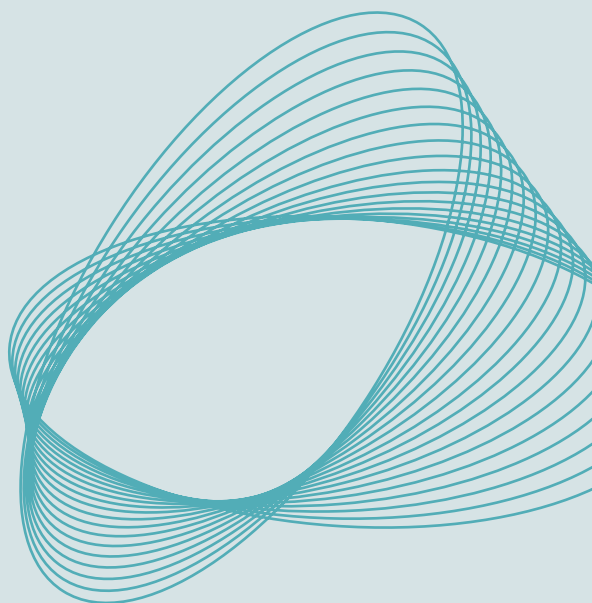


개념

수학의 시작 개념원리

미적분 Ⅱ

정답 및 풀이



1

수열의 극한

1. 수열의 극한

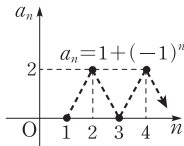
01

수열의 수렴과 발산

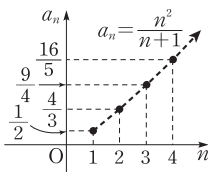
● 본책 10~12쪽

1

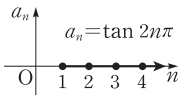
- (1) 오른쪽 그림에서 n 이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 0과 2가 교대로 나타나므로 수열 $\{a_n\}$ 은 발산(진동)한다.



- (2) 오른쪽 그림에서 n 이 한없이 커질 때, a_n 의 값도 한없이 커지므로 수열 $\{a_n\}$ 은 양의 무한대로 발산한다.



- (3) 오른쪽 그림에서 n 이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 0이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 수렴하고, 그 극한값은 0이다.



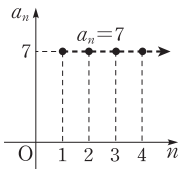
답 (1) 발산 (2) 발산 (3) 수렴, 0

2

- ㄱ. 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 7$$

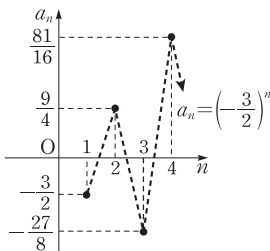
오른쪽 그림에서 n 이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 7이므로 이 수열은 수렴하고, 그 극한값은 7이다.



- ㄴ. 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$$

오른쪽 그림에서 n 이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 절댓값이 한없이 커지면서 그 부호는 음과 양이 교대로 나타나므로 이 수열은 발산(진동)한다.

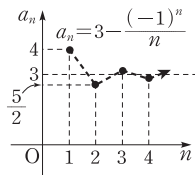


- ㄷ. 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 3 - \frac{(-1)^n}{n}$$

오른쪽 그림에서 n 이 한없이

커질 때, a_n 의 값은 3에 한없이 가까워지므로 이 수열은 수렴하고, 그 극한값은 3이다.

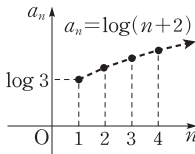


- ㄹ. 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \log(n+2)$$

오른쪽 그림에서 n 이 한없이

커질 때, a_n 의 값도 한없이 커지므로 이 수열은 양의 무한대로 발산한다.



이상에서 수렴하는 수열인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

02

수열의 극한값의 계산

● 본책 13~22쪽

3

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n + 4b_n) = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 4 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3 \times 4 + 4 \times (-3) = 0$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 5b_n) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 5 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2 \times 4 - 5 \times (-3) = 23$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4 \times (-3) \times (-3) = 36$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 1}{3b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + 1)}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3b_n} = \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 1}{3 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{2 \times 4 + 1}{3 \times (-3)} = -1$$

답 (1) 0 (2) 23 (3) 36 (4) -1

4

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 3 + 0 = 3$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \\ = 0 - 0 = 0$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{3}{n} \right) \left(\frac{3}{n} - 2 \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{3}{n} \right) \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n} - 2 \right) \\ = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \right) \times \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \right) \\ = (4 + 0) \times (0 - 2) = -8$$

답 (1) 3 (2) 0 (3) -8

5

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

따라서 수열 $\left\{ \frac{n-2}{2n+1} \right\}$ 는 수렴하고, 그 극한값은 $\frac{1}{2}$ 이다.

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (3 + 2n^2 - n^3) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\frac{3}{n^3} + \frac{2}{n} - 1 \right) \\ = -\infty$$

따라서 수열 $\{3 + 2n^2 - n^3\}$ 은 음의 무한대로 발산한다.

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

따라서 수열 $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$ 은 수렴하고, 그 극한값은 0이다.

답 (1) 수렴, $\frac{1}{2}$ (2) 발산 (3) 수렴, 0

6

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - 1)(b_n + 2) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - 1) \times \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + 2) \\ = (3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 1) (\lim_{n \rightarrow \infty} b_n + 2) \\ = (3 \times 3 - 1) \times (-1 + 2) \\ = 8$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 4}{a_n b_n + 2} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 4)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n + 2)} \\ = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 4}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + 2} \\ = \frac{3 + 4}{3 \times (-1) + 2} = -7$$

답 (1) 8 (2) -7

7

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) = 3 \text{에서 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n (a_n - 2) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2) \\ = 4 \times (4 - 2) = 8$$

답 8

8

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 수렴하므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (α , β 는 실수)라 하자.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 3b_n) = 17 \text{에서 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 17 \\ \therefore \alpha - 3\beta = 17 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (4a_n + b_n) = 3 \text{에서 } 4 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3 \\ \therefore 4\alpha + \beta = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$\alpha = 2, \beta = -5$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{2}{5}$$

답 $-\frac{2}{5}$

9

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(3n-5)}{(2n+1)(n-2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n - 10}{2n^2 - 3n - 2} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n} - \frac{10}{n^2}}{2 - \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}} \\ = \frac{3+0-0}{2-0-0} = \frac{3}{2} \text{ (수렴)}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{n^2-2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}} \\ = \frac{0-0}{1-0+0} = 0 \text{ (수렴)}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 5n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \frac{5}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \infty \text{ (발산)}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 3} - n}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{3}{n^2}} - 1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (수렴)}$$

답 (1) 수렴, $\frac{3}{2}$ (2) 수렴, 0

(3) 발산 (4) 수렴, $\frac{1}{2}$

10

$$(1) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{n^4}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{4n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{4}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \left(1 + \frac{1}{4}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{2}$

개념 노트

자연수의 거듭제곱의 합

$$(1) \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(2) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(3) \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

11

$$a_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2$$

$$= \sum_{k=1}^n (2k-1)^2$$

$$= \sum_{k=1}^n (4k^2 - 4k + 1)$$

$$= 4 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{4n^3 - n}{3}$$

이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - n}{3n^3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{n^2}}{3} = \frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

12

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2} + an}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} + a}{1} = 1 + a$$

따라서 $1 + a = 10$ 이므로 $a = 9$

답 9

13

$$a \neq 0 \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn+4}{an^2+2n+2} = 0 \text{ 이므로}$$

$$a = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn+4}{an^2+2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn+4}{2n+2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b + \frac{4}{n}}{2 + \frac{2}{n}}$$

$$= \frac{b}{2}$$

따라서 $\frac{b}{2}=6$ 이므로 $b=12$
 $\therefore a+b=12$

답 12

14

$a+2b \neq 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a+2b)n^2 + (a-b)n + 1}{n+2}$ 의 값
 이 존재하지 않으므로

$$\begin{aligned} a+2b &= 0 \\ \therefore a &= -2b \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a+2b)n^2 + (a-b)n + 1}{n+2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3bn + 1}{n+2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3b + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \\ &= -3b \end{aligned}$$

따라서 $-3b=3$ 이므로 $b=-1$
 $b=-1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $a=2$
 $\therefore ab=-2$

답 -2

15

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} (1+6n-n^3) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\frac{1}{n^3} + \frac{6}{n^2} - 1 \right) \\ &= -\infty \text{ (발산)} \\ (2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2-3n}-2n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4n^2-3n}-2n)(\sqrt{4n^2-3n}+2n)}{\sqrt{4n^2-3n}+2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n}{\sqrt{4n^2-3n}+2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{\sqrt{4-\frac{3}{n}}+2} \\ &= \frac{-3}{2+2} = -\frac{3}{4} \text{ (수렴)} \\ (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{2}{1+1} = 1 \text{ (수렴)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n})}{(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n})(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}{2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}{2} \\ &= \frac{1+1}{2} = 1 \text{ (수렴)} \end{aligned}$$

답 (1) 발산 (2) 수렴, $-\frac{3}{4}$
 (3) 수렴, 1 (4) 수렴, 1

16

$$\begin{aligned} a_n &= 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \\ \text{이므로 } a_{n+1} &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} - \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}{\sqrt{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{2}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)} \\ &= \frac{2 \times 1}{\sqrt{2} \times (1+1)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

17

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + an} - n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + an} + n}{(\sqrt{n^2 + an} - n)(\sqrt{n^2 + an} + n)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + an} + n}{an} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{a}{n}} + 1}{a} \\
 &= \frac{2}{a} \\
 & \text{따라서 } \frac{2}{a} = -2 \text{ 이므로} \\
 & \quad a = -1
 \end{aligned}$$

답 -1

18

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{bn^2 + 2n + 3}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + an + 2 - (bn^2 + 2n + 3)}{\sqrt{n^2 + an + 2} + \sqrt{bn^2 + 2n + 3}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-b)n^2 + (a-2)n - 1}{\sqrt{n^2 + an + 2} + \sqrt{bn^2 + 2n + 3}} \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

이때 $1-b \neq 0$ 이면 $\textcircled{1}$ 의 극한값이 존재하지 않으므로

$$1-b=0 \quad \therefore b=1$$

$b=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-2)n - 1}{\sqrt{n^2 + an + 2} + \sqrt{n^2 + 2n + 3}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-2) - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}} \\
 &= \frac{a-2}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{a-2}{2} = 3 \text{ 이므로 } a=8$$

답 $a=8, b=1$

19

$$\begin{aligned}
 & \frac{3a_n - 5}{a_n - 1} = b_n \text{ 으로 놓으면} \\
 & 3a_n - 5 = b_n(a_n - 1), \quad (3-b_n)a_n = 5 - b_n \\
 & \therefore a_n = \frac{5-b_n}{3-b_n}
 \end{aligned}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5-b_n}{3-b_n} \\
 &= \frac{5-2}{3-2} = 3
 \end{aligned}$$

