선 l, l'의 교점의 좌표 구하기	20 %
❸	k에 대한 방정식 세우기	20 %
❹	k의 값 구하기	30 %

0341 원 $(x-2)^2+(y-5)^2=16$을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-2)^2+(-y-5)^2=16$

$\therefore\ (x-2)^2+(y+5)^2=16$

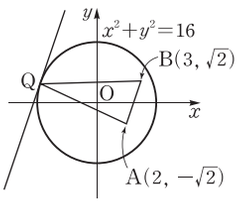
이 원을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+2-2)^2+(y-5+5)^2=16$

$\therefore\ x^2+y^2=16$

즉 점 Q는 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점이다.

오른쪽 그림과 같이 점 Q를 접점으로 하는 원 $x^2+y^2=16$의 접선이 직선 AB에 평행하고 접선의 y절편이 양수일 때, 삼각형 ABQ의 넓이가 최대이다.



직선 AB의 기울기는

$\dfrac{\sqrt{2}-(-\sqrt{2})}{3-2}=2\sqrt{2}$

이므로 기울기가 $2\sqrt{2}$인 원 $x^2+y^2=16$의 접선의 방정식은

$y=2\sqrt{2}x\pm4\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1}$

$\therefore\ y=2\sqrt{2}x\pm12$

이때 접선의 y절편이 양수이므로

$y=2\sqrt{2}x+12$ …… ㉠

직선 ㉠과 원 $x^2+y^2=16$의 접점이 Q이므로 점 Q의 x좌표는

$x^2+(2\sqrt{2}x+12)^2=16$에서

$9x^2+48\sqrt{2}x+128=0$

$(3x+8\sqrt{2})^2=0$

$\therefore\ x=-\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

$x=-\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$를 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{4}{3}$

따라서 $m=\dfrac{4}{3}$이므로

$3m=4$ 답 ④

다른 풀이 직선 AB에 수직이고 원점을 지나는 직선이 원 $x^2+y^2=16$과 만나는 점 중 제2사분면 위의 점이 Q일 때, 삼각형 ABQ의 넓이가 최대이다.

직선 AB에 수직이고 원점을 지나는 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2\sqrt{2}}x,\ \text{즉}\ x=-2\sqrt{2}y$$

이 직선과 원 $x^2+y^2=16$의 교점의 y좌표는 $(-2\sqrt{2}y)^2+y^2=16$에서

$$y^2=\frac{16}{9}\qquad \therefore\ y=\pm\frac{4}{3}$$

이때 점 Q는 제2사분면 위의 점이므로 $\quad m=\frac{4}{3}$

유형 066 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형의 평행이동과 대칭이동 본책 68쪽

(1) $f(x, y)=0 \longrightarrow f(x-m, y-n)=0$
➜ 도형 $f(x, y)=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동

(2) $f(x, y)=0 \longrightarrow f(x, -y)=0$
➜ 도형 $f(x, y)=0$을 x축에 대하여 대칭이동

(3) $f(x, y)=0 \longrightarrow f(-x, y)=0$
➜ 도형 $f(x, y)=0$을 y축에 대하여 대칭이동

(4) $f(x, y)=0 \longrightarrow f(-x, -y)=0$
➜ 도형 $f(x, y)=0$을 원점에 대하여 대칭이동

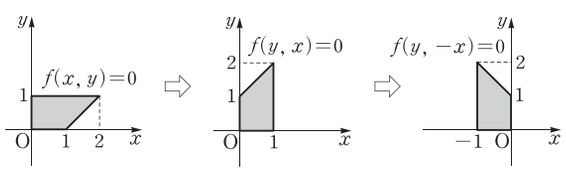
(5) $f(x, y)=0 \longrightarrow f(y, x)=0$
➜ 도형 $f(x, y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동

0342 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(y, x)=0$$

방정식 $f(y, x)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(y, -x)=0$$



따라서 방정식 $f(y, -x)=0$이 나타내는 도형은 ②이다.

답 ②

0343 ㄱ. 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(x, -y)=0$$

방정식 $f(x, -y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(x+1, -y)=0$$

따라서 방정식 $f(x+1, -y)=0$이 나타내는 도형은 [그림 2]와 같다.

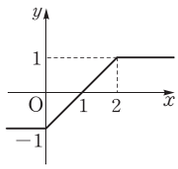
ㄴ. 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(x, -y)=0$$

방정식 $f(x, -y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(x-1, -y)=0$$

따라서 방정식 $f(x-1, -y)=0$이 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같다.



ㄷ. 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(-x, y)=0$$

방정식 $f(-x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(-(x+1), y)=0$$
$$\therefore\ f(-x-1, y)=0$$

따라서 방정식 $f(-x-1, y)=0$이 나타내는 도형은 [그림 2]와 같다.

이상에서 [그림 2]와 같은 도형을 나타내는 방정식은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

0344 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(-4, 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원이므로 그 방정식은

$$(x+4)^2+y^2=1\qquad \therefore\ (x+4)^2+y^2-1=0$$

방정식 $g(x, y)=0$이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(1, 4)$이고 반지름의 길이가 1인 원이므로 그 방정식은

$$(x-1)^2+(y-4)^2=1\qquad \therefore\ (x-1)^2+(y-4)^2-1=0$$

ㄱ. $f(x-2, y-3)=0$에서

$$(x-2+4)^2+(y-3)^2-1=0$$
$$\therefore\ (x+2)^2+(y-3)^2-1=0$$

$g(x+3, y+1)=0$에서

$$(x+3-1)^2+(y+1-4)^2-1=0$$
$$\therefore\ (x+2)^2+(y-3)^2-1=0$$

ㄴ. $f(-y, x)=0$에서

$$(-y+4)^2+x^2-1=0$$
$$\therefore\ x^2+(y-4)^2-1=0$$

$g(x+1, y)=0$에서

$$(x+1-1)^2+(y-4)^2-1=0$$
$$\therefore\ x^2+(y-4)^2-1=0$$

ㄷ. $f(x-8, y-1)=0$에서

$$(x-8+4)^2+(y-1)^2-1=0$$
$$\therefore\ (x-4)^2+(y-1)^2-1=0$$

$g(y, x)=0$에서

$$(y-1)^2+(x-4)^2-1=0$$
$$\therefore\ (x-4)^2+(y-1)^2-1=0$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 같은 도형을 나타내는 방정식끼리 짝지어진 것이다.

답 ⑤

유형 067 평행이동과 대칭이동의 도형에의 활용 → 본책 69쪽

도형을 평행이동하거나 대칭이동해도 크기와 모양은 변하지 않음을 이용한다.

0345 △AOB≡△CED이므로 구하는 도형의 넓이는 사각형 ACDB의 넓이와 같다.

이때 $\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이므로 사각형 ACDB는 평행사변형이다.

또 원점 O가 직선 AD와 직선 BC의 교점이므로 원점 O는 선분 BC의 중점이다.

즉 점 C는 점 B(3, 6)을 원점에 대하여 대칭이동한 점이므로

$C(-3,\ -6)$

평행사변형 ACDB의 밑변을 선분 AB라 하면 높이는 직선 AB와 점 C 사이의 거리이다.

$\overline{AB}=\sqrt{(3+4)^2+(6-3)^2}=\sqrt{58}$

직선 AB의 방정식은

$y-3=\dfrac{6-3}{3-(-4)}\{x-(-4)\}$

$\therefore\ 3x-7y+33=0$

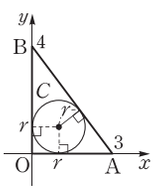
직선 $3x-7y+33=0$과 점 C(−3, −6) 사이의 거리는

$\dfrac{|-9+42+33|}{\sqrt{3^2+(-7)^2}}=\dfrac{66}{\sqrt{58}}$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\sqrt{58}\times\dfrac{66}{\sqrt{58}}=66$ 답 ③

0346 △OAB와 △O′A′B′의 내접원을 각각 C, C'이라 하자.



원 C의 반지름의 길이를 r라 하면 원 C가 x축과 y축에 동시에 접하므로 원의 중심의 좌표는 $(r,\ r)$이다.

직선 AB의 방정식은

$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1$

$\therefore\ 4x+3y-12=0$

원 C가 직선 AB에 접하므로

$\dfrac{|4r+3r-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=r$

$|7r-12|=5r$

$7r-12=\pm5r$

$\therefore\ r=1\ (\because\ 0<r<3)$ … ❶

즉 원 C의 방정식은

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ … ❷

점 A′(7, 3)은 점 A(3, 0)을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 원 C'은 원 C를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

즉 원 C'의 방정식은

$(x-4-1)^2+(y-3-1)^2=1$

$\therefore\ (x-5)^2+(y-4)^2=1$ … ❸

따라서 $a=5$, $b=4$, $c=1$이므로

$a+b+c=10$ … ❹

답 10

단계	채점 요소	비율
❶	내접원의 반지름의 길이 구하기	40 %
❷	△OAB의 내접원의 방정식 구하기	20 %
❸	△O′A′B′의 내접원의 방정식 구하기	30 %
❹	$a+b+c$의 값 구하기	10 %

다른 풀이 $\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$이므로 삼각형 OAB의 넓이에서

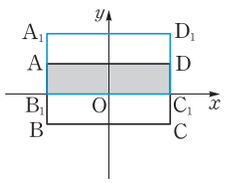
$\dfrac{1}{2}r(3+4+5)=\dfrac{1}{2}\times3\times4$

$\therefore\ r=1$

따라서 원 C의 방정식은

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

0347 네 점 A, B, C, D를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점을 각각 A_1, B_1, C_1, D_1이라 하자.



조건 (가)에서 $\overline{AD}>\overline{AB}>2$이므로 점 B_1은 변 AB 위에, 점 C_1은 변 CD 위에 있고 두 직사각형 ABCD, $A_1B_1C_1D_1$은 오른쪽 그림과 같다.

$D(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0)$라 하면

$A(-a,\ b)$, $B(-a,\ -b)$, $C(a,\ -b)$

$\therefore\ \overline{AD}=2a$

점 B_1은 점 B를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이므로

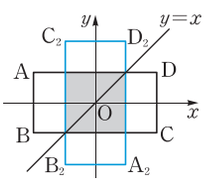
$B_1(-a,\ -b+2)$

$\therefore\ \overline{AB_1}=b-(-b+2)=2b-2$

조건 (나)에서 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부와 직사각형 ABCD의 내부와의 공통부분의 넓이가 18이므로

$\overline{AD}\times\overline{AB_1}=2a(2b-2)=18$ …… ㉠

네 점 A, B, C, D를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 각각 A_2, B_2, C_2, D_2라 하자.



직사각형 $A_2B_2C_2D_2$는 직사각형 ABCD를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형이므로 두 직사각형 ABCD, $A_2B_2C_2D_2$는 오른쪽 그림과 같다.

조건 (다)에서 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부와 직사각형 ABCD의 내부와의 공통부분의 넓이가 16이고 그림에서 공통부분은 한 변의 길이가 선분 AB의 길이와 같은 정사각형이다.

이때 $\overline{AB}=2b$이므로

$(2b)^2=16,\quad b^2=4$

$\therefore\ b=2\ (\because\ b>0)$

$b=2$를 ㉠에 대입하면

$2a\times(2\times2-2)=18$

$\therefore\ a=\dfrac{9}{2}$

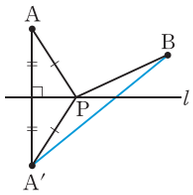
따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$\overline{AD}\times\overline{AB}=2a\times2b=4ab=36$ 답 ②

유형 068 선분의 길이의 합의 최솟값

본책 70쪽

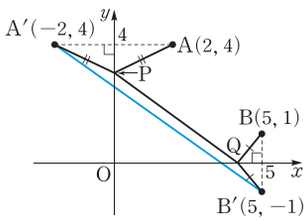
직선 l에 대하여 같은 쪽에 있는 두 점 A, B와 직선 l 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.



(i) 점 A를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점 A′의 좌표를 구한다.

(ii) $\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}\geq\overline{A'B}$이므로 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $\overline{A'B}$의 길이와 같음을 이용한다. 이때 점 P는 직선 A′B와 직선 l의 교점이다.

0348 점 A(2, 4)를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 A′(−2, 4)



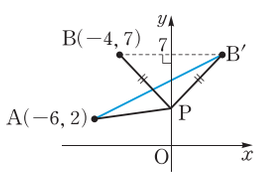
점 B(5, 1)을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 B′(5, −1)

$\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{QB}=\overline{QB'}$이므로

$$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\geq\overline{A'B'}=\sqrt{(5+2)^2+(-1-4)^2}=\sqrt{74}$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 최솟값은 $\sqrt{74}$이다. 답 $\sqrt{74}$

0349 점 B(−4, 7)을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 B′(4, 7)



$\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로

$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}\geq\overline{AB'}=\sqrt{(4+6)^2+(7-2)^2}=5\sqrt{5}\quad\cdots❶$$

이때 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는 직선 AB′과 y축의 교점이다.

직선 AB′의 방정식은 $y-2=\frac{7-2}{4-(-6)}\{x-(-6)\}$

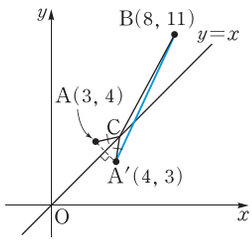
$$\therefore\ y=\frac{1}{2}x+5\quad\cdots❷$$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 (0, 5)이다. …❸

답 최솟값: $5\sqrt{5}$, P(0, 5)

단계	채점 요소	비율
❶	$\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값 구하기	50 %
❷	직선 AB′의 방정식 구하기	30 %
❸	점 P의 좌표 구하기	20 %

0350 점 A(3, 4)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 A′(4, 3)



$\overline{AC}=\overline{A'C}$이므로

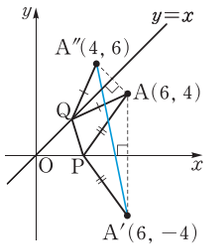
$$\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{A'C}+\overline{BC}\geq\overline{A'B}$$

즉 $\overline{AC}+\overline{BC}$의 최솟값은 $\overline{A'B}$의 길이와 같고, 이때 점 C는 직선 A′B와 직선 $y=x$의 교점이다.

직선 A′B의 방정식은 $y-3=\frac{11-3}{8-4}(x-4)$ $\therefore\ y=2x-5$

따라서 점 C의 x좌표는 $2x-5=x$에서 $x=5$ 답 ③

0351 점 A(6, 4)를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면 A′(6, −4)



점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A″이라 하면 A″(4, 6)

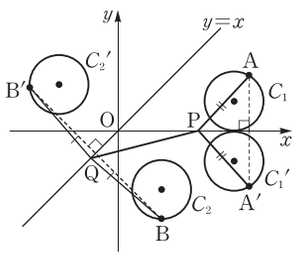
$\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{AQ}=\overline{A''Q}$이므로 삼각형 APQ의 둘레의 길이는

$$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QA''}\geq\overline{A'A''}=\sqrt{(6-4)^2+(-4-6)^2}=2\sqrt{26}$$

따라서 삼각형 APQ의 둘레의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{26}$이다.

답 ④

0352 원 C_1을 x축에 대하여 대칭이동한 원을 C_1', 원 C_2를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원을 C_2'이라 하면



C_1': $(x-8)^2+(y+2)^2=4$,

C_2': $(x+4)^2+(y-3)^2=4$

점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 점 A′은 원 C_1', 점 B′은 원 C_2' 위의 점이다.

또 $\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{BQ}=\overline{B'Q}$이므로

$$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\geq\overline{A'B'}$$

이때 $\overline{A'B'}$의 길이의 최솟값은 원 C_1' 위의 점과 원 C_2' 위의 점 사이의 거리의 최솟값과 같다.

두 원 C_1', C_2'의 중심의 좌표가 각각 (8, −2), (−4, 3)이고 반지름의 길이는 모두 2이므로 $\overline{A'B'}$의 길이의 최솟값은

$$\sqrt{(-4-8)^2+(3+2)^2}-2-2=9$$

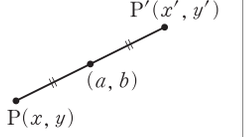
즉 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 최솟값은 9이다. 답 ③

유형 069 점에 대한 대칭이동

본책 71쪽

점 P(x, y)를 점 (a, b)에 대하여 대칭이동한 점을 P′(x', y')이라 하면 점 (a, b)는 선분 PP′의 중점이다.

➜ $\frac{x+x'}{2}=a$, $\frac{y+y'}{2}=b$



0353 두 점 $(4a-1, -3)$, $(3, b+2)$를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(5, -1)$이므로

$$\frac{(4a-1)+3}{2}=5,\ \frac{-3+(b+2)}{2}=-1$$

$\therefore a=2,\ b=-1$

$\therefore a+b=1$ 답 ③

0354 $x^2+y^2+6x-4y+12=0$에서

$(x+3)^2+(y-2)^2=1$

이 원의 중심 $(-3, 2)$와 대칭이동한 원의 중심 (a, b)를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(-1, -1)$이므로

$$\frac{-3+a}{2}=-1,\ \frac{2+b}{2}=-1$$

$\therefore a=1,\ b=-4$

또 원을 대칭이동해도 반지름의 길이는 변하지 않으므로

$c=1$

$\therefore a+b+c=-2$ 답 -2

0355 $y=-x^2+4x+1=-(x-2)^2+5$

에서 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(2, 5)$

$y=x^2-4ax+45=(x-2a)^2+45-4a^2$

에서 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(2a, 45-4a^2)$

두 포물선의 꼭짓점을 이은 선분의 중점의 좌표가 $(4, b)$이므로

$$\frac{2+2a}{2}=4,\ \frac{5+(45-4a^2)}{2}=b$$

$\therefore a=3,\ b=7$ $\therefore ab=21$ 답 21

0356 직선 $4x+y-5=0$ 위의 점 (x, y)를 점 $(2, 3)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (x', y')이라 하면 두 점 (x, y), (x', y')을 이은 선분의 중점의 좌표가 $(2, 3)$이므로

$$\frac{x+x'}{2}=2,\ \frac{y+y'}{2}=3$$

$\therefore x=-x'+4,\ y=-y'+6$

$4x+y-5=0$에 $x=-x'+4$, $y=-y'+6$을 대입하면

$4(-x'+4)+(-y'+6)-5=0$

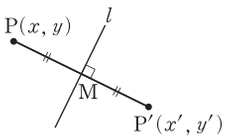
$\therefore 4x'+y'-17=0$

따라서 대칭이동한 직선의 방정식은 $4x+y-17=0$이고 이 직선이 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하므로 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $4x+y-17=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 r와 같다.

$$\therefore r=\frac{|-17|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\sqrt{17}$$ 답 $\sqrt{17}$

유형 070 직선에 대한 대칭이동 → 본책 71쪽

점 $P(x, y)$를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$이라 하면



(1) 중점 조건

➜ 선분 PP'의 중점 M이 직선 l 위에 있다.

(2) 수직 조건

➜ (직선 PP'과 직선 l의 기울기의 곱)$=-1$

0357 두 점 $(4, -3)$, (a, b)를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{4+a}{2}, \frac{-3+b}{2}\right)$가 직선 $3x+y+1=0$ 위의 점이므로

$$3\times\frac{4+a}{2}+\frac{-3+b}{2}+1=0$$

$\therefore 3a+b=-11$ …… ㉠

또 두 점 $(4, -3)$, (a, b)를 지나는 직선이 직선 $3x+y+1=0$, 즉 $y=-3x-1$과 수직이므로

$$\frac{b-(-3)}{a-4}\times(-3)=-1$$

$\therefore a-3b=13$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=-5$

$\therefore a-b=3$ 답 3

0358 $x^2+y^2-2x-12y+36=0$에서

$(x-1)^2+(y-6)^2=1$

$x^2+y^2-10x-4y+r=0$에서

$(x-5)^2+(y-2)^2=29-r$

두 원의 반지름의 길이가 같으므로

$1=\sqrt{29-r}$ $\therefore r=28$ … ❶

두 원의 중심 $(1, 6)$, $(5, 2)$를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{6+2}{2}\right)$, 즉 $(3, 4)$

이 점이 직선 $y=px+q$ 위의 점이므로

$4=3p+q$ …… ㉠

또 두 점 $(1, 6)$, $(5, 2)$를 지나는 직선이 직선 $y=px+q$와 수직이므로

$$\frac{2-6}{5-1}\times p=-1 \quad \therefore p=1$$

$p=1$을 ㉠에 대입하면

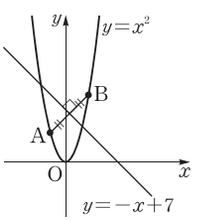
$4=3+q$ $\therefore q=1$ … ❷

$\therefore p+q+r=30$ … ❸

답 30

단계	채점 요소	비율
❶	r의 값 구하기	30 %
❷	p, q의 값 구하기	60 %
❸	$p+q+r$의 값 구하기	10 %

0359 함수 $y=x^2$의 그래프 위의 두 점을 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ $(a<b)$이라 하자.



선분 AB의 중점 $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a^2+b^2}{2}\right)$이 직선 $y=-x+7$ 위에 있으므로

$$\frac{a^2+b^2}{2}=-\frac{a+b}{2}+7$$

$\therefore a^2+b^2+a+b-14=0$ …… ㉠

직선 AB가 직선 $y=-x+7$과 수직이므로

$$\frac{b^2-a^2}{b-a}\times(-1)=-1, \quad \frac{(b+a)(b-a)}{b-a}=1$$

$\therefore b+a=1$ $(\because a<b)$

즉 $b=1-a$를 ㉠에 대입하면

$a^2+(1-a)^2+1-14=0$

$a^2-a-6=0$, $(a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=3$

그런데 $a<b$이므로 $a=-2$, $b=3$

따라서 $A(-2, 4)$, $B(3, 9)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(3+2)^2+(9-4)^2}=5\sqrt{2}$ 답 ④

0360 직선 $y=2x+6$ 위의 점 $P(x, y)$를 직선 $y=-x+5$에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$이라 하면 선분 PP'의 중점 $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$이 직선 $y=-x+5$ 위의 점이므로

$\frac{y+y'}{2}=-\frac{x+x'}{2}+5$

$\therefore x+y=-x'-y'+10$ …… ㉠

또 직선 PP'이 직선 $y=-x+5$와 수직이므로

$\frac{y'-y}{x'-x}\times(-1)=-1$

$\therefore x-y=x'-y'$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 x, y에 대하여 풀면

$x=-y'+5$, $y=-x'+5$

점 $P(x, y)$는 직선 $y=2x+6$ 위의 점이므로

$-x'+5=2(-y'+5)+6$ $\therefore x'-2y'+11=0$

따라서 대칭이동한 직선의 방정식은

$x-2y+11=0$ 답 $x-2y+11=0$

1등급 유형 도전하기

본책 72~73쪽

0361 Step 1 r_1을 a에 대한 식으로 나타낸다.

$B(-2, -a)$, $C(-2, a)$이므로

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{\boxed{(가)\ a^2+4}}$

점 O는 삼각형 ACB의 외심이므로 $r_1=\sqrt{\boxed{(가)\ a^2+4}}$

Step 2 r_1, r_2 사이의 관계식을 구한다.

한편 선분 BC와 직선 $y=-x$가 만나는 점을 D라 하면

$\angle ABD=\angle ABC=\boxed{(나)\ 45}^\circ$

두 삼각형 ACB, ACO의 외접원을 각각 C_1, C_2라 하면 원 C_1에서 $\angle AOC$는 호 AC에 대한 중심각이므로

$\angle AOC=2\angle ABC=2\times\boxed{(나)\ 45}^\circ=90^\circ$

따라서 $\overline{AC}$는 원 C_2의 지름이고 $\overline{AC}=\sqrt{2}\,\overline{OA}$이므로

$2r_2=\sqrt{2}r_1$ $\therefore r_2=\boxed{(다)\ \frac{\sqrt{2}}{2}}\times r_1$

Step 3 주어진 조건을 이용하여 r_1^2의 값을 구한 후 a의 값을 구한다.

$r_1\times r_2=\boxed{(다)\ \frac{\sqrt{2}}{2}}\times r_1^2=10\sqrt{2}$에서 $r_1^2=20$이고

$r_1^2=\boxed{(가)\ a^2+4}$이므로

$a^2+4=20$ $\therefore a^2=16$

$\therefore a=\boxed{(라)\ -4}$ ($\because a<-2$)

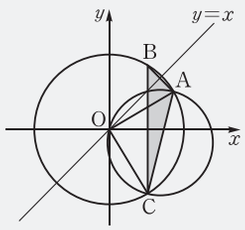
Step 4 $\frac{n}{l}f(m)$의 값을 구한다.

$f(a)=a^2+4$, $l=45$, $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $n=-4$이므로

$\frac{n}{l}f(m)=\frac{-4}{45}\times\frac{9}{2}=-\frac{2}{5}$ 답 $-\frac{2}{5}$

논리 Check

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $A(a, 3)$ $(a>3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B, 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 C라 하자. 두 삼각형 ABC, AOC의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 할 때, $r_1\times r_2=17\sqrt{2}$이다. 이때 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)



풀이 $B(3, a)$, $C(3, -a)$이므로

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{a^2+9}$

점 O는 삼각형 ABC의 외심이므로 $r_1=\sqrt{a^2+9}$

한편 선분 BC와 직선 $y=x$가 만나는 점을 D라 하면

$\angle ABD=\angle ABC=45^\circ$

두 삼각형 ABC, AOC의 외접원을 각각 C_1, C_2라 하면 원 C_1에서 $\angle AOC$는 호 AC에 대한 중심각이므로

$\angle AOC=2\times45^\circ=90^\circ$

따라서 $\overline{AC}$는 원 C_2의 지름이고 $\overline{AC}=\sqrt{2}\,\overline{OA}$이므로

$2r_2=\sqrt{2}r_1$ $\therefore r_2=\frac{\sqrt{2}}{2}r_1$

$r_1\times r_2=r_1\times\frac{\sqrt{2}}{2}r_1=17\sqrt{2}$에서 $r_1^2=34$이고 $r_1=\sqrt{a^2+9}$이므로

$a^2+9=34$, $a^2=25$

$\therefore a=5$ ($\because a>3$)

$A(5, 3)$, $B(3, 5)$, $C(3, -5)$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\{5-(-5)\}\times(5-3)=10$ 답 10

0362 Step 1 원 C의 중심과 직선 l 사이의 거리가 원 C의 반지름의 길이와 같음을 이용하여 원 C의 중심의 좌표를 구한다.

원 C는 y축에 접하므로 중심의 좌표를 $(-2, a)$ $(a>10)$라 하면 원 C가 직선 l: $x-y+10=0$에 접하므로 원의 중심과 직선 l 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 2와 같다. 즉

$\frac{|-2-a+10|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2$, $|a-8|=2\sqrt{2}$

$\therefore a=8+2\sqrt{2}$ ($\because a>10$)

즉 원 C의 중심의 좌표는 $(-2, 8+2\sqrt{2})$

Step 2 원 C'의 중심과 직선 l 사이의 거리가 원 C'의 반지름의 길이와 같음을 이용하여 원 C'의 중심의 좌표를 구한다.

원 C'은 x축에 접하므로 중심의 좌표를 $(b, 2)$ $(-10<b<0)$라 하면 원 C'이 직선 l: $x-y+10=0$에 접하므로 원의 중심과

직선 l 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 2와 같다. 즉

$$\frac{|b-2+10|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2, \qquad |b+8|=2\sqrt{2}$$

$\therefore\ b=-8+2\sqrt{2}\ (\because\ -10<b<0)$

즉 원 C'의 중심의 좌표는 $(-8+2\sqrt{2},\ 2)$

Step 3 원 C의 중심을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 점이 원 C'의 중심임을 이용하여 $(p-q)^2$의 값을 구한다.

이때 원 C의 중심 $(-2,\ 8+2\sqrt{2})$를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 점이 원 C'의 중심 $(-8+2\sqrt{2},\ 2)$이므로

$-2+p=-8+2\sqrt{2},\ 8+2\sqrt{2}+q=2$

$\therefore\ p=-6+2\sqrt{2},\ q=-6-2\sqrt{2}$

$\therefore\ (p-q)^2=(4\sqrt{2})^2=32$ 답 32

다른 풀이 원 C의 중심의 좌표는 $(-2,\ 8+2\sqrt{2})$

이 점을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 원 C'의 중심의 좌표는

$(-2+p,\ 8+2\sqrt{2}+q)$

원 C'이 x축에 접하고 반지름의 길이가 2이므로

$8+2\sqrt{2}+q=2 \qquad \therefore\ q=-6-2\sqrt{2}$

또 원 C'이 직선 l: $x-y+10=0$에 접하므로 원 C'의 중심 $(-2+p,\ 2)$와 직선 l 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 2와 같다. 즉

$$\frac{|-2+p-2+10|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2, \qquad |p+6|=2\sqrt{2}$$

$\therefore\ p=-6\pm2\sqrt{2}$

그런데 원 C'의 중심의 x좌표가 -10보다 크므로

$-2+p>-10 \qquad \therefore\ p>-8$

$\therefore\ p=-6+2\sqrt{2}$

0363 Step 1 조건 (가)를 이용하여 $f(x)$를 구한다.

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

라 하자.

조건 (가)에 의하여 이차방정식 $x^2+ax+b=x+2$, 즉 $x^2+(a-1)x+b-2=0$의 두 실근은 -2, 4이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+4=-(a-1),\ -2\times4=b-2$

$\therefore\ a=-1,\ b=-6$

$\therefore\ f(x)=x^2-x-6$

Step 2 조건 (나)를 이용하여 $g(x)$를 구한다.

조건 (나)에서 $y=x^2-x-6$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-2=(x-3)^2-(x-3)-6$

$\therefore\ y=x^2-7x+8$

$y=x^2-7x+8$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

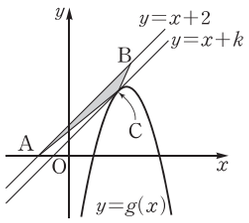
$-y=x^2-7x+8$

$\therefore\ y=-x^2+7x-8$

$\therefore\ g(x)=-x^2+7x-8$

Step 3 삼각형 ABC의 넓이가 최소가 되는 점 C의 위치를 찾고 넓이의 최솟값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x+2$와 평행하고 함수 $y=g(x)$의 그래프에 접하는 직선의 방정식을 $y=x+k$ (k는 상수)라 하면 점 C가 그 접점일 때 삼각형 ABC의 넓이가 최소이다.



함수 $y=-x^2+7x-8$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접하므로

$-x^2+7x-8=x+k$에서

$x^2-6x+k+8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(k+8)=0 \qquad \therefore\ k=1$

$\therefore\ y=x+1$

이때 점 C와 직선 $y=x+2$, 즉 $x-y+2=0$ 사이의 거리는 직선 $y=x+1$ 위의 점 $(0,\ 1)$과 직선 $x-y+2=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|0-1+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

또 두 점 A, B의 좌표가 각각 $(-2,\ 0)$, $(4,\ 6)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(4+2)^2+(6-0)^2}=6\sqrt{2}$

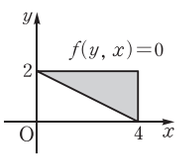
따라서 삼각형 ABC의 넓이의 최솟값은

$\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3$ 답 3

0364 Step 1 평행이동, 대칭이동을 이용하여 방정식 $f(-y+1,\ x-2)=0$이 나타내는 도형을 그린다.

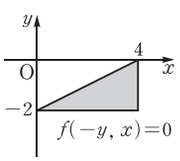
방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(y,\ x)=0$

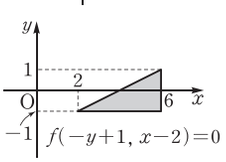


방정식 $f(y,\ x)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(-y,\ x)=0$



방정식 $f(-y,\ x)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은



$f(-(y-1),\ x-2)=0$

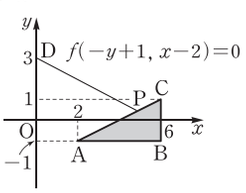
$\therefore\ f(-y+1,\ x-2)=0$

Step 2 $a^2+(b-3)^2$의 값의 의미를 파악한다.

A$(2,\ -1)$, B$(6,\ -1)$, C$(6,\ 1)$, D$(0,\ 3)$이라 하면

$\overline{DP}^2=a^2+(b-3)^2$

이므로 $\overline{DP}^2$의 최댓값과 최솟값을 구하면 된다.



Step 3 점 P의 위치에 따라 경우를 나누어 $a^2+(b-3)^2$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

(i) 점 P가 $\overline{AB}$ 위에 있는 경우

P$(a, -1)$이므로

$\overline{DP}^2=a^2+(-1-3)^2$

$=a^2+16$

$2\le a\le 6$이므로 $\overline{DP}^2$의 최댓값은 $a=6$일 때 $6^2+16=52$이고, 최솟값은 $a=2$일 때 $2^2+16=20$이다.

(ii) 점 P가 $\overline{BC}$ 위에 있는 경우

P$(6, b)$이므로

$\overline{DP}^2=6^2+(b-3)^2$

$=(b-3)^2+36$

$-1\le b\le 1$이므로 $\overline{DP}^2$의 최댓값은 $b=-1$일 때 $(-1-3)^2+36=52$이고, 최솟값은 $b=1$일 때 $(1-3)^2+36=40$이다.

(iii) 점 P가 $\overline{AC}$ 위에 있는 경우

직선 AC의 방정식은

$y-(-1)=\frac{1-(-1)}{6-2}(x-2)$

$\therefore y=\frac{1}{2}x-2$

따라서 P$\left(a, \frac{1}{2}a-2\right)$이므로

$\overline{DP}^2=a^2+\left(\frac{1}{2}a-2-3\right)^2$

$=\frac{5}{4}(a-2)^2+20$

$2\le a\le 6$이므로 $\overline{DP}^2$의 최댓값은 $a=6$일 때 $\frac{5}{4}\times(6-2)^2+20=40$이고, 최솟값은 $a=2$일 때 20이다.

이상에서 $M=52$, $m=20$이므로

$M-m=32$ 답 32

0365 Step 1 t의 값의 범위를 나누어 $S(t)$를 구한다.

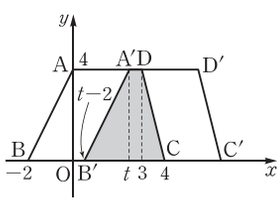
(i) $0<t<3$일 때

$S(t)$

$=\frac{1}{2}\times\{(3-t)+(6-t)\}\times 4$

$=\frac{1}{2}\times(9-2t)\times 4$

$=18-4t$



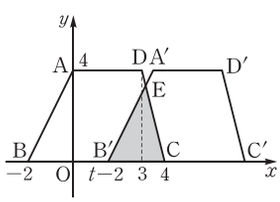
(ii) $3\le t<6$일 때

직선 CD와 직선 A′B′이 만나는 점을 E라 하자.

직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{-2}+\frac{y}{4}=1$

$\therefore y=2x+4$



이 직선을 x축의 방향으로 t만큼 평행이동한 직선 A′B′의 방정식은

$y=2(x-t)+4$ $\therefore y=2x-2t+4$ …… ㉠

직선 CD의 방정식은

$y=\frac{4-0}{3-4}(x-4)$ $\therefore y=-4x+16$ …… ㉡

두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 x좌표는 $2x-2t+4=-4x+16$에서

$x=\frac{1}{3}t+2$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$y=-\frac{4}{3}t+8$

$\therefore$ E$\left(\frac{1}{3}t+2, -\frac{4}{3}t+8\right)$

$\therefore S(t)=\frac{1}{2}\times(6-t)\times\left(-\frac{4}{3}t+8\right)$

$=\frac{2}{3}(6-t)^2$

(i), (ii)에서

$S(t)=\begin{cases}18-4t & (0<t<3)\\ \frac{2}{3}(6-t)^2 & (3\le t<6)\end{cases}$

Step 2 $S(t)=2S\left(\frac{7}{2}\right)$을 만족시키는 t의 값을 구하여 $p+q$의 값을 구한다.

$S\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{2}{3}\times\left(6-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$

$0<t<3$일 때, $6<S(t)<18$이고 $3\le t<6$일 때, $0<S(t)\le 6$이므로 $S(t)=2S\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{25}{3}$에서

$18-4t=\frac{25}{3}$

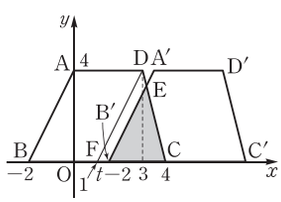
$\therefore t=\frac{29}{12}$

따라서 $p=12$, $q=29$이므로

$p+q=41$ 답 41

다른 풀이 (ii) $3\le t<6$일 때

직선 CD와 직선 A′B′이 만나는 점을 E라 하고, 점 D를 지나면서 직선 A′B′에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 F라 하자.



$\overline{BF}=\overline{AD}=3$이므로

F$(1, 0)$

삼각형 DFC와 삼각형 EB′C는 서로 닮음이고, 닮음비가

$\overline{FC}:\overline{B'C}=3:(6-t)$

따라서 삼각형 DFC와 삼각형 EB′C의 넓이의 비는

$3^2:(6-t)^2$

이때 삼각형 DFC의 넓이가 $\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$이므로

$3^2:(6-t)^2=6:S(t)$

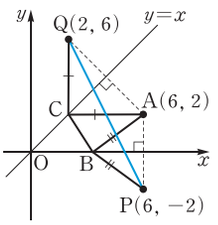
$\therefore S(t)=\frac{2}{3}(6-t)^2$

0366 Step 1 주어진 그림을 좌표평면 위에 놓는다.

산책로 l을 x축, 지점 O를 원점으로 하는 좌표평면 위에서 세 쉼터 A, B, C의 위치를 각각 점 A$(6, 2)$, 점 B, 점 C라 하면 산책로 m의 방정식은 $y=x$이다.

Step 2 점의 대칭이동을 이용하여 통행로의 길이가 최소가 되도록 하는 두 점 B, C의 위치를 파악한다.

점 A(6, 2)를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P라 하면



P(6, −2)

점 A(6, 2)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하면

Q(2, 6)

$\overline{AB}=\overline{PB}$, $\overline{AC}=\overline{QC}$이므로

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{PB}+\overline{BC}+\overline{CQ}$$
$$\geq\overline{PQ}$$

즉 통행로의 최소 길이는 $\overline{PQ}$의 길이와 같고 이때 두 점 B, C는 직선 PQ 위에 있다.

Step 3 두 쉼터 B와 C 사이의 거리를 구한다.

두 점 P(6, −2), Q(2, 6)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-2)=\frac{6-(-2)}{2-6}(x-6)$$
$$\therefore y=-2x+10$$

점 B는 직선 $y=-2x+10$과 x축의 교점이므로

B(5, 0)

점 C는 직선 $y=-2x+10$과 직선 $y=x$의 교점이므로

$-2x+10=x$에서 $x=\frac{10}{3}$ $\therefore$ C$\left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right)$

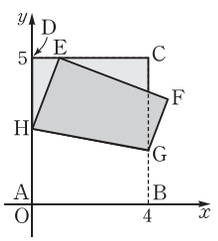
$$\therefore \overline{BC}=\sqrt{\left(\frac{10}{3}-5\right)^2+\left(\frac{10}{3}-0\right)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{3}$$

따라서 두 쉼터 B와 C 사이의 거리는 $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ km이다.

답 $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ km

0367 Step 1 주어진 도형을 좌표평면 위에 놓고 네 점 A, B, C, D의 좌표를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 A를 원점으로 하고, 두 변 AB, AD가 각각 x축, y축의 양의 방향에 오도록 직사각형 ABCD를 놓으면



B(4, 0), C(4, 5), D(0, 5)

Step 2 직선 GH의 방정식을 구하여 두 점 G, H의 좌표를 구한다.

E$(t, 5)$ $(0<t<4)$라 하면 점 E는 점 A와 직선 GH에 대하여 대칭이므로 직선 GH는 선분 AE의 수직이등분선이다.

직선 AE의 기울기가 $\frac{5}{t}$이므로 직선 GH의 기울기는 $-\frac{t}{5}$이고, 선분 AE의 중점 $\left(\frac{t}{2}, \frac{5}{2}\right)$가 직선 GH 위에 있으므로 직선 GH의 방정식은

$$y-\frac{5}{2}=-\frac{t}{5}\left(x-\frac{t}{2}\right) \quad \therefore y=-\frac{t}{5}x+\frac{t^2}{10}+\frac{5}{2}$$
$$\therefore \text{G}\left(4, \frac{t^2}{10}-\frac{4}{5}t+\frac{5}{2}\right), \text{H}\left(0, \frac{t^2}{10}+\frac{5}{2}\right)$$

Step 3 □EHGF=□ABGH임을 이용하여 사각형 EHGF의 넓이의 최솟값을 구하고 $5k$의 값을 구한다.

한편 사각형 EHGF의 넓이는 사각형 ABGH의 넓이와 같으므로

$$\square\text{EHGF}=\square\text{ABGH}$$
$$=\frac{1}{2}\times(\overline{BG}+\overline{AH})\times\overline{AB}$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{t^2}{5}-\frac{4}{5}t+5\right)\times4$$
$$=\frac{2}{5}t^2-\frac{8}{5}t+10$$
$$=\frac{2}{5}(t-2)^2+\frac{42}{5} \quad (0<t<4)$$

즉 사각형 EHGF의 넓이는 $t=2$일 때 최솟값 $\frac{42}{5}$를 가지므로

$k=\frac{42}{5}$ $\therefore 5k=42$ 답 42

시험 만점 완성하기

본책 74~77쪽

0368 전략 점 (x, y)를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(x+m, y+n)$임을 이용한다.

점 $(-k+5, 2k-2)$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-k+5-1, 2k-2+4)$, 즉 $(-k+4, 2k+2)$

이 점이 직선 $y=3x+5$ 위에 있으므로

$2k+2=3(-k+4)+5$, $5k=15$

$\therefore k=3$ 답 ④

0369 전략 직선 l'의 방정식을 구한 후 직선 l 위의 한 점과 직선 l' 사이의 거리를 구한다.

직선 $l: y=2x+4$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 직선 l'의 방정식은

$y-m=2(x-2)+4$ $\therefore 2x-y+m=0$

직선 l 위의 점 $(0, 4)$와 직선 $l': 2x-y+m=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$$\frac{|0-4+m|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}, \quad |m-4|=5$$

$m-4=\pm5$ $\therefore m=9$ ($\because m>0$) 답 ⑤

0370 전략 도형 $f(x, y)=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $f(x-m, y-n)=0$임을 이용한다.

$y=3x^2-6x+5=3(x-1)^2+2$

이 포물선이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨진 포물선의 방정식은

$y-a=3(x+2a-1)^2+2$

$\therefore y=3(x+2a-1)^2+a+2$

이 포물선의 꼭짓점 $(-2a+1, a+2)$가 직선 $y=x+4$ 위에 있으므로

$a+2=-2a+1+4$

$\therefore a=1$ 답 ③

0371 전략 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지남을 이용한다.

직선 $kx-y-8=0$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$k(x+1)-(y-3)-8=0$

$\therefore kx-y+k-5=0$

이 직선이 사각형 OABC의 넓이를 이등분하려면 사각형 OABC의 두 대각선의 교점을 지나야 한다.

두 대각선의 교점은 선분 OB의 중점이고 B(3, 5)이므로 그 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

따라서 직선 $kx-y+k-5=0$이 점 $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$를 지나므로

$\frac{3}{2}k-\frac{5}{2}+k-5=0$ $\therefore k=3$ 답 ②

0372 전략 점 P의 좌표를 (a, b)로 놓고 선분 QR의 길이를 a에 대한 식으로 나타낸 후 최솟값을 구한다.

직선 $y=-3x+2$ 위의 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면

$b=-3a+2$ …… ㉠

점 $P(a, b)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $Q(a, -b)$, y축에 대하여 대칭이동한 점은 $R(-a, b)$이므로

$$\begin{aligned}\overline{QR}&=\sqrt{(-a-a)^2+\{b-(-b)\}^2}\\&=2\sqrt{a^2+b^2}\\&=2\sqrt{a^2+(-3a+2)^2}\ (\because ㉠)\\&=2\sqrt{10a^2-12a+4}\\&=2\sqrt{10\left(a-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{2}{5}}\end{aligned}$$

따라서 선분 QR의 길이는 $a=\frac{3}{5}$일 때 최소이고 이때의 점 P의 좌표는 $\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$이다. 답 ③

0373 전략 원이 직선 l에 대하여 대칭이려면 원의 중심이 직선 l 위에 있어야 함을 이용한다.

직선 $4x+2y-1=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-4x+2y-1=0$

이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 l의 방정식은

$2x-4y-1=0$

이때 원 $(x-k)^2+(y-1)^2=4k^2$이 직선 l에 대하여 대칭이려면 원의 중심 $(k, 1)$이 직선 l 위에 있어야 하므로

$2k-4-1=0$ $\therefore k=\frac{5}{2}$ 답 ④

0374 전략 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하여 처음 식과 같은 것을 찾는다.

ㄱ. 도형 $y=x$를 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$-y=-x$ $\therefore y=x$

ㄴ. 도형 $|x+y|=1$을 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$|-x-y|=1$ $\therefore |x+y|=1$

ㄷ. 도형 $x^2+y^2=4$를 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $(-x)^2+(-y)^2=4$

$\therefore x^2+y^2=4$

ㄹ. 도형 $x^2+y^2=x+y$를 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$(-x)^2+(-y)^2=-x-y$

$\therefore x^2+y^2=-(x+y)$

이상에서 원점에 대하여 대칭이동하였을 때, 자기 자신과 일치하는 도형의 방정식은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0375 전략 대칭이동한 두 원의 방정식을 구한 후 계수를 비교한다.

원 $x^2+y^2+px-8y+21=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x)^2+y^2+p\times(-x)-8y+21=0$

$\therefore x^2+y^2-px-8y+21=0$ …… ㉠

원 $(x-q)^2+(y+3)^2=r$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y-q)^2=r$

$\therefore x^2+y^2+6x-2qy+9+q^2-r=0$ …… ㉡

두 원 ㉠, ㉡이 일치하므로

$-p=6$, $-8=-2q$, $21=9+q^2-r$

$\therefore p=-6$, $q=4$, $r=4$

$\therefore p+q+r=2$ 답 ①

0376 전략 두 원 C, C'이 만나는 서로 다른 점의 개수는 원 C가 직선 $y=x$와 만나는 서로 다른 점의 개수와 같음을 이용한다.

원 C: $x^2+(y-a)^2=n$은 중심의 좌표가 $(0, a)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{n}$인 원이고 두 원 C, C'이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 원 C, C'이 만나는 서로 다른 점의 개수 $f(n)$은 원 C와 직선 $y=x$가 만나는 서로 다른 점의 개수와 같다.

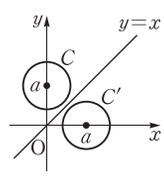
원 C의 중심인 점 $(0, a)$와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0-a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}a\ (\because a>0)$$

(i) $\sqrt{n}<\frac{\sqrt{2}}{2}a$, 즉 $n<\frac{a^2}{2}$일 때

원 C와 직선 $y=x$가 만나지 않으므로

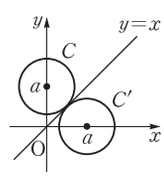
$f(n)=0$



(ii) $\sqrt{n}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$, 즉 $n=\frac{a^2}{2}$일 때

원 C와 직선 $y=x$가 접하므로

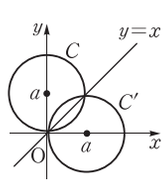
$f(n)=1$



(iii) $\sqrt{n}>\frac{\sqrt{2}}{2}a$, 즉 $n>\frac{a^2}{2}$일 때

원 C와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나므로

$f(n)=2$



이상에서 $f(n)=0$ 또는 $f(n)=1$ 또는 $f(n)=2$

또 $f(n)\le f(n+1)$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)=5$에서

$f(1)=f(2)=f(3)=\cdots=f(7)=0$,

$f(8)=1$,

$f(9)=f(10)=2$

따라서 $f(8)=1$이므로

$\sqrt{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ $\therefore a=4$ 답 ④

0377 전략 두 포물선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 오직 한 점에서만 만나려면 이차방정식 $f(x)=g(x)$가 중근을 가져야 함을 이용한다.

포물선 $y=x^2$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-2=(x-4)^2$ $\therefore y=x^2-8x+18$

$\therefore f(x)=x^2-8x+18$

포물선 $y=x^2$을 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=x^2$ $\therefore y=-x^2$

이 포물선을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 $2m$만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-2m=-(x-m)^2$

$\therefore y=-x^2+2mx-m^2+2m$

$\therefore g(x)=-x^2+2mx-m^2+2m$

두 포물선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 오직 한 점에서만 만나려면 이차방정식 $f(x)=g(x)$가 중근을 가져야 한다.

$f(x)=g(x)$에서

$x^2-8x+18=-x^2+2mx-m^2+2m$

$2x^2-2(m+4)x+m^2-2m+18=0$

x에 대한 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(m+4)\}^2-2(m^2-2m+18)=0$

$m^2-12m+20=0$, $(m-2)(m-10)=0$

$\therefore m=2$ 또는 $m=10$

따라서 두 실수 m의 값의 차는

$10-2=8$ 답 ②

0378 전략 점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 이용한다.

점 B$(3, 0)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

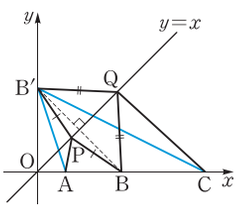
B′$(0, 3)$

$\overline{BP}=\overline{B'P}$, $\overline{BQ}=\overline{B'Q}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{BQ}+\overline{QC}$

$=\overline{AP}+\overline{PB'}+\overline{B'Q}+\overline{QC}$

$\ge\overline{AB'}+\overline{B'C}$



즉 $\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{BQ}+\overline{QC}$의 최솟값은 $\overline{AB'}+\overline{B'C}$의 값과 같다.

이때 점 P는 직선 AB′ 위에 있고 점 Q는 직선 B′C 위에 있다.

직선 AB′의 방정식은

$x+\frac{y}{3}=1$ $\therefore y=-3x+3$

점 P는 직선 AB′과 직선 $y=x$의 교점이므로 점 P의 x좌표는

$-3x+3=x$에서 $x=\frac{3}{4}$

$\therefore$ P$\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$

직선 B′C의 방정식은

$\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$ $\therefore y=-\frac{1}{2}x+3$

점 Q는 직선 B′C와 직선 $y=x$의 교점이므로 점 Q의 x좌표는

$-\frac{1}{2}x+3=x$에서 $x=2$

$\therefore$ Q$(2, 2)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{\left(2-\frac{3}{4}\right)^2+\left(2-\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$ 답 ④

0379 전략 원 위의 임의의 점을 P(a, b), 점 A$(4, 0)$을 점 P에 대하여 대칭이동한 점을 A′(x, y)로 놓고 관계식을 구한다.

원 위의 임의의 점을 P(a, b), 점 A$(4, 0)$을 점 P에 대하여 대칭이동한 점을 A′(x, y)라 하면

$a=\frac{x+4}{2}$, $b=\frac{y}{2}$ …… ㉠

이때 점 P(a, b)가 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=1$

위의 식에 ㉠을 대입하면 구하는 자취의 방정식은

$\left(\frac{x+4}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1$

$\therefore (x+4)^2+y^2=4$ 답 ③

0380 전략 점 A를 지나는 지름을 긋고 선분 AB의 길이가 최대일 때와 최소일 때의 점 P의 위치를 생각해 본다.

ㄱ. 점 A$(-4, 2)$를 점 P$(-8, 0)$에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표를 (a, b)라 하면 선분 AB의 중점이 점 P이므로

$\frac{a-4}{2}=-8$, $\frac{b+2}{2}=0$

$\therefore a=-12$, $b=-2$

$\therefore$ B$(-12, -2)$ (참)

ㄴ. 선분 AB의 길이가 최대가 되려면 두 점 A, P 사이의 거리가 최대가 되어야 하므로 점 P는 점 A를 지나는 지름의 양 끝 점 중에서 점 A로부터 먼 곳에 있어야 한다.

점 A$(4, 3)$에 대하여

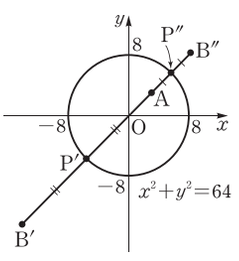
$\overline{AP}\le\overline{OA}+\overline{OP}=\sqrt{4^2+3^2}+8=13$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AP}\le2\times13=26$

즉 선분 AB의 길이의 최댓값은 26이다. (참)

ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 점 A를 지나는 원의 지름의 양 끝 점을 각각 P′, P″이라 하면 선분 AB의 길이가 최대일 때의 점 P의 위치는 P′, 최소일 때의 점 P의 위치는 P″이다. 이때 점 A를 두 점 P′, P″에 대하여 각각 대칭이동한 점을 B′, B″이라 하고, $\overline{OA}=l$이라 하면

$\overline{AB'}=2(8+l)$, $\overline{AB''}=2(8-l)$



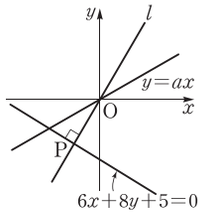
$\therefore \overline{AB'}+\overline{AB''}=2(8+l)+2(8-l)=32$

따라서 선분 AB의 길이의 최댓값과 최솟값의 합은 항상 일정하다. (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0381 전략 원점과 점 P 사이의 거리가 최소일 때, 대칭이동한 직선이 직선 $6x+8y+5=0$과 수직임을 이용한다.

직선 $y=0$을 직선 $y=ax$에 대하여 대칭이동한 직선을 l이라 하면 $\overline{OP}$의 길이는 오른쪽 그림과 같이 직선 l이 직선 $6x+8y+5=0$과 수직일 때 최소이다.



직선 $6x+8y+5=0$, 즉 $y=-\frac{3}{4}x-\frac{5}{8}$의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이므로 직선 l의 방정식은

$y=\frac{4}{3}x \quad \therefore 4x-3y=0$

이때 직선 $y=ax$는 두 직선 $y=0$, $4x-3y=0$이 이루는 각의 이등분선이므로 직선 $y=ax$ 위의 점 $(1, a)$에서 두 직선 $y=0$, $4x-3y=0$에 이르는 거리가 같다.

따라서 $|a|=\frac{|4-3a|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$이므로

$5|a|=|4-3a|, \quad 5a=\pm(4-3a)$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because a>0$) 답 ②

0382 전략 점 A를 평행이동한 점의 좌표를 k에 대한 식으로 나타낸다.

점 $A(-2, 3)$을 x축의 방향으로 8만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 점을 A'이라 하면

$A'(6, 3+k)$

$\overline{OA'}=2\overline{OA}$에서 $\overline{OA'}^2=4\overline{OA}^2$이므로

$6^2+(3+k)^2=4\{(-2)^2+3^2\}$

$k^2+6k-7=0, \quad (k+7)(k-1)=0$

$\therefore k=1$ ($\because k>0$) 답 1

0383 전략 원 C_1을 평행이동한 원 C_2의 방정식을 구하여 두 원 C_1, C_2를 그려 본다.

C_1: $x^2+y^2+4x+2y=0$에서

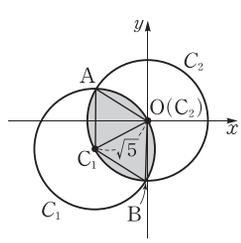
$(x+2)^2+(y+1)^2=5$

원 C_1을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 원 C_2의 방정식은

$(x-2+2)^2+(y-1+1)^2=5$

$\therefore x^2+y^2=5$

오른쪽 그림과 같이 두 원 C_1, C_2의 두 교점을 A, B라 하고, 두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 C_1, C_2라 하면 삼각형 AC_1C_2는 정삼각형이므로 부채꼴 AC_1C_2의 넓이는



$\pi\times(\sqrt{5})^2\times\frac{60}{360}=\frac{5}{6}\pi$

정삼각형 AC_1C_2의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{5})^2=\frac{5\sqrt{3}}{4}$

따라서 공통부분의 넓이는

$4\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)+2\times\frac{5\sqrt{3}}{4}=\frac{10}{3}\pi-\frac{5\sqrt{3}}{2}$

즉 $a=\frac{10}{3}$, $b=-\frac{5}{2}$이므로

$a+b=\frac{5}{6}$ 답 $\frac{5}{6}$

만점 공략 노트

두 원 C_1, C_2는 각각 서로 다른 원의 중심을 지나므로 두 삼각형 AC_1C_2, BC_1C_2는 정삼각형이다.

0384 전략 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1임을 이용한다.

점 $A(5, 3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $A'(5, -3)$

점 $B(2, 6)$을 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 $2k+1$만큼 평행이동한 점은

$B'(2+k, 6+2k+1)$, 즉 $B'(k+2, 2k+7)$

직선 $A'B$의 기울기는 $\frac{6-(-3)}{2-5}=-3$이므로 직선 AB'의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.

즉 $\frac{(2k+7)-3}{(k+2)-5}=\frac{1}{3}$에서 $6k+12=k-3$

$\therefore k=-3$ 답 -3

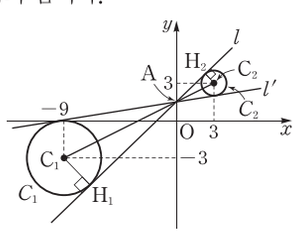
0385 전략 두 원의 공통인 접선의 기울기를 이용한다.

$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{y_1-(-y_2)}{x_1-(-x_2)}$이므로 이 값은 두 점 (x_1, y_1), $(-x_2, -y_2)$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

이때 점 $(-x_2, -y_2)$는 점 (x_2, y_2)를 원점에 대하여 대칭이동한 점이므로 원 $(x-9)^2+(y-3)^2=9$를 원점에 대하여 대칭이동한 원 $(x+9)^2+(y+3)^2=9$ 위의 점이다.

C_1: $(x+9)^2+(y+3)^2=9$,

C_2: $(x-3)^2+(y-3)^2=1$이라 하고 오른쪽 그림과 같이 두 원 C_1, C_2의 공통인 두 접선을 각각 l, l'이라 하면 $\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$의 최댓값과 최솟값은 각각 직선 l의 기울기와 직선 l'의 기울기와 같다.



두 직선 l, l'의 교점을 A, 두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 $C_1(-9, -3)$, $C_2(3, 3)$이라 하고, 두 점 C_1, C_2에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면

$\triangle AC_1H_1\backsim\triangle AC_2H_2$ (AA 닮음)

이므로

$\overline{C_1A}:\overline{C_2A}=\overline{C_1H_1}:\overline{C_2H_2}=3:1$

즉 점 A는 $\overline{C_1C_2}$를 3 : 1로 내분하는 점이므로 그 좌표는

$\left(\frac{3\times3+1\times(-9)}{3+1}, \frac{3\times3+1\times(-3)}{3+1}\right)$, 즉 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$

점 $A\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$을 지나고 두 원 C_1, C_2에 각각 접하는 직선의 방정식을

$y=ax+\frac{3}{2}$, 즉 $2ax-2y+3=0$ (a는 상수)

이라 하면 이 직선과 점 $C_2(3,\ 3)$ 사이의 거리가 원 C_2의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|6a-6+3|}{\sqrt{(2a)^2+(-2)^2}}=1, \qquad |6a-3|=\sqrt{4a^2+4}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$32a^2-36a+5=0$

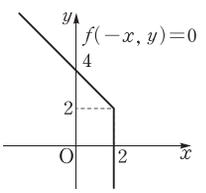
따라서 이 이차방정식의 두 실근 중 큰 근이 M, 작은 근이 m이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$Mm=\frac{5}{32}$ $\therefore\ 32Mm=5$ 답 5

0386 전략 도형의 평행이동과 대칭이동을 이용하여 주어진 방정식이 나타내는 도형을 그려 본다.

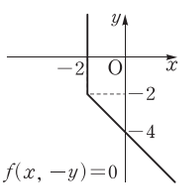
방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(-x,\ y)=0$



또 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

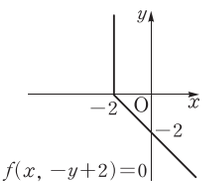
$f(x,\ -y)=0$



이 도형을 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 도형의 방정식은

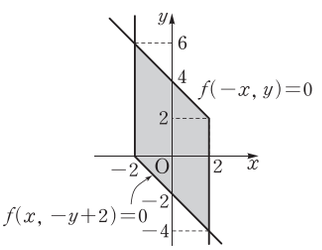
$f(x,\ -(y-2))=0$,

즉 $f(x,\ -y+2)=0$



따라서 두 방정식 $f(-x,\ y)=0$, $f(x,\ -y+2)=0$이 나타내는 도형으로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는

$6\times4=24$ 답 24

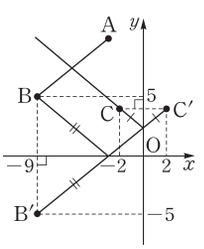


0387 전략 주어진 그림을 좌표평면 위에 놓고, 점 B, C를 각각 대칭이동한 점을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 벽면 Q를 x축, 벽면 R를 y축으로 하는 좌표평면 위에서 세 지점 A, B, C를 각각 점 A, 점 $B(-9,\ 5)$, 점 $C(-2,\ a)$ $(a>0)$라 하자.

점 $B(-9,\ 5)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면

$B'(-9,\ -5)$



점 $C(-2,\ a)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 C'이라 하면

$C'(2,\ a)$

이때 B 지점에서 C 지점까지 이동한 거리가 $\sqrt{202}$ m이므로

$\overline{B'C'}=\sqrt{(2+9)^2+(a+5)^2}=\sqrt{202}$

$121+(a+5)^2=202$, $(a+5)^2=81$

$a+5=\pm9$ $\therefore\ a=4$ ($\because\ a>0$)

따라서 벽면 Q에서 C 지점까지의 거리는 4 m이다.

답 4 m

0388 전략 도형을 평행이동해도 그 모양이 변하지 않음을 이용한다.

도형을 평행이동해도 그 모양은 변하지 않으므로 $\triangle OAB$는 정삼각형이다. … ❶

이때 $ab>0$이고 $B(0,\ 4)$이므로 점 A는 제1사분면 위의 점이다.

$\therefore\ a>0,\ b>0$

정삼각형 OAB의 한 변의 길이는 $\overline{OB}=4$이므로

$a=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4=2\sqrt{3}$, $b=\frac{1}{2}\times4=2$

$\therefore\ A(2\sqrt{3},\ 2)$ … ❷

따라서 $2\sqrt{3}+p=3\sqrt{3}$, $2+q=4$이므로

$p=\sqrt{3}$, $q=2$

$\therefore\ pq=2\sqrt{3}$ … ❸

답 $2\sqrt{3}$

단계	채점 요소	배점
❶	$\triangle OAB$가 정삼각형임을 알기	1점
❷	점 A의 좌표 구하기	2점
❸	pq의 값 구하기	1점

0389 전략 점 C의 좌표를 m, n에 대한 식으로 나타낸 후 $\triangle OAC$에서 각 변이 빗변이 되는 경우를 생각해 본다.

점 $A(m,\ n)$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점은

$B(-n,\ -m)$

$C(a,\ -m)$이라 하면 선분 BC의 중점의 x좌표가 3이므로

$\frac{-n+a}{2}=3$ $\therefore\ a=n+6$

$\therefore\ C(n+6,\ -m)$ … ❶

삼각형 OAC에서

$\overline{OA}^2=m^2+n^2$

$\overline{AC}^2=(n+6-m)^2+(-m-n)^2$

$=2m^2+2n^2-12m+12n+36$

$\overline{OC}^2=(n+6)^2+(-m)^2$

$=m^2+n^2+12n+36$

이때 $m>0$, $n>0$이므로

$\overline{OA}^2<\overline{AC}^2$, $\overline{OA}^2<\overline{OC}^2$

즉 $\triangle OAC$가 직각삼각형일 때, 빗변이 될 수 있는 것은 $\overline{AC}$ 또는 $\overline{OC}$이다.

(i) 빗변이 $\overline{AC}$인 경우

$\overline{OA}^2+\overline{OC}^2=\overline{AC}^2$이 성립해야 하므로

$m^2+n^2+(m^2+n^2+12n+36)$
$=2m^2+2n^2-12m+12n+36$
$\therefore\ m=0$

그런데 m이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 빗변이 $\overline{OC}$인 경우

$\overline{OA}^2+\overline{AC}^2=\overline{OC}^2$이 성립해야 하므로

$m^2+n^2+(2m^2+2n^2-12m+12n+36)$
$=m^2+n^2+12n+36$
$m^2+n^2-6m=0$
$\therefore\ (m-3)^2+n^2=9$

자연수 m과 양수 n에 대하여

$m=1,\ n=\sqrt{5}$ 또는 $m=2,\ n=2\sqrt{2}$
또는 $m=3,\ n=3$ 또는 $m=4,\ n=2\sqrt{2}$
또는 $m=5,\ n=\sqrt{5}$ … ❷

(i), (ii)에서 주어진 조건을 만족시키는 점 A는

$(1,\sqrt{5}),\ (2,2\sqrt{2}),\ (3,3),\ (4,2\sqrt{2}),\ (5,\sqrt{5})$

의 5개이다. … ❸

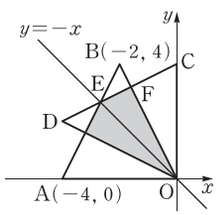
답 5

단계	채점 요소	배점
❶	점 C의 좌표 구하기	2점
❷	$m,\ n$의 값 구하기	3점
❸	점 A의 개수 구하기	1점

참고 $\overline{AC}^2-\overline{OA}^2=m^2+n^2-12m+12n+36$
$=(m-6)^2+n^2+12n>0$
이므로 $\overline{OA}^2<\overline{AC}^2$

0390 전략 공통부분이 직선 $y=-x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$와 직선 $y=-x$의 교점을 E, $\overline{OB}$와 $\overline{CD}$의 교점을 F라 하면



$S=2\triangle EOF$ … ❶

직선 AB의 방정식은

$y-0=\dfrac{4-0}{-2-(-4)}\{x-(-4)\}$

$\therefore\ y=2x+8$ …… ㉠

직선 CD는 직선 AB를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 그 방정식은

$-x=-2y+8$ $\therefore\ y=\dfrac{1}{2}x+4$ …… ㉡

직선 OB의 방정식은 $y=-2x$ …… ㉢

㉠과 $y=-x$를 연립하여 풀면

$x=-\dfrac{8}{3},\ y=\dfrac{8}{3}$

즉 $E\left(-\dfrac{8}{3},\ \dfrac{8}{3}\right)$이므로

$\overline{EO}=\sqrt{\left(-\dfrac{8}{3}\right)^2+\left(\dfrac{8}{3}\right)^2}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ … ❷

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x=-\dfrac{8}{5},\ y=\dfrac{16}{5}$

즉 $F\left(-\dfrac{8}{5},\ \dfrac{16}{5}\right)$이므로 점 F와 직선 $y=-x$, 즉 $x+y=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{\left|-\dfrac{8}{5}+\dfrac{16}{5}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$ … ❸

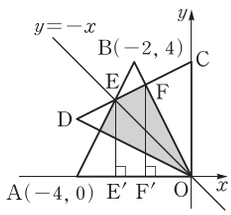
따라서 $S=2\triangle EOF=2\times\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\times\dfrac{4\sqrt{2}}{5}\right)=\dfrac{64}{15}$이므로

$30S=128$ … ❹

답 128

단계	채점 요소	배점
❶	$S=2\triangle EOF$임을 알기	1점
❷	$\overline{EO}$의 길이 구하기	2점
❸	점 F와 직선 $y=-x$ 사이의 거리 구하기	2점
❹	$30S$의 값 구하기	1점

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 두 점 E, F에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 E′, F′이라 하면 두 점 E, F의 x좌표가 각각 $-\dfrac{8}{3},\ -\dfrac{8}{5}$이므로



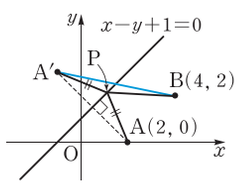
$\triangle EOC:\triangle EOF$
$=\overline{EC}:\overline{EF}=\overline{E'O}:\overline{E'F'}$
$=\dfrac{8}{3}:\left(\dfrac{8}{3}-\dfrac{8}{5}\right)=5:2$

$\therefore\ \triangle EOF=\dfrac{2}{5}\triangle EOC=\dfrac{2}{5}\times\left(\dfrac{1}{2}\times4\times\dfrac{8}{3}\right)=\dfrac{32}{15}$

$\therefore\ S=2\triangle EOF=2\times\dfrac{32}{15}=\dfrac{64}{15}$

0391 전략 점 A를 직선 $x-y+1=0$에 대하여 대칭이동한 점을 이용한다.

점 A(2, 0)을 직선 $x-y+1=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(a,\ b)$라 하면 선분 AA′의 중점 $\left(\dfrac{2+a}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$가 직선 $x-y+1=0$ 위의 점이므로



$\dfrac{2+a}{2}-\dfrac{b}{2}+1=0$ $\therefore\ a-b=-4$ …… ㉠

또 직선 AA′과 직선 $x-y+1=0$, 즉 $y=x+1$은 서로 수직이므로

$\dfrac{b}{a-2}=-1$ $\therefore\ a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=3$ … ❶

즉 $A'(-1,\ 3)$이고 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}$
$\geq\overline{A'B}$
$=\sqrt{(4+1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{26}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $\sqrt{26}$이다. … ❷

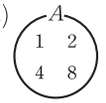
답 $\sqrt{26}$

단계	채점 요소	배점
❶	점 A를 직선 $x-y+1=0$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표 구하기	2점
❷	$\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값 구하기	2점

05 집합의 뜻과 포함 관계

셀프 CHECK → 본책 80쪽

A 답 (1) $\notin$ (2) $\in$ (3) $\notin$ (4) $\in$

B 답 (1) $A=\{1, 2, 4, 8\}$
(2) $A=\{x \mid x$는 8의 양의 약수$\}$
(3) 

C 답 (1) 무 (2) 유

D 답 (1) $B \subset A$ (2) $A \subset B$

E 답 $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

F 답 (1) 32 (2) 31 (3) 8

내신유형 다지기 → 본책 81~89쪽

유형 071 집합의 뜻 → 본책 81쪽

(1) 기준이 명확하여 그 대상을 분명하게 정할 수 있다.
➜ 집합이다.
(2) 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없다.
➜ 집합이 아니다.

0392 ①, ②, ③, ⑤ '큰', '인기 있는', '어려운', '높은'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
④ 가장 작은 자연수는 1이므로 집합이다. 답 ④

0393 ㄱ, ㄷ. '가까운', '좋은'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
이상에서 집합이 아닌 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

만점 공략 노트
ㄹ. 1보다 작은 자연수는 없으므로 공집합이다. 공집합도 집합임에 주의한다.

유형 072 집합과 원소 사이의 관계 → 본책 81쪽

(1) a가 집합 A에 속한다. ➜ $a \in A$
(2) b가 집합 A에 속하지 않는다. ➜ $b \notin A$

0394 ⑤ 16은 20의 약수가 아니므로 $16 \notin B$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0395 $x^3-2x^2-3x=0$에서 $x(x+1)(x-3)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$
① $-3 \notin A$ ② $-1 \in A$
③ $0 \in A$ ④ $1 \notin A$
따라서 옳은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0396 ① $\sqrt{4}=2$는 정수이므로 $\sqrt{4} \in Z$
② $1-\sqrt{2}$는 무리수이므로 $1-\sqrt{2} \notin Q$
③ $i^2=-1$은 유리수이므로 $i^2 \in Q$
④ π는 무리수이므로 $\pi \notin Q$
⑤ $\sqrt{-9}=3i$는 허수이므로 $\sqrt{-9} \notin R$
따라서 옳은 것은 ③이다. 답 ③

만점 공략 노트
i의 거듭제곱
음이 아닌 정수 k에 대하여
$i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$, $i^{4k+4}=1$

0397 집합 A의 원소는 $a_{11}=a_{22}=0$, $a_{12}=a_{21}$을 만족시키는 행렬이다.
① $a_{11}=a_{22}=0$, $a_{12}=a_{21}=-1$이므로 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in A$
② $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$이므로 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin A$
③ $a_{11}=a_{22}=0$, $a_{12}=a_{21}=2$이므로 $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in A$
④ $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$이므로 $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \notin A$
⑤ $a_{11}=a_{22}=0$, $a_{12}=a_{21}=0$이므로 $O \in A$
따라서 옳은 것은 ③이다. 답 ③

유형 073 집합의 표현 방법 → 본책 82쪽

(1) 원소나열법: { } 안에 모든 원소를 나열
(2) 조건제시법: $\{x \mid x$의 조건$\}$
(3) 벤다이어그램: 집합을 나타낸 그림

0398 ① $\{1, 5\}$ ② $\{2, 3, 5\}$ ③ $\{1, 3, 6\}$
⑤ $x=-1, 0, 1$이므로 $\{-1, 1, 3\}$ 답 ④

0399 $A=\{5, 10, 15, 20\}$이므로 $20<k \leq 25$
따라서 자연수 k는 21, 22, 23, 24, 25의 5개이다. 답 5

0400 $(1, -1) \in A$이므로 $x=1$, $y=-1$을 $ax-by=-1$에 대입하면
$a+b=-1$ …… ㉠ … ❶
$(-5, 3) \in A$이므로 $x=-5$, $y=3$을 $ax-by=-1$에 대입하면
$-5a-3b=-1$, 즉 $5a+3b=1$ …… ㉡ … ❷

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-3$

$\therefore\ ab=-6$ … ❸

답 -6

단계	채점 요소	비율
❶	$(1,\ -1)\in A$임을 이용하여 $a,\ b$ 사이의 관계식 구하기	40 %
❷	$(-5,\ 3)\in A$임을 이용하여 $a,\ b$ 사이의 관계식 구하기	40 %
❸	ab의 값 구하기	20 %

0401 ① $30=2\times3\times5$이므로 $30\notin B$

② $75=3\times5^2$이므로 $75\in B$

③ $90=2\times3^2\times5$이므로 $90\notin B$

④ $105=3\times5\times7$이므로 $105\notin B$

⑤ $135=3^3\times5$이므로 $135\in B$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다. 답 ③

유형 074 유한집합과 무한집합

본책 82쪽

(1) 유한집합: 원소가 유한개인 집합

(2) 무한집합: 원소가 무수히 많은 집합

(3) 공집합 ($\varnothing$): 원소가 하나도 없는 집합

➜ 공집합은 유한집합이다.

0402 ② $\{3,\ 6,\ 9,\ \cdots\}$ ➜ 무한집합

③ $x^2<9$에서 $x^2-9<0$

$(x+3)(x-3)<0$ $\therefore\ -3<x<3$

따라서 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$이므로 주어진 집합은 $\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$

➜ 유한집합

④ 무한집합

⑤ $\{7,\ 11,\ 15,\ \cdots\}$ ➜ 무한집합 답 ③

0403 ① 원소가 1개이므로 공집합이 아니다.

② $\{-1\}$

③ $\{2\}$

④ $\{3\}$

⑤ $x^2+4=0$에서 $x^2=-4$

이것을 만족시키는 유리수 x는 존재하지 않으므로 주어진 집합은 공집합이다. 답 ⑤

만점 공략 노트

$\varnothing$은 공집합이고, $\{\varnothing\}$은 $\varnothing$을 원소로 갖는 집합이므로 원소가 1개인 집합이다. $\varnothing$과 $\{\varnothing\}$은 서로 다른 집합임에 주의한다.

0404 집합 A가 공집합이 되려면 이차부등식 $x^2+2kx-k+6<0$을 만족시키는 실수 x가 존재하지 않아야 한다.

즉 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2kx-k+6\geq0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2kx-k+6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(-k+6)\leq0$, $k^2+k-6\leq0$

$(k+3)(k-2)\leq0$ $\therefore\ -3\leq k\leq2$

따라서 정수 k는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$이므로 구하는 합은

$-3+(-2)+(-1)+0+1+2=-3$ 답 -3

유형 075 유한집합의 원소의 개수

본책 83쪽

(1) $n(A)$: 유한집합 A의 원소의 개수

주의 ① $\varnothing$ ➜ 원소가 0개 ➜ $n(\varnothing)=0$

② $\{\varnothing\}$ ➜ 원소는 $\varnothing$의 1개 ➜ $n(\{\varnothing\})=1$

③ $\{0\}$ ➜ 원소는 0의 1개 ➜ $n(\{0\})=1$

(2) 집합 A가 조건제시법으로 주어지면 원소나열법으로 나타낸 후 $n(A)$를 구한다.

0405 ① $A=\{3\}$이면 $n(A)=1$

③ $n(\{-2\})=1$, $n(\{1\})=1$이므로 $n(\{-2\})=n(\{1\})$

④ $n(\{0\})-n(\{\varnothing\})=1-1=0$

⑤ $n(\{0,\ 1,\ 2\})-n(\{0,\ 1\})=3-2=1$

따라서 옳은 것은 ②, ④이다. 답 ②, ④

0406 $A=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4\}$에 대하여 $a\in A$, $b\in B$일 때, $a+b$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

b \ a	-1	0	1
1	0	1	2
2	1	2	3
4	3	4	5

$C=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

$\therefore\ n(C)=6$ 답 6

0407 $A^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$이므로

$P=\{A,\ E\}$ $\therefore\ n(P)=2$

$B^2=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E$,

$B^3=B^2B=(-E)B=-B$,

$B^4=(B^2)^2=(-E)^2=E$

이므로 $Q=\{B,\ -E,\ -B,\ E\}$ $\therefore\ n(Q)=4$

$\therefore\ n(P)+n(Q)=6$ 답 6

0408 $A=\{(-3,\ -1),\ (-3,\ 1),\ (-1,\ -3),\ (-1,\ 3),\ (1,\ -3),\ (1,\ 3),\ (3,\ -1),\ (3,\ 1)\}$

이므로

$n(A)=8$

이때 $n(A)+n(B)=11$에서

$8+n(B)=11$ $\therefore\ n(B)=3$

따라서 $B=\{2,\ 3,\ 5\}$이므로

$5\leq k<7$ 답 $5\leq k<7$

0409 $\sqrt{16}<\sqrt{20}<\sqrt{25}$에서 $4<\sqrt{20}<5$이므로

$A_{20}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ $\therefore\ n(A_{20})=4$ … ❶

$\sqrt{36}<\sqrt{40}<\sqrt{49}$에서 $6<\sqrt{40}<7$이므로

$A_{40}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ $\therefore\ n(A_{40})=6$ … ❷

$\therefore n(A_k)=n(A_{20})+n(A_{40})=10$

즉 $10\le\sqrt{k}<11$이므로 $100\le k<121$

따라서 자연수 k의 최댓값은 120이다. … ❸

답 120

단계	채점 요소	비율
❶	$n(A_{20})$ 구하기	30 %
❷	$n(A_{40})$ 구하기	30 %
❸	자연수 k의 최댓값 구하기	40 %

0410 $n(A)$가 3보다 큰 홀수이므로 자연수 m의 양의 약수의 개수가 3보다 큰 홀수이어야 한다.

양의 약수의 개수가 홀수인 100 이하의 자연수는

$1,\ 2^2,\ 3^2,\ \cdots,\ 10^2$

이때 1은 양의 약수가 1개이고 $2^2,\ 3^2,\ 5^2,\ 7^2$은 양의 약수가 3개이므로 자연수 m은

$4^2,\ 6^2,\ 8^2,\ 9^2,\ 10^2$

의 5개이다. 답 ④

유형 076 기호 ∈, ⊂의 사용 본책 83쪽

(1) 원소와 집합 사이의 관계

➜ $\in$, $\notin$를 사용하여 나타낸다.

(2) 집합과 집합 사이의 포함 관계

➜ $\subset$, $\not\subset$를 사용하여 나타낸다.

0411 ㄱ. 3은 집합 A의 원소가 아니므로 $3\notin A$ (거짓)

ㄴ. $1\in A$이므로 $\{1\}\subset A$ (거짓)

ㄷ. $2\notin A$이므로 $\{2\}\not\subset A$ (거짓)

ㅂ. $\varnothing$은 집합 A의 원소이므로

$\varnothing\in A,\ \{\varnothing\}\subset A$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄹ, ㅁ이다. 답 ㄹ, ㅁ

0412 ④ $\{a, b\}$는 집합 A의 원소이므로 $\{a, b\}\in A$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

유형 077 집합 사이의 포함 관계 본책 84쪽

집합 사이의 포함 관계는 각 집합을 원소나열법으로 나타낸 후 두 집합의 모든 원소를 비교하여 판단한다.

(1) 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속한다. ➜ $A\subset B$

(2) 집합 A의 원소 중에서 집합 B에 속하지 않는 것이 있다.

➜ $A\not\subset B$

0413 $x^2-4=0$에서 $x^2=4$ $\therefore x=\pm2$

$\therefore B=\{-2, 2\}$

$|-2|=|2|=2$이므로 $C=\{2\}$

따라서 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계는

$C\subset B\subset A$ 답 ⑤

0414 주어진 벤다이어그램에서 두 집합 A, B 사이의 포함 관계는 $B\subset A$이다.

① $A\not\subset B$, $B\not\subset A$

② $B=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots\}$이므로

$A\subset B$

③ $A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18, \cdots\}$, $B=\{6, 12, 18, 24, \cdots\}$이므로

$B\subset A$

④ $A=\{1, 3, 9\}$, $B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$이므로

$A\subset B$

⑤ $A=\{3, 5, 7\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$이므로

$A\subset B$ 답 ③

만점 공략 노트

두 자연수 m, n에 대하여 m이 n의 배수일 때

(1) (m의 배수의 집합)$\subset$(n의 배수의 집합)

(2) (n의 약수의 집합)$\subset$(m의 약수의 집합)

0415 $A=\{0, 1\}$에 대하여 $x\in A$, $y\in A$일 때, $x+y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

y \ x	0	1
0	0	1
1	1	2

$B=\{0, 1, 2\}$

또 $x\in B$, $y\in B$일 때, xy의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

y \ x	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4

$C=\{0, 1, 2, 4\}$

따라서 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계는

$A\subset B\subset C$ 답 ①

유형 078 집합 사이의 포함 관계를 이용하여 미지수 구하기 본책 84쪽

(1) 각 집합을 원소나열법으로 나타낸 후 각 원소를 비교한다.

➜ 두 집합 A, B에 대하여 $A\subset B$이면 집합 A의 모든 원소는 집합 B의 원소이다.

(2) 집합이 부등식으로 주어지면 각 집합을 수직선 위에 나타내고 포함 관계가 성립하기 위한 조건을 찾는다.

