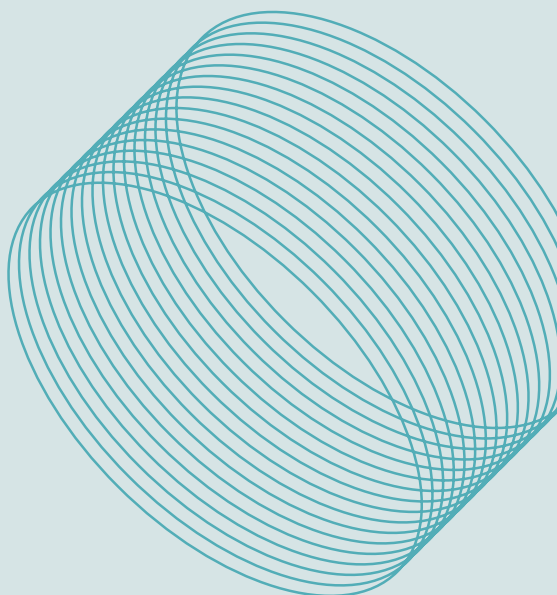


개념

수학의 시작 개념원리

공통수학 2

정답 및 풀이



1

평면좌표

1. 도형의 방정식

01

두 점 사이의 거리

● 본책 10~15쪽

1

 $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$ 이므로

$$\sqrt{(1-a)^2 + (2-a-3)^2} = 2\sqrt{3}$$

양변을 제곱하면 $(1-a)^2 + (-a-1)^2 = 12$

$$a^2 = 5 \quad \therefore a = \sqrt{5} \quad (\because a > 0) \quad \text{답 } \sqrt{5}$$

2

 $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ 이므로

$$\sqrt{(10-4)^2 + \{1-(-5)\}^2}$$

$$= 2\sqrt{(a-10)^2 + (4-1)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 20a + 91 = 0, \quad (a-7)(a-13) = 0$$

$$\therefore a = 7 \text{ 또는 } a = 13 \quad \text{답 } 7, 13$$

3

$$\overline{AB} = \sqrt{\{a-(-1)\}^2 + (5-a)^2}$$

$$= \sqrt{2a^2 - 8a + 26}$$

$$= \sqrt{2(a-2)^2 + 18}$$

따라서 $\overline{AB}$ 의 길이는 $a=2$ 일 때 최솟값 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ 를 갖는다. 답 2

4

두 점 P, Q의 좌표를 각각 $(a, 0)$, $(0, b)$ 라 하자. $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(a-1)^2 + (0-4)^2 = (a+2)^2 + (0-3)^2$$

$$a^2 - 2a + 17 = a^2 + 4a + 13$$

$$-6a = -4 \quad \therefore a = \frac{2}{3}$$

$$\therefore P\left(\frac{2}{3}, 0\right)$$

또 $\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 에서 $\overline{AQ}^2 = \overline{BQ}^2$ 이므로

$$(0-1)^2 + (b-4)^2 = (0+2)^2 + (b-3)^2$$

$$b^2 - 8b + 17 = b^2 - 6b + 13$$

$$-2b = -4 \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore Q(0, 2)$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{\left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 + (2-0)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{40}{9}} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$$

$$\text{답 } \frac{2\sqrt{10}}{3}$$

5

점 P(a, b)가 직선 $y = -x + 2$ 위의 점이므로

$$b = -a + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 P(a, -a+2)에 대하여 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$$\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$$

$$(a-2)^2 + (-a+2-3)^2$$

$$= (a-6)^2 + (-a+2+1)^2$$

$$2a^2 - 2a + 5 = 2a^2 - 18a + 45$$

$$16a = 40 \quad \therefore a = \frac{5}{2}$$

$$\textcircled{1} \text{에 } a = \frac{5}{2} \text{를 대입하면 } b = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore a - b = 3$$

답 3

6

삼각형 ABC의 외심을 P(x, y)라 하면 점 P에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같으므로

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$$

 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (y-7)^2$$

$$y^2 - 2y + 1 = y^2 - 14y + 49$$

$$12y = 48 \quad \therefore y = 4$$

또 $\overline{PA} = \overline{PC}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2$ 이므로

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = (x-4)^2 + (y-3)^2$$

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5 = x^2 - 8x + y^2 - 6y + 25$$

$$4x + 4y = 20 \quad \therefore x + y = 5$$

 $x + y = 5$ 에 $y = 4$ 를 대입하면

$$x + 4 = 5 \quad \therefore x = 1$$

따라서 삼각형 ABC의 외심의 좌표는 (1, 4)이다.

답 (1, 4)

개념 노트

삼각형의 외심

- ① 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점(외심)에서 만난다.
- ② 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

7

$$(1) \overline{AB} = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{5}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(5-2)^2 + (2+2)^2} = 5$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(1-5)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$$(2) \overline{AB} = \sqrt{(0+\sqrt{3})^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(\sqrt{3}-0)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(-\sqrt{3}-\sqrt{3})^2 + (1-1)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다.

답 (1) $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형 (2) 정삼각형

8

$$\overline{AB} = \sqrt{(3+1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(a-3)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{a^2 - 6a + 10}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(-1-a)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{a^2 + 2a + 17}$$

이때 $\triangle ABC$ 는 $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 \text{에서}$$

$$25 = a^2 - 6a + 10 + a^2 + 2a + 17$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0, \quad (a-1)^2 = 0$$

$$\therefore a = 1$$

답 1

9

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-0)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(3-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(0-3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10}$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{CA}, \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CA} = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \sqrt{10} = 5 \quad \text{답 5}$$

10

점 P의 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$$

$$= \{(a+4)^2 + (-3)^2\} + \{(a-2)^2 + 3^2\}$$

$$= 2a^2 + 4a + 38 = 2(a+1)^2 + 36$$

따라서 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 은 $a = -1$ 일 때 최솟값 36을 갖고, 그때의 점 P의 좌표는 $(-1, 0)$ 이다.

답 최솟값: 36, P(-1, 0)

11

점 P의 좌표를 (a, a) 라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$$

$$= \{(a+3)^2 + (a-2)^2\} + \{(a-4)^2 + (a-5)^2\}$$

$$= 4a^2 - 16a + 54$$

$$= 4(a-2)^2 + 38$$

따라서 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 은 $a = 2$ 일 때 최솟값 38을 갖고, 그때의 점 P의 좌표는 $(2, 2)$ 이다.

답 (2, 2)

12

점 P의 좌표를 $(a, -a+2)$ 라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$$

$$= \{(a-1)^2 + (-a+2+4)^2\}$$

$$+ \{(a-3)^2 + (-a+2-2)^2\}$$

$$+ \{(a+1)^2 + (-a+2+1)^2\}$$

$$= 6a^2 - 24a + 56$$

$$= 6(a-2)^2 + 32$$

따라서 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 은 $a = 2$ 일 때 최솟값 32를 갖는다.

답 32

13

오른쪽 그림과 같이 직

선 BC를 x 축, 점 D를

지나고 BC에 수직인 직

선을 y 축으로 하는 좌표

평면을 잡으면 점 D는

원점이 된다.

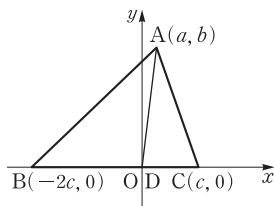
$A(a, b)$, $C(c, 0)$ ($c > 0$)이라 하면 점 B의 좌표는

$(-2c, 0)$ 이므로

$$\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2$$

$$= \{(a+2c)^2 + b^2\} + 2\{(a-c)^2 + b^2\}$$

$$= 3a^2 + 3b^2 + 6c^2$$



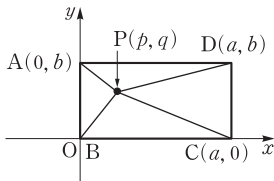
또 $\overline{AD}^2 = a^2 + b^2$, $\overline{CD}^2 = c^2$ 이므로

$$\begin{aligned} 3(\overline{AD}^2 + 2\overline{CD}^2) &= 3(a^2 + b^2 + 2c^2) \\ &= 3a^2 + 3b^2 + 6c^2 \\ \therefore \overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 &= 3(\overline{AD}^2 + 2\overline{CD}^2) \end{aligned}$$

답 풀이 참조

14

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이 된다.



A(0, b), C(a, 0)이라 하면 점 D의 좌표는 (a, b)

점 P의 좌표를 (p, q)라 하면

$$\begin{aligned} \overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 &= \{p^2 + (q-b)^2\} + \{(p-a)^2 + q^2\} \\ &= 2p^2 + 2q^2 - 2ap - 2bq + a^2 + b^2 \\ \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2 &= (p^2 + q^2) + \{(p-a)^2 + (q-b)^2\} \\ &= 2p^2 + 2q^2 - 2ap - 2bq + a^2 + b^2 \\ \therefore \overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 &= \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2 \end{aligned}$$

답 풀이 참조

연습문제

● 본책 16~17쪽

15

전략 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 a에 대한 부등식을 세운다.

$$\begin{aligned} \overline{AB} \leq 2 \text{에서 } \overline{AB}^2 &\leq 4 \text{이므로} \\ (2-a)^2 + (a-4)^2 &\leq 4 \\ a^2 - 6a + 8 &\leq 0, \quad (a-2)(a-4) \leq 0 \\ \therefore 2 &\leq a \leq 4 \end{aligned}$$

따라서 정수 a는 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$$2 + 3 + 4 = 9$$

답 9

16

전략 l^2 을 t에 대한 이차식으로 나타내고 최솟값을 구한다.

$$\begin{aligned} l^2 = \overline{AB}^2 &= (2t+1)^2 + (-3-2t)^2 \\ &= 8t^2 + 16t + 10 \\ &= 8(t+1)^2 + 2 \end{aligned}$$

따라서 l^2 은 $t = -1$ 일 때 최솟값 2를 갖는다.

답 2

17

전략 점 P의 좌표를 (a, 2a-1)로 놓고 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 임을 이용하여 a에 대한 방정식을 세운다.

점 P의 좌표를 (a, 2a-1)이라 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} (a-3)^2 + (2a-1+2)^2 &= (a-2)^2 + (2a-1+1)^2 \\ 5a^2 - 2a + 10 &= 5a^2 - 4a + 4 \\ 2a &= -6 \quad \therefore a = -3 \end{aligned}$$

따라서 P(-3, -7)이므로

$$\overline{AP} = \sqrt{(-3-3)^2 + (-7+2)^2} = \sqrt{61}$$

답 $\sqrt{61}$

18

전략 점 P의 좌표를 (a, a+3)으로 놓고 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 을 a에 대한 이차식으로 나타낸다.

점 P의 좌표를 (a, a+3)이라 하면

$$\begin{aligned} \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= \{(a+2)^2 + (a+3)^2\} + \{(a-2)^2 + (a+3)^2\} \\ &= 4a^2 + 12a + 26 \\ &= 4\left(a + \frac{3}{2}\right)^2 + 17 \end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 은 $a = -\frac{3}{2}$ 일 때 최솟값 17를 갖는다.

답 17

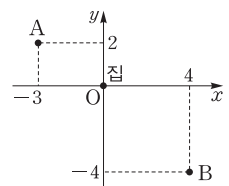
19

전략 집, 마트, 영화관의 위치를 좌표평면 위에 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 집을 원점으로 하는 좌표평면을 잡고 마트와 영화관을 나타내는 점을 각각 A, B라 하면

$$A(-3, 2), B(4, -4)$$

로 놓을 수 있다.



$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(4+3)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{85}$$

따라서 마트와 영화관 사이의 직선 거리는 $\sqrt{85}$ km이다.
답 $\sqrt{85}$ km

20

전략 삼각형의 내각의 이등분선의 성질을 이용한다.

$\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$

$$\text{이때 } \overline{BD} = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10,$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(8-12)^2 + 3^2} = 5 \text{ 이므로}$$

$$\overline{AB} : \overline{AC} = 10 : 5 = 2 : 1$$

즉 $2\overline{AC} = \overline{AB}$ 에서 $4\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$ 이므로

$$4\{(12-a)^2 + (-3-1)^2\} = (-a)^2 + (6-1)^2$$

$$4(a^2 - 24a + 160) = a^2 + 25$$

$$\therefore a^2 - 32a + 205 = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 a 의 값의 합은 32이다. **답** 32

참고 이차방정식 $a^2 - 32a + 205 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-16)^2 - 205 = 51 > 0$$

따라서 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

21

전략 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점까지의 거리가 모두 같음을 이용하여 외심의 좌표를 구한다.

삼각형 ABC의 외심을 P(a , b)라 하면

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$$

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(a+2)^2 + (b-1)^2 = (a-1)^2 + (b-4)^2$$

$$a^2 + b^2 + 4a - 2b + 5 = a^2 + b^2 - 2a - 8b + 17$$

$$\therefore a + b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\overline{AP} = \overline{CP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{CP}^2$ 이므로

$$(a+2)^2 + (b-1)^2 = (a-3)^2 + (b+2)^2$$

$$a^2 + b^2 + 4a - 2b + 5 = a^2 + b^2 - 6a + 4b + 13$$

$$\therefore 5a - 3b = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = \frac{5}{4}$, $b = \frac{3}{4}$

따라서 외접원의 반지름의 길이는

$$\overline{AP} = \sqrt{\left(\frac{5}{4} + 2\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{170}}{4}$$

이므로 외접원의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{\sqrt{170}}{4}\right)^2 = \frac{85}{8} \pi \quad \text{답 } \frac{85}{8} \pi$$

22

전략 삼각형의 세 변의 길이가 모두 같음을 이용하여 a , b 에 대한 연립방정식을 세운다.

$\triangle ABC$ 가 정삼각형이므로

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$$

$\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로

$$(1+1)^2 + (-2-2)^2 = (a-1)^2 + (b+2)^2$$

$$\therefore a^2 - 2a + b^2 + 4b - 15 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\overline{AB} = \overline{CA}$ 에서 $\overline{AB}^2 = \overline{CA}^2$ 이므로

$$(1+1)^2 + (-2-2)^2 = (-1-a)^2 + (2-b)^2$$

$$\therefore a^2 + 2a + b^2 - 4b - 15 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$-4a + 8b = 0 \quad \therefore a = 2b$$

$\textcircled{1}$ 에 $a = 2b$ 를 대입하면

$$4b^2 - 4b + b^2 + 4b - 15 = 0, \quad b^2 = 3$$

$$\therefore b = \pm\sqrt{3}$$

$b = \sqrt{3}$ 일 때 $a = 2\sqrt{3}$, $b = -\sqrt{3}$ 일 때 $a = -2\sqrt{3}$ 이므로

$$ab = 6 \quad \text{답 } 6$$

23

전략 평행사변형의 성질을 이용하여 점 D의 좌표를 구한다.

A(a , b), C(c , 0)이라 하면

$$D(\overline{AC}, b)$$

$$\therefore \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$$

$$= \{(c-a)^2 + (-b)^2\} + \{(a+c)^2 + b^2\}$$

$$= \overline{2a^2 + 2b^2 + 2c^2}$$

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{a^2 + b^2 + c^2}$ 이므로

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2)$$

$$\text{답 } \textcircled{가} a+c \quad \textcircled{나} 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \quad \textcircled{다} a^2 + b^2 + c^2$$

24

전략 주어진 식을 두 선분의 길이의 합으로 나타낸다.

A(5, -2), B(-3, 4), P(x , y)라 하면

$$\begin{aligned}
 \sqrt{(x-5)^2+(y+2)^2} &= \overline{AP}, \\
 \sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2} &= \overline{BP} \\
 \therefore \sqrt{(x-5)^2+(y+2)^2} + \sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2} \\
 &= \overline{AP} + \overline{BP} \\
 &\geq \overline{AB} \\
 &= \sqrt{(-3-5)^2+(4+2)^2} \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 10이다.

답 10

해설 Focus

두 점 A, B와 임의의 점 P에 대하여

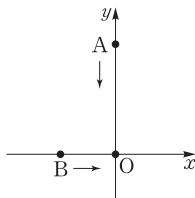
$$\overline{AP} + \overline{BP} \geq \overline{AB}$$

이므로 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 $\overline{AB}$ 의 길이와 같고, 이때 점 P는 $\overline{AB}$ 위에 있다.

25

전략 직선 도로를 좌표평면 위에 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 지점 O의 위치를 원점으로 하는 좌표평면에서 A와 B의 출발점의 위치를 각각 (0, 10), (-5, 0)이라 하자.



t시간 후의 A와 B의 위치를 각각 P, Q라 하면

$$P(0, 10-3t), Q(-5+4t, 0)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \overline{PQ} &= \sqrt{(-5+4t)^2 + (-10+3t)^2} \\
 &= \sqrt{25t^2 - 100t + 125} \\
 &= \sqrt{25(t-2)^2 + 25}
 \end{aligned}$$

따라서 $\overline{PQ}$ 의 길이는 $t=2$ 일 때 최솟값 $\sqrt{25}=5$ 를 갖는다.

즉 A와 B 사이의 거리의 최솟값은 5 km이다.

답 5 km

02 선분의 내분점

● 본책 18~26쪽

26

답 (1) 1, 2 (2) 5, 1 (3) F (4) E

27

$$(1) \frac{3 \times 6 + 1 \times 2}{3+1} = 5 \quad \therefore P(5)$$

$$(2) \frac{1 \times 6 + 2 \times 2}{1+2} = \frac{10}{3} \quad \therefore Q\left(\frac{10}{3}\right)$$

$$(3) \frac{2+6}{2} = 4 \quad \therefore M(4)$$

답 (1) (5) (2) $\left(\frac{10}{3}\right)$ (3) (4)

28

$$\begin{aligned}
 (1) P\left(\frac{1 \times 3 + 3 \times (-1)}{1+3}, \frac{1 \times 2 + 3 \times 6}{1+3}\right) \\
 \therefore P(0, 5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) Q\left(\frac{1 \times (-1) + 3 \times 3}{1+3}, \frac{1 \times 6 + 3 \times 2}{1+3}\right) \\
 \therefore Q(2, 3)
 \end{aligned}$$

$$(3) M\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{6+2}{2}\right) \quad \therefore M(1, 4)$$

답 (1) (0, 5) (2) (2, 3) (3) (1, 4)

29

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 5 + 1 \times (-1)}{2+1}, \frac{2 \times (-2) + 1 \times 4}{2+1}\right),$$

즉 (3, 0)

선분 BC를 1 : 3으로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 1 + 3 \times 5}{1+3}, \frac{1 \times 6 + 3 \times (-2)}{1+3}\right),$$

즉 (4, 0)

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{7}{2}, 0\right) \quad \text{답 } \left(\frac{7}{2}, 0\right)$$

30

$$\overline{AP} = 3\overline{PB} \text{에서 } \overline{AP} : \overline{PB} = 3 : 1$$

따라서 점 P는 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점이므로

$$\frac{3 \times x + 1 \times (-1)}{3+1} = 5, \frac{3 \times y + 1 \times (-2)}{3+1} = -5$$

$$3x - 1 = 20, 3y - 2 = -20$$

$$\therefore x = 7, y = -6$$

$$\therefore xy = -42$$

답 -42

31

선분 AB를 2 : b로 내분하는 점의 좌표가 (3, -1)이므로

$$\frac{2 \times 6 + b \times 1}{2 + b} = 3, \quad \frac{2 \times a + b \times (-5)}{2 + b} = -1$$

$$12 + b = 3(2 + b), \quad 2a - 5b = -(2 + b)$$

$$-2b = -6, \quad a - 2b = -1$$

$$\therefore a = 5, \quad b = 3$$

따라서 A(1, -5), B(6, 5)이므로 선분 AB를 b : 1, 즉 3 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 6 + 1 \times 1}{3 + 1}, \frac{3 \times 5 + 1 \times (-5)}{3 + 1} \right),$$

$$\approx \left(\frac{19}{4}, \frac{5}{2} \right) \quad \text{답} \left(\frac{19}{4}, \frac{5}{2} \right)$$

32

선분 AB를 (1-t) : t로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{(1-t) \times 1 + t \times (-2)}{(1-t) + t}, \frac{(1-t) \times (-1) + t \times 4}{(1-t) + t} \right),$$

$$\approx (-3t + 1, 5t - 1)$$

이 점이 제1사분면 위에 있으므로

$$-3t + 1 > 0, \quad 5t - 1 > 0$$

$$\therefore \frac{1}{5} < t < \frac{1}{3} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

한편 1-t > 0, t > 0이므로 $0 < t < 1$... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{1}{5} < t < \frac{1}{3}$

따라서 $\alpha = \frac{1}{5}$, $\beta = \frac{1}{3}$ 이므로

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 5 + 3 = 8$$

답 8

33

선분 AB를 1 : k로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 0 + k \times (-3)}{1 + k}, \frac{1 \times 12 + k \times 0}{1 + k} \right),$$

$$\approx \left(\frac{-3k}{1+k}, \frac{12}{1+k} \right)$$

이 점이 직선 $y = -x + 2$ 위에 있으므로

$$\frac{12}{1+k} = -\frac{-3k}{1+k} + 2$$

$$12 = 3k + 2(1+k), \quad -5k = -10$$

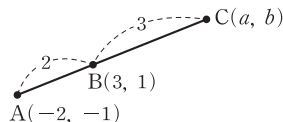
$$\therefore k = 2$$

답 2

34

$3\overline{AB} = 2\overline{BC}$ 에서 $\overline{AB} : \overline{BC} = 2 : 3$

이때 $a > 0$ 이므로 이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 점 B는 $\overline{AC}$ 를 2 : 3으로 내분하는 점이므로

$$\frac{2 \times a + 3 \times (-2)}{2 + 3} = 3, \quad \frac{2 \times b + 3 \times (-1)}{2 + 3} = 1$$

$$2a - 6 = 15, \quad 2b - 3 = 5$$

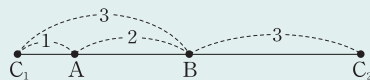
$$\therefore a = \frac{21}{2}, \quad b = 4$$

$$\therefore ab = 42$$

답 42

해설 Focus

$\overline{AB} : \overline{BC} = 2 : 3$ 을 만족시키는 점 C의 위치는 다음 그림의 점 C_1 또는 점 C_2 이다.



(i) $a < 0$ 일 때

점 C의 위치는 점 C_1 이므로 점 A는 $\overline{CB}$ 를 1 : 2로 내분하는 점이다.

(ii) $a > 0$ 일 때

점 C의 위치는 점 C_2 이므로 점 B는 $\overline{AC}$ 를 2 : 3으로 내분하는 점이다.

35

$2\overline{AC} = 3\overline{BC}$ 에서

$$\overline{AC} : \overline{BC} = 3 : 2$$

이를 그림으로 나타내면 오른쪽과 같으므로 점 B는 $\overline{AC}$ 를 1 : 2로 내분하는 점이다.

점 C의 좌표를 (x, y)라 하면

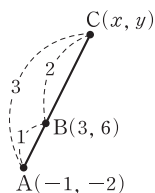
$$\frac{1 \times x + 2 \times (-1)}{1 + 2} = 3,$$

$$\frac{1 \times y + 2 \times (-2)}{1 + 2} = 6$$

$$x - 2 = 9, \quad y - 4 = 18$$

$$\therefore x = 11, \quad y = 22$$

$$\therefore C(11, 22)$$



답 (11, 22)

다른 풀이 $\overline{AB}$ 의 연장선 위의 점 C에 대하여

$\overline{AC} : \overline{BC} = 3 : 2$ 이므로 점 C는 $\overline{AB}$ 를 3 : 2로 외분하는 점이다.

따라서 점 C의 좌표는

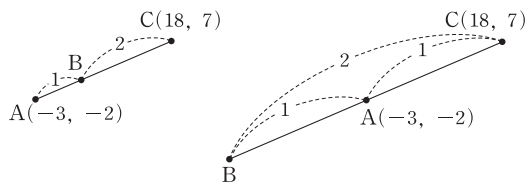
$$\left(\frac{3 \times 3 - 2 \times (-1)}{3-2}, \frac{3 \times 6 - 2 \times (-2)}{3-2} \right),$$

즉 (11, 22)

36

$2\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서 $\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 2$

이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



(i) 점 B가 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 경우

점 B의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 18 + 2 \times (-3)}{1+2}, \frac{1 \times 7 + 2 \times (-2)}{1+2} \right),$$

즉 (4, 1)

(ii) 점 A가 선분 BC의 중점인 경우

점 B의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\frac{x+18}{2} = -3, \frac{y+7}{2} = -2$$

$$x+18 = -6, y+7 = -4$$

$$\therefore x = -24, y = -11$$

$$\therefore B(-24, -11)$$

(i), (ii)에서 B(4, 1) 또는 B(-24, -11)

답 (4, 1), (-24, -11)

37

평행사변형 ABCD의 대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+0}{2}, \frac{0+3}{2} \right), \text{ 즉 } \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a-3}{2}, \frac{1+b}{2} \right)$

두 대각선의 중점이 일치하므로

$$-\frac{1}{2} = \frac{a-3}{2}, \frac{3}{2} = \frac{1+b}{2}$$

$$\therefore a=2, b=2 \quad \therefore ab=4$$

답 4

38

마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분한다.

마름모 ABCD의 대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+a}{2}, \frac{1+7}{2} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{2+a}{2}, 4 \right)$$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{b-2}{2}, \frac{5+3}{2} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{b-2}{2}, 4 \right)$$

두 대각선의 중점이 일치하므로

$$\frac{2+a}{2} = \frac{b-2}{2}$$

$$\therefore b = a + 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 마름모의 뜻에 의하여 $\overline{AD} = \overline{DC}$ 이므로

$$\overline{AD}^2 = \overline{DC}^2$$

$$(-2-2)^2 + (3-1)^2 = (a+2)^2 + (7-3)^2$$

$$a^2 + 4a = 0, \quad a(a+4) = 0$$

$$\therefore a = -4 \quad (\because a < 0)$$

①에 $a = -4$ 를 대입하면 $b = 0$

$$\therefore a+b = -4$$

답 -4

39

$\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-4)^2 + (1-9)^2} = 4\sqrt{5},$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(6-4)^2 + (5-9)^2} = 2\sqrt{5} \text{ 이므로}$$

$$\overline{BD} : \overline{CD} = 4\sqrt{5} : 2\sqrt{5} = 2 : 1$$

따라서 점 D는 $\overline{BC}$ 를 2 : 1로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 6 + 1 \times 0}{2+1}, \frac{2 \times 5 + 1 \times 1}{2+1} \right), \text{ 즉 } \left(4, \frac{11}{3} \right)$$

$$a=4, b=\frac{11}{3} \text{ 이므로}$$

$$a+b = \frac{23}{3}$$

답 $\frac{23}{3}$

40

$\angle AOP = \angle BOP$ 에서 점 P는 $\angle AOB$ 의 이등분선 위의 점이므로

$$\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{AP} : \overline{BP}$$

$\overline{OA}=3, \overline{OB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$ 이므로

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 5$$

따라서 점 P는 $\overline{AB}$ 를 3 : 5로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 3 + 5 \times (-3)}{3+5}, \frac{3 \times 4 + 5 \times 0}{3+5} \right),$$

$$\text{즉} \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{2} \right)$$

직선 OP의 방정식은

$$y = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{3}{4}}x \quad \therefore y = -2x \quad \text{답 } y = -2x$$

03 삼각형의 무게중심

● 본책 27~29쪽

41

$\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{a-1+5}{3}, \frac{5+b+1}{3} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{a+4}{3}, \frac{b+6}{3} \right)$$

이때 무게중심의 좌표가 (2, 3)이므로

$$\frac{a+4}{3} = 2, \frac{b+6}{3} = 3$$

$$\therefore a=2, b=3 \quad \text{답 } a=2, b=3$$

42

변 BC의 중점을 M이라 하면 $\triangle ABC$ 의 무게중심은 중선 AM을 2 : 1로 내분하는 점이다.

따라서 구하는 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 1 + 1 \times (-5)}{2+1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times 6}{2+1} \right),$$

$$\text{즉 } (-1, 2) \quad \text{답 } (-1, 2)$$

43

세 변 AB, BC, CA의 중점을 각각 D, E, F라 하면 $\triangle ABC$ 의 무게중심은 $\triangle DEF$ 의 무게중심과 일치한다.

따라서 $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-4-1+5}{3}, \frac{5-2+6}{3} \right), \text{ 즉 } (0, 3)$$

$$\text{답 } (0, 3)$$

다른 풀이 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 이라 하면

변 AB의 중점의 좌표가 $(-4, 5)$ 이므로

$$\frac{x_1+x_2}{2} = -4 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\frac{y_1+y_2}{2} = 5 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

변 BC의 중점의 좌표가 $(-1, -2)$ 이므로

$$\frac{x_2+x_3}{2} = -1 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$$\frac{y_2+y_3}{2} = -2 \quad \dots\dots \text{㉣}$$

변 CA의 중점의 좌표가 $(5, 6)$ 이므로

$$\frac{x_3+x_1}{2} = 5 \quad \dots\dots \text{㉤}$$

$$\frac{y_3+y_1}{2} = 6 \quad \dots\dots \text{㉥}$$

$$\text{㉠} + \text{㉢} + \text{㉤} \text{을 하면 } x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$\text{㉡} + \text{㉣} + \text{㉥} \text{을 하면 } y_1 + y_2 + y_3 = 9$$

따라서 $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \right), \text{ 즉 } (0, 3)$$

44

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는 $\triangle ABC$ 의 무게중심과 일치하므로

$$a = \frac{-2+3+5}{3} = 2, b = \frac{1+4+4}{3} = 3$$

$$\therefore a+b=5 \quad \text{답 } 5$$

45

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는 $\triangle ABC$ 의 무게중심과 일치한다.

$\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-5+2+6}{3}, \frac{-2+3-7}{3} \right), \text{ 즉 } (1, -2)$$

따라서 P(1, -2)일 때 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 값은 최소이므로 구하는 최솟값은

$$\begin{aligned} & \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 \\ &= \{(1+5)^2 + (-2+2)^2\} \\ & \quad + \{(1-2)^2 + (-2-3)^2\} \\ & \quad + \{(1-6)^2 + (-2+7)^2\} \\ &= 36 + 26 + 50 = 112 \end{aligned}$$

$$\text{답 최솟값: } 112, P(1, -2)$$

다른 풀이 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\begin{aligned} & \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 \\ &= \{(x+5)^2 + (y+2)^2\} \\ & \quad + \{(x-2)^2 + (y-3)^2\} \\ & \quad + \{(x-6)^2 + (y+7)^2\} \\ &= 3x^2 - 6x + 3y^2 + 12y + 127 \\ &= 3(x-1)^2 + 3(y+2)^2 + 112 \end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 은 $x=1, y=-2$ 일 때 최솟값 112를 갖고, 그때의 점 P의 좌표는 $(1, -2)$ 이다.

46

전략 점 P가 $\overline{AB}$ 를 4 : 3으로 내분하는 점임을 이용한다.

$$3\overline{AP} = 4\overline{PB} \text{에서 } \overline{AP} : \overline{PB} = 4 : 3$$

따라서 점 P는 선분 AB를 4 : 3으로 내분하는 점이므로

$$\frac{4 \times b + 3 \times (-4)}{4+3} = 0, \frac{4 \times 1 + 3 \times a}{4+3} = 1$$

$$\therefore a=1, b=3$$

$$\therefore a+b=4$$

답 4

47

전략 내분점의 좌표를 k 에 대한 식으로 나타내어 부등식을 세운다.

선분 AB를 $k : (1-k)$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{k \times (-4) + (1-k) \times 1}{k + (1-k)}, \frac{k \times 6 + (1-k) \times (-3)}{k + (1-k)} \right),$$

$$\text{즉 } (-5k+1, 9k-3)$$

이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$$-5k+1 < 0, 9k-3 > 0$$

$$\therefore k > \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 $k > 0, 1-k > 0$ 이므로

$$0 < k < 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통부분을 구하면

$$\frac{1}{3} < k < 1 \quad \text{답 } \frac{1}{3} < k < 1$$

48

전략 y 축 위의 점은 x 좌표가 0임을 이용한다.

선분 AB를 $m : n$ 으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{m-3n}{m+n}, \frac{6m+n}{m+n} \right)$$

이 점이 y 축 위에 있으므로

$$\frac{m-3n}{m+n} = 0, \quad m-3n=0$$

$$\therefore m=3n$$

따라서 $m : n = 3 : 1$ 이고, m, n 은 서로소인 자연수
이므로

$$m=3, n=1$$

$$\therefore m+n=4$$

답 4

49

전략 마름모의 뜻과 성질을 이용하여 a, b, c 의 값을 구한다.

마름모 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{a+b}{2} = \frac{3+4}{2}, \frac{3+c}{2} = \frac{1+4}{2}$$

$$\therefore a+b=7, c=2$$

또 마름모의 뜻에 의하여 $\overline{AB} = \overline{AD}$ 이므로

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2$$

$$(3-a)^2 + (1-3)^2 = (4-a)^2 + (4-3)^2$$

$$a^2 - 6a + 13 = a^2 - 8a + 17$$

$$2a=4 \quad \therefore a=2$$

$a+b=7$ 에 $a=2$ 를 대입하면

$$b=5$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 5^2 + 2^2 = 33$$

답 33

50

전략 삼각형 ABC와 삼각형 DEF의 무게중심이 일치함을 이용한다.

$\triangle DEF$ 의 무게중심은 $\triangle ABC$ 의 무게중심과 일치하므로

$$\frac{a-1+5}{3} = 2, \frac{2+0+b}{3} = 1$$

$$a+4=6, b+2=3$$

$$\therefore a=2, b=1$$

$$\therefore ab=2$$

답 2

다른 풀이 변 AB를 2 : 1로 내분하는 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times (-1) + 1 \times a}{2+1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times 2}{2+1} \right),$$

$$\text{즉} \left(\frac{a-2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

변 BC를 2 : 1로 내분하는 점 E의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 5 + 1 \times (-1)}{2+1}, \frac{2 \times b + 1 \times 0}{2+1} \right),$$

$$\text{즉} \left(3, \frac{2}{3}b \right)$$

변 CA를 2 : 1로 내분하는 점 F의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times a + 1 \times 5}{2+1}, \frac{2 \times 2 + 1 \times b}{2+1} \right),$$

$$\text{즉} \left(\frac{2a+5}{3}, \frac{b+4}{3} \right)$$

△DEF의 무게중심의 좌표가 (2, 1)이므로

$$\frac{\frac{a-2}{3} + 3 + \frac{2a+5}{3}}{3} = 2,$$

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}b + \frac{b+4}{3}}{3} = 1$$

$$a+4=6, b+2=3$$

$$\therefore a=2, b=1$$

51

전략 점 P가 △ABC의 무게중심과 일치함을 이용한다.

$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심과 일치한다.

따라서 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1-3+2}{3}, \frac{3-2+2}{3} \right), \text{ 즉 } (0, 1)$$

$$\therefore \overline{PA} = \sqrt{(1-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5} \quad \text{답 } \sqrt{5}$$

다른 풀이 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

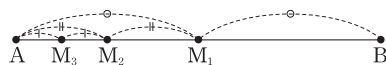
$$\begin{aligned} \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 &= \{(x-1)^2 + (y-3)^2\} + \{(x+3)^2 + (y+2)^2\} \\ &\quad + \{(x-2)^2 + (y-2)^2\} \\ &= 3x^2 + 3y^2 - 6y + 31 \\ &= 3x^2 + 3(y-1)^2 + 28 \end{aligned}$$

따라서 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 은 $x=0, y=1$ 일 때 최솟값 28을 갖고, 그때의 점 P의 좌표는 (0, 1)이다.

$$\therefore \overline{PA} = \sqrt{(1-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$$

52

전략 선분 PQ의 중점이 M이면 $\overline{PM} = \frac{1}{2} \overline{PQ}$ 임을 이용한다.



점 M₁은 선분 AB의 중점이므로

$$\overline{AM_1} = \frac{1}{2} \overline{AB}$$

점 M₂는 선분 AM₁의 중점이므로

$$\overline{AM_2} = \frac{1}{2} \overline{AM_1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{4} \overline{AB}$$

점 M₃는 선분 AM₂의 중점이므로

$$\overline{AM_3} = \frac{1}{2} \overline{AM_2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \overline{AB} = \frac{1}{8} \overline{AB}$$

같은 방법으로 하면 $\overline{AM_{10}} = \frac{1}{2^{10}} \overline{AB}$

따라서 $\overline{AB} = 2^{10} \overline{AM_{10}}$ 에서 $\overline{AM_{10}} : \overline{AB} = 1 : 2^{10}$ 이므로

$$\overline{AM_{10}} : \overline{M_{10}B} = 1 : (2^{10} - 1) = 1 : 1023$$

즉 점 M₁₀은 선분 AB를 1 : 1023으로 내분하는 점이므로 $k=1023$ 답 1023

53

전략 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β로 놓고 α, β에 대한 방정식을 세운다.

곡선 $y=x^2-2x$ 와 직선 $y=3x+k$ 가 두 점 P, Q에서 만나므로 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β라 하면 이차방정식

$$x^2 - 2x = 3x + k, \text{ 즉 } x^2 - 5x - k = 0$$

의 두 실근이 α, β이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 5 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\alpha\beta = -k \quad \dots\dots \text{㉡}$$

한편 선분 PQ를 1 : 2로 내분하는 점의 x좌표가 1이므로

$$\frac{1 \times \beta + 2 \times \alpha}{1+2} = 1$$

$$\therefore 2\alpha + \beta = 3 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $\alpha = -2, \beta = 7$

따라서 ㉡에서

$$k = -\alpha\beta = -(-2) \times 7 = 14 \quad \text{답 14}$$

54

전략 평행사변형의 성질을 이용하여 점 D의 좌표를 구한다.

$$AB = \sqrt{(-5+1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{5},$$

$$BC = \sqrt{(-3+5)^2 + (k-1)^2} = \sqrt{k^2 - 2k + 5}$$

이고, 평행사변형 ABCD의 둘레의 길이가 $6\sqrt{5}$ 이므로

$$2(\overline{AB} + \overline{BC}) = 6\sqrt{5} \text{에서}$$

$$2(2\sqrt{5} + \sqrt{k^2 - 2k + 5}) = 6\sqrt{5}$$

$$\therefore \sqrt{k^2 - 2k + 5} = \sqrt{5}$$

양변을 제곱하면

$$k^2 - 2k + 5 = 5$$

$$k^2 - 2k = 0, \quad k(k-2) = 0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=2$$

이때 $k=2$ 이면 세 점 A(-1, 3), B(-5, 1),

C(-3, 2)는 일직선 위에 있으므로 평행사변형이 만들어지지 않는다.

$$\therefore k=0$$

평행사변형 ABCD에서 두 대각선 AC, BD의 중점

이 일치하므로 점 D의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$\frac{-1-3}{2} = \frac{-5+a}{2}, \quad \frac{3+0}{2} = \frac{1+b}{2}$$

$$\therefore a=1, b=2$$

따라서 점 D의 좌표는 (1, 2)이다.

답 (1, 2)

55

전략 중점의 좌표, 무게중심의 좌표를 이용하여 두 점 B, C의 좌표를 차례로 구한다.

변 AB의 중점의 좌표가 (3, 0)이므로 점 B의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$\frac{7+a}{2} = 3, \quad \frac{5+b}{2} = 0$$

$$\therefore a=-1, b=-5$$

즉 점 B의 좌표는 (-1, -5)이다.

또 $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표가 (3, 1)이므로 점 C의 좌표를 (c, d) 라 하면

$$\frac{7-1+c}{3} = 3, \quad \frac{5-5+d}{3} = 1$$

$$\therefore c=3, d=3$$

즉 점 C의 좌표는 (3, 3)이다.

따라서 변 BC를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times (-1)}{2+1}, \frac{2 \times 3 + 1 \times (-5)}{2+1} \right),$$

$$\text{즉 } \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

$$\text{답 } \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

56

전략 두 점 A, B의 x 좌표가 주어진 이차함수와 직선의 방정식을 연립한 방정식의 해임을 이용한다.

이차함수 $y = x^2 - 8x + 1$ 의 그래프와 직선 $y = 2x + 6$

이 만나는 두 점 A, B의 x 좌표는

$$x^2 - 8x + 1 = 2x + 6, \text{ 즉 } x^2 - 10x - 5 = 0$$

의 두 실근이다.

이차방정식 $x^2 - 10x - 5 = 0$ 의 서로 다른 두 실근을

α, β 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 10$$

한편 두 점 A, B의 좌표는 $(\alpha, 2\alpha + 6), (\beta, 2\beta + 6)$

이고, $\triangle OAB$ 의 무게중심의 좌표가 (a, b) 이므로

$$a = \frac{\alpha + \beta}{3} = \frac{10}{3},$$

$$b = \frac{(2\alpha + 6) + (2\beta + 6)}{3} = \frac{2(\alpha + \beta) + 12}{3} \\ = \frac{2 \times 10 + 12}{3} = \frac{32}{3}$$

$$\therefore a + b = 14$$

답 14

57

전략 세 점 A, B, C의 좌표가 의미하는 것을 파악한다.

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} = \frac{1 \times \sqrt{3} + 1 \times \sqrt{2}}{1+1}$$

이므로 점 A는 선분 PQ의 중점이다.

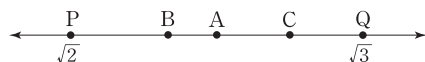
$$\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3} = \frac{1 \times \sqrt{3} + 2 \times \sqrt{2}}{1+2}$$

이므로 점 B는 선분 PQ를 1 : 2로 내분하는 점이다.

$$\frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{4} = \frac{3 \times \sqrt{3} + 1 \times \sqrt{2}}{3+1}$$

이므로 점 C는 선분 PQ를 3 : 1로 내분하는 점이다.

따라서 세 점 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같으므로 위치가 왼쪽인 점부터 순서대로 나열하면 B, A, C이다.



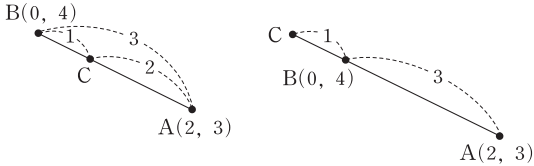
답 B, A, C

58

전략 조건을 만족시키는 점 C의 위치를 파악한다.

$$\overline{AB}=3\overline{BC} \text{에서 } \overline{AB}:\overline{BC}=3:1$$

이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



- (i) 점 C가 선분 AB를 2:1로 내분하는 경우
점 C의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 0 + 1 \times 2}{2+1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times 3}{2+1} \right),$$

$$\text{즉 } \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3} \right)$$

- (ii) 점 B가 선분 AC를 3:1로 내분하는 경우
점 C의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\frac{3 \times x + 1 \times 2}{3+1} = 0, \frac{3 \times y + 1 \times 3}{3+1} = 4$$

$$\therefore x = -\frac{2}{3}, y = \frac{13}{3}$$

- (i), (ii)에서 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3} \right) \text{ 또는 } \left(-\frac{2}{3}, \frac{13}{3} \right)$$

$$\therefore ab + pq = \frac{2}{3} \times \frac{11}{3} + \left(-\frac{2}{3} \right) \times \frac{13}{3} = -\frac{4}{9}$$

답 $-\frac{4}{9}$

59

전략 삼각형의 외각의 이등분선의 성질을 이용한다.



$\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 외각의 이등분선이므로

$$\overline{AO}:\overline{AB}=\overline{OD}:\overline{BD}$$

이때 $\overline{AO}=6$, $\overline{AB}=\sqrt{4^2+(3-6)^2}=5$ 이므로

$$\overline{OD}:\overline{BD}=6:5$$

$$\therefore \overline{OB}:\overline{BD}=(6-5):5=1:5$$

따라서 점 B는 $\overline{OD}$ 를 1:5로 내분하는 점이므로

$$\frac{1 \times a + 5 \times 0}{1+5} = 4, \frac{1 \times b + 5 \times 0}{1+5} = 3$$

$$\therefore a=24, b=18 \quad \therefore a-b=6$$

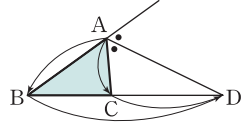
답 6

개념 노트

삼각형의 외각의 이등분선의 성질

삼각형 ABC에서 $\angle A$ 의
외각의 이등분선이 변 BC
의 연장선과 만나는 점을
D라 하면

$$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$$



60

전략 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는 $\triangle ABC$ 의 무게중심을 이용한다.

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 P
는 $\triangle ABC$ 의 무게중심과 일치한다.

$\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+4+1}{3}, \frac{0+0+a}{3} \right), \text{ 즉 } \left(2, \frac{a}{3} \right)$$

P $\left(2, \frac{a}{3} \right)$ 일 때

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$$

$$= \left\{ (2-1)^2 + \left(\frac{a}{3} \right)^2 \right\} + \left\{ (2-4)^2 + \left(\frac{a}{3} \right)^2 \right\}$$

$$+ \left\{ (2-1)^2 + \left(\frac{a}{3} - a \right)^2 \right\}$$

$$= \frac{2}{3}a^2 + 6$$

따라서 $\frac{2}{3}a^2 + 6 = 30$ 이므로

$$a^2 = 36 \quad \therefore a = 6 (\because a > 0)$$

답 6

다른 풀이 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$$

$$= (x-1)^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2$$

$$+ (x-1)^2 + (y-a)^2$$

$$= 3x^2 + 3y^2 - 12x - 2ay + a^2 + 18$$

$$= 3(x-2)^2 + 3\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}a^2 + 6$$

따라서 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 은 $x=2, y=\frac{a}{3}$ 일 때 최솟

값 $\frac{2}{3}a^2 + 6$ 을 가지므로

$$\frac{2}{3}a^2 + 6 = 30 \quad \therefore a = 6 (\because a > 0)$$

2 직선의 방정식

1. 도형의 방정식

01 직선의 방정식

● 본책 34~43쪽

61

- (1) $y-3=2(x-1) \quad \therefore y=2x+1$
 (2) $y-1=-3\{x-(-2)\} \quad \therefore y=-3x-5$
 (3) 직선의 기울기가 $\tan 45^\circ=1$ 이므로

$$y-\sqrt{2}=1 \times \{x-(-\sqrt{2})\}$$

$$\therefore y=x+2\sqrt{2}$$

답 (1) $y=2x+1$ (2) $y=-3x-5$
 (3) $y=x+2\sqrt{2}$

62

(1) $y-2=\frac{-4-2}{3-1}(x-1) \quad \therefore y=-3x+5$

(2) $y-5=\frac{-1-5}{2-(-3)}\{x-(-3)\}$
 $\therefore y=-\frac{6}{5}x+\frac{7}{5}$

(3) $y-(-2)=\frac{-2-4}{0-2}x \quad \therefore y=3x-2$

(4) $y=\frac{3-0}{4-1}(x-1) \quad \therefore y=x-1$

답 (1) $y=-3x+5$ (2) $y=-\frac{6}{5}x+\frac{7}{5}$
 (3) $y=3x-2$ (4) $y=x-1$

63

(1) $\frac{x}{4}+\frac{y}{-1}=1 \quad \therefore y=\frac{1}{4}x-1$

(2) x 절편이 -1 이고 y 절편이 5 이므로

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{5}=1 \quad \therefore y=5x+5$$

(3) x 절편이 2 이고 y 절편이 3 이므로

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \quad \therefore y=-\frac{3}{2}x+3$$

답 (1) $y=\frac{1}{4}x-1$ (2) $y=5x+5$
 (3) $y=-\frac{3}{2}x+3$

64

답 (1) $y=8$ (2) $x=3$ (3) $x=-5$ (4) $y=-3$

65

점 $(2, -1)$ 을 지나고 기울기가 $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y-(-1)=\sqrt{3}(x-2)$$

$$\therefore \sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}-1=0$$

따라서 $a=-1, b=-2\sqrt{3}-1$ 이므로

$$ab=2\sqrt{3}+1 \quad \text{답 } 2\sqrt{3}+1$$

66

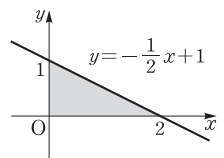
점 $(-4, 3)$ 을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y-3=-\frac{1}{2}(x+4)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{2}x+1$$

이 직선의 x 절편은 2 , y 절편은 1 이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$$



답 1

해설 Focus

x 절편이 p , y 절편이 q 인 직선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times |p| \times |q| = \frac{|pq|}{2}$$

67

$\triangle ABC$ 의 무게중심 G 의 좌표는

$$\left(\frac{2-3+7}{3}, \frac{4-1-6}{3}\right), \text{ 즉 } (2, -1)$$

따라서 두 점 $G(2, -1), C(7, -6)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-1)=\frac{-6-(-1)}{7-2}(x-2)$$

$$\therefore y=-x+1 \quad \text{답 } y=-x+1$$

다른 풀이 두 점 G, C 를 지나는 직선은 $\triangle ABC$ 의 중선이므로 $\overline{AB}$ 의 중점을 지난다.

$\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2-3}{2}, \frac{4-1}{2}\right), \text{ 즉 } \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

따라서 두 점 $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $(7, -6)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - (-6) = \frac{-6 - \frac{3}{2}}{7 - (-\frac{1}{2})}(x - 7)$$

$$\therefore y = -x + 1$$

68

$4x + 3y = 6$ 에 $y = 0$ 을 대입하면

$$4x = 6 \quad \therefore x = \frac{3}{2} \quad \therefore P(\frac{3}{2}, 0)$$

$3x - 2y = 12$ 에 $x = 0$ 을 대입하면

$$-2y = 12 \quad \therefore y = -6 \quad \therefore Q(0, -6)$$

따라서 직선 PQ의 x 절편은 $\frac{3}{2}$, y 절편은 -6 이므로
직선 PQ의 방정식은

$$\frac{x}{\frac{3}{2}} + \frac{y}{-6} = 1, \quad \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}y = 1$$

$$\therefore y = 4x - 6 \quad \text{답 } y = 4x - 6$$

69

y 절편을 a ($a \neq 0$)라 하면 x 절편은 $2a$ 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2a} + \frac{y}{a} = 1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이 직선이 점 $(6, -4)$ 를 지나므로

$$\frac{6}{2a} + \frac{-4}{a} = 1, \quad -\frac{1}{a} = 1$$

$$\therefore a = -1$$

㉠에 $a = -1$ 을 대입하면

$$-\frac{x}{2} - y = 1 \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x - 1$$

$$\text{답 } y = -\frac{1}{2}x - 1$$

70

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$$(\text{직선 AB의 기울기}) = (\text{직선 AC의 기울기})$$

이어야 하므로

$$\frac{k - (-1)}{2 - 1} = \frac{-10 - (-1)}{-k - 1}$$

$$(k+1)^2 = 9, \quad k^2 + 2k - 8 = 0$$

$$(k+4)(k-2) = 0$$

$$\therefore k = -4 \text{ 또는 } k = 2$$

따라서 모든 k 의 값의 합은

$$-4 + 2 = -2 \quad \text{답 } -2$$

71

직선 $y = ax$ 는 원점 O를 지나므로 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하려면 $\overline{AB}$ 의 중점을 지나야 한다.

$\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는

$$(\frac{4+8}{2}, \frac{4-6}{2}), \text{ 즉 } (6, -1)$$

따라서 직선 $y = ax$ 가 점 $(6, -1)$ 을 지나므로

$$-1 = 6a \quad \therefore a = -\frac{1}{6} \quad \text{답 } -\frac{1}{6}$$

72

마름모의 넓이를 이등분하는 직선은 마름모의 두 대각선의 교점을 지난다.

마름모 ABCD의 두 대각선의 교점은 대각선 AC의 중점이고, 두 점 A(1, 2), C(5, 2)에 대하여 $\overline{AC}$ 의 중점의 좌표는

$$(\frac{1+5}{2}, \frac{2+2}{2}), \text{ 즉 } (3, 2)$$

따라서 두 점 $(-1, 1)$, $(3, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 1 = \frac{2 - 1}{3 - (-1)}\{x - (-1)\}$$

$$\therefore y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

$$\text{답 } y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

73

직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지난다.

직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점은 대각선 AC의 중점이고, 두 점 A(1, 4), C(5, 2)에 대하여 $\overline{AC}$ 의 중점의 좌표는

$$(\frac{1+5}{2}, \frac{4+2}{2}), \text{ 즉 } (3, 3)$$

따라서 직선 $kx-4y+3=0$ 이 점 $(3, 3)$ 을 지나야 하므로

$$3k-12+3=0, \quad 3k=9$$

$$\therefore k=3$$

답 3

74

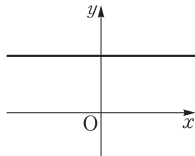
(1) $ax+by+c=0$ 에서 $a=0$ 이므로

$$y=-\frac{c}{b}$$

$bc<0$ 에서

$$\frac{c}{b}<0 \quad \therefore -\frac{c}{b}>0$$

따라서 x 축에 평행하고 y 절편이 양수인 직선은 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 2 사분면을 지난다.



(2) $ax+by+c=0$ 에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ 이므로

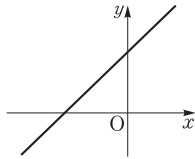
$$(\text{기울기})=-\frac{a}{b}, (\text{y절편})=-\frac{c}{b}$$

$ab<0, bc<0$ 에서

$$\frac{a}{b}<0, \frac{c}{b}<0$$

$$\therefore -\frac{a}{b}>0, -\frac{c}{b}>0$$

따라서 기울기와 y 절편이 모두 양수인 직선은 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 2, 3 사분면을 지난다.



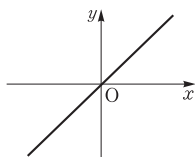
(3) $ax+by+c=0$ 에서 $c=0$ 이므로

$$y=-\frac{a}{b}x$$

$ab<0$ 에서

$$\frac{a}{b}<0 \quad \therefore -\frac{a}{b}>0$$

따라서 기울기가 양수이고 원점을 지나는 직선은 오른쪽 그림과 같으므로 제 1, 3 사분면을 지난다.



답 (1) 제 1, 2사분면 (2) 제 1, 2, 3사분면

(3) 제 1, 3사분면

75

$ax+by+c=0$ 에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ 이므로

$$(\text{기울기})=-\frac{a}{b}, (\text{y절편})=-\frac{c}{b}$$

$ab>0, ac<0$ 에서 a, b 의 부호는 같고, a, c 의 부호는 서로 다르므로 b, c 의 부호는 서로 다르다.

즉 $\frac{a}{b}>0, \frac{c}{b}<0$ 이므로

$$-\frac{a}{b}<0, -\frac{c}{b}>0$$

따라서 직선 $ax+by+c=0$ 의 기울기는 음수이고 y 절편은 양수이므로 직선의 개형은 ③이다. 답 ③

76

$(2k-1)x-(k-1)y-3=0$ 을 k 에 대하여 정리하면

$$(-x+y-3)+k(2x-y)=0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$-x+y-3=0, 2x-y=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=3, y=6$$

따라서 점 P의 좌표는 $(3, 6)$ 이다. 답 (3, 6)

77

$(k-2)x+(2k+1)y+7-k=0$ 을 k 에 대하여 정리하면

$$(-2x+y+7)+k(x+2y-1)=0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$-2x+y+7=0, x+2y-1=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=3, y=-1$$

따라서 점 P의 좌표는 $(3, -1)$ 이므로

$$\overline{OP}=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$$

답 $\sqrt{10}$

78

$mx+y-m+1=0$ 을 m 에 대하여 정리하면

$$(x-1)m+y+1=0 \quad \dots\dots ①$$

이 식이 m 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x-1=0, y+1=0$$

$$\therefore x=1, y=-1$$

따라서 직선 ㉠은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(1, -1)$ 을 지난다.

오른쪽 그림에서

(i) 직선 ㉠이 점 $(-1, 0)$

을 지날 때

$$-2m+1=0$$

$$\therefore m=\frac{1}{2}$$

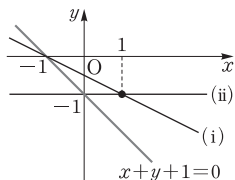
(ii) 직선 ㉠이 점 $(0, -1)$ 을 지날 때

$$-m=0 \quad \therefore m=0$$

(i), (ii)에서 구하는 m 의 값의 범위는

$$0 < m < \frac{1}{2}$$

$$\text{답 } 0 < m < \frac{1}{2}$$



79

$y=mx+2$ 에서

$$xm-y+2=0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이 식이 m 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x=0, -y+2=0$$

$$\therefore x=0, y=2$$

따라서 직선 ㉠은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 2)$ 를 지난다.

오른쪽 그림에서

(i) 직선 ㉠이 점 $A(5, 1)$ 을

지날 때

$$5m+1=0$$

$$\therefore m=-\frac{1}{5}$$

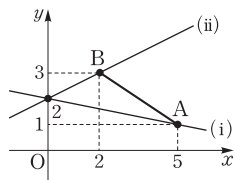
(ii) 직선 ㉠이 점 $B(2, 3)$ 을 지날 때

$$2m-1=0 \quad \therefore m=\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는 m 의 값의 범위는

$$-\frac{1}{5} \leq m \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{답 } -\frac{1}{5} \leq m \leq \frac{1}{2}$$



80

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$3x+2y+1+k(2x-y+10)=0 \quad (k \text{는 실수})$$

$$\dots\dots \text{㉠}$$

이라 하자.

직선 ㉠이 원점을 지나려면

$$1+10k=0$$

$$\therefore k=-\frac{1}{10}$$

㉠에 $k=-\frac{1}{10}$ 을 대입하면

$$3x+2y+1-\frac{1}{10}(2x-y+10)=0$$

$$\therefore 4x+3y=0$$

$$\text{답 } 4x+3y=0$$

다른 풀이 두 식 $3x+2y=-1$, $2x-y+10=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=-3, y=4$$

이므로 주어진 두 직선의 교점의 좌표는

$$(-3, 4)$$

따라서 두 점 $(-3, 4)$, $(0, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y=-\frac{4}{3}x \quad \therefore 4x+3y=0$$

81

주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$4x-3y+5+k(x+2y-7)=0, \text{ 즉}$$

$$(k+4)x+(2k-3)y-7k+5=0 \quad (k \text{는 실수})$$

$$\dots\dots \text{㉠}$$

직선 ㉠의 기울기가 -6 이려면

$$-\frac{k+4}{2k-3}=-6, \quad k+4=6(2k-3)$$

$$-11k=-22 \quad \therefore k=2$$

㉠에 $k=2$ 를 대입하면

$$6x+y-9=0$$

$$\text{답 } 6x+y-9=0$$

다른 풀이 두 식 $4x-3y+5=0$, $x+2y-7=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=1, y=3$$

이므로 주어진 두 직선의 교점의 좌표는

$$(1, 3)$$

따라서 기울기가 -6 이고 점 $(1, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=-6(x-1)$$

$$\therefore 6x+y-9=0$$



82

전략 주어진 직선의 기울기가 $\tan 30^\circ$ 임을 이용한다.

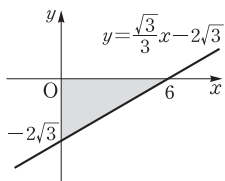
기울기가 $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이고 점 $(3, -\sqrt{3})$ 을 지나
는 직선의 방정식은

$$y - (-\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 3)$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3}$$

이 직선의 x 절편은 6, y 절편
은 $-2\sqrt{3}$ 이므로 구하는 넓
이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$



답 $6\sqrt{3}$

83

전략 먼저 두 점 $(-1, 2)$, $(1, 8)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구한다.

두 점 $(-1, 2)$, $(1, 8)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 2 = \frac{8-2}{1-(-1)}\{x - (-1)\}$$

$$\therefore y = 3x + 5$$

점 $(a-1, a+5)$ 가 이 직선 위의 점이므로

$$a+5 = 3(a-1) + 5, \quad -2a = -3$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

다른 풀이 세 점 $(a-1, a+5)$, $(-1, 2)$, $(1, 8)$ 이
한 직선 위에 있으므로

$$\frac{2-(a+5)}{-1-(a-1)} = \frac{8-2}{1-(-1)}, \quad a+3=3a$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

84

전략 y 절편을 a 라 하면 x 절편은 $-a$ 임을 이용하여 직선의 방정식을 세운다.

x 절편과 y 절편의 절댓값이 같고 부호가 반대이므로 y
절편을 a ($a \neq 0$)라 하면 x 절편은 $-a$ 이다.

따라서 직선의 방정식은

$$\frac{x}{-a} + \frac{y}{a} = 1$$

이 직선이 점 $(2, -1)$ 을 지나므로

$$-\frac{2}{a} - \frac{1}{a} = 1 \quad \therefore a = -3$$

답 -3

85

전략 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같음을 이용하여 a 의 값을 구한다.

세 점 $A(1, 1)$, $B(-1, -a)$, $C(a, 5)$ 가 한 직선 위
에 있으므로

$$(\text{직선 AB의 기울기}) = (\text{직선 AC의 기울기})$$

$$\frac{-a-1}{-1-1} = \frac{5-1}{a-1}, \quad (a+1)(a-1) = 8$$

$$a^2 = 9 \quad \therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

따라서 직선 l 은 두 점 $A(1, 1)$, $B(-1, -3)$ 을 지
나므로 직선 l 의 방정식은

$$y - 1 = \frac{-3-1}{-1-1}(x - 1) \quad \therefore y = 2x - 1$$

답 $y = 2x - 1$

86

전략 직선 $5x + 6y = 1$ 의 x 절편과 y 절편을 이용하여 직선
 $y = mx$ 가 지나는 점의 좌표를 구한다.

직선 $5x + 6y = 1$ 이 x 축, y 축과
만나는 점을 각각 A, B라 하면

$$A\left(\frac{1}{5}, 0\right), B\left(0, \frac{1}{6}\right)$$

이때 직선 $y = mx$ 가 원점 O를
지나므로 $\triangle OAB$ 의 넓이를 이

등분하려면 $\overline{AB}$ 의 중점을 지나야 한다.

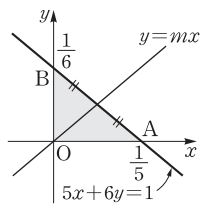
$\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{\frac{1}{5} + 0}{2}, \frac{0 + \frac{1}{6}}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{12}\right)$$

따라서 직선 $y = mx$ 가 이 점을 지나므로

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{10}m \quad \therefore m = \frac{5}{6}$$

답 $\frac{5}{6}$



87

전략 주어진 그림에서 직선의 기울기와 y 절편의 부호를 이용하여
 ab , bc 의 부호를 알아낸다.

$ax+by+c=0$ 에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ 이므로

$$(\text{기울기})=-\frac{a}{b}<0, (\text{y절편})=-\frac{c}{b}>0$$

$$\therefore ab>0, bc<0$$

이때 a, c 의 부호는 서로 다르므로 $ac<0$

$bx+cy+a=0$ 에서 $y=-\frac{b}{c}x-\frac{a}{c}$ 이므로

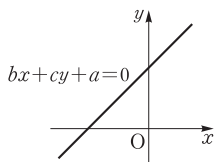
$$(\text{기울기})=-\frac{b}{c}>0, (\text{y절편})=-\frac{a}{c}>0$$

따라서 직선 $bx+cy+a=0$

의 기울기와 y절편이 모두 양

수이므로 오른쪽 그림과 같이

제 4 사분면을 지나지 않는다.



답 제4사분면

88

전략 직선 AB의 방정식과 일차함수 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 을 이용하여 두 점 C, D의 좌표를 구한다.

$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$0=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \quad \therefore x=-1$$

따라서 C(-1, 0)이므로

$$\overline{BC}=8-(-1)=9$$

한편 두 점 A(2, 6), B(8, 0)을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{0-6}{8-2}(x-8) \quad \therefore y=-x+8$$

점 D는 직선 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 과 직선 $y=-x+8$ 의 교

점이므로 $-x+8=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 에서

$$-\frac{3}{2}x=-\frac{15}{2} \quad \therefore x=5$$

$$\therefore D(5, 3)$$

따라서 $\triangle CBD$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 9 \times 3 = \frac{27}{2}$$

답 ⑤

89

전략 직사각형의 둘레의 길이를 이용하여 두 점 B, D의 좌표를 구한다.

직사각형의 둘레의 길이는 32이고 세로의 길이를

a ($a>0$)라 하면 가로의 길이는 $3a$ 이므로

$$2(3a+a)=32 \quad \therefore a=4$$

즉 직사각형의 세로의 길이는 4, 가로 길이는 12이

므로 점 B의 y좌표를 m 이라 하면

$$3-m=4 \quad \therefore m=-1$$

$$\therefore B(-8, -1)$$

점 D의 x좌표를 n 이라 하면

$$n-(-8)=12 \quad \therefore n=4$$

$$\therefore D(4, 3)$$

따라서 두 점 B, D를 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-1)=\frac{3-(-1)}{4-(-8)}\{x-(-8)\}$$

$$\therefore y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$$

즉 구하는 y절편은 $\frac{5}{3}$ 이다.

답 $\frac{5}{3}$

90

전략 직각삼각형의 합동을 이용하여 점 D의 좌표를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 점 D에서

y축에 내린 수선의 발을 H라

하면

$$\triangle ABO \cong \triangle DAH$$

(RHA 합동)

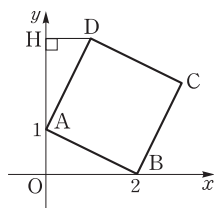
즉 $\overline{DH}=\overline{AO}=1$,

$\overline{HA}=\overline{OB}=2$ 이므로 $D(1, 3)$

따라서 두 점 B(2, 0), D(1, 3)을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{3-0}{1-2}(x-2) \quad \therefore y=-3x+6$$

답 $y=-3x+6$



91

전략 세 점이 한 직선 위에 있을 조건을 이용한다.

세 점 A(2, -5), B(a, -2), C(6, 2a+1)이 삼각형을 이루지 않으려면 세 점이 한 직선 위에 있어야 하므로

(직선 AB의 기울기)=(직선 AC의 기울기)

$$\frac{-2-(-5)}{a-2}=\frac{2a+1-(-5)}{6-2}$$

$$12 = (2a+6)(a-2)$$

$$a^2 + a - 12 = 0, \quad (a+4)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

따라서 B(3, -2), C(6, 7)이므로

$$\overline{BC} = \sqrt{(6-3)^2 + (7+2)^2} = 3\sqrt{10} \quad \text{답 } 3\sqrt{10}$$

92

전략 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지남을 이용한다.

두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 각 직사각형의 두 대각선의 교점을 동시에 지나야 한다.

제2사분면 위에 있는 직사각형의 두 대각선의 교점은 두 점 (-3, 2), (-1, 6)을 이은 선분의 중점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{-3-1}{2}, \frac{2+6}{2} \right), \text{ 즉 } (-2, 4)$$

제4사분면 위에 있는 직사각형의 두 대각선의 교점은 두 점 (3, -4), (7, -2)를 이은 선분의 중점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{3+7}{2}, \frac{-4-2}{2} \right), \text{ 즉 } (5, -3)$$

따라서 두 점 (-2, 4), (5, -3)을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 4 = \frac{-3-4}{5-(-2)} \{x - (-2)\} \\ \therefore y = -x + 2 \quad \text{답 } y = -x + 2$$

93

전략 b를 a에 대한 식으로 나타낸 후 $ax + by + 6 = 0$ 에 대입한다.

점 (a, b)가 직선 $2x - y = 3$ 위에 있으므로

$$2a - b = 3 \quad \therefore b = 2a - 3$$

$ax + by + 6 = 0$ 에 이것을 대입하면

$$ax + (2a - 3)y + 6 = 0$$

이 식을 a에 대하여 정리하면

$$-3y + 6 + (x + 2y)a = 0$$

이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$-3y + 6 = 0, \quad x + 2y = 0$$

$$\therefore x = -4, \quad y = 2$$

따라서 구하는 점의 좌표는 (-4, 2)이다.

$$\text{답 } (-4, 2)$$

94

전략 먼저 직선 $y = mx + 2m - 1$ 이 m의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구한다.