답 3

20

$$na_n = b_n \text{ 으로 놓으면 } a_n = \frac{b_n}{n}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2}{n^3 a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2}{n^2 b_n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n^2}}{b_n} \\
 &= \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{3}{5}$

03

수열의 극한의 대소 관계

● 본책 23~24쪽

21

$$\begin{aligned}
 & \frac{3n^2}{n+1} < a_n < \frac{3n^2 + 2n}{n+1} \text{ 에서} \\
 & \frac{3n}{n+1} < \frac{a_n}{n} < \frac{3n+2}{n+1}
 \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{1 + \frac{1}{n}} = 3, \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 3
 \end{aligned}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} &= 3 \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 6n}{n + 5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{n} + 6}{1 + \frac{5}{n}} \\
 &= \frac{3+6}{1+0} = 9
 \end{aligned}$$

답 9

22

(1) $-1 \leq \cos 2n\theta \leq 1$ 이므로

$$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\cos 2n\theta}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n^2}\right) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ 이므로 수열의

극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos 2n\theta}{n^2} = 0$$

(2) $-1 \leq \sin n\theta \leq 1$ 이므로

$$-4n^2 - 1 \leq \sin n\theta - 4n^2 \leq -4n^2 + 1$$

$$\therefore \frac{-4n^2 - 1}{2n^2 + 1} \leq \frac{\sin n\theta - 4n^2}{2n^2 + 1} \leq \frac{-4n^2 + 1}{2n^2 + 1}$$

이때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n^2 - 1}{2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4 - \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = -2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n^2 + 1}{2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4 + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = -2$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n\theta - 4n^2}{2n^2 + 1} = -2$$

답 (1) 0 (2) -2



연습문제

● 본책 25~27쪽

23

전략 주어진 수열의 일반항에 $n=1, 2, 3, 4, 5, \dots$ 를 차례대로 대입하여 그 값의 변화를 살펴본다.

① $\frac{1}{2n-1}$ 에 $n=1, 2, 3, 4, 5, \dots$ 를 차례대로 대입하면

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$$

따라서 이 수열은 0에 수렴한다.

② $\frac{(-1)^n}{n+1}$ 에 $n=1, 2, 3, 4, 5, \dots$ 를 차례대로 대입하면

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots$$

따라서 이 수열은 0에 수렴한다.

③ $1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 에 $n=1, 2, 3, 4, 5, \dots$ 를 차례대로 대입하면

$$2, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \frac{17}{16}, \dots$$

따라서 이 수열은 1에 수렴한다.

④ $2 + (-1)^n$ 에 $n=1, 2, 3, 4, 5, \dots$ 를 차례대로 대입하면

$$1, 3, 1, 3, 1, \dots$$

따라서 이 수열은 발산(진동)한다.

⑤ $(-1)^{2n+1}$ 에 $n=1, 2, 3, 4, 5, \dots$ 를 차례대로 대입하면

$$-1, -1, -1, -1, -1, \dots$$

따라서 이 수열은 -1에 수렴한다.

답 ④

24

전략 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 의 값을 구하고 수열의 극한에 대한 성질을 이용한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{12}{n^2}\right) = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{1 - \frac{1}{n(n^2+1)}\right\} = 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2a_n b_n} = \frac{2^2 + 1^2}{2 \times 2 \times 1} = \frac{5}{4}$$

답 $\frac{5}{4}$

25

전략 수열의 극한에 대한 성질과 $\frac{(\text{상수})}{\infty} = 0$ 임을 이용하여 극한값을 구한다.

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} - 3\right) = -3$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{5}{n}\right) \left(\frac{5}{n} - 1\right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{5}{n}\right) \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{n} - 1\right) \\ = 3 \times (-1) = -3 \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n-3}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6-\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}} = 3$$

$$\textcircled{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-5n+4}{-n^2+2n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}{-1+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}} = -3$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(1-3n)}{(3+n)(1+n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2-5n+2}{n^2+4n+3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3-\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}} \\ &= -3 \end{aligned}$$

답 ③

26

전략 먼저 로그의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \{\log_2(2n-1) + \log_2(8n+1) - 2\log_2(n+1)\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{\log_2(2n-1)(8n+1) - \log_2(n+1)^2\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{(2n-1)(8n+1)}{(n+1)^2} \\ &= \log_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16n^2-6n-1}{n^2+2n+1} \\ &= \log_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16-\frac{6}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} \\ &= \log_2 16 = 4 \end{aligned}$$

답 4

27

전략 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공차를 이용하여

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ 을 n 에 대한 식으로 나타낸다.

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 -2 , 공차가 3 인 등차수열이므로

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ &= \frac{n\{2 \times (-2) + (n-1) \times 3\}}{2} \\ &= \frac{3n^2-7n}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-7n}{2n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-\frac{7}{n}}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{3}{2}$

28

전략 분모와 분자의 차수가 같아야 함을 이용한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n+1)^2}{bn^3+3n^2-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2+2an+a}{bn^3+3n^2-1} \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $b \neq 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2+2an+a}{bn^3+3n^2-1} = 0$ 이므로

$$b=0$$

$b=0$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2+2an+a}{3n^2-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a+\frac{2a}{n}+\frac{a}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{a}{3} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{3} = -2$ 이므로 $a = -6$

$$\therefore b-a=6$$

답 6

29

전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha_n + \beta_n$, $\alpha_n \beta_n$ 을 n 에 대한 식으로 나타낸다.

이차방정식 $x^2 - x + n - \sqrt{n^2+n} = 0$ 의 두 근이 α_n , β_n 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n + \beta_n = 1, \alpha_n \beta_n = n - \sqrt{n^2+n}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n - \sqrt{n^2+n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n^2+n}}{(n - \sqrt{n^2+n})(n + \sqrt{n^2+n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n^2+n}}{-n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{-1} = -2 \end{aligned}$$

답 -2

30

전략 $\frac{-3a_n+1}{5a_n-4}=b_n$ 으로 놓고 a_n 을 b_n 에 대한 식으로 나타낸다.

$$\begin{aligned}\frac{-3a_n+1}{5a_n-4} &= b_n \text{으로 놓으면} \\ -3a_n+1 &= b_n(5a_n-4) \\ (-3-5b_n)a_n &= -4b_n-1\end{aligned}$$

$$\therefore a_n = \frac{4b_n+1}{5b_n+3}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4b_n+1}{5b_n+3} = \frac{-4+1}{-5+3} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n+1}{a_n-1} = \frac{\frac{3}{2}+1}{\frac{3}{2}-1} = 5$$

답 5

다른 풀이 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ 이면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3a_n+1}{5a_n-4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3+\frac{1}{a_n}}{5-\frac{4}{a_n}} = -\frac{3}{5}$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α 는 실수)라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3a_n+1}{5a_n-4} = \frac{-3\alpha+1}{5\alpha-4}$$

$$\text{즉 } \frac{-3\alpha+1}{5\alpha-4} = -1 \text{이므로}$$

$$-3\alpha+1 = 4-5\alpha$$

$$\therefore \alpha = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n+1}{a_n-1} = \frac{\frac{3}{2}+1}{\frac{3}{2}-1} = 5$$

31

전략 주어진 부등식에서 a_n 의 값의 범위를 구하고 수열의 극한의 대소 관계를 이용한다.

$$(a_n-2n^2-n)(a_n-2n^2-3n) \leq 0 \text{에서}$$

$$2n^2+n \leq a_n \leq 2n^2+3n$$

모든 자연수 n 에 대하여 $2n^2+n > 0$ 이므로

$$\frac{1}{2n^2+3n} \leq \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{2n^2+n}$$

$$\therefore \frac{n^2}{2n^2+3n} \leq \frac{n^2}{a_n} \leq \frac{n^2}{2n^2+n}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2+3n} = \frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2+n} = \frac{1}{2}$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a_n} = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$

32

전략 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 a_1 과 n 에 대한 식으로 나타낸다.

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 a_1 , 공차가 a_1+2 인 등차수열이므로

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + (n-1)(a_1+2) \\ &= (a_1+2)n-2 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n+n}{a_n-n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2a_1+5)n-4}{(a_1+1)n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_1+5-\frac{4}{n}}{a_1+1-\frac{1}{n}} \\ &= \frac{2a_1+5}{a_1+1}\end{aligned}$$

$$\text{즉 } \frac{2a_1+5}{a_1+1} = 3 \text{이므로}$$

$$2a_1+5 = 3a_1+3 \quad \therefore a_1 = 2$$

따라서 $a_n = 4n-2$ 이므로

$$a_{10} = 38$$

답 ④

33

전략 주어진 수열의 일반항을 구한다.

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n(n+1)}{n^3} \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k^2+k) \\ &= \frac{1}{n^3} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{n^2+3n+2}{3n^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3n+2}{3n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{3} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{3}$

34

전략 $(3n+1)^2 < 9n^2 + 11n + 3 < (3n+2)^2$ 임을 이용한다.

$$(3n+1)^2 = 9n^2 + 6n + 1,$$

$$(3n+2)^2 = 9n^2 + 12n + 4 \text{ 이므로}$$

$$(3n+1)^2 < 9n^2 + 11n + 3 < (3n+2)^2$$

$$\therefore 3n+1 < \sqrt{9n^2 + 11n + 3} < 3n+2$$

따라서 $\sqrt{9n^2 + 11n + 3}$ 의 정수 부분이 $3n+1$ 이므로

$$a_n = 3n+1,$$

$$b_n = \sqrt{9n^2 + 11n + 3} - (3n+1)$$

이때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n} \right) = 3,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{9n^2 + 11n + 3} - (3n+1) \}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(9n^2 + 11n + 3) - (3n+1)^2}{\sqrt{9n^2 + 11n + 3} + 3n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+2}{\sqrt{9n^2 + 11n + 3} + 3n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{2}{n}}{\sqrt{9 + \frac{11}{n} + \frac{3}{n^2}} + 3 + \frac{1}{n}}$$

$$= \frac{5}{6}$$

이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{23}{6} \quad \text{답 } \frac{23}{6}$$

35

전략 주어진 등식의 좌변에서 분모를 1로 생각하여 분자를 유리화한다.

$$a \leq 0 \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{n(n+4)} - an + b \} = \infty \text{ 이므로}$$

$$a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{n(n+4)} - an + b \}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{ \sqrt{n^2 + 4n} - (an-b) \} \{ \sqrt{n^2 + 4n} + (an-b) \}}{\sqrt{n^2 + 4n} + (an-b)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-a^2)n^2 + 2(2+ab)n - b^2}{\sqrt{n^2 + 4n} + an - b} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $1-a^2 \neq 0$ 이면 $\textcircled{1}$ 의 극한값이 존재하지 않으므로

$$1-a^2=0$$

$$\therefore a=1 \quad (\because a>0)$$

$a=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(2+b)n - b^2}{\sqrt{n^2 + 4n} + n - b} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(2+b) - \frac{b^2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1 - \frac{b}{n}} \\ &= 2+b \end{aligned}$$

따라서 $2+b=4$ 이므로 $b=2$

$$\therefore a+b=3$$

답 3

36

전략 수열의 극한에 대한 성질을 이용한다.