0416 $(x-1)(x-2a)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=2a$

$\therefore A=\{1, 2a\}$

$B=\{1, 2, 4, 8, 16\}$에서 $A\subset B$이려면 $2a\in B$이어야 하므로

$2a=2$ 또는 $2a=4$ 또는 $2a=8$ 또는 $2a=16$

$\therefore a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=4$ 또는 $a=8$

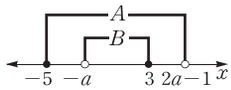
따라서 구하는 합은

$1+2+4+8=15$ 답 ②

참고 a는 자연수이므로

$a\ge1$ $\therefore 2a\ge2$

0417 $B \subset A$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다. … ❶



즉 $-a \geq -5$, $2a-1>3$이어야 하므로

$2<a \leq 5$ … ❷

따라서 자연수 a는 3, 4, 5의 3개이다. … ❸

답 3

단계	채점 요소	비율
❶	두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내기	30 %
❷	a의 값의 범위 구하기	50 %
❸	자연수 a의 개수 구하기	20 %

0418 $A \subset B$이려면 $3 \in B$이어야 하므로

$a+1=3$ 또는 $a^2-2a=3$

(i) $a+1=3$, 즉 $a=2$일 때

$A=\{3, 4\}$, $B=\{-2, 0, 3\}$이므로

$A \not\subset B$

(ii) $a^2-2a=3$일 때

$a^2-2a-3=0$이므로 $(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

$a=-1$이면 $A=\{-2, 3\}$, $B=\{-2, 0, 3\}$이므로

$A \subset B$

$a=3$이면 $A=\{3, 6\}$, $B=\{-2, 3, 4\}$이므로

$A \not\subset B$

(i), (ii)에서 $a=-1$ 답 -1

0419 $\sqrt{36}=6$ 이하의 짝수인 자연수는 2, 4, 6이므로

$A_{36}=\{2, 4, 6\}$

$A_n \subset A_{36}$이려면 $1 \leq \sqrt{n}<8$이어야 하므로

$1 \leq n<64$

따라서 자연수 n의 최댓값은 63이다. 답 63

유형 079 부분집합 구하기 본책 85쪽

원소의 개수가 n인 집합의 부분집합은 원소가 0개, 1개, 2개, …, n개인 경우로 나누어 구한다.

0420 $A=\{2, 3, 5, 7\}$에 대하여 집합 B는 원소가 2개인 집합 A의 부분집합이므로

$\{2, 3\}$, $\{2, 5\}$, $\{2, 7\}$, $\{3, 5\}$, $\{3, 7\}$, $\{5, 7\}$

의 6개이다. 답 ③

다른 풀이 집합 B의 개수는 집합 A의 원소 4개 중에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_4C_2=\frac{4\times 3}{2\times 1}=6$$

0421 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

(i) 원소가 1개인 경우

$\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{9\}$의 5개

(ii) 원소가 2개인 경우

$\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 7\}$, $\{1, 9\}$, $\{3, 5\}$, $\{3, 7\}$의 6개

(iii) 원소가 3개인 경우

$\{1, 3, 5\}$의 1개

이상에서 구하는 부분집합의 개수는

$5+6+1=12$ 답 ⑤

0422 $P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

⑤ $\{a, b, c\}$는 집합 $P(A)$의 원소이므로

$\{a, b, c\} \in P(A)$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

유형 080 서로 같은 집합 본책 85쪽

두 집합 A, B에 대하여 $A=B$이다.

➜ $A \subset B$이고 $B \subset A$이다.

➜ 두 집합 A, B의 모든 원소가 같다.

0423 $A=\{3, 6, 9\}$

$A=B$이려면 $6 \in B$, $9 \in B$이어야 하므로

$a-1=6$, $b+6=9$ 또는 $a-1=9$, $b+6=6$

$\therefore a=7$, $b=3$ 또는 $a=10$, $b=0$

그런데 a, b는 자연수이므로

$a=7$, $b=3$ $\therefore ab=21$ 답 ④

0424 $A=B$이려면 $-3 \in A$이어야 하므로 $x=-3$을 $x^2+ax-3=0$에 대입하면

$9-3a-3=0$ $\therefore a=2$ … ❶

따라서 $x^2+2x-3=0$에서

$(x+3)(x-1)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

즉 $A=\{-3, 1\}$이므로 $b=1$ … ❷

$\therefore a-b=1$ … ❸

답 1

단계	채점 요소	비율
❶	a의 값 구하기	40 %
❷	b의 값 구하기	40 %
❸	$a-b$의 값 구하기	20 %

0425 $A \subset B$이고 $B \subset A$이면 $A=B$이므로 $10 \in A$

즉 $a^2+1=10$이므로 $a^2=9$

$\therefore a=\pm 3$

(i) $a=-3$일 때

$A=\{1, 4, 10\}$, $B=\{4, 7, 10\}$이므로

$A \neq B$

(ii) $a=3$일 때

$A=\{1, 4, 10\}$, $B=\{1, 4, 10\}$이므로

$A=B$

(i), (ii)에서 $a=3$ 답 3

0426 $A=B$이려면 $-3\in B$이어야 하므로

$2a+5=-3$ 또는 $a-1=-3$ 또는 $3-a=-3$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=-2$ 또는 $a=6$

(i) $a=-4$일 때

$A=\{-3, -1, 17\}$, $B=\{-5, -3, 7\}$이므로 $A\neq B$

(ii) $a=-2$일 때

$A=\{-3, 1, 5\}$, $B=\{-3, 1, 5\}$이므로 $A=B$

(iii) $a=6$일 때

$A=\{-3, 9, 37\}$, $B=\{-3, 5, 17\}$이므로 $A\neq B$

이상에서 $a=-2$ 답 -2

0427 $x^2-x-2=0$에서

$(x+1)(x-2)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 $A=B=\{-1, 2\}$이므로

$x^3+ax^2+bx+c=(x+1)^2(x-2)$

또는 $x^3+ax^2+bx+c=(x+1)(x-2)^2$

이때 $c<0$이므로

$x^3+ax^2+bx+c=(x+1)^2(x-2)$

$=(x+1)(x^2-x-2)$

따라서 $Q(x)=x+1$이므로 $Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$Q(3)=4$ 답 4

만점 공략 노트

나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$R=f(a)$

유형 081 부분집합의 개수

본책 86쪽

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여

(1) 집합 A의 부분집합의 개수 ➔ 2^n

(2) 집합 A의 진부분집합의 개수 ➔ 2^n-1

0428 $n(A)=a$, $n(B)=b$라 하면

$2^a=256=2^8$에서 $a=8$

$2^b-1=31$에서 $2^b=32=2^5$ $\therefore b=5$

$\therefore n(A)+n(B)=a+b=13$ 답 13

0429 $x^2-3x-4\leq 0$에서 $(x+1)(x-4)\leq 0$

$\therefore -1\leq x\leq 4$

$\therefore A=\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

따라서 $X\subset A$, $X\neq\varnothing$, $X\neq A$인 집합 X는 집합 A의 진부분집합 중에서 공집합을 제외한 것이므로 그 개수는

$2^6-1-1=62$ 답 ③

0430 집합 A의 공집합이 아닌 부분집합 중에서 모든 원소가 짝수인 부분집합은 집합 $\{2, 4, 6, \cdots, 20\}$의 부분집합 중에서 공집합을 제외한 것이므로 그 개수는

$2^{10}-1=1023$ 답 1023

유형 082 특정한 원소를 갖거나 갖지 않는 부분집합의 개수

본책 86쪽

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여

(1) 집합 A의 특정한 원소 k개를 반드시 원소로 갖는(또는 갖지 않는) 부분집합의 개수

➔ 2^{n-k} (단, $k<n$)

(2) 집합 A의 특정한 원소 k개는 반드시 원소로 갖고, 특정한 원소 m개는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수

➔ 2^{n-k-m} (단, $k+m<n$)

0431 $A=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

집합 X는 집합 A의 진부분집합 중에서 1, 2, 4를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 그 개수는

$2^{6-3}-1=7$ 답 ③

0432 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$

집합 A의 원소 중에서 6의 약수는 1, 2, 3, 6이고 5의 배수는 5, 10이므로 집합 A의 부분집합 중에서 1, 2, 3, 6은 반드시 원소로 갖고, 5, 10은 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$2^{10-4-2}=2^4=16$ 답 ③

0433 집합 A의 부분집합 중에서 1은 반드시 원소로 갖고, 2, 3은 원소로 갖지 않는 집합의 개수가 32이므로

$2^{n-1-2}=32$ … ❶

$2^{n-3}=2^5$, $n-3=5$ $\therefore n=8$ … ❷

답 8

단계	채점 요소	비율
❶	주어진 조건을 이용하여 n에 대한 식 세우기	60 %
❷	n의 값 구하기	40 %

0434 $n(A)=a$라 하면 집합 A의 진부분집합 중에서 5를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수가 63이므로

$2^{a-1}-1=63$, $2^{a-1}=64=2^6$

$a-1=6$ $\therefore a=7$

따라서 $A=\{5, 10, 15, \cdots, 35\}$이므로 $35\leq k<40$

즉 자연수 k의 최댓값은 39, 최솟값은 35이므로 구하는 합은

$39+35=74$ 답 74

0435 조건 (가)에서

$A=\{1, 2, 3, \cdots, 2k+1\}$

집합 A의 원소 중에서 홀수는 $(k+1)$개이므로 조건 (나)에 의하여

$2^{2k+1-(k+1)}=8$, $2^k=8=2^3$ $\therefore k=3$

따라서 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 7\}$이므로

$n(A)=7$ 답 7

0436 $f(a)$는 집합 A의 부분집합 중에서 a는 반드시 원소로 갖고, a보다 작은 $(a-1)$개의 자연수는 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같으므로

$f(a)=2^{10-1-(a-1)}=2^{10-a}$

$g(a)$는 집합 A의 부분집합 중에서 a는 반드시 원소로 갖고, a보다 큰 $(10-a)$개의 자연수는 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같으므로

$g(a)=2^{10-1-(10-a)}=2^{a-1}$

$\therefore f(a)g(a)=2^{10-a}\times 2^{a-1}=2^9=512$ 답 ④

유형 083 $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수 본책 87쪽

$A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수

➜ 집합 B의 부분집합 중에서 집합 A의 모든 원소를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수

0437 $A=\{1, 3, 9\}$, $B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

따라서 집합 X의 개수는 집합 B의 부분집합 중에서 1, 3, 9를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{6-3}=2^3=8$ 답 ③

참고 집합 B는 18의 양의 약수의 집합과 같다.

0438 $x^3-2x^2-x+2=0$에서

$(x+1)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

$\therefore A=\{-1, 1, 2\}$ … ❶

$|x|<4$에서 $-4<x<4$이므로

$B=\{-3, -2, -1, \cdots, 3\}$ … ❷

따라서 집합 X는 집합 B의 부분집합 중 -1, 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합에서 집합 A를 제외한 것이므로 그 개수는

$2^{7-3}-1=2^4-1=15$ … ❸

답 15

단계	채점 요소	비율
❶	집합 A를 원소나열법으로 나타내기	30 %
❷	집합 B를 원소나열법으로 나타내기	30 %
❸	집합 X의 개수 구하기	40 %

0439 $A=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$

$x^2-7x+6\le 0$에서 $(x-1)(x-6)\le 0$

$\therefore 1\le x\le 6$ $\therefore B=\{1, 2, 3, \cdots, 6\}$

따라서 집합 X는 집합 A의 진부분집합 중 1, 2, 3, …, 6을 반드시 원소로 갖는 집합에서 집합 B를 제외한 것이고 그 개수가 126이므로

$2^{n-6}-1-1=126$, $2^{n-6}=128=2^7$

$n-6=7$ $\therefore n=13$ 답 13

0440 (i) $Y=\varnothing$일 때

$X\subset Y$이므로 $X=\varnothing$

따라서 순서쌍 (X, Y)의 개수는 1이다.

(ii) $n(Y)=1$일 때

집합 A의 원소 중에서 집합 Y의 원소를 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

집합 Y의 부분집합의 개수는 2이므로 집합 X를 택하는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

따라서 순서쌍 (X, Y)의 개수는

$3\times 2=6$

(iii) $n(Y)=2$일 때

집합 A의 원소 중에서 집합 Y의 원소를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

집합 Y의 부분집합의 개수는 $2^2=4$이므로 집합 X를 택하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

따라서 순서쌍 (X, Y)의 개수는

$3\times 4=12$

(iv) $Y=A$일 때

집합 Y의 부분집합의 개수는 $2^3=8$이므로 집합 X를 택하는 경우의 수는

${}_8C_1=8$

따라서 순서쌍 (X, Y)의 개수는 8이다.

이상에서 순서쌍 (X, Y)의 개수는

$1+6+12+8=27$ 답 ②

유형 084 특별한 조건이 있는 부분집합의 개수 본책 88쪽

(1) 특정한 원소 k개 중에서 적어도 한 개를 원소로 갖는 부분집합의 개수

➜ (모든 부분집합의 개수) − (특정한 원소 k개를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수)

(2) a 또는 b를 원소로 갖는 부분집합의 개수

➜ (모든 부분집합의 개수) − (a, b를 모두 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수)

(3) 원소의 개수가 m인 집합의 부분집합 중에서 원소의 개수가 k인 집합의 개수 ➜ ${}_mC_k$

0441 $A=\{5, 8, 11, 14, 17, 20, 23\}$

집합 A의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 홀수를 원소로 갖는 집합의 개수는 모든 부분집합의 개수에서 홀수 5, 11, 17, 23을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같으므로

$2^7-2^{7-4}=2^7-2^3=120$ 답 ③

0442 $x^2-2x-8<0$에서

$(x+2)(x-4)<0$

$\therefore -2<x<4$

$\therefore A=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

집합 A의 부분집합 중에서 1 또는 2를 원소로 갖는 집합의 개수는 모든 부분집합의 개수에서 1과 2를 모두 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같으므로

$2^5-2^{5-2}=2^5-2^3=24$ 답 24

다른 풀이 집합 A의 부분집합 중에서

1을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는 $2^{5-1}=2^4=16$

2를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는 $2^{5-1}=2^4=16$

1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는 $2^{5-2}=2^3=8$

따라서 구하는 집합의 개수는

$16+16-8=24$

0443 주어진 집합의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수는 원소 1, 2, 3, 4, 5 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

이때 택한 두 집합이 서로 같지 않은 경우의 수는 10개의 부분집합 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_{10}\mathrm{C}_2=\frac{10\times9}{2\times1}=45$$ 답 45

0444 홀수인 원소 1, 3, 5, 7, 9 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$ … ❶

짝수인 원소 2, 4, 6, 8 중에서 3개 또는 4개를 택하는 경우의 수는

$${}_4\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_4={}_4\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_4=4+1=5$$ … ❷

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$10\times5=50$ … ❸

답 50

단계	채점 요소	비율
❶	홀수인 원소 3개를 택하는 경우의 수 구하기	40 %
❷	짝수인 원소를 3개 이상 택하는 경우의 수 구하기	40 %
❸	부분집합의 개수 구하기	20 %

0445 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$

조건 (나)에 의하여 집합 X는 적어도 한 개의 소수를 원소로 갖는다.

따라서 집합 X의 개수는 집합 A의 모든 부분집합의 개수에서 소수 2, 3, 5, 7을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같으므로

$2^{10}-2^{10-4}=2^{10}-2^6=960$ 답 960

유형 085 조건을 만족시키는 집합 → 본책 88쪽

집합 A가 '$a\in A$이면 $b\in A$'임을 만족시킨다.

➜ a가 집합 A의 원소이면 b도 반드시 집합 A의 원소이다.

0446 조건 (가), (나)에 의하여 집합 X의 원소는 32의 양의 약수이다.

32의 양의 약수는 1, 2, 4, 8, 16, 32이고 조건 (나)에 의하여 1과 32, 2와 16, 4와 8은 둘 중 하나가 집합 X의 원소이면 나머지 하나도 반드시 집합 X의 원소이어야 한다.

따라서 $X\neq\varnothing$인 집합 X의 개수는 집합 $\{1, 2, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로

$2^3-1=7$ 답 ①

참고 조건을 만족시키는 집합 X는

$\{1, 32\}$, $\{2, 16\}$, $\{4, 8\}$, $\{1, 2, 16, 32\}$, $\{1, 4, 8, 32\}$, $\{2, 4, 8, 16\}$, $\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$

0447 조건 (가), (나)에 의하여 $15\in B$, $13\in A$이므로

$13\in B$

$13\in B$, $11\in A$이므로 $11\in B$

$11\in B$, $9\in A$이므로 $9\in B$

⋮

$3\in B$, $1\in A$이므로 $1\in B$

$\therefore \{1, 3, 5, \cdots, 15\}\subset B$

따라서 집합 B의 원소의 개수의 최솟값은 8이다. 답 8

0448 조건 (가), (나)에 의하여 a, $10-a$가 모두 자연수이므로

$a\geq1$, $10-a\geq1$ $\therefore 1\leq a\leq9$

따라서 집합 A의 원소가 될 수 있는 것은

1, 2, 3, …, 9

조건 (나)에 의하여 1과 9, 2와 8, 3과 7, 4와 6은 둘 중 하나가 집합 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 집합 A의 원소이어야 하고, 5도 집합 A의 원소가 될 수 있다.

따라서 공집합이 아닌 집합 A의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로

$2^5-1=31$ 답 ④

0449 조건 (가)에서 $4\in A$이고 $5\times4=20\leq999$이므로 조건 (나)에 의하여 $20\in A$

$5\times20=100\leq999$이므로 $100\in A$

$5\times100=500\leq999$이므로 $500\in A$

$5\times500=2500>999$이므로

$\{4, 20, 100, 500\}\subset A$ …… ㉠ … ❶

또 조건 (가)에서 $9\in A$이고 $5\times9=45\leq999$이므로 조건 (나)에 의하여 $45\in A$

$5\times45=225\leq999$이므로 $225\in A$

$5\times225=1125>999$이므로

$\{9, 45, 225\}\subset A$ …… ㉡ … ❷

㉠, ㉡에서 $\{4, 9, 20, 45, 100, 225, 500\}\subset A$

따라서 $n(A)$의 최솟값은 7이다. … ❸

답 7

단계	채점 요소	비율
❶	$4\in A$일 때, 집합 A에 반드시 속하는 원소 구하기	40 %
❷	$9\in A$일 때, 집합 A에 반드시 속하는 원소 구하기	40 %
❸	$n(A)$의 최솟값 구하기	20 %

0450 $n(A)=1$이려면 $x=\frac{x^2+a}{4}$

이를 만족시키는 집합 A가 하나 존재하려면 이 이차방정식이 중근을 가져야 한다.

$x=\frac{x^2+a}{4}$에서 $x^2-4x+a=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-a=0$ $\therefore a=4$ 답 ④

유형 086 부분집합의 원소의 합과 곱 본책 89쪽

집합 A의 모든 부분집합의 모든 원소의 합(또는 곱)은 집합 A의 각 원소를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수를 이용하여 구한다.

0451 $1 \notin X$, $2 \in X$인 집합 X의 개수는

$2^{5-1-1}=2^3=8$

8개의 집합 중에서 3을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는 $1 \notin X$, $2 \in X$, $3 \in X$인 집합 X의 개수와 같으므로

$2^{5-1-2}=2^2=4$

마찬가지로 4, 5를 각각 반드시 원소로 갖는 집합의 개수도 4이므로 구하는 $S(X)$의 값의 합은

$2\times 8+(3+4+5)\times 4=64$ 답 ⑤

참고 $1 \notin X$, $2 \in X$인 집합 X는

$\{2\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$

이때 2는 8번 나오고 3, 4, 5는 각각 4번씩 나오는 것을 알 수 있다.

0452 집합 B_k 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는 2, 3, 4, 5, 6 중에서 하나를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_1=5$

마찬가지로 2, 3, 4, 5, 6을 각각 반드시 원소로 갖는 집합의 개수도 5이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15}=(1+2+3+4+5+6)\times 5=105$

답 105

0453 (i) 가장 작은 원소가 1일 때

가장 작은 원소가 1인 부분집합의 개수는 집합 A의 부분집합 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{5-1}=2^4=16$

(ii) 가장 작은 원소가 2일 때

가장 작은 원소가 2인 부분집합의 개수는 집합 A의 부분집합 중에서 2는 반드시 원소로 갖고, 1은 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같으므로

$2^{5-1-1}=2^3=8$

(iii) 가장 작은 원소가 4일 때

가장 작은 원소가 4인 부분집합의 개수는 집합 A의 부분집합 중에서 4는 반드시 원소로 갖고, 1, 2는 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같으므로

$2^{5-1-2}=2^2=4$

(iv) 가장 작은 원소가 8일 때

가장 작은 원소가 8인 부분집합의 개수는 집합 A의 부분집합 중에서 8은 반드시 원소로 갖고, 1, 2, 4는 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같으므로

$2^{5-1-3}=2$

(v) 가장 작은 원소가 16일 때

가장 작은 원소가 16인 부분집합은 $\{16\}$의 1개이다.

이상에서 가장 작은 원소의 곱은

$1^{16}\times 2^8\times 4^4\times 8^2\times 16^1=2^{8+8+6+4}$

$=2^{26}$

$\therefore m=26$ 답 ⑤

1등급 유형 도전하기 본책 90~91쪽

0454 Step 1 $n(B(99))$를 구한다.

$B(99)=\{b \mid 1\le b\le 100,\ 99\in A(b)\}$에서 $99\in A(b)$이면 99는 100 이하의 b의 양의 배수이므로 b는 99의 양의 약수이다.

이때 $99=3^2\times 11$이므로

$n(B(99))=(2+1)\times(1+1)=$ (가) 6

Step 2 $n(A(k))=n(B(99))$인 모든 자연수 k의 값의 합을 구한다.

$n(A(k))=n(B(99))=$ (가) 6 에서 100 이하의 k의 양의 배수의 개수가 6이므로

(나) $6k\le 100$, (다) $7k>100$

$\therefore \frac{100}{7}<k\le\frac{50}{3}$

따라서 자연수 k는 15, 16이므로 모든 자연수 k의 값의 합은

$15+16=$ (라) 31

Step 3 $f(i)+g(j)$의 값을 구한다.

$i=6$, $j=31$, $f(k)=6k$, $g(k)=7k$이므로

$f(6)+g(31)=36+217=253$ 답 253

논리 Check

50 이하의 자연수 k에 대하여

$A(k)=\{a \mid 1\le a\le 50,\ a$는 k의 배수$\}$,

$B(k)=\{b \mid 1\le b\le 50,\ k\in A(b)\}$

일 때, $n(A(k))=n(B(49))$인 자연수 k의 개수를 구하시오.

풀이 $B(49)=\{b \mid 1\le b\le 50,\ 49\in A(b)\}$에서 $49\in A(b)$이면 49는 50 이하의 b의 양의 배수이므로 b는 49의 양의 약수이다.

이때 $49=7^2$이므로

$n(B(49))=2+1=3$

$n(A(k))=n(B(49))=3$에서 50 이하의 k의 양의 배수의 개수가 3이므로

$3k\le 50$, $4k>50$ $\therefore \frac{25}{2}<k\le\frac{50}{3}$

따라서 자연수 k는 13, 14, 15, 16의 4개이다. 답 4

만점 공략 노트

양의 약수의 개수

자연수 N이 $N=a^m\times b^n$ (a, b는 서로 다른 소수, m, n은 자연수)으로 소인수분해 될 때, N의 양의 약수의 개수는

$(m+1)(n+1)$

0455 Step 1 집합 A_n의 모든 원소의 합을 구한다.

$A_n=\{n, n+1, n+2, \cdots, n+6\}$이므로 집합 A_n의 모든 원소의 합은

$n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+6)$

$=7n+21$ …… ㉠

Step 2 집합 A_n의 모든 원소의 합이 21의 배수가 되기 위한 조건을 찾는다.

집합 A_n의 모든 원소의 합이 21의 배수이려면

$7n+21=21k$ (k는 자연수)

$\therefore n=3k-3$ …… ㉡

Step 3 집합 X_{30}의 모든 원소의 합을 구한다.

$n=3k-3\geq 1$에서 $k\geq\frac{4}{3}$이므로

$k=2, 3, 4, \cdots$

집합 X_{30}은 $k=31$일 때이므로 ㉡에서

$n=3\times 31-3=90$

따라서 집합 X_{30}, 즉 A_{90}의 모든 원소의 합은 ㉠에서

$7\times 90+21=651$ 답 651

0456 Step 1 집합 C의 등식을 정리한다.

$\{f(x)+g(x)\}^3=\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$에서

$\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3+3f(x)g(x)\{f(x)+g(x)\}$

$=\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$

$f(x)g(x)\{f(x)+g(x)\}=0$

$\therefore f(x)=0$ 또는 $g(x)=0$ 또는 $f(x)+g(x)=0$

Step 2 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계를 이용하여 $n(C)$의 최솟값을 구한다.

$f(x)=0$ 또는 $g(x)=0$에서 $A\subset C$, $B\subset C$이므로 $A\subset B$이고 $f(x)+g(x)=0$의 해의 집합이 A일 때, $n(C)$가 최소이다.

따라서 구하는 최솟값은

$n(C)=n(B)=3$ 답 3

0457 Step 1 $a=b=c=0$일 때, 조건을 만족시키는지 확인한다.

ㄱ. $0+0+0=0$이므로 $0\in A$이면 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore 0\notin A$ (거짓)

Step 2 $-2m\in A$, $a\in A$, $2m-a\in A$일 때, 조건을 만족시키는지 확인한다.

ㄴ. $-2m+a+(2m-a)=0$이므로 $-2m\in A$이면 $a\notin A$ 또는 $2m-a\notin A$이다. (참)

Step 3 $-2m\in A$, $2m\in A$일 때, 집합 A의 원소가 될 수 없는 것의 개수를 구한다.

ㄷ. ㄴ에서 $-2m\in A$이면 $a\notin A$ 또는 $2m-a\notin A$이므로

$a=1, 2, 3, \cdots, m$일 때 a와 $2m-a$ 중 하나가 집합 A의 원소이면 다른 하나는 집합 A의 원소가 아니다.

즉 m개는 집합 A의 원소가 될 수 없다.

또 $2m+(-a)+(-2m+a)=0$에서 $2m\in A$이면 $-a\notin A$ 또는 $-2m+a\notin A$이므로 $a=1, 2, 3, \cdots, m$일 때 $-a$와 $-2m+a$ 중 하나가 집합 A의 원소이면 다른 하나는 집합 A의 원소가 아니다.

즉 m개는 집합 A의 원소가 될 수 없다.

ㄱ에서 $0\notin A$이고 $n(U)=4m+1$이므로

$n(A)\leq 4m+1-2m-1=2m$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

참고 ㄷ. $-2m+m+m=0$이므로 $-2m\in A$이면 $m\notin A$이다.

이것은 $a\notin A$ 또는 $2m-a\notin A$에서 $a=m$인 경우이다.

따라서 $-2m\in A$이면 m개는 집합 A의 원소가 될 수 없다.

0458 Step 1 m을 소인수분해 한 꼴을 구한다.

m의 양의 약수의 개수가 8이므로 m은

p^7 또는 $p\times q^3$ 또는 $p\times q\times r$ (p, q, r는 서로 다른 소수)

의 꼴로 소인수분해 된다.

Step 2 m을 소인수분해 한 꼴에 따라 경우를 나누어 집합 X의 개수를 구한다.

(i) $m=p^7$의 꼴인 경우

$m=p\times p^2\times p^4$이고 $2^4=16$, $3^4>16$이므로

$p=2$

따라서 집합 X는 $\{2, 2^2, 2^4\}$, 즉 $\{2, 4, 16\}$의 1개이다.

(ii) $m=p\times q^3$의 꼴인 경우

$m=p\times q\times q^2$이므로

$q=2$일 때, p는 3, 5, 7, 11, 13의 5개이다.

$q=3$일 때, p는 2, 5, 7, 11, 13의 5개이다.

따라서 집합 X의 개수는

$5+5=10$

(iii) $m=p\times q\times r$의 꼴인 경우

집합 X의 개수는 16 이하의 소수 2, 3, 5, 7, 11, 13의 6개 중 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_6C_3=\frac{6\times 5\times 4}{3\times 2\times 1}=20$$

Step 3 집합 X의 개수를 구한다.

이상에서 집합 X의 개수는

$1+10+20=31$ 답 31

0459 Step 1 $\left[\frac{x_1}{2}\right]=\left[\frac{x_2}{3}\right]=\left[\frac{x_3}{4}\right]$의 값이 될 수 있는 수를 구한다.

$x_3\leq 20$에서 $\frac{x_3}{4}\leq 5$이므로 $\left[\frac{x_3}{4}\right]\leq 5$

$\therefore \left[\frac{x_1}{2}\right]=\left[\frac{x_2}{3}\right]=\left[\frac{x_3}{4}\right]=0, 1, 2, 3, 4, 5$

Step 2 경우를 나누어 순서쌍의 개수를 구한다.

(i) $\left[\frac{x_1}{2}\right]=\left[\frac{x_2}{3}\right]=\left[\frac{x_3}{4}\right]=5$일 때

$5\leq\frac{x_1}{2}<6$, $5\leq\frac{x_2}{3}<6$, $5\leq\frac{x_3}{4}<6$이므로

$10\leq x_1<12$, $15\leq x_2<18$, $20\leq x_3<24$

$\therefore x_1=10, 11$, $x_2=15, 16, 17$, $x_3=20$

따라서 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는

$2\times 3\times 1=6$

(ii) $\left[\frac{x_1}{2}\right]=\left[\frac{x_2}{3}\right]=\left[\frac{x_3}{4}\right]=4$일 때

$4\leq\frac{x_1}{2}<5$, $4\leq\frac{x_2}{3}<5$, $4\leq\frac{x_3}{4}<5$이므로

$8 \le x_1 < 10,\ 12 \le x_2 < 15,\ 16 \le x_3 < 20$

$\therefore\ x_1=8,\ 9,\ x_2=12,\ 13,\ 14,\ x_3=16,\ 17,\ 18,\ 19$

따라서 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수는

$2\times3\times4=24$

(iii) $\left[\frac{x_1}{2}\right]=\left[\frac{x_2}{3}\right]=\left[\frac{x_3}{4}\right]=3$일 때

$3 \le \frac{x_1}{2} < 4,\ 3 \le \frac{x_2}{3} < 4,\ 3 \le \frac{x_3}{4} < 4$이므로

$6 \le x_1 < 8,\ 9 \le x_2 < 12,\ 12 \le x_3 < 16$

$\therefore\ x_1=6,\ 7,\ x_2=9,\ 10,\ 11,\ x_3=12,\ 13,\ 14,\ 15$

따라서 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수는

$2\times3\times4=24$

(iv) $\left[\frac{x_1}{2}\right]=\left[\frac{x_2}{3}\right]=\left[\frac{x_3}{4}\right]=2$일 때

$2 \le \frac{x_1}{2} < 3,\ 2 \le \frac{x_2}{3} < 3,\ 2 \le \frac{x_3}{4} < 3$이므로

$4 \le x_1 < 6,\ 6 \le x_2 < 9,\ 8 \le x_3 < 12$

$\therefore\ x_1=4,\ 5,\ x_2=6,\ 7,\ 8,\ x_3=8,\ 9,\ 10,\ 11$

이때 $x_2=x_3=8$인 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수는

$2\times1\times1=2$

이므로 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수는

$2\times3\times4-2=22$

(v) $\left[\frac{x_1}{2}\right]=\left[\frac{x_2}{3}\right]=\left[\frac{x_3}{4}\right]=1$일 때

$1 \le \frac{x_1}{2} < 2,\ 1 \le \frac{x_2}{3} < 2,\ 1 \le \frac{x_3}{4} < 2$이므로

$2 \le x_1 < 4,\ 3 \le x_2 < 6,\ 4 \le x_3 < 8$

$\therefore\ x_1=2,\ 3,\ x_2=3,\ 4,\ 5,\ x_3=4,\ 5,\ 6,\ 7$

이때 $x_1=x_2=3$인 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수는

$1\times1\times4=4$

$x_2=x_3=4$ 또는 $x_2=x_3=5$인 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수는

$2\times2\times1=4$

$x_2>x_3$, 즉 $x_2=5,\ x_3=4$인 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수는

$2\times1\times1=2$

따라서 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수는

$2\times3\times4-4-4-2=14$

(vi) $\left[\frac{x_1}{2}\right]=\left[\frac{x_2}{3}\right]=\left[\frac{x_3}{4}\right]=0$일 때

$0 \le \frac{x_1}{2} < 1,\ 0 \le \frac{x_2}{3} < 1,\ 0 \le \frac{x_3}{4} < 1$이므로

$0 \le x_1 < 2,\ 0 \le x_2 < 3,\ 0 \le x_3 < 4$

$\therefore\ x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$

따라서 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수는 1이다.

Step 3 모든 순서쌍의 개수를 구한다.

이상에서 구하는 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수는

$6+24+24+22+14+1=91$ 답 91

0460 Step 1 집합 A의 원소 중에서 집합 X의 원소가 될 수 있는 것을 구한다.

$A=\{1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 18,\ 20\}$

조건 (가)에서 $n(X)=4$이고 조건 (나)에서 집합 X의 모든 원소의 합이 60이므로 집합 X에는 $60\times\frac{1}{4}=15$ 이상인 원소가 2개 또는 3개 속한다.

이때 집합 A의 원소 중에서 15 이상인 원소는

15, 16, 18, 20

Step 2 집합 X에 15 이상인 원소가 2개 속할 때, $a_1+a_2-a_3+a_4$의 값을 구한다.

(i) 집합 X에 15 이상인 원소가 2개 속할 때

집합 A의 원소 중에서 15보다 작은 두 원소의 합의 최댓값은 $12+14=26$이므로 15 이상인 두 원소의 합은 $60-26=34$ 이상이다.

ⓐ $15\in X,\ 20\in X$일 때

$60-(15+20)=25$이고 집합 A의 원소 중에서 15보다 작고 합이 25인 두 원소는 존재하지 않는다.

ⓑ $16\in X,\ 18\in X$일 때

$60-(16+18)=26$이고 집합 A의 원소 중에서 15보다 작고 합이 26인 두 원소는 12, 14이므로

$X=\{12,\ 14,\ 16,\ 18\}$

$\therefore\ a_1+a_2-a_3+a_4=18+16-14+12=32$

ⓒ $16\in X,\ 20\in X$일 때

$60-(16+20)=24$이고 집합 A의 원소 중에서 15보다 작고 합이 24인 두 원소는 10, 14이므로

$X=\{10,\ 14,\ 16,\ 20\}$

$\therefore\ a_1+a_2-a_3+a_4=20+16-14+10=32$

ⓓ $18\in X,\ 20\in X$일 때

$60-(18+20)=22$이고 집합 A의 원소 중에서 15보다 작고 합이 22인 두 원소는 8, 14 또는 10, 12이므로

$X=\{8,\ 14,\ 18,\ 20\}$ 또는 $X=\{10,\ 12,\ 18,\ 20\}$

$X=\{8,\ 14,\ 18,\ 20\}$일 때

$a_1+a_2-a_3+a_4=20+18-14+8=32$

$X=\{10,\ 12,\ 18,\ 20\}$일 때

$a_1+a_2-a_3+a_4=20+18-12+10=36$

Step 3 집합 X에 15 이상인 원소가 3개 속할 때, $a_1+a_2-a_3+a_4$의 값을 구한다.

(ii) 집합 X에 15 이상인 원소가 3개 속할 때

ⓐ $15\in X,\ 16\in X,\ 18\in X$일 때

$60-(15+16+18)=11$이고 $11\notin A$이므로 집합 X는 존재하지 않는다.

ⓑ $15\in X,\ 16\in X,\ 20\in X$일 때

$60-(15+16+20)=9$이고 $9\in A$이므로

$X=\{9,\ 15,\ 16,\ 20\}$

$\therefore\ a_1+a_2-a_3+a_4=20+16-15+9=30$

ⓒ $15\in X,\ 18\in X,\ 20\in X$일 때

$60-(15+18+20)=7$이고 $7\notin A$이므로 집합 X는 존재하지 않는다.

ⓓ $16\in X,\ 18\in X,\ 20\in X$일 때

$60-(16+18+20)=6$이고 $6\in A$이므로

$X=\{6,\ 16,\ 18,\ 20\}$

$\therefore\ a_1+a_2-a_3+a_4=20+18-16+6=28$

Step 4 $a_1+a_2-a_3+a_4$의 최댓값과 최솟값의 차를 구한다.

(i), (ii)에서 $a_1+a_2-a_3+a_4$의 최댓값은 36, 최솟값은 28이므로 구하는 차는

$36-28=8$ 답 8

0461 Step 1 집합 U의 원소 중에서 (a, a)의 꼴과 (a, b) $(a<b)$의 꼴의 개수를 구한다.

$n(U)=4\times4=16$이고 집합 U의 원소 중에서

(a, a)의 꼴의 개수는 1, 2, 3, 4 중에서 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_1=4$

(a, b) $(a<b)$의 꼴의 개수는 1, 2, 3, 4 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

Step 2 집합 X의 원소 중에서 (a, b) $(a<b)$의 꼴의 개수에 따라 경우를 나누어 집합 X의 개수를 구한다.

집합 X의 원소 중에서 (a, b) $(a<b)$의 꼴의 개수를 k라 하자.

(i) $k=0$인 경우

집합 X는 $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$의 1개이다.

(ii) $k=1$인 경우

$k=0$인 집합 X에 (a, b), (b, a)를 원소로 추가하면 된다.

따라서 집합 X의 개수는 1, 2, 3, 4 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

(iii) $k=2$인 경우

서로 다른 네 수 a, b, c, d $(a<b, c<d)$에 대하여 $k=0$인 집합 X에 (a, b), (b, a), (c, d), (d, c)를 원소로 추가하면 된다.

따라서 집합 X의 개수는 1, 2, 3, 4를 2개, 2개의 두 묶음으로 나누는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2}=\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2}=3$

(iv) $k=3$인 경우

$(a, b)\in X$, $(b, c)\in X$이면 조건 (다)에 의하여 $(a, c)\in X$이므로 $k=0$인 집합 X에 (a, b), (b, c), (a, c), (b, a), (c, b), (c, a)를 원소로 추가하면 된다.

따라서 집합 X의 개수는 1, 2, 3, 4 중에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_3={}_4C_1=4$

(v) $k\geq4$인 경우

6개의 (a, b) $(a<b)$ 중에서 4개를 택하면 a 또는 b 중에서 같은 것이 존재하므로 조건 (나), (다)에 의하여 $k=6$이다.

즉 $X=U$이므로 집합 X의 개수는 1이다.

Step 3 집합 X의 개수를 구한다.

이상에서 구하는 집합 X의 개수는

$1+6+3+4+1=15$ 답 15

만점 공략 노트

분할의 수

서로 다른 n개의 물건을 p개, q개, r개 $(p+q+r=n)$의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

(1) p, q, r가 모두 다른 수인 경우 ➜ ${}_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_rC_r$

(2) p, q, r 중 어느 두 수가 같은 경우 ➜ ${}_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_rC_r\times\frac{1}{2!}$

(3) p, q, r가 모두 같은 수인 경우 ➜ ${}_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_rC_r\times\frac{1}{3!}$

시험 만점 완성하기

본책 92~95쪽

0462 전략 집합 A를 원소나열법으로 나타낸 후 집합 C를 구한다.

$A=\{i, -1, -i, 1\}$이므로 $a\in A$, $b\in B$일 때, ab의 값을 구하면 오른쪽 표와 같다.

b \ a	i	-1	$-i$	1
i	-1	$-i$	1	i
0	0	0	0	0
$-i$	1	i	-1	$-i$

따라서 $C=\{-1, 0, 1, -i, i\}$이므로 구하는 합은

$-1+0+1+(-i)+i=0$ 답 ③

0463 전략 행렬의 연산을 이용하여 주어진 행렬이 집합 A에 속하는지 판단한다.

$X=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (x, y는 실수)이라 하자.

ㄱ. $X^2=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in A$ (참)

ㄴ. $X+Y=\begin{pmatrix}2 & x+y\\ 0 & 2\end{pmatrix}\notin A$ (거짓)

ㄷ. $X-2E=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & x\\ 0 & -1\end{pmatrix}$이므로

$(X-2E)^2=\begin{pmatrix}-1 & x\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & x\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1 & -2x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in A$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0464 전략 이차방정식의 서로 다른 실근의 개수에 따른 m의 값의 범위를 구한다.

$n(A_m)$은 이차방정식 $x^2-6x+m=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같으므로

$n(A_m)=2$ 또는 $n(A_m)=1$ 또는 $n(A_m)=0$

이차방정식 $x^2-6x+m=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-m=9-m$

(i) $n(A_m)=2$일 때

$\frac{D}{4}>0$이므로 $\quad 9-m>0 \quad \therefore\ m<9$

(ii) $n(A_m)=1$일 때

$\frac{D}{4}=0$이므로 $\quad 9-m=0 \quad \therefore\ m=9$

(iii) $n(A_m)=0$일 때

$\frac{D}{4}<0$이므로 $\quad 9-m<0 \quad \therefore\ m>9$

이상에서

$$n(A_m)=\begin{cases}2 & (m<9)\\ 1 & (m=9)\\ 0 & (m>9)\end{cases}$$

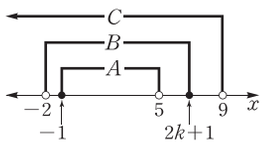
이므로

$n(A_1)+n(A_2)+n(A_3)+\cdots+n(A_{15})$

$=2\times8+1+0\times6=17$ 답 ①

0465 전략 주어진 포함 관계를 만족시키도록 세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내어 본다.

$A\subset B\subset C$가 성립하도록 세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$5\le 2k+1<9, \quad 4\le 2k<8$

$\therefore\ 2\le k<4$

따라서 정수 k는 2, 3이므로 구하는 합은

$2+3=5$ 답 ②

0466 전략 주어진 조건으로부터 집합 사이의 포함 관계를 파악하고 집합 X의 원소의 특징을 찾는다.

조건 (가)에 의하여 집합 X의 모든 원소는 집합 A에 속하므로

$X\subset A$

즉 집합 X의 원소는 50 이하의 자연수이다.

조건 (나)에 의하여 집합 B의 모든 원소는 집합 X에 속하지 않으므로 집합 X의 원소는 6과 서로소가 아니다. 즉 $6=2\times3$에서 집합 X의 원소는 2의 배수 또는 3의 배수이다.

50 이하의 2의 배수의 개수는 25, 3의 배수의 개수는 16, 6의 배수의 개수는 8이므로 $n(X)$의 최댓값은

$25+16-8=33$ 답 ④

0467 전략 $A=B$이면 $A\subset B$, $B\subset A$임을 이용하여 두 집합 A, B에 속하는 원소를 찾는다.

$A=B$이므로 $\quad x^2=4,\ y^2+4y=-3$

$x^2=4$에서 $\quad x=\pm2$

$y^2+4y=-3$에서 $\quad y^2+4y+3=0$

$(y+1)(y+3)=0 \quad \therefore\ y=-3$ 또는 $y=-1$

따라서 $x=2$, $y=-3$일 때 xy의 값이 최소이고 최솟값은 -6이다. 답 ①

0468 전략 주어진 집합에 속하는 원소와 부분집합을 구분한다.

① 0은 집합 A의 원소가 아니므로 $\quad 0\notin A$

③ $\varnothing\in A$이므로 $\quad \{\varnothing\}\subset A$

④ $1\notin A$이므로 $\quad \{1,\ 2\}\not\subset A$

⑤ $n(A)=3$이므로 집합 A의 진부분집합의 개수는

$2^3-1=7$

따라서 옳은 것은 ②, ⑤이다. 답 ②, ⑤

0469 전략 집합 X가 반드시 원소로 갖는 것과 갖지 않는 것을 파악하여 원소의 개수에 따른 집합 A의 부분집합의 개수를 구한다.

가장 큰 원소가 8인 집합 X의 개수는 집합 A의 부분집합 중에서 8은 반드시 원소로 갖고, 9, 10은 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같으므로

$2^{10-1-2}=2^7=128$

가장 큰 원소가 8인 집합 X 중에서

원소의 개수가 1인 집합 X는 $\{8\}$의 1개,

원소의 개수가 2인 집합 X는 $\{1,\ 8\}$, $\{2,\ 8\}$, $\{3,\ 8\}$, …, $\{7,\ 8\}$의 7개이다.

따라서 원소의 개수가 3 이상인 집합 X의 개수는

$128-1-7=120$ 답 ①

0470 전략 먼저 72를 소인수분해 하여 집합 A의 원소의 개수를 구한다.

$72=2^3\times3^2$이므로 72의 양의 약수의 개수는

$(3+1)\times(2+1)=12 \quad \therefore\ n(A)=12$

조건 (가), (나)에 의하여 집합 X의 개수는 1, 12, 36, 72를 반드시 원소로 갖는 집합 A의 진부분집합의 개수와 같으므로

$2^{12-4}-1=2^8-1=255$ 답 ④

0471 전략 '적어도 ~인' 부분집합의 개수는 모든 부분집합의 개수에서 '모두 ~가 아닌' 부분집합의 개수를 뺀 것과 같음을 이용한다.

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$, $B=\{1,\ 3,\ 7,\ 9\}$

집합 A의 부분집합 중에서 집합 B의 원소를 적어도 하나 포함하는 집합의 개수는 집합 A의 부분집합의 개수에서 1, 3, 7, 9를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같으므로

$2^6-2^{6-4}=2^6-2^2=60$ 답 ⑤

0472 전략 반드시 집합 B의 원소인 것을 찾는다.

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

조건 (가)에서 $2\in B$이므로 조건 (나)에 의하여

$\frac{12}{2}=6\in B$

따라서 집합 B는 2, 6을 반드시 원소로 갖는다.

조건 (나)에 의하여 1과 12, 3과 4는 둘 중 하나가 집합 B의 원소이면 나머지 하나도 반드시 집합 B의 원소이다.

따라서 집합 B의 개수는 집합 $\{1,\ 2,\ 3\}$의 부분집합 중에서 2를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{3-1}=2^2=4$ 답 ③

0473 전략 두 번째로 작은 원소가 될 수 있는 수를 기준으로 경우를 나누어 집합 X의 개수를 구한다.

(i) 두 번째로 작은 원소가 $\frac{1}{2^3}$일 때

집합 X는 집합 $\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2}\right\}$의 부분집합에 $\frac{1}{2^3}$, $\frac{1}{2^4}$을 원소로 추가하면 되므로 그 개수는

$2^3=8$

(ii) 두 번째로 작은 원소가 $\frac{1}{2^2}$일 때

집합 X는 집합 $\left\{1, \frac{1}{2}\right\}$의 부분집합에 $\frac{1}{2^2}$을 원소로 추가하고 $\frac{1}{2^3}$, $\frac{1}{2^4}$ 중 하나를 택하여 원소로 추가하면 되므로 그 개수는

$2^2 \times {}_2C_1 = 4 \times 2 = 8$

(iii) 두 번째로 작은 원소가 $\frac{1}{2}$일 때

집합 X는 집합 $\{1\}$의 부분집합에 $\frac{1}{2}$을 원소로 추가하고 $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}$, $\frac{1}{2^4}$ 중 하나를 택하여 원소로 추가하면 되므로 그 개수는

$2 \times {}_3C_1 = 2 \times 3 = 6$

(iv) 두 번째로 작은 원소가 1일 때

집합 X는 집합 $\{1\}$에 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}$, $\frac{1}{2^4}$ 중 하나를 택하여 원소로 추가하면 되므로 그 개수는

$1 \times {}_4C_1 = 1 \times 4 = 4$

이상에서 두 번째로 작은 원소를 모두 더한 값은

$\frac{1}{2^3} \times 8 + \frac{1}{2^2} \times 8 + \frac{1}{2} \times 6 + 1 \times 4 = 10$ 답 ②

0474 전략 집합 A가 공집합이 되려면 k보다 작은 7의 양의 배수가 존재하지 않아야 함을 이용한다.

7의 양의 배수는 7, 14, 21, …이므로 집합 A가 공집합이 되려면 $k \le 7$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, …, 7의 7개이다. 답 7

0475 전략 7로 나누었을 때의 나머지의 합이 7인 두 수의 합은 7의 배수임을 이용한다.

집합 A의 원소 중에서 7로 나누었을 때의 나머지가 k ($k=0, 1, 2, \cdots, 6$)인 수의 집합을 B_k라 하자.

집합 B_1과 집합 B_6, 집합 B_2와 집합 B_5, 집합 B_3과 집합 B_4 각각의 원소의 합은 7의 배수이다.

또 집합 B_0의 두 원소의 합은 7의 배수이다.

조건 (가)에서 $X \subset A$이므로

$n(B_1) = n(B_2) = n(B_3) = 11$,

$n(B_4) = n(B_5) = n(B_6) = n(B_0) = 10$

조건 (나)에 의하여 $n(X)$가 최대이려면 집합 X가 세 집합 B_1, B_2, B_3의 원소를 모두 원소로 갖고 집합 B_0의 원소를 한 개만 원소로 가져야 한다.

따라서 $n(X)$의 최댓값은

$11 \times 3 + 1 = 34$ 답 34

0476 전략 먼저 $n(A)$를 구한 후 주어진 등식을 이용하여 $n(B)$를 구한다.

$n(A) = a$라 하면 집합 A의 부분집합의 개수가 64이므로

$2^a = 64 = 2^6$ $\therefore a = 6$

$n(A) + n(B) = 10$에서

$6 + n(B) = 10$ $\therefore n(B) = 4$

따라서 집합 B의 진부분집합의 개수는

$2^4 - 1 = 15$ 답 15

0477 전략 모든 집합 X의 개수에서 $f(X)=0$ 또는 $f(X)=4$인 집합 X의 개수를 뺀다.

집합 A의 원소 중에서 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이므로

$1 \le f(X) \le 3$을 만족시키는 집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 $f(X)=0$ 또는 $f(X)=4$인 집합을 제외하면 된다.

집합 A의 부분집합의 개수는 $2^{10} = 1024$

$f(X)=0$인 집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 2, 3, 5, 7을 모두 원소로 갖지 않는 집합이므로 그 개수는 $2^{10-4} = 2^6 = 64$

$f(X)=4$인 집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 2, 3, 5, 7을 모두 반드시 원소로 갖는 집합이므로 그 개수는 $2^{10-4} = 2^6 = 64$

따라서 구하는 집합 X의 개수는

$1024 - 64 - 64 = 896$ 답 896

0478 전략 반드시 집합 X의 원소인 것을 구한다.

조건 (가)에 의하여 1과 7, 2와 6, 3과 5는 둘 중 하나가 집합 X의 원소이면 나머지 하나도 반드시 집합 X의 원소이다. 또 4는 집합 X의 원소일 수 있다.

따라서 집합 X는 집합 $\{1, 7\}$, $\{2, 6\}$, $\{3, 5\}$, $\{4\}$ 중에서 일부 또는 전부를 부분집합으로 갖는다.

세 집합 $\{1, 7\}$, $\{2, 6\}$, $\{3, 5\}$의 원소의 합이 모두 8이므로 조건 (나)에 의하여 집합 X는 세 집합 $\{1, 7\}$, $\{2, 6\}$, $\{3, 5\}$ 중 2개와 집합 $\{4\}$를 부분집합으로 갖는다.

따라서 구하는 합은 $8 + 8 + 4 = 20$ 답 20

참고 집합 X는

$\{1, 2, 4, 6, 7\}$ 또는 $\{1, 3, 4, 5, 7\}$ 또는 $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

0479 전략 집합 A의 각 원소를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수를 구한다.

집합 A의 부분집합 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$2^{5-1} = 2^4 = 16$

마찬가지로 2, 5, 10, a를 각각 반드시 원소로 갖는 집합의 개수도 16이므로 모든 부분집합 X의 모든 원소의 합을 모두 더한 값은 $(1+2+5+10+a) \times 16 = 400$

$a + 18 = 25$ $\therefore a = 7$ 답 7

0480 전략 집합 A의 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구하여 $n(A)$를 구한다.

이차방정식 $x^2 - 2x + 2 = 0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4} = (-1)^2 - 1 \times 2 = -1 < 0$

따라서 이차방정식 $x^2 - 2x + 2 = 0$은 실근을 갖지 않으므로

$n(A) = 0$ … ❶

즉 $n(B) = n(A) = 0$이므로 이차방정식 $x^2 + kx + 3k = 0$은 실근을 갖지 않는다.

이차방정식 $x^2 + kx + 3k = 0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2 = k^2 - 4 \times 1 \times 3k < 0$

$k^2 - 12k < 0$, $k(k-12) < 0$

$\therefore 0 < k < 12$ … ❷

따라서 $\alpha=0$, $\beta=12$이므로 $\beta-\alpha=12$ … ❸

답 12

단계	채점 요소	배점
❶	$n(A)$ 구하기	1점
❷	k의 값의 범위 구하기	2점
❸	$\beta-\alpha$의 값 구하기	1점

0481 전략 B가 공집합인 경우와 공집합이 아닌 경우로 나누어 k의 값의 범위를 구한다.

이차방정식 $x^2-2kx+k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-1\times(k+2)=k^2-k-2$$

(i) $B=\varnothing$일 때

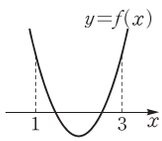
$D<0$이어야 하므로 $k^2-k-2<0$

$(k+1)(k-2)<0$ $\therefore -1<k<2$ … ❶

(ii) $B\neq\varnothing$일 때

이차방정식 $x^2-2kx+k+2=0$의 두 실근이 $1\le x\le 3$에 속해야 하므로

$f(x)=x^2-2kx+k+2$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 오른쪽 그림과 같아야 한다.



ⓐ $D\ge 0$이어야 하므로

$k^2-k-2\ge 0$, $(k+1)(k-2)\ge 0$

$\therefore k\le -1$ 또는 $k\ge 2$

ⓑ 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$이므로

$1\le k\le 3$

ⓒ $f(1)\ge 0$이어야 하므로

$1-2k+k+2\ge 0$ $\therefore k\le 3$ …… ㉠

$f(3)\ge 0$이어야 하므로

$9-6k+k+2\ge 0$ $\therefore k\le \frac{11}{5}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k\le\frac{11}{5}$

ⓐ, ⓑ, ⓒ에서 $2\le k\le\frac{11}{5}$ … ❷

(i), (ii)에서 $-1<k\le\frac{11}{5}$

따라서 정수 k는 0, 1, 2의 3개이다. … ❸

답 3

단계	채점 요소	배점
❶	$B=\varnothing$일 때, k의 값의 범위 구하기	1점
❷	$B\neq\varnothing$일 때, k의 값의 범위 구하기	3점
❸	정수 k의 개수 구하기	1점

만점 공략 노트

이차방정식의 실근의 위치

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$의 판별식을 D라 하고 $f(x)=ax^2+bx+c$라 할 때

(1) 두 근이 모두 p보다 크다. ➜ $D\ge 0$, $f(p)>0$, $-\frac{b}{2a}>p$

(2) 두 근이 모두 p보다 작다. ➜ $D\ge 0$, $f(p)>0$, $-\frac{b}{2a}<p$

(3) 두 근 사이에 p가 있다. ➜ $f(p)<0$

0482 전략 두 집합 A, B의 모든 원소의 합과 곱이 각각 같음을 이용한다.

$A=B$에서 두 집합 A, B의 모든 원소의 합과 곱이 각각 같으므로

$p+q+r=pq+qr+rp=11$ …… ㉠

$pqr=(pqr)^2$

$pqr=(pqr)^2$에서

$pqr(pqr-1)=0$

$\therefore pqr=0$ 또는 $pqr=1$

이때 $pqr=0$이면 $p=0$ 또는 $q=0$ 또는 $r=0$이므로 pq, qr, rp 중 둘 이상이 0이 된다.

즉 $A\neq B$이므로

$pqr=1$ …… ㉡ … ❶

㉠, ㉡에서 p, q, r를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-11x^2+11x-1=0$

$(x-1)(x^2-10x+1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=5\pm 2\sqrt{6}$

따라서 가장 큰 원소와 가장 작은 원소의 합은

$(5+2\sqrt{6})+(5-2\sqrt{6})=10$ … ❷

답 10

단계	채점 요소	배점
❶	p, q, r 사이의 관계식 구하기	3점
❷	가장 큰 원소와 가장 작은 원소의 합 구하기	2점

0483 전략 15가 집합 X에 속하는 경우와 속하지 않는 경우로 나누어 집합 X의 개수를 구한다.

조건 (나)에서 집합 X의 모든 원소의 곱이 15의 배수이므로

(i) $15\in X$일 때

집합 X는 집합 A의 부분집합 중 15를 반드시 원소로 갖는 집합에서 집합 $\{15\}$를 제외한 것과 같으므로

$2^{6-1}-1=2^5-1=31$ … ❶

(ii) $15\notin X$일 때

$15=3\times 5$이므로 3의 배수와 5의 배수의 곱은 15의 배수이다. 집합 X의 원소 중 3의 배수는 12, 5의 배수는 10이므로 집합 X의 모든 원소의 곱이 15의 배수이려면 $10\in X$, $12\in X$이어야 한다.

즉 집합 X의 개수는 집합 A의 부분집합 중에서 10, 12는 반드시 원소로 갖고, 15는 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같으므로

$2^{6-2-1}=2^3=8$ … ❷

(i), (ii)에서 집합 X의 개수는

$31+8=39$ … ❸

답 39

단계	채점 요소	배점
❶	$15\in X$일 때, 집합 X의 개수 구하기	2점
❷	$15\notin X$일 때, 집합 X의 개수 구하기	3점
❸	집합 X의 개수 구하기	1점

06 집합의 연산

셀프 CHECK

본책 96~97쪽

A 답 (1) $A\cup B=\{1, 2, 5, 8, 12\}$, $A\cap B=\{2, 8\}$
(2) $A\cup B=\{a, c, d, e, f, g\}$, $A\cap B=\{f\}$

B 답 (1) 서로소가 아니다. (2) 서로소이다.

C 답 (1) $\{2, 4, 5\}$ (2) $\{2, 4, 6\}$

D 답 (1) $\{5, 7\}$ (2) $\{1, 5\}$

E 답 $\{3\}$

F 답 (1) A (2) A (3) U (4) $\varnothing$ (5) A

G 답 (1) B (2) A (3) B^C (4) $\varnothing$

H 답 (1) $\{2\}$ (2) $\{1, 2, 4, 5\}$

I 답 (1) 27 (2) 12 (3) 8 (4) 3

내신유형 다지기

본책 98~109쪽

유형 087 합집합과 교집합

본책 98쪽

(1) $A\cup B=\{x|x\in A$ 또는 $x\in B\}$
➜ 두 집합 A, B의 모든 원소로 이루어진 집합
(2) $A\cap B=\{x|x\in A$ 그리고 $x\in B\}$
➜ 두 집합 A, B에 공통으로 속하는 모든 원소로 이루어진 집합

0484 $C=\{1, 3, 5, 15\}$
③ $(A\cap B)\cup C=\{2, 4\}\cup\{1, 3, 5, 15\}=\{1, 2, 3, 4, 5, 15\}$
④ $(A\cup B)\cap C=\{1, 2, 4, 6, 7, 8\}\cap\{1, 3, 5, 15\}=\{1\}$
⑤ $A\cap(B\cup C)=\{1, 2, 4, 8\}\cap\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 15\}$
$=\{1, 2, 4\}$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

0485 집합 A는 c, e를 반드시 원소로 갖고, b, d는 원소로 갖지 않아야 하므로 집합 A가 될 수 없는 것은 ③이다. 답 ③

0486 $A=\{1, 2, 4, 8, 16\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$이므로
$A\cap B=\{1, 2, 4, 8\}=\{x|x$는 8의 양의 약수$\}$
$\therefore k=8$ 답 8
참고 $A\cap B$는 16과 24의 양의 공약수의 집합이므로 16과 24의 최대공약수인 8의 양의 약수의 집합이다.

유형 088 서로소인 두 집합

본책 98쪽

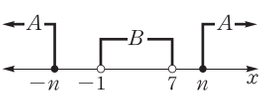
(1) 두 집합 A, B가 서로소이다.
➜ $A\cap B=\varnothing$
➜ 공통인 원소가 하나도 없다.
(2) 공집합($\varnothing$)은 모든 집합과 서로소이다.

0487 ㄱ. $A\cap B=\varnothing$
ㄴ. $B=\{0\}$이므로 $A\cap B=\{0\}$
ㄷ. $A\cap B=\varnothing$
ㄹ. 정사각형이면 직사각형이므로 $A\cap B=A$
이상에서 두 집합 A, B가 서로소인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

0488 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 12\}$, $B=\{3, 7, 11, 15, \cdots\}$이므로
$A\cap B=\{3, 7, 11\}$ … ❶
즉 집합 X는 집합 A의 부분집합 중 3, 7, 11을 원소로 갖지 않는 집합이다. … ❷
따라서 집합 X의 개수는
$2^{12-3}=2^9=512$ … ❸
답 512

단계	채점 요소	비율
❶	집합 $A\cap B$ 구하기	30 %
❷	집합 X의 조건 구하기	40 %
❸	집합 X의 개수 구하기	30 %

0489 $|x|\geq n$에서 $x\leq -n$ 또는 $x\geq n$
$\therefore A=\{x|x\leq -n$ 또는 $x\geq n\}$
$|x-3|<4$에서 $-4<x-3<4$ $\therefore -1<x<7$
$\therefore B=\{x|-1<x<7\}$
두 집합 A, B가 서로소가 되려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$-n\leq -1$, $7\leq n$
$\therefore n\geq 7$
따라서 자연수 n의 최솟값은 7이다. 답 ④

유형 089 여집합과 차집합

본책 99쪽

(1) $A^C=\{x|x\in U$ 그리고 $x\notin A\}$
➜ 전체집합 U의 원소 중에서 집합 A에 속하지 않는 모든 원소로 이루어진 집합
(2) $A-B=\{x|x\in A$ 그리고 $x\notin B\}$
➜ 집합 A에는 속하지만 집합 B에는 속하지 않는 모든 원소로 이루어진 집합

0490 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$, $A=\{1, 2, 4, 8\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$
④ $A-B=\{1, 4, 8\}$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

0491 $A^C=\{x|-1\le x<6\}=\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{-1, 0, 1\}$이므로

$A^C-B=\{2, 3, 4, 5\}$

따라서 집합 A^C-B의 모든 원소의 합은

$2+3+4+5=14$ 답 14

0492 $A=\{1, 3, 7, 9\}$, $B=\{4, 7, 10\}$이므로

$A\cup B=\{1, 3, 4, 7, 9, 10\}$, $A\cap B=\{7\}$

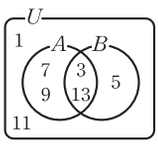
$\therefore (A\cup B)-(A\cap B)=\{1, 3, 4, 9, 10\}$

답 $\{1, 3, 4, 9, 10\}$

유형 090 벤다이어그램을 이용한 집합의 연산 본책 99쪽

주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타낸 후 구하는 집합을 찾는다.

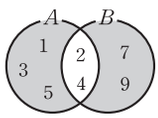
0493 $U=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$이므로 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore A=\{3, 7, 9, 13\}$

답 $\{3, 7, 9, 13\}$

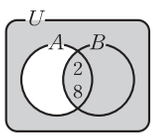
0494 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로 $(A\cup B)-(A\cap B)$는 오른쪽 벤다이어그램의 색칠한 부분과 같다.



따라서 $A\cap B=\{2, 4\}$이므로

$B=\{2, 4, 7, 9\}$ 답 $\{2, 4, 7, 9\}$

0495 조건 (가)에서 $A\cap B=\{2, 8\}$이고 조건 (나)의 집합 $A^C\cup B=\{1, 2, 8, 16\}$은 오른쪽 벤다이어그램의 색칠한 부분과 같다.



따라서 벤다이어그램의 색칠한 부분을 제외한 부분인 집합 $A-B$의 원소는 4와 32이므로 집합 A는

$A=\{2, 4, 8, 32\}$

즉 집합 A의 모든 원소의 합은

$2+4+8+32=46$ 답 ⑤

다른 풀이 드모르간의 법칙 이용

조건 (나)에서 $A^C\cup B=\{1, 2, 8, 16\}$이고, 드모르간의 법칙에 의하여

$A\cap B^C=(A^C\cup B)^C=\{4, 32\}$

$\therefore A=(A\cap B)\cup(A\cap B^C)$

$=\{2, 8\}\cup\{4, 32\}=\{2, 4, 8, 32\}$

따라서 집합 A의 모든 원소의 합은

$2+4+8+32=46$

0496 두 집합 A, B가 서로소이므로 $A\cap B=\varnothing$

집합 $A\cup B$의 원소가 6개이고, 집합 B의 원소가 4개이므로 집합 A의 원소는 2개이다. … ❶

이때 집합 A의 모든 원소가 소수이므로

$A=\{3, 5\}$ 또는 $A=\{3, 7\}$ 또는 $A=\{5, 7\}$ … ❷

이고, 각 집합에 대하여 집합 B는

$B=\{4, 6, 7, 8\}$ 또는 $B=\{4, 5, 6, 8\}$

또는 $B=\{3, 4, 6, 8\}$ … ❸

따라서 집합 B의 모든 원소의 합의 최댓값은

$4+6+7+8=25$ … ❹

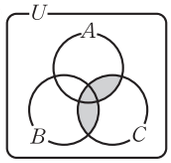
답 25

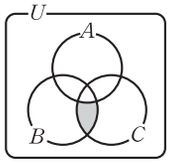
단계	채점 요소	비율
❶	집합 A의 원소의 개수 구하기	30 %
❷	모든 집합 A 구하기	30 %
❸	모든 집합 B 구하기	30 %
❹	집합 B의 모든 원소의 합의 최댓값 구하기	10 %

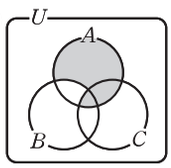
유형 091 벤다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합 본책 100쪽

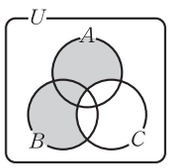
각 집합을 벤다이어그램으로 나타낸 후 주어진 벤다이어그램과 비교한다.

0497 각 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

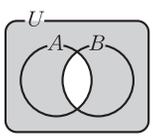
① 

② 

③ 

⑤ 

따라서 색칠한 부분을 나타내는 것은 ④이다. 답 ④

0498 ㄱ. 

이상에서 색칠한 부분을 나타내는 집합과 항상 같은 집합인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

유형 092 집합의 연산을 만족시키는 미지수 구하기 본책 100쪽

(i) 주어진 조건을 이용하여 미지수의 값을 구한다.
(ii) 미지수의 값을 대입하여 각 집합의 원소를 구한다.
(iii) 구한 집합이 주어진 조건을 만족시키는지 확인한다.

0499 $B-A=\{5\}$이므로 1, 2는 $A\cap B$의 원소이다.

즉 $1\in A$이므로 $a-b=1$ …… ㉠

또 $5\in B$이므로 $a+b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$ $\therefore ab=6$

답 ②

0500 $A\cup B=\{1, 4, 7, 10\}$이므로

$a-2=1$ 또는 $a-2=10$

$\therefore a=3$ 또는 $a=12$

(i) $a=3$일 때

$A=\{1, 4, 7\}$, $B=\{1, 4, 10\}$이므로

$A\cup B=\{1, 4, 7, 10\}$

(ii) $a=12$일 때

$A=\{4, 7, 10\}$, $B=\{1, 13, 145\}$이므로

$A\cup B=\{1, 4, 7, 10, 13, 145\}$

(i), (ii)에서 $a=3$

따라서 $A\cap B=\{1, 4\}$이므로 구하는 모든 원소의 합은

$1+4=5$ 답 ①

0501 $(A-B)\cup(B-A)=\{1, 4, 7\}$에서 $3\in A\cap B$, 즉 $3\in A$이므로

$a=3$ 또는 $a+1=3$ $\therefore a=2$ 또는 $a=3$

(i) $a=2$일 때

$A=\{2, 3\}$, $B=\{1, 2, 3\}$이므로

$(A-B)\cup(B-A)=\{1\}$

(ii) $a=3$일 때

$A=\{3, 4\}$, $B=\{1, 3, 7\}$이므로

$(A-B)\cup(B-A)=\{1, 4, 7\}$

(i), (ii)에서 $a=3$ 답 ②

0502 $A\cap B=\varnothing$이려면 모든 실수 x에 대하여

$2x^2+ax+9>1$, 즉 $2x^2+ax+8>0$이어야 한다. … ❶

따라서 이차방정식 $2x^2+ax+8=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\times2\times8<0$

$a^2<64$ $\therefore -8<a<8$ … ❷

즉 정수 a의 최댓값은 7이다. … ❸

답 7

단계	채점 요소	비율
❶	$A\cap B=\varnothing$이기 위한 조건 알기	40 %
❷	a의 값의 범위 구하기	40 %
❸	정수 a의 최댓값 구하기	20 %

0503 $A_1=\{x\mid1\le x\le11$인 자연수$\}$

$A_2=\{x\mid3\le x\le20$인 자연수$\}$

$A_3=\{x\mid5\le x\le29$인 자연수$\}$

⋮

$A_6=\{x\mid11\le x\le56$인 자연수$\}$

$A_7=\{x\mid13\le x\le65$인 자연수$\}$

에서 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_6=\{11\}$, $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_7=\varnothing$이므로 n의 최댓값은 6이다.

$\therefore a=6$

$\therefore A_{a+2}=A_8=\{x\mid15\le x\le74$인 자연수$\}$

따라서 구하는 원소의 개수는

$74-15+1=60$ 답 60

유형 093 집합의 연산의 성질 → 본책 101쪽

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

(1) $A\cup A=A$, $A\cap A=A$ (2) $A\cup\varnothing=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$

(3) $A\cup U=U$, $A\cap U=A$ (4) $A\cup A^C=U$, $A\cap A^C=\varnothing$

(5) $U^C=\varnothing$, $\varnothing^C=U$ (6) $(A^C)^C=A$

(7) $A-B=A\cap B^C=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$

0504 ① $A\cap\varnothing=\varnothing$

② $U^C=\varnothing$이므로 $B\not\subset U^C$

③ $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$

⑤ $A\cup(B\cap U)=A\cup B$

따라서 항상 옳은 것은 ④이다. 답 ④

0505 ③ $U-A^C=A$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다. 답 ③

0506 ① $A\cap B^C=A-B$

② $A-(A\cap B)=A-B$

③ $A\cap(B^C\cup\varnothing)=A\cap B^C=A-B$

④ $(U-B)\cap A=B^C\cap A=A-B$

⑤ $A\cap(U-B^C)=A\cap B$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다. 답 ⑤

유형 094 집합의 연산의 성질과 포함 관계 → 본책 101쪽

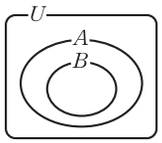
전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음은 모두 $A\subset B$와 같은 표현이다.

(1) $A\cap B=A$ (2) $A\cup B=B$ (3) $A-B=\varnothing$

(4) $A\cap B^C=\varnothing$ (5) $B^C\subset A^C$ (6) $B^C-A^C=\varnothing$

0507 $A\cap B=B$이므로 $B\subset A$

이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



④ $B\subset A$이면 $A^C\subset B^C$이므로

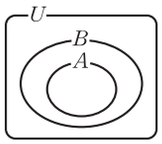
$A^C\cup B^C=B^C$

⑤ $A^C\cup B\neq U$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0508 $B^C\subset A^C$이므로 $A\subset B$

이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $A\cap B=A$

② $(B-A)\cap A=\varnothing$

③ $(A\cap B)\cup A=A\cup A=A$

④ $(A\cap B)\cap(A\cup B)=A\cap B=A$

⑤ $A\cup(A-B)=A\cup\varnothing=A$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ②이다. 답 ②

0509 $(A\cap B^C)\cup(B\cap A^C)=(A-B)\cup(B-A)$
$=(A\cup B)-(A\cap B)=U$
이므로 $A\cup B=U$, $A\cap B=\varnothing$
④ $A^C\cap B=B-A=B$
⑤ $A\cap(A\cup B)=A\cap U=A$
따라서 항상 옳은 것은 ③이다. 답 ③

0510 $A\cap B^C=A-B=\varnothing$이므로 $A\subset B$
이때 $A\subset B$가 성립하려면 k는 24의 양의 약수이어야 한다.
$24=2^3\times3$이므로 24의 양의 약수의 개수는
$(3+1)\times(1+1)=8$
이때 $k\geq2$이므로 구하는 k의 개수는 $8-1=7$ 답 ①

유형 095 집합의 연산과 부분집합의 개수 본책 102쪽

(1) 세 집합 A, B, X에 대하여
$A\cap X=A$이면 $A\subset X$, $B\cup X=B$이면 $X\subset B$
임을 이용하여 집합 사이의 포함 관계를 구한다.
(2) $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수는 집합 A의 모든 원소를 반드시 원소로 갖는 집합 B의 부분집합의 개수와 같다.

0511 $A\cap X=X$이므로 $X\subset A$
$(A-B)\cup X=X$이므로 $(A-B)\subset X$
$\therefore (A-B)\subset X\subset A$
이때 $A-B=\{2, 4, 7\}$이므로
$\{2, 4, 7\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
즉 집합 X는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 부분집합 중 2, 4, 7을 반드시 원소로 갖는 집합이다.
따라서 집합 X의 개수는 $2^{7-3}=2^4=16$ 답 ①

0512 $A\cap X=A$이므로 $A\subset X$
$B\cup X=B$이므로 $X\subset B$
$\therefore A\subset X\subset B$
이때 $A=\{1, 3, 7, 9\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$이므로
$\{1, 3, 7, 9\}\subset X\subset\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$
즉 집합 X는 $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$의 부분집합 중 1, 3, 7, 9를 반드시 원소로 갖는 집합이다.
따라서 집합 X의 개수는 $2^{7-4}=2^3=8$ 답 ①

0513 $A\cup X=A$이므로 $X\subset A$
$B\cap X=\varnothing$이므로 $X\subset B^C$
$\therefore X\subset(A\cap B^C)$, 즉 $X\subset(A-B)$ … ❶
이때 $A=\{8, 16, 24\}$, $B=\{6, 12, 18, 24, 30\}$이므로
$A-B=\{8, 16\}$
즉 $X\subset\{8, 16\}$이므로 집합 X는 $\{8, 16\}$의 부분집합이다.
따라서 집합 X의 개수는 $2^2=4$ … ❷
답 4

단계	채점 요소	비율
❶	집합 X, A, B 사이의 포함 관계 구하기	40 %
❷	집합 X의 개수 구하기	60 %

0514 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$
전체집합 U의 부분집합 X가 $A\cup X=B\cup X$를 만족시키려면 집합 X는 두 집합 A, B의 공통인 원소 3, 8을 제외한 나머지 원소 1, 4, 9를 반드시 원소로 가져야 한다.
따라서 집합 X의 개수는
$2^{9-3}=2^6=64$ 답 ④

0515 $A=\{1, 3, 7, 21\}$
$B-A$, $A-B$는 서로소이므로 $(B-A)\subset(A-B)$이려면 $B-A=\varnothing$이어야 한다.
$\therefore B\subset A$
이때 집합 B의 모든 원소의 합이 15 이상이므로
$21\in B$
즉 집합 B는 집합 A의 부분집합 중 21을 반드시 원소로 갖는 집합이므로 그 개수는
$2^{4-1}=2^3=8$ 답 ②

0516 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A\cap B=\{3\}$
(i) $3\in X$일 때
$3\in(X\cap A)$, $3\in(X\cap B)$이므로
$X\cap A\neq\varnothing$, $X\cap B\neq\varnothing$
따라서 집합 X의 개수는 집합 U의 부분집합 중에서 3을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로
$2^{5-1}=2^4=16$
(ii) $3\notin X$일 때
$X\cap A\neq\varnothing$이려면 $1\in X$
$X\cap B\neq\varnothing$이려면 $2\in X$ 또는 $5\in X$
따라서 집합 X는 1을 반드시 원소로 갖고 3을 원소로 갖지 않는 집합 U의 부분집합에서 1을 반드시 원소로 갖고 2, 3, 5를 원소로 갖지 않는 부분집합을 제외한 것과 같으므로 집합 X의 개수는
$2^{5-1-1}-2^{5-1-3}=2^3-2=6$
(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 집합 X의 개수는
$16+6=22$ 답 22

다른 풀이 (ii) $3\notin X$일 때
3을 제외한 집합 A의 원소는 1이고, 3을 제외한 집합 B의 원소는 2, 5이므로 $X\cap A\neq\varnothing$, $X\cap B\neq\varnothing$이려면
$1\in X$, $2\in X$, $5\notin X$
또는 $1\in X$, $2\notin X$, $5\in X$
또는 $1\in X$, $2\in X$, $5\in X$
각 경우에서 집합 X는 집합 $(A\cup B)^C$의 원소인 4를 원소로 갖거나 갖지 않을 수 있으므로 집합 X의 개수는
$3\times2=6$

유형 096 집합의 연산 법칙을 이용하여 식 간단히 하기 본책 103쪽

집합에 대한 복잡한 연산이 주어지면 집합의 연산 법칙과 연산의 성질을 이용하여 간단히 한다.

0517 $(A\cap B)-(A^C\cup C)=(A\cap B)\cap(A^C\cup C)^C$
$=(A\cap B)\cap(A\cap C^C)$
$=A\cap(B\cap C^C)$
$=A\cap(B-C)$ 답 ②

0518 $\{(A^C\cap B)\cup(A\cup B)^C\}\cup\{(A\cap C)\cup(A\cap C^C)\}$
$=\{(A^C\cap B)\cup(A^C\cap B^C)\}\cup\{(A\cap C)\cup(A\cap C^C)\}$
$=\{A^C\cap(B\cup B^C)\}\cup\{A\cap(C\cup C^C)\}$
$=(A^C\cap U)\cup(A\cap U)$
$=A^C\cup A=U$ 답 ⑤

0519 $\{(A-B)\cup(A-B^C)\}\cap B$
$=\{(A\cap B^C)\cup(A\cap B)\}\cap B$
$=\{A\cap(B^C\cup B)\}\cap B$
$=(A\cap U)\cap B$
$=A\cap B$ 답 ③

0520 ① $A-(A-B)=A\cap(A\cap B^C)^C$
$=A\cap(A^C\cup B)$
$=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)$
$=\varnothing\cup(A\cap B)$
$=A\cap B$
② $A-(B-C)=A\cap(B\cap C^C)^C$
$=A\cap(B^C\cup C)$
③ $(A-B)\cup(A-C)=(A\cap B^C)\cup(A\cap C^C)$
$=A\cap(B^C\cup C^C)$
$=A\cap(B\cap C)^C$
$=A-(B\cap C)$
④ $(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)^C$
$=(A\cap B)\cap(A^C\cup C^C)$
$=\{(A\cap B)\cap A^C\}\cup\{(A\cap B)\cap C^C\}$
$=\varnothing\cup\{(A\cap B)\cap C^C\}$
$=(A\cap B)\cap C^C$
$=(A\cap B)-C$
⑤ $\{(A-B)\cup B\}\cap A^C=\{(A\cap B^C)\cup B\}\cap A^C$
$=\{(A\cup B)\cap(B^C\cup B)\}\cap A^C$
$=\{(A\cup B)\cap U\}\cap A^C$
$=(A\cup B)\cap A^C$
$=(A\cap A^C)\cup(B\cap A^C)$
$=\varnothing\cup(B\cap A^C)$
$=B\cap A^C=B-A$
따라서 옳은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

유형 097 집합의 연산 법칙과 포함 관계 본책 104쪽

(1) $A\cap B=A\Rightarrow A\subset B$
(2) $A\cup B=A\Rightarrow B\subset A$
(3) $A-B=\varnothing\Rightarrow A\subset B$

0521 $B\cap\{(A^C\cup B^C)\cap(A^C\cup B)\}$
$=B\cap\{A^C\cup(B^C\cap B)\}$
$=B\cap(A^C\cup\varnothing)$
$=B\cap A^C=B-A$
즉 $B-A=\varnothing$이므로 $B\subset A$, $A^C\subset B^C$
② $A\cap B=B$
③ $A\cup B=A$
④ $A-B\neq A$
⑤ $B-A=\varnothing$
따라서 항상 옳은 것은 ①이다. 답 ①

0522 $(A^C-B^C)\cup(B-A^C)=(A^C\cap B)\cup(B\cap A)$
$=B\cap(A^C\cup A)$
$=B\cap U=B$
즉 $B=A\cup B$이므로 $A\subset B$
ㄴ. $B-A\neq\varnothing$ (거짓)
ㄷ. $A\cap B^C=A-B=\varnothing$ (거짓)
ㄹ. $A\subset B$에서 $B^C\subset A^C$이므로 $A^C\cup B^C=A^C$ (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

유형 098 집합의 연산 법칙을 이용하여 원소 구하기 본책 104쪽

주어진 조건을 집합의 연산 법칙을 이용하여 간단히 한 후 구하는 집합의 원소를 찾는다.

0523 $(A\cup B^C)\cap(A^C\cup B)=(A^C\cap B)^C\cap(A\cap B^C)^C$
$=(B-A)^C\cap(A-B)^C$
$=\{(B-A)\cup(A-B)\}^C$
이때
$B\cap(B^C\cup A^C)=B\cap(B\cap A)^C$
$=B-(B\cap A)$
$=B-A=\{2, 4, 8\}$
이므로
$(B-A)\cup(A-B)=\{1, 2, 4, 5, 8\}$
$U=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$이므로
$\{(B-A)\cup(A-B)\}^C=\{3, 6, 7\}$
따라서 구하는 모든 원소의 합은
$3+6+7=16$ 답 16

0524 $\{(B^C-A)^C\cup B\}\cap A^C=\{(B^C\cap A^C)^C\cup B\}\cap A^C$
$=\{(B\cup A)\cup B\}\cap A^C$
$=(A\cup B)\cap A^C$
$=(A\cup B)-A$
$=B-A$

즉 $B-A=\varnothing$이므로 $B\subset A$

$\therefore A\cup B=A,\ A\cap B=B$

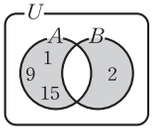
따라서 $A=\{1, 2, 4, 8, 16\}$, $B=\{2, 8\}$이므로

$S_1-S_2=(1+2+4+8+16)-(2+8)=21$ 답 ⑤

0525 $(A\cup B)\cap(A\cap B)^C=(A\cup B)-(A\cap B)$

$=\{1, 2, 9, 15\}$

이므로 이 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 집합 $A-B$는 p 이하의 홀수 중 소수가 아닌 수를 원소로 하는 집합이고, 소수가 아닌 홀수는 1, 9, 15, 21, …이므로 p는 15 이상 21 미만의 자연수이다.