$y = mx + 2m - 1$ 을 m에 대하여 정리하면

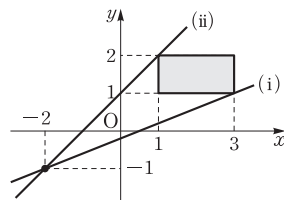
$$(x+2)m - (y+1) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x+2=0, \quad y+1=0$$

$$\therefore x = -2, \quad y = -1$$

따라서 직선 ①은 m의 값에 관계없이 항상 점 (-2, -1)을 지난다.



위의 그림에서

(i) 직선 ①이 점 (3, 1)을 지날 때

$$5m - 2 = 0 \quad \therefore m = \frac{2}{5}$$

(ii) 직선 ①이 점 (1, 2)를 지날 때

$$3m - 3 = 0 \quad \therefore m = 1$$

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는 $\frac{2}{5} \leq m \leq 1$

따라서 $\alpha = \frac{2}{5}, \beta = 1$ 이므로

$$5\alpha\beta = 2$$

$$\text{답 } 2$$

95

전략 □OAEF와 □BCFD의 넓이 사이의 관계를 이용하여 AD와 BE의 길이 사이의 관계를 구한다.

$$\square OAEF = \square BCFD + 4 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \triangle OAD &= \square OAEF + \triangle DFE \\ &= (\square BCFD + 4) + \triangle DFE \\ &= \triangle BCE + 4 \end{aligned}$$

이때

$$\triangle OAD = \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{AD} = \frac{1}{2} \times 4 \times \overline{AD} = 2\overline{AD},$$

$$\triangle BCE = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{BE} = \frac{1}{2} \times 4 \times \overline{BE} = 2\overline{BE}$$

$$\text{이므로 } 2\overline{AD} = 2\overline{BE} + 4$$

$$\therefore \overline{AD} = \overline{BE} + 2$$

이때 $\overline{BE}=k$ ($0 < k < 6$)라 하면 $\overline{AD}=k+2$

한편 직선 OD의 기울기는

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{OA}} = \frac{k+2}{4}$$

직선 CE의 기울기는

$$-\frac{\overline{BE}}{\overline{CB}} = -\frac{k}{4} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

직선 OD와 직선 CE의 기울기의 곱이 $-\frac{15}{16}$ 이므로

$$\frac{k+2}{4} \times \left(-\frac{k}{4}\right) = -\frac{15}{16}$$

$$k(k+2)=15, \quad k^2+2k-15=0$$

$$(k+5)(k-3)=0 \quad \therefore k=3 \quad (\because 0 < k < 6)$$

따라서 $\textcircled{7}$ 에서 직선 CE의 기울기는 $-\frac{3}{4}$ 이므로 구하는 방정식은

$$y = -\frac{3}{4}x + 6 \quad \text{답 } y = -\frac{3}{4}x + 6$$

96

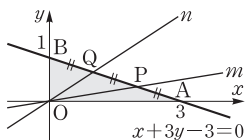
전략 삼각형의 한 꼭짓점을 지나면서 넓이를 삼등분하는 직선은 그 꼭짓점의 대변을 삼등분하는 점을 각각 지남을 이용한다.

직선 $x+3y-3=0$ 이 x

축, y 축과 만나는 점을 각

각 A, B라 하면

$$A(3, 0), B(0, 1)$$



$\overline{AB}$ 의 삼등분점을 각각 P, Q라 하면 두 직선 m , n 은 각각 점 P, Q를 지나야 한다.

위의 그림에서 점 P는 $\overline{AB}$ 를 1 : 2로 내분하므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 0 + 2 \times 3}{1+2}, \frac{1 \times 1 + 2 \times 0}{1+2}\right), \text{ 즉 } \left(2, \frac{1}{3}\right)$$

점 Q는 $\overline{AB}$ 를 2 : 1로 내분하므로 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 0 + 1 \times 3}{2+1}, \frac{2 \times 1 + 1 \times 0}{2+1}\right), \text{ 즉 } \left(1, \frac{2}{3}\right)$$

따라서 직선 OP의 기울기는 $\frac{\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{6}$, 직선 OQ의

기울기는 $\frac{2}{3}$ 이므로 두 직선 m , n 의 기울기의 합은

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \quad \text{답 } \frac{5}{6}$$

97

전략 먼저 직선 $y=kx-2k+2$ 가 k 의 값에 관계없이 항상 지나 는 점의 좌표를 구한다.

$y=kx-2k+2$ 에서

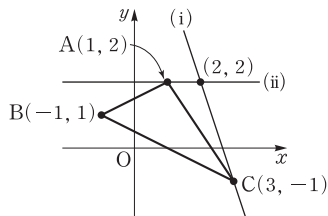
$$(x-2)k - y + 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x-2=0, \quad -y+2=0$$

$$\therefore x=2, \quad y=2$$

따라서 직선 $\textcircled{7}$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 점 (2, 2)를 지난다.



위의 그림에서

(i) 직선 $\textcircled{7}$ 이 점 C(3, -1)을 지날 때

$$k+3=0 \quad \therefore k=-3$$

(ii) 직선 $\textcircled{7}$ 이 점 A(1, 2)를 지날 때

$$-k=0 \quad \therefore k=0$$

(i), (ii)에서 구하는 k 의 값의 범위는

$$-3 < k < 0 \quad \text{답 } -3 < k < 0$$

02

직선의 위치 관계

● 본책 47~53쪽

98

(2) 두 직선이 평행하므로

$$\frac{a}{1} = \frac{4}{a} \neq -\frac{1}{3}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{4}{a} \text{에서 } a^2=4 \quad \therefore a=\pm 2$$

$$\text{답 } (1) -3 \quad (2) -2, 2$$

99

(2) 두 직선이 일치하므로

$$\frac{a}{3} = \frac{3}{b} = \frac{-2}{6}$$

$$\frac{a}{3} = \frac{-2}{6} \text{에서} \quad 6a = -6 \quad \therefore a = -1$$

$$\frac{3}{b} = \frac{-2}{6} \text{에서} \quad 18 = -2b \quad \therefore b = -9$$

답 (1) $a = -1, b = 5$ (2) $a = -1, b = -9$

100

(1) 두 직선의 기울기의 곱이 -1 이므로

$$a \times 4 = -1 \quad \therefore a = -\frac{1}{4}$$

(2) 두 직선이 수직이므로

$$(a-2) \times a + 3 \times (-1) = 0$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0, \quad (a+1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 3$$

답 (1) $-\frac{1}{4}$ (2) $-1, 3$

101

두 직선이 평행하므로

$$\frac{a+1}{2} = \frac{1}{-(a-2)} \neq \frac{-1}{-1}$$

$$\frac{a+1}{2} = \frac{1}{-(a-2)} \text{에서} \quad -(a+1)(a-2) = 2$$

$$a^2 - a = 0, \quad a(a-1) = 0$$

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } a = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a+1}{2} \neq \frac{-1}{-1} \text{에서} \quad a+1 \neq 2$$

$$\therefore a \neq 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서} \quad a = 0$$

답 0

102

두 직선 $ax - 6y - 5 = 0$, $x - 2y - 3 = 0$ 이 평행하므로

$$\frac{a}{1} = \frac{-6}{-2} \neq \frac{-5}{-3} \quad \therefore a = 3$$

두 직선 $ax - 6y - 5 = 0$, $2x - by + 1 = 0$ 이 수직이므로

$$a \times 2 + (-6) \times (-b) = 0$$

$$\therefore a + 3b = 0$$

이 식에 $a = 3$ 을 대입하면

$$3 + 3b = 0 \quad \therefore b = -1$$

$$\therefore a + b = 2$$

답 2

103

두 직선 $(a-2)x + y + 1 = 0$, $ax - 3y + b = 0$ 이 수직이므로

$$(a-2) \times a + 1 \times (-3) = 0$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0, \quad (a+1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = 3 (\because a > 0)$$

즉 두 직선 $x + y + 1 = 0$, $3x - 3y + b = 0$ 의 교점의 좌표가 $(-2, c)$ 이므로

$$-2 + c + 1 = 0, \quad -6 - 3c + b = 0$$

$$\therefore c = 1, b = 9$$

$$\therefore a + b + c = 3 + 9 + 1 = 13$$

답 13

104

직선 $y = 4x - 12$ 에 평행한 직선의 기울기는 4이다.

기울기가 4이고 점 $(-2, 5)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 5 = 4(x + 2) \quad \therefore y = 4x + 13$$

이 직선이 점 $(6, k)$ 를 지나므로

$$k = 4 \times 6 + 13 = 37$$

답 37

105

두 점 $(1, 3)$, $(5, -7)$ 을 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3-7}{2} \right), \text{ 즉 } (3, -2)$$

$$3x + 5y - 12 = 0 \text{에서} \quad y = -\frac{3}{5}x + \frac{12}{5}$$

이 직선에 수직인 직선의 기울기를 m 이라 하면

$$-\frac{3}{5} \times m = -1 \quad \therefore m = \frac{5}{3}$$

따라서 기울기가 $\frac{5}{3}$ 이고 점 $(3, -2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y + 2 = \frac{5}{3}(x - 3) \quad \therefore y = \frac{5}{3}x - 7$$

답 $y = \frac{5}{3}x - 7$

106

$\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{2-4}{2} \right), \text{ 즉 } (2, -1)$$

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-4-2}{5-(-1)} = -1$$

따라서 $\overline{AB}$ 의 수직이등분선은 기울기가 1이고 점

$(2, -1)$ 을 지나는 직선이므로 그 방정식은

$$y+1=1 \times (x-2) \quad \therefore y=x-3$$

이 직선이 점 $(a, -2)$ 를 지나므로

$$-2=a-3 \quad \therefore a=1$$

답 1

107

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{8-(-4)}{a-(-5)} = \frac{12}{a+5}$$

$2x+3y+b=0$ 에서

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{b}{3}$$

두 직선이 수직이므로

$$\frac{12}{a+5} \times \left(-\frac{2}{3} \right) = -1, \quad a+5=8$$

$$\therefore a=3$$

즉 B(3, 8)이므로 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{-4+8}{2} \right), \text{ 즉 } (-1, 2)$$

따라서 직선 $2x+3y+b=0$ 이 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$-2+6+b=0 \quad \therefore b=-4$$

$$\therefore a-b=3-(-4)=7$$

답 7

108

$$2x+y+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$x-y+2=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$ax-y=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

(i) 세 직선이 평행한 경우

두 직선 ㉠, ㉡은 평행하지 않으므로 세 직선이 평행할 수는 없다.

(ii) 두 직선이 평행한 경우

두 직선 ㉠, ㉢이 평행하려면

$$\frac{a}{2} = \frac{-1}{1} \neq \frac{0}{1} \quad \therefore a=-2$$

두 직선 ㉡, ㉢이 평행하려면

$$\frac{a}{1} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{2} \quad \therefore a=1$$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{을 연립하여 풀면 } x=-1, y=1$$

따라서 두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는 $(-1, 1)$ 이다.

직선 ㉢이 점 $(-1, 1)$ 을 지나려면

$$-a-1=0 \quad \therefore a=-1$$

이상에서 모든 상수 a 의 값의 합은

$$-2+1+(-1)=-2$$

답 -2



연습 문제

● 본책 54~55쪽

109

전략 두 직선의 평행과 수직 조건을 이용하여 $a+b$, ab 의 값을 구한다.

두 직선 $x+ay+1=0$, $2x-by+1=0$ 이 수직이므로

$$1 \times 2 + a \times (-b) = 0 \quad \therefore ab=2$$

두 직선 $x+ay+1=0$, $x-(b-3)y-1=0$ 이 평행하므로

$$\frac{1}{1} = \frac{a}{-(b-3)} \neq \frac{1}{-1} \quad \therefore a+b=3$$

$$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2 \times 2=5$$

답 5

110

전략 두 직선이 지나는 점의 좌표와 두 직선의 수직 조건을 이용한다.

직선 $2x+ay+3=0$ 이 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$2+a+3=0 \quad \therefore a=-5$$

직선 $bx+2y+c=0$ 도 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$b+2+c=0$$

$$\therefore c=-b-2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

한편 두 직선이 수직이므로

$$2 \times b + a \times 2 = 0, \quad 2b - 10 = 0$$

$$\therefore b = 5$$

㉠에 $b=5$ 를 대입하면 $c = -7$

$$\therefore abc = -5 \times 5 \times (-7) = 175 \quad \text{답 175}$$

111

전략 두 직선의 방정식을 연립하여 교점의 좌표를 구한다.

$x - y + 5 = 0$, $2x - y + 3 = 0$ 을 연립하여 풀면

$$x = 2, y = 7$$

따라서 두 직선 $x - y + 5 = 0$, $2x - y + 3 = 0$ 의 교점의 좌표는 $(2, 7)$

한편 직선 $3x - 2y + 1 = 0$, 즉 $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ 과 평행한 직선의 기울기는 $\frac{3}{2}$ 이다.

기울기가 $\frac{3}{2}$ 이고 점 $(2, 7)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 7 = \frac{3}{2}(x - 2)$$

$$\therefore y = \frac{3}{2}x + 4$$

따라서 $a = \frac{3}{2}$, $b = 4$ 이므로

$$ab = 6 \quad \text{답 6}$$

다른 풀이 두 직선 $x - y + 5 = 0$, $2x - y + 3 = 0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$\begin{aligned} x - y + 5 + k(2x - y + 3) &= 0, \text{ 즉} \\ (2k + 1)x - (k + 1)y + 3k + 5 &= 0 \quad (k \text{는 실수}) \end{aligned}$$

..... ㉠

이 직선이 직선 $3x - 2y + 1 = 0$ 과 평행하려면

$$\frac{2k + 1}{3} = \frac{-(k + 1)}{-2} \neq \frac{3k + 5}{1}$$

$$\frac{2k + 1}{3} = \frac{-(k + 1)}{-2} \text{에서}$$

$$4k + 2 = 3k + 3$$

$$\therefore k = 1$$

㉠에 $k=1$ 을 대입하면

$$3x - 2y + 8 = 0 \quad \therefore y = \frac{3}{2}x + 4$$

112

전략 두 직선의 수직 조건을 이용한다.

두 직선 $3x + 2y - 4 = 0$, $2x + ay + b = 0$ 이 수직이므로

$$3 \times 2 + 2 \times a = 0 \quad \therefore a = -3$$

따라서 직선 $2x + ay + b = 0$, 즉 $2x - 3y + b = 0$ 이 점 $(2, 5)$ 를 지나므로

$$2 \times 2 - 3 \times 5 + b = 0 \quad \therefore b = 11$$

$$\therefore a + b = -3 + 11 = 8$$

답 8

113

전략 내분점의 좌표를 구하는 공식을 이용하여 점 C의 좌표를 구한다.

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 9 + 1 \times (-3)}{2 + 1}, \frac{2 \times (-4) + 1 \times 2}{2 + 1} \right), \text{ 즉} \\ (5, -2)$$

직선 AB의 기울기는

$$\frac{-4 - 2}{9 - (-3)} = -\frac{1}{2}$$

이므로 직선 AB와 수직인 직선의 기울기는 2이다.

따라서 점 $C(5, -2)$ 를 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y + 2 = 2(x - 5) \quad \therefore y = 2x - 12$$

이 직선의 x 절편은 6, y 절편은 -12 이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 12 = 36 \quad \text{답 36}$$

114

전략 세 직선이 평면을 네 부분으로 나누려면 세 직선이 평행해야 한다.

서로 다른 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나누려면 오른쪽 그림과 같이 세 직선이 평행해야 한다.



두 직선 $ax + y + 5 = 0$, $x + 2y + 3 = 0$ 이 평행하므로

$$\frac{a}{1} = \frac{1}{2} \neq \frac{5}{3} \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

두 직선 $2x + by - 4 = 0$, $x + 2y + 3 = 0$ 이 평행하므로

$$\frac{2}{1} = \frac{b}{2} \neq \frac{-4}{3} \quad \therefore b = 4$$

$$\therefore a + b = \frac{9}{2} \quad \text{답 } \frac{9}{2}$$

해설 Focus

① 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나누는 경우

⇒ 세 직선이 평행할 때

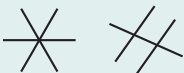


② 세 직선이 좌표평면을 여섯 부분으로 나누는 경우

⇒ 세 직선이 한 점에서 만나

거나 세 직선 중 두 직선이

평행할 때



115

전략 직선 $(3k-2)x-y+5=0$ 의 기울기와 y 절편을 이용한다.

직선 $(3k-2)x-y+5=0$, 즉 $y=(3k-2)x+5$ 와 y 축에서 수직으로 만나는 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{3k-2}x + 5$$

이 직선이 점 $(2, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -\frac{1}{3k-2} \times 2 + 5, \quad 3k-2 = \frac{2}{5}$$

$$\therefore k = \frac{4}{5} \quad \text{답 } \frac{4}{5}$$

다른 풀이 직선 $(3k-2)x-y+5=0$ 의 y 절편은 5이다.

x 절편이 2, y 절편이 5인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$$

두 직선 $(3k-2)x-y+5=0$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ 이 수직이

므로

$$(3k-2) \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{5} = 0$$

$$\frac{3k-2}{2} = \frac{1}{5}, \quad 15k-10=2$$

$$\therefore k = \frac{4}{5}$$

116

전략 점 A를 지나고 직선 $y=x-3$ 에 수직인 직선의 방정식을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 직선 AH는

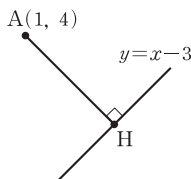
직선 $y=x-3$ 에 수직이므로 직

선 AH의 기울기는 -1 이다.

따라서 직선 AH의 방정식은

$$y-4 = -1 \times (x-1)$$

$$\therefore y = -x + 5$$



즉 점 H는 두 직선 $y=x-3$, $y=-x+5$ 의 교점이다.

$y=x-3$, $y=-x+5$ 를 연립하여 풀면

$$x=4, y=1$$

따라서 점 H의 좌표는 $(4, 1)$ 이다.

답 $(4, 1)$

117

전략 수직 조건과 중점의 좌표를 이용하여 점 B의 좌표를 구한다.

점 B의 좌표를 (a, b) 라 하면 직선 AB와 직선

$x+3y+1=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$ 이 수직이므로

$$\frac{b-(-4)}{a-1} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$$

$$\therefore 3a-b=7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 직선 $x+3y+1=0$ 이 $\overline{AB}$ 의 중점

$\left(\frac{1+a}{2}, \frac{-4+b}{2}\right)$ 를 지나므로

$$\frac{1+a}{2} + 3 \times \frac{-4+b}{2} + 1 = 0$$

$$\therefore a+3b=9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a=3, b=2$$

따라서 점 B의 좌표는 $(3, 2)$ 이다.

답 $(3, 2)$

118

전략 세 직선으로 둘러싸인 삼각형이 직각삼각형이 되려면 세 직선 중 두 직선이 수직이어야 한다.

세 직선

$$x+2y=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2x-3y-12=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$ax+y=1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

로 둘러싸인 삼각형이 직각삼각형이 되려면 세 직선 중 두 직선이 수직이어야 한다.

세 직선 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 의 기울기가 각각 $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-a$ 이

므로 두 직선 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 은 수직이 아니다.

(i) 두 직선 $\textcircled{1}$, $\textcircled{3}$ 이 수직이라면

$$-\frac{1}{2} \times (-a) = -1 \quad \therefore a = -2$$

(ii) 두 직선 $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 이 수직이라면

$$\frac{2}{3} \times (-a) = -1 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

(i), (ii)에서 모든 상수 a 의 값의 합은

$$-2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{답 } -\frac{1}{2}$$

119

전략 주어진 세 직선 중 두 직선이 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 함을 이용한다.

$$2x - y = 4 \text{에서} \quad 2x - y - 4 = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$3x + 2y = -1 \text{에서} \quad 3x + 2y + 1 = 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$x - ay = 0 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

(i) 세 직선이 평행한 경우

두 직선 ㉠, ㉡은 평행하지 않으므로 세 직선이 평행할 수는 없다.

(ii) 두 직선이 평행한 경우

두 직선 ㉠, ㉢이 평행하려면

$$\frac{1}{2} = \frac{-a}{-1} \neq \frac{0}{-4} \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

두 직선 ㉡, ㉢이 평행하려면

$$\frac{1}{3} = \frac{-a}{2} \neq \frac{0}{1} \quad \therefore a = -\frac{2}{3}$$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면} \quad x=1, y=-2$$

따라서 두 직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는 $(1, -2)$ 이다.

직선 ㉢이 점 $(1, -2)$ 를 지나려면

$$1 + 2a = 0 \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

이상에서 모든 상수 a 의 값의 곱은

$$\frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} \quad \text{답 } \frac{1}{6}$$

120

전략 점 P에서의 접선의 기울기를 이용하여 직선 l_2 의 기울기를 구한다.

직선 l_1 의 기울기를 m 이라 하면 직선 l_1 이 점 $P(1, 1)$ 을 지나므로 직선 l_1 의 방정식은

$$y - 1 = m(x - 1) \\ \therefore y = mx - m + 1$$

직선 l_1 이 함수 $y = x^2$ 의 그래프에 접하므로 방정식

$$x^2 = mx - m + 1, \text{ 즉 } x^2 - mx + m - 1 = 0$$

이 중근을 갖는다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-m)^2 - 4 \times 1 \times (m - 1) = 0 \\ m^2 - 4m + 4 = 0, \quad (m - 2)^2 = 0 \\ \therefore m = 2 \text{ (중근)}$$

따라서 직선 l_1 의 방정식은

$$y = 2x - 1 \quad \therefore Q(0, -1)$$

한편 직선 l_1 에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이므로

직선 l_2 는 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이고 점 $P(1, 1)$ 을 지난다.

즉 직선 l_2 의 방정식은

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

점 R는 직선 l_2 와 함수 $y = x^2$ 의 그래프의 교점이므로

$$x^2 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \text{에서} \quad 2x^2 + x - 3 = 0$$

$$(2x + 3)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } x = 1$$

$$\therefore R\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

$$\text{따라서 } \overline{PQ} = \sqrt{(0-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{5},$$

$$\overline{PR} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{9}{4}-1\right)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{4} \text{이므로}$$

$$S = \triangle PRQ = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{5\sqrt{5}}{4} = \frac{25}{8}$$

$$\therefore 40S = 40 \times \frac{25}{8} = 125$$

답 125

121

전략 두 직선 BC, AC의 기울기를 이용하여 두 수선의 방정식을 구한다.

점 A에서 변 BC에 내린

수선의 발을 D, 점 B에서

변 AC에 내린 수선의 발

을 E라 하자.

직선 BC의 기울기는

$$\frac{6-4}{2-8} = -\frac{1}{3}$$

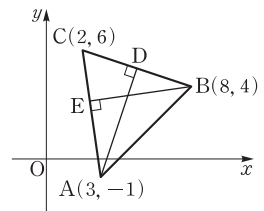
이므로 직선 AD의 기울기는 3이다.

따라서 직선 AD의 방정식은

$$y + 1 = 3(x - 3)$$

$$\therefore y = 3x - 10$$

..... ㉠



또 직선 AC의 기울기는

$$\frac{6-(-1)}{2-3} = -7$$

이므로 직선 BE의 기울기는 $\frac{1}{7}$ 이다.

따라서 직선 BE의 방정식은

$$y-4 = \frac{1}{7}(x-8)$$

$$\therefore y = \frac{1}{7}x + \frac{20}{7} \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x = \frac{9}{2}, y = \frac{7}{2}$

따라서 구하는 세 수선의 교점의 좌표는 $(\frac{9}{2}, \frac{7}{2})$ 이다.

$$\text{답 } (\frac{9}{2}, \frac{7}{2})$$

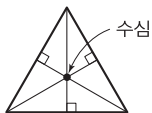
참고 점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 F라 하면 직선 CF의 기울기는 -1이므로 직선 CF의 방정식은

$$y-6 = -(x-2) \quad \therefore y = -x+8$$

이 직선이 점 $(\frac{9}{2}, \frac{7}{2})$ 을 지나므로 세 수선은 한 점에서 만난다.

개념 노트

삼각형의 각 꼭짓점에서 대변에 그은 세 수선은 한 점에서 만나고, 세 수선의 교점을 수심이라 한다.



03 점과 직선 사이의 거리

● 본책 56~62쪽

122

$$(1) \frac{|2 \times (-1) - 1 \times 4 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$(2) \frac{|3 \times 3 + 4 \times (-2) - 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5}$$

$$(3) \frac{|4 \times (-5) - 3 \times 3 + 4|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

(4) 점 (2, -6)과 직선 $y=3x-2$, 즉 $3x-y-2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3 \times 2 - 1 \times (-6) - 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$\text{답 } (1) \sqrt{5} \quad (2) \frac{1}{5} \quad (3) 5 \quad (4) \sqrt{10}$$

123

$$(1) \frac{|-13|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$(2) \frac{|10|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$(3) \frac{|-5|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

(4) 원점과 직선 $y=2x-4$, 즉 $2x-y-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{답 } (1) \sqrt{13} \quad (2) \sqrt{10} \quad (3) \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (4) \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

124

(1) 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x-y+2=0$ 위의 점 (0, 2)와 직선 $2x-y-3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2 \times 0 - 1 \times 2 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

(2) 두 직선 사이의 거리는 직선 $x+3y-1=0$ 위의 점 (1, 0)과 직선 $x+3y+4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|1 \times 1 + 3 \times 0 + 4|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

(3) 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x-4y=0$ 위의 점 (0, 0)과 직선 $3x-4y+5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

(4) 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-2y+1=0$ 위의 점 (-1, 0)과 직선 $2x-4y-3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2 \times (-1) - 4 \times 0 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{답 } (1) \sqrt{5} \quad (2) \frac{\sqrt{10}}{2} \quad (3) 1 \quad (4) \frac{\sqrt{5}}{2}$$

125

점 $(1, a)$ 와 직선 $3x+y-5=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|3+a-5|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10}$$

$$|a-2|=10, \quad a-2=\pm 10$$

$$\therefore a=-8 \text{ 또는 } a=12$$

그런데 점 $(1, a)$ 가 제 1 사분면 위의 점이므로

$$a>0$$

$$\therefore a=12$$

답 12

126

점 $(-2, 3)$ 과 직선 $x+2y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2+2\times 3-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

점 $(-2, 3)$ 과 직선 $2x+y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\times(-2)+3+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|k-1|}{\sqrt{5}}$$

두 직선까지의 거리가 같으므로

$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{|k-1|}{\sqrt{5}}, \quad k-1=\pm 3$$

$$\therefore k=-2 \text{ 또는 } k=4$$

따라서 구하는 곱은

$$-2\times 4=-8$$

답 -8

127

직선 $3x+4y+1=0$, 즉 $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$ 에 수직인 직

선의 기울기는 $\frac{4}{3}$ 이므로 구하는 직선의 방정식을

$$y=\frac{4}{3}x+k, \text{ 즉 } 4x-3y+3k=0 \text{ (} k \text{는 상수)}$$

으로 놓을 수 있다.

원점과 이 직선 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|3k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=1, \quad |3k|=5$$

$$3k=\pm 5 \quad \therefore k=-\frac{5}{3} \text{ 또는 } k=\frac{5}{3}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$4x-3y-5=0 \text{ 또는 } 4x-3y+5=0$$

$$\text{답 } 4x-3y-5=0, 4x-3y+5=0$$

128

두 직선 $x+y-3=0$, $x+y+m=0$ 사이의 거리는

직선 $x+y-3=0$ 위의 점 $(0, 3)$ 과 직선

$x+y+m=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3+m|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4\sqrt{2}, \quad |3+m|=8$$

$$3+m=\pm 8 \quad \therefore m=5 \text{ (} \because m>0 \text{)}$$

답 5

129

주어진 두 직선이 평행하므로

$$\frac{3}{a}=\frac{-1}{2}\neq\frac{12}{-4} \quad \therefore a=-6$$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x-y+12=0$

위의 점 $(-4, 0)$ 과 직선 $-6x+2y-4=0$, 즉

$3x-y+2=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3\times(-4)+2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

$$\text{답 } a=-6, \text{ 거리: } \sqrt{10}$$

130

주어진 두 직선이 평행하므로

$$\frac{3}{3}=\frac{4}{a}\neq\frac{-5}{b} \quad \therefore a=4, b\neq-5$$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선

$3x+4y-5=0$ 위의 점 $(3, -1)$ 과 직선

$3x+4y+b=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3\times 3+4\times(-1)+b|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$$

$$|b+5|=15, \quad b+5=\pm 15$$

$$\therefore b=-20 \text{ (} \because b<0 \text{)} \quad \text{답 } a=4, b=-20$$

131

선분 OA의 길이는

$$\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

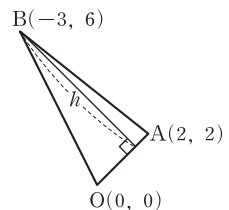
직선 OA의 방정식은

$$y=x \quad \therefore x-y=0$$

점 $B(-3, 6)$ 과 직선 OA

사이의 거리를 h 라 하면

$$h=\frac{|-3-6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{9}{\sqrt{2}}$$



따라서 $\triangle OAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times h = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{9}{\sqrt{2}} = 9 \quad \text{답 9}$$

132

선분 AB의 길이는

$$\begin{aligned} & \sqrt{(3-1)^2 + (-1-2)^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

직선 AB의 방정식은

$$y-2 = \frac{-1-2}{3-1}(x-1)$$

$$\therefore 3x+2y-7=0$$

점 C(a, 4)와 직선 AB 사이의 거리를 h라 하면

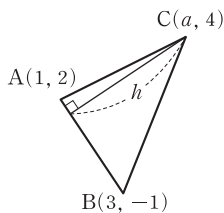
$$h = \frac{|3a+2 \times 4-7|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{|3a+1|}{\sqrt{13}}$$

이때 $\triangle ABC$ 의 넓이가 8이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h = \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \frac{|3a+1|}{\sqrt{13}} = 8$$

$$|3a+1| = 16, \quad 3a+1 = \pm 16$$

$$\therefore a=5 \text{ 또는 } a=-\frac{17}{3} \quad \text{답 5, } -\frac{17}{3}$$



133

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \text{에서} \quad x+2y+3=0$$

$$y=2x-5 \text{에서} \quad 2x-y-5=0$$

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\frac{|x+2y+3|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|2x-y-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$|x+2y+3| = |2x-y-5|$$

$$x+2y+3 = \pm(2x-y-5)$$

$$\therefore x-3y-8=0 \text{ 또는 } 3x+y-2=0$$

$$\text{답 } x-3y-8=0 \text{ 또는 } 3x+y-2=0$$

참고 점 P가 나타내는 도형은 두 직선 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$, $y = 2x-5$ 가 이루는 각의 이등분선이다.

134

각의 이등분선 위의 임의의 점을 P(x, y)라 하면 점 P에서 두 직선 $x-3y+4=0$, $3x-y-2=0$ 에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x-3y+4|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{|3x-y-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$$

$$|x-3y+4| = |3x-y-2|$$

$$x-3y+4 = \pm(3x-y-2)$$

$$\therefore x+y-3=0 \text{ 또는 } 2x-2y+1=0$$

따라서 기울기가 음수인 직선의 방정식은 $x+y-3=0$ 이다.

$$\text{답 } x+y-3=0$$

135

$$\triangle OAB = \frac{|-3 \times (-3) - 5 \times 1|}{2}$$

$$= \frac{4}{2} = 2$$

답 2

다른 풀이 선분 OB의 길이는

$$\sqrt{1^2+(-3)^2} = \sqrt{10}$$

직선 OB의 방정식은

$$y = -3x \quad \therefore 3x+y=0$$

점 A(-3, 5)와 직선 OB 사이의 거리는

$$\frac{|3 \times (-3) + 5|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

따라서 $\triangle OAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \frac{4}{\sqrt{10}} = 2$$



연습 문제

● 본책 63~64쪽

136

전략 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 방정식을 세운다.

점 P의 좌표를 (a, 0)이라 하면 점 P와 직선

$x+3y-2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|a-2|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{|a-2|}{\sqrt{10}}$$

점 P와 직선 $3x-y+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3a+3|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{|3a+3|}{\sqrt{10}}$$

두 직선까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|a-2|}{\sqrt{10}} = \frac{|3a+3|}{\sqrt{10}}$$

$$|a-2| = |3a+3|$$

$$\therefore a-2 = \pm(3a+3)$$

(i) $a-2=3a+3$ 일 때

$$-2a=5 \quad \therefore a=-\frac{5}{2}$$

(ii) $a-2=-(3a+3)$ 일 때

$$4a=-1 \quad \therefore a=-\frac{1}{4}$$

(i), (ii)에서

$$P\left(-\frac{5}{2}, 0\right) \text{ 또는 } P\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$$

$$\text{답 } \left(-\frac{5}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{4}, 0\right)$$

137

전략 평행한 두 직선의 기울기가 같음을 이용한다.

직선 $y=3x+2$ 에 평행하고 y 절편이 k 인 직선의 방정식은

$$y=3x+k, \text{ 즉 } 3x-y+k=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 $y=3x+2$ 위의 점 $(0, 2)$ 와 직선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 이라면

$$\frac{|-2+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}, \quad |-2+k|=10$$

$$-2+k=\pm 10$$

$$\therefore k=-8 \text{ 또는 } k=12$$

따라서 구하는 y 절편의 합은

$$-8+12=4$$

답 4

138

전략 직선 OA의 기울기와 직선 $3x+y-6=0$ 의 기울기가 같음을 이용한다.

선분 OA의 길이는

$$\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$$

이때 직선 OA의 방정식은 $y=-3x$, 즉 $3x+y=0$ 이므로 직선 $3x+y-6=0$ 과 평행하다.

따라서 삼각형 AOP의 밑변을 $\overline{OA}$ 라 할 때 높이는 직선 OA와 직선 $3x+y-6=0$ 사이의 거리와 같고, 두 직선 사이의 거리는 점 $O(0, 0)$ 과 직선 $3x+y-6=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-6|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{10}}$$

즉 구하는 삼각형 AOP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \frac{6}{\sqrt{10}}=3$$

답 3

다른 풀이 직선 $3x+y-6=0$ 위의 점 P의 좌표를

$(2, 0)$ 이라 하면 세 점 $(0, 0)$, $(-1, 3)$, $(2, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{|-1 \times 0 - 3 \times 2|}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

참고 직선 OA와 직선 $3x+y-6=0$ 이 평행하므로 점 P의 위치에 관계없이 $\triangle AOP$ 의 넓이는 일정하다.

139

전략 두 점 사이의 거리, 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 평행사변형의 밑변의 길이와 높이를 구한다.

선분 OA의 길이는

$$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

직선 OA의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x$$

$$\therefore x-2y=0$$

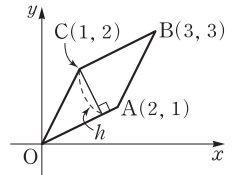
점 $C(1, 2)$ 와 직선 OA 사이의 거리를 h 라 하면

$$h=\frac{|1-2 \times 2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

따라서 평행사변형 OABC의 넓이는

$$\overline{OA} \times h = \sqrt{5} \times \frac{3}{\sqrt{5}} = 3$$

답 3



140

전략 각의 이등분선 위의 임의의 점에서 두 직선에 이르는 거리가 같음을 이용한다.

예각의 이등분선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$ 라 하면 점 P에서 두 직선 $3x+y=0$, $x+3y+4=0$ 에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|3x+y|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|x+3y+4|}{\sqrt{1^2+3^2}}$$

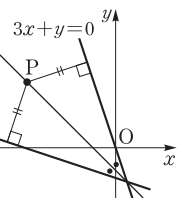
$$|3x+y|=|x+3y+4|$$

$$3x+y=\pm(x+3y+4)$$

$$\therefore x-y-2=0 \text{ 또는 } x+y+1=0$$

그런데 오른쪽 그림에서 두 직선이 이루는 예각의 이등분선은 기울기가 음수이므로 구하는 직선의 방정식은

$$x+y+1=0$$



$$\text{답 } x+y+1=0$$

141

전략 주어진 직선의 방정식을 a 에 대하여 정리하여 점 A의 좌표를 구한다.

$(a+1)x - (a-3)y + a - 15 = 0$ 을 a 에 대하여 정리하면

$$x + 3y - 15 + (x - y + 1)a = 0$$

이 식이 a 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$x + 3y - 15 = 0, \quad x - y + 1 = 0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x = 3, \quad y = 4$$

$$\therefore A(3, 4)$$

점 A와 직선 $2x - y + p = 0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|2 \times 3 - 4 + p|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

$$|2 + p| = 5, \quad 2 + p = \pm 5$$

$$\therefore p = -7 \text{ 또는 } p = 3$$

따라서 모든 상수 p 의 값의 합은

$$-7 + 3 = -4$$

답 -4

142

전략 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 $f(k)$ 를 구한다.

$$x - 2y - 4 + k(2x + y) = 0 \text{에서}$$

$$(2k+1)x + (k-2)y - 4 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $(1, -2)$ 와 직선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리 $f(k)$ 는

$$\begin{aligned} f(k) &= \frac{|2k+1-2(k-2)-4|}{\sqrt{(2k+1)^2 + (k-2)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5k^2+5}} \end{aligned}$$

$f(k)$ 의 분모 $\sqrt{5k^2+5}$ 의 값이 최소일 때 $f(k)$ 의 값은 최대가 된다.

임의의 실수 k 에 대하여 $k^2 \geq 0$ 이므로

$$5k^2 + 5 \geq 5$$

따라서 $k=0$ 일 때 분모는 최솟값 $\sqrt{5}$ 를 가지므로

$f(k)$ 의 최댓값은

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{5}}{5}$$

143

전략 마름모 ABCD 위의 점 중 점 P에서 가장 가까운 점과 가장 먼 점의 위치를 파악한다.

점 P $(-3, 3)$ 과 마름모 ABCD 위의 점 Q 사이의 거리의 최솟값 m 은 점 P와 직선 AD 사이의 거리와 같고, 최댓값 M 은 점 P와 점 B 사이의 거리와 같다.

직선 AD의 방정식은

$$\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} = 1 \quad \therefore 2x - y + 2 = 0$$

$$\therefore m = \frac{|2 \times (-3) - 3 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

또 B $(0, -2)$ 이므로

$$M = \sqrt{(0+3)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{34}$$

$$\therefore M^2 - m^2 = 34 - \frac{49}{5} = \frac{121}{5} \quad \text{답 } \frac{121}{5}$$

참고 C $(1, 0)$ 이므로 $\overline{PC} = \sqrt{(1+3)^2 + (0-3)^2} = 5$

$$\therefore \overline{PB} > \overline{PC}$$

144

전략 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을 세운다.

두 직선 $x - y + 1 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x - y + 1 + k(x - 2y + 3) = 0, \text{ 즉}$$

$$(k+1)x - (2k+1)y + 3k+1 = 0 \quad (k \text{는 실수})$$

$$\dots\dots \textcircled{1}$$

원점과 직선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|3k+1|}{\sqrt{(k+1)^2 + \{-(2k+1)\}^2}} = 1$$

$$|3k+1| = \sqrt{5k^2+6k+2}$$

양변을 제곱하면

$$9k^2 + 6k + 1 = 5k^2 + 6k + 2$$

$$4k^2 = 1, \quad k^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore k = \pm \frac{1}{2}$$

(i) $\textcircled{1}$ 에 $k = \frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$\frac{3}{2}x - 2y + \frac{5}{2} = 0 \quad \therefore 3x - 4y + 5 = 0$$

(ii) $\textcircled{1}$ 에 $k = -\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \quad \therefore x = 1$$

(i), (ii)에서 구하는 직선의 방정식은

$$3x - 4y + 5 = 0, \quad x = 1$$

$$\text{답 } 3x - 4y + 5 = 0, \quad x = 1$$

다른 풀이 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=1, y=2$$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는

$$(1, 2)$$

점 $(1, 2)$ 를 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y-2=m(x-1)$$

$$\therefore mx-y-m+2=0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

직선 $\textcircled{7}$ 과 원점 사이의 거리가 1이라 하면

$$\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

$$|-m+2|=\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$m^2-4m+4=m^2+1$$

$$\therefore m=\frac{3}{4}$$

$\textcircled{7}$ 에 이것을 대입하면

$$\frac{3}{4}x-y+\frac{5}{4}=0$$

$$\therefore 3x-4y+5=0$$

또 점 $(1, 2)$ 를 지나고 y 축에 평행한 직선 $x=1$ 과 원점 사이의 거리도 1이다.

145

전략 직선의 방정식을 연립하여 교점의 좌표를 구한다.

$$2x-y-1=0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$x-2y+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$x+y-5=0 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

두 직선 $\textcircled{7}$ 과 $\textcircled{8}$, $\textcircled{8}$ 과 $\textcircled{9}$, $\textcircled{9}$

과 $\textcircled{7}$ 의 교점을 각각 A, B, C

라 하면

$$A(1, 1), B(3, 2), C(2, 3)$$

선분 AB의 길이는

$$\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$$

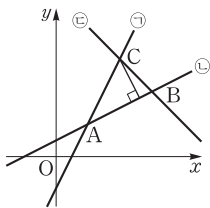
점 C(2, 3)과 직선 $\textcircled{8}$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-2 \times 3+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

따라서 $\triangle ABC$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$



146

전략 점 P에서 삼각형 ABC의 세 변까지의 거리가 모두 같음을 이용한다.

직선 AB의 기울기는 $\frac{-3-0}{0-6}=\frac{1}{2}$ 이므로 직선 AB의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x-3 \quad \therefore x-2y-6=0$$

직선 BC의 기울기는 $\frac{-8-(-3)}{10-0}=-\frac{1}{2}$ 이므로

직선 BC의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}x-3 \quad \therefore x+2y+6=0$$

직선 CA의 기울기는 $\frac{0-(-8)}{6-10}=-2$ 이므로 직선

CA의 방정식은

$$y=-2(x-6) \quad \therefore 2x+y-12=0$$

삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심 P의 좌표를

(a, b) 라 하자.

점 P에서 직선 AB까지의 거리와 직선 BC까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|a-2b-6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|a+2b+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

$$|a-2b-6|=|a+2b+6|$$

$$\therefore a-2b-6=\pm(a+2b+6)$$

(i) $a-2b-6=a+2b+6$ 일 때

$$-4b=12 \quad \therefore b=-3$$

(ii) $a-2b-6=-(a+2b+6)$ 일 때

$$2a=0 \quad \therefore a=0$$

이때 $0 < a < 10$, $-8 < b < 0$ 이므로

$$b=-3$$

또 점 P에서 직선 BC까지의 거리와 직선 CA까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|a+2b+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2a+b-12|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$\therefore |a+2b+6|=|2a+b-12|$$

이때 $b=-3$ 이므로

$$|a|=|2a-15|, \quad a=\pm(2a-15)$$

$$\therefore a=5 \quad (\because 0 < a < 10)$$

따라서 점 P의 좌표는 $(5, -3)$ 이므로 선분 OP의 길

$$\text{이는 } \sqrt{5^2+(-3)^2}=\sqrt{34}$$

답 ④

개념 노트

삼각형의 내심

삼각형 ABC의 내심 I에 대하여

- ① 점 I는 세 내각의 이등분선의 교점이다.
- ② 점 I에서 세 변까지의 거리가 모두 같다.

147

전략 기울기가 -2이고 이차함수 $y=x^2+3$ 의 그래프에 접하는 직선과 주어진 직선 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 임을 이용한다.

직선 $y=-2x+k$ 와 평행하고 $y=x^2+3$ 의 그래프에 접하는 직선의 방정식을

$$y=-2x+a \quad (a \text{는 상수})$$

라 하면 $x^2+3=-2x+a$ 에서

$$x^2+2x+3-a=0$$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=1^2-(3-a)=0 \quad \therefore a=2$$

따라서 접선의 방정식은 $y=-2x+2$ 이다.

오른쪽 그림에서 함수

$y=x^2+3$ 의 그래프 위의 점과 직선 $y=-2x+k$ 사이의 거리의 최솟값은 두 직선 $y=-2x+k$, $y=-2x+2$ 사이의 거리와 같다.

즉 직선 $y=-2x+2$ 위

의 점 $(1, 0)$ 과 직선 $y=-2x+k$, 즉 $2x+y-k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|2 \times 1 - k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}, \quad |2 - k| = 5$$

$$2 - k = \pm 5$$

$$\therefore k = -3 \text{ 또는 } k = 7$$

이때 $k=7$ 이면 이차함수 $y=x^2+3$ 의 그래프와 직선 $y=-2x+7$ 이 만나므로 $k \neq 7$

$$\therefore k = -3$$

답 -3

참고 $k \geq 2$ 이면 $y=x^2+3$ 의 그래프와 직선 $y=-2x+k$ 가 만나므로 그래프 위의 점과 직선 사이의 거리의 최솟값은 0이다.

148

전략 직선 AB, AC의 방정식을 각각 구하여 직선 $y=a$ 와의 교점의 x 좌표를 구한다.

선분 BC의 길이는

$$\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

직선 BC의 방정식은

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} = 1 \quad \therefore x - 2y - 2 = 0$$

점 A(1, 4)와 직선 BC 사이의 거리는

$$\frac{|1 - 2 \times 4 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$$

따라서 $\triangle ABC$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{9}{2}$$

한편 직선 AB의 방정식은

$$y=5x-1$$

이므로 직선 $y=a$ 와 직선 AB

의 교점을 D라 하면 점 D의 x

좌표는 $a=5x-1$ 에서

$$x = \frac{a+1}{5}$$

직선 AC의 방정식은

$$y=-4x+8$$

이므로 직선 $y=a$ 와 직선 AC의 교점을 E라 하면 점

E의 x 좌표는 $a=-4x+8$ 에서

$$x = \frac{8-a}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore DE &= \frac{8-a}{4} - \frac{a+1}{5} = \frac{36-9a}{20} \\ &= \frac{9(4-a)}{20} \end{aligned}$$

이때 점 A와 직선 $y=a$ 사이의 거리는 $4-a$ 이고

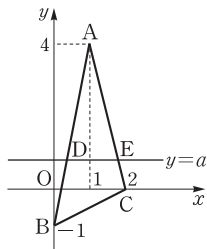
$\triangle ADE$ 의 넓이가 $\frac{9}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \frac{9(4-a)}{20} \times (4-a) = \frac{9}{4}$$

$$(4-a)^2 = 10, \quad a^2 - 8a + 6 = 0$$

$$\therefore a = 4 - \sqrt{10} \quad (\because -1 < a < 4)$$

답 $4 - \sqrt{10}$



3 원의 방정식

1. 도형의 방정식

01 원의 방정식

● 본책 66~76쪽

149

- 답 (1) 중심의 좌표: (0, 0), 반지름의 길이: $\sqrt{11}$
 (2) 중심의 좌표: (5, 0), 반지름의 길이: 3
 (3) 중심의 좌표: (-2, 3), 반지름의 길이: 5

150

- 답 (1) $x^2 + y^2 = 9$
 (2) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$
 (3) $(x+5)^2 + (y-1)^2 = 5$

151

- (1) $x^2 + y^2 - 8x = 0$ 에서
 $(x-4)^2 + y^2 = 16$
 따라서 중심의 좌표는 (4, 0), 반지름의 길이는 4이다.
 (2) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ 에서
 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$
 따라서 중심의 좌표는 (-1, 2), 반지름의 길이는 5이다.
 (3) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$ 에서
 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 1$
 따라서 중심의 좌표는 (3, -2), 반지름의 길이는 1이다.

답 풀이 참조

152

- 답 (1) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$
 (2) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$
 (3) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$

153

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은
 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = r^2$ ㉠
 이 원이 점 (4, 2)를 지나므로
 $(4-1)^2 + (2+2)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 25$

㉠에 $r^2 = 25$ 를 대입하면

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$$

이 원이 점 (a, 1)을 지나므로

$$(a-1)^2 + (1+2)^2 = 25, \quad (a-1)^2 = 16$$

$$a-1 = \pm 4 \quad \therefore a = 5 \quad (\because a > 0) \quad \text{답 5}$$

154

두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심은 $\overline{AB}$ 의 중점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{5-1}{2}, \frac{1+7}{2} \right), \text{ 즉 } (2, 4)$$

또 $\overline{AB}$ 가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \sqrt{(-1-5)^2 + (7-1)^2} = 3\sqrt{2}$$

따라서 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 18$$

즉 $a=2, b=4, c=18$ 이므로

$$a+b+c=24 \quad \text{답 24}$$

155

원의 중심이 x 축 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 (a, 0), 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2$$

이 원이 두 점 (4, -3), (2, 3)을 지나므로

$$(4-a)^2 + 9 = r^2, \quad (2-a)^2 + 9 = r^2$$

$$\therefore a^2 - 8a + 25 = r^2, \quad a^2 - 4a + 13 = r^2$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3, r^2=10$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2 + y^2 = 10$$

$$\text{답 } (x-3)^2 + y^2 = 10$$

다른 풀이

원의 중심의 좌표를 (a, 0)이라 하면 이 점에 서 두 점 (4, -3), (2, 3)까지의 거리가 같으므로

$$\sqrt{(a-4)^2 + 3^2} = \sqrt{(a-2)^2 + (-3)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 8a + 25 = a^2 - 4a + 13$$

$$\therefore a = 3$$

즉 원의 중심의 좌표는 (3, 0)이고, 반지름의 길이는 두 점 (3, 0), (4, -3) 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(4-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2+y^2=10$$

156

원의 중심이 직선 $y=x+5$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a, a+5)$, 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-a-5)^2=r^2$$

이 원이 두 점 $(0, 0)$, $(1, 2)$ 를 지나므로

$$(-a)^2+(-a-5)^2=r^2,$$

$$(1-a)^2+(2-a-5)^2=r^2$$

$$\therefore 2a^2+10a+25=r^2, 2a^2+4a+10=r^2$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-\frac{5}{2}, r^2=\frac{25}{2}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$$

$$\text{답} \left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$$

157

$x^2+y^2+2x-4y-15+k=0$ 에서

$$(x+1)^2+(y-2)^2=20-k$$

이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{20-k}$ 이므로

$$\sqrt{20-k}=5$$

양변을 제곱하면

$$20-k=25 \quad \therefore k=-5$$

답 -5

158

$x^2+y^2-6x+ay+9=0$ 에서

$$(x-3)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$$

이 원의 중심의 좌표는 $\left(3, -\frac{a}{2}\right)$ 이므로

$$3=b, -\frac{a}{2}=-3 \quad \therefore a=6, b=3$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{\frac{a^2}{4}}$ 이므로

$$r=\sqrt{\frac{6^2}{4}}=3$$

$$\therefore a+b+r=6+3+3=12$$

답 12

159

$x^2+y^2-2(a+1)x+2ay+3a^2-2=0$ 에서

$$\{x-(a+1)\}^2+(y+a)^2=-a^2+2a+3$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$-a^2+2a+3>0, \quad a^2-2a-3<0$$

$$(a+1)(a-3)<0$$

$$\therefore -1<a<3$$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2의 3개이다.

답 3

160

주어진 세 점을 $O(0, 0)$, $A(-1, 2)$, $B(3, -1)$ 이라 하고, 세 점 O, A, B 를 지나는 원의 중심을 $P(a, b)$ 라 하면

$$\overline{OP}=\overline{AP}=\overline{BP}$$

$\overline{OP}=\overline{AP}$ 에서 $\overline{OP}^2=\overline{AP}^2$ 이므로

$$a^2+b^2=(a+1)^2+(b-2)^2$$

$$\therefore 2a-4b=-5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\overline{OP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{OP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로

$$a^2+b^2=(a-3)^2+(b+1)^2$$

$$\therefore 3a-b=5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a=\frac{5}{2}, b=\frac{5}{2}$$

즉 원의 중심은 점 $P\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 이고 반지름의 길이는

$$\overline{OP}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$$

$$\text{답} \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$$

다른 풀이 구하는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

이라 하면 이 원이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$C=0$$

즉 원 $x^2+y^2+Ax+By=0$ 이 두 점 $(-1, 2)$,

$(3, -1)$ 을 지나므로

$$1+4-A+2B=0, 9+1+3A-B=0$$

$$\therefore A-2B=5, 3A-B=-10$$

두 식을 연립하여 풀면

$$A = -5, B = -5$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 5x - 5y = 0$$

161

세 점 A(-3, 4), B(1, 0), C(3, 4)를 지나는 원의 중심을 P(a, b)라 하면

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$$

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(a+3)^2 + (b-4)^2 = (a-1)^2 + b^2$$

$$\therefore a-b = -3 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$\overline{BP} = \overline{CP}$ 에서 $\overline{BP}^2 = \overline{CP}^2$ 이므로

$$(a-1)^2 + b^2 = (a-3)^2 + (b-4)^2$$

$$\therefore a+2b = 6 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0, b=3$

즉 원의 중심은 점 P(0, 3)이고 반지름의 길이는

$$\overline{AP} = \sqrt{(0+3)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{10}$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{10})^2 = 10\pi \quad \text{답 10}\pi$$

다른 풀이 주어진 원의 방정식을

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 이라 하면 이 원이 세 점

A(-3, 4), B(1, 0), C(3, 4)를 지나므로

$$9 + 16 - 3A + 4B + C = 0 \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

$$1 + A + C = 0 \quad \cdots \textcircled{㉣}$$

$$9 + 16 + 3A + 4B + C = 0 \quad \cdots \textcircled{㉤}$$

㉢-㉤을 하면

$$-6A = 0 \quad \therefore A = 0$$

㉣에 $A=0$ 을 대입하면

$$1 + C = 0 \quad \therefore C = -1$$

㉤에 $A=0, C=-1$ 을 대입하면

$$24 + 4B = 0 \quad \therefore B = -6$$

따라서 주어진 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 6y - 1 = 0$$

$$\therefore x^2 + (y-3)^2 = 10$$

162

$x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = 0$ 에서

$$(x-4)^2 + (y+5)^2 = 41-k$$

이 원의 중심의 좌표가 (4, -5)이고 x 축에 접하므로

$$\sqrt{41-k} = |-5|$$

양변을 제곱하면

$$41-k=25 \quad \therefore k=16 \quad \text{답 16}$$

163

원의 중심이 직선 $y=x+2$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 (a, a+2)라 하면 원이 y 축에 접하므로 반지름의 길이는 $|a|$ 이다.

즉 이 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-a-2)^2 = a^2$$

이 원이 점 (4, 4)를 지나므로

$$(4-a)^2 + (4-a-2)^2 = a^2$$

$$a^2 - 12a + 20 = 0, \quad (a-2)(a-10) = 0$$

$$\therefore a=2 \text{ 또는 } a=10$$

따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은

$$2+10=12 \quad \text{답 12}$$

164

점 (-2, 1)을 지나고 x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 중심은 제2사분면 위에 있으므로 원의 반지름의 길이를 r ($r>0$)라 하면 원의 방정식은

$$(x+r)^2 + (y-r)^2 = r^2 \rightarrow \text{중심의 좌표: } (-r, r)$$

이 원이 점 (-2, 1)을 지나므로

$$(-2+r)^2 + (1-r)^2 = r^2$$

$$r^2 - 6r + 5 = 0, \quad (r-1)(r-5) = 0$$

$$\therefore r=1 \text{ 또는 } r=5$$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 각각 (-1, 1),

(-5, 5)이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(-5+1)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{2} \quad \text{답 } 4\sqrt{2}$$

165

$x^2 + y^2 + 2ax + 6y + 7 - b = 0$ 에서

$$(x+a)^2 + (y+3)^2 = a^2 + b + 2$$

이 원의 중심의 좌표가 (-a, -3)이고 x 축과 y 축에 동시에 접하므로

$$|-a| = |-3| = \sqrt{a^2 + b + 2}$$

$$|-a| = |-3| \text{에서 } a=3 \quad (\because a>0)$$

$|-3| = \sqrt{a^2 + b + 2}$ 의 양변을 제곱하면

$$9 = a^2 + b + 2$$

위의 식에 $a=3$ 을 대입하면

$$9 = 9 + b + 2 \quad \therefore b = -2$$

$$\therefore a + b = 3 + (-2) = 1$$

답 1

166

원의 반지름의 길이를 r ($r > 0$)라 하면 x 축과 y 축에 동시에 접하고 원의 중심이 제 4사분면 위에 있으므로 원의 중심의 좌표는 $(r, -r)$

이때 점 $(r, -r)$ 가 직선 $x + 3y + 6 = 0$ 위에 있으므로

$$r - 3r + 6 = 0 \quad \therefore r = 3$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$$

$$\text{답 } (x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$$

167

$$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 = 0 \text{에서}$$

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 16$$

따라서 원의 중심을 C라 하면 점 C의 좌표는 $(1, 5)$,

원의 반지름의 길이는 4이다.

이때 $\overline{OC} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$ 이므로

$$M = \sqrt{26} + 4, m = \sqrt{26} - 4$$

$$\begin{aligned} \therefore M^2 + m^2 &= (\sqrt{26} + 4)^2 + (\sqrt{26} - 4)^2 \\ &= 42 + 8\sqrt{26} + 42 - 8\sqrt{26} \\ &= 84 \end{aligned}$$

답 84

168

원 $(x+5)^2 + (y-4)^2 = r^2$ 의 중심을 C라 하면

$$C(-5, 4)$$

$$\therefore \overline{CP} = \sqrt{(-1+5)^2 + (1-4)^2} = 5$$

이때 원의 반지름의 길이가 r 이므로

$$5 - r = 3 \quad \therefore r = 2$$

답 2

169

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 30$ 에서

$$x^2 + (y+1)^2 + (x-2)^2 + (y-3)^2 = 30$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 10$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(1, 1)$

이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{10})^2 = 10\pi$$

답 10π

170

$\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 3$ 에서

$$3\overline{AP} = \overline{BP} \quad \therefore 9\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$$

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$9\{(x-2)^2 + y^2\} = (x-10)^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\therefore (x-1)^2 + y^2 = 9$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(1, 0)$

이고 반지름의 길이가 3인 원이므로 구하는 도형의 길이는

$$2\pi \times 3 = 6\pi$$

답 6π

171

$\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 2$ 에서

$$2\overline{AP} = 3\overline{BP} \quad \therefore 4\overline{AP}^2 = 9\overline{BP}^2$$

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$4\{(x+2)^2 + y^2\} = 9\{(x-3)^2 + y^2\}$$

$$x^2 + y^2 - 14x + 13 = 0$$

$$\therefore (x-7)^2 + y^2 = 36$$

즉 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(7, 0)$ 이고 반지름의 길이가 6인 원이다.

이때 $\triangle PAB$ 에서 $\overline{AB}$ 를 밑

변으로 생각하면 점 P와 직

선 AB 사이의 거리가 높이

이므로 오른쪽 그림과 같이

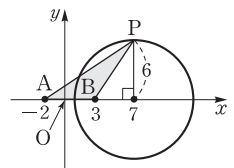
높이가 원의 반지름의 길이

와 같을 때 $\triangle PAB$ 의 넓이가 최대이다.

따라서 $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times |3 - (-2)| \times 6 = 15$$

답 15





172

전략 중심의 좌표와 반지름의 길이를 이용하여 원의 방정식을 세운다.

중심이 점 $(a, 1)$ 이고 반지름의 길이가 5인 원의 방정식은 $(x-a)^2 + (y-1)^2 = 25$

이 원이 점 $(0, -2)$ 를 지나므로

$$(0-a)^2 + (-2-1)^2 = 25$$

$$a^2 = 16 \quad \therefore a = 4 \quad (\because a > 0)$$

답 4

173

전략 $\overline{AB}$ 가 원의 지름임을 이용한다.

$\overline{AB}$ 가 원의 지름이므로 $\frac{1}{2} \overline{AB} = \sqrt{5}$ 에서

$$\overline{AB} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore \sqrt{(a-5)^2 + (-3-1)^2} = 2\sqrt{5}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 10a + 21 = 0, \quad (a-3)(a-7) = 0$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a < 5)$$

즉 원의 중심은 두 점 $A(5, 1)$, $B(3, -3)$ 을 이은 선분 $\overline{AB}$ 의 중점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{5+3}{2}, \frac{1-3}{2} \right), \text{ 즉 } (4, -1)$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$$

$$\text{답 } (x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$$

174

전략 두 원의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 원의 중심을 지남을 이용한다.

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심을 지나야 한다.

$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 10 = 0$ 에서

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 15 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원 $(x-1)^2 + y^2 = 4$ 의 중심인 점 $(1, 0)$ 과 원 $\textcircled{1}$ 의 중심인 점 $(3, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{4-0}{3-1}(x-1)$$

$$\therefore y = 2x - 2$$

따라서 구하는 y 절편은 -2 이다.

답 -2

175

전략 주어진 방정식을 변형하여 반지름의 길이를 k 에 대한 식으로 나타낸다.

$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 2k - 7 = 0$ 에서

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 12 - 2k$$

이 방정식이 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$ 이하인 원을 나타내려면

$$0 < \sqrt{12-2k} \leq \sqrt{6}$$

$$0 < 12-2k \leq 6, \quad -12 < -2k \leq -6$$

$$\therefore 3 \leq k < 6$$

답 $3 \leq k < 6$

176

전략 원의 중심과 주어진 세 점 사이의 거리가 모두 같음을 이용한다.

주어진 세 점을 $O(0, 0)$, $A(6, 0)$, $B(-4, 4)$ 라고 하고, 세 점 O , A , B 를 지나는 원의 중심을 $C(p, q)$ 라 하면

$$\overline{OC} = \overline{AC} = \overline{BC}$$

$\overline{OC} = \overline{AC}$ 에서 $\overline{OC}^2 = \overline{AC}^2$ 이므로

$$p^2 + q^2 = (p-6)^2 + q^2$$

$$-12p + 36 = 0 \quad \therefore p = 3$$

$\overline{OC} = \overline{BC}$ 에서 $\overline{OC}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로

$$p^2 + q^2 = (p+4)^2 + (q-4)^2$$

$$\therefore q = p + 4$$

위의 식에 $p = 3$ 을 대입하면 $q = 7$

$$\therefore p + q = 3 + 7 = 10$$

답 10

다른 풀이 원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 이라 하면 이 원이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$C = 0$$

따라서 원 $x^2 + y^2 + Ax + By = 0$ 이 두 점 $(6, 0)$,

$(-4, 4)$ 를 지나므로

$$36 + 6A = 0, \quad 16 + 16 - 4A + 4B = 0$$

$$\therefore A = -6, \quad B = -14$$

즉 주어진 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 6x - 14y = 0$$

$$\therefore (x-3)^2 + (y-7)^2 = 58$$

따라서 $p = 3$, $q = 7$ 이므로

$$p + q = 10$$

177

전략 제2사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 중심의 좌표를 $(-r, r)$ 로 놓는다.

주어진 원의 반지름의 길이를 r ($r > 0$)라 하면 x 축과 y 축에 동시에 접하고 원의 중심이 제2사분면에 있으므로 원의 중심의 좌표는

$$(-r, r)$$

이때 점 $(-r, r)$ 가 곡선 $y = x^2 - x - 1$ 위에 있으므로

$$r = (-r)^2 - (-r) - 1$$

$$r^2 = 1 \quad \therefore r = 1 \quad (\because r > 0)$$

즉 중심의 좌표가 $(-1, 1)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$\therefore x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$$

따라서 $a=2, b=-2, c=1$ 이므로

$$a+b+c=1$$

답 1

178

전략 주어진 두 점을 이은 선분의 중점의 좌표와 두 점 사이의 거리를 이용하여 원의 방정식을 구한다.

원의 중심은 두 점 $(-2, 3), (4, -5)$ 를 이은 선분의 중점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3-5}{2} \right), \text{ 즉 } (1, -1)$$

또 두 점 $(-2, 3), (4, -5)$ 를 이은 선분이 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} \sqrt{(4+2)^2 + (-5-3)^2} = 5$$

따라서 주어진 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$$

이때 x 축 위의 점은 y 좌표가 0이므로 위의 방정식에 $y=0$ 을 대입하면

$$(x-1)^2 + 1 = 25$$

$$(x-1)^2 = 24, \quad x-1 = \pm 2\sqrt{6}$$

$$\therefore x = 1 \pm 2\sqrt{6}$$

따라서 x 축과 만나는 두 점의 좌표는

$$(1+2\sqrt{6}, 0), (1-2\sqrt{6}, 0)$$

이므로 구하는 두 점 사이의 거리는

$$1+2\sqrt{6} - (1-2\sqrt{6}) = 4\sqrt{6}$$

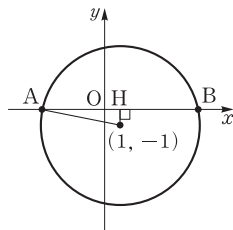
답 4√6

다른 풀이 주어진 원의 중심

의 좌표가 $(1, -1)$ 이고 반지름의 길이가 5이므로 오른쪽 그림과 같이 x 축과 원이 만나는 두 점을 각각 A, B, 원의 중심에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$$



179

전략 주어진 방정식을 변형하여 반지름의 길이를 k 에 대한 식으로 나타낸다.

$$x^2 + y^2 - 4kx + 2ky + 10k - 15 = 0 \text{에서}$$

$$(x-2k)^2 + (y+k)^2 = 5k^2 - 10k + 15$$

이 원의 중심의 좌표는 $(2k, -k)$ 이고 반지름의 길이는 $\sqrt{5k^2 - 10k + 15}$ 이다.

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름의 길이가 최소가 되어야 하고

$$\sqrt{5k^2 - 10k + 15} = \sqrt{5(k-1)^2 + 10}$$

이므로 $k=1$ 일 때 원의 반지름의 길이가 최소이다.

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는

$$(2, -1)$$

답 (2, -1)

180

전략 세 직선의 교점의 좌표를 구하고 외접원의 중심에서 세 교점까지의 거리가 모두 같음을 이용한다.

$$5x + 2y + 8 = 0 \quad \text{..... ㉠}$$

$$7x - 3y - 12 = 0 \quad \text{..... ㉡}$$

$$3x + 7y - 30 = 0 \quad \text{..... ㉢}$$

직선 ㉠과 ㉡, 직선 ㉡과 ㉢, 직선 ㉢과 ㉠의 교점을 각각 A, B, C라 하면

$$A(0, -4), B(3, 3), C(-4, 6)$$

세 점 A, B, C를 지나는 원의 중심을 $P(a, b)$ 라 하면

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$$

$$\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$a^2 + (b+4)^2 = (a-3)^2 + (b-3)^2$$

$$6a + 14b = 2$$

$$\therefore 3a + 7b = 1$$

..... ㉤

$\overline{AP} = \overline{CP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{CP}^2$ 이므로

$$a^2 + (b+4)^2 = (a+4)^2 + (b-6)^2$$

$$8a - 20b = -36$$

$$\therefore 2a - 5b = -9 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

㉔, ㉓을 연립하여 풀면 $a = -2, b = 1$

즉 원의 중심은 점 $P(-2, 1)$ 이고 반지름의 길이는

$$\overline{AP} = \sqrt{(-2-0)^2 + (1+4)^2} = \sqrt{29}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 29$$

$$\text{답 } (x+2)^2 + (y-1)^2 = 29$$

다른 풀이 구하는 원의 방정식을

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 이라 하면 이 원이 세 점

$(0, -4), (3, 3), (-4, 6)$ 을 지나므로

$$16 - 4B + C = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

$$9 + 9 + 3A + 3B + C = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉖}$$

$$16 + 36 - 4A + 6B + C = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉗}$$

$$\textcircled{㉕} \text{에서 } C = 4B - 16 \quad \dots\dots \textcircled{㉘}$$

㉖, ㉗에 각각 ㉘을 대입하면

$$18 + 3A + 3B + 4B - 16 = 0,$$

$$52 - 4A + 6B + 4B - 16 = 0$$

$$\therefore 3A + 7B = -2, 2A - 5B = 18$$

두 식을 연립하여 풀면 $A = 4, B = -2$

㉘에 $B = -2$ 를 대입하면 $C = -24$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 24 = 0$$

해설 Focus

두 직선 $7x - 3y - 12 = 0, 3x + 7y - 30 = 0$ 에서

$$7 \times 3 + (-3) \times 7 = 0$$

이므로 두 직선은 수직이다.