ㄱ. [반례] $a_n = n+2$, $b_n = n+1$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{이지만}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \quad (\text{거짓})$$

ㄴ. [반례] $a_n = n^2$, $b_n = \frac{1}{n}$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{이지만}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \quad (\text{거짓})$$

ㄷ. $a_n - b_n = c_n$ 으로 놓으면

$$b_n = a_n - c_n$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \\ &= a - 0 = a \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ㄷ

37

전략 분자를 수열의 합으로 생각하여 주어진 식을 간단히 정리한다.

$$1 \times (2n-1) + 2 \times (2n-3) + 3 \times (2n-5) + \dots$$

$$+ (n-1) \times 3 + n \times 1$$

$$= \sum_{k=1}^n k \{ 2n - (2k-1) \}$$

$$= \sum_{k=1}^n \{ -2k^2 + (2n+1)k \}$$

$$= -2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (2n+1) \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{주어진 식}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{6} \\ &= \frac{1}{3} \quad \text{답 } \frac{1}{3}\end{aligned}$$

38

전략 점 $A_1, A_2, A_3, \dots$ 의 좌표를 직접 구하여 점 A_{2n} 의 좌표를 유추한다.

조건 (가)에서 $A_1(0, 0)$ 이므로 조건 (나), (다)에 의하여

$$\begin{aligned}A_2(a, 0), A_3(a, a+1), \\ A_4(2a, a+1), A_5(2a, 2a+2), \\ A_6(3a, 2a+2), A_7(3a, 3a+3), \dots \\ \therefore A_{2n}(an, (a+1)(n-1))\end{aligned}$$

따라서 $\overline{A_1 A_{2n}} = \sqrt{(an)^2 + \{(a+1)(n-1)\}^2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{A_1 A_{2n}}}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(an)^2 + \{(a+1)(n-1)\}^2}}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(2a^2 + 2a + 1)n^2 - 2(a+1)^2 n + (a+1)^2}}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2a^2 + 2a + 1 - \frac{2(a+1)^2}{n} + \frac{(a+1)^2}{n^2}} \\ &= \sqrt{2a^2 + 2a + 1}\end{aligned}$$

즉 $\sqrt{2a^2 + 2a + 1} = \frac{\sqrt{34}}{2}$ 이므로 양변을 제곱하면

$$\begin{aligned}2a^2 + 2a + 1 &= \frac{17}{2} \\ 4a^2 + 4a - 15 &= 0, \quad (2a+5)(2a-3) = 0 \\ \therefore a &= \frac{3}{2} \quad (\because a > 0) \quad \text{답 } ①\end{aligned}$$

39

전략 $a_n - 2b_n = c_n$ 으로 놓고, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = 0$ 임을 이용한다.

$$a_n - 2b_n = c_n \text{으로 놓으면} \quad b_n = \frac{a_n - c_n}{2}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -6$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = 0$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 3b_n}{2a_n - b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 3 \times \frac{a_n - c_n}{2}}{2a_n - \frac{a_n - c_n}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{2}a_n - \frac{3}{2}c_n}{\frac{3}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \times \frac{c_n}{a_n}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{c_n}{a_n}} \\ &= \frac{5}{3} \quad \text{답 } \frac{5}{3}\end{aligned}$$

04 등비수열의 극한

● 본책 28~33쪽

40

- (1) 공비는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고, $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ 이므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.
- (2) 공비는 -2 이고, $-2 < -1$ 이므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.
- (3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{1-n} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$ 에서 공비는 $\frac{3}{2}$ 이고, $\frac{3}{2} > 1$ 이므로 주어진 수열은 발산한다.
- (4) $\frac{(-3)^n}{2^{2n}} = \left(-\frac{3}{4}\right)^n$ 에서 공비는 $-\frac{3}{4}$ 이고, $-1 < -\frac{3}{4} < 1$ 이므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.
- (5) $5^n \times 2^{-n} = \left(\frac{5}{2}\right)^n$ 에서 공비는 $\frac{5}{2}$ 이고, $\frac{5}{2} > 1$ 이므로 주어진 수열은 발산한다.
- (6) $\frac{4^{-n}}{3^{-n}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ 에서 공비는 $\frac{3}{4}$ 이고, $-1 < \frac{3}{4} < 1$ 이므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

답 (1) 수렴 (2) 발산 (3) 발산
(4) 수렴 (5) 발산 (6) 수렴

41

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{2}{1+0} = 2$$

따라서 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 2이다.

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^n - 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1} = \frac{1}{0-1} = -1$$

따라서 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 -1이다.

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 5^n}{2^n - 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1} = \frac{0-1}{0-1} = 1$$

따라서 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 1이다.

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 7^n}{2^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{7}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = \infty$$

따라서 주어진 수열은 발산한다.

답 (1) 수렴, 2 (2) 수렴, -1
(3) 수렴, 1 (4) 발산

42

(1) 공비가 $2r$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < 2r \leq 1 \quad \therefore -\frac{1}{2} < r \leq \frac{1}{2}$$

(2) 공비가 $-\frac{r}{2}$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < -\frac{r}{2} \leq 1 \quad \therefore -2 \leq r < 2$$

답 (1) $-\frac{1}{2} < r \leq \frac{1}{2}$ (2) $-2 \leq r < 2$

43

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5^n} + 1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} = \infty \text{ (발산)}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 2^{2n}}{3^n + 2^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 3^n - 4^n}{3^n + 2 \times 4^n} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2} \\ = \frac{3 \times 0 - 1}{0 + 2} = -\frac{1}{2} \text{ (수렴)}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 3^{-n}}{3^n - 3^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{3^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{1}{9}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n} \\ = \frac{1+0}{1-0} = 1 \text{ (수렴)}$$

답 (1) 발산 (2) 수렴, $-\frac{1}{2}$ (3) 수렴, 1

44

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α 는 실수)라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n a_n + 5^{n+1}}{5^n a_n - 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n \times a_n + 5}{a_n - \left(\frac{3}{5}\right)^n} \\ = \frac{0 \times \alpha + 5}{\alpha - 0} \\ = \frac{5}{\alpha}$$

따라서 $\frac{5}{\alpha} = 2$ 이므로 $\alpha = \frac{5}{2}$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

45

(1) 등비수열 $\left\{ \left(\frac{x^2-x}{2}\right)^n \right\}$ 은 첫째항과 공비가 모두

$$\frac{x^2-x}{2}$$
이므로 이 수열이 수렴하려면

$$-1 < \frac{x^2-x}{2} \leq 1$$

$$(i) -1 < \frac{x^2-x}{2} \text{에서} \quad x^2-x+2 > 0$$

$$\therefore \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 부등식이 성립한다.

$$(ii) \frac{x^2-x}{2} \leq 1 \text{에서} \quad x^2-x-2 \leq 0$$

$$(x+1)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 2$$

(i), (ii)에서 $-1 \leq x \leq 2$

(2) 등비수열 $\left\{ (x+2)\left(\frac{2x-1}{5}\right)^n \right\}$ 은 첫째항이

$$\frac{(x+2)(2x-1)}{5}, \text{ 공비가 } \frac{2x-1}{5} \text{ 이므로 이 수열}$$

이 수렴하려면

$$\frac{(x+2)(2x-1)}{5} = 0 \text{ 또는 } -1 < \frac{2x-1}{5} \leq 1$$

$$\frac{(x+2)(2x-1)}{5} = 0 \text{ 에서}$$

$$x = -2 \text{ 또는 } x = \frac{1}{2}$$

$$-1 < \frac{2x-1}{5} \leq 1 \text{ 에서 } -5 < 2x-1 \leq 5$$

$$-4 < 2x \leq 6 \quad \therefore -2 < x \leq 3$$

따라서 구하는 x 의 값의 범위는

$$-2 < x \leq 3$$

답 (1) $-1 \leq x \leq 2$ (2) $-2 \leq x \leq 3$

46

등비수열 $\{(\log_3 x - 1)^n\}$ 은 첫째항과 공비가 모두 $\log_3 x - 1$ 이므로 이 수열이 수렴하려면

$$-1 < \log_3 x - 1 \leq 1$$

$$0 < \log_3 x \leq 2, \quad \log_3 1 < \log_3 x \leq \log_3 3^2$$

$$\therefore 1 < x \leq 9$$

답 $1 < x \leq 9$

47

(i) $|r| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{r^{2n} + 1} = \frac{0}{0+1} = 0 \text{ (수렴)}$$

(ii) $r = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{r^{2n} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \text{ (수렴)}$$

(iii) $|r| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = \infty$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{2n}} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{r^{2n} + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{r^n}}{1 + \frac{1}{r^{2n}}} \\ &= \frac{0}{1+0} = 0 \text{ (수렴)} \end{aligned}$$

(iv) $r = -1$ 일 때,

n 이 짝수이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{r^{2n} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

n 이 홀수이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = -1, \lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{r^{2n} + 1} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

따라서 수열 $\left\{ \frac{r^n}{r^{2n} + 1} \right\}$ 은 발산(진동)한다.

답 풀이 참조

48

(i) $|r| < 5$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{5}\right)^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n + 5^n}{r^n - 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{r}{5}\right)^n + 1}{\left(\frac{r}{5}\right)^n - 1} = -1$$

(ii) $|r| > 5$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{r}\right)^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n + 5^n}{r^n - 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{5}{r}\right)^n}{1 - \left(\frac{5}{r}\right)^n} = 1$$

(i), (ii)에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n + 5^n}{r^n - 5^n} = -1$ 을 만족시키는 r 의 값의 범위는 $|r| < 5$

따라서 정수 r 은 $-4, -3, -2, \dots, 4$ 의 9개이다.

답 9



연습문제

● 본책 34~36쪽

49

전략 $r \leq -1$ 또는 $r > 10$ 이면 수열 $\{r^n\}$ 은 발산한다.

① 공비는 $\frac{1}{9}$ 이고, $-1 < \frac{1}{9} < 1$ 이므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

- ② 공비는 0.99이고, $-1 < 0.99 < 1$ 이므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.
- ③ 공비는 $\sqrt{0.9}$ 이고, $-1 < \sqrt{0.9} < 1$ 이므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.
- ④ 공비는 $-\frac{3}{4}$ 이고, $-1 < -\frac{3}{4} < 1$ 이므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.
- ⑤ $\frac{2^{2n}}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ 에서 공비는 $\frac{4}{3}$ 이고, $\frac{4}{3} > 1$ 이므로 주어진 수열은 발산한다.

답 ⑤

50

전략 분모, 분자를 각각 3^n 으로 나눈다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \times 3^{n+1} - 2^{n+1}}{3^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15 - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 15$$

답 15

51

전략 수열의 극한의 대소 관계를 이용한다.

$$5^n - 2^n < a_n < 5^n + 2^n \text{에서}$$

$$\frac{5^n - 2^n}{5^{n+1} - 2^n} < \frac{a_n}{5^{n+1} - 2^n} < \frac{5^n + 2^n}{5^{n+1} - 2^n}$$

이때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 2^n}{5^{n+1} - 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{1}{5},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 2^n}{5^{n+1} - 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n}{5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{1}{5}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{5^{n+1} - 2^n} = \frac{1}{5}$$

답 $\frac{1}{5}$

52

전략 주어진 수열은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열임을 이용하여 a_n, S_n 을 구한다.