따라서 구하는 자연수 p는

15, 16, 17, …, 20

의 6개이다. 답 6

0526 $A-B^C=A\cap B=\{1, 4\}$

$(A\cap B^C)\cup(A^C-B)=(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B^C)$

$=(A\cup A^C)\cap B^C$

$=U\cap B^C$

$=B^C=\{2, 5, 8, 9\}$ … ❶

이때 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$이므로

$B=\{1, 3, 4, 6, 7\}$ … ❷

$\therefore B-A=B-(A\cap B)=\{3, 6, 7\}$

따라서 집합 $B-A$의 모든 원소의 곱은

$3\times6\times7=126$ … ❸

답 126

단계	채점 요소	비율
❶	연산 법칙을 이용하여 주어진 조건 간단히 하기	50 %
❷	집합 B 구하기	20 %
❸	집합 $B-A$의 모든 원소의 곱 구하기	30 %

유형 099 배수와 약수의 집합의 연산 본책 105쪽

자연수 m, n에 대하여

(1) 자연수 k의 양의 배수의 집합을 A_k라 할 때

$A_m\cap A_n$ ➜ m과 n의 공배수의 집합

(2) 자연수 k의 양의 약수의 집합을 B_k라 할 때

$B_m\cap B_n$ ➜ m과 n의 공약수의 집합

0527 $A_{15}\cap A_{30}\cap A_{21}=(A_{15}\cap A_{30})\cap A_{21}$

$=A_{15}\cap A_{21}=A_3$

$\therefore n=3$ 답 3

0528 $A_5\cap(A_4\cup A_{12})=A_5\cap A_4=A_{20}$

$=\{20, 40, 60, 80, 100\}$

따라서 구하는 집합의 원소의 개수는 5이다. 답 ②

다른 풀이 $A_5\cap(A_4\cup A_{12})=(A_5\cap A_4)\cup(A_5\cap A_{12})$

$=A_{20}\cup A_{60}=A_{20}$

0529 $A_6\cap A_3=A_6$이므로 $A_k\subset A_6$

즉 k는 6의 배수이다.

$A_{18}\cup A_{54}=A_{18}$이므로 $A_{18}\subset A_k$

즉 k는 18의 약수이다.

따라서 자연수 k는 6의 배수이면서 18의 약수이므로 구하는 모든 자연수 k의 값의 합은

$6+18=24$ 답 ②

유형 100 방정식 또는 부등식의 해의 집합의 연산 본책 105쪽

방정식 또는 부등식으로 주어진 집합의 원소는 방정식 또는 부등식의 해임을 이용한다.

특히 부등식의 해의 집합의 연산이 주어진 경우에는 각 집합을 수직선 위에 나타낸 후

∩는 공통 범위, ∪는 합친 범위

임을 이용한다.

0530 $x^2-4x-5=0$에서 $(x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$ $\therefore B=\{-1, 5\}$

$B-A=\{5\}$에서 $-1\in A$, 즉 방정식 $x^2+ax+3=0$의 한 근이 -1이므로

$1-a+3=0$ $\therefore a=4$

$x^2+4x+3=0$에서 $(x+1)(x+3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-3$

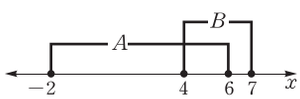
즉 $A=\{-3, -1\}$이므로

$A\cup B=\{-3, -1, 5\}$ 답 $\{-3, -1, 5\}$

0531 $x^2-11x+28\le0$에서 $(x-4)(x-7)\le0$

$\therefore 4\le x\le7$ $\therefore B=\{x|4\le x\le7\}$

이때 $A\cap B=\{x|4\le x\le6\}$, $A\cup B=\{x|-2\le x\le7\}$이려면 집합 A는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$A=\{x|-2\le x\le6\}$

$=\{x|(x+2)(x-6)\le0\}$

$=\{x|x^2-4x-12\le0\}$

따라서 $a=-4$, $b=-12$이므로 $a+b=-16$ 답 ①

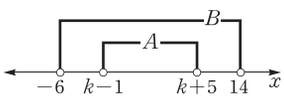
0532 $x^2-8x-84<0$에서 $(x+6)(x-14)<0$

$\therefore -6<x<14$ $\therefore B=\{x|-6<x<14\}$

$A\cap(B\cup A^C)=(A\cap B)\cup(A\cap A^C)$

$=(A\cap B)\cup\varnothing=A\cap B$

즉 $A\cap B=A$에서 $A\subset B$이므로 오른쪽 그림에서



$-6\le k-1$, $k+5\le14$

$\therefore -5\le k\le9$

따라서 k의 최댓값은 9이고 최솟값은 -5이므로 그 곱은

$9\times(-5)=-45$ 답 ①

06 집합의 연산

0533 $x^3-9x^2+23x-15=0$에서

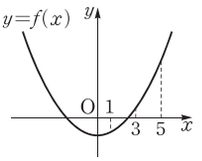
$(x-1)(x-3)(x-5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=5$

$\therefore A=\{1, 3, 5\}$

이때 $A\cap B=\{1\}$이므로

$f(x)=x^2+ax+a-7$이라 하면 오른쪽 그림과 같이 $f(1)<0$, $f(3)\geq 0$이어야 한다.



$f(1)<0$에서 $1+a+a-7<0$

$2a<6$ $\therefore a<3$ ····· ㉠

$f(3)\geq 0$에서 $9+3a+a-7\geq 0$

$4a\geq -2$ $\therefore a\geq -\frac{1}{2}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{1}{2}\leq a<3$

따라서 정수 a는 0, 1, 2의 3개이다. 답 ③

0534 $A\cup B=B$이므로 $A\subset B$

(i) $A=\varnothing$일 때

방정식 $kx=2-x$, 즉 $(k+1)x=2$의 해가 존재하지 않아야 하므로 $k=-1$ … ❶

(ii) $A\neq\varnothing$일 때

$-2\in A$ 또는 $1\in A$이어야 하므로

$-2k=4$ 또는 $k=1$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=1$ … ❷

(i), (ii)에서 $k=-2$ 또는 $k=-1$ 또는 $k=1$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-2+(-1)+1=-2$ … ❸

답 -2

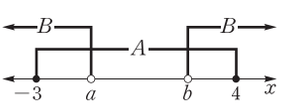
단계	채점 요소	비율
❶	$A=\varnothing$일 때, k의 값 구하기	40 %
❷	$A\neq\varnothing$일 때, k의 값 구하기	40 %
❸	모든 실수 k의 값의 합 구하기	20 %

0535 $x^2-x-12\leq 0$에서 $(x+3)(x-4)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 4$

$\therefore A=\{x\mid -3\leq x\leq 4\}$

조건 ㈎에서 $A\cup B=R$이므로 집합 B는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

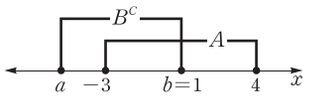


$\therefore a\geq -3$, $b\leq 4$ ····· ㉠

또 조건 ㈏에서

$A-B=A\cap B^C=\{x\mid -3\leq x\leq 1\}$

이때 $B^C=\{x\mid a\leq x\leq b\}$이므로 집합 B^C는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$\therefore a\leq -3$, $b=1$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-3$, $b=1$이므로

$b-a=4$ 답 4

유형 101 **새롭게 약속된 집합의 연산** → 본책 106쪽

새롭게 약속된 집합의 연산이 주어진 경우 집합의 연산 법칙을 이용하여 간단히 정리하거나 벤다이어그램을 이용하여 해결한다.

0536 $A◎B=(A\cup B)\cap(A\cup B^C)$

$=A\cup(B\cap B^C)$

$=A\cup\varnothing=A$

$\therefore A◎(B◎A)=A◎B=A$ 답 ①

0537 $A=\{-1, 2\}$, $B=\{-2, 0, 2\}$에 대하여

$A*B=\{-4, -2, 0, 2, 4\}$,

$A\triangle B=(A-B)^C\cap A$

$=(A\cap B^C)^C\cap A$

$=(A^C\cup B)\cap A$

$=(A^C\cap A)\cup(B\cap A)$

$=\varnothing\cup(B\cap A)$

$=A\cap B=\{2\}$

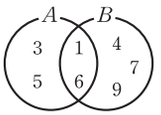
이므로

$(A*B)\cup(A\triangle B)=\{-4, -2, 0, 2, 4\}$

따라서 구하는 원소의 개수는 5이다. 답 5

0538 $A\diamond B=(A\cup B)-(A\cap B)=\{3, 4, 5, 7, 9\}$

$A=\{1, 3, 5, 6\}$이므로 두 집합 A, B를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $B=\{1, 4, 6, 7, 9\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은

$1+4+6+7+9=27$ 답 ①

다른 풀이 $A\cap B=A-(A\diamond B)=\{1, 6\}$,

$B-A=(A\diamond B)-A=\{4, 7, 9\}$이므로

$B=(A\cap B)\cup(B-A)=\{1, 4, 6, 7, 9\}$

0539 ① $A\triangle A^C=(A-A^C)\cup(A^C-A)$

$=A\cup A^C=U$

② $A\triangle\varnothing=(A-\varnothing)\cup(\varnothing-A)$

$=A\cup\varnothing=A$

③ $A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$

$=(B-A)\cup(A-B)=B\triangle A$

④ $A^C\triangle B^C=(A^C-B^C)\cup(B^C-A^C)$

$=(A^C\cap B)\cup(B^C\cap A)$

$=(B-A)\cup(A-B)$

$=(A-B)\cup(B-A)$

$=A\triangle B$

⑤ $A\triangle B=A$이면 $(A-B)\cup(B-A)=A$

즉 $(B-A)\subset A$이므로 $B-A=\varnothing$

$\therefore B\subset A$

이때 $A\neq B$이므로 $A\not\subset B$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

유형 102 유한집합의 원소의 개수 본책 107쪽

전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여

(1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

(2) $n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

(3) $n(A^C)=n(U)-n(A)$

(4) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=n(A\cup B)-n(B)$

0540 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A\cup B)$
$=24-n(A\cup B)=4$
$\therefore\ n(A\cup B)=20$
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서
$20=17+11-n(A\cap B)$
$\therefore\ n(A\cap B)=8$ 답 ③

0541 $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$에서
$7=13-n(A\cap B)$
$\therefore\ n(A\cap B)=6$
$\therefore\ n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$
$=16-6=10$ 답 10

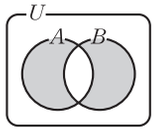
다른 풀이 $n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)$에서
$7=n(A\cup B)-16$
$\therefore\ n(A\cup B)=23$
$\therefore\ n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)=23-13=10$

0542 $n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)=n(U)-n(A\cap B)$이므로
$36=50-n(A\cap B)$
$\therefore\ n(A\cap B)=14$ … ❶
이때 $n(B)=n(U)-n(B^C)=50-19=31$이므로
$n(A^C\cap B)=n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$
$=31-14=17$ … ❷
답 17

단계	채점 요소	비율
❶	$n(A\cap B)$ 구하기	40 %
❷	$n(A^C\cap B)$ 구하기	60 %

0543 두 집합 A, B가 서로소이므로
$A\cap B=\varnothing$, $A\cap B\cap C=\varnothing$
$\therefore\ n(A\cap B)=0$, $n(A\cap B\cap C)=0$
이때
$n(A\cap C)=n(A)+n(C)-n(A\cup C)$
$=5+9-10=4$,
$n(B\cap C)=n(B)+n(C)-n(B\cup C)$
$=7+9-12=4$
이므로
$n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=5+7+9-0-4-4+0=13$ 답 ②

0544 $(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)=C$에서
$(A-B)\cup(B-A)=C$
이므로 집합 C를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



따라서 $A-B=C-B$이므로
$n(A-B)=n(C-B)=12$
$\therefore\ n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)=16-12=4$
$\therefore\ n(A\cup B)=n(C)+n(A\cap B)=50+4=54$
$\therefore\ n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A\cup B)$
$=100-54=46$ 답 ④

다른 풀이 $n(B-A)=n(C)-n(A-B)=50-12=38$
$\therefore\ n(A\cup B)=n(A)+n(B-A)=16+38=54$

유형 103 유한집합의 원소의 개수의 활용 본책 108쪽

주어진 조건을 전체집합 U와 그 부분집합 A, B로 나타낸 후 구하려는 집합의 원소의 개수를 구한다.

참고 ① ~ 또는, 적어도 ~인 ➡ $A\cup B$
② ~이고, 그리고, 모두, 둘 다 ➡ $A\cap B$
③ ~만, ~뿐 ➡ $A-B$
④ 둘 중 하나만 ➡ $(A-B)\cup(B-A)$
또는 $(A\cup B)-(A\cap B)$

0545 학생 전체의 집합을 U, 교과목 A, B를 선택한 학생의 집합을 각각 A, B라 하면
$n(U)=60$, $n(A)=33$, $n(B)=38$, $n(A^C\cap B^C)=5$
$\therefore\ n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A^C\cap B^C)$
$=60-5=55$
따라서 두 교과목 A, B를 모두 선택한 학생 수는
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=33+38-55=16$ 답 ②

0546 책 A, B를 읽은 회원의 집합을 각각 A, B라 하면
$n(A)=35$, $n(B)=20$, $n(A\cup B)=42$
이때 A만 읽은 회원의 집합은 $A-B$, B만 읽은 회원의 집합은 $B-A$이므로 두 권의 책 중 한 권만 읽은 회원 수는
$n(A-B)+n(B-A)$
$=\{n(A\cup B)-n(B)\}+\{n(A\cup B)-n(A)\}$
$=(42-20)+(42-35)=29$ 답 ②

다른 풀이 두 권의 책을 모두 읽은 회원 수는
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=35+20-42=13$
따라서 두 권의 책 중 한 권만 읽은 회원 수는
$n(A\cup B)-n(A\cap B)=42-13=29$

0547 학생 전체의 집합을 U, 영화 A, B, C를 관람한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(U)=48$, $n(A)=18$, $n(B)=21$, $n(C)=20$,

$n((A\cup B\cup C)^C)=6$, $n(A\cap B\cap C)=0$ … ❶

이때

$n((A\cup B\cup C)^C)=n(U)-n(A\cup B\cup C)$

이므로 $6=48-n(A\cup B\cup C)$

$\therefore n(A\cup B\cup C)=42$ … ❷

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

에서

$42=18+21+20-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+0$

$\therefore n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=17$

따라서 두 편의 영화만 관람한 학생 수는 17이다. … ❸

답 17

단계	채점 요소	비율
❶	주어진 조건을 집합으로 나타내기	20 %
❷	적어도 한 편의 영화를 관람한 학생 수 구하기	40 %
❸	두 편의 영화만 관람한 학생 수 구하기	40 %

0548 서점 A를 이용하는 고객의 집합을 A, 서점 B를 이용하는 고객의 집합을 B라 하면

$n(A\cup B)=40+34=74$

조건 (가)에서 $n(A)+n(B)=96$이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=96-74=22$

두 서점 A, B 중 한 서점만 이용하는 고객의 수는

$n((A-B)\cup(B-A))=n((A\cup B)-(A\cap B))$
$=n(A\cup B)-n(A\cap B)$
$=74-22=52$

조건 (나)에서 두 서점 A, B 중 한 서점만 이용하는 남자 고객의 수는 $52\times\frac{1}{2}=26$이므로 서점 A와 서점 B를 모두 이용하는 남자 고객의 수는

$40-26=14$

답 ②

0549 학생 전체의 집합을 U, 문제 a를 맞힌 학생의 집합을 A, 문제 b를 맞힌 학생의 집합을 B, 문제 c를 맞힌 학생의 집합을 C라 하면

$n(U)=80$, $n(A)=34$, $n(B)=30$, $n(C)=28$,

$n(A\cup B\cup C)=70$

두 문제 이상 맞힌 학생 수를 k라 하면 한 문제만 맞힌 학생 수는 $k+32$이므로

$k+(k+32)=70$ $\therefore k=19$

따라서

$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-2\times n(A\cap B\cap C)$
$=19$

이므로

$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$
$=19+2\times n(A\cap B\cap C)$

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

에서

$70=34+30+28-\{19+2\times n(A\cap B\cap C)\}$
$+n(A\cap B\cap C)$

$70=73-n(A\cap B\cap C)$

$\therefore n(A\cap B\cap C)=3$

따라서 세 문제를 모두 맞힌 학생 수는 3이다. 답 3

유형 104 유한집합의 원소의 개수의 최댓값과 최솟값 → 본책 108쪽

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(B)<n(A)$일 때

(1) $n(A\cap B)$가 최대인 경우

➜ $B\subset A$

(2) $n(A\cap B)$가 최소인 경우

➜ $n(A\cup B)$가 최대

➜ $A\cup B=U$이거나 $n(A\cap B)=0$

0550 (i) $n(A\cap B)$가 최대인 경우

$B\subset A$일 때이므로

$n(A\cap B)=n(B)=23$

(ii) $n(A\cap B)$가 최소인 경우

$n(A\cup B)$가 최대일 때, 즉 $A\cup B=U$일 때이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=30+23-40=13$

(i), (ii)에서 $n(A\cap B)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$23+13=36$

답 ⑤

0551 회원 전체의 집합을 U, A 마라톤에 출전하는 회원의 집합을 A, B 마라톤에 출전하는 회원의 집합을 B라 하면

$n(U)=50$, $n(A)=27$, $n(B)=31$

이때 B 마라톤에만 출전하는 회원 수는

$n(B-A)=n(A\cup B)-n(A)$

(i) $n(B-A)$가 최대인 경우

$n(A\cup B)$가 최대일 때, 즉 $A\cup B=U$일 때이므로

$n(A\cup B)=n(U)=50$

$\therefore n(B-A)=50-27=23$

(ii) $n(B-A)$가 최소인 경우

$n(A\cup B)$가 최소일 때, 즉 $A\subset B$일 때이므로

$n(A\cup B)=n(B)=31$

$\therefore n(B-A)=31-27=4$

(i), (ii)에서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$23+4=27$

답 27

0552 $n(A-B)\le n(A\cap B)$에서

$n(A)-n(A\cap B)\le n(A\cap B)$

$22 \le 2 \times n(A \cap B)$ $\therefore n(A \cap B) \ge 11$

(i) $n(A \cup B)$가 최대인 경우

$n(A \cap B)$가 최소일 때, 즉 $n(A \cap B)=11$일 때이므로

$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$

$=22+28-11=39$

(ii) $n(A \cup B)$가 최소인 경우

$A \subset B$일 때이므로

$n(A \cup B)=n(B)=28$

(i), (ii)에서 $n(A \cup B)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$39+28=67$ 답 67

0553 학생 전체의 집합을 U, 두 지역 A, B를 방문한 학생의 집합을 각각 A, B라 하면

$n(U)=40$, $n(A)=25$, $n(B)=18$

두 지역 A, B 중 어느 한 지역만 방문한 학생 수는

$n(A \cup B)-n(A \cap B)$

$=n(A \cup B)-\{n(A)+n(B)-n(A \cup B)\}$

$=2 \times n(A \cup B)-43$ …… ㉠ … ❶

(i) ㉠이 최대인 경우

$n(A \cup B)$가 최대일 때, 즉 $A \cup B=U$일 때이므로

$n(A \cup B)=n(U)=40$

따라서 ㉠에서

$M=2 \times 40-43=37$ … ❷

(ii) ㉠이 최소인 경우

$n(A \cup B)$가 최소일 때, 즉 $B \subset A$일 때이므로

$n(A \cup B)=n(A)=25$

따라서 ㉠에서

$m=2 \times 25-43=7$ … ❸

(i), (ii)에서 $Mm=37 \times 7=259$ … ❹

답 259

단계	채점 요소	비율
❶	주어진 조건을 집합으로 나타내기	30 %
❷	M의 값 구하기	30 %
❸	m의 값 구하기	30 %
❹	Mm의 값 구하기	10 %

0554 조건 (나)에서

$A \cap (A^C \cup B)=(A \cap A^C) \cup (A \cap B)$

$=\varnothing \cup (A \cap B)$

$=A \cap B \neq \varnothing$

$\therefore n(A \cap B) \ge 1$

조건 (다)에서 $n(A-B)=11$이므로

$n(A)=n(A-B)+n(A \cap B)$

$\ge 11+1=12$

조건 (가)에서 $n(U)=25$이므로

$n(A)+n(B-A) \le 25$

$\therefore n(B-A) \le 25-n(A) \le 25-12=13$

따라서 $n(B-A)$의 최댓값은 13이다. 답 13

유형 105 유한집합의 추론

본책 109쪽

주어진 조건을 집합으로 나타내어 본다.

0555 전체집합 U의 부분집합 중에서 원소의 개수가 3인 부분집합 A의 개수는

${}_6C_3=\frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1}=20$

이때 $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$에서

$5=3+3-n(A \cap B)$ $\therefore n(A \cap B)=1$

$A=\{a, b, c\}$일 때 가능한 집합 B는

$\{a, d, e\}$, $\{a, d, f\}$, $\{a, e, f\}$,

$\{b, d, e\}$, $\{b, d, f\}$, $\{b, e, f\}$,

$\{c, d, e\}$, $\{c, d, f\}$, $\{c, e, f\}$의 9개

이므로 20개의 서로 다른 집합 A에 대하여 각각 9개의 집합 B가 존재한다.

따라서 두 집합 A, B의 모든 순서쌍 (A, B)의 개수는

$20 \times 9=180$ 답 ⑤

다른 풀이 $n(A \cap B)=1$, $n(A-B)=2$, $n(B-A)=2$

따라서 순서쌍 (A, B)의 개수는 집합 U의 6개의 원소 중 집합 $A \cap B$의 원소 1개, 집합 $A-B$의 원소 2개, 집합 $B-A$의 원소 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_6C_1 \times {}_5C_2 \times {}_3C_2=6 \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{3 \times 2}{2 \times 1}=180$

0556 $n(A \cap B)=a$라 하면 $(A \cap B) \subset X \subset A$를 만족시키는 집합 X의 개수는 2^{3-a}이므로

$2^{3-a}=2$, $3-a=1$ $\therefore a=2$

즉 $n(A \cap B)=2$이므로 집합 A의 세 원소 2, 4, 5 중에서 2개는 집합 B의 원소이고 나머지 1개는 집합 B의 원소가 아니다.

$B=\left\{\frac{k+2}{2}, \frac{k+4}{2}, \frac{k+5}{2}\right\}$에서 집합 B의 두 원소의 차의 최댓값이 $\frac{3}{2}$이므로 $n(A \cap B)=2$이려면 $2 \notin B$, $4 \in B$, $5 \in B$이어야 한다.

따라서 집합 B의 원소 중에서 차가 1인 두 원소는 $\frac{k+2}{2}$, $\frac{k+4}{2}$이므로

$\frac{k+2}{2}=4$, $\frac{k+4}{2}=5$ $\therefore k=6$ 답 ④

0557 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$

$A^C \cap B^C=(A \cup B)^C=\{1, 4, 8\}$이므로

$A \cup B=\{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$ $\therefore S(A \cup B)=32$

$A \cap B=\{3, 7\}$에서 $S(A \cap B)=10$

$4S(A)=3S(B)$에서 $S(A)=\frac{3}{4}S(B)$

따라서 $S(A \cup B)=S(A)+S(B)-S(A \cap B)$에서

$32=\frac{3}{4}S(B)+S(B)-10$

$\frac{7}{4}S(B)=42$ $\therefore S(B)=24$ 답 24

1등급 유형 도전하기

→ 본책 110~111쪽

0558 Step 1 직선 l과 원 C_2의 교점의 좌표를 구한다.

(1) 직선 l과 원 C_2의 방정식을 연립하면

$(2y-2)^2+(y-3)^2=4$, $5y^2-14y+9=0$

$(y-1)(5y-9)=0$ $\therefore y=1$ 또는 $y=\frac{9}{5}$

$y=\frac{9}{5}$를 $x-2y+2=0$에 대입하여 풀면 $x=\frac{8}{5}$

따라서 직선 l과 원 C_2의 교점 중 점 $(0, 1)$이 아닌 점의 좌표는

$\boxed{\text{(다)}\left(\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)}$

Step 2 a, b의 값을 구한다.

(2) $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)\in A\cap B$에서 점 $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$는 직선 $y=ax$ 위의 점이므로

$\frac{4}{5}=-\frac{3}{5}a$ $\therefore a=-\frac{4}{3}$

또 점 $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$는 원 $(x-b)^2+(y-2b^2)^2=4b^4$ 위의 점이므로

$\left(-\frac{3}{5}-b\right)^2+\left(\frac{4}{5}-2b^2\right)^2=4b^4$

$1+\frac{6}{5}b-\frac{11}{5}b^2=0$, $11b^2-6b-5=0$

$(11b+5)(b-1)=0$ $\therefore b=1$ ($\because b>0$)

Step 3 $n(A\cap B)$를 구한 후 $n(A\cap(B\cup C))=2$에서 $n(A\cap C)$를 구한다.

$(x-1)^2+(y-2)^2=4$와 $y=-\frac{4}{3}x$를 연립하면

$(x-1)^2+\left(-\frac{4}{3}x-2\right)^2=4$, $25x^2+30x+9=0$

$(5x+3)^2=0$ $\therefore x=-\frac{3}{5}$

즉 두 도형의 교점은 1개이므로 $n(A\cap B)=1$

이때 $n(A\cap(B\cup C))=2$에서 $n(A\cap B)=1$이므로

$n(A\cap C)=1$ 또는 $n(A\cap C)=2$이어야 한다.

Step 4 $n(A\cap C)=1$일 때의 c의 값을 구한다.

(i) $n(A\cap C)=1$, 즉 직선과 원이 점 $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$가 아닌 점에서 접할 때

$y=-\frac{4}{3}x$와 $(x-c)^2+(y-2c^2)^2=4c^4$을 연립하여 정리하면

$25x^2+(48c^2-18c)x+9c^2=0$

x에 대한 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(24c^2-9c)^2-225c^2=0$

$4c^2-3c-1=0$ ($\because c\neq 0$)

$(4c+1)(c-1)=0$ $\therefore c=-\frac{1}{4}$ ($\because c<0$)

Step 5 $n(A\cap C)=2$일 때의 c의 값을 구한다.

(ii) $n(A\cap C)=2$, 즉 직선과 원이 점 $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$와 또 다른 한 점에서 만날 때

점 $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$가 원 $(x-c)^2+(y-2c^2)^2=4c^4$ 위의 점이므로

$\left(-\frac{3}{5}-c\right)^2+\left(\frac{4}{5}-2c^2\right)^2=4c^4$

$1+\frac{6}{5}c-\frac{11}{5}c^2=0$, $11c^2-6c-5=0$

$(11c+5)(c-1)=0$ $\therefore c=-\frac{5}{11}$ ($\because c<0$)

Step 6 $44S$의 값을 구한다.

(i), (ii)에서 $c=-\frac{1}{4}$ 또는 $c=-\frac{5}{11}$

$\therefore 44S=44\times\left(-\frac{1}{4}-\frac{5}{11}\right)=-31$

답 (1) (가) $(x-1)^2+(y+1)^2=5$ (나) $x^2+(y-3)^2=4$ (다) $\left(\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$ (라) 2 (마) 2

(2) -31

0559 Step 1 집합 B를 구한다.

$\frac{24-x}{4}$가 자연수가 되려면 x는 4의 배수이어야 하므로

$B=\{4, 8, 12, 16, 20\}$

Step 2 집합 A_k의 조건을 찾고, k의 값에 따른 집합 A_k-B를 구한다.

한편 $x\in A_k$이면 $x(y-k)=24$에서 $y=\frac{24}{x}+k$

따라서 x는 24의 약수이고 $y\le 20$이어야 하므로 $\frac{24}{x}+k\le 20$이고, 24의 약수 중 20 이하인 수는

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12

이다. 그런데 $x=1$이면 $24+k>20$이므로 $x\neq 1$

따라서 A_k의 원소가 될 수 있는 수는

2, 3, 4, 6, 8, 12

$\therefore A_k\subset\{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$

이때 $A_k\cap B^C=A_k-B$이므로 $A_k-B\subset\{2, 3, 6\}$

(i) $2\in A_k-B$일 때

$x=2$이면 $y=12+k$

이때 $12+k\le 20$에서 $k\le 8$

(ii) $3\in A_k-B$일 때

$x=3$이면 $y=8+k$

이때 $8+k\le 20$에서 $k\le 12$

(iii) $6\in A_k-B$일 때

$x=6$이면 $y=4+k$

이때 $4+k\le 20$에서 $k\le 16$

이상에서

$1\le k\le 8$이면 $A_k-B=\{2, 3, 6\}$

$9\le k\le 12$이면 $A_k-B=\{3, 6\}$

$13\le k\le 16$이면 $\quad A_k-B=\{6\}$

Step 3 $n(A_k\cap B^C)=1$인 k의 값의 범위를 구한다.

즉 $n(A_k\cap B^C)=1$을 만족시키는 k의 값의 범위는

$13\le k\le 16$

이므로 자연수 k는 13, 14, 15, 16의 4개이다.

Step 4 $a+b+c$의 값을 구한다.

따라서 $a=13$, $b=16$, $c=4$이므로

$a+b+c=33$ 답 33

다른 풀이 $A_k-B\subset\{2, 3, 6\}$, $n(A_k\cap B^C)=1$이려면 집합 A_k-B는 2, 3, 6 중에서 하나의 수만 원소로 가져야 한다.

즉 각각의 x에 대한 y의 값 $12+k$, $8+k$, $4+k$ 중 $y\le 20$을 만족시키는 y의 값이 단 하나만 존재해야 하므로

$4+k\le 20<8+k<12+k$

따라서 $4+k\le 20$, $8+k\ge 21$에서 $\quad 13\le k\le 16$

논리 Check

전체집합 $U=\{x\mid x$는 30 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 A_k, B를

$A_k=\{x\mid x(y-k)=36,\ y\in U\}$,

$B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{36-x}{6}\in U\right\}$

라 할 때, $n(A_k\cap B^C)=2$를 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오.

풀이 $\dfrac{36-x}{6}$가 자연수가 되려면 x는 6의 배수이어야 하므로

$B=\{6, 12, 18, 24, 30\}$

한편 $x\in A_k$이면 $x(y-k)=36$에서 $\quad y=\dfrac{36}{x}+k$

따라서 x는 36의 약수이고 $y\le 30$이어야 하므로 $\dfrac{36}{x}+k\le 30$이고, 36의 약수 중 30 이하인 수는

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18

이다. 그런데 $x=1$이면 $36+k>30$이므로 $\quad x\ne 1$

따라서 A_k의 원소가 될 수 있는 수는

2, 3, 4, 6, 9, 12, 18

$\therefore A_k\subset\{2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$

이때 $A_k\cap B^C=A_k-B$이므로 $\quad A_k-B\subset\{2, 3, 4, 9\}$

(i) $2\in A_k-B$일 때

$x=2$이면 $\quad y=18+k$

이때 $18+k\le 30$에서 $\quad k\le 12$

(ii) $3\in A_k-B$일 때

$x=3$이면 $\quad y=12+k$

이때 $12+k\le 30$에서 $\quad k\le 18$

(iii) $4\in A_k-B$일 때

$x=4$이면 $\quad y=9+k$

이때 $9+k\le 30$에서 $\quad k\le 21$

(iv) $9\in A_k-B$일 때

$x=9$이면 $\quad y=4+k$

이때 $4+k\le 30$에서 $\quad k\le 26$

이상에서

$1\le k\le 12$이면 $\quad A_k-B=\{2, 3, 4, 9\}$

$13\le k\le 18$이면 $\quad A_k-B=\{3, 4, 9\}$

$19\le k\le 21$이면 $\quad A_k-B=\{4, 9\}$

$22\le k\le 26$이면 $\quad A_k-B=\{9\}$

즉 $n(A_k\cap B^C)=2$를 만족시키는 k의 값의 범위는

$19\le k\le 21$

이므로 구하는 자연수 k의 값의 합은

$19+20+21=60$ 답 60

0560 Step 1 M_0의 원소의 꼴을 찾아 거듭제곱을 계산한다.

ㄱ. $A\in M_0$이면 $A=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$의 꼴이므로

$A^2=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & b^2\end{pmatrix}$,

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & b^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^3 & 0\\ 0 & b^3\end{pmatrix}$,

$\vdots$

$\therefore A^n=\begin{pmatrix}a^n & 0\\ 0 & b^n\end{pmatrix}\in M_0$ (참)

Step 2 M_1, M_{-1}의 원소의 꼴을 찾아 행렬의 곱셈을 계산한다.

ㄴ. $A\in M_1$이면 $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ a & 0\end{pmatrix}$의 꼴이고

$B\in M_{-1}$이면 $B=\begin{pmatrix}0 & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}$의 꼴이므로

$AB+BA=\begin{pmatrix}0 & 0\\ a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ a & 0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & ab\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}ab & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ab & 0\\ 0 & ab\end{pmatrix}\in M_0$ (참)

Step 3 M_1, M_{-1}의 공통인 원소의 꼴을 구한다.

ㄷ. ㄴ에 의하여 $\quad M_1\cap M_{-1}=\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$

$\therefore M_1\cap M_{-1}\ne\varnothing$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

0561 Step 1 집합 A의 조건을 찾는다.

$B=\{2^1, 2^2, 2^3\}$이고 $n(B-A)=1$이므로

$\{2^1, 2^2\}\subset A$ 또는 $\{2^1, 2^3\}\subset A$ 또는 $\{2^2, 2^3\}\subset A$

Step 2 각 경우에서 집합 A_1, A_2, …, A_k의 원소 중 최소인 원소의 합을 구한다.

(i) $\{2^1, 2^2\}\subset A$일 때

ⓐ $1\in A$를 만족시키는 집합 A는 1, 2^1, 2^2은 원소로 갖고, 2^3은 원소로 갖지 않으므로 집합 A의 개수는

$2^{6-3-1}=2^2=4$

이고, 이때의 a_i의 값은 모두 1이므로 그 합은

$4\times 1=4$

ⓑ $1\notin A$를 만족시키는 집합 A는 2^1, 2^2은 원소로 갖고, 1, 2^3은 원소로 갖지 않으므로 집합 A의 개수는

$2^{6-2-2}=2^2=4$

이고, 이때의 a_i의 값은 모두 2^1이므로 그 합은

$4\times 2^1=8$

(ii) $\{2^1, 2^3\} \subset A$일 때

ⓐ $1 \in A$를 만족시키는 집합 A는 1, 2^1, 2^3은 원소로 갖고, 2^2은 원소로 갖지 않으므로 집합 A의 개수는

$2^{6-3-1}=2^2=4$

이고, 이때의 a_i의 값은 모두 1이므로 그 합은

$4 \times 1=4$

ⓑ $1 \notin A$를 만족시키는 집합 A는 2^1, 2^3은 원소로 갖고, 1, 2^2은 원소로 갖지 않으므로 집합 A의 개수는

$2^{6-2-2}=2^2=4$

이고, 이때의 a_i의 값은 모두 2^1이므로 그 합은

$4 \times 2^1=8$

(iii) $\{2^2, 2^3\} \subset A$일 때

ⓐ $1 \in A$를 만족시키는 집합 A는 1, 2^2, 2^3은 원소로 갖고, 2^1은 원소로 갖지 않으므로 집합 A의 개수는

$2^{6-3-1}=2^2=4$

이고, 이때의 a_i의 값은 모두 1이므로 그 합은

$4 \times 1=4$

ⓑ $1 \notin A$를 만족시키는 집합 A는 2^2, 2^3은 원소로 갖고, 1, 2^1은 원소로 갖지 않으므로 집합 A의 개수는

$2^{6-2-2}=2^2=4$

이고, 이때의 a_i의 값은 모두 2^2이므로 그 합은

$4 \times 2^2=16$

Step 3 $a_1+a_2+a_3+ \cdots +a_k$의 값을 구한다.

이상에서

$a_1+a_2+a_3+ \cdots +a_k=(4+8)+(4+8)+(4+16)$

$=44$ 답 44

0562 Step 1 $n(A \cap B)$의 범위를 구한다.

$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$

$=10-n(A \cap B)$

이때 $n(A \cup B) \le n(U)=9$이므로

$10-n(A \cap B) \le 9$ $\therefore n(A \cap B) \ge 1$ …… ㉠

또 $n(A \cap B) \le n(A)=4$이므로

$n(A \cap B) \le 4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $1 \le n(A \cap B) \le 4$

Step 2 $d(A, B)$를 $n(A \cup B)$, $n(A \cap B)$에 대한 식으로 나타낸다.

$(A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)=(A \cup B)-(A \cap B)$이므로

$$d(A, B)=\frac{n(A \cup B)-n(A \cap B)}{n(A \cup B)}$$

$$=1-\frac{n(A \cap B)}{n(A \cup B)}$$

Step 3 모든 $d(A, B)$의 값의 곱을 구한다.

$n(A \cap B)=1$이면 $n(A \cup B)=10-1=9$이므로

$d(A, B)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

$n(A \cap B)=2$이면 $n(A \cup B)=10-2=8$이므로

$d(A, B)=1-\frac{2}{8}=\frac{3}{4}$

$n(A \cap B)=3$이면 $n(A \cup B)=10-3=7$이므로

$d(A, B)=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$

$n(A \cap B)=4$이면 $n(A \cup B)=10-4=6$이므로

$d(A, B)=1-\frac{4}{6}=\frac{1}{3}$

따라서 모든 $d(A, B)$의 값의 곱은

$\frac{8}{9} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{7} \times \frac{1}{3}=\frac{8}{63}$ 답 $\frac{8}{63}$

0563 Step 1 집합 $A \cap B$를 구한다.

$p \in U$에 대하여 $\frac{p}{3} \in U$이려면 $p \in \{3, 6, 9\}$

이때 $n(A \cap B)=2$이고 $(A \cap B) \subset \{3, 6, 9\}$이므로

$A \cap B=\{3, 6\}$ 또는 $A \cap B=\{3, 9\}$ 또는 $A \cap B=\{6, 9\}$

Step 2 집합 $A \cap B$의 각 경우에 대하여 집합 $B-A$를 구한다.

$p \in \{3, 6, 9\}$인 p에 대하여 p, $\frac{p}{3}$, $\frac{p}{3}+4$를 순서쌍 $\left(p, \frac{p}{3}, \frac{p}{3}+4\right)$로 나타내면

$(3, 1, 5)$, $(6, 2, 6)$, $(9, 3, 7)$

$3 \in A \cap B$이면 $1 \in B-A$, $5 \in A$

$6 \in A \cap B$이면 $2 \in B-A$, $6 \in A$

$9 \in A \cap B$이면 $3 \in B-A$, $7 \in A$

또 $q \in U$에 대하여 $q+4 \in U$이려면 $q \le 5$

$\therefore (B-A) \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(i) $A \cap B=\{3, 6\}$일 때

1, 2는 집합 $B-A$의 원소이고, 5, 6은 집합 A의 원소이다.

이때 남은 원소 4, 7, 8, 9 중 집합 $B-A$의 원소가 될 수 있는 수는 4뿐이므로

$B-A=\{1, 2\}$ 또는 $B-A=\{1, 2, 4\}$

따라서 $n(B-A)=4$를 만족시키지 않는다.

(ii) $A \cap B=\{3, 9\}$일 때

1, 3은 집합 $B-A$의 원소이고, 5, 7은 집합 A의 원소이다.

그런데 3이 서로소인 두 집합 $A \cap B$와 $B-A$에 모두 포함되므로 모순이다.

(iii) $A \cap B=\{6, 9\}$일 때

2, 3은 집합 $B-A$의 원소이고, 6, 7은 집합 A의 원소이다.

이때 남은 원소 1, 4, 5, 8 중 집합 $B-A$의 원소가 될 수 있는 수는 1, 4, 5이고 $n(B-A)=4$이어야 하므로

$B-A=\{1, 2, 3, 4\}$ 또는 $B-A=\{1, 2, 3, 5\}$

또는 $B-A=\{2, 3, 4, 5\}$

그런데 $1 \in B-A$이면 $5 \in A$이고, 두 집합 $B-A$와 A는 서로소이므로 집합 $B-A$는 1과 5를 동시에 원소로 가질 수 없다.

$\therefore B-A \ne \{1, 2, 3, 5\}$

이상에서

$B-A=\{1, 2, 3, 4\}$ 또는 $B-A=\{2, 3, 4, 5\}$

Step 3 집합 $B-A$의 가장 큰 원소와 가장 작은 원소의 곱을 모두 구한다.

$B-A=\{1, 2, 3, 4\}$일 때 가장 큰 원소와 가장 작은 원소의 곱은 $4\times1=4$

$B-A=\{2, 3, 4, 5\}$일 때 가장 큰 원소와 가장 작은 원소의 곱은 $5\times2=10$

따라서 구하는 곱은 4, 10이다. 답 4, 10

0564 Step 1 $A-B$의 원소 중 가장 큰 수가 2일 때, 순서쌍 (A, B)의 개수를 구한다.

조건 (가)에서 $n(A-B)=n(B-A)=2$

$A-B$의 원소 중 가장 큰 수를 α, $A\cap B$의 원소를 β라 하면 조건 (다)에 의하여 가능한 α의 값은 2, 3, 4이다.

(i) $\alpha=2$일 때

$A-B=\{1, 2\}$이고 조건 (나)에 의하여 $\beta=4$ 또는 $\beta=6$이다.

$\beta=4$이면 $B-A$는 남은 원소 3, 5, 6 중에서 2개를 선택하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_3C_2={}_3C_1=3$

$\beta=6$이면 $B-A$는 남은 원소 3, 4, 5 중에서 2개를 선택하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_3C_2={}_3C_1=3$

따라서 순서쌍 (A, B)의 개수는

$3+3=6$

Step 2 $A-B$의 원소 중 가장 큰 수가 3일 때, 순서쌍 (A, B)의 개수를 구한다.

(ii) $\alpha=3$일 때

$A-B=\{1, 3\}$ 또는 $A-B=\{2, 3\}$

ⓐ $A-B=\{1, 3\}$이면 조건 (나)에 의하여 $\beta=5$이다.

이때 조건 (다)에 의하여 $2\notin B-A$이므로

$B-A=\{4, 6\}$

ⓑ $A-B=\{2, 3\}$이면 조건 (나)에 의하여 $\beta=4$ 또는 $\beta=6$이다.

이때 조건 (다)에 의하여 $1\notin B-A$

$\beta=4$이면 $B-A=\{5, 6\}$

$\beta=6$이면 $B-A=\{4, 5\}$

ⓐ, ⓑ에서 순서쌍 (A, B)의 개수는

$1+2=3$

Step 3 $A-B$의 원소 중 가장 큰 수가 4일 때, 순서쌍 (A, B)의 개수를 구한다.

(iii) $\alpha=4$일 때

조건 (다)에 의하여 $B-A=\{5, 6\}$

조건 (나)에 의하여 $2\in A$이어야 하므로

$A=\{1, 2, 4\}$ 또는 $A=\{2, 3, 4\}$

$A=\{1, 2, 4\}$이면 $\beta=1$ 또는 $\beta=2$

$A=\{2, 3, 4\}$이면 $\beta=2$ 또는 $\beta=3$

따라서 순서쌍 (A, B)의 개수는

$2+2=4$

Step 4 조건을 만족시키는 순서쌍 (A, B)의 개수를 구한다.

이상에서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$6+3+4=13$ 답 13

시험 만점 완성하기

본책 112~115쪽

0565 전략 두 집합 A, B의 모든 원소의 합은 두 집합 $A\cup B$, $A\cap B$의 모든 원소의 합과 같음을 이용한다.

집합 X의 모든 원소의 합을 $S(X)$라 하면

$S(A)+S(B)=S(A\cup B)+S(A\cap B)$

$=(2+4+5+9)+4$

$=24$ 답 ②

0566 전략 집합 B, C의 원소를 구하고 주어진 집합 사이의 포함 관계를 파악한다.

$B=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $C=\{-1, 0, 1\}$

ㄱ. $A\subset B$이므로 $B^C\subset A^C$

따라서 두 집합 A^C, B^C는 서로소가 아니다.

ㄴ. $B^C\cap C=C-B=\varnothing$이므로 두 집합 B^C, C는 서로소이다.

ㄷ. $A=C$이므로 $A^C\cap C=A^C\cap A=\varnothing$

따라서 두 집합 A^C, C는 서로소이다.

이상에서 서로소인 집합끼리 짝 지은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0567 전략 구하는 집합을 원소나열법으로 나타내어 본다.

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $B=\{1, 2, 5, 10\}$

① $A\cap B=\{1, 10\}$이므로 $6\notin A\cap B$

② $B-A=\{2, 5\}$이므로 $2\in B-A$

③ $A-B=\{3, 6, 7\}$이므로 집합 $A-B$의 원소의 개수는 3이다.

④ $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$이므로 집합 $A^C\cup B^C$의 원소의 개수는 8이다.

⑤ $A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10\}$

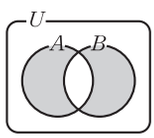
집합 $A\cup B$와 서로소인 집합은 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10을 원소로 갖지 않아야 하므로 구하는 집합의 개수는

$2^{10-7}=2^3=8$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0568 전략 벤다이어그램을 이용하여 각 원소가 속하는 집합을 확인한다.

$(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



즉 원소 2, 9, 11은 $A\cap B$에 속하지 않으므로

$9\in A-B$ 또는 $9\in B-A$이다.

이때 $9\in A-B$이면 $k+1=9$에서 $k=8$이므로

$B=\{11, 25\}$ $\therefore B\not\subset U$

따라서 $9\in B-A$이고 $k+1\in A\cap B$이므로

$B=\{k+1, 9\}$

(i) $k+3=9$일 때

$k=6$이므로 $A=\{2, 7, 11\}$, $B=\{7, 9\}$

(ii) $k^2-5k+1=9$일 때

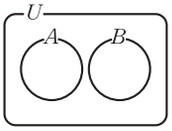
$k+3\notin U$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $k=6$ 답 ①

0569 전략 $A-B=A$이면 $A\cap B=\varnothing$임을 이용한다.

$A-B=A$이므로 $A\cap B=\varnothing$

이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



ㄱ. $B\subset A^C$ (거짓)

ㄷ. $B-A=B$ (거짓)

ㄹ. $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C=\varnothing^C=U$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

0570 전략 $A\cap B=A$이면 $A\subset B$임을 이용하여 집합 사이의 포함 관계를 구한다.

$B-A=\{1, 11, 13\}$이고 $(B-A)\cap C=\varnothing$에서 집합 C는 1, 11, 13을 원소로 갖지 않는다.

또 $B\cap C=C$에서 $C\subset B$이므로 집합 C는 집합 B의 부분집합이다.

따라서 집합 C의 개수는 $2^{5-3}=2^2=4$ 답 ②

0571 전략 집합의 연산 법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

ㄱ. $(A-B)-C=(A\cap B^C)\cap C^C$

$=A\cap(B^C\cap C^C)$

$=A\cap(B\cup C)^C$

$=A-(B\cup C)$ (참)

ㄴ. $A\cap(A-B^C)^C=A\cap(A\cap B)^C$

$=A-(A\cap B)=A-B$ (참)

ㄷ. $(A\cup B)\cap(A-B)^C=(A\cup B)\cap(A\cap B^C)^C$

$=(A\cup B)\cap(A^C\cup B)$

$=(A\cap A^C)\cup B$

$=\varnothing\cup B=B$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0572 전략 자연수 m, n에 대하여 $A_m\cap A_n$은 m과 n의 공약수의 집합임을 이용한다.

$A_{36}\cap A_{54}$는 36과 54의 최대공약수인 18의 약수의 집합이므로

$A_{36}\cap A_{54}=A_{18}$ $\therefore A_n\subset A_{18}$

따라서 자연수 n은 18의 양의 약수이어야 하므로 2 이상의 자연수 n은 2, 3, 6, 9, 18의 5개이다. 답 ③

0573 전략 각 집합을 수직선 위에 나타낸 후 $A\cap B$와 $A\cup B$를 구한다.

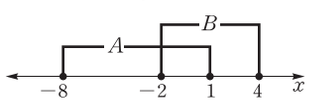
$x^2+7x-8\le0$에서 $(x+8)(x-1)\le0$

$\therefore -8\le x\le1$ $\therefore A=\{x\mid-8\le x\le1\}$

$x^2-2x-8\le0$에서 $(x+2)(x-4)\le0$

$\therefore -2\le x\le4$ $\therefore B=\{x\mid-2\le x\le4\}$

두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$A\cap B=\{x\mid-2\le x\le1\}$, $A\cup B=\{x\mid-8\le x\le4\}$

따라서 집합 $A\cap B$의 원소의 최댓값은 1이고, 집합 $A\cup B$의 원소의 최솟값은 -8이므로

$a=1$, $b=-8$ $\therefore ab=-8$ 답 ①

0574 전략 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$이면 $A\cap B=\varnothing$이다.

조건 (가)에서 $n(A\cap B)=0$이므로 $A\cap B=\varnothing$

조건 (나)에서

$(A\cup C)\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup C=\varnothing\cup C=C$

이므로

$n(C)=3\times n(B-C)=3\times\{n(B\cup C)-n(C)\}$

$4\times n(C)=3\times n(B\cup C)$

$\therefore n(C)=\frac{3}{4}\times n(B\cup C)=\frac{3}{4}\times16=12$ 답 ④

0575 전략 주어진 조건을 집합으로 나타내어 본다.

1학년 학생 전체의 집합을 U, 물리학, 화학, 지구과학을 선택한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(U)=90$, $n(A)=58$, $n(B)=65$, $n(C)=21$,

$n(A\cap B\cap C)=10$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\le n(U)$이므로

$58+65-n(A\cap B)\le90$ $\therefore n(A\cap B)\ge33$

이때 물리학과 화학 두 과목만 선택한 학생 수는

$n(A\cap B)-n(A\cap B\cap C)\ge33-10=23$

지구과학을 선택한 학생은 모두 화학을 선택하였으므로 물리학과 지구과학 두 과목만 선택한 학생은 없다.

또 화학과 지구과학 두 과목만 선택한 학생 수는

$n(B\cap C)-n(A\cap B\cap C)=n(C)-n(A\cap B\cap C)$

$=21-10=11$

따라서 세 과목 중 두 과목만 선택한 학생 수의 최솟값은

$23+11=34$ 답 ⑤

0576 전략 집합의 포함 관계를 이용하여 유한집합을 추론한다.

$(A\cap B)\subset A$이므로 조건 (가)에서 $\{4, 8\}\subset A$

즉 4, 8이 모두 a의 배수이므로

$a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=4$

이때 $a=1$이면 $A=U$가 되어 $B-A=\varnothing$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 $a=2$ 또는 $a=4$이므로

$A=\{2, 4, 6, \cdots, 24\}$ 또는 $A=\{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$

또 $(A\cap B)\subset B$이므로 조건 (가)에서 $\{4, 8\}\subset B$

즉 4, 8이 모두 b의 약수이므로

$b=8$ 또는 $b=16$ 또는 $b=24$

(i) $b=8$일 때

$B=\{1, 2, 4, 8\}$에서

$a=2$이면 $B-A=\{1\}$이므로 $n(B-A)=1$

$a=4$이면 $B-A=\{1, 2\}$이므로 $n(B-A)=2$

즉 $a=4$이므로 $A-B=\{12, 16, 20, 24\}$

따라서 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은 72이다.

(ii) $b=16$일 때

$B=\{1, 2, 4, 8, 16\}$에서

$a=2$이면 $B-A=\{1\}$이므로 $n(B-A)=1$

$a=4$이면 $B-A=\{1, 2\}$이므로 $n(B-A)=2$

즉 $a=4$이므로 $A-B=\{12, 20, 24\}$

따라서 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은 56이다.

(iii) $b=24$일 때

$B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$에서

$a=2$이면 $B-A=\{1, 3\}$이므로 $n(B-A)=2$

$a=4$이면 $B-A=\{1, 2, 3, 6\}$이므로 $n(B-A)=4$

즉 $a=2$이므로 $A-B=\{10, 14, 16, 18, 20, 22\}$

따라서 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은 100이다.

이상에서 집합 $A-B$의 모든 원소의 합의 최댓값은 100이다.

답 ⑤

0577 전략 $4\in A$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

$4\in A$이므로

$a^2-2a+1=4$, $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

(i) $a=-1$일 때

$A=\{-3, 0, 4\}$, $B=\{-8, -7, 1\}$이므로

$A\cap B=\varnothing$

(ii) $a=3$일 때

$A=\{-3, 0, 4\}$, $B=\{-3, 1, 4\}$이므로

$A\cap B=\{-3, 4\}$

(i), (ii)에서 $a=3$

답 3

0578 전략 주어진 조건을 이용하여 집합 B에 반드시 속하는 원소를 구한다.

$(A\cup B)^C=\varnothing$에서

$A\cup B=\varnothing^C=U=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

이때 $A=\{2, 3, 7, 13, 17\}$이므로 집합 B는 5, 11, 19를 반드시 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 B의 개수는 집합 U의 부분집합 중 5, 11, 19를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{8-3}=2^5=32$

답 32

0579 전략 $(A\cap B)\cup(A\cap C)$를 간단히 한 후, 주어진 조건을 이용하여 원소를 구한다.

$A=\{-6, -5, -4, \cdots, 6\}$, $B\cup C=\{-7, -3, 1, 5, 9\}$

$\therefore (A\cap B)\cup(A\cap C)$

$=A\cap(B\cup C)$

$=\{-6, -5, -4, \cdots, 6\}\cap\{-7, -3, 1, 5, 9\}$

$=\{-3, 1, 5\}$

따라서 집합 $(A\cap B)\cup(A\cap C)$의 모든 원소의 합은

$-3+1+5=3$

답 3

0580 전략 주어진 조건을 집합으로 나타내어 본다.

학생 전체의 집합을 U, 영화, 연극, 뮤지컬을 관람한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(U)=115$, $n(A)=40$, $n(B)=45$

조건 (나)에서 $n(A\cap B)=25$이므로

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=40+45-25=60$

조건 (다)에서 $n((A\cup B\cup C)^C)=15$이므로

$n(A\cup B\cup C)=n(U)-n((A\cup B\cup C)^C)$

$=115-15=100$

$\therefore n(A\cup B\cup C)-n(A\cup B)=100-60=40$

따라서 뮤지컬만 관람한 학생 수는 40이다.

답 40

0581 전략 집합 $A\cap B$가 될 수 있는 경우를 생각해 본다.

$n(A\cap B)=2$이므로

$A\cap B=\{3, 5\}$ 또는 $A\cap B=\{3, 6\}$

또는 $A\cap B=\{5, 6\}$

(i) $A\cap B=\{3, 5\}$일 때

3과 5는 k의 약수이면서 $k\le20$이므로 $k=15$

이때 $A=\{1, 3, 5, 15\}$이므로

$A-B=\{1, 15\}$

따라서 $A-B$의 모든 원소의 합은 $1+15=16$

(ii) $A\cap B=\{3, 6\}$일 때

3과 6은 k의 약수이면서 $k\le20$이므로 $k=6, 12, 18$

ⓐ $k=6$일 때

$A=\{1, 2, 3, 6\}$이므로 $A-B=\{1, 2\}$

따라서 $A-B$의 모든 원소의 합은 $1+2=3$

ⓑ $k=12$일 때

$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로

$A-B=\{1, 2, 4, 12\}$

따라서 $A-B$의 모든 원소의 합은

$1+2+4+12=19$

ⓒ $k=18$일 때

$A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$이므로

$A-B=\{1, 2, 9, 18\}$

따라서 $A-B$의 모든 원소의 합은

$1+2+9+18=30$

(iii) $A\cap B=\{5, 6\}$일 때

5와 6은 k의 약수이면서 $k\le20$인 자연수 k는 존재하지 않는다.

이상에서 집합 $A-B$의 모든 원소의 합이 짝수가 되도록 하는 모든 k의 값의 합은

$15+18=33$

답 33

0582 전략 두 집합 $A-X$, $B-X$와 집합 $A\cap B$ 사이의 포함 관계를 구한다.

조건 (가)에서 $A-X=B-X$이고 $(A-X)\subset A$, $(B-X)\subset B$이므로

$(A-X)\subset(A\cap B)$, $(B-X)\subset(A\cap B)$

이때 $A\cap B=\{6, 7, 8\}$이므로

$(A-X)\subset\{6, 7, 8\}$에서 $\{4, 5\}\subset X$

$(B-X)\subset\{6, 7, 8\}$에서 $\{9, 10\}\subset X$

$\therefore \{4, 5, 9, 10\}\subset X$

이때 $n(X)=6$이므로 집합 X는 4, 5, 9, 10 이외에도 두 개의 원소를 더 가져야 한다.

조건 (나)에서

$X\cap(A^C\cap B^C)=X\cap(A\cup B)^C$

$=X\cap\{1, 2, 3\}\neq\varnothing$

이므로 집합 X는 1, 2, 3 중 적어도 하나는 원소로 갖는다.

따라서 집합 X의 모든 원소의 합이 최대이려면

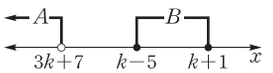
$3\in X$, $8\in X$

즉 $X=\{3, 4, 5, 8, 9, 10\}$일 때 집합 X의 모든 원소의 합이 최대이므로 그 합은

$3+4+5+8+9+10=39$ 답 39

0583 전략 각 집합을 수직선 위에 나타낸 후 k의 값의 범위를 구한다.

두 집합 A, B가 서로소이므로 두 집합을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다. … ❶



즉 $3k+7\le k-5$에서

$2k\le-12$ $\therefore k\le-6$ … ❷

따라서 k의 최댓값은 -6이다. … ❸

답 -6

단계	채점 요소	배점
❶	두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내기	1점
❷	k의 값의 범위 구하기	1점
❸	k의 최댓값 구하기	1점

0584 전략 집합 X와 세 집합 A, B, C의 포함 관계를 파악하여 집합 X의 원소가 될 수 있는 수를 찾는다.

$B\cap X=\varnothing$에서 두 집합 B와 X는 서로소이므로 집합 X의 모든 원소는 98과 서로소가 아니다. 이때 $98=2\times7^2$이므로 집합 X의 모든 원소는 2의 배수 또는 7의 배수이다.

또 $C\cup X=C$에서 $X\subset C$이므로 집합 X의 모든 원소는 20과 서로소이다.

이때 $20=2^2\times5$이므로 집합 X의 모든 원소는 2의 배수도 아니고 5의 배수도 아니다.

따라서 집합 X의 모든 원소는 100 이하의 7의 배수 중에서 2의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 수이므로 집합 X의 원소가 될 수 있는 수는

7, 21, 49, 63, 77, 91 … ❶

따라서 집합 X는 집합 $\{7, 21, 49, 63, 77, 91\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 집합 X의 개수는

$2^6-1=63$ … ❷

답 63

단계	채점 요소	배점
❶	집합 X의 원소가 될 수 있는 수 구하기	3점
❷	집합 X의 개수 구하기	2점

0585 전략 집합 X의 원소를 k에 대한 식으로 나타내어 본다.

$X=\{x+y\,|\,x\in A, y\in B\}$

$=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}\cup\{k+2, k+4, k+6\}$ … ❶

이때 $n(X)=9$가 되려면

$n(\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}\cap\{k+2, k+4, k+6\})=2$

이어야 하므로

$k+2<3\le k+4$ 또는 $k+4\le10<k+6$

$\therefore -1\le k<1$ 또는 $4<k\le6$ … ❷

따라서 모든 정수 k의 값의 합은

$-1+0+5+6=10$ … ❸

답 10

단계	채점 요소	배점
❶	집합 X를 원소나열법으로 나타내기	1점
❷	k의 값의 범위 구하기	3점
❸	모든 정수 k의 값의 합 구하기	1점

0586 전략 집합의 연산 법칙을 이용하여 조건을 만족시키는 집합을 추론한다.

$A^C\cup B=(A\cap B^C)^C=(A-B)^C$이므로

$n((A-B)^C)=n(A^C\cup B)=7$

$A-B=\{4, 7\}$에서

$n(A-B)=2$

$(A-B)\cup(A-B)^C=U$, $(A-B)\cap(A-B)^C=\varnothing$이므로

$n(U)=n(A-B)+n((A-B)^C)$

$=2+7=9$

$\therefore p=9$ … ❶

즉 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$이고 집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합이 서로 같으므로 집합 $B-A$의 모든 원소의 합은 집합 $A-B=\{4, 7\}$의 모든 원소의 합인 11과 같다.

따라서 q는 4와 7을 약수로 갖지 않고, 모든 약수의 합이 11 이상이어야 하므로

$q=6$ 또는 $q=9$

(i) $q=6$일 때

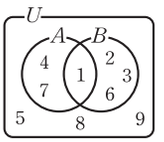
$B=\{1, 2, 3, 6\}$이므로 $B-A=\{2, 3, 6\}$이면 집합 $B-A$의 원소의 합이 $2+3+6=11$이 되어 조건을 만족시킨다.

(ii) $q=9$일 때

$B=\{1, 3, 9\}$이므로 원소의 합이 11이 되는 집합 $B-A$는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $q=6$ … ❷

따라서 집합 U, A, B를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$

$=\{5, 8, 9\}$

$\therefore n(A^C\cap B^C)=3$ … ❸

답 3

단계	채점 요소	배점
❶	p의 값 구하기	2점
❷	q의 값 구하기	3점
❸	$n(A^C\cap B^C)$ 구하기	1점

07 명제

셀프 CHECK

본책 116~117쪽

A 답 ㄱ, ㄷ

B 답 (1) 참 (2) 거짓 (3) 참

C 답 (1) 참 (2) 참 (3) 거짓 (4) 거짓

D 답 ④

E 답 (1) 필요조건 (2) 필요충분조건 (3) 충분조건

F 답 (가) b^2 (나) 0

G 답 (1) 2 (2) $6\sqrt{2}$

H 답 최댓값: 5, 최솟값: -5

내신유형 다지기

본책 118~131쪽

유형 106 명제

본책 118쪽

(1) 참인 문장 또는 식, 거짓인 문장 또는 식 ➜ 명제이다.
(2) 참, 거짓을 판별할 수 없는 문장 또는 식 ➜ 명제가 아니다.

0587 ① $\frac{1}{3}$은 정수가 아니므로 거짓인 명제이다.
② π는 무리수이므로 참인 명제이다.
③ 1은 소수가 아니므로 거짓인 명제이다.
④ x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
⑤ 12의 배수는 4의 배수이므로 참인 명제이다.
따라서 명제가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

0588 ㄱ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
ㄴ. 거짓인 명제이다.
ㄷ. 참인 명제이다.
ㄹ. 참인 명제이다.
ㅁ. x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
이상에서 명제인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ의 3개이다. 답 ③

0589 ① x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
② 참인 명제이다.
③ 12의 양의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12의 6개이므로 참인 명제이다.
④ 참인 명제이다.
⑤ $171=3^2\times19$에서 171은 소수가 아니므로 거짓인 명제이다.
따라서 거짓인 명제는 ⑤이다. 답 ⑤

유형 107 명제와 조건의 부정

본책 118쪽

(1) '$x=a$'의 부정 ➜ '$x\neq a$'
(2) '$a\le x\le b$'의 부정 ➜ '$x<a$ 또는 $x>b$'
(3) '또는'의 부정 ➜ '그리고'
(4) '그리고'의 부정 ➜ '또는'

0590 'p 그리고 $\sim q$'의 부정은 '$\sim p$ 또는 q'
$\sim p$: $x\le0$ 또는 $x\ge6$, q: $-2<x\le2$이므로 '$\sim p$ 또는 q'는
$x\le2$ 또는 $x\ge6$ 답 ④

0591 ① $51=3\times17$이므로 합성수이다.
즉 주어진 명제가 참이므로 그 부정은 거짓이다.
② 2는 짝수이면서 소수이다.
즉 주어진 명제가 참이므로 그 부정은 거짓이다.
③ $-1^7+1=(-1)^7+1=0$
즉 주어진 명제가 참이므로 그 부정은 거짓이다.
④ 6은 32의 약수가 아니다.
즉 주어진 명제가 거짓이므로 그 부정은 참이다.
⑤ 마름모는 평행사변형이다.
즉 주어진 명제가 참이므로 그 부정은 거짓이다.
따라서 그 부정이 참인 명제는 ④이다. 답 ④

0592 ㄴ. $\sim p$: a^2은 0보다 작다.
ㄷ. $\sim p$: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq0$이므로
$a\neq b$ 또는 $b\neq c$ 또는 $c\neq a$
이상에서 조건 p와 그 부정 $\sim p$를 바르게 연결한 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

다른 풀이 ㄷ. p: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$에서
$a=b=c$
즉 p: $a=b=c$이므로 $\sim p$: $a\neq b$ 또는 $b\neq c$ 또는 $c\neq a$

유형 108 진리집합

본책 119쪽

전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때
(1) $\sim p$의 진리집합 ➜ P^C
(2) 'p 또는 q'의 진리집합 ➜ $P\cup Q$
(3) 'p 그리고 q'의 진리집합 ➜ $P\cap Q$

0593 $U=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
$(x+3)(x+2)(x-6)=0$에서
$x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=6$
$\therefore P=\{-2, 6\}$
6의 양의 약수는 1, 2, 3, 6이므로 $Q=\{1, 2, 3, 6\}$
따라서 조건 'p 또는 q'의 진리집합은
$P\cup Q=\{-2, 1, 2, 3, 6\}$
이므로 모든 원소의 합은 $-2+1+2+3+6=10$ 답 10

0594 r: $-3<x\le 1$에서 $x>-3$이고 $x\le 1$

p: $x\le -3$에서 $\sim p$: $x>-3$

q: $x>1$에서 $\sim q$: $x\le 1$

따라서 조건 '$-3<x\le 1$'은 '$\sim p$ 그리고 $\sim q$'이므로 구하는 진리집합은

$P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C$ 답 ②

0595 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,0<x\le 5\}$, $Q=\{x\,|\,-2\le x<8\}$ … ❶

조건 'p 또는 $\sim q$'의 부정은 '$\sim p$ 그리고 q'이므로 조건 '$\sim p$ 그리고 q'의 진리집합은 $P^C\cap Q$이다.

이때 $P^C=\{x\,|\,x\le 0$ 또는 $x>5\}$이므로

$P^C\cap Q=\{x\,|\,-2\le x\le 0$ 또는 $5<x<8\}$ … ❷

따라서 정수 x는 -2, -1, 0, 6, 7이므로 그 합은

$-2+(-1)+0+6+7=10$ … ❸

답 10

단계	채점 요소	비율
❶	두 조건 p, q의 진리집합 구하기	30 %
❷	조건 'p 또는 $\sim q$'의 부정의 진리집합 구하기	50 %
❸	모든 정수 x의 값의 합 구하기	20 %

유형 109 명제의 참, 거짓 → 본책 119쪽

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때

(1) $P\subset Q$이면 명제 $p\longrightarrow q$는 참이다.

(2) $P\not\subset Q$이면 명제 $p\longrightarrow q$는 거짓이다.

참고 명제 $p\longrightarrow q$가 거짓임을 보이려면 p는 만족시키지만 q는 만족시키지 않는 반례를 찾는다.

0596 ① [반례] $x=18$이면 x는 18의 약수이지만 9의 약수는 아니다.

② [반례] $x=-2$이면 $x^2=4$이지만 $x\ne 2$이다.

③ [반례] $x=-1$이면 $x\ne 1$이지만 $x^2=1$이다.

④ [반례] $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$이면 x 또는 y는 무리수이지만 $xy=-2$이므로 무리수가 아니다.

⑤ $(x-y)(y-z)=0$이면

$x-y=0$ 또는 $y-z=0$

$\therefore x=y$ 또는 $y=z$

따라서 참인 명제는 ⑤이다. 답 ⑤

0597 ㄱ. [반례] $x=1$, $y=0$이면 $xy=0$이지만 $x^2+y^2\ne 0$이다.

ㄴ. $|x|+|y|=0$이면 $x=0$, $y=0$이므로 $xy=0$이다.

ㄷ. [반례] $x=-2$, $y=0$, $z=1$이면 $x<y<z$이지만 $xy=yz=0$이다.

이상에서 참인 명제인 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

0598 ㄱ. [반례] $x=-1$, $y=2$이면 $x+y>0$이지만 $xy<0$이다.

ㄴ. $x^3=y^3$, 즉 $x^3-y^3=0$에서

$(x-y)(x^2+xy+y^2)=0$

$x-y=0$이면 $x=y$ …… ㉠

또 $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2=0$이면

$x+\frac{1}{2}y=0$, $y=0$ $\therefore x=y=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x=y$

ㄷ. [반례] $x=1$, $y=-2$이면 $xy<0$이지만

$|x-y|=|1-(-2)|=3$,

$||x|-|y||=||1|-|-2||=|-1|=1$

이므로 $|x-y|\ne||x|-|y||$이다.

ㄹ. $0<x+y<xy$에서 $xy>0$이려면

$x>0$, $y>0$ 또는 $x<0$, $y<0$

이때 $x+y>0$이므로 $x>0$, $y>0$

따라서 $0<x+y<xy$이면 $x>0$, $y>0$이다.

ㅁ. [반례] $x=0$, $y=1$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $x=0$이다.

이상에서 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄹ의 2개이다. 답 ②

유형 110 거짓인 명제의 반례 → 본책 120쪽

전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $p\longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 집합 $P\cap Q^C=P-Q$의 원소이다.

0599 명제 'p이면 $\sim q$이다.'가 거짓임을 보이는 원소는 집합 P에는 속하고 집합 Q^C에는 속하지 않으므로 집합 $P\cap(Q^C)^C=P\cap Q$의 원소이다. 답 ①

0600 두 조건 p, q를

p: n은 5의 배수이다., q: n은 짝수이다.

라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$, $Q=\{2, 4, 6, \cdots, 30\}$

이때 명제 'p이면 q이다.'가 거짓임을 보이는 원소는 집합 P에는 속하고 집합 Q에는 속하지 않으므로 집합 $P\cap Q^C$의 원소이다.

$P\cap Q^C=P-Q=\{5, 15, 25\}$이므로 명제가 거짓임을 보이는 자연수 n은 5, 15, 25이다.

따라서 구하는 합은 $5+15+25=45$ 답 ⑤

0601 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

p: $x(x-3)\le 0$에서 $0\le x\le 3$이므로

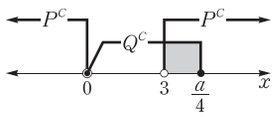
$P=\{x\,|\,0\le x\le 3\}$

q: $x(4x-a)>0$에서 $x<0$ 또는 $x>\frac{a}{4}$이므로

$Q=\left\{x\,\middle|\,x<0$ 또는 $x>\frac{a}{4}\right\}$ … ❶

명제 $\sim q\longrightarrow p$가 거짓임을 보이는 원소는 집합 Q^C에는 속하고 집합 P에는 속하지 않으므로 집합 $Q^C\cap P^C$의 원소이다. … ❷

이때 $Q^C=\left\{x\,\middle|\,0\le x\le\frac{a}{4}\right\}$, $P^C=\{x\,|\,x<0$ 또는 $x>3\}$이므로 집합 $Q^C\cap P^C$를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



집합 $Q^C \cap P^C$의 정수인 원소가 오직 4뿐이므로

$4 \le \frac{a}{4} < 5$ $\therefore$ $16 \le a < 20$ … ❸

따라서 자연수 a는 16, 17, 18, 19의 4개이다. … ❹

답 4

단계	채점 요소	비율
❶	두 조건 p, q의 진리집합 구하기	30 %
❷	명제 $\sim q \longrightarrow p$가 거짓임을 보이는 반례가 속하는 집합 구하기	30 %
❸	a의 값의 범위 구하기	30 %
❹	자연수 a의 개수 구하기	10 %

유형 111 명제의 참, 거짓과 진리집합의 포함 관계 본책 120쪽

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때
(1) 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 $P \subset Q$이다.
(2) $P \subset Q$이면 명제 $p \longrightarrow q$가 참이다.

0602 주어진 벤다이어그램에서 $Q \subset R$, $Q \subset P^C$, $P \subset Q^C$이므로 세 명제

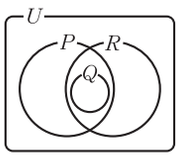
$q \longrightarrow r$, $q \longrightarrow \sim p$, $p \longrightarrow \sim q$

는 모두 참이다.
따라서 항상 참인 명제는 ②이다. 답 ②

0603 두 명제 $q \longrightarrow p$, $\sim r \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로

$Q \subset P$, $R^C \subset Q^C$ $\therefore$ $Q \subset P$, $Q \subset R$

이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



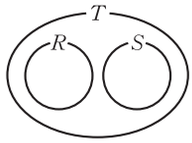
① $P \cap Q \cap R = Q$
② $P \cup Q \cup R = P \cup R$
③ $P \cap (Q \cup R) = P \cap R$
④ $Q \cap (P \cup R) = Q$
따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0604 $Q \cap R = Q$에서 $Q \subset R$
$P^C \cup Q = Q$에서 $P^C \subset Q$
$\therefore$ $P^C \subset Q \subset R$
① $P^C \subset R$이므로 명제 $\sim p \longrightarrow r$는 참이다.
③ $Q \subset R$이므로 명제 $q \longrightarrow r$는 참이다.
④ $P^C \subset R$에서 $R^C \subset P$이므로 명제 $\sim r \longrightarrow p$는 참이다.
⑤ $Q \subset R$에서 $R^C \subset Q^C$이므로 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$는 참이다.
따라서 항상 참이라고 할 수 없는 것은 ②이다. 답 ②

0605 세 조건 r, s, t의 진리집합을 차례대로 R, S, T라 하면

$R = \{(a, b) \mid a < 0, b < 0\}$,
$S = \{(a, b) \mid a > 0, b < 0\}$,
$T = \{(a, b) \mid a \ne 0, b \ne 0\}$

이므로 세 집합 R, S, T 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $R \not\subset S$, $S \subset T$이고 $R \subset T$에서
$T^C \subset R^C$이므로

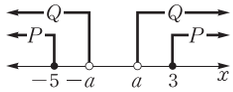
$F(r, s) + F(s, t) + 2F(\sim t, \sim r)$
$= 0 + 1 + 2 \times 1 = 3$ 답 3

참고 t: $|a| + |b| \ne 0$에서 $a \ne 0$ 또는 $b \ne 0$
이때 a, b는 0이 아닌 실수이므로 조건 t의 진리집합 T는 전체집합이다.
$\therefore$ $T^C = \varnothing$

유형 112 명제가 참이 되도록 하는 상수 구하기 본책 121쪽

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되도록 하는 미지수의 값을 구하려면 $P \subset Q$가 성립하도록 두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타낸다.

0606 $x^2 + 2x - 15 = (x+5)(x-3) \ge 0$에서
$x \le -5$ 또는 $x \ge 3$
$\therefore$ $P = \{x \mid x \le -5$ 또는 $x \ge 3\}$
$|x| > a$에서 $x < -a$ 또는 $x > a$
$\therefore$ $Q = \{x \mid x < -a$ 또는 $x > a\}$
명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서

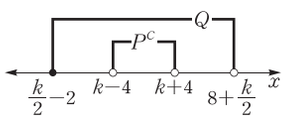


$-5 < -a$, $a < 3$
$\therefore$ $0 < a < 3$ ($\because$ $a > 0$)
따라서 자연수 a는 1, 2의 2개이다. 답 ②

0607 p: $|x-k| \ge 4$에서 $\sim p$: $|x-k| < 4$
$-4 < x-k < 4$ $\therefore$ $k-4 < x < k+4$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P^C = \{x \mid k-4 < x < k+4\}$,
$Q = \left\{x \middle| \frac{k}{2} - 2 \le x < 8 + \frac{k}{2}\right\}$

명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P^C \subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$\frac{k}{2} - 2 \le k - 4$, $k + 4 \le 8 + \frac{k}{2}$
$\frac{k}{2} \ge 2$, $\frac{k}{2} \le 4$ $\therefore$ $4 \le k \le 8$
따라서 자연수 k의 최댓값은 8이다. 답 8

0608 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 명제 $q \longrightarrow \sim p$가 참이므로 $Q \subset P^C$ …… ㉠
명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이므로
$Q^C \subset P$, 즉 $P^C \subset Q$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $P^C = Q$
p: $x^2 - ax + 16 > 0$에서 $\sim p$: $x^2 - ax + 16 \le 0$
$\therefore$ $P^C = \{x \mid x^2 - ax + 16 \le 0\}$

q: $x-2b=0$에서 $\quad Q=\{2b\}$

이때 $P^C=Q$이므로 $\quad \{x|x^2-ax+16\le 0\}=\{2b\}$

즉 이차부등식 $x^2-ax+16\le 0$의 해가 $x=2b$뿐이므로 이차함수 $y=x^2-ax+16$의 그래프가 $x=2b$에서 x축에 접해야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2-ax+16=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-a)^2-4\times 16=0, \quad a^2=64$

$\therefore a=8\ (\because a>0)$

$x^2-8x+16=(x-4)^2\le 0$에서 $\quad x=4$

즉 $2b=4$이므로 $\quad b=2$

$\therefore a+b=10$ 답 10

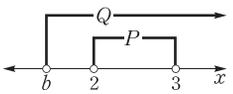
0609 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$Q=\{x|x>b\}$, $Q^C=\{x|x\le b\}$ … ❶

$a(x-2)(x-3)<0$에서 $a>0$이면 $2<x<3$이므로

$P=\{x|2<x<3\}$

명제 $p\longrightarrow q$가 참이려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



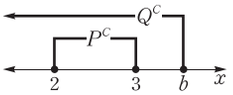
$b\le 2$

따라서 b의 최댓값은 2이므로 $\quad \alpha=2$ … ❷

또 $a(x-2)(x-3)<0$에서 $a<0$이면 $x<2$ 또는 $x>3$이므로

$P=\{x|x<2 \text{ 또는 } x>3\}$ $\quad \therefore P^C=\{x|2\le x\le 3\}$

명제 $\sim p\longrightarrow \sim q$가 참이려면 $P^C\subset Q^C$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$b\ge 3$

따라서 b의 최솟값은 3이므로 $\quad \beta=3$ … ❸

$\therefore \alpha+\beta=5$ … ❹

답 5

단계	채점 요소	비율
❶	q, $\sim q$의 진리집합 구하기	10 %
❷	α의 값 구하기	40 %
❸	β의 값 구하기	40 %
❹	$\alpha+\beta$의 값 구하기	10 %

0610 $|x-k|\le 1$에서 $\quad -1\le x-k\le 1$

$\therefore k-1\le x\le k+1$

$(x-1)(x-6)\le 0$에서 $\quad 1\le x\le 6$

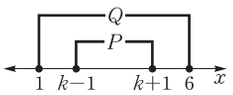
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|k-1\le x\le k+1\}$, $Q=\{x|1\le x\le 6\}$

이때 명제 $p\longrightarrow q$와 명제 $p\longrightarrow \sim q$가 모두 거짓이 되려면

$P\not\subset Q$이고 $P\not\subset Q^C$

$P\subset Q$를 만족시키는 k의 값의 범위는 오른쪽 그림에서



$k-1\ge 1$, $k+1\le 6$

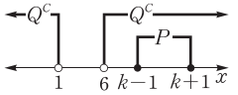
$\therefore 2\le k\le 5$

따라서 $P\not\subset Q$를 만족시키는 k의 값의 범위는

$k<2$ 또는 $k>5$ …… ㉠

한편 $Q^C=\{x|x<1 \text{ 또는 } x>6\}$이므로 $P\subset Q^C$인 경우는 다음 그림과 같다.





따라서 $P\subset Q^C$를 만족시키는 k의 값의 범위는

$k+1<1$ 또는 $k-1>6$

$\therefore k<0$ 또는 $k>7$

즉 $P\not\subset Q^C$를 만족시키는 k의 값의 범위는

$0\le k\le 7$ …… ㉡

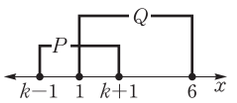
㉠, ㉡에서 명제 $p\longrightarrow q$와 명제 $p\longrightarrow \sim q$가 모두 거짓이 되도록 하는 k의 값의 범위는

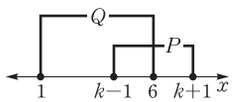
$0\le k<2$ 또는 $5<k\le 7$

따라서 정수 k는 0, 1, 6, 7이므로 모든 정수 k의 값의 합은

$0+1+6+7=14$ 답 ①

다른 풀이 $P\not\subset Q$이고 $P\not\subset Q^C$, 즉 $P\cap Q\ne\varnothing$이려면 두 집합 P, Q가 다음 그림과 같아야 한다.





즉 $k-1<1\le k+1$ 또는 $k-1\le 6<k+1$이어야 하므로

$0\le k<2$ 또는 $5<k\le 7$

0611 $P\ne\varnothing$이려면 $x^2-4x+a+2\le 0$을 만족시키는 실수 x가 존재해야 하므로 이차방정식 $x^2-4x+a+2=0$의 판별식을 D라 하면 $D\ge 0$이어야 한다. 즉

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-(a+2)\ge 0 \quad \therefore a\le 2$

따라서 $P\ne\varnothing$을 만족시키는 자연수 a는 1, 2이다.

또 $0<|x-b|\le 4$에서

$b-4\le x<b$ 또는 $b<x\le b+4$

이므로 $\quad Q=\{x|b-4\le x<b \text{ 또는 } b<x\le b+4\}$

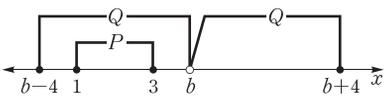
(i) $a=1$일 때

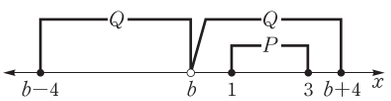
$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)\le 0$에서 $\quad 1\le x\le 3$

즉 $P=\{x|1\le x\le 3\}$이므로 $P\subset Q$가 되려면

$P\subset\{x|b-4\le x<b\}$ 또는 $P\subset\{x|b<x\le b+4\}$

이를 만족시키도록 두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.