이때 원의 지름에 대한 원주

각의 크기는 90° 이므로 주어

진 세 직선으로 만들어지는

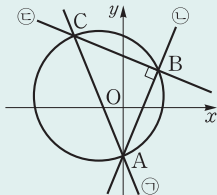
삼각형의 외접원은 오른쪽

그림과 같이 직선

$$5x + 2y + 8 = 0 \text{과 두 직선}$$

$$7x - 3y - 12 = 0, 3x + 7y - 30 = 0 \text{의 교점 } A(0, -4),$$

$C(-4, 6)$ 을 지름의 양 끝 점으로 하는 원과 같다.



181

전략 두 원의 중심 사이의 거리와 반지름의 길이를 이용한다.

원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 중심의 좌표는 $(0, 0)$, 반지름의 길이는 1이다.

$$x^2 + y^2 + 6x + 6y + 10 = 0 \text{에서}$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 = 8$$

이므로 이 원의 중심의 좌표는 $(-3, -3)$, 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이다.

따라서 두 원의 중심 사이

의 거리는

$$\sqrt{(-3)^2 + (-3)^2}$$

$$= 3\sqrt{2}$$

이므로 선분 PQ의 길이의

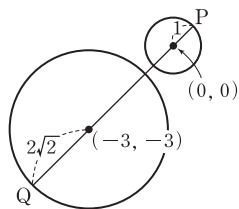
최댓값은

$$3\sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{2} = 1 + 5\sqrt{2}$$

$$\text{답 } 1 + 5\sqrt{2}$$

참고 선분 PQ의 길이의 최솟값은

$$3\sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$$



182

전략 직각삼각형이 되려면 삼각형의 한 변이 원의 지름이어야 함을 이용한다.

원주각의 성질에 의하여

$\triangle PAB$ 가 직각삼각형이

되려면 선분 PA 또는 선

분 PB가 원의 지름이 되

어야 한다.

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

(i) 선분 PA가 원의 지름일 때

$\overline{PA}$ 의 중점이 원의 중심 $(2, 1)$ 이어야 하므로

$$\frac{x+6}{2} = 2, \frac{y+4}{2} = 1$$

$$\therefore x = -2, y = -2$$

(ii) 선분 PB가 원의 지름일 때

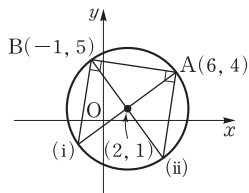
$\overline{PB}$ 의 중점이 원의 중심 $(2, 1)$ 이어야 하므로

$$\frac{x-1}{2} = 2, \frac{y+5}{2} = 1$$

$$\therefore x = 5, y = -3$$

(i), (ii)에서 점 P의 좌표는

$$(-2, -2) \text{ 또는 } (5, -3)$$



이므로 이 두 점을 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-2+5}{2}, \frac{-2-3}{2} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2} \right)$$

따라서 $a = \frac{3}{2}, b = -\frac{5}{2}$ 이므로

$$a+b=-1$$

답 -1

183

전략 점 P의 좌표를 (a, b) , $\overline{AP}$ 의 중점의 좌표를 (x, y) 로 놓고 a, b 를 x, y 에 대한 식으로 나타낸다.

점 P의 좌표를 (a, b) , 선분 AP의 중점의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \frac{a+3}{2}, y = \frac{b+2}{2}$$

$$\therefore a = 2x-3, b = 2y-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 P가 원 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$ 위의 점이므로

$$(a-1)^2 + (b+2)^2 = 8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②에 ①을 대입하면

$$(2x-3-1)^2 + (2y-2+2)^2 = 8$$

$$4(x-2)^2 + 4y^2 = 8$$

$$\therefore (x-2)^2 + y^2 = 2$$

따라서 선분 AP의 중점이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(2, 0)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{2})^2 = 2\pi$$

답 2π

02

원과 직선의 위치 관계

● 본책 79~84쪽

184

답 $x+1, 2x^2+2x-7, 2$

185

(1) $x^2+y^2+3x=0$ 에 $y=x-1$ 을 대입하면

$$x^2 + (x-1)^2 + 3x = 0$$

$$\therefore 2x^2 + x + 1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = 1^2 - 4 \times 2 \times 1 = -7 < 0$$

따라서 원과 직선은 만나지 않는다.

(2) $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 에 $x+y=3$, 즉

$y = -x+3$ 을 대입하면

$$x^2 + (-x+3)^2 - 2x + 4(-x+3) - 3 = 0$$

$$\therefore x^2 - 6x + 9 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 1 \times 9 = 0$$

따라서 원과 직선은 한 점에서 만난다. (접한다.)

답 (1) 만나지 않는다.

(2) 한 점에서 만난다. (접한다.)

186

답 $5, \sqrt{5}, \sqrt{5}, =, 1$

187

(1) 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $3x+y-10=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-10|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \sqrt{10}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$ 이고 $\sqrt{10} > \sqrt{7}$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

(2) 원의 중심 $(-1, 2)$ 와 직선 $2x+y+5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2+2+5|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \sqrt{5}$$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이고 $\sqrt{5} < 2\sqrt{2}$ 이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

답 (1) 만나지 않는다.

(2) 서로 다른 두 점에서 만난다.

188

$x^2+y^2=5$ 에 $y=2x+k$ 를 대입하면

$$x^2 + (2x+k)^2 = 5$$

$$\therefore 5x^2 + 4kx + k^2 - 5 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2k)^2 - 5(k^2-5) = -k^2 + 25$$

(1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D > 0$

이어야 하므로 $-k^2 + 25 > 0$

$$(k+5)(k-5) < 0 \quad \therefore -5 < k < 5$$

I -3

원의
위치
관계

(2) 원과 직선이 접하려면 $D=0$ 이어야 하므로

$$-k^2+25=0, \quad k^2=25$$

$$\therefore k=\pm 5$$

(3) 원과 직선이 만나지 않으려면 $D<0$ 이어야 하므로

$$-k^2+25<0, \quad (k+5)(k-5)>0$$

$$\therefore k<-5 \text{ 또는 } k>5$$

$$\text{답 (1) } -5 < k < 5 \quad (2) k = \pm 5$$

$$(3) k < -5 \text{ 또는 } k > 5$$

다른 풀이 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이때 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 $r=\sqrt{5}$ 이다.

(1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d < r$ 이어야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} < \sqrt{5}, \quad |k| < 5$$

$$\therefore -5 < k < 5$$

(2) 원과 직선이 접하려면 $d=r$ 이어야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}, \quad |k| = 5 \quad \therefore k = \pm 5$$

(3) 원과 직선이 만나지 않으려면 $d > r$ 이어야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} > \sqrt{5}, \quad |k| > 5$$

$$\therefore k < -5 \text{ 또는 } k > 5$$

189

기울기가 2인 접선의 방정식을 $y=2x+n$ (n 은 상수), 즉 $2x-y+n=0$ 이라 하면 원의 중심 $(1, 2)$ 와 접선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 3과 같으므로

$$\frac{|2-2+n|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = 3, \quad |n| = 3\sqrt{5}$$

$$\therefore n = \pm 3\sqrt{5}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=2x+3\sqrt{5} \text{ 또는 } y=2x-3\sqrt{5}$$

$$\text{답 } y=2x+3\sqrt{5}, y=2x-3\sqrt{5}$$

다른 풀이 기울기가 2인 접선의 방정식을 $y=2x+n$ (n 은 상수)이라 하자.

$(x-1)^2+(y-2)^2=9$ 에 $y=2x+n$ 을 대입하면

$$(x-1)^2+(2x+n-2)^2=9$$

$$\therefore 5x^2+2(2n-5)x+n^2-4n-4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2n-5)^2 - 5(n^2-4n-4) = 0$$

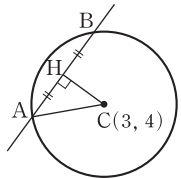
$$n^2-45=0 \quad \therefore n = \pm 3\sqrt{5}$$

190

$x^2+y^2-6x-8y+21=0$ 에서

$$(x-3)^2+(y-4)^2=4$$

오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 중심을 $C(3, 4)$ 라 하고 점 C 에서 직선 $y=x+3$, 즉 $x-y+3=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면



$$\overline{CH} = \frac{|3-4+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{2}$$

또 $\overline{AC}=2$ 이므로 직각삼각형 ACH 에서

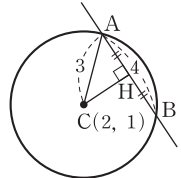
$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2\sqrt{2}$$

답 $2\sqrt{2}$

191

오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B , 원의 중심을 $C(2, 1)$ 이라 하고 점 C 에서 직선 $y=-2x+k$, 즉 $2x+y-k=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면



$$\overline{CH} = \frac{|4+1-k|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|5-k|}{\sqrt{5}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $\overline{AC}=3$, $\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=2$ 이므로 직각삼각형 ACH 에서

$$\begin{aligned} \overline{CH} &= \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AH}^2} \\ &= \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5} \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \frac{|5-k|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}, \quad |5-k| = 5$$

$$5-k = \pm 5 \quad \therefore k = 10 \quad (\because k > 0)$$

답 10

192

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 에서

$$(x-1)^2+(y+2)^2=9$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C(1, -2)라 하면

$$\begin{aligned}\overline{CA} &= \sqrt{(-2-1)^2 + (a+2)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + 4a + 13}\end{aligned}$$

또 $\overline{CB}=3$ 이므로 직각삼각형 ABC에서

$$\begin{aligned}\overline{CA}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 \\ a^2 + 4a + 13 &= 5^2 + 3^2 \\ a^2 + 4a - 21 &= 0, \quad (a+7)(a-3) = 0 \\ \therefore a &= 3 \quad (\because a > 0)\end{aligned}$$

답 3

193

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y + 9 = 0 \text{에서}$$

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 16$$

원의 중심 (-3, 4)와 직선 $3x - 4y - 10 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-9 - 16 - 10|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 7$$

원의 반지름의 길이가 4이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의

$$\text{최대값은 } 7 + 4 = 11$$

$$\text{최소값은 } 7 - 4 = 3$$

답 최대값: 11, 최소값: 3

연습문제

● 본책 85~86쪽

194

전략 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용하여 k 에 대한 부등식을 세운다.

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0 \text{에서}$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$$

이 원과 직선 $kx + y - 2 = 0$ 이 만나려면 원의 중심 (2, 3)과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 1보다 작거나 같아야 하므로

$$\frac{|2k + 3 - 2|}{\sqrt{k^2 + 1^2}} \leq 1 \quad \therefore |2k + 1| \leq \sqrt{k^2 + 1}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 4k^2 + 4k + 1 \leq k^2 + 1$$

$$3k^2 + 4k \leq 0, \quad k(3k + 4) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{4}{3} \leq k \leq 0 \quad \text{답 } -\frac{4}{3} \leq k \leq 0$$

다른 풀이 $kx + y - 2 = 0$ 에서 $y = -kx + 2$

$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$ 에 이것을 대입하면

$$x^2 + (-kx + 2)^2 - 4x - 6(-kx + 2) + 12 = 0$$

$$\therefore (k^2 + 1)x^2 + 2(k - 2)x + 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (k - 2)^2 - (k^2 + 1) \times 4 \geq 0$$

$$-3k^2 - 4k \geq 0, \quad k(3k + 4) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{4}{3} \leq k \leq 0$$

195

전략 원과 직선이 접하면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

주어진 직선에 접하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\pi r^2 = 20\pi, \quad r^2 = 20$$

$$\therefore r = 2\sqrt{5} \quad (\because r > 0)$$

이때 원과 직선이 접하면 원의 중심 (-1, 3)과 직선 $2x - y + k = 0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $2\sqrt{5}$ 와 같으므로

$$\frac{|-2 - 3 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{5}$$

$$|k - 5| = 10, \quad k - 5 = \pm 10$$

$$\therefore k = 15 \quad (\because k > 0)$$

답 15

196

전략 원과 직선이 만나서 생기는 현을 지름으로 하는 원의 넓이를 구한다.

주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하면 두 점 A, B를 지나는 원 중에서 그 넓이가 최소인 것은 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 원이다.

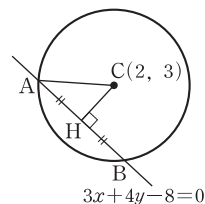
오른쪽 그림과 같이 원의 중심

을 C(2, 3)이라 하고, 점 C에

서 직선 $3x + 4y - 8 = 0$ 에 내

린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CH} = \frac{|6 + 12 - 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$



또 $\overline{CA} = \sqrt{10}$ 이므로 직각삼각형 CAH에서

$$\begin{aligned}\overline{AH} &= \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CH}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{10})^2 - 2^2} = \sqrt{6}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$ 이므로 구하는 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{6})^2 = 6\pi \quad \text{답 } 6\pi$$

197

전략 원의 중심과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $C(4, 5)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\overline{CP} &= \sqrt{(2-4)^2 + (1-5)^2} \\ &= 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

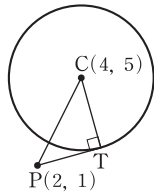
접점을 T라 하면 접선의 길이가 3이므로

$$\overline{PT} = 3$$

이때 원의 반지름의 길이는 $\overline{CT}$ 의 길이와 같으므로 직각삼각형 CPT에서

$$\overline{CT} = \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{PT}^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 3^2} = \sqrt{11}$$

답 $\sqrt{11}$



198

전략 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용하여 점 P와 직선 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 구한다.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 4x + 8y + 16 &= 0 \text{에서} \\ (x-2)^2 + (y+4)^2 &= 4\end{aligned}$$

원의 중심 $(2, -4)$ 와 직선 $4x + 3y - 16 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|8 - 12 - 16|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 4$$

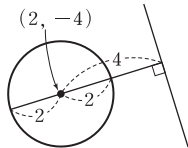
이때 원의 반지름의 길이가 2이

므로 원 위의 점 P와 직선 사이의 거리를 l 이라 하면

$$\begin{aligned}4 - 2 \leq l \leq 4 + 2 \\ \therefore 2 \leq l \leq 6\end{aligned}$$

$l=2, 6$ 인 점 P는 각각 1개씩이고, $l=3, 4, 5$ 인 점 P는 각각 2개씩이므로 구하는 점 P의 개수는

$$2 \times 1 + 3 \times 2 = 8 \quad \text{답 } 8$$



199

전략 원과 직선이 접하면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

$y = ax + b$ 에서

$$ax - y + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접하면 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 1 \quad \therefore |b| = \sqrt{a^2 + 1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 = b^2 - 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

또 직선 $\textcircled{1}$ 이 원 $x^2 + (y-2)^2 = 4$ 에 접하면 원의 중심 $(0, 2)$ 와 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 2와 같으므로

$$\begin{aligned}\frac{|-2 + b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} &= 2 \\ \therefore |b - 2| &= 2\sqrt{a^2 + 1}\end{aligned}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$b^2 - 4b = 4a^2$$

위의 식에 $\textcircled{2}$ 을 대입하면

$$\begin{aligned}b^2 - 4b &= 4(b^2 - 1) \\ 3b^2 + 4b - 4 &= 0, \quad (b+2)(3b-2) = 0 \\ \therefore b &= -2 \text{ 또는 } b = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

이때 $\textcircled{2}$ 에서 $a^2 = b^2 - 1 \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned}b^2 &\geq 1 \\ \therefore b &= -2, a^2 = 3 \\ \therefore a^2 + b^2 &= 3 + (-2)^2 = 7\end{aligned}$$

답 7

200

전략 직선 $y = x$ 위의 점의 좌표를 (k, k) 로 놓는다.

원의 중심의 좌표를 (k, k) 라 하면 원이 x 축과 y 축에 동시에 접하므로 원의 반지름의 길이는 $|k|$ 이다.

이때 원과 직선 $3x - 4y + 12 = 0$ 이 접하면 원의 중심 (k, k) 와 직선 $3x - 4y + 12 = 0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $|k|$ 와 같으므로

$$\begin{aligned}\frac{|3k - 4k + 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} &= |k| \\ |-k + 12| &= 5|k|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{양변을 제곱하면 } k^2 - 24k + 144 &= 25k^2 \\ k^2 + k - 6 &= 0, \quad (k+3)(k-2) = 0 \\ \therefore k &= -3 \text{ 또는 } k = 2 \end{aligned}$$

따라서 두 원의 중심 A, B의 좌표는 $(-3, -3)$, $(2, 2)$ 이므로

$$\overline{AB}^2 = \{2 - (-3)\}^2 + \{2 - (-3)\}^2 = 50$$

답 50

201

전략 원의 중심과 접점을 지나는 직선의 기울기를 이용하여 접선의 기울기를 구한다.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0 \text{에서}$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 10$$

따라서 원의 중심의 좌표는

$(1, -2)$ 이므로 원의 중심과 점 $(4, -1)$ 을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-1 - (-2)}{4 - 1} = \frac{1}{3}$$

이때 점 $(4, -1)$ 에서의 접선과 두 점 $(1, -2)$, $(4, -1)$ 을 지나는 직선은 수직이므로 접선의 기울기는 -3 이다.

따라서 접선의 방정식은

$$y + 1 = -3(x - 4) \quad \therefore y = -3x + 11$$

이 직선이 점 $(-1, k)$ 를 지나므로

$$k = -3 \times (-1) + 11 = 14$$

답 14

202

전략 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}$ 를 밑변, 원의 중심과 직선 사이의 거리를 높이로 생각한다.

$$x^2 + y^2 + 4y + k = 0 \text{에서}$$

$$x^2 + (y+2)^2 = 4 - k$$

따라서 $C(0, -2)$ 이고, 점 C

에서 직선 $y = -x - 4$, 즉

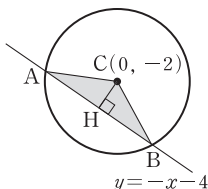
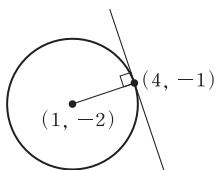
$x + y + 4 = 0$ 에 내린 수선의

발을 H라 하면

$$\overline{CH} = \frac{|0 - 2 + 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

이때 $\triangle ABC$ 의 넓이가 4이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \sqrt{2} = 4 \quad \therefore \overline{AB} = 4\sqrt{2}$$



따라서 $\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = 2\sqrt{2}$ 이므로 직각삼각형 AHC에서

$$\overline{CA} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{10}$$

즉 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$4 - k = (\sqrt{10})^2 \quad \therefore k = -6$$

답 -6

203

전략 직선 AB와 원의 중심 사이의 거리를 이용하여 $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값을 구한다.

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$$

원 위의 점 P와 직선 AB 사이

의 거리가 최대일 때 $\triangle PAB$ 의

넓이는 최대가 된다.

직선 AB의 방정식은

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{6} = 1 \quad \therefore 2x - y + 6 = 0$$

원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $2x - y + 6 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 원 위의 점 P와 직선

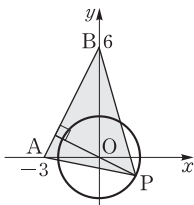
AB 사이의 거리의 최댓값은

$$\frac{6\sqrt{5}}{5} + \sqrt{5} = \frac{11\sqrt{5}}{5}$$

따라서 $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times \frac{11\sqrt{5}}{5} = \frac{33}{2}$$

답 $\frac{33}{2}$



204

전략 선분 H_1H_2 의 길이가 최대인 경우와 최소인 경우를 파악한다.

원 $C_1: (x+6)^2 + y^2 = 4$ 의 중심을 C_1 이라 하면

$C_1(-6, 0)$ 이고 반지름의 길이는 2이다.

또 원 $C_2: (x-5)^2 + (y+3)^2 = 1$ 의 중심을 C_2 라 하면

$C_2(5, -3)$ 이고 반지름의 길이는 1이다.

이때 점 C_1 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을

$R(a, a-2)$ 라 하면 직선 C_1R 과 직선 l 은 수직이므로

$$\frac{a-2}{a-(-6)} = -1, \quad a-2 = -a-6$$

$$\therefore a = -2$$

$$\therefore R(-2, -4)$$

또 점 C_2 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 $S(b, b-2)$ 라 하면 직선 C_2S 와 직선 l 은 수직이므로

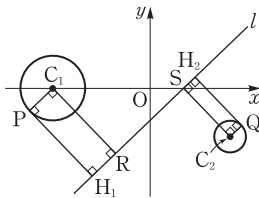
$$\frac{b-2-(-3)}{b-5} = -1, \quad b+1 = -b+5$$

$$\therefore b=2 \quad \therefore S(2, 0)$$

$$\therefore \overline{RS} = \sqrt{(2+2)^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

선분 H_1H_2 의 길이가 최대이려면 두 점 P, Q 의 위치가 [그림 1]과 같아야 하므로

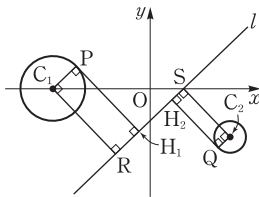
$$\begin{aligned} M &= \overline{RS} + \overline{H_1R} + \overline{H_2S} \\ &= 4\sqrt{2} + 2 + 1 = 4\sqrt{2} + 3 \end{aligned}$$



[그림 1]

선분 H_1H_2 의 길이가 최소이려면 두 점 P, Q 의 위치가 [그림 2]와 같아야 하므로

$$\begin{aligned} m &= \overline{RS} - \overline{RH_1} - \overline{SH_2} \\ &= 4\sqrt{2} - 2 - 1 = 4\sqrt{2} - 3 \end{aligned}$$

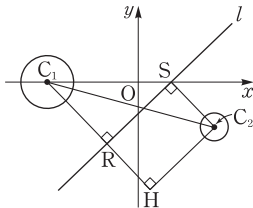


[그림 2]

$$\therefore Mm = (4\sqrt{2} + 3)(4\sqrt{2} - 3) = 23 \quad \text{답 23}$$

다른 풀이 원 C_1 의 중심을 $C_1(-6, 0)$, 원 C_2 의 중심을 $C_2(5, -3)$ 이라 하면

$$\overline{C_1C_2} = \sqrt{(5+6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{130}$$



위의 그림과 같이 두 점 C_1, C_2 에서 직선 l , 즉 $x-y-2=0$ 에 내린 수선의 발을 각각 R, S 라 하고, 점 C_2 에서 $\overline{C_1R}$ 의 연장선에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{C_1R} = \frac{|-6-0-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 4\sqrt{2},$$

$$\overline{C_2S} = \frac{|5+3-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{C_1H} = \overline{C_1R} + \overline{C_2S} = 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{RS} &= \overline{HC_2} = \sqrt{\overline{C_1C_2}^2 - \overline{C_1H}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{130})^2 - (7\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

205

전략 점 P 의 좌표를 (x, y) 로 놓고 점 P 가 나타내는 도형의 방정식을 구한다.

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 에서

$$\overline{AP} = 2\overline{BP} \quad \therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$$

점 P 의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4\{(x-2)^2 + (y-1)^2\}$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$$

$$\therefore (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$$

즉 점 P 가 나타내는 도형은

중심의 좌표가 $(3, 1)$ 이고

반지름의 길이가 2인 원이

므로 오른쪽 그림과 같이 직

선 AP 가 원에 접할 때

$\angle PAB$ 의 크기가 최대이다.

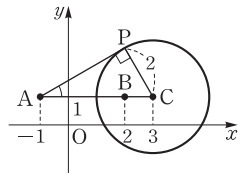
이때 원의 중심을 C 라 하면 $\angle APC = 90^\circ$ 이므로

$\triangle PAC$ 에서

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{PC}^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \cos(\angle PAB) = \frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{답 } \frac{\sqrt{3}}{2}$$



03 원의 접선의 방정식

● 본책 87~90쪽

206

직선 $y = -3x + 5$ 와 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$ 이고,

원 $x^2 + y^2 = 9$ 의 반지름의 길이는 3이므로 구하는 직

선의 방정식은

$$y = \frac{1}{3}x \pm 3\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1} \quad \therefore y = \frac{1}{3}x \pm \sqrt{10}$$

답 $y = \frac{1}{3}x + \sqrt{10}, y = \frac{1}{3}x - \sqrt{10}$

207

x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 인 직선의 기울기는

$$\tan 45^\circ = 1$$

원 $x^2 + y^2 = 3$ 의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{3 \times \sqrt{1^2 + 1}}$$

$$\therefore y = x \pm \sqrt{6}$$

따라서 두 직선의 x 절편은 $\sqrt{6}, -\sqrt{6}$ 이므로 구하는 곱은 $\sqrt{6} \times (-\sqrt{6}) = -6$

답 -6

208

원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(-1, -3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-1 \times x + (-3) \times y = 10$$

$$\therefore x + 3y + 10 = 0$$

이 접선의 x 절편은 -10 , y 절편은 $-\frac{10}{3}$ 이므로

$\triangle OAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times |-10| \times \left| -\frac{10}{3} \right| = \frac{50}{3}$$

답 $\frac{50}{3}$

209

$x^2 + y^2 = 25$ 에 $y = x - 1$ 을 대입하면

$$x^2 + (x - 1)^2 = 25$$

$$x^2 - x - 12 = 0, \quad (x + 3)(x - 4) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 4$$

원과 직선의 교점 중에서 제 1 사분면 위에 있는 교점의 좌표는

$$(4, 3)$$

따라서 원 $x^2 + y^2 = 25$ 위의 점 $(4, 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4x + 3y = 25$$

답 $4x + 3y = 25$

210

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(3, -1)$ 을 지나므로

$$3x_1 - y_1 = 5$$

$$\therefore y_1 = 3x_1 - 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

또 접점 $(x_1, 3x_1 - 5)$ 는 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + (3x_1 - 5)^2 = 5$$

$$x_1^2 - 3x_1 + 2 = 0, \quad (x_1 - 1)(x_1 - 2) = 0$$

$$\therefore x_1 = 1 \text{ 또는 } x_1 = 2$$

$\textcircled{2}$ 에서 $x_1 = 1$ 일 때 $y_1 = -2$, $x_1 = 2$ 일 때 $y_1 = 1$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면

$$x - 2y - 5 = 0, \quad 2x + y - 5 = 0$$

$$\text{답 } x - 2y - 5 = 0, \quad 2x + y - 5 = 0$$

다른 풀이 1 점 $(3, -1)$ 을 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y + 1 = m(x - 3)$$

$$\therefore mx - y - 3m - 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원의 중심 $(0, 0)$ 과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같아야 하므로

$$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

$$\therefore |3m + 1| = \sqrt{5(m^2 + 1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$2m^2 + 3m - 2 = 0, \quad (m + 2)(2m - 1) = 0$$

$$\therefore m = -2 \text{ 또는 } m = \frac{1}{2}$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면

$$-2x - y + 5 = 0, \quad \frac{1}{2}x - y - \frac{5}{2} = 0$$

$$\therefore 2x + y - 5 = 0, \quad x - 2y - 5 = 0$$

다른 풀이 2 점 $(3, -1)$ 을 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y + 1 = m(x - 3)$$

$$\therefore y = mx - 3m - 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$x^2 + y^2 = 5$ 에 $\textcircled{2}$ 을 대입하여 정리하면

$$(m^2 + 1)x^2 - 2m(3m + 1)x + 9m^2 + 6m - 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= \{-m(3m+1)\}^2 \\ &\quad - (m^2+1)(9m^2+6m-4) \\ &= 0 \\ -4m^2-6m+4 &= 0, \quad 2m^2+3m-2=0 \\ (m+2)(2m-1) &= 0 \\ \therefore m &= -2 \text{ 또는 } m = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

㉔에 이것을 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned}y &= -2x+5, \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \\ \therefore 2x+y-5 &= 0, \quad x-2y-5=0\end{aligned}$$

211

점 $(2, -1)$ 을 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$\begin{aligned}y+1 &= m(x-2) \\ \therefore mx-y-2m-1 &= 0\end{aligned}$$

원의 중심 $(-1, 2)$ 와 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{3}$ 과 같아야 하므로

$$\begin{aligned}\frac{|-m-2-2m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} &= \sqrt{3} \\ \therefore |3m+3| &= \sqrt{3(m^2+1)}\end{aligned}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$m^2+3m+1=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

두 접선의 기울기를 m_1, m_2 라 하면 이차방정식 ㉔의 두 근이 m_1, m_2 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$m_1+m_2=-3 \quad \text{답 -3}$$

참고 이차방정식 ㉔의 판별식을 D 라 하면

$$D=3^2-4 \times 1 \times 1=5>0$$

따라서 이차방정식 ㉔은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



연습 문제

● 본책 91쪽

212

전략 기울기가 3인 접선의 방정식을 구한다.

직선 $y=3x+2$ 와 평행한 직선의 기울기는 3이고, 원 $x^2+y^2=10$ 의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y=3x \pm \sqrt{10} \times \sqrt{3^2+1}$$

$$\therefore y=3x \pm 10$$

따라서 두 직선이 y 축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 10), (0, -10)$ 이므로

$$\overline{AB}=20$$

답 20

213

전략 원 위의 점 $(1, -1)$ 에서의 접선의 방정식을 먼저 구한다.

원 $x^2+y^2=2$ 위의 점 $(1, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$1 \times x + (-1) \times y = 2$$

$$\therefore x-y-2=0$$

$$x^2+y^2-6x+2y+k=0 \text{에서}$$

$$(x-3)^2+(y+1)^2=10-k$$

이 원과 직선 $x-y-2=0$ 이 접하려면 원의 중심

$(3, -1)$ 과 직선 $x-y-2=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{10-k}$ 와 같아야 하므로

$$\frac{|3+1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{10-k}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{10-k}, \quad 2=10-k$$

$$\therefore k=8$$

답 8

214

전략 $\triangle ABC$ 의 넓이가 최대일 때, 점 C의 위치를 파악한다.

원 $x^2+y^2=25$ 와 두 점

$A(-4, 3), B(0, -5)$ 는 오

른쪽 그림과 같으므로

$\triangle ABC$ 의 넓이가 최대이려

면 점 C에서의 접선이 직선

AB와 평행해야 한다.

직선 AB의 기울기는

$$\frac{-5-3}{0-(-4)} = -2$$

따라서 기울기가 -2 인 접선의 방정식은

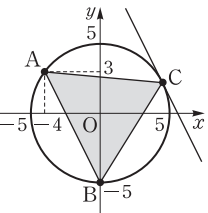
$$y=-2x \pm 5\sqrt{(-2)^2+1}$$

$$\therefore y=-2x \pm 5\sqrt{5}$$

이때 점 C에서의 접선의 y 절편은 양수이어야 하므로

구하는 접선의 방정식은

$$y=-2x+5\sqrt{5}$$



$$\text{답 } y=-2x+5\sqrt{5}$$

215

전략 점 P의 좌표를 x_1 이라 하고, 점 B의 좌표를 x_1 에 대한 식으로 나타낸다.

점 P의 좌표를 (x_1, y_1) ($x_1 > 0, y_1 > 0$)이라 하면 원 C 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 점 H의 좌표가 $(x_1, 0)$ 이므로

$$\overline{AH} = x_1 - (-2) = x_1 + 2$$

$$\therefore \overline{BH} = 2\overline{AH} = 2x_1 + 4$$

따라서 $\overline{OB} = \overline{OH} + \overline{BH} = 3x_1 + 4$ 이므로

$$B(3x_1 + 4, 0)$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 점 B를 지나므로

$$x_1(3x_1 + 4) = 4, \quad 3x_1^2 + 4x_1 - 4 = 0$$

$$(x_1 + 2)(3x_1 - 2) = 0$$

$$\therefore x_1 = \frac{2}{3} \quad (\because x_1 > 0)$$

즉 점 B의 좌표는 $(6, 0)$ 이므로

$$\overline{AB} = 6 - (-2) = 8$$

또 점 P($\frac{2}{3}, y_1$)은 원 C 위의 점이므로

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + y_1^2 = 4, \quad y_1^2 = \frac{32}{9}$$

$$\therefore y_1 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \quad (\because y_1 > 0)$$

따라서 $\triangle PAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PH} = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

답 ④

216

전략 접선의 기울기를 m 으로 놓고 접선의 방정식을 세운 다음 두 접선의 기울기의 곱이 -1 임을 이용한다.

점 A($0, a$)를 지나고 기울기가 m 인 접선의 방정식은

$$y = mx + a$$

$$\therefore mx - y + a = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원의 중심 $(0, 3)$ 과 접선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 와 같으므로

$$\frac{|-3 + a|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore |a - 3| = \sqrt{8(m^2 + 1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$8m^2 - a^2 + 6a - 1 = 0$$

m 에 대한 이 이차방정식의 두 근을 α, β 라 하면 α, β 는 두 접선의 기울기이고 두 접선이 수직이므로

$$\alpha\beta = -1$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{-a^2 + 6a - 1}{8} = -1, \quad a^2 - 6a - 7 = 0$$

$$(a + 1)(a - 7) = 0$$

$$\therefore a = 7 \quad (\because a > 0)$$

답 7

217

전략 원 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선이 점 P를 지남을 이용한다.

점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 점점의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 점 P($-2\sqrt{3}, 2$)를 지나므로

$$-2\sqrt{3}x_1 + 2y_1 = 4$$

$$\therefore y_1 = \sqrt{3}x_1 + 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

또 점점 (x_1, y_1) , 즉 $(x_1, \sqrt{3}x_1 + 2)$ 는 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + (\sqrt{3}x_1 + 2)^2 = 4$$

$$4x_1^2 + 4\sqrt{3}x_1 = 0, \quad x_1(x_1 + \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore x_1 = 0 \text{ 또는 } x_1 = -\sqrt{3}$$

$\textcircled{2}$ 에서 $x_1 = 0$ 일 때 $y_1 = 2$, $x_1 = -\sqrt{3}$ 일 때 $y_1 = -1$ 이므로 두 점점의 좌표는

$$(0, 2), (-\sqrt{3}, -1)$$

오른쪽 그림과 같

이 A($0, 2$),

B($-\sqrt{3}, -1$)

이라 하면

$$\overline{AP} = 2\sqrt{3}$$

이고, 점 B와 직선 AP, 즉

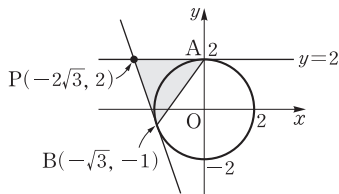
$y = 2$ 사이의 거리는 3이므로 $\triangle ABP$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3} \quad \text{답 } 3\sqrt{3}$$

다른 풀이 점 P($-2\sqrt{3}, 2$)를 지나고 기울기가 m 인 접선의 방정식은

$$y - 2 = m(x + 2\sqrt{3})$$

$$\therefore mx - y + 2\sqrt{3}m + 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$



원의 중심 (0, 0)과 접선 ㉠ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같으므로

$$\frac{|2\sqrt{3}m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

$$\therefore |2\sqrt{3}m+2|=2\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

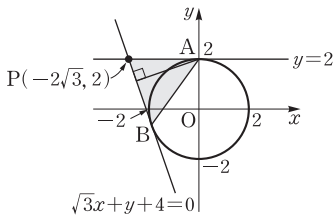
$$m^2+\sqrt{3}m=0, \quad m(m+\sqrt{3})=0$$

$$\therefore m=0 \text{ 또는 } m=-\sqrt{3}$$

㉠에 이것을 대입하여 정리하면

$$y=2, \quad \sqrt{3}x+y+4=0$$

다음 그림과 같이 A(0, 2)라 하고 다른 접점을 점 B라 하자.



점 P에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같으므로

$$\overline{AP}=\overline{BP}=2\sqrt{3}$$

점 A(0, 2)와 직선 $\sqrt{3}x+y+4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2+4|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=3$$

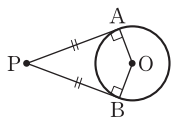
따라서 $\triangle ABP$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3}$$

개념 노트

점 P에서 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 할 때

- ① $\overline{PA}=\overline{PB}$
- ② $\angle PAO=\angle PBO=90^\circ$



04 두 원의 교점을 지나는 직선과 원의 방정식

● 본책 92~94쪽

218

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-2x+ky-4-(x^2+y^2-4x-2y+4)=0$$

$$\therefore 2x+(k+2)y-8=0$$

이 직선이 직선 $y=3x+4$, 즉 $3x-y+4=0$ 과 수직이므로

$$2 \times 3 + (k+2) \times (-1) = 0$$

$$\therefore k=4$$

답 4

개념 노트

두 직선의 평행과 수직

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ 이

$$\textcircled{1} \text{ 평행하다. } \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

$$\textcircled{2} \text{ 수직이다. } \Leftrightarrow aa'+bb'=0$$

219

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2+y^2-5+k(x^2+y^2-3x-y-4)=0 \quad (k \neq -1) \quad \textcircled{1}$$

이 원이 원점을 지나므로

$$-5-4k=0 \quad \therefore k=-\frac{5}{4}$$

①에 $k=-\frac{5}{4}$ 를 대입하면

$$x^2+y^2-5-\frac{5}{4}(x^2+y^2-3x-y-4)=0$$

$$4(x^2+y^2-5)-5(x^2+y^2-3x-y-4)=0$$

$$-x^2-y^2+15x+5y=0$$

$$\therefore x^2+y^2-15x-5y=0$$

$$\text{답 } x^2+y^2-15x-5y=0$$

220

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2+y^2+ax-2ay$$

$$+k(x^2+y^2-10x-8y+16)$$

$$=0 \quad (k \neq -1) \quad \textcircled{1}$$

이 원이 두 점 (0, 2), (3, 1)을 지나므로

$$4-4a+4k=0, \quad 10+a-12k=0$$

$$\therefore a-k=1, \quad a-12k=-10$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, k=1$

㉠에 $a=2, k=1$ 을 대입하면

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + (x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16) = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 16 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{5})^2 = 5\pi$$

답 5π

221

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 - (x^2 + y^2 - 6x + 5) = 0$$

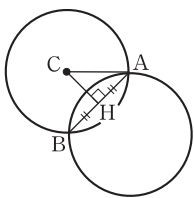
$$\therefore x - y - 1 = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ 에서

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

이므로 이 원의 중심을 C(1, 2)라 하자.

오른쪽 그림과 같이 두 원의 교점을 각각 A, B라 하고, 점 C에서 $\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{CH} = \frac{|1-2-1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

또 $\overline{CA} = 2$ 이므로 직각삼각형 ACH에서

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$

따라서 구하는 공통인 현의 길이는

$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = 2\sqrt{2}$$

답 $2\sqrt{2}$

222

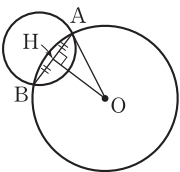
두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 5 - (x^2 + y^2 + 4x - 3y + a) = 0$$

$$\therefore 4x - 3y + a + 5 = 0$$

오른쪽 그림과 같이 두 원의 교점을 각각 A, B라 하고,

원 $x^2 + y^2 = 5$ 의 중심 O(0, 0)에서 $\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{OH} = \frac{|a+5|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|a+5|}{5} \quad \dots\dots ㉠$$

또 $\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = 1, \overline{OA} = \sqrt{5}$ 이므로 직각삼각형

OAH에서

$$\begin{aligned} \overline{OH} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = 2 \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

$$㉠, ㉡ \text{에서 } \frac{|a+5|}{5} = 2, \quad |a+5| = 10$$

$$a+5 = \pm 10 \quad \therefore a = 5 \quad (\because a > 0)$$

답 5

연습 문제

● 본책 95쪽

223

전략 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구한다.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 6 - (x^2 + y^2 - 4x + ky) = 0$$

$$\therefore 4x - ky - 6 = 0$$

이 직선이 직선 $x - y + 3 = 0$ 과 평행하므로

$$\frac{4}{1} = \frac{-k}{-1} \neq \frac{-6}{3} \quad \therefore k = 4$$

따라서 두 직선 $x - y + 3 = 0, 4x - 4y - 6 = 0$ 사이의 거리는 직선 $x - y + 3 = 0$ 위의 점 (0, 3)과 직선 $4x - 4y - 6 = 0$, 즉 $2x - 2y - 3 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-6-3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \frac{9\sqrt{2}}{4} \quad \text{답 } \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

224

전략 공통인 현의 길이를 이용하여 원 $x^2 + y^2 = 4$ 의 중심과 공통인 현 사이의 거리를 구한다.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

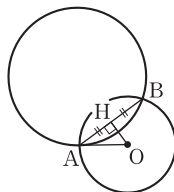
$$x^2 + y^2 - 4 - (x^2 + y^2 + 3x - 4y + k) = 0$$

$$\therefore 3x - 4y + k + 4 = 0$$

오른쪽 그림과 같이 두 원의 교점을

각각 A, B라 하고,

원 $x^2 + y^2 = 4$ 의 중심 O(0, 0)에서 $\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{OH} = \frac{|k+4|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|k+4|}{5} \quad \dots\dots ㉠$$

또 $\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \sqrt{3}$, $\overline{OA} = 2$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{OH} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} \\ &= \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1\end{aligned}\quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡에서 $\frac{|k+4|}{5} = 1$

$$|k+4| = 5, \quad k+4 = \pm 5$$

$$\therefore k = -9 \text{ 또는 } k = 1$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은

$$-9 + 1 = -8$$

답 -8

225

전략 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식을 이용한다.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 9 - (x^2 + y^2 - 8x - 6y + 1) &= 0 \\ \therefore 4x + 3y - 5 &= 0\end{aligned}\quad \dots\dots \textcircled{1}$$

오른쪽 그림과 같이 원

$x^2 + y^2 = 9$ 의 중심 $O(0, 0)$ 에

서 $\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 H

라 하면

$$\overline{OH} = \frac{|-5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 1$$

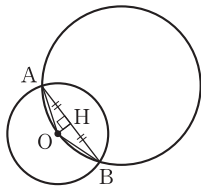
또 $\overline{OA} = 3$ 이므로 직각삼각형 AOH 에서

$$\begin{aligned}\overline{AH} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2} \\ \therefore \overline{AB} &= 2\overline{AH} = 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 삼각형 OAB 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OH} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 1 = 2\sqrt{2}$$

답 $2\sqrt{2}$



226

전략 두 원의 공통인 현을 지름으로 하는 원의 중심의 좌표를 구한다.

두 원의 교점을 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 것은 두 원의 공통인 현을 지름으로 하는 원이므로 구하는 원의 중심의 좌표는 공통인 현의 중점이다.

이때 두 원의 중심을 지나는 직선은 공통인 현을 수직 이등분하므로 공통인 현의 중점은 두 원의 교점을 지나는 직선과 두 원의 중심을 지나는 직선의 교점이다.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 6x + 2y + 1 - (x^2 + y^2 - 2x - 3) &= 0 \\ \therefore 4x + y + 2 &= 0\end{aligned}\quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x^2 + y^2 + 6x + 2y + 1 = 0$ 에서

$$(x+3)^2 + (y+1)^2 = 9$$

$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ 에서

$$(x-1)^2 + y^2 = 4$$

따라서 두 원의 중심 $(-3, -1)$, $(1, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$\begin{aligned}y &= \frac{0 - (-1)}{1 - (-3)}(x - 1), \quad y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \\ \therefore x - 4y - 1 &= 0\end{aligned}\quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$x = -\frac{7}{17}, \quad y = -\frac{6}{17}$$

즉 구하는 원의 중심의 좌표가 $(-\frac{7}{17}, -\frac{6}{17})$ 이므로

$$\begin{aligned}a &= -\frac{7}{17}, \quad b = -\frac{6}{17} \\ \therefore \frac{b}{a} &= \frac{6}{7}\end{aligned}$$

답 $\frac{6}{7}$

227

전략 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을 세우고 이 원의 중심이 x 축 위에 있음을 이용한다.

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 4x + 4y + k(x^2 + y^2 + x - 2y - 6) &= 0 \\ \therefore (k+1)x^2 + (k+1)y^2 + (k+4)x &+ (4-2k)y - 6k \\ &= 0 \quad (k \neq -1)\end{aligned}\quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 원의 중심이 x 축 위에 있으므로 중심의 y 좌표는 0이어야 한다.

즉 ㉠의 y 의 계수가 0이어야 하므로

$$4 - 2k = 0 \quad \therefore k = 2$$

㉠에 $k=2$ 를 대입하면

$$3x^2 + 3y^2 + 6x - 12 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$$

$$\therefore (x+1)^2 + y^2 = 5$$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$ 이다.

답 $\sqrt{5}$

228

전략 $\widehat{PQ}$ 를 포함하는 원의 방정식을 구한다.

호 PQ는 오른쪽 그림과 같이 점 $(-1, 0)$ 에서 x 축에 접하고 반지름의 길이가 2인 원의 일부이므로 그 원의 방정식을

$$(x-a)^2 + (y-2)^2 = 4$$

라 하자.

이 원이 점 $(-1, 0)$ 을 지나므로

$$(-1-a)^2 + (0-2)^2 = 4$$

$$\therefore a = -1 \text{ (중근)}$$

따라서 선분 PQ는 두 원

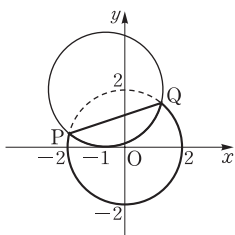
$$x^2 + y^2 = 4, (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

의 공통인 현이므로 직선 PQ의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4 - \{(x+1)^2 + (y-2)^2 - 4\} = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4 - (x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1) = 0$$

$$\therefore 2x - 4y + 5 = 0$$



답 $2x - 4y + 5 = 0$

참고 점 $(-1, 0)$ 에서 x 축에 접하고 반지름의 길이가 2인 원의 중심은 x 축에 수직인 직선 $x = -1$ 위에 있다. 따라서 이 원은 중심의 좌표가 $(-1, 2)$ 이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

4 도형의 이동

1. 도형의 방정식

01 평행이동

● 본책 98~102쪽

229

(1) $(7-3, 2+4)$, 즉 $(4, 6)$

(2) $(-6-3, 5+4)$, 즉 $(-9, 9)$

(3) $(-2-3, -4+4)$, 즉 $(-5, 0)$

답 (1) $(4, 6)$ (2) $(-9, 9)$ (3) $(-5, 0)$

230

평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x-5, y+3)$ 은 x 축의 방향으로 -5 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동하는 것이다.

(1) $(1-5, 3+3)$, 즉 $(-4, 6)$

(2) $(4-5, -6+3)$, 즉 $(-1, -3)$

(3) $(-2-5, 5+3)$, 즉 $(-7, 8)$

답 (1) $(-4, 6)$ (2) $(-1, -3)$ (3) $(-7, 8)$

231

주어진 식에 x 대신 $x-2$, y 대신 $y+3$ 을 대입한다.

(1) $3(x-2) - 2(y+3) + 5 = 0$ 에서

$$3x - 2y - 7 = 0$$

(2) $y+3 = (x-2)^2 + 4$ 에서

$$y = x^2 - 4x + 5$$

(3) $(x-2-3)^2 + (y+3+4)^2 = 1$ 에서

$$(x-5)^2 + (y+7)^2 = 1$$

답 (1) $3x - 2y - 7 = 0$

$$(2) y = x^2 - 4x + 5$$

$$(3) (x-5)^2 + (y+7)^2 = 1$$

232

평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x-2, y+5)$ 는 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 5 만큼 평행이동하는 것이므로 주어진 식에 x 대신 $x+2$, y 대신 $y-5$ 를 대입한다.

(1) $2(x+2) - (y-5) - 3 = 0$ 에서

$$2x - y + 6 = 0$$

$$(2) y-5=-(x+2)^2+2(x+2) \text{에서}$$

$$y=-x^2-2x+5$$

$$(3) (x+2+3)^2+(y-5-2)^2=5 \text{에서}$$

$$(x+5)^2+(y-7)^2=5$$

$$\text{답 (1) } 2x-y+6=0$$

$$(2) y=-x^2-2x+5$$

$$(3) (x+5)^2+(y-7)^2=5$$

233

평행이동 $(x, y) \rightarrow (x-3, y+2)$ 는 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 점 $(a, -1)$ 이 옮겨지는 점의 좌표는

$$(a-3, -1+2), \text{ 즉 } (a-3, 1)$$

이 점이 직선 $y=2x-3$ 위의 점이므로

$$1=2(a-3)-3, \quad -2a=-10$$

$$\therefore a=5$$

답 5

234

점 $(2, -4)$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(1, -3)$ 이라 하면

$$2+a=1, \quad -4+b=-3$$

$$\therefore a=-1, b=1$$

즉 주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 점 $(-3, 6)$ 이 옮겨지는 점의 좌표는

$$(-3-1, 6+1), \text{ 즉 } (-4, 7) \quad \text{답 } (-4, 7)$$

235

점 (m, n) 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(m+2, n-3)$$

한편 $x^2+y^2-6x+8y+19=0$ 에서

$$(x-3)^2+(y+4)^2=6$$

이 원의 중심의 좌표는 $(3, -4)$ 이므로

$$m+2=3, \quad n-3=-4 \quad \therefore m=1, n=-1$$

$$\therefore mn=-1$$

답 -1

236

직선 $2x-3y+k=0$ 을 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$2(x-1)-3(y+2)+k=0$$

$$\therefore 2x-3y-8+k=0$$

이 직선이 점 $(1, -4)$ 를 지나므로

$$2+12-8+k=0$$

$$\therefore k=-6$$

답 -6

237

점 $(1, 2)$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-2, 4)$ 라 하면

$$1+m=-2, \quad 2+n=4$$

$$\therefore m=-3, n=2$$

즉 주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 직선 $3x-4y+2=0$ 이 옮겨지는 직선의 방정식은

$$3(x+3)-4(y-2)+2=0$$

$$\therefore 3x-4y+19=0$$

이 직선이 직선 $3x+py+q=0$ 과 일치하므로

$$p=-4, q=19$$

$$\therefore p+q=15$$

답 15

238

직선 $y=ax+b$ 를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-2=a(x+3)+b$$

$$\therefore y=ax+3a+b+2$$

이 직선과 직선 $y=2x+1$ 이 y 축에서 수직으로 만나므로 두 직선의 기울기의 곱이 -1 이고, y 절편이 같아야 한다.

즉 $a \times 2 = -1$, $3a+b+2=1$ 이므로

$$a=-\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$$

$$\therefore b-a=1$$

답 1

239

$$y=x^2-4x+3 \text{에서} \quad y=(x-2)^2-1 \cdots \cdots \text{㉠}$$

평행이동 $(x, y) \rightarrow (x-a, y+2b)$ 는 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼, y 축의 방향으로 $2b$ 만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 포물선 ㉠이 옮겨지는 포물선의 방정식은

$$y-2b=(x+a-2)^2-1$$

$$\therefore y=x^2+2(a-2)x+(a-2)^2+2b-1$$

이 포물선이 포물선 $y=x^2-3$ 과 일치하므로

$$a-2=0, (a-2)^2+2b-1=-3$$

$$\therefore a=2, b=-1$$

$$\therefore a+b=1$$

답 1

다른 풀이 포물선 ㉠의 꼭짓점의 좌표는 $(2, -1)$, 포물선 $y=x^2-3$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(0, -3)$ 이므로 주어진 평행이동은 점 $(2, -1)$ 을 점 $(0, -3)$ 으로 옮기는 평행이동이다.

즉 주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하는 것이므로

$$-a=-2, 2b=-2$$

$$\therefore a=2, b=-1$$

240

$$x^2+y^2+6x+2y+8=0$$
에서

$$(x+3)^2+(y+1)^2=2$$

이 원을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-a+3)^2+(y-b+1)^2=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2+y^2-4x-4y+6=0$$
에서

$$(x-2)^2+(y-2)^2=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

두 원 ㉠, ㉡이 일치하므로

$$-a+3=-2, -b+1=-2$$

$$\therefore a=5, b=3$$

$$\therefore ab=15$$

답 15

다른 풀이 원 $(x+3)^2+(y+1)^2=2$ 의 중심의 좌표는

$$(-3, -1)$$

원 ㉡의 중심의 좌표는 $(2, 2)$

이때 점 $(-3, -1)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(2, 2)$ 이므로

$$-3+a=2, -1+b=2$$

$$\therefore a=5, b=3$$

연습 문제

● 본책 103~104쪽

241

전략 두 점 A, A'의 x 좌표와 두 점 B, B'의 y 좌표를 이용하여 주어진 평행이동을 파악한다.

두 점 A(2, a), B(b, 3)을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 점이 각각

A'(-1, 5), B'(1, 0)이라 하면

$$2+m=-1, a+n=5, b+m=1, 3+n=0$$

$$2+m=-1, 3+n=0$$
에서

$$m=-3, n=-3$$

$a+n=5, b+m=1$ 에 이것을 대입하면

$$a-3=5, b-3=1 \quad \therefore a=8, b=4$$

따라서 $a+b=12, a-b=4$ 이므로 점 $(12, 4)$ 를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(12-3, 4-3), \text{ 즉 } (9, 1)$$

답 (9, 1)

242

전략 평행이동한 직선의 방정식이 $2x-y+4=0$ 임을 이용한다.

직선 $2x-y+4=0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$2(x-a)-(y-b)+4=0$$

$$\therefore 2x-y-2a+b+4=0$$

이 직선이 원래의 직선과 일치하므로

$$-2a+b+4=4 \quad \therefore b=2a$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

243

전략 직선의 평행이동을 이용하여 a 의 값을 구한다.

직선 $y=\frac{1}{2}x-1$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y+3=\frac{1}{2}(x-a)-1$$

$$\therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}a-4$$

이 직선이 직선 $y=-x+5$ 와 y 축에서 만나므로

$$-\frac{1}{2}a-4=5, \quad -\frac{1}{2}a=9$$

$$\therefore a=-18$$

따라서 점 (p, q) 를 x 축의 방향으로 -18 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-1, 2)$ 라 하면 $p-18=-1, q-3=2$

$$\therefore p=17, q=5$$

즉 구하는 점의 좌표는 $(17, 5)$ 이다. **답 (17, 5)**

244

전략 주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하는 것이다.

$$y=x^2+2ax+a+3 \text{에서}$$

$$y=(x+a)^2-a^2+a+3$$

주어진 평행이동에 의하여 이 포물선이 옮겨지는 포물선의 방정식은

$$y+1=(x-4+a)^2-a^2+a+3$$

$$\therefore y=(x-4+a)^2-a^2+a+2$$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(3, b)$ 이므로

$$4-a=3, -a^2+a+2=b$$

$$\therefore a=1, b=2$$

$$\therefore a+b=3$$

답 3

다른 풀이 포물선 $y=(x+a)^2-a^2+a+3$ 의 꼭짓점의 좌표는

$$(-a, -a^2+a+3)$$

주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하는 것이므로 이 꼭짓점이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$$(-a+4, -a^2+a+2)$$

이 점이 점 $(3, b)$ 와 일치하므로

$$-a+4=3, -a^2+a+2=b \quad \therefore a=1, b=2$$

245

전략 두 원의 중심의 좌표를 이용하여 평행이동을 파악한다.

주어진 평행이동에 의하여 원 $x^2+(y-1)^2=9$ 의 중심 $(0, 1)$ 이 원 $(x-1)^2+y^2=9$ 의 중심 $(1, 0)$ 으로 옮겨지므로 주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하는 것이다.

따라서 주어진 평행이동에 의하여 직선 $x+2y-4=0$

이 옮겨지는 직선의 방정식은

$$(x-1)+2(y+1)-4=0$$

$$\therefore x+2y-3=0$$

이 직선이 직선 $x+ay+b=0$ 과 일치하므로

$$a=2, b=-3$$

$$\therefore a+b=-1$$

답 -1

246

전략 두 점 B, B'의 좌표를 이용하여 평행이동을 파악한다.

직사각형 OABC에서 점 B의 좌표는

$$(2, 3)$$

따라서 주어진 평행이동에 의하여 점 B(2, 3)이 점 B'(6, 4)로 옮겨지므로 주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하는 것이다.

이때 직선 AC의 방정식은

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \quad \therefore 3x+2y-6=0$$

직선 A'C'은 직선 AC를 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 직선 A'C'의 방정식은

$$3(x-4)+2(y-1)-6=0$$

$$\therefore 3x+2y-20=0$$

$x=0$ 일 때 $y=10$ 이므로 구하는 y 절편은 10 이다.

답 10

다른 풀이 두 점 A', C'은 각각 두 점 A(2, 0),

C(0, 3)을 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로

$$A'(6, 1), C'(4, 4)$$

따라서 직선 A'C'의 방정식은

$$y-1=\frac{1-4}{6-4}(x-6) \quad \therefore y=-\frac{3}{2}x+10$$

247

전략 평행이동한 직선과 원의 중심 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

직선 $4x+3y-5=0$ 을 y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$4x+3(y-k)-5=0$$

$$\therefore 4x+3y-3k-5=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 원 $(x-1)^2+y^2=4$ 에 접하므로 원의 중심 $(1, 0)$ 과 직선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2 와 같다.

$$\begin{aligned} \text{즉 } \frac{|4-3k-5|}{\sqrt{4^2+3^2}} &= 2 \text{ 이므로} \\ |3k+1| &= 10, \quad 3k+1 = \pm 10 \\ \therefore k &= 3 \quad (\because k > 0) \end{aligned}$$

답 3

248

전략 포물선의 꼭짓점의 좌표를 이용하여 주어진 평행이동을 파악한다.

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 8x + 9 \text{에서} \\ y &= (x+4)^2 - 7 \quad \dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

주어진 평행이동에 의하여 포물선 ㉠의 꼭짓점 $(-4, -7)$ 이 포물선 $y=x^2$ 의 꼭짓점 $(0, 0)$ 으로 옮겨지므로 주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 7만큼 평행이동하는 것이다.

따라서 직선 $2x-3y-2=0$ 을 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 7만큼 평행이동한 직선 l' 의 방정식은

$$\begin{aligned} 2(x-4) - 3(y-7) - 2 &= 0 \\ \therefore 2x - 3y + 11 &= 0 \end{aligned}$$

두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 점 $(1, 0)$ 과 직선 $2x-3y+11=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2+11|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \sqrt{13} \quad \text{답 } \sqrt{13}$$

249

전략 원 C_1 의 방정식을 표준형으로 변형하여 원 C_2 의 방정식을 구한다.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x + 2y + 2 &= 0 \text{에서} \\ (x-3)^2 + (y+1)^2 &= 8 \end{aligned}$$

이 원을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 p 만큼 평행이동한 원 C_2 의 방정식은

$$\begin{aligned} (x+2-3)^2 + (y-p+1)^2 &= 8 \\ \therefore (x-1)^2 + (y-p+1)^2 &= 8 \end{aligned}$$

따라서 원 C_1 의 중심의 좌표는 $(3, -1)$, 원 C_2 의 중심의 좌표는 $(1, p-1)$ 이므로 두 원 C_1, C_2 의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(1-3)^2 + (p-1+1)^2} = \sqrt{p^2+4}$$

$$\begin{aligned} \text{즉 } \sqrt{p^2+4} &= 3 \text{이므로 } p^2+4=9 \\ p^2 &= 5 \quad \therefore p = \sqrt{5} \quad (\because p > 0) \end{aligned}$$

따라서 원 C_2 의 중심의 좌표는

$$(1, \sqrt{5}-1) \quad \text{답 } (1, \sqrt{5}-1)$$

250

전략 원 C 의 방정식을 구하고 원 C 가 x 축과 y 축에 동시에 접함을 이용한다.

원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -8 만큼 평행이동한 원 C 의 방정식은

$$(x-3-a)^2 + (y+8-b)^2 = b^2$$

이므로 원 C 의 중심의 좌표는 $(a+3, b-8)$ 이고 반지름의 길이는 b 이다.

이때 원 C 가 x 축과 y 축에 동시에 접하므로 두 양수 a, b 에 대하여

$$a+3 = |b-8| = b$$

$$|b-8| = b \text{에서}$$

$$-b+8=b \quad (\because b-8 \neq b)$$

$$-2b = -8 \quad \therefore b = 4$$

$$a+3 = b \text{에서 } a+3 = 4$$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore a+b = 5$$

답 ①

251

전략 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이보다 작아야 함을 이용한다.

평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+2, y-3)$ 은 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하는 것이다.

따라서 이 평행이동에 의하여 원 $x^2 + (y-1)^2 = 9$ 가 옮겨지는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y+3-1)^2 = 9$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y+2)^2 = 9$$

이 원이 직선 $3x-4y+k=0$ 과 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 $(2, -2)$ 와 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 3보다 작아야 하므로

$$\frac{|6+8+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} < 3$$

$$|14+k| < 15, \quad -15 < 14+k < 15$$

$$\therefore -29 < k < 1$$

따라서 $m = -29, n = 1$ 이므로

$$n-m = 30$$

답 30

252

전략 삼각형 OAB의 내접원의 방정식을 구하여 평행이동한다.

I -4

한
오
의
애

오른쪽 그림과 같이 삼각형 OAB의 내접원은 중심이 제1사분면 위에 있고 x 축과 y 축에 동시에 접하므로 내접원의 방정식을

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2 \quad (r > 0)$$

이라 하자.

이때 직선 AB의 방정식은

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \quad \therefore 4x + 3y - 12 = 0$$

내접원의 중심 (r, r) 와 직선 AB 사이의 거리가 내접원의 반지름의 길이 r 와 같아야 하므로

$$\frac{|4r + 3r - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = r$$

$$|7r - 12| = 5r, \quad 7r - 12 = \pm 5r$$

$$\therefore r = 1 \left(\because 0 < r < \frac{3}{2} \right)$$

따라서 삼각형 OAB의 내접원의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 주어진 평행이동에 의하여 점 B(0, 4)가 점 B'(6, 2)로 옮겨지므로 주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 6만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동하는 것이다.

따라서 삼각형 O'A'B'의 내접원은 원 ①을 x 축의 방향으로 6만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 삼각형 O'A'B'의 내접원의 방정식은

$$(x-6-1)^2 + (y+2-1)^2 = 1$$

$$\therefore (x-7)^2 + (y+1)^2 = 1$$

$$\text{답 } (x-7)^2 + (y+1)^2 = 1$$

02 대칭이동

● 본책 105~111쪽

253

$$\text{답 } (1) (-2, -3) \quad (2) (2, 3)$$

$$(3) (2, -3) \quad (4) (3, -2)$$

254

$$(1) 3x - 2(-y) + 1 = 0 \text{에서}$$

$$3x + 2y + 1 = 0$$

$$(2) 3 \times (-x) - 2y + 1 = 0 \text{에서}$$

$$3x + 2y - 1 = 0$$

$$(3) 3 \times (-x) - 2 \times (-y) + 1 = 0 \text{에서}$$

$$3x - 2y - 1 = 0$$

$$(4) 3y - 2x + 1 = 0 \text{에서}$$

$$2x - 3y - 1 = 0$$

$$\text{답 } (1) 3x + 2y + 1 = 0 \quad (2) 3x + 2y - 1 = 0$$

$$(3) 3x - 2y - 1 = 0 \quad (4) 2x - 3y - 1 = 0$$

255

$$(1) -y = x^2 - 2x + 3 \text{에서}$$

$$y = -x^2 + 2x - 3$$

$$(2) y = (-x)^2 - 2 \times (-x) + 3 \text{에서}$$

$$y = x^2 + 2x + 3$$

$$(3) -y = (-x)^2 - 2 \times (-x) + 3 \text{에서}$$

$$y = -x^2 - 2x - 3$$

$$\text{답 } (1) y = -x^2 + 2x - 3 \quad (2) y = x^2 + 2x + 3$$

$$(3) y = -x^2 - 2x - 3$$

256

$$(1) (x-3)^2 + (-y+2)^2 = 6 \text{에서}$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 6$$

$$(2) (-x-3)^2 + (y+2)^2 = 6 \text{에서}$$

$$(x+3)^2 + (y+2)^2 = 6$$

$$(3) (-x-3)^2 + (-y+2)^2 = 6 \text{에서}$$

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 6$$

$$(4) (y-3)^2 + (x+2)^2 = 6 \text{에서}$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 6$$

$$\text{답 } (1) (x-3)^2 + (y-2)^2 = 6$$

$$(2) (x+3)^2 + (y+2)^2 = 6$$

$$(3) (x+3)^2 + (y-2)^2 = 6$$

$$(4) (x+2)^2 + (y-3)^2 = 6$$

257

점 (3, -5)를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (-3, 5)

이 점이 직선 $ax - 2y + 1 = 0$ 위에 있으므로

$$-3a - 10 + 1 = 0, \quad -3a = 9$$

$$\therefore a = -3$$

$$\text{답 } -3$$

258

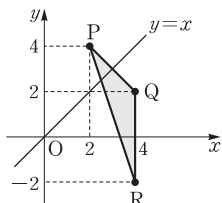
점 P(2, 4)를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 (4, 2)

점 Q(4, 2)를 x 축에 대하여 대칭이동한 점 R의 좌표는 (4, -2)

따라서 오른쪽 그림에서 삼각형 PQR의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

답 4



259

점 $(k, 3)$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는 $(-k, 3)$

점 $(k, 3)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(3, k)$

이때 선분 PQ의 길이가 $2\sqrt{5}$ 이므로

$$\sqrt{(3+k)^2 + (k-3)^2} = 2\sqrt{5}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$2k^2 + 18 = 20$$

$$k^2 = 1 \quad \therefore k = 1 \quad (\because k > 0)$$

답 1

260

직선 $y = -3x + 6$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$y = -3 \times (-x) + 6 \quad \therefore y = 3x + 6$$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$ 이므로 점

$(-3, 4)$ 를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y - 4 = -\frac{1}{3}(x + 3) \quad \therefore y = -\frac{1}{3}x + 3$$

$$\text{답 } y = -\frac{1}{3}x + 3$$

261

직선 $2x - 3y + 1 = 0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$2x - 3 \times (-y) + 1 = 0$$

$$\therefore 2x + 3y + 1 = 0$$

이 직선이 원 $(x-4)^2 + (y+k)^2 = 3$ 의 넓이를 이등분하므로 원의 중심 $(4, -k)$ 를 지난다.

$$\text{즉 } 8 - 3k + 1 = 0 \text{ 이므로 } -3k = -9$$

$$\therefore k = 3$$

답 3

262

$y = x^2 - 2mx + m^2 - 5$ 에서

$$y = (x-m)^2 - 5$$

포물선 $y = (x-m)^2 - 5$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$-y = (-x-m)^2 - 5$$

$$\therefore y = -(x+m)^2 + 5$$

이 포물선의 꼭짓점 $(-m, 5)$ 가 점 $(-2, k)$ 와 일치하므로 $m = 2, k = 5$

$$\therefore m + k = 7$$

답 7

다른 풀이 포물선 $y = (x-m)^2 - 5$ 의 꼭짓점

$(m, -5)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-m, 5)$

이 점이 점 $(-2, k)$ 와 일치하므로 $m = 2, k = 5$

263

직선 $4x - 2y + 3 = 0$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$4y - 2x + 3 = 0 \quad \therefore 2x - 4y - 3 = 0$$

이 직선을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$2(x+1) - 4(y-2) - 3 = 0$$

$$\therefore 2x - 4y + 7 = 0$$

$$\text{답 } 2x - 4y + 7 = 0$$

264

포물선 $y = x^2 - 2x + a$ 를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y - 1 = (x - 3)^2 - 2(x - 3) + a$$

$$\therefore y = x^2 - 8x + 16 + a$$

이 포물선을 x 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은 $-y = x^2 - 8x + 16 + a$

$$\therefore y = -x^2 + 8x - 16 - a$$

이 포물선이 포물선 $y = -x^2 + 8x - 10$ 과 일치하므로

$$-16 - a = -10 \quad \therefore a = -6$$

답 -6

다른 풀이 $y = x^2 - 2x + a$ 에서

$$y = (x-1)^2 + a - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$y = -x^2 + 8x - 10 \text{에서}$$

$$y = -(x-4)^2 + 6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

포물선 ①의 꼭짓점 $(1, a-1)$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(1+3, a-1+1)$, 즉 $(4, a)$

이 점을 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(4, -a)$

이 점이 포물선 ②의 꼭짓점 $(4, 6)$ 과 일치하므로 $-a = 6 \quad \therefore a = -6$

265

원 $x^2 + y^2 - 4x = 0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $(-x)^2 + y^2 - 4 \times (-x) = 0$

$$\therefore (x+2)^2 + y^2 = 4$$

이 원을 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 원의 방정식은 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$

이 원이 직선 $y = mx - 2$, 즉 $mx - y - 2 = 0$ 과 접하므로

$$\frac{|-2m-1-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 2$$

$$|2m+3| = 2\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면 $4m^2 + 12m + 9 = 4(m^2 + 1)$

$$12m = -5 \quad \therefore m = -\frac{5}{12} \quad \text{답} \quad -\frac{5}{12}$$

266

오른쪽 그림과 같이 점 $B(3, -5)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면

$$B'(-3, -5)$$

이때 $\overline{BP} = \overline{B'P}$ 이므로

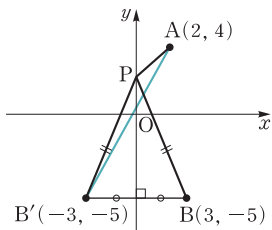
$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P}$$

$$\geq \overline{AB'}$$

$$= \sqrt{(-3-2)^2 + (-5-4)^2} = \sqrt{106}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{106}$ 이다.