수열 2, 4, 8, 16, ...은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

$$S_n = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{n+1} - 2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

53

전략 주어진 등식의 좌변의 분모, 분자를 각각 3^n 으로 나눈다.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α 는 실수)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times 3^n - 2^{n+1} a_n}{3^n a_n + 2^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \times 2 a_n}{a_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \\ &= \frac{4}{\alpha} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{4}{\alpha} = 3$ 이므로 $\alpha = \frac{4}{3}$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

54

전략 등비수열 $\{r^n\}$ 이 수렴하기 위한 필요충분조건은 $-1 < r \leq 1$ 임을 이용한다.

등비수열 $\{(2 \sin x)^n\}$ 은 첫째항과 공비가 모두 $2 \sin x$ 이므로 이 수열이 수렴하려면

$$-1 < 2 \sin x \leq 1, \quad -\frac{1}{2} < \sin x \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore -\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{6} \left(\because -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

답 $-\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{6}$

55

전략 각 등비수열의 공비의 값의 범위를 구한다.

등비수열 $\{r^n\}$ 이 수렴하므로

$$-1 < r \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

ㄱ. 등비수열 $\{r^{3n}\}$ 의 공비는 r^3 이고 $\textcircled{1}$ 에서

$$-1 < r^3 \leq 1$$

따라서 등비수열 $\{r^{3n}\}$ 은 항상 수렴한다.

ㄴ. $r \neq 0$ 일 때, 등비수열 $\left\{\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}$ 의 공비는 $\frac{1}{r}$ 이고

$\textcircled{1}$ 에서

$$\frac{1}{r} < -1 \text{ 또는 } \frac{1}{r} \geq 1$$

따라서 등비수열 $\left\{\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}$ 은 $\frac{1}{r}=1$, 즉 $r=1$ 일 때만 수렴한다.

ㄷ. 등비수열 $\{(-r)^n\}$ 의 공비는 $-r$ 이고 $\textcircled{1}$ 에서

$$-1 \leq -r < 1$$

따라서 등비수열 $\{(-r)^n\}$ 은 $-r=-1$, 즉 $r=1$ 일 때는 수렴하지 않는다.

ㄹ. 등비수열 $\left\{\left(\frac{1-r}{2}\right)^n\right\}$ 의 공비는 $\frac{1-r}{2}$ 이고 $\textcircled{1}$ 에서

$$-1 \leq -r < 1, \quad 0 \leq 1-r < 2$$

$$\therefore 0 \leq \frac{1-r}{2} < 1$$

따라서 등비수열 $\left\{\left(\frac{1-r}{2}\right)^n\right\}$ 은 항상 수렴한다.

이상에서 항상 수렴하는 수열인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

56

전략 $|r| > 1$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0$ 이고 $|r| < 1$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 임을 이용한다.

(i) $|r| > 1$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = \infty$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1+r^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{r^n} - 1}{\frac{1}{r^n} + 1} \\ &= \frac{0-1}{0+1} = -1 \end{aligned}$$

(ii) $r=1$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1+r^n} = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

(iii) $|r| < 1$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1+r^n} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

이상에서 $a=-1$, $b=0$, $c=1$ 이므로

$$a+b-c = -2$$

답 -2

57

전략 먼저 근의 공식을 이용하여 주어진 이차방정식의 두 근을 구한다.

$x^2+2x-1=0$ 에서

$$x = -1 \pm \sqrt{2}$$

$\alpha = -1 - \sqrt{2}$, $\beta = -1 + \sqrt{2}$ 라 하면 $|\alpha| > |\beta|$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{\alpha^n + \beta^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha + \beta \times \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} \\ &= \alpha = -1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

답 $-1 - \sqrt{2}$

58

전략 두 직선의 방정식을 연립하여 a_n , b_n 을 구한다.

$3x+y=3^n$, $2x+3y=2^n$ 을 연립하여 풀면

$$x = \frac{3 \times 3^n - 2^n}{7}, \quad y = \frac{3 \times 2^n - 2 \times 3^n}{7}$$

따라서 $a_n = \frac{3 \times 3^n - 2^n}{7}$, $b_n = \frac{3 \times 2^n - 2 \times 3^n}{7}$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3 \times 2^n - 2 \times 3^n}{7}}{\frac{3 \times 3^n - 2^n}{7}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 2^n - 2 \times 3^n}{3 \times 3^n - 2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2}{3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

답 $-\frac{2}{3}$

59

전략 3^n 의 양의 약수는 $1, 3, 3^2, \dots, 3^n$ 임을 이용하여 a_n 을 구한다.

3^n 의 양의 약수는 $1, 3, 3^2, \dots, 3^n$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n \\ &= \frac{1 \times (3^{n+1} - 1)}{3 - 1} \\ &= \frac{3^{n+1} - 1}{2} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 1}{2 \times 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{3}{2}$

60

전략 나머지정리를 이용하여 a_n, b_n 을 구한다.

나머지정리에 의하여

$$\begin{aligned} a_n &= f(1) = 2^n + 3^n + 1 \\ b_n &= f(2) = 4 \times 2^n + 2 \times 3^n + 1 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n + 1}{4 \times 2^n + 2 \times 3^n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

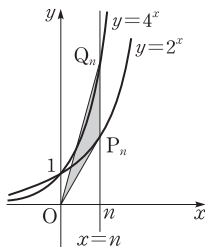
답 $\frac{1}{2}$

61

전략 두 점 P_n, Q_n 의 좌표를 이용하여 S_n 을 구한다.

$P_n(n, 2^n), Q_n(n, 4^n)$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{P_n Q_n} &= 4^n - 2^n \\ \therefore S_n &= \frac{1}{2} \times (4^n - 2^n) \times n \\ &= \frac{n(4^n - 2^n)}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(4^{n+1} - 2^{n+1})}{n(4^n - 2^n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \times \frac{4^{n+1} - 2^{n+1}}{4^n - 2^n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n} \\ &= 1 \times 4 = 4 \end{aligned}$$

답 4

62

전략 $\frac{4a_n - 4}{5a_n + 1} = b_n$ 으로 놓고, a_n 을 b_n 에 대한 식으로 나타낸다.

$$\begin{aligned} \frac{4a_n - 4}{5a_n + 1} &= b_n \text{으로 놓으면} \\ 4a_n - 4 &= b_n(5a_n + 1) \\ (4 - 5b_n)a_n &= b_n + 4 \\ \therefore a_n &= \frac{b_n + 4}{4 - 5b_n} \end{aligned}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n + 4}{4 - 5b_n} = \frac{2 + 4}{4 - 10} = -1 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n a_n}{3^n + a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{1 + \frac{a_n}{3^n}} \\ &= -1 \end{aligned}$$

답 -1

63

전략 r 의 값의 범위를 나누어 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} - 1}{r^n + 1}$ 의 값을 구해 본다.

(i) $|r| < 1$ 일 때

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} r^n &= 0 \text{이므로} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} - 1}{r^n + 1} &= \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1 \neq 3 \end{aligned}$$

(ii) $r = 1$ 일 때

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} r^n &= 1 \text{이므로} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} - 1}{r^n + 1} &= \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0 \neq 3 \end{aligned}$$

(iii) $|r| > 1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = \infty \text{ 이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}-1}{r^n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r - \frac{1}{r^n}}{1 + \frac{1}{r^n}} \\ &= \frac{r-0}{1+0} = r \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}-1}{r^n+1} = 3 \text{ 이려면 } r=3$$

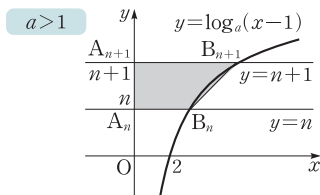
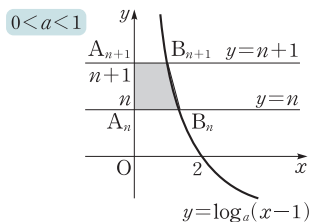
이상에서 $r=3$

답 3

64

전략 두 점 A_n , B_n 의 좌표를 이용하여 S_n 과 $\overline{B_n B_{n+1}}$ 의 길이를 구한다.

$0 < a < 1$ 일 때와 $a > 1$ 일 때의 $y = \log_a(x-1)$ 의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.



이때 점 A_n 의 좌표는 $(0, n)$ 이고 점 B_n 의 x 좌표는 $n = \log_a(x-1)$ 에서

$$x-1 = a^n \quad \therefore x = a^n + 1$$

$$\therefore B_n(a^n + 1, n)$$

따라서 $\overline{A_n B_n} = a^n + 1$ 이므로

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \times \overline{A_n A_{n+1}} \times (\overline{A_n B_n} + \overline{A_{n+1} B_{n+1}}) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times \{(a^n + 1) + (a^{n+1} + 1)\} \\ &= \frac{a^{n+1} + a^n + 2}{2} \end{aligned}$$

또 $B_{n+1}(a^{n+1} + 1, n+1)$ 이므로

$$\overline{B_n B_{n+1}} = \sqrt{(a^{n+1} - a^n)^2 + 1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{B_n B_{n+1}}}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{(a^{n+1} - a^n)^2 + 1}}{a^{n+1} + a^n + 2}$$

(i) $0 < a < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{(a^{n+1} - a^n)^2 + 1}}{a^{n+1} + a^n + 2} = 1$$

$$\approx \frac{3}{2a+2} = 1 \text{ 이므로}$$

$$2a+2=3 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

(ii) $a > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n} = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{(a^{n+1} - a^n)^2 + 1}}{a^{n+1} + a^n + 2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{a^{2n+2} - 2a^{2n+1} + a^{2n} + 1}}{a^{n+1} + a^n + 2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{a^2 - 2a + 1 + \frac{1}{a^{2n}}}}{a + 1 + \frac{2}{a^n}}$$

$$= \frac{2\sqrt{a^2 - 2a + 1}}{a + 1}$$

$$= \frac{2(a-1)}{a+1} \quad (\because a > 1)$$

$$\approx \frac{2(a-1)}{a+1} = \frac{3}{2a+2} \text{ 이므로}$$

$$4a^2 - 4 = 3a + 3$$

$$4a^2 - 3a - 7 = 0, \quad (a+1)(4a-7) = 0$$

$$\therefore a = \frac{7}{4} \quad (\because a > 1)$$

(i), (ii)에서 $a = \frac{1}{2}$ 또는 $a = \frac{7}{4}$

따라서 모든 a 의 값의 합은

$$\frac{1}{2} + \frac{7}{4} = \frac{9}{4}$$

답 ②

65

전략 x 의 값의 범위를 나누어 $f(x)$ 를 구한 다음 $y=f(x)$ 의 그래프를 그린다.