즉 $b-4\le 1$, $3<b$ 또는 $b<1$, $3\le b+4$이므로

$3<b\le 5$ 또는 $-1\le b<1$

따라서 자연수 b의 값은 4, 5이므로 $P\subset Q$가 되도록 하는 순서쌍 (a, b)는 $\quad (1, 4), (1, 5)$

(ii) $a=2$일 때

$x^2-4x+4=(x-2)^2\le 0$에서 $\quad x=2$

즉 $P=\{2\}$이므로 $P\subset Q$가 되려면

$b-4\le 2<b$ 또는 $b<2\le b+4$

$\therefore\ 2<b\le 6$ 또는 $-2\le b<2$

따라서 자연수 b의 값은 1, 3, 4, 5, 6이므로 $P\subset Q$가 되도록 하는 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)$

(i), (ii)에서 구하는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는

$2+5=7$ 답 ③

유형 113 '모든'이나 '어떤'을 포함한 명제의 참, 거짓

본책 122쪽

(1) 명제 '모든 x에 대하여 p이다.'

➡ p를 만족시키지 않는 x가 하나라도 존재하면 거짓이다.

(2) 명제 '어떤 x에 대하여 p이다.'

➡ p를 만족시키는 x가 하나라도 존재하면 참이다.

0612 이차방정식 $x^2-2ax+8a-16=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(8a-16)\le 0,\quad a^2-8a+16\le 0$

$(a-4)^2\le 0\quad\therefore\ a=4$ 답 ④

0613 ① [반례] $x=0$이면 $x^2=0$이다.

② [반례] $x=1$이면 $x^2+3x-1=3>0$이다.

③ [반례] $x=0$이면 $|x|=x$이다.

④ $x^2<x$에서 $x^2-x<0,\quad x(x-1)<0$

$\therefore\ 0<x<1$

즉 '어떤 양수 x에 대하여 $x^2<x$이다.'는 참이다.

⑤ 이차방정식 $x^2-2x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-2=-1<0$

이므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2x+2>0$이다.

즉 '어떤 실수 x에 대하여 $x^2-2x+2\le 0$이다.'는 거짓이다.

따라서 참인 명제는 ④이다. 답 ④

0614 $f(x)=x^2-12x+n$이라 할 때, 주어진 명제가 참이 되기 위해서는 $2\le x\le 8$에서 $f(x)\ge 0$인 실수 x가 적어도 하나 존재해야 한다.

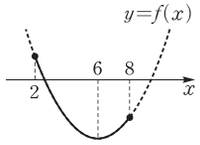
즉 주어진 범위에서의 함수 $f(x)$의 최댓값이 0 이상이어야 한다.

$f(x)=x^2-12x+n=(x-6)^2+n-36$

이므로 $2\le x\le 8$에서 $f(x)$의 최댓값은

$f(2)=n-20\ge 0\quad\therefore\ n\ge 20$

따라서 자연수 n의 최솟값은 20이다.



답 ②

0615 주어진 명제가 참이 되려면 방정식 $f(x)=5x+1$이 적어도 하나의 양의 실근을 가져야 한다.

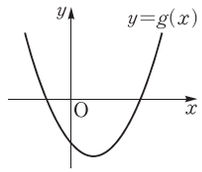
$x^3+kx^2+3kx+1=5x+1$에서

$x^3+kx^2+(3k-5)x=0$

$x(x^2+kx+3k-5)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x^2+kx+3k-5=0$

$g(x)=x^2+kx+3k-5$라 할 때, 이차방정식 $g(x)=0$의 양의 실근이 존재하려면 $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$g(0)=3k-5<0\quad\therefore\ k<\frac{5}{3}$

따라서 정수 k의 최댓값은 1이다. 답 1

참고 방정식 $g(x)=0$이 두 양의 실근을 갖거나 0과 다른 하나의 양의 실근을 가지려면

(두 근의 합)$=-k>0$, (두 근의 곱)$=3k-5\ge 0$

이어야 한다.

즉 $k<0$, $k\ge\frac{5}{3}$이므로 이를 만족시키는 실수 k는 존재하지 않는다.

0616 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2kx+4k+5>0$이므로 이차방정식 $x^2+2kx+4k+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(4k+5)<0,\quad k^2-4k-5<0$

$(k+1)(k-5)<0\quad\therefore\ -1<k<5$ ····· ㉠

어떤 실수 x에 대하여 $x^2=k-2$이므로

$k-2\ge 0\quad\therefore\ k\ge 2$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $2\le k<5$

따라서 두 조건 p, q가 모두 참인 명제가 되도록 하는 정수 k의 값은 2, 3, 4이므로 그 합은

$2+3+4=9$ 답 9

0617 명제 '선분 AB 위의 모든 점 P에 대하여 $\overline{AC}^2\ne\overline{AP}\times\overline{AB}$이다.'가 거짓이므로 명제의 부정인 '선분 AB 위의 어떤 점 P에 대하여 $\overline{AC}^2=\overline{AP}\times\overline{AB}$이다.'는 참이다.

직선 AB의 방정식은

$y=\frac{-2-6}{2-0}x+6$, 즉 $y=-4x+6$

점 P는 선분 AB 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(p,\ -4p+6)$ $(0\le p\le 2)$이라 하면

$\overline{AP}=\sqrt{p^2+(-4p)^2}=p\sqrt{17}\ (\because\ p\ge 0)$

$\overline{AC}^2=5^2+(1-6)^2=50$, $\overline{AB}=\sqrt{2^2+(-2-6)^2}=2\sqrt{17}$이므로

$50=p\sqrt{17}\times 2\sqrt{17}\quad\therefore\ p=\frac{25}{17}\quad\therefore\ \mathrm{P}\left(\frac{25}{17},\ \frac{2}{17}\right)$

따라서 $a=\frac{25}{17}$, $b=\frac{2}{17}$이므로

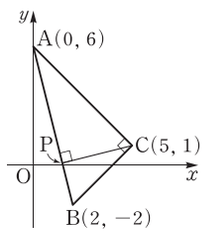
$17(a+b)=17\times\left(\frac{25}{17}+\frac{2}{17}\right)=27$ 답 ①

다른 풀이 $\overline{AB}^2=68$, $\overline{AC}^2=50$, $\overline{BC}^2=18$에서

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$

이므로 삼각형 ABC는 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

따라서 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 P라 하면



$\overline{AC}^2=\overline{AP}\times\overline{AB}$

직선 AB의 방정식은 $y=-4x+6$이므로 직선 CP의 방정식은

$y-1=\frac{1}{4}(x-5)$, 즉 $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$

두 직선 $y=-4x+6$과 $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$의 교점이 점 P이므로 이 두 식을 연립하여 풀면

$x=\frac{25}{17}$, $y=\frac{2}{17}$ $\therefore$ $\mathrm{P}\left(\frac{25}{17}, \frac{2}{17}\right)$

유형 114 명제의 역과 대우의 참, 거짓 → 본책 123쪽

(1) 명제 $p \longrightarrow q$에 대하여

① 역: $q \longrightarrow p$ ② 대우: $\sim q \longrightarrow \sim p$

(2) 명제가 참이면 그 대우도 참이고, 명제가 거짓이면 그 대우도 거짓이다.

➜ 명제와 그 대우의 참, 거짓은 항상 일치한다.

0618 ㄱ. $x^3=1$에서 $x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1$ ($\because x^2+x+1>0$)

따라서 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

ㄴ. [반례] $x=-2$, $y=1$이면 $xy<0$이지만 $x<0$이고 $y>0$이다.

따라서 주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

ㄷ. x, y가 실수이므로 $x^2+y^2=0$이면

$x=0$, $y=0$

따라서 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

이상에서 대우가 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

0619 ① 역: $a+b\geq 2$이면 $a\geq 1$이고 $b\geq 1$이다. (거짓)

[반례] $a=-2$, $b=5$이면 $a+b=3\geq 2$이지만 $a<1$이다.

또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

② 역: $a^2b<ab^2$이면 $0<a<b$이다. (거짓)

[반례] $a=2$, $b=-1$이면 $a^2b=-4$, $ab^2=2$이므로 $a^2b<ab^2$이지만 $0<a<b$를 만족시키지 않는다.

또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

③ 역: $|a-b|=b-a$이면 $a<b$이다. (거짓)

[반례] $a=1$, $b=1$이면 $|a-b|=b-a=0$이지만 $a=b$이다.

또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

④ 역: $a=0$ 또는 $b=0$이면 $ab=0$이다. (참)

또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

⑤ 역: a, b 중 적어도 하나가 유리수이면 $a+b$, ab는 모두 유리수이다. (거짓)

[반례] $a=\sqrt{3}$, $b=2$이면 a, b 중 적어도 하나는 유리수이지만 $a+b=\sqrt{3}+2$, $ab=2\sqrt{3}$은 모두 유리수가 아니다.

대우: a, b가 모두 무리수이면 $a+b$ 또는 ab는 무리수이다. (거짓)

[반례] $a=\sqrt{3}$, $b=-\sqrt{3}$이면 a, b가 모두 무리수이지만 $a+b=0$, $ab=-3$은 모두 유리수이다.

따라서 그 역과 대우가 모두 참인 명제는 ④이다. 답 ④

0620 ㄱ. 역: $a+b$가 짝수이면 ab는 홀수이다. (거짓)

[반례] $a=2$, $b=4$이면 $a+b=6$은 짝수이고 $ab=8$도 짝수이다.

ㄴ. 역: $a+b$가 소수이면 a, b 중 적어도 하나는 홀수이다.

역의 대우: a, b가 모두 짝수이면 $a+b$는 소수가 아니다. (참)

역의 대우가 참이므로 역도 참이다.

ㄷ. 역: $\frac{a}{b}$가 홀수이면 a, b 중 적어도 하나는 홀수이다. (거짓)

[반례] $a=6$, $b=2$이면 $\frac{a}{b}=3$은 홀수이지만 a, b는 모두 짝수이다.

이상에서 역이 참인 명제인 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

유형 115 명제의 대우가 참이 되도록 하는 상수 구하기 → 본책 123쪽

두 조건 p, q의 진리집합을 구하는 것보다 $\sim p$, $\sim q$의 진리집합을 구하는 것이 쉬운 경우에는 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참임을 이용한다.

0621 명제 '$4x+2y\geq a$이면 $x\geq 2$ 또는 $y\geq 5$이다.'가 참이 되려면 그 대우 '$x<2$이고 $y<5$이면 $4x+2y<a$이다.'가 참이 되어야 한다.

이때 $x<2$에서 $4x<8$이고, $y<5$에서 $2y<10$이므로

$4x+2y<18$

따라서 $a\geq 18$이므로 실수 a의 최솟값은 18이다. 답 ①

0622 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이면 그 대우인 $q \longrightarrow p$도 참이다.

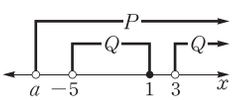
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|x>a\}$,

$Q=\{x|-5<x\leq 1$ 또는 $x>3\}$

이때 명제 $q \longrightarrow p$가 참이려면 $Q\subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$a\leq -5$



따라서 실수 a의 최댓값은 -5이다. 답 -5

0623 명제 '$|x-k|\geq 6$이면 $|x-3|>1$이다.'가 참이 되려면 그 대우 '$|x-3|\leq 1$이면 $|x-k|<6$이다.'가 참이 되어야 한다. … ❶

이때 두 조건 p, q를 각각 p: $|x-3|\leq 1$, q: $|x-k|<6$이라 하면

$|x-3|\leq 1$에서 $-1\leq x-3\leq 1$

$\therefore 2\leq x\leq 4$

$|x-k|<6$에서 $-6<x-k<6$

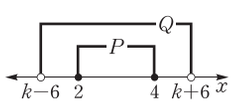
$\therefore k-6<x<k+6$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|2\leq x\leq 4\}$, $Q=\{x|k-6<x<k+6\}$ … ❷

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$k-6<2$, $k+6>4$



$\therefore\ -2<k<8$

따라서 정수 k는 $-1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 7$의 9개이다. … ❸

답 9

단계	채점 요소	비율
❶	주어진 명제의 대우가 참이 되어야 함을 알기	20 %
❷	각 조건의 진리집합 구하기	40 %
❸	정수 k의 개수 구하기	40 %

0624 ㈎에서 $0\in A$

㈏에서 명제 '$a^2-2\notin A$이면 $a\notin A$이다.'가 참이므로 이 명제의 대우인 '$a\in A$이면 $a^2-2\in A$이다.'도 참이다.

이때 $0\in A$이므로 $-2\in A$

$-2\in A$이므로 $(-2)^2-2=2\in A$

$2\in A$이므로 $2^2-2=2\in A$

$\therefore\ \{-2,\ 0,\ 2\}\subset A$

㈐에서 $n(A)=4$이므로 $k\in A$ $(k\neq-2,\ k\neq0,\ k\neq2)$라 하면 $k^2-2\in A$이어야 한다.

즉 $k^2-2=-2$ 또는 $k^2-2=0$ 또는 $k^2-2=2$ 또는 $k^2-2=k$이어야 하므로

$k=\pm\sqrt{2}$ 또는 $k=-1$

따라서 ㈎, ㈏, ㈐를 만족시키는 집합 A는

$\{-2,\ -\sqrt{2},\ 0,\ 2\},\ \{-2,\ 0,\ \sqrt{2},\ 2\},\ \{-2,\ -1,\ 0,\ 2\}$

의 3개이다. 답 ①

유형 116 삼단논법 본책 124쪽

세 조건 $p,\ q,\ r$에 대하여 두 명제 $p\longrightarrow q,\ q\longrightarrow r$가 모두 참이면 명제 $p\longrightarrow r$도 참이다.

0625 ② 명제 $p\longrightarrow\sim r$가 참이므로 그 대우 $r\longrightarrow\sim p$도 참이다.

③ 명제 $q\longrightarrow r$가 참이므로 그 대우 $\sim r\longrightarrow\sim q$도 참이다.

④ 두 명제 $q\longrightarrow r,\ r\longrightarrow\sim p$가 모두 참이므로 명제 $q\longrightarrow\sim p$도 참이다.

⑤ 명제 $q\longrightarrow\sim p$가 참이므로 그 대우 $p\longrightarrow\sim q$도 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ①이다. 답 ①

0626 명제 $\sim p\longrightarrow\sim q$가 참이므로 그 대우 $q\longrightarrow p$도 참이다.

두 명제 $r\longrightarrow\sim s,\ q\longrightarrow p$가 모두 참이므로 명제 $r\longrightarrow p$가 참이 되려면 명제

$\sim s\longrightarrow q$ 또는 $r\longrightarrow q$ 또는 $\sim s\longrightarrow p$

가 참이면 된다.

또 각각의 대우인

$\sim q\longrightarrow s$ 또는 $\sim q\longrightarrow\sim r$ 또는 $\sim p\longrightarrow s$

가 참이어도 된다.

따라서 명제 $r\longrightarrow p$가 참임을 보이기 위해 필요한 참인 명제는 ②이다. 답 ②

0627 $\sim q\longrightarrow r,\ r\longrightarrow\sim p$가 모두 참이므로 $\sim q\longrightarrow\sim p$가 참이다.

$\therefore\ Q^C\subset P^C$ $\therefore\ P\subset Q$ …… ㉠

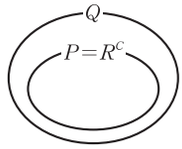
$r\longrightarrow\sim p$가 참이므로 그 대우 $p\longrightarrow\sim r$도 참이다.

$\therefore\ P\subset R^C$

또 $\sim r\longrightarrow p$가 참이므로 $R^C\subset P$

$\therefore\ P=R^C$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $P=R^C\subset Q$이므로 이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $R^C\subset Q$ (참)

ㄴ. $P\cap R^C=P=R^C\neq\varnothing$ (거짓)

ㄷ. $Q\not\subset P$ (거짓)

ㄹ. $P\cap Q=P=R^C$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ③

유형 117 삼단논법과 명제의 추론 본책 124쪽

주어진 문장에서 조건 $p,\ q$를 찾아 $p\longrightarrow q$의 꼴로 나타낸 후 명제가 참이면 그 대우도 참임과 삼단논법을 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판단한다.

0628 네 조건 $p,\ q,\ r,\ s$를

p: 고등학생들에게 선호도가 높다.

q: 판매량이 많다.

r: 배터리 성능이 좋다.

s: 기능이 다양하다.

로 놓으면 ㈎, ㈏, ㈐에 의하여 세 명제

$p\longrightarrow q,\ r\longrightarrow q,\ s\longrightarrow p$

가 모두 참이므로 각각의 대우

$\sim q\longrightarrow\sim p,\ \sim q\longrightarrow\sim r,\ \sim p\longrightarrow\sim s$

도 참이다.

또 두 명제 $s\longrightarrow p,\ p\longrightarrow q$가 모두 참이므로 명제 $s\longrightarrow q$도 참이고, 그 대우인 $\sim q\longrightarrow\sim s$도 참이다.

① $s\longrightarrow\sim r$ ② $\sim r\longrightarrow\sim q$ ③ $\sim p\longrightarrow\sim q$

④ $\sim q\longrightarrow\sim s$ ⑤ $p\longrightarrow\sim r$

따라서 항상 옳은 것은 ④이다. 답 ④

0629 (i) A의 말이 진실인 경우

A, B가 가장 좋아하는 과목이 영어로 같으므로 모순이다.

(ii) B의 말이 진실인 경우

A, B가 가장 좋아하는 과목이 영어가 아니고, C가 가장 좋아하는 과목은 수학이다. 따라서 영어를 가장 좋아하는 학생은 없으므로 모순이다.

(iii) C의 말이 진실인 경우

B가 가장 좋아하는 과목이 영어이므로 C가 가장 좋아하는 과목은 국어이고, A가 가장 좋아하는 과목은 수학이다.

이상에서 진실을 말한 학생은 C이므로 A는 수학, B는 영어, C는 국어를 가장 좋아한다. 답 ⑤

유형 118 충분조건, 필요조건, 필요충분조건 → 본책 125쪽

(1) $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$
➜ p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
(2) $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$
➜ p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.
(3) $p \Longleftrightarrow q$
➜ p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

0630 ① $x^2=y^2$이면 $(x+y)(x-y)=0$
$\therefore x=-y$ 또는 $x=y$
따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
② $x>1$, $y>1$이면 $xy>1$이므로 $q \Longrightarrow p$
[$p \longrightarrow q$의 반례] $x=4$, $y=\frac{1}{2}$이면 $xy=2>1$이지만 $y<1$이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.
③ $|x|>|y|$의 양변을 제곱하면 $x^2>y^2$
따라서 $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
④ $x=z$이면 $xy=yz$이므로 $q \Longrightarrow p$
[$p \longrightarrow q$의 반례] $x=1$, $y=0$, $z=2$이면 $xy=yz=0$이지만 $x \neq z$이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.
⑤ $|x|+|y|=0$에서 $x=0$, $y=0$
$x=0$, $y=0$이면 $x \geq 0$, $y \geq 0$이므로 $p \Longrightarrow q$
[$q \longrightarrow p$의 반례] $x=1$, $y=2$이면 $x \geq 0$, $y \geq 0$이지만 $x \neq 0$, $y \neq 0$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
즉 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0631 $|x+y|=|x|+|y|$의 양변을 제곱하면
$x^2+2xy+y^2=x^2+2|xy|+y^2$
$xy=|xy|$ $\therefore xy \geq 0$
따라서 $|x+y|=|x|+|y|$이기 위한 필요충분조건인 것은 ③이다. 답 ③

0632 ㄱ. $a-b>c-b$의 양변에 b를 더하면 $a>c$이므로 $p \Longrightarrow q$
$a>c$의 양변에 $-b$를 더하면 $a-b>c-b$이므로 $q \Longrightarrow p$
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
ㄴ. $a>b>0$이면 $a^2>b^2$이므로 $q \Longrightarrow p$
[$p \longrightarrow q$의 반례] $a=-2$, $b=1$이면 $a^2>b^2$이지만 $a<0<b$이다.
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.
ㄷ. $a^3-b^3=0$에서 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=0$
a, b는 실수이므로 $a=b$
또 $a^2-b^2=0$에서 $(a+b)(a-b)=0$
$\therefore a=-b$ 또는 $a=b$
따라서 $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
이상에서 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

0633 p: $a^2+b^2=0$에서 $a=0$, $b=0$
q: $a^2-2ab+b^2=0$에서 $(a-b)^2=0$ $\therefore a=b$
r: $|a+b|=|a-b|$의 양변을 제곱하면
$a^2+2ab+b^2=a^2-2ab+b^2$
$ab=-ab$, $ab=0$
$\therefore a=0$ 또는 $b=0$
ㄱ. $a=0$, $b=0$이면 $a=b$이므로 $p \Longrightarrow q$
[$q \longrightarrow p$의 반례] $a=b=1$이면 $a=b$이지만 $a \neq 0$, $b \neq 0$이다.
따라서 q는 p이기 위한 필요조건이다. (거짓)
ㄴ. $\sim r$: $a \neq 0$, $b \neq 0$, $\sim p$: $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$이므로 $\sim r \Longrightarrow \sim p$
[$\sim p \longrightarrow \sim r$의 반례] $a=1$, $b=0$이면 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$이지만 $a \neq 0$, $b=0$이다.
따라서 $\sim r$는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다. (거짓)
ㄷ. p이고 q: $a=0$, $b=0$
따라서 (p이고 q) $\Longrightarrow r$, $r \not\Longrightarrow$ (p이고 q)이므로 'p이고 q'는 r이기 위한 충분조건이다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

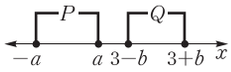
유형 119 충분조건, 필요조건과 진리집합의 포함 관계 → 본책 126쪽

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때
(1) p는 q이기 위한 충분조건 ➜ $p \Longrightarrow q$ ➜ $P \subset Q$
(2) p는 q이기 위한 필요조건 ➜ $q \Longrightarrow p$ ➜ $Q \subset P$
(3) p는 q이기 위한 필요충분조건 ➜ $p \Longleftrightarrow q$ ➜ $P=Q$

0634 $\sim p$가 q이기 위한 필요조건이므로 $q \Longrightarrow \sim p$
즉 $Q \subset P^C$이므로 두 집합 P, Q는 서로소이다.
① $P \cap Q=\varnothing$
② $P \cup Q \neq Q$
③ $P^C \cap Q=Q-P=Q$
④ $P^C \cup Q^C=(P \cap Q)^C=\varnothing^C=U$
⑤ $P-Q=P$
따라서 항상 옳은 것은 ④이다. 답 ④

0635 $x^2-a^2 \leq 0$에서 $(x+a)(x-a) \leq 0$
$\therefore -a \leq x \leq a$
$\therefore P=\{x \mid -a \leq x \leq a\}$
$|x-3| \leq b$에서 $-b \leq x-3 \leq b$
$\therefore 3-b \leq x \leq 3+b$
$\therefore Q=\{x \mid 3-b \leq x \leq 3+b\}$

이때 $P\cap Q=\varnothing$이려면 오른쪽 그림에서



$a<3-b$ $\therefore a+b<3$ 답 ①

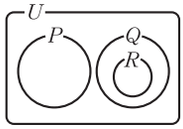
참고 $-a<0$, $3+b>0$이므로 $3+b<-a$인 경우는 생각하지 않는다.

0636 $(P-Q^C)\cup(R-Q)=\varnothing$에서

$P-Q^C=\varnothing$, $R-Q=\varnothing$

$\therefore P\cap Q=\varnothing$, $R\subset Q$

세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $P\not\subset R$이므로 p는 r이기 위한 충분조건이 아니다.

② $R\subset P^C$이므로 $\sim p$는 r이기 위한 필요조건이다.

③ $R\subset Q$이므로 q는 r이기 위한 필요조건이다.

④ $P\subset Q^C$이므로 $\sim q$는 p이기 위한 필요조건이다.

⑤ $R\neq Q^C$이므로 r는 $\sim q$이기 위한 필요충분조건이 아니다.

따라서 항상 옳은 것은 ④이다. 답 ④

0637 $\sim r$는 p이기 위한 충분조건이므로

$\sim r\Longrightarrow p$, 즉 $R^C\subset P$

$\sim q$는 p이기 위한 필요조건이므로 $p\Longrightarrow\sim q$, 즉 $P\subset Q^C$

$\therefore R^C\subset P\subset Q^C$

① $R^C\subset P$이므로 $P\cap R^C=R^C$

② $P\subset Q^C$이므로 $P\cap Q=\varnothing$

③ $R^C\subset Q^C$이므로 $Q\subset R$ $\therefore Q\cap R=Q$

④ $R^C\subset P$이므로 $P\cup R=U$

⑤ $P\subset Q^C$이므로 $P\cup Q^C=Q^C$

따라서 항상 옳다고 할 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

참고 ④ $R^C\cap P=R^C$에서 $P-R=R^C$

$\therefore P\cup R=(P-R)\cup R=R^C\cup R=U$

유형 120 충분조건, 필요조건이 되도록 하는 상수 구하기

본책 126쪽

(1) 조건이 부등식으로 주어진 경우

➜ 진리집합 사이의 포함 관계를 만족시키도록 수직선 위에 나타낸다.

(2) 조건이 $\neq$를 포함한 식으로 주어진 경우

➜ 대우를 이용하여 방정식으로 고친다.

0638 p: $-2<x<k$에서 $\sim p$: $x\le -2$ 또는 $x\ge k$

$2x^2-15x+18<0$에서 $(2x-3)(x-6)<0$

$\therefore \frac{3}{2}<x<6$

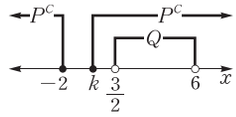
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P^C=\{x\mid x\le -2$ 또는 $x\ge k\}$, $Q=\left\{x\middle|\frac{3}{2}<x<6\right\}$

q가 $\sim p$이기 위한 충분조건이므로

$q\Longrightarrow\sim p$, 즉 $Q\subset P^C$

이를 만족시키도록 두 집합 P^C, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$k\le\frac{3}{2}$

따라서 정수 k의 최댓값은 1이다. 답 ③

0639 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x\mid x\le -2\}$, $Q=\{x\mid 3<x\le 2a\}$,

$R=\{x\mid b<x\le 8\}$

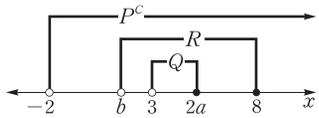
q는 r이기 위한 충분조건이고, $\sim p$는 r이기 위한 필요조건이므로

$q\Longrightarrow r$, $r\Longrightarrow\sim p$

따라서 $Q\subset R$, $R\subset P^C$이므로

$Q\subset R\subset P^C$ … ❶

이때 $P^C=\{x\mid x>-2\}$이므로 이를 만족시키도록 세 집합 P^C, Q, R를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 $-2\le b\le 3$, $2a\le 8$

$\therefore a\le 4$, $-2\le b\le 3$ … ❷

따라서 정수 a의 최댓값은 4이고, 정수 b의 최솟값은 -2이므로 그 합은 2이다. … ❸

답 2

단계	채점 요소	비율
❶	세 조건 $\sim p$, q, r의 진리집합 사이의 포함 관계 구하기	40 %
❷	a, b의 값의 범위 구하기	40 %
❸	a의 최댓값과 b의 최솟값의 합 구하기	20 %

0640 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 p가 q이기 위한 충분조건이므로

$p\Longrightarrow q$, 즉 $P\subset Q$

$x^2-4x+4\le 0$, 즉 $(x-2)^2\le 0$에서 $x=2$이므로

$Q=\{2\}$

(i) $P=\{2\}$일 때

이차방정식 $3x^2+(k-8)x+12=0$이 $x=2$를 중근으로 가지므로

$3x^2+(k-8)x+12=3(x-2)^2$

$k-8=-12$ $\therefore k=-4$

(ii) $P=\varnothing$일 때

이차방정식 $3x^2+(k-8)x+12=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k-8)^2-4\times 3\times 12<0$

$k^2-16k-80<0$, $(k+4)(k-20)<0$

$\therefore -4<k<20$

(i), (ii)에서 $-4\le k<20$

따라서 정수 k는 -4, -3, -2, …, 19의 24개이다. 답 ①

0641 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 q가 $\sim p$이기 위한 필요조건이므로

$\sim p \Longrightarrow q$, 즉 $P^C \subset Q$

q: $|x-1| \le 5$에서 $\quad -5 \le x-1 \le 5$

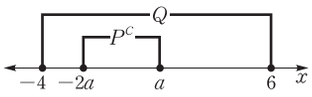
$\therefore\ -4 \le x \le 6 \quad \therefore\ Q=\{x \mid -4 \le x \le 6\}$

p: $(x-a)(x+2a)>0$에서

$\sim p$: $(x-a)(x+2a) \le 0$

(i) $a>0$일 때

$P^C=\{x \mid -2a \le x \le a\}$이므로 $P^C \subset Q$를 만족시키도록 두 집합 P^C, Q를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



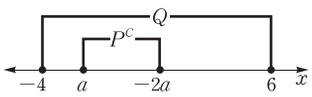
즉 $-4 \le -2a$, $a \le 6$이므로 $\quad 0<a \le 2\ (\because\ a>0)$

(ii) $a=0$일 때

$P^C=\{0\}$이므로 $P^C \subset Q$가 성립한다.

(iii) $a<0$일 때

$P^C=\{x \mid a \le x \le -2a\}$이므로 $P^C \subset Q$를 만족시키도록 두 집합 P^C, Q를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉 $-4 \le a$, $-2a \le 6$이므로 $\quad -3 \le a<0\ (\because\ a<0)$

이상에서 실수 a의 값의 범위는 $-3 \le a \le 2$이므로

$M=2$, $m=-3 \quad \therefore\ M+m=-1$ 답 ③

유형 121 충분조건, 필요조건과 명제의 참, 거짓 → 본책 127쪽

(1) $p \Longrightarrow q$이면 $\quad \sim q \Longrightarrow \sim p$

(2) $p \Longrightarrow q$이고 $q \Longrightarrow r$이면 $\quad p \Longrightarrow r$

(3) $p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow r$, $r \Longrightarrow p$이면 $\quad p \Longleftrightarrow q \Longleftrightarrow r$

0642 p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이므로

$p \Longrightarrow \sim r \quad \therefore\ r \Longrightarrow \sim p$

r는 q이기 위한 필요조건이므로 $\quad q \Longrightarrow r$

$\therefore\ \sim r \Longrightarrow \sim q$

$p \Longrightarrow \sim r$, $\sim r \Longrightarrow \sim q$이므로 $\quad p \Longrightarrow \sim q$

$\therefore\ q \Longrightarrow \sim p$

따라서 반드시 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ③

0643 ① $\sim r \Longrightarrow \sim q$이므로 $\quad q \Longrightarrow r$

$p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow r$이므로 $\quad p \Longrightarrow r$

즉 p는 r이기 위한 충분조건이다.

② $p \Longrightarrow q$이므로 q는 p이기 위한 필요조건이다.

③ $p \Longrightarrow r$이므로 r는 p이기 위한 필요조건이다.

④ $p \Longrightarrow q$이므로 $\quad \sim q \Longrightarrow \sim p$

즉 $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 필요조건이다.

⑤ $p \Longrightarrow r$이므로 $\quad \sim r \Longrightarrow \sim p$

즉 $\sim r$는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다. 답 ③

유형 122 대우를 이용한 명제의 증명 → 본책 127쪽

명제 'p이면 q이다.'가 참임을 직접 증명하기 어려운 경우에는 명제의 대우 '$\sim q$이면 $\sim p$이다.'가 참임을 증명한다.

0644 주어진 명제의 대우는 'a, b가 모두 홀수이면 ab도 홀수이다.'이다.

$a=$ [(가) $2m-1$], $b=2n-1$ (m, n은 자연수)이라 하면

$ab=($ [(가) $2m-1$] $)(2n-1)$

$=4mn-2m-2n+1$

$=2(2mn-m-n)+$ [(나) 1]

이때 $2mn-m-n$은 [(다) 0] 또는 자연수이므로 ab는 홀수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 (가) $2m-1$ (나) 1 (다) 0

참고 $m \ge 1$, $n \ge 1$에서 $mn \ge n$, $mn \ge m$이므로

$mn-n \ge 0$, $mn-m \ge 0$

$\therefore\ 2mn-m-n=(mn-n)+(mn-m) \ge 0$

0645 주어진 명제의 대우는 'n이 3의 배수가 아니면 n^2도 3의 배수가 아니다.'이다.

n이 3의 배수가 아니면

$n=3k-2$ 또는 $n=3k-1$ (k는 자연수)

로 나타낼 수 있다.

(i) $n=3k-2$일 때

$n^2=(3k-2)^2=9k^2-12k+4$

$=3(3k^2-4k+1)+1$

(ii) $n=3k-1$일 때

$n^2=(3k-1)^2=9k^2-6k+1$

$=3(3k^2-2k)+1$

(i), (ii)에서 n^2을 3으로 나누면 나머지가 1이므로 n^2은 3의 배수가 아니다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

유형 123 귀류법 → 본책 128쪽

명제 또는 명제의 결론을 부정하면 모순이 생김을 보여서 명제가 참임을 증명한다.

0646 $\sqrt{n^2+2n}$이 유리수라고 가정하면

$\sqrt{n^2+2n}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)

로 나타낼 수 있다.

이 식의 양변을 제곱하면 $\quad n^2+2n=\dfrac{q^2}{p^2}$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 좌변은 자연수이고, p와 q는 서로소이므로

$p^2=$ [(가) 1] $\quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$n^2+2n=q^2$, $\quad (n+1)^2-q^2=1$

$(n+1+q)(n+1-q)=$ [(나) 1]

이때 $n+1+q$와 $n+1-q$의 값은 모두 정수이므로

$n+1+q=1$, $n+1-q=1$

또는 $n+1+q=-1$, $n+1-q=-1$

$\therefore n+q=0$, $n-q=0$

또는 $n+q=$ (다) -2, $n-q=$ (다) -2

이것을 만족시키는 자연수 n, q는 존재하지 않으므로 n, q가 자연수라는 가정에 모순이다.

따라서 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2+2n}$은 무리수이다.

즉 $a=1$, $b=1$, $c=-2$이므로 $a+b-c=4$ 답 4

0647 방정식 $f(x)=0$이 정수인 근 α를 갖는다고 하면 $f(\alpha)=0$이다.

(i) $\alpha=2n$ (n은 정수)일 때

$f(\alpha)=4an^2+2bn+c$

$=2(2an^2+bn)+c$

$=2(2an^2+bn)+f(0)$

이때 등식의 우변이 홀수이므로 $f(\alpha)=0$이라는 가정에 모순이다.

(ii) $\alpha=2n+1$ (n은 정수)일 때

$f(\alpha)=4an^2+4an+a+2bn+b+c$

$=2(2an^2+2an+bn)+a+b+c$

$=2(2an^2+2an+bn)+f(1)$

이때 등식의 우변이 홀수이므로 $f(\alpha)=0$이라는 가정에 모순이다.

(i), (ii)에서 방정식 $f(x)=0$은 정수인 근을 갖지 않는다.

답 풀이 참조

유형 124 절대부등식의 증명 본책 128쪽

부등식 $A \geq B$를 증명할 때에는

(1) A, B가 다항식인 경우

➜ $A-B \geq 0$임을 보인다.

(2) A, B가 절댓값 기호나 근호를 포함한 식인 경우

➜ $A^2-B^2 \geq 0$임을 보인다.

0648 $(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$

$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$

$=a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$

$=2($ (가) $|ab|-ab$ $) \geq 0$ ($\because |ab| \geq ab$) ····· ㉠

$\therefore (|a|+|b|)^2 \geq |a+b|^2$

그런데 $|a|+|b| \geq$ (나) 0, $|a+b| \geq 0$이므로

$|a|+|b| \geq |a+b|$

이때 등호는 ㉠에서 $|ab|=ab$, 즉 (다) $ab \geq 0$일 때 성립한다.

답 ⑤

0649 ㄱ. [반례] $x=-\frac{1}{2}$이면 $x^2+x=-\frac{1}{4}$

ㄴ. $x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$이므로

$x^2-4x+5>0$

ㄷ. $9x^2-2y^2-3y(2x-y)=9x^2-6xy+y^2=(3x-y)^2 \geq 0$

$\therefore 9x^2-2y^2 \geq 3y(2x-y)$

이때 등호는 $3x-y=0$, 즉 $3x=y$일 때 성립한다.

이상에서 절대부등식인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0650 ㄱ. [반례] $a=1$, $b=-1$이면 $|a+b|=0$, $|a-b|=2$

$\therefore |a+b|<|a-b|$

ㄴ. (i) $|a| \geq |b|$일 때

$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2$

$=(a-b)^2-(|a|^2-2|a||b|+|b|^2)$

$=a^2-2ab+b^2-(a^2-2|ab|+b^2)$

$=2(|ab|-ab) \geq 0$ ($\because |ab| \geq ab$)

$\therefore |a-b|^2 \geq (|a|-|b|)^2$

그런데 $|a-b| \geq 0$, $|a|-|b| \geq 0$이므로

$|a-b| \geq |a|-|b|$

이때 등호는 $|ab|=ab$, 즉 $ab \geq 0$일 때 성립한다.

(ii) $|a|<|b|$일 때

$|a-b|>0$, $|a|-|b|<0$이므로

$|a-b|>|a|-|b|$

(i), (ii)에서

$|a-b| \geq |a|-|b|$

(단, 등호는 $|a| \geq |b|$, $ab \geq 0$일 때 성립)

ㄷ. $\{\sqrt{2(a+b)}\}^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$=2(a+b)-(a+2\sqrt{ab}+b)$

$=a-2\sqrt{ab}+b$

$=(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2$

$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$ ($\because a>b>0$)

$\therefore \{\sqrt{2(a+b)}\}^2>(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

그런데 $\sqrt{2(a+b)}>0$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$이므로

$\sqrt{2(a+b)}>\sqrt{a}+\sqrt{b}$

이상에서 항상 성립하는 것은 ㄴ, ㄷ의 2개이다. 답 2

유형 125 산술평균과 기하평균의 관계 — 합 또는 곱이 일정할 때 본책 129쪽

$a>0$, $b>0$일 때, $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

(1) $a+b$의 값이 일정 ➜ ab는 $a=b$일 때 최댓값을 갖는다.

(2) ab의 값이 일정 ➜ $a+b$는 $a=b$일 때 최솟값을 갖는다.

0651 $x>0$, $y>0$에서 $2x>0$, $6y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+6y \geq 2\sqrt{2x \times 6y}=2\sqrt{12xy}$

이때 $xy=3$이므로

$2x+6y \geq 2\sqrt{36}=12$

(단, 등호는 $2x=6y$, 즉 $x=3y$일 때 성립)

따라서 $2x+6y$의 최솟값은 12이다. 답 ①

0652 $a \neq 0$, $b \neq 0$에서 $4a^2>0$, $16b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4a^2+16b^2 \geq 2\sqrt{4a^2 \times 16b^2}=16|ab|$

이때 $4a^2+16b^2=48$이므로

$48\geq 16|ab|$, $\quad |ab|\leq 3$

$\therefore\ -3\leq ab<0$ 또는 $0<ab\leq 3$ ($\because\ ab\neq 0$)

(단, 등호는 $4a^2=16b^2$, 즉 $|a|=2|b|$일 때 성립)

따라서 ab의 최댓값은 3, 최솟값은 -3이므로 그 곱은 -9이다.

답 -9

0653 $x>0$에서 $9x>0$, $\frac{k}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$9x+\frac{k}{x}\geq 2\sqrt{9x\times\frac{k}{x}}=6\sqrt{k}$$

$\left(\text{단, 등호는 } 9x=\frac{k}{x}\text{일 때 성립}\right)$ … ❶

이때 $9x+\frac{k}{x}$의 최솟값이 30이므로

$6\sqrt{k}=30$, $\quad \sqrt{k}=5$ $\quad \therefore\ k=25$ … ❷

답 25

단계	채점 요소	비율
❶	$9x+\frac{k}{x}$의 최솟값을 k에 대한 식으로 나타내기	50 %
❷	k의 값 구하기	50 %

0654 $(\sqrt{2x}+\sqrt{5y})^2=2x+2\sqrt{10xy}+5y$

$=12+2\sqrt{10xy}$ …… ㉠

$2x>0$, $5y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+5y\geq 2\sqrt{2x\times 5y}=2\sqrt{10xy}$

이때 $2x+5y=12$이므로 $\quad 12\geq 2\sqrt{10xy}$

$\therefore\ \sqrt{10xy}\leq 6$ (단, 등호는 $2x=5y$일 때 성립)

따라서 ㉠에서

$(\sqrt{2x}+\sqrt{5y})^2=12+2\sqrt{10xy}\leq 12+2\times 6=24$

즉 $\sqrt{2x}+\sqrt{5y}$의 최댓값은 $\sqrt{24}=2\sqrt{6}$이다. 답 ⑤

유형 126 산술평균과 기하평균의 관계 — 식의 전개 → 본책 129쪽

$a>0$, $b>0$일 때, 주어진 식을 전개하여 (상수)$+a+b$의 꼴로 변형한 후 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

(상수)$+a+b\geq$(상수)$+2\sqrt{ab}$

임을 이용한다.

0655 $x>0$, $y>0$에서 $xy>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(5x+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+20y\right)=5+100xy+\frac{1}{xy}+20$$

$$=25+100xy+\frac{1}{xy}$$

$$\geq 25+2\sqrt{100xy\times\frac{1}{xy}}$$

$$=25+2\times 10=45$$

$\left(\text{단, 등호는 } 100xy=\frac{1}{xy}\text{ 즉, } xy=\frac{1}{10}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 45이다. 답 ②

만점 공략 노트

$5x+\frac{1}{y}\geq 2\sqrt{\frac{5x}{y}}$에서는 $5x=\frac{1}{y}$, 즉 $xy=\frac{1}{5}$일 때 등호가 성립하고, $\frac{1}{x}+20y\geq 2\sqrt{\frac{20y}{x}}$에서는 $\frac{1}{x}=20y$, 즉 $xy=\frac{1}{20}$일 때 등호가 성립한다. 이때 두 등식을 동시에 만족시키는 양수 x, y는 존재하지 않으므로 주어진 식을 전개하지 않고 $5x+\frac{1}{y}$, $\frac{1}{x}+20y$ 각각에서 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하지 않도록 주의한다.

0656 $a>0$에서 $a^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(a-\frac{49}{a}\right)\left(a-\frac{1}{a}\right)=a^2-1-49+\frac{49}{a^2}$$

$$=-50+a^2+\frac{49}{a^2}$$

$$\geq -50+2\sqrt{a^2\times\frac{49}{a^2}}$$

$$=-50+2\times 7=-36$$

이때 등호는 $a^2=\frac{49}{a^2}$, 즉 $a^4=49$일 때 성립하므로

$a^2=7$ $\quad \therefore\ a=\sqrt{7}$ ($\because\ a>0$)

따라서 $m=-36$, $n=\sqrt{7}$이므로

$n^2-m=(\sqrt{7})^2-(-36)=43$ 답 43

0657 두 직선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 기울기가 각각 $\frac{a}{2}$, $\frac{1}{b}$이고 두 직선이 서로 평행하므로

$\frac{a}{2}=\frac{1}{b}$ $\quad \therefore\ ab=2$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(a+1)(b+2)=ab+2a+b+2$$

$$=4+2a+b$$

$$\geq 4+2\sqrt{2ab}$$

$$=4+2\times 2=8$$

(단, 등호는 $2a=b$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 8이다. 답 8

0658 세 양수 a, b, c에 대하여 $a+b>0$, $4c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(a+b+4c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{4}{c}\right)$$

$$=\{(a+b)+4c\}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{4}{c}\right)$$

$$=1+\frac{4(a+b)}{c}+\frac{4c}{a+b}+16$$

$$=17+\frac{4(a+b)}{c}+\frac{4c}{a+b}$$

$$\geq 17+2\sqrt{\frac{4(a+b)}{c}\times\frac{4c}{a+b}}$$

$$=17+2\times 4=25$$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{4(a+b)}{c}=\frac{4c}{a+b}\text{, 즉 } a+b=c\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 25이다. 답 25

유형 127 산술평균과 기하평균의 관계 — 식의 변형

본책 130쪽

주어진 식을 $f(x)+\frac{1}{f(x)}$ $(f(x)>0)$의 꼴을 포함하도록 변형한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

0659 $x>2$에서 $x-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$9x+\frac{4}{x-2}=9(x-2)+\frac{4}{x-2}+18$$
$$\geq 2\sqrt{9(x-2)\times\frac{4}{x-2}}+18$$
$$=2\times 6+18=30$$

이때 등호는 $9(x-2)=\frac{4}{x-2}$, 즉 $(x-2)^2=\frac{4}{9}$일 때 성립하므로

$$x-2=\frac{2}{3}\ (\because\ x-2>0) \qquad \therefore\ x=\frac{8}{3}$$

따라서 $a=30$, $b=\frac{8}{3}$이므로

$$a+15b=30+15\times\frac{8}{3}=70$$

답 70

0660 $x>3$에서 $x^2-9>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+\frac{25}{x^2-9}=(x^2-9)+\frac{25}{x^2-9}+9$$
$$\geq 2\sqrt{(x^2-9)\times\frac{25}{x^2-9}}+9$$
$$=2\times 5+9=19$$

$\left(\text{단, 등호는 } x^2-9=\frac{25}{x^2-9},\ \text{즉 } x=\sqrt{14}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $k\leq 19$이므로 k의 최댓값은 19이다.

답 ②

0661 $x\neq 0$에서 $x^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+\frac{n}{x^2}-4\geq 2\sqrt{x^2\times\frac{n}{x^2}}-4=2\sqrt{n}-4$$

주어진 명제가 참이 되려면

$$2\sqrt{n}-4>0, \qquad \sqrt{n}>2 \qquad \therefore\ n>4$$

이때 모든 n에 대하여 $n^2-6n+10=(n-3)^2+1>0$

또 $n>4$에서 $n-4>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$n^2+\frac{100}{n^2-6n+10}+\frac{24}{n-4}$$
$$=(n^2-6n+10)+\frac{100}{n^2-6n+10}+6(n-4)+\frac{24}{n-4}+14$$
$$\geq 2\sqrt{(n^2-6n+10)\times\frac{100}{n^2-6n+10}}$$
$$+2\sqrt{6(n-4)\times\frac{24}{n-4}}+14$$
$$=2\times 10+2\times 12+14=58\ (\text{단, 등호는 } n=6\text{일 때 성립})$$

따라서 구하는 최솟값은 58이다.

답 58

참고 등호는 각각 $n^2-6n+10=\frac{100}{n^2-6n+10}$, $6(n-4)=\frac{24}{n-4}$일 때 성립한다.

$n^2-6n+10=\frac{100}{n^2-6n+10}$에서

$$(n^2-6n+10)^2=100, \qquad n^2-6n+10=10\ (\because\ n^2-6n+10>0)$$
$$n(n-6)=0 \qquad \therefore\ n=6\ (\because\ n>4) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$6(n-4)=\frac{24}{n-4}$에서

$$(n-4)^2=4, \qquad n-4=2\ (\because\ n-4>0)$$
$$\therefore\ n=6 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $n=6$

0662 $a>0$, $b>0$에서 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2y^2}=2xy\ (\because\ x>0,\ y>0)$$
$$=2\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)$$
$$=2\left(ab+1+1+\frac{1}{ab}\right)$$
$$=4+2ab+\frac{2}{ab}$$
$$\geq 4+2\sqrt{2ab\times\frac{2}{ab}}$$
$$=4+2\times 2=8$$

즉 x^2+y^2의 최솟값이 8이므로 $k=8$ … ❶

이때 등호는 $x=y$, 즉 $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{a}$이고 $2ab=\frac{2}{ab}$, 즉 $ab=1$일 때 성립한다.

$ab=1$에서 $a=\frac{1}{b}$, $b=\frac{1}{a}$이므로 $a+\frac{1}{b}=2a$, $b+\frac{1}{a}=2b$

즉 $a=b$, $ab=1$이므로 $a=b=1\ (\because\ a>0,\ b>0)$

따라서 $m=n=1$이므로 … ❷

$k+mn=9$ … ❸

답 9

단계	채점 요소	비율
❶	k의 값 구하기	50 %
❷	m, n의 값 구하기	40 %
❸	$k+mn$의 값 구하기	10 %

유형 128 산술평균과 기하평균의 관계 — 도형에서의 활용

본책 130쪽

두 양수의 곱의 최댓값이나 합의 최솟값을 구하는 경우에는 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

0663 $\overline{AB}=a$, $\overline{AC}=b$ $(a>0,\ b>0)$라 하면 삼각형 ABC의 넓이가 14이므로

$$\frac{1}{2}ab=14 \qquad \therefore\ ab=28$$

이때 $a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{BC}^2=a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2\times b^2}=2ab=56$$

(단, 등호는 $a^2=b^2$, 즉 $a=b$일 때 성립)

따라서 $\overline{BC}^2$의 최솟값은 56이다.

답 ⑤

0664 직사각형 모양의 종이의 가로, 세로의 길이를 각각 a cm, b cm라 하면 넓이가 18 cm^2이므로

$ab=18$

상자의 모든 모서리의 길이의 합은 $(2a+4b)$ cm

이때 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2a+4b\geq 2\sqrt{2a\times 4b}=4\sqrt{2ab}=4\sqrt{36}=24$

(단, 등호는 $2a=4b$, 즉 $a=2b$일 때 성립)

따라서 모든 모서리의 길이의 합의 최솟값은 24 cm이다.

답 24 cm

0665 직선 OP의 기울기는 $\frac{b}{a}$이므로 점 $P(a, b)$를 지나고 직선 OP에 수직인 직선의 방정식은

$y-b=-\frac{a}{b}(x-a)$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{a^2}{b}+b$

이 직선의 y절편이 $\frac{a^2}{b}+b$이므로 $Q\left(0, \frac{a^2}{b}+b\right)$

따라서 삼각형 OQR의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OR}\times\overline{OQ}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{a}\times\left(\frac{a^2}{b}+b\right)=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

이때 $a>0$, $b>0$에서 $\frac{a}{b}>0$, $\frac{b}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}=2\times 1=2$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{b}=\frac{b}{a}, \text{ 즉 } a=b\text{일 때 성립}\right)$

따라서 삼각형 OQR의 넓이의 최솟값은 2이다. 답 ②

유형 129 코시-슈바르츠의 부등식 본책 131쪽

a, b, x, y가 실수일 때

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$

(단, 등호는 $ay=bx$일 때 성립)

0666 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(3^2+4^2)(x^2+y^2)\geq(3x+4y)^2$

이때 $x^2+y^2=10$이므로 $250\geq(3x+4y)^2$

$\therefore -5\sqrt{10}\leq 3x+4y\leq 5\sqrt{10}$

(단, 등호는 $3y=4x$일 때 성립)

즉 $3x+4y$의 최댓값이 $5\sqrt{10}$, 최솟값이 $-5\sqrt{10}$이므로 그 차는

$5\sqrt{10}-(-5\sqrt{10})=10\sqrt{10}$ 답 $10\sqrt{10}$

0667 a, b가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{5b})^2\}\geq(\sqrt{a}+\sqrt{5b})^2$

$2(a+5b)\geq(\sqrt{a}+\sqrt{5b})^2$

이때 $a+5b=3$이므로 $6\geq(\sqrt{a}+\sqrt{5b})^2$

$\therefore 0<\sqrt{a}+\sqrt{5b}\leq\sqrt{6}$ ($\because a>0, b>0$)

등호는 $\sqrt{a}=\sqrt{5b}$, 즉 $a=5b$일 때 성립하므로 이를 $a+5b=3$에 대입하여 풀면

$a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{3}{10}$

즉 $x=\sqrt{6}$, $y=\frac{3}{2}$, $z=\frac{3}{10}$이므로

$10x^2yz=10\times 6\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{10}=27$ 답 27

0668 $a+b+c=1$에서 $a+c=1-b$ …… ㉠

$a^2+b^2+c^2=3$에서 $a^2+c^2=3-b^2$ …… ㉡

a, c는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(a^2+c^2)\geq(a+c)^2$ (단, 등호는 $a=c$일 때 성립)

㉠, ㉡을 대입하면

$2(3-b^2)\geq(1-b)^2$, $3b^2-2b-5\leq 0$

$(b+1)(3b-5)\leq 0$

$\therefore -1\leq b\leq\frac{5}{3}$

따라서 b의 최댓값은 $\frac{5}{3}$, 최솟값은 -1이므로 구하는 합은

$\frac{5}{3}+(-1)=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

유형 130 코시-슈바르츠의 부등식 — 도형에서의 활용 본책 131쪽

일차식의 최댓값이나 제곱의 합의 최솟값을 구하는 경우에는 코시-슈바르츠의 부등식을 이용한다.

0669 $\overline{AP}=x$, $\overline{BP}=y$라 하면 삼각형 PAB는 $\angle APB=90°$인 직각삼각형이므로

$x^2+y^2=13$

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(3^2+2^2)(x^2+y^2)\geq(3x+2y)^2$

$169\geq(3x+2y)^2$

$\therefore -13\leq 3x+2y\leq 13$ (단, 등호는 $3y=2x$일 때 성립)

이때 $x>0$, $y>0$이므로 $0<3x+2y\leq 13$

따라서 $3\overline{AP}+2\overline{BP}$의 최댓값은 13이다. 답 13

0670 점 $P(a, b)$가 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원 위를 움직이므로

$a^2+b^2=10$

$\therefore a^2+a+b^2-3b+4=10+a-3b+4$

$=a-3b+14$ …… ㉠

이때 a, b가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$\{1^2+(-3)^2\}(a^2+b^2)\geq(a-3b)^2$

$100\geq(a-3b)^2$

$\therefore -10\leq a-3b\leq 10$ (단, 등호는 $b=-3a$일 때 성립)

따라서 $4\leq a-3b+14\leq 24$이므로 ㉠에서 구하는 최댓값은 24이다. 답 ④

0671 직육면체의 밑면의 가로, 세로의 길이와 높이를 각각 x, y, z라 하면

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=4\sqrt{3}$ $\therefore x^2+y^2+z^2=48$ … ❶

직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은 $4x+4y+4z$이고, x, y, z가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(4^2+4^2+4^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(4x+4y+4z)^2$

$48\times48\geq(4x+4y+4z)^2$

$\therefore 0<4x+4y+4z\leq48$ ($\because x+y+z>0$)

(단, 등호는 $x=y=z$일 때 성립)

따라서 구하는 최댓값은 48이다. … ❷

답 48

단계	채점 요소	비율
❶	$x^2+y^2+z^2$의 값 구하기	30 %
❷	직육면체의 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값 구하기	70 %

1등급 유형 도전하기

본책 132~133쪽

0672 Step 1 코시-슈바르츠의 부등식을 이용하여 (가)에 알맞은 수를 구한다.

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$\boxed{(가)\ (1^2+1^2)}\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right\}\geq\left(a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2$ …… ㉠

$\left(\text{단, 등호는 } a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}\text{일 때 성립}\right)$

Step 2 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 (나)에 알맞은 수를 구한다.

$a+b=2$이므로 ㉠의 우변의 식은

$\left(a+b+\frac{a+b}{ab}\right)^2=\left(2+\frac{2}{ab}\right)^2$

이고 a, b가 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2=a+b\geq2\sqrt{ab}$

$\therefore ab\leq1$ (단, 등호는 $a=b=1$일 때 성립)

$\therefore \left(2+\frac{2}{ab}\right)^2\geq(2+2)^2=\boxed{(나)\ 16}$ …… ㉡

Step 3 (다)에 알맞은 수를 구한다.

㉠, ㉡에서 $2\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right\}\geq16$이므로

$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq\boxed{(다)\ 8}$

(단, 등호는 $a=b=1$일 때 성립)

Step 4 $p+q+r$의 값을 구한다.

따라서 $p=2$, $q=16$, $r=8$이므로

$p+q+r=26$

답 26

논리 Check

양수 a, b에 대하여 $a+b=6$일 때,

$\left(a+\frac{9}{a}\right)^2+\left(b+\frac{9}{b}\right)^2$의 최솟값을 구하시오.

풀이 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$2\left\{\left(a+\frac{9}{a}\right)^2+\left(b+\frac{9}{b}\right)^2\right\}\geq\left(a+b+\frac{9}{a}+\frac{9}{b}\right)^2$ …… ㉠

$\left(\text{단, 등호는 } a+\frac{9}{a}=b+\frac{9}{b}\text{일 때 성립}\right)$

$a+b=6$이므로 ㉠의 우변의 식은

$\left\{a+b+\frac{9(a+b)}{ab}\right\}^2=\left(6+\frac{54}{ab}\right)^2$

이고 a, b가 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$6=a+b\geq2\sqrt{ab}$

$\therefore ab\leq9$ (단, 등호는 $a=b=3$일 때 성립)

$\therefore \left(6+\frac{54}{ab}\right)^2\geq(6+6)^2=144$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\left(a+\frac{9}{a}\right)^2+\left(b+\frac{9}{b}\right)^2\geq72$ (단, 등호는 $a=b=3$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 72이다. 답 72

0673 Step 1 명제 $q\longrightarrow p$가 참이 되는 경우를 생각해 본다.

조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

명제 $q\longrightarrow p$가 참이 되려면 $Q\subset P$이어야 하므로

$Q=\varnothing$ 또는 $P=\{x|x\text{는 실수}\}$ 또는 $Q\subset\{x|x\geq a\}$

또는 $Q\subset\{x|x\leq b-6\}$

이어야 한다.

Step 2 각 경우에서 a, b의 값의 범위를 구한다.

(i) $Q=\varnothing$인 경우

$a-b+1\geq b-a-1$이므로

$a\geq b-1$

(ii) $P=\{x|x\text{는 실수}\}$인 경우

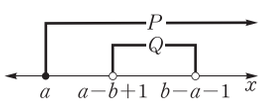
$a\leq b-6$

(iii) $Q\subset\{x|x\geq a\}$인 경우

오른쪽 그림에서

$a\leq a-b+1$

$\therefore b\leq1$

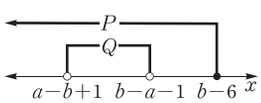


(iv) $Q\subset\{x|x\leq b-6\}$인 경우

오른쪽 그림에서

$b-a-1\leq b-6$

$\therefore a\geq5$



이상에서 명제 $q\longrightarrow p$가 참이 되려면

$a\geq b-1$ 또는 $a\leq b-6$ 또는 $b\leq1$ 또는 $a\geq5$

이어야 하므로 명제 $q\longrightarrow p$가 거짓이 되려면

$a<b-1$, $a>b-6$, $b>1$, $a<5$

$\therefore b-6<a<b-1$, $b>1$, $a<5$

Step 3 정수 a, b의 값을 구한다.

$2\leq b\leq6$일 때,

$b-6<a<b-1$, $a<5$를 만족시키는 정수 a는 각각 $b-5$,

$b-4$, $b-3$, $b-2$이다.

$b=7$일 때,

$1<a<6$, $a<5$를 만족시키는 정수 a는 2, 3, 4이다.

$b=8$일 때,

$2<a<7$, $a<5$를 만족시키는 정수 a는 3, 4이다.

$b=9$일 때,

$3<a<8$, $a<5$를 만족시키는 정수 a는 4이다.

$b\geq 10$일 때,

$b-6<a<b-1$, $a<5$를 만족시키는 정수 a는 없다.

Step 4 $a+b$의 최댓값을 구한다.

따라서 $a+b$가 최대인 경우는 $a=4$, $b=9$일 때이므로 $a+b$의 최댓값은 13이다. 답 13

0674 Step 1 명제 $p \longrightarrow q$의 대우가 참임을 이용한다.

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이 되어야 한다.

$\sim q$: $x^2+4x-5\geq 0$에서 $(x+5)(x-1)\geq 0$

$\therefore x\leq -5$ 또는 $x\geq 1$

$\sim p$: $(x^2-kx+k)(x^2+4x-5)\geq 0$

명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이 되려면 $x\leq -5$ 또는 $x\geq 1$에서 $x^2-kx+k\geq 0$이어야 한다.

즉 $f(x)=x^2-kx+k$라 할 때, $x\leq -5$ 또는 $x\geq 1$에서 $f(x)\geq 0$이어야 한다.

Step 2 이차방정식의 실근의 위치를 이용하여 k의 값의 범위를 구한다.

이차방정식 $x^2-kx+k=0$의 판별식을 D라 하면

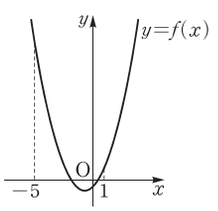
$D=(-k)^2-4k=k(k-4)$

(i) $D\leq 0$, 즉 $0\leq k\leq 4$일 때

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이다.

(ii) $D>0$, 즉 $k<0$ 또는 $k>4$일 때

$x\leq -5$ 또는 $x\geq 1$에서 $f(x)\geq 0$이려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



ⓐ $f(-5)=25+6k\geq 0$에서

$k\geq -\frac{25}{6}$

ⓑ $f(1)=1\geq 0$

ⓒ 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{k}{2}$이므로

$-5<\frac{k}{2}<1$에서

$-10<k<2$

ⓐ, ⓑ, ⓒ에서 $-\frac{25}{6}\leq k<2$

이때 $k<0$ 또는 $k>4$이므로

$-\frac{25}{6}\leq k<0$

(i), (ii)에서 $-\frac{25}{6}\leq k\leq 4$

Step 3 정수 k의 개수를 구한다.

따라서 명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되도록 하는 정수 k는

-4, -3, -2, …, 4

의 9개이다. 답 9

0675 Step 1 a의 값에 따른 $N(k_1)$의 값을 구한다.

두 조건 p_1, q_1을 각각

p_1: $x^2-2ax+a^2>0$, q_1: $\sqrt{(x-3)^2}>0$

이라 하고, 두 조건 p_1, q_1의 진리집합을 각각 P_1, Q_1이라 하자.

$x^2-2ax+a^2>0$, 즉 $(x-a)^2>0$에서 $x\neq a$인 모든 실수이므로

$P_1=\{x|x\neq a\}$

$\sqrt{(x-3)^2}>0$, 즉 $|x-3|>0$에서 $x\neq 3$인 모든 실수이므로

$Q_1=\{x|x\neq 3\}$

$a=3$이면 $P_1=Q_1$이므로 명제 k_1의 역과 대우는 모두 참이다.

$\therefore N(k_1)=2$

$a\neq 3$이면 $P_1\not\subset Q_1$, $Q_1\not\subset P_1$이므로 명제 k_1의 역과 대우는 모두 거짓이다.

$\therefore N(k_1)=0$

Step 2 a의 값에 따른 $N(k_2)$의 값을 구한다.

명제 k_2의 대우는

'$|x-4|<3$이면 $|x-5|<a$이다.'

이고, 명제가 참이 되려면 그 대우가 참이 되어야 한다.

두 조건 p_2, q_2를 각각

p_2: $|x-4|<3$, q_2: $|x-5|<a$

라 하고, 두 조건 p_2, q_2의 진리집합을 각각 P_2, Q_2라 하자.

$|x-4|<3$에서 $P_2=\{x|1<x<7\}$

$|x-5|<a$에서 $Q_2=\{x|5-a<x<5+a\}$

$a\leq 2$이면 $P_2\not\subset Q_2$, $Q_2\subset P_2$이므로 명제 k_2의 대우는 거짓, 역의 대우는 참이다.

즉 명제 k_2는 거짓이고 역은 참이므로 $N(k_2)=1$

$a\geq 4$이면 $P_2\subset Q_2$, $Q_2\not\subset P_2$이므로 명제 k_2의 대우는 참, 역의 대우는 거짓이다.

즉 명제 k_2는 참이고 역은 거짓이므로 $N(k_2)=1$

$a=3$이면 $P_2\not\subset Q_2$, $Q_2\not\subset P_2$이므로 명제 k_2의 대우와 역의 대우가 모두 거짓이다.

즉 명제 k_2와 역이 모두 거짓이므로 $N(k_2)=0$

Step 3 $N(k_1)N(k_2)$의 값을 구한다.

$a=3$이면 $N(k_1)N(k_2)=2\times 0=0$

$a\neq 3$이면 $N(k_1)N(k_2)=0\times 1=0$

$\therefore N(k_1)N(k_2)=0$ 답 0

0676 Step 1 B, D의 진술은 항상 참임을 안다.

B와 D의 진술은 항상 참, 거짓이 같으므로 B, D는 둘 다 참이거나 둘 다 거짓이다.

B, D의 진술이 모두 거짓이면 A, C, E의 진술은 모두 참이어야 한다.

그런데 A의 진술이 참이므로 A는 점심시간에 보건실에 있었고, C의 진술도 참이므로 A는 D와 함께 운동장에 있었어야 하므로 모순이다.

따라서 B, D의 진술은 모두 참이다.

Step 2 E의 진술이 거짓임을 안다.

B의 진술이 참이므로 A, B, C는 함께 있었는데 C와 단둘이 있었다고 진술한 E의 진술은 거짓이다.

Step 3 거짓 진술을 한 사람과 범인을 구한다.

나머지 거짓 진술을 한 사람은 A 또는 C이다.

(i) A의 진술이 참, C의 진술이 거짓인 경우

A는 보건실에 있었으므로 A, B, C는 모두 보건실에 함께 있었고, 운동장에 있었다던 C의 진술은 거짓이 된다.

따라서 거짓 진술을 한 사람은 C, E이고, 이때 C는 교실에 있지 않았으므로 범인은 E이다.

(ii) A의 진술이 거짓, C의 진술이 참인 경우

C는 D, A와 함께 운동장에 있었으므로 A, B, C, D가 모두 운동장에 함께 있었다.

따라서 거짓 진술을 한 사람은 A, E이고, 이때 A는 교실에 있지 않았으므로 범인은 E이다.

(i), (ii)에서 범인은 E이다. 답 E

0677 Step 1 (가)에서 집합 A의 부분집합이 될 수 있는 것을 찾는다.

(가)에서 명제 '어떤 $x \in U$에 대하여 $\{x, 3x+1\} \subset A$이다.'는 참이다.

즉 집합 A는 $\{1, 4\}$, $\{2, 7\}$, $\{3, 10\}$, $\{4, 13\}$, $\{5, 16\}$ 중 적어도 하나의 집합을 부분집합으로 갖는다.

이때 $1 \notin A$이므로 $\{1, 4\} \not\subset A$

Step 2 (나)에서 집합 A의 부분집합이 될 수 있는 것을 찾는다.

(나)에서 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 p는 q이기 위한 필요충분조건이므로 $P=Q$

(i) $\{2, 7\} \subset A$ 또는 $\{4, 13\} \subset A$ 또는 $\{5, 16\} \subset A$인 경우

$2 \in A$이면 2는 조건 q를 만족시키므로 $2 \in Q$

즉 $2 \in P$이므로 조건 p에 의하여 $1 \in A$가 되어 성립하지 않는다.

$\therefore \{2, 7\} \not\subset A$

$4 \in A$이면 4는 조건 q를 만족시키므로 $4 \in Q$

즉 $4 \in P$이므로 조건 p에 의하여 $2 \in A$가 되어 $1 \in A$이므로 성립하지 않는다.

$\therefore \{4, 13\} \not\subset A$

$16 \in A$이면 16은 조건 q를 만족시키므로 $16 \in Q$

즉 $16 \in P$이므로 조건 p에 의하여 $8 \in A$

이때 8은 조건 q를 만족시키므로 $8 \in Q$

즉 $8 \in P$이므로 조건 p에 의하여 $4 \in A$, $2 \in A$가 되어 $1 \in A$이므로 성립하지 않는다.

$\therefore \{5, 16\} \not\subset A$

(ii) $\{3, 10\} \subset A$인 경우

$3 \in A$, 즉 $\frac{1}{2} \times 6 \in A$이면 6은 조건 p를 만족시키므로 $6 \in P$

즉 $6 \in Q$이므로 조건 q에 의하여 $6 \in A$

또 $6 \in A$, 즉 $\frac{1}{2} \times 12 \in A$이면 12는 조건 p를 만족시키므로 $12 \in P$

즉 $12 \in Q$이므로 조건 q에 의하여 $12 \in A$

$10 \in A$이면 10은 조건 q를 만족시키므로 $10 \in Q$

즉 $10 \in P$이므로 조건 p에 의하여 $5 \in A$

$\therefore \{3, 5, 6, 10, 12\} \subset A$

(i), (ii)에서 $\{3, 5, 6, 10, 12\} \subset A$

Step 3 $n(A)$의 최솟값을 구한다.

따라서 $A=\{3, 5, 6, 10, 12\}$일 때 원소의 개수가 최소이므로 $n(A)$의 최솟값은 5이다. 답 5

참고 $A=\{3, 5, 6, 10, 12\}$일 때, $P=Q=\{6, 10, 12\}$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이고, $\{3, 10\} \subset A$이므로 (가)도 만족시킨다.

0678 Step 1 함수 $y=h(x)$를 구한다.

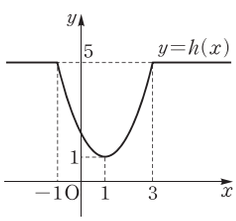
$f(x)<g(x)$, 즉 $x^2-2x+2<5$에서

$x^2-2x-3<0$, $(x+1)(x-3)<0$

$\therefore -1<x<3$

$\therefore h(x)=\begin{cases} x^2-2x+2 & (-1<x<3) \\ 5 & (x \le -1 \text{ 또는 } x \ge 3) \end{cases}$

따라서 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



Step 2 방정식 $h(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 2일 때의 k의 값의 범위를 구한다.

방정식 $h(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 2개이어야 하므로

$1<k<5$

Step 3 p가 $\sim q$이기 위한 필요충분조건임을 이용하여 $a+b$의 값을 구한다.

$\sim q$: $a<k<b$이므로 두 조건 p, q의 진리집합을 P, Q라 하면

$P=\{k \mid 1<k<5\}$, $Q^C=\{k \mid a<k<b\}$

이때 p가 $\sim q$이기 위한 필요충분조건이므로

$P=Q^C$

따라서 $a=1$, $b=5$이므로

$a+b=6$ 답 6

0679 Step 1 $|(a-2)(b+1)|$의 최댓값을 구한다.

점 $P(a, b)$가 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ 위를 움직이므로

$(a-2)^2+(b+1)^2=4$

$a \neq 2$, $b \neq -1$이면 $(a-2)^2>0$, $(b+1)^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$(a-2)^2+(b+1)^2 \ge 2\sqrt{(a-2)^2(b+1)^2}$

$4 \ge 2|(a-2)(b+1)|$

$\therefore |(a-2)(b+1)| \le 2$

(단, 등호는 $|a-2|=|b+1|=\sqrt{2}$일 때 성립)

Step 2 $ab+a-2b$의 최댓값을 구한다.

$\therefore ab+a-2b=a(b+1)-2(b+1)+2$

$=(a-2)(b+1)+2$

$\le|(a-2)(b+1)|+2$

$\le 2+2=4$

따라서 $ab+a-2b$의 최댓값은 4이다. 답 4

시험 만점 완성하기

본책 134~137쪽

0680 전략 집합의 연산 법칙을 이용하여 주어진 집합을 간단히 한다.

$P^C\cap(Q^C\cap R^C)=P^C\cap(Q\cup R)^C$

$=P^C-(Q\cup R)$ ····· ㉠

$p: x^2-6x-16\ge 0$에서 $\sim p: x^2-6x-16<0$

$x^2-6x-16<0$에서 $(x+2)(x-8)<0$

$\therefore -2<x<8$

x는 정수이므로 $P^C=\{-1, 0, 1, \cdots, 7\}$

또 $(x-4)^2\le 0$에서 $x=4$ $\therefore Q=\{4\}$

8 이하의 소수는 2, 3, 5, 7이므로 $R=\{2, 3, 5, 7\}$

㉠에서

$P^C\cap(Q^C\cap R^C)=P^C-(Q\cup R)$

$=\{-1, 0, 1, 6\}$

따라서 집합 $P^C\cap(Q^C\cap R^C)$의 모든 원소의 합은

$-1+0+1+6=6$ 답 ①

0681 전략 $p\longrightarrow q$가 거짓임을 보이려면 p는 만족시키지만 q는 만족시키지 않는 반례를 찾는다.

① [반례] $x=2$이면 x는 소수이지만 x^2은 짝수이다.

② [반례] $x=-1$이면 $x<1$이지만 $x^2=1$이다.

③ [반례] $x=1$, $y=2$이면 $\sqrt{x^2y^2}=xy$이지만 $xy=2$이다.

④ $x^2-6x+5\le 0$에서 $(x-1)(x-5)\le 0$

$\therefore 1\le x\le 5$

이때 $1\le x\le 5$이면 $x\le 5$이므로 참인 명제이다.

⑤ [반례] $x=0$, $y=\sqrt{2}$이면 $x+y$는 무리수이지만 x는 무리수가 아니다.

따라서 참인 명제는 ④이다. 답 ④

0682 전략 명제 $p\longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 집합 $P\cap Q^C$의 원소이다.

명제 $\sim q\longrightarrow p$가 거짓임을 보이는 원소는 집합 Q^C에는 속하고 집합 P에는 속하지 않는다.

따라서 구하는 원소는 집합 $Q^C\cap P^C$, 즉 $(P\cup Q)^C$의 원소이므로 g이다. 답 ①

0683 전략 명제 $\sim p\longrightarrow q$가 참이 되려면 $P^C\subset Q$이어야 함을 이용한다.

$\sim p$: x는 소수이다.

이므로 $P^C=\{2, 3, 5, 7, 11\}$

명제 $\sim p\longrightarrow q$가 참이 되려면 $P^C\subset Q$이어야 하므로 집합 Q는 전체집합 U의 부분집합 중 2, 3, 5, 7, 11을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 Q의 개수는

$2^{12-5}=2^7=128$ 답 ④

0684 전략 '어떤 x에 대하여 p이다.'의 부정은 '모든 x에 대하여 $\sim p$이다.'이다.

명제 '$x\in U$인 어떤 x에 대하여 $\sim p$ 그리고 q이다.'가 거짓이므로 명제의 부정인

'$x\in U$인 모든 x에 대하여 p 또는 $\sim q$이다.'

가 참이다.

즉 $P\cup Q^C=U$이므로 $(P\cup Q^C)^C=\varnothing$

$P^C\cap Q=Q-P=\varnothing$ $\therefore Q\subset P$

① $P\cap Q=Q$

② $P\cup Q=P$

⑤ $P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C=P^C$

따라서 항상 옳은 것은 ④이다. 답 ④

0685 전략 세 조건 p, q, r에 대하여 두 명제 $p\longrightarrow q$, $q\longrightarrow r$가 모두 참이면 명제 $p\longrightarrow r$도 참이다.

세 명제 $p\longrightarrow\sim r$, $\sim q\longrightarrow\sim r$, $s\longrightarrow r$가 참이므로 그 대우 $r\longrightarrow\sim p$, $r\longrightarrow q$, $\sim r\longrightarrow\sim s$도 참이다.

ㄴ. 두 명제 $s\longrightarrow r$, $r\longrightarrow q$가 참이므로 명제 $s\longrightarrow q$도 참이다.

ㄷ. 두 명제 $p\longrightarrow\sim r$, $\sim r\longrightarrow\sim s$가 참이므로 명제 $p\longrightarrow\sim s$도 참이다.

이상에서 항상 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ③

0686 전략 $p\Longrightarrow q$, $q\not\Rightarrow p$인 것을 찾는다.

ㄱ. $q: ab>0$에서 $a>0$, $b>0$ 또는 $a<0$, $b<0$

따라서 p는 q이기 위한 충분조건도 아니고 필요조건도 아니다.

ㄴ. $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$이면 $0<b<a$이고, $0<b<a$이면 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$이다.

따라서 $p\Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. $a>b>c$이면 $a-b>0$, $b-c>0$, $c-a<0$이므로

$(a-b)(b-c)(c-a)<0$

$\therefore p\Longrightarrow q$

[$q\longrightarrow p$의 반례] $a=1$, $b=3$, $c=2$이면

$(a-b)(b-c)(c-a)=-2<0$이지만 $b>c>a$이다.

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

이상에서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은 ㄷ뿐이다. 답 ②

0687 전략 집합의 연산 법칙이나 연산의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$$\begin{aligned}(A\cap B)\cup(A\cup B^C)^C&=(A\cap B)\cup(A^C\cap B)\\&=(A\cup A^C)\cap B\\&=U\cap B\\&=B\end{aligned}$$

따라서 $B-A=B$가 성립하기 위한 필요충분조건은

$A\cap B=\varnothing$ 답 ④

0688 전략 p가 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 $p\Longrightarrow\sim q$가 참이어야 함을 이용한다.

$x^2-18x+77\le0$에서 $(x-7)(x-11)\le0$

$\therefore\ 7\le x\le11$

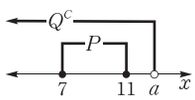
$q\colon x\ge a$에서 $\sim q\colon x<a$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\mid7\le x\le11\}$, $Q^C=\{x\mid x<a\}$

p가 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 $p\Longrightarrow\sim q$가 참이어야 한다.

즉 $P\subset Q^C$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a>11$

따라서 자연수 a의 최솟값은 12이다. 답 ③

0689 전략 명제 'p이면 q이다.'가 참임을 직접 증명하기 어려운 경우에는 명제의 대우가 참임을 증명한다.

주어진 명제의 대우는

'a, b, c가 모두 (가) 홀수 이면 $a^2+b^2\ne c^2$이다.'

a, b, c가 모두 (가) 홀수 이면 a^2, b^2, c^2은 모두 (나) 홀수 이므로 a^2+b^2은 (다) 짝수 이다.

$\therefore\ a^2+b^2\ne c^2$

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다. 답 ③

0690 전략 주어진 식을 $f(x)+\frac{1}{f(x)}$ $(f(x)>0)$의 꼴을 포함하도록 변형한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$x>1$에서 $x-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

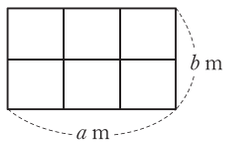
$$\begin{aligned}\frac{x^2+x+7}{x-1}&=\frac{(x-1)(x+2)+9}{x-1}\\&=x+2+\frac{9}{x-1}\\&=x-1+\frac{9}{x-1}+3\\&\ge2\sqrt{(x-1)\times\frac{9}{x-1}}+3\\&=2\times3+3=9\end{aligned}$$

$\left(\text{단, 등호는 } x-1=\frac{9}{x-1}\text{, 즉 } x=4\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 9이다. 답 ③

0691 전략 전체 화단의 가로, 세로의 길이를 각각 a m, b m로 놓고 a, b에 대한 식을 구한다.

전체 화단의 가로의 길이를 a m, 세로의 길이를 b m라 하면 철망의 길이가 60 m이므로



$3a+4b=60$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3a+4b\ge2\sqrt{3a\times4b}=4\sqrt{3ab}$ ····· ㉠

이때 $3a+4b=60$이므로

$60\ge4\sqrt{3ab}$, $\sqrt{3ab}\le15$

$3ab\le225$ $\therefore\ ab\le75$

전체 화단의 넓이는 ab m^{2}이므로 넓이의 최댓값은 75 m^{2}이다.

한편 ㉠에서 등호는 $3a=4b$일 때 성립하고 이때 화단 전체의 넓이가 최대가 되므로 $3a+4b=60$에서

$3a=4b=30$ $\therefore\ a=10$, $b=\frac{15}{2}$

즉 바깥쪽 직사각형의 둘레의 길이는

$2a+2b=2\times10+2\times\frac{15}{2}=35$ (m)

따라서 $S=75$, $l=35$이므로

$S+l=110$ 답 ⑤

0692 전략 '어떤 x에 대하여 p이다.'의 부정은 '모든 x에 대하여 $\sim p$이다.'이다.

명제 '어떤 실수 x에 대하여 $k(x^2+4kx-3k+1)<0$이다.'가 거짓이므로 이 명제의 부정 '모든 실수 x에 대하여 $k(x^2+4kx-3k+1)\ge0$이다.'가 참이어야 한다.

(i) $k=0$일 때

$0\ge0$이므로 항상 성립한다.

(ii) $k>0$일 때

모든 실수 x에 대하여 $x^2+4kx-3k+1\ge0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+4kx-3k+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-(-3k+1)\le0$, $4k^2+3k-1\le0$

$(k+1)(4k-1)\le0$ $\therefore\ -1\le k\le\frac{1}{4}$

그런데 $k>0$이므로 $0<k\le\frac{1}{4}$

(iii) $k<0$일 때

모든 실수 x에 대하여 $x^2+4kx-3k+1\le0$이어야 한다.

그런데 $x^2+4kx-3k+1>0$인 x가 반드시 존재하므로 성립하지 않는다.

이상에서 실수 k의 값의 범위는

$0\le k\le\frac{1}{4}$ 답 $0\le k\le\frac{1}{4}$

0693 전략 '어떤 x에 대하여 p이다.'가 참이 되려면 p를 만족시키는 x가 단 하나라도 존재하면 된다.

명제 '집합 P의 어떤 원소 x에 대하여 x는 2의 배수이다.'가 참이 되려면 집합 P는 2, 4, 8 중에서 적어도 하나를 원소로 가져야 한다.

전체집합 U의 부분집합 중에서 2, 4, 8을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{4-3}=2$

따라서 집합 P의 개수는

$2^4-2=14$ 답 14

0694 전략 명제 $p \Longrightarrow q$의 대우 $\sim q \Longrightarrow \sim p$가 참이 되는 경우를 생각해 본다.

두 명제 $p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow r$가 모두 참이므로 그 대우인 $\sim q \Longrightarrow \sim p$, $\sim r \Longrightarrow \sim q$도 참이다.

즉 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$R^C \subset Q^C \subset P^C$

$\sim p$: $|x|>a$에서 $x<-a$ 또는 $x>a$

$\therefore P^C=\{x \mid x<-a \text{ 또는 } x>a\}$

$\sim q$: $x>8-a$이므로 $Q^C=\{x \mid x>8-a\}$

$\sim r$: $x^2-13x+42=0$에서 $(x-6)(x-7)=0$

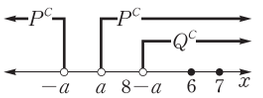
$\therefore x=6$ 또는 $x=7$

$\therefore R^C=\{6, 7\}$

따라서 오른쪽 그림에서

$a \le 8-a<6$

$\therefore 2<a \le 4$



즉 자연수 a는 3, 4이므로 구하는 합은 7이다. 답 7

0695 전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $x+\frac{1}{x}$의 값의 범위를 구한다.