답 $\sqrt{106}$



267

오른쪽 그림과 같이 점

$B(3, 4)$ 를 직선 $y = x$ 에

대하여 대칭이동한 점을

B' 이라 하면

$$B'(4, 3)$$

이때 $\overline{BP} = \overline{B'P}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P}$$

$$\geq \overline{AB'}$$

$$= \sqrt{(4-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{10}$ 이다.

한편 이때의 점 P 의 위치는 직선 AB' 과 직선 $y = x$ 의 교점이다.

직선 AB' 의 방정식은

$$y - 2 = \frac{3-2}{4-1}(x-1)$$

$$\therefore y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

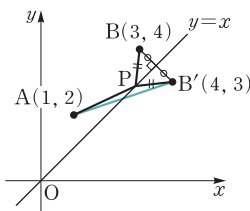
따라서 점 P 의 x 좌표는 $\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} = x$ 에서

$$-\frac{2}{3}x = -\frac{5}{3} \quad \therefore x = \frac{5}{2}$$

즉 구하는 점 P 의 좌표는

$$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

답 최솟값: $\sqrt{10}$, $P\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$



268

오른쪽 그림과 같이 점

$A(2, 3)$ 을 y 축에 대하여

대칭이동한 점을 A' , 점

$B(6, 1)$ 을 x 축에 대하여

대칭이동한 점을 B' 이라

하면

$$A'(-2, 3), B'(6, -1)$$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$, $\overline{QB} = \overline{QB'}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'}$$

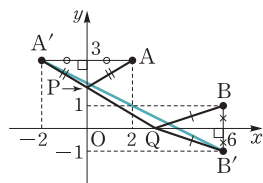
$$\geq \overline{A'B'}$$

$$= \sqrt{(6+2)^2 + (-1-3)^2}$$

$$= 4\sqrt{5}$$

따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{5}$ 이다.

답 $4\sqrt{5}$



03 점과 직선에 대한 대칭이동

● 본책 112~115쪽

269

점 (4, 5)가 두 점 (a, 3), (-2, b)를 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{a-2}{2}=4, \frac{3+b}{2}=5$$

$$\therefore a=10, b=7 \quad \therefore ab=70$$

답 70

270

$$y=-x^2+2x+5 \text{에서} \quad y=-(x-1)^2+6$$

이 포물선의 꼭짓점 (1, 6)을 점 (a, b)에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 (3, 6)이므로 점 (a, b)는 두 점 (1, 6), (3, 6)을 이은 선분의 중점이다.

$$\therefore a=\frac{1+3}{2}=2, b=\frac{6+6}{2}=6$$

$$\therefore a+b=8$$

답 8

271

원의 중심 (3, -1)을 점 (1, 2)에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면 점 (1, 2)가 두 점 (3, -1), (a, b)를 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{3+a}{2}=1, \frac{-1+b}{2}=2$$

$$\therefore a=-1, b=5$$

따라서 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 (-1, 5)이고 반지름의 길이는 2이므로 구하는 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-5)^2=4$$

$$\text{답 } (x+1)^2+(y-5)^2=4$$

272

두 점 P(-3, 4), Q(1, 8)을 이은 선분 PQ의 중점

$$\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{4+8}{2}\right), \text{ 즉 } (-1, 6)$$

이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$$6=-a+b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 직선 PQ와 직선 $y=ax+b$ 는 수직이므로

$$\frac{8-4}{1-(-3)} \times a = -1 \quad \therefore a = -1$$

$$\textcircled{1} \text{에서} \quad b=5$$

$$\therefore a+b=4$$

답 4

273

원 $x^2+(y+1)^2=4$ 의 중심 (0, -1)을 직선 $x-2y+3=0$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하자.

두 점 (0, -1), (a, b)를 이은 선분의 중점

$\left(\frac{a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right)$ 가 직선 $x-2y+3=0$ 위의 점이므로

$$\frac{a}{2}-2 \times \frac{-1+b}{2}+3=0$$

$$\therefore a-2b=-8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 두 점 (0, -1), (a, b)를 지나는 직선과 직선 $x-2y+3=0$ 은 수직이므로

$$\frac{b-(-1)}{a-0} \times \frac{1}{2} = -1$$

$$\therefore 2a+b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a=-2, b=3$$

따라서 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 (-2, 3)이고 반지름의 길이는 2이므로 구하는 원의 방정식은

$$(x+2)^2+(y-3)^2=4$$

$$\text{답 } (x+2)^2+(y-3)^2=4$$

274

(1) 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 y 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

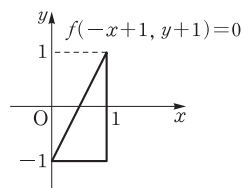
$$f(-x, y)=0$$

방정식 $f(-x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(-(x-1), y+1)=0,$$

$$\text{즉 } f(-x+1, y+1)=0$$

따라서 방정식 $f(-x+1, y+1)=0$ 이 나타내는 도형은 주어진 도형을 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



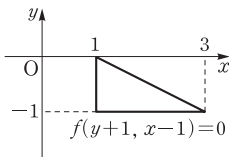
(2) 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(y, x)=0$$

방정식 $f(y, x)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(y+1, x-1)=0$$

따라서 방정식 $f(y+1, x-1)=0$ 이 나타내는 도형은 주어진 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



답 풀이 참조

다른 풀이 주어진 도형은 세 직선

$$x=0, y=0, y=-2x+2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

로 둘러싸인 도형이다.

(1) $\textcircled{1}$ 에 x 대신 $-x+1$, y 대신 $y+1$ 을 대입하면

$$-x+1=0, y+1=0,$$

$$y+1=-2(-x+1)+2$$

$$\therefore x=1, y=-1, y=2x-1$$

(2) $\textcircled{1}$ 에 x 대신 $y+1$, y 대신 $x-1$ 을 대입하면

$$y+1=0, x-1=0, x-1=-2(y+1)+2$$

$$\therefore y=-1, x=1, y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

연습문제 ● 본책 116~118쪽

275

전략 두 점 P, Q의 좌표를 각각 구한다.

점 $(-5, 4)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는 $(-5, -4)$

점 $(-5, 4)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(5, 4)$

따라서 선분 PQ의 길이는

$$\sqrt{(5+5)^2+(4+4)^2}=2\sqrt{41} \quad \text{답 } 2\sqrt{41}$$

276

전략 세 점이 한 직선 위에 있을 조건을 이용한다.

점 A $(-3, 4)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$$(4, -3)$$

점 B를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 점 C의 좌표는

$$(4+2, -3+k), \text{ 즉 } (6, -3+k)$$

이때 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$$\frac{-3-4}{4-(-3)}=\frac{-3+k-(-3)}{6-4}$$

$$-1=\frac{k}{2} \quad \therefore k=-2$$

답 ④

개념 노트

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면

$$(\text{직선 AB의 기울기})=(\text{직선 BC의 기울기})$$

$$=(\text{직선 CA의 기울기})$$

277

전략 두 직선 m, n 의 방정식을 이용하여 교점의 좌표를 구한다.

직선 m 의 방정식은

$$(x+2)-3y-6=0$$

$$\therefore x-3y-4=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 n 의 방정식은

$$x-3 \times (-y)-6=0$$

$$\therefore x+3y-6=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $x=5, y=\frac{1}{3}$

따라서 두 직선 m, n 의 교점의 좌표는 $(5, \frac{1}{3})$

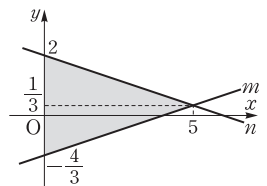
또 두 직선 m, n 의 y 절편

은 각각 $-\frac{4}{3}, 2$ 이므로 오

른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \left(2 + \frac{4}{3}\right) \times 5 \\ &= \frac{25}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{25}{3}$



278

전략 점 (6, -2)를 주어진 순서대로 대칭이동하고 평행이동한다.

점 (6, -2)를 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
(6, 2)

점 (6, 2)를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (2, 6)

점 (2, 6)을 x 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(2-3, 6), \text{ 즉 } (-1, 6)$$

따라서 점 (-1, 6)이 직선 $y=ax+4$ 위의 점이므로

$$6 = -a + 4 \quad \therefore a = -2 \quad \text{답 } -2$$

279

전략 점 B를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 이용하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값을 a 에 대한 식으로 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 점

$B(a, 4)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면

$$B'(-a, 4)$$

이때 $\overline{BP} = \overline{B'P}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{AP} + \overline{B'P} \\ &\geq \overline{AB'} \\ &= \sqrt{(3+a)^2 + (1-4)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + 6a + 18} \end{aligned}$$

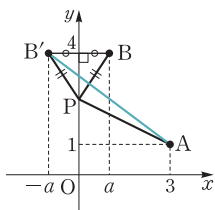
$\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값이 5이므로

$$\sqrt{a^2 + 6a + 18} = 5$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 + 6a - 7 = 0, \quad (a+7)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = 1 \quad (\because a > 0) \quad \text{답 } 1$$



280

전략 선분 PQ의 중점이 주어진 직선 위에 있고, 직선 PQ가 주어진 직선과 수직임을 이용한다.

두 점 $P(-1, 3)$, $Q(a, b)$ 를 이은 선분 PQ의 중점

$\left(\frac{a-1}{2}, \frac{b+3}{2}\right)$ 이 직선 $y=2x+1$ 위의 점이므로

$$\frac{b+3}{2} = 2 \times \frac{a-1}{2} + 1$$

$$\therefore 2a - b = 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 직선 PQ와 직선 $y=2x+1$ 은 수직이므로

$$\begin{aligned} \frac{b-3}{a-(-1)} \times 2 &= -1 \\ \therefore a + 2b &= 5 \quad \dots\dots \textcircled{8} \end{aligned}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$a = \frac{11}{5}, \quad b = \frac{7}{5}$$

$$\therefore a + b = \frac{18}{5} \quad \text{답 } \frac{18}{5}$$

281

전략 원 $(x-1)^2 + (y-a)^2 = 4$ 를 주어진 순서대로 평행이동하고 대칭이동한 원의 방정식을 구한다.

원 $(x-1)^2 + (y-a)^2 = 4$ 를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$\begin{aligned} (x-3-1)^2 + (y+2-a)^2 &= 4 \\ \therefore (x-4)^2 + (y+2-a)^2 &= 4 \end{aligned}$$

이 원을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x+2-a)^2 + (y-4)^2 = 4$$

이 원의 중심의 좌표가 $(a-2, 4)$ 이고 반지름의 길이가 2이므로 원이 y 축에 접하려면

$$\begin{aligned} |a-2| &= 2, \quad a-2 = \pm 2 \\ \therefore a &= 4 \quad (\because a > 0) \quad \text{답 } 4 \end{aligned}$$

282

전략 점 A를 직선 $y=x$, x 축에 대하여 각각 대칭이동한 점을 이용한다.

점 $A(3, 1)$ 을 직선 $y=x$

에 대하여 대칭이동한 점

을 A' , x 축에 대하여 대

칭이동한 점을 A'' 이라

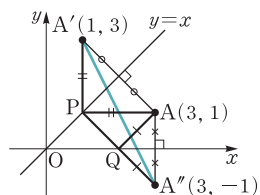
하면

$$A'(1, 3), \quad A''(3, -1)$$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$, $\overline{QA} = \overline{QA''}$ 이므로 삼각형 APQ의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA} &= \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QA''} \\ &\geq \overline{A'A''} \\ &= \sqrt{(3-1)^2 + (-1-3)^2} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{5}$ 이다. 답 $2\sqrt{5}$



283

전략 점 A를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 원

$(x-6)^2 + (y+3)^2 = 4$ 의 중심을 C라 하고 점 A(0, -5)를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면

C(6, -3), A'(0, 5)

이때 $\overline{AQ} = \overline{A'Q}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{AQ} + \overline{QP} &= \overline{A'Q} + \overline{QP} \\ &\geq \overline{A'C} - \overline{PC} \\ &= \sqrt{(6-0)^2 + (-3-5)^2} - 2 \\ &= 8\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 8이다.

답 ①

284

전략 포물선 $y=3x^2+12x+8$ 의 꼭짓점을 대칭이동한 점의 좌표를 이용한다.

$y=3x^2+12x+8$ 에서 $y=3(x+2)^2-4$

이 포물선의 꼭짓점 $(-2, -4)$ 를 점 $(a, -a)$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (p, q) 라 하면 점 $(a, -a)$ 가 두 점 $(-2, -4)$, (p, q) 를 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{-2+p}{2} = a, \quad \frac{-4+q}{2} = -a$$

$$\therefore p=2a+2, \quad q=-2a+4$$

이때 대칭이동한 포물선의 꼭짓점 (p, q) 가 제1사분면 위에 있으려면 $p>0, q>0$ 에서

$$2a+2>0, \quad -2a+4>0$$

$$\therefore -1<a<2$$

따라서 정수 a 는 0, 1의 2개이다.

답 2

285

전략 원의 중심의 대칭이동으로 생각한다.

$x^2+y^2-4x-8y=0$ 에서

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 20$$

이 원의 중심 $(2, 4)$ 와 원 $x^2+y^2=c$ 의 중심 $(0, 0)$ 이 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭이므로 두 점 $(2, 4)$, $(0, 0)$ 을 이은 선분의 중점 $(1, 2)$ 가 직선 $y=ax+b$ 위의 점이다.

$$\therefore 2=a+b$$

..... ㉠

또 두 점 $(2, 4)$, $(0, 0)$ 을 지나는 직선과 직선

$y=ax+b$ 는 수직이므로

$$\frac{4-0}{2-0} \times a = -1 \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

㉠에 $a = -\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$2 = -\frac{1}{2} + b \quad \therefore b = \frac{5}{2}$$

한편 원을 대칭이동해도 반지름의 길이는 변하지 않으므로

$$c=20$$

$$\therefore abc = -\frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 20 = -25$$

답 -25

286

전략 두 방정식 $f(x, y)=0$ 과 $f(y, x-1)=0$ 사이의 관계를 파악한다.

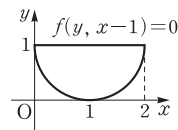
방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(y, x)=0$$

방정식 $f(y, x)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(y, x-1)=0$$

따라서 방정식 $f(y, x-1)=0$ 이 나타내는 도형은 주어진 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



답 ④

287

전략 원의 방정식을 표준형으로 변형하여 대칭이동한 원의 방정식을 구한다.

$x^2+y^2-2x-3=0$ 에서

$$(x-1)^2 + y^2 = 4$$

이 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(-x-1)^2 + (-y)^2 = 4$$

$$\therefore (x+1)^2 + y^2 = 4$$

이 원을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$x^2 + (y+1)^2 = 4$$

..... ㉠

㉠에 $y=0$ 을 대입하면 $x^2+1=4$

$$x^2=3 \quad \therefore x=\pm\sqrt{3}$$

따라서 원과 x 축의 교점의 좌표가 $(-\sqrt{3}, 0)$,

$(\sqrt{3}, 0)$ 이므로 구하는 현의 길이는

$$\sqrt{3}-(-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$$

답 $2\sqrt{3}$

288

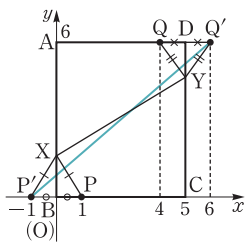
전략 직사각형 ABCD를 좌표평면 위에 놓고, 각 점의 좌표를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$ 를 x 축, $\overline{AB}$ 를 y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면

$$A(0, 6), B(0, 0),$$

$$C(5, 0), D(5, 6),$$

$$P(1, 0), Q(4, 6)$$



점 P를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 P' , 점 Q를 직선 CD에 대하여 대칭이동한 점을 Q' 이라 하면

$$P'(-1, 0), Q'(6, 6)$$

이때 $\overline{PX}=\overline{P'X}$, $\overline{YQ}=\overline{YQ'}$ 이므로

$$\overline{PX}+\overline{XY}+\overline{YQ}=\overline{P'X}+\overline{XY}+\overline{YQ'}$$

$$\geq \overline{P'Q'}$$

$$=\sqrt{(6+1)^2+6^2}$$

$$=\sqrt{85}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{85}$ 이다.

답 $\sqrt{85}$

289

전략 직선 $3x+y-3=0$ 위의 점 (x, y) 를 대칭이동한 점의 좌표를 (x', y') 으로 놓고, 중점 조건과 수직 조건을 이용한다.

직선 $3x+y-3=0$ 위의 임의의 점 $P(x, y)$ 를 직선 $x-y-8=0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$ 이라 하자.

$\overline{PP'}$ 의 중점 $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$ 이 직선 $x-y-8=0$

위의 점이므로

$$\frac{x+x'}{2}-\frac{y+y'}{2}-8=0$$

$$\therefore x-y+x'-y'-16=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 직선 $\overline{PP'}$ 과 직선 $x-y-8=0$ 은 수직이므로

$$\frac{y'-y}{x'-x} \times 1 = -1, \quad y'-y=x-x'$$

$$\therefore x+y-x'-y'=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

㉠+㉡을 하면

$$2x-2y'-16=0 \quad \therefore x=y'+8$$

㉠-㉡을 하면

$$-2y+2x'-16=0 \quad \therefore y=x'-8$$

이때 점 $P(x, y)$ 가 직선 $3x+y-3=0$ 위의 점이므로

$$3(y'+8)+(x'-8)-3=0$$

$$\therefore x'+3y'+13=0$$

즉 직선 l 의 방정식이 $x+3y+13=0$ 이므로 점

$(1, 2)$ 와 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{|1+6+13|}{\sqrt{1^2+3^2}}=2\sqrt{10}$$

답 $2\sqrt{10}$

다른 풀이 두 직선

$3x+y-3=0$, l 이 직선

$x-y-8=0$ 에 대하여 대

칭이므로 점 $(1, 2)$ 와 직

선 l 사이의 거리는 점

$(1, 2)$ 를 직선

$x-y-8=0$ 에 대하여 대칭이동한 점과 직선

$3x+y-3=0$ 사이의 거리와 같다.

점 $(1, 2)$ 를 직선 $x-y-8=0$ 에 대하여 대칭이동한

점의 좌표를 (a, b) 라 하면 두 점 $(1, 2)$, (a, b) 를 이

은 선분의 중점 $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2}\right)$ 가 직선 $x-y-8=0$

위의 점이므로

$$\frac{a+1}{2}-\frac{b+2}{2}-8=0$$

$$\therefore a-b=17 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 두 점 $(1, 2)$, (a, b) 를 지나는 직선과 직선

$x-y-8=0$ 은 수직이므로

$$\frac{b-2}{a-1} \times 1 = -1$$

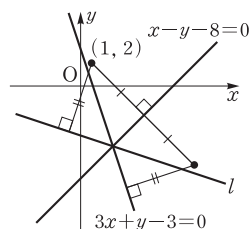
$$\therefore a+b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=10, b=-7$

따라서 구하는 거리는 점 $(10, -7)$ 과 직선

$3x+y-3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|30-7-3|}{\sqrt{3^2+1^2}}=2\sqrt{10}$$



1

집합의 뜻과 포함 관계

II. 집합과 명제

01

집합의 뜻과 표현

● 본책 120~125쪽

290

ㄴ, ㄷ. ‘큰’, ‘가까운’은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

답 집합: ㄱ, ㄹ

ㄱ의 원소: 1, 3, 5, 15

ㄹ의 원소: -1, 2

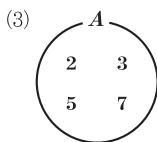
291

답 (1) $\in$ (2) $\notin$ (3) $\notin$ (4) $\in$

292

답 (1) $A = \{2, 3, 5, 7\}$

(2) $A = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 소수}\}$



293

$A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{9, 18, 27, \dots\}$,

$C = \{2, 3, 4\}$, $D = \emptyset$

답 (1) A, C, D (2) B (3) D

294

(2) $x^2 + 1 = 0$, 즉 $x^2 = -1$ 을 만족시키는 실수 x 는 존재하지 않으므로 $A = \emptyset$

$\therefore n(A) = 0$

(3) $|x| < 2$ 에서 $-2 < x < 2$

따라서 정수 x 는 -1, 0, 1의 3개이므로

$n(A) = 3$

답 (1) 10 (2) 0 (3) 3

295

‘작은’, ‘유명한’, ‘잘하는’은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

답 ④, ⑤

296

$x^2 - 8x + 12 < 0$ 에서 $(x-2)(x-6) < 0$

$\therefore 2 < x < 6$

이를 만족시키는 정수 x 는 3, 4, 5이므로

$A = \{3, 4, 5\}$

③ $2 \notin A$

답 ③

297

① $\{3, 5, 7, 9\}$

② $\{3, 5, 7, 9\}$

④ $\{2, 3, 5, 7\}$

⑤ $\{1, 3, 5, 7\}$

답 ③

298

$A = \{2, 4, 6, 8\}$ 이므로

$x=2$ 일 때, $y=3 \times 2 - 2 = 4$

$x=4$ 일 때, $y=3 \times 4 - 2 = 10$

$x=6$ 일 때, $y=3 \times 6 - 2 = 16$

$x=8$ 일 때, $y=3 \times 8 - 2 = 22$

$\therefore B = \{4, 10, 16, 22\}$

답 $\{4, 10, 16, 22\}$

299

① $10 = 2^1 \times 5^1$

② $60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$

③ $100 = 2^2 \times 5^2$

④ $250 = 2^1 \times 5^3$

⑤ $400 = 2^4 \times 5^2$

따라서 집합 A 의 원소가 아닌 것은 ②이다.

답 ②

300

ㄱ. $\{11, 13, 15, 17, \dots\}$ 이므로 무한집합이다.

ㄴ. $\emptyset$ 를 원소로 갖는 집합이므로 유한집합이다.

ㄷ. $1 < x < 3$ 인 홀수 x 는 없다.

따라서 공집합이므로 유한집합이다.

ㄹ. $n=1$ 일 때, $x=2 \times 1 = 2$

$n=2$ 일 때, $x=2 \times 2 = 4$

$n=3$ 일 때, $x=2 \times 3 = 6$

$\vdots$

즉 $\{2, 4, 6, \dots\}$ 이므로 무한집합이다.

이상에서 유한집합인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

301

$A = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$

$x^2 = -4$ 를 만족시키는 실수 x 는 존재하지 않으므로

$$B = \emptyset$$

$$|x| = 4 \text{에서 } x = \pm 4 \quad \therefore C = \{-4, 4\}$$

따라서 $n(A) = 7, n(B) = 0, n(C) = 2$ 이므로

$$n(A) + n(B) - n(C) = 5 \quad \text{답 5}$$

연습문제

• 본책 126쪽

302

전략 어떤 대상이 그 모임에 속하는지 판단할 수 있는 기준이 명확한 것을 찾는다.

‘좋아하는’, ‘가까운’은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

ㄱ. $\{12, 14, 16, \dots\}$

ㄴ. 1보다 작은 자연수는 없으므로 공집합이다.

ㄷ. {부산광역시, 대구광역시, 인천광역시, 광주광역시, 대전광역시, 울산광역시}

이상에서 집합인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. **답 ㄱ, ㄴ, ㄷ**

303

전략 집합 A 의 원소를 구하여 조건을 만족시키는 집합 B 의 원소를 구한다.

집합 $A = \{x | x = 2k^2 + 1, k \leq 3 \text{인 자연수}\}$ 에서

$$k = 1, 2, 3$$

$$k = 1 \text{일 때, } x = 2 \times 1^2 + 1 = 3$$

$$k = 2 \text{일 때, } x = 2 \times 2^2 + 1 = 9$$

$$k = 3 \text{일 때, } x = 2 \times 3^2 + 1 = 19$$

$$\therefore A = \{3, 9, 19\}$$

$B = \{y | y \text{는 } x \text{를 } 4 \text{로 나누었을 때의 나머지}, x \in A\}$ 에서

$$x = 3 \text{일 때, } y = 3$$

$$x = 9 \text{일 때, } y = 1$$

$$x = 19 \text{일 때, } y = 3$$

$$\therefore B = \{1, 3\}$$

따라서 집합 B 의 모든 원소의 합은

$$1 + 3 = 4 \quad \text{답 4}$$

304

전략 $n(A)$ 는 유한집합 A 의 원소의 개수임을 이용한다.

$$\textcircled{1} n(\{\emptyset, 1\}) = 2$$

$$\textcircled{2} n(\{0\}) = 1, n(\{2\}) = 1 \text{이므로}$$

$$n(\{0\}) = n(\{2\})$$

$$\textcircled{3} n(\{a, c\}) = 2, n(\{f, g\}) = 2 \text{이므로}$$

$$n(\{a, c\}) = n(\{f, g\})$$

$$\textcircled{4} n(A) = 0 \text{이면 } A = \emptyset$$

$$\textcircled{5} n(\{3, 5, 7\}) - n(\{3, 7\}) = 3 - 2 = 1$$

따라서 옳은 것은 ㉓이다. **답 ㉓**

305

전략 이차부등식의 해가 존재하지 않을 조건을 이용한다.

집합 X 가 공집합이 되려면 이차부등식 $x^2 - ax + 4 \leq 0$ 의 해가 존재하지 않아야 하므로 이차함수

$y = x^2 - ax + 4$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않아야 한다.

즉 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-a)^2 - 4 \times 1 \times 4 < 0$$

$$a^2 - 16 < 0, \quad (a+4)(a-4) < 0$$

$$\therefore -4 < a < 4$$

따라서 정수 a 는 $-3, -2, \dots, 3$ 의 7개이다. **답 7**

개념 노트

이차부등식 $ax^2 + bx + c \leq 0$ 의 해가 없다.

$\Rightarrow$ 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2 + bx + c > 0$ 이 성립한다.

$$\Rightarrow a > 0, b^2 - 4ac < 0$$

306

전략 두 집합 A, B 의 원소의 개수를 각각 구한다.

$x^2 + y^2 = 25$ 를 만족시키는 정수 x, y 는

$$x = 0 \text{일 때, } y = \pm 5$$

$$x = \pm 3 \text{일 때, } y = \pm 4$$

$$x = \pm 4 \text{일 때, } y = \pm 3$$

$$x = \pm 5 \text{일 때, } y = 0$$

따라서 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$$2 + 4 + 4 + 2 = 12 \quad \therefore n(A) = 12$$

한편 k 는 자연수이므로 $n(B) = k$

따라서 $n(A) + n(B) = 25$ 에서

$$12 + k = 25 \quad \therefore k = 13 \quad \text{답 13}$$

307

전략 집합 B 의 원소를 이용하여 a, b, c 의 값을 구한다.

$x \in A, y \in A, x \neq y$ 일 때, $x+y$ 의 값은 다음 표와 같다.

$x \backslash y$	a	b	c
a		$a+b$	$a+c$
b	$a+b$		$b+c$
c	$a+c$	$b+c$	

$$\therefore B = \{a+b, a+c, b+c\}$$

이때 $a < b < c$ 라 하면 $a+b < a+c < b+c$ 이므로

$$a+b=6 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a+c=9 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$b+c=11 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡} \text{을 하면} \quad b-c = -3 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉢}, \textcircled{㉣} \text{을 연립하여 풀면} \quad b=4, c=7$$

따라서 집합 A 의 원소 중 가장 큰 수는 7이다.

답 7

다른 풀이 $\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} + \textcircled{㉢}$ 을 하면 $2(a+b+c) = 26$

$$\therefore a+b+c=13 \quad \dots\dots \textcircled{㉤}$$

$$\textcircled{㉤} - \textcircled{㉠} \text{을 하면} \quad c=7$$

참고 $b=4$ 를 $\textcircled{㉢}$ 에 대입하면 $a+4=6 \quad \therefore a=2$

$$\therefore A = \{2, 4, 7\}$$

02 집합 사이의 포함 관계

● 본책 127~134쪽

308

답 (1) $\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{2, 4\}$

(2) $\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{9\}, \{1, 3\}, \{1, 9\}, \{3, 9\}, \{1, 3, 9\}$

309

답 (1) $\subset$ (2) $\not\subset$ (3) $\subset$

310

(1) $\{x | x^2 - 2x + 1 = 0\} = \{1\}$ 이므로

$$\{-1, 1\} \not\subseteq \{x | x^2 - 2x + 1 = 0\}$$

(2) $\{x | x \text{는 } 2 < x < 4 \text{인 자연수}\} = \{3\}$ 이므로

$$\emptyset \not\subseteq \{x | x \text{는 } 2 < x < 4 \text{인 자연수}\}$$

(3) $\{x | x = 2^n, n = 1, 2, 3\} = \{2, 4, 8\}$ 이므로

$$\{2, 4, 8\} \not\subseteq \{x | x = 2^n, n = 1, 2, 3\}$$

답 (1) $\neq$ (2) $\neq$ (3) $=$

311

$$\{x | x \text{는 } 5 \text{ 이하의 소수}\} = \{2, 3, 5\}$$

이므로 주어진 집합의 진부분집합은

$$\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}$$

답 풀이 참조

312

$$A = \{1, 2, 4, 8, 16\} \text{이므로} \quad n(A) = 5$$

$$(1) 2^5 = 32 \quad (2) 2^5 - 1 = 31$$

$$(3) 2^{5-2} = 2^3 = 8 \quad (4) 2^{5-1} = 2^4 = 16$$

답 (1) 32 (2) 31 (3) 8 (4) 16

313

① 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\emptyset \subset A$

② 1은 집합 B 의 원소이므로 $1 \in B$

③ 3은 집합 A 의 원소가 아니므로 $3 \notin A$

④ 2는 집합 A 의 원소이므로 $\{2\} \subset A$

⑤ 1, 3, 5는 집합 B 의 원소이므로

$$\{1, 3, 5\} \subset B$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

314

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

ㄱ. 5는 집합 A 의 원소가 아니므로 $5 \notin A$ (거짓)

ㄴ. 6은 집합 A 의 원소이므로 $6 \in A$ (거짓)

ㄷ. 4, 10은 집합 A 의 원소이므로

$$\{4, 10\} \subset A \text{ (참)}$$

ㄹ. $10 \in A, 10 \notin \{2, 4, 6, 8\}$ 이므로

$$A \not\subset \{2, 4, 6, 8\} \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ㄷ

315

집합 S 의 원소는 $\emptyset, \{0\}, 1$ 이다.

① $\emptyset$ 는 집합 S 의 원소이므로 $\emptyset \in S$

② 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\emptyset \subset S$

③ 1은 집합 S 의 원소이므로 $1 \in S$

- ④ $\{0\}$ 은 집합 S 의 원소이므로
 $\{0\} \in S, \{\{0\}\} \subset S$
 ⑤ $\emptyset, \{0\}$ 은 집합 S 의 원소이므로
 $\{\emptyset, \{0\}\} \subset S$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

316

$A \subset B$ 이고 $-1 \in A$ 이므로 $-1 \in B$

- (i) $a-2=-1$, 즉 $a=1$ 일 때

$$A=\{-1, 0\}, B=\{-1, 0, 2\} \text{이므로}$$

$$A \subset B$$

- (ii) $1-a=-1$, 즉 $a=2$ 일 때

$$A=\{-1, 3\}, B=\{-1, 0, 2\} \text{이므로}$$

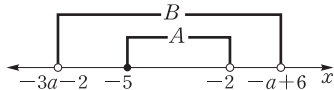
$$A \not\subset B$$

- (i), (ii)에서 $a=1$

답 1

317

두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B$ 가 성립하도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉 $-3a-2 < -5$, $-a+6 \geq -2$ 이므로

$$1 < a \leq 8$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 8, 최솟값은 2이므로 구하는 합은 $8+2=10$

답 10

318

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이므로 $A=B$

$4 \in A$ 이므로 $4 \in B$

$$a^2-3a=4, \quad a^2-3a-4=0$$

$$(a+1)(a-4)=0 \quad \therefore a=-1 \text{ 또는 } a=4$$

- (i) $a=-1$ 일 때

$$A=\{-3, 0, 4\}, B=\{2, 4, 5\} \text{이므로}$$

$$A \neq B$$

- (ii) $a=4$ 일 때

$$A=\{2, 4, 5\}, B=\{2, 4, 5\} \text{이므로}$$

$$A=B$$

- (i), (ii)에서 $a=4$

답 4

다른 풀이 $A=B$ 이고 $2 \in B, 5 \in B$ 이므로

$$2 \in A, 5 \in A$$

이때 $a-2 < a+1$ 이므로

$$a-2=2, a+1=5 \quad \therefore a=4$$

319

집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 3, 5는 반드시 원소로 갖고 9는 원소로 갖지 않는 부분집합이므로 구하는 집합 X 의 개수는

$$2^{6-2-1}=2^3=8$$

답 8

320

집합 A 의 부분집합의 개수는

$$2^4=16$$

집합 A 의 부분집합 중 소수 2, 3, 5를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{4-3}=2$$

따라서 적어도 한 개의 소수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$$16-2=14$$

답 14

321

집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중 0, 1을 반드시 원소로 갖는 부분집합이므로

$$\{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}$$

따라서 집합 X 가 될 수 없는 것은 ④이다.

답 ④

322

집합 X 의 개수는 집합 B 의 부분집합 중 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$$2^{n-2}=128=2^7$$

$$n-2=7 \quad \therefore n=9$$

답 9

323

집합 X 는 a, b, c 를 반드시 원소로 갖는 집합 A 의 부분집합 중 집합 A 를 제외한 것이다.

따라서 구하는 집합 X 의 개수는

$$2^{5-3}-1=2^2-1=3$$

답 3

참고 집합 X 가 될 수 있는 것은

$$\{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, e\}$$



324

전략 두 집합 B, C 의 원소를 구하여 세 집합 사이의 포함 관계를 파악한다.

$x \in A, y \in A$ 일 때, $2x+y, xy$ 의 값은 각각 [표 1], [표 2]와 같다.

$2x \backslash y$	-1	0	1
-2	-3	-2	-1
0	-1	0	1
2	1	2	3

[표 1]

$x \backslash y$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

[표 2]

따라서 $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,

$C = \{-1, 0, 1\}$ 이므로

$$A = C \subset B$$

답 ③

325

전략 x 가 집합 S 의 원소이면 $x \in S, \{x\} \subset S$ 이다.

집합 A 의 원소는 $\emptyset, a, b, \{a, b\}$ 이다.

ㄱ. $n(A) = 4$ (거짓)

ㄴ. $\{\emptyset\} \subset A$ (거짓)

ㄷ. $b \in A, \{b\} \subset A$ (거짓)

ㄹ. $\{\{a, b\}\} \subset A$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄹ, ㅂ이다.

답 ㄹ, ㅂ

326

전략 $A = B$ 이면 두 집합 A, B 의 모든 원소가 같음을 이용한다.

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이므로 $A = B$

$A = \{1, 3, 5, 15\}$ 에서 $3 \in A, 5 \in A$ 이므로

$$3 \in B, 5 \in B$$

즉 $a-2=3, b-2=5$ 또는 $a-2=5, b-2=3$ 이므로

$$a=5, b=7 \text{ 또는 } a=7, b=5$$

$$\therefore ab=35$$

답 35

327

전략 1, 2는 반드시 원소로 갖고 3, 4는 원소로 갖지 않는 부분 집합의 개수는 집합 $\{5, 6, \dots, n\}$ 의 부분집합의 개수와 같음을 이용한다.

집합 A 의 원소의 개수는 n 이고, 집합 A 의 부분집합

중 1, 2는 반드시 원소로 갖고 3, 4는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수가 16이므로

$$2^{n-2-2}=16, \quad 2^{n-4}=2^4$$

$$n-4=4 \quad \therefore n=8$$

답 8

328

전략 집합 X 가 반드시 원소로 갖는 것의 개수를 구한다.

$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}, B = \{-2, 2\}$ 이므로 집합 X 는 $-2, 2$ 를 반드시 원소로 갖는 집합 A 의 부분집합 중 두 집합 A, B 를 제외한 것이다.

따라서 구하는 집합 X 의 개수는

$$2^{7-2}-2=2^5-2=30$$

답 30

329

전략 집합 A_{25} 의 원소를 이용하여 $A_n \subset A_{25}$ 를 만족시키는 n 의 값의 범위를 구한다.

$$A_{25} = \{x | x \text{는 } 5 \text{ 이하의 홀수}\} = \{1, 3, 5\}$$

따라서 $A_n \subset A_{25}$, 즉 $A_n \subset \{1, 3, 5\}$ 를 만족시키려면 집합 A_n 의 원소는 5 이하의 홀수로만 이루어져 있어야 한다.

$$\text{즉 } \sqrt{n} < 7 \text{에서 } n < 49$$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 48이다.

답 48

참고 $\sqrt{n} \geq 7$ 이면 $7 \in A_n$ 이므로 $A_n \not\subset A_{25}$

330

전략 포함 관계가 성립하도록 세 집합 A, B, C 를 수직선 위에 나타낸다.

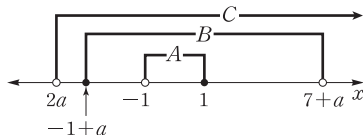
$$1 < x \leq 3 \text{에서 } -1 < x-2 \leq 1 \text{이므로}$$

$$A = \{x | -1 < x \leq 1\}$$

$$-1 \leq x < 7 \text{에서 } -1+a \leq x+a < 7+a \text{이므로}$$

$$B = \{x | -1+a \leq x < 7+a\}$$

$A \subset B \subset C$ 를 만족시키도록 세 집합 A, B, C 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$(i) 2a < -1+a \text{에서 } a < -1$$

$$(ii) -1+a \leq -1 \text{에서 } a \leq 0$$

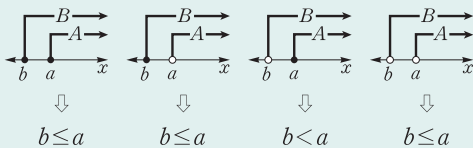
$$(iii) 1 < 7+a \text{에서 } a > -6$$

이상에서 $-6 < a < -1$
따라서 정수 a 는 $-5, -4, -3, -2$ 의 4개이다.

답 4

해설 Focus

수직선에서 $A \subset B$ 를 만족시키는 미지수의 범위를 구할 때에는 등호의 포함 여부에 주의한다.



331

전략 두 집합 A, B 의 모든 원소의 합과 곱이 각각 같음을 이용한다.

$A=B$ 이므로 집합 A 의 모든 원소의 합과 집합 B 의 모든 원소의 합이 같다.

즉 $a+b+c=ab+bc+ca$ 에서

$$ab+bc+ca=-3$$

또 집합 A 의 모든 원소의 곱과 집합 B 의 모든 원소의 곱이 같으므로

$$abc=ab \times bc \times ca$$

$$abc=(abc)^2, \quad abc(abc-1)=0$$

$$\therefore abc=1 \quad (\because abc \neq 0)$$

$$\therefore a^3+b^3+c^3$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$+3abc$$

$$=(a+b+c)$$

$$\times \{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\}+3abc$$

$$=-3 \times \{(-3)^2-3 \times (-3)\}+3 \times 1$$

$$=-3 \times 18+3=-51$$

답 -51

332

전략 집합 A 의 부분집합에서 b, f 를 원소로 갖지 않는 부분집합을 제외한다.

집합 A 의 부분집합의 개수는

$$2^7=128$$

집합 A 의 부분집합 중 b, f 를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{7-2}=2^5=32$$

따라서 집합 A 의 부분집합 중 b 또는 f 를 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$$128-32=96$$

답 96

다른 풀이 (i) 집합 A 의 부분집합 중 b 를 반드시 원소로

$$\text{갖는 부분집합의 개수는 } 2^{7-1}=2^6=64$$

(ii) 집합 A 의 부분집합 중 f 를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$$2^{7-1}=2^6=64$$

(iii) 집합 A 의 부분집합 중 b, f 를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$$2^{7-2}=2^5=32$$

이상에서 구하는 부분집합의 개수는

$$64+64-32=96$$

333

전략 두 집합 A, B 의 원소의 개수를 이용한다.

$$x^2-4x+3=0 \text{에서}$$

$$(x-1)(x-3)=0 \quad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

$$\therefore A=\{1, 3\}$$

$$x^2-6x+5 \leq 0 \text{에서}$$

$$(x-1)(x-5) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq x \leq 5$$

$$\therefore B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

따라서 $A \subset X \subset B$ 를 만족시키는 집합 X 의 개수는 1, 3을 반드시 원소로 갖는 집합 B 의 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{5-2}=2^3=8$$

이때 $n(X) \geq 3$ 이므로 $n(X)=2$, 즉 $X=\{1, 3\}$ 인 경우를 제외하면 구하는 집합 X 의 개수는

$$8-1=7$$

답 7

334

전략 $a \in A$ 이면 $a, \frac{81}{a}$ 이 모두 자연수이어야 함을 이용한다.

조건 (가), (나)에서 집합 A 의 원소는 81의 양의 약수이어야 한다.

이때 81의 양의 약수는 1, 3, 9, 27, 81이고 조건 (나)에 의하여 1과 81, 3과 27은 어느 하나가 A 의 원소이면 나머지 하나도 반드시 A 의 원수이어야 한다.

따라서 구하는 집합 A 의 개수는 집합 $\{1, 3, 9\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^3-1=7$$

답 7

다른 풀이 조건 (가), (나)에서 집합 A 의 원소가 될 수 있는 것은 81의 양의 약수인 1, 3, 9, 27, 81이고 1과 81, 3과 27은 동시에 집합 A 의 원소이거나 원소가 아니어야 한다.

따라서 원소의 개수에 따라 집합 A 를 구해 보면 다음과 같다.

(i) 원소가 1개일 때

$$A = \{9\}$$

(ii) 원소가 2개일 때

$$A = \{1, 81\} \text{ 또는 } A = \{3, 27\}$$

(iii) 원소가 3개일 때

$$A = \{1, 9, 81\} \text{ 또는 } A = \{3, 9, 27\}$$

(iv) 원소가 4개일 때

$$A = \{1, 3, 27, 81\}$$

(v) 원소가 5개일 때

$$A = \{1, 3, 9, 27, 81\}$$

이상에서 조건을 만족시키는 집합 A 의 개수는

$$1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 7$$

335

전략 $a_n = k$ 이면 집합 A_n 은 k 를 반드시 원소로 갖고 k 보다 작은 수는 원소로 갖지 않아야 한다.

집합 A 의 공집합이 아닌 부분집합의 원소 중 가장 작은 원소는 2, 3, 4, 5 중 하나이다.

(i) 가장 작은 원소가 2인 집합은 2를 반드시 원소로 갖는 부분집합이므로 그 개수는

$$2^{4-1} = 2^3 = 8$$

(ii) 가장 작은 원소가 3인 집합은 3을 반드시 원소로 갖고 2는 원소로 갖지 않는 부분집합이므로 그 개수는 $2^{4-1-1} = 2^2 = 4$

(iii) 가장 작은 원소가 4인 집합은 4를 반드시 원소로 갖고 2, 3은 원소로 갖지 않는 부분집합이므로 그 개수는 $2^{4-1-2} = 2$

(iv) 가장 작은 원소가 5인 집합은 $\{5\}$ 의 1개이다.

이상에서

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{15} \\ &= 2 \times 8 + 3 \times 4 + 4 \times 2 + 5 \times 1 \\ &= 16 + 12 + 8 + 5 = 41 \end{aligned}$$

답 41

2 집합의 연산

II. 집합과 명제

01 집합의 연산

● 본책 138~147쪽

336

(1) $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$

(2) $A = \{3, 6, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$ 이므로

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 9\}$$

(3) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-2, 1\}$ 이므로

$$A \cup B = \{-2, 1, 2, 3, 4\}$$

답 풀이 참조

337

(1) $A \cap B = \{2, 4\}$

(2) $A \cap B = \{d\}$

(3) $A = \{2, 4, 6, \dots\}$, $B = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 이므로

$$A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

답 풀이 참조

338

ㄱ. $A \cap B = \emptyset$ 이므로 두 집합 A, B 는 서로소이다.

ㄴ. $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2\}$ 이므로

$$A \cap B = \{2\}$$

따라서 두 집합 A, B 는 서로소가 아니다.

ㄷ. $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 3, 9\}$ 이므로

$$A \cap B = \{1\}$$

따라서 두 집합 A, B 는 서로소가 아니다.

ㄹ. 음의 정수이면서 양의 정수인 정수는 없으므로

$$A \cap B = \emptyset$$

따라서 두 집합 A, B 는 서로소이다.

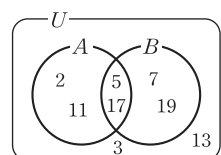
이상에서 두 집합 A, B 가 서로소인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

339

$$U = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

전체집합 U 와 두 부분집합 A, B 를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



(1) $A^c = \{3, 7, 13, 19\}$

(2) $B^c = \{2, 3, 11, 13\}$

- (3) $A-B=\{2, 11\}$
 (4) $B-A=\{7, 19\}$
 (5) $(A \cup B)^c=\{3, 13\}$
 (6) $(A \cap B)^c=\{2, 3, 7, 11, 13, 19\}$

답 풀이 참조

340

- ② $U-A^c=(A^c)^c=A$
 ③ $(A^c)^c \cap U=A \cap U=A$
 ⑤ $(A \cap B) \subset A$ 이므로 $A \cup (A \cap B)=A$
 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

341

- $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 2, 4\}$, $C=\{1, 3, 5, 7\}$
 ③ $A \cup B=\{1, 2, 3, 4\}$ 이므로
 $(A \cup B) \cap C=\{1, 3\}$
 ④ $B \cap C=\{1\}$ 이므로
 $A \cup (B \cap C)=\{1, 2, 3\}$
 ⑤ $B \cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ 이므로
 $A \cap (B \cup C)=\{1, 2, 3\}$
 따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

342

- 구하는 집합의 개수는 집합 A 의 부분집합 중 a, c 를 원소로 갖지 않는 집합의 개수와 같으므로
 $2^{4-2}=2^2=4$

답 4

343

- $A=\{2, 3, 5, 7\}$ 이므로
 $A^c=\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$
 따라서 $n(A)=4$, $n(A^c)=6$ 이므로
 $n(A^c)-n(A)=6-4=2$

답 2

344

- $A=\{2, 5, 6, 8, 9\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 이므로
 $A \cup B=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
 $A \cap B=\{5, 9\}$
 $\therefore (A \cup B) - (A \cap B)=\{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$
답 $\{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$

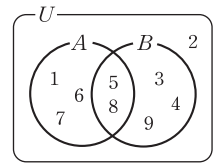
345

- 전체집합 $U=\{1, 2, 3, \dots, 8\}$ 의 두 부분집합 A, B 가
 $A=\{1, 2, 4, 8\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$ 이므로
 $A-B=\{4, 8\}$
 $\therefore (A-B)^c=\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$
 따라서 집합 $(A-B)^c$ 의 모든 원소의 합은
 $1+2+3+5+6+7=24$

답 24

346

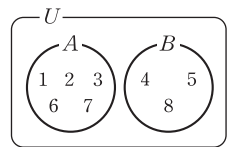
- 전체집합 $U=\{1, 2, \dots, 9\}$
 와 주어진 조건을 만족시키는
 두 부분집합 A, B 를 벤다이어
 그램으로 나타내면 오른쪽 그
 림과 같으므로



$B=\{3, 4, 5, 8, 9\}$ **답** $\{3, 4, 5, 8, 9\}$

347

- 전체집합 $U=\{1, 2, \dots, 8\}$
 과 주어진 조건을 만족시키
 는 두 부분집합 A, B 를 벤다
 이어그램으로 나타내면 오른
 쪽 그림과 같으므로



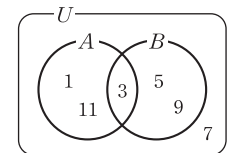
$A=\{1, 2, 3, 6, 7\}$

- 따라서 구하는 모든 원소의 합은
 $1+2+3+6+7=19$

답 19

348

- 전체집합
 $U=\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ 과 주
 어진 조건을 만족시키는 두
 부분집합 A, B 를 벤다이어그
 램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$B=\{3, 5, 9\}$

- 따라서 구하는 모든 원소의 합은
 $3+5+9=17$

답 17

349

- $A \cap B=\{1, 6\}$ 에서 $6 \in A$ 이므로 $a^2+2=6$
 $a^2=4 \quad \therefore a=-2$ 또는 $a=2$

(i) $a = -2$ 일 때

$A = \{1, 4, 6\}, B = \{-11, -2, 3\}$ 이므로

$$A \cap B = \emptyset$$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a = 2$ 일 때

$A = \{1, 4, 6\}, B = \{1, 3, 6\}$ 이므로

$$A \cap B = \{1, 6\}$$

(i), (ii)에서 $a = 2$

답 2

350

$A - B = \{2, 3\}$ 에서 $2 \in A$ 이므로

$$a^2 - a = 2, \quad a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a+1)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 2$$

(i) $a = -1$ 일 때

$A = \{1, 2, 3, 5\}, B = \{-2, 1, 5\}$ 이므로

$$A - B = \{2, 3\}$$

(ii) $a = 2$ 일 때

$A = \{1, 2, 3, 5\}, B = \{1, 4, 8\}$ 이므로

$$A - B = \{2, 3, 5\}$$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $B = \{-2, 1, 5\}$

답 $\{-2, 1, 5\}$

351

$A \cup B = \{2, 4, 5, 7\}$ 에서 $4 \in A$ 또는 $7 \in A$ 이므로

$$a - 1 = 4 \text{ 또는 } a - 1 = 7$$

$$\therefore a = 5 \text{ 또는 } a = 8$$

(i) $a = 5$ 일 때

$A = \{2, 4, 5\}, B = \{4, 7\}$ 이므로

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 7\}$$

(ii) $a = 8$ 일 때

$A = \{2, 5, 7\}, B = \{4, 13\}$ 이므로

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 7, 13\}$$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $B = \{4, 7\}$

따라서 집합 B 의 모든 원소의 합은

$$4 + 7 = 11$$

답 11

352

$$\textcircled{1} A - B^c = A \cap (B^c)^c = A \cap B$$

$$\textcircled{2} (A \cup A^c) \cup B = U \cup B = U$$

$$\textcircled{3} (U - A^c) \cap B = (A^c)^c \cap B = A \cap B$$

$$\textcircled{4} (A^c)^c \cap (U - B^c) = A \cap (B^c)^c = A \cap B$$

$$\textcircled{5} (A \cap B) \cup (B \cap B^c) = (A \cap B) \cup \emptyset = A \cap B$$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 $\textcircled{2}$ 이다.

답 ②

353

$B^c \subset A^c$ 에서 $A \subset B$

이를 벤다이어그램으로 나타내면

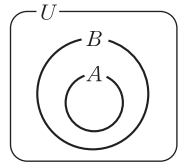
오른쪽 그림과 같다.

$$\textcircled{4} A \neq B \text{이면 } A \cup B^c \neq U$$

따라서 항상 성립한다고 할 수 없

는 것은 $\textcircled{4}$ 이다.

답 ④



354

전체집합 U 의 두 부분집합

A, B 가 서로소이므로

$$A \cap B = \emptyset$$

이를 벤다이어그램으로 나타

내면 오른쪽 그림과 같다.

$$\neg. A - B = A \text{ (거짓)}$$

$$\neg. A \subset B^c \text{ (참)}$$

$$\neg. A \cup B^c = B^c \text{ (참)}$$

$$\neg. B \cap A^c = B - A = B \text{ (참)}$$

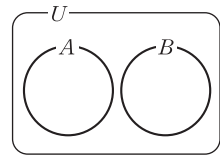
$$\square. A \cap (B - A) = A \cap B = \emptyset \text{ (참)}$$

$$\text{ㅅ. } A - (U - B) = A - B^c = A \cap (B^c)^c$$

$$= A \cap B = \emptyset \text{ (거짓)}$$

이상에서 항상 옳은 것은 $\neg, \neg, \neg, \square$ 이다.

답 $\neg, \neg, \neg, \square$



355

$A \cap X = X$ 에서 $X \subset A$

$(A \cap B) \cup X = X$ 에서 $(A \cap B) \subset X$

$$\therefore (A \cap B) \subset X \subset A$$

이때 $A \cap B = \{4, 5, 6\}$ 이므로

$$\{4, 5, 6\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

따라서 집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 4, 5, 6을 반드시 원소로 갖는 집합이므로 구하는 집합 X 의 개수는 $2^{6-3}=2^3=8$ **답 8**

356

$$A - X = \emptyset \text{에서} \quad A \subset X$$

$$B - X = B \text{에서} \quad B \cap X = \emptyset$$

즉 집합 X 는 전체집합 $U = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ 의 부분집합 중 집합 A 의 원소 2, 7은 반드시 원소로 갖고 집합 B 의 원소 3, 13은 원소로 갖지 않는 집합이다. 따라서 구하는 집합 X 의 개수는

$$2^{6-2-2}=2^2=4 \quad \text{답 4}$$

357

$(A \cup X) \subset (B \cup X)$ 를 만족시키는 전체집합 U 의 부분집합 X 는 두 집합 A, B 의 공통인 원소 9를 제외한 집합 A 의 나머지 원소 1, 5, 13을 반드시 원소로 가져야 하므로

$$\{1, 5, 13\} \subset X \subset \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$$

따라서 구하는 집합 X 의 개수는

$$2^{7-3}=2^4=16 \quad \text{답 16}$$

연습문제

• 본책 148~149쪽

358

전략 주어진 조건을 만족시키도록 두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타낸다.

두 집합 A, B 가 서로소, 즉 $A \cap B = \emptyset$ 이라면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$a < -2$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 -3 이다. **답 -3**

359

전략 집합 $B - A$ 의 원소를 이용하여 집합 $A \cap B$ 의 원소를 구한다.

$$\begin{aligned} B &= (B - A) \cup (A \cap B) \\ &= \{5, 6\} \cup (A \cap B) \end{aligned}$$

이때 집합 B 의 모든 원소의 합이 12이므로

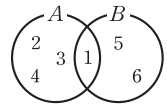
$$A \cap B = \{1\}$$

즉 두 집합 A, B 를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$A - B = \{2, 3, 4\}$$

따라서 집합 $A - B$ 의 모든 원소의 합은

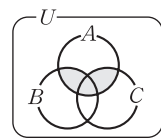
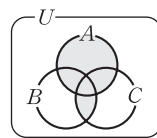
$$2 + 3 + 4 = 9 \quad \text{답 9}$$



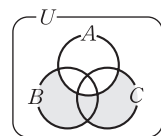
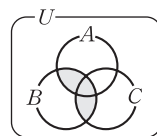
360

전략 주어진 집합을 벤다이어그램으로 나타내어 본다.

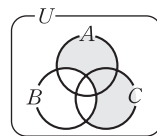
- ① $A \cup (B \cap C)$ ② $A \cap (B \cup C)$



- ③ $B \cap (A \cup C)$ ④ $A^c \cap (B \cup C)$



- ⑤ $B^c \cap (A \cup C)$



따라서 주어진 벤다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ②이다. **답 2**

361

전략 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 이용한다.

$$B - A = \emptyset \text{에서} \quad B \subset A$$

$$\text{이때 } 3 \in B \text{이므로} \quad 3 \in A$$

$$(i) \quad 2a - 3 = 3, \text{ 즉 } a = 3 \text{일 때}$$

$$A = \{-2, 3, 4\}, B = \{-7, 3\} \text{이므로}$$

$$B \not\subset A$$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$$(ii) \quad a + 1 = 3, \text{ 즉 } a = 2 \text{일 때}$$

$$A = \{-2, 1, 3\}, B = \{-2, 3\} \text{이므로}$$

$$B \subset A$$

$$(i), (ii) \text{에서} \quad a = 2 \quad \text{답 2}$$

362

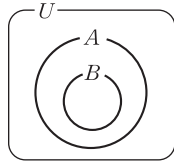
전략 주어진 조건으로부터 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 알아낸다.

$$B - (A \cap B) = \emptyset \text{에서}$$

$$B \subset (A \cap B)$$

$$\therefore B \subset A$$

이를 벤다이어그램으로 나타내면
오른쪽 그림과 같다.



$$\textcircled{4} A \neq B \text{이면 } A - B \neq \emptyset$$

따라서 항상 성립한다고 할 수 없는 것은 $\textcircled{4}$ 이다.

답 $\textcircled{4}$

363

전략 주어진 조건을 이용하여 집합 사이의 포함 관계를 알아낸다.

$$A \cup X = A \text{에서 } X \subset A$$

$$B \cap X = \emptyset \text{에서 두 집합 } B, X \text{는 서로소이므로}$$

$$X \subset B^c$$

따라서 집합 X 는 집합 $A \cap B^c$, 즉 집합 $A - B$ 의 부분집합이다.

이때 집합 $A - B$ 는 50 이하의 6의 배수 중 4의 배수가 아닌 자연수의 집합이므로

$$A - B = \{6, 18, 30, 42\}$$

따라서 구하는 집합 X 의 개수는

$$2^4 = 16$$

답 $\textcircled{2}$

364

전략 삼차방정식을 풀어 집합 A 의 원소를 구한다.

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \text{에서}$$

$$x(x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\therefore A = \{0, 1, 2\}$$

이때 $A - B = \{0, 1\}$ 이므로

$$2 \in B$$

즉 $x^2 + x + a = 0$ 의 한 근이 2이므로

$$4 + 2 + a = 0 \quad \therefore a = -6$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \text{에서 } (x+3)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 $B = \{-3, 2\}$ 이므로

$$B - A = \{-3\}$$

답 $\{-3\}$

365

전략 $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$ 임을 이용한다.

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) \text{이므로}$$

$$a + 2 \in (A \cap B) \quad \therefore a + 2 \in B$$

$$\text{그런데 } a + 2 \neq a + 7 \text{이므로 } a + 2 = a^3 - 2a$$

$$a^3 - 3a - 2 = 0, \quad (a+1)^2(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ (중근) 또는 } a = 2$$

(i) $a = -1$ 일 때

$$A = \{1, 2, 9\}, B = \{1, 6\} \text{이므로}$$

$$(A - B) \cup (B - A) = \{2, 6, 9\}$$

(ii) $a = 2$ 일 때

$$A = \{2, 4, 9\}, B = \{4, 9\} \text{이므로}$$

$$(A - B) \cup (B - A) = \{2\}$$

(i), (ii)에서 $a = -1, b = 6$

$$\therefore a + b = 5$$

답 5

366

전략 집합 C 가 반드시 원소로 갖는 것과 원소로 갖지 않는 것을 구한다.

$$U = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}, A = \{1, 2, 3, 6\},$$

$$B = \{2, 4, 6, 8\} \text{이므로}$$

$$A - B = \{1, 3\}$$

$(A - B) \cap C = \{3\}$ 에서 집합 C 는 3을 반드시 원소로 갖고 1을 원소로 갖지 않는다.

또 $B \cap C = B$ 에서 $B \subset C$ 이므로 집합 C 는 집합 B 의 원소 2, 4, 6, 8을 반드시 원소로 갖는다.

따라서 집합 C 는 전체집합 U 의 부분집합 중 2, 3, 4, 6, 8을 반드시 원소로 갖고 1을 원소로 갖지 않는 집합이므로 구하는 집합 C 의 개수는

$$2^{8-5-1} = 2^2 = 4$$

답 4

367

전략 $B = \emptyset$ 일 때와 $B \neq \emptyset$ 일 때로 나누어 생각한다.

$$A \cap B = B \text{이므로 } B \subset A$$

(i) $B = \emptyset$ 일 때

방정식 $ax + 2 = 2x$, 즉 $(a-2)x = -2$ 의 해가 존재하지 않아야 하므로

$$a - 2 = 0 \quad \therefore a = 2$$

(ii) $B \neq \emptyset$ 일 때

$$B = \{-2\} \text{ 또는 } B = \{3\} \text{ 이므로}$$

$$-2a + 2 = -4 \text{ 또는 } 3a + 2 = 6$$

$$\therefore a = 3 \text{ 또는 } a = \frac{4}{3}$$

(i), (ii)에서 $a = \frac{4}{3}$ 또는 $a = 2$ 또는 $a = 3$

따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$\frac{4}{3} \times 2 \times 3 = 8$$

답 8

368

전략 조건 (가), (나)를 만족시키는 집합 $B - A$ 를 구한다.

조건 (가)에서 $A - B = \emptyset$ 이므로 $A \subset B$

$$\therefore S(B - A) = S(B) - S(A)$$

$$= 10 \quad (\because \text{조건 (나)})$$

이때 전체집합 $U = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ 에 대하여 원소의 합이 10인 경우는

$$2 + 3 + 5 = 10 \text{ 또는 } 3 + 7 = 10$$

$$\therefore B - A = \{2, 3, 5\} \text{ 또는 } B - A = \{3, 7\}$$

한편

$$S(B) + S(B^c) = S(U) = 2 + 3 + 5 + 7 + 11 = 28$$

이므로 조건 (나)에서 $S(B) < 14$

$$S(A) + 10 < 14 \quad (\because \text{조건 (나)})$$

$$\therefore S(A) < 4$$

..... ㉠

(i) $B - A = \{2, 3, 5\}$ 일 때

$A \neq \emptyset$ 이므로

$$7 \in A \text{ 또는 } 11 \in A$$

이때 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $B - A = \{3, 7\}$ 일 때

$A \neq \emptyset$ 이므로

$$2 \in A \text{ 또는 } 5 \in A$$

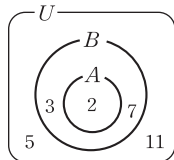
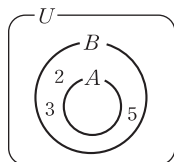
$$\text{또는 } 11 \in A$$

이때 ㉠에서 $A = \{2\}$

$$\therefore B = \{2, 3, 7\}$$

(i), (ii)에서 $B = \{2, 3, 7\}$

답 {2, 3, 7}



369

전략 집합 X 가 2를 포함하는 경우와 포함하지 않는 경우로 나누어 생각한다.

집합 X 는 $X \cap A \neq \emptyset$, $X \cap B \neq \emptyset$ 을 만족시켜야 하므로 집합 A 의 원소 중 적어도 하나와 집합 B 의 원소 중 적어도 하나를 원소로 가져야 한다.

(i) $2 \in X$ 인 경우

$2 \in (X \cap A)$, $2 \in (X \cap B)$ 이므로 집합 X 는 $X \cap A \neq \emptyset$, $X \cap B \neq \emptyset$ 을 만족시킨다.

이때 집합 X 의 개수는 전체집합 U 의 부분집합 중 2를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$$2^{5-1} = 16$$

(ii) $2 \notin X$ 인 경우

집합 X 는 집합 A 의 원소 1을 반드시 원소로 갖고, 집합 B 의 원소 3, 4 중 적어도 하나를 반드시 원소로 가져야 한다.

집합 $\{1, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중 1을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$$2^{4-1} = 2^3 = 8$$

집합 $\{1, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중 1을 반드시 원소로 갖고, 3, 4를 원소로 갖지 않는 집합의 개수는

$$2^{4-1-2} = 2$$

따라서 집합 X 의 개수는

$$8 - 2 = 6$$

(i), (ii)에서 구하는 집합 X 의 개수는

$$16 + 6 = 22$$

답 22

02 집합의 연산 법칙

• 본책 150~155쪽

370

$$(1) (A - B^c) \cup (B - A) = (A \cap B) \cup (B \cap A^c)$$

$$= B \cap (A \cup A^c)$$

$$= B \cap U = B$$

$$(2) \{A \cap (A^c \cup B)\} \cup \{B \cap (B \cup C)\}$$

$$= \{(A \cap A^c) \cup (A \cap B)\} \cup B \quad \leftarrow B \subset (B \cup C)$$

$$= \{\emptyset \cup (A \cap B)\} \cup B$$

$$= (A \cap B) \cup B = B \quad \leftarrow (A \cap B) \subset B$$

답 (1) B (2) B

371

$$\begin{aligned}
 A - (B \cup C) &= A \cap (B \cup C)^c \\
 &= A \cap (B^c \cap C^c) \quad \leftarrow \text{드모르간의 법칙} \\
 &= (A \cap B^c) \cap C^c \quad \leftarrow \text{결합법칙} \\
 &= (A \cap B^c) - C \\
 &= (A - B) - C
 \end{aligned}$$

답 풀이 참조

372

주어진 등식의 좌변을 간단히 하면

$$\begin{aligned}
 (A \cup B) \cap A^c &= (A \cap A^c) \cup (B \cap A^c) \\
 &= \emptyset \cup (B \cap A^c) \\
 &= B \cap A^c = B - A
 \end{aligned}$$

즉 $B - A = \emptyset$ 이므로 $B \subset A$

ㄱ. $A \cap B = B$ (거짓)

ㄴ. $A \cup B = A$ (참)

ㄷ. $A \cup B^c = U$ (참)

이상에서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

373

주어진 등식의 좌변을 간단히 하면

$$\begin{aligned}
 (A \cup B) \cap (B - A)^c &= (A \cup B) \cap (B \cap A^c)^c \\
 &= (A \cup B) \cap (B^c \cup A) \\
 &= (A \cup B) \cap (A \cup B^c) \\
 &= A \cup (B \cap B^c) \\
 &= A \cup \emptyset = A
 \end{aligned}$$

즉 $A = A \cap B$ 이므로 $A \subset B$

①, ② $A \cap B = A$

③ $A \cap B^c = \emptyset$

④, ⑤ $A \cup B = B$

따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

374

$$\begin{aligned}
 (A \odot B) \odot A &= (B \odot A) \odot A \quad \leftarrow \text{교환법칙} \\
 &= B \odot (A \odot A) \quad \leftarrow \text{결합법칙} \\
 &= B \odot \{(A \cup A) - (A \cap A)\} \\
 &= B \odot (A - A) = B \odot \emptyset \\
 &= (B \cup \emptyset) - (B \cap \emptyset) \\
 &= B - \emptyset \\
 &= B
 \end{aligned}$$

답 ②

375

$$(1) (A_2 \cup A_8) \cap (A_3 \cup A_9) = A_2 \cap A_3 = A_6$$

$$\therefore m = 6$$

$$(2) (A_6 \cap A_8) \cup A_{12} = A_{24} \cup A_{12} = A_{12}$$

$$\therefore m = 12$$

답 (1) 6 (2) 12

03

유한집합의 원소의 개수

● 본책 156~160쪽

376

$$\begin{aligned}
 (1) n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\
 &= 10 + 8 - 4 = 14
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서} \\
 10 &= 8 + 5 - n(A \cap B) \\
 \therefore n(A \cap B) &= 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서} \\
 13 &= 6 + n(B) - 2 \quad \therefore n(B) = 9
 \end{aligned}$$

답 (1) 14 (2) 3 (3) 9

377

$$\begin{aligned}
 n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) \\
 &\quad - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \\
 &= 12 + 16 + 17 - 8 - 12 - 7 + 5 \\
 &= 23
 \end{aligned}$$

답 23

378

$$\begin{aligned}
 (1) n(A - B) &= n(A) - n(A \cap B) \\
 &= 20 - 8 = 12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) n(B - A) &= n(B) - n(A \cap B) \\
 &= 13 - 8 = 5
 \end{aligned}$$

답 (1) 12 (2) 5

379

$$(1) n(A^c) = n(U) - n(A) = 33 - 21 = 12$$

$$(2) n(B^c) = n(U) - n(B) = 33 - 14 = 19$$

$$(3) n((A \cap B)^c) = n(U) - n(A \cap B) = 33 - 9 = 24$$

$$(4) n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B)$$

이때

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 21 + 14 - 9 = 26$$

이므로

$$n(A^c \cap B^c) = n(U) - n(A \cup B) = 33 - 26 = 7$$

답 (1) 12 (2) 19 (3) 24 (4) 7

380

$$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B)$$

에서

$$11 = 32 - n(A \cup B) \quad \therefore n(A \cup B) = 21$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서}$$

$$21 = n(A) + n(B) - 4$$

$$\therefore n(A) + n(B) = 25$$

답 25

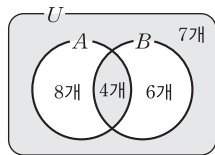
381

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서}$$

$$18 = 12 + 10 - n(A \cap B)$$

$$\therefore n(A \cap B) = 4$$

따라서 벤다이어그램에 각 집합의 원소의 개수를 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 색칠한 부분에 속하는 원소의 개수는 $4 + 7 = 11$



답 11

382

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서}$$

$$15 = 10 + 9 - n(A \cap B)$$

$$\therefore n(A \cap B) = 4$$

$$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C) \text{에서}$$

$$11 = 9 + 6 - n(B \cap C)$$

$$\therefore n(B \cap C) = 4$$

$$\text{또 } A \cap C = \emptyset \text{이므로 } A \cap B \cap C = \emptyset$$

$$\therefore n(A \cup B \cup C)$$

$$= n(A) + n(B) + n(C)$$

$$- n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A)$$

$$+ n(A \cap B \cap C)$$

$$= 10 + 9 + 6 - 4 - 4 - 0 + 0$$

$$= 17$$

답 17

383

중국어를 신청한 학생의 집합을 A , 일본어를 신청한 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(A) = 52, n(B) = 45$$

80명의 학생이 두 과목 중 적어도 한 과목을 신청하였

$$\text{으므로 } n(A \cup B) = 80$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서}$$

$$80 = 52 + 45 - n(A \cap B)$$

$$\therefore n(A \cap B) = 17$$

한 과목만 신청한 학생 수는 전체 학생 수에서 두 과목을 모두 신청한 학생 수를 뺀 것과 같으므로

$$n(A \cup B) - n(A \cap B) = 80 - 17 = 63$$

따라서 구하는 학생 수는 63이다.