(i) $|x| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^{2n-1} + 4}{x^{2n} + 1} \\ &= \frac{2 \times 0 + 4}{0 + 1} = 4 \end{aligned}$$

(ii) $x=1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^{2n-1} + 4}{x^{2n} + 1} \\ &= \frac{2 \times 1 + 4}{1 + 1} = 3 \end{aligned}$$

(iii) $x=-1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n-1} = -1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^{2n-1} + 4}{x^{2n} + 1} \\ &= \frac{2 \times (-1) + 4}{1 + 1} = 1 \end{aligned}$$

(iv) $|x| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n}} &= 0 \\ \therefore f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^{2n-1} + 4}{x^{2n} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{4}{x^{2n}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} \\ &= \frac{\frac{2}{x} + 0}{1 + 0} = \frac{2}{x} \end{aligned}$$

이상에서 $y=f(x)$ 의 그래

프는 오른쪽 그림과 같다.

직선 $y=2x+k$ 가 점

(1, 3)을 지날 때

$k=1$ ← 두 점에서 만난다.

직선 $y=2x+k$ 가 점

(1, 4)를 지날 때

$k=2$ ← 한 점에서 만난다.

직선 $y=2x+k$ 가 점 $(-1, 4)$ 를 지날 때

$k=6$ ← 한 점에서 만난다.

직선 $y=2x+k$ 가 점 $(-1, 1)$ 을 지날 때

$k=3$ ← 세 점에서 만난다.

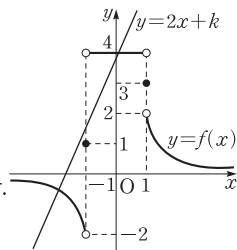
따라서 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2x+k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면

$k=1$ 또는 $2 < k < 3$ 또는 $3 < k < 6$

즉 정수 k 는 1, 4, 5이므로 모든 정수 k 의 값의 합은

$$1 + 4 + 5 = 10$$

답 10



2 급수

I. 수열의 극한

01 급수의 수렴과 발산

● 본책 38~45쪽

66

(1) 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{k+2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} + 2n \right\} = \frac{n^2 + 5n}{4} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 5n}{4} = \infty \end{aligned}$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(2) 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1 \end{aligned}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

(3) 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k+2} + \sqrt{2k}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{2k+2} - \sqrt{2k}}{(\sqrt{2k+2} + \sqrt{2k})(\sqrt{2k+2} - \sqrt{2k})} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{2k+2} - \sqrt{2k}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{4}) \\ &\quad + (\sqrt{8} - \sqrt{6}) + \cdots \\ &\quad + (\sqrt{2n+2} - \sqrt{2n}) \} \\ &= \frac{\sqrt{2n+2} - \sqrt{2}}{2} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+2} - \sqrt{2}}{2} = \infty \end{aligned}$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(4) 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면 $a_n = n^2$

이때 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

답 (1) 발산 (2) 수렴, 1 (3) 발산 (4) 발산

67

(1) 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{n}{2n+1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(2) 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 2n} - n)(\sqrt{n^2 + 2n} + n)}{\sqrt{n^2 + 2n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = 1 \neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(3) 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \log \frac{3n^2}{n^2 + 2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{3n^2}{n^2 + 2} = \log 3 \neq 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(4) 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{5^n}{2^n + 3^n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{2^n + 3^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

답 풀이 참조

68

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 3b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 3 \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$= -2 + 3 \times 5 = 13$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (5a_n - 2b_n) = 5 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$= 5 \times (-2) - 2 \times 5 = -20$$

답 (1) 13 (2) -20

69

(1) 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + 3k + 2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right)$$

$$+ \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

(2) 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{(2n)^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

이때 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \right.$$

$$+ \dots + \left. \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

(3) 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \\ &= 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

이때 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\text{답 (1) } \frac{1}{2} \quad (2) \frac{1}{2} \quad (3) 2$$

70

$$S_n = \frac{n\{2 \times 3 + (n-1) \times 2\}}{2} = n(n+2) \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{S_n} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{답 } \frac{3}{4}$$

71

$$\begin{aligned} (1) \sum_{n=2}^{\infty} \log_2 \frac{n^2}{n^2-1} &= \sum_{n=2}^{\infty} \log_2 \left(\frac{n}{n-1} \times \frac{n}{n+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \log_2 \left(\frac{k}{k-1} \times \frac{k}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log_2 \left(\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \right) + \log_2 \left(\frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \right) + \log_2 \left(\frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \right) + \cdots + \log_2 \left(\frac{n}{n-1} \times \frac{n}{n+1} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \left\{ \left(\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \right) \times \left(\frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \right) \times \left(\frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \right) \times \cdots \times \left(\frac{n}{n-1} \times \frac{n}{n+1} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{2n}{n+1} = \log_2 2 = 1 \end{aligned}$$

(2) 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= \log \left\{ 1 + \frac{4}{n(n+4)} \right\} \\ &= \log \frac{(n+2)^2}{n(n+4)} \end{aligned}$$

이때 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \log \frac{(k+2)^2}{k(k+4)} \\ &= \sum_{k=1}^n \log \left(\frac{k+2}{k} \times \frac{k+2}{k+4} \right) \\ &= \log \left(\frac{3}{1} \times \frac{3}{5} \right) + \log \left(\frac{4}{2} \times \frac{4}{6} \right) + \log \left(\frac{5}{3} \times \frac{5}{7} \right) + \cdots + \log \left(\frac{n+1}{n-1} \times \frac{n+1}{n+3} \right) + \log \left(\frac{n+2}{n} \times \frac{n+2}{n+4} \right) \\ &= \log \left\{ \left(\frac{3}{1} \times \frac{3}{5} \right) \times \left(\frac{4}{2} \times \frac{4}{6} \right) \times \left(\frac{5}{3} \times \frac{5}{7} \right) \times \cdots \times \left(\frac{n+1}{n-1} \times \frac{n+1}{n+3} \right) \times \left(\frac{n+2}{n} \times \frac{n+2}{n+4} \right) \right\} \\ &= \log \left(\frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{n+1}{n+3} \times \frac{n+2}{n+4} \right) \\ &= \log \frac{6(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{6(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)} \\ &= \log 6 \end{aligned}$$

답 (1) 1 (2) log 6

72

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \log_3 a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log_3 a_k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \log_3 a_3 + \cdots + \log_3 a_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_3 (a_1 a_2 a_3 \times \cdots \times a_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_3 \frac{3n-1}{n+1} \\ &= \log_3 3 = 1 \end{aligned}$$

답 1

73

(1) 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하자.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad S_{2n-1} &= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{이므로} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad S_{2n} &= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{이므로} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

(i), (ii)에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 1$ 이므로 주어진

급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

(2) 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \left(2 - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\right) + \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{4}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1}\right) \\ &= 2 - \frac{n+2}{n+1} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{n+2}{n+1}\right) = 2 - 1 = 1$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

답 (1) 수렴, 1 (2) 수렴, 1

74

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 5)$ 가 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 5) = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -5$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12a_n + b_n^2}{3a_n - 2b_n^2} = \frac{12 \times (-5) + 0}{3 \times (-5) - 2 \times 0} = 4$$

답 4

75

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{2n^2}{n^2+1}\right)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{2n^2}{n^2+1}\right) = 0$$

$$b_n = a_n - \frac{2n^2}{n^2+1} \text{으로 놓으면}$$

$$a_n = b_n + \frac{2n^2}{n^2+1}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b_n + \frac{2n^2}{n^2+1}\right) = 0 + 2 = 2$$

답 2

76

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

또 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 6$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 3}{5a_n - S_n} = \frac{2 \times 0 + 3}{5 \times 0 - 6} = -\frac{1}{2}$$

답 $-\frac{1}{2}$

77

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = 1 \text{에서} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1$$

$$\therefore \alpha - \beta = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (4a_n + 3b_n) = 11 \text{에서} \quad 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 3 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 11$$

$$\therefore 4\alpha + 3\beta = 11 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $\alpha = 2, \beta = 1$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$= \alpha + 2\beta = 4$$

답 4

78

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 1}{n^2 + n - 4} = 4 \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 6n} - n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 6n} - n)(\sqrt{n^2 + 6n} + n)}{\sqrt{n^2 + 6n} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{\sqrt{n^2 + 6n} + n} = 3 \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - b_n) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 2 \times 4 - 3 = 5\end{aligned}$$

답 5

연습 문제

• 본책 46~48쪽

79

전략 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 이용하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{a_n} - \frac{n+1}{a_{n+1}} \right)$ 을 d 에 대한 식으로 나타낸다.

$a_n = 1 + (n-1)d$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{a_n} - \frac{n+1}{a_{n+1}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{a_k} - \frac{k+1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{a_1} - \frac{2}{a_2} \right) + \left(\frac{2}{a_2} - \frac{3}{a_3} \right) + \left(\frac{3}{a_3} - \frac{4}{a_4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{n}{a_n} - \frac{n+1}{a_{n+1}} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{n+1}{a_{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n+1}{dn+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{d} \\ \text{즉 } 1 - \frac{1}{d} &= \frac{2}{3} \text{ 이므로 } \frac{1}{d} = \frac{1}{3} \\ \therefore d &= 3\end{aligned}$$

답 ③

80

전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha_n + \beta_n$, $\alpha_n \beta_n$ 을 n 에 대한 식으로 나타낸다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n + \beta_n = n + 1, \alpha_n \beta_n = n^2 + 2n$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_n - 1)(\beta_n - 1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n \beta_n - (\alpha_n + \beta_n) + 1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n - (n + 1) + 1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1\end{aligned}$$

답 1

81

전략 $\log A + \log B = \log AB$ 임을 이용한다.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \log_4 \left(1 + \frac{1}{a_n} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \log_4 \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \log_4 \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \log_4 \left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+1}{n+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log_4 \left(\frac{k+1}{k} \times \frac{k+1}{k+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log_4 \left(\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \right) + \log_4 \left(\frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \log_4 \left(\frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \log_4 \left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_4 \left\{ \left(\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \right) \times \left(\frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \right) \times \left(\frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \dots \times \left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_4 \frac{2(n+1)}{n+2} \\ &= \log_4 2 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

82

전략 홀수 번째 항까지의 부분합과 짝수 번째 항까지의 부분합을 각각 구하여 극한값을 비교한다.

제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하자.

$$(i) S_{2n-1} = -1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right) + \dots \\ + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-1}\right) \\ = -1$$

이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) = -1$$

$$(ii) S_{2n} = -1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right) + \dots \\ + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-1}\right) + \frac{1}{2n+1} \\ = -1 + \frac{1}{2n+1}$$

이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 + \frac{1}{2n+1}\right) = -1$$

(i), (ii)에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = -1$ 이므로 주어진 급수는 -1 에 수렴한다.