$x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+\frac{1}{x} \ge 2\sqrt{x \times \frac{1}{x}}=2$

$\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{1}{x}, \text{ 즉 } x=1 \text{일 때 성립}\right)$

$x+\frac{1}{x}=a$라 하면

$\left(x+\frac{1}{x}+4\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=a(a+4)=a^2+4a$

$=(a+2)^2-4 \ (a \ge 2)$

따라서 $(a+2)^2-4$는 $a=2$일 때 최솟값을 가지므로 구하는 최솟값은

$(2+2)^2-4=12$ 답 12

0696 전략 주어진 식을 변형한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$

$=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$

$=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)$

$\ge 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{b} \times \frac{b}{c}}+2\sqrt{\frac{a}{c} \times \frac{c}{a}}$

$=6$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)

따라서 $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$의 최솟값은 6이다. 답 6

참고 등호는 각각 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}=\frac{b}{c}$, $\frac{a}{c}=\frac{c}{a}$일 때 성립하므로

$a^2=b^2=c^2 \quad \therefore a=b=c \ (\because a>0, b>0, c>0)$

0697 전략 $S+4T$를 $\overline{O_1P}$, $\overline{O_2P}$에 대한 식으로 나타낸 후 코시-슈바르츠의 부등식을 이용한다.

$\overline{O_1P}=x$, $\overline{O_2P}=y$라 하면

$x+y=5\sqrt{5}$,

$S+4T=\pi x^2+4\pi y^2=\pi(x^2+4y^2)$

x, y는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$\left\{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\{x^2+(2y)^2\} \ge \left(x+\frac{1}{2} \times 2y\right)^2$

$\frac{5}{4}(x^2+4y^2) \ge (x+y)^2$

$\therefore x^2+4y^2 \ge \frac{4}{5} \times (5\sqrt{5})^2=100$

(단, 등호는 $x=4y$일 때 성립)

따라서 x^2+4y^2의 최솟값이 100이므로 $S+4T$의 최솟값은 100π이다. 답 100π

0698 전략 $x \in Q^C \cap R^C$임을 알고 집합 $Q^C \cap R^C$의 정수인 원소의 개수가 4가 되는 경우를 생각해 본다.

$F_q(x)+F_r(x)=8$이 되려면 $F_q(x)=4$, $F_r(x)=4$이어야 하므로 $x \notin Q$, $x \notin R$이어야 한다.

$\therefore x \in Q^C \cap R^C$ … ❶

q: $|x-1| \ge 5$에서 $\sim q$: $|x-1|<5$이므로

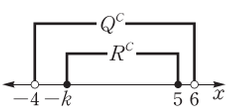
$-5<x-1<5 \quad \therefore -4<x<6$

$\therefore Q^C=\{x \mid -4<x<6\}$

r: $(x+k)(x-5)>0$에서 $\sim r$: $(x+k)(x-5) \le 0$이므로

$R^C=\{x \mid (x+k)(x-5) \le 0\}$ … ❷

집합 $Q^C \cap R^C$의 정수인 원소가 4개이려면 오른쪽 그림과 같이 $R^C \subset Q^C$이고 이때 집합 $Q^C \cap R^C$의 정수인 원소는 2, 3, 4, 5이어야 하므로



$1<-k \le 2$

$\therefore -2 \le k<-1$ … ❸

따라서 정수 k의 값은 -2이다. … ❹

답 -2

단계	채점 요소	배점
❶	$x \in Q^C \cap R^C$임을 알기	1점
❷	Q^C, R^C 구하기	2점
❸	k의 값의 범위 구하기	2점
❹	정수 k의 값 구하기	1점

0699 전략 명제 $\sim p \Longrightarrow \sim q$가 참이면 그 대우 $q \Longrightarrow p$도 참임을 이용한다.

명제 $\sim p \Longrightarrow \sim q$가 참이면 그 대우인 $q \Longrightarrow p$도 참이다. … ❶

즉 $Q \subset P$이어야 하므로 $15 \in P$

$a^2-1=15$이므로 $a^2=16$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=4$

(i) $a=-4$일 때

$P=\{2, 5, 15\}$, $Q=\{-6, 15\}$이므로 $Q\not\subset P$

(ii) $a=4$일 때

$P=\{2, 5, 15\}$, $Q=\{2, 15\}$이므로 $Q\subset P$

(i), (ii)에서 $a=4$ … ❷

답 4

단계	채점 요소	배점
❶	주어진 명제의 대우가 참임을 알기	1점
❷	a의 값 구하기	3점

0700 전략 이차부등식이 항상 성립하는 경우를 생각해 본다.

실수 전체의 집합을 U라 하고 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

명제 '모든 실수 x에 대하여 p이다.'가 참이 되려면 $P=U$이어야 하므로 모든 실수 x에 대하여 $x^2+4ax+16>0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2+4ax+16=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(2a)^2-16<0$, $4(a+2)(a-2)<0$

$\therefore -2<a<2$

즉 정수 a는 -1, 0, 1의 3개이다. … ❶

또 명제 '$\sim q$는 p이기 위한 필요조건이다.'가 참이 되려면 $P\subset Q^C$이어야 하고, 이때 $P=U$이므로 $U\subset Q^C$, 즉 $Q=\varnothing$이어야 한다.

즉 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2bx+2b+8\geq 0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2bx+2b+8=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=b^2-(2b+8)\leq 0$, $b^2-2b-8\leq 0$

$(b+2)(b-4)\leq 0$ $\therefore -2\leq b\leq 4$

즉 정수 b는 -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4의 7개이다. … ❷

따라서 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는

$3\times 7=21$ … ❸

답 21

단계	채점 요소	배점
❶	정수 a의 개수 구하기	2점
❷	정수 b의 개수 구하기	3점
❸	순서쌍 (a, b)의 개수 구하기	1점

0701 전략 세 점 A, B, M의 좌표를 a에 대한 식으로 나타내어 본다.

$x^2-6ax=\frac{1}{a}x$에서 $x^2-\left(6a+\frac{1}{a}\right)x=0$

$x\left(x-6a-\frac{1}{a}\right)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=6a+\frac{1}{a}$

$\therefore \mathrm{A}\left(6a+\frac{1}{a}, 6+\frac{1}{a^2}\right)$

$f(x)=x^2-6ax=(x-3a)^2-9a^2$에서

$\mathrm{B}(3a, -9a^2)$ … ❶

선분 AB의 중점이 M이므로

$\frac{1}{2}\left(6a+\frac{1}{a}+3a\right)=\frac{9}{2}a+\frac{1}{2a}$,

$\frac{1}{2}\left(6+\frac{1}{a^2}-9a^2\right)=-\frac{9}{2}a^2+3+\frac{1}{2a^2}$

따라서 $\mathrm{M}\left(\frac{9}{2}a+\frac{1}{2a}, -\frac{9}{2}a^2+3+\frac{1}{2a^2}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{MH}}=\frac{9}{2}a+\frac{1}{2a}$ ($\because a>0$) … ❷

이때 $\frac{9}{2}a>0$, $\frac{1}{2a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{9}{2}a+\frac{1}{2a}\geq 2\sqrt{\frac{9}{2}a\times\frac{1}{2a}}=2\times\frac{3}{2}=3$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{9}{2}a=\frac{1}{2a}, \text{ 즉 } a=\frac{1}{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 선분 MH의 길이의 최솟값은 3이다. … ❸

답 3

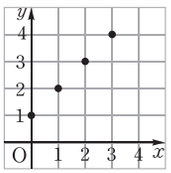
단계	채점 요소	배점
❶	점 A, B의 좌표 구하기	2점
❷	$\overline{\mathrm{MH}}$의 길이 구하기	1점
❸	$\overline{\mathrm{MH}}$의 길이의 최솟값 구하기	2점

08 함수

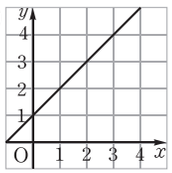
셀프 CHECK → 본책 140~141쪽

A 답 (1) 함수이다.
정의역: {1, 2, 3}, 공역: {4, 5, 6}, 치역: {4, 6}
(2) 함수가 아니다.

B 답 (1)



(2)



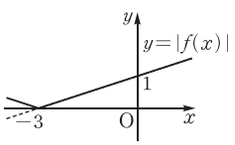
C 답 (1) ㄱ, ㄴ (2) ㄱ, ㄴ (3) ㄱ (4) ㄹ

D 답 (1) 2 (2) 4 (3) 8 (4) 2

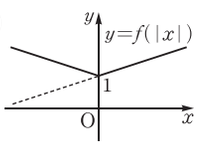
E 답 (1) ○ (2) ×

F 답 (1) 0 (2) 5 (3) 5 (4) 0

G 답 (1)



(2)



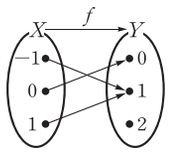
내신유형 다지기 → 본책 142~157쪽

유형 131 함수의 뜻 → 본책 142쪽

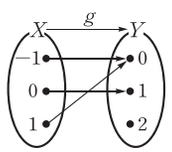
(1) 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩 대응할 때, 이 대응을 X에서 Y로의 함수라 한다.
(2) 함수의 그래프는 정의역의 각 원소 a에 대하여 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만난다.

0702 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

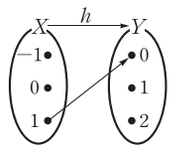
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



이상에서 함수인 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

0703 ①, ③ 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.
② 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 그래프가 만나지 않거나 무수히 많은 점에서 만나므로 함수의 그래프가 아니다.
④, ⑤ 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 그래프가 만나지 않거나 두 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.
따라서 함수의 그래프인 것은 ①, ③이다. 답 ①, ③

0704 ① $-2\le x\le 1$에서 $2\le x+4\le 5$
$\therefore\ 2\le f(x)\le 5$
② $-2\le x\le 1$에서 $-2\le -2x\le 4$
$-1\le -2x+1\le 5$ $\therefore\ -1\le f(x)\le 5$
③ $-2\le x\le 1$에서 $0\le x^2\le 4$
$1\le x^2+1\le 5$ $\therefore\ 1\le f(x)\le 5$
④ $-2\le x\le 1$에서 $-3\le x-1\le 0$
$0\le (x-1)^2\le 9$, $-4\le (x-1)^2-4\le 5$
$\therefore\ -4\le f(x)\le 5$
⑤ $-2\le x\le 1$에서 $-4\le x-2\le -1$
$1\le |x-2|\le 4$, $0\le |x-2|-1\le 3$
$\therefore\ 0\le f(x)\le 3$
따라서 X에서 Y로의 함수가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

유형 132 함숫값 구하기 → 본책 142쪽

(1) 함수 $f(x)$에서 $f(k)$의 값 구하기
➜ x 대신 k를 대입한다.
(2) 함수 $f(ax+b)$에서 $f(k)$의 값 구하기
➜ $ax+b=k$를 만족시키는 x의 값을 구하여 x 대신 그 수를 대입한다.

0705 $f(-1)=-(-1)+8=9$
$f(4)=2\times 4-1=7$
$\therefore\ f(-1)+f(4)=9+7=16$ 답 16

0706 $\frac{x+1}{3}=-2$에서
$x+1=-6$ $\therefore\ x=-7$
$f\left(\frac{x+1}{3}\right)=2x+9$에 $x=-7$을 대입하면
$f(-2)=2\times(-7)+9=-5$ 답 −5

다른 풀이 $\frac{x+1}{3}=t$로 놓으면 $x=3t-1$
$\therefore\ f(t)=2(3t-1)+9=6t+7$
따라서 $f(x)=6x+7$이므로
$f(-2)=6\times(-2)+7=-5$

0707 $f(1)=16-1^2=15$
$f(23)=f(19)=\cdots=f(3)=16-3^2=7$
$\therefore\ f(1)+f(23)=15+7=22$ 답 22

0708 $152^2=(150+2)^2=150^2+2\times 150\times 2+2^2$
에서 152^2을 5로 나누었을 때의 나머지는 $2^2=4$이므로
$f(152)=4$ … ❶
$231^2=(230+1)^2=230^2+2\times 230\times 1+1^2$
에서 231^2을 5로 나누었을 때의 나머지는 $1^2=1$이므로
$f(231)=1$ … ❷
$\therefore\ f(152)+f(231)=4+1=5$ … ❸
답 5

단계	채점 요소	비율
❶	$f(152)$의 값 구하기	40 %
❷	$f(231)$의 값 구하기	40 %
❸	$f(152)+f(231)$의 값 구하기	20 %

유형 133 조건을 이용하여 함숫값 구하기

본책 143쪽

$f(x+y)=f(x)f(y)$ 또는 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 또는 $f(x+y)=f(x)+f(y)$와 같은 조건이 주어졌을 때 함숫값 구하기

➜ 주어진 조건을 이용할 수 있도록 x, y에 적당한 값을 대입한다.

0709 $f(x+y)=f(x)f(y)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(2)=f(1)f(1)=3\times3=9$

㉠의 양변에 $x=1$, $y=2$를 대입하면

$f(3)=f(1)f(2)=3\times9=27$

㉠의 양변에 $x=2$, $y=3$을 대입하면

$f(5)=f(2)f(3)=9\times27=243$ 답 243

0710 $f(xy)=f(x)+f(y)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=2$, $y=2$를 대입하면

$f(4)=f(2)+f(2)=2+2=4$

㉠의 양변에 $x=2$, $y=4$를 대입하면

$f(8)=f(2)+f(4)=2+4=6$

한편 ㉠의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(1)=f(1)+f(1)$

$\therefore f(1)=0$

㉠의 양변에 $x=\frac{1}{4}$, $y=4$를 대입하면

$f(1)=f\left(\frac{1}{4}\right)+f(4)$, $0=f\left(\frac{1}{4}\right)+4$

$\therefore f\left(\frac{1}{4}\right)=-4$

$\therefore f(8)\times f\left(\frac{1}{4}\right)=6\times(-4)=-24$ 답 ②

0711 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ …… ㉠

ㄱ. ㉠의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)$ $\therefore f(0)=0$ (참)

ㄴ. ㉠의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(2)=f(1)+f(1)$, $4=2f(1)$

$\therefore f(1)=2$ (거짓)

ㄷ. $f(2x)=f(x)+f(x)=2f(x)$

$f(3x)=f(x)+f(2x)=f(x)+2f(x)=3f(x)$

$f(4x)=f(x)+f(3x)=f(x)+3f(x)=4f(x)$

⋮

$\therefore f(nx)=nf(x)$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

유형 134 함수의 정의역, 공역, 치역

본책 143쪽

함수 $f: X\longrightarrow Y$에 대하여

(1) 정의역: 집합 X (2) 공역: 집합 Y

(3) 치역: 함숫값 전체의 집합, 즉 $\{f(x)\,|\,x\in X\}$

0712 (i) $a>0$일 때

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 서로 같으므로

$f(-3)=-3$, $f(1)=1$

$-3a+b=-3$, $a+b=1$

$\therefore a=1$, $b=0$

그런데 $ab=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 서로 같으므로

$f(-3)=1$, $f(1)=-3$

$-3a+b=1$, $a+b=-3$

$\therefore a=-1$, $b=-2$

(i), (ii)에서 $a=-1$, $b=-2$

$\therefore ab=2$ 답 2

0713 $f(-2)=k\times(-2)^2+3=4k+3$,

$f(-1)=k\times(-1)^2+3=k+3$,

$f(0)=k\times0^2+3=3$,

$f(1)=k\times1^2+3=k+3$

이때 $k=0$이면 치역은 $\{3\}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $k\neq0$이므로 함수 $f(x)$의 치역은

$\{4k+3,\ k+3,\ 3\}$

치역의 모든 원소의 합이 24이므로

$(4k+3)+(k+3)+3=24$

$5k+9=24$ $\therefore k=3$ 답 3

0714 (i) $a>0$일 때

치역이 $\{y\,|\,-a+4\le y\le3a+4\}$이므로

$-a+4\ge-2$, $3a+4\le7$

$\therefore a\le1$

이때 $a>0$이므로 $0<a\le1$

즉 정수 a의 값은 1이다. … ❶

(ii) $a<0$일 때

치역이 $\{y\,|\,3a+4\le y\le-a+4\}$이므로

$3a+4\ge-2$, $-a+4\le7$

$\therefore a\ge-2$

이때 $a<0$이므로 $-2\le a<0$

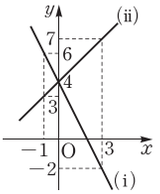
즉 정수 a의 값은 -2, -1이다. … ❷

(i), (ii)에서 정수 a는 -2, -1, 1의 3개이다. … ❸

답 3

단계	채점 요소	비율
❶	$a>0$일 때, 정수 a의 값 구하기	40 %
❷	$a<0$일 때, 정수 a의 값 구하기	40 %
❸	정수 a의 개수 구하기	20 %

다른 풀이 일차함수 $y=ax+4$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 4)$를 지나는 직선이므로 정의역이 $\{x|-1\le x\le 3\}$, 공역이 $\{y|-2\le y\le 7\}$이려면 직선 $y=ax+4$의 기울기는 오른쪽 그림에서 직선 (i)의 기울기보다 크거나 같고 직선 (ii)의 기울기보다 작거나 같아야 한다.



직선 (i)의 기울기는 -2, 직선 (ii)의 기울기는 1이므로

$-2\le a\le 1$

그런데 $a\neq 0$이므로 정수 a는 -2, -1, 1의 3개이다.

만점 공략 노트

$y=ax+4$는 일차함수이므로 $a\neq 0$이어야 한다. $a=0$을 포함시키지 않도록 주의한다.

0715 $f(x)=-x^2+2ax+2$라 하면

$f(x)=-(x-a)^2+a^2+2$이므로 정의역이 $X=\{x|a\le x\le 6\}$, 치역이 $Y=\{y|b\le y\le 11\}$이려면

$f(a)=11$, $f(6)=b$

$f(a)=11$에서

$a^2+2=11$, $a^2=9$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

$f(6)=b$에서 $b=-6^2+2\times 3\times 6+2=2$

$\therefore a+b=5$ 답 5

유형 135 서로 같은 함수 → 본책 144쪽

두 함수 f, g에 대하여 $f=g$이다.

➜ ① 정의역과 공역이 각각 같다.

② 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$이다.

0716 ㄱ. $f(-1)=g(-1)=-1$, $f(0)=g(0)=0$, $f(1)=g(1)=1$이므로 $f=g$

ㄴ. $f(-1)=2$, $g(-1)=0$이므로 $f(-1)\neq g(-1)$

$\therefore f\neq g$

ㄷ. $f(-1)=g(-1)=0$, $f(0)=g(0)=1$, $f(1)=g(1)=2$이므로 $f=g$

이상에서 $f=g$인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0717 $f(1)=g(1)$에서

$1-3=1+a+b$ $\therefore a+b=-3$ …… ㉠

$f(2)=g(2)$에서

$2-3=4+2a+b$ $\therefore 2a+b=-5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-1$

$\therefore ab=2$ 답 ④

0718 $f(x)=g(x)$에서

$x^3-4x=4x^2+5x-36$

$x^3-4x^2-9x+36=0$, $(x+3)(x-3)(x-4)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=3$ 또는 $x=4$ … ❶

따라서 집합 X는 집합 $\{-3, 3, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합이므로 구하는 집합 X의 개수는

$2^3-1=7$ … ❷

답 7

단계	채점 요소	비율
❶	$f(x)=g(x)$를 만족시키는 x의 값 구하기	50 %
❷	집합 X의 개수 구하기	50 %

유형 136 일대일함수와 일대일대응 → 본책 144쪽

(1) 함수 $f: X\longrightarrow Y$가 일대일함수이다.

➜ $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이다. (단, $x_1\in X$, $x_2\in X$)

➜ $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다. (단, $x_1\in X$, $x_2\in X$)

(2) 함수 $f: X\longrightarrow Y$가 일대일대응이다.

➜ 일대일함수이고 (치역)=(공역)이다.

0719 ① $f(x)=-2$라 하면 $f(1)=f(2)=-2$

따라서 $x_1\neq x_2$이지만 $f(x_1)=f(x_2)$이므로 함수 $y=-2$는 일대일대응이 아니다.

③ $f(x)=|x|$라 하면 $f(-1)=f(1)=1$

따라서 $x_1\neq x_2$이지만 $f(x_1)=f(x_2)$이므로 함수 $y=|x|$는 일대일대응이 아니다.

④ $f(x)=x^2-3x$라 하면 $f(0)=f(3)=0$

따라서 $x_1\neq x_2$이지만 $f(x_1)=f(x_2)$이므로 함수 $y=x^2-3x$는 일대일대응이 아니다.

따라서 일대일대응인 것은 ②, ⑤이다. 답 ②, ⑤

0720 ㄱ, ㄹ, ㅁ. 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 2개 이상의 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

ㄴ, ㅂ. 모든 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응이다.

ㄷ. 치역의 각 원소 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이다.

그런데 치역이 실수 전체의 집합이 아니므로 일대일대응은 아니다.

이상에서 일대일함수의 그래프인 것은 ㄴ, ㄷ, ㅂ의 3개, 일대일대응의 그래프인 것은 ㄴ, ㅂ의 2개이므로

$a=3$, $b=2$ $\therefore a+b=5$ 답 5

0721 $f(2)=4$이고 함수 f는 일대일함수이므로

$f(3)\neq 4$, $f(5)\neq 4$

즉 $f(3)f(5)=8$에서

$f(3)=1$, $f(5)=8$ 또는 $f(3)=8$, $f(5)=1$

$\therefore f(4)=2$ 또는 $f(4)=6$

따라서 $f(4)+f(5)$의 최솟값은 $f(4)=2$, $f(5)=1$일 때이므로

$2+1=3$ 답 3

유형 137 일대일대응이 되기 위한 조건 본책 145쪽

함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면

➜ ① x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 항상 증가하거나 항상 감소해야 한다.

② 정의역의 양 끝 값에서의 함숫값이 공역의 양 끝 값과 같아야 한다.

0722 $a<0$이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면

$f(-2)=5,\ f(1)=-4$

$-2a+b=5,\ a+b=-4$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-1$

$\therefore\ b-a=2$ 답 2

0723 함수 f가 일대일대응이 되려면 $x\geq2$일 때와 $x<2$일 때의 직선 $y=f(x)$의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

즉 $(a+4)(2-a)>0$이므로

$(a+4)(a-2)<0$ $\therefore\ -4<a<2$

따라서 정수 a는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$의 5개이다. 답 ③

참고 $f(2)=8$이고, 직선 $y=(2-a)x+2a+4$도 점 $(2,\ 8)$을 지나므로 치역과 공역이 같다.

0724 $f(x)=a|x+1|-3+x$에서

(i) $x\geq-1$일 때

$f(x)=a(x+1)-3+x$

$=(a+1)x+a-3$

(ii) $x<-1$일 때

$f(x)=-a(x+1)-3+x$

$=(1-a)x-a-3$ … ❶

이때 함수 f가 일대일대응이 되려면 $x\geq-1$일 때와 $x<-1$일 때의 직선 $y=f(x)$의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다. … ❷

즉 $(a+1)(1-a)>0$이므로

$(a+1)(a-1)<0$ $\therefore\ -1<a<1$ … ❸

답 $-1<a<1$

단계	채점 요소	비율
❶	$x\geq-1$일 때와 $x<-1$일 때로 나누어 $f(x)$ 구하기	40 %
❷	함수 f가 일대일대응이 되기 위한 조건 알기	20 %
❸	a의 값의 범위 구하기	40 %

0725 $f(x)=ax+b$라 하면 $a\neq0$일 때 함수 f는 일대일함수이므로 함수 f가 일대일대응이려면 공역과 치역이 같아야 한다.

(i) $a>0$일 때

$f(-1)=2,\ f(3)=5$에서

$-a+b=2,\ 3a+b=5$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{4},\ b=\frac{11}{4}$

$\therefore\ ab=\frac{33}{16}$

(ii) $a<0$일 때

$f(-1)=5,\ f(3)=2$에서

$-a+b=5,\ 3a+b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{3}{4},\ b=\frac{17}{4}$

$\therefore\ ab=-\frac{51}{16}$

(i), (ii)에서 모든 ab의 값의 합은

$\frac{33}{16}+\left(-\frac{51}{16}\right)=-\frac{9}{8}$ 답 $-\frac{9}{8}$

참고 $a=0$이면 $y=b$이므로 일대일함수가 아니다.

0726 $f(x)=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$

이므로 함수 f가 일대일대응이 되려면 $a\geq2,\ f(a)=b$이어야 한다.

$\therefore\ a-b=a-f(a)=a-(a^2-4a+2)$

$=-a^2+5a-2=-\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{17}{4}$

따라서 $a-b$는 $a=\frac{5}{2}$일 때 최댓값 $\frac{17}{4}$을 가지므로

$p=4,\ q=17$ $\therefore\ p+q=21$ 답 21

유형 138 항등함수와 상수함수 본책 145쪽

(1) 항등함수: 정의역의 각 원소에 그 자신이 대응하는 함수

➜ $f: X\longrightarrow X$에서 $f(x)=x$ (단, $x\in X$)

(2) 상수함수: 정의역의 모든 원소에 공역의 단 하나의 원소가 대응하는 함수

➜ $f: X\longrightarrow Y$에서 $f(x)=c$ (단, $x\in X,\ c\in Y$)

0727 함수 f는 항등함수이므로 $f(3)=3,\ f(-2)=-2$

$f(3)+g(-1)=8$에서

$3+g(-1)=8$ $\therefore\ g(-1)=5$

함수 g는 상수함수이므로 $g(7)=g(-1)=5$

$\therefore\ f(-2)+g(7)=-2+5=3$ 답 3

0728 함수 f는 상수함수이므로

$f(0)=f(1)=f(2)$

$f(0)=f(1)$에서 $1=1+a+b$

$\therefore\ a+b=0$ …… ㉠

$f(0)=f(2)$에서 $1=4+2a+b$

$\therefore\ 2a+b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=3$

$\therefore\ b-a=6$ 답 ⑤

0729 함수 f가 항등함수이므로 $f(x)=x$

$f(2)=2$에서

$8+12-10+c=2$ $\therefore\ c=-8$

따라서 $f(x)=x$에서 $x^3+3x^2-5x-8=x$

$x^3+3x^2-6x-8=0,$ $(x+4)(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-4$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$

즉 $a=-4,\ b=-1$ 또는 $a=-1,\ b=-4$이므로

$abc=-4\times(-1)\times(-8)=-32$ 답 -32

0730 조건 (가)에서 함수 f는 항등함수이므로 $f(2)=2$
또 함수 g는 상수함수이므로
$g(4)=g(2)$
조건 (나)에서 $f(2)+g(2)+h(2)=9$이므로
$2+g(4)+h(2)=9$
$\therefore g(4)+h(2)=7$ 답 ⑤

0731 함수 f가 항등함수이므로 $f(x)=x$
(i) $x<-1$일 때
$f(x)=-3$이므로 $f(x)=x$를 만족시키는 x의 값은
$x=-3$
(ii) $-1\le x\le 3$일 때
$f(x)=2x+1$이므로 $f(x)=x$에서
$2x+1=x$ $\therefore x=-1$
(iii) $x>3$일 때
$f(x)=3x^2-10x-4$이므로 $f(x)=x$에서
$3x^2-10x-4=x$, $3x^2-11x-4=0$
$(3x+1)(x-4)=0$
$\therefore x=4$ ($\because x>3$)
이상에서 $X=\{-3, -1, 4\}$이므로
$a+b+c=-3+(-1)+4=0$ 답 0

유형 139 함수의 개수 본책 146쪽

두 집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, n일 때
(1) X에서 Y로의 함수의 개수 ➜ n^m
(2) X에서 Y로의 일대일함수의 개수 ➜ ${}_n\mathrm{P}_m$ (단, $m\le n$)
(3) X에서 X로의 일대일대응의 개수 ➜ ${}_m\mathrm{P}_m=m!$
(4) X에서 Y로의 상수함수의 개수 ➜ n

0732 두 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 X에서 Y로의
함수의 개수는 $4^3=64$
일대일함수의 개수는 ${}_4\mathrm{P}_3=4\times3\times2=24$
상수함수의 개수는 4
따라서 $p=64$, $q=24$, $r=4$이므로
$p+q+r=92$ 답 92

0733 집합 $X=\{a, b, c, d, e\}$에서 집합 $Y=\{1, 2\}$로의
함수의 개수는 $2^5=32$
치역이 $\{1\}$ 또는 $\{2\}$인 함수의 개수는 2
따라서 공역과 치역이 같은 함수의 개수는
$32-2=30$ 답 30

0734 집합 Y의 원소의 개수를 m ($m\ge3$)이라 하면 집합 $X=\{1, 2, 3\}$에서 집합 Y로의 일대일함수의 개수가 120이므로
${}_m\mathrm{P}_3=120$, $m(m-1)(m-2)=6\times5\times4$
$\therefore m=6$ … ❶
따라서 Y에서 Y로의 일대일대응의 개수는
${}_6\mathrm{P}_6=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$ … ❷
답 720

단계	채점 요소	비율
❶	집합 Y의 원소의 개수 구하기	60 %
❷	집합 Y에서 집합 Y로의 일대일대응의 개수 구하기	40 %

유형 140 조건을 만족시키는 함수의 개수 본책 146쪽

(1) 함숫값에 대한 조건이 주어진 경우
➜ 주어진 조건을 만족시키도록 정의역의 각 원소에 대응할 수 있는 공역의 원소의 개수를 구한다.
(2) 두 집합 X, Y의 원소의 개수가 각각 m, n ($m\le n$)일 때
함수 $f: X\longrightarrow Y$ 중에서
$a<b$이면 $f(a)<f(b)$ (또는 $f(a)>f(b)$)
를 만족시키는 함수 f의 개수 ➜ ${}_n\mathrm{C}_m$

0735 주어진 조건을 만족시키려면 집합 Y의 원소 7개 중에서 서로 다른 4개를 택하여 큰 수부터 차례대로 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 된다.
따라서 구하는 함수 f의 개수는
${}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$ 답 35

0736 $f(1)<f(2)<f(3)$에서
$4<f(2)<f(3)$
이를 만족시키려면 집합 Y의 원소 5, 6, 7, 8, 9, 10 중에서 서로 다른 2개를 택하여 작은 수부터 차례대로 집합 X의 원소 2, 3에 대응시키면 된다.
즉 $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는
${}_6\mathrm{C}_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$
$f(4)>f(5)>f(6)$에서
$8>f(5)>f(6)$
이를 만족시키려면 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 중에서 서로 다른 2개를 택하여 큰 수부터 차례대로 집합 X의 원소 5, 6에 대응시키면 된다.
즉 $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는
${}_7\mathrm{C}_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$
따라서 구하는 함수 f의 개수는
$15\times21=315$ 답 315

0737 조건 (나)에서 $f(a)+a$가 짝수이므로 $f(a)$와 a가 모두 홀수이거나 모두 짝수이어야 한다.
(i) $f(a)$, a가 모두 홀수일 때
$f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 홀수인 원소 1, 3, 5, 7, 9 중에서 서로 다른 3개를 택하여 집합 X의 원소 1, 3, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_5\mathrm{P}_3=5\times4\times3=60$

(ii) $f(a)$, a가 모두 짝수일 때

$f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 짝수인 원소 2, 4, 6, 8 중에서 서로 다른 2개를 택하여 집합 X의 원소 2, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{P}_2=4\times3=12$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$60\times12=720$ 답 720

0738 집합 X의 원소 중에서 소수는 2, 3, 5, 7이므로 조건 (가)에서

$f(2)\le2$, $f(3)\le3$, $f(5)\le5$, $f(7)\le7$

조건 (나)에서

$f(1)<f(2)<f(4)<f(8)$, $f(1)<f(3)<f(6)$

이때 함수 f가 일대일대응이므로

$f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$

$f(5)$의 값이 될 수 있는 수는 4, 5

$f(7)$의 값이 될 수 있는 수는 4, 5, 6, 7

(i) $f(5)=4$인 경우

$f(7)=5$일 때, 공역의 원소 6, 7, 8 중에서 1개를 택하여 정의역의 원소 6에 대응시키고, 남은 공역의 원소 2개를 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 4, 8에 대응시키면 된다.

즉 $f(4)$, $f(6)$, $f(8)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

마찬가지로 $f(7)=6$ 또는 $f(7)=7$일 때, $f(4)$, $f(6)$, $f(8)$의 값을 정하는 경우의 수도 각각 3이므로 $f(5)=4$인 함수 f의 개수는 $3\times3=9$

(ii) $f(5)=5$인 경우

(i)의 경우와 마찬가지로 함수 f의 개수는 9이다.

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$9+9=18$ 답 18

0739 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로

$n(A)+n(B)=n(A\cup B)+n(A\cap B)$

$=5+2=7$

이때 함수 f가 일대일함수이므로 $n(A)\le n(B)$

$\therefore n(A)=2$, $n(B)=5$ 또는 $n(A)=3$, $n(B)=4$

(i) $n(A)=2$, $n(B)=5$일 때

$B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이고 $n(A)=2$인 집합 A를 정하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

각각의 경우에 대하여 함수 f를 정하는 경우의 수가 ${}_5\mathrm{P}_2=5\times4=20$이므로 함수 f의 개수는

$10\times20=200$

(ii) $n(A)=3$, $n(B)=4$일 때

$n(A\cap B)=2$인 집합 $A\cap B$를 정하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

$n(A-B)=1$, $n(B-A)=2$인 집합 $A-B$, $B-A$를 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2=3\times1=3$

각각의 경우에 대하여 함수 f를 정하는 경우의 수가 ${}_4\mathrm{P}_3=4\times3\times2=24$이므로 함수 f의 개수는

$10\times3\times24=720$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$200+720=920$ 답 ④

유형 141 합성함수

본책 147쪽

두 함수 f, g에 대하여

$(f\circ g)(a)=f(g(a))$

➜ $f(x)$에 x 대신 $g(a)$의 값을 대입한다.

0740 $f(3)=3\times3-2=7$이므로

$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(7)=5\times7-6=29$

$g(-2)=(-2)^2-2\times(-2)=8$이므로

$(f\circ g)(-2)=f(g(-2))=f(8)=3\times8-2=22$

$\therefore (g\circ f)(3)+(f\circ g)(-2)=29+22=51$ 답 ②

0741 $f(1)=k+7$이므로

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(k+7)$

$=-(k+7)^2+8(k+7)+k$

$=-k^2-5k+7$

$f(3)=k+15$이므로

$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(k+15)$

$=-(k+15)^2+8(k+15)+k$

$=-k^2-21k-105$

$(f\circ f)(1)=(f\circ f)(3)$에서

$-k^2-5k+7=-k^2-21k-105$

$16k=-112$ $\therefore k=-7$

따라서 $f(x)=-x^2+8x-7$이므로

$f(5)=-5^2+8\times5-7=8$ 답 8

다른 풀이 $(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(k+7)$

$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(k+15)$

$(f\circ f)(1)=(f\circ f)(3)$이므로

$f(k+7)=f(k+15)$ …… ㉠

이때 $f(x)=-x^2+8x+k=-(x-4)^2+k+16$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=4$이다.

따라서 ㉠에서 $\dfrac{(k+7)+(k+15)}{2}=4$

$2k+22=8$ $\therefore k=-7$

0742 $(f\circ(g\circ h))(x)=((f\circ g)\circ h)(x)$

$=(f\circ g)(h(x))$

$=-(2x-5)^2+6(2x-5)+8$

$=-4x^2+32x-47$ … ❶

$(f\circ(g\circ h))(x)=13$이므로

$-4x^2+32x-47=13$

$x^2-8x+15=0$, $(x-3)(x-5)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=5$

따라서 모든 실수 x의 값의 합은 $3+5=8$ … ❷

답 8

단계	채점 요소	비율
❶	$(f\circ(g\circ h))(x)$ 구하기	50 %
❷	모든 x의 값의 합 구하기	50 %

0743 함수 g가 항등함수이므로

$g(2)=2,\ g(4)=4,\ g(6)=6$

조건 (가)에서 $(f\circ g)(4)=f(g(4))=g(2)$

$\therefore f(4)=2$

또 조건 (가)에서 $(h\circ g)(6)=h(g(6))=g(2)$

$\therefore h(6)=2$

이때 함수 h는 상수함수이므로 $h(x)=2$

조건 (나)에서 $h(h(4))+g(4)=f(h(6))$

$2+4=f(2)$ $\therefore f(2)=6$

함수 f가 일대일대응이고 $f(2)=6,\ f(4)=2$이므로

$f(6)=4$

$\therefore f(6)g(4)h(2)=4\times4\times2=32$ 답 ③

유형 142 $f\circ g=g\circ f$인 경우 → 본책 148쪽

$f\circ g=g\circ f$가 성립한다.

➜ $f(g(x))=g(f(x))$에서 동류항의 계수를 비교한다.

0744 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=3(ax+5)+2=3ax+17$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=a(3x+2)+5=3ax+2a+5$

$g\circ f=f\circ g$이므로 $3ax+17=3ax+2a+5$

$17=2a+5$ $\therefore a=6$ 답 6

0745 주어진 그림에서

$f(1)=4,\ f(2)=3,\ f(3)=5,\ f(4)=2,\ f(5)=1$

$f\circ g=g\circ f$에서 $f(g(x))=g(f(x))$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=4$를 대입하면

$f(g(4))=g(f(4)),$ $f(3)=g(2)$ $\therefore g(2)=5$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(g(2))=g(f(2)),$ $f(5)=g(3)$ $\therefore g(3)=1$

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f(g(3))=g(f(3)),$ $f(1)=g(5)$ $\therefore g(5)=4$

$\therefore g(5)-g(3)=4-1=3$ 답 ⑤

참고 ㉠의 양변에 $x=5$를 대입하면

$f(g(5))=g(f(5)),$ $f(4)=g(1)$ $\therefore g(1)=2$

0746 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=4(ax+b)+9=4ax+4b+9$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=a(4x+9)+b=4ax+9a+b$

$f\circ g=g\circ f$이므로 $4ax+4b+9=4ax+9a+b$

$\therefore b=3a-3$

$g(x)=ax+3a-3=a(x+3)-3$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-3,\ -3)$을 지난다.

따라서 $p=-3,\ q=-3$이므로

$p+q=-6$ 답 -6

0747 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=5a(2bx-10)+10$

$=10abx-50a+10$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=2b(5ax+10)-10$

$=10abx+20b-10$

$f\circ g=g\circ f$이므로 $10abx-50a+10=10abx+20b-10$

$\therefore 5a+2b=2$

이때 $a>0,\ b>0$에서 $5a>0,\ 2b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$5a+2b\geq2\sqrt{5a\times2b}=2\sqrt{10ab},$ $2\geq2\sqrt{10ab}$

$\therefore \sqrt{10ab}\leq1$ (단, 등호는 $5a=2b$일 때 성립)

양변을 제곱하면 $10ab\leq1$

따라서 $10ab$의 최댓값은 1이다. 답 1

유형 143 $f\circ f$에 대한 조건이 주어진 경우 → 본책 148쪽

함수 $f(x)$가 미지수를 포함한 식이고 합성함수 $f\circ f$에 대한 조건이 주어진 경우

➜ $(f\circ f)(x)$를 미지수를 포함한 식으로 나타낸 후 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구한다.

0748 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$

$(f\circ f)(x)=9x+8$이므로 $a^2x+ab+b=9x+8$

$\therefore a^2=9,\ ab+b=8$

$a^2=9$에서 $a=3$ ($\because a>0$)

$ab+b=8$에 $a=3$을 대입하면 $3b+b=8$ $\therefore b=2$

따라서 $f(x)=3x+2$이므로

$f(4)=3\times4+2=14$ 답 ③

0749 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=3(3x^2+a)^2+a$

$=27x^4+18ax^2+3a^2+a$

$(f\circ f)(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로 $(f\circ f)(-1)=0$

즉 $27+18a+3a^2+a=0$이므로 $3a^2+19a+27=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 상수 a의 값의 곱은 $\frac{27}{3}=9$ 답 ⑤

참고 $3a^2+19a+27=0$의 판별식을 D라 하면

$D=19^2-4\times3\times27=37>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

0750 $g(x)=(f\circ f\circ f)(x)=f(f(f(x)))$

$=f(f(-2x+p))=f(-2(-2x+p)+p)$

$=f(4x-p)=-2(4x-p)+p$

$=-8x+3p$ … ❶

함수 $g(x)$에서 x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값은 감소하므로 $x=2$일 때 최솟값 -1, $x=q$일 때 최댓값 15를 갖는다.

$g(2)=-1$이므로

$-8\times2+3p=-1,$ $3p=15$ $\therefore p=5$

따라서 $g(x)=-8x+15$이고 $g(q)=15$이므로

$-8q+15=15$ $\therefore q=0$ … ❷

$\therefore p+q=5$ … ❸

답 5

단계	채점 요소	비율
❶	$g(x)$ 구하기	40 %
❷	p, q의 값 구하기	50 %
❸	$p+q$의 값 구하기	10 %

0751 $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(1+a)=(1+a)^2$

(i) $a\le 4$일 때

$(f\circ g)(4)=f(g(4))=f(4^2)=16+a$이므로

$(g\circ f)(1)+(f\circ g)(4)=(1+a)^2+16+a=57$

$a^2+3a-40=0$, $(a+8)(a-5)=0$

$\therefore a=-8$ ($\because a\le 4$)

(ii) $a>4$일 때

$(f\circ g)(4)=f(g(4))=f(2)=2+a$이므로

$(g\circ f)(1)+(f\circ g)(4)=(1+a)^2+2+a=57$

$a^2+3a-54=0$, $(a+9)(a-6)=0$

$\therefore a=6$ ($\because a>4$)

(i), (ii)에서 $S=-8+6=-2$

$\therefore 10S^2=10\times(-2)^2=40$ 답 40

유형 144 $f\circ g=h$를 만족시키는 함수 f 또는 g 구하기

본책 149쪽

세 함수 f, g, h에 대하여 $(f\circ g)(x)=h(x)$일 때

(1) $f(x)$, $h(x)$가 주어진 경우

➜ $f(g(x))=h(x)$에서 $f(x)$에 x 대신 $g(x)$를 대입한다.

(2) $g(x)$, $h(x)$가 주어진 경우

➜ $f(g(x))=h(x)$에서 $g(x)=t$로 놓고 $f(t)$를 구한다.

0752 $(f\circ h)(x)=f(h(x))=g(x)$이므로

$3h(x)-2=-2x+10$, $3h(x)=-2x+12$

$\therefore h(x)=-\frac{2}{3}x+4$ 답 ②

0753 $(h\circ g\circ f)(x)=((h\circ g)\circ f)(x)$

$=(h\circ g)(f(x))$

$=5f(x)-4$

즉 $5f(x)-4=10x+6$이므로

$5f(x)=10x+10$ $\therefore f(x)=2x+2$

$\therefore f(4)=2\times 4+2=10$ 답 ③

다른 풀이 $(h\circ g\circ f)(4)=(h\circ g)(f(4))$에서

$10\times 4+6=5f(4)-4$ $\therefore f(4)=10$

0754 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{3x+1}{2}\right)$이므로

$g\left(\frac{3x+1}{2}\right)=6x-5$

$\frac{3x+1}{2}=t$로 놓으면 $3x+1=2t$ $\therefore x=\frac{2}{3}t-\frac{1}{3}$

따라서 $g(t)=6\left(\frac{2}{3}t-\frac{1}{3}\right)-5=4t-7$이므로

$g(4)=4\times 4-7=9$ 답 ⑤

다른 풀이 $g\left(\frac{3x+1}{2}\right)=6x-5$ …… ㉠

$\frac{3x+1}{2}=4$에서 $3x+1=8$ $\therefore x=\frac{7}{3}$

㉠에 $x=\frac{7}{3}$을 대입하면 $g(4)=6\times\frac{7}{3}-5=9$

0755 $(h\circ g)(x)=h(g(x))=f(x)$이므로

$h(-2x+4)=f(x)$

$-2x+4=t$로 놓으면 $x=-\frac{1}{2}t+2$

$\therefore h(t)=f\left(-\frac{1}{2}t+2\right)$ … ❶

(i) $-\frac{1}{2}t+2\ge 0$, 즉 $t\le 4$일 때

$h(t)=\left(-\frac{1}{2}t+2\right)^2+2=\frac{1}{4}t^2-2t+6$이므로

$h(0)=6$ … ❷

(ii) $-\frac{1}{2}t+2<0$, 즉 $t>4$일 때

$h(t)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}t+2\right)+3=-\frac{1}{4}t+4$이므로

$h(8)=2$ … ❸

(i), (ii)에서 $h(0)+h(8)=6+2=8$ … ❹

답 8

단계	채점 요소	비율
❶	함수 h를 함수 f에 대한 식으로 나타내기	30 %
❷	$h(0)$의 값 구하기	30 %
❸	$h(8)$의 값 구하기	30 %
❹	$h(0)+h(8)$의 값 구하기	10 %

다른 풀이 $h(-2x+4)=f(x)$

$-2x+4=0$일 때, $x=2$이므로

$h(0)=f(2)=2^2+2=6$

$-2x+4=8$일 때, $x=-2$이므로

$h(8)=f(-2)=\frac{1}{2}\times(-2)+3=2$

$\therefore h(0)+h(8)=6+2=8$

유형 145 f^n의 꼴의 합성함수

본책 149쪽

함수 f에 대하여 $f^1=f$, $f^{n+1}=f\circ f^n$ (n은 자연수)일 때, $f^n(a)$의 값 구하기

[방법 1] $f^2(x)$, $f^3(x)$, $f^4(x)$, …를 직접 구하여 $f^n(x)$를 추정한 후 x 대신 a를 대입한다.

[방법 2] $f(a)$, $f^2(a)$, $f^3(a)$, …의 값을 직접 구하여 규칙을 찾아 $f^n(a)$의 값을 추정한다.

0756 $f^1(3)=f(3)=4$이므로

$f^2(3)=f(f(3))=f(4)=5$

$f^3(3)=f(f^2(3))=f(5)=1$

$f^4(3)=f(f^3(3))=f(1)=2$

$f^5(3)=f(f^4(3))=f(2)=3$

$f^6(3)=f(f^5(3))=f(3)=4$

⋮

즉 $f^n(3)$의 값은 4, 5, 1, 2, 3이 이 순서대로 반복된다.

이때 $67=5\times13+2$이므로 $f^{67}(3)=f^2(3)=5$ 답 5

0757 $f_1(x)=f(x)=-x+5$
$f_2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=-(-x+5)+5=x$
$f_3(x)=(f\circ f\circ f)(x)=f(x)=-x+5$
$f_4(x)=(f\circ f\circ f\circ f)(x)=(f\circ f)(x)=x$
⋮
$\therefore f_n(x)=\begin{cases}-x+5 & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$
답 $f_n(x)=\begin{cases}-x+5 & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

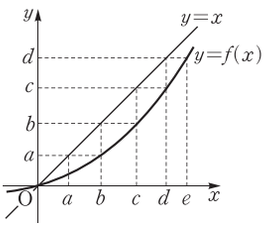
0758 $f^1(1)=f(1)=4$이므로
$f^2(1)=(f\circ f^1)(1)=f(f^1(1))=f(4)=2$
$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(2)=3$
$f^4(1)=(f\circ f^3)(1)=f(f^3(1))=f(3)=1$
$f^5(1)=(f\circ f^4)(1)=f(f^4(1))=f(1)=4$
⋮
즉 $f^n(1)$의 값은 4, 2, 3, 1이 이 순서대로 반복된다.
이때 $43=4\times10+3$이므로 $f^{43}(1)=f^3(1)=3$
한편 $f^1(2)=f(2)=3$이므로
$f^2(2)=(f\circ f^1)(2)=f(f^1(2))=f(3)=1$
$f^3(2)=(f\circ f^2)(2)=f(f^2(2))=f(1)=4$
$f^4(2)=(f\circ f^3)(2)=f(f^3(2))=f(4)=2$
$f^5(2)=(f\circ f^4)(2)=f(f^4(2))=f(2)=3$
⋮
즉 $f^n(2)$의 값은 3, 1, 4, 2가 이 순서대로 반복된다.
이때 $44=4\times11$이므로 $f^{44}(2)=f^4(2)=2$
또 $f^1(3)=f(3)=1$이므로
$f^2(3)=(f\circ f^1)(3)=f(f^1(3))=f(1)=4$
$f^3(3)=(f\circ f^2)(3)=f(f^2(3))=f(4)=2$
$f^4(3)=(f\circ f^3)(3)=f(f^3(3))=f(2)=3$
$f^5(3)=(f\circ f^4)(3)=f(f^4(3))=f(3)=1$
⋮
즉 $f^n(3)$의 값은 1, 4, 2, 3이 이 순서대로 반복된다.
이때 $45=4\times11+1$이므로 $f^{45}(3)=f^1(3)=1$
$\therefore f^{43}(1)+f^{44}(2)+f^{45}(3)=6$ 답 6

0759 $f^1(99)=f(99)=19^2=361$이므로
$f^2(99)=f(f^1(99))=f(361)=11^2=121$
$f^3(99)=f(f^2(99))=f(121)=5^2=25$
$f^4(99)=f(f^3(99))=f(25)=8^2=64$
$f^5(99)=f(f^4(99))=f(64)=11^2=121$
⋮
$\therefore f^n(99)=\begin{cases}361 & (n=1)\\ 121 & (n=3m-1)\\ 25 & (n=3m)\\ 64 & (n=3m+1)\end{cases}$ (m은 자연수)
이때 $88=3\times29+1$이므로 $f^{88}(99)=64$ 답 64

유형 146 그래프가 주어질 때 합성함수의 함숫값 구하기 본책 150쪽

함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 (a, b), (b, c)를 지나면
➜ $(f\circ f)(a)=f(f(a))=f(b)=c$

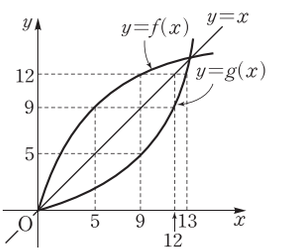
0760 오른쪽 그림에서
$(f\circ f\circ f)(e)$
$=f(f(f(e)))$
$=f(f(d))$
$=f(c)=b$
답 ②



0761 $(f\circ f)(4)=f(f(4))=f(0)=3$ … ❶
$(f\circ f\circ f)(3)=f(f(f(3)))=f(f(2))$
$=f(1)=4$ … ❷
$\therefore (f\circ f)(4)+(f\circ f\circ f)(3)=3+4=7$ … ❸
답 7

단계	채점 요소	비율
❶	$(f\circ f)(4)$의 값 구하기	40 %
❷	$(f\circ f\circ f)(3)$의 값 구하기	50 %
❸	$(f\circ f)(4)+(f\circ f\circ f)(3)$의 값 구하기	10 %

0762 $g(p)=t$라 하면
$(f\circ g)(p)=f(g(p))$
$=f(t)$
이므로 $f(t)=9$에서
$t=5$
즉 $g(p)=5$이므로
$p=9$
한편
$(g\circ f\circ g)(12)=g(f(g(12)))$
$=g(f(9))=g(12)=9$
이므로 $q=9$
$\therefore p+q=18$ 답 18



유형 147 합성함수의 그래프 그리기 본책 151쪽

두 함수 f, g의 식이 x의 값의 범위에 따라 다르게 정의된 함수일 때, 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 다음과 같은 순서로 그린다.
(i) 두 함수 f, g의 식의 경계가 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 $g\circ f$의 식을 구한다.
(ii) 각 범위에서 (i)의 식의 그래프를 그린다.

0763 $f(x)=\begin{cases}x & (-1\le x<0)\\ x^2 & (0\le x\le1)\end{cases}$에서
$(f\circ f)(x)=\begin{cases}f(x) & (-1\le f(x)<0)\\ \{f(x)\}^2 & (0\le f(x)\le1)\end{cases}$

(i) $-1\le x<0$일 때, $f(x)=x$이고 $-1\le f(x)<0$이므로
$(f\circ f)(x)=f(x)=x$
(ii) $0\le x\le 1$일 때, $f(x)=x^2$이고 $0\le f(x)\le 1$이므로
$(f\circ f)(x)=\{f(x)\}^2=(x^2)^2=x^4$
(i), (ii)에서 $(f\circ f)(x)=\begin{cases} x & (-1\le x<0) \\ x^4 & (0\le x\le 1) \end{cases}$이므로 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ②이다.

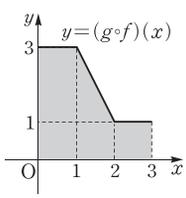
답 ②

0764 $f(x)=\begin{cases} 1 & (0\le x<1) \\ x & (1\le x<2) \\ 2 & (2\le x\le 3) \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 3x & (0\le x<1) \\ -2x+5 & (1\le x<2) \\ x-1 & (2\le x\le 3) \end{cases}$

(i) $0\le x<1$일 때, $f(x)=1$이므로
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(1)=3$
(ii) $1\le x<2$일 때, $f(x)=x$이므로
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x)=-2x+5$
(iii) $2\le x\le 3$일 때, $f(x)=2$이므로
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2)=1$
이상에서

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases} 3 & (0\le x<1) \\ -2x+5 & (1\le x<2) \\ 1 & (2\le x\le 3) \end{cases} \quad \cdots ❶$$

이므로 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. … ❷



따라서 구하는 넓이는
$\frac{1}{2}\times(1+2)\times 2+3\times 1=6$ … ❸

답 6

단계	채점 요소	비율
❶	$(g\circ f)(x)$ 구하기	50 %
❷	$y=(g\circ f)(x)$의 그래프 그리기	30 %
❸	넓이 구하기	20 %

유형 148 $f(f(x))=a$의 실근 찾기

본책 151쪽

$f(f(x))=a$의 실근은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) $f(x)=a$를 만족시키는 x의 값 α, β, …를 구한다.
(ii) $f(x)=\alpha$, $f(x)=\beta$, …를 만족시키는 x의 값을 구한다.

0765 $f(x)=\begin{cases} 2x & (0\le x<1) \\ -2x+4 & (1\le x\le 2) \end{cases}$이므로

$$f(f(x))=\begin{cases} 2f(x) & (0\le f(x)<1) \\ -2f(x)+4 & (1\le f(x)\le 2) \end{cases}$$

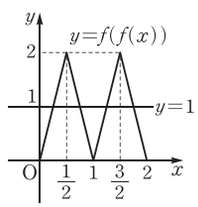
$f(f(x))=1$에서 $2f(x)=1$ 또는 $-2f(x)+4=1$
$\therefore f(x)=\frac{1}{2}$ 또는 $f(x)=\frac{3}{2}$

(i) $f(x)=\frac{1}{2}$일 때
$2x=\frac{1}{2}$ 또는 $-2x+4=\frac{1}{2}$이므로
$x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}$

(ii) $f(x)=\frac{3}{2}$일 때
$2x=\frac{3}{2}$ 또는 $-2x+4=\frac{3}{2}$이므로
$x=\frac{3}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}$

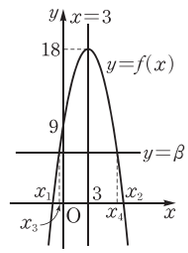
(i), (ii)에서 서로 다른 실근의 개수는 4이다. 답 4

다른 풀이 (i) $0\le x<\frac{1}{2}$일 때, $f(x)=2x$이고 $0\le f(x)<1$이므로
$f(f(x))=2\times 2x=4x$
(ii) $\frac{1}{2}\le x<1$일 때, $f(x)=2x$이고 $1\le f(x)<2$이므로
$f(f(x))=-2\times 2x+4=-4x+4$
(iii) $1\le x\le\frac{3}{2}$일 때, $f(x)=-2x+4$이고 $1\le f(x)\le 2$이므로
$f(f(x))=-2(-2x+4)+4=4x-4$
(iv) $\frac{3}{2}<x\le 2$일 때, $f(x)=-2x+4$이고 $0\le f(x)<1$이므로
$f(f(x))=2(-2x+4)=-4x+8$
따라서 함수 $y=f(f(x))$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
방정식 $f(f(x))=1$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(f(x))$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 개수와 같으므로 4이다.



0766 $f(x)=a(x-3)^2+18$ $(a<0)$이라 하면 $f(0)=9$이므로
$9a+18=9$, $9a=-9$ $\therefore a=-1$
$\therefore f(x)=-(x-3)^2+18=-x^2+6x+9$
$f(f(x))=9$에서 $f(x)=t$로 놓으면 $f(t)=9$
즉 $-t^2+6t+9=9$이므로 $t^2-6t=0$
$t(t-6)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=6$
(i) $f(x)=0$일 때, $-x^2+6x+9=0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 합은 6이다.
(ii) $f(x)=6$일 때, $-x^2+6x+9=6$에서 $x^2-6x-3=0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 합은 6이다.
(i), (ii)에서 모든 실근의 합은 $6+6=12$ 답 ③

다른 풀이 $f(x)=9$의 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면
$f(x)=\alpha$, $f(x)=\beta$의 근이 $f(f(x))=9$의 실근이다.
이때 $\alpha=0$, $\beta>3$이므로 오른쪽 그림과 같이 $f(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 x_1, x_2라 하고, $f(x)=\beta$를 만족시키는 x의 값을 x_3, x_4라 하면 x_1과 x_2, x_3과 x_4는 각각 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로



$\frac{x_1+x_2}{2}=3$, $\frac{x_3+x_4}{2}=3$
$\therefore x_1+x_2=6$, $x_3+x_4=6$
$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4=6+6=12$

0767 $(f\circ f)(a)=f(a)$, 즉 $f(f(a))=f(a)$에서 $f(a)=t$로 놓으면 $f(t)=t$

$t<3$일 때, $f(t)=t$에서 $2t+1=t$ $\therefore t=-1$

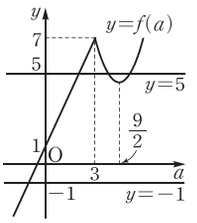
$t\geq 3$일 때, $f(t)=t$에서 $t^2-9t+25=t$

$(t-5)^2=0$ $\therefore t=5$

따라서 $(f\circ f)(a)=f(a)$를 만족시키려면

$f(a)=-1$ 또는 $f(a)=5$

이때 함수 $y=f(a)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



(i) $f(a)=-1$일 때

$2a+1=-1$에서 $a=-1$

(ii) $f(a)=5$일 때

$2a+1=5$ 또는 $a^2-9a+25=5$

$2a+1=5$에서 $a=2$

$a^2-9a+25=5$에서 $a^2-9a+20=0$

$(a-4)(a-5)=0$ $\therefore a=4$ 또는 $a=5$

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$-1+2+4+5=10$ 답 10

유형 149 역함수 → 본책 152쪽

함수 f의 역함수가 f^{-1}일 때

➜ $f^{-1}(a)=b \Longleftrightarrow f(b)=a$

0768 $f^{-1}(-7)=-1$에서 $f(-1)=-7$이므로

$-a+b=-7$ …… ㉠

$f^{-1}(9)=3$에서 $f(3)=9$이므로

$3a+b=9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-3$

$\therefore a+b=1$ 답 ①

0769 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$f(0)=2$에서 $c=2$

$\therefore f(x)=ax^2+bx+2$

$f^{-1}(7)=1$에서 $f(1)=7$이므로

$a+b+2=7$ $\therefore a+b=5$ …… ㉠

$f^{-1}(10)=2$에서 $f(2)=10$이므로

$4a+2b+2=10$ $\therefore 2a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=6$

따라서 $f(x)=-x^2+6x+2$이므로

$f(-2)=-(-2)^2+6\times(-2)+2=-14$ 답 ③

0770 $3x+2=8$에서 $3x=6$ $\therefore x=2$

$x=2$를 $f^{-1}(x)=g(3x+2)$에 대입하면

$f^{-1}(2)=g(8)$

$f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2$이므로

$4k-3=2$ $\therefore k=\frac{5}{4}$

$\therefore g(8)=\frac{5}{4}$ 답 ④

0771 $x\geq 0$일 때, $f(x)=-x^2+1\leq 1$

$x<0$일 때, $f(x)=x^2+1>1$ … ❶

$f^{-1}(-3)=m$이라 하면 $f(m)=-3$이므로

$-m^2+1=-3$, $m^2=4$

$\therefore m=2$ ($\because m\geq 0$) … ❷

$f^{-1}(10)=n$이라 하면 $f(n)=10$이므로

$n^2+1=10$, $n^2=9$

$\therefore n=-3$ ($\because n<0$) … ❸

$\therefore f^{-1}(-3)+f^{-1}(10)=2+(-3)=-1$ … ❹

답 -1

단계	채점 요소	비율
❶	x의 값의 범위에 따른 $f(x)$의 값의 범위 구하기	30 %
❷	$f^{-1}(-3)$의 값 구하기	30 %
❸	$f^{-1}(10)$의 값 구하기	30 %
❹	$f^{-1}(-3)+f^{-1}(10)$의 값 구하기	10 %

0772 $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$ …… ㉠

$f(2)=10$에서 $f^{-1}(10)=2$이므로 ㉠의 양변에 $x=10$, $y=10$을 대입하면

$f^{-1}(20)=f^{-1}(10)+f^{-1}(10)=2+2=4$

$\therefore f(4)=20$

또 ㉠의 양변에 $x=10$, $y=20$을 대입하면

$f^{-1}(30)=f^{-1}(10)+f^{-1}(20)=2+4=6$

$\therefore f(6)=30$

$\therefore f^{-1}(20)\times\{f(4)+f(6)\}=4\times(20+30)=200$

답 ②

만점 공략 노트

㉠의 양변에 수를 대입할 때, $f^{-1}(x+y)=4$, $f^{-1}(x+y)=6$을 만족시키는 x, y의 값을 각각 대입해야 한다.

유형 150 역함수가 존재하기 위한 조건 → 본책 152쪽

함수 f의 역함수 f^{-1}가 존재한다.

➜ f가 일대일대응이다.

0773 함수 $f(x)=-4x+1$의 역함수가 존재하면 함수 f가 일대일대응이므로 치역과 공역이 같다.

이때 $y=f(x)$의 그래프의 기울기가 음수이므로

$f(-2)=b$, $f(1)=a$

$f(-2)=-4\times(-2)+1=9$, $f(1)=-4\times 1+1=-3$이므로

$a=-3$, $b=9$ $\therefore b-a=12$ 답 ④

0774 $f(x)=x^2-6x-18=(x-3)^2-27$

함수 f의 역함수가 존재하면 함수 f가 일대일대응이므로

$k\geq 3$, $f(k)=k$

$f(k)=k$에서 $k^2-6k-18=k$

$k^2-7k-18=0$, $(k+2)(k-9)=0$

$\therefore k=9$ ($\because k\geq 3$) 답 ③

0775 $f(x)=3x+2-a|x+1|$에서

(i) $x<-1$일 때

$f(x)=3x+2+a(x+1)=(3+a)x+a+2$

(ii) $x\geq -1$일 때

$f(x)=3x+2-a(x+1)=(3-a)x-a+2$ … ❶

함수 f의 역함수가 존재하려면 함수 f가 일대일대응이어야 하므로 $x<-1$일 때와 $x\geq -1$일 때 함수 f의 일차항의 계수의 부호가 같아야 한다. … ❷

즉 $(3+a)(3-a)>0$에서

$(a+3)(a-3)<0$ $\therefore -3<a<3$ … ❸

따라서 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다. … ❹

답 5

단계	채점 요소	비율
❶	x의 값의 범위에 따른 $f(x)$ 구하기	30 %
❷	역함수가 존재하기 위한 조건 알기	30 %
❸	a의 값의 범위 구하기	30 %
❹	정수 a의 개수 구하기	10 %

0776 함수 f의 역함수가 존재하면 함수 f가 일대일대응이고

$f(4)=4(m-4)+n^2-4=4m+n^2-20$

이므로 m, n^2의 값이 최대일 때 $f(4)$의 값이 최대이다.

(i) $x=0$일 때 $(m-4)x+n^2-4$의 값과 $(2-3m)x+3n$의 값이 같아야 하므로

$n^2-4=3n$, $n^2-3n-4=0$

$(n+1)(n-4)=0$ $\therefore n=-1$ 또는 $n=4$

(ii) $x\geq 0$일 때와 $x<0$일 때의 함수 f의 일차항의 계수의 부호가 같아야 하므로

$(m-4)(2-3m)>0$, $(m-4)(3m-2)<0$

$\therefore \frac{2}{3}<m<4$

이때 m은 정수이므로

$m=1$ 또는 $m=2$ 또는 $m=3$

(i), (ii)에서 $f(4)$의 값이 최대가 되려면 $m=3$, $n=4$이어야 하므로 $f(4)$의 최댓값은

$4\times 3+4^2-20=8$ 답 ④

0777 조건 (가)에서 $f(1)>f(2)>f(3)>f(4)$

따라서 공역의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 4개를 택하여 큰 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 되므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times 5}{2\times 1}=15$

조건 (나)에서 함수 f가 일대일대응이 아니므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값 중에서 적어도 2개의 값이 같아야 한다.

즉 $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는

$6\times 6-{}_2P_2=36-2=34$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$15\times 34=510$ 답 510

유형 151 역함수 구하기

본책 153쪽

일대일대응인 함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $y=f(x)$에서 x를 y에 대한 식, 즉 $x=f^{-1}(y)$의 꼴로 나타낸다.

(ii) x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$의 꼴로 나타낸다.

0778 $y=\frac{1}{2}x+p$라 하면

$\frac{1}{2}x=y-p$ $\therefore x=2y-2p$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=2x-2p$

$\therefore f^{-1}(x)=2x-2p$

따라서 $2=q$, $-2p=-12$이므로

$p=6$, $q=2$ $\therefore pq=12$ 답 ⑤

0779 $h(x)=g(f(x))=g(ax+b)$

$=-3(ax+b)+4=-3ax-3b+4$

$y=-3ax-3b+4$라 하면

$3ax=-y-3b+4$ $\therefore x=-\frac{1}{3a}y-\frac{3b-4}{3a}$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는 $y=-\frac{1}{3a}x-\frac{3b-4}{3a}$

따라서 $-\frac{1}{3a}=\frac{1}{6}$, $-\frac{3b-4}{3a}=\frac{5}{6}$이므로

$a=-2$, $b=3$ $\therefore a+b=1$ 답 ②

다른 풀이 $y=\frac{1}{6}x+\frac{5}{6}$에서 $x=6y-5$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=6x-5$

$\therefore h(x)=6x-5$

따라서 $-3a=6$, $-3b+4=-5$이므로 $a=-2$, $b=3$

0780 $3x+2=t$로 놓으면 $3x=t-2$ $\therefore x=\frac{1}{3}t-\frac{2}{3}$

따라서 $f(t)=-6\left(\frac{1}{3}t-\frac{2}{3}\right)+4=-2t+8$이므로

$f(x)=-2x+8$

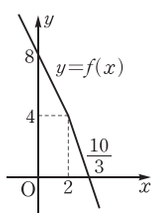
$y=-2x+8$이라 하면 $2x=-y+8$ $\therefore x=-\frac{1}{2}y+4$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-\frac{1}{2}x+4$

$\therefore f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+4$

따라서 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 x절편은 8, y절편은 4이므로 구하는 합은 $8+4=12$ 답 12

0781 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 f는 일대일대응이다. 따라서 함수 f의 역함수가 존재한다.



(i) $x\geq 2$일 때

$y=-3x+10$이라 하면 $y\leq 4$이고

$3x=-y+10$

$\therefore x=-\frac{1}{3}y+\frac{10}{3}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}\ (x\le 4)$

(ii) $x<2$일 때

$y=-2x+8$이라 하면 $y>4$이고

$2x=-y+8 \quad \therefore\ x=-\frac{1}{2}y+4$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=-\frac{1}{2}x+4\ (x>4)$

(i), (ii)에서

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3} & (x\le 4)\\ -\frac{1}{2}x+4 & (x>4)\end{cases}$$

답 $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3} & (x\le 4)\\ -\frac{1}{2}x+4 & (x>4)\end{cases}$

유형 152 합성함수와 역함수 → 본책 154쪽

(1) $(f^{-1}\circ g)(a)$의 값을 구하는 경우

➜ $f^{-1}(g(a))=k$로 놓고 $f(k)=g(a)$임을 이용한다.

(2) $(f\circ g^{-1})(a)$의 값을 구하는 경우

➜ $g^{-1}(a)=k$로 놓고 $g(k)=a$임을 이용한다.

0782 $(f^{-1}\circ g)(k)=f^{-1}(g(k))=-2$에서

$f(-2)=g(k), \quad 13=2k-1 \quad \therefore\ k=7$ 답 ⑤

0783 $(f\circ g^{-1}\circ f)(3)=f(g^{-1}(f(3)))=4$에서

$g^{-1}(f(3))=k$라 하면 $f(k)=4$이므로

$3k-2=4 \quad \therefore\ k=2$

따라서 $g^{-1}(f(3))=2$에서 $g(2)=f(3)$이므로

$2a-1=7 \quad \therefore\ a=4$ 답 4

0784 $x\ge 1$일 때, $\quad g(x)=2x-1\ge 1$

$x<1$일 때, $\quad g(x)=-(x-1)^2+1<1$ … ❶

$g^{-1}(5)=a$라 하면 $g(a)=5$이므로

$2a-1=5 \quad \therefore\ a=3$

$\therefore\ (f\circ g^{-1})(5)=f(g^{-1}(5))=f(3)=8$ … ❷

$g(0)=-(0-1)^2+1=0$이므로

$(f^{-1}\circ g)(0)=f^{-1}(g(0))=f^{-1}(0)$

$f^{-1}(0)=b$라 하면 $f(b)=0$이므로

$4b-4=0 \quad \therefore\ b=1$

$\therefore\ (f^{-1}\circ g)(0)=f^{-1}(0)=1$ … ❸

$\therefore\ (f\circ g^{-1})(5)+(f^{-1}\circ g)(0)=8+1=9$ … ❹

답 9

단계	채점 요소	비율
❶	x의 값의 범위에 따른 $g(x)$의 값의 범위 구하기	20 %
❷	$(f\circ g^{-1})(5)$의 값 구하기	30 %
❸	$(f^{-1}\circ g)(0)$의 값 구하기	40 %
❹	$(f\circ g^{-1})(5)+(f^{-1}\circ g)(0)$의 값 구하기	10 %

유형 153 역함수의 성질 → 본책 154쪽

두 함수 f, g의 역함수가 각각 f^{-1}, g^{-1}일 때

(1) $(f^{-1})^{-1}=f$

(2) $(f^{-1}\circ f)(x)=x$, $(f\circ f^{-1})(y)=y$

(3) $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

0785 $(f\circ(f\circ g)^{-1}\circ f)(8)=(f\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ f)(8)$

$=(f\circ g^{-1})(8)$

$=f(g^{-1}(8))$

$g^{-1}(8)=k$라 하면 $g(k)=8$이므로

$5k-7=8 \quad \therefore\ k=3$

$\therefore\ (f\circ(f\circ g)^{-1}\circ f)(8)=f(g^{-1}(8))$

$=f(3)=9$ 답 ③

0786 $((f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f)(0)=(g^{-1}\circ f\circ f)(0)$

$=g^{-1}(f(f(0)))$

$=g^{-1}(f(9))=g^{-1}(-16)$

$g^{-1}(-16)=k$라 하면 $g(k)=-16$이므로

$5k-1=-16 \quad \therefore\ k=-3$

$\therefore\ ((f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f)(0)=g^{-1}(-16)=-3$ 답 -3

0787 $(f^{-1}\circ(g\circ f^{-1})^{-1}\circ f)(x)=(f^{-1}\circ f\circ g^{-1}\circ f)(x)$

$=(g^{-1}\circ f)(x)$

$=g^{-1}(f(x))$

즉 $g^{-1}(f(x))=px+q$이므로 $\quad g(px+q)=f(x)$

$-(px+q)+7=6x-1 \quad \therefore\ -px-q+7=6x-1$

따라서 $-p=6$, $-q+7=-1$이므로

$p=-6$, $q=8 \quad \therefore\ q-p=14$ 답 ④

0788 $g^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ g)^{-1}$이므로

$(g^{-1}\circ f^{-1}\circ h)(x)=((f\circ g)^{-1}\circ h)(x)=f(x)$에서

$((f\circ g)\circ(f\circ g)^{-1}\circ h)(x)=(f\circ g\circ f)(x)$

$\therefore\ h(x)=(f\circ g\circ f)(x)$

$\therefore\ h(2)=f(g(f(2)))=f(g(2))$

$=f(-1)=-7$ 답 ②

다른 풀이 $(g^{-1}\circ f^{-1}\circ h)(x)=f(x)$에 $x=2$를 대입하면

$(g^{-1}\circ f^{-1}\circ h)(2)=f(2)$

즉 $g^{-1}(f^{-1}(h(2)))=2$이므로 $\quad f^{-1}(h(2))=g(2)=-1$

$h(2)=k$라 하면 $f^{-1}(k)=-1$이므로 $\quad f(-1)=k$

$\therefore\ k=-7 \quad \therefore\ h(2)=-7$

0789 함수 f의 역함수 g가 존재하므로 함수 f는 일대일대응이다.

$f(1)=3$이므로

$f(2)=1$, $f(3)=2$ 또는 $f(2)=2$, $f(3)=1$

(i) $f(2)=1$, $f(3)=2$일 때

$f^3(1)=f(f(f(1)))=f(f(3))=f(2)=1$

$f^3(2)=f(f(f(2)))=f(f(1))=f(3)=2$

$f^3(3)=f(f(f(3)))=f(f(2))=f(1)=3$
이므로 $f^3=I$

(ii) $f(2)=2$, $f(3)=1$일 때
$f^3(1)=f(f(f(1)))=f(f(3))=f(1)=3$
이므로 $f^3\neq I$

(i), (ii)에서 $f(1)=3$, $f(2)=1$, $f(3)=2$이므로
$g(1)=2$, $g(2)=3$, $g(3)=1$

또 $f^3=I$에서 $(f\circ f\circ f)(x)=x$이므로
$(f\circ f)(x)=g(x)$, $f(x)=(g\circ g)(x)$
$x=(g\circ g\circ g)(x)$ $\therefore g^3=I$

이때 $97=3\times32+1$, $98=3\times32+2$이므로
$g^{97}(2)=g(2)=3$
$g^{98}(3)=g^2(3)=g(g(3))=g(1)=2$
$\therefore g^{97}(2)+g^{98}(3)=3+2=5$ 답 ④

0790 조건 (다)에서 $a\in X$, $a\in Y$, 즉 $a\in(X\cap Y)$이므로
$a=2$ 또는 $a=4$

이때 $\frac{1}{2}f(a)=(f\circ f^{-1})(a)=a$에서 $f(a)=2a$

이를 만족시키는 a의 개수가 2이므로
$f(2)=4$, $f(4)=8$

조건 (가)에서 함수 f는 일대일대응이고 조건 (나)에서 $f(1)\neq2$이므로
$f(1)=6$, $f(3)=2$

따라서 $f^{-1}(2)=3$이므로
$f(2)\times f^{-1}(2)=4\times3=12$ 답 12

만점 공략 노트

조건 (다)에서 $\frac{1}{2}f(a)$의 값이 존재하므로 $a\in X$
$(f\circ f^{-1})(a)$의 값이 존재하므로 $a\in Y$
$\therefore a\in(X\cap Y)$

유형 154 $f=f^{-1}$인 함수

본책 155쪽

함수 f와 그 역함수 f^{-1}에 대하여
$f=f^{-1}\iff(f\circ f)(x)=x$

0791 $(f\circ f)(x)=x$에서 $f=f^{-1}$이므로
$f^{-1}(-2)=f(-2)=5$ $\therefore f(5)=-2$
$\therefore f^{-1}(-2)+f(5)=5+(-2)=3$ 답 ③

0792 $f=f^{-1}$를 만족시키는 함수 f는 $(f\circ f)(x)=x$를 만족시킨다.

ㄱ. $f(f(x))=2(2x+1)+1=4x+3$
ㄴ. $f(f(x))=-(-x+4)+4=x$
ㄷ. $f(f(x))=(x+3)+3=x+6$
ㄹ. $f(f(x))=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x\right)=\frac{1}{9}x$
ㅁ. $f(f(x))=-(-x-2)-2=x$

이상에서 $f=f^{-1}$를 만족시키는 함수는 ㄴ, ㅁ이다. 답 ④

참고 f^{-1}를 직접 구하여 $f=f^{-1}$를 만족시키는 함수를 찾을 수도 있다.

0793 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=x+5$ …… ㉠
㉠에 $x=2$를 대입하면 $f(g(2))=7$
$\therefore f(4)=7$ … ❶
㉠에 $x=-1$을 대입하면 $f(g(-1))=4$이므로
$g(-1)=f^{-1}(4)=f(4)=7$ … ❷
$\therefore f(4)+g(-1)=7+7=14$ … ❸
답 14

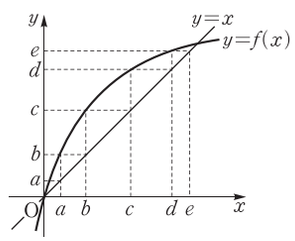
단계	채점 요소	비율
❶	$f(4)$의 값 구하기	40 %
❷	$g(-1)$의 값 구하기	50 %
❸	$f(4)+g(-1)$의 값 구하기	10 %

유형 155 그래프가 주어질 때 역함수의 함숫값 구하기

본책 156쪽

함수 f와 그 역함수 f^{-1}에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 점 (a, b)를 지난다.
➜ $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 (b, a)를 지난다.
➜ $f^{-1}(b)=a$

0794 $f^{-1}(d)=p$라 하면
$f(p)=d$이므로 $p=c$
$f^{-1}(c)=q$라 하면 $f(q)=c$이므로 $q=b$
$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(d)$
$=f^{-1}(f^{-1}(d))$
$=f^{-1}(c)=b$



답 ②

0795 $g^{-1}(2)=3$이므로 $g(3)=2$
$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(4)$이므로 $g(4)=1$
함수 $g(x)$의 역함수가 존재하면 일대일대응이므로
$g(2)=3$
$\therefore (f\circ(g^{-1}\circ f)^{-1}\circ f^{-1})(4)=(f\circ f^{-1}\circ g\circ f^{-1})(4)$
$=(g\circ f^{-1})(4)=g(f^{-1}(4))$
이때 $f(2)=4$에서 $f^{-1}(4)=2$이므로
$(f\circ(g^{-1}\circ f)^{-1}\circ f^{-1})(4)=g(f^{-1}(4))$
$=g(2)=3$ 답 3

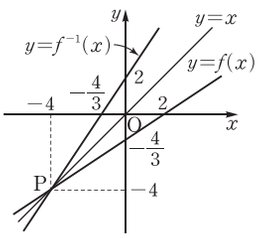
0796 $f^{-1}(r)=b$이므로 $f(b)=r$
$\therefore (f\circ f)(b)=f(f(b))=f(r)=d$
한편 $f(p)=c$에서 $f^{-1}(c)=p$이므로
$(f\circ f)^{-1}(c)=(f^{-1}\circ f^{-1})(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))$
$=f^{-1}(p)=0$
$\therefore (f\circ f)(b)+(f\circ f)^{-1}(c)=d+0=d$ 답 d

유형 156 역함수의 그래프의 성질 → 본책 156쪽

(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점과 같다.

0797 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



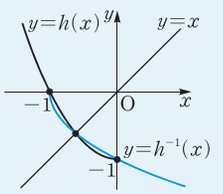
$\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}=x$에서 $-\frac{1}{3}x=\frac{4}{3}$ $\therefore x=-4$

따라서 교점 P의 좌표는 $(-4, -4)$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{(-4)^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$ 답 $4\sqrt{2}$

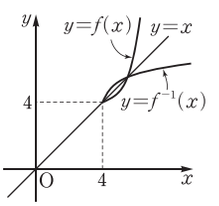
만점 공략 노트

함수 $g(x)=-x$와 같이 역함수가 자기 자신이 되는 경우나 오른쪽 그림의 함수 $h(x)=x^2-1$ $(x\le 0)$과 같은 경우에는 함수의 그래프와 그 역함수의 그래프가 직선 $y=x$ 밖의 점에서도 만난다. 따라서 직선 $y=x$를 이용하여 주어진 함수의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점을 구하는 경우에는 반드시 그래프를 그려 교점의 위치를 확인해야 한다.



0798 $f(x)=x^2-8x+20=(x-4)^2+4$ $(x\ge 4)$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



즉 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근은 방정식 $f(x)=x$의 근과 같으므로 $x^2-8x+20=x$에서

$x^2-9x+20=0$, $(x-4)(x-5)=0$

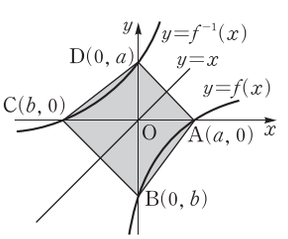
$\therefore x=4$ 또는 $x=5$

따라서 모든 근의 합은 $4+5=9$ 답 ②

참고 함수 f의 정의역은 $X=\{x\mid x\ge 4\}$이므로 4, 5 모두 근이 된다.

0799 점 A의 좌표를 $(a, 0)$ $(a>0)$, 점 B의 좌표를 $(0, b)$ $(b<0)$라 하자.

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 C의 좌표는 $(b, 0)$, 점 D의 좌표는 $(0, a)$이다. … ❶



$\overline{AB}=10$에서 $\sqrt{(-a)^2+b^2}=10$

$\therefore a^2+b^2=100$ …… ㉠

$\overline{BC}=8\sqrt{2}$에서 $\sqrt{b^2+(-b)^2}=8\sqrt{2}$

$2b^2=128$, $b^2=64$

$\therefore b=-8$ $(\because b<0)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2=36$

$\therefore a=6$ $(\because a>0)$ … ❷

따라서 $\overline{AC}=\overline{BD}=8+6=14$이므로 사각형 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 14\times 14\times\sin 90^\circ=\frac{1}{2}\times 14\times 14\times 1=98$ … ❸

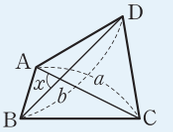
답 98

단계	채점 요소	비율
❶	네 점 A, B, C, D의 좌표를 a, b로 나타내기	30 %
❷	a, b의 값 구하기	50 %
❸	사각형 ABCD의 넓이 구하기	20 %

만점 공략 노트

사각형 ABCD의 두 대각선의 길이가 각각 a, b이고 두 대각선이 이루는 각의 크기가 x $(0^\circ<x\le 90^\circ)$일 때, 넓이 S는

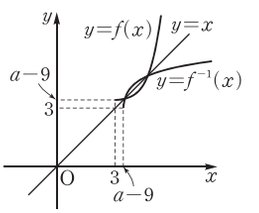
$S=\frac{1}{2}ab\sin x$



0800 $f(x)=x^2-6x+a$

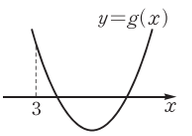
$=(x-3)^2+a-9$ $(x\ge 3)$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



따라서 이차방정식 $x^2-6x+a=x$, 즉 $x^2-7x+a=0$의 서로 다른 두 실근이 모두 3보다 크거나 같아야 한다.