답 63

다른 풀이 중국어만 신청한 학생 수는

$$n(A - B) = n(A \cup B) - n(B)$$

$$= 80 - 45 = 35$$

일본어만 신청한 학생 수는

$$n(B - A) = n(A \cup B) - n(A)$$

$$= 80 - 52 = 28$$

따라서 구하는 학생 수는

$$n(A - B) + n(B - A) = 35 + 28 = 63$$

384

학급 전체 학생의 집합을 U , A 포털사이트의 이메일을 이용하는 학생의 집합을 A , B 포털사이트의 이메일을 이용하는 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U) = 40, n(A) = 25, n(B) = 20,$$

$$n(A^c \cap B^c) = 5$$

$$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B)$$

$$\text{에서 } 5 = 40 - n(A \cup B)$$

$$\therefore n(A \cup B) = 35$$

두 포털사이트의 이메일을 모두 이용하는 학생의 집합은 $A \cap B$ 이므로

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서}$$

$$35 = 25 + 20 - n(A \cap B)$$

$$\therefore n(A \cap B) = 10$$

따라서 구하는 학생 수는 10이다.

답 10

385

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 15 + 26 - n(A \cap B)$$

$$= 41 - n(A \cap B)$$

(i) $n(A \cup B)$ 가 최대인 경우는 $n(A \cap B)$ 가 최소일 때이므로 $n(A \cap B) = 7$ 일 때이다.

따라서 $n(A \cup B)$ 의 최댓값은

$$41 - 7 = 34$$

(ii) $n(A \cup B)$ 가 최소인 경우는 $n(A \cap B)$ 가 최대일 때이므로 $A \subset B$ 일 때이다.

따라서 $n(A \cup B)$ 의 최솟값은

$$n(B) = 26$$

(i), (ii)에서 $n(A \cup B)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은

$$34 + 26 = 60$$

답 60

다른 풀이 $(A \cap B) \subset A$, $(A \cap B) \subset B$ 이므로

$$n(A \cap B) \leq n(A), n(A \cap B) \leq n(B)$$

$$\therefore n(A \cap B) \leq 15$$

또 $n(A \cap B) \geq 7$ 이므로

$$7 \leq n(A \cap B) \leq 15$$

$$-15 \leq -n(A \cap B) \leq -7$$

$$\therefore 26 \leq 41 - n(A \cap B) \leq 34$$

즉 $26 \leq n(A \cup B) \leq 34$ 이므로 $n(A \cup B)$ 의 최댓값은 34, 최솟값은 26이다.

386

학급 전체 학생의 집합을 U , 설악산에 가 본 학생의 집합을 A , 지리산에 가 본 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U) = 40, n(A) = 25, n(B) = 18$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서}$$

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 25 + 18 - n(A \cup B)$$

$$= 43 - n(A \cup B)$$

(i) $n(A \cap B)$ 가 최대인 경우는 $n(A \cup B)$ 가 최소일 때이므로 $B \subset A$ 일 때이다.

$$\therefore M = n(B) = 18$$

(ii) $n(A \cap B)$ 가 최소인 경우는 $n(A \cup B)$ 가 최대일 때이므로 $A \cup B = U$ 일 때이다.

$$\therefore m = 43 - 40 = 3$$

(i), (ii)에서 $M + m = 21$

답 21

다른 풀이 $A \subset (A \cup B) \subset U$ 이므로

$$n(A) \leq n(A \cup B) \leq n(U)$$

$$\therefore 25 \leq n(A \cup B) \leq 40$$

따라서 $3 \leq 43 - n(A \cup B) \leq 18$ 이므로

$$3 \leq n(A \cap B) \leq 18$$

$$\therefore M = 18, m = 3$$

연습 문제

● 본책 161~163쪽

387

전략 분배법칙과 드모르간의 법칙을 이용하여 좌변을 간단히 한다.

$$\neg. (A^c \cup B) \cap A = (A^c \cap A) \cup (B \cap A)$$

$$= \emptyset \cup (B \cap A)$$

$$= A \cap B$$

$$\neg. (A \cup B) \cap (A^c \cap B^c) = (A \cup B) \cap (A \cup B)^c$$

$$= \emptyset$$

$$\neg. (A - B) \cup (A - C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c)$$

$$= A \cap (B^c \cup C^c)$$

$$= A \cap (B \cap C)^c$$

$$= A - (B \cap C)$$

$$\neg. \{(A \cap B) \cup (A - B)\} \cap B$$

$$= \{(A \cap B) \cup (A \cap B^c)\} \cap B$$

$$= \{A \cap (B \cup B^c)\} \cap B$$

$$= (A \cap U) \cap B$$

$$= A \cap B$$

이상에서 항상 성립하는 것은 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 이다.

답 $\neg$, $\neg$, $\neg$

388

전략 분배법칙을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$$\begin{aligned} & \{(A \cap B) \cup (A \cap B^c)\} \cup \{(A^c \cup B) \cap (A^c \cup B^c)\} \\ &= \{A \cap (B \cup B^c)\} \cup \{A^c \cup (B \cap B^c)\} \\ &= (A \cap U) \cup (A^c \cup \emptyset) \\ &= A \cup A^c = U \end{aligned}$$

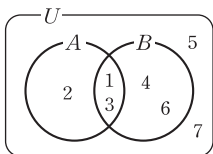
답 U

389

전략 주어진 조건을 만족시키는 집합 U, A, B를 벤다이어그램으로 나타낸다.

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= \{2, 4, 6\} \end{aligned}$$

이때 $A = \{1, 2, 3\}$ 이므로 전체 집합 U와 주어진 조건을 만족시키는 두 부분집합 A, B를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$$\therefore B = \{1, 3, 4, 6\}$$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$$1 + 3 + 4 + 6 = 14$$

답 14

390

전략 주어진 등식의 좌변을 간단히 하여 집합 A, B 사이의 포함 관계를 구한다.

주어진 등식의 좌변을 간단히 하면

$$\begin{aligned} (A - B)^c \cap B^c &= (A \cap B^c)^c \cap B^c \\ &= (A^c \cup B) \cap B^c \\ &= (A^c \cap B^c) \cup (B \cap B^c) \\ &= (A^c \cap B^c) \cup \emptyset \\ &= A^c \cap B^c \end{aligned}$$

$$\text{즉 } A^c \cap B^c = A^c \text{이므로 } A^c \subset B^c$$

$$\therefore B \subset A$$

답 ②

391

전략 연산 $\odot$ 의 뜻에 따라 먼저 $A \odot B$ 의 원소를 구한다.

$$\begin{aligned} A \odot B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (\{1, 2, 3, 4\} - \{1, 2\}) \\ &\quad \cup (\{1, 2\} - \{1, 2, 3, 4\}) \\ &= \{3, 4\} \cup \emptyset = \{3, 4\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (A \odot B) \odot C &= \{(A \odot B) - C\} \cup \{C - (A \odot B)\} \\ &= (\{3, 4\} - \{1, 3, 5\}) \cup (\{1, 3, 5\} - \{3, 4\}) \\ &= \{4\} \cup \{1, 5\} = \{1, 4, 5\} \end{aligned}$$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$$1 + 4 + 5 = 10$$

답 10

392

전략 최소공배수의 성질을 이용한다.

$$\begin{aligned} A_5 \cap (A_3 \cup A_6) &= A_5 \cap A_3 = A_{15} \\ &= \{15, 30, 45, \dots, 195\} \end{aligned}$$

따라서 원소의 최댓값은 195, 최솟값은 15이므로 구하는 합은

$$195 + 15 = 210$$

답 210

다른 풀이 $A_5 \cap (A_3 \cup A_6) = (A_5 \cap A_3) \cup (A_5 \cap A_6)$
 $= A_{15} \cup A_{30} = A_{15}$
 $= \{15, 30, 45, \dots, 195\}$

393

전략 주어진 조건을 집합을 이용하여 나타낸다.

전체 학생의 집합을 U, A 문제를 맞힌 학생의 집합을 A, B 문제를 맞힌 학생의 집합을 B라 하면

$$\begin{aligned} n(U) &= 48, n(A) = 23, n(A \cap B) = 10, \\ n(A^c \cap B^c) &= 5 \end{aligned}$$

$$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B)$$

$$\text{에서 } 5 = 48 - n(A \cup B)$$

$$\therefore n(A \cup B) = 43$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서}$$

$$43 = 23 + n(B) - 10$$

$$\therefore n(B) = 30$$

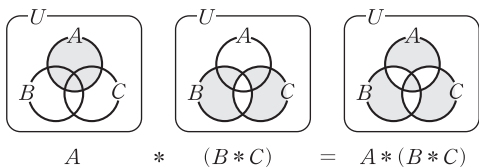
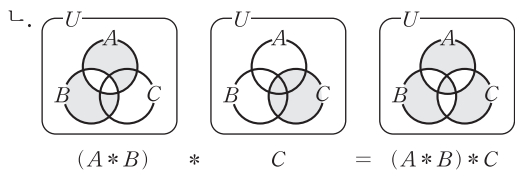
따라서 B 문제를 맞힌 학생 수는 30이다.

답 30

394

전략 벤다이어그램을 이용하여 연산 *에 대하여 결합법칙이 성립하는지 확인한다.

$$\begin{aligned} \neg, A^c * B^c &= (A^c - B^c) \cup (B^c - A^c) \\ &= (A^c \cap B) \cup (B^c \cap A) \\ &= (B - A) \cup (A - B) \\ &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= A * B \text{ (참)} \end{aligned}$$



$$\therefore (A * B) * C = A * (B * C) \text{ (참)}$$

ㄷ. ㄴ에 의하여

$$\begin{aligned} A * (A * B) &= (A * A) * B \\ &= \{(A - A) \cup (A - A)\} * B \\ &= \emptyset * B \\ &= (\emptyset - B) \cup (B - \emptyset) \\ &= \emptyset \cup B = B \text{ (참)} \end{aligned}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 항상 옳다. ▶ 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

395

▶ **전략** 분배법칙을 이용하여 집합 $A_3 \cap (A_4 \cup A_6)$ 을 간단히 한다.

$$\begin{aligned} A_3 \cap (A_4 \cup A_6) &= (A_3 \cap A_4) \cup (A_3 \cap A_6) \\ x \in (A_3 \cap A_4) \text{ 이면 } x-2 &\text{는 3과 4의 공배수, 즉 12의 배수이므로} \\ x &= 12k + 2 \text{ (단, } k \text{는 정수)} \end{aligned}$$

$$\text{즉 } x \in A_{12} \text{ 이므로 } A_3 \cap A_4 = A_{12}$$

$$\begin{aligned} x \in (A_3 \cap A_6) \text{ 이면 } x-2 &\text{는 3과 6의 공배수, 즉 6의 배수이므로} \\ x &= 6k + 2 \text{ (단, } k \text{는 정수)} \end{aligned}$$

$$\text{즉 } x \in A_6 \text{ 이므로 } A_3 \cap A_6 = A_6$$

$$\therefore (A_3 \cap A_4) \cup (A_3 \cap A_6) = A_{12} \cup A_6$$

이때 $x \in (A_{12} \cup A_6)$ 이면 $x-2$ 는 6의 배수이므로

$$x = 6k + 2 \text{ (단, } k \text{는 정수)}$$

$$\text{즉 } x \in A_6 \text{ 이므로 } A_{12} \cup A_6 = A_6$$

이때 $A_6 = \{2, 8, 14, 20, \dots, 50\}$ 이므로 구하는 원소의 개수는 9이다. ▶ 답 9

396

▶ **전략** 드모르간의 법칙을 이용한다.

$$A^c \cup B = (A \cap B^c)^c = (A - B)^c \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} n(A^c \cup B) &= n((A - B)^c) \\ &= n(U) - n(A - B) \quad \dots \text{㉠} \end{aligned}$$

이때 $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$,

$B = \{3, 6, 9, \dots, 48\}$ 이므로

$$A - B = \{1, 2, 5, 10\}$$

$$\therefore n(A - B) = 4$$

$n(U) = 50$ 이므로 ㉠에서

$$n(A^c \cup B) = 50 - 4 = 46$$

▶ 답 ④

▶ **다른 풀이** $n(A^c \cup B)$

$$= n(A^c) + n(B) - n(A^c \cap B)$$

$$= \{n(U) - n(A)\} + n(B) - n(B - A)$$

$$= 50 - n(A) + n(B) - \{n(B) - n(A \cap B)\}$$

$$= 50 - n(A) + n(A \cap B) \quad \dots \text{㉡}$$

이때 $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$,

$B = \{3, 6, 9, \dots, 48\}$ 이므로

$$A \cap B = \{3, 6, 15, 30\}$$

따라서 $n(A) = 8$, $n(A \cap B) = 4$ 이므로 ㉡에서

$$n(A^c \cup B) = 50 - 8 + 4 = 46$$

397

▶ **전략** 주어진 조건을 집합으로 나타낸 후 유한집합의 원소의 개수를 구하는 공식을 이용한다.

학생 전체의 집합을 U , 역사 체험을 신청한 학생의 집합을 A , 과학 체험을 신청한 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U) = 50, n(A) = 33, n(A - B) = 15,$$

$$n(A^c \cap B^c) = 8$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \text{에서}$$

$$15 = 33 - n(A \cap B)$$

$$\therefore n(A \cap B) = 18$$

$$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B)$$

에서

$$8 = 50 - n(A \cup B)$$

$$\therefore n(A \cup B) = 42$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서}$$

$$42 = 33 + n(B) - 18$$

$$\therefore n(B) = 27$$

따라서 과학 체험을 신청한 학생 수는 27이다. ▶ 답 27

398

▶ **전략** 집합 $X \cap Y$ 의 원소의 개수가 최대, 최소인 경우를 각각 생각해 본다.

$$\begin{aligned} n(X \cup Y) &= n(X) + n(Y) - n(X \cap Y) \text{에서} \\ n(X \cap Y) &= n(X) + n(Y) - n(X \cup Y) \\ &= 23 + 19 - n(X \cup Y) \\ &= 42 - n(X \cup Y) \end{aligned}$$

(i) $n(X \cap Y)$ 가 최대인 경우는 $n(X \cup Y)$ 가 최소일 때이므로 $Y \subset X$ 일 때이다.

$$\therefore M = n(Y) = 19$$

(ii) $n(X \cap Y)$ 가 최소인 경우는 $n(X \cup Y)$ 가 최대일 때이므로 $X \cup Y = U$ 일 때이다.

$$\therefore m = 42 - 36 = 6$$

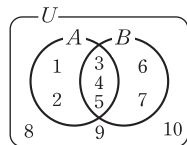
(i), (ii)에서 $M - m = 13$

답 13

399

전략 주어진 조건을 이용하여 집합 X 가 포함해야 하는 원소를 구한다.

전체집합 U 와 두 부분집합 A , B 를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$$(A - X) \subset A, (B - X) \subset B \text{이}$$

고 조건 ㉠에서 $A - X = B - X$

이므로 두 집합 $A - X, B - X$ 는 모두 $A \cap B$, 즉 $\{3, 4, 5\}$ 의 부분집합이다.

따라서 집합 X 는 1, 2, 6, 7을 반드시 원소로 가져야 한다. ㉠

한편 조건 ㉡에서 $(X - A) \cap (X - B) \neq \emptyset$ 이므로

$$(X \cap A^c) \cap (X \cap B^c) \neq \emptyset$$

$$X \cap (A^c \cap B^c) \neq \emptyset$$

$$X \cap (A \cup B)^c \neq \emptyset$$

$$\therefore X \cap \{8, 9, 10\} \neq \emptyset$$

따라서 집합 X 는 8, 9, 10 중 적어도 하나를 원소로 가져야 한다. ㉡

즉 집합 X 는 ㉠, ㉡을 만족시키고, 조건 ㉢에 의하여 원소의 개수가 6이어야 하므로 집합 X 의 모든 원소의 합이 최소가 되려면 8, 9, 10 중 가장 작은 수인 8과 3, 4, 5 중 가장 작은 수인 3을 원소로 가져야 한다.

따라서 $X = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$ 이어야 하므로 X 의 모든 원소의 합의 최솟값은

$$1 + 2 + 3 + 6 + 7 + 8 = 27$$

답 2

해설 Focus

㉠을 자세히 알아보자.

예를 들어 $1 \notin X$ 라 하면

$$1 \in (A - X)$$

이때 $1 \notin (A \cap B)$ 이므로

$$(A - X) \not\subset (A \cap B)$$

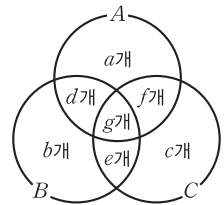
따라서 $(A - X) \subset (A \cap B)$ 이려면 $1 \in X$ 이어야 한다.

같은 방법으로 하면 집합 X 가 1, 2, 6, 7을 원소로 가져야 함을 알 수 있다.

400

전략 벤다이어그램을 그리고 각 영역에 속하는 원소의 개수를 나타내어 본다.

오른쪽 그림과 같이 벤다이어그램의 각 영역에 속하는 원소의 개수를 a, b, c, d, e, f, g 라 하면



$$n(A \cup B \cup C) = 75,$$

$$n(A \triangle B) = 45,$$

$$n(B \triangle C) = 47, n(C \triangle A) = 42 \text{이므로}$$

$$a + b + c + d + e + f + g = 75 \quad \text{..... ㉠}$$

$$a + f + b + e = 45 \quad \text{..... ㉡}$$

$$b + d + c + f = 47 \quad \text{..... ㉢}$$

$$a + d + c + e = 42 \quad \text{..... ㉣}$$

㉡+㉢+㉣을 하면

$$2(a + b + c + d + e + f) = 134$$

$$\therefore a + b + c + d + e + f = 67 \quad \text{..... ㉤}$$

㉠-㉤을 하면 $g = 8$

$$\therefore n(A \cap B \cap C) = 8$$

답 8

401

전략 주어진 조건을 집합으로 나타낸 후 합집합의 원소의 개수를 구하는 공식을 이용한다.

전체 학생의 집합을 U , 과학 탐구, 코딩, 영화 논평의 세 동아리에 가입한 학생의 집합을 각각 A, B, C 라 하면

$$n(U) = 50, n(A) = 23, n(B) = 28,$$

$$n(C) = 21, n(A \cap B \cap C) = 7,$$

$$n(A^c \cap B^c \cap C^c) = 4$$

이때

$$\begin{aligned} n(A^c \cap B^c \cap C^c) &= n((A \cup B \cup C)^c) \\ &= n(U) - n(A \cup B \cup C) \end{aligned}$$

에서 $4 = 50 - n(A \cup B \cup C)$

$$\therefore n(A \cup B \cup C) = 46$$

$$n(A \cup B \cup C)$$

$$= n(A) + n(B) + n(C)$$

$$- n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A)$$

$$+ n(A \cap B \cap C)$$

에서

$$46 = 23 + 28 + 21$$

$$- n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A)$$

$$+ 7$$

$$\therefore n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) = 33$$

따라서 세 동아리 중 두 동아리에만 가입한 학생 수는

$$n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)$$

$$- 3 \times n(A \cap B \cap C)$$

$$= 33 - 3 \times 7 = 12$$

답 12

참고 세 동아리 중 두 동아리에만 가입한 학생의 집합은 오른쪽 벤다이어그램의 색칠한 부분과 같으므로 두 동아리에만 가입한 학생 수는

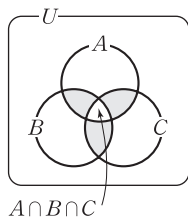
$$n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C)$$

$$+ n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)$$

$$+ n(C \cap A) - n(A \cap B \cap C)$$

$$= n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)$$

$$- 3 \times n(A \cap B \cap C)$$



402

전략 버스 또는 지하철을 모두 이용하지 않는 학생이 최대인 경우와 최소인 경우를 파악한다.

학급 전체 학생의 집합을 U , 버스를 이용하는 학생의 집합을 A , 지하철을 이용하는 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U) = 36, n(A) = 22, n(B) = 9,$$

$$n(A \cap B) \geq 5$$

버스와 지하철을 모두 이용하지 않는 학생의 집합은 $A^c \cap B^c$ 이므로

$$n(A^c \cap B^c)$$

$$= n((A \cup B)^c)$$

$$= n(U) - n(A \cup B)$$

$$= 36 - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\}$$

$$= 36 - \{22 + 9 - n(A \cap B)\}$$

$$= n(A \cap B) + 5$$

(i) $n(A^c \cap B^c)$ 가 최대인 경우는 $n(A \cap B)$ 가 최대일 때이므로 $B \subset A$ 일 때이다.

$$\therefore a = n(B) + 5 = 9 + 5 = 14$$

(ii) $n(A^c \cap B^c)$ 가 최소인 경우는 $n(A \cap B)$ 가 최소일 때이므로 $n(A \cap B) = 5$ 일 때이다.

$$\therefore b = 5 + 5 = 10$$

(i), (ii)에서 $a + b = 24$

답 24

다른 풀이 $(A \cap B) \subset A, (A \cap B) \subset B$ 이므로

$$n(A \cap B) \leq n(A), n(A \cap B) \leq n(B)$$

$$\therefore n(A \cap B) \leq 9$$

이때 $n(A \cap B) \geq 5$ 이므로

$$5 \leq n(A \cap B) \leq 9$$

$$\therefore 10 \leq n(A \cap B) + 5 \leq 14$$

즉 $10 \leq n(A^c \cap B^c) \leq 14$ 이므로

$$a = 14, b = 10$$

3 명제

II. 집합과 명제

01 명제와 조건

● 본책 166~171쪽

403

- ①, ② ‘아름답다’, ‘크다’는 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
 ③ x 의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
 ④ $7-x=2-x$ 에서 $7=2$ 이므로 거짓인 명제이다.
 ⑤ 맞꼭지각의 크기는 서로 같으므로 참인 명제이다.
 따라서 명제인 것은 ④, ⑤이다. **답** ④, ⑤

404

답 (1) $2+6 \leq 8$ (2) $\emptyset \subset \{a, b, c, d\}$

405

- (2) $x^2-5x-6=0$ 에서 $(x+1)(x-6)=0$
 $\therefore x=-1$ 또는 $x=6$
 그런데 $-1 \notin U$ 이므로 조건 q 의 진리집합은 $\{6\}$
답 (1) $\{1, 2, 4, 8\}$ (2) $\{6\}$

406

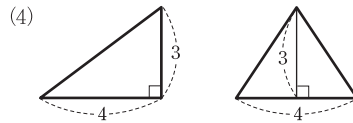
- 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.
 (1) $4x-8=0$ 에서 $x=2$
 따라서 조건 p 의 진리집합은 $P=\{2\}$
 (2) 조건 $\sim p$ 의 진리집합은 P^c 이므로
 $P^c=\{1, 3, 4, 5\}$
 (3) $x^2+1 < 10$ 에서 $x^2-9 < 0$
 $(x+3)(x-3) < 0 \therefore -3 < x < 3$
 따라서 조건 q 의 진리집합은 $Q=\{1, 2\}$
 (4) 조건 $\sim q$ 의 진리집합은 Q^c 이므로
 $Q^c=\{3, 4, 5\}$
답 (1) $\{2\}$ (2) $\{1, 3, 4, 5\}$ (3) $\{1, 2\}$ (4) $\{3, 4, 5\}$

407

- 답** (1) $x=-7$ 또는 $x=5$
 (2) $x \leq -4$ 또는 $x \geq 6$
 (3) $-2 < x \leq 3$

408

- (1) $\sqrt{4}=2$ 는 유리수이므로 참인 명제이다.
 (2) x 의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
 (3) 직각삼각형은 한 내각의 크기가 90° 이고 나머지 두 내각의 크기는 90° 보다 작으므로 참인 명제이다.



위의 그림의 두 삼각형의 넓이는 6으로 같지만 합동은 아니므로 거짓인 명제이다.

답 (1) 참인 명제, (3) 참인 명제, (4) 거짓인 명제

409

$\square$, 6과 8의 최소공배수는 24이다.
 이상에서 참인 명제는 $\neg, \perp, \vdash$ 이다.

답 $\neg, \perp, \vdash$

410

- ①, ③, ④, ⑤ 주어진 명제가 참이므로 그 부정은 거짓이다.
 ② 주어진 명제가 거짓이므로 그 부정은 참이다.

답 ②

411

- 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $P=\{2, 4, 6\}$
 $x^2-5x+6=0$ 에서
 $(x-2)(x-3)=0$
 $\therefore x=2$ 또는 $x=3$
 $\therefore Q=\{2, 3\}$
 (1) 조건 $\sim q$ 의 진리집합은 Q^c 이므로
 $Q^c=\{1, 4, 5, 6\}$
 (2) 조건 ' p 또는 q '의 진리집합은 $P \cup Q$ 이므로
 $P \cup Q=\{2, 3, 4, 6\}$
 (3) 조건 ' $\sim p$ 그리고 q '의 진리집합은 $P^c \cap Q$ 이므로
 $P^c \cap Q=Q-P=\{3\}$
답 (1) $\{1, 4, 5, 6\}$ (2) $\{2, 3, 4, 6\}$ (3) $\{3\}$

412

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\},$$

$$Q = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$$

조건 $\sim q$ 의 진리집합은 Q^c 이므로

$$Q^c = \{0, -1, -2, \dots\}$$

이때 조건 ' p 그리고 $\sim q$ '의 진리집합은 $P \cap Q^c$ 이므로

$$P \cap Q^c = \{-3, -2, -1, 0\}$$

따라서 구하는 원소의 개수는 4이다. 답 4

413

$-2 \leq x < 3$ 에서

$$x \geq -2 \text{ 그리고 } x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$P = \{x | x \geq 3\} \text{이므로} \quad P^c = \{x | x < 3\}$$

$$Q = \{x | x < -2\} \text{이므로} \quad Q^c = \{x | x \geq -2\}$$

따라서 $\textcircled{1}$ 의 진리집합은

$$Q^c \cap P^c = (P \cup Q)^c \quad \text{답 5}$$

02 명제 $p \rightarrow q$

● 본책 172~175쪽

414

(1) $p: x^2=9, q: x^3=27$ 이라 하고, 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{-3, 3\}, Q = \{3\}$$

따라서 $P \not\subset Q$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

(2) $(x-1)(y-3)=0$ 이면

$$x-1=0 \text{ 또는 } y-3=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } y=3$$

따라서 주어진 명제는 참이다.

답 (1) 거짓 (2) 참

415

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{4, 8, 12, 16, 20\}, Q = \{1, 2, 4, 8, 16\}$$

명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 원소는 P 에는 속하고 Q 에는 속하지 않아야 하므로 $P \cap Q^c$ 의 원소이다.

이때 $P \cap Q^c = P - Q = \{12, 20\}$ 이므로 구하는 모든 원소의 합은

$$12 + 20 = 32 \quad \text{답 32}$$

416

명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이므로

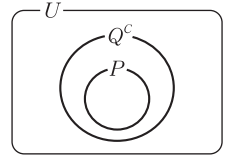
$$P \subset Q^c$$

이것을 벤다이어그램으로 나타

내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$Q \subset P^c$$

따라서 항상 옳은 것은 ③이다. 답 ③



417

$P \cap Q = \emptyset$ 을 만족시키는 두

집합 P, Q 를 벤다이어그램으로

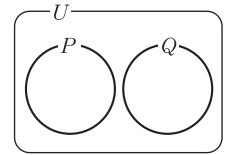
나타내면 오른쪽 그림과

같다.

이때 $P \subset Q^c$ 이고 $Q \subset P^c$ 이므

로 명제 $p \rightarrow \sim q$ 와 $q \rightarrow \sim p$ 는 항상 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ㉠, ㉡이다. 답 ㉠, ㉡



418

$$P \cup Q = P \text{에서} \quad Q \subset P$$

$$Q \cap R = R \text{에서} \quad R \subset Q$$

$$\therefore R \subset Q \subset P, P^c \subset Q^c \subset R^c$$

① $R \subset Q$ 이므로 명제 $r \rightarrow q$ 는 참이다.

② $Q^c \subset R^c$ 이므로 명제 $\sim q \rightarrow \sim r$ 는 참이다.

③ $P^c \subset Q^c$ 이므로 명제 $\sim p \rightarrow \sim q$ 는 참이다.

④ $Q \subset P$ 이므로 명제 $q \rightarrow p$ 는 참이다.

따라서 항상 참이라고 할 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

419

주어진 명제가 참이 되려면

$$\{x | -1 < x < 4\} \subset \{x | x \leq k-2\}$$

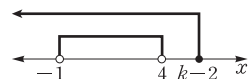
이어야 하므로 오른쪽 그

림에서

$$k-2 \geq 4$$

$$\therefore k \geq 6$$

답 $k \geq 6$



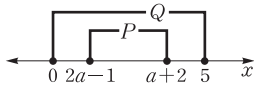
420

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x | 2a-1 \leq x \leq a+2\},$$

$$Q = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$$

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 $P \subset Q$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$$2a-1 \geq 0, a+2 \leq 5$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq a \leq 3$$

따라서 정수 a 는 1, 2, 3의 3개이다.

답 3

421

$\sim p$: $|x-1| < a$ 에서 $-a+1 < x < a+1$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

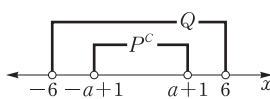
$$P^c = \{x \mid -a+1 < x < a+1\},$$

$$Q = \{x \mid -6 < x < 6\}$$

명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참이

되려면 $P^c \subset Q$ 이어야

하므로 오른쪽 그림에서



$$-a+1 \geq -6, a+1 \leq 6$$

$$\therefore a \leq 5$$

따라서 양수 a 의 최댓값은 5이다.

답 5

03 '모든'이나 '어떤'을 포함한 명제

● 본책 176~177쪽

422

① $x=6$ 이면 $x-2=4$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

② $x=-\sqrt{2}$ 이면 $\sqrt{2}+x=0$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

③ 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 \geq 0$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

④ [반례] $x=0, y=0$ 이면 $x^2+y^2=0$ 이다.

⑤ 모든 자연수 x, y 에 대하여 $x \geq 1, y \geq 1$ 이므로 $x+y \geq 2$ 이다.

따라서 거짓인 명제는 ④이다.

답 ④

423

(1) 주어진 명제의 부정은

모든 실수 x 에 대하여 $x^2 > 0$ 이다.

$x=0$ 이면 $x^2=0$ 이므로 주어진 명제의 부정은 거짓이다.

(2) 주어진 명제의 부정은

어떤 실수 x 에 대하여 $x^2-x+4 \leq 0$ 이다.

이때 모든 실수 x 에 대하여

$$x^2-x+4 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$$

이므로 주어진 명제의 부정은 거짓이다.

답 풀이 참조

II-3

연
계

연습 문제

● 본책 178~179쪽

424

전략 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면 ' p 또는 $\sim q$ '의 진리집합은 $P \cup Q^c$ 임을 이용한다.

$$|x| \leq 4 \text{에서} \quad -4 \leq x \leq 4$$

$$\therefore U = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$x^2-4x=0 \text{에서} \quad x(x-4)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면

$$P = \{0, 4\}$$

$$x^2-2x-3 \leq 0 \text{에서} \quad (x+1)(x-3) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 3$$

따라서 조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면

$$Q = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

이때 조건 ' p 또는 $\sim q$ '의 진리집합은 $P \cup Q^c$ 이고

$$Q^c = \{-4, -3, -2, 4\} \text{이므로}$$

$$P \cup Q^c = \{-4, -3, -2, 0, 4\}$$

따라서 구하는 원소의 개수는 5이다.

답 5

425

전략 주어진 명제의 반례를 찾아 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. p : x 는 8의 양의 배수, q : x 는 4의 양의 배수라 하고, 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{8, 16, 24, \dots\}, Q = \{4, 8, 12, \dots\}$$

따라서 $P \subset Q$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄴ. [반례] $x=1, y=0$ 이면 $xy=0$ 이지만 $x^2+y^2=1$ 이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

ㄷ. $x > 0, y > 0$ 이면 $xy > 0$ 이므로 $|xy| = xy$

따라서 주어진 명제는 참이다.

ㄹ. [반례] $\angle A = 40^\circ, \angle B = \angle C = 70^\circ$ 이면 삼각형 ABC가 이등변삼각형이지만 $\angle A \neq \angle B$ 이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

이상에서 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답 ㄱ, ㄷ**

426

전략 p 는 만족시키지만 $\sim q$ 는 만족시키지 않는 원소가 속하는 집합을 찾는다.

명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 거짓임을 보이는 원소는 P 에는 속하고 Q^c 에는 속하지 않아야 하므로 구하는 집합은

$$P \cap (Q^c)^c = P \cap Q \quad \text{답 ①}$$

427

전략 세 조건 p, q, r 의 진리집합 사이의 포함 관계를 이용한다.

$$4x - 1 = 27 \text{에서} \quad 4x = 28 \quad \therefore x = 7$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \text{에서} \quad (x+1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면

$$P = \{x \mid x < 2a - 5\}, Q = \{7\}, R = \{-1, 4\}$$

명제 $q \rightarrow \sim p, r \rightarrow p$ 가 모두 참이므로

$$Q \subset P^c, R \subset P$$

즉 $7 \in P^c, -1 \in P, 4 \in P$ 이므로

$$7 \geq 2a - 5, -1 < 2a - 5, 4 < 2a - 5$$

$$a \leq 6, a > 2, a > \frac{9}{2}$$

$$\therefore \frac{9}{2} < a \leq 6$$

따라서 정수 a 는 5, 6의 2개이다. **답 2**

428

전략 (실수) $^2 \geq 0$ 임을 이용한다.

x, y, z 는 모두 실수이므로

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0 \text{에서}$$

$$x-y=0, y-z=0, z-x=0$$

$$\therefore x=y=z$$

즉 ' $x=y$ 이고 $y=z$ 이고 $z=x$ '이므로 구하는 부정은

$$x \neq y \text{ 또는 } y \neq z \text{ 또는 } z \neq x$$

따라서 x, y, z 중 적어도 두 수는 서로 다르다.

답 ⑤

참고 ① $(x-y)(y-z)(z-x) = 0$ 이면

$$x=y \text{ 또는 } y=z \text{ 또는 } z=x$$

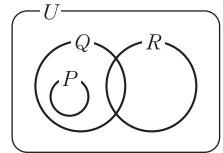
② $(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$ 이면

$$x \neq y \text{이고 } y \neq z \text{이고 } z \neq x$$

429

전략 주어진 집합 사이의 포함 관계를 만족시키는 세 집합을 벤 다이어그램으로 나타낸다.

$P \subset (Q-R)$ 를 만족시키는 세 집합 P, Q, R 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 $P \subset R^c$ 이므로 명제

$p \rightarrow \sim r$ 가 참이다.

또 $R \subset P^c$ 이므로 명제 $r \rightarrow \sim p$ 가 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ①, ④이다. **답 ①, ④**

430

전략 $\sim p \rightarrow q$ 가 참이면 $P^c \subset Q$ 임을 이용한다.

명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P^c \subset Q$

이때 $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ 에서

$$P^c = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$$

따라서 집합 Q 는 P^c 의 모든 원소를 반드시 원소로 가져야 하므로 집합 Q 의 개수는

$$2^{13-7} = 2^6 = 64$$

답 64

431

전략 주어진 조건이 참인 명제가 되려면 $2 \leq x \leq 5$ 에서

$x^2 - 8x + n$ 의 최댓값이 0 이상이어야 함을 이용한다.

$f(x) = x^2 - 8x + n$ 이라 하면

$$f(x) = (x-4)^2 + n - 16$$

$2 \leq x \leq 5$ 인 어떤 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이라면

이 범위에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 0 이상이어야 한다.

이때

$$f(2) = n - 12, f(4) = n - 16, f(5) = n - 15$$

$$\text{이므로} \quad n - 12 \geq 0$$

$$\therefore n \geq 12$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 12이다. **답 ①**

개념 노트

$\alpha \leq x \leq \beta$ 에서 이차함수 $f(x) = a(x-p)^2 + q$ 의 최댓값과 최솟값은

① $a < p < \beta$ 일 때

$f(\alpha), f(p), f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

② $p \leq \alpha$ 또는 $p \geq \beta$ 일 때

$f(\alpha), f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

432

전략 ‘어떤 x 에 대하여 p 이다.’의 부정은 ‘모든 x 에 대하여 $\sim p$ 이다.’임을 이용한다.

주어진 명제의 부정은

모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 2kx + k + 6 \geq 0$ 이다.

즉 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식

$x^2 - 2kx + k + 6 \geq 0$ 이 성립해야 하므로 이차방정식

$x^2 - 2kx + k + 6 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - (k+6) \leq 0$$

$$k^2 - k - 6 \leq 0, \quad (k+2)(k-3) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq k \leq 3$$

따라서 주어진 명제의 부정이 참이 되도록 하는 정수 k 는 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ 의 6개이다. **답 6**

433

전략 (7), (4)를 이용하여 세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 파악한다.

(7)에서 $P \not\subset Q$

(4)에서 $Q \cap R = \emptyset$

ㄱ. 명제 $q \rightarrow p$ 가 참이라면 $Q \subset P$

그런데 두 집합 P, Q 사이의 포함 관계는 알 수 없으므로 항상 참이라 할 수 없다.

ㄴ. 명제 $r \rightarrow \sim q$ 가 참이라면 $R \subset Q^c$

이때 $Q \cap R = \emptyset$ 에서 $R \subset Q^c$ 이므로 $r \rightarrow \sim q$ 는 항상 참이다.

ㄷ. 명제 $\sim q \rightarrow p$ 가 참이라면 $Q^c \subset P$

그런데 두 집합 P, Q^c 사이의 포함 관계는 알 수 없으므로 항상 참이라 할 수 없다.

이상에서 항상 참인 명제는 ㄴ뿐이다. **답 ㄴ**

04 명제의 역과 대우

• 본책 180~183쪽

434

① 역: $x=0$ 또는 $x=1$ 이면 $x^3=x$ 이다. (참)

대우: $x \neq 0$ 이고 $x \neq 1$ 이면 $x^3 \neq x$ 이다. (거짓)

[반례] $x = -1$ 이면 $x \neq 0$ 이고 $x \neq 1$ 이지만

$$x^3 = (-1)^3 = -1 = x \text{이다.}$$

② 역: $x > 1$ 이고 $y > 1$ 이면 $xy > 1$ 이다. (참)

대우: $x \leq 1$ 또는 $y \leq 1$ 이면 $xy \leq 1$ 이다. (거짓)

[반례] $x = -2, y = -1$ 이면 $x \leq 1$ 또는 $y \leq 1$ 이지만 $xy = 2 > 1$ 이다.

③ 역: $x=0$ 이고 $y=0$ 이면 $|x| + |y| = 0$ 이다. (참)

대우: $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이면 $|x| + |y| \neq 0$ 이다.

(참)

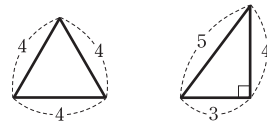
④ 역: $x^2 + y^2 > 0$ 이면 $xy < 0$ 이다. (거짓)

[반례] $x = 1, y = 1$ 이면 $x^2 + y^2 > 0$ 이지만 $xy > 0$ 이다.

대우: $x^2 + y^2 \leq 0$ 이면 $xy \geq 0$ 이다. (참)

⑤ 역: 두 삼각형의 둘레의 길이가 같으면 두 삼각형은 합동이다. (거짓)

[반례] 다음 그림의 두 삼각형은 둘레의 길이는 12로 같지만 합동은 아니다.



대우: 두 삼각형의 둘레의 길이가 같지 않으면 두 삼각형은 합동이 아니다. (참)

따라서 역과 대우가 모두 참인 명제는 ③이다. **답 ③**

435

ㄱ. 역: xy 가 홀수이면 x 또는 y 는 홀수이다. (참)

ㄴ. 역: $x+y$ 가 짝수이면 x, y 는 짝수이다. (거짓)

[반례] $x = 3, y = 1$ 이면 $x+y$ 가 짝수이지만 x, y 는 홀수이다.

ㄷ. 역: $x^2 - 4x + 3 = 0$ 이면 $x - 3 = 0$ 이다. (거짓)

[반례] $x = 1$ 이면 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 이지만 $x - 3 \neq 0$ 이다.

이상에서 역이 거짓인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

436

주어진 명제가 참이므로 그 대우

‘ $x-1=0$ 이면 $x^2-ax+7=0$ 이다.’

도 참이다.

$x^2-ax+7=0$ 에 $x-1=0$, 즉 $x=1$ 을 대입하면

$$1-a+7=0 \quad \therefore a=8 \quad \text{답 8}$$

437

① 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

② 명제 $s \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 그 대우 $q \rightarrow \sim s$ 도 참이다.

따라서 두 명제 $p \rightarrow q$, $q \rightarrow \sim s$ 가 참이므로 명제 $p \rightarrow \sim s$ 가 참이다.

④ 명제 $\sim q \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 그 대우 $r \rightarrow q$ 도 참이다.

따라서 두 명제 $r \rightarrow q$, $q \rightarrow \sim s$ 가 참이므로 명제 $r \rightarrow \sim s$ 가 참이다.

⑤ 명제 $p \rightarrow \sim s$ 가 참이므로 그 대우 $s \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

따라서 항상 참이라고 할 수 없는 것은 ③이다.

답 ③

05 충분조건과 필요조건

• 본책 184~187쪽

438

ㄱ. $p: |x| < 1$ 에서 $-1 < x < 1$

따라서 $p \Rightarrow q$, $q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $|x| = |y| \Leftrightarrow |x|^2 = |y|^2 \Leftrightarrow x^2 = y^2$

즉 $p \Leftrightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. $p: (x-y)(y-z)=0$ 에서 $x=y$ 또는 $y=z$

따라서 $p \not\Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

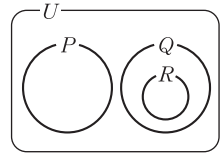
이상에서 필요충분조건인 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

439

$P \cap Q = \emptyset$ 이고 $Q \cup R = Q$

에서 $R \subset Q$ 이므로 세 집합

P , Q , R 를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



(1) $Q \subset P^C$ 이므로 $q \Rightarrow \sim p$

따라서 q 는 $\sim p$ 이기 위한 **충분** 조건이다.

(2) $R \subset Q$ 에서 $Q^C \subset R^C$ 이므로 $\sim q \Rightarrow \sim r$

따라서 $\sim r$ 는 $\sim q$ 이기 위한 **필요** 조건이다.

(3) $P \subset R^C$ 이므로 $p \Rightarrow \sim r$

따라서 p 는 $\sim r$ 이기 위한 **충분** 조건이다.

답 (1) 충분 (2) 필요 (3) 충분

440

p 는 $\sim r$ 이기 위한 필요조건이므로 $\sim r \Rightarrow p$

$$\therefore R^C \subset P \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

r 는 q 이기 위한 충분조건이므로 $r \Rightarrow q$

$$\text{즉 } R \subset Q \text{이므로 } Q^C \subset R^C \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡에서 $Q^C \subset R^C \subset P$

ㄱ. $R \subset Q$ (참)

ㄴ. $R^C \subset P$ 이므로 $P \cup R^C = P$ (참)

ㄷ. $Q^C \subset P$ 이므로

$$P - Q = P \cap Q^C = Q^C \text{ (참)}$$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 항상 옳다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

441

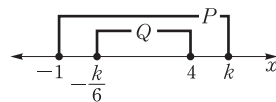
두 조건 p , q 의 진리집합을 각각 P , Q 라 하면

$$P = \{x \mid -1 \leq x \leq k\}, \quad Q = \left\{x \mid -\frac{k}{6} \leq x \leq 4\right\}$$

p 가 q 이기 위한 필요조건이므로

$$q \Rightarrow p, \text{ 즉 } Q \subset P$$

이를 만족시키도록 두 집합 P , Q 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 $-\frac{k}{6} \geq -1$, $k \geq 4$ 이므로

$$4 \leq k \leq 6$$

답 $4 \leq k \leq 6$

442

$(x+3)(x-4)^2=0$ 에서

$x=-3$ 또는 $x=4$ (증근)

p 가 q 이기 위한 필요충분조건이라면 이차방정식

$x^2-x+a=0$ 의 해가 $x=-3$ 또는 $x=4$ 이어야 하므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a=-3 \times 4 = -12$$

답 -12

443

세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면

$$P = \{x \mid -2 < x < 1 \text{ 또는 } x > 3\},$$

$$Q = \{x \mid x > a\}, R = \{x \mid x > b\}$$

q 는 p 이기 위한 필요조건이므로

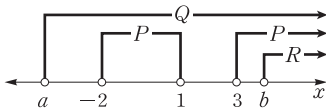
$$p \Rightarrow q, \text{ 즉 } P \subset Q$$

r 는 p 이기 위한 충분조건이므로

$$r \Rightarrow p, \text{ 즉 } R \subset P$$

$$\therefore R \subset P \subset Q$$

이를 만족시키도록 세 집합 P, Q, R 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\therefore a \leq -2, b \geq 3$$

따라서 a 의 최댓값은 -2 , b 의 최솟값은 3 이므로 구하는 곱은

$$-2 \times 3 = -6$$

답 -6

연습 문제

• 본책 188~190쪽

444

전략 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참임을 이용한다.

주어진 명제가 참이 되려면 그 대우

$$'x=k \text{이면 } x^2 \leq 100 \text{이다.}'$$

가 참이어야 한다.

$$\text{즉 } k^2 \leq 100 \text{이므로 } -10 \leq k \leq 10$$

따라서 정수 k 는 $-10, -9, -8, \dots, 10$ 의 21개이다.

답 21

445

전략 명제가 참이면 그 대우도 참임과 삼단논법을 이용한다.

① 명제 $\sim s \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 그 대우 $q \rightarrow s$ 도 참이다.

② 두 명제 $p \rightarrow q, q \rightarrow s$ 가 참이므로 명제 $p \rightarrow s$ 가 참이다.

③ 두 명제 $q \rightarrow s, s \rightarrow r$ 가 참이므로 명제 $q \rightarrow r$ 가 참이다.

⑤ 두 명제 $p \rightarrow q, q \rightarrow r$ 가 참이므로 명제 $p \rightarrow r$ 가 참이다.

따라서 그 대우 $\sim r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

이상에서 항상 참이라고 할 수 없는 것은 ④이다.

답 ④

446

전략 명제 $p \rightarrow q$ 는 거짓이고, 명제 $q \rightarrow p$ 는 참인 것을 찾는다.

① $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

[$q \rightarrow p$ 의 반례] x 가 9이면 18의 양의 약수이지만 6의 양의 약수는 아니다.

② $p \not\Rightarrow q, q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

[$p \rightarrow q$ 의 반례] $x=-1, y=-2$ 이면 $xy > 1$ 이지만 $x < 1, y < 1$ 이다.

③ $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

[$q \rightarrow p$ 의 반례] $x=\sqrt{2}, y=\sqrt{2}$ 이면 $xy=2$ 는 유리수이지만 x, y 는 유리수가 아니다.

④ $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

[$q \rightarrow p$ 의 반례] $\square ABCD$ 가 등변사다리꼴이면 두 대각선의 길이는 같지만 직사각형이 아니다.

⑤ $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것은 ②이다.

답 ②

447

전략 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이면 $p \Rightarrow r$ 임을 이용한다.

p 는 $\sim r$ 이기 위한 충분조건이므로

$$p \Rightarrow \sim r$$

r 는 q 이기 위한 필요조건이므로

$$q \Rightarrow r \quad \therefore \sim r \Rightarrow \sim q$$

따라서 $p \Rightarrow \sim r, \sim r \Rightarrow \sim q$ 이므로

$$p \Rightarrow \sim q \quad \text{답 ③}$$

448

전략 각 조건의 진리집합 사이의 포함 관계를 이용한다.

① $P \not\subset R, R \not\subset P$ 이므로 p 는 r 이기 위한 아무 조건도 아니다.

② $Q \subset P$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

③ $Q \subset R^C$ 이므로 q 는 $\sim r$ 이기 위한 충분조건이다.

④ $R \subset Q^C$ 이므로 r 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

⑤ $P^C \subset Q^C$ 이므로 $\sim q$ 는 $\sim p$ 이기 위한 필요조건이다.
따라서 옳은 것은 ⑤이다. **답 ⑤**

449

전략 $q \Rightarrow p$ 일 때 두 조건 p, q 의 진리집합 사이의 포함 관계를 이용한다.

$$x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \text{에서}$$

$$x^2(x-4) - (x-4) = 0$$

$$(x^2-1)(x-4) = 0$$

$$(x+1)(x-1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면

$$P = \{-1, 1, 4\}$$

$$2x + a = 0 \text{에서 } x = -\frac{a}{2}$$

따라서 조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면

$$Q = \left\{ -\frac{a}{2} \right\}$$

p 가 q 이기 위한 필요조건이 되려면 $q \Rightarrow p$, 즉

$Q \subset P$ 이어야 하므로

$$-\frac{a}{2} = -1 \text{ 또는 } -\frac{a}{2} = 1 \text{ 또는 } -\frac{a}{2} = 4$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = -2 \text{ 또는 } a = -8$$

따라서 구하는 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$2 \times (-2) \times (-8) = 32 \quad \text{답 32}$$

450

전략 $p \Rightarrow \sim q$ 일 때 두 조건 $p, \sim q$ 의 진리집합 사이의 포함 관계를 이용한다.

$$x^2 - 4x - 12 = 0 \text{에서 } (x+2)(x-6) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 6$$

따라서 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면

$$P = \{-2, 6\}$$

$$q: |x-3| > k \text{에서 } \sim q: |x-3| \leq k$$

조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면

$$Q^C = \{x \mid |x-3| \leq k\}$$

이때 p 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이 되려면

$$p \Rightarrow \sim q, \text{ 즉 } P \subset Q^C$$

즉 $-2 \in Q^C, 6 \in Q^C$ 이어야 하므로

$$|-2-3| \leq k, |6-3| \leq k$$

$$\therefore k \geq 5$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 5이다. **답 ③**

451

전략 명제 $p \rightarrow \sim q$ 의 역이 참이 되도록 두 조건 $p, \sim q$ 의 진리집합을 수직선 위에 나타낸다.

$$|x+2| \geq k \text{에서 } x+2 \leq -k \text{ 또는 } x+2 \geq k$$

$$\therefore x \leq -k-2 \text{ 또는 } x \geq k-2$$

따라서 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면

$$P = \{x \mid x \leq -k-2 \text{ 또는 } x \geq k-2\}$$

$$|x+3| < 4 \text{에서 } -4 < x+3 < 4$$

$$\therefore -7 < x < 1$$

따라서 조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면

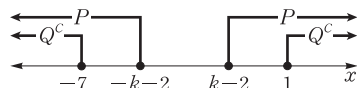
$$Q = \{x \mid -7 < x < 1\} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

명제 $p \rightarrow \sim q$ 의 역, 즉 $\sim q \rightarrow p$ 가 참이 되려면

$Q^C \subset P$ 이어야 한다.

이때 ①에서 $Q^C = \{x \mid x \leq -7 \text{ 또는 } x \geq 1\}$

따라서 $Q^C \subset P$ 를 만족시키도록 두 집합 P, Q^C 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉 $-k-2 \geq -7, k-2 \leq 1$ 이므로

$$0 < k \leq 3 \quad (\because k > 0)$$

따라서 양수 k 의 최댓값은 3이다. **답 3**

452

전략 두 명제 $p \rightarrow q, q \rightarrow r$ 가 참이면 명제 $p \rightarrow r$ 가 참임을 이용한다.

명제 $q \rightarrow \sim p$ 가 참이므로 그 대우 $p \rightarrow \sim q$ 도 참이다.

또 명제 $\sim r \rightarrow s$ 가 참이므로 그 대우 $\sim s \rightarrow r$ 도 참이다.

즉 두 명제 $p \rightarrow \sim q, \sim s \rightarrow r$ 가 참이므로 명제 $p \rightarrow r$ 가 참이 되려면 명제 $\sim q \rightarrow \sim s$ 또는 그 대우 $s \rightarrow q$ 가 참이어야 한다.

따라서 명제 $p \rightarrow r$ 가 참임을 보이기 위해 필요한 참인 명제는 ④이다. **답 ④**

453

전략 $p \Rightarrow q$ 이고 $q \Rightarrow p$ 이면 $p \Leftrightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$

q 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow q$

r 는 s 이기 위한 충분조건이므로 $r \Rightarrow s$

$\sim r$ 는 $\sim t$ 이기 위한 충분조건이므로

$$\sim r \Rightarrow \sim t \quad \therefore t \Rightarrow r$$

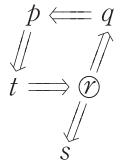
t 는 p 이기 위한 필요조건이므로

$$p \Rightarrow t$$

따라서 $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r \Leftrightarrow t$ 이므로

r 이기 위한 필요충분조건인 것은

p, q, t 의 3개이다. **답 3**



454

전략 $r \Rightarrow p, q \Rightarrow r$ 가 되도록 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 수직선 위에 나타낸다.

$$|x| > a \text{에서 } x < -a \text{ 또는 } x > a$$

세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면

$$P = \{x | x < -a \text{ 또는 } x > a\}, Q = \{x | x > b\},$$

$$R = \{x | -5 < x < -2 \text{ 또는 } x > 5\}$$

p 는 r 이기 위한 필요조건이므로

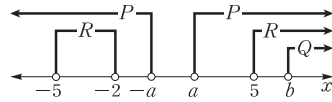
$$r \Rightarrow p, \text{ 즉 } R \subset P$$

q 는 r 이기 위한 충분조건이므로

$$q \Rightarrow r, \text{ 즉 } Q \subset R$$

$$\therefore Q \subset R \subset P$$

이를 만족시키도록 세 집합 P, Q, R 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉 $-a \geq -2, a \leq 5, b \geq 5$ 이므로

$$0 < a \leq 2, b \geq 5 (\because a > 0)$$

따라서 a 의 최댓값은 2, b 의 최솟값은 5이므로 구하는 합은

$$2 + 5 = 7$$

답 7

455

전략 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참임을 이용한다.

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

$$\sim q: x^2 - x - 6 > 0 \text{에서 } (x+2)(x-3) > 0$$

$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 3$$

$$\sim p: (x^2 - kx + k)(x^2 - x - 6) > 0$$

따라서 명제 $\sim q \rightarrow \sim p$ 가 참이 되려면 $x < -2$ 또는 $x > 3$ 에서 $x^2 - kx + k > 0$ 이어야 한다.

$f(x) = x^2 - kx + k$ 라 하고, 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-k)^2 - 4k = k^2 - 4k$$

(i) $D < 0$, 즉 $0 < k < 4$ 일 때

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이므로 명제

$\sim q \rightarrow \sim p$ 가 참이다.

(ii) $D = 0$, 즉 $k = 0$ 또는 $k = 4$ 일 때

$$f(x) = x^2 \text{ 또는 } f(x) = (x-2)^2 \text{이므로}$$

$$x < -2 \text{ 또는 } x > 3 \text{에서}$$

$$f(x) > 0$$

따라서 명제 $\sim q \rightarrow \sim p$ 가 참이다.

(iii) $D > 0$, 즉 $k < 0$ 또는 $k > 4$ 일 때

$$x < -2 \text{ 또는 } x > 3 \text{에서}$$

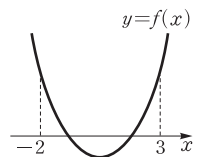
$f(x) > 0$ 이라면 함수

$y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽

그림과 같아야 한다.

③ $f(-2) \geq 0$ 에서

$$4 + 2k + k \geq 0 \quad \therefore k \geq -\frac{4}{3}$$



⑥ $f(3) \geq 0$ 에서

$$9 - 3k + k \geq 0 \quad \therefore k \leq \frac{9}{2}$$

⑦ 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이

$$x = \frac{k}{2} \text{이므로}$$

$$-2 < \frac{k}{2} < 3 \quad \therefore -4 < k < 6$$

$$\text{이상에서} \quad -\frac{4}{3} \leq k \leq \frac{9}{2}$$

그런데 $k < 0$ 또는 $k > 4$ 이므로

$$-\frac{4}{3} \leq k < 0 \text{ 또는 } 4 < k \leq \frac{9}{2}$$

$$\text{이상에서} \quad -\frac{4}{3} \leq k \leq \frac{9}{2}$$

$$\text{따라서 } M = \frac{9}{2}, m = -\frac{4}{3} \text{이므로}$$

$$12Mm = -72$$

답 -72

456

전략 삼단논법을 이용한다.

네 조건 p, q, r, s 를

p : 판매량이 증가한다.

q : 인지도가 높아진다.

r : 가격이 상승한다.

s : 수입이 증가한다.

라 하면 (㉠), (㉡)에서 명제 $\sim p \rightarrow \sim q, r \rightarrow s$ 가 모두 참이다.

또한 명제 $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 그 대우 $q \rightarrow p$ 도 참이다.

따라서 명제 $q \rightarrow s$ 가 참이 되는 경우는 다음과 같이 세 가지 경우가 있다.

(i) 명제 $p \rightarrow s$ 또는 그 대우인 $\sim s \rightarrow \sim p$ 가 참인 경우

(ii) 명제 $q \rightarrow r$ 또는 그 대우인 명제 $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 참인 경우

(iii) 명제 $p \rightarrow r$ 또는 그 대우인 명제 $\sim r \rightarrow \sim p$ 가 참인 경우

$$\textcircled{1} p \rightarrow q \quad \textcircled{2} \sim p \rightarrow \sim r \quad \textcircled{3} q \rightarrow r$$

$$\textcircled{4} r \rightarrow q \quad \textcircled{5} \sim r \rightarrow \sim p$$

따라서 필요한 명제로 가능한 것은 ㉢, ㉤이다.

답 ㉢, ㉤

457

전략 $p \Rightarrow q$ 이면 $P \subset Q$, $p \Rightarrow r$ 이면 $P \subset R$ 임을 이용한다.

p 는 q 이기 위한 충분조건이므로

$$p \Rightarrow q, \text{ 즉 } P \subset Q$$

$$\therefore a^2 = 4 \text{ 또는 } b = 4$$

또 r 는 p 이기 위한 필요조건이므로

$$p \Rightarrow r, \text{ 즉 } P \subset R$$

$$\therefore 4 \in R \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $a^2 = 4$ 일 때

$$a = 2 \text{이면 } R = \{1, 2b\} \text{이므로 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$2b = 4 \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore a + b = 4$$

$$a = -2 \text{이면 } R = \{-3, -2b\} \text{이므로 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$-2b = 4 \quad \therefore b = -2$$

$$\therefore a + b = -4$$

(ii) $b = 4$ 일 때

$$R = \{a - 1, 4a\} \text{이므로 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$a - 1 = 4 \text{ 또는 } 4a = 4$$

$$\therefore a = 5 \text{ 또는 } a = 1$$

$$\therefore a + b = 9 \text{ 또는 } a + b = 5$$

(i), (ii)에서 $a + b$ 의 최댓값은 9이다.

답 9

458

전략 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + mx + n \geq 0$ 이 성립할 조건은 $m^2 - 4n \leq 0$ 임을 이용한다.

실수 전체의 집합을 U 라 하고 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

‘모든 실수 x 에 대하여 p 이다.’가 참인 명제가 되려면

$$P = U = \{x \mid x \text{는 모든 실수}\}$$

이어야 하므로 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 2ax + 1 \geq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $x^2 + 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - 1 \leq 0, \quad (a+1)(a-1) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 1$$

따라서 정수 a 는 -1, 0, 1의 3개이다.

또 ‘ p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.’가 참인 명제가 되려면

$$p \Rightarrow \sim q, \text{ 즉 } P \subset Q^c$$

이때 $P=U$ 이므로 $Q^c=U$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 $x^2+2bx+9>0$ 이어야 하므로 이차방정식 $x^2+2bx+9=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4}=b^2-9<0, \quad (b+3)(b-3)<0$$

$$\therefore -3<b<3$$

따라서 정수 b 는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다.

즉 정수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$3 \times 5 = 15$$

답 ①

06 명제의 증명

● 본책 191~193쪽

459

(1) 주어진 명제의 대우는

실수 x, y 에 대하여 $x=0$ 또는 $y=0$ 이면 $xy=0$ 이다.

이때 $x=0$ 또는 $y=0$ 이면 $xy=0$ 이므로 주어진 명제의 대우가 참이다.

따라서 주어진 명제도 참이다.

(2) 주어진 명제의 대우는

실수 x, y 에 대하여 $x<1$ 이고 $y<1$ 이면 $x+y<2$ 이다.

이때 $x<1$ 이고 $y<1$ 이면 $x+y<2$ 이므로 주어진 명제의 대우가 참이다.

따라서 주어진 명제도 참이다.

(3) 주어진 명제의 대우는

자연수 m 에 대하여 m 이 짝수이면 m^2 도 짝수이다.

m 이 짝수이면

$$m=2k \quad (k \text{는 자연수})$$

로 나타낼 수 있다. 이때

$$m^2=(2k)^2=4k^2=2 \times 2k^2$$

이므로 m^2 은 짝수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

460

(1) $2-\sqrt{3}$ 이 무리수가 아니라고 가정하면 $2-\sqrt{3}$ 은 유리수이므로

$$2-\sqrt{3}=k \quad (k \text{는 유리수})$$

로 놓을 수 있다.

이때 $2-k=\sqrt{3}$ 이고 유리수끼리의 뺄셈의 결과는 유리수이므로 $2-k$ 는 유리수이다.

그런데 $\sqrt{3}$ 은 유리수가 아니므로 모순이다.

따라서 $2-\sqrt{3}$ 은 무리수이다.

(2) n^2 이 3의 배수일 때, n 이 3의 배수가 아니라고 가정하자.

n 이 3의 배수가 아니므로

$$n=3k-1 \text{ 또는 } n=3k-2 \quad (k \text{는 자연수})$$

로 나타낼 수 있다.

(i) $n=3k-1$ 일 때

$$\begin{aligned} n^2 &= (3k-1)^2 \\ &= 9k^2 - 6k + 1 \\ &= 3(3k^2 - 2k) + 1 \end{aligned}$$

(ii) $n=3k-2$ 일 때

$$\begin{aligned} n^2 &= (3k-2)^2 \\ &= 9k^2 - 12k + 4 \\ &= 3(3k^2 - 4k + 1) + 1 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 n^2 을 3으로 나누면 나머지가 1이므로 n^2 이 3의 배수라는 가정에 모순이다.

따라서 자연수 n 에 대하여 n^2 이 3의 배수이면 n 도 3의 배수이다.

(3) $a^2+b^2=0$ 일 때, $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이라 가정하자.

(i) $a \neq 0$ 일 때

$$\begin{aligned} a^2 &> 0, \quad b^2 \geq 0 \text{이므로} \\ a^2 + b^2 &> 0, \quad \text{즉 } a^2 + b^2 \neq 0 \end{aligned}$$

(ii) $b \neq 0$ 일 때

$$\begin{aligned} a^2 &\geq 0, \quad b^2 > 0 \text{이므로} \\ a^2 + b^2 &> 0, \quad \text{즉 } a^2 + b^2 \neq 0 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $a^2+b^2 \neq 0$ 이므로 $a^2+b^2=0$ 이라는 가정에 모순이다.

따라서 실수 a, b 에 대하여 $a^2+b^2=0$ 이면 $a=0$ 이고 $b=0$ 이다.

답 풀이 참조

07 절대부등식

● 본책 194~201쪽

461

$$(1) a^2 + b^2 + 1 - (ab + a + b)$$

$$= \frac{1}{2} (2a^2 + 2b^2 + 2 - 2ab - 2a - 2b)$$

$$= \frac{1}{2} \{ (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \}$$

a, b 가 실수이므로

$$(a-b)^2 \geq 0, (a-1)^2 \geq 0, (b-1)^2 \geq 0$$

따라서 $a^2 + b^2 + 1 - (ab + a + b) \geq 0$ 이므로

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$$

여기서 등호는 $a-b=0, a-1=0, b-1=0$, 즉 $a=b=1$ 일 때 성립한다.

$$(2) (i) |a| \geq |b| \text{ 일 때,}$$

$$|a| - |b| \geq 0, |a-b| \geq 0 \text{ 이므로}$$

$$(|a| - |b|)^2 \leq |a-b|^2 \text{ 임을 보이면 된다.}$$

$$(|a| - |b|)^2 - |a-b|^2$$

$$= a^2 - 2|ab| + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= -2(|ab| - ab)$$

그런데 $|ab| \geq ab$ 이므로

$$-2(|ab| - ab) \leq 0$$

$$\therefore |a| - |b| \leq |a-b|$$

$$(ii) |a| < |b| \text{ 일 때,}$$

$$|a| - |b| < 0, |a-b| > 0 \text{ 이므로}$$

$$|a| - |b| < |a-b|$$

$$(i), (ii) \text{ 에서 } |a| - |b| \leq |a-b|$$

여기서 등호는 $|ab|=ab$, 즉 $ab \geq 0$ 이고 $|a| \geq |b|$ 일 때 성립한다.