답 풀이 참조

83

전략 먼저 각 급수의 제 n 항의 극한값을 구한다.

$$\text{ㄱ. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{2n+3} = \frac{1}{2} \neq 0$$

이므로 주어진 급수는 발산한다.

$$\text{ㄴ. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n(n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+3n} = 1 \neq 0$$

이므로 주어진 급수는 발산한다.

$$\text{ㄷ. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})} \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \{ (\sqrt{2} - 0) + (\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{4} - \sqrt{2}) \\ + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-2}) \\ + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (\sqrt{n} + \sqrt{n+1} - 1) = \infty$$

$$\text{ㄹ. } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{k+1} - \frac{k+1}{k+2} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{5} \right) + \dots \right. \\ \left. + \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} \right) \right\} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{n+1}{n+2} \right) \\ = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

이상에서 수렴하는 급수인 것은 ㄹ뿐이다.

답 ㄹ

84

전략 급수의 성질을 이용하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 의 값을 구한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta \quad (\alpha, \beta \text{는 실수}) \text{라 하면}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + b_n) = 8 \text{에서}$$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 8$$

$$\therefore 2\alpha + \beta = 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n + 2b_n) = 26 \text{에서}$$

$$3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 26$$

$$\therefore 3\alpha + 2\beta = 26 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$\alpha = -10, \beta = 28$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ = \alpha - \beta = -38$$

답 -38

85

전략 주어진 점화식을 이용하여 $\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}$ 을 분수의 차로 변형한다.

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{에서} \quad a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$$

따라서

$$\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}} = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+2}}$$

이므로

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+2}} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+2}} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} \right) + \left(\frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_5} \right) \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+2}} \right) \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_{n+2}} \right)
\end{aligned}$$

이때 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 에 $n=1, 2, 3, 4, 5, \dots$ 를 차례대로 대입하면

$$a_3=3, a_4=5, a_5=8, a_6=13, a_7=21, \dots$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_2}{a_{n+1}a_{n+2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_{n+2}} \right) \\
&= \frac{1}{a_2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

86

전략 $a_{n+1} - a_n = d$ 임을 이용하여 $\frac{d}{a_n a_{n+1}}$ 를 분수의 차로 변형한다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 d 이므로

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= d \\
\therefore \frac{d}{a_n a_{n+1}} &= \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n a_{n+1}} \\
&= \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}
\end{aligned}$$

이때 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 이므로

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{a_n a_{n+1}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} \right) \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{dn + a_1} \right) = \frac{1}{a_1}
\end{aligned}$$

$$\text{즉 } \frac{1}{a_1} = \frac{1}{10} \text{ 이므로}$$

$$a_1 = 10$$

따라서 $a_3 = a_1 + 2d = 10 + 2d = 16$ 에서

$$d = 3$$

$$\begin{aligned}
\therefore a_{10} &= a_1 + 9d \\
&= 10 + 9 \times 3 = 37
\end{aligned}$$

답 37

87

전략 주어진 급수의 제 n 항을 구하고 부분분수로 변형한다.

주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2n+4}{(n+1)^2(n+3)^2} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+3)^2} \right\}
\end{aligned}$$

이때 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{(k+3)^2} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} \right) + \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+2)^2} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+3)^2} \right\} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{1}{(n+3)^2} \right\}
\end{aligned}$$

$\therefore$ (주어진 식)

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{1}{(n+3)^2} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{13}{36} = \frac{13}{72}
\end{aligned}$$

답 $\frac{13}{72}$

88

전략 직선의 x 절편, y 절편을 이용하여 a_n 을 구한다.

직선 $nx + (n+2)y = 1$ 의 x 절편은 $\frac{1}{n}$, y 절편은

$$\frac{1}{n+2} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \times \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2n(n+2)} \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\
 \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{8}
 \end{aligned}$$

답 3/8



개념 노트

직선 $ax+by=1$ ($ab \neq 0$)과 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times |x\text{절편}| \times |y\text{절편}| = \frac{1}{2|ab|}$$

89

전략 주어진 급수가 수렴할 조건을 구한다.

주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
 S_{2n-1} &= a_1 + (-a_2 + a_2) + (-a_3 + a_3) + \cdots \\
 &\quad + (-a_n + a_n) \\
 &= a_1 \\
 S_{2n} &= a_1 + (-a_2 + a_2) + (-a_3 + a_3) + \cdots \\
 &\quad + (-a_n + a_n) - a_{n+1} \\
 &= a_1 - a_{n+1}
 \end{aligned}$$

이때 주어진 급수가 수렴하려면

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}, \text{ 즉} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 - a_{n+1})
 \end{aligned}$$

이어야 하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

ㄱ. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 이므로 주어진 급수는 수렴한다.

ㄴ. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{n}{3n+2} = \log \frac{1}{3} \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄷ. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$ 이므로 주어진 급수는 수렴한다.

이상에서 주어진 급수가 수렴하도록 하는 수열인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

90

전략 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$ 임을 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구한다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{2^{n+1}}{2^n + 1} \right)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{2^{n+1}}{2^n + 1} \right) = 0$$

$b_n = a_n - \frac{2^{n+1}}{2^n + 1}$ 으로 놓으면

$$a_n = b_n + \frac{2^{n+1}}{2^n + 1}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b_n + \frac{2^{n+1}}{2^n + 1} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{2^n}}
 \end{aligned}$$

$$= 0 + 2 = 2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \times a_n + 5 \times 2^{n+1}}{2^n + 3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 5 \times 2}{1 + \frac{3}{2^n}}$$

$$= 2 + 10 = 12$$

답 ④

91

전략 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$ 임을 이용하여 a 의 값을 구한다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{an^2 + 6}{n^2 + 2n}$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + 6}{n^2 + 2n} = 0 \quad \therefore a = 0$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an^2+6}{n^2+2n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n(n+2)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 3 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\
&= 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

답 $\frac{9}{2}$

92

전략 $\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} \log b_n = \beta$ 로 놓고 주어진 조건을 이용하여 α , β 에 대한 식을 세운다.

$\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} \log b_n = \beta$ (α , β 는 실수)라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} \log(a_n b_n) = 7$ 에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\log a_n + \log b_n) = 7$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n + \sum_{n=1}^{\infty} \log b_n = 7$$

$$\therefore \alpha + \beta = 7 \quad \cdots \text{㉠}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{a_n^2}{b_n} = 2$ 에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2 \log a_n - \log b_n) = 2$$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \log a_n - \sum_{n=1}^{\infty} \log b_n = 2$$

$$\therefore 2\alpha - \beta = 2 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$\alpha = 3, \beta = 4$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{a_n}{b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\log a_n - \log b_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \log a_n - \sum_{n=1}^{\infty} \log b_n$$

$$= \alpha - \beta$$

$$= -1$$

답 -1

93

전략 원의 접선의 방정식을 이용하여 a_n 을 구하고

$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{a_n a_{n+1}}$ 에 대입한다.

원 $x^2 + y^2 = n$ 에 접하고 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \sqrt{3}x \pm \sqrt{n} \times \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1}$$

$$\therefore y = \sqrt{3}x \pm 2\sqrt{n}$$

두 직선의 x 절편은 $-\frac{2\sqrt{3n}}{3}$, $\frac{2\sqrt{3n}}{3}$ 이므로

$$a_n = \frac{2\sqrt{3n}}{3} \quad (\because a_n > 0)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{a_n a_{n+1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\frac{2\sqrt{3n}}{3} \times \frac{2\sqrt{3(n+1)}}{3}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{4\sqrt{n} \times \sqrt{n+1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \left\{ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \cdots \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

$$= \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

94

전략 거짓인 명제의 반례를 찾는다.

ㄱ. [반례] $\{a_n\}: 1, 0, 1, 0, \dots$

$\{b_n\}: 0, 1, 0, 1, \dots$

이라 하면 $a_n b_n = 0$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = 0$ 이지만 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 과 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 의 값

은 모두 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n - (a_n - b_n)\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) \\ &= \alpha - \beta\end{aligned}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 도 수렴한다. (참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \beta$ (α, β 는 실수)

라 하면

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \{(a_n + b_n) + (a_n - b_n)\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) \\ &= \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \beta\end{aligned}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 도 수렴한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

02 등비급수

● 본책 49~54쪽

95

(1) 첫째항이 1, 공비가 $\frac{2}{3}$ 이고, $-1 < \frac{2}{3} < 1$ 이므로
주어진 등비급수는 수렴한다.

따라서 그 합은 $\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$

(2) 첫째항이 1, 공비가 $-\sqrt{2}$ 이고, $-\sqrt{2} < -1$ 이므로
주어진 등비급수는 발산한다.

(3) 첫째항이 $\sqrt{3}$, 공비가 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이고, $-1 < -\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$

이므로 주어진 등비급수는 수렴한다.

따라서 그 합은

$$\frac{\sqrt{3}}{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{3}{\sqrt{3} + 1} = \frac{3(\sqrt{3} - 1)}{2}$$

답 (1) 수렴, 3 (2) 발산 (3) 수렴, $\frac{3(\sqrt{3} - 1)}{2}$

96

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$ 에서 첫째항이 $-\frac{2}{\sqrt{3}}$, 공비가 $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

이고, $-\frac{2}{\sqrt{3}} < -1$ 이므로 주어진 등비급수는 발산한다.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} 2 \times (-1)^{n-1}$ 에서 첫째항이 2, 공비가 -1 이므로
주어진 등비급수는 발산한다.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \sqrt{2})^{n-1}$ 에서 첫째항이 1, 공비가 $1 - \sqrt{2}$ 이고,
 $-1 < 1 - \sqrt{2} < 1$ 이므로 주어진 등비급수는 수렴한다.

따라서 그 합은

$$\frac{1}{1 - (1 - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 5 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$ 에서 첫째항이 $\frac{25}{6}$, 공비가
 $\frac{5}{6}$ 이고, $-1 < \frac{5}{6} < 1$ 이므로 주어진 등비급수는 수렴한다.