$g(x)=x^2-7x+a$라 하면 $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



(i) 이차방정식 $g(x)=0$의 판별식을 D라 할 때

$D=(-7)^2-4\times 1\times a>0$

$\therefore a<\frac{49}{4}$

(ii) $g(3)\ge 0$이어야 하므로

$9-21+a\ge 0$

$\therefore a\ge 12$

(iii) $y=g(x)$의 그래프의 축의 방정식은

$x=\frac{7}{2}>3$

이상에서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는

$12\le a<\frac{49}{4}$ 답 ④

유형 157 절댓값 기호를 포함한 함수의 그래프 본책 157쪽

(1) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 구간을 나누어 함수식을 구한 후 그래프를 그린다.

(2) $y=|f(x)|$의 그래프

➜ $y=f(x)$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 남기고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한다.

$y=f(|x|)$의 그래프

➜ $y=f(x)$의 그래프에서 $x\geq 0$인 부분만 남기고, 이 부분을 y축에 대하여 대칭이동한다.

0801 $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 남기고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 ②이다. 답 ②

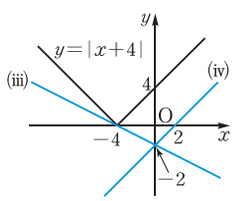
참고 ① $y=-f(x)$의 그래프이다.
③ $|y|=f(x)$의 그래프이다.
④ $|y|=f(|x|)$의 그래프이다.
⑤ $y=f(|x|)$의 그래프이다.

0802 $y=|x+4|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값이 -4이므로

(i) $x<-4$일 때, $y=-(x+4)=-x-4$

(ii) $x\geq -4$일 때, $y=x+4$

(i), (ii)에서 $y=|x+4|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



한편 직선

$y=kx-2$ …… ㉠

는 k의 값에 관계없이 점 $(0, -2)$를 지난다.

(iii) 직선 ㉠이 점 $(-4, 0)$을 지날 때

$-4k-2=0$ $\therefore k=-\frac{1}{2}$

(iv) 직선 ㉠이 직선 $y=x+4$와 평행할 때

$k=1$

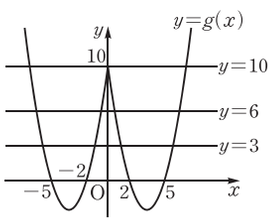
(iii), (iv)에서 주어진 함수의 그래프와 직선 ㉠이 만나려면

$k\leq -\frac{1}{2}$ 또는 $k>1$

따라서 k의 값이 아닌 것은 ③이다. 답 ③

0803 $f(x)=x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$

$y=f(|x|)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\geq 0$인 부분만 남기고, 이 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=3$, $y=6$, $y=10$이 만나는 점의 개수가 각각 4, 4, 3이므로

$h(3)=4$, $h(6)=4$, $h(10)=3$

$\therefore h(3)+h(6)+h(10)=11$ 답 ④

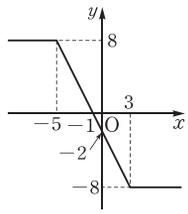
0804 $y=|x-3|-|x+5|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되도록 하는 x의 값이 -5, 3이므로

(i) $x<-5$일 때, $y=-(x-3)+(x+5)=8$

(ii) $-5\leq x<3$일 때, $y=-(x-3)-(x+5)=-2x-2$

(iii) $x\geq 3$일 때, $y=(x-3)-(x+5)=-8$ … ❶

이상에서 $y=|x-3|-|x+5|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $M=8$, $m=-8$이므로 … ❷

$M-m=16$ … ❸

답 16

단계	채점 요소	비율
❶	구간을 나누어 함수식 구하기	50 %
❷	M, m의 값 구하기	40 %
❸	$M-m$의 값 구하기	10 %

만점 공략 노트

$y=|x-p|+|x-q|$의 그래프는

$x<p$, $p\leq x<q$, $x\geq q$ $(p<q)$

일 때로 나누어 그린다.

1등급 유형 도전하기 본책 158~159쪽

0805 Step 1 치역의 원소의 개수가 1인 경우의 함수의 개수를 구한다.

(i) 치역의 원소의 개수가 1인 경우

함수 f가 [(가) 상수함수]이므로 함수 f_n도 [(가) 상수함수]이다.

이때 치역의 원소를 택하는 경우의 수는 3

Step 2 치역의 원소의 개수가 2인 경우의 함수의 개수를 구한다.

(ii) 치역의 원소의 개수가 2인 경우

함수 f의 치역이 $\{1, 2\}$인 경우를 생각해 보자.

ⓐ $f(1)=f(2)$인 경우

$f(1)=f(2)=1$이면 $f(3)=2$이므로

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(1)=1$,

$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(1)=1$,

$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(2)=1$

즉 함수 $f\circ f=f_2$가 상수함수이므로 조건을 만족시킨다.

$f(1)=f(2)=2$, $f(3)=1$인 경우도 마찬가지이므로 이때의 경우의 수는 [(나) 2]

ⓑ $f(1)\neq f(2)$인 경우

$f(1)=1$, $f(2)=2$ 또는 $f(1)=2$, $f(2)=1$에서

$f_n(1)\neq f_n(2)$이므로 함수 f_n은 상수함수가 아니다.

즉 함수 f의 치역이 $\{1, 2\}$일 때 조건을 만족시키는 경우의 수는 2이고 치역의 원소 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$이므로 치역의 원소의 개수가 2인 경우의 함수 f의 개수는

$2\times 3=$ [(다) 6]

Step 3 치역의 원소의 개수가 3인 경우를 확인한다.

(iii) 치역의 원소의 개수가 3인 경우

함수 f가 일대일대응이므로 함수 f_n도 일대일대응이다.

따라서 함수 f_n은 상수함수가 될 수 없다.

Step 4 주어진 명제가 참이 되게 하는 함수의 개수를 구한다.

이상에서 주어진 명제가 참이 되게 하는 함수 f의 개수는

$3+6=$ (라) 9

답 ②

논리 Check

집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오.

(가) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 2이다.

(나) 함수 $f\circ f$의 치역의 원소의 개수는 1이다.

풀이 조건 (가)에서 함수 f의 치역의 원소 2개를 택하는 경우의 수는 $\quad {}_4C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

함수 f의 치역이 $\{1, 2\}$인 경우를 생각해 보자.

(i) $f(1)=f(2)$인 경우

$f(1)=f(2)=1$이면 $f(3)=1$, $f(4)=2$ 또는

$f(3)=2$, $f(4)=1$ 또는 $f(3)=2$, $f(4)=2$이므로

$(f\circ f)(1)=1$, $(f\circ f)(2)=1$,

$(f\circ f)(3)=1$, $(f\circ f)(4)=1$

즉 치역의 원소의 개수가 1이다.

$f(1)=f(2)=2$인 경우도 마찬가지이므로 경우의 수는

$3\times2=6$

(ii) $f(1)\neq f(2)$인 경우

$f(1)=1$, $f(2)=2$ 또는 $f(1)=2$, $f(2)=1$에서

$(f\circ f)(1)=1$, $(f\circ f)(2)=2$로 치역의 원소의 개수가 1이 될 수 없다.

(i), (ii)에서 치역이 $\{1, 2\}$일 때 조건을 만족시키는 경우의 수는 6이므로 구하는 함수 f의 개수는

$6\times6=36$

답 36

0806 Step 1 방정식 $(f\circ g)(x)=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되는 경우를 찾는다.

$(f\circ g)(x)=f(x)$, 즉 $f(g(x))=f(x)$에서

$\{g(x)\}^2+4g(x)+5=x^2+4x+5$

$\{g(x)\}^2-x^2+4\{g(x)-x\}=0$

$\{g(x)+x\}\{g(x)-x\}+4\{g(x)-x\}=0$

$\{g(x)-x\}\{g(x)+x+4\}=0$

$\therefore g(x)=x$ 또는 $g(x)=-x-4$

$g(x)=x$, 즉 $x^2-4x+a=x$이면

$x^2-5x+a=0$ ····· ㉠

$g(x)=-x-4$, 즉 $x^2-4x+a=-x-4$이면

$x^2-3x+a+4=0$ ····· ㉡

따라서 방정식 $(f\circ g)(x)=f(x)$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠, ㉡ 중 하나만 서로 다른 두 실근을 갖거나 이차방정식 ㉠, ㉡이 모두 중근을 가져야 한다.

Step 2 판별식을 이용하여 각 경우의 a의 값의 범위를 구한다.

이차방정식 ㉠, ㉡의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$D_1=25-4a$, $D_2=9-4(a+4)=-4a-7$

(i) 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖고 이차방정식 ㉡은 실근을 갖지 않으려면 $D_1>0$, $D_2<0$이어야 하므로

$a<\dfrac{25}{4}$, $a>-\dfrac{7}{4}$ $\quad\therefore -\dfrac{7}{4}<a<\dfrac{25}{4}$

(ii) 이차방정식 ㉠은 실근을 갖지 않고 이차방정식 ㉡은 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D_1<0$, $D_2>0$이어야 하므로

$a>\dfrac{25}{4}$, $a<-\dfrac{7}{4}$

그런데 이를 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(iii) 이차방정식 ㉠, ㉡이 모두 중근을 가지려면 $D_1=0$, $D_2=0$이어야 하는데 이를 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

Step 3 $m+n$의 값을 구한다.

이상에서 a의 값의 범위는 $\quad -\dfrac{7}{4}<a<\dfrac{25}{4}$

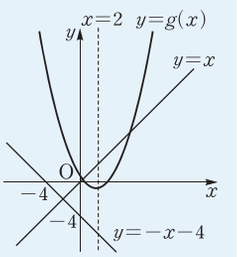
따라서 $m=-\dfrac{7}{4}$, $n=\dfrac{25}{4}$이므로

$m+n=\dfrac{9}{2}$

답 $\dfrac{9}{2}$

만점 공략 노트

방정식 $(f\circ g)(x)=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 $y=g(x)$의 그래프가 두 직선 $y=x$, $y=-x-4$와 만나는 점의 개수의 합이 2이어야 하므로 오른쪽 그림과 같이 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=x$와 서로 다른 두 점에서 만나고 직선 $y=-x-4$와는 만나지 않아야 한다. 즉 방정식 ㉠의 실근의 개수가 2, 방정식 ㉡의 실근의 개수가 0이어야 한다.



0807 Step 1 x의 값의 범위를 나누어 함수 $f(x)$를 구한다.

(i) $0\le x<3$일 때, 점 P는 $\overline{AB}$ 위에 있으므로

$f(x)=\dfrac{1}{2}\times3\times x=\dfrac{3}{2}x$

(ii) $3\le x<6$일 때, 점 P는 $\overline{BC}$ 위에 있으므로

$f(x)=\dfrac{1}{2}\times3\times3=\dfrac{9}{2}$

(iii) $6\le x\le9$일 때, 점 P는 $\overline{CD}$ 위에 있으므로

$f(x)=\dfrac{1}{2}\times3\times(9-x)=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{27}{2}$

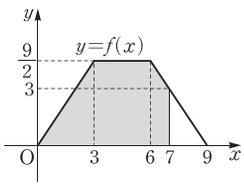
이상에서 $\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x & (0\le x<3)\\ \dfrac{9}{2} & (3\le x<6)\\ -\dfrac{3}{2}x+\dfrac{27}{2} & (6\le x\le9)\end{cases}$

Step 2 $f(1)$의 값을 구한다.

ㄱ. $f(1)=\dfrac{3}{2}\times1=\dfrac{3}{2}$ (참)

Step 3 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후, 도형의 넓이를 구한다.

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 도형의 넓이는



$$\frac{1}{2}\times3\times\frac{9}{2}+3\times\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\times\left(3+\frac{9}{2}\right)\times1=24 \text{ (거짓)}$$

Step 4 $f(f(a))=3$에서 $f(a)=t$로 놓고 $f(t)=3$을 만족시키는 t의 값을 구한 후, 이를 이용하여 a의 값을 구한다.

ㄷ. $(f\circ f)(a)=3$, 즉 $f(f(a))=3$에서 $f(a)=t$로 놓으면

$f(t)=3$

이때 $0\le t\le\frac{9}{2}$이므로

(iv) $0\le t<3$일 때, $\frac{3}{2}t=3$ $\therefore t=2$

(v) $3\le t\le\frac{9}{2}$일 때, $f(t)=\frac{9}{2}\neq3$

(iv), (v)에서 $t=2$이므로 $f(a)=2$

즉 $\frac{3}{2}a=2$ 또는 $-\frac{3}{2}a+\frac{27}{2}=2$이므로

$a=\frac{4}{3}$ 또는 $a=\frac{23}{3}$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 모든 a의 값의 곱은

$\frac{4}{3}\times\frac{23}{3}=\frac{92}{9}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

0808 Step 1 함수 f의 역함수가 존재하면 f는 일대일대응임을 이용하여 k의 값을 구한다.

함수 f의 역함수가 존재하므로 f는 일대일대응이다.

이때 $f(1)=1$, $f(2)=4$, $f(3)=3-k$, $f(4)=4-k$이고

$3-k<4-k$이므로

$f(3)=2$, $f(4)=3$ $\therefore k=1$

Step 2 $g^1(3)$, $g^2(3)$, $g^3(3)$, …의 값을 구하여 규칙을 찾는다.

$g(1)=1$, $g(2)=3$, $g(3)=4$, $g(4)=2$이므로

$g^1(3)=g(3)=4$

$g^2(3)=g(g^1(3))=g(4)=2$

$g^3(3)=g(g^2(3))=g(2)=3$

$g^4(3)=g(g^3(3))=g(3)=4$

⋮

따라서 $g^n(3)$의 값은 4, 2, 3이 이 순서대로 반복된다.

Step 3 $k+g^{1012}(3)+g^{1013}(3)$의 값을 구한다.

$1012=3\times337+1$, $1013=3\times337+2$이므로

$g^{1012}(3)=g^1(3)=4$, $g^{1013}(3)=g^2(3)=2$

$\therefore k+g^{1012}(3)+g^{1013}(3)=1+4+2=7$ 답 7

0809 Step 1 조건 (가)를 이용하여 $f(1)$, $f(2)$의 값을 구한다.

함수 f의 역함수가 존재하므로 f는 일대일대응이다.

조건 (가)에서

$(f\circ f)(2)=1$, $f^{-1}(2)=2$

또는 $(f\circ f)(2)=2$, $f^{-1}(2)=1$

그런데 $f^{-1}(2)=2$이면 $f(2)=2$이므로

$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(2)=2\neq1$

따라서 $f^{-1}(2)=1$에서 $f(1)=2$이고

$(f\circ f)(2)=f(f(2))=2$에서 $f(2)=1$

Step 2 조건 (나)를 이용하여 $f(0)f(-2)$, $f(-1)$의 값을 구한다.

조건 (나)에서

$k=-1$일 때, $f(-1)\times f(0)\le0$이므로

$f(-1)=0$ 또는 $f(0)=0$

$k=-2$일 때, $f(-2)\times f(-1)\le0$이므로

$f(-2)=0$ 또는 $f(-1)=0$

따라서 $f(-1)=0$이므로

$f(0)=-1$, $f(-2)=-2$ 또는 $f(0)=-2$, $f(-2)=-1$

$\therefore f(0)f(-2)=2$

Step 3 $f(0)f(-2)+f(-1)f(1)+f(2)$의 값을 구한다.

$\therefore f(0)f(-2)+f(-1)f(1)+f(2)$

$=2+0\times2+1=3$ 답 3

0810 Step 1 주어진 방정식을 인수분해한다.

$\{f(x)\}^2=f(x)f^{-1}(x)$에서

$\{f(x)\}^2-f(x)f^{-1}(x)=0$

$f(x)\{f(x)-f^{-1}(x)\}=0$

$\therefore f(x)=0$ 또는 $f(x)=f^{-1}(x)$

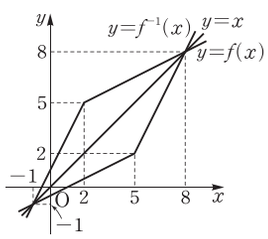
Step 2 방정식의 근을 구한다.

(i) $f(x)=0$일 때

$2x+1=0$ $\therefore x=-\frac{1}{2}$

(ii) $f(x)=f^{-1}(x)$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\frac{1}{2}x+4=x$에서 $x=8$

$2x+1=x$에서 $x=-1$

(i), (ii)에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=8$ 또는 $x=-1$

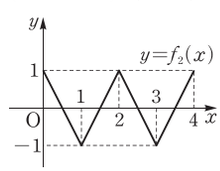
Step 3 방정식의 모든 실근의 합을 구한다.

따라서 방정식 $\{f(x)\}^2=f(x)f^{-1}(x)$의 모든 실근의 합은

$-\frac{1}{2}+8+(-1)=\frac{13}{2}$ 답 $\frac{13}{2}$

0811 Step 1 $y=g(x)$의 그래프를 그린다.

$y=f_2(x)$의 그래프는 $y=2-|2(x-2)|$ $(0\le x\le4)$의 그래프에서 $y\ge0$인 부분은 남기고, $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



(i) $0\le x\le\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}\le x\le\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}\le x\le 4$일 때

$0\le f_2(x)\le 1$이므로

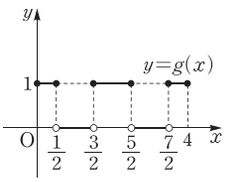
$g(x)=(f_1\circ f_2)(x)=f_1(f_2(x))=1$

(ii) $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}<x<\frac{7}{2}$일 때

$-1\le f_2(x)<0$이므로

$g(x)=(f_1\circ f_2)(x)=f_1(f_2(x))=0$

(i), (ii)에서 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.

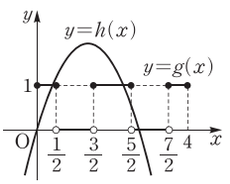


Step 2 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프의 교점의 개수가 최대가 되기 위한 조건을 찾는다.

$h(x)=-x(x-a)=-x^2+ax=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}$

이므로 $y=h(x)$의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $\left(\frac{a}{2},\ \frac{a^2}{4}\right)$이고 위로 볼록한 포물선이다.

이때 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프의 교점의 개수가 최대가 되려면 $y=h(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



Step 3 교점의 개수의 최댓값과 실수 a의 값의 범위를 구하여 $\frac{\alpha\beta}{m}$의 값을 구한다.

(iii) $h\left(\frac{1}{2}\right)\ge 1$에서 $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-a\right)\ge 1$

$\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}\ge 1$ $\therefore a\ge\frac{5}{2}$

(iv) $h\left(\frac{3}{2}\right)\ge 1$에서 $-\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-a\right)\ge 1$

$\frac{3}{2}a-\frac{9}{4}\ge 1$ $\therefore a\ge\frac{13}{6}$

(v) $0<h\left(\frac{5}{2}\right)\le 1$에서 $0<-\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-a\right)\le 1$

$0<\frac{5}{2}a-\frac{25}{4}\le 1$

$\therefore \frac{5}{2}<a\le\frac{29}{10}$

(vi) $h\left(\frac{7}{2}\right)<0$에서 $-\frac{7}{2}\left(\frac{7}{2}-a\right)<0$

$\frac{7}{2}-a>0$ $\therefore a<\frac{7}{2}$

이상에서 $\frac{5}{2}<a\le\frac{29}{10}$일 때, 교점의 개수가 3이므로

$\alpha=\frac{5}{2}$, $\beta=\frac{29}{10}$, $m=3$

$\therefore \frac{\alpha\beta}{m}=\frac{29}{12}$

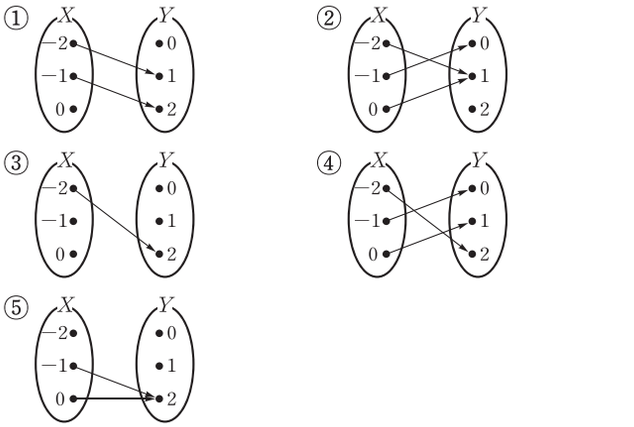
답 $\frac{29}{12}$

시험 만점 완성하기

본책 160~163쪽

0812 전략 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하는지 확인한다.

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 X에서 Y로의 함수인 것은 ②, ④이다. 답 ②, ④

0813 전략 유리수와 무리수를 구분하여 함숫값을 구한다.

4는 유리수이므로

$f(4)=-2\times 4=-8$

$\sqrt{7}+5$는 무리수이므로

$f(\sqrt{7}+5)=(\sqrt{7}+5)+3=\sqrt{7}+8$

$\therefore f(4)+f(\sqrt{7}+5)=-8+(\sqrt{7}+8)=\sqrt{7}$ 답 ①

0814 전략 $f(x+y)=f(x)f(y)$의 x, y에 적당한 값을 대입한다.

$f(2x)=f(x+x)=f(x)f(x)=\{f(x)\}^2$

$f(3x)=f(x+2x)=f(x)f(2x)=f(x)\{f(x)\}^2=\{f(x)\}^3$

$f(4x)=f(x+3x)=f(x)f(3x)=f(x)\{f(x)\}^3=\{f(x)\}^4$

$\vdots$

$f(500x)=\{f(x)\}^{500}$

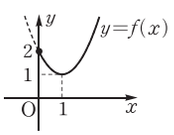
$\therefore n=500$ 답 ③

0815 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

$f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$

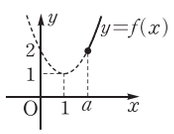
ㄱ. $a=0$이면 $x\ge 0$일 때 $f(x)\ge 1$이므로

$b=1$ (거짓)



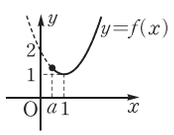
ㄴ. $a>1$이면 $x\ge a$일 때 $y\ge f(a)$이므로

$b=f(a)$ (참)



ㄷ. $b=1$이면 치역이 $\{y|y\ge 1\}$이므로

$a\le 1$ (참)



이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0816 전략 일대일대응은 일대일함수이고 (치역)=(공역)이어야 함을 이용한다.

①, ④ 모든 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응이다.

②, ⑤ 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 두 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

③ 치역의 각 원소 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이다.

그런데 치역이 실수 전체의 집합이 아니므로 일대일대응은 아니다.

따라서 일대일함수이지만 일대일대응은 아닌 것은 ③이다.

답 ③

0817 전략 $x>0$일 때 $f(x)$의 각 함숫값에 대한 $f(-x)$의 함숫값을 생각해 본다.

조건 (나)에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값은 1, 2, 3 중 하나이다.

이때 조건 (가)에서 $x>0$일 때

$f(x)=1$이면 $\quad f(-x)=-2$

$f(x)=2$이면 $\quad f(-x)=-1$ 또는 $f(-x)=-3$

$f(x)=3$이면 $\quad f(-x)=-2$

따라서 $x=1, 2, 3$에 대하여 순서쌍 $(f(x), f(-x))$로 가능한 것은 $(1, -2)$, $(2, -1)$, $(2, -3)$, $(3, -2)$의 4가지씩이므로 함수 f의 개수는

$4\times4\times4=64$

답 ③

0818 전략 합성함수 $f\circ g$가 정의되려면 함수 g의 치역이 함수 f의 정의역에 포함되어야 한다.

함수 $g(x)$의 치역을 Y라 하면 $Y\subset X$이어야 $f\circ g$가 정의된다.

$g(0)=a+2b$, $g(1)=3a-b$이므로

$Y=\{a+2b, 3a-b\}$

(i) $a+2b=0$, $3a-b=0$일 때

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=0$, $b=0$

$\therefore ab=0$

(ii) $a+2b=0$, $3a-b=1$일 때

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{2}{7}$, $b=-\frac{1}{7}$

$\therefore ab=-\frac{2}{49}$

(iii) $a+2b=1$, $3a-b=0$일 때

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{1}{7}$, $b=\frac{3}{7}$

$\therefore ab=\frac{3}{49}$

(iv) $a+2b=1$, $3a-b=1$일 때

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{3}{7}$, $b=\frac{2}{7}$

$\therefore ab=\frac{6}{49}$

이상에서 ab의 최댓값은 $\frac{6}{49}$이다.

답 ③

0819 전략 $f(g(x))=g(f(x))$에서 동류항의 계수를 비교한다.

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(px+q)$

$=p(px+q)+3$

$=p^2x+pq+3$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(px+3)$

$=p(px+3)+q$

$=p^2x+3p+q$

$f\circ g=g\circ f$에서 $\quad p^2x+pq+3=p^2x+3p+q$

$pq+3=3p+q$, $\quad p(q-3)-(q-3)=0$

$(p-1)(q-3)=0 \quad \therefore p=1$ 또는 $q=3$

답 ④

0820 전략 방정식 $(f\circ f)(x)=ax+2$의 실근의 개수는 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=ax+2$의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

$f(x)=\begin{cases}-4x+4 & (0\le x<1)\\ x-1 & (1\le x\le4)\end{cases}$이므로

$(f\circ f)(x)=\begin{cases}-4f(x)+4 & (0\le f(x)<1)\\ f(x)-1 & (1\le f(x)\le4)\end{cases}$

(i) $0\le x\le\frac{3}{4}$일 때, $f(x)=-4x+4$이고 $1\le f(x)\le4$이므로

$(f\circ f)(x)=(-4x+4)-1=-4x+3$

(ii) $\frac{3}{4}<x<1$일 때, $f(x)=-4x+4$이고 $0<f(x)<1$이므로

$(f\circ f)(x)=-4(-4x+4)+4=16x-12$

(iii) $1\le x<2$일 때, $f(x)=x-1$이고 $0\le f(x)<1$이므로

$(f\circ f)(x)=-4(x-1)+4=-4x+8$

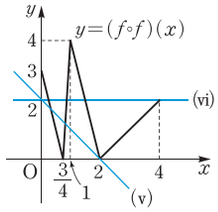
(iv) $2\le x\le4$일 때, $f(x)=x-1$이고 $1\le f(x)\le3$이므로

$(f\circ f)(x)=(x-1)-1=x-2$

이상에서

$$(f\circ f)(x)=\begin{cases}-4x+3 & \left(0\le x\le\frac{3}{4}\right)\\ 16x-12 & \left(\frac{3}{4}<x<1\right)\\ -4x+8 & (1\le x<2)\\ x-2 & (2\le x\le4)\end{cases}$$

함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $(f\circ f)(x)=ax+2$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되려면 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=ax+2$의 교점의 개수가 4이어야 한다.



한편 직선

$y=ax+2$ ····· ㉠

는 a의 값에 관계없이 점 $(0, 2)$를 지난다.

(v) 직선 ㉠이 점 $(2, 0)$을 지날 때

$0=2a+2 \quad \therefore a=-1$

(vi) 직선 ㉠이 점 $(4, 2)$를 지날 때

$2=4a+2 \quad \therefore a=0$

(v), (vi)에서 $\quad -1<a<0$ ($\because a\neq0$)

따라서 $m=-1$, $n=0$이므로 $\quad m+n=-1$

답 ③

0821 전략 함수 f의 역함수가 f^{-1}일 때 $f^{-1}(a)=b$이면 $f(b)=a$임을 이용한다.

$x\geq 2$일 때, $f(x)=3x-1\geq 5$

$x<2$일 때, $f(x)=x+3<5$

$f^{-1}(4)=m$이라 하면 $f(m)=4$이므로

$m+3=4$ $\therefore m=1$

$f^{-1}(11)=n$이라 하면 $f(n)=11$이므로

$3n-1=11$ $\therefore n=4$

$\therefore f^{-1}(4)+f^{-1}(11)=1+4=5$ 답 ②

0822 전략 함수 f의 역함수가 존재하려면 함수 f가 일대일대응이어야 함을 이용한다.

함수 f의 역함수가 존재하면 함수 f가 일대일대응이므로 치역과 공역이 같다.

따라서 역함수가 존재하는 함수는 ②이다. 답 ②

0823 전략 함수 f의 역함수 f^{-1}를 먼저 구한다.

$f(x)=3x-6$에서 $y=3x-6$이라 하면

$3x=y+6$ $\therefore x=\frac{1}{3}y+2$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{3}x+2$

즉 $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+2$이므로

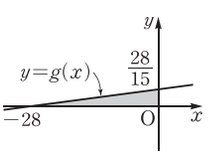
$g(5x+2)=\frac{1}{3}x+2$

이때 $5x+2=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{5}t-\frac{2}{5}$이므로

$g(t)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}t-\frac{2}{5}\right)+2=\frac{1}{15}t+\frac{28}{15}$

$\therefore g(x)=\frac{1}{15}x+\frac{28}{15}$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$S=\frac{1}{2}\times 28\times\frac{28}{15}=\frac{392}{15}$

$\therefore 15S=15\times\frac{392}{15}=392$ 답 ④

0824 전략 함수 f가 일대일대응임을 이용하여 $f(3)$의 값을 먼저 구한다.

$f(1)=3$, $f(2)=1$, $f(4)=2$이고, 함수 f가 일대일대응이므로

$f(3)=4$

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(1)=2$

$(f\circ g)(4)=f(g(4))=4$이고, $f(3)=4$이므로

$g(4)=3$

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(3)=1$

함수 g도 일대일대응이므로 $g(2)=4$

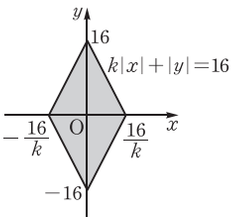
$(g^{-1}\circ f)(4)=g^{-1}(f(4))=g^{-1}(2)=a$라 하면

$g(a)=2$이므로 $a=1$

$\therefore g(2)+(g^{-1}\circ f)(4)=4+1=5$ 답 ④

0825 전략 $|y|=f(|x|)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\geq 0$, $y\geq 0$인 부분만 남기고, 이 부분을 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동하여 그린다.

$k|x|+|y|=16$의 그래프는 $kx+y=16$, 즉 $y=-kx+16$의 그래프에서 $x\geq 0$, $y\geq 0$인 부분만 남기고 이 부분을 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같은 마름모이다.



이 마름모의 넓이가 256이므로

$\frac{1}{2}\times\left\{\frac{16}{k}-\left(-\frac{16}{k}\right)\right\}\times\{16-(-16)\}=256$

$\therefore k=2$ 답 ②

만점 공략 노트

두 대각선의 길이가 a, b인 마름모의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$

0826 전략 $5f(x)=f(5x)$를 이용하여 $f(4500)$을 변형한다.

$f(4500)=5f(900)=5^2f(180)=5^3f(36)$

$=5^4f\left(\frac{36}{5}\right)=5^5f\left(\frac{36}{25}\right)$

이때 $1\leq\frac{36}{25}\leq 5$이므로

$f(4500)=5^5f\left(\frac{36}{25}\right)=5^5\times\left(2-\left|\frac{36}{25}-3\right|\right)$

$=5^5\times\frac{11}{25}=1375$ 답 1375

0827 전략 $\{f(x)-A\}\{f(x)-B\}=0$이면 $f(x)=A$ 또는 $f(x)=B$임을 이용한다.

조건 (가)에서 $\{f(x)+x^2-12\}\{f(x)+4x\}=0$이므로

$g(x)=-x^2+12$, $h(x)=-4x$라 하면

$\{f(x)-g(x)\}\{f(x)-h(x)\}=0$

$\therefore f(x)=g(x)$ 또는 $f(x)=h(x)$

$x=0$일 때

$f(0)=g(0)=12$ 또는 $f(0)=h(0)=0$

그런데 조건 (나)에서 $f(-4)\times f(-3)\times f(0)<0$이므로

$f(0)\neq 0$ $\therefore f(0)=12$

$x=-3$일 때

$f(-3)=g(-3)=3$ 또는 $f(-3)=h(-3)=12$

그런데 함수 f가 일대일함수이므로

$f(-3)\neq 12$ $\therefore f(-3)=3$

$x=-4$일 때

$f(-4)=g(-4)=-4$ 또는 $f(-4)=h(-4)=16$

그런데 조건 (나)에서 $f(-4)\times f(-3)\times f(0)<0$이므로

$f(-4)<0$ $\therefore f(-4)=-4$

$x=1$일 때

$f(1)=g(1)=11$ 또는 $f(1)=h(1)=-4$

그런데 함수 f가 일대일함수이므로

$f(1)\neq -4$ $\therefore f(1)=11$

$x=-1$일 때
$f(-1)=g(-1)=11$ 또는 $f(-1)=h(-1)=4$
그런데 함수 f가 일대일함수이므로
$f(-1)\neq 11$ $\therefore f(-1)=4$
$x=-2$일 때
$f(-2)=g(-2)=8$ 또는 $f(-2)=h(-2)=8$
$\therefore f(-2)=8$
$\therefore f(-4)+f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)$
$=-4+3+8+4+12+11=34$ 답 34

0828 전략 항등함수는 정의역의 각 원소에 그 자신이 대응하는 함수이고, 상수함수는 정의역의 모든 원소에 공역의 단 하나의 원소가 대응하는 함수임을 이용한다.

ㄱ. $f(2)=2$, $f(4)=4$, $f(6)=6$, $f(8)=8$이므로 항등함수이다.
ㄴ. $g(2)=2$, $g(4)=4$, $g(6)=6$, $g(8)=8$이므로 항등함수이다.
ㄷ. $h(2)=2\times 2=4$, $h(4)=2\times 3=6$, $h(6)=2\times 4=8$, $h(8)=2\times 4=8$
ㄹ. $i(2)=i(4)=i(6)=i(8)=2$이므로 상수함수이다.
항등함수는 ㄱ, ㄴ의 2개이므로 $a=2$
상수함수는 ㄹ의 1개이므로 $b=1$
$\therefore a+b=3$ 답 3

0829 전략 원소의 개수가 m인 집합 X에 대하여 X에서 X로의 일대일대응의 개수는 ${}_m\mathrm{P}_m=m!$임을 이용한다.

$f(2)+f(5)=10$에서 $f(2)$, $f(5)$의 값을 4, 6으로 정하는 경우의 수는 $2!=2$
$f(1)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(6)$의 값을 1, 2, 3, 5로 정하는 경우의 수는 $4!=24$
따라서 구하는 함수 f의 개수는
$2\times 24=48$ 답 48
참고 함수 f가 일대일대응이므로 $f(2)\neq f(5)$이다.
따라서 $f(2)=f(5)=5$인 경우는 제외해야 한다.

0830 전략 함수 f의 역함수가 존재하려면 함수 f가 일대일대응이어야 함을 이용한다.

$S=\{4, 8, 12, \cdots, 100\}$이므로 집합 S의 원소에서
4를 3으로 나누었을 때의 나머지는 1,
8을 3으로 나누었을 때의 나머지는 2,
12를 3으로 나누었을 때의 나머지는 0,
16을 3으로 나누었을 때의 나머지는 1,
⋮
따라서 3으로 나누었을 때의 나머지는 1, 2, 0이 이 순서대로 반복된다.
즉 집합 S의 원소에서
3으로 나누었을 때의 나머지가 0인 것은
12, 24, 36, ⋯, 96의 8개
3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 것은
4, 16, 28, ⋯, 100의 9개
3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 것은
8, 20, 32, ⋯, 92의 8개
함수 f의 역함수가 존재하려면 함수 f가 일대일대응이어야 하므로 집합 X는 3으로 나누었을 때의 나머지가 0, 1, 2인 수를 각각 1개씩 원소로 가져야 한다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는
$8\times 9\times 8=576$ 답 576

0831 전략 $f(x)$를 일차식으로 놓고 $f^{-1}(m)=n$이면 $f(n)=m$임을 이용한다.

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)라 하면
$f(4)=3$에서 $4a+b=3$ …… ㉠
$f=f^{-1}$이므로 $f^{-1}(4)=f(4)=3$
즉 $f(3)=4$이므로 $3a+b=4$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=7$
$\therefore f(x)=-x+7$
따라서 $y=f(x)$의 그래프의 x절편은 7, y절편은 7이므로
$p=7$, $q=7$ $\therefore pq=49$ 답 49
다른 풀이 ㉠에서 $b=-4a+3$
$\therefore f(x)=ax-4a+3$ …… ㉢
한편 $f=f^{-1}$이면 $(f\circ f)(x)=x$
$\therefore f(f(x))=x$ …… ㉣
$f(f(x))=f(ax-4a+3)$
$=a(ax-4a+3)-4a+3$
$=a^2x-4a^2-a+3$
이므로 ㉣에서 $a^2x-4a^2-a+3=x$
$\therefore a^2=1$, $-4a^2-a+3=0$
(i) $a^2=1$에서 $a=-1$ 또는 $a=1$
(ii) $-4a^2-a+3=0$에서
$4a^2+a-3=0$, $(a+1)(4a-3)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{3}{4}$
(i), (ii)에서 $a=-1$이므로 ㉢에서
$f(x)=-x+7$

0832 전략 함수 f의 치역의 원소의 개수가 공역의 원소의 개수보다 적으면 공역의 원소 중 치역에 속하지 않는 원소가 있음을 이용한다.

조건 (가)에서 함수 f의 치역의 원소의 개수가 5이므로 집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b에 대하여 $f(a)=f(b)=n$을 만족시키는 집합 X의 원소 n은 한 개 있다. … ❶
이때 집합 X의 원소 중 치역에 속하지 않는 원소를 m이라 하자.
$2+3+4+5+6+7=27$이므로 조건 (나)에서
$f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)$
$=27+n-m=31$
$\therefore n-m=4$ … ❷

집합 X의 원소 n, m에 대하여 $n-m=4$인 경우는 다음과 같다.

(i) $n=6$, $m=2$일 때

함수 f의 치역은 $\{3, 4, 5, 6, 7\}$이므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(ii) $n=7$, $m=3$일 때

함수 f의 치역은 $\{2, 4, 5, 6, 7\}$이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $n=6$ … ❸

답 6

단계	채점 요소	배점
❶	$f(a)=f(b)=n$을 만족시키는 n이 한 개 있음을 알기	1점
❷	집합 X의 원소 중 치역에 속하지 않는 원소를 m으로 놓고, n, m에 대한 식 세우기	2점
❸	n의 값 구하기	2점

0833 전략 함수 f가 일대일대응이 되려면 $x\geq3$일 때와 $x<3$일 때의 직선 $y=f(x)$의 기울기의 부호가 같아야 함을 이용한다.

함수 f가 일대일대응이 되려면 $x\geq3$일 때와 $x<3$일 때의 직선 $y=f(x)$의 기울기의 부호가 같아야 한다.

즉 $10-a>0$에서 $a<10$ …… ㉠ … ❶

또 직선 $y=(10-a)x+b$가 점 $(3, 6+a)$를 지나야 하므로

$6+a=(10-a)\times3+b$에서 $b=4a-24$

$\therefore a+b=a+(4a-24)=5a-24$ … ❷

이때 a, b가 정수이므로 ㉠에서 $a=9$일 때 $a+b$의 값이 최대이다.

따라서 구하는 최댓값은

$5\times9-24=21$ … ❸

답 21

단계	채점 요소	배점
❶	a의 값의 범위 구하기	1점
❷	$a+b$를 a에 대한 식으로 나타내기	2점
❸	$a+b$의 최댓값 구하기	1점

0834 전략 주어진 정의에 따라 a_{ij}를 구하여 행렬 A를 구한다.

$a_{11}=(f_1\circ f_2)(1)=f_1(f_2(1))=f_1(1)=1$

$a_{12}=(f_2\circ f_1)(2)=f_2(f_1(2))=f_2(2)=1$

$a_{21}=(f_3\circ f_2)(1)=f_3(f_2(1))=f_3(1)=0$

$a_{22}=(f_2\circ f_3)(2)=f_2(f_3(2))=f_2(1)=1$

$\therefore A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ … ❶

$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$ (n은 자연수)

$\therefore A^{50}=\begin{pmatrix}1&50\\0&1\end{pmatrix}$ … ❷

따라서 행렬 A^{50}의 모든 성분의 합은

$1+50+0+1=52$ … ❸

답 52

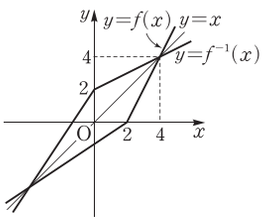
단계	채점 요소	배점
❶	행렬 A 구하기	2점
❷	행렬 A^{50} 구하기	2점
❸	행렬 A^{50}의 모든 성분의 합 구하기	1점

0835 전략 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 함을 이용한다.

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 일대일대응이다. 즉 $x\geq2$일 때와 $x<2$일 때의 직선 $y=f(x)$의 기울기의 부호가 같아야 하므로

$\frac{1}{k}>0$ $\therefore k>0$ …… ㉠ … ❶

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



(i) $x\geq2$일 때

$2x-4=x$ $\therefore x=4$

(ii) $x<2$일 때

$\frac{1}{k}(x-2)=x$, $\frac{1-k}{k}x=\frac{2}{k}$

$\therefore x=\frac{2}{1-k}$ ($\because k\neq1$)

이때 $x<2$이므로 $\frac{2}{1-k}<2$, $\frac{2k}{1-k}<0$

$1-k<0$ ($\because$ ㉠) $\therefore k>1$

(i), (ii)에서 두 점 A, B의 좌표는 $(4, 4)$, $\left(\frac{2}{1-k}, \frac{2}{1-k}\right)$이므로 … ❷

$\overline{AB}=\sqrt{\left(4+\frac{2}{k-1}\right)^2+\left(4+\frac{2}{k-1}\right)^2}$

$=\left(4+\frac{2}{k-1}\right)\sqrt{2}$ ($\because k>1$) … ❸

따라서 $\overline{AB}$의 길이의 최댓값은 $k=2$일 때, $6\sqrt{2}$이다. … ❹

답 $6\sqrt{2}$

단계	채점 요소	배점
❶	함수 f의 역함수가 존재하기 위한 조건 알기	1점
❷	두 점 A, B의 좌표를 k에 대한 식으로 나타내기	3점
❸	선분 AB의 길이를 k에 대한 식으로 나타내기	1점
❹	선분 AB의 길이의 최댓값 구하기	1점

만점 공략 노트

$\overline{AB}=\left(4+\frac{2}{k-1}\right)\sqrt{2}$이고 $k>1$이므로 k의 값이 최소일 때 $\overline{AB}$의 길이는 최대이다. 이때 k는 정수이므로 k의 최솟값은 2이다.

III 함수

09 유리함수

셀프 CHECK

본책 164~165쪽

A 답 (1) ㄱ, ㄷ (2) ㄴ, ㄹ

B 답 (1) $\frac{3x+5}{(x-1)(x+3)}$ (2) $\frac{5}{x(x+2)}$

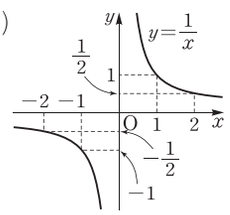
(3) $\frac{x-3}{(x-1)(x+1)}$ (4) $\frac{x-1}{(2x-1)(x+3)}$

C 답 (1) $\frac{-x+11}{(x+1)(x-2)}$ (2) $\frac{2}{x(x+6)}$ (3) $\frac{2}{3x-1}$

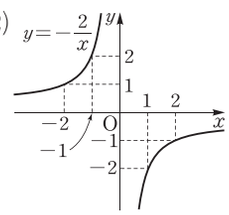
D 답 $\frac{11}{7}$

E 답 (1) ㄴ, ㄷ (2) ㄱ, ㄹ

F 답 (1)

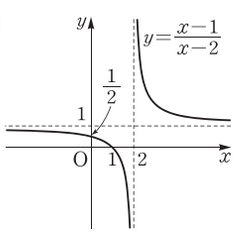


(2)



G 답 $y=\frac{1}{x-4}+3$

H 답 (1)

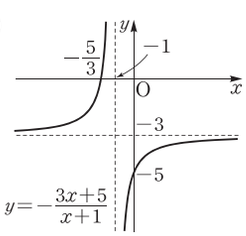


정의역: $\{x|x\neq 2$인 실수$\}$

치역: $\{y|y\neq 1$인 실수$\}$

점근선의 방정식: $x=2$, $y=1$

(2)



정의역: $\{x|x\neq -1$인 실수$\}$

치역: $\{y|y\neq -3$인 실수$\}$

점근선의 방정식: $x=-1$, $y=-3$

내신유형 다지기

본책 166~177쪽

유형 158 유리식의 사칙연산

본책 166쪽

(1) 유리식의 덧셈과 뺄셈

➜ 분모를 통분하여 분자끼리 계산한다.

(2) 유리식의 곱셈

➜ 분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리 곱하여 계산한다.

(3) 유리식의 나눗셈

➜ 나누는 식의 분자와 분모를 바꾸어 곱하여 계산한다.

0836 $\frac{x+6}{x^2+3x}-\frac{9+x}{x^2-9}$

$=\frac{x+6}{x(x+3)}-\frac{9+x}{(x+3)(x-3)}$

$=\frac{(x+6)(x-3)-x(9+x)}{x(x+3)(x-3)}$

$=\frac{x^2+3x-18-9x-x^2}{x(x+3)(x-3)}$

$=\frac{-6(x+3)}{x(x+3)(x-3)}$

$=-\frac{6}{x(x-3)}$ 답 $-\frac{6}{x(x-3)}$

0837 $\frac{x^2+x-12}{x^2-25}\times\frac{x-1}{x^2+4x}\div\frac{x^2-4x+3}{x+5}$

$=\frac{(x+4)(x-3)}{(x+5)(x-5)}\times\frac{x-1}{x(x+4)}\times\frac{x+5}{(x-1)(x-3)}$

$=\frac{1}{x(x-5)}$ 답 $\frac{1}{x(x-5)}$

0838 $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x}$

$=\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)$

$=\frac{x+3-(x-2)}{(x-2)(x+3)}+\frac{x-(x-1)}{x(x-1)}$

$=\frac{5}{(x-2)(x+3)}+\frac{1}{x(x-1)}$

$=\frac{5x(x-1)+(x-2)(x+3)}{x(x-1)(x-2)(x+3)}$

$=\frac{6x^2-4x-6}{x(x-1)(x-2)(x+3)}$

따라서 $a=6$, $b=-4$, $c=-6$이므로

$a-b+c=4$ 답 4

0839 $\frac{a^2-b^2}{a^2+ab+b^2}\div\frac{a+b}{a^3-b^3}$

$=\frac{(a+b)(a-b)}{a^2+ab+b^2}\times\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a+b}$

$=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$=15-2\times 6=3$ 답 ②

만점 공략 노트

인수분해 공식

(1) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(2) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

0840 $A\div\dfrac{x^3-1}{x^2+5x}\times\dfrac{x^4+x^2+1}{x^3+1}$

$=A\times\dfrac{x(x+5)}{(x-1)(x^2+x+1)}\times\dfrac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=A\times\dfrac{x(x+5)}{(x-1)(x+1)}$ … ❶

따라서 $A\times\dfrac{x(x+5)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{x+5}{x+1}$이므로

$A=\dfrac{x+5}{x+1}\times\dfrac{(x-1)(x+1)}{x(x+5)}=\dfrac{x-1}{x}$ … ❷

답 $\dfrac{x-1}{x}$

단계	채점 요소	비율
❶	주어진 식의 좌변을 간단히 하기	50 %
❷	A 구하기	50 %

유형 159 유리식과 항등식

→ 본책 166쪽

유리식인 항등식이 주어진 경우

➜ 분모를 통분하거나 양변에 적당한 식을 곱하여 정리한 후 동류항의 계수를 비교한다.

0841 주어진 등식의 우변을 통분하면

$\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-3}=\dfrac{a(x-3)+b(x+1)}{(x+1)(x-3)}$

$=\dfrac{(a+b)x-3a+b}{x^2-2x-3}$

즉 $\dfrac{7x+15}{x^2-2x-3}=\dfrac{(a+b)x-3a+b}{x^2-2x-3}$가 x에 대한 항등식이므로

$a+b=7,\ -3a+b=15$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=9$

$\therefore\ b-a=11$ 답 ②

다른 풀이 $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$이므로 주어진 등식의 양변에 $(x+1)(x-3)$을 곱하면

$7x+15=a(x-3)+b(x+1)$

$\therefore\ 7x+15=(a+b)x-3a+b$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=7,\ -3a+b=15$

만점 공략 노트

항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식

$\Longleftrightarrow a=0,\ b=0,\ c=0$

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식

$\Longleftrightarrow a=a',\ b=b',\ c=c'$

0842 주어진 등식의 우변을 통분하면

$\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+5}{x^2+x+1}=\dfrac{a(x^2+x+1)+(bx+5)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\dfrac{(a+b)x^2+(a-b+5)x+a-5}{x^3-1}$

즉 $\dfrac{f(x)}{x^3-1}=\dfrac{(a+b)x^2+(a-b+5)x+a-5}{x^3-1}$가 x에 대한 항등식이므로

$f(x)=(a+b)x^2+(a-b+5)x+a-5$

$f(0)=5$이므로 $a-5=5$ $\therefore\ a=10$

$f(-1)=4$이므로 $a+2b-10=4$ $\therefore\ b=2$

$\therefore\ ab=20$ 답 ④

다른 풀이 $\dfrac{f(x)}{x^3-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+5}{x^2+x+1}$가 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=0$을 대입하면

$-f(0)=-a+5,$ $-5=-a+5$ $\therefore\ a=10$

또 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-\dfrac{f(-1)}{2}=-\dfrac{a}{2}-b+5,$ $-2=-5-b+5$

$\therefore\ b=2$ $\therefore\ ab=20$

0843 주어진 등식의 좌변을 통분하면

$\dfrac{a}{1-x}+\dfrac{b}{1+x}+\dfrac{c}{(1-x)^2}$

$=\dfrac{a(1+x)(1-x)+b(1-x)^2+c(1+x)}{(1+x)(1-x)^2}$

$=\dfrac{(-a+b)x^2+(-2b+c)x+a+b+c}{x^3-x^2-x+1}$ … ❶

즉 $\dfrac{(-a+b)x^2+(-2b+c)x+a+b+c}{x^3-x^2-x+1}=\dfrac{7x^2-5x}{x^3-x^2-x+1}$

가 x에 대한 항등식이므로

$-a+b=7$ …… ㉠

$-2b+c=-5$ …… ㉡

$a+b+c=0$ …… ㉢

㉠+㉢을 하면 $2b+c=7$ …… ㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $b=3,\ c=1$

㉠에 $b=3$을 대입하면

$-a+3=7$ $\therefore\ a=-4$ … ❷

$\therefore\ a-b-c=-8$ … ❸

답 -8

단계	채점 요소	비율
❶	주어진 식의 좌변을 통분하기	50 %
❷	$a,\ b,\ c$의 값 구하기	40 %
❸	$a-b-c$의 값 구하기	10 %

0844 주어진 등식의 양변에 $(x-1)^{11}$을 곱하면

$x^{10}+3=a_1(x-1)^{10}+a_2(x-1)^9+\cdots+a_{11}$

이 식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^{10}+3=a_1+a_2+\cdots+a_{11}$

$\therefore\ a_1+a_2+\cdots+a_{11}=1027$ 답 1027

유형 160 (분자의 차수)≥(분모의 차수)인 유리식의 계산

본책 167쪽

분자의 차수가 분모의 차수보다 크거나 같은 유리식

➜ 분자를 분모로 나누어 다항식과 분수식의 합으로 변형한다.

0845 $\frac{2x+3}{x+1}+\frac{x-1}{x-2}-\frac{x+4}{x+3}-\frac{2x-7}{x-4}$

$=\frac{2(x+1)+1}{x+1}+\frac{(x-2)+1}{x-2}-\frac{(x+3)+1}{x+3}-\frac{2(x-4)+1}{x-4}$

$=\left(2+\frac{1}{x+1}\right)+\left(1+\frac{1}{x-2}\right)-\left(1+\frac{1}{x+3}\right)-\left(2+\frac{1}{x-4}\right)$

$=\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-4}\right)$

$=\frac{5}{(x+3)(x-2)}+\frac{-5}{(x+1)(x-4)}$

$=\frac{5(x^2-3x-4)-5(x^2+x-6)}{(x+3)(x+1)(x-2)(x-4)}$

$=\frac{\boxed{-20x+10}}{(x+3)(x+1)(x-2)(x-4)}$

답 ①

0846 $\frac{x^2+4x+4}{x^2+4x+3}-\frac{3x^2+3x+1}{x^2+x}+2$

$=\frac{(x^2+4x+3)+1}{x^2+4x+3}-\frac{3(x^2+x)+1}{x^2+x}+2$

$=\left(1+\frac{1}{x^2+4x+3}\right)-\left(3+\frac{1}{x^2+x}\right)+2$

$=\frac{1}{(x+1)(x+3)}-\frac{1}{x(x+1)}$

$=-\frac{3}{x(x+1)(x+3)}$

답 $-\frac{3}{x(x+1)(x+3)}$

0847 $\frac{x^3-1}{x^2-x+1}+\frac{x^3+1}{x^2+x+1}-2x$

$=\frac{(x^3+1)-2}{x^2-x+1}+\frac{(x^3-1)+2}{x^2+x+1}-2x$

$=\frac{(x+1)(x^2-x+1)-2}{x^2-x+1}+\frac{(x-1)(x^2+x+1)+2}{x^2+x+1}-2x$

$=\left(x+1-\frac{2}{x^2-x+1}\right)+\left(x-1+\frac{2}{x^2+x+1}\right)-2x$

$=-\frac{2}{x^2-x+1}+\frac{2}{x^2+x+1}$

$=\frac{-2(x^2+x+1)+2(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$

$=\frac{-4x}{x^4+x^2+1}$

따라서 $p=-4$, $q=4$이므로 $p+q=0$

답 ③

유형 161 부분분수로의 변형

본책 167쪽

분모가 두 인수의 곱이면 부분분수로 변형한다.

➜ $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

0848 $\frac{4}{x(x+4)}+\frac{5}{(x+4)(x+9)}+\frac{6}{(x+9)(x+15)}$

$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+9}\right)+\left(\frac{1}{x+9}-\frac{1}{x+15}\right)$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+15}$

$=\frac{15}{x(x+15)}$

즉 $\frac{15}{x(x+15)}=\frac{a}{x(x+b)}$가 x에 대한 항등식이므로

$a=15$, $b=15$

$\therefore a+b=30$

답 ④

0849 $\frac{5}{1\times2}+\frac{5}{2\times3}+\frac{5}{3\times4}+\cdots+\frac{5}{n(n+1)}$

$=5\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=5\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{5n}{n+1}$

즉 $\frac{5n}{n+1}=\frac{14}{3}$이므로 $15n=14n+14$

$\therefore n=14$

답 ③

0850 $\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\cdots+\frac{1}{575}$

$=\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\frac{1}{7\times9}+\cdots+\frac{1}{23\times25}$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{23}-\frac{1}{25}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{25}\right)=\frac{11}{75}$

답 ②

0851 $\frac{1}{x^2-3x}+\frac{1}{x^2+3x}+\frac{1}{x^2+9x+18}+\frac{1}{x^2+15x+54}$

$=\frac{1}{x(x-3)}+\frac{1}{x(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+9)}$

$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+6}\right)\right.$

$\left.+\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+9}\right)\right\}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+9}\right)$

$=\frac{4}{(x-3)(x+9)}$

따라서 $\frac{4}{(x-3)(x+9)}=\frac{1}{16}$이므로

$(x-3)(x+9)=64$, $x^2+6x-91=0$

$(x+13)(x-7)=0$

$\therefore x=7$ ($\because x>0$)

답 ④

0852 $f(x)=9x^2-3x-2=(3x-2)(3x+1)$이므로

$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{(3x-2)(3x+1)}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3x-2}-\frac{1}{3x+1}\right)$ … ❶

09 유리함수

$$\therefore \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(100)}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{298}-\frac{1}{301}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{301}\right)=\frac{100}{301} \quad \cdots ❷$$

따라서 $p=301$, $q=100$이므로

$p-q=201$ … ❸

답 201

단계	채점 요소	비율
❶	$\frac{1}{f(x)}$을 부분분수로 변형하기	40 %
❷	주어진 식의 값 구하기	50 %
❸	$p-q$의 값 구하기	10 %

유형 162 분모 또는 분자가 분수식인 유리식의 계산 → 본책 168쪽

분모 또는 분자가 분수식인 유리식은 분자에 분모의 역수를 곱하여 계산한다.

➜ $\dfrac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{D}{C}=\dfrac{AD}{BC}$

0853 $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}}}=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\frac{-1}{x-1}}}}$

$$=1-\frac{1}{1-\frac{1}{1+x-1}}$$
$$=1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{\frac{x-1}{x}}$$
$$=1-\frac{x}{x-1}=\frac{-1}{x-1}$$

즉 $\dfrac{-1}{x-1}=\dfrac{a}{bx-1}$가 x에 대한 항등식이므로

$a=-1$, $b=1$ $\therefore a-b=-2$ 답 ①

0854 $\dfrac{\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}}{\frac{x}{x+2}+\frac{2}{x-2}}=\dfrac{\frac{x-2+x+2}{(x+2)(x-2)}}{\frac{x(x-2)+2(x+2)}{(x+2)(x-2)}}=\dfrac{2x}{x^2+4}$

이때 $x^2-8x+4=0$에서 $x^2+4=8x$이므로 구하는 식의 값은

$\dfrac{2x}{x^2+4}=\dfrac{2x}{8x}=\dfrac{1}{4}$ $(\because x\neq 0)$ 답 $\frac{1}{4}$

0855 $\dfrac{100}{29}=3+\dfrac{13}{29}=3+\dfrac{1}{\frac{29}{13}}=3+\dfrac{1}{2+\frac{3}{13}}$

$$=3+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{13}{3}}}=3+\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{3}}}$$

따라서 $a=3$, $b=2$, $c=4$, $d=3$이므로

$a+b+c+d=12$ 답 ③

유형 163 유리식의 값 구하기 − $x^n\pm\frac{1}{x^n}$의 꼴 → 본책 169쪽

주어진 조건을 이용하여 $x+\frac{1}{x}$, $x-\frac{1}{x}$의 값을 구한 후 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

(3) $x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

0856 $x^2+2x-1=0$에서 $x\neq 0$이므로 양변을 x로 나누면

$x+2-\dfrac{1}{x}=0$ $\therefore x-\dfrac{1}{x}=-2$

$$\therefore 3x^2+7x+6-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}$$
$$=3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+7\left(x-\frac{1}{x}\right)+6$$
$$=3\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\right\}+7\left(x-\frac{1}{x}\right)+6$$
$$=3\times\{(-2)^2+2\}+7\times(-2)+6$$
$$=10$$

답 ④

0857 $x^2-\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

$=2\sqrt{5}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=8\sqrt{5}$

이므로 $x-\dfrac{1}{x}=4$

$\therefore x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

$=4^3+3\times 4=76$ 답 ②

0858 $x^2-3xy+y^2=0$에서 $xy\neq 0$이므로 양변을 xy로 나누면

$\dfrac{x}{y}-3+\dfrac{y}{x}=0$ $\therefore \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=3$

$\therefore \dfrac{y^3}{x^3}+\dfrac{x^3}{y^3}=\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)^3-3\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)$

$=3^3-3\times 3=18$ 답 ④

유형 164 유리식의 값 구하기 − $a+b+c=0$일 때 → 본책 169쪽

$a+b+c=0$이면

$a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$

임을 이용하여 식을 간단히 한다.

0859 $a+b+c=0$에서

$a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$

$$\therefore \left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{b}{c}+1\right)\left(\frac{c}{a}+1\right)=\frac{a+b}{b}\times\frac{b+c}{c}\times\frac{c+a}{a}$$
$$=\frac{-c}{b}\times\frac{-a}{c}\times\frac{-b}{a}=-1$$

답 −1

0860 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0$에서

$\frac{bc+ca-ab}{abc}=0$ $\therefore ab-bc-ca=0$

$\therefore \frac{a}{(a+b)(a-c)}+\frac{b}{(a+b)(b-c)}-\frac{c}{(a-c)(b-c)}$

$=\frac{a(b-c)+b(a-c)-c(a+b)}{(a+b)(a-c)(b-c)}$

$=\frac{2(ab-bc-ca)}{(a+b)(a-c)(b-c)}=0$ 답 0

유형 165 유리식의 값 구하기 — 비례식 또는 등식이 주어질 때

본책 169쪽

(1) 비례식이 주어지는 경우

➜ 비례상수 k를 이용하여 각 문자를 k에 대한 식으로 나타낸 후 주어진 유리식에 대입한다.

➜ $x:y:z=a:b:c$이면

$x=ak$, $y=bk$, $z=ck$ (단, $k\neq0$)

(2) 등식이 주어지는 경우

➜ 각 문자를 한 문자에 대한 식으로 나타낸 후 주어진 유리식에 대입한다.

0861 $x^2-5xy+4y^2=0$에서 $(x-y)(x-4y)=0$

$\therefore x=4y$ ($\because x\neq y$)

$\therefore \frac{x^2-2xy+3y^2}{2xy-x^2}=\frac{16y^2-8y^2+3y^2}{8y^2-16y^2}$

$=\frac{11y^2}{-8y^2}=-\frac{11}{8}$ 답 $-\frac{11}{8}$

0862 $2x:(y+1):3z=4:5:6$에서

$2x=4k$, $y+1=5k$, $3z=6k$ ($k\neq0$)라 하면

$x=2k$, $y=5k-1$, $z=2k$ … ❶

$\therefore \frac{y+2z+1}{x-y-1}=\frac{(5k-1)+2\times2k+1}{2k-(5k-1)-1}$

$=\frac{9k}{-3k}=-3$ … ❷

답 -3

단계	채점 요소	비율
❶	x, y, z를 비례상수 k에 대한 식으로 나타내기	50 %
❷	주어진 식의 값 구하기	50 %

0863 $\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=\frac{a+b}{c}=p$ ($p\neq0$)라 하면

$b+c=pa$, $c+a=pb$, $a+b=pc$ …… ㉠

세 식을 변끼리 더하면 $2(a+b+c)=p(a+b+c)$

$(2-p)(a+b+c)=0$ $\therefore p=2$ 또는 $a+b+c=0$

(i) $p=2$일 때

㉠에서 $b+c=2a$, $c+a=2b$, $a+b=2c$이므로

$\frac{(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)}{abc}$

$=\frac{4a\times4b\times4c}{abc}=64$

(ii) $a+b+c=0$일 때

$2a+b+c=a$, $a+2b+c=b$, $a+b+2c=c$이므로

$\frac{(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)}{abc}$

$=\frac{abc}{abc}=1$

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은

$64+1=65$ 답 ⑤

유형 166 유리함수의 그래프의 평행이동

본책 170쪽

(1) 유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$ ($k\neq0$)의 그래프는 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

(2) 두 유리함수 $y=\frac{k}{x}$, $y=\frac{l}{x-p}+q$의 그래프가 평행이동에 의하여 겹쳐진다. ➜ $k=l$

0864 $y=\frac{2x+1}{4x-2}=\frac{\frac{1}{2}(4x-2)+2}{4x-2}=\frac{2}{4x-2}+\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{2}$

따라서 $y=\frac{2x+1}{4x-2}$의 그래프는 $y=\frac{1}{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이므로

$p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$, $k=2$ $\therefore p+q+k=3$ 답 3

0865 ㄱ. $y=\frac{1}{4x+8}=\frac{1}{4(x+2)}$

따라서 $y=\frac{1}{4x+8}$의 그래프는 $y=\frac{1}{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=\frac{x-2}{4-4x}=\frac{(x-1)-1}{-4(x-1)}=\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4}$

따라서 $y=\frac{x-2}{4-4x}$의 그래프는 $y=\frac{1}{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 $-\frac{1}{4}$만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=\frac{6x-1}{4x}=\frac{6x}{4x}-\frac{1}{4x}=-\frac{1}{4x}+\frac{3}{2}$

따라서 $y=\frac{6x-1}{4x}$의 그래프는 $y=-\frac{1}{4x}$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=\frac{8x-7}{4x-4}=\frac{2(4x-4)+1}{4x-4}=\frac{1}{4(x-1)}+2$

따라서 $y=\frac{8x-7}{4x-4}$의 그래프는 $y=\frac{1}{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이상에서 평행이동에 의하여 함수 $y=\frac{1}{4x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

0866 $y=\dfrac{x+6}{x+2}=\dfrac{(x+2)+4}{x+2}=\dfrac{4}{x+2}+1$

의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\frac{4}{x-a+2}+1+b \quad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❶$$

$y=\dfrac{5x-1}{x-1}=\dfrac{5(x-1)+4}{x-1}=\dfrac{4}{x-1}+5$

의 그래프가 ㉠의 그래프와 일치하므로

$-1=-a+2,\ 5=1+b$ … ❷

$\therefore a=3,\ b=4$

$\therefore a+b=7$ … ❸

답 7

단계	채점 요소	비율
❶	$y=\dfrac{x+6}{x+2}$을 평행이동한 그래프의 식 구하기	40 %
❷	a, b에 대한 식 세우기	40 %
❸	$a+b$의 값 구하기	20 %

유형 167 유리함수의 정의역과 치역 → 본책 170쪽

(1) 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$의

정의역: $\{x\mid x\neq p$인 실수$\}$, 치역: $\{y\mid y\neq q$인 실수$\}$

(2) 유리함수의 정의역 또는 치역이 주어진 경우

➜ 주어진 범위에서 유리함수의 그래프를 그린 후 대응하는 값의 범위를 구한다.

0867 $y=\dfrac{mx+5}{2x+n}=\dfrac{\frac{m}{2}(2x+n)-\frac{mn}{2}+5}{2x+n}$

$=\dfrac{-\frac{mn}{2}+5}{2x+n}+\dfrac{m}{2}$

이므로

정의역은 $\left\{x\middle|x\neq -\dfrac{n}{2}$인 실수$\right\}$,

치역은 $\left\{y\middle|y\neq \dfrac{m}{2}$인 실수$\right\}$

따라서 $-\dfrac{n}{2}=-2,\ \dfrac{m}{2}=3$이므로

$m=6,\ n=4$ $\therefore m+n=10$

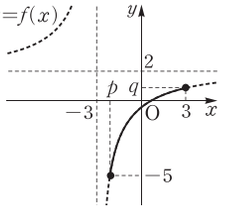
답 10

0868 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}=\dfrac{2(x+3)-7}{x+3}=-\dfrac{7}{x+3}+2$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 $y=-\dfrac{7}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $p\le x\le 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$f(p)=-5,\ f(3)=q$



$f(p)=-5$에서 $\dfrac{2p-1}{p+3}=-5$

$2p-1=-5p-15$ $\therefore p=-2$

또 $q=f(3)=\dfrac{5}{6}$이므로

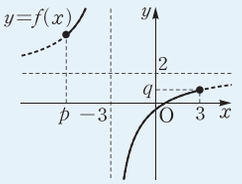
$3pq=-5$

답 ③

만점 공략 노트

$p<-3$이면 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같고 이때 치역이 $\{y\mid y\ge f(p)$ 또는 $y\le q\}$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $p>-3$에서 생각한다.



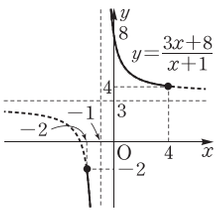
0869 $y=\dfrac{3x+8}{x+1}=\dfrac{3(x+1)+5}{x+1}=\dfrac{5}{x+1}+3$

이므로 $y=\dfrac{3x+8}{x+1}$의 그래프는 $y=\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y\le -2$ 또는 $y\ge 4$에서 $y=\dfrac{3x+8}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역은

$\{x\mid -2\le x<-1$ 또는 $-1<x\le 4\}$

즉 정의역에 속하는 정수는 -2, 0, 1, 2, 3, 4의 6개이다.



답 6

0870 $f(x)=\dfrac{px+q}{x+r}=\dfrac{p(x+r)-pr+q}{x+r}=\dfrac{-pr+q}{x+r}+p$

이므로

$A=\{x\mid x\neq -r$인 실수$\}$, $B=\{y\mid y\neq p$인 실수$\}$

이때 $p=-r$이면 두 집합 $A-B$, $B-A$가 모두 공집합이므로

$p\neq -r$

$\therefore A-B=\{p\},\ B-A=\{-r\}$

따라서 $p=4$, $r=5$이므로 $f(x)=\dfrac{4x+q}{x+5}$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2=\dfrac{4+q}{6}$ $\therefore q=8$

$\therefore p+q-r=7$

답 7

유형 168 유리함수의 그래프의 점근선 → 본책 171쪽

(1) 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=q$

(2) 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (ad-bc\neq 0,\ c\neq 0)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 꼴로 변형하여 구한다.

0871 $y=\dfrac{4x}{x+2}=\dfrac{4(x+2)-8}{x+2}=-\dfrac{8}{x+2}+4$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-2,\ y=4$

$y=\dfrac{ax+1}{x+b}=\dfrac{a(x+b)-ab+1}{x+b}=\dfrac{-ab+1}{x+b}+a$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-b,\ y=a$

따라서 $-b=-2,\ a=4$이므로 $a=4,\ b=2$

$\therefore\ ab=8$ 답 ⑤

0872 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}=\dfrac{a(x+c)-ac+b}{x+c}=\dfrac{-ac+b}{x+c}+a$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-c,\ y=a$

따라서 $-c=2,\ a=-1$이므로 $a=-1,\ c=-2$

즉 $y=\dfrac{-x+b}{x-2}$의 그래프가 점 $(4,\ 5)$를 지나므로

$5=\dfrac{-4+b}{2}$ $\therefore\ b=14$

$\therefore\ a+b+c=11$ 답 ②

다른 풀이 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2,\ y=-1$이므로 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x-2}-1\ (k\neq0)$

이라 하면 이 그래프가 점 $(4,\ 5)$를 지나므로

$5=\dfrac{k}{2}-1$ $\therefore\ k=12$

$\therefore\ y=\dfrac{12}{x-2}-1=\dfrac{12-(x-2)}{x-2}=\dfrac{-x+14}{x-2}$

따라서 $a=-1,\ b=14,\ c=-2$이므로

$a+b+c=11$

0873 $y=\dfrac{k}{x-2}+2$에 $y=0$을 대입하면

$0=\dfrac{k}{x-2}+2,$ $x-2=-\dfrac{k}{2}$ $\therefore\ x=2-\dfrac{k}{2}$

$\therefore\ \mathrm{A}\left(2-\dfrac{k}{2},\ 0\right)$

$y=\dfrac{k}{x-2}+2$에 $x=0$을 대입하면 $y=-\dfrac{k}{2}+2$

$\therefore\ \mathrm{B}\left(0,\ -\dfrac{k}{2}+2\right)$

곡선 $y=\dfrac{k}{x-2}+2$의 점근선의 방정식은 $x=2,\ y=2$이므로

$\mathrm{C}(2,\ 2)$

이때 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$\dfrac{2-0}{2-\left(2-\dfrac{k}{2}\right)}=\dfrac{2-\left(-\dfrac{k}{2}+2\right)}{2-0}$

$\dfrac{4}{k}=\dfrac{k}{4},$ $k^2=16$

$\therefore\ k=-4\ (\because\ k<0)$ 답 ④

0874 $f(x)=\dfrac{2x+k}{x-5}=\dfrac{2(x-5)+k+10}{x-5}=\dfrac{k+10}{x-5}+2$

$y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=5,\ y=2$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(5,\ 2)$ … ❶

이때 곡선 $y=g(x)$의 두 점근선의 교점은 점 $(5,\ 2)$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이므로

$(5-3,\ 2+2)$, 즉 $(2,\ 4)$ … ❷

이 점이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(2)=\dfrac{4+k}{-3}=4$ $\therefore\ k=-16$ … ❸

답 -16

단계	채점 요소	비율
❶	곡선 $y=f(x)$의 두 점근선의 교점의 좌표 구하기	40 %
❷	곡선 $y=g(x)$의 두 점근선의 교점의 좌표 구하기	30 %
❸	k의 값 구하기	30 %

0875 $y=\dfrac{2x+3}{x-k}=\dfrac{2(x-k)+2k+3}{x-k}=\dfrac{2k+3}{x-k}+2$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

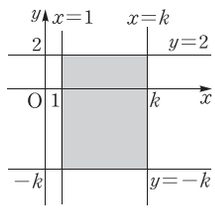
$x=k,\ y=2$

$y=\dfrac{-kx+4}{x-1}=\dfrac{-k(x-1)-k+4}{x-1}=\dfrac{-k+4}{x-1}-k$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=1,\ y=-k$

네 점근선으로 둘러싸인 도형의 넓이가 40이려면 오른쪽 그림과 같이 $k>1$이어야 하므로



$(k-1)(2+k)=40$

$k^2+k-42=0$

$(k+7)(k-6)=0$

$\therefore\ k=6\ (\because\ k>1)$ 답 ③

유형 169 유리함수의 그래프의 대칭성 본책 171쪽

유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 그래프는

(1) 점근선의 교점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이다.

(2) 점 $(p,\ q)$를 지나고 기울기가 ±1인 두 직선에 대하여 대칭이다.

0876 $f(x)=\dfrac{3x+5}{x-1}=\dfrac{3(x-1)+8}{x-1}=\dfrac{8}{x-1}+3$

이므로 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=1,\ y=3$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점근선의 교점 $(1,\ 3)$에 대하여 대칭이므로 $a=1,\ b=3$

점 $(1,\ 3)$은 직선 $y=x+c$ 위의 점이므로

$3=1+c$ $\therefore\ c=2$

$\therefore\ f(abc)=f(6)=\dfrac{23}{5}$ 답 ②

0877 주어진 함수의 그래프가 점 $(3,\ 2)$에 대하여 대칭이므로 점근선의 방정식은

$x=3,\ y=2$

따라서 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x-3}+2\ (k\neq0)$ … ❶

라 하면 이 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표가 $-\dfrac{1}{3}$이므로

$-\dfrac{1}{3}=\dfrac{k}{-3}+2$ $\therefore\ k=7$

$\therefore\ y=\dfrac{7}{x-3}+2=\dfrac{7+2(x-3)}{x-3}=\dfrac{2x+1}{x-3}$ … ❷

09 유리함수

따라서 $p=1$, $q=1$, $r=-3$이므로

$p+q+r=-1$ … ❸

답 -1

단계	채점 요소	비율
❶	$y=\frac{k}{x-a}+b$의 꼴로 함수의 식 세우기	30 %
❷	함수의 식 구하기	50 %
❸	$p+q+r$의 값 구하기	20 %

0878 $y=\frac{5x+2}{2x+4}=\frac{\frac{5}{2}(2x+4)-8}{2x+4}$

$=-\frac{8}{2x+4}+\frac{5}{2}=-\frac{4}{x+2}+\frac{5}{2}$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=\frac{5}{2}$이고 두 점근선의 교점의 좌표는 $\left(-2,\ \frac{5}{2}\right)$

기울기가 ±1이고 점 $\left(-2,\ \frac{5}{2}\right)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\pm(x+2)+\frac{5}{2}$

$\therefore\ y=x+\frac{9}{2}$ 또는 $y=-x+\frac{1}{2}$

즉 $m=1$, $n=\frac{9}{2}$ 또는 $m=-1$, $n=\frac{1}{2}$이므로

$4n^2-m^2=4\times\frac{81}{4}-1=80$

또는 $4n^2-m^2=4\times\frac{1}{4}-1=0$

따라서 $4n^2-m^2$의 값이 될 수 있는 수는 ⑤이다. 답 ⑤

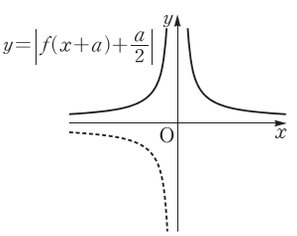
만점 공략 노트

함수 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq0)$의 그래프는 두 직선 $y=x$, $y=-x$에 대하여 각각 대칭이다. 함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 그래프는 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이므로 두 직선 $y=x$, $y=-x$를 각각 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 두 직선 $y=(x-p)+q$, $y=-(x-p)+q$에 대하여 각각 대칭이다.

0879 $y=\left|f(x+a)+\frac{a}{2}\right|$의 그래프는 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 $y=\left|f(x+a)+\frac{a}{2}\right|$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 y축에 대하여 대칭이려면

$y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=0$, $y=0$이어야 한다.



$f(x)=\frac{a}{x-8}+b$에서

$f(x+a)+\frac{a}{2}=\frac{a}{x+a-8}+b+\frac{a}{2}$

이므로 $y=f(x+a)+\frac{a}{2}$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=8-a$, $y=b+\frac{a}{2}$

이 점근선의 방정식이 $x=0$, $y=0$이어야 하므로

$8-a=0$, $b+\frac{a}{2}=0$ $\therefore\ a=8$, $b=-4$

따라서 $f(x)=\frac{8}{x-8}-4$이므로

$f(b)=f(-4)=\frac{8}{-4-8}-4=-\frac{14}{3}$ 답 ④

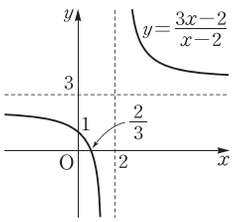
유형 170 유리함수의 그래프가 지나는 사분면 → 본책 172쪽

유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq0,\ c\neq0)$의 그래프는 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 꼴로 변형하여 그린다.

0880 $y=\frac{3x-2}{x-2}=\frac{3(x-2)+4}{x-2}=\frac{4}{x-2}+3$

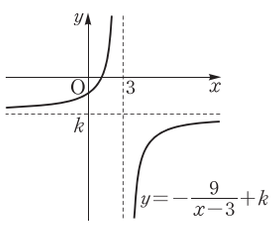
이므로 $y=\frac{3x-2}{x-2}$의 그래프는 $y=\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\frac{3x-2}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다. 답 ③



0881 $y=-\frac{9}{x-3}+k$의 그래프는 $y=-\frac{9}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

$y=-\frac{9}{x-3}+k$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $k<0$이고, $x=0$일 때 y의 값이 0보다 작거나 같아야 하므로



$3+k\leq0$ $\therefore\ k\leq-3$

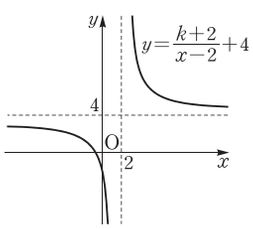
따라서 실수 k의 최댓값은 -3이다. 답 ③

0882 $y=\frac{2x+k}{x-1}=\frac{2(x-1)+k+2}{x-1}=\frac{k+2}{x-1}+2$

이므로 $y=\frac{2x+k}{x-1}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\frac{k+2}{x-2}+4$

이 그래프가 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $k+2>0$이어야 하므로

$k>-2$

(ii) $x=0$일 때 y의 값이 0보다 작아야 하므로

$\frac{k+2}{-2}+4<0$, $k+2>8$

$\therefore k>6$

(i), (ii)에서 구하는 k의 값의 범위는 $k>6$ 답 ④

유형 171 그래프를 이용하여 유리함수의 식 구하기 본책 173쪽

점근선의 방정식이 $x=p$, $y=q$이고 점 (a, b)를 지나는 유리함수의 식 구하기

➡ $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$라 하고 $x=a$, $y=b$를 대입하여 k의 값을 구한다.

0883 주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=3$이므로 함수의 식을

$y=\frac{k}{x-1}+3\ (k<0)$

이라 하면 이 그래프가 점 $(2, 0)$을 지나므로

$0=k+3$ $\therefore k=-3$

$\therefore y=-\frac{3}{x-1}+3=\frac{-3+3(x-1)}{x-1}=\frac{3x-6}{x-1}$

따라서 $a=3$, $b=-6$, $c=-1$이므로

$a-b+c=8$ 답 ⑤

0884 주어진 그래프에서 정의역이 $\{x|x\neq-3$인 실수$\}$이므로

$p=-3$ … ❶

또 점근선의 방정식이 $x=-3$, $y=0$이므로 함수의 식을

$y=\frac{k}{x+3}\ (k>0)$

라 하면 이 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=\frac{k}{3}$ $\therefore k=3$ $\therefore y=\frac{3}{x+3}$

따라서 $q=0$, $r=3$, $s=3$이므로 … ❷

$p+q+r+s=3$ … ❸

답 3

단계	채점 요소	비율
❶	p의 값 구하기	20 %
❷	q, r, s의 값 구하기	70 %
❸	$p+q+r+s$의 값 구하기	10 %

0885 $y=\frac{p}{x+q}+r$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-q$, $y=r$

이므로 주어진 그래프에서 $q>0$, $r>0$

또 $y=\frac{p}{x}$의 그래프가 제 2 사분면과 제 4 사분면을 지나므로

$p<0$

① $p<0$, $q>0$이므로 $pq<0$

② $q>0$, $r>0$이므로 $qr>0$

③ $r>0$, $p<0$이므로 $r-p>0$

④ $y=\frac{p}{x+q}+r$의 그래프가 원점을 지나므로

$\frac{p}{q}+r=0$, $p+qr=0$ $\therefore p=-qr$

⑤ $\frac{p}{q}<0$, $\frac{q}{r}>0$이므로 $\frac{p}{q}-\frac{q}{r}<0$

따라서 옳은 것은 ④이다. 답 ④

유형 172 유리함수의 그래프의 성질 본책 173쪽

유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 그래프

(1) $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

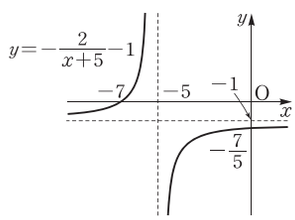
(2) 정의역: $\{x|x\neq p$인 실수$\}$, 치역: $\{y|y\neq q$인 실수$\}$

(3) 점근선의 방정식: $x=p$, $y=q$

(4) 점 (p, q)에 대하여 대칭이다.

0886 ㄴ. $y=-\frac{2}{x+5}-1$의 그래프는 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다. (거짓)

ㄹ. $y=-\frac{2}{x+5}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 1 사분면을 지나지 않는다. (참)



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ④

0887 $y=\frac{4x-4}{x-3}=\frac{4(x-3)+8}{x-3}=\frac{8}{x-3}+4$

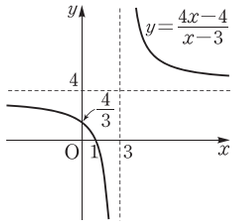
② 그래프의 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=4$이므로 그래프는 점 $(3, 4)$에 대하여 대칭이다.

③ $y=\frac{4x-4}{x-3}$에 $y=0$을 대입하면

$0=\frac{4x-4}{x-3}$, $4x-4=0$ $\therefore x=1$

즉 그래프와 x축의 교점의 좌표는 $(1, 0)$이다.