답 풀이 참조

462

$a > 0, b > 0$ 이므로

$$\{ \sqrt{2(a+b)} \}^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

$$= 2(a+b) - (a + 2\sqrt{ab} + b)$$

$$= a - 2\sqrt{ab} + b$$

$$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

a, b 가 실수이므로 $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$

$$\therefore \{ \sqrt{2(a+b)} \}^2 \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

이때 $\sqrt{2(a+b)} > 0, \sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$ 이므로

$$\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

여기서 등호는 $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, 즉 $a=b$ 일 때 성립한다.

답 풀이 참조

463

$3a > 0, 4b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3a + 4b \geq 2\sqrt{3a \times 4b} = 4\sqrt{3ab}$$

그런데 $ab=3$ 이므로 $3a + 4b \geq 4\sqrt{3 \times 3} = 12$

따라서 $3a + 4b$ 의 최솟값은 12이다.

여기서 등호는 $3a=4b$ 일 때 성립하므로 $3a + 4b = 12$

$$\text{에서 } 3a = 4b = 6 \quad \therefore a = 2, b = \frac{3}{2}$$

즉 $m=12, a=2, b=\frac{3}{2}$ 이므로

$$m + a + b = \frac{31}{2}$$

답 31/2

464

$9a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$9a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{9a^2 \times b^2} = 6ab \quad (\because a > 0, b > 0)$$

그런데 $9a^2 + b^2 = 36$ 이므로 $36 \geq 6ab$

$$\therefore ab \leq 6$$

(단, 등호는 $9a^2 = b^2$, 즉 $3a=b$ 일 때 성립)

따라서 ab 의 최댓값은 6이다.

답 6

465

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{3x+y}{xy} = \frac{6}{xy} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$3x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $3x + y \geq 2\sqrt{3xy}$

그런데 $3x + y = 6$ 이므로 $6 \geq 2\sqrt{3xy}$

$$\therefore 3 \geq \sqrt{3xy} \quad (\text{단, 등호는 } 3x=y \text{ 일 때 성립})$$

양변을 제곱하면 $9 \geq 3xy \quad \therefore xy \leq 3$

$$\therefore \frac{6}{xy} \geq \frac{6}{3} = 2$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서 $\frac{1}{x} + \frac{3}{y}$ 의 최솟값은 2이다.

답 2

466

$$(3a+4b)\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)=9+\frac{3a}{b}+\frac{12b}{a}+4$$

$$=\frac{3a}{b}+\frac{12b}{a}+13$$

$\frac{3a}{b}>0, \frac{12b}{a}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{3a}{b}+\frac{12b}{a}+13 \geq 2\sqrt{\frac{3a}{b} \times \frac{12b}{a}}+13$$

$$=2 \times 6+13=25$$

(단, 등호는 $\frac{3a}{b}=\frac{12b}{a}$, 즉 $a=2b$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 25이다.

답 25

467

$$3x+5+\frac{3}{x+2}=3(x+2)+\frac{3}{x+2}-1$$

$x>-2$ 에서 $x+2>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3(x+2)+\frac{3}{x+2}-1$$

$$\geq 2\sqrt{3(x+2) \times \frac{3}{x+2}}-1$$

$$=2 \times 3-1=5$$

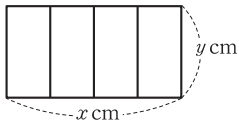
(단, 등호는 $3(x+2)=\frac{3}{x+2}$, 즉 $x=-1$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 5이다.

답 5

468

오른쪽 그림과 같이 바깥쪽 직사각형의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하면



$$2x+5y=40$$

$x>0, y>0$ 에서 $2x>0, 5y>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2x+5y \geq 2\sqrt{2x \times 5y} = 2\sqrt{10xy}$$

그런데 $2x+5y=40$ 이므로 $40 \geq 2\sqrt{10xy}$

$$\sqrt{10xy} \leq 20, \quad 10xy \leq 400$$

$$\therefore xy \leq 40$$

이때 바깥쪽 직사각형의 넓이는 xy cm²이므로 넓이의 최댓값은 40 cm²이다.

여기서 등호는 $2x=5y$ 일 때 성립하므로 $2x+5y=40$ 에서

$$2x+2x=40 \quad \therefore x=10$$

따라서 구하는 가로의 길이는 10 cm이다.

답 40 cm², 10 cm

469

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OC}=x$,

$\overline{CD}=y$ 라 하면 직각삼각형

OCD에서

$$x^2+y^2=(2\sqrt{3})^2=12$$

$x^2>0, y^2>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \times y^2} = 2xy \quad (\because x>0, y>0)$$

그런데 $x^2+y^2=12$ 이므로 $12 \geq 2xy$

이때 직사각형 ABCD의 넓이는 $2xy$ 이므로 넓이의 최댓값은 12이다.

여기서 등호는 $x^2=y^2$ 일 때 성립하므로 $x^2+y^2=12$ 에서

$$\therefore x=\sqrt{6}, y=\sqrt{6} \quad (\because x>0, y>0)$$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이가 최대일 때의 둘레의 길이는

$$4x+2y=4\sqrt{6}+2\sqrt{6}=6\sqrt{6}$$

답 $6\sqrt{6}$

470

(1) a, b 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여 $(2^2+4^2)(a^2+b^2) \geq (2a+4b)^2$

그런데 $a^2+b^2=10$ 이므로

$$20 \times 10 \geq (2a+4b)^2$$

$$\therefore -10\sqrt{2} \leq 2a+4b \leq 10\sqrt{2}$$

(단, 등호는 $b=2a$ 일 때 성립)

따라서 $2a+4b$ 의 최댓값은 $10\sqrt{2}$ 이다.

(2) a, b 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여 $(2^2+5^2)(a^2+b^2) \geq (2a+5b)^2$

그런데 $2a+5b=29$ 이므로 $29(a^2+b^2) \geq 29^2$

$$\therefore a^2+b^2 \geq 29$$

(단, 등호는 $2b=5a$ 일 때 성립)

따라서 a^2+b^2 의 최솟값은 29이다.

답 (1) $10\sqrt{2}$ (2) 29

471

직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y 라 하면 원의 지름이 직사각형의 대각선이므로

$$x^2 + y^2 = 4^2 = 16$$

직사각형의 둘레의 길이는 $2x + 2y$ 이고 x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(2^2 + 2^2)(x^2 + y^2) \geq (2x + 2y)^2$$

그런데 $x^2 + y^2 = 16$ 이므로

$$8 \times 16 \geq (2x + 2y)^2$$

이때 $x > 0, y > 0$ 이므로

$$0 < 2x + 2y \leq 8\sqrt{2} \quad (\text{단, 등호는 } x=y \text{ 일 때 성립})$$

따라서 구하는 최댓값은 $8\sqrt{2}$ 이다. **답** $8\sqrt{2}$

연습문제

● 본책 202~203쪽

472

전략 결론을 부정하여 모순이 생김을 보인다.

mn 이 **(가) 홀수**라 가정하면 m, n 은 모두

(나) 홀수이어야 하므로

$$m = 2k - 1, n = 2l - 1 \quad (k, l \text{은 자연수})$$

로 나타낼 수 있다. 이때

$$\begin{aligned} m^2 + n^2 &= (2k - 1)^2 + (2l - 1)^2 \\ &= 4k^2 - 4k + 1 + 4l^2 - 4l + 1 \\ &= 2(2k^2 - 2k + 1 + 2l^2 - 2l + 1) \end{aligned}$$

이므로 $m^2 + n^2$ 은 **(다) 짝수**이다.

그런데 이것은 $m^2 + n^2$ 이 **(라) 홀수**라는 가정에 모순이다.

따라서 자연수 m, n 에 대하여 $m^2 + n^2$ 이 홀수이면 mn 은 짝수이다.

답 (가) 홀수 (나) 홀수 (다) 짝수 (라) 홀수

473

전략 두 식의 차 또는 제곱의 차를 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

$$\begin{aligned} \neg. (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a} - b)^2 \\ &= a - 2\sqrt{ab} + b - (a - b) \\ &= 2(b - \sqrt{ab}) \\ &= 2\sqrt{b}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) \end{aligned}$$

그런데 $\sqrt{b} > 0, \sqrt{b} - \sqrt{a} < 0$ 이므로

$$2\sqrt{b}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) < 0$$

$$\therefore (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 < (\sqrt{a} - b)^2$$

이때 $\sqrt{a} - \sqrt{b} > 0, \sqrt{a} - b > 0$ 이므로

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a} - b \quad (\text{거짓})$$

$$\neg. a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

그런데 $a + b + c > 0$ 이고

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

$$= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$$

$$= \frac{1}{2}\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\} \geq 0$$

이므로

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$$

여기서 등호는 $a - b = 0, b - c = 0, c - a = 0$, 즉 $a = b = c$ 일 때 성립한다. (참)

$$\neg. (|a| + |b|)^2 - |a - b|^2$$

$$= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= 2(|ab| + ab) \geq 0 \quad (\because |ab| \geq -ab)$$

$$\therefore (|a| + |b|)^2 \geq |a - b|^2$$

이때 $|a| + |b| \geq 0, |a - b| \geq 0$ 이므로

$$|a| + |b| \geq |a - b|$$

여기서 등호는 $|ab| = -ab$, 즉 $ab \leq 0$ 일 때 성립한다. (참)

이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다. **답** $\neg, \neg$

474

전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$2x > 0, 5y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2x + 5y \geq 2\sqrt{2x \times 5y} = 2\sqrt{10xy}$$

그런데 $2x + 5y = 10$ 이므로

$$10 \geq 2\sqrt{10xy} \quad \therefore 5 \geq \sqrt{10xy}$$

양변을 제곱하면

$$25 \geq 10xy \quad \therefore xy \leq \frac{5}{2}$$

따라서 xy 의 최댓값은 $\frac{5}{2}$ 이다.

여기서 등호는 $2x=5y$ 일 때 성립하므로 $2x+5y=10$ 에서

$$2x=5y=5 \quad \therefore x=\frac{5}{2}, y=1$$

$$\text{즉 } a=\frac{5}{2}, b=\frac{5}{2}, c=1 \text{이므로}$$

$$a+b+c=6$$

답 6

475

전략 $\overline{AC}=x$, $\overline{BC}=y$ 로 놓고 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $\overline{AB}^2$ 의 최솟값을 구한다.

$\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에 대하여 $\overline{AC}=x$, $\overline{BC}=y$ 라 하면 직각삼각형 ABC의 넓이가 16이므로

$$\frac{1}{2}xy=16$$

$$\therefore xy=32 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \\ &= x^2 + y^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

이때 $x>0$, $y>0$ 에서 $x^2>0$, $y^2>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\geq 2\sqrt{x^2y^2} \\ &= 2xy = 2 \times 32 (\because \textcircled{㉠}) \\ &= 64 \quad (\text{단, 등호는 } x=y \text{일 때 성립}) \end{aligned}$$

따라서 ㉡에서 $\overline{AB}^2$ 의 최솟값은 64이다.

답 ③

476

전략 주어진 명제의 대우가 참임을 증명한다.

주어진 명제의 대우는

세 자연수 a, b, c 에 대하여 a, b, c 가 모두 홀수이면 $a^2+b^2 \neq c^2$ 이다.

자연수 l, m, n 에 대하여

$$a=2l-1, b=2m-1, c=2n-1$$

이라 하면

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (2l-1)^2 + (2m-1)^2 \\ &= 4l^2 - 4l + 1 + 4m^2 - 4m + 1 \\ &= 2(2l^2 - 2l + 2m^2 - 2m + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= (2n-1)^2 \\ &= 4n^2 - 4n + 1 \\ &= 2(2n^2 - 2n) + 1 \end{aligned}$$

따라서 a^2+b^2 은 짝수이고 c^2 은 홀수이므로

$$a^2+b^2 \neq c^2$$

즉 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

답 풀이 참조

II-3

요
점

477

전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$3x>0$, $2y>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3x+2y \geq 2\sqrt{3x \times 2y} = 2\sqrt{6xy}$$

그런데 $3x+2y=16$ 이므로

$$2\sqrt{6xy} \leq 16 \quad (\text{단, 등호는 } 3x=2y \text{일 때 성립})$$

이때

$$\begin{aligned} (\sqrt{3x} + \sqrt{2y})^2 &= 3x + 2y + 2\sqrt{6xy} \\ &= 16 + 2\sqrt{6xy} \\ &\leq 16 + 16 = 32 \end{aligned}$$

이므로

$$0 < \sqrt{3x} + \sqrt{2y} \leq 4\sqrt{2}$$

따라서 $\sqrt{3x} + \sqrt{2y}$ 의 최댓값은 $4\sqrt{2}$ 이다.

답 $4\sqrt{2}$

478

전략 주어진 식을 전개한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$a>0$, $b>0$, $c>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{2b}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right)\left(1 + \frac{a}{2c}\right) \\ &= \left(1 + \frac{c}{b} + \frac{2b}{a} + \frac{2c}{a}\right)\left(1 + \frac{a}{2c}\right) \\ &= 1 + \frac{c}{b} + \frac{2b}{a} + \frac{2c}{a} + \frac{a}{2c} + \frac{a}{2b} + \frac{b}{c} + 1 \\ &= \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) + \left(\frac{2b}{a} + \frac{a}{2b}\right) + \left(\frac{2c}{a} + \frac{a}{2c}\right) + 2 \\ &\geq 2\sqrt{\frac{c}{b} \times \frac{b}{c}} + 2\sqrt{\frac{2b}{a} \times \frac{a}{2b}} + 2\sqrt{\frac{2c}{a} \times \frac{a}{2c}} \\ &\quad + 2 \\ &= 2 + 2 + 2 + 2 = 8 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $a^2=4b^2=4c^2$, 즉 $a=2b=2c$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 8이다.

답 8

479

전략 이차방정식의 판별식을 이용하여 실수 a 의 값의 범위를 구하고, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

이차방정식 $x^2 - 2x + a = 0$ 이 허근을 가지므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - a < 0 \quad \therefore a > 1$$

즉 $a - 1 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} a + \frac{4}{a-1} &= (a-1) + \frac{4}{a-1} + 1 \\ &\geq 2\sqrt{(a-1) \times \frac{4}{a-1}} + 1 \\ &= 2 \times 2 + 1 = 5 \end{aligned}$$

따라서 $a + \frac{4}{a-1}$ 의 최솟값은 5이다.

여기서 등호는 $a - 1 = \frac{4}{a-1}$ 일 때 성립하므로

$$\begin{aligned} (a-1)^2 &= 4, \quad a-1 = 2 \quad (\because a-1 > 0) \\ \therefore a &= 3 \end{aligned}$$

즉 $m = 5, n = 3$ 이므로 $m + n = 8$ **답 8**

480

전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

$$\begin{aligned} \left(4 - \frac{9b}{a}\right)\left(1 - \frac{a}{b}\right) &= 4 - \frac{4a}{b} - \frac{9b}{a} + 9 \\ &= 13 - \left(\frac{4a}{b} + \frac{9b}{a}\right) \end{aligned}$$

이때 $\frac{4a}{b} > 0, \frac{9b}{a} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{4a}{b} + \frac{9b}{a} &\geq 2\sqrt{\frac{4a}{b} \times \frac{9b}{a}} \\ &= 2 \times 6 = 12 \\ \left(\text{단, 등호는 } \frac{4a}{b} &= \frac{9b}{a}, \text{ 즉 } 2a = 3b \text{일 때 성립}\right) \\ \therefore \left(4 - \frac{9b}{a}\right)\left(1 - \frac{a}{b}\right) &= 13 - \left(\frac{4a}{b} + \frac{9b}{a}\right) \\ &\leq 13 - 12 = 1 \end{aligned}$$

따라서 $\left(4 - \frac{9b}{a}\right)\left(1 - \frac{a}{b}\right)$ 의 최댓값이 1이므로 부등

식 $\left(4 - \frac{9b}{a}\right)\left(1 - \frac{a}{b}\right) \leq m$ 이 항상 성립하려면

$$m \geq 1 \quad \text{답 } m \geq 1$$

481

전략 점 Q의 좌표를 이용하여 삼각형 OQR의 넓이를 a, b 에 대한 식으로 나타낸다.

직선 OP의 기울기가 $\frac{b}{a}$ 이므로 직선 OP에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{a}{b}$ 이다.

따라서 점 $P(a, b)$ 를 지나고 직선 OP에 수직인 직선의 방정식은

$$\begin{aligned} y - b &= -\frac{a}{b}(x - a) \\ \therefore y &= -\frac{a}{b}x + \frac{a^2}{b} + b \end{aligned}$$

$x = 0$ 을 대입하면 $y = \frac{a^2}{b} + b$ 이므로

$$Q\left(0, \frac{a^2}{b} + b\right)$$

따라서 $\overline{OQ} = \frac{a^2}{b} + b, \overline{OR} = \frac{1}{a}$ 이므로

$$\begin{aligned} \triangle OQR &= \frac{1}{2} \times \overline{OQ} \times \overline{OR} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{a^2}{b} + b\right) \times \frac{1}{a} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

이때 $\frac{a}{b} > 0, \frac{b}{a} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &\geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}} = 2 \\ &\quad (\text{단, 등호는 } a = b \text{일 때 성립}) \end{aligned}$$

따라서 ①에서

$$\triangle OQR \geq \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

즉 삼각형 OQR의 넓이의 최솟값은 1이다. **답 ②**



개념 노트

두 직선 $y = mx + n, y = m'x + n'$ 에 대하여

① 두 직선이 수직이면 $mm' = -1$

② $mm' = -1$ 이면 두 직선은 수직이다.

1 함수

III. 함수

01 함수

● 본책 206~214쪽

482

- (1) 집합 X 의 원소 1에 대응하는 집합 Y 의 원소가 a , b 의 2개이므로 함수가 아니다.
- (2) 집합 X 의 원소 4에 대응하는 집합 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
- (3), (4) 집합 X 의 각 원소에 집합 Y 의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

답 함수: (3), (4)

(3) 정의역: $\{1, 2, 3\}$, 공역: $\{a, b, c\}$,

치역: $\{a, b, c\}$

(4) 정의역: $\{1, 2, 3, 4\}$, 공역: $\{a, b, c\}$,

치역: $\{a, b\}$

483

- (1) 함수 $f(x) = -x + 1$ 에 대하여 집합 X 의 각 원소의 함숫값을 구하면

$$f(-1) = 2, f(0) = 1, f(1) = 0$$

따라서 함수 f 의 치역은 $\{0, 1, 2\}$ 이다.

- (2) 함수 $f(x) = x^3 + x + 1$ 에 대하여 집합 X 의 각 원소의 함숫값을 구하면

$$f(-1) = -1, f(0) = 1, f(1) = 3$$

따라서 함수 f 의 치역은 $\{-1, 1, 3\}$ 이다.

- (3) 함수 $f(x) = |x| - 1$ 에 대하여 집합 X 의 각 원소의 함숫값을 구하면

$$f(-1) = 0, f(0) = -1, f(1) = 0$$

따라서 함수 f 의 치역은 $\{-1, 0\}$ 이다.

답 (1) $\{0, 1, 2\}$ (2) $\{-1, 1, 3\}$ (3) $\{-1, 0\}$

484

ㄱ. $f(-1) = 0, g(-1) = -2$ 이므로

$$f(-1) \neq g(-1) \quad \therefore f \neq g$$

ㄴ. $f(-1) = 1, g(-1) = -1$ 이므로

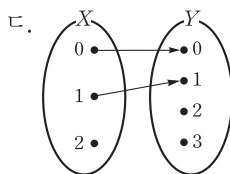
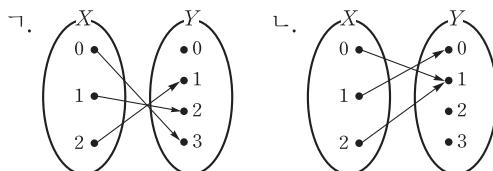
$$f(-1) \neq g(-1) \quad \therefore f \neq g$$

ㄷ. $f(-1) = g(-1) = -1, f(1) = g(1) = 1$ 이므로 $f = g$

이상에서 두 함수 f 와 g 가 서로 같은 함수인 것은 ㄷ뿐이다.

답 ㄷ

485

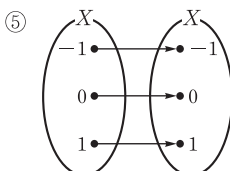
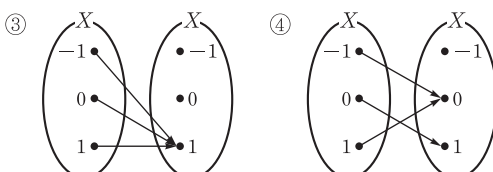
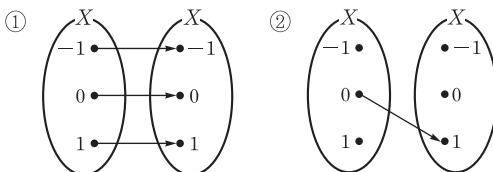


ㄷ. 집합 X 의 원소 2에 대응하는 집합 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

이상에서 함수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

486



② 집합 X 의 원소 $-1, 1$ 에 대응하는 집합 X 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

답 ②

487

$1-\sqrt{2}<0$ 이므로

$$f(1-\sqrt{2})=3(1-\sqrt{2})+4=7-3\sqrt{2}$$

$3-2\sqrt{2}>0$ 이므로

$$f(3-2\sqrt{2})=-3(3-2\sqrt{2})+2=6\sqrt{2}-7$$

$$\begin{aligned}\therefore f(1-\sqrt{2})+f(3-2\sqrt{2}) \\ &= (7-3\sqrt{2})+(6\sqrt{2}-7) \\ &= 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 $3\sqrt{2}$

488

정의역이 $X=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 이므로

$$f(-2)=|-2+1|=1$$

$$f(-1)=|-1+1|=0$$

$$f(0)=|0+1|=1$$

$$f(1)=|1+1|=2$$

$$f(2)=|2+1|=3$$

따라서 함수 f 의 치역은

$$\{0, 1, 2, 3\}$$

이므로 구하는 원소의 합은

$$0+1+2+3=6$$

답 6

489

정의역이 $X=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 이므로

$$f(0)=0, f(1)=1, f(2)=4,$$

$$f(3)=4, f(4)=1, f(5)=0$$

따라서 함수 f 의 치역은

$$\{0, 1, 4\}$$

답 $\{0, 1, 4\}$

490

$$\neg. f(-1)=g(-1)=-1, f(0)=g(0)=0,$$

$$f(1)=g(1)=1\text{이므로}$$

$$f=g$$

$$\neg. f(-1)=-1, h(-1)=1\text{이므로}$$

$$f(-1)\neq h(-1)$$

$$\therefore f\neq h$$

$$\neg. f(-1)=-1, p(-1)=\sqrt{(-1)^2}=1\text{이므로}$$

$$f(-1)\neq p(-1)$$

$$\therefore f\neq p$$

이상에서 함수 f 와 서로 같은 함수인 것은 $\neg$ 뿐이다.

답 $\neg$

491

$$f(0)=g(0)\text{에서 } b=-3$$

$$f(1)=g(1)\text{에서}$$

$$2+a-3=1+b \quad \therefore a=b+2$$

위의 식에 $b=-3$ 을 대입하면

$$a=-1$$

$$\therefore ab=-1\times(-3)=3$$

답 3

492

$$f(x)=g(x)\text{에서}$$

$$x^3+3x=6x^2-8x+6$$

$$x^3-6x^2+11x-6=0$$

$$(x-1)(x-2)(x-3)=0$$

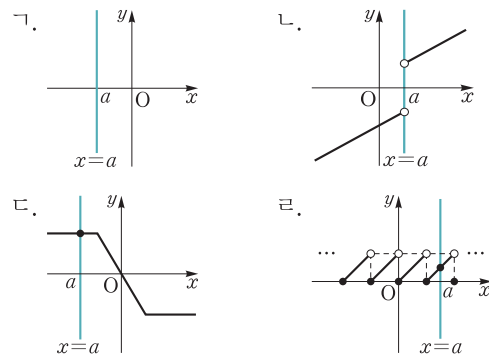
$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 구하는 집합 X 는 집합 $\{1, 2, 3\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이므로

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$$

답 풀이 참조

493



1. 실수 a 에 대하여 직선 $x=a$ 와 만나지 않거나 무수히 많은 점에서 만나므로 함수의 그래프가 아니다.

2. 실수 a 에 대하여 직선 $x=a$ 와 만나지 않기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

3. 4. 실수 a 에 대하여 직선 $x=a$ 와 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.

이상에서 함수의 그래프인 것은 3, 4이다.

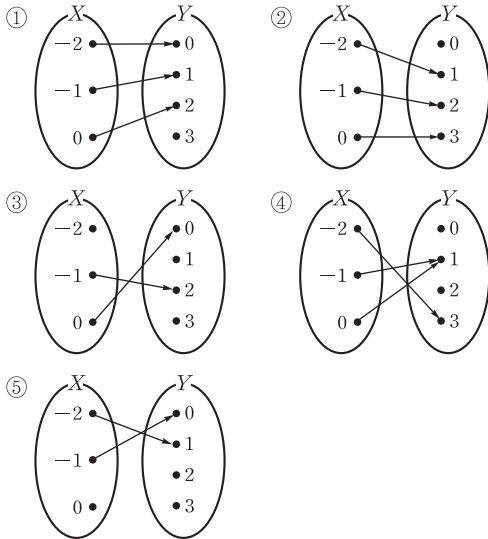
답 3, 4

연습 문제

• 본책 215~216쪽

494

전략 집합 X 의 각 원소에 집합 Y 의 원소가 오직 하나씩 대응하는지 확인한다.



- ③ 집합 X 의 원소 -2 에 대응하는 집합 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
 ⑤ 집합 X 의 원소 0 에 대응하는 집합 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

답 ③, ⑤

495

전략 $2, \sqrt{3}+2$ 가 각각 유리수인지 무리수인지 판단하여 $f(2), f(\sqrt{3}+2)$ 의 값을 구한다.

2 는 유리수이므로

$$f(2) = -2 \times 2 = -4$$

$\sqrt{3}+2$ 는 무리수이므로

$$f(\sqrt{3}+2) = (\sqrt{3}+2) - 3 = \sqrt{3} - 1$$

$$\therefore f(2) + \sqrt{3}f(\sqrt{3}+2) = -4 + \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) = -1 - \sqrt{3}$$

답 $-1 - \sqrt{3}$

496

전략 $x=15, 16, 17, 18, 19$ 일 때, 함수값을 구한다.

$$15 = 3 \times 5 \text{이므로 } f(15) = 2 \times 2 = 4$$

$$16 = 2^4 \text{이므로 } f(16) = 5$$

$$17 \text{는 소수이므로 } f(17) = 2$$

$$18 = 2 \times 3^2 \text{이므로 } f(18) = 2 \times 3 = 6$$

$$19 \text{는 소수이므로 } f(19) = 2$$

따라서 함수 f 의 치역은 $\{2, 4, 5, 6\}$

이므로 구하는 원소의 합은

$$2 + 4 + 5 + 6 = 17$$

답 17

개념 노트

$N = p^a \times q^b$ (p, q 는 서로 다른 소수, a, b 는 자연수)일 때, 자연수 N 의 양의 약수의 개수는 $(a+1) \times (b+1)$

497

전략 $f(1)=g(1), f(3)=g(3)$ 임을 이용한다.

$f(1)=g(1)$ 에서

$$1 + 7a + 2b = 3a + b$$

$$\therefore 4a + b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(3)=g(3)$ 에서

$$9 + 21a + 2b = 9a + b$$

$$\therefore 12a + b = -9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -1, b = 3$

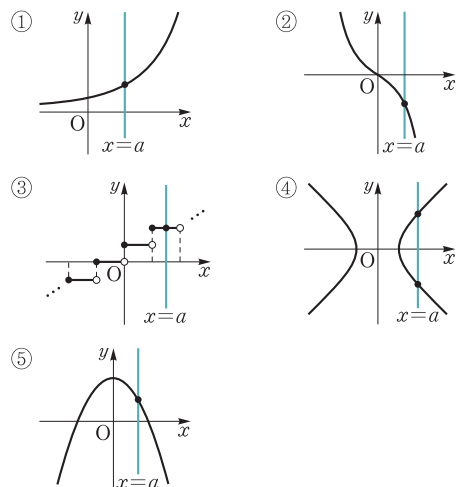
$$\therefore f(x) = x^2 - 7x + 6, g(x) = -3x + 3$$

따라서 $g(1)=0, g(3)=-6$ 이므로 함수 g 의 치역은

$$\{-6, 0\} \quad \text{답 } \{-6, 0\}$$

498

전략 실수 a 에 대하여 직선 $x=a$ 와 오직 한 점에서 만나야 함수의 그래프이다.



- ④ 실수 a 에 대하여 직선 $x=a$ 와 만나지 않거나 두 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

답 ④

499

전략 f 가 X 에서 Y 로의 함수이면 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ 의 값이 집합 Y 의 원소임을 이용한다.

집합 X 의 각 원소의 함수값을 구하면

$$f(-1) = a - (a+1) + 2 = 1,$$

$$f(0) = 2,$$

$$f(1) = a + (a+1) + 2 = 2a+3$$

이때 $f(1)$ 의 값은 1, 2, 3 중 하나이어야 한다.

(i) $f(1)=1$ 일 때, $2a+3=1$ 에서 $a=-1$

(ii) $f(1)=2$ 일 때, $2a+3=2$ 에서 $a=-\frac{1}{2}$

(iii) $f(1)=3$ 일 때, $2a+3=3$ 에서 $a=0$

이상에서 모든 a 의 값의 합은

$$-1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 = -\frac{3}{2} \quad \text{답 } -\frac{3}{2}$$

500

전략 $a < 0$ 인 경우와 $a \geq 0$ 인 경우로 나누어 생각한다.

(i) $a < 0$ 일 때

$$f(a) = |a| + 2 = 8 \text{에서}$$

$$|a| = 6 \quad \therefore a = -6 \quad (\because a < 0)$$

(ii) $a \geq 0$ 일 때

$$f(a) = a^2 - 3a - 2 = 8 \text{에서}$$

$$a^2 - 3a - 10 = 0, \quad (a+2)(a-5) = 0$$

$$\therefore a = 5 \quad (\because a \geq 0)$$

(i), (ii)에서 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$-6 \times 5 = -30 \quad \text{답 } -30$$

501

전략 $f(0)$ 의 값을 먼저 구한다.

$$f(a+b) = f(a) + f(b) + 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①에 $a=0$, $b=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) + 4 \quad \therefore f(0) = -4$$

①에 $a=4$, $b=-4$ 를 대입하면

$$f(0) = f(4) + f(-4) + 4$$

$$\therefore f(4) + f(-4) = f(0) - 4 = -8 \quad \text{답 } -8$$

502

전략 $f(-2)=g(-2)$, $f(a)=g(a)$ 임을 이용한다.

$$f(-2)=g(-2) \text{에서}$$

$$0 = -8 - 2b \quad \therefore b = -4$$

$$\therefore g(x) = x^3 - 4x$$

$$\text{또 } f(a)=g(a) \text{에서}$$

$$a^2 + 2a = a^3 - 4a, \quad a^3 - a^2 - 6a = 0$$

$$a(a+2)(a-3) = 0$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } a=-2 \text{ 또는 } a=3$$

$$\text{그런데 } a \neq -2, a \neq 0 \text{이므로 } a=3$$

$$\text{답 } a=3, b=-4$$

503

전략 조건 ㉠을 이용하여 $f(2025)$ 의 값을 $1 \leq x < 4$ 에서의 함수값으로 나타낸다.

조건 ㉠에 의하여

$$f(2025) = f\left(4 \times \frac{2025}{4}\right) = 4f\left(\frac{2025}{4}\right)$$

$$= 4f\left(4 \times \frac{2025}{4^2}\right) = 4^2 f\left(\frac{2025}{4^2}\right)$$

$\vdots$

$$= 4^5 f\left(\frac{2025}{4^5}\right)$$

$$\text{이때 } 1 < \frac{2025}{4^5} < 2 \text{이므로 조건 ㉠에 의하여}$$

$$f\left(\frac{2025}{4^5}\right) = \left|3 - \frac{2025}{4^5}\right| - 1 = 2 - \frac{2025}{4^5}$$

$$\therefore f(2025) = 4^5 f\left(\frac{2025}{4^5}\right) = 4^5 \times \left(2 - \frac{2025}{4^5}\right)$$

$$= 4^5 \times 2 - 2025$$

$$= 2048 - 2025 = 23 \quad \text{답 } 23$$

504

전략 삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 커야 함을 이용하여 a 의 값의 범위를 구한다.

(i) 가장 긴 변의 길이가 a 일 때

$$a > 10 \text{이고 } a < 6 + 10 = 16 \text{이므로}$$

$$10 < a < 16$$

(ii) 가장 긴 변의 길이가 10일 때

$$a \leq 10 \text{이고 } 10 < a + 6 \text{이므로}$$

$$4 < a \leq 10$$

$$(i), (ii) \text{에서 } 4 < a < 16$$

이때 $f(a)=a+6+10=a+16$ 에서

$20 < a+16 < 32$ 이므로

$$20 < f(a) < 32$$

따라서 $p=20$, $q=32$ 이므로

$$pq=640$$

답 640

505

전략 $f(x)=3$ 을 만족시키는 x 의 값의 조건을 구한다.

$f(x)=3$ 이라면

$$x=4k+3 \quad (k \text{는 음이 아닌 정수})$$

의 꼴이어야 한다.

따라서 함수 f 의 정의역 X 는 집합

$$\{x \mid x=4k+3, k=0, 1, 2, 3, \dots, 6\},$$

$$\text{즉 } \{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27\}$$

의 공집합이 아닌 부분집합이므로 구하는 정의역 X 의 개수는

$$2^7 - 1 = 127$$

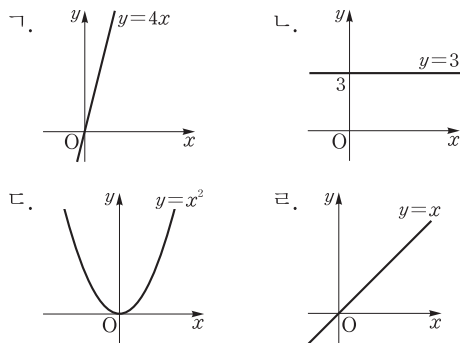
답 127

02 여러 가지 함수

● 본책 217~221쪽

506

보기의 함수의 그래프를 각각 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



(1) 일대일대응은 그 그래프가 치역의 각 원소 k 에 대하여 직선 $y=k$ 와 오직 한 점에서 만나고 치역과 공역이 같은 함수이므로 ㄱ, ㄹ이다.

(2) 상수함수는 그 그래프가 x 축에 평행한 직선이므로 ㄴ이다.

(3) 항등함수는 그 그래프가 직선 $y=x$ 인 함수이므로 ㄹ이다.

답 (1) ㄱ, ㄹ (2) ㄴ (3) ㄹ

다른 풀이 (1) ㄱ. $f(x)=4x$ 라 하면 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1)=4x_1, f(x_2)=4x_2$ 이므로

$$x_1 \neq x_2 \text{이면 } f(x_1) \neq f(x_2)$$

이다.

또 치역은 실수 전체의 집합이므로 $y=4x$ 는 일대일대응이다.

ㄷ. $f(x)=x^2$ 이라 하면

$$f(-1)=f(1)=1$$

즉 $-1 \neq 1$ 이어도 $f(-1)=f(1)$ 이므로 일대일함수가 아니다.

따라서 일대일대응이 아니다.

ㄹ. $f(x)=x$ 라 하면 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$f(x_1)=x_1, f(x_2)=x_2 \text{ 이므로}$$

$$x_1 \neq x_2 \text{ 이면 } f(x_1) \neq f(x_2)$$

이다.

또 치역은 실수 전체의 집합이므로 $y=x$ 는 일대일대응이다.

507

함수 f 가 일대일대응이므로

$f(x)=-2x+b$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-1, 7)$,

$(a, -1)$ 을 지나야 한다.

$$f(-1)=7 \text{에서 } 2+b=7$$

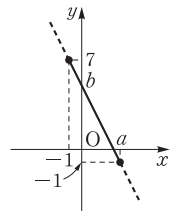
$$\therefore b=5$$

$$f(a)=-1 \text{에서 } -2a+b=-1$$

$$-2a+5=-1 \quad \therefore a=3$$

$$\therefore a-b=3-5=-2$$

답 -2



508

$x \geq 0$ 에서

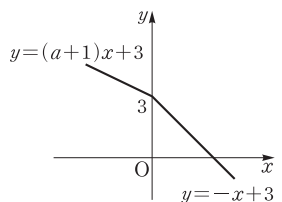
$$f(x)=-x+3 \text{ 이므로}$$

함수 f 가 일대일대응이

되려면 $y=f(x)$ 의 그

래프는 오른쪽 그림과

같아야 한다.



즉 $x < 0$ 에서 직선 $y = (a+1)x + 3$ 의 기울기가 음수
이어야 하므로

$$a+1 < 0 \quad \therefore a < -1$$

답 $a < -1$

509

함수 f 는 항등함수이므로

$$f(5) = 5, f(7) = 7$$

함수 g 는 상수함수이고 $g(5) = f(5) = 5$ 이므로

$$g(x) = 5 \quad \therefore g(7) = 5$$

$$\therefore f(7) + g(7) = 7 + 5 = 12$$

답 12

510

집합 X 의 각 원소에 대응할 수 있는 집합 X 의 원소는
 $-1, 0, 1$ 의 3개이므로 함수의 개수는

$$a = 3^3 = 27$$

일대일대응의 개수는 집합 X 의 원소 $-1, 0, 1$ 에서 3
개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$$b = {}_3P_3 = 6$$

상수함수의 개수는 집합 X 의 원소 $-1, 0, 1$ 에서 1개
를 택하는 경우의 수와 같으므로

$$c = 3$$

$$\therefore a + b + c = 27 + 6 + 3 = 36$$

답 36

511

(1) $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 를 만족시키는 $f(x)$ 는
일대일함수이다.

따라서 이를 만족시키는 함수 $f(x)$ 의 개수는 집합
 Y 의 5개의 원소 중에서 2개를 택하는 순열의 수와
같으므로

$${}_5P_2 = 20$$

(2) 함수 $f(x)$ 가 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$ 를 만족시
키려면 집합 Y 의 5개의 원소 중에서 2개를 택하여 큰
수부터 차례대로 집합 X 의 원소 3, 5에 대응시키면
된다.

따라서 구하는 함수 $f(x)$ 의 개수는 집합 Y 의 5개
의 원소 중에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_5C_2 = 10$$

답 (1) 20 (2) 10

연습 문제

● 본책 222~223쪽

512

전략 치역의 각 원소 k 에 대하여 직선 $y = k$ 와 오직 한 점에서 만
나야 일대일함수임을 이용한다.

ㄱ. 치역의 각 원소 k 에 대하여 주어진 그래프와 직선
 $y = k$ 가 오직 한 점에서 만나고 (치역) = (공역)이
므로 일대일대응이다.

ㄴ. 치역의 각 원소 k 에 대하여 주어진 그래프와 직선
 $y = k$ 가 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이지
만 치역이 $\{y | y < 0\}$ 이므로 일대일대응이 아니다.

ㄷ. 치역의 각 원소 k 에 대하여 주어진 그래프와 직선
 $y = k$ 가 2개 이상의 점에서 만나므로 일대일함수
가 아니다.

이상에서 일대일함수이지만 일대일대응이 아닌 것은
ㄴ뿐이다.

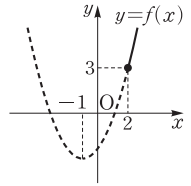
답 ㄴ

513

전략 일대일대응이 되도록 $y = f(x)$ 의 그래프를 그려 본다.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x + a \\ &= (x+1)^2 + a - 1 \end{aligned}$$

이므로 $x \geq 2$ 일 때 함수 f 가 일대
일대응이 되려면 $y = f(x)$ 의 그
래프는 오른쪽 그림과 같이 점
(2, 3)을 지나야 한다.



즉 $f(2) = 3$ 에서

$$4 + 4 + a = 3$$

$$\therefore a = -5$$

답 -5

514

전략 x 의 값의 범위를 나누어 $f(x)$ 의 식을 정리하고 함수 f 가
일대일대응일 조건을 이용한다.

(i) $x \geq \frac{5}{2}$ 일 때, $2x - 5 \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x-5) + kx - 3 \\ &= (k+2)x - 8 \end{aligned}$$

(ii) $x < \frac{5}{2}$ 일 때, $2x - 5 < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= -(2x-5) + kx - 3 \\ &= (k-2)x + 2 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서

$$f(x) = \begin{cases} (k+2)x-8 & (x \geq \frac{5}{2}) \\ (k-2)x+2 & (x < \frac{5}{2}) \end{cases}$$

이때 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이라면 $k+2 \neq 0$,
 $k-2 \neq 0$ 이고 두 직선 $y = (k+2)x-8$,
 $y = (k-2)x+2$ 의 기울기의 부호가 같아야 하므로

$$(k+2)(k-2) > 0$$

$$\therefore k < -2 \text{ 또는 } k > 2 \quad \text{답 } k < -2 \text{ 또는 } k > 2$$

515

전략 각 함수에서 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ 의 값을 구하여 항등함수인지 확인한다.

함수 f 가 항등함수이려면

$$f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$$

이어야 한다.

④ $f(-1) = 1$ 이므로 항등함수가 아니다.

답 ④

516

전략 $f(1) = f(2) = f(3)$ 임을 이용한다.

함수 f 가 상수함수이므로

$$f(1) = f(2) = f(3) = a \quad (a \in Y)$$

라 하면 $f(1) + f(2) + f(3) = 3a$

이때 a 의 최댓값은 8이므로 $f(1) + f(2) + f(3)$ 의 최댓값은

$$3 \times 8 = 24$$

또 a 의 최솟값은 4이므로 $f(1) + f(2) + f(3)$ 의 최솟값은

$$3 \times 4 = 12$$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$$24 + 12 = 36$$

답 36

517

전략 X 에서 Y 로의 함수에서 치역과 공역이 다른 함수를 제외한다.

집합 X 의 각 원소에 대응할 수 있는 집합 Y 의 원소는 d, e 의 2개씩이므로 X 에서 Y 로의 함수의 개수는

$$2^3 = 8$$

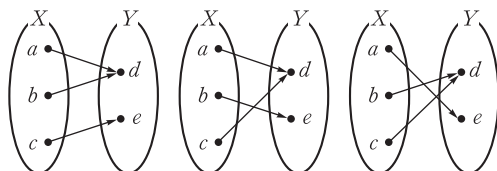
이때 치역이 $\{d\}$ 또는 $\{e\}$ 인 함수의 개수는 2이므로
 치역과 공역이 같은 함수의 개수는

$$8 - 2 = 6$$

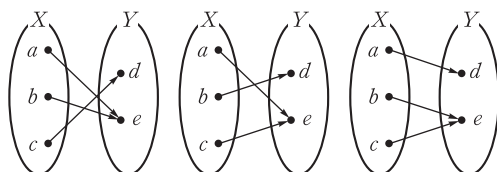
답 6

다른 풀이 정의역의 원소는 3개이고 치역의 원소는 2개
 이므로 집합 X 의 원소 중 2개는 집합 Y 의 같은 원소에
 대응해야 한다.

(i) Y 의 원소 d 에 X 의 원소가 2개 대응하는 경우



(ii) Y 의 원소 e 에 X 의 원소가 2개 대응하는 경우



(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$$3 + 3 = 6$$

518

전략 b 를 a 에 대한 식으로 나타낸다.

$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$ 이므로 $x \geq a$ 에서
 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되려면

$$a \geq 2$$

이때 함수 $f(x)$ 의 치역은 $\{y | y \geq f(a)\}$ 이므로

$$b = f(a) = a^2 - 4a + 3$$

$$\therefore a - b = a - (a^2 - 4a + 3)$$

$$= -a^2 + 5a - 3$$

$$= -\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$$

즉 $a \geq 2$ 에서 $a - b$ 의 최댓값은 $\frac{13}{4}$ 이다.

따라서 $p = 4$, $q = 13$ 이므로

$$p + q = 17$$

답 17

519

전략 $f(a) = a$ 를 만족시키는 a 의 값을 구한다.

$f(x) = x^3 + x^2 - x$ 가 항등함수가 되려면 정의역의 각
 원소 x 에 대하여 $f(x) = x$ 를 만족시켜야 한다.

$$x^3 + x^2 - x = x \text{에서}$$

$$x^3 + x^2 - 2x = 0, \quad x(x+2)(x-1) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 집합 X 는 집합 $\{-2, 0, 1\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이므로 구하는 집합 X 의 개수는

$$2^3 - 1 = 7$$

답 7

520

전략 일대일대응, 항등함수, 상수함수의 정의를 이용한다.

함수 $g(x)$ 가 항등함수이므로

$$g(-1) = -1, g(0) = 0, g(1) = 1$$

따라서 조건 (가)에서

$$f(0) = h(1) = g(-1) = -1$$

이때 $h(x)$ 가 상수함수이므로

$$h(-1) = h(0) = h(1) = -1$$

조건 (나)에서

$$f(1) = h(0) + g(1) = -1 + 1 = 0$$

즉 $f(0) = -1, f(1) = 0$ 이고 $f(x)$ 는 일대일대응이므로

$$f(-1) = 1$$

$$\therefore f(-1) - g(1) + h(0)$$

$$= 1 - 1 + (-1) = -1$$

답 -1

521

전략 함수값의 대소 관계가 정해진 함수의 개수는 조합의 수를 이용하여 구한다.

$$f(1) < f(2) < f(3) < f(4) = 6 < f(5) \text{에서}$$

$f(1) < f(2) < f(3) < 6$ 이므로 집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중 3개를 택한 후 작은 수부터 차례대로 집합 X 의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.

즉 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

또 $6 < f(5)$ 이므로 집합 Y 의 원소 7, 8 중 하나를 택한 후 집합 X 의 원소 5에 대응시키면 된다.

즉 $f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_2C_1 = 2$$

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$10 \times 2 = 20$$

답 20

해설 Focus

두 집합 X, Y 의 원소의 개수가 각각 n, m ($m \geq n$)이고, X 에서 Y 로의 함수 f 가 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 를 만족시킬 때, 함수 f 의 개수

⇒ 서로 다른 m 개에서 n 개를 택하는 조합의 수

$$\Rightarrow {}_mC_n$$

522

전략 $f(a) = a, f(b) = b, f(c) = c$ 임을 이용한다.

함수 f 가 항등함수이므로 정의역의 각 원소 x 에 대하여 $f(x) = x$ 이어야 한다.

(i) $x < -2$ 일 때

$$f(x) = -4 \text{이므로 } x = -4$$

(ii) $-2 \leq x \leq 1$ 일 때

$$f(x) = x \text{에서 } 2x + 1 = x \quad \therefore x = -1$$

(iii) $x > 1$ 일 때

$$f(x) = 3 \text{이므로 } x = 3$$

이상에서 $X = \{-4, -1, 3\}$

$$\therefore a + b + c = -4 + (-1) + 3 = -2 \quad \text{답 } -2$$

523

전략 주어진 조건을 파악하여 집합 X 의 각 원소에 대응될 수 있는 공역의 원소의 개수를 구한다.

$$f(x) = f(-x) \text{이므로}$$

$$f(-3) = f(3), f(-1) = f(1)$$

$f(-3), f(-1), f(0)$ 의 값이 될 수 있는 것은 각각 -3, -1, 0, 1, 3의 5개씩이므로 $f(-3), f(-1), f(0)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$$5^3 = 125$$

$f(3), f(1)$ 의 값은 각각 $f(-3), f(-1)$ 의 값과 같아야 하므로 구하는 함수 f 의 개수는

$$125 \times 1 \times 1 = 125$$

답 125

03 합성함수

● 본책 224~231쪽

524

$$(1) (g \circ f)(5) = g(f(5)) = g(c) = 4$$

$$(2) (g \circ f)(6) = g(f(6)) = g(d) = 7$$

$$(3) (g \circ f)(7) = g(f(7)) = g(b) = 4$$

$$(4) (f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(5) = c$$

$$(5) (f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(4) = a$$

$$(6) (f \circ g)(c) = f(g(c)) = f(4) = a$$

답 (1) **4** (2) **7** (3) **4** (4) **c** (5) **a** (6) **a**

525

$$(1) (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+3)$$

$$= -(2x+3)^2$$

$$= -4x^2 - 12x - 9$$

$$(2) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x^2)$$

$$= 2 \times (-x^2) + 3 = -2x^2 + 3$$

$$(3) (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x+3)$$

$$= 2(2x+3) + 3 = 4x + 9$$

$$(4) (g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(-x^2)$$

$$= -(-x^2)^2 = -x^4$$

답 (1) $(g \circ f)(x) = -4x^2 - 12x - 9$

(2) $(f \circ g)(x) = -2x^2 + 3$

(3) $(f \circ f)(x) = 4x + 9$

(4) $(g \circ g)(x) = -x^4$

526

$$(1) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x+5)$$

$$= (-x+5)^2 - 2$$

$$= x^2 - 10x + 23$$

이므로

$$((f \circ g) \circ h)(x)$$

$$= (f \circ g)(h(x))$$

$$= (f \circ g)(2x-1)$$

$$= (2x-1)^2 - 10(2x-1) + 23$$

$$= 4x^2 - 24x + 34$$

$$(2) (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(2x-1)$$

$$= -(2x-1) + 5$$

$$= -2x + 6$$

이므로

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x))$$

$$= f(-2x+6)$$

$$= (-2x+6)^2 - 2$$

$$= 4x^2 - 24x + 34$$

$$(3) (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2-2)$$

$$= -(x^2-2) + 5$$

$$= -x^2 + 7$$

이므로

$$((g \circ f) \circ h)(x) = (g \circ f)(h(x))$$

$$= (g \circ f)(2x-1)$$

$$= -(2x-1)^2 + 7$$

$$= -4x^2 + 4x + 6$$

$$(4) (h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(-x+5)$$

$$= 2(-x+5) - 1$$

$$= -2x + 9$$

이므로

$$(f \circ (h \circ g))(x) = f((h \circ g)(x))$$

$$= f(-2x+9)$$

$$= (-2x+9)^2 - 2$$

$$= 4x^2 - 36x + 79$$

답 (1) $((f \circ g) \circ h)(x) = 4x^2 - 24x + 34$

(2) $(f \circ (g \circ h))(x) = 4x^2 - 24x + 34$

(3) $((g \circ f) \circ h)(x) = -4x^2 + 4x + 6$

(4) $(f \circ (h \circ g))(x) = 4x^2 - 36x + 79$

527

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3$$

이때 $g(b) = 3$ 이므로 $f(x) = b$ 에서

$$x = -1$$

답 -1

528

$$g(2) = -2 + 3 = 1, f(-1) = 2 \times (-1) - 1 = -3$$

이므로

$$(f \circ g)(2) + (g \circ f)(-1)$$

$$= f(g(2)) + g(f(-1))$$

$$= f(1) + g(-3)$$

$$= (2 \times 1 - 1) + 5 = 6$$

답 6

529

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(3)$$

$$g(3) = 1$$

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3)$$

$$f(3) = 1$$

이때 두 함수 f, g 는 모두 일대일대응이므로

$$\begin{aligned} f(1) &= 2, g(2) = 2 \\ \therefore (f \circ f)(3) + (g \circ f)(1) &= f(f(3)) + g(f(1)) \\ &= f(1) + g(2) \\ &= 2 + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

답 4

530

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(-x+k) \\ &= 2(-x+k) + 3 \\ &= -2x + 2k + 3 \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(2x+3) \\ &= -(2x+3) + k \\ &= -2x - 3 + k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \circ g &= g \circ f \text{ 이므로} \\ -2x + 2k + 3 &= -2x - 3 + k \\ 2k + 3 &= -3 + k \\ \therefore k &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } g(x) &= -x - 6 \text{ 이므로} \\ g(-2) &= -(-2) - 6 = -4 \end{aligned}$$

답 -4

다른 풀이 $f \circ g = g \circ f$ 에서 $(f \circ g)(0) = (g \circ f)(0)$ 이므로

$$\begin{aligned} f(g(0)) &= g(f(0)) \\ f(k) &= g(3), \quad 2k + 3 = -3 + k \\ \therefore k &= -6 \end{aligned}$$

531

$$\begin{aligned} g(3) &= -1 \text{에서} \\ 3b + 2 &= -1 \quad \therefore b = -1 \\ \text{따라서 } f(x) &= ax - 1, g(x) = -x + 2 \text{에서} \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(-x+2) \\ &= a(-x+2) - 1 \\ &= -ax + 2a - 1 \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(ax-1) \\ &= -(ax-1) + 2 \\ &= -ax + 3 \end{aligned}$$

$f \circ g = g \circ f$ 이므로

$$\begin{aligned} -ax + 2a - 1 &= -ax + 3 \\ 2a - 1 &= 3 \quad \therefore a = 2 \\ \therefore ab &= 2 \times (-1) = -2 \end{aligned}$$

답 -2

532

주어진 대응에 의하여

$$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 1$$

$f \circ g = g \circ f$ 이므로

$$f(g(x)) = g(f(x)) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(g(1)) = g(f(1))$$

$$\begin{aligned} g(1) = 3 \text{ 이므로 } f(3) &= g(2) \\ \therefore g(2) &= 4 \end{aligned}$$

①에 $x=2$ 를 대입하면

$$f(g(2)) = g(f(2))$$

$$f(4) = g(3) \quad \therefore g(3) = 1$$

①에 $x=3$ 을 대입하면

$$f(g(3)) = g(f(3))$$

$$\begin{aligned} f(1) &= g(4) \quad \therefore g(4) = 2 \\ \therefore g(2) - g(4) &= 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

답 2

533

(1) $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = 2h(x) - 1$ 이므로

$$\begin{aligned} (f \circ h)(x) &= g(x) \text{에서} \\ 2h(x) - 1 &= -3x + 4 \\ \therefore h(x) &= -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

(2) $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x-1)$ 이므로

$$\begin{aligned} (h \circ f)(x) &= g(x) \text{에서} \\ h(2x-1) &= -3x + 4 \end{aligned}$$

$$2x-1=t \text{라 하면 } x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$h(t) = -3\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right) + 4 = -\frac{3}{2}t + \frac{5}{2}$$

$$\therefore h(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

(3) $(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x)))$

$$\begin{aligned} &= h(g(2x-1)) \\ &= h(-6x+7) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \leftarrow g(2x-1) \\ = -3(2x-1) + 4 \\ = -6x+7 \end{array}$$

$$\begin{aligned}(h \circ g \circ f)(x) &= g(x) \text{에서} \\ h(-6x+7) &= -3x+4 \\ -6x+7=t \text{라 하면 } x &= -\frac{1}{6}t + \frac{7}{6} \text{이므로} \\ h(t) &= -3\left(-\frac{1}{6}t + \frac{7}{6}\right) + 4 = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \\ \therefore h(x) &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 풀이 참조

534

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{2} &= t \text{라 하면 } x = 2t-1 \\ \therefore f(t) &= 3(2t-1) + 2 = 6t-1 \\ \text{여기서 } t \text{ 대신 } \frac{1-2x}{3} \text{를 대입하면} \\ f\left(\frac{1-2x}{3}\right) &= 6 \times \frac{1-2x}{3} - 1 \\ &= -4x+1 \\ \text{답 } f\left(\frac{1-2x}{3}\right) &= -4x+1\end{aligned}$$

535

$$\begin{aligned}f^1(x) &= f(x) = x+2 \\ f^2(x) &= (f \circ f^1)(x) = f(f^1(x)) = f(x+2) = x+4 \\ f^3(x) &= (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x)) = f(x+4) = x+6 \\ f^4(x) &= (f \circ f^3)(x) = f(f^3(x)) = f(x+6) = x+8 \\ &\vdots \\ \therefore f^n(x) &= x+2n \\ \text{따라서 } f^{2025}(x) &= x+2 \times 2025 = x+4050 \text{이므로} \\ f^{2025}(1) &= 1+4050 = 4051\end{aligned}$$

답 4051

536

$$\begin{aligned}f^1(x) &= f(x) = \frac{x}{3} \\ f^2(x) &= (f \circ f^1)(x) = f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3^2} \\ f^3(x) &= (f \circ f^2)(x) = f\left(\frac{x}{3^2}\right) = \frac{x}{3^3} \\ f^4(x) &= (f \circ f^3)(x) = f\left(\frac{x}{3^3}\right) = \frac{x}{3^4} \\ &\vdots \\ \therefore f^n(x) &= \frac{x}{3^n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore f^5(729) + f^4(243) &= \frac{729}{3^5} + \frac{243}{3^4} \\ &= \frac{3^6}{3^5} + \frac{3^5}{3^4} \\ &= 3+3=6\end{aligned}$$

답 6

537

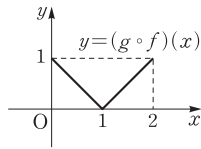
$$\begin{aligned}f(1) &= 5, f(5) = 1 \text{이므로} \\ f^2(1) &= (f \circ f^1)(1) = f(f(1)) = f(5) = 1 \\ f^3(1) &= (f \circ f^2)(1) = f(f^2(1)) = f(1) = 5 \\ f^4(1) &= (f \circ f^3)(1) = f(f^3(1)) = f(5) = 1 \\ &\vdots \\ \text{즉 } n=1, 2, 3, \dots \text{일 때, } f^n(1) \text{의 값은 } 5, 1 \text{이 이 순} \\ &\text{서대로 반복된다.} \\ \therefore f^{100}(1) &= 1 \\ \text{또 } f(3) &= 7, f(7) = 3 \text{이므로} \\ f^2(3) &= (f \circ f^1)(3) = f(f(3)) = f(7) = 3 \\ f^3(3) &= (f \circ f^2)(3) = f(f^2(3)) = f(3) = 7 \\ f^4(3) &= (f \circ f^3)(3) = f(f^3(3)) = f(7) = 3 \\ &\vdots \\ \text{즉 } n=1, 2, 3, \dots \text{일 때, } f^n(3) \text{의 값은 } 7, 3 \text{이 이 순} \\ &\text{서대로 반복된다.} \\ \therefore f^{101}(3) &= 7 \\ \therefore f^{100}(1) + f^{101}(3) &= 1+7=8\end{aligned}$$

답 8

538

$$\begin{aligned}\text{주어진 그래프에서} \\ f(x) &= x-1 \quad (0 \leq x \leq 2), \\ g(x) &= \begin{cases} -x & (-1 \leq x \leq 0) \\ x & (0 \leq x \leq 1) \end{cases} \\ \therefore (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= \begin{cases} -f(x) & (-1 \leq f(x) \leq 0) \\ f(x) & (0 \leq f(x) \leq 1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -(x-1) & (-1 \leq x-1 \leq 0) \\ x-1 & (0 \leq x-1 \leq 1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -x+1 & (0 \leq x \leq 1) \\ x-1 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}\end{aligned}$$

따라서 함수 $y=(g \circ f)(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

연습문제

● 본책 232~233쪽

539

전략 $(f \circ g)(k) = f(g(k))$ 임을 이용하여 함숫값을 구한다.

$$\begin{aligned} & (f \circ f \circ g \circ g)(\sqrt{2}) \\ &= f(f(g(g(\sqrt{2})))) \\ &= f(f(g(-\sqrt{2}))) \quad \leftarrow g(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} \\ &= f(f(\sqrt{2})) \quad \leftarrow g(-\sqrt{2}) = \sqrt{2} \\ &= f(-2) \quad \leftarrow f(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2})^2 = -2 \\ &= (-2)^2 = 4 \end{aligned}$$

답 4

540

전략 집합 X 의 각 원소 x 에 대하여 $(g \circ f)(x) = x$ 임을 이용한 다.

정의역이 $X = \{2, 3\}$ 인 함수 $g \circ f$ 가 항등함수이므로

$$(g \circ f)(2) = 2, (g \circ f)(3) = 3$$

$$(g \circ f)(2) = 2 \text{에서}$$

$$g(f(2)) = 2, \quad g(-a) = 2$$

$$\therefore a^2 - 2a + b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(g \circ f)(3) = 3 \text{에서}$$

$$g(f(3)) = 3, \quad g(0) = 3$$

$$\therefore b = 3$$

①에 $b=3$ 을 대입하면

$$a^2 - 2a + 3 = 2, \quad a^2 - 2a + 1 = 0$$

$$(a-1)^2 = 0 \quad \therefore a = 1 \text{ (중근)}$$

$$\therefore a + b = 1 + 3 = 4$$

답 4

541

전략 $f(x) = ax + b$ 로 놓고 $f \circ f$ 를 구한다.

$f(x) = ax + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax + b)$$

$$= a(ax + b) + b$$

$$= a^2x + ab + b$$

이때 $a^2x + ab + b = 9x - 4$ 이므로

$$a^2 = 9, \quad ab + b = -4$$

$$a^2 = 9 \text{에서} \quad a = \pm 3$$

(i) $a = -3$ 일 때, $ab + b = -4$ 에서

$$-3b + b = -4 \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore f(x) = -3x + 2$$

(ii) $a = 3$ 일 때, $ab + b = -4$ 에서

$$3b + b = -4 \quad \therefore b = -1$$

$$\therefore f(x) = 3x - 1$$

(i), (ii)에서

$$f(x) = -3x + 2 \text{ 또는 } f(x) = 3x - 1$$

$$\text{답 } f(x) = -3x + 2, f(x) = 3x - 1$$

542

전략 합성함수의 성질을 이용하여 $(f \circ (g \circ h))(x)$ 를 구한다.

$$(f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x)$$

$$= (f \circ g)(h(x))$$

$$= (f \circ g)(x - 1)$$

$$= (x - 1)^2 + 4$$

$$(f \circ (g \circ h))(x) = 20 \text{에서}$$

$$(x - 1)^2 + 4 = 20, \quad x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$(x + 3)(x - 5) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 5$$

따라서 구하는 x 의 값의 곱은

$$-3 \times 5 = -15$$

답 -15

543

전략 $h(x) = ax + b$ 로 놓고 $h \circ g \circ f = f$ 를 만족시키는 a, b 의 값을 구한다.

$h(x) = ax + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))) = h(g(-x))$$

$$= h(-2x - 1)$$

$$= a(-2x - 1) + b$$

$$= -2ax - a + b$$

$$h \circ g \circ f = f \text{이므로} \quad -2ax - a + b = -x$$

즉 $-2a = -1$, $-a + b = 0$ 이므로

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2} \quad \therefore h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

따라서 $h(k) = 4$ 에서

$$\frac{1}{2}k + \frac{1}{2} = 4 \quad \therefore k = 7$$

답 7

다른 풀이 $(h \circ g \circ f)(x) = f(x)$ 에서

$$h(-2x-1) = -x$$

양변에 $x = -4$ 를 대입하면

$$h(7) = 4 \quad \therefore k = 7$$

544

전략 $f(n)$ 의 값이 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나누어 생각한다.

$$(f \circ f)(n) = f(f(n)) = 5$$

(i) $f(n)$ 의 값이 홀수일 때

$$f(f(n)) = f(n) + 1 = 5 \text{이므로}$$

$$f(n) = 4$$

이는 $f(n)$ 의 값이 홀수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(n)$ 의 값이 짝수일 때

$$f(f(n)) = \frac{f(n)}{2} + 1 = 5 \text{이므로}$$

$$f(n) = 8$$

$$n \text{이 홀수이면 } f(n) = n + 1 = 8$$

$$\therefore n = 7$$

$$n \text{이 짝수이면 } f(n) = \frac{n}{2} + 1 = 8$$

$$\therefore n = 14$$

(i), (ii)에서 $n = 7$ 또는 $n = 14$

따라서 구하는 자연수 n 의 값의 합은

$$7 + 14 = 21$$

답 21

다른 풀이 음이 아닌 정수 k 에 대하여

(i) $n = 4k + 1$ 일 때

$$n \text{이 홀수이므로 } f(n) = n + 1 = 4k + 2$$

$f(n)$ 의 값이 짝수이므로

$$(f \circ f)(n) = f(f(n)) = f(4k + 2)$$

$$= \frac{4k + 2}{2} + 1 = 2k + 2$$

$$\text{따라서 } 2k + 2 = 5 \text{이므로 } k = \frac{3}{2}$$

이때 k 가 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $n = 4k + 2$ 일 때

$$n \text{이 짝수이므로 } f(n) = \frac{n}{2} + 1 = 2k + 2$$

$f(n)$ 의 값이 짝수이므로

$$(f \circ f)(n) = f(f(n)) = f(2k + 2)$$

$$= \frac{2k + 2}{2} + 1 = k + 2$$

$$\text{따라서 } k + 2 = 5 \text{이므로 } k = 3$$

$$\therefore n = 4 \times 3 + 2 = 14$$

(iii) $n = 4k + 3$ 일 때

$$n \text{이 홀수이므로 } f(n) = n + 1 = 4k + 4$$

$f(n)$ 의 값이 짝수이므로

$$(f \circ f)(n) = f(f(n)) = f(4k + 4)$$

$$= \frac{4k + 4}{2} + 1 = 2k + 3$$

$$\text{따라서 } 2k + 3 = 5 \text{이므로 } k = 1$$

$$\therefore n = 4 \times 1 + 3 = 7$$

(iv) $n = 4k + 4$ 일 때

$$n \text{이 짝수이므로 } f(n) = \frac{n}{2} + 1 = 2k + 3$$

$f(n)$ 의 값이 홀수이므로

$$(f \circ f)(n) = f(f(n)) = f(2k + 3)$$

$$= 2k + 3 + 1 = 2k + 4$$

$$\text{따라서 } 2k + 4 = 5 \text{이므로 } k = \frac{1}{2}$$

이때 k 가 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

이상에서 $n = 7$ 또는 $n = 14$

545

전략 주어진 조건을 만족시키는 $f(2)$, $f(3)$ 의 값을 구한다.

함수 f 가 일대일대응이고 $f(1) = 3$ 이므로

$$f(2) = 4, f(3) = 5 \text{ 또는 } f(2) = 5, f(3) = 4$$

(i) $f(2) = 4, f(3) = 5$ 일 때

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = 5 \text{이므로 } g(5) = 5$$

그런데 $g(5) = 6$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(2) = 5, f(3) = 4$ 일 때

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = 5 \text{이므로 } g(4) = 5$$

이때 함수 g 는 일대일대응이므로

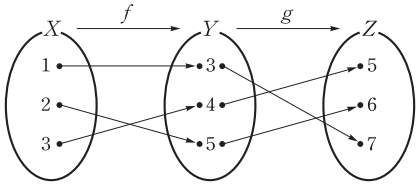
$$g(3) = 7$$

(i), (ii)에서 $g(3) = 7$

$$\therefore (g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(3) = 7$$

답 7

참고 주어진 조건을 만족시키는 두 함수 f, g 는 다음과 같다.