따라서 그 합은 $\frac{\frac{25}{6}}{1 - \frac{5}{6}} = 25$

답 (1) 발산 (2) 발산 (3) 수렴, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (4) 수렴, 25

97

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n$

$$\begin{aligned}&= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} \\ &= 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{3}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right\}^n$

$$\begin{aligned}&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n \\ &= \frac{-\frac{3}{4}}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)} = -\frac{3}{7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{5^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2}{5} \right)^n - \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^n \\
 &= \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}} - \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} \\
 &= \frac{2}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \sum_{n=1}^{\infty} (4 \times 3^{-n} + 12 \times 6^{-n}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \times \left(\frac{1}{3} \right)^n + 12 \times \left(\frac{1}{6} \right)^n \right\} \\
 &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6} \right)^n \\
 &= 4 \times \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} + 12 \times \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} \\
 &= 4 \times \frac{1}{2} + 12 \times \frac{1}{5} = \frac{22}{5}
 \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{4}{5}$ (2) $-\frac{3}{7}$ (3) $-\frac{5}{6}$ (4) $\frac{22}{5}$

98

(1) 공비가 $-3x$ 이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < -3x < 1$$

$$\therefore -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$$

(2) 공비가 $\frac{x}{2}$ 이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < \frac{x}{2} < 1$$

$$\therefore -2 < x < 2$$

답 (1) $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ (2) $-2 < x < 2$

99

(1) $\log_2 2 + \log_2 \sqrt{2} + \log_2 \sqrt[4]{2} + \log_2 \sqrt[8]{2} + \dots$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$\begin{aligned}
 (2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n \cos n\pi &= \frac{2}{3} \cos \pi + \left(\frac{2}{3} \right)^2 \cos 2\pi + \left(\frac{2}{3} \right)^3 \cos 3\pi \\
 &\quad + \left(\frac{2}{3} \right)^4 \cos 4\pi + \dots \\
 &= -\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} \right)^2 - \left(\frac{2}{3} \right)^3 + \left(\frac{2}{3} \right)^4 - \dots \\
 &= \frac{-\frac{2}{3}}{1 - \left(-\frac{2}{3} \right)} = -\frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

$$(3) 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n = \frac{1 \times (3^{n+1} - 1)}{3 - 1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n}{4^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 1}{2 \times 4^n} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{4} \right)^n - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} \right)^n \right\} \\
 &= \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n \\
 &= \frac{3}{2} \times \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \\
 &= \frac{3}{2} \times 3 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{13}{3}
 \end{aligned}$$

답 (1) 2 (2) $-\frac{2}{5}$ (3) $\frac{13}{3}$

100

$$\frac{a_1}{5} + \frac{a_2}{5^2} + \frac{a_3}{5^3} + \frac{a_4}{5^4} + \dots$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7 + (-1)^n}{2 \times 5^n} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{7}{2} \times \left(\frac{1}{5} \right)^n + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{5} \right)^n \right\} \\
 &= \frac{7}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5} \right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{5} \right)^n \\
 &= \frac{7}{2} \times \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} + \frac{1}{2} \times \frac{-\frac{1}{5}}{1 - \left(-\frac{1}{5} \right)} \\
 &= \frac{7}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{6} \right) \\
 &= \frac{19}{24}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{19}{24}$

다른 풀이 $a_1=3, a_2=4, a_3=3, a_4=4, \dots$ 이므로

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{5} + \frac{a_2}{5^2} + \frac{a_3}{5^3} + \frac{a_4}{5^4} + \dots \\ &= \frac{3}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{4}{5^4} + \dots \\ &= \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{5^3} + \frac{3}{5^5} + \dots \right) \\ & \quad + \left(\frac{4}{5^2} + \frac{4}{5^4} + \frac{4}{5^6} + \dots \right) \\ &= \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{1}{25}} + \frac{\frac{4}{25}}{1 - \frac{1}{25}} \\ &= \frac{5}{8} + \frac{1}{6} = \frac{19}{24} \end{aligned}$$

101

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 = -\frac{4}{3} \text{에서} \quad ar = -\frac{4}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \text{에서} \quad \frac{a}{1-r} &= 3 \\ \therefore a &= 3(1-r) \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

$\textcircled{㉡}$ 을 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$3(1-r)r = -\frac{4}{3}, \quad 9r^2 - 9r - 4 = 0$$

$$(3r+1)(3r-4) = 0$$

$$\therefore r = -\frac{1}{3} \quad (\because -1 < r < 1) \quad \text{답} \quad -\frac{1}{3}$$

참고 $|r| \geq 1$ 이면 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다.

102

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 \text{에서} \quad \frac{a}{1-r} &= 2 \\ \therefore a &= 2(1-r) \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

수열 $\{a_n^2\}$ 은 첫째항이 a^2 , 공비가 r^2 인 등비수열이

므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{4}{3}$ 에서

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{1-r^2} &= \frac{4}{3} \\ \therefore \frac{a^2}{(1-r)(1+r)} &= \frac{4}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

$\textcircled{㉠}$ 을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면

$$\frac{4(1-r)^2}{(1-r)(1+r)} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1-r}{1+r} = \frac{1}{3}, \quad 3(1-r) = 1+r$$

$$4r = 2 \quad \therefore r = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{1}{2} \text{을 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면} \quad a = 1$$

따라서 수열 $\{a_n^3\}$ 은 첫째항이 $a^3=1$, 공비가 $r^3=\frac{1}{8}$

인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{8}{7} \quad \text{답} \quad \frac{8}{7}$$

103

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r ($r > 0$)라 하면

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$a_2 = 4 \text{에서} \quad ar = 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}a_{n+3} = 8 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (ar^n \times ar^{n+2}) &= \sum_{n=1}^{\infty} a^2(r^2)^{n+1} \\ &= \frac{a^2 r^4}{1-r^2} \\ &= \frac{(ar)^2 r^2}{1-r^2} = 8 \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

$\textcircled{㉠}$ 을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면

$$\frac{16r^2}{1-r^2} = 8$$

$$2r^2 = 1-r^2, \quad r^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\because r > 0)$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{을 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면} \quad \frac{\sqrt{3}}{3}a = 4$$

$$\therefore a = 4\sqrt{3}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{4\sqrt{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$$

$$= 6(\sqrt{3} + 1) \quad \text{답} \quad 6(\sqrt{3} + 1)$$

104

(1) 주어진 등비급수의 첫째항이 1, 공비가 $\log_{\frac{1}{2}} x$ 이므

로 이 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < \log \frac{1}{2} x < 1$$

$$\log \frac{1}{2} 2 < \log \frac{1}{2} x < \log \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{2} < x < 2$$

(2) 주어진 등비급수의 첫째항이 1, 공비가 $2\cos x$ 이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < 2\cos x < 1, \quad -\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} < x < \frac{2}{3}\pi \quad (\because 0 < x < \pi)$$

(3) 주어진 등비급수의 첫째항과 공비가 모두 $x^2 - x + 1$ 이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < x^2 - x + 1 < 1$$

$$(i) -1 < x^2 - x + 1 \text{에서} \quad x^2 - x + 2 > 0$$

$$\therefore \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 부등식이 성립한다.

$$(ii) x^2 - x + 1 < 1 \text{에서} \quad x^2 - x < 0$$

$$x(x-1) < 0 \quad \therefore 0 < x < 1$$

$$(i), (ii) \text{에서} \quad 0 < x < 1$$

(4) 주어진 등비급수의 첫째항이 $(x-4)(x-2)$, 공비가 $x-2$ 이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$(x-4)(x-2) = 0 \text{ 또는 } -1 < x-2 < 1$$

$$(x-4)(x-2) = 0 \text{에서}$$

$$x=2 \text{ 또는 } x=4$$

$$-1 < x-2 < 1 \text{에서}$$

$$1 < x < 3$$

따라서 구하는 x 의 값의 범위는

$$1 < x < 3 \text{ 또는 } x=4$$

$$\text{답 (1) } \frac{1}{2} < x < 2 \quad (2) \frac{\pi}{3} < x < \frac{2}{3}\pi$$

$$(3) 0 < x < 1 \quad (4) 1 < x < 3 \text{ 또는 } x=4$$

105

(i) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n$ 은 첫째항과 공비가 모두 $\frac{x}{4}$ 이

므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < \frac{x}{4} < 1 \quad \therefore -4 < x < 4$$

(ii) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{x}\right)^n$ 은 첫째항과 공비가 모두 $\frac{3}{x}$ 이

므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < \frac{3}{x} < 1$$

㉠ $x > 0$ 일 때

$$0 < \frac{3}{x} < 1 \text{이므로} \quad x > 3$$

㉡ $x < 0$ 일 때

$$-1 < \frac{3}{x} < 0 \text{이므로} \quad -x > 3$$

$$\therefore x < -3$$

㉠, ㉡에서 $x < -3$ 또는 $x > 3$

(i), (ii)에서 $-4 < x < -3$ 또는 $3 < x < 4$

$$\text{답 } -4 < x < -3 \text{ 또는 } 3 < x < 4$$

다른 풀이 (ii) $-1 < \frac{3}{x} < 1$ 에서 $x \neq 0$ 이므로 각 변에 x^2

을 곱하면

$$-x^2 < 3x < x^2$$

$$\text{㉢ } -x^2 < 3x \text{에서} \quad x^2 + 3x > 0$$

$$x(x+3) > 0 \quad \therefore x < -3 \text{ 또는 } x > 0$$

$$\text{㉣ } 3x < x^2 \text{에서} \quad x^2 - 3x > 0$$

$$x(x-3) > 0 \quad \therefore x < 0 \text{ 또는 } x > 3$$

㉢, ㉣에서 $x < -3$ 또는 $x > 3$

03 등비급수의 활용

● 본책 55~60쪽

106

$$(1) 0.\dot{1}\dot{4} = 0.14 + 0.0014 + 0.000014 + \dots$$

$$= \frac{14}{10^2} + \frac{14}{10^4} + \frac{14}{10^6} + \dots$$

$$= \frac{\frac{14}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{14}{99}$$

$$(2) 1.2\dot{3} = 1.2 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \dots$$

$$= \frac{12}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \dots$$

$$= \frac{12}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{12}{10} + \frac{1}{30} = \frac{37}{30}$$

(3) $1.3\dot{2}\dot{1} = 1.3 + 0.021 + 0.00021 + 0.0000021 + \dots$

$$= \frac{13}{10} + \frac{21}{10^3} + \frac{21}{10^5} + \frac{21}{10^7} + \dots$$

$$= \frac{13}{10} + \frac{\frac{21}{1000}}{1 - \frac{1}{100}}$$

$$= \frac{13}{10} + \frac{7}{330} = \frac{218}{165}$$

답 (1) $\frac{14}{99}$ (2) $\frac{37}{30}$ (3) $\frac{218}{165}$

107

$0.\dot{4} = \frac{4}{9}$, $0.0\dot{5} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$ 이므로 공비를 r 라 하면

$$\frac{4}{9}r^3 = \frac{1}{18}, \quad r^3 = \frac{1}{8}$$

$$\therefore r = \frac{1}{2}$$

따라서 구하는 등비급수의 합은

$$\frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{8}{9}$$

답 $\frac{8}{9}$

108

$\frac{4}{33} = 0.121212\dots$ 이므로

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 2, a_5 = 1, a_6 = 2, \dots$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \dots$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \dots \right)$$

$$+ \left(\frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^6} + \dots \right)$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} + \frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{1}{9}}$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{5}{8}$$

답 $\frac{5}{8}$

109

점 P_n 이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \overline{OP_1} - \overline{P_2P_3} + \overline{P_4P_5} - \overline{P_6P_7} + \dots$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots$$

$$= \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{4}{5}$$

$$y = \overline{P_1P_2} - \overline{P_3P_4} + \overline{P_5P_6} - \overline{P_7P_8} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \dots$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{2}{5}$$

따라서 점 P_n 이 한없이 가까워지는 점의 좌표는

$$\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right) \quad \text{답} \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