④ $y=\frac{4x-4}{x-3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.



⑤ $y=\frac{-2x+6}{x+1}=\frac{-2(x+1)+8}{x+1}=\frac{8}{x+1}-2$

이므로 $y=\frac{4x-4}{x-3}$의 그래프는 평행이동에 의하여 $y=\frac{-2x+6}{x+1}$의 그래프와 겹쳐진다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

0888 ㄱ. $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 방정식은 $x=4$, $y=4$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(4, 4)$이다. (참)

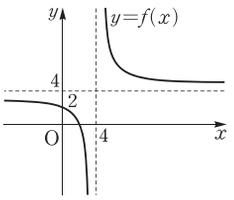
09 유리함수

ㄴ. $y=f(x)$의 그래프는 점 $(4, 4)$를 지나고 기울기가 1인 직선, 즉 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. [반례] $a=8$이면

$f(0)=-2+4=2$

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다. (거짓)



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

참고 ㄷ. $y=f(x)$의 그래프가 모든 사분면을 지나려면

$f(0)=-\frac{a}{4}+4<0$ $\therefore a>16$

유형 173 유리함수의 최대·최소 → 본책 174쪽

주어진 정의역에서 유리함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후 최댓값과 최솟값을 구한다.

0889 $y=\frac{3x-5}{x-2}=\frac{3(x-2)+1}{x-2}=\frac{1}{x-2}+3$

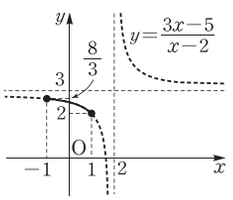
이므로 $y=\frac{3x-5}{x-2}$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x\le 1$에서 $y=\frac{3x-5}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=-1$일 때 최댓값 $\frac{8}{3}$,

$x=1$일 때 최솟값 2

를 갖는다.



즉 $M=\frac{8}{3}$, $m=2$이므로

$3Mm=16$

답 ②

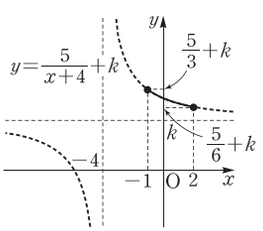
0890 $y=\frac{5}{x+4}+k$의 그래프는 $y=\frac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x\le 2$에서 $y=\frac{5}{x+4}+k$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=-1$일 때 최댓값 $\frac{5}{3}+k$,

$x=2$일 때 최솟값 $\frac{5}{6}+k$

를 갖는다.



이때 최댓값과 최솟값의 합이 5이므로

$\left(\frac{5}{3}+k\right)+\left(\frac{5}{6}+k\right)=5$, $2k=\frac{5}{2}$

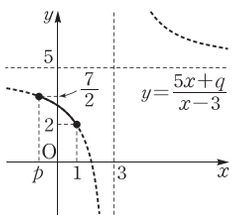
$\therefore k=\frac{5}{4}$

답 ③

0891 $y=\frac{5x+q}{x-3}=\frac{5(x-3)+q+15}{x-3}=\frac{q+15}{x-3}+5$

이므로 $y=\frac{5x+q}{x-3}$의 그래프는 $y=\frac{q+15}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

이때 $p\le x\le 1$에서 최댓값이 $\frac{7}{2}$로 5보다 작으므로 $y=\frac{5x+q}{x-3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$x=1$일 때 최솟값 2를 가지므로

$\frac{5+q}{-2}=2$ $\therefore q=-9$

$\therefore y=\frac{5x-9}{x-3}$

$x=p$일 때 최댓값 $\frac{7}{2}$을 가지므로

$\frac{7}{2}=\frac{5p-9}{p-3}$, $10p-18=7p-21$

$3p=-3$ $\therefore p=-1$

$\therefore p-q=8$

답 ⑤

유형 174 유리함수의 그래프와 직선의 위치 관계 → 본책 174쪽

유리함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 위치 관계에 대한 문제는

(1) $f(x)=g(x)$를 변형한 방정식이 이차방정식이면 판별식을 이용한다.

(2) 유리함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리고 주어진 조건을 만족시키도록 직선 $y=g(x)$를 움직여 본다.

0892 함수 $y=\frac{3x-4}{x+2}$의 그래프와 직선 $y=ax+3$이 한 점에서 만나려면 방정식

$\frac{3x-4}{x+2}=ax+3$, 즉 $ax^2+2ax+10=0$

이 중근을 가져야 한다.

$a\ne 0$이므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-10a=0$

$a(a-10)=0$ $\therefore a=10$ ($\because a>0$)

답 ⑤

0893 $n(A\cap B)=0$이므로 함수 $y=\frac{2x+5}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=kx+2$가 만나지 않는다.

따라서 방정식

$\frac{2x+5}{x-1}=kx+2$, 즉 $kx^2-kx-7=0$

이 실근을 갖지 않아야 한다.

(i) $k=0$일 때

$0\times x^2-0\times x-7\neq 0$에서 실근을 갖지 않으므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $k\neq 0$일 때

이차방정식 $kx^2-kx-7=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2+28k<0$

$k^2+28k<0$, $k(k+28)<0$

$\therefore -28<k<0$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 k의 값의 범위는

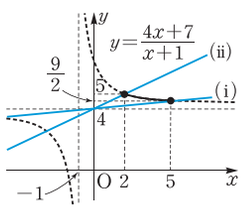
$-28<k\leq 0$ 답 $-28<k\leq 0$

만점 공략 노트

함수 $y=\frac{2x+5}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=kx+2$가 만나지 않는 경우에는 $k=0$인 경우도 있으므로 빠뜨리지 않도록 주의한다.

0894 $y=\frac{4x+7}{x+1}=\frac{4(x+1)+3}{x+1}=\frac{3}{x+1}+4$

이므로 $2\leq x\leq 5$에서 $y=\frac{4x+7}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=mx+4$는 m의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 4)$를 지난다. … ❶



(i) 직선 $y=mx+4$가 점 $\left(5, \frac{9}{2}\right)$를 지날 때

$\frac{9}{2}=5m+4$ $\therefore m=\frac{1}{10}$

(ii) 직선 $y=mx+4$가 점 $(2, 5)$를 지날 때

$5=2m+4$ $\therefore m=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 m의 값의 범위는

$\frac{1}{10}\leq m\leq\frac{1}{2}$ … ❷

따라서 m의 최댓값은 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 $\frac{1}{10}$이므로 구하는 합은

$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$ … ❸

답 $\frac{3}{5}$

단계	채점 요소	비율
❶	함수 $y=\frac{4x+7}{x+1}$의 그래프를 그리고, 직선 $y=mx+4$가 항상 지나는 점의 좌표 구하기	40 %
❷	m의 값의 범위 구하기	40 %
❸	m의 최댓값과 최솟값의 합 구하기	20 %

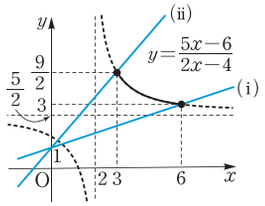
0895 $y=\frac{5x-6}{2x-4}$이라 하면

$y=\frac{5x-6}{2x-4}=\frac{\frac{5}{2}(2x-4)+4}{2x-4}$

$=\frac{4}{2x-4}+\frac{5}{2}=\frac{2}{x-2}+\frac{5}{2}$

이므로 $3\leq x\leq 6$에서 $y=\frac{5x-6}{2x-4}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 두 직선 $y=ax+1$, $y=bx+1$은 a, b의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 1)$을 지난다.



(i) 직선 $y=ax+1$이 점 $(6, 3)$을 지날 때

$3=6a+1$ $\therefore a=\frac{1}{3}$

따라서 $ax+1\leq\frac{5x-6}{2x-4}$이려면 $a\leq\frac{1}{3}$

(ii) 직선 $y=bx+1$이 점 $\left(3, \frac{9}{2}\right)$를 지날 때

$\frac{9}{2}=3b+1$ $\therefore b=\frac{7}{6}$

따라서 $\frac{5x-6}{2x-4}\leq bx+1$이려면 $b\geq\frac{7}{6}$

(i), (ii)에서 $M=\frac{1}{3}$, $m=\frac{7}{6}$이므로

$3M+6m=1+7=8$ 답 8

유형 175 유리함수의 그래프의 활용 본책 175쪽

유리함수의 그래프와 직선의 교점으로 이루어진 도형의 넓이는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 유리함수의 그래프 위의 점의 좌표를 한 문자로 나타낸다.

(ii) 도형의 변의 길이, 높이를 그 문자에 대한 식으로 나타낸 후 도형의 넓이를 구한다.

0896 $\mathrm{P}\left(a, \frac{3}{a}\right)$ $(a>0)$이라 하면 두 점 P, Q는 원점에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{Q}\left(-a, -\frac{3}{a}\right)$ $\therefore \mathrm{R}\left(a, -\frac{3}{a}\right)$

따라서 $\overline{\mathrm{QR}}=a-(-a)=2a$, $\overline{\mathrm{PR}}=\frac{3}{a}-\left(-\frac{3}{a}\right)=\frac{6}{a}$이므로

$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\times 2a\times\frac{6}{a}=6$ 답 6

만점 공략 노트

유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$ $(k\neq 0)$의 그래프는 두 점근선 $x=p$, $y=q$의 교점 (p, q)에 대하여 대칭이므로 점 (p, q)를 지나는 직선이 유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나면 두 교점은 항상 점 (p, q)에 대하여 대칭이다.

0897 $\mathrm{P}(a, a)$, $\mathrm{Q}(b, -b)$ $(a>0, b>0)$라 하자.

$a=\frac{3a}{4a-7}$에서 $a>0$이므로

$4a-7=3$ $\therefore a=\frac{5}{2}$

즉 $\mathrm{P}\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$이므로 정사각형 OAPB의 한 변의 길이는 $\frac{5}{2}$이다.

또 $-b=\frac{3b}{4b-7}$에서 $b>0$이므로

$-4b+7=3 \quad \therefore b=1$

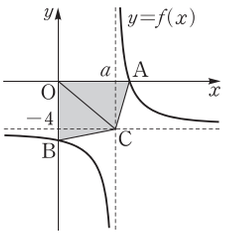
즉 Q$(1, -1)$이므로 정사각형 ODQC의 한 변의 길이는 1이다.

따라서 두 정사각형 OAPB와 ODQC의 넓이의 비는

$\left(\frac{5}{2}\right)^2 : 1^2 = 25 : 4$

즉 $m=25$, $n=4$이므로 $\quad m+n=29$ 답 29

0898 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



점 A는 y좌표가 0이므로

$0=\frac{4}{x-a}-4$

$\frac{4}{x-a}=4, \quad x-a=1$

$\therefore x=a+1$

$\therefore$ A$(a+1, 0)$

점 B는 x좌표가 0이므로 $\quad \mathrm{B}\left(0, -\frac{4}{a}-4\right)$

점 C는 두 점근선 $x=a$, $y=-4$가 만나는 점이므로

C$(a, -4)$

이때 사각형 OBCA의 넓이는 삼각형 OBC의 넓이와 삼각형 OCA의 넓이의 합과 같으므로

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{a}+4\right)\times a+\frac{1}{2}\times(a+1)\times 4=24$

$4a+4=24 \quad \therefore a=5$ 답 ⑤

0899 A$\left(a, \frac{1}{a}\right)$ $(a>0)$이라 하면 점 B의 y좌표가 $\frac{1}{a}$이므로

$\frac{1}{a}=\frac{k}{x} \quad \therefore x=ak \quad \therefore \mathrm{B}\left(ak, \frac{1}{a}\right)$

또 점 C의 x좌표가 a이므로 $\quad \mathrm{C}\left(a, \frac{k}{a}\right)$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=ak-a=a(k-1), \ \overline{\mathrm{AC}}=\frac{k}{a}-\frac{1}{a}=\frac{k-1}{a}$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 8이므로

$\frac{1}{2}\times a(k-1)\times\frac{k-1}{a}=8$

$(k-1)^2=16, \quad k-1=\pm 4$

$\therefore k=5$ ($\because k>1$) 답 5

유형 176 유리함수에서 산술평균과 기하평균의 관계 → 본책 175쪽

유리함수의 그래프에서 길이, 거리의 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 유리함수의 그래프 위의 점의 좌표를 한 문자로 나타낸 후 도형의 변의 길이 또는 넓이를 그 문자에 대한 식으로 나타낸다.

(ii) 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

➔ $a>0$, $b>0$일 때,

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

0900 P$\left(k, \frac{9}{k-1}+2\right)$ $(k>1)$라 하면

Q$(k, 2)$, R$\left(1, \frac{9}{k-1}+2\right)$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=\left(\frac{9}{k-1}+2\right)-2=\frac{9}{k-1}, \ \overline{\mathrm{PR}}=k-1$

이때 $k>1$에서 $k-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}=\frac{9}{k-1}+k-1$

$\geq 2\sqrt{\frac{9}{k-1}\times(k-1)}$

$=2\times 3=6$ (단, 등호는 $\frac{9}{k-1}=k-1$일 때 성립)

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}$의 최솟값은 6이다. 답 6

0901 $y=\frac{3x-4}{x+2}=\frac{3(x+2)-10}{x+2}=-\frac{10}{x+2}+3$

이므로 P$\left(t, -\frac{10}{t+2}+3\right)$ $(t\neq -2)$이라 하자. … ❶

원의 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(t+2)^2+\left(-\frac{10}{t+2}\right)^2}$

$=\sqrt{(t+2)^2+\frac{100}{(t+2)^2}}$ … ❷

이때 $t\neq -2$에서 $(t+2)^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$(t+2)^2+\frac{100}{(t+2)^2}\geq 2\sqrt{(t+2)^2\times\frac{100}{(t+2)^2}}$

$=2\times 10=20$

(단, 등호는 $(t+2)^2=\frac{100}{(t+2)^2}$일 때 성립)

따라서 원의 넓이가 최소일 때의 반지름의 길이는 $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$이다. … ❸

답 $2\sqrt{5}$

단계	채점 요소	비율
❶	점 P의 좌표를 한 문자로 나타내기	30 %
❷	원의 반지름의 길이를 한 문자로 나타내기	30 %
❸	원의 넓이가 최소일 때의 반지름의 길이 구하기	40 %

0902 P$\left(a, \frac{3}{a-2}+4\right)$ $(a>2)$라 하면 점 P와 직선 $y=-x+6$, 즉 $x+y-6=0$ 사이의 거리는

$\frac{\left|a+\frac{3}{a-2}+4-6\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\left|a-2+\frac{3}{a-2}\right|}{\sqrt{2}}$

이때 $a>2$에서 $a-2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a-2+\frac{3}{a-2}\geq 2\sqrt{(a-2)\times\frac{3}{a-2}}$

$=2\sqrt{3}$ (단, 등호는 $a-2=\frac{3}{a-2}$일 때 성립)

따라서 점 P와 직선 $y=-x+6$ 사이의 거리의 최솟값은

$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}$ 답 ②

만점 공략 노트

직선 $y=-x+6$은 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점 $(2,\ 4)$를 지나므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=-x+6$에 대하여 대칭이다. 따라서 $x>2$인 경우만 생각해도 된다.

유형 177 유리함수의 합성

본책 176쪽

유리함수 f에 대하여 $f^1=f$, $f^{n+1}=f\circ f^n$ (n은 자연수)일 때, $f^n(a)$의 값 구하기

[방법 1] $f^1(x)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$, …를 직접 구하여 $f^n(x)$를 추정한 후 x 대신 a를 대입한다.

[방법 2] $f^1(a)$, $f^2(a)$, $f^3(a)$, …의 값을 직접 구하여 규칙을 찾아 $f^n(a)$의 값을 추정한다.

0903 $f^1(x)=f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$에서

$$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f^1(x))=f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$
$$=\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}=x$$
$$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f(x)=\frac{x+1}{x-1}$$
$$\vdots$$

즉 $f^n(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1} & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$이므로 $\quad f^{99}(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

$\therefore\ 2f^{99}(5)=2\times\dfrac{5+1}{5-1}=3$ 답 ③

다른 풀이 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$에서

$$f^1(5)=f(5)=\frac{3}{2}$$
$$f^2(5)=(f\circ f^1)(5)=f(f^1(5))=f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}=5$$
$$f^3(5)=(f\circ f^2)(5)=f(f^2(5))=f(5)=\frac{3}{2}$$
$$\vdots$$

즉 $f^n(5)$의 값은 $\dfrac{3}{2}$, 5가 이 순서대로 반복된다.

이때 $99=2\times49+1$이므로 $\quad f^{99}(5)=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ 2f^{99}(5)=2\times\dfrac{3}{2}=3$

0904 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$이므로

$$g(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$$
$$=\frac{2\times\frac{2x+1}{x-3}+1}{\frac{2x+1}{x-3}-3}=\frac{\frac{5x-1}{x-3}}{\frac{-x+10}{x-3}}=\frac{-5x+1}{x-10}$$
$$=\frac{-5(x-10)-49}{x-10}=-\frac{49}{x-10}-5$$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=10$, $y=-5$이므로

$a=10$, $b=-5$ $\quad\therefore\ a+b=5$ 답 ⑤

0905 $f^1(x)=f(x)=\dfrac{x}{1-2x}$에서

$$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f^1(x))=f\left(\frac{x}{1-2x}\right)$$
$$=\frac{\frac{x}{1-2x}}{1-2\times\frac{x}{1-2x}}=\frac{\frac{x}{1-2x}}{\frac{1-4x}{1-2x}}=\frac{x}{1-4x}$$
$$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f\left(\frac{x}{1-4x}\right)$$
$$=\frac{\frac{x}{1-4x}}{1-2\times\frac{x}{1-4x}}=\frac{\frac{x}{1-4x}}{\frac{1-6x}{1-4x}}=\frac{x}{1-6x}$$
$$\vdots$$

즉 $f^n(x)=\dfrac{x}{1-2nx}$ (n은 자연수)이므로 … ❶

$f^{12}(x)=\dfrac{x}{1-24x}$

따라서 $p=1$, $q=0$, $r=-24$이므로 … ❷

$p-q-r=25$ … ❸

답 25

단계	채점 요소	비율
❶	$f^n(x)$ 구하기	70 %
❷	p, q, r의 값 구하기	20 %
❸	$p-q-r$의 값 구하기	10 %

0906 $f^1(x)=\dfrac{x-1}{x}$에서

$$f^2(x)=f^1(f^1(x))=f^1\left(\frac{x-1}{x}\right)$$
$$=\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}=\frac{1}{1-x}$$
$$f^3(x)=f^1(f^2(x))=f^1\left(\frac{1}{1-x}\right)$$
$$=\frac{\frac{1}{1-x}-1}{\frac{1}{1-x}}=x$$
$$f^4(x)=f^1(f^3(x))=f^1(x)=\frac{x-1}{x}$$
$$\vdots$$

즉 음이 아닌 정수 k에 대하여

$$f^n(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x} & (n=3k+1)\\ \dfrac{1}{1-x} & (n=3k+2)\\ x & (n=3k+3)\end{cases}$$

이때 $2343=3\times780+3$이므로 $\quad f^{2343}(x)=x$

$\therefore\ f^{2343}(a)=a=9$ 답 9

0907 주어진 그래프에서

$f^1(7)=f(7)=0$

$f^2(7)=(f\circ f^1)(7)=f(f^1(7))=f(0)=7$

$f^3(7)=(f\circ f^2)(7)=f(f^2(7))=f(7)=0$

$\vdots$

즉 $f^n(7)$의 값은 0, 7이 이 순서대로 반복된다.

이때 $4321=2\times2160+1$이므로

$f^{4321}(7)=f^1(7)=0$ 답 0

다른 풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=4$, $y=4$이므로

$f(x)=\dfrac{a}{x-4}+4\ (a<0)$

라 하면 이 그래프가 점 $(0, 7)$을 지나므로

$7=\dfrac{a}{-4}+4 \quad \therefore a=-12$

$\therefore f(x)=-\dfrac{12}{x-4}+4$

$f^1(x)=f(x)=-\dfrac{12}{x-4}+4$에서

$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f^1(x))=f\left(-\dfrac{12}{x-4}+4\right)$

$=-\dfrac{12}{-\dfrac{12}{x-4}+4-4}=x$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f(x)$

$=-\dfrac{12}{x-4}+4$

$\vdots$

즉 $f^n(x)=\begin{cases}-\dfrac{12}{x-4}+4 & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$이므로

$f^{4321}(x)=-\dfrac{12}{x-4}+4$

$\therefore f^{4321}(7)=0$

유형 178 유리함수의 역함수 → 본책 177쪽

유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (ad-bc\neq0,\ c\neq0)$의 역함수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) x를 y에 대한 식으로 나타낸다. ➡ $x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$

(ii) x와 y를 서로 바꾼다. ➡ $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$ ← a, d의 부호와 위치가 바뀐다.

0908 $y=\dfrac{3-x}{x+p}$라 하면 $y(x+p)=3-x$

$(y+1)x=-py+3 \quad \therefore x=\dfrac{-py+3}{y+1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{-px+3}{x+1}$

즉 $f^{-1}(x)=\dfrac{-px+3}{x+1}$이므로

$-p=4,\ 3=q,\ 1=r \quad \therefore p=-4,\ q=3,\ r=1$

$\therefore p+q+r=0$ 답 ③

0909 두 함수 $y=\dfrac{2x-1}{x+4}$, $y=\dfrac{px+q}{x-2}$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수는 서로 역함수 관계이다. … ❶

$y=\dfrac{2x-1}{x+4}$에서 $y(x+4)=2x-1$

$(y-2)x=-4y-1 \quad \therefore x=\dfrac{-4y-1}{y-2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{-4x-1}{x-2}$ … ❷

따라서 $\dfrac{px+q}{x-2}=\dfrac{-4x-1}{x-2}$이므로

$p=-4,\ q=-1 \quad \therefore q-p=3$ … ❸

답 3

단계	채점 요소	비율
❶	주어진 두 함수가 서로 역함수 관계임을 알기	30 %
❷	$y=\frac{2x-1}{x+4}$의 역함수 구하기	50 %
❸	$q-p$의 값 구하기	20 %

0910 $y=\dfrac{4x+7}{ax+b}$이라 하면 $y(ax+b)=4x+7$

$(ay-4)x=-by+7 \quad \therefore x=\dfrac{-by+7}{ay-4}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{-bx+7}{ax-4}$

즉 $f^{-1}(x)=\dfrac{-bx+7}{ax-4}$이고 $f=f^{-1}$이므로

$\dfrac{4x+7}{ax+b}=\dfrac{-bx+7}{ax-4} \quad \therefore b=-4$

따라서 $y=f(x)$의 그래프의 한 점근선의 방정식은

$y=-4$

$f(x)=\dfrac{4x+7}{ax-4}=\dfrac{\frac{4}{a}(ax-4)+\frac{16}{a}+7}{ax-4}$

$=\dfrac{\frac{16}{a}+7}{ax-4}+\dfrac{4}{a}$

이므로 $\dfrac{4}{a}=-4 \quad \therefore a=-1$

$\therefore a-b=3$ 답 3

다른 풀이 $f(x)=\dfrac{4x+7}{ax+b}=\dfrac{\frac{4}{a}(ax+b)-\frac{4b}{a}+7}{ax+b}$

$=\dfrac{-\frac{4b}{a}+7}{ax+b}+\dfrac{4}{a}$

이므로 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\dfrac{b}{a},\ y=\dfrac{4}{a}$ …… ㉠

이때 $f=f^{-1}$에서 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 한 점근선의 방정식이 $y=b$이므로 점근선의 방정식은

$x=b,\ y=b$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-\dfrac{b}{a}=b,\ \dfrac{4}{a}=b$

즉 $ab=4=-b$이므로 $a=-1,\ b=-4$

0911 조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=3$과 만나는 점의 개수와 직선 $y=-3$과 만나는 점의 개수의 합은 1이다.
곡선 $y=f(x)$가 x축과 평행한 직선과 만나는 점의 개수는 점근선을 제외하면 모두 1이므로 두 직선 $y=3$, $y=-3$ 중 하나는 곡선 $y=f(x)$의 점근선이다.
이때 곡선 $y=f(x)$의 한 점근선의 방정식이 $y=b$이므로

$b=3$ 또는 $b=-3$ …… ㉠

한편 $y=\frac{a}{x}+b$라 하면

$\frac{a}{x}=y-b$ $\therefore x=\frac{a}{y-b}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{a}{x-b}$

즉 $f^{-1}(x)=\frac{a}{x-b}$이고 조건 (나)에서 $f^{-1}(3)=f(3)-1$이므로

$\frac{a}{3-b}=\frac{a}{3}+b-1$ …… ㉡

㉡에서 $b\neq3$이므로 ㉠에서 $b=-3$
㉡에 $b=-3$을 대입하면

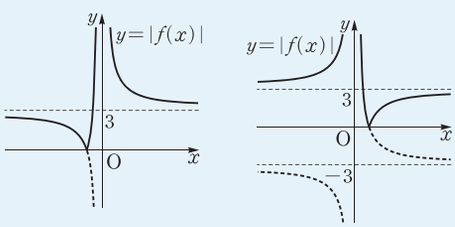
$\frac{a}{6}=\frac{a}{3}-4$, $\frac{a}{6}=4$ $\therefore a=24$

따라서 $f(x)=\frac{24}{x}-3$이므로

$f(12)=-1$ 답 ①

만점 공략 노트

$f(x)=\frac{a}{x}+b$ $(a>0)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=0$, $y=b$이므로 조건 (가)를 만족시키도록 $y=|f(x)|$의 그래프를 그려 보면 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 $b=3$ 또는 $b=-3$임을 알 수 있다.

유형 179 유리함수의 합성함수와 역함수 본책 177쪽

(1) 두 유리함수 f, g의 역함수가 각각 f^{-1}, g^{-1}일 때
① $(f^{-1})^{-1}=f$
② $(f^{-1}\circ f)(x)=x$, $(f\circ f^{-1})(y)=y$
③ $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$
(2) $f^{-1}(a)=b$이면 $f(b)=a$이다.

0912 $(f\circ f^{-1})(4)+(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(3)=4+f^{-1}(3)$
$f^{-1}(3)=k$라 하면 $f(k)=3$이므로

$\frac{2k+5}{k+1}=3$, $2k+5=3k+3$ $\therefore k=2$

$\therefore (f\circ f^{-1})(4)+(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(3)$
$=4+f^{-1}(3)=4+2=6$ 답 ④

0913 $h=f\circ(g\circ f)^{-1}=f\circ f^{-1}\circ g^{-1}=g^{-1}$
즉 함수 h는 함수 g의 역함수이므로 $h(2)=k$라 하면 $g(k)=2$에서

$\frac{3k-1}{k+2}=2$, $3k-1=2k+4$
$\therefore k=5$
$\therefore h(2)=5$ 답 ②

0914 $g(2)=4$에서 $f(4)=2$이므로

$\frac{4p-2}{4q+1}=2$, $4p-2=8q+2$
$4p-8q=4$ $\therefore p-2q=1$ …… ㉠

$(f\circ f)(4)=f(f(4))=f(2)=\frac{4}{3}$이므로

$\frac{2p-2}{2q+1}=\frac{4}{3}$, $6p-6=8q+4$
$6p-8q=10$ $\therefore 3p-4q=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=3$, $q=1$
$\therefore f(x)=\frac{3x-2}{x+1}$

$g(4)=k$라 하면 $f(k)=4$이므로

$\frac{3k-2}{k+1}=4$, $3k-2=4k+4$
$\therefore k=-6$

$g(-6)=t$라 하면 $f(t)=-6$이므로

$\frac{3t-2}{t+1}=-6$, $3t-2=-6t-6$
$\therefore t=-\frac{4}{9}$

$\therefore (g\circ g)(4)=g(g(4))=g(-6)=-\frac{4}{9}$ 답 ③

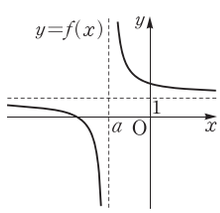
1등급 유형 도전하기 본책 178~179쪽

0915 Step 1 $f(x)=\frac{k}{x-p}+q$의 꼴로 변형하고 점근선의 방정식을 구한다.

(2) $f(x)=\frac{x+2a-b}{x-a}=\frac{(x-a)+3a-b}{x-a}=\frac{3a-b}{x-a}+1$
이므로 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은
$x=a$, $y=1$

Step 2 $3a-b>0$, $3a-b<0$으로 경우를 나누어 a의 값의 범위를 나타낸다.

(i) $3a-b>0$, 즉 $a>\frac{b}{3}$일 때
$y=f(x)$의 그래프가 제 4 사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

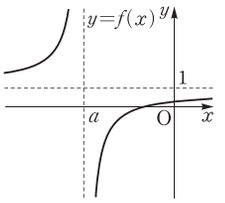


$a\leq0$
그런데 $a>\frac{b}{3}$이므로
$\frac{b}{3}<a\leq0$

09 유리함수

(ii) $3a-b<0$, 즉 $a<\frac{b}{3}$일 때

$y=f(x)$의 그래프가 제 4 사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$a<0$, $f(0)\ge 0$

$f(0)=\frac{2a-b}{-a}=-2+\frac{b}{a}$이므로

$-2+\frac{b}{a}\ge 0$, $\quad b-2a\le 0$ ($\because a<0$)

$\therefore a\ge\frac{b}{2}$

그런데 $a<\frac{b}{3}$이므로

$\frac{b}{2}\le a<\frac{b}{3}$

(i), (ii)에서 $\quad \frac{b}{2}\le a<\frac{b}{3}$ 또는 $\frac{b}{3}<a\le 0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

Step 3 $\frac{b}{3}$가 정수일 때와 정수가 아닐 때로 경우를 나누어 정수 b의 값을 구한다.

(iii) $\frac{b}{3}$가 정수일 때

$\frac{b}{2}\le a\le 0$을 만족시키는 정수 a가 5개이면 ㉠을 만족시키는 정수 a는 그중 $\frac{b}{3}$에 해당하는 정수를 제외한 4개가 된다.

즉 $-5<\frac{b}{2}\le -4$이어야 하므로

$-10<b\le -8$

이때 $\frac{b}{3}$가 정수이어야 하므로

$b=-9$

(iv) $\frac{b}{3}$가 정수가 아닐 때

$\frac{b}{2}\le a\le 0$을 만족시키는 정수 a가 4개이면 ㉠을 만족시키는 정수 a도 4개가 된다.

즉 $-4<\frac{b}{2}\le -3$이어야 하므로

$-8<b\le -6$

이때 $\frac{b}{3}$가 정수가 아니어야 하므로

$b=-7$

(iii), (iv)에서 모든 정수 b의 값의 합은

$-9+(-7)=-16$

답 (1) $\le$, $\ge$, $<$, $>$, $\ge$ (2) -16

0916 Step 1 $\alpha+\beta$를 γ에 대한 식으로 나타낸다.

점 $\mathrm{P}(\alpha, \beta)$가 $f(x)=\frac{2x-1}{2x-2}$ $(x>1)$의 그래프 위의 점이므로

$\beta=\frac{2\alpha-1}{2\alpha-2}$, $\quad \beta(2\alpha-2)=2\alpha-1$

$\therefore 2\alpha\beta-2\alpha-2\beta+1=0$

$\therefore (\alpha+\beta-1)^2=\alpha^2+\beta^2+1+2\alpha\beta-2\alpha-2\beta$

$=\alpha^2+\beta^2$

이때 $\gamma=\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$이므로

$\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$, 즉 $(\alpha+\beta-1)^2=\gamma^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

그런데 $\alpha>1$이고 $\beta=\frac{2\alpha-1}{2\alpha-2}=1+\frac{1}{2(\alpha-1)}>1$이므로

$\alpha+\beta-1>0$

따라서 ㉡에서 $\alpha+\beta-1=\gamma$이므로

$\alpha+\beta=$ [(가) $\gamma+1$] $\quad\cdots\cdots$ ㉢

Step 2 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이를 γ에 대한 식으로 나타내어 $g(\gamma)$를 구한다.

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=(\alpha-2)^2+(\beta-2)^2=\alpha^2+\beta^2-4(\alpha+\beta)+8$

$=\gamma^2-4(\gamma+1)+8=\gamma^2-4\gamma+4$

$=($ [(나) $\gamma-2$] $)^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

이때 $\beta=1+\frac{1}{2(\alpha-1)}$에서

$\beta-1=\frac{1}{2(\alpha-1)}$, $\quad (\alpha-1)(\beta-1)=\frac{1}{2}$

$\alpha>1$, $\beta>1$에서 $\alpha-1>0$, $\beta-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$(\alpha-1)+(\beta-1)\ge 2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

(단, 등호는 $\alpha-1=\beta-1$, 즉 $\alpha=\beta$일 때 성립)

㉢에서 $\gamma-2=\alpha+\beta-3=(\alpha-1)+(\beta-1)-1$이므로

[(나) $\gamma-2$] $\ge\sqrt{2}-1>0$

㉣에서 $\quad \overline{\mathrm{PQ}}=$ [(나) $\gamma-2$] $\quad\therefore g(\gamma)=$ [(나) $\gamma-2$]

Step 3 $f(x)=g(x)$의 해를 구하여 $h_1(a)+h_2(a)$의 값을 구한다.

$f(x)=g(x)$, 즉 $\frac{2x-1}{2x-2}=x-2$에서

$2x-1=(x-2)(2x-2)$, $\quad 2x^2-8x+5=0$

$\therefore x=$ [(다) $\frac{4+\sqrt{6}}{2}$] ($\because x>1$)

따라서 $h_1(\gamma)=\gamma+1$, $h_2(\gamma)=\gamma-2$이고 $a=\frac{4+\sqrt{6}}{2}$이므로

$h_1(a)+h_2(a)=2a-1=3+\sqrt{6}$ $\quad$ 답 $3+\sqrt{6}$

논리 Check

함수 $f(x)=\frac{x+4}{x-4}$ $(x>8)$의 그래프 위의 한 점 $\mathrm{P}(\alpha, \beta)$와 두 점 $\mathrm{Q}(8, 5)$, $\mathrm{R}(0, -3)$에 대하여 $\overline{\mathrm{RP}}=\gamma$, $g(\gamma)=\overline{\mathrm{PQ}}$라 하자. 방정식 $f(x)=g(x)$의 해를 a라 할 때, $2a-13$의 값을 구하시오.

풀이 점 $\mathrm{P}(\alpha, \beta)$가 $f(x)=\frac{x+4}{x-4}$ $(x>8)$의 그래프 위의 점이므로

$\beta=\frac{\alpha+4}{\alpha-4}$, $\quad \beta(\alpha-4)=\alpha+4$

$\therefore \alpha\beta-\alpha-4\beta-4=0$

$\therefore (\alpha+\beta-1)^2=\alpha^2+\beta^2+1+2\alpha\beta-2\alpha-2\beta$

$=\alpha^2+\beta^2+2(\alpha\beta-\alpha-4\beta-4)+6\beta+9$

$=\alpha^2+\beta^2+6\beta+9=\alpha^2+(\beta+3)^2$

이때 $\gamma=\overline{RP}=\sqrt{\alpha^2+(\beta+3)^2}$이므로

$\alpha^2+(\beta+3)^2=\gamma^2$, 즉 $(\alpha+\beta-1)^2=\gamma^2$

그런데 $\alpha>8$이고 $\beta=\frac{\alpha+4}{\alpha-4}=1+\frac{8}{\alpha-4}>1$이므로

$\alpha+\beta-1>0$

$\therefore \alpha+\beta-1=\gamma$, 즉 $\alpha+\beta=\gamma+1$

$\overline{PQ}^2=(\alpha-8)^2+(\beta-5)^2$

$=\alpha^2+\beta^2-16\alpha-10\beta+89$

$=\alpha^2+(\beta^2+6\beta+9)-16(\alpha+\beta)+80$

$=\gamma^2-16(\gamma+1)+80$

$=\gamma^2-16\gamma+64=(\gamma-8)^2$

이때 $\alpha>8$, $\beta>1$이므로

$\gamma=\alpha+\beta-1>8$

$\therefore \overline{PQ}=\gamma-8$

$\therefore g(\gamma)=\gamma-8$

$f(x)=g(x)$, 즉 $\frac{x+4}{x-4}=x-8$에서

$x+4=(x-8)(x-4)$

$x^2-13x+28=0$

$\therefore x=\frac{13+\sqrt{57}}{2}$ ($\because x>8$)

따라서 $a=\frac{13+\sqrt{57}}{2}$이므로

$2a-13=2\times\frac{13+\sqrt{57}}{2}-13=\sqrt{57}$ 답 $\sqrt{57}$

0917 Step 1 $f(n)$을 구한다.

집합 $A_n\triangle B_n$의 원소의 최솟값은 집합 A_n의 원소 n^2+4n+3과 집합 B_n의 원소 $2n^2+3$ 중 작은 값이다.

$n^2+4n+3-(2n^2+3)=-n^2+4n=-n(n-4)$에서

$n>4$이면 $-n(n-4)<0$이므로

$n^2+4n+3<2n^2+3$

즉 $n>4$에서 $f(n)=n^2+4n+3$

Step 2 $\frac{1}{f(n)}$을 부분분수로 변형한다.

$\therefore \frac{1}{f(n)}=\frac{1}{n^2+4n+3}$

$=\frac{1}{(n+1)(n+3)}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$

Step 3 $70S$의 값을 구한다.

$\therefore S=\frac{1}{f(5)}+\frac{1}{f(6)}+\frac{1}{f(7)}+\cdots+\frac{1}{f(12)}$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)+\cdots\right.$

$\left.+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{14}\right)+\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{14}-\frac{1}{15}\right)$

$=\frac{3}{35}$

$\therefore 70S=6$ 답 6

0918 Step 1 a, b의 값을 구한다.

$f(x)=\frac{bx+c}{x+a}=\frac{b(x+a)-ab+c}{x+a}=\frac{-ab+c}{x+a}+b$

이므로 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a$, $y=b$

따라서 주어진 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(-a, b)$에 대하여 대칭이다.

이때 이 그래프가 두 직선 $y=x-10$, $y=-x+4$에 대하여 각각 대칭이므로 두 직선의 교점의 좌표가 $(-a, b)$이다.

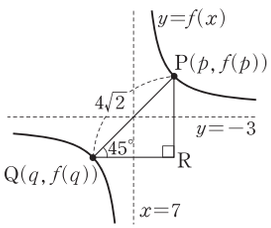
즉 $b=-a-10$, $b=a+4$이므로

$a=-7$, $b=-3$

$\therefore f(x)=\frac{-3x+c}{x-7}$

Step 2 c의 값을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x-10$의 두 교점을 $P(p, f(p))$, $Q(q, f(q))$라 하고 점 P를 지나고 y축에 평행한 직선과 점 Q를 지나고 x축에 평행한 직선이 만나는 점을 R라 하자.



이때 $\overline{QR}=4\sqrt{2}\cos 45^\circ=4$이므로

$p-q=4$ ····· ㉠

$\overline{PQ}$의 중점이 점 $(7, -3)$이므로

$\frac{p+q}{2}=7$

$\therefore p+q=14$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$p=9$, $q=5$

또 $\overline{PR}=4\sqrt{2}\sin 45^\circ=4$이므로

$f(9)-f(5)=\frac{-27+c}{2}-\frac{-15+c}{-2}=4$

$2c-42=8$

$\therefore c=25$

Step 3 $f(3)+2f(a+b+c)$의 값을 구한다.

따라서 $f(x)=\frac{-3x+25}{x-7}$, $a+b+c=15$이므로

$f(3)+2f(a+b+c)=f(3)+2f(15)$

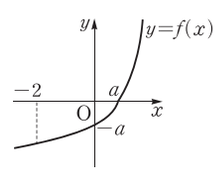
$=-4+2\times\left(-\frac{5}{2}\right)=-9$ 답 -9

0919 Step 1 조건 (가)를 만족시키는 a의 값을 구한다.

조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$는 $x\le 0$에서 $x=-2$일 때 최댓값을 가져야 한다.

(i) $0\le a<1$일 때

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

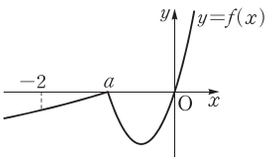


이때 $f(-2)<f(0)$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $-2<a<0$일 때

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

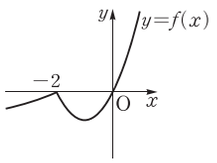
이때 $f(-2)<f(a)$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.



(iii) $a=-2$일 때

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

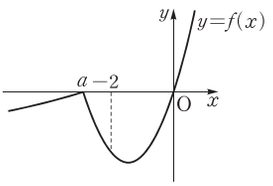
이때 $x\le 0$에서 $f(x)\le f(-2)$이므로 조건 (가)를 만족시킨다.



(iv) $a<-2$일 때

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

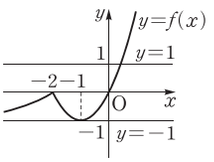
이때 $f(-2)<f(a)$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.



이상에서 $a=-2$

Step 2 조건 (나)를 만족시키는 b의 값을 구한다.

방정식 $|f(x)|=1$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=-1$, $y=1$의 교점의 개수의 합과 같으므로 실근이 2개가 되려면 오른쪽 그림과 같이 $y=bx(x+2)$의 그래프가 직선 $y=-1$에 접해야 한다.



이때 $y=bx(x+2)=b(x+1)^2-b$이므로

$-b=-1$ $\therefore b=1$

Step 3 $a+b$의 값을 구한다.

$\therefore a+b=-1$ 답 -1

참고 직선 $y=-1$은 유리함수 $y=-\frac{3}{x-1}-1$의 그래프의 점근선이므로 두 그래프의 교점은 존재하지 않는다.

0920 Step 1 네 점 A, B, C, D의 좌표를 a, k에 대한 식으로 나타낸다.

세 점 A, B, C의 y좌표가 a이므로

$\frac{1}{x}=a$에서 $x=\frac{1}{a}$ $\therefore \mathrm{A}\left(\frac{1}{a}, a\right)$

$\frac{2}{x}=a$에서 $x=\frac{2}{a}$ $\therefore \mathrm{B}\left(\frac{2}{a}, a\right)$

$\frac{k}{x}=a$에서 $x=\frac{k}{a}$ $\therefore \mathrm{C}\left(\frac{k}{a}, a\right)$

점 D의 x좌표가 $\frac{1}{a}$이므로 $\mathrm{D}\left(\frac{1}{a}, ak\right)$

Step 2 S_1, S_2를 k에 대한 식으로 나타낸다.

$\overline{\mathrm{AC}}=\frac{k}{a}-\frac{1}{a}=\frac{k-1}{a}$, $\overline{\mathrm{AD}}=ak-a=a(k-1)$이므로

$S_1=\frac{1}{2}\times\frac{k-1}{a}\times a(k-1)=\frac{1}{2}(k-1)^2$

$S_2=S_1+\triangle\mathrm{OAD}+\triangle\mathrm{OCA}$

$=\frac{1}{2}(k-1)^2+\frac{1}{2}\times a(k-1)\times\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\times\frac{k-1}{a}\times a$

$=\frac{1}{2}(k^2-1)$

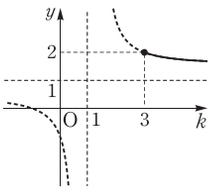
Step 3 $\frac{S_2}{S_1}$의 값이 최대가 되는 k의 값을 구한다.

$\therefore \frac{S_2}{S_1}=\frac{k^2-1}{(k-1)^2}=\frac{(k+1)(k-1)}{(k-1)^2}=\frac{k+1}{k-1}$ $(k\ge 3)$

$y=\frac{k+1}{k-1}$ $(k\ge 3)$이라 하면

$y=\frac{k+1}{k-1}=\frac{2}{k-1}+1$

이므로 $k\ge 3$에서 $y=\frac{k+1}{k-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $\frac{S_2}{S_1}$는 $k=3$일 때 최댓값을 갖는다.

Step 4 $\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BC}}}$의 값을 구한다.

$k=3$일 때, $\overline{\mathrm{AC}}=\frac{k-1}{a}=\frac{2}{a}$, $\overline{\mathrm{BC}}=\frac{k-2}{a}=\frac{1}{a}$이므로

$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\frac{\frac{2}{a}}{\frac{1}{a}}=2$ 답 2

시험 만점 완성하기

본책 180~183쪽

0921 전략 분모를 통분하여 분자끼리 계산한다.

$$\frac{x-3}{x^2-2x}-\frac{x-4}{x^2-4}=\frac{x-3}{x(x-2)}-\frac{x-4}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\frac{(x-3)(x+2)-x(x-4)}{x(x-2)(x+2)}$$
$$=\frac{(x^2-x-6)-(x^2-4x)}{x(x-2)(x+2)}$$
$$=\frac{3x-6}{x(x-2)(x+2)}$$
$$=\frac{3(x-2)}{x(x-2)(x+2)}$$
$$=\frac{3}{x(x+2)}$$

답 ③

0922 전략 우변의 분모를 통분하여 정리한 후 동류항의 계수를 비교한다.

주어진 등식의 우변의 분모를 통분하면

$$\frac{ax+b}{x^2-3}+\frac{c}{x+2}=\frac{(ax+b)(x+2)+c(x^2-3)}{(x^2-3)(x+2)}$$
$$=\frac{(a+c)x^2+(2a+b)x+2b-3c}{(x^2-3)(x+2)}$$

즉 $\frac{7x^2+3x-20}{(x^2-3)(x+2)}=\frac{(a+c)x^2+(2a+b)x+2b-3c}{(x^2-3)(x+2)}$가 x에 대한 항등식이므로

$a+c=7$ …… ㉠

$2a+b=3$ …… ㉡

$2b-3c=-20$ …… ㉢

㉡−㉠×2를 하면 $b-2c=-11$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $b=-7$, $c=2$

㉠에 $c=2$를 대입하면 $a+2=7$ $\therefore a=5$

$\therefore a-b-c=10$ 답 ①

0923 전략 $f(x)$를 부분분수로 변형하여 나타낸다.

$$f(x)=\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\cdots+\frac{1}{(x+701)(x+702)}$$
$$=\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x+701}-\frac{1}{x+702}\right)$$
$$=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+702}$$
$$=\frac{700}{(x+2)(x+702)}$$
$$\therefore f(98)=\frac{700}{100\times800}=\frac{7}{800}$$

답 ④

0924 전략 먼저 $x+\frac{1}{x}$의 값을 구한 후 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=11+2=13$이므로

$$x+\frac{1}{x}=\sqrt{13}\ (\because x>0)$$
$$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=(\sqrt{13})^3-3\times\sqrt{13}$$
$$=10\sqrt{13}$$

답 ⑤

0925 전략 등식의 양변을 같은 양수로 나누어도 등식이 성립함을 이용하여 $pr-qs=0$을 변형해 본다.

ㄱ. $pr-qs=0$에서 $pr=qs$이므로 양변을 qr로 나누면

$$\frac{p}{q}=\frac{s}{r}\ (\text{참})$$

ㄴ. ㄱ에서 $\frac{p}{q}=\frac{s}{r}=k\,(k>0)$라 하면 $p=qk$, $s=rk$이므로

$$\frac{q^2+r^2}{pq+rs}=\frac{q^2+r^2}{qk\times q+r\times rk}=\frac{q^2+r^2}{k(q^2+r^2)}=\frac{1}{k}$$
$$\frac{2qr}{pr+qs}=\frac{2qr}{qk\times r+q\times rk}=\frac{2qr}{2qrk}=\frac{1}{k}$$
$$\therefore \frac{q^2+r^2}{pq+rs}=\frac{2qr}{pr+qs}\ (\text{참})$$

ㄷ. ㄴ에서 $p=qk$, $s=rk$이므로

$$\frac{p^3+s^3}{q^3+r^3}=\frac{q^3k^3+r^3k^3}{q^3+r^3}=\frac{(q^3+r^3)k^3}{q^3+r^3}=k^3$$
$$\frac{(p+s)^3}{(q+r)^3}=\frac{(qk+rk)^3}{(q+r)^3}=\frac{(q+r)^3k^3}{(q+r)^3}=k^3$$
$$\therefore \frac{p^3+s^3}{q^3+r^3}=\frac{(p+s)^3}{(q+r)^3}\ (\text{참})$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0926 전략 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 꼴로 변형하여 정의역, 치역을 구한다.

$$y=\frac{(a+1)x-2}{x-5}=\frac{(a+1)(x-5)+5a+3}{x-5}=\frac{5a+3}{x-5}+a+1$$

이므로

정의역은 $\{x\,|\,x\neq5$인 실수$\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\neq a+1$인 실수$\}$

이때 정의역과 치역이 같으므로

$$a+1=5 \qquad \therefore a=4$$

답 ④

0927 전략 $y=\frac{k}{x-p}+q$의 그래프는 두 점근선의 교점 $(p,\ q)$를 지나고 기울기가 ±1인 두 직선에 대하여 대칭임을 이용한다.

$$y=\frac{3x-5}{x-4}=\frac{3(x-4)+7}{x-4}=\frac{7}{x-4}+3$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=4,\ y=3$$

따라서 주어진 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(4,\ 3)$을 지나고 기울기가 ±1인 두 직선에 대하여 각각 대칭이다.

기울기가 1이고 점 $(4,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=(x-4)+3 \qquad \therefore y=x-1$$

기울기가 -1이고 점 $(4,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

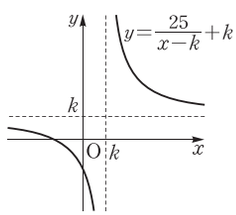
$$y=-(x-4)+3 \qquad \therefore y=-x+7$$
$$\therefore a+b+c+d=1+(-1)+(-1)+7=6$$

답 ①

0928 전략 $k>0$일 때 $y=\frac{25}{x-k}+k$의 그래프의 개형을 그려 본다.

$y=\frac{25}{x-k}+k$의 그래프는 $y=\frac{25}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

이때 $k>0$에서 $y=\frac{25}{x-k}+k$의 그래프가 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$일 때 y의 값이 0보다 작아야 하므로



$$-\frac{25}{k}+k<0$$

$k>0$이므로 부등식의 양변에 k를 곱하면

$$-25+k^2<0, \qquad k^2<25$$
$$\therefore 0<k<5\ (\because k>0)$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

답 ④

0929 전략 $y=\frac{k}{x}$의 그래프는 $k>0$일 때 제1, 3사분면을 지나고, $k<0$일 때 제2, 4사분면을 지남을 이용한다.

$y=\frac{p}{x}$, $y=\frac{q}{x}$의 그래프는 제2사분면을 지나므로

$$p<0,\ q<0$$

이때 $y=\frac{p}{x}$의 그래프가 $y=\frac{q}{x}$의 그래프보다 원점으로부터 멀리 떨어져 있으므로

$$|p|>|q| \qquad \therefore p<q<0$$

$y=\frac{r}{x}$, $y=\frac{s}{x}$의 그래프는 제1사분면을 지나므로

$$r>0,\ s>0$$

이때 $y=\frac{r}{x}$의 그래프가 $y=\frac{s}{x}$의 그래프보다 원점으로부터 멀리 떨어져 있으므로

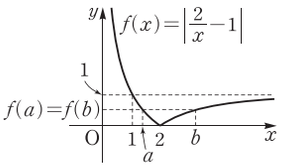
$$|r|>|s| \qquad \therefore 0<s<r$$
$$\therefore p<q<s<r$$

답 ②

0930 전략 주어진 그래프에서 $f(a)=f(b)$임을 이용하여 a, b의 값의 범위를 생각해 본다.

$0<a<b$인 두 실수 a, b에 대하여 $f(a)=f(b)$가 성립하므로 오른쪽 그림과 같이

$a<2<b$



ㄱ. $x>2$일 때 $0<f(x)<1$이므로

$0<f(b)<1$ (참)

ㄴ. $\left|\frac{2}{x}-1\right|=1$에서 $x=1$이므로 $1<a<2$ (거짓)

ㄷ. $f(a)=\left|\frac{2}{a}-1\right|=\frac{2}{a}-1$,

$f(b)=\left|\frac{2}{b}-1\right|=1-\frac{2}{b}$

$f(a)=f(b)$이므로 $\frac{2}{a}-1=1-\frac{2}{b}$

$\frac{2}{a}+\frac{2}{b}=2$ $\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0931 전략 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표를 이용하여 함수의 식을 $f(x)=\frac{k}{x-p}+q$의 꼴로 나타내어 본다.

조건 (가)에서 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표가 $(4, 2)$이므로

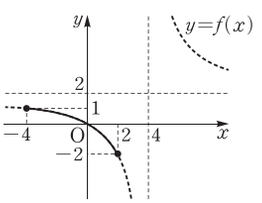
$f(x)=\frac{k}{x-4}+2$ $(k\neq 0)$

라 하면 조건 (나)에서 이 그래프가 점 $\left(-2, \frac{2}{3}\right)$를 지나므로

$\frac{2}{3}=\frac{k}{-6}+2$ $\therefore k=8$

$\therefore f(x)=\frac{8}{x-4}+2$

$-4\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-4$일 때 최댓값 1,

$x=2$일 때 최솟값 -2

를 갖는다.

따라서 구하는 곱은 $1\times(-2)=-2$ 답 ②

0932 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 만나지 않으려면 $f(x)=g(x)$를 변형한 이차방정식이 실근을 갖지 않아야 함을 이용한다.

함수 $y=\frac{3x-5}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 만나지 않으려면 방정식

$\frac{3x-5}{x-1}=2x+k$, 즉 $2x^2+(k-5)x-k+5=0$

이 실근을 갖지 않아야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(k-5)^2-4\times 2\times(-k+5)<0$

$k^2-2k-15<0$, $(k+3)(k-5)<0$

$\therefore -3<k<5$

따라서 조건을 만족시키는 정수 k의 최댓값은 4이다. 답 ④

0933 전략 $f^2(x)$, $f^3(x)$, …를 구하여 $f^n(x)$를 추정한다.

$f^1(x)=f(x)=\frac{2x+3}{x-2}$에서

$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f^1(x))$

$=f\left(\frac{2x+3}{x-2}\right)$

$=\frac{2\times\frac{2x+3}{x-2}+3}{\frac{2x+3}{x-2}-2}$

$=\frac{\frac{7x}{x-2}}{\frac{7}{x-2}}=x$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f(x)$

$=\frac{2x+3}{x-2}$

⋮

즉 $f^n(x)=\begin{cases}\frac{2x+3}{x-2} & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$이므로

$f^{3021}(x)=\frac{2x+3}{x-2}$

따라서 $f^{3021}(k)=\frac{2k+3}{k-2}=3$에서

$2k+3=3k-6$ $\therefore k=9$ 답 ③

0934 전략 $f^{-1}(a)=b$이면 $f(b)=a$임을 이용한다.

$g^{-1}(2)=k$라 하면 $g(k)=2$

$(g\circ f)(x)=\frac{x+5}{2x-1}$에서

$g(f(x))=\frac{x+5}{2x-1}=2$

$x+5=4x-2$ $\therefore x=\frac{7}{3}$

즉 $g\left(f\left(\frac{7}{3}\right)\right)=2$이므로

$k=f\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{2\times\frac{7}{3}-3}{\frac{7}{3}+1}=\frac{1}{2}$

$\therefore g^{-1}(2)=\frac{1}{2}$ 답 ③

0935 전략 $f(n)$을 부분분수로 변형한다.

$\frac{6}{n(n+1)(n+2)}=\frac{p}{n(n+1)}-\frac{q}{(n+1)(n+2)}$

$=\frac{p(n+2)-qn}{n(n+1)(n+2)}$

$=\frac{(p-q)n+2p}{n(n+1)(n+2)}$ (p, q는 상수)

라 할 때, 위의 등식은 n에 대한 항등식이므로

$p-q=0$, $2p=6$

$\therefore p=3$, $q=3$

즉 $f(n)=\frac{3}{n(n+1)}-\frac{3}{(n+1)(n+2)}$이므로

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(8)$$
$$=3\left\{\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)+\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{8\times9}-\frac{1}{9\times10}\right)\right\}$$
$$=3\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{9\times10}\right)$$
$$=3\times\frac{44}{90}=\frac{22}{15}$$

따라서 $a=15$, $b=22$이므로

$a+b=37$ 답 37

다른 풀이 $f(n)=\dfrac{6}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{6}{n+1}\times\dfrac{1}{n(n+2)}$

$$=\frac{6}{n+1}\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=3\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

만점 공략 노트

분모가 세 식의 곱인 경우의 부분분수는 다음과 같이 변형한다.

$$\frac{1}{ABC}=\frac{1}{B}\times\frac{1}{AC}=\frac{1}{B}\times\frac{1}{C-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{C}\right)$$
$$=\frac{1}{C-A}\left(\frac{1}{AB}-\frac{1}{BC}\right)$$

0936 전략 $a:b:c$의 비를 구하고, 비례상수 k를 이용하여 각 문자를 k에 대한 식으로 나타낸다.

$a:b=5:3$, $b:c=3:2$이므로

$a:b:c=5:3:2$

$a=5k$, $b=3k$, $c=2k$ $(k\neq0)$라 하면

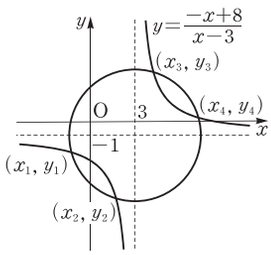
$$\frac{abc}{a^3+b^3+c^3-abc}$$
$$=\frac{5k\times3k\times2k}{(5k)^3+(3k)^3+(2k)^3-5k\times3k\times2k}$$
$$=\frac{30k^3}{125k^3+27k^3+8k^3-30k^3}$$
$$=\frac{30k^3}{130k^3}=\frac{3}{13}$$ 답 $\frac{3}{13}$

0937 전략 유리함수의 그래프가 두 점근선의 교점에 대하여 대칭임을 이용한다.

$$y=\frac{-x+8}{x-3}=\frac{-(x-3)+5}{x-3}=\frac{5}{x-3}-1$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은 $x=3$, $y=-1$이고, 두 점근선의 교점의 좌표는 $(3,\ -1)$

따라서 중심이 점 $(3,\ -1)$인 원과 유리함수 $y=\dfrac{-x+8}{x-3}$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 $y=\dfrac{-x+8}{x-3}$의 그래프와 원은 모두 점 $(3,\ -1)$에 대하여 대칭이므로 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_4,\ y_4)$와 두 점 $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$도 각각 점 $(3,\ -1)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $\dfrac{x_1+x_4}{2}=3$, $\dfrac{y_2+y_3}{2}=-1$이므로

$x_1+x_4=6$, $y_2+y_3=-2$

$\therefore\ \dfrac{x_1+x_4}{y_2+y_3}=\dfrac{6}{-2}=-3$ 답 -3

0938 전략 점근선의 방정식을 a, b에 대한 식으로 나타낸 후 주어진 그래프를 이용하여 a, b의 부호를 구한다.

$$y=\frac{ax-2}{x+b}=\frac{a(x+b)-ab-2}{x+b}=\frac{-ab-2}{x+b}+a$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-b$, $y=a$

주어진 그래프에서 $-b>0$, $a>0$

$\therefore\ a>0,\ b<0$ ····· ㉠

또 $y=\dfrac{-ab-2}{x}$의 그래프가 제2, 4사분면을 지나므로

$-ab-2<0$ ····· ㉡

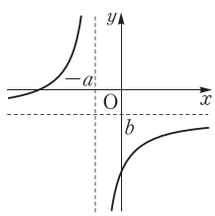
$$y=\frac{bx-5}{x+a}=\frac{b(x+a)-ab-5}{x+a}=\frac{-ab-5}{x+a}+b$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-a$, $y=b$

이때 ㉠에서 $-a<0$, $b<0$

또 ㉡에서 $-ab-5<0$

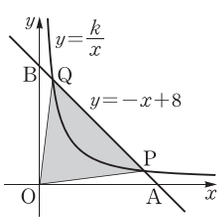
따라서 $y=\dfrac{bx-5}{x+a}$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제2, 3, 4사분면을 지난다.



답 제2, 3, 4사분면

0939 전략 두 점 P, Q가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-x+8$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면



A$(8,\ 0)$, B$(0,\ 8)$

$\therefore\ \triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times8\times8=32$

함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프와 직선 $y=-x+8$은 모두 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\triangle OAP=\triangle OBQ$

삼각형 OPQ의 넓이가 28이므로

$$\triangle OAP=\triangle OBQ=\frac{1}{2}\times(32-28)=2$$

P$(a,\ b)$라 하면 $\triangle OAP=\dfrac{1}{2}\times8\times b=4b$이므로

$4b=2$ $\therefore\ b=\dfrac{1}{2}$

점 P$\left(a,\ \dfrac{1}{2}\right)$이 직선 $y=-x+8$ 위의 점이므로

$\dfrac{1}{2}=-a+8$ $\therefore\ a=\dfrac{15}{2}$

점 P$\left(\dfrac{15}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$은 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$\frac{1}{2}=\frac{k}{\frac{15}{2}}$ $\therefore k=\frac{15}{4}$ 답 $\frac{15}{4}$

다른 풀이 $\overline{AP}:\overline{PQ}:\overline{QB}=\triangle OAP:\triangle OPQ:\triangle OBQ$
$=2:28:2=1:14:1$

따라서 점 P는 선분 AB를 1 : 15로 내분하는 점이므로

$P\left(\frac{1\times0+15\times8}{1+15}, \frac{1\times8+15\times0}{1+15}\right)$

$\therefore P\left(\frac{15}{2}, \frac{1}{2}\right)$

0940 전략 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점과 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

$f(x)=\frac{4x+b}{x-a}=\frac{4(x-a)+4a+b}{x-a}=\frac{4a+b}{x-a}+4$

이므로 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=4$이고, 두 점근선의 교점의 좌표는 $(a, 4)$이다.

이때 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a, 4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 $(4, a)$이다.

또 $y=f(x-5)-5$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이므로 두 점근선의 교점의 좌표는

$(a+5, 4-5)$, 즉 $(a+5, -1)$

조건 (가)에서 이 점이 점 $(4, a)$와 같으므로

$a=-1$

한편 $y=f(x)$의 그래프는 $y=\frac{4a+b}{x}$의 그래프를 평행이동한 것이므로 조건 (나)에서

$4a+b=7$, $-4+b=7$ $\therefore b=11$

$\therefore a+b=10$ 답 10

다른 풀이 $y=\frac{4x+b}{x-a}$라 하면 $y(x-a)=4x+b$

$(y-4)x=ay+b$ $\therefore x=\frac{ay+b}{y-4}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{ax+b}{x-4}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{ax+b}{x-4}$

$f(x-5)-5=\frac{4(x-5)+b}{x-5-a}-5$

$=\frac{4(x-5)+b-5(x-5-a)}{x-5-a}$

$=\frac{-x+5a+b+5}{x-5-a}$

이고 조건 (가)에서

$\frac{ax+b}{x-4}=\frac{-x+5a+b+5}{x-5-a}$

$\therefore a=-1$

따라서 $f(x)=\frac{4x+b}{x+1}=\frac{4(x+1)+b-4}{x+1}=\frac{b-4}{x+1}+4$이므로

조건 (나)에서 $b-4=7$

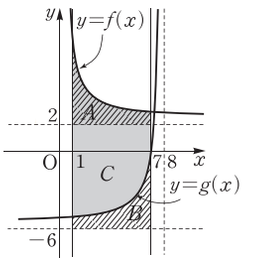
$\therefore b=11$

$\therefore a+b=10$

0941 전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 그리고 넓이가 같은 부분을 찾아본다.

$y=\frac{6}{x}+2$의 그래프는 $y=\frac{6}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

또 $y=\frac{6}{8-x}-6$의 그래프는 $y=\frac{6}{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 8만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. … ❶

위의 그림에서

(A의 넓이)=(B의 넓이) … ❷

이므로 구하는 넓이는

(A의 넓이)+(C의 넓이)=(B의 넓이)+(C의 넓이)

$=(7-1)\times\{2-(-6)\}$

$=6\times8=48$ … ❸

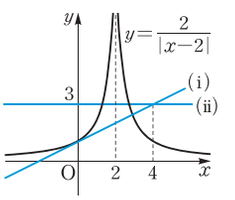
답 48

단계	채점 요소	배점
❶	두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프 그리기	2점
❷	(A의 넓이)=(B의 넓이)임을 알기	1점
❸	도형의 넓이 구하기	1점

0942 전략 $y=\frac{2}{|x-2|}$의 그래프를 그리고 주어진 조건을 만족시키도록 직선 $y=ax-4a+3$을 움직여 본다.

$y=\frac{2}{|x-2|}=\begin{cases}\frac{2}{x-2} & (x>2)\\ -\frac{2}{x-2} & (x<2)\end{cases}$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 직선 $y=ax-4a+3$, 즉 $y=a(x-4)+3$은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(4, 3)$을 지난다. … ❶

(i) $y=-\frac{2}{x-2}$의 그래프와 직선 $y=ax-4a+3$이 접할 때

$-\frac{2}{x-2}=ax-4a+3$, 즉 $ax^2-(6a-3)x+8a-4=0$이 중근을 가져야 한다.

$a\neq0$이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(6a-3)\}^2-4a(8a-4)=0$

$4a^2-20a+9=0$

$(2a-1)(2a-9)=0$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{9}{2}$

이때 직선 $y=ax-4a+3$의 y절편은 0보다 크므로

$a=\frac{1}{2}$ $\left(\because a<\frac{3}{4}\right)$

(ii) 직선 $y=ax-4a+3$이 x축에 평행할 때

$a=0$ … ❷

(i), (ii)에서 모든 a의 값의 합은

$\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$ … ❸

답 $\frac{1}{2}$

단계	채점 요소	배점
❶	$y=\frac{2}{\lvert x-2\rvert}$의 그래프를 그리고, 직선 $y=ax-4a+3$이 항상 지나는 점의 좌표 구하기	2점
❷	a의 값 구하기	2점
❸	모든 a의 값의 합 구하기	1점

0943 전략 두 점 P, Q가 함수 $y=\frac{8}{x}$의 그래프 위의 점임을 이용하여 좌표를 정한다.

$\mathrm{P}\left(a,\ \frac{8}{a}\right)$, $\mathrm{Q}\left(-b,\ -\frac{8}{b}\right)$ $(a>0,\ b>0)$이라 하면

$\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}\left(0,\ \frac{8}{a}\right)$, $\mathrm{C}(-b,\ 0)$, $\mathrm{D}\left(0,\ -\frac{8}{b}\right)$ … ❶

육각형 APBCQD의 넓이를 S라 하면

$S=\square\mathrm{OAPB}+\square\mathrm{OCQD}+\triangle\mathrm{OBC}+\triangle\mathrm{ODA}$

$=a\times\frac{8}{a}+b\times\frac{8}{b}+\frac{1}{2}\times b\times\frac{8}{a}+\frac{1}{2}\times a\times\frac{8}{b}$

$=16+4\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$ … ❷

이때 $a>0$, $b>0$에서 $\frac{b}{a}>0$, $\frac{a}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$16+4\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geq16+4\times2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}$

$=16+4\times2=24$

$\left(\text{단, 등호는 }\frac{b}{a}=\frac{a}{b}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 육각형 APBCQD의 넓이의 최솟값은 24이다. … ❸

답 24

단계	채점 요소	배점
❶	두 점 P, Q의 좌표를 정하고 네 점 A, B, C, D의 좌표 나타내기	1점
❷	육각형 APBCQD의 넓이 나타내기	1점
❸	육각형 APBCQD의 넓이의 최솟값 구하기	2점

0944 전략 $(g\circ f)(k)=1$을 만족시키는 $f(k)$의 조건을 생각해 본다.

$f(x)=\frac{6x+24}{3x-2}$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\text{가 정수인 경우})\\ 0 & (x\text{가 정수가 아닌 경우})\end{cases}$에서

$(g\circ f)(k)=g(f(k))=1$이므로 $f(k)$는 정수이어야 한다. … ❶

$f(k)=\frac{6k+24}{3k-2}=\frac{2(3k-2)+28}{3k-2}=\frac{28}{3k-2}+2$

이므로 $f(k)$가 정수이려면 $\frac{28}{3k-2}$이 정수이어야 한다.

자연수 k에 대하여 $3k-2$는 자연수이므로 $3k-2$는 28의 양의 약수이다. 즉 … ❷

$3k-2=1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 14,\ 28$

$3k=3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 16,\ 30$

$\therefore\ k=1,\ \frac{4}{3},\ 2,\ 3,\ \frac{16}{3},\ 10$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 k는

$1,\ 2,\ 3,\ 10$ … ❸

이므로 $a=4$, $b=16$

$\therefore\ a+b=20$ … ❹

답 20

단계	채점 요소	배점
❶	$(g\circ f)(k)=1$이려면 $f(k)$가 정수이어야 함을 알기	1점
❷	$3k-2$가 28의 양의 약수임을 알기	1점
❸	자연수 k의 값 구하기	1점
❹	$a+b$의 값 구하기	1점

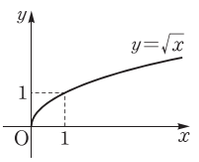
10 무리함수

셀프 CHECK → 본책 184쪽

A 답 (1) $x\geq -1$ (2) $-3\leq x\leq 2$ (3) $-\frac{1}{4}\leq x<5$

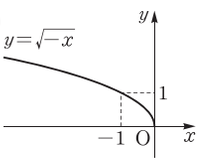
B 답 ㄴ, ㄷ

C 답 (1)



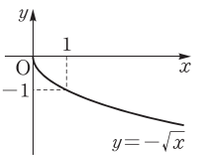
정의역: $\{x|x\geq 0\}$
치역: $\{y|y\geq 0\}$

(2)



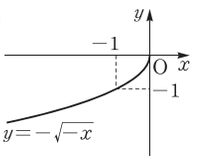
정의역: $\{x|x\leq 0\}$
치역: $\{y|y\geq 0\}$

(3)



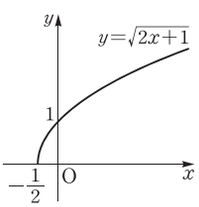
정의역: $\{x|x\geq 0\}$
치역: $\{y|y\leq 0\}$

(4)



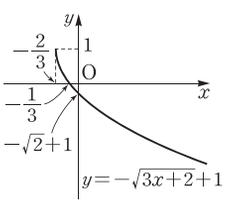
정의역: $\{x|x\leq 0\}$
치역: $\{y|y\leq 0\}$

D 답 (1)



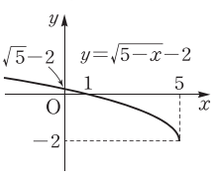
정의역: $\left\{x\middle|x\geq -\frac{1}{2}\right\}$
치역: $\{y|y\geq 0\}$

(2)



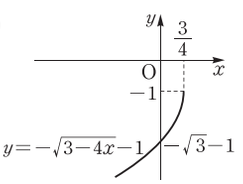
정의역: $\left\{x\middle|x\geq -\frac{2}{3}\right\}$
치역: $\{y|y\leq 1\}$

(3)



정의역: $\{x|x\leq 5\}$
치역: $\{y|y\geq -2\}$

(4)



정의역: $\left\{x\middle|x\leq \frac{3}{4}\right\}$
치역: $\{y|y\leq -1\}$

내신유형 다지기 → 본책 185~193쪽

유형 180 무리식의 값이 실수가 되기 위한 조건 → 본책 185쪽

(1) $\sqrt{A}$의 값이 실수이려면 $A\geq 0$

(2) $\frac{1}{\sqrt{A}}$의 값이 실수이려면 $A>0$

0945 $3x^2-10x-8\geq 0$이므로
$(3x+2)(x-4)\geq 0$
$\therefore x\leq -\frac{2}{3}$ 또는 $x\geq 4$ 답 $x\leq -\frac{2}{3}$ 또는 $x\geq 4$

0946 $9-x^2\geq 0$이므로 $x^2-9\leq 0$
$(x+3)(x-3)\leq 0$ $\therefore -3\leq x\leq 3$ …… ㉠
$x+2>0$이므로 $x>-2$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $-2<x\leq 3$
따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다. 답 ③

0947 $x+1\geq 0$이므로 $x\geq -1$ …… ㉠
$4-x>0$이므로 $x<4$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $-1\leq x<4$ … ❶
$-1\leq x<4$일 때, $x-5<0$, $3x-13<0$이므로
$\sqrt{x^2-10x+25}-|3x-13|=\sqrt{(x-5)^2}-|3x-13|$
$=-(x-5)+(3x-13)$
$=2x-8$ … ❷
답 $2x-8$

단계	채점 요소	비율
❶	x의 값의 범위 구하기	50 %
❷	주어진 식 간단히 하기	50 %

0948 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{ax^2-2ax+6}$의 값이 실수이려면 $ax^2-2ax+6\geq 0$이어야 한다.
(i) $a=0$일 때
$ax^2-2ax+6=6>0$이므로 $\sqrt{ax^2-2ax+6}$의 값은 실수이다.
(ii) $a\neq 0$일 때
모든 실수 x에 대하여 $ax^2-2ax+6\geq 0$이려면
$a>0$ …… ㉠
이차방정식 $ax^2-2ax+6=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-a)^2-a\times 6\leq 0$
$a(a-6)\leq 0$ $\therefore 0\leq a\leq 6$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $0<a\leq 6$
(i), (ii)에서 $0\leq a\leq 6$
따라서 실수 a의 최댓값은 6, 최솟값은 0이므로 구하는 합은
$6+0=6$ 답 ②

유형 181 무리식의 계산 → 본책 185쪽

무리식은 제곱근의 성질을 이용하여 계산한다.
이때 분모에 무리식이 포함되어 있으면
$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$
임을 이용하여 분모를 유리화한 다음 계산한다.

0949 $\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}$
$=\frac{(\sqrt{x+1}-1)-(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)}$
$=\frac{-2}{x+1-1}=-\frac{2}{x}$ 답 ①

0950 $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+1}}=-\sqrt{\frac{y}{x+1}}$이므로

$x+1<0,\ y>0 \quad \therefore\ x<-1,\ y>0$

따라서 $x-3<0,\ x-y-2<0,\ y>0$이므로

$\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x-y-2)^2}+|y|$

$=-(x-3)-(x-y-2)+y$

$=-2x+2y+5$ 답 $-2x+2y+5$

0951 $\frac{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}+\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}$

$=\frac{(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})^2+(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x})^2}{(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x})(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}$

$=\frac{4+x+2\sqrt{16-x^2}+4-x+4+x-2\sqrt{16-x^2}+4-x}{4+x-(4-x)}$

$=\frac{16}{2x}=\frac{8}{x}$

$\therefore\ a=8$ 답 ④

0952 $x=k^2+\frac{1}{k^2}$이므로

$\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}$

$=\sqrt{k^2+\frac{1}{k^2}+2}-\sqrt{k^2+\frac{1}{k^2}-2}$

$=\sqrt{\left(k+\frac{1}{k}\right)^2}-\sqrt{\left(k-\frac{1}{k}\right)^2}$

$=\left|k+\frac{1}{k}\right|-\left|k-\frac{1}{k}\right|$ …… ㉠

이때 $0<k<1$에서 $\frac{1}{k}>1$이므로

$k+\frac{1}{k}>0,\ k-\frac{1}{k}<0$

따라서 ㉠에서

$\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}=\left(k+\frac{1}{k}\right)+\left(k-\frac{1}{k}\right)=2k$ 답 $2k$

유형 182 무리식의 값 구하기

본책 186쪽

주어진 무리식을 간단히 한 후 수를 대입하여 식의 값을 구한다.

0953 $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\frac{(\sqrt{x}+1)^2+(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$

$=\frac{x+2\sqrt{x}+1+x-2\sqrt{x}+1}{x-1}$

$=\frac{2x+2}{x-1}$

$x=\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\sqrt{5}+2$를 대입하면

$\frac{2x+2}{x-1}=\frac{2(\sqrt{5}+2)+2}{(\sqrt{5}+2)-1}=\frac{2\sqrt{5}+6}{\sqrt{5}+1}$

$=\frac{(2\sqrt{5}+6)(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$

$=\frac{4+4\sqrt{5}}{4}=1+\sqrt{5}$ 답 ③

0954 $\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1}}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-1}}$

$=\frac{(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1})^2}{(\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-1})(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1})}$

$=\frac{3x+1-2\sqrt{9x^2-1}+3x-1}{3x+1-(3x-1)}$

$=\frac{6x-2\sqrt{9x^2-1}}{2}=3x-\sqrt{9x^2-1}$

$x=\frac{\sqrt{11}}{3}$을 대입하면

$3x-\sqrt{9x^2-1}=3\times\frac{\sqrt{11}}{3}-\sqrt{9\times\left(\frac{\sqrt{11}}{3}\right)^2-1}$

$=\sqrt{11}-\sqrt{10}$ 답 $\sqrt{11}-\sqrt{10}$

0955 $\sqrt{x+13}=4$의 양변을 제곱하면

$x+13=16 \quad \therefore\ x=3$ … ❶

$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$

$=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$=\sqrt{3}-1$ … ❷

답 $\sqrt{3}-1$

단계	채점 요소	비율
❶	x의 값 구하기	30 %
❷	주어진 식의 값 구하기	70 %

0956 $f(n)=\frac{1}{\sqrt{n+6}+\sqrt{n+7}}$

$=\frac{\sqrt{n+6}-\sqrt{n+7}}{(\sqrt{n+6}+\sqrt{n+7})(\sqrt{n+6}-\sqrt{n+7})}$

$=\sqrt{n+7}-\sqrt{n+6}$

이므로

$S(n)=f(3)+f(4)+f(5)+\cdots+f(n)$

$=(\sqrt{10}-\sqrt{9})+(\sqrt{11}-\sqrt{10})+(\sqrt{12}-\sqrt{11})+\cdots$

$+(\sqrt{n+7}-\sqrt{n+6})$

$=-\sqrt{9}+\sqrt{n+7}=\sqrt{n+7}-3$

ㄱ. $S(18)=\sqrt{25}-3=2$ (참)

ㄴ. $S(n^4)<n^2$에서

$\sqrt{n^4+7}-3<n^2$, 즉 $\sqrt{n^4+7}<n^2+3$

이때 $\sqrt{n^4+7}>0,\ n^2+3>0$이므로

$(\sqrt{n^4+7})^2-(n^2+3)^2=n^4+7-(n^4+6n^2+9)$

$=-6n^2-2<0$

따라서 $(\sqrt{n^4+7})^2<(n^2+3)^2$에서 $\sqrt{n^4+7}<n^2+3$이므로

$S(n^4)<n^2$ (참)

ㄷ. $S(n)>12$에서 $\sqrt{n+7}-3>12$

$\sqrt{n+7}>15$, $n+7>225$

$\therefore n>218$

즉 $S(n)>12$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 219이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

만점 공략 노트

부등식의 증명

$A>0$, $B>0$일 때

(1) $A^2-B^2>0 \iff A>B$

(2) $A^2-B^2=0 \iff A=B$

(3) $A^2-B^2<0 \iff A<B$

유형 183 무리식의 값 구하기 — $x=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $y=\sqrt{a}-\sqrt{b}$의 꼴 → 본책 186쪽

$x=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $y=\sqrt{a}-\sqrt{b}$의 꼴로 주어진 경우

➜ $x+y$, $x-y$, xy의 값을 이용할 수 있도록 주어진 무리식을 변형한다.

0957 $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=\dfrac{x-y}{\sqrt{xy}}$

이때 $x-y=(\sqrt{13}+3)-(\sqrt{13}-3)=6$,

$xy=(\sqrt{13}+3)(\sqrt{13}-3)=4$이므로

$\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=\dfrac{6}{\sqrt{4}}=3$ 답 ②

0958 $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$

$=\dfrac{2(x+y)}{x-y}$

이때 $x=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=3+2\sqrt{2}$,

$y=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=3-2\sqrt{2}$이므로

$x+y=(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=6$

$x-y=(3+2\sqrt{2})-(3-2\sqrt{2})=4\sqrt{2}$

$\therefore \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{2\times 6}{4\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 답 ④

0959 $(\sqrt{3x}-\sqrt{3y})^2=3x-2\sqrt{9xy}+3y$

$=3(x+y)-6\sqrt{xy}$ …… ㉠

이때 $x+y=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}=2$,

$xy=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{4}$이므로 ㉠에서

$(\sqrt{3x}-\sqrt{3y})^2=3\times 2-6\sqrt{\dfrac{1}{4}}=6-3=3$

한편 $x>y$에서 $\sqrt{3x}>\sqrt{3y}$이므로

$\sqrt{3x}-\sqrt{3y}>0$ $\therefore \sqrt{3x}-\sqrt{3y}=\sqrt{3}$ 답 ③

유형 184 무리함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동 → 본책 187쪽

(1) 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}+c$의 그래프는

$y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

(2) 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를

① x축에 대하여 대칭이동 ➜ $y=-\sqrt{ax+b}-c$

② y축에 대하여 대칭이동 ➜ $y=\sqrt{-ax+b}+c$

③ 원점에 대하여 대칭이동 ➜ $y=-\sqrt{-ax+b}-c$

0960 $y=\sqrt{4x-12}+2=\sqrt{4(x-3)}+2$

따라서 $y=\sqrt{4x-12}+2$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$p=4$, $q=3$, $r=2$

$\therefore p+q-r=5$ 답 ⑤

다른 풀이 $y=\sqrt{px}$의 그래프를 x축의 방향으로 q만큼, y축의 방향으로 r만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{p(x-q)}+r=\sqrt{px-pq}+r$

이 함수의 그래프가 $y=\sqrt{4x-12}+2$의 그래프와 일치하므로

$p=4$, $pq=12$, $r=2$

$\therefore p=4$, $q=3$, $r=2$

0961 ㄱ. $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면 $y=\sqrt{3x}$의 그래프와 겹쳐진다.

ㄷ. $y=-\sqrt{-3x+5}=-\sqrt{-3\left(x-\dfrac{5}{3}\right)}$

이므로 $y=-\sqrt{-3x+5}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{5}{3}$만큼 평행이동한 후 원점에 대하여 대칭이동하면 $y=\sqrt{3x}$의 그래프와 겹쳐진다.