546

전략 주어진 조건을 만족시키는 a, b 사이의 관계식을 구한다.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+4)$$

$$= -a(3x+4) + b$$

$$= -3ax - 4a + b$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(-ax+b)$$

$$= 3(-ax+b) + 4$$

$$= -3ax + 3b + 4$$

$$f \circ g = g \circ f \text{ 이므로}$$

$$-3ax - 4a + b = -3ax + 3b + 4$$

$$-4a + b = 3b + 4, \quad -2b = 4a + 4$$

$$\therefore b = -2a - 2$$

$$\therefore f(x) = -ax + b = -ax - 2a - 2$$

$$= (-x-2)a - 2$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 a 의 값에 관계없이 점 $(-2, -2)$ 를 지나므로

$$m = -2, n = -2$$

$$\therefore m+n = -4$$

답 -4

547

전략 $f^n(3)$ (n 은 자연수)의 값의 규칙성을 파악한다.

$$f^1(3) = f(3) = 2$$

$$f^2(3) = (f \circ f^1)(3) = f(f^1(3)) = f(2) = 1$$

$$f^3(3) = (f \circ f^2)(3) = f(f^2(3)) = f(1) = 5$$

$$f^4(3) = (f \circ f^3)(3) = f(f^3(3)) = f(5) = 4$$

$$f^5(3) = (f \circ f^4)(3) = f(f^4(3)) = f(4) = 3$$

$$f^6(3) = (f \circ f^5)(3) = f(f^5(3)) = f(3) = 2$$

$\vdots$

즉 $n=1, 2, 3, \dots$ 일 때, $f^n(3)$ 의 값은 2, 1, 5, 4, 3 이 이 순서대로 반복된다.

이때 $2024 = 5 \times 404 + 4$ 이므로

$$f^{2024}(3) = f^4(3) = 4$$

답 4

548

전략 구간을 나누어 $f \circ g$ 를 구한다.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= \begin{cases} (-x+7)-4 & (x < 0) \\ (2x^2-4ax+7)-4 & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x+3 & (x < 0) \\ 2x^2-4ax+3 & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$y = 2x^2 - 4ax + 3 = 2(x-a)^2 - 2a^2 + 3 \text{ 이므로 } a \leq 0$$

이면 $f \circ g$ 의 치역이 $\{y | y \geq 3\}$ 이다.

$$\therefore a > 0$$

따라서 함수 $y=(f \circ g)(x)$ 의

치역이 $\{y | y \geq 1\}$ 이라면 오른

쪽 그림과 같이 함수

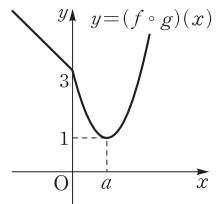
$$y = 2(x-a)^2 - 2a^2 + 3 \text{의 그}$$

래프의 꼭짓점의 y 좌표가 1이

어야 하므로

$$-2a^2 + 3 = 1, \quad a^2 = 1$$

$$\therefore a = 1 (\because a > 0)$$



답 1

549

전략 주어진 그래프를 이용하여 $f^n(1)$ (n 은 자연수)의 값의 규칙성을 파악한다.

$$f(x) = \begin{cases} -2x+4 & (0 \leq x < 2) \\ x-2 & (2 \leq x \leq 4) \end{cases} \text{ 이므로}$$

$$f^1(1) = f(1) = 2$$

$$f^2(1) = (f \circ f^1)(1) = f(f^1(1)) = f(2) = 0$$

$$f^3(1) = (f \circ f^2)(1) = f(f^2(1)) = f(0) = 4$$

$$f^4(1) = (f \circ f^3)(1) = f(f^3(1)) = f(4) = 2$$

$\vdots$

즉 $n=1, 2, 3, \dots$ 일 때, $f^n(1)$ 의 값은 2, 0, 4가 이 순서대로 반복된다.

이때 $100 = 3 \times 33 + 1$ 이므로

$$f^1(1) + f^2(1) + f^3(1) + \dots + f^{100}(1)$$

$$= 33 \times (2+0+4) + 2$$

$$= 200$$

답 200

550

전략 주어진 그래프에서 함수 $f(x)$ 의 식을 구한다.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ 2-2x & (\frac{1}{2} \leq x \leq 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$= \begin{cases} 2f(x) & (0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}) \\ 2-2f(x) & (\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1) \end{cases}$$

(i) $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ 일 때, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ 이므로

$$(f \circ f)(x) = 2f(x) = 2 \times 2x = 4x$$

(ii) $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$ 일 때, $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$ 이므로

$$(f \circ f)(x) = 2-2f(x) = 2-2 \times 2x = 2-4x$$

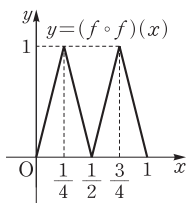
(iii) $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$ 일 때, $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$ 이므로

$$(f \circ f)(x) = 2-2f(x) = 2-2(2-2x) = 4x-2$$

(iv) $\frac{3}{4} \leq x \leq 1$ 일 때, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ 이므로

$$(f \circ f)(x) = 2f(x) = 2(2-2x) = 4-4x$$

이상에서 함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

04 역함수

• 본책 234~243쪽

551

ㄴ. 집합 X 의 원소 1, 2가 모두 집합 Y 의 원소 b 에 대응하므로 일대일대응이 아니다.
따라서 역함수가 존재하지 않는다.

ㄹ. 집합 X 의 원소 1, 3이 모두 집합 Y 의 원소 a 에 대응하므로 일대일대응이 아니다.

따라서 역함수가 존재하지 않는다.

이상에서 역함수가 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

552

(1) $f^{-1}(5) = a$ 에서 $f(a) = 5$ 이므로

$$-2a + 3 = 5 \quad \therefore a = -1$$

(2) $f^{-1}(a) = -2$ 에서 $f(-2) = a$ 이므로

$$a = -2 \times (-2) + 3 = 7$$

답 (1) -1 (2) 7

553

(1) 함수 $y = 4x - 2$ 는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y = 4x - 2$ 를 x 에 대하여 풀면

$$4x = y + 2 \quad \therefore x = \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

(2) 함수 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 은 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 을 x 에 대하여 풀면

$$\frac{1}{2}x = -y + \frac{3}{2} \quad \therefore x = -2y + 3$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = -2x + 3$$

답 (1) $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ (2) $y = -2x + 3$

554

(1) $f(1) = b$ 이므로 $f^{-1}(b) = 1$

(2) $(f^{-1})^{-1}(2) = f(2) = c$

(3) $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ 이므로 $(f^{-1} \circ f)(4) = 4$

(4) $(f \circ f^{-1})(x) = x$ 이므로 $(f \circ f^{-1})(a) = a$

답 (1) 1 (2) c (3) 4 (4) a

다른 풀이 (3) $(f^{-1} \circ f)(4) = f^{-1}(f(4)) = f^{-1}(d) = 4$

(4) $(f \circ f^{-1})(a) = f(f^{-1}(a)) = f(3) = a$

555

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$f^{-1}(x) = g(x) \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$g(8) = k$ 라 하면 $f(k) = 8$ 이므로

$$-2k + 6 = 8 \quad \therefore k = -1$$

$$\therefore g(8) = -1$$

한편 $\textcircled{㉠}$ 에서 $g^{-1}(x) = f(x)$ 이므로

$$g^{-1}(3) = f(3) = -2 \times 3 + 6 = 0$$

$$\therefore g(8) + g^{-1}(3) = -1 + 0 = -1 \quad \text{답 } -1$$

556

$f(x) = ax + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하자.

$f^{-1}(1) = 3$ 에서 $f(3) = 1$ 이므로

$$3a + b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 $(f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(1) = -2$ 이므로

$$a + b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a = \frac{3}{2}, b = -\frac{7}{2}$$

따라서 $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$ 이므로

$$f(-1) = -\frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -5 \quad \text{답 } -5$$

557

$2x + 3 = t$ 라 하면 $x = \frac{t-3}{2}$ 이므로

$$f(t) = -3 \times \frac{t-3}{2} + 4 = -\frac{3}{2}t + \frac{17}{2}$$

즉 $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{17}{2}$ 이므로

$$f(7) = -\frac{21}{2} + \frac{17}{2} = -2$$

$f^{-1}(7) = k$ 라 하면 $f(k) = 7$ 이므로

$$-\frac{3}{2}k + \frac{17}{2} = 7, \quad -\frac{3}{2}k = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore k = 1 \quad \therefore f^{-1}(7) = 1$$

$$\therefore f(7) + f^{-1}(7) = -2 + 1 = -1 \quad \text{답 } -1$$

다른 풀이 $f(2x+3) = -3x+4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$

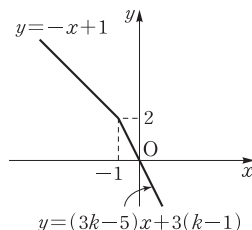
$\textcircled{㉠}$ 에 $x=2$ 를 대입하면 $f(7) = -2$

$\textcircled{㉠}$ 에 $x=-1$ 을 대입하면 $f(1) = 7$

$$\therefore f^{-1}(7) = 1$$

558

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 $f(x)$ 가 일대일 대응이어야 하므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



즉 $x \geq -1$ 에서 $y = (3k-5)x + 3(k-1)$ 의 그래프의 기울기가 음수이어야 하므로

$$3k - 5 < 0 \quad \therefore k < \frac{5}{3}$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 1이다. 답 1

559

함수 $f(x) = 3x + 2$ 의 역함수가 존재하므로 $f(x)$ 는 일대일대응이다.

이때 직선 $y=f(x)$ 의 기울기가 양수이므로

$$f(0) = b, f(a) = 5$$

$$f(0) = b \text{에서 } b = 2$$

$$f(a) = 5 \text{에서 } 3a + 2 = 5 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore a + b = 1 + 2 = 3 \quad \text{답 3}$$

560

$f(x) = ax + |x-2| + 3 - 2a$ 에서

(i) $x \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + (x-2) + 3 - 2a \\ &= (a+1)x + 1 - 2a \end{aligned}$$

(ii) $x < 2$ 일 때

$$\begin{aligned} f(x) &= ax - (x-2) + 3 - 2a \\ &= (a-1)x + 5 - 2a \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 $f(x)$ 가 일대일대응이어야 하므로 $a+1 \neq 0$, $a-1 \neq 0$ 이고 두 직선 $y = (a+1)x + 1 - 2a$ 와

$y = (a-1)x + 5 - 2a$ 의 기울기의 부호가 같아야 한다.

따라서 $(a+1)(a-1) > 0$ 이므로

$$a < -1 \text{ 또는 } a > 1 \quad \text{답 } a < -1 \text{ 또는 } a > 1$$

561

$y = \frac{1}{3}x + 2$ 를 x 에 대하여 풀면

$$\frac{1}{3}x = y - 2 \quad \therefore x = 3y - 6$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = 3x - 6$

따라서 $3x - 6 = ax + b$ 이므로

$$a = 3, b = -6$$

$$\therefore ab = -18$$

답 -18

562

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g(-3x + 1)$$

$$= (-3x + 1) - 2$$

$$= -3x - 1$$

$y = -3x - 1$ 로 놓고 x 에 대하여 풀면

$$3x = -y - 1 \quad \therefore x = -\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

$$\therefore h^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$\text{답 } h^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

563

$3x - 2 = t$ 라 하면 $x = \frac{1}{3}t + \frac{2}{3}$ 이므로

$$f(t) = 6\left(\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}\right) + 1 = 2t + 5$$

$$\therefore f(x) = 2x + 5$$

$y = 2x + 5$ 로 놓고 x 에 대하여 풀면

$$2x = y - 5 \quad \therefore x = \frac{1}{2}y - \frac{5}{2}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

즉 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ 이므로

$$a = \frac{1}{2}, b = -\frac{5}{2} \quad \text{답 } a = \frac{1}{2}, b = -\frac{5}{2}$$

564

$$(f^{-1} \circ g)^{-1}(3) = (g^{-1} \circ f)(3) = g^{-1}(f(3))$$

$$= g^{-1}(5) \quad \leftarrow f(3) = 2 \times 3 - 1 = 5$$

$g^{-1}(5) = k$ 라 하면 $g(k) = 5$ 이므로

$$\frac{1}{2}k - 1 = 5 \quad \therefore k = 12$$

즉 $g^{-1}(5) = 12$ 이므로

$$(f^{-1} \circ g)^{-1}(3) = g^{-1}(5) = 12$$

답 12

565

$$(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(x)$$

$$= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(x) \quad \leftarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

$$= (g^{-1} \circ f)(x) \quad \leftarrow f \circ f^{-1} = I$$

$g(x) = x + 4$ 에서 $y = x + 4$ 로 놓고 x 에 대하여 풀면

$$x = y - 4$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = x - 4$

$$\therefore g^{-1}(x) = x - 4$$

$$\therefore (g^{-1} \circ f)(x) = g^{-1}(f(x))$$

$$= g^{-1}(-2x + 1)$$

$$= (-2x + 1) - 4$$

$$= -2x - 3$$

따라서 $-2x - 3 = ax + b$ 이므로

$$a = -2, b = -3$$

답 $a = -2, b = -3$

566

$$((f^{-1} \circ g^{-1}) \circ f)(a) = (f^{-1} \circ g^{-1})(f(a))$$

$$= (g \circ f)^{-1}(f(a))$$

$$= (g \circ f)^{-1}(2a + 1) = 1$$

따라서 $(g \circ f)(1) = 2a + 1$ 이므로

$$g(f(1)) = g(3) = 2a + 1$$

$$-\frac{1}{3} \times 3 + 4 = 2a + 1$$

$$\therefore a = 1$$

답 1

다른 풀이 $((f^{-1} \circ g^{-1}) \circ f)(a)$

$$= (f^{-1} \circ g^{-1})(f(a))$$

$$= f^{-1}(g^{-1}(f(a))) = 1$$

이므로

$$g^{-1}(f(a)) = f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$$

따라서 $f(a) = g(3)$ 이므로

$$2a + 1 = 3 \quad \therefore a = 1$$

567

직선 $y=x$ 를 이용하여
 y 축과 점선이 만나는 점
 의 y 좌표를 구하면 오른
 쪽 그림과 같다.

$f^{-1}(x_3)=k$ 라 하면

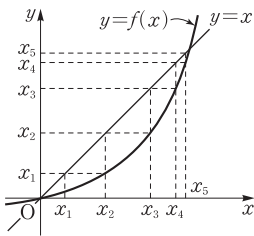
$f(k)=x_3$ 이므로

$$k=x_4$$

$$\begin{aligned}\therefore (f \circ f)^{-1}(x_3) &= (f^{-1} \circ f^{-1})(x_3) \\ &= f^{-1}(f^{-1}(x_3)) = f^{-1}(x_4)\end{aligned}$$

$f^{-1}(x_4)=l$ 이라 하면 $f(l)=x_4$ 이므로 $l=x_5$

$$\therefore (f \circ f)^{-1}(x_3) = f^{-1}(x_4) = x_5 \quad \text{답 } x_5$$



568

직선 $y=x$ 를 이용하여
 y 축과 점선이 만나는 점
 의 y 좌표를 구하면 오른
 쪽 그림과 같다.

$$\begin{aligned}(f \circ f \circ g)^{-1}(c) &= (g^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(c) \\ &= g^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(c)))\end{aligned}$$

에서 $f^{-1}(c)=k$ 라 하면 $f(k)=c$ 이므로

$$k=b$$

$$\begin{aligned}\therefore (f \circ f \circ g)^{-1}(c) &= g^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(c))) \\ &= g^{-1}(f^{-1}(b))\end{aligned}$$

$f^{-1}(b)=l$ 이라 하면 $f(l)=b$ 이므로

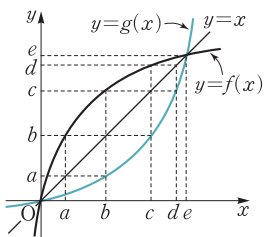
$$l=a$$

$$\therefore (f \circ f \circ g)^{-1}(c) = g^{-1}(f^{-1}(b)) = g^{-1}(a)$$

$g^{-1}(a)=m$ 이라 하면 $g(m)=a$ 이므로

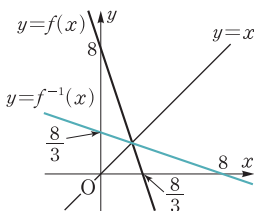
$$m=b$$

$$\therefore (f \circ f \circ g)^{-1}(c) = g^{-1}(a) = b \quad \text{답 } b$$



569

함수 $y=f(x)$ 의 그래프
 와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$
 의 그래프는 직선 $y=x$ 에
 대하여 대칭이므로 오른
 쪽 그림과 같다.



이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수

$y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래
 프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같으므로

$$-3x+8=x \text{에서}$$

$$-4x=-8 \quad \therefore x=2$$

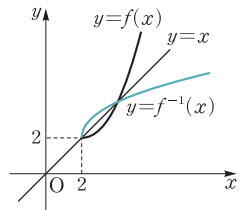
따라서 교점의 좌표는 $(2, 2)$ 이므로

$$p=2, q=2$$

$$\therefore pq=4 \quad \text{답 } 4$$

570

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와
 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그
 래프는 직선 $y=x$ 에 대하여
 대칭이므로 오른쪽 그림과
 같다.



이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래

프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 함수
 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같으므로

$$\frac{1}{2}(x-2)^2+2=x \text{에서}$$

$$x^2-6x+8=0, \quad (x-2)(x-4)=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 두 교점의 좌표는 $(2, 2)$, $(4, 4)$ 이므로 구하
 는 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{(4-2)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{2} \quad \text{답 } 2\sqrt{2}$$

연습 문제

● 본책 244~246쪽

571

전략 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 점 (p, q) 를 지나면 $f(q)=p$ 임을
 이용한다.

$f(x)=ax+b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하자.

$y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 모두 점 $(-2, 5)$
 를 지나므로

$$f(-2)=5, f^{-1}(-2)=5$$

$$f(-2)=5 \text{에서} \quad -2a+b=5 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f^{-1}(-2)=5 \text{에서} \quad f(5)=-2 \text{이므로}$$

$$5a+b=-2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=-1, b=3$$

따라서 $f(x)=-x+3$ 이므로

$$f(1)=2$$

$f^{-1}(-1)=k$ 라 하면 $f(k)=-1$ 이므로

$$-k+3=-1 \quad \therefore k=4$$

즉 $f^{-1}(-1)=4$ 이므로

$$f(1)+f^{-1}(-1)=2+4=6$$

답 6

572

전략 f^{-1} 를 직접 구하여 f 와 비교한다.

$y=ax+1$ 로 놓고 x 에 대하여 풀면

$$ax=y-1 \quad \therefore x=\frac{1}{a}y-\frac{1}{a} \quad (\because a \neq 0)$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y=\frac{1}{a}x-\frac{1}{a}$$

즉 $f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{1}{a}$ 이므로 $f=f^{-1}$ 에서

$$ax+1=\frac{1}{a}x-\frac{1}{a}$$

$$a=\frac{1}{a}, 1=-\frac{1}{a} \quad \therefore a=-1$$

답 -1

다른 풀이 $f=f^{-1}$ 이므로

$$(f \circ f)(x)=x$$

$$(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+1)$$

$$=a(ax+1)+1$$

$$=a^2x+a+1$$

이므로 $a^2x+a+1=x$

$$a^2=1, a+1=0$$

$$\therefore a=-1$$

573

전략 주어진 함숫값을 이용하여 k 의 값을 구하고 역함수의 성질을 이용한다.

$f^{-1}(2)=1$ 에서 $f(1)=2$ 이므로

$$4+k=2 \quad \therefore k=-2$$

$$\therefore f(x)=4x-2$$

$$(f \circ (f \circ f)^{-1})(4)=(f \circ (f^{-1} \circ f^{-1}))(4)$$

$$=((f \circ f^{-1}) \circ f^{-1})(4)$$

$$=f^{-1}(4)$$

에서 $f^{-1}(4)=p$ 라 하면 $f(p)=4$ 이므로

$$4p-2=4 \quad \therefore p=\frac{3}{2}$$

즉 $f^{-1}(4)=\frac{3}{2}$ 이므로

$$(f \circ (f \circ f)^{-1})(4)=f^{-1}(4)=\frac{3}{2} \quad \text{답 } \frac{3}{2}$$

574

전략 역함수의 성질을 이용하여 $((f^{-1} \circ g)^{-1} \circ f)(-2)$ 를 간단히 한다.

$$((f^{-1} \circ g)^{-1} \circ f)(-2)$$

$$=(g^{-1} \circ f \circ f)(-2)$$

$$=g^{-1}(f(f(-2)))$$

$$=g^{-1}(f(-1)) \quad \leftarrow f(-2)=-2+1=-1$$

$$=g^{-1}(0) \quad \leftarrow f(-1)=-1+1=0$$

이때 $g^{-1}(0)=k$ 라 하면 $g(k)=0$ 이므로

$$k+1=0 \quad \therefore k=-1$$

즉 $g^{-1}(0)=-1$ 이므로

$$((f^{-1} \circ g)^{-1} \circ f)(-2)=g^{-1}(0)=-1$$

답 -1

575

전략 주어진 그래프를 이용하여 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 함숫값을 구한다.

직선 $y=x$ 를 이용하여

y 축과 점선이 만나는

점의 y 좌표를 구하면

오른쪽 그림과 같다.

$f^{-1}(6)=k$ 라 하면

$f(k)=6$ 이므로

$$k=5$$

$$\therefore (g \circ f^{-1})(6)=g(f^{-1}(6))=g(5)=3$$

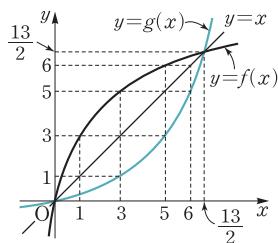
또 $(f^{-1} \circ g)(5)=f^{-1}(g(5))=f^{-1}(3)$ 에서

$f^{-1}(3)=l$ 이라 하면 $f(l)=3$ 이므로 $l=1$

$$\therefore (f^{-1} \circ g)(5)=f^{-1}(3)=1$$

$$\therefore (g \circ f^{-1})(6)+(f^{-1} \circ g)(5)=3+1=4$$

답 4



576

전략 $f^{-1}(6)=a$ 로 놓고 $a \geq 2$ 인 경우와 $a < 2$ 인 경우로 나누어 생각한다.

$$(f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(9) \quad \leftarrow f(3) = 3 \times 3 = 9$$

$$= 3 \times 9 = 27$$

한편 $f^{-1}(-6)=a$ 라 하면 $f(a)=-6$

(i) $a \geq 2$ 일 때

$$f(a) = 3a \text{이므로}$$

$$3a = -6 \quad \therefore a = -2$$

그런데 $a \geq 2$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a < 2$ 일 때

$$f(a) = -a^2 + 5a \text{이므로}$$

$$-a^2 + 5a = -6, \quad a^2 - 5a - 6 = 0$$

$$(a+1)(a-6) = 0$$

$$\therefore a = -1 \quad (\because a < 2)$$

(i), (ii)에서 $a = -1$

즉 $f^{-1}(-6) = -1$ 이므로

$$(f \circ f)(3) + f^{-1}(-6) = 26$$

답 26

577

전략 주어진 조건을 이용하여 함숫값을 구한다.

$$f(1) + 2f(3) = 12 \text{에서}$$

$$f(1) = 2, f(3) = 5 \text{ 또는 } f(1) = 4, f(3) = 4$$

그런데 함수 f 의 역함수가 존재하므로 함수 f 는 일대일 대응이다.

$$\therefore f(1) = 2, f(3) = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $f^{-1}(1) - f^{-1}(3) = 2$ 에서

$$f^{-1}(1) = 3, f^{-1}(3) = 1$$

$$\text{또는 } f^{-1}(1) = 4, f^{-1}(3) = 2$$

$$\text{또는 } f^{-1}(1) = 5, f^{-1}(3) = 3$$

그런데 $\textcircled{1}$ 에서 $f^{-1}(2) = 1, f^{-1}(5) = 3$ 이므로

$$f^{-1}(1) = 4, f^{-1}(3) = 2$$

즉 $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 5, f(4) = 1$ 이므로

$$f(5) = 4$$

$$\therefore f(4) + f^{-1}(4) = 1 + 5 = 6$$

답 ②

578

전략 주어진 조건에서 $f(-1)=3, (f \circ g)(x)=2x+1$ 임을 이용한다.

$f^{-1}(3)=-1$ 에서 $f(-1)=3$ 이므로

$$-a + b = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(f \circ g)^{-1}(2x+1) = x \text{에서}$$

$$(f \circ g)(x) = 2x + 1$$

$$f(g(x)) = f(x+c) = a(x+c) + b$$

$$= ax + ac + b$$

$$\text{이므로 } ax + ac + b = 2x + 1$$

$$\therefore a = 2, ac + b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a = 2, b = 5, c = -2$$

$$\therefore a + b + c = 5$$

답 5

579

전략 역함수의 성질을 이용하여 $h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$ 를 $f \circ g$ 와 h 로 나타낸다.

$$(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(1) = (h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1})(1)$$

$$= h^{-1}((f \circ g)^{-1}(1))$$

$$(f \circ g)^{-1}(1) = k \text{라 하면 } (f \circ g)(k) = 1 \text{이므로}$$

$$2k - 3 = 1 \quad \therefore k = 2$$

$$\therefore (h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(1) = h^{-1}((f \circ g)^{-1}(1))$$

$$= h^{-1}(2)$$

$$h^{-1}(2) = l \text{이라 하면 } h(l) = 2 \text{이므로}$$

$$l + 1 = 2 \quad \therefore l = 1$$

$$\therefore (h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(1) = h^{-1}(2) = 1$$

답 1

다른 풀이 $h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g \circ h)^{-1}$ 이고

$$(f \circ g \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x))$$

$$= (f \circ g)(x+1)$$

$$= 2(x+1) - 3 = 2x - 1$$

$$\text{이때 } (f \circ g \circ h)^{-1}(1) = k \text{라 하면 } (f \circ g \circ h)(k) = 1$$

$$\text{이므로 } 2k - 1 = 1$$

$$\therefore k = 1$$

$$\text{즉 } (f \circ g \circ h)^{-1}(1) = 1 \text{이므로}$$

$$(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(1) = (f \circ g \circ h)^{-1}(1) = 1$$

580

전략 역함수의 성질을 이용한다.

$$f^{-1}(2) = 1 \text{에서 } f(1) = 2 \text{이므로}$$

$$-1 + k = 2 \quad \therefore k = 3$$

$$\therefore f(x) = -x|x| + 3$$

$$(g^{-1} \circ f)^{-1}(2) = (f^{-1} \circ g)(2) = f^{-1}(g(2)) \\ = f^{-1}(5) \quad \leftarrow g(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$$

에서 $f^{-1}(5) = a$ 라 하면 $f(a) = 5$ 이므로

$$-a|a| + 3 = 5 \quad \therefore a|a| = -2$$

(i) $a \geq 0$ 일 때

$$|a| = a \text{이므로} \quad a^2 = -2$$

이때 $a \geq 0$ 인 a 는 존재하지 않는다.

(ii) $a < 0$ 일 때

$$|a| = -a \text{이므로} \quad -a^2 = -2$$

$$a^2 = 2 \quad \therefore a = -\sqrt{2} \quad (\because a < 0)$$

(i), (ii)에서 $a = -\sqrt{2}$

즉 $f^{-1}(5) = -\sqrt{2}$ 이므로

$$(g^{-1} \circ f)^{-1}(2) = f^{-1}(5) = -\sqrt{2} \quad \text{답 } -\sqrt{2}$$

581

전략 점선과 x 축이 만나는 점의 x 좌표를 구한다.

직선 $y=x$ 를 이용하여
 x 축과 점선이 만나는 점
의 x 좌표를 구하면 오른
쪽 그림과 같다.

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = k \text{라}$$

하면 $f(k) = \frac{1}{2}$ 이므로

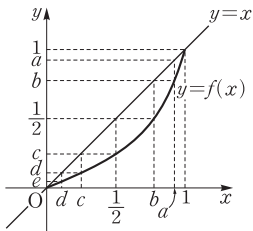
$$k = b$$

$$\therefore (g \circ g)\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right) = g(b)$$

$g(b) = f^{-1}(b) = l$ 이라 하면 $f(l) = b$ 이므로

$$l = a$$

$$\therefore (g \circ g)\left(\frac{1}{2}\right) = g(b) = a \quad \text{답 } a$$



582

전략 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 만나려면
함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 만나야 함을 이용한다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그
래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 방정식
 $f(x)=g(x)$ 가 실근을 가지려면 방정식 $f(x)=x$ 가
실근을 가져야 한다.

$$\frac{1}{2}x^2 + a = x \text{에서} \quad x^2 - 2x + 2a = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - 2a \geq 0$$

$$\therefore a \leq \frac{1}{2} \quad \text{답 } a \leq \frac{1}{2}$$

583

전략 $h(x)=3x+1$ 로 놓고 $f(h(x))$ 의 역함수를 구한다.

$h(x)=3x+1$ 이라 하자.

$y=3x+1$ 로 놓고 x 에 대하여 풀면

$$3x = y - 1 \quad \therefore x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

$$\therefore h^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

$f(3x+1) = f(h(x)) = (f \circ h)(x)$ 이므로

$$f^{-1}(3x+1) = (f \circ h)^{-1}(x) = (h^{-1} \circ f^{-1})(x) \\ = h^{-1}(f^{-1}(x)) = h^{-1}(g(x)) \\ = \frac{1}{3}g(x) - \frac{1}{3}$$

따라서 $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$ 이므로

$$ab = -\frac{1}{9} \quad \text{답 } -\frac{1}{9}$$

다른 풀이 $y=f(3x+1)$ 로 놓으면

$$f^{-1}(y) = 3x+1 \quad \therefore x = \frac{f^{-1}(y)-1}{3}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \frac{f^{-1}(x)-1}{3} = \frac{g(x)-1}{3}$$

따라서 함수 $f(3x+1)$ 의 역함수는

$$\frac{1}{3}g(x) - \frac{1}{3}$$

584

전략 조건을 만족시키는 함수 f, g 를 구한다.

$\neg$. $X \cap Y = \{2, 3, 4\}$ 이므로 조건 (내)에서

$$g(2) - f(2) = 1,$$

$$g(3) - f(3) = 1,$$

$$g(4) - f(4) = 1$$

이때 $g(x)$ 의 최댓값이 5이므로

$$f(2) \leq 4, f(3) \leq 4, f(4) \leq 4$$

조건 ㉞에서 함수 f 가 일대일대응이므로

$$\{f(2), f(3), f(4)\} = \{2, 3, 4\}$$

이때 $g(x) = f(x) + 1$ ($x=2, 3, 4$)이므로

$$\{g(2), g(3), g(4)\} = \{3, 4, 5\} = Z \text{ (참)}$$

ㄴ. ㉞에서 $\{f(2), f(3), f(4)\} = \{2, 3, 4\}$ 이고

함수 f 는 일대일대응이므로 $f(1) = 5$

$$\therefore f^{-1}(5) = 1 \text{ (거짓)}$$

ㄷ. ㄴ에서 $f(1) = 5$ 이므로 $f(3) < g(2) < f(1)$ 에서

$$f(3) < g(2) < 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $g(2) = 3$ 인 경우

$f(2) = g(2) - 1 = 2$ 이고 함수 f 는 일대일대응이므로

$$f(3) = 3 \text{ 또는 } f(3) = 4$$

이는 ㉞을 만족시키지 않는다.

(ii) $g(2) = 4$ 인 경우

$f(2) = g(2) - 1 = 3$ 이고 함수 f 는 일대일대응이므로

$$f(3) = 2 \text{ 또는 } f(3) = 4$$

그런데 ㉞에서 $f(3) < 4$ 이므로

$$f(3) = 2$$

$$\therefore f(4) = 4$$

(i), (ii)에서

$$f(4) + g(2) = 4 + 4 = 8 \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

585

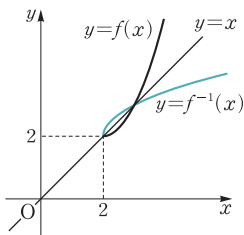
전략 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점이 직선 $y=x$ 위에 존재함을 이용한다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프의 두 교점이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 두 교점의 좌표를 (α, α) , (β, β) 라 하면 α, β 는 이차방정식

$$x^2 - 4x + a = x, \text{ 즉 } x^2 - 5x + a = 0$$

의 두 실근이다.



이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = a$$

한편 두 교점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2} = \sqrt{2}$$

$$(\alpha - \beta)^2 = 1, \quad (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1$$

$$25 - 4a = 1 \quad \therefore a = 6$$

답 6

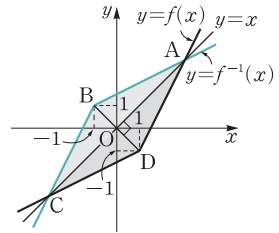
586

전략 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점을 이용한다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수

$y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽

그림과 같다.



이때 함수 $y=f(x)$ 의

그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.

두 교점을 각각 A, C라 하면

(i) $x \geq 1$ 일 때

$$2x - 3 = x \text{에서 } x = 3$$

(ii) $x < 1$ 일 때

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = x \text{에서 } x = -3$$

(i), (ii)에서 $A(3, 3), C(-3, -3)$

$$\therefore AC = \sqrt{(3+3)^2 + (3+3)^2} = 6\sqrt{2}$$

또 위의 그림에서 $B(-1, 1), D(1, -1)$ 이므로

$$BD = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

이때 두 함수 $y=f(x), y=f^{-1}(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 사각형 ABCD는 마름모이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times AC \times BD = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 12$$

답 12

참고 $AC \perp BD$ 이고 $OA = OC, OB = OD$ 이므로 사각형 ABCD의 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분한다.

따라서 사각형 ABCD는 마름모이다.

2 유리함수

III. 함수

01 유리식

● 본책 248~257쪽

587

$$\frac{2x+y}{5} = \frac{x+2y}{7} = k \quad (k \neq 0) \text{로 놓으면}$$

$$2x+y=5k, \quad x+2y=7k$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=k, y=3k$

$$\therefore \frac{xy-x^2}{xy+y^2} = \frac{k \times 3k - k^2}{k \times 3k + (3k)^2} = \frac{2k^2}{12k^2} = \frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

다른 풀이 $\frac{2x+y}{5} = \frac{x+2y}{7}$ 에서

$$7(2x+y) = 5(x+2y), \quad 14x+7y=5x+10y$$

$$9x=3y \quad \therefore y=3x$$

주어진 식에 $y=3x$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} \frac{xy-x^2}{xy+y^2} &= \frac{x \times 3x - x^2}{x \times 3x + (3x)^2} \\ &= \frac{2x^2}{12x^2} = \frac{1}{6} \quad (\because x \neq 0) \end{aligned}$$

588

(1) $(x+y):(y+z):(z+x)=3:4:5$ 이므로 0이 아닌 상수 k 에 대하여

$$x+y=3k \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$y+z=4k \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$z+x=5k \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

로 놓을 수 있다.

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} + \textcircled{㉢}$ 을 하면

$$2(x+y+z)=12k$$

$$\therefore x+y+z=6k \quad \cdots \textcircled{㉣}$$

$\textcircled{㉣}$ 에 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 을 각각 대입하여 정리하면

$$x=2k, y=k, z=3k$$

$$\therefore x:y:z=2k:k:3k=2:1:3$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{xy-yz+zx}{x^2+y^2+z^2} &= \frac{2k \times k - k \times 3k + 3k \times 2k}{(2k)^2 + k^2 + (3k)^2} \\ &= \frac{5k^2}{14k^2} = \frac{5}{14} \end{aligned}$$

답 (1) 2:1:3 (2) $\frac{5}{14}$

589

답 (1) ㄷ, ㄹ (2) ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅅ

590

(1) $\frac{1}{x^2-3x} = \frac{1}{x(x-3)}$ 이므로 두 식을 통분하면

$$\frac{1}{x(x-3)} \cdot \frac{x}{x(x-3)}$$

$$(2) \frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

$\frac{3}{x^2+4x+3} = \frac{3}{(x+3)(x+1)}$ 이므로 두 식을 통분하면

$$\frac{2(x+3)}{(x+3)(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{3(x-1)}{(x+3)(x+1)(x-1)}$$

답 풀이 참조

591

$$\begin{aligned} (1) \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12} &= \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x-4)} \\ &= \frac{x-2}{x-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{x^4-y^4}{(x+y)(x^3-y^3)} &= \frac{(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}{(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)} \\ &= \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2} \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{x-2}{x-4}$ (2) $\frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}$

592

$$\begin{aligned} (1) \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3} &= \frac{2(x+3)+3(x+2)}{(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{5x+12}{(x+2)(x+3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{1}{x-1} - \frac{6}{2x+1} &= \frac{2x+1-6(x-1)}{(x-1)(2x+1)} \\ &= \frac{-4x+7}{(x-1)(2x+1)} \end{aligned}$$

III-2

유리함수

$$(3) \frac{x+2}{x^2+3x} \times \frac{x+3}{2x} = \frac{x+2}{x(x+3)} \times \frac{x+3}{2x} \\ = \frac{x+2}{2x^2}$$

$$(4) \frac{x^2-1}{x+2} \div \frac{x+1}{x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+2} \times \frac{x}{x+1} \\ = \frac{x(x-1)}{x+2}$$

$$\text{답 (1)} \frac{5x+12}{(x+2)(x+3)} \quad (2) \frac{-4x+7}{(x-1)(2x+1)}$$

$$(3) \frac{x+2}{2x^2} \quad (4) \frac{x(x-1)}{x+2}$$

593

$$(1) \frac{3x+1}{x^2-1} - \frac{2x+3}{x^2+3x+2} + \frac{x-2}{x^2+x-2} \\ = \frac{3x+1}{(x+1)(x-1)} - \frac{2x+3}{(x+2)(x+1)} \\ + \frac{x-2}{(x+2)(x-1)} \\ = \frac{(3x+1)(x+2) - (2x+3)(x-1) + (x-2)(x+1)}{(x+2)(x+1)(x-1)} \\ = \frac{3x^2+7x+2 - (2x^2+x-3) + x^2-x-2}{(x+2)(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2x^2+5x+3}{(x+2)(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{(2x+3)(x+1)}{(x+2)(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2x+3}{(x+2)(x-1)}$$

$$(2) \frac{6x^2-x-1}{x^2-9} \times \frac{x^2-x-6}{3x^2-2x-1} \div \frac{2x^2+3x-2}{x^2+2x-3} \\ = \frac{(3x+1)(2x-1)}{(x+3)(x-3)} \times \frac{(x+2)(x-3)}{(3x+1)(x-1)} \\ \div \frac{(x+2)(2x-1)}{(x+3)(x-1)} \\ = \frac{(3x+1)(2x-1)}{(x+3)(x-3)} \times \frac{(x+2)(x-3)}{(3x+1)(x-1)} \\ \times \frac{(x+3)(x-1)}{(x+2)(2x-1)} \\ = 1$$

$$\text{답 (1)} \frac{2x+3}{(x+2)(x-1)} \quad (2) 1$$

594

주어진 식의 우변을 통분하여 정리하면

$$\frac{a}{x-1} + \frac{bx+a}{x^2+x+1} \\ = \frac{a(x^2+x+1) + (bx+a)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ = \frac{(a+b)x^2 + (2a-b)x}{x^3-1}$$

즉 $\frac{3x}{x^3-1} = \frac{(a+b)x^2 + (2a-b)x}{x^3-1}$ 가 x 에 대한 항등식이므로

$$a+b=0, 2a-b=3$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=1, b=-1$$

$$\therefore ab=-1$$

답 -1

다른 풀이 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ 이므로 주어진 식의 양변에 $(x-1)(x^2+x+1)$ 을 곱하면

$$3x = a(x^2+x+1) + (bx+a)(x-1)$$

$$\therefore 3x = (a+b)x^2 + (2a-b)x$$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a+b=0, 2a-b=3$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=1, b=-1$$

개념 노트

항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$ 이 x 에 대한 항등식

$$\iff a=0, b=0, c=0$$

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ 이 x 에 대한 항등식

$$\iff a=a', b=b', c=c'$$

595

주어진 식의 좌변을 통분하여 정리하면

$$\frac{2}{x} + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} \\ = \frac{2(x-1)(x-2) + ax(x-2) + bx(x-1)}{x(x-1)(x-2)} \\ = \frac{2x^2-6x+4+ax^2-2ax+bx^2-bx}{x(x-1)(x-2)} \\ = \frac{(2+a+b)x^2 + (-6-2a-b)x + 4}{x(x-1)(x-2)}$$

즉

$$\frac{(2+a+b)x^2 + (-6-2a-b)x + 4}{x(x-1)(x-2)} = \frac{-x+4}{x(x-1)(x-2)}$$

가 x 에 대한 항등식이므로

$$2+a+b=0, -6-2a-b=-1$$

$$\therefore a+b=-2, 2a+b=-5$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-3, b=1$

$$\therefore a-b=-4$$

답 -4

596

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{x^2-x-3}{x+1} - \frac{x^2-4x+6}{x-2} \\ &= \frac{(x+1)(x-2)-1}{x+1} - \frac{(x-2)^2+2}{x-2} \\ &= \left(x-2-\frac{1}{x+1}\right) - \left(x-2+\frac{2}{x-2}\right) \\ &= -\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-2} = \frac{-(x-2)-2(x+1)}{(x+1)(x-2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{-3x}{(x+1)(x-2)}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{x+3}{x+4} + \frac{x+7}{x+8} - \frac{x+1}{x+2} - \frac{x+5}{x+6} \\ &= \frac{(x+4)-1}{x+4} + \frac{(x+8)-1}{x+8} \\ &\quad - \frac{(x+2)-1}{x+2} - \frac{(x+6)-1}{x+6} \\ &= \left(1-\frac{1}{x+4}\right) + \left(1-\frac{1}{x+8}\right) \\ &\quad - \left(1-\frac{1}{x+2}\right) - \left(1-\frac{1}{x+6}\right) \\ &= \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4}\right) + \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8}\right) \\ &= \frac{x+4-(x+2)}{(x+2)(x+4)} + \frac{x+8-(x+6)}{(x+6)(x+8)} \\ &= \frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{2}{(x+6)(x+8)} \\ &= \frac{2(x+6)(x+8)+2(x+2)(x+4)}{(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)} \\ &= \frac{4(x^2+10x+28)}{(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)} \end{aligned}$$

답 풀이 참조

597

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{1}{x^2+x} + \frac{2}{x^2+4x+3} + \frac{3}{x^2+9x+18} - \frac{6}{x^2+6x} \\ &= \frac{1}{x(x+1)} + \frac{2}{(x+1)(x+3)} \\ &\quad + \frac{3}{(x+3)(x+6)} - \frac{6}{x(x+6)} \\ &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+6}\right) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+6}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9} + \frac{1}{9 \times 11} \\ &= \frac{1}{3-1} \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5-3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \\ &\quad + \frac{1}{7-5} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \frac{1}{9-7} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) \\ &\quad + \frac{1}{11-9} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{11}\right) = \frac{5}{11} \end{aligned}$$

답 (1) 0 (2) $\frac{5}{11}$

598

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x(x-2)} + \frac{4}{x(x+4)} + \frac{6}{(x+4)(x+10)} \\ &= \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4}\right) + \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+10}\right) \\ &= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+10} = \frac{x+10-(x-2)}{(x-2)(x+10)} \\ &= \frac{12}{(x-2)(x+10)} \end{aligned}$$

즉 $\frac{12}{(x-2)(x+10)} = \frac{a}{(x+b)(x+c)}$ 가 x 에 대한 항등식이므로

$$a=12, b=-2, c=10 \text{ 또는}$$

$$a=12, b=10, c=-2$$

$$\therefore a+b+c=20$$

답 20

III-2

유리함수

599

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}}{\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}} &= \frac{\frac{x+3-(x+2)}{(x+2)(x+3)}}{\frac{x+4-(x+3)}{(x+3)(x+4)}} \\
 &= \frac{\frac{1}{(x+2)(x+3)}}{\frac{1}{(x+3)(x+4)}} \\
 &= \frac{(x+3)(x+4)}{(x+2)(x+3)} \\
 &= \frac{x+4}{x+2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \frac{1 - \frac{2x-y}{x+y}}{\frac{y}{x+y} - 1} &= \frac{\frac{x+y-(2x-y)}{x+y}}{\frac{y-(x+y)}{x+y}} \\
 &= \frac{\frac{-x+2y}{x+y}}{\frac{-x}{x+y}} \\
 &= \frac{(-x+2y)(x+y)}{-x(x+y)} \\
 &= \frac{x-2y}{x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \frac{1 + \frac{2}{x}}{x-3 - \frac{5}{x+1}} &= \frac{\frac{x+2}{x}}{\frac{(x-3)(x+1)-5}{x+1}} \\
 &= \frac{\frac{x+2}{x}}{\frac{x^2-2x-8}{x+1}} \\
 &= \frac{(x+2)(x+1)}{x(x+2)(x-4)} \\
 &= \frac{x+1}{x(x-4)}
 \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{x+4}{x+2}$ (2) $\frac{x-2y}{x}$ (3) $\frac{x+1}{x(x-4)}$

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (\text{주어진 식}) &= \frac{\left(1 - \frac{2x-y}{x+y}\right) \times (x+y)}{\left(\frac{y}{x+y} - 1\right) \times (x+y)} \\
 &= \frac{x+y-(2x-y)}{y-(x+y)} \\
 &= \frac{x-2y}{x}
 \end{aligned}$$

600

$$\begin{aligned}
 \frac{17}{72} &= \frac{1}{\frac{72}{17}} = \frac{1}{4 + \frac{4}{17}} \\
 &= \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{17}{4}}} = \frac{1}{4 + \frac{1}{4}}
 \end{aligned}$$

따라서 $a=4, b=4, c=4$ 이므로

$$a+b+c=12$$

답 12

601

(1) $2x^2-5x-2=0$ 에서 $x \neq 0$ 이므로 양변을 x 로 나누면

$$2x-5-\frac{2}{x}=0, \quad 2x-\frac{2}{x}=5$$

$$\therefore x-\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore 8x^3-4x^2-\frac{4}{x^2}-\frac{8}{x^3} &= 8\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)-4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) \\
 &= 8\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)\right\} \\
 &\quad -4\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\right\} \\
 &= 8 \times \left\{\left(\frac{5}{2}\right)^3+3 \times \frac{5}{2}\right\}-4 \times \left\{\left(\frac{5}{2}\right)^2+2\right\} \\
 &= 185-33 \\
 &= 152
 \end{aligned}$$

(2) (주어진 식)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x+y}{(1+x)(1+y)(x+y)} \\
 &\quad + \frac{x(1+y)}{(1+x)(x+y)(1+y)} \\
 &\quad + \frac{y(1+x)}{(1+y)(x+y)(1+x)} \\
 &= \frac{x+y+x(1+y)+y(1+x)}{(1+x)(1+y)(x+y)} \\
 &= \frac{2x+2y+2xy}{(1+x)(1+y)(x+y)} \\
 &= \frac{2(x+y+xy)}{(1+x)(1+y)(x+y)} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

답 (1) 152 (2) 0

연습 문제

● 본책 258쪽

602

전략 주어진 식을 통분하여 계산한다.

(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{2+x+2-x}{(2-x)(2+x)} + \frac{4}{4+x^2} + \frac{32}{16+x^4} \\ &= \frac{4}{4-x^2} + \frac{4}{4+x^2} + \frac{32}{16+x^4} \\ &= \frac{4(4+x^2)+4(4-x^2)}{(4-x^2)(4+x^2)} + \frac{32}{16+x^4} \\ &= \frac{32}{16-x^4} + \frac{32}{16+x^4} \\ &= \frac{32(16+x^4)+32(16-x^4)}{(16-x^4)(16+x^4)} \\ &= \frac{1024}{256-x^8} \end{aligned}$$

답 $\frac{1024}{256-x^8}$

603

전략 분자를 분모로 나누어 다항식과 분자가 상수인 분수식의 합으로 변형한다.

주어진 식의 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned} &\frac{2x+3}{x+1} - \frac{3x+7}{x+2} + \frac{3x+10}{x+3} - \frac{2x+9}{x+4} \\ &= \frac{2(x+1)+1}{x+1} - \frac{3(x+2)+1}{x+2} \\ &\quad + \frac{3(x+3)+1}{x+3} - \frac{2(x+4)+1}{x+4} \\ &= \left(2 + \frac{1}{x+1}\right) - \left(3 + \frac{1}{x+2}\right) \\ &\quad + \left(3 + \frac{1}{x+3}\right) - \left(2 + \frac{1}{x+4}\right) \\ &= \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right) \\ &= \frac{x+2-(x+1)}{(x+1)(x+2)} + \frac{x+4-(x+3)}{(x+3)(x+4)} \\ &= \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} \\ &= \frac{(x+3)(x+4)+(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} \\ &= \frac{2x^2+10x+14}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} \end{aligned}$$

즉

$$\begin{aligned} &\frac{2x^2+10x+14}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} \\ &= \frac{ax^2+bx+c}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} \end{aligned}$$

가 x 에 대한 항등식이므로

$$a=2, b=10, c=14$$

$$\therefore abc=280$$

답 280

604

전략 분모와 분자를 각각 통분하여 간단히 한다.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-3} \\ &= \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3} \\ &= \frac{x+3-(x-2)}{(x-2)(x+3)} + \frac{x-3-(x+2)}{(x+2)(x-3)} \\ &= \frac{x+3+x-2}{(x-2)(x+3)} + \frac{x-3+x+2}{(x+2)(x-3)} \\ &= \frac{5(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+3)(2x+1)} \\ &\quad + \frac{-5(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-3)(2x-1)} \\ &= \frac{5}{2x+1} + \frac{-5}{2x-1} = \frac{5(2x-1)-5(2x+1)}{(2x+1)(2x-1)} \\ &= \frac{-10}{(2x+1)(2x-1)} \end{aligned}$$

답 $\frac{-10}{(2x+1)(2x-1)}$

605

전략 $\frac{1}{f(x)}$ 을 부분분수로 변형한다.

$$f(x) = \frac{4x^2-1}{3} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{3} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x)} &= \frac{3}{(2x-1)(2x+1)} \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \dots + \frac{1}{f(20)} \\ &= \frac{3}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{39} - \frac{1}{41}\right) \right\} \\ &= \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{41}\right) = \frac{60}{41} \end{aligned}$$

답 $\frac{60}{41}$

III-2

우리합수

606

전략 $x^2-3x+1=0$ 을 변형하여 $\frac{1}{3-x}=x$ 임을 이용한다.

$x^2-3x+1=0$ 에서 $x \neq 0$ 이므로 양변을 x 로 나누면

$$x-3+\frac{1}{x}=0, \quad 3-x=\frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{1}{3-x}=x$$

$$\therefore 3-\frac{1}{3-\frac{1}{3-x}}=3-\frac{1}{3-\frac{1}{3-x}}$$

$$=3-\frac{1}{3-x}$$

$$=3-x$$

$$=\frac{1}{x}$$

답 ④

607

전략 주어진 유리식을 통분한 후 분자를 인수분해한다.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \text{에서} \quad \frac{ab+bc+ca}{abc} = 0$$

$$\therefore ab+bc+ca=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+a)(b+c)} + \frac{c^2}{(c+b)(c+a)} + \frac{3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$= \frac{a^2(b+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)} + \frac{b^2(c+a)}{(b+a)(b+c)(c+a)}$$

$$+ \frac{c^2(a+b)}{(c+b)(c+a)(a+b)} + \frac{3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$= \frac{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

이때

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$$

$$=a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b+3abc$$

$$=(a^2b+b^2a+abc)+(b^2c+c^2b+abc)$$

$$+(a^2c+c^2a+abc)$$

$$=ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ca(a+b+c)$$

$$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

이므로

$$(\text{주어진 식}) = \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=0 \quad (\because \textcircled{1})$$

답 0

02 유리함수

● 본책 259~270쪽

608

(1) $\{x|x \neq 0 \text{인 실수}\}$

(2) $x+3=0$ 에서 $x=-3$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$$\{x|x \neq -3 \text{인 실수}\}$$

(3) $3x-5=0$ 에서 $x=\frac{5}{3}$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$$\left\{x \mid x \neq \frac{5}{3} \text{인 실수}\right\}$$

(4) $x^2-4=0$ 에서 $x=\pm 2$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$$\{x|x \neq \pm 2 \text{인 실수}\}$$

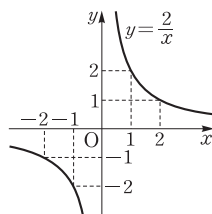
답 풀이 참조

609

(1) $y=\frac{2}{x}$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같고, 점근선의 방정

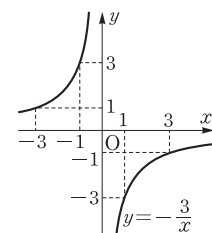
식은 $x=0$, $y=0$ 이다.



(2) $y=-\frac{3}{x}$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같고, 점근선의 방

정식은 $x=0$, $y=0$ 이다.



(3) $y=\frac{1}{x-1}$ 의 그래프는

$y=\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의

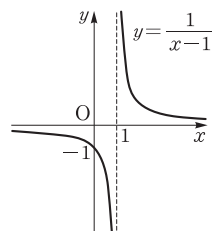
방향으로 1만큼 평행이동

한 것이다.

따라서 주어진 함수의 그래

프는 오른쪽 그림과 같고,

점근선의 방정식은 $x=1$, $y=0$ 이다.



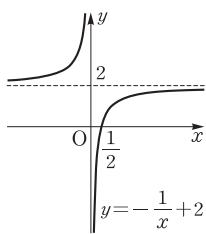
(4) $y = -\frac{1}{x} + 2$ 의 그래프는

$y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를 y 축의

방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 주어진 함수의 그래

프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $x=0$, $y=2$ 이다.



답 풀이 참조

610

$$(1) y = \frac{4x-15}{x-3} = \frac{4(x-3)-3}{x-3}$$

$$= -\frac{3}{x-3} + 4$$

$$(2) y = \frac{-5x-7}{x+2} = \frac{-5(x+2)+3}{x+2}$$

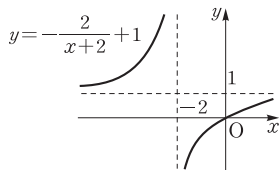
$$= \frac{3}{x+2} - 5$$

답 (1) $y = -\frac{3}{x-3} + 4$ (2) $y = \frac{3}{x+2} - 5$

611

(1) $y = -\frac{2}{x+2} + 1$ 의 그래프는 $y = -\frac{2}{x}$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.



따라서 그래프는 위의 그림과 같고,

정의역은 $\{x|x \neq -2 \text{인 실수}\}$

치역은 $\{y|y \neq 1 \text{인 실수}\}$

점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=1$

$$(2) y = \frac{-2x+1}{x+3} = \frac{-2(x+3)+7}{x+3} = \frac{7}{x+3} - 2$$

이므로 주어진 유리함수의 그래프는 $y = \frac{7}{x}$ 의 그래

프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽

그림과 같고,

정의역은

$$\{x|x \neq -3 \text{인 실수}\}$$

치역은

$$\{y|y \neq -2 \text{인 실수}\}$$

점근선의 방정식은 $x=-3$, $y=-2$

$$(3) y = \frac{6-x}{x-3} = \frac{-(x-3)+3}{x-3} = \frac{3}{x-3} - 1$$

이므로 주어진 유리함수의 그래프는 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래

프를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른

쪽 그림과 같고,

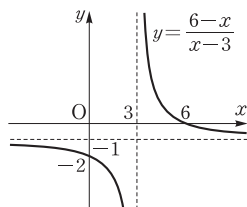
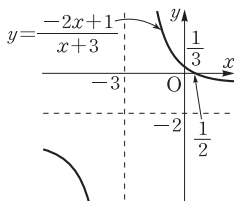
정의역은

$$\{x|x \neq 3 \text{인 실수}\}$$

치역은

$$\{y|y \neq -1 \text{인 실수}\}$$

점근선의 방정식은 $x=3$, $y=-1$



답 풀이 참조

612

$y = -\frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의

방향으로 -2 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = -\frac{3}{x-3} - 2 = \frac{-2x+3}{x-3}$$

이 식이 $y = \frac{ax+b}{x-c}$ 와 같아야 하므로

$$a=-2, b=3, c=3$$

$$\therefore abc = -18$$

답 -18

613

$$\neg. y = \frac{x-1}{x-3} = \frac{(x-3)+2}{x-3} = \frac{2}{x-3} + 1$$

이므로 $y = \frac{x-1}{x-3}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

-3 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면

$y = \frac{2}{x}$ 의 그래프와 겹쳐진다.

$$\therefore y = \frac{2x+2}{x+2} = \frac{2(x+2)-2}{x+2} = -\frac{2}{x+2} + 2$$

이므로 $y = \frac{2x+2}{x+2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 $y = -\frac{2}{x}$ 의 그래프와 겹쳐진다.

$$\therefore y = \frac{-4x-2}{x+1} = \frac{-4(x+1)+2}{x+1} = \frac{2}{x+1} - 4$$

이므로 $y = \frac{-4x-2}{x+1}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프와 겹쳐진다.

이상에서 평행이동에 의하여 그 그래프가 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

614

$$y = \frac{4x+3}{x+1} = \frac{4(x+1)-1}{x+1}$$

$$= -\frac{1}{x+1} + 4$$

이므로 이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = -\frac{1}{x-a+1} + b + 4 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\text{이때 } y = \frac{3x-4}{x-1} = \frac{3(x-1)-1}{x-1} = -\frac{1}{x-1} + 3 \text{ 이고, 이 함수의 그래프와 ㉠의 그래프가 일치하므로}$$

$$-a+1=-1, b+4=3$$

$$\therefore a=2, b=-1$$

$$\therefore a+b=1$$

답 1

다른 풀이 $y = \frac{4x+3}{x+1}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$\begin{aligned} y &= \frac{4(x-a)+3}{(x-a)+1} + b \\ &= \frac{4x-4a+3+b(x-a+1)}{x-a+1} \\ &= \frac{(4+b)x-ab-4a+b+3}{x-a+1} \end{aligned}$$

이 함수의 그래프가 함수 $y = \frac{3x-4}{x-1}$ 의 그래프와 일치하므로

$$-a+1=-1, 4+b=3,$$

$$-ab-4a+b+3=-4$$

$$\therefore a=2, b=-1$$

615

$$y = \frac{2x+3}{x+2} = \frac{2(x+2)-1}{x+2}$$

$$= -\frac{1}{x+2} + 2$$

이므로 $y = \frac{2x+3}{x+2}$ 의 그래프는 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$y = \frac{3}{2}$ 일 때 $x=0$, $y=3$ 일 때

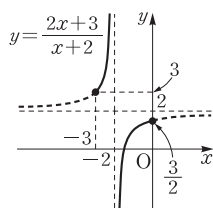
$x=-3$ 이므로 오른쪽 그림에서 치역이

$$\left\{ y \mid y \leq \frac{3}{2} \text{ 또는 } y \geq 3 \right\} \text{ 일 때,}$$

정의역은

$$\{ x \mid -3 \leq x < -2 \text{ 또는 } -2 < x \leq 0 \}$$

$$\text{답 } \{ x \mid -3 \leq x < -2 \text{ 또는 } -2 < x \leq 0 \}$$



616

$$y = \frac{2x-3}{x+1} = \frac{2(x+1)-5}{x+1} = -\frac{5}{x+1} + 2$$

이므로 $y = \frac{2x-3}{x+1}$ 의 그래프는 $y = -\frac{5}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

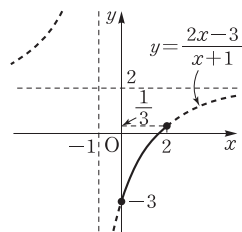
따라서 $0 \leq x \leq 2$ 에서

$$y = \frac{2x-3}{x+1} \text{의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로}$$

$$x=2 \text{일 때 최댓값 } \frac{1}{3},$$

$$x=0 \text{일 때 최솟값 } -3$$

을 갖는다.



$$\text{답 최댓값: } \frac{1}{3}, \text{ 최솟값: } -3$$

617

$$y = \frac{3x+k}{x+2} = \frac{3(x+2)+k-6}{x+2} = \frac{k-6}{x+2} + 3$$

이므로 $y = \frac{3x+k}{x+2}$ 의 그래프는 $y = \frac{k-6}{x}$ 의 그래프

를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.

이때 $k > 6$ 에서 $k-6 > 0$ 이므로

$0 \leq x \leq a$ 에서 주어진 유리함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=0$ 일 때 최댓값 5 를 가지므로

$$\frac{k}{2} = 5 \quad \therefore k = 10$$

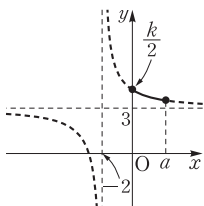
$x=a$ 일 때 최솟값 4 를 가지므로

$$\frac{3a+10}{a+2} = 4, \quad 3a+10 = 4a+8$$

$$\therefore a = 2$$

$$\therefore a+k = 2+10 = 12$$

답 12



618

$$y = \frac{5x+6}{2x+3} = \frac{\frac{5}{2}(2x+3) - \frac{3}{2}}{2x+3} = \frac{-\frac{3}{2}}{2x+3} + \frac{5}{2}$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -\frac{3}{2}, y = \frac{5}{2}$$

따라서 주어진 유리함수의 그래프는 두 점근선의 교점

$(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ 에 대하여 대칭이므로

$$a = -\frac{3}{2}, b = \frac{5}{2}$$

$$\therefore a+b = 1$$

답 1

619

$$y = \frac{3x+4}{x+2} = \frac{3(x+2)-2}{x+2} = -\frac{2}{x+2} + 3$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -2, y = 3$$

이때 주어진 유리함수의 그래프가 직선 $y = -x+k$ 에 대하여 대칭이므로 직선 $y = -x+k$ 는 두 점근선의 교점 $(-2, 3)$ 을 지난다.

즉 $3 = -(-2) + k$ 이므로

$$k = 1$$

답 1

620

$$y = \frac{bx+3}{x+a} = \frac{b(x+a)-ab+3}{x+a} = \frac{-ab+3}{x+a} + b$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -a, y = b$$

이때 주어진 유리함수의 그래프가 두 직선 $y = x+6$,

$y = -x-2$ 에 대하여 대칭이므로 두 직선은 각각 두 점근선의 교점 $(-a, b)$ 를 지난다.

즉 $b = -a+6, b = a-2$ 이므로

$$a = 4, b = 2$$

$$\therefore ab = 8$$

답 8

다른 풀이 $y = \frac{bx+3}{x+a}$ 의 그래프는 두 직선 $y = x+6$,

$y = -x-2$ 에 대하여 대칭이므로 두 직선의 교점

$(-4, 2)$ 에 대하여 대칭이다.

즉 점근선의 방정식은 $x = -4, y = 2$ 이므로 함수의 식

을 $y = \frac{k}{x+4} + 2$ ($k \neq 0$)로 놓으면

$$y = \frac{k}{x+4} + 2 = \frac{k+2(x+4)}{x+4} = \frac{2x+8+k}{x+4}$$

따라서 $\frac{2x+8+k}{x+4} = \frac{bx+3}{x+a}$ 이므로

$$a = 4, b = 2, k = -5$$

621

$y = \frac{k}{x+a} + b$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x = 3$,

$y = 2$ 이므로 $a = -3, b = 2$

따라서 함수 $y = \frac{k}{x-3} + 2$ 의 그래프가 점 $(2, 0)$ 을

지나므로

$$0 = -k+2 \quad \therefore k = 2$$

$$\therefore a+b+k = -3+2+2 = 1$$

답 1

622

점근선의 방정식이 $x = 2, y = 3$ 이므로 함수의 식을

$$y = \frac{k}{x-2} + 3 \quad (k \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

으로 놓을 수 있다.

㉑의 그래프가 점 (3, 1)을 지나므로

$$1 = k + 3 \quad \therefore k = -2$$

㉑에 $k = -2$ 를 대입하면

$$y = \frac{-2}{x-2} + 3 = \frac{-2+3(x-2)}{x-2} = \frac{3x-8}{x-2}$$

$$\therefore a = -2, b = 3, c = -8$$

$$\boxed{\text{답}} \quad a = -2, b = 3, c = -8$$

623

$y = \frac{bx-7}{x+a}$ 의 정의역이 $\{x | x \neq -2 \text{인 실수}\}$, 치역이 $\{y | y \neq 4 \text{인 실수}\}$ 이므로 그래프의 점근선의 방정식은 $x = -2, y = 4$

따라서 함수의 식을 $y = \frac{k}{x+2} + 4$ ($k \neq 0$)로 놓으면

$$y = \frac{k}{x+2} + 4 = \frac{k+4(x+2)}{x+2} = \frac{4x+8+k}{x+2}$$

$$\therefore \frac{bx-7}{x+a} = \frac{4x+8+k}{x+2} \text{ 이므로}$$

$$a = 2, b = 4, k = -15$$

$$\therefore ab = 8$$

$\boxed{\text{답}} \quad 8$

624

유리함수 $y = -\frac{3}{x} + 3$ 의 그래프와 직선 $y = 3x + a$ 가

한 점에서 만나려면 방정식

$$-\frac{3}{x} + 3 = 3x + a, \text{ 즉 } 3x^2 + (a-3)x + 3 = 0$$

이 증근을 가져야 한다.

이차방정식 $3x^2 + (a-3)x + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (a-3)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 0$$

$$a^2 - 6a - 27 = 0, \quad (a+3)(a-9) = 0$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 9$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$-3 + 9 = 6$$

$\boxed{\text{답}} \quad 6$

625

유리함수 $y = \frac{2}{x-1} + 2$ 의 그래프와 직선

$mx - y - 2m = 0$, 즉 $y = m(x-2)$ 가 만나려면 방정식

$$\frac{2}{x-1} + 2 = m(x-2), \text{ 즉}$$

$$mx^2 - (3m+2)x + 2m = 0$$

이 실근을 가져야 한다.

(i) $m = 0$ 일 때

$$-2x = 0 \text{에서 } x = 0$$

따라서 방정식의 실근이 존재하므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $m \neq 0$ 일 때

이차방정식 $mx^2 - (3m+2)x + 2m = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (3m+2)^2 - 4 \times m \times 2m \geq 0$$

$$\therefore m^2 + 12m + 4 \geq 0$$

이때 이차방정식 $m^2 + 12m + 4 = 0$ 의 두 근이

$$m = -6 \pm 4\sqrt{2} \text{이므로 부등식의 해는}$$

$$m \leq -6 - 4\sqrt{2} \text{ 또는 } -6 + 4\sqrt{2} \leq m < 0$$

$$\text{또는 } m > 0$$

(i), (ii)에서 구하는 m 의 값의 범위는

$$m \leq -6 - 4\sqrt{2} \text{ 또는 } m \geq -6 + 4\sqrt{2}$$

$$\boxed{\text{답}} \quad m \leq -6 - 4\sqrt{2} \text{ 또는 } m \geq -6 + 4\sqrt{2}$$

626

$f(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ 에 대하여

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$= 1 - \frac{1}{\frac{x-1}{x}} = 1 - \frac{x}{x-1} = -\frac{1}{x-1}$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x))$$

$$= 1 - \frac{1}{-\frac{1}{x-1}} = 1 + x - 1 = x$$

$$f^4(x) = (f \circ f^3)(x) = f(f^3(x)) = f(x)$$

$$= 1 - \frac{1}{x}$$

$$f^5(x) = (f \circ f^4)(x) = f(f^4(x)) = f(f(x))$$

$$= -\frac{1}{x-1}$$

$$f^6(x) = (f \circ f^5)(x) = f(f^5(x)) = f(f^2(x))$$

$$= x$$

$$\vdots$$

따라서 자연수 k 에 대하여

$$f^n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} & (n=3k-2) \\ -\frac{1}{x-1} & (n=3k-1) \\ x & (n=3k) \end{cases}$$

$$\therefore f^{200}(x) = f^{3 \times 67 - 1}(x) = -\frac{1}{x-1}$$

답 $f^{200}(x) = -\frac{1}{x-1}$

해설 Focus

함수 f 를 n 번 합성하는 문제는 $f^1, f^2, f^3, \dots$ 을 직접 구한 다음 f^n 을 추론하여 해결할 수 있다.

특히 $f^n(x) = x$ 를 만족시키는 자연수 n 이 존재하면 f^n 이 반복되는 규칙을 이용한다.