이상에서 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 $y=\sqrt{3x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

0962 $y=\sqrt{4-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-2(x-3)+4}-2$

$=\sqrt{-2x+10}-2$ … ❶

이 함수의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{2x+10}-2$ … ❷

따라서 $p=2$, $q=10$, $r=-2$이므로

$p+q+r=10$ … ❸

답 10

단계	채점 요소	비율
❶	평행이동한 그래프의 식 구하기	40 %
❷	대칭이동한 그래프의 식 구하기	40 %
❸	$p+q+r$의 값 구하기	20 %

0963 $\overline{AD}=\overline{CD}=3$이므로 점 C는 점 A를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.
즉 점 C가 나타내는 도형은 함수 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 도형의 방정식은

$$y=-\sqrt{2(x-3)}-3=-\sqrt{2x-6}-3$$

따라서 $p=2$, $q=-6$, $r=-3$이므로

$$p-q+r=5$$

답 5

유형 185 무리함수의 정의역과 치역

본책 187쪽

(1) 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$ $(a>0)$의

정의역: $\left\{x\middle|x\geq-\frac{b}{a}\right\}$, 치역: $\{y|y\geq c\}$

(2) 무리함수의 정의역 또는 치역이 주어진 경우

➜ 주어진 범위에서 무리함수의 그래프를 그린 후 대응하는 값의 범위를 구한다.

0964 $f(1)=-1$이므로

$$-\sqrt{a+5}+2=-1,\quad \sqrt{a+5}=3$$
$$a+5=9\quad\therefore a=4$$
$$\therefore f(x)=-\sqrt{4x+5}+2$$

따라서 함수 $f(x)$의 정의역은 $\left\{x\middle|x\geq-\frac{5}{4}\right\}$이므로

$$b=-\frac{5}{4}$$
$$\therefore a+4b=-1$$

답 ③

0965 함수 $y=-\sqrt{x-a}+a+6$의 그래프가 점 $(a,\ -2a)$를 지나므로

$$-2a=-\sqrt{a-a}+a+6,\quad -3a=6\quad\therefore a=-2$$
$$\therefore y=-\sqrt{x+2}+4$$

따라서 주어진 함수의 치역은 $\{y|y\leq4\}$

답 ①

0966 함수 $y=\sqrt{px+q}+4$의 정의역이 $\{x|x\leq2\}$이므로

$px+q\geq0$에서 $p<0$이고 $x\leq-\frac{q}{p}$

즉 $-\frac{q}{p}=2$이므로 $q=-2p$ …… ㉠

또 치역이 $\{y|y\geq q\}$이므로 $q=4$

$q=4$를 ㉠에 대입하면 $4=-2p\quad\therefore p=-2$

$$\therefore q-p=6$$

답 ⑤

0967 $y=\frac{px+5}{x+q}=\frac{p(x+q)-pq+5}{x+q}=\frac{-pq+5}{x+q}+p$

이때 그래프의 점근선의 교점의 좌표가 $(3,\ 2)$이므로

$p=2$, $q=-3$ … ❶

따라서 함수 $y=\sqrt{-3x+2}$의 정의역은

$\left\{x\middle|x\leq\frac{2}{3}\right\}$ … ❷

이므로 구하는 정수의 최댓값은 0이다. … ❸

답 0

단계	채점 요소	비율
❶	p, q의 값 구하기	40 %
❷	함수 $y=\sqrt{qx+p}$의 정의역 구하기	40 %
❸	정의역에 속하는 정수의 최댓값 구하기	20 %

유형 186 무리함수의 그래프가 지나는 사분면

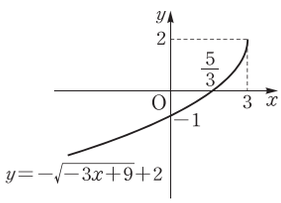
본책 188쪽

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 꼴로 변형하여 그린다.

0968 $y=-\sqrt{-3x+9}+2=-\sqrt{-3(x-3)}+2$

이므로 $y=-\sqrt{-3x+9}+2$의 그래프는 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=-\sqrt{-3x+9}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 3, 4 사분면을 지난다.



답 ④

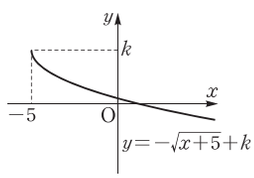
0969 $y=-\sqrt{x+5}$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=-\sqrt{x+5}+k$$

따라서 $y=-\sqrt{x+5}+k$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y=-\sqrt{x+5}+k$의 그래프가 제 1, 2, 4 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로 $k>0$이고 $x=0$일 때

$$y=-\sqrt{5}+k>0$$
$$\therefore k>\sqrt{5}$$



따라서 5 이하의 정수 k는 3, 4, 5의 3개이다.

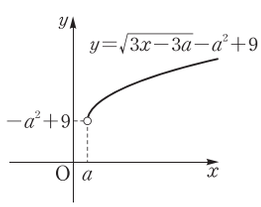
답 3

0970 $y=\sqrt{3x-3a}-a^2+9=\sqrt{3(x-a)}-a^2+9$

이므로 $y=\sqrt{3x-3a}-a^2+9$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $-a^2+9$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\sqrt{3x-3a}-a^2+9$ $(x>a)$의 그래프가 오직 하나의 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 제 1 사분면만 지나야 하므로

$$a\geq0,\ -a^2+9\geq0$$
$-a^2+9\geq0$에서 $\quad(a+3)(a-3)\leq0$
$$\therefore 0\leq a\leq3\ (\because a\geq0)$$



따라서 a의 최댓값은 3이다.

답 ①

유형 187 그래프를 이용하여 무리함수의 식 구하기 → 본책 188쪽

그래프가 점 (p, q)에서 시작하는 무리함수의 식 구하기

➜ $y=\pm\sqrt{a(x-p)}+q$ $(a\neq0)$라 하고 그래프가 지나는 점의 좌표를 대입하여 a의 값을 구한다.

0971 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$$y=\sqrt{a(x-3)}-2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓을 수 있다.

주어진 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$$1=\sqrt{-3a}-2, \quad \sqrt{-3a}=3, \quad -3a=9$$

$$\therefore a=-3$$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면

$$y=\sqrt{-3(x-3)}-2=\sqrt{-3x+9}-2$$

따라서 $a=-3$, $b=9$, $c=-2$이므로

$$a+b+c=4$$

답 ⑤

0972 $y=-\sqrt{ax+b}+c=-\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$

이므로 $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

주어진 그래프에서 $a>0$, $-\frac{b}{a}>0$, $c<0$이므로

$$a>0, b<0, c<0$$

답 ③

0973 $y=f(x)$의 그래프는 $y=-\sqrt{px}$의 그래프를 x축의 방향으로 q만큼, y축의 방향으로 r만큼 평행이동한 것이므로 주어진 그래프에서

$$p<0, q>0, r>0$$

$y=g(x)$의 그래프는 $y=\sqrt{rx}$의 그래프를 x축의 방향으로 q만큼, y축의 방향으로 p만큼 평행이동한 것이므로 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 ③이다.

답 ③

0974 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{px}$ $(p>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$$y=\sqrt{p(x-a)}+b=\sqrt{px-ap}+b$$

로 놓을 수 있다.

이 함수가 $y=\sqrt{px+q}+r$와 같으므로

$$q=-ap, r=b$$

ㄱ. 주어진 그래프에서 $a<0$이므로

$$q=-ap>0 \quad \therefore pq>0 \text{ (참)}$$

ㄴ. 주어진 그래프에서 $b<0$이므로 $r<0$

$$\therefore \frac{q}{r}<0 \text{ (거짓)}$$

ㄷ. 주어진 그래프에서 $x=0$일 때 $y>0$이므로

$$\sqrt{q}+r>0, \quad \sqrt{q}>-r$$

$\sqrt{q}>0$, $-r>0$이므로 양변을 제곱하면

$$q>r^2 \quad \therefore r^2-q<0 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

다른 풀이 $y=\sqrt{px+q}+r=\sqrt{p\left(x+\frac{q}{p}\right)}+r$이므로

$$a=-\frac{q}{p}, b=r$$

주어진 그래프에서 $a<0$, $b<0$이므로

$$p>0, q>0, r<0$$

유형 188 유리함수와 무리함수의 그래프 → 본책 189쪽

(1) 유리함수의 그래프가 주어진 경우

➜ 점근선의 방정식, 좌표축과 만나는 점의 좌표를 살펴본다.

(2) 무리함수의 그래프가 주어진 경우

➜ 그래프의 시작점, 좌표축과 만나는 점의 좌표를 살펴본다.

0975 $y=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{a(x+c)-ac+b}{x+c}=\frac{-ac+b}{x+c}+a$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-c$, $y=a$

$$\therefore c<0, a<0$$

$x=0$일 때 $y=\frac{b}{c}<0$이므로 $b>0$

$$y=\sqrt{cx-b}+a=\sqrt{c\left(x-\frac{b}{c}\right)}+a$$

이므로 $y=\sqrt{cx-b}+a$의 그래프는 $y=\sqrt{cx}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{b}{c}$만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

이때 $c<0$, $\frac{b}{c}<0$, $a<0$이므로 $y=\sqrt{cx-b}+a$의 그래프의 개형은 ③이다.

답 ③

0976 $y=-\sqrt{px+q}+r=-\sqrt{p\left(x+\frac{q}{p}\right)}+r$

이므로 $y=-\sqrt{px+q}+r$의 그래프는 $y=-\sqrt{px}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{q}{p}$만큼, y축의 방향으로 r만큼 평행이동한 것이다.

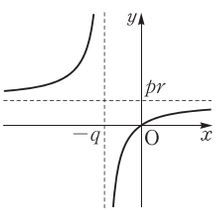
주어진 그래프에서 $p>0$, $-\frac{q}{p}<0$, $r>0$이므로

$$p>0, q>0, r>0 \quad \cdots ❶$$

$$y=\frac{prx}{x+q}=\frac{pr(x+q)-pqr}{x+q}=\frac{-pqr}{x+q}+pr$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-q$, $y=pr$

이때 $-pqr<0$, $-q<0$, $pr>0$이고 $x=0$일 때 $y=0$이므로 $y=\frac{prx}{x+q}$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다. … ❷



따라서 $y=\frac{prx}{x+q}$의 그래프는 제1, 2, 3사분면을 지난다. … ❸

답 제1, 2, 3사분면

단계	채점 요소	비율
❶	p, q, r의 부호 구하기	40 %
❷	함수 $y=\frac{prx}{x+q}$의 그래프의 개형 그리기	50 %
❸	함수 $y=\frac{prx}{x+q}$의 그래프가 지나는 사분면 구하기	10 %

0977 $y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}(cx+d)-\frac{ad}{c}+b}{cx+d}=\frac{-\frac{ad}{c}+b}{cx+d}+\frac{a}{c}$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-\frac{d}{c}$, $y=\frac{a}{c}$이고 y절편은 $\frac{b}{d}$이다.

따라서 $-\frac{d}{c}>0$, $\frac{a}{c}>0$, $\frac{b}{d}>0$이므로

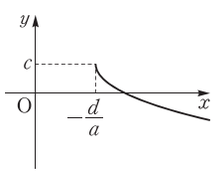
$a>0$, $b<0$, $c>0$, $d<0$ 또는 $a<0$, $b>0$, $c<0$, $d>0$

$y=b\sqrt{ax+d}+c=b\sqrt{a\left(x+\frac{d}{a}\right)}+c$

이므로 $y=b\sqrt{ax+d}+c$의 그래프는 $y=b\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{d}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

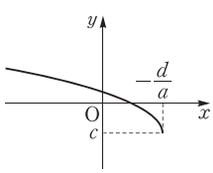
(i) $a>0$, $b<0$, $c>0$, $d<0$일 때

$b<0$, $a>0$이고 $-\frac{d}{a}>0$, $c>0$이므로 $y=b\sqrt{ax+d}+c$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제2사분면을 지나지 않는다.



(ii) $a<0$, $b>0$, $c<0$, $d>0$일 때

$b>0$, $a<0$이고 $-\frac{d}{a}>0$, $c<0$이므로 $y=b\sqrt{ax+d}+c$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제2사분면을 지난다.



(i), (ii)에서 $a<0$, $b>0$, $c<0$, $d>0$ 답 ③

유형 189 무리함수의 그래프의 성질 본책 190쪽

무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프

(1) $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

(2) $a>0$일 때, 정의역: $\{x|x\geq p\}$, 치역: $\{y|y\geq q\}$

$a<0$일 때, 정의역: $\{x|x\leq p\}$, 치역: $\{y|y\geq q\}$

0978 ㄱ. $y=-\sqrt{-x+4}+3$에 $x=0$을 대입하면

$y=-\sqrt{4}+3=1$

이므로 그래프가 점 $(0, 1)$을 지난다. (참)

ㄴ. $-x+4\geq 0$에서 $x\leq 4$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\leq 4\}$이다. (참)

ㄷ. $\sqrt{-x+4}\geq 0$에서 $-\sqrt{-x+4}\leq 0$

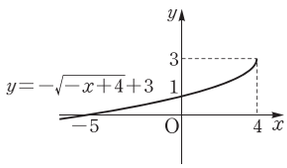
$\therefore -\sqrt{-x+4}+3\leq 3$

따라서 주어진 함수의 치역은 $\{y|y\leq 3\}$이다. (거짓)

ㄹ. $y=-\sqrt{-x+4}+3=-\sqrt{-(x-4)}+3$

이므로 $y=-\sqrt{-x+4}+3$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다. (참)



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

0979 $y=\sqrt{3x+12}-1=\sqrt{3(x+4)}-1$

① $3x+12\geq 0$에서 $3x\geq -12$ $\therefore x\geq -4$

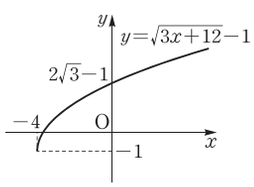
따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\geq -4\}$이다.

② $\sqrt{3x+12}\geq 0$에서 $\sqrt{3x+12}-1\geq -1$

따라서 주어진 함수의 치역은 $\{y|y\geq -1\}$이다.

③, ⑤ $y=\sqrt{3x+12}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 3사분면을 지난다.



④ $y=\sqrt{-3x+12}-1$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-3(-x)+12}-1=\sqrt{3x+12}-1$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0980 ㄱ. $qx-r\geq 0$에서 $qx\geq r$ $\therefore x\leq\frac{r}{q}$ ($\because q<0$)

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\left\{x\middle|x\leq\frac{r}{q}\right\}$이다. (참)

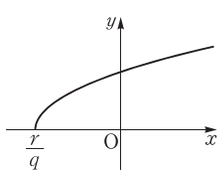
ㄴ. $y=p\sqrt{qx-r}=p\sqrt{q\left(x-\frac{r}{q}\right)}$

이므로 $y=p\sqrt{qx-r}$의 그래프는 $y=p\sqrt{qx}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{r}{q}$만큼 평행이동한 것이다.

이때 $p>0$이고 $q>0$, $r<0$에서

$\frac{r}{q}<0$

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2사분면을 지난다. (참)



ㄷ. 그래프는 $y=-p\sqrt{qx-r}$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ④

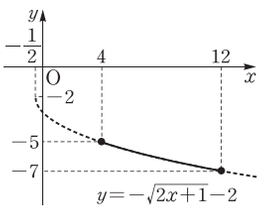
유형 190 무리함수의 최대·최소 본책 190쪽

주어진 정의역에서 무리함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후 최댓값과 최솟값을 구한다.

0981 $y=-\sqrt{2x+1}-2=-\sqrt{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}-2$

이므로 $y=-\sqrt{2x+1}-2$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $4\le x\le 12$에서 $y=-\sqrt{2x+1}-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=4$일 때 최댓값 -5,

$x=12$일 때 최솟값 -7

을 갖는다.

즉 $M=-5$, $m=-7$이므로

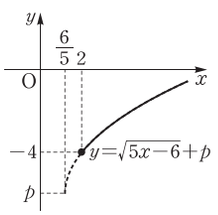
$M-m=2$

답 ②

0982 $y=\sqrt{5x-6}+p=\sqrt{5\left(x-\frac{6}{5}\right)}+p$

이므로 $y=\sqrt{5x-6}+p$의 그래프는 $y=\sqrt{5x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{6}{5}$만큼, y축의 방향으로 p만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $x\ge 2$에서 $y=\sqrt{5x-6}+p$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. … ❶



즉 $x=2$일 때 최솟값 -4를 가지므로

$-4=2+p$

$\therefore p=-6$ … ❷

따라서 $y=\sqrt{5x-6}-6$의 그래프가 점 $(q,\ -3)$을 지나므로

$-3=\sqrt{5q-6}-6$, $\sqrt{5q-6}=3$

$5q-6=9$

$\therefore q=3$ … ❸

$\therefore p+q=-3$ … ❹

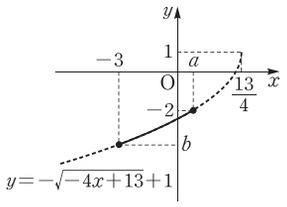
답 -3

단계	채점 요소	비율
❶	함수 $y=\sqrt{5x-6}+p$의 그래프의 개형 알기	30 %
❷	p의 값 구하기	30 %
❸	q의 값 구하기	30 %
❹	$p+q$의 값 구하기	10 %

0983 $y=-\sqrt{-4x+13}+1=-\sqrt{-4\left(x-\frac{13}{4}\right)}+1$

이므로 $y=-\sqrt{-4x+13}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{-4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{13}{4}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-3\le x\le a$에서 $y=-\sqrt{-4x+13}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 $x=-3$일 때 최솟값 b를 가지므로

$b=-5+1=-4$

$x=a$일 때 최댓값 -2를 가지므로

$-2=-\sqrt{-4a+13}+1$, $\sqrt{-4a+13}=3$

$-4a+13=9$ $\therefore a=1$

$\therefore ab=-4$

답 ①

0984 $f\left(\frac{5}{6}\right)=2$이므로 $\sqrt{\frac{5}{6}a+b}=2$

$\frac{5}{6}a+b=4$ $\therefore 5a+6b=24$ …… ㉠

한편 $a<0$이므로 $-1\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

즉 $x=-1$일 때 최댓값 $\sqrt{15}$를 가지므로

$\sqrt{-a+b}=\sqrt{15}$ $\therefore -a+b=15$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-6$, $b=9$

따라서 $f(x)=\sqrt{-6x+9}$이므로 최솟값은

$f(1)=\sqrt{-6\times 1+9}=\sqrt{3}$

답 ⑤

유형 191 무리함수의 그래프와 직선의 위치 관계 본책 191쪽

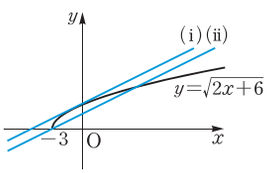
(1) 무리함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리고 주어진 조건을 만족시키도록 직선 $y=g(x)$를 움직여 본다.

(2) 무리함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접한다.

➜ 이차방정식 $\{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이다.

0985 $y=\sqrt{2x+6}=\sqrt{2(x+3)}$

이므로 $y=\sqrt{2x+6}$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이고,



직선 $y=\frac{1}{2}x+a$는 기울기가 $\frac{1}{2}$이고 y절편이 a이다.

(i) $y=\sqrt{2x+6}$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x+a$가 접할 때

$\sqrt{2x+6}=\frac{1}{2}x+a$의 양변을 제곱하면

$2x+6=\frac{1}{4}x^2+ax+a^2$

$\therefore \frac{1}{4}x^2+(a-2)x+a^2-6=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a-2)^2-(a^2-6)=0$

$-4a+10=0$ $\therefore a=\frac{5}{2}$

(ii) 직선 $y=\frac{1}{2}x+a$가 점 $(-3,\ 0)$을 지날 때

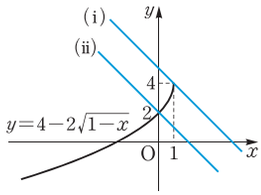
$0=-\frac{3}{2}+a$ $\therefore a=\frac{3}{2}$

(i), (ii)에서 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위는

$\frac{3}{2}\le a<\frac{5}{2}$

답 $\frac{3}{2}\le a<\frac{5}{2}$

0986 $y=4-2\sqrt{1-x}$
$=4-2\sqrt{-(x-1)}$



의 그래프는 $y=-2\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이고 y절편이 2이다. 또 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다. … ❶

(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(1, 4)$를 지날 때
$4=-1+k$ $\therefore k=5$

(ii) 직선 $y=-x+k$가 점 $(0, 2)$를 지날 때
$k=2$

(i), (ii)에서 $y=4-2\sqrt{1-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서 만나려면 $2<k\le5$ … ❷

따라서 정수 k는 3, 4, 5이므로 구하는 합은
$3+4+5=12$ … ❸

답 12

단계	채점 요소	비율
❶	함수 $y=4-2\sqrt{1-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$의 개형 알기	30 %
❷	k의 값의 범위 구하기	60 %
❸	모든 정수 k의 값의 합 구하기	10 %

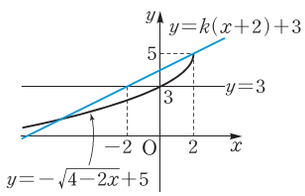
만점 공략 노트

$k=2$이면 함수 $y=4-2\sqrt{1-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 y축 위에서 만나므로 제1사분면에서 만난다고 할 수 없다.

0987 $y=-\sqrt{4-2x}+5=-\sqrt{-2(x-2)}+5$
이므로 $y=-\sqrt{4-2x}+5$의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이고 y절편이 3이다. 또 직선 $y=k(x+2)+3$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, 3)$을 지난다.

이때 $n(A\cap B)=2$이므로 $y=-\sqrt{4-2x}+5$의 그래프와 직선 $y=k(x+2)+3$이 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

직선 $y=k(x+2)+3$이 점 $(2, 5)$를 지날 때
$5=4k+3$ $\therefore k=\frac{1}{2}$

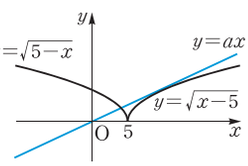


또 $k\le0$이면 그래프와 직선이 한 점에서 만나므로 $k>0$

따라서 조건을 만족시키는 k의 값의 범위는
$0<k\le\frac{1}{2}$

답 ④

0988 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-5} & (x\ge5)\\ \sqrt{5-x} & (x<5)\end{cases}$



의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=ax$는 a의 값에 관계없이 항상 원점을 지난다.

$y=\sqrt{x-5}$의 그래프와 직선 $y=ax$가 접할 때, $\sqrt{x-5}=ax$의 양변을 제곱하면
$x-5=a^2x^2$ $\therefore a^2x^2-x+5=0$

x에 대한 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(-1)^2-20a^2=0$, $20a^2=1$
$a^2=\frac{1}{20}$ $\therefore a=\pm\frac{\sqrt{5}}{10}$

이때 $a>0$이므로 $a=\frac{\sqrt{5}}{10}$

따라서 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 a의 값의 범위는
$0<a<\frac{\sqrt{5}}{10}$

이므로 $p=0$, $q=\frac{\sqrt{5}}{10}$
$\therefore p+10q=\sqrt{5}$

답 ⑤

유형 192 무리함수의 그래프의 활용 (1)

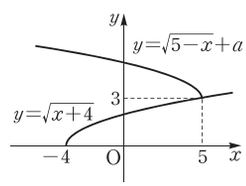
본책 191쪽

주어진 조건을 만족시키는 무리함수의 그래프를 그리고, 무리함수의 그래프와 함수의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

0989 $y=\sqrt{x+4}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이고,

$y=\sqrt{5-x}+a=\sqrt{-(x-5)}+a$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y=\sqrt{x+4}$의 그래프와 직선 $x=5$의 교점의 좌표가 $(5, 3)$이므로 오른쪽 그림과 같이 $y=\sqrt{5-x}+a$의 그래프가 점 $(5, 3)$을 지날 때 a의 값이 최대이다.



즉 $3=\sqrt{5-5}+a$에서 $a=3$

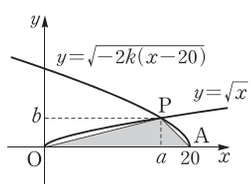
따라서 a의 최댓값은 3이다.

답 ③

참고 $y=\sqrt{5-x}+a$의 그래프가 점 $(-4, 0)$을 지날 때, $a=-3$이므로 두 함수의 그래프가 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위는
$-3\le a\le3$

0990 $y=\sqrt{-2k(x-20)}$의 그래프는 $y=\sqrt{-2kx}$의 그래프를 x축의 방향으로 20만큼 평행이동한 것이다.

오른쪽 그림과 같이 점 P의 좌표를 (a, b) $(a>0, b>0)$라 하면 $\overline{OA}=20$이고 $\triangle OAP$의 넓이가 40이므로



$\frac{1}{2}\times20\times b=40$ $\therefore b=4$

이때 $y=\sqrt{x}$의 그래프가 점 $P(a, 4)$를 지나므로
$4=\sqrt{a}$ $\therefore a=16$ $\therefore P(16, 4)$ … ❶

따라서 $y=\sqrt{-2k(x-20)}$의 그래프가 점 $P(16, 4)$를 지나므로
$4=\sqrt{8k}$ $\therefore k=2$ … ❷

답 2

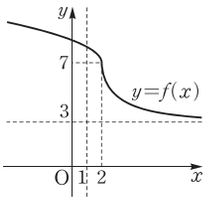
단계	채점 요소	비율
❶	점 P의 좌표 구하기	50 %
❷	k의 값 구하기	50 %

0991 $y=\dfrac{3x+1}{x-1}=\dfrac{3(x-1)+4}{x-1}=\dfrac{4}{x-1}+3$

이므로 $y=\dfrac{3x+1}{x-1}$의 그래프는 $y=\dfrac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$y=\sqrt{2-x}+a=\sqrt{-(x-2)}+a$이므로 $y=\sqrt{2-x}+a$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

이때 조건 (가)에서 치역이 $\{y|y>3\}$이고, 조건 (나)에서 함수 f가 일대일함수이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 함수 $y=\sqrt{2-x}+a$의 그래프가 점 $(2, 7)$을 지나므로 $a=7$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x+1}{x-1} & (x>2)\\ \sqrt{2-x}+7 & (x\le 2)\end{cases}$$

$f(1)=\sqrt{2-1}+7=8$이므로 $f(1)\times f(k)=40$에서

$8f(k)=40$ $\therefore f(k)=5$

한편 $\sqrt{2-x}+7\ge 7$이므로 $k>2$

즉 $f(k)=\dfrac{3k+1}{k-1}=5$에서

$3k+1=5k-5$ $\therefore k=3$

$\therefore a+k=10$ 답 ③

참고 $f(k)\ge 7$이면 $k\le 2$이고, $f(k)<7$이면 $k>2$이다.

0992 $f(x)=-\sqrt{kx+2k}+4$, $g(x)=\sqrt{-kx+2k}-4$라 하자.

ㄱ. 곡선 $y=f(x)$를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=-\sqrt{-kx+2k}+4$ $\therefore y=\sqrt{-kx+2k}-4$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 서로 원점에 대하여 대칭이다. (참)

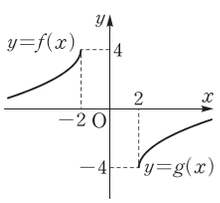
ㄴ. $f(x)=-\sqrt{kx+2k}+4$

$=-\sqrt{k(x+2)}+4$,

$g(x)=\sqrt{-kx+2k}-4$

$=\sqrt{-k(x-2)}-4$

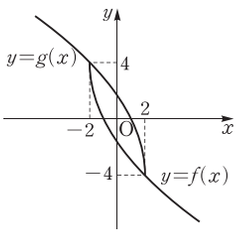
이므로 $k<0$일 때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 오른쪽 그림과 같이 만나지 않는다. (거짓)



ㄷ. ㄴ에서 $k<0$일 때, 두 곡선은 만나지 않으므로 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $k>0$

ㄱ에서 두 곡선은 원점에 대하여 대칭이고, k의 값이 커질수록 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=4$로부터 멀어지고 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=-4$로부터 멀어진다.

따라서 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 값이 최대가 되는 경우는 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, -4)$를 지날 때이므로



$-4=-\sqrt{2k+2k}+4$, $\sqrt{4k}=8$

$4k=64$ $\therefore k=16$

따라서 k의 최댓값은 16이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

유형 193 무리함수의 그래프의 활용 (2) → 본책 192쪽

(1) 무리함수의 그래프 위에 꼭짓점이 있는 도형의 넓이

➜ 무리함수의 식을 이용하여 점의 좌표를 구한 후 선분의 길이를 구하여 넓이를 구한다.

(2) 넓이가 같은 부분이 있는 경우

➜ 무리함수의 그래프의 평행이동을 이용하여 넓이가 같은 부분을 찾아 도형의 넓이를 구한다.

0993 $A(k, \sqrt{3k})$, $B(4k, 2\sqrt{3k})$, $C(k, 0)$, $D(4k, 0)$이고 사각형 ACDB는 넓이가 12인 사다리꼴이므로

$\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{3k}+2\sqrt{3k})\times(4k-k)=12$

$3k\sqrt{3k}=8$, $27k^3=64$

$k^3=\dfrac{64}{27}$ $\therefore k=\dfrac{4}{3}$

따라서 $A\left(\dfrac{4}{3}, 2\right)$, $B\left(\dfrac{16}{3}, 4\right)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{\left(\dfrac{16}{3}-\dfrac{4}{3}\right)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{5}$ 답 ②

0994 점 A의 x좌표를 $a\,(a>0)$라 하면 $f(a)=g(a)$이므로

$2\sqrt{a}=\dfrac{1}{4}a^2$, $4a=\dfrac{1}{16}a^4$

$a\ne 0$이므로 $a^3=64$

$\therefore a=4$

$f(4)=2\sqrt{4}=4$이므로 $A(4, 4)$

선분 OA를 1 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times 4+3\times 0}{1+3}, \dfrac{1\times 4+3\times 0}{1+3}\right)$

$\therefore P(1, 1)$

이때 두 점 B, C의 y좌표도 모두 1이므로 $B(b, 1)$ $(b>0)$, $C(c, 1)$ $(c>0)$이라 하자.

점 B는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(b)=1$

$2\sqrt{b}=1$ $\therefore b=\dfrac{1}{4}$

점 C는 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로 $g(c)=1$

$\dfrac{1}{4}c^2=1$ $\therefore c=2$ ($\because c>0$)

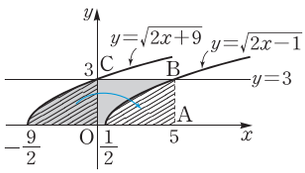
따라서 $A(4, 4)$, $B\left(\dfrac{1}{4}, 1\right)$, $C(2, 1)$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\left(2-\dfrac{1}{4}\right)\times(4-1)=\dfrac{21}{8}$ 답 ②

0995 $y=\sqrt{2x-1}=\sqrt{2(x-5)+9}$

이므로 $y=\sqrt{2x-1}$의 그래프는 $y=\sqrt{2x+9}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y=\sqrt{2x+9}$의 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로 $y=\sqrt{2x+9}$, $y=\sqrt{2x-1}$의 그래프와 직선 $y=3$은 오른쪽 그림과 같고, 빗금 친 두 부분의 넓이는 서로 같다.



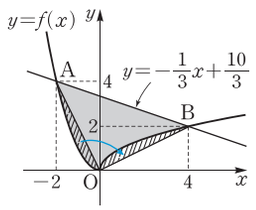
즉 구하는 넓이는 직사각형 OABC의 넓이와 같으므로

$5\times3=15$ 답 15

0996 $y=\sqrt{x}$의 그래프는 $y=x^2$ $(x<0)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프와 일치한다.

또 점 $A(-2, 4)$를 y축에 대하여 대칭이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 점 $B(4, 2)$이다.

오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 색칠한 부분의 넓이는 삼각형 AOB의 넓이와 같다.



$\overline{AB}=\sqrt{(4+2)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{10}$

이고 원점 O와 직선 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$, 즉 $x+3y-10=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-10|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{10}\times\sqrt{10}=10$ 답 ④

유형 194 무리함수의 역함수 본책 193쪽

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 역함수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) x를 y에 대한 식으로 나타낸다. ➜ $x=\frac{1}{a}(y-c)^2-\frac{b}{a}$

(ii) x와 y를 서로 바꾼다. ➜ $y=\frac{1}{a}(x-c)^2-\frac{b}{a}$

(iii) $y=\sqrt{ax+b}+c$의 치역이 $\{y|y\geq c\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\geq c\}$이다.

0997 함수 $y=-\sqrt{2x+3}+4$의 치역이 $\{y|y\leq4\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\leq4\}$이다.

$y=-\sqrt{2x+3}+4$에서 $y-4=-\sqrt{2x+3}$

양변을 제곱하면 $(y-4)^2=2x+3$

$\therefore x=\frac{1}{2}(y-4)^2-\frac{3}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{2}(x-4)^2-\frac{3}{2}$ $(x\leq4)$

따라서 $p=\frac{1}{2}$, $q=-4$, $r=-\frac{3}{2}$, $s=4$이므로

$pq+rs=-8$ 답 ②

0998 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, 4)$를 지나므로

$4=\sqrt{2a+b}+1$, $\sqrt{2a+b}=3$

$\therefore 2a+b=9$ …… ㉠

곡선 $y=g(x)$가 점 $(2, 4)$를 지나므로

$g(2)=4$ $\therefore f(4)=2$

즉 $\sqrt{4a+b}+1=2$이므로 $\sqrt{4a+b}=1$

$\therefore 4a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=17$

$\therefore f(x)=\sqrt{-4x+17}+1$

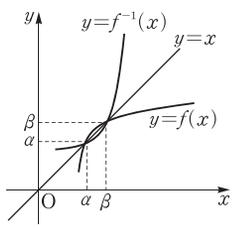
$g(6)=k$라 하면 $f(k)=6$이므로

$\sqrt{-4k+17}+1=6$, $\sqrt{-4k+17}=5$

$-4k+17=25$ $\therefore k=-2$

$\therefore g(6)=-2$ 답 ③

0999 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{4x-7}+a=x$에서 $\sqrt{4x-7}=x-a$

양변을 제곱하면

$4x-7=x^2-2ax+a^2$

$\therefore x^2-(2a+4)x+a^2+7=0$ …… ㉠

x에 대한 이 이차방정식의 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 두 교점의 좌표는 (α, α), (β, β)이고 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=2\sqrt{2}$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=4$ …… ㉡

이때 이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a+4$, $\alpha\beta=a^2+7$

㉡에서 $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4$이므로

$(2a+4)^2-4(a^2+7)=4$, $16a-12=4$

$\therefore a=1$ 답 ②

유형 195 무리함수의 합성함수와 역함수 본책 193쪽

(1) 두 함수 f, g의 역함수가 각각 f^{-1}, g^{-1}일 때

① $(f^{-1})^{-1}=f$

② $(f^{-1}\circ f)(x)=x$, $(f\circ f^{-1})(y)=y$

③ $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

(2) $f^{-1}(a)=b$이면 $f(b)=a$이다.

1000 $(g\circ(g\circ f)^{-1}\circ g)(5)=(g\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ g)(5)$

$=(g\circ f^{-1})(5)$

$=g(f^{-1}(5))$

이때 $f^{-1}(5)=k$라 하면 $f(k)=5$이므로

$\sqrt{5k+1}+1=5$, $\sqrt{5k+1}=4$

$5k+1=16$ $\therefore k=3$

즉 $f^{-1}(5)=3$이므로

$(g\circ(g\circ f)^{-1}\circ g)(5)=g(f^{-1}(5))$

$=g(3)=\frac{4}{2}=2$ 답 2

1001 $(f\circ g)(x)=x$이므로 $g(x)=f^{-1}(x)$ … ❶

$g(4)=a$라 하면 $f(a)=4$이므로

$\frac{1}{2}\sqrt{a-4}+3=4$, $\sqrt{a-4}=2$

$a-4=4$ $\therefore a=8$ $\therefore g(4)=8$ … ❷

$g(8)=b$라 하면 $f(b)=8$이므로

$\frac{1}{2}\sqrt{b-4}+3=8$, $\sqrt{b-4}=10$

$b-4=100$ $\therefore b=104$ $\therefore g(8)=104$ … ❸

$\therefore (g\circ g)(4)=g(g(4))=g(8)=104$ … ❹

답 104

단계	채점 요소	비율
❶	$g(x)=f^{-1}(x)$임을 알기	20 %
❷	$g(4)$의 값 구하기	30 %
❸	$g(8)$의 값 구하기	30 %
❹	$(g\circ g)(4)$의 값 구하기	20 %

1002 $(f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(k)=f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(k)))=18$에서

$f^{-1}(f^{-1}(k))=f(18)=5-\sqrt{16}=1$

또 $f^{-1}(k)=f(1)=5+\sqrt{1}=6$이므로

$k=f(6)=5-\sqrt{4}=3$ 답 3

1등급 유형 도전하기

본책 194~195쪽

1003 Step 1 직사각형의 둘레의 길이를 t에 대한 식으로 나타낸 후 둘레의 길이가 최대가 되는 t의 값을 구한다.

점 P의 y좌표가 t이므로

$t=\sqrt{\frac{1}{4}-x}$, $t^2=\frac{1}{4}-x$ $\therefore x=\frac{1}{4}-t^2$

$\therefore \mathrm{P}\left(\boxed{\text{(가) } \frac{1}{4}-t^2},\ t\right)$

마찬가지로 $\mathrm{Q}\left(\boxed{\text{(나) } t^2-\frac{1}{4}},\ t\right)$

직사각형 PQSR의 둘레의 길이를 $f(t)$라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}=\left(\frac{1}{4}-t^2\right)-\left(t^2-\frac{1}{4}\right)=-2t^2+\frac{1}{2}$, $\overline{\mathrm{PR}}=t$

이므로

$f(t)=2\left\{\left(-2t^2+\frac{1}{2}\right)+t\right\}=-4t^2+2t+1$

$=-4\left(\boxed{\text{(다) } t-\frac{1}{4}}\right)^2+\frac{5}{4}$

따라서 $t=\boxed{\text{(라) } \frac{1}{4}}$일 때 $f(t)$의 값이 최대이다.

Step 2 $t=\frac{1}{4}$일 때 직사각형의 넓이를 구한다.

$t=\frac{1}{4}$일 때,

$\overline{\mathrm{PQ}}=-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$, $\overline{\mathrm{PR}}=\frac{1}{4}$

이므로 구하는 직사각형 PQSR의 넓이는

$\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\boxed{\text{(마) } \frac{3}{32}}$

Step 3 $g(2a)+h(1-a)+i(4b)$의 값을 구한다.

$g(t)=\frac{1}{4}-t^2$, $h(t)=t^2-\frac{1}{4}$, $i(t)=t-\frac{1}{4}$이고 $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{3}{32}$이므로

$g(2a)+h(1-a)+i(4b)$

$=g\left(\frac{1}{2}\right)+h\left(\frac{3}{4}\right)+i\left(\frac{3}{8}\right)$

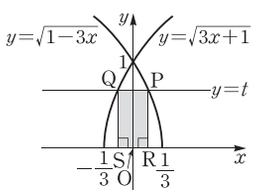
$=0+\frac{5}{16}+\frac{1}{8}=\frac{7}{16}$ 답 $\frac{7}{16}$

논리 Check

세 함수 $y=\sqrt{1-3x}$, $y=\sqrt{3x+1}$, $y=t$ $(0<t<1)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분에 내접하는 직사각형의 한 변이 직선 $y=t$ 위에 있을 때, 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은 $\frac{b}{a}$이다. 이때 $b-a$의 값을 구하시오.

(단, a와 b는 서로소인 자연수이다.)

풀이 오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=\sqrt{1-3x}$, $y=\sqrt{3x+1}$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점을 각각 P, Q라 하고, 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 R, S라 하자.



점 P의 y좌표가 t이므로

$t=\sqrt{1-3x}$, $t^2=1-3x$ $\therefore x=\frac{1-t^2}{3}$

$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{1-t^2}{3},\ t\right)$

마찬가지로 $\mathrm{Q}\left(\frac{t^2-1}{3},\ t\right)$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1-t^2}{3}-\frac{t^2-1}{3}=\frac{2(1-t^2)}{3}$, $\overline{\mathrm{PR}}=t$이므로 직사각형 PQSR의 둘레의 길이는

$2\left\{\frac{2(1-t^2)}{3}+t\right\}=-\frac{4}{3}t^2+2t+\frac{4}{3}$

$=-\frac{4}{3}\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{25}{12}$

따라서 $t=\frac{3}{4}$일 때, 직사각형 PQSR의 둘레의 길이의 최댓값이 $\frac{25}{12}$이므로 $a=12$, $b=25$

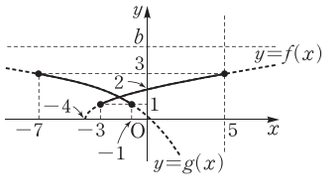
$\therefore b-a=13$ 답 13

1004 Step 1 두 집합 A, B가 서로 같다는 의미를 안다.

두 집합 A, B가 서로 같으려면 $-3\le x\le 5$에서 함수 $f(x)$의 치역과 $-7\le x\le -1$에서 함수 $g(x)$의 치역이 서로 같아야 한다.

Step 2 $A=B$를 만족시키기 위한 조건을 구한다.

$-3\le x\le 5$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $A=\{y|1\le y\le 3\}$



$g(x)=\dfrac{a}{x-5}+b$에서 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=5$, $y=b$이고 $a>0$, $b>0$이므로 $-7\le x\le -1$에서 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 위의 그림과 같다.

이때 $A=B$이므로 $g(-1)=1$, $g(-7)=3$

Step 3 $a-b$의 값을 구한다.

즉 $\dfrac{a}{-1-5}+b=1$, $\dfrac{a}{-7-5}+b=3$이므로

$a-6b=-6$, $a-12b=-36$

두 식을 연립하여 풀면 $a=24$, $b=5$

$\therefore a-b=19$ 답 19

1005 Step 1 $x=9, 10, 11, \cdots$일 때, x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 구한다.

$3\sqrt{x}<10$에서 $x<\dfrac{100}{9}=11.\times\times\times$

$3\sqrt{x}<11$에서 $x<\dfrac{121}{9}=13.\times\times\times$

$3\sqrt{x}<12$에서 $x<16$

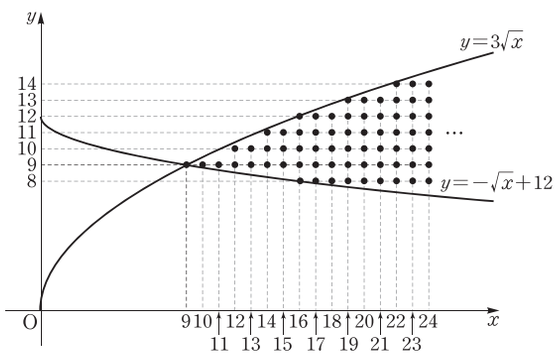
$3\sqrt{x}<13$에서 $x<\dfrac{169}{9}=18.\times\times\times$

$3\sqrt{x}<14$에서 $x<\dfrac{196}{9}=21.\times\times\times$

$3\sqrt{x}<15$에서 $x<25$

또 $-\sqrt{x}+12>8$에서 $\sqrt{x}<4$ $\therefore x<16$

$-\sqrt{x}+12>7$에서 $\sqrt{x}<5$ $\therefore x<25$



위의 그림에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는

$x=9, 10, 11$일 때, $y=9\to 3\times 1=3$

$x=12, 13$일 때, $y=9, 10\to 2\times 2=4$

$x=14, 15$일 때, $y=9, 10, 11\to 2\times 3=6$

$x=16, 17, 18$일 때, $y=8, 9, \cdots, 12\to 3\times 5=15$

$x=19, 20, 21$일 때, $y=8, 9, \cdots, 13\to 3\times 6=18$

$x=22, 23, 24$일 때, $y=8, 9, \cdots, 14\to 3\times 7=21$

⋮

Step 2 a의 값을 구한다.

x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는

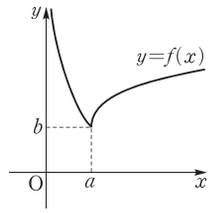
$9\le x\le 21$일 때, $3+4+6+15+18=46$

$x=22, 23$일 때, $7\times 2=14$

이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 23이다. 답 23

1006 Step 1 주어진 조건을 이용하여 a, b, α 사이의 관계를 찾는다.

$y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



조건 (가)에서

$\{f(x)-\alpha\}\{f(x)-\beta\}=0$

$\therefore f(x)=\alpha$ 또는 $f(x)=\beta$

이를 만족시키는 실수 x의 값은 α, β, γ 뿐이고 조건 (나)에서 $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$이고 $\alpha<\beta$이므로

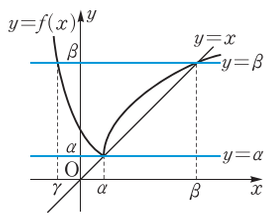
$f(x)=\alpha$의 실근은 α, $f(x)=\beta$의 실근은 β, γ

이어야 한다.

즉 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\alpha$는 한 점 (α, α)에서 만나고, $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\beta$는 두 점 (β, β), (γ, β)에서 만난다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 점 (a, b)는 점 (α, α)와 일치해야 하므로

$$f(x)=\begin{cases}(x-\alpha)^2+\alpha & (x\le\alpha)\\ 2\sqrt{x-\alpha}+\alpha & (x>\alpha)\end{cases}$$



Step 2 β, γ를 α에 대한 식으로 나타내고, α의 값을 구한다.

이때 β는 $x>\alpha$에서 $y=2\sqrt{x-\alpha}+\alpha$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표이므로 $2\sqrt{x-\alpha}+\alpha=x$에서

$2\sqrt{x-\alpha}=x-\alpha$

양변을 제곱하면 $4(x-\alpha)=(x-\alpha)^2$

$(x-\alpha)(x-\alpha-4)=0$ $\therefore x=\alpha$ 또는 $x=\alpha+4$

$\therefore \beta=\alpha+4$ …… ㉠

또 점 (γ, β), 즉 $(\gamma, \alpha+4)$는 $y=(x-\alpha)^2+\alpha$의 그래프 위의 점이므로

$\alpha+4=(\gamma-\alpha)^2+\alpha$, $(\gamma-\alpha)^2=4$

$\gamma-\alpha=\pm 2$ $\therefore \gamma=\alpha-2$ ($\because \gamma<\alpha$) …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{\beta+\gamma}{2}=\dfrac{2\alpha+2}{2}=\alpha+1$이므로

$f\left(\dfrac{\beta+\gamma}{2}\right)=f(\alpha+1)=2\sqrt{(\alpha+1)-\alpha}+\alpha=\alpha+2$

또 $f(2\alpha)=2\sqrt{2\alpha-\alpha}+\alpha=2\sqrt{\alpha}+\alpha$이므로

$f\left(\dfrac{\beta+\gamma}{2}\right)=f(2\alpha)$에서 $\alpha+2=2\sqrt{\alpha}+\alpha$

$\sqrt{\alpha}=1$ $\therefore \alpha=1$

Step 3 $f(x)$를 구하여 $f(\alpha-1)$의 값을 구한다.

따라서 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2+1 & (x\le 1)\\ 2\sqrt{x-1}+1 & (x>1)\end{cases}$이므로

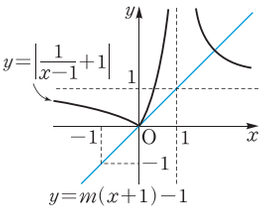
$f(\alpha-1)=f(0)=(-1)^2+1=2$ 답 2

1007 Step 1 $f(m)=3$의 의미를 알고, m의 값의 범위를 구한다.

ㄱ. $f(m)=3$, 즉 $n(A\cap B_m)=3$이려면 $y=\left|\dfrac{1}{x-1}+1\right|$의

그래프와 직선 $y=m(x+1)-1$이 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$y=\left|\dfrac{1}{x-1}+1\right|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=m(x+1)-1$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ -1)$을 지난다.



$0\le x<1$일 때 $\quad y=\left|\dfrac{1}{x-1}+1\right|=-\dfrac{1}{x-1}-1$

$-\dfrac{1}{x-1}-1=m(x+1)-1$에서 $\quad -1=m(x^2-1)$

$\therefore\ mx^2-m+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

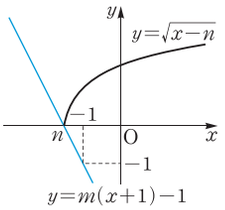
$D=-4m(-m+1)=0 \quad \therefore\ m=1\ (\because\ m>0)$

즉 $m=1$일 때 두 그래프는 접하므로 $f(m)=3$이 되는 m의 값의 범위는 $\quad m>1$ (참)

Step 2 $g_m(n)=1$의 의미를 알고, $m<0$일 때 $g_m(n)=1$인 n의 값의 범위를 구한다.

ㄴ. $g_m(n)=1$, 즉 $n(B_m\cap C_n)=1$이려면 직선 $y=m(x+1)-1$과 $y=\sqrt{x-n}$의 그래프가 한 점에서 만나야 한다.

$y=\sqrt{x-n}$의 그래프는 시작점이 $(n,\ 0)$이고, 직선 $y=m(x+1)-1$에서 $m<0$이므로 오른쪽 그림과 같다.



직선 $y=m(x+1)-1$의 x절편은 $0=m(x+1)-1$에서

$mx=1-m \quad \therefore\ x=\dfrac{1-m}{m}$

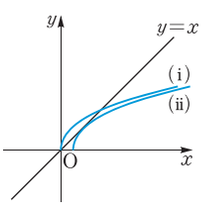
따라서 $g_m(n)=1$이 되는 n의 값의 범위는

$n\le\dfrac{1-m}{m}$ (참)

Step 3 $f(k)=2$, $g_k(n)=2$의 의미를 알고, n의 값의 범위를 구한다.

ㄷ. ㄱ에서 $m=1$일 때 $f(m)=2$이고, $m\ne1$일 때 $f(m)\ne2$이므로 $\quad k=1$

$g_1(n)=2$, 즉 $n(B_1\cap C_n)=2$이려면 직선 $y=x$와 $y=\sqrt{x-n}$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



(i) $y=\sqrt{x-n}$의 그래프의 시작점이 원점일 때

$n=0$

(ii) $y=\sqrt{x-n}$의 그래프가 직선 $y=x$와 접할 때

$\sqrt{x-n}=x$에서 $\quad x-n=x^2 \quad \therefore\ x^2-x+n=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4n=0 \quad \therefore\ n=\dfrac{1}{4}$

(i), (ii)에서 $g_k(n)=2$가 되는 n의 값의 범위는

$0\le n<\dfrac{1}{4}$ (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

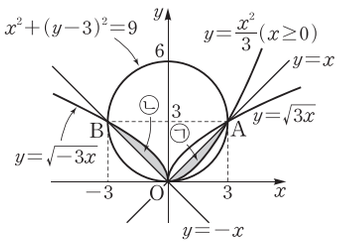
1008 Step 1 두 직선 $y=x$, $y=-x$를 긋고, 넓이가 같은 부분을 찾아 S_3의 값을 구한다.

$y=\dfrac{x^2}{3}\ (x\ge0)$이라 하면

$x^2=3y \quad \therefore\ x=\sqrt{3y}\ (\because\ x\ge0)$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\sqrt{3x}$

즉 $y=\dfrac{x^2}{3}\ (x\ge0)$의 역함수는 $y=\sqrt{3x}$이고, $y=\sqrt{3x}$의 그래프와 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림의 두 도형 ㉠, ㉡의 넓이가 서로 같다.



이때 $\dfrac{x^2}{3}=x$에서 $\quad x^2-3x=0$

$x(x-3)=0 \quad \therefore\ x=0$ 또는 $x=3$

따라서 S_3은 반지름의 길이가 3인 반원의 넓이와 삼각형 OAB의 넓이의 합과 같으므로

$S_3=\dfrac{1}{2}\times\pi\times3^2+\dfrac{1}{2}\times6\times3=\dfrac{9}{2}\pi+9$

Step 2 $S_3-(S_1+S_2)$의 값을 구한다.

한편 $S_1+S_2+S_3$의 값은 원 $x^2+(y-3)^2=9$의 넓이와 같으므로

$S_1+S_2+S_3=\pi\times3^2=9\pi$

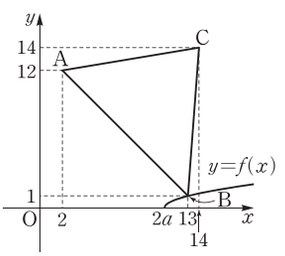
$\therefore\ S_1+S_2=9\pi-S_3$

$\therefore\ S_3-(S_1+S_2)=S_3-(9\pi-S_3)=2S_3-9\pi$

$=2\left(\dfrac{9}{2}\pi+9\right)-9\pi=18$ 답 18

1009 Step 1 $y=f(x)$의 그래프가 삼각형 ABC와 만나기 위한 a의 최댓값을 구한다.

$y=f(x)$의 그래프가 삼각형 ABC와 만나도록 하는 a의 값은 $y=f(x)$의 그래프가 점 $\mathrm{B}(13,\ 1)$을 지날 때 최대이다.



즉 $1=\sqrt{13-2a}$에서

$13-2a=1 \quad \therefore\ a=6$

Step 2 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 삼각형 ABC와 만나기 위한 a의 최댓값을 구한다.

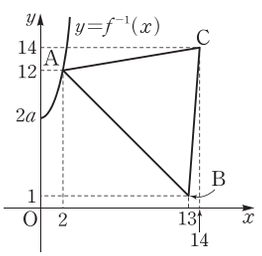
$y=\sqrt{x-2a}$의 양변을 제곱하면

$y^2=x-2a \quad \therefore\ x=y^2+2a$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=x^2+2a$

$\therefore\ f^{-1}(x)=x^2+2a\ (x\ge0)$

$y=f^{-1}(x)$의 그래프가 삼각형 ABC와 만나도록 하는 a의 값은 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(2,\ 12)$를 지날 때 최대이다.



즉 $12=2^2+2a$에서

$a=4$

Step 3 a의 최댓값을 구한다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 모두 삼각형 ABC와 만나도록 하는 실수 a의 최댓값은 4이다.

답 4

1010 Step 1 점 P의 y좌표를 k라 하고, 선분 PQ의 길이를 k에 대한 식으로 나타낸다.

점 P의 y좌표를 $k\,(k\geq 0)$라 하면

$k=\sqrt{2x-3}$, $\quad 2x-3=k^2$

$\therefore\ x=\dfrac{k^2+3}{2}$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(\dfrac{k^2+3}{2},\ k\right)$

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 직선 $y=-x+a$는 직선 $y=x$와 수직이므로 두 점 P, Q는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 $\mathrm{Q}\left(k,\ \dfrac{k^2+3}{2}\right)$이므로

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\left(k-\frac{k^2+3}{2}\right)^2+\left(\frac{k^2+3}{2}-k\right)^2}$$

$$=\sqrt{2\left(\frac{k^2+3}{2}-k\right)^2}=\sqrt{2}\left|\frac{k^2-2k+3}{2}\right|$$

Step 2 삼각형 OPQ의 넓이가 $\dfrac{a}{2}$임을 이용하여 k의 값을 구한다.

원점과 직선 $y=-x+a$, 즉 $x+y-a=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-a|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

이고, 삼각형 OPQ의 넓이는 $\dfrac{a}{2}$이므로

$$\frac{1}{2}\times\frac{a}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}\left|\frac{k^2-2k+3}{2}\right|=\frac{a}{2}$$

$$\left|\frac{k^2-2k+3}{2}\right|=1$$

$\therefore\ k^2-2k+3=\pm 2$

(i) $k^2-2k+3=-2$일 때

$k^2-2k+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-5=-4<0$

이므로 실근을 갖지 않는다.

(ii) $k^2-2k+3=2$일 때

$k^2-2k+1=0$, $\quad (k-1)^2=0$

$\therefore\ k=1$

(i), (ii)에서 $\quad k=1$

Step 3 $f^{-1}(a)$의 값을 구한다.

점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{1^2+3}{2},\ 1\right)$, 즉 $(2,\ 1)$이고 점 P가 직선 $y=-x+a$ 위의 점이므로

$1=-2+a$ $\quad\therefore\ a=3$

$f^{-1}(a)=b$라 하면 $f(b)=a=3$이므로

$\sqrt{2b-3}=3$, $\quad 2b-3=9$

$\therefore\ b=6$

답 6

시험만점 완성하기

본책 196~199쪽

1011 전략 $\sqrt{A}$의 값이 실수이려면 $A\geq 0$이어야 함을 이용한다.

$3x+6\geq 0$이므로 $\quad x\geq -2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$2-5x\geq 0$이므로 $\quad x\leq \dfrac{2}{5}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad -2\leq x\leq \dfrac{2}{5}$

$-2\leq x\leq \dfrac{2}{5}$일 때, $x-2<0$이므로

$$\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}$$

$$=-(x-2)=-x+2$$

답 ②

1012 전략 분자와 분모에 적당한 수를 곱하여 분모를 유리화한다.

$$\frac{1-\sqrt{5}+\sqrt{6}}{1+\sqrt{5}+\sqrt{6}}=\frac{(1-\sqrt{5}+\sqrt{6})\{(1+\sqrt{5})-\sqrt{6}\}}{\{(1+\sqrt{5})+\sqrt{6}\}\{(1+\sqrt{5})-\sqrt{6}\}}$$

$$=\frac{1-(\sqrt{5}-\sqrt{6})^2}{(1+\sqrt{5})^2-(\sqrt{6})^2}$$

$$=\frac{1-(5-2\sqrt{30}+6)}{1+2\sqrt{5}+5-6}$$

$$=\frac{-10+2\sqrt{30}}{2\sqrt{5}}$$

$$=\frac{-5+\sqrt{30}}{\sqrt{5}}$$

$$=\sqrt{6}-\sqrt{5}$$

따라서 $p=6$, $q=5$이므로

$p-q=1$

답 ①

1013 전략 먼저 분모의 유리화를 이용하여 $\dfrac{1}{f(x)}$을 간단한 형태로 나타낸다.

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{3x+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{3x+1}}{(\sqrt{3x-2}+\sqrt{3x+1})(\sqrt{3x-2}-\sqrt{3x+1})}$$

$$=-\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{3x+1}}{3}$$

$$\therefore\ \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(56)}$$

$$=-\frac{1}{3}\{(1-\sqrt{4})+(\sqrt{4}-\sqrt{7})+(\sqrt{7}-\sqrt{10})+\cdots$$

$$+(\sqrt{166}-\sqrt{169})\}$$

$$=-\frac{1}{3}\times(1-13)=4$$

답 ④

1014 전략 $x-y$, xy의 값을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})-\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$$

$$=\frac{x-y-2\sqrt{xy}}{x-y}$$

이때 $x-y=\frac{\sqrt{8}+1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{8}-1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,

$xy=\frac{\sqrt{8}+1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{8}-1}{\sqrt{2}}=\frac{8-1}{2}=\frac{7}{2}$이므로

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{2}-2\sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{14}}{\sqrt{2}}=1-\sqrt{7}$$

답 ②

1015 전략 $f(x)$를 구한 후 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지남을 이용한다.

$y=\sqrt{2x+4}-5$의 그래프를 y축의 방향으로 p만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{2x+4}-5+p$

이 함수의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\sqrt{-2x+4}-5+p$

$\therefore y=-\sqrt{-2x+4}+5-p$

즉 $f(x)=-\sqrt{-2x+4}+5-p$의 그래프가 원점을 지나므로

$f(0)=-\sqrt{4}+5-p=0$ $\therefore p=3$

답 ④

1016 전략 무리함수의 정의역은 근호 안의 식의 값이 0 이상이 되도록 하는 x의 값의 범위이다.

$-5x-10\geq0$에서 $5x\leq-10$ $\therefore x\leq-2$

$\therefore A=\{x\mid x\leq-2\}$

$2x+13\geq0$에서 $2x\geq-13$ $\therefore x\geq-\frac{13}{2}$

$\therefore B=\left\{x\middle|x\geq-\frac{13}{2}\right\}$

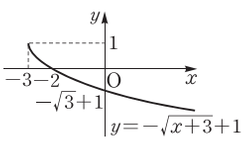
따라서 $A\cap B=\left\{x\middle|-\frac{13}{2}\leq x\leq-2\right\}$이므로 집합 $A\cap B$의 정수인 원소는 -6, -5, -4, -3, -2의 5개이다.

답 ⑤

1017 전략 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 꼴로 변형하여 그래프를 그려 본다.

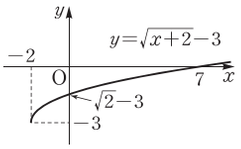
① $y=-\sqrt{x+3}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=-\sqrt{x+3}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2, 3, 4 사분면을 지난다.



② $y=\sqrt{x+2}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

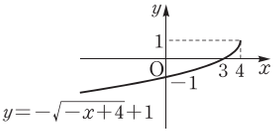
따라서 $y=\sqrt{x+2}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 3, 4 사분면을 지난다.



③ $y=-\sqrt{-x+4}+1=-\sqrt{-(x-4)}+1$

이므로 $y=-\sqrt{-x+4}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

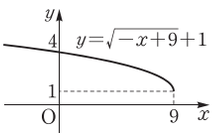
따라서 $y=-\sqrt{-x+4}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 3, 4 사분면을 지난다.



④ $y=\sqrt{-x+9}+1=\sqrt{-(x-9)}+1$

이므로 $y=\sqrt{-x+9}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 9만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

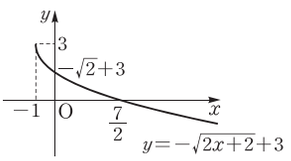
따라서 $y=\sqrt{-x+9}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2 사분면을 지난다.



⑤ $y=-\sqrt{2x+2}+3=-\sqrt{2(x+1)}+3$

이므로 $y=-\sqrt{2x+2}+3$의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=-\sqrt{2x+2}+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 4 사분면을 지난다.



따라서 그래프가 제4 사분면을 지나지 않는 것은 ④이다.

답 ④

1018 전략 그래프가 점 (p, q)에서 시작하는 무리함수의 식은 $y=\pm\sqrt{a(x-p)}+q$ $(a\neq0)$로 놓을 수 있다.

주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{px}$ $(p>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$f(x)=\sqrt{p(x+4)}+1$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

주어진 그래프가 점 $(0, 5)$를 지나므로

$\sqrt{4p}+1=5$, $\sqrt{4p}=4$

$4p=16$ $\therefore p=4$

$p=4$를 ㉠에 대입하면

$f(x)=\sqrt{4(x+4)}+1$

$\therefore f(12)=\sqrt{4\times16}+1=9$

답 ③

다른 풀이 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-4, 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{-4p+q}+1$, $\sqrt{-4p+q}=0$

$\therefore -4p+q=0$ …… ㉡

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, 5)$를 지나므로

$5=\sqrt{q}+1$, $\sqrt{q}=4$ $\therefore q=16$

$q=16$을 ㉡에 대입하여 정리하면 $p=4$

$\therefore f(x)=\sqrt{4x+16}+1$

1019 전략 유리함수의 그래프의 점근선과 y절편을 이용하여 p, q, r의 값을 먼저 구한다.

$$y=\frac{qx+r}{px-1}=\frac{\frac{q}{p}(px-1)+\frac{q}{p}+r}{px-1}=\frac{\frac{q}{p}+r}{px-1}+\frac{q}{p}$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은 $x=\frac{1}{p}$, $y=\frac{q}{p}$

따라서 $\frac{1}{p}=-\frac{1}{2}$, $\frac{q}{p}=\frac{3}{2}$이므로

$p=-2$, $q=-3$

또 y절편이 2이므로 $-r=2$ $\therefore r=-2$

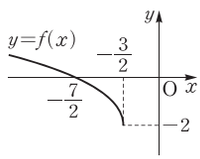
$\therefore f(x)=\sqrt{-2x-3}-2$

④ $f(-6)=\sqrt{12-3}-2=1$

⑤ $f(x)=\sqrt{-2x-3}-2=\sqrt{-2\left(x+\frac{3}{2}\right)}-2$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2, 3사분면을 지난다.



따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

1020 전략 (근호 안의 식의 값)≥0임을 이용하여 함수 $f(x)$의 정의역을 구한다.

$2+x\geq 0$, $2-x\geq 0$이므로

$-2\leq x\leq 2$

즉 함수 $f(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,-2\leq x\leq 2\}$이고, $f(x)\geq 0$이므로 $\{f(x)\}^2$이 최대 또는 최소일 때, $f(x)$도 최대 또는 최소이다.

$\{f(x)\}^2=(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})^2$

$=2+x+2\sqrt{4-x^2}+2-x$

$=4+2\sqrt{4-x^2}$

에서 $\{f(x)\}^2$은 $x=0$일 때 최댓값 8을 갖고, $x=\pm 2$일 때 최솟값 4를 갖는다.

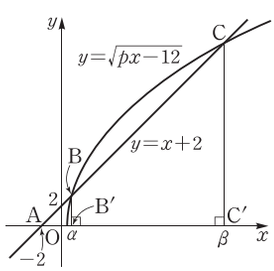
따라서 $M=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $m=\sqrt{4}=2$이므로

$Mm=4\sqrt{2}$ 답 ④

1021 전략 두 점 B, C의 x좌표를 각각 α, β로 놓고 식을 세운다.

$y=\sqrt{px-12}$의 그래프와 직선 $y=x+2$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $p>0$이어야 하므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

두 점 B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 $B'(\alpha, 0)$, $C'(\beta, 0)$이라 하자.



A$(-2, 0)$이고 점 B가 $\overline{AC}$를 1 : 5로 내분하므로

$\overline{AB'}:\overline{B'C'}=\overline{AB}:\overline{BC}=1:5$

즉 $(\alpha+2):(\beta-\alpha)=1:5$이므로

$5(\alpha+2)=\beta-\alpha$, $5\alpha+10=\beta-\alpha$

$\therefore \beta=6\alpha+10$ …… ㉠

직선 $y=x+2$와 $y=\sqrt{px-12}$의 그래프가 만나는 점의 x좌표는 $\sqrt{px-12}=x+2$에서 양변을 제곱하면

$px-12=x^2+4x+4$

$\therefore x^2+(4-p)x+16=0$

이 이차방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=p-4$ …… ㉡

$\alpha\beta=16$ …… ㉢

㉠을 ㉢에 대입하면 $\alpha(6\alpha+10)=16$

$3\alpha^2+5\alpha-8=0$, $(\alpha-1)(3\alpha+8)=0$

$\therefore \alpha=1$ ($\because \alpha>0$)

$\alpha=1$을 ㉢에 대입하면 $\beta=16$이므로 ㉡에서

$1+16=p-4$ $\therefore p=21$ 답 ⑤

참고 $y=\sqrt{px-12}$에서 $p>0$이므로 정의역은

$\left\{x\,\middle|\,x\geq\frac{12}{p}\right\}$ $\therefore \alpha\geq\frac{12}{p}>0$

1022 전략 유리함수의 그래프를 그린 후 무리함수의 그래프를 움직여 두 함수의 그래프가 제2사분면에서 만나는 경우를 찾는다.

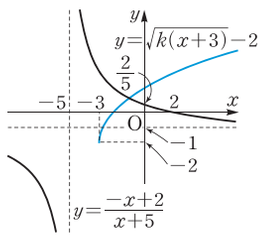
$y=\sqrt{kx}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{k(x+3)}-2$

$y=\frac{-x+2}{x+5}=\frac{-(x+5)+7}{x+5}=\frac{7}{x+5}-1$

이므로 $y=\frac{-x+2}{x+5}$의 그래프는 $y=\frac{7}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\sqrt{k(x+3)}-2$의 그래프가 $y=\frac{-x+2}{x+5}$의 그래프와 제2사분면에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 $y=\sqrt{k(x+3)}-2$의 그래프의 y절편이 $\frac{2}{5}$보다 커야 하므로



$\sqrt{3k}-2>\frac{2}{5}$, $\sqrt{3k}>\frac{12}{5}$

$3k>\frac{144}{25}$ $\therefore k>\frac{48}{25}$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다. 답 ②

1023 전략 △ABC의 넓이가 최대가 될 때의 점 C의 위치를 생각해 본다.

점 C가 직선 AB와 평행하고 $y=\sqrt{4x-8}$의 그래프에 접하는 직선의 접점일 때 △ABC의 넓이가 최대이다.

직선 AB의 방정식은

$y=\frac{4-0}{6-2}(x-2)$, 즉 $y=x-2$

이므로 직선 AB와 평행한 접선의 방정식을 $y=x+k$ (k는 상수)라 하자.

$\sqrt{4x-8}=x+k$의 양변을 제곱하면

$4x-8=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+2(k-2)x+k^2+8=0$

x에 대한 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(k^2+8)=0$$

$$-4k-4=0 \qquad \therefore\ k=-1$$

두 직선 $y=x-2$, $y=x-1$ 사이의 거리는 직선 $y=x-1$ 위의 점 $(0,\ -1)$과 직선 $y=x-2$, 즉 $x-y-2=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(6-2)^2+(4-0)^2}=4\sqrt{2}$이므로 $\triangle ABC$의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$$

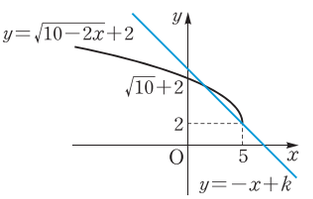
답 ④

1024 전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나면 $y=f^{-1}(x)$, $y=g^{-1}(x)$의 그래프도 서로 다른 두 점에서 만남을 이용한다.

함수 $y=-x+k$의 역함수는 $y=-x+k$이므로 함수 $y=\sqrt{10-2x}+2$의 역함수의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 함수 $y=\sqrt{10-2x}+2$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$y=\sqrt{10-2x}+2=\sqrt{-2(x-5)}+2$

이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-x+k$가 점 $(5,\ 2)$를 지날 때, 서로 다른 두 점에서 만나고 k의 값이 최소이다.



$2=-5+k$에서 $\quad k=7$

따라서 k의 최솟값은 7이다.

답 ③

1025 전략 $\sqrt{A}$의 값이 실수가 되려면 $A\geq 0$이어야 함을 이용한다.

$\sqrt{-x^2+px+q}$의 값이 실수가 되려면

$$-x^2+px+q\geq 0 \qquad \therefore\ x^2-px-q\leq 0$$

이 부등식의 해가 $-1\leq x\leq 6$이므로

$$x^2-px-q=(x+1)(x-6)$$
$$=x^2-5x-6$$

따라서 $p=5$, $q=6$이므로

$$p+q=11$$

답 11

1026 전략 정의역과 치역을 이용하여 $f(x)=-\sqrt{a(x-p)}+q$의 꼴로 나타내어 본다.

정의역이 $\{x\mid x\leq 5\}$, 치역이 $\{y\mid y\leq 4\}$이므로

$$f(x)=-\sqrt{a(x-5)}+4$$

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(4,\ 2)$를 지나므로 $f(4)=2$에서

$$-\sqrt{a\times(-1)}+4=2$$

$$\sqrt{-a}=2, \qquad -a=4 \qquad \therefore\ a=-4$$

$$\therefore\ f(x)=-\sqrt{-4(x-5)}+4=-\sqrt{-4x+20}+4$$

따라서 $a=-4$, $b=20$, $c=4$이므로

$$a+b+c=20$$

답 20

1027 전략 $y=-\sqrt{px+q}+r$를 $y=-\sqrt{p(x-a)}+b$의 꼴로 변형한 후 주어진 그래프를 이용한다.

$$y=-\sqrt{px+q}+r=-\sqrt{p\left(x+\frac{q}{p}\right)}+r$$

이므로 $y=-\sqrt{px+q}+r$의 그래프는 $y=-\sqrt{px}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{q}{p}$만큼, y축의 방향으로 r만큼 평행이동한 것이다.

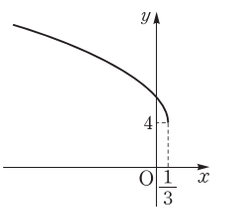
주어진 그래프에서 $\quad p>0$, $-\frac{q}{p}=3$, $r=4$

$$\therefore\ p>0,\ q=-3p<0,\ r=4$$

$$y=\sqrt{qx+p}+r=\sqrt{q\left(x+\frac{p}{q}\right)}+r=\sqrt{q\left(x-\frac{1}{3}\right)}+4$$

이므로 $y=\sqrt{qx+p}+r$의 그래프는 $y=\sqrt{qx}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{3}$만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\sqrt{qx+p}+r$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제1, 2사분면을 지난다.



답 제1, 2사분면

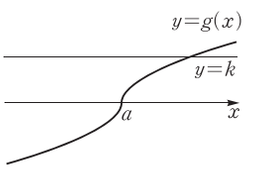
1028 전략 b의 값의 부호에 따라 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 그려 본다.

$$g(x)=\begin{cases}|\sqrt{x-a}-b|+b & (x\geq a)\\ -\sqrt{-x+a}+b+|b| & (x<a)\end{cases}$$에서

(i) $b\leq 0$일 때

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{x-a} & (x\geq a)\\ -\sqrt{-x+a} & (x<a)\end{cases}$$

이므로 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 모든 실수 k에 대하여 $h(k)=1$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $b>0$일 때

$\sqrt{x-a}-b=0$에서 $\quad \sqrt{x-a}=b$

$$x-a=b^2 \qquad \therefore\ x=a+b^2$$

ⓐ $x\geq a+b^2$이면 $\sqrt{x-a}-b\geq 0$이므로

$$g(x)=(\sqrt{x-a}-b)+b=\sqrt{x-a}$$

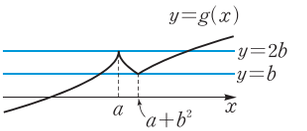
ⓑ $a\leq x<a+b^2$이면 $\sqrt{x-a}-b<0$이므로

$$g(x)=-(\sqrt{x-a}-b)+b$$
$$=-\sqrt{x-a}+2b$$

ⓒ $x<a$일 때

$$g(x)=-\sqrt{-x+a}+b+|b|$$
$$=-\sqrt{-x+a}+2b$$

(i), (ii)에서 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 $h(k)=3$이려면

$$b<k<2b$$

이를 만족시키는 정수 k의 개수가 3이므로

$2b-b-1=3 \quad \therefore b=4$

조건 (나)에서 $(h\circ g)(x)=h(g(x))=2$이므로

$g(x)=b=4$ 또는 $g(x)=2b=8$

이를 만족시키는 x의 최댓값이 72이므로

$g(72)=\sqrt{72-a}=8, \quad 72-a=64$

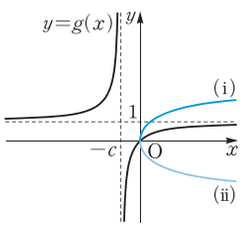
$\therefore a=8$

$\therefore a+b=12$ 답 12

1029 전략 먼저 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 그린 후, $(-1)^a$, $(-1)^b$이 양수, 음수인 경우로 나누어 생각해 본다.

$g(x)=\dfrac{x}{x+c}=\dfrac{(x+c)-c}{x+c}=-\dfrac{c}{x+c}+1$

에서 $c>0$이고 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 a, b, c의 값에 관계없이 항상 원점을 지나므로 두 그래프가 한 점에서 만나는 경우는 오른쪽 그림과 같이 두 가지 경우가 있다.



(i) $(-1)^a$, $(-1)^b$이 모두 양수인 경우

a, b가 모두 짝수이어야 하고 c가 될 수 있는 수는 6개이므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$3\times3\times6=54$

(ii) $(-1)^a$은 음수, $(-1)^b$은 양수인 경우

a는 홀수, b는 짝수이어야 하고 c가 될 수 있는 수는 6개이므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$3\times3\times6=54$

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$54+54=108$ 답 108

1030 전략 먼저 함수 $f(x)$의 치역을 구한다.

$x>-3$에서

$\sqrt{x+3}>0 \quad \therefore \sqrt{x+3}-2>-2$

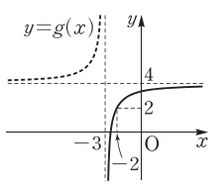
즉 함수 $y=f(x)$의 치역은 $\{y|y>-2\}$이다.

한편

$g(x)=\dfrac{4x+10}{x+3}=\dfrac{4(x+3)-2}{x+3}$

$=-\dfrac{2}{x+3}+4$

이므로 $x>-3$에서 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x>-2$에서

$2<g(x)<4$

이므로 $x>-3$에서 정의된 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 치역은

$\{y|2<y<4\}$ 답 $\{y|2<y<4\}$

1031 전략 먼저 $f(x)$를 구한 후 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것임을 이용한다.

$y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-x} \quad \therefore f(x)=\sqrt{-x}$ … ❶

$y=\sqrt{-x+2}+1=\sqrt{-(x-2)}+1$이므로 $y=\sqrt{-x+2}+1$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. … ❷

점 A(1, 3)을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점 B의 좌표는

$(1+2, 3+1)$, 즉 $(3, 4)$ … ❸

$\therefore \overline{OB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$ … ❹

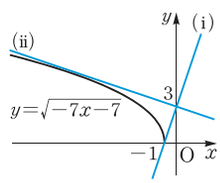
답 5

단계	채점 요소	배점
❶	$f(x)$ 구하기	1점
❷	주어진 평행이동 구하기	1점
❸	점 B의 좌표 구하기	1점
❹	$\overline{OB}$의 길이 구하기	1점

1032 전략 $y=\sqrt{-7x-7}$의 그래프와 두 직선 $y=ax+3$, $y=bx+3$을 그려 $x\le-1$에서 주어진 부등식이 성립할 조건을 찾는다.

$y=\sqrt{-7x-7}=\sqrt{-7(x+1)}$

이므로 $y=\sqrt{-7x-7}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 두 직선 $y=ax+3$, $y=bx+3$은 a, b의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 3)$을 지난다.

(i) 직선 $y=ax+3$이 점 $(-1, 0)$을 지날 때

$0=-a+3 \quad \therefore a=3$

따라서 $ax+3\le\sqrt{-7x-7}$이려면 $a\ge3$이어야 하므로 a의 최솟값은 3이다. … ❶

(ii) 직선 $y=bx+3$이 $y=\sqrt{-7x-7}$의 그래프에 접할 때

$\sqrt{-7x-7}=bx+3$의 양변을 제곱하면

$-7x-7=b^2x^2+6bx+9$

$\therefore b^2x^2+(6b+7)x+16=0$

x에 대한 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(6b+7)^2-64b^2=0$

$4b^2-12b-7=0, \quad (2b+1)(2b-7)=0$

$\therefore b=-\dfrac{1}{2}$ ($\because b<0$)

따라서 $\sqrt{-7x-7}\le bx+3$이려면 $b\le-\dfrac{1}{2}$이어야 하므로 b의 최댓값은 $-\dfrac{1}{2}$이다. … ❷

(i), (ii)에서 $b-a$의 최댓값은

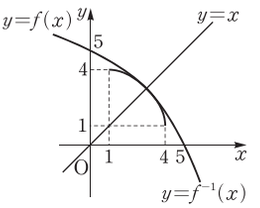
$-\dfrac{1}{2}-3=-\dfrac{7}{2}$ … ❸

답 $-\dfrac{7}{2}$

단계	채점 요소	배점
❶	a의 최솟값 구하기	2점
❷	b의 최댓값 구하기	2점
❸	$b-a$의 최댓값 구하기	1점

1033 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용하여 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

$y=f^{-1}(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 오른쪽 그림과 같다.



즉 $y=f(x)$의 그래프는 $y=\sqrt{px}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$$f(x)=\sqrt{p(x-4)}+1 \quad \cdots ❶$$

$y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, 5)$를 지나므로

$$5=\sqrt{-4p}+1$$

$$\sqrt{-4p}=4, \qquad -4p=16$$

$$\therefore\ p=-4$$

$$\therefore\ f(x)=\sqrt{-4(x-4)}+1$$

$$=\sqrt{-4x+16}+1$$

따라서 $q=16$, $r=1$이므로 … ❷

$$pqr=-64 \quad \cdots ❸$$

답 -64

단계	채점 요소	배점
❶	$f(x)$를 $\sqrt{p(x-a)}+b$의 꼴로 나타내기	1점
❷	p, q, r의 값 구하기	2점
❸	pqr의 값 구하기	1점

다른 풀이 $f^{-1}(x)=k(x-1)^2+4$ $(k<0,\ x\geq 1)$라 하면

$y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(5, 0)$을 지나므로

$$0=16k+4 \qquad \therefore\ k=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ f^{-1}(x)=-\frac{1}{4}(x-1)^2+4\ (x\geq 1)$$

$y=-\frac{1}{4}(x-1)^2+4$라 하면

$$(x-1)^2=-4y+16$$

$$x-1=\sqrt{-4y+16}\ (\because\ x\geq 1)$$

$$\therefore\ x=\sqrt{-4y+16}+1$$

x와 y를 서로 바꾸면

$$y=\sqrt{-4x+16}+1$$

$$\therefore\ f(x)=\sqrt{-4x+16}+1$$

따라서 $p=-4$, $q=16$, $r=1$이므로

$$pqr=-64$$

만점 공략 노트

$y=\sqrt{px+q}+r$ $(p\neq 0,\ y\geq r)$라 하면 $\qquad y-r=\sqrt{px+q}$

$$(y-r)^2=px+q \qquad \therefore\ x=\frac{1}{p}\{(y-r)^2-q\}$$

x와 y를 서로 바꾸면 $\qquad y=\frac{1}{p}\{(x-r)^2-q\}\ (x\geq r)$

즉 $y=\sqrt{px+q}+r$ $(p\neq 0)$의 역함수는

$$y=\frac{1}{p}(x-r)^2-\frac{q}{p}\ (x\geq r)$$

1034 전략 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$ 사이의 관계를 이용한다.

$y=\sqrt{4x+5}$ $(y\geq 0)$라 하면 $\qquad y^2=4x+5$

$$\therefore\ x=\frac{1}{4}y^2-\frac{5}{4}$$

x와 y를 서로 바꾸면 $\qquad y=\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{4}\ (x\geq 0)$

즉 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다. … ❶

따라서 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같다.

$\sqrt{4x+5}=x$에서 $\qquad 4x+5=x^2, \qquad x^2-4x-5=0$

$$(x+1)(x-5)=0 \qquad \therefore\ x=5\ (\because\ x\geq 0)$$

$$\therefore\ \mathrm{A}(5, 5) \quad \cdots ❷$$

직선 l이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 B와 점 C는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉 $\mathrm{C}(3, 1)$이므로

$$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2} \quad \cdots ❸$$

직선 l은 기울기가 -1이고 점 B를 지나므로 직선 l의 방정식은

$$y-3=-(x-1) \qquad \therefore\ x+y-4=0$$

점 $\mathrm{A}(5, 5)$와 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{|5+5-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2} \quad \cdots ❹$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}=6 \quad \cdots ❺$$

답 6

단계	채점 요소	배점
❶	$g(x)$가 $f(x)$의 역함수임을 알기	1점
❷	점 A의 좌표 구하기	2점
❸	$\overline{\mathrm{BC}}$의 길이 구하기	1점
❹	점 A와 직선 l 사이의 거리 구하기	1점
❺	삼각형 ABC의 넓이 구하기	1점