627

주어진 그래프에서

$$f(1)=0, f(0)=1$$

이므로

$$\begin{aligned} f^1(1) &= f(1) = 0 \\ f^2(1) &= (f \circ f^1)(1) = f(f^1(1)) = f(0) = 1 \\ f^3(1) &= (f \circ f^2)(1) = f(f^2(1)) = f(1) = 0 \\ f^4(1) &= (f \circ f^3)(1) = f(f^3(1)) = f(0) = 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

따라서 자연수 n 에 대하여

$$f^n(1) = \begin{cases} 0 & (n \text{은 홀수}) \\ 1 & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$$

$$\therefore f^{500}(1) = 1$$

답 1

다른 풀이 주어진 유리함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x = -1, y = -1$ 이므로

$$f(x) = \frac{k}{x+1} - 1 \quad (k > 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

로 놓을 수 있다.

①의 그래프가 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{k}{2} - 1 \quad \therefore k = 2$$

①에 $k=2$ 를 대입하면

$$f(x) = \frac{2}{x+1} - 1 = \frac{-x+1}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{-x+1}{x+1} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f \circ f^1)(x) = f(f(x)) \\ &= \frac{-\frac{-x+1}{x+1} + 1}{\frac{-x+1}{x+1} + 1} = \frac{\frac{2x}{x+1}}{\frac{2}{x+1}} \\ &= \frac{2x}{2} = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^3(x) &= (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x)) = f(x) \\ &= \frac{-x+1}{x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^4(x) &= (f \circ f^3)(x) = f(f^3(x)) = f(f(x)) \\ &= x \\ &\vdots \end{aligned}$$

따라서 자연수 n 에 대하여

$$f^n(x) = \begin{cases} \frac{-x+1}{x+1} & (n \text{은 홀수}) \\ x & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$$

$$\text{즉 } f^{500}(x) = x \text{이므로 } f^{500}(1) = 1$$

628

$y = \frac{ax+b}{2x+c}$ 로 놓고 x 에 대하여 풀면

$$\begin{aligned} y(2x+c) &= ax+b, \quad (2y-a)x = -cy+b \\ \therefore x &= \frac{-cy+b}{2y-a} \end{aligned}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{-cx+b}{2x-a}$$

$$\text{따라서 } \frac{-cx+b}{2x-a} = \frac{-x+3}{2x-1} \text{이므로}$$

$$a=1, b=3, c=1 \quad \text{답 } a=1, b=3, c=1$$

다른 풀이 $(f^{-1})^{-1} = f$ 이므로 $f^{-1}(x)$ 의 역함수는 $f(x)$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= \frac{-x+3}{2x-1} \text{으로 놓고 } x \text{에 대하여 풀면} \\ y(2x-1) &= -x+3, \quad (2y+1)x = y+3 \\ \therefore x &= \frac{y+3}{2y+1} \end{aligned}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{x+3}{2x+1}$$

$$\text{따라서 } \frac{x+3}{2x+1} = \frac{ax+b}{2x+c} \text{이므로}$$

$$a=1, b=3, c=1$$

629

$(f \circ g)(x) = x$ 이므로 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다.

$y = \frac{2x+1}{x-2}$ 로 놓고 x 에 대하여 풀면

$$y(x-2) = 2x+1, \quad (y-2)x = 2y+1$$

$$\therefore x = \frac{2y+1}{y-2}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{2x+1}{x-2}$

$$\therefore g(x) = \frac{2x+1}{x-2}$$

$$\begin{aligned} \therefore (g \circ g)(3) &= g(g(3)) \quad \leftarrow g(3) = \frac{2 \times 3 + 1}{3 - 2} = 7 \\ &= g(7) = \frac{2 \times 7 + 1}{7 - 2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

답 3

다른 풀이 $g(3) = k$ 라 하면 $f(k) = 3$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{2k+1}{k-2} &= 3, \quad 2k+1 = 3k-6 \\ \therefore k &= 7 \quad \therefore g(3) = 7 \end{aligned}$$

$g(7) = l$ 이라 하면 $f(l) = 7$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{2l+1}{l-2} &= 7, \quad 2l+1 = 7l-14 \\ \therefore l &= 3 \quad \therefore g(7) = 3 \\ \therefore (g \circ g)(3) &= g(g(3)) = g(7) = 3 \end{aligned}$$

630

$f(x) = \frac{ax+b}{-x+2}$ 의 그래프가 점 $(3, -9)$ 를 지나므로

$$-9 = \frac{3a+b}{-3+2} \quad \therefore 3a+b=9 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라 하면 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 점 $(3, -9)$ 를 지나므로

$$f^{-1}(3) = -9 \quad \therefore f(-9) = 3$$

즉 $3 = \frac{-9a+b}{9+2}$ 이므로

$$-9a+b=33 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = -2, b = 15 \quad \text{답 } a = -2, b = 15$$



개념 노트

함수 $y = f(x)$ 의 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 가 존재할 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 (a, b) 를 지나면 $f(a) = b \iff f^{-1}(b) = a$



연습 문제

● 본책 271~273쪽

631

전략 유리함수 $y = \frac{k}{x-p} + q$ ($k \neq 0$)의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=q$ 임을 이용한다.

$$\begin{aligned} y &= \frac{ax+3}{2x+1} = \frac{\frac{a}{2}(2x+1) - \frac{a}{2} + 3}{2x+1} \\ &= \frac{-\frac{a}{2} + 3}{2x+1} + \frac{a}{2} \end{aligned}$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -\frac{1}{2}, y = \frac{a}{2}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{x-2}{3x+b} = \frac{\frac{1}{3}(3x+b) - \frac{b}{3} - 2}{3x+b} \\ &= -\frac{\frac{b}{3} + 2}{3x+b} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -\frac{b}{3}, y = \frac{1}{3}$$

따라서 $-\frac{1}{2} = -\frac{b}{3}$, $\frac{a}{2} = \frac{1}{3}$ 이므로

$$a = \frac{2}{3}, b = \frac{3}{2} \quad \therefore ab = 1$$

답 1

632

전략 $y = \frac{k-4x}{x+2}$ 를 $y = \frac{m}{x-p} + q$ 의 꼴로 변형하고 주어진 범위에서 그래프를 그려 본다.

$$y = \frac{k-4x}{x+2} = \frac{-4(x+2) + k + 8}{x+2} = \frac{k+8}{x+2} - 4$$

이므로 $y = \frac{k-4x}{x+2}$ 의 그래프는 $y = \frac{k+8}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이다.

이때 $k > -8$ 에서 $k+8 > 0$

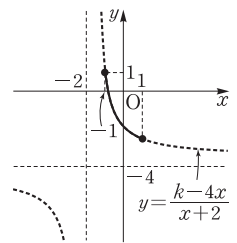
이므로 $-1 \leq x \leq 1$ 에서

$$y = \frac{k-4x}{x+2} \text{의 그래프는 오}$$

른쪽 그림과 같다.

따라서 $x = -1$ 일 때 최댓값

1을 가지므로



$$\frac{k+4}{-1+2}=1 \quad \therefore k=-3$$

또 $x=1$ 일 때 최솟값 m 을 가지므로

$$m=\frac{-3-4}{1+2}=-\frac{7}{3}$$

$$\therefore k+m=-\frac{16}{3} \quad \text{답 } -\frac{16}{3}$$

633

전략 $y=\frac{x+1}{2x-4}$ 을 $y=\frac{k}{x-p}+q$ 의 꼴로 변형하여 그래프를 그려 본다.

$$y=\frac{x+1}{2x-4}=\frac{\frac{1}{2}(2x-4)+3}{2x-4}=\frac{3}{2x-4}+\frac{1}{2}$$

이므로 $y=\frac{x+1}{2x-4}$ 의 그래프는 $y=\frac{3}{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행 이동한 것이다.

③ 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 모든 사분면을 지난다.

④ 그래프는 두 점근선의 교

점 $(2, \frac{1}{2})$ 을 지나고 기

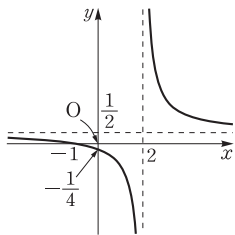
울기가 ± 1 인 두 직선에 대하여 대칭이다.

점 $(2, \frac{1}{2})$ 을 지나고 기울기가 ± 1 인 직선의 방정

식은 $y-\frac{1}{2}=\pm(x-2)$

$$\therefore y=x-\frac{3}{2}, y=-x+\frac{5}{2}$$

즉 두 직선 $y=x-\frac{3}{2}, y=-x+\frac{5}{2}$ 에 대하여 대칭이다.



답 ④

634

전략 $f^n(6)$ 의 값의 규칙성을 파악한다.

$$f^1(6)=f(6)=5$$

$$f^2(6)=(f \circ f^1)(6)=f(f^1(6))=f(5)=6$$

$$f^3(6)=(f \circ f^2)(6)=f(f^2(6))=f(6)=5$$

$$f^4(6)=(f \circ f^3)(6)=f(f^3(6))=f(5)=6$$

⋮

따라서 자연수 n 에 대하여

$$f^n(6)=\begin{cases} 5 & (n \text{은 홀수}) \\ 6 & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$$

$$\therefore f^{2024}(6)=6$$

답 6

다른 풀이 $f^1(x)=f(x)=\frac{3x-3}{x-3}$ 이므로

$$f^2(x)=(f \circ f^1)(x)=f(f(x))$$

$$= \frac{3 \times \frac{3x-3}{x-3} - 3}{\frac{3x-3}{x-3} - 3} = \frac{6x}{\frac{x-3}{x-3}} = x$$

⋮

따라서 자연수 n 에 대하여

$$f^n(x)=\begin{cases} \frac{3x-3}{x-3} & (n \text{은 홀수}) \\ x & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$$

$$\text{즉 } f^{2024}(x)=x \text{이므로 } f^{2024}(6)=6$$

635

전략 역함수의 성질을 이용한다.

$$(g^{-1} \circ f)^{-1}(2)=(f^{-1} \circ g)(2)$$

$$=f^{-1}(g(2))$$

$$=f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) \quad \leftarrow g(2)=\frac{3 \times 2 - 1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)=k \text{라 하면 } f(k)=\frac{5}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{2k}{k+1}=\frac{5}{2}, \quad 4k=5k+5 \quad \therefore k=-5$$

$$\text{즉 } f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)=-5 \text{이므로}$$

$$(g^{-1} \circ f)^{-1}(2)=f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)=-5$$

답 -5

636

전략 주어진 두 함수가 역함수 관계임을 이용한다.

주어진 두 함수의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수는 역함수 관계이다.

$$y=-\frac{2x+3}{2x+5} \text{을 } x \text{에 대하여 풀면}$$

$$y(2x+5)=-2x-3$$

$$(2y+2)x=-5y-3$$

$$\therefore x=\frac{-5y-3}{2y+2}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{-5x-3}{2x+2}$

따라서 $\frac{-5x-3}{2x+2} = \frac{ax-3}{2x+b}$ 이므로

$$a = -5, b = 2$$

$$\therefore b - a = 7$$

답 7

637

전략 주어진 함수식을 이용하여 세 점 A, B, C의 좌표를 구한다.

$$y = \frac{k}{x-2} + 1 \text{에서 } y=0 \text{이면 } 0 = \frac{k}{x-2} + 1$$

$$-1 = \frac{k}{x-2}, \quad -x+2=k$$

$$\therefore x=2-k \quad \therefore A(2-k, 0)$$

$$y = \frac{k}{x-2} + 1 \text{에서 } x=0 \text{이면 } y = -\frac{k}{2} + 1$$

$$\therefore B\left(0, -\frac{k}{2} + 1\right)$$

곡선 $y = \frac{k}{x-2} + 1$ 의 두 점근선의 방정식은

$$x=2, y=1 \text{이므로 } C(2, 1)$$

이때 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면

(직선 AB의 기울기) = (직선 AC의 기울기)이다.

$$\text{직선 AB의 기울기는 } \frac{-\frac{k}{2} + 1 - 0}{0 - (2-k)} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{직선 AC의 기울기는 } \frac{1-0}{2-(2-k)} = \frac{1}{k}$$

$$\text{즉 } -\frac{1}{2} = \frac{1}{k} \text{이므로 } k = -2$$

답 ④

638

전략 주어진 두 유리함수를 $y = \frac{k}{x-p} + q$ 의 꼴로 변형하여 그래프의 점근선의 방정식을 구한다.

$$y = \frac{2x-3}{x-a} = \frac{2(x-a)+2a-3}{x-a} = \frac{2a-3}{x-a} + 2$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=a, y=2$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{-ax+2}{x-2} = \frac{-a(x-2)-2a+2}{x-2} \\ &= \frac{-2a+2}{x-2} - a \end{aligned}$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=2, y=-a$$

(i) $0 < a < 2$ 일 때

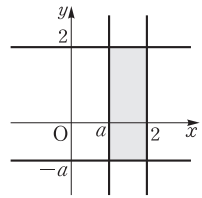
점근선으로 둘러싸인 직사각

형의 넓이가 3이므로

$$(2-a)(2+a) = 3$$

$$4-a^2=3, \quad a^2=1$$

$$\therefore a=1 \quad (\because 0 < a < 2)$$



(ii) $a > 2$ 일 때

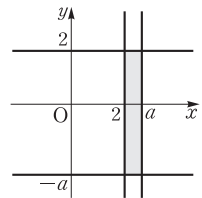
점근선으로 둘러싸인 직사각

형의 넓이가 3이므로

$$(a-2)(2+a) = 3$$

$$a^2-4=3, \quad a^2=7$$

$$\therefore a=\sqrt{7} \quad (\because a > 2)$$



(i), (ii)에서 $a=1$ 또는 $a=\sqrt{7}$

따라서 모든 a 의 값의 곱은

$$1 \times \sqrt{7} = \sqrt{7}$$

답 $\sqrt{7}$

639

전략 $y = \frac{bx+c}{ax-1}$ 를 $y = \frac{k}{x-p} + q$ 의 꼴로 변형하여 그래프의 점근선의 방정식을 구한다.

$$y = \frac{bx+c}{ax-1} = \frac{\frac{b}{a}(ax-1) + \frac{b}{a} + c}{ax-1}$$

$$= \frac{\frac{b}{a} + c}{\frac{ax-1}{a}} + \frac{b}{a}$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = \frac{1}{a}, y = \frac{b}{a}$$

주어진 그래프에서 $\frac{1}{a} > 0, \frac{b}{a} > 0$ 이므로

$$a > 0, b > 0$$

또 $x=0$ 일 때 y 의 값이 0보다 크므로

$$-c > 0 \quad \therefore c < 0$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

640

전략 방정식 $\frac{2x-4}{x-1} = kx+1$ 의 실근이 존재하지 않음을 이용한다.

$A \cap B = \emptyset$ 이므로 유리함수 $y = \frac{2x-4}{x-1}$ 의 그래프와

직선 $y = kx+1$ 은 만나지 않는다.

따라서 방정식

$$\frac{2x-4}{x-1} = kx+1, \text{ 즉 } kx^2 - (k+1)x + 3 = 0$$

이 실근을 갖지 않아야 한다.

(i) $k=0$ 일 때

$$-x+3=0 \text{에서 } x=3$$

따라서 방정식의 실근이 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k \neq 0$ 일 때

이차방정식 $kx^2 - (k+1)x + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = \{-(k+1)\}^2 - 4 \times k \times 3 < 0$$

$$\therefore k^2 - 10k + 1 < 0$$

이때 이차방정식 $k^2 - 10k + 1 = 0$ 의 두 근이

$k = 5 \pm 2\sqrt{6}$ 이므로 부등식의 해는

$$5 - 2\sqrt{6} < k < 5 + 2\sqrt{6}$$

(i), (ii)에서 구하는 k 의 값의 범위는

$$5 - 2\sqrt{6} < k < 5 + 2\sqrt{6}$$

$$\text{답 } 5 - 2\sqrt{6} < k < 5 + 2\sqrt{6}$$

641

전략 $y=f(x)$ 로 놓고 x 에 대하여 둔 다음 x 와 y 를 서로 바꾸어 $g(x)$ 를 구한다.

$$y = \frac{4x+1}{x-1} \text{로 놓고 } x \text{에 대하여 풀면}$$

$$y(x-1) = 4x+1$$

$$(y-4)x = y+1$$

$$\therefore x = \frac{y+1}{y-4}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \frac{x+1}{x-4}$$

$$\begin{aligned} \therefore g(x) &= \frac{x+1}{x-4} \\ &= \frac{(x-4)+5}{x-4} \\ &= \frac{5}{x-4} + 1 \end{aligned}$$

이때 $y=g(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하면

$$y = \frac{5}{x-m-4} + n + 1$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x+1}{x-1} = \frac{4(x-1)+5}{x-1} \\ &= \frac{5}{x-1} + 4 \end{aligned}$$

$$\text{에서 } \frac{5}{x-m-4} + n + 1 = \frac{5}{x-1} + 4 \text{이므로}$$

$$-m-4 = -1, n+1 = 4$$

$$\therefore m = -3, n = 3$$

$$\therefore n-m = 6$$

답 6

642

전략 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 의 길이를 이용하여 $\triangle ABC$ 의 넓이를 k 에 대한 식으로 나타낸다.

점 A의 좌표를 $(a, \frac{1}{a})$ ($a > 0$)이라 하면 점 B의 y 좌

표는 $\frac{1}{a}$ 이므로 $\frac{k}{x} = \frac{1}{a}$ 에서

$$x = ak \quad \therefore B\left(ak, \frac{1}{a}\right)$$

점 C의 x 좌표는 a 이므로

$$C\left(a, \frac{k}{a}\right)$$

이때 $k > 1$ 이므로

$$\overline{AB} = ak - a = a(k-1),$$

$$\overline{AC} = \frac{k}{a} - \frac{1}{a} = \frac{k-1}{a}$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \\ &= \frac{1}{2} \times a(k-1) \times \frac{k-1}{a} \\ &= \frac{1}{2} (k-1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \frac{1}{2} (k-1)^2 = 50 \text{이므로}$$

$$(k-1)^2 = 100, \quad k-1 = \pm 10$$

$$\therefore k = 11 \quad (\because k > 1)$$

답 11

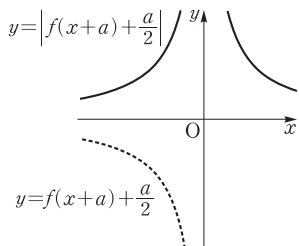
643

전략 $y = \left| f(x+a) + \frac{a}{2} \right|$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭일 조건을 파악한다.

함수 $y = \left| f(x+a) + \frac{a}{2} \right|$ 의 그래프는 함수

$y = f(x+a) + \frac{a}{2}$ 의 그래프에서 $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 $y = \left| f(x+a) + \frac{a}{2} \right|$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭이라면 함수 $y = f(x+a) + \frac{a}{2}$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 다음 그림과 같이 $x=0, y=0$ 이어야 한다.



$$f(x) = \frac{a}{x-6} + b \text{에서}$$

$$f(x+a) + \frac{a}{2} = \frac{a}{x+a-6} + b + \frac{a}{2}$$

이므로 $y = f(x+a) + \frac{a}{2}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=6-a, y=b+\frac{a}{2}$$

이 점근선의 방정식이 $x=0, y=0$ 이어야 하므로

$$6-a=0, b+\frac{a}{2}=0$$

$$\therefore a=6, b=-3$$

따라서 $f(x) = \frac{6}{x-6} - 3$ 이므로

$$\begin{aligned} f(b) &= f(-3) = \frac{6}{-3-6} - 3 \\ &= -\frac{11}{3} \end{aligned}$$

답 ④

644

전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

점 P의 좌표를 $\left(a, \frac{2a-3}{a-2}\right)$ ($a>2$)이라 하면

$$\begin{aligned} \overline{PA} &= \frac{2a-3}{a-2}, \overline{PB} = a \\ \therefore \overline{PA} + \overline{PB} &= \frac{2a-3}{a-2} + a \\ &= \frac{2(a-2)+1}{a-2} + a \\ &= \frac{1}{a-2} + a + 2 \end{aligned}$$

이때 $a>2$ 이므로 $a-2>0$

따라서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{1}{a-2} + a + 2 &= \frac{1}{a-2} + a - 2 + 4 \\ &\geq 2\sqrt{\frac{1}{a-2} \times (a-2)} + 4 \\ &= 2 + 4 \\ &= 6 \end{aligned}$$

여기서 등호는 $\frac{1}{a-2} = a-2$ 일 때 성립하므로

$$\begin{aligned} (a-2)^2 &= 1 \\ a-2 &= \pm 1 \\ \therefore a &= 3 \quad (\because a>2) \end{aligned}$$

따라서 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 는 $a=3$ 일 때 최솟값 6을 가지므로

$$\begin{aligned} m &= 6, p = 3 \\ \therefore m+p &= 9 \end{aligned}$$

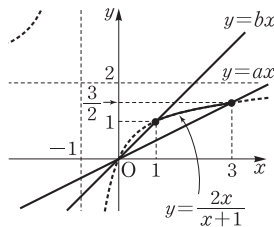
답 9

645

전략 주어진 부등식을 $y = \frac{2x}{x+1}$ 의 그래프와 두 직선 $y=ax, y=bx$ 의 위치 관계로 생각한다.

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x}{x+1} = \frac{2(x+1)-2}{x+1} \\ &= -\frac{2}{x+1} + 2 \end{aligned}$$

이므로 $y = \frac{2x}{x+1}$ 의 그래프는 $y = -\frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $1 \leq x \leq 3$ 에서 $y = \frac{2x}{x+1}$ 의 그래프는 위의 그림과 같다.

이때 두 직선 $y=ax, y=bx$ 는 a, b 의 값에 관계없이 항상 원점을 지난다.

(i) 직선 $y=ax$ 가 점 $\left(3, \frac{3}{2}\right)$ 을 지날 때

$$\frac{3}{2} = 3a \text{에서} \quad a = \frac{1}{2}$$

$ax \leq \frac{2x}{x+1}$ 이려면 직선 $y=ax$ 가 $y=\frac{2x}{x+1}$ 의 그래프와 만나거나 그래프보다 아래쪽에 있어야 하므로 $a \leq \frac{1}{2}$

(ii) 직선 $y=bx$ 가 점 $(1, 1)$ 을 지날 때

$$b=1$$

$\frac{2x}{x+1} \leq bx$ 이려면 직선 $y=bx$ 가 $y=\frac{2x}{x+1}$ 의 그래프와 만나거나 그래프보다 위쪽에 있어야 하므로 $b \geq 1$

(i), (ii)에서 $b-a \geq \frac{1}{2}$

따라서 $b-a$ 의 최솟값은 $\frac{1}{2}$ 이다. ▶ 답 $\frac{1}{2}$

646

전략 먼저 조건 (가)에서 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 조건을 파악한다.

조건 (가)에서 방정식 $|f(x)|=2$ 는 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

$$|f(x)|=2 \text{에서 } f(x)=2 \text{ 또는 } f(x)=-2$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=2$ 와 한 점에서 만나고 직선 $y=-2$ 와 만나지 않거나 직선 $y=-2$ 와 한 점에서 만나고 직선 $y=2$ 와 만나지 않아야 한다.

함수 $y=f(x)$ 의 치역은 $\{y|y \neq b \text{인 실수}\}$ 이고 $f(x)$ 는 일대일함수이므로 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ (k 는 실수)의 교점의 개수는 $k=b$ 이면 0이고, $k \neq b$ 이면 1이다.

즉 두 직선 $y=2, y=-2$ 중 하나는 곡선 $y=f(x)$ 의 점근선이어야 한다.

이때 곡선 $y=f(x)$ 의 점근선의 방정식은 $x=0, y=b$ 이므로

$$b=2 \text{ 또는 } b=-2$$

한편 $f^{-1}(2)=k$ 라 하면 $f(k)=2$ 이므로

$$\frac{a}{k} + b = 2, \quad \frac{a}{k} = 2 - b$$

$$\therefore k = \frac{a}{2-b}$$

$$\therefore f^{-1}(2) = \frac{a}{2-b}$$

조건 (나)에서 $f^{-1}(2)=f(2)-1$ 이므로

$$\frac{a}{2-b} = \frac{a}{2} + b - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $b \neq 2$ 이므로

$$b = -2$$

①에 $b=-2$ 를 대입하면

$$\frac{a}{2-(-2)} = \frac{a}{2} - 2 - 1$$

$$\frac{a}{4} = \frac{a}{2} - 3, \quad -\frac{a}{4} = -3$$

$$\therefore a = 12$$

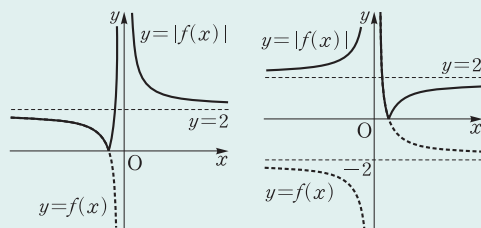
따라서 $f(x) = \frac{12}{x} - 2$ 이므로

$$f(8) = \frac{12}{8} - 2 = -\frac{1}{2}$$

▶ 답 ①

해설 Focus

$f(x) = \frac{a}{x} + b$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=0, y=b$ 이므로 조건 (가)를 만족시키도록 $y=|f(x)|$ 의 그래프를 그려 보면 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 $b=2$ 또는 $b=-2$ 임을 알 수 있다.

3 무리함수

Ⅲ. 함수

01 무리식

● 본책 276~278쪽

647

(1) $\sqrt{x+1}$ 에서 $x+1 \geq 0$

$\therefore x \geq -1$

(2) $\sqrt{x-1}$ 에서 $x-1 \geq 0$

$\therefore x \geq 1$

..... ㉠

$\sqrt{2x-4}$ 에서 $2x-4 \geq 0$

$\therefore x \geq 2$

..... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은

$x \geq 2$

(3) $\sqrt{x+3}$ 에서 $x+3 \geq 0$

$\therefore x \geq -3$

..... ㉢

$\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ 에서 $2-x > 0$

$\therefore x < 2$

..... ㉣

㉢, ㉣의 공통부분은

$-3 \leq x < 2$

(4) $\sqrt{2x-1}$ 에서 $2x-1 \geq 0$

$\therefore x \geq \frac{1}{2}$

..... ㉤

$\sqrt{4-x}$ 에서 $4-x > 0$

$\therefore x < 4$

..... ㉥

㉤, ㉥의 공통부분은

$\frac{1}{2} \leq x < 4$

답 (1) $x \geq -1$

(2) $x \geq 2$

(3) $-3 \leq x < 2$

(4) $\frac{1}{2} \leq x < 4$

648

$$\begin{aligned} (1) \frac{x}{\sqrt{x+4}-2} &= \frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)} \\ &= \frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{x+4-4} \\ &= \sqrt{x+4}+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{6}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}} &= \frac{6(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3})}{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3})} \\ &= \frac{6(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3})}{x+3-(x-3)} \\ &= \sqrt{x+3}+\sqrt{x-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \frac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{x-2}+1} &= \frac{(\sqrt{x-2}-1)^2}{(\sqrt{x-2}+1)(\sqrt{x-2}-1)} \\ &= \frac{x-2-2\sqrt{x-2}+1}{x-2-1} \\ &= \frac{x-1-2\sqrt{x-2}}{x-3} \end{aligned}$$

답 (1) $\sqrt{x+4}+2$ (2) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}$

(3) $\frac{x-1-2\sqrt{x-2}}{x-3}$

649

$$\begin{aligned} (1) \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} &= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})-(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \\ &= \frac{-2\sqrt{y}}{x-y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{2x}{2-\sqrt{x+1}} + \frac{2x}{2+\sqrt{x+1}} &= \frac{2x(2+\sqrt{x+1})+2x(2-\sqrt{x+1})}{(2-\sqrt{x+1})(2+\sqrt{x+1})} \\ &= \frac{4x+2x\sqrt{x+1}+4x-2x\sqrt{x+1}}{4-(x+1)} \\ &= \frac{8x}{3-x} \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{-2\sqrt{y}}{x-y}$ (2) $\frac{8x}{3-x}$

650

$$\begin{aligned} (1) \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} &= \frac{(x-\sqrt{x^2-1})+(x+\sqrt{x^2-1})}{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})} \\ &= \frac{2x}{x^2-(x^2-1)} = 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} - \frac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} \\
 &= \frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})-x(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})} \\
 &= \frac{x\sqrt{x}-x\sqrt{x-1}-x\sqrt{x}-x\sqrt{x-1}}{x-(x-1)} \\
 &= -2x\sqrt{x-1}
 \end{aligned}$$

답 (1) $2x$ (2) $-2x\sqrt{x-1}$

651

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} &= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \\
 &= \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y} \quad \leftarrow x>0, y>0 \text{ 이므로 } \sqrt{x}\sqrt{y}=\sqrt{xy}
 \end{aligned}$$

이때 $x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$ 에서

$$\begin{aligned}
 x+y &= (\sqrt{2}+1) + (\sqrt{2}-1) = 2\sqrt{2}, \\
 x-y &= (\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}-1) = 2, \\
 xy &= (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1 \\
 \therefore \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} &= \frac{2\sqrt{2}+2}{2} = \sqrt{2}+1 \quad \text{답 } \sqrt{2}+1
 \end{aligned}$$

652

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})} \\
 &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{x-(x+1)} \\
 &= \sqrt{x+1}-\sqrt{x} \\
 \therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(99) \\
 &= (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) \\
 &\quad + \cdots + (\sqrt{99}-\sqrt{98}) + (\sqrt{100}-\sqrt{99}) \\
 &= -1+10 \\
 &= 9
 \end{aligned}$$

답 9

02 무리함수

● 본책 279~288쪽

653

ㄴ. $y = -\sqrt{5}x$ 는 다항함수이다.

$$\begin{aligned}
 \text{ㄷ. } x \leq 2 \text{ 이면 } & y = \sqrt{(2-x)^2} = 2-x \\
 x > 2 \text{ 이면 } & y = \sqrt{(2-x)^2} = x-2
 \end{aligned}$$

따라서 무리함수가 아니다.

이상에서 무리함수는 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ, ㄹ

654

(1) $-3-x \geq 0$ 에서 $x \leq -3$ 이므로 정의역은 $\{x|x \leq -3\}$

(2) $x+2 \geq 0$ 에서 $x \geq -2$ 이므로 정의역은 $\{x|x \geq -2\}$

(3) $2x-4 \geq 0$ 에서 $x \geq 2$ 이므로 정의역은 $\{x|x \geq 2\}$

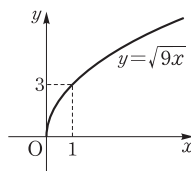
(4) $1-x^2 \geq 0$ 에서 $x^2-1 \leq 0$, $(x+1)(x-1) \leq 0$
 $\therefore -1 \leq x \leq 1$

따라서 정의역은 $\{x|-1 \leq x \leq 1\}$

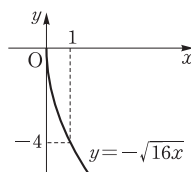
- 답 (1) $\{x|x \leq -3\}$
 (2) $\{x|x \geq -2\}$
 (3) $\{x|x \geq 2\}$
 (4) $\{x|-1 \leq x \leq 1\}$

655

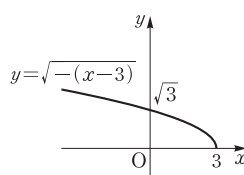
(1) $y = \sqrt{9x}$ 의 그래프는 오른쪽
 그림과 같고,
 정의역은 $\{x|x \geq 0\}$
 치역은 $\{y|y \geq 0\}$



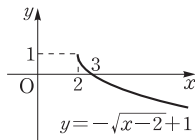
(2) $y = -\sqrt{16x}$ 의 그래프는 오
 른쪽 그림과 같고,
 정의역은 $\{x|x \geq 0\}$
 치역은 $\{y|y \leq 0\}$



(3) $y = \sqrt{-(x-3)}$ 의 그래
 프를 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래
 프를 x 축의 방향으로 3
 만큼 평행이동한 것이므
 로 오른쪽 그림과 같고,
 정의역은 $\{x|x \leq 3\}$
 치역은 $\{y|y \geq 0\}$



- (4) $y = -\sqrt{x-2} + 1$ 의 그래프
는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 x
축의 방향으로 2만큼, y 축의
방향으로 1만큼 평행이동한
것이므로 오른쪽 그림과 같고,
정의역은 $\{x|x \geq 2\}$
치역은 $\{y|y \leq 1\}$

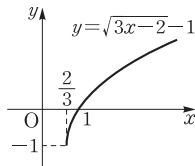


답 풀이 참조

656

(1) $y = \sqrt{3x-2} - 1 = \sqrt{3\left(x - \frac{2}{3}\right)} - 1$

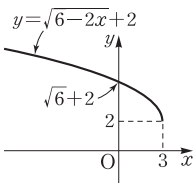
따라서 $y = \sqrt{3x-2} - 1$ 의 그
래프는 $y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 $\frac{2}{3}$ 만큼, y 축
의 방향으로 -1 만큼 평행이
동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,



정의역은 $\{x|x \geq \frac{2}{3}\}$
치역은 $\{y|y \geq -1\}$

(2) $y = \sqrt{6-2x} + 2 = \sqrt{-2(x-3)} + 2$

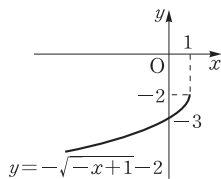
따라서 $y = \sqrt{6-2x} + 2$ 의 그
래프는 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프
를 x 축의 방향으로 3만큼, y
축의 방향으로 2만큼 평행이
동한 것이므로 오른쪽 그림
과 같고,



정의역은 $\{x|x \leq 3\}$
치역은 $\{y|y \geq 2\}$

(3) $y = -\sqrt{-x+1} - 2 = -\sqrt{-(x-1)} - 2$

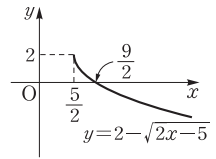
따라서 $y = -\sqrt{-x+1} - 2$
의 그래프는 $y = -\sqrt{-x}$ 의
그래프를 x 축의 방향으로
1만큼, y 축의 방향으로
 -2 만큼 평행이동한 것이
므로 오른쪽 그림과 같고,



정의역은 $\{x|x \leq 1\}$
치역은 $\{y|y \leq -2\}$

(4) $y = 2 - \sqrt{2x-5} = -\sqrt{2\left(x - \frac{5}{2}\right)} + 2$

따라서 $y = 2 - \sqrt{2x-5}$ 의
그래프는 $y = -\sqrt{2x}$ 의 그
래프를 x 축의 방향으로 $\frac{5}{2}$



만큼, y 축의 방향으로 2만
큼 평행이동한 것이므로 위의 그림과 같고,

정의역은 $\{x|x \geq \frac{5}{2}\}$
치역은 $\{y|y \leq 2\}$

답 풀이 참조

657

ㄱ. $a > 0$ 이면 치역이 $\{y|y \geq 0\}$ 이므로 그래프가 제 3
사분면과 제 4사분면을 지나지 않는다. (참)

ㄴ. $b < 0$ 이면 정의역이 $\{x|x \leq 0\}$ 이므로 $a > 0$ 이면
그래프가 제 2사분면을 지난다. (거짓)

ㄷ. $ab > 0$ 이면 $a > 0, b > 0$ 또는 $a < 0, b < 0$
이때 $a < 0, b < 0$ 이면 그래프가 제 3사분면을 지
난다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

658

$y = \sqrt{ax-3} + 2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y
축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{a(x-b)} - 3 + 2 + c$$

$$\therefore y = \sqrt{ax-ab-3} + 2 + c$$

이 함수의 그래프가 $y = \sqrt{5x+2}$ 의 그래프와 일치하
므로 $a=5, -ab-3=2, 2+c=0$

$$\therefore a=5, b=-1, c=-2$$

$$\therefore abc=10$$

답 10

659

ㄱ. $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하
면 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프와 겹쳐진다.

$$\therefore y = \sqrt{-2x+6} = \sqrt{-2(x-3)}$$

따라서 $y = \sqrt{-2x+6}$ 의 그래프를 x 축의 방향으
로 -3 만큼 평행이동하면 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프와
겹쳐진다.

$$\text{ㄷ. } y = -\sqrt{4-x} + 7 = -\sqrt{-(x-4)} + 7$$

따라서 $y = -\sqrt{4-x} + 7$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 -7 만큼 평행이동한 후 x 축에 대하여 대칭이동하면 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프와 겹쳐진다.

이상에서 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 무리함수 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

개념 노트

도형의 대칭이동

방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 x 축, y 축, 원점, 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 다음과 같다.

- ① x 축에 대한 대칭이동 $\Rightarrow y$ 대신 $-y$ 를 대입
 $\Rightarrow f(x, -y) = 0$
- ② y 축에 대한 대칭이동 $\Rightarrow x$ 대신 $-x$ 를 대입
 $\Rightarrow f(-x, y) = 0$
- ③ 원점에 대한 대칭이동
 $\Rightarrow x$ 대신 $-x$, y 대신 $-y$ 를 대입
 $\Rightarrow f(-x, -y) = 0$
- ④ 직선 $y=x$ 에 대한 대칭이동
 $\Rightarrow x$ 대신 y , y 대신 x 를 대입
 $\Rightarrow f(y, x) = 0$

660

$y = \sqrt{-x+2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{-(x-1)+2-2}$$

$$\therefore y = \sqrt{-x+3-2}$$

$y = \sqrt{-x+3-2}$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{-(-x)+3-2}$$

$$\therefore y = \sqrt{x+3-2}$$

따라서 $a=1$, $b=3$, $c=-2$ 이므로

$$a+b+c=2$$

답 2

661

$$y = -\sqrt{4x-4} + 3 = -\sqrt{4(x-1)} + 3$$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{4x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$$y = -1 \text{ 일 때, } -1 = -\sqrt{4x-4} + 3 \text{ 에서}$$

$$\sqrt{4x-4} = 4, \quad 4x-4 = 16$$

$$\therefore x = 5$$

$$y = 1 \text{ 일 때, } 1 = -\sqrt{4x-4} + 3 \text{ 에서}$$

$$\sqrt{4x-4} = 2, \quad 4x-4 = 4$$

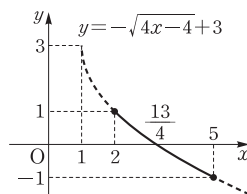
$$\therefore x = 2$$

따라서 오른쪽 그림에서

치역이 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$

일 때, 정의역은

$$\{x \mid 2 \leq x \leq 5\}$$



$$\text{답 } \{x \mid 2 \leq x \leq 5\}$$

662

$$y = -\sqrt{-3x+3} - 1 = -\sqrt{-3(x-1)} - 1$$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-2 \leq x \leq 1$ 에서

$$y = -\sqrt{-3x+3} - 1 \text{ 의}$$

그래프는 오른쪽 그림과

같으므로

$x=1$ 일 때 최댓값

$$a = -\sqrt{-3+3} - 1 = -1,$$

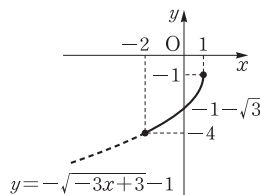
$x=-2$ 일 때 최솟값

$$b = -\sqrt{6+3} - 1 = -4$$

를 갖는다.

$$\therefore a-b=3$$

답 3

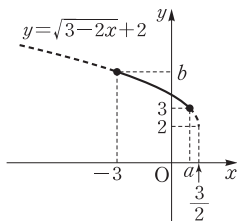


663

$$y = \sqrt{3-2x} + 2 = \sqrt{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)} + 2$$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-3 \leq x \leq a$ 에서
 $y = \sqrt{3-2x} + 2$ 의 그래프
 는 오른쪽 그림과 같으므로



$x = -3$ 일 때 최댓값
 $b = \sqrt{3+6} + 2 = 5,$

$x = a$ 일 때 최솟값
 $\sqrt{3-2a} + 2$

를 갖는다.

즉 $\sqrt{3-2a} + 2 = 3$ 이므로 $\sqrt{3-2a} = 1$

$$3-2a=1 \quad \therefore a=1$$

$$\therefore b-a=5-1=4$$

답 4

664

주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{-ax}$ ($a > 0$)의 그래프
 를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평
 행이동한 것이므로 함수의 식을

$$y = \sqrt{-a(x-4)} - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

로 놓을 수 있다.

이때 ①의 그래프가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$1 = \sqrt{4a} - 1, \quad \sqrt{4a} = 2$$

$$4a = 4 \quad \therefore a = 1$$

①에 $a=1$ 을 대입하면

$$y = \sqrt{-(x-4)} - 1 = \sqrt{-x+4} - 1$$

따라서 $a=1, b=4, c=-1$ 이므로

$$a+b+c=4$$

답 4

665

주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{ax}$ ($a < 0$)의 그래프
 를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행
 이동한 것이므로 함수의 식을

$$y = -\sqrt{a(x-1)} + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

로 놓을 수 있다.

이때 ①의 그래프가 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -\sqrt{-a} + 1, \quad \sqrt{-a} = 1$$

$$-a = 1 \quad \therefore a = -1$$

①에 $a=-1$ 을 대입하면

$$y = -\sqrt{-(x-1)} + 1 = -\sqrt{-x+1} + 1$$

$$\therefore f(x) = -\sqrt{-x+1} + 1$$

$f(k) = -1$ 에서

$$-1 = -\sqrt{-k+1} + 1$$

$$\sqrt{-k+1} = 2, \quad -k+1 = 4$$

$$\therefore k = -3$$

답 -3

666

$ax+9 \geq 0$ 에서 $ax \geq -9$

이때 주어진 함수의 정의역이 $\{x | x \geq -3\}$ 이므로

$$a > 0$$

따라서 $ax \geq -9$ 에서 $x \geq -\frac{9}{a}$ 이므로

$$-\frac{9}{a} = -3 \quad \therefore a = 3$$

또 주어진 함수의 치역이 $\{y | y \leq b\}$ 이므로

$$b = 2$$

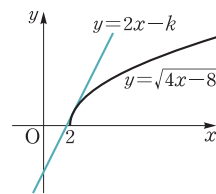
$$\therefore ab = 6$$

답 6

667

$$y = \sqrt{4x-8} = \sqrt{4(x-2)}$$

이므로 주어진 무리함수의 그
 래프는 $y = \sqrt{4x}$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 2만큼 평행
 이동한 것이다.



또 $y = 2x - k$ 는 기울기가 2이고 y 절편이 $-k$ 인 직선
 이다.

무리함수 $y = \sqrt{4x-8}$ 의 그래프와 직선 $y = 2x - k$ 가
 접할 때, $\sqrt{4x-8} = 2x - k$ 에서 양변을 제곱하면

$$4x-8 = (2x-k)^2$$

$$4x-8 = 4x^2 - 4kx + k^2$$

$$\therefore 4x^2 - 4(k+1)x + k^2 + 8 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{-2(k+1)\}^2 - 4(k^2+8) = 0$$

$$8k-28=0 \quad \therefore k = \frac{7}{2}$$

따라서 무리함수 $y = \sqrt{4x-8}$ 의 그래프와 직선

$y = 2x - k$ 가 만나지 않으려면

$$-k > -\frac{7}{2} \quad \therefore k < \frac{7}{2}$$

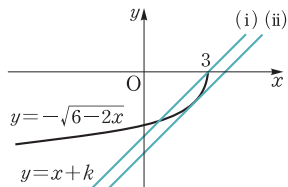
답 $k < \frac{7}{2}$

668

$$y = -\sqrt{6-2x} = -\sqrt{2(x-3)}$$

이므로 주어진 무리함수의 그래프는 $y = -\sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

또 $y = x + k$ 는 기울기가 1이고 y 절편이 k 인 직선이다.



(i) 직선 $y = x + k$ 가 점 $(3, 0)$ 을 지날 때

$$0 = 3 + k$$

$$\therefore k = -3$$

(ii) 무리함수 $y = -\sqrt{6-2x}$ 의 그래프와 직선

$y = x + k$ 가 접할 때

$-\sqrt{6-2x} = x + k$ 의 양변을 제곱하면

$$6 - 2x = (x + k)^2$$

$$6 - 2x = x^2 + 2kx + k^2$$

$$\therefore x^2 + 2(k+1)x + k^2 - 6 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (k+1)^2 - (k^2 - 6) = 0$$

$$2k + 7 = 0$$

$$\therefore k = -\frac{7}{2}$$

따라서 주어진 무리함수의 그래프와 직선이 한 점에서 만나려면 직선이 (i)보다 위쪽에 있거나 (ii)이어야 하므로

$$k > -3 \text{ 또는 } k = -\frac{7}{2}$$

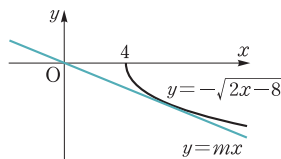
$$\text{답 } k > -3 \text{ 또는 } k = -\frac{7}{2}$$

669

$$y = -\sqrt{2x-8} = -\sqrt{2(x-4)}$$

이므로 주어진 무리함수의 그래프는 $y = -\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

또 직선 $y = mx$ 는 m 의 값에 관계없이 항상 원점을 지난다.



무리함수 $y = -\sqrt{2x-8}$ 의 그래프와 직선 $y = mx$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면 위의 그림에서

$$m < 0$$

무리함수 $y = -\sqrt{2x-8}$ 의 그래프와 직선 $y = mx$ 가 접할 때, $-\sqrt{2x-8} = mx$ 에서 양변을 제곱하면

$$2x - 8 = m^2 x^2$$

$$\therefore m^2 x^2 - 2x + 8 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - m^2 \times 8 = 0$$

$$1 - 8m^2 = 0, \quad m^2 = \frac{1}{8}$$

$$\therefore m = -\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (\because m < 0)$$

따라서 무리함수 $y = -\sqrt{2x-8}$ 의 그래프와 직선 $y = mx$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$-\frac{\sqrt{2}}{4} < m < 0 \quad \text{답 } -\frac{\sqrt{2}}{4} < m < 0$$

670

$y = x^2 - 8x + 10$ ($x \leq 4$)이라 하면

$$y = (x-4)^2 - 6$$

에서 치역이 $\{y | y \geq -6\}$ 이므로 역함수의 정의역은 $\{x | x \geq -6\}$ 이다.

$y = (x-4)^2 - 6$ 에서

$$y + 6 = (x-4)^2$$

$$\therefore x - 4 = \pm \sqrt{y+6}$$

그런데 $x \leq 4$ 에서 $x - 4 \leq 0$ 이므로

$$x - 4 = -\sqrt{y+6}$$

$$\therefore x = -\sqrt{y+6} + 4$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = -\sqrt{x+6} + 4$$

$$\therefore f^{-1}(x) = -\sqrt{x+6} + 4 \quad (x \geq -6)$$

따라서 $a = 1, b = 6, c = 4, d = -6$ 이므로

$$ab - cd = 1 \times 6 - 4 \times (-6) = 30$$

답 30

III-3

한
문
제

671

$$\begin{aligned}
 (g^{-1} \circ f)^{-1}(2) &= (f^{-1} \circ g)(2) \\
 &= f^{-1}(g(2)) \\
 &= f^{-1}(4) \leftarrow g(2) = \sqrt{4+5}+1=4 \\
 f^{-1}(4) &= k \text{라 하면 } f(k)=4 \text{이므로} \\
 \sqrt{k+3} &= 4, \quad k+3=16 \\
 \therefore k &= 13 \\
 \therefore (g^{-1} \circ f)^{-1}(2) &= f^{-1}(4) = 13
 \end{aligned}$$

답 13

672

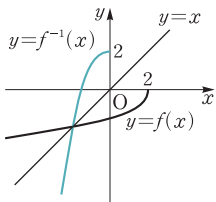
$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{ax+b} \text{의 그래프가 점 } (2, 5) \text{를 지나므로} \\
 \sqrt{2a+b} &= 5 \\
 \therefore 2a+b &= 25 \quad \dots\dots ㉠ \\
 \text{또 } y=f^{-1}(x) \text{의 그래프가 점 } (2, 5) \text{를 지나므로} \\
 f^{-1}(2) &= 5 \text{에서 } f(5)=2 \\
 \sqrt{5a+b} &= 2 \\
 \therefore 5a+b &= 4 \quad \dots\dots ㉡ \\
 ㉠, ㉡ \text{을 연립하여 풀면} \\
 a &= -7, b=39 \\
 \text{따라서 } f(x) &= \sqrt{-7x+39} \text{이므로} \\
 f(1) &= \sqrt{-7+39} = 4\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

답 $4\sqrt{2}$

673

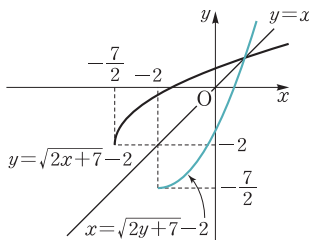
$$\begin{aligned}
 \text{함수 } y=f(x) \text{의 그래프와 그} \\
 \text{역함수 } y=f^{-1}(x) \text{의 그래프} \\
 \text{는 직선 } y=x \text{에 대하여 대칭} \\
 \text{이므로 오른쪽 그림과 같다.} \\
 \text{따라서 두 함수 } y=f(x), \\
 y=f^{-1}(x) \text{의 그래프의 교점} \\
 \text{은 } y=f(x) \text{의 그래프와 직선 } y=x \text{의 교점과 같으므로} \\
 -\sqrt{2-x}=x \text{에서 양변을 제곱하면} \\
 2-x=x^2, \quad x^2+x-2=0 \\
 (x+2)(x-1)=0 \\
 \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1 \\
 \text{그런데 } x \leq 0 \text{이므로 } x=-2 \\
 \text{따라서 교점의 좌표는 } (-2, -2) \text{이므로} \\
 a=-2, b=-2 \\
 \therefore a+b=-4
 \end{aligned}$$

답 -4



674

함수 $y=\sqrt{2x+7}-2$ 에서 x 와 y 를 서로 바꾸면 $x=\sqrt{2y+7}-2$ 이므로 두 함수는 서로 역함수이다. 따라서 두 함수 $y=\sqrt{2x+7}-2$ 와 $x=\sqrt{2y+7}-2$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 다음 그림과 같다.



즉 두 함수의 그래프의 교점은 $y=\sqrt{2x+7}-2$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.

$$\sqrt{2x+7}-2=x \text{에서 } \sqrt{2x+7}=x+2$$

양변을 제곱하면

$$2x+7=x^2+4x+4$$

$$x^2+2x-3=0, \quad (x+3)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

그런데 $x \geq -2$ 이므로

$$x=1$$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(1, 1)$ 이다. **답** $(1, 1)$

675

함수 $y=2\sqrt{x-2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=2\sqrt{x-a-2}$$

즉 $f(x)=2\sqrt{x-a-2}$ 이

고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래

프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$

의 그래프는 직선 $y=x$ 에

대하여 대칭이므로 오른쪽

그림과 같이 두 함수

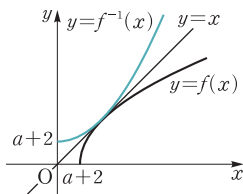
$y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 접하면 $y=f(x)$

의 그래프와 직선 $y=x$ 도 접한다.

$2\sqrt{x-a-2}=x$ 에서 양변을 제곱하면

$$4(x-a-2)=x^2$$

$$\therefore x^2-4x+4a+8=0$$



이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - (4a+8) = 0$$

$$-4a-4=0 \quad \therefore a=-1$$

답 -1

연습문제

● 본책 289~291쪽

676

전략 분모의 유리화를 이용하여 $\frac{1}{f(x)}$ 을 간단히 한다.

$$f(x) = \sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}} \\ &= \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}}{(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1})} \\ &= \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}}{2x+1 - (2x-1)} \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \cdots + \frac{1}{f(24)} \\ &= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{49} - \sqrt{47}) \} \\ &= \frac{1}{2} \times (-1+7) = 3 \end{aligned}$$

답 3

677

전략 주어진 무리함수를 $y = -\sqrt{a(x-p)} + q$ 의 꼴로 변형하여 그래프를 그린다.

$$y = -\sqrt{6-3x} + 4 = -\sqrt{-3(x-2)} + 4$$

따라서 주어진 함수의 그

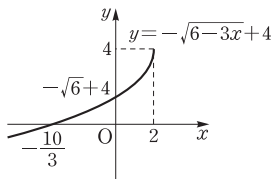
래프는 $y = -\sqrt{-3x}$ 의

그래프를 x 축의 방향으

로 2만큼, y 축의 방향으

로 4만큼 평행이동한 것

이므로 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동하면 $y = -\sqrt{-3x}$ 의 그래프와 일치한다. (참)

ㄴ. 정의역은 $\{x|x \leq 2\}$, 치역은 $\{y|y \leq 4\}$ 이다.

(참)

ㄷ. 주어진 무리함수의 그래프는 제 1, 2, 3사분면을 지난다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

678

전략 그래프가 지나는 점의 좌표를 대입하여 a 의 값을 구한다.

함수 $y = -\sqrt{x-a} + a + 2$ 의 그래프가 점 $(a, -a)$ 를 지나므로

$$-a = -\sqrt{a-a} + a + 2$$

$$2a = -2 \quad \therefore a = -1$$

함수 $y = -\sqrt{x+1} + 1$ 의

그래프는 함수 $y = -\sqrt{x}$ 의

그래프를 x 축의 방향으로

-1 만큼, y 축의 방향으로 1

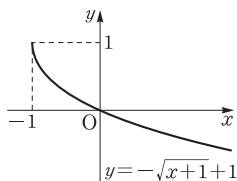
만큼 평행이동한 것이므로

오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y = -\sqrt{x+1} + 1$ 의 치역은

$$\{y|y \leq 1\}$$

답 ①



679

전략 $y = \sqrt{ax+b} + 1$ 의 그래프의 개형을 이용한다.

$$y = \sqrt{ax+b} + 1 = \sqrt{a\left(x + \frac{b}{a}\right)} + 1$$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$ 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평

행이동한 것이다.

이때 $a < 0$ 이므로 $-6 \leq x \leq 0$

에서 $y = \sqrt{ax+b} + 1$ 의 그래

프는 오른쪽 그림과 같다.

즉 $x = -6$ 일 때 최댓값 5 ,

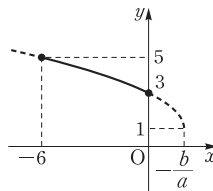
$x = 0$ 일 때 최솟값 3 을 가지므

로

$$\sqrt{-6a+b} + 1 = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\sqrt{b} + 1 = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } \sqrt{b} = 2 \quad \therefore b = 4$$



㉠에 $b=4$ 를 대입하면

$$\sqrt{-6a+4}+1=5$$

$$\sqrt{-6a+4}=4, \quad -6a+4=16$$

$$\therefore a=-2$$

$$\therefore ab=-2 \times 4 = -8$$

답 -8

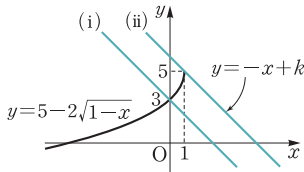
680

전략 주어진 무리함수의 그래프를 그리고 무리함수의 그래프와 직선이 제1사분면에서 만나기 위한 k 의 값의 범위를 구한다.

$$y=5-2\sqrt{1-x}=-2\sqrt{-(x-1)}+5$$

이므로 주어진 무리함수의 그래프는 $y=-2\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

또 직선 $y=-x+k$ 는 기울기가 -1 이고 y 절편이 k 인 직선이다.



(i) 직선 $y=-x+k$ 가 점 $(0, 3)$ 을 지날 때

$$3=0+k \quad \therefore k=3$$

(ii) 직선 $y=-x+k$ 가 점 $(1, 5)$ 를 지날 때

$$5=-1+k \quad \therefore k=6$$

주어진 무리함수의 그래프와 직선이 제1사분면에서 만나려면 직선이 (ii)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있어야 하므로

$$3 < k \leq 6$$

따라서 정수 k 는 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$$4+5+6=15$$

답 ③

681

전략 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, $f \circ f^{-1} = I$ 임을 이용한다.

$$(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(4) = (f \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ f)(4)$$

$$= (g^{-1} \circ f)(4)$$

$$= g^{-1}(f(4))$$

$$= g^{-1}(2) \quad \leftarrow f(4) = \frac{4+2}{4-1} = 2$$

$g^{-1}(2) = k$ 라 하면 $g(k) = 2$ 이므로

$$\sqrt{2k-1} = 2$$

양변을 제곱하면 $2k-1=4$

$$\therefore k = \frac{5}{2}$$

$$\therefore (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(4) = g^{-1}(2) = \frac{5}{2} \quad \text{답 } \frac{5}{2}$$

682

전략 $y = \sqrt{k(x-p)} + q$ 의 꼴로 변형하여 무리함수의 그래프를 그려 본다.

$$y = \sqrt{-x+2} + a = \sqrt{-(x-2)} + a$$

따라서 주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래

프를 x 축의 방향으로 2

만큼, y 축의 방향으로 a

만큼 평행이동한 것이다.

(i) $y = \sqrt{-x+2} + a$ 의

그래프가 점 $(0, 0)$ 을 지날 때

$$0 = \sqrt{2} + a$$

$$\therefore a = -\sqrt{2}$$

(ii) $y = \sqrt{-x+2} + a$ 의 그래프가 점 $(2, 0)$ 을 지날 때

$$0 = \sqrt{-2+2} + a$$

$$\therefore a = 0$$

주어진 무리함수의 그래프가 제4사분면은 지나고 제3사분면은 지나지 않으려면 그래프가 (i)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있어야 하므로

$$-\sqrt{2} \leq a < 0$$

$$\text{답 } -\sqrt{2} \leq a < 0$$

(i)과 (ii) 사이에 있어야 하므로

$$-\sqrt{2} \leq a < 0$$

$$\text{답 } -\sqrt{2} \leq a < 0$$

683

전략 주어진 유리함수의 그래프에서 a, b, c 의 부호를 알아낸다.

주어진 유리함수의 그래프에서

$$b < 0$$

유리함수 $y = \frac{b}{x+a} + c$ 의 그래프의 점근선의 방정식

은 $x = -a, y = c$ 이므로

$$-a > 0, c > 0 \quad \therefore a < 0, c > 0$$

$$y = \sqrt{ax+b} + c = \sqrt{a\left(x + \frac{b}{a}\right)} + c \text{이므로 함수}$$

$y = \sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축

의 방향으로 $-\frac{b}{a}$ 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이

동한 것이다.

이때 $a < 0$, $-\frac{b}{a} < 0$, $c > 0$ 이므로 함수

$y = \sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ④이다. 답 ④

684

전략 무리함수 $y = \sqrt{x-2} + 3$ 의 그래프와 직선 $y = ax - 3a + 1$ 이 만나도록 하는 a 의 값의 범위를 구한다.

무리함수 $y = \sqrt{x-2} + 3$ 의 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

또 $y = ax - 3a + 1$ 에서

$$y = a(x-3) + 1$$

따라서 직선 $y = ax - 3a + 1$ 은 a 의 값에 관계없이 항상 점 (3, 1)을 지난다.

이때 $A \cap B \neq \emptyset$ 이므로 무리함수 $y = \sqrt{x-2} + 3$ 의 그래프와 직선 $y = ax - 3a + 1$ 이 만나야 한다.

직선 $y = ax - 3a + 1$ 이 점 (2, 3)을 지날 때,

$$3 = 2a - 3a + 1$$

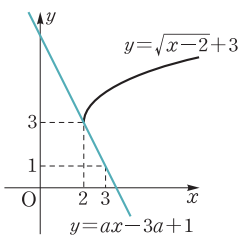
$$\therefore a = -2$$

무리함수 $y = \sqrt{x-2} + 3$ 의 그래프와 직선

$y = ax - 3a + 1$ 이 만나려면 직선의 기울기가 양수이거나 점 (2, 3)을 지날 때보다 작거나 같아야 하므로

$$a \leq -2 \text{ 또는 } a > 0$$

답 $a \leq -2$ 또는 $a > 0$



685

전략 $f^{-1}(a) = b$ 이면 $f(b) = a$ 임을 이용한다.

$f^{-1}(g(x)) = 2x$ 의 양변에 $x = 3$ 을 대입하면

$$f^{-1}(g(3)) = 6$$

$$\therefore g(3) = f(6) = \sqrt{18-12} = \sqrt{6}$$

답 ③

다른 풀이 $y = \sqrt{3x-12}$ 라 하면

$$y^2 = 3x - 12 \quad \therefore x = \frac{1}{3}y^2 + 4$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \frac{1}{3}x^2 + 4$$

이때 함수 $y = \sqrt{3x-12}$ 의 치역은 $\{y | y \geq 0\}$ 이므로 $f^{-1}(x)$ 의 정의역은 $\{x | x \geq 0\}$ 이다.

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x^2 + 4 \quad (x \geq 0)$$

따라서 $f^{-1}(g(x)) = 2x$ 에서

$$\frac{1}{3}\{g(x)\}^2 + 4 = 2x, \quad \{g(x)\}^2 = 6x - 12$$

$$\therefore g(x) = \sqrt{6x-12} \quad (\because g(x) \geq 0)$$

$$\therefore g(3) = \sqrt{18-12} = \sqrt{6}$$

686

전략 $f^{-1}(m) = n$ 이면 $f(n) = m$ 임을 이용한다.

$x \geq 3$ 에서

$$y = \sqrt{2x-6} + 1 = \sqrt{2(x-3)} + 1$$

$x < 3$ 에서

$$y = -\sqrt{-x+3} + 1 = -\sqrt{-(x-3)} + 1$$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$f^{-1}(3) = a$ 라 하면

$$f(a) = 3$$

$f(a) \geq 1$ 에서 $a > 3$ 이므로

$$\sqrt{2a-6} + 1 = 3 \quad \therefore \sqrt{2a-6} = 2$$

양변을 제곱하면 $2a - 6 = 4$

$$\therefore a = 5 \quad \therefore f^{-1}(3) = 5$$

$f^{-1}(-2) = b$ 라 하면 $f(b) = -2$

$f(b) < 1$ 에서 $b < 3$ 이므로

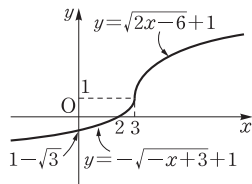
$$-\sqrt{-b+3} + 1 = -2 \quad \therefore \sqrt{-b+3} = 3$$

양변을 제곱하면 $-b + 3 = 9$

$$\therefore b = -6 \quad \therefore f^{-1}(-2) = -6$$

$$\therefore f^{-1}(3) + f^{-1}(-2) = 5 + (-6) = -1$$

답 -1



687

전략 주어진 이차함수의 그래프의 식을 구하여 역함수를 구한다.

이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 (2, 3)이므로

$$f(x) = a(x-2)^2 + 3 \quad (a > 0)$$

으로 놓을 수 있다.

$y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(3, 4)$ 를 지나므로

$$4=a+3 \quad \therefore a=1$$

$$\therefore f(x)=(x-2)^2+3 \quad (x \geq 2)$$

$y=(x-2)^2+3 \quad (x \geq 2)$ 이라 하면

$$(x-2)^2=y-3$$

$$\therefore x-2=\pm\sqrt{y-3}$$

그런데 $x \geq 2$ 에서 $x-2 \geq 0$ 이므로

$$x-2=\sqrt{y-3}$$

$$\therefore x=\sqrt{y-3}+2$$

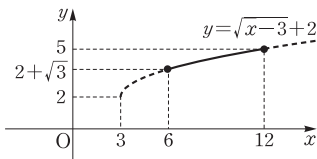
x 와 y 를 서로 바꾸면 $y=\sqrt{x-3}+2$

이때 함수 $y=f(x)$ 의 치역은 $\{y|y \geq 3\}$ 이므로

$f^{-1}(x)$ 의 정의역은 $\{x|x \geq 3\}$ 이다.

$$\therefore f^{-1}(x)=\sqrt{x-3}+2 \quad (x \geq 3)$$

$y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $6 \leq x \leq 12$ 에서 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 위의 그림과 같으므로 $x=12$ 일 때 최댓값 $\sqrt{12-3}+2=5$ 를 갖는다.

답 5

다른 풀이 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가한다.

즉 $6 \leq x \leq 12$ 에서 $f^{-1}(x)$ 는 $x=12$ 일 때 최대이므로 구하는 최댓값은

$$f^{-1}(12)$$

$f^{-1}(12)=k$ 라 하면 $f(k)=12$ 이므로

$$(k-2)^2+3=12, \quad (k-2)^2=9$$

$$k-2=\pm 3 \quad \therefore k=5 \quad (\because k \geq 2)$$

688

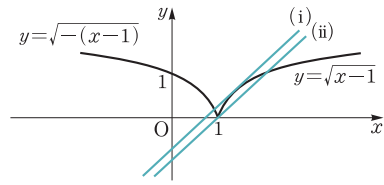
전략 $x \geq 1$ 인 경우와 $x < 1$ 인 경우로 나누어 그래프를 그린다.

$y=\sqrt{|x-1|}$ 에서

$$x \geq 1 \text{ 일 때, } y=\sqrt{x-1}$$

$$x < 1 \text{ 일 때, } y=\sqrt{-(x-1)}$$

따라서 $y=\sqrt{|x-1|}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) 무리함수 $y=\sqrt{x-1}$ 의 그래프와 직선 $y=x+k$ 가 접할 때

$\sqrt{x-1}=x+k$ 의 양변을 제곱하면

$$x-1=x^2+2kx+k^2$$

$$\therefore x^2+(2k-1)x+k^2+1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=(2k-1)^2-4(k^2+1)=0$$

$$-4k-3=0$$

$$\therefore k=-\frac{3}{4}$$

(ii) 직선 $y=x+k$ 가 점 $(1, 0)$ 을 지날 때

$$0=1+k \quad \therefore k=-1$$

따라서 함수 $y=\sqrt{|x-1|}$ 의 그래프와 직선 $y=x+k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나려면 직선이 (i)과 (ii) 사이에 있어야 하므로

$$-1 < k < -\frac{3}{4}$$

$$\text{답 } -1 < k < -\frac{3}{4}$$

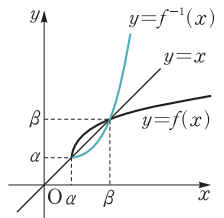
689

전략 $y=f(x)$ 와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 일치함을 이용한다.

$$y=\sqrt{2x-a}+2=\sqrt{2\left(x-\frac{a}{2}\right)}+2$$

이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{a}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.



$\sqrt{2x-a}+2=x$ 에서

$$\sqrt{2x-a}=x-2$$

양변을 제곱하면 $2x-a=x^2-4x+4$

$$\therefore x^2-6x+4+a=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근을 α, β ($\alpha < \beta$)라 하면 두 교점의 좌표는 $(\alpha, \alpha), (\beta, \beta)$ 이고 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=2\sqrt{2}$$

$$2(\alpha-\beta)^2=8 \quad \therefore (\alpha-\beta)^2=4$$

이차방정식 $\textcircled{1}$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=6, \alpha\beta=4+a$$

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \text{이므로}$$

$$4=36-4(4+a), \quad 4=-4a+20$$

$$\therefore a=4$$

답 4

690

전략 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 서로 역함수 관계임을 이용한다.

$y=\sqrt{4x+5}$ ($y \geq 0$)라 하면

$$y^2=4x+5 \quad \therefore x=\frac{1}{4}y^2-\frac{5}{4}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{4} \quad (x \geq 0)$$

즉 함수 $g(x)=\frac{1}{4}(x^2-5)$ ($x \geq 0$)는 함수 $f(x)$ 의 역함수이다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프의 교점은 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.

$$\sqrt{4x+5}=x \text{에서} \quad 4x+5=x^2$$

$$x^2-4x-5=0, \quad (x+1)(x-5)=0$$

$$\therefore x=5 \quad (\because x \geq 0)$$

$$\therefore A(5, 5)$$

점 B와 점 C는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$C(3, 1)$$

$$\therefore BC=\sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$$

직선 l 은 기울기가 -1 이고 점 B를 지나므로 직선 l 의 방정식은

$$y=-(x-1)+3 \quad \therefore x+y-4=0$$

점 A(5, 5)와 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{|5+5-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}=6$$

답 6