110

삼각형 A_1 의 둘레의 길이는 4

삼각형 A_2 의 둘레의 길이는 $\frac{1}{2} \times 4$

삼각형 A_3 의 둘레의 길이는 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 4$

⋮

따라서 모든 삼각형 $A_1, A_2, A_3, \dots$ 의 둘레의 길이의 합은

$$4 + \frac{1}{2} \times 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 4 + \dots = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}} = 8$$

답 8

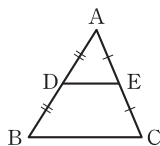
개념 노트

삼각형의 중점연결정리

삼각형 ABC의 두 변 AB와 AC

의 중점을 각각 D, E라 할 때

$$\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}, \quad \overline{DE} \parallel \overline{BC}$$



111

$$x_n - x_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},$$

$$f(x_n) = \left\{ \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \right\}^2 = \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1} \text{이므로}$$

$$A_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \times \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1} \\ = \frac{1}{3} \times \left(\frac{8}{27} \right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \times \left(\frac{8}{27} \right)^{n-1} \\ = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{8}{27}} = \frac{9}{19}$$

답 $\frac{9}{19}$

112

정사각형 M_1 의 대각선의 길이는 원 C_1 의 지름의 길이와 같으므로 정사각형 M_1 의 한 변의 길이는

$$2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\therefore S_1 = \pi \times 1^2 - (\sqrt{2})^2 = \pi - 2$$

원 C_2 의 지름의 길이는 정사각형 M_1 의 한 변의 길이와 같으므로 $\sqrt{2}$

정사각형 M_2 의 대각선의 길이는 원 C_2 의 지름의 길이와 같으므로 정사각형 M_2 의 한 변의 길이는

$$\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

$$\therefore S_2 = \pi \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - 1^2 = \frac{1}{2}(\pi - 2)$$

원 C_3 의 지름의 길이는 정사각형 M_2 의 한 변의 길이와 같으므로 1

정사각형 M_3 의 대각선의 길이는 원 C_3 의 지름의 길이와 같으므로 정사각형 M_3 의 한 변의 길이는

$$1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore S_3 = \pi \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{4}(\pi - 2)$$

$\vdots$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n$$

$$= (\pi - 2) + \frac{1}{2}(\pi - 2) + \frac{1}{4}(\pi - 2) + \dots$$

$$= \frac{\pi - 2}{1 - \frac{1}{2}} = 2(\pi - 2)$$

답 $2(\pi - 2)$

113

추가 멈출 때까지 움직인 거리는

$$30 + 30 \times \frac{5}{6} + 30 \times \left(\frac{5}{6} \right)^2 + 30 \times \left(\frac{5}{6} \right)^3 + \dots \\ = \frac{30}{1 - \frac{5}{6}} \\ = 180 \text{ (cm)}$$

답 180 cm

114

자동차의 속력이 30 % 감소하면 자동차의 속력은 이전 속력의 70 %가 된다.

이때 자동차의 처음 속력은 시속 108 km, 즉 초속 30 m이므로 브레이크 페달을 밟은 순간의 속력은

$$30 \times \frac{70}{100} = 21 \text{ (m/s)}$$

따라서 처음 1초 동안 자동차가 이동한 거리는

$$21 \times 1 = 21 \text{ (m)}$$

그다음 1초 동안의 속력은

$$21 \times \frac{70}{100} = 21 \times \frac{7}{10} \text{ (m/s)}$$

이므로 1초 동안 자동차가 이동한 거리는

$$\left(21 \times \frac{7}{10} \right) \times 1 = 21 \times \frac{7}{10} \text{ (m)}$$

$\vdots$

따라서 자동차가 완전히 멈출 때까지 이동한 거리는

$$21 + 21 \times \frac{7}{10} + 21 \times \left(\frac{7}{10} \right)^2 + \dots \\ = \frac{21}{1 - \frac{7}{10}} = 70 \text{ (m)}$$

답 70 m

연습 문제

● 본책 61~63쪽

115

전략 주어진 식을 전개한 후 각 등비급수의 첫째항과 공비를 이용하여 그 합을 구한다.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{\infty} (3^{n+1} - 15) \left(\frac{1}{6} \right)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \times \left(\frac{1}{2} \right)^n - 15 \times \left(\frac{1}{6} \right)^n \right\} \\
 &= 3 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n - 15 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6} \right)^n \\
 &= 3 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 15 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} \\
 &= 3 \times 2 - 15 \times \frac{6}{5} = -12 \quad \text{답 } -12
 \end{aligned}$$

116

전략 $4^n + 1$ 의 일의 자리의 숫자의 규칙성을 찾는다.

$4^n + 1$ 에 $n=1, 2, 3, 4, \dots$ 를 차례대로 대입하면

5, 17, 65, 257, ...

이므로 $a_1=5, a_2=17, a_3=65, a_4=257, \dots$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} &= \frac{5}{10} + \frac{17}{10^2} + \frac{65}{10^3} + \frac{257}{10^4} + \dots \\
 &= \left(\frac{5}{10} + \frac{17}{10^2} + \frac{65}{10^3} + \dots \right) \\
 &\quad + \left(\frac{17}{10^2} + \frac{65}{10^3} + \frac{257}{10^4} + \dots \right) \\
 &= \frac{\frac{5}{10}}{1 - \frac{1}{10}} + \frac{\frac{17}{10^2}}{1 - \frac{1}{10}} \\
 &= \frac{50}{99} + \frac{17}{99} = \frac{67}{99} \quad \text{답 } \frac{67}{99}
 \end{aligned}$$

117

전략 주어진 조건을 이용하여 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공비를 구한다.

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공비를 각각 p, q 라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 \text{에서} \quad \frac{1}{1-p} = 2$$

$$\therefore p = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 3 \text{에서} \quad \frac{1}{1-q} = 3$$

$$\therefore q = \frac{2}{3}$$

따라서 수열 $\{a_n^2\}$ 은 첫째항이 $a_1^2=1$, 공비가 $p^2=\frac{1}{4}$

인 등비수열이고, 수열 $\{b_n^2\}$ 은 첫째항이 $b_1^2=1$, 공비

가 $q^2=\frac{4}{9}$ 인 등비수열이다.

또 수열 $\{a_nb_n\}$ 은 첫째항이 $a_1b_1=1$, 공비가 $pq=\frac{1}{3}$

인 등비수열이므로

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} + 2 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} \\
 &= \frac{4}{3} + 2 \times \frac{3}{2} + \frac{9}{5} \\
 &= \frac{92}{15} \quad \text{답 } \frac{92}{15}
 \end{aligned}$$

118

전략 주어진 조건을 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공비에 대한 식으로 나타낸다.

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots = 8$ 에서

$$\frac{a}{1-r} = 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots = 6$ 에서

$$a + ar^2 + ar^4 + ar^6 + \dots = 6$$

$$\frac{a}{1-r^2} = 6$$

$$\therefore \frac{a}{(1-r)(1+r)} = 6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$\frac{8}{1+r} = 6 \quad \therefore r = \frac{1}{3}$$

$r = \frac{1}{3}$ 을 ①에 대입하면

$$\frac{a}{\frac{2}{3}} = 8 \quad \therefore a = \frac{16}{3}$$

따라서 수열 $\{a_n^2\}$ 은 첫째항이 $a^2 = \frac{256}{9}$, 공비가

$r^2 = \frac{1}{9}$ 인 등비수열이므로

$$\begin{aligned}
 & a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \dots \\
 &= \frac{\frac{256}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = 32 \quad \text{답 } 32
 \end{aligned}$$

119

전략 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n (x-2)^{n-1}$ 의 첫째항이 x , 공비가 $x(x-2)$ 임을 이용한다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n (x-2)^{n-1}$ 은 첫째항이 x , 공비가 $x(x-2)$ 인 등비급수이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$x=0 \text{ 또는 } -1 < x(x-2) < 1$$

(i) $x(x-2) > -1$ 에서

$$x^2 - 2x + 1 > 0 \quad \therefore (x-1)^2 > 0$$

이 부등식은 $x \neq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

(ii) $x(x-2) < 1$ 에서 $x^2 - 2x - 1 < 0$

$$\therefore 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$$

(i), (ii)에서

$$1 - \sqrt{2} < x < 1 \text{ 또는 } 1 < x < 1 + \sqrt{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n (x-2)^{n-1} = \frac{1}{4}$ 이므로

$$\frac{x}{1 - x(x-2)} = \frac{1}{4}$$

$$4x = 1 - x^2 + 2x, \quad x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\therefore x = -1 + \sqrt{2} \quad (\because \textcircled{1}) \quad \text{답 } -1 + \sqrt{2}$$

120

전략 등비급수가 수렴하기 위한 필요충분조건을 이용한다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하자.

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면

$$a=0 \text{ 또는 } -1 < r < 1$$

이때 등비수열 $\{a_{2n}\}$ 의 첫째항은 ar , 공비는 r^2 이고

$$ar=0 \text{ 또는 } 0 \leq r^2 < 1$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 도 수렴한다. (참)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 발산하면

$$a \neq 0, r \leq -1 \text{ 또는 } r \geq 1$$

이때 등비수열 $\{a_{2n}\}$ 의 첫째항은 ar , 공비는 r^2 이고

$$ar \neq 0, r^2 \geq 1$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 도 발산한다. (참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \neq 0$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + \frac{1}{2}\right)$ 은 발산한다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

121

전략 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 a_n 을 구한다.

$2^n S_n = 3^n - 2^n$ 에서

$$S_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1$$

$n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = \frac{1}{2}$

$n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 - \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1\right] \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때 $a_1 = \frac{1}{2}$ 은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$a_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

따라서

$$a_{2n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{2n-2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}$$

이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{2n-1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} 2 \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \\ &= \frac{2}{1 - \frac{4}{9}} \\ &= \frac{18}{5} \end{aligned}$$

답 $\frac{18}{5}$

122

전략 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ 과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 을 각각 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 이용하여 나타낸다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d ($d > 0$)라 하면

$$a_n = 1 + (n-1)d$$

이때

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n a_{n+1}} &= \frac{1}{a_{n+1} - a_n} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d} \left\{ \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d} \left(1 - \frac{1}{d n + 1} \right) \\ &= \frac{1}{d}\end{aligned}$$

한편 등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 $a_2 b_2 = 1$ 에서

$$\begin{aligned}(1+d)r &= 1 \quad \therefore r = \frac{1}{1+d} \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \frac{1}{1 - \frac{1}{1+d}} = 1 + \frac{1}{d}\end{aligned}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n \right) = 2$ 에서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= 2 \\ \frac{1}{d} + \left(1 + \frac{1}{d} \right) &= 2, \quad \frac{2}{d} = 1 \quad \therefore d = 2 \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{답 ⑤}\end{aligned}$$

123

전략 각 등비급수의 공비를 이용하여 등비급수가 수렴하도록 하는 x 의 값의 범위를 구한다.

(i) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3} \right)^n (x-2)^n$ 은 첫째항과 공비가 모

두 $\frac{x(x-2)}{3}$ 이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < \frac{x(x-2)}{3} < 1$$

$$\textcircled{a} \quad \frac{x(x-2)}{3} > -1 \text{에서}$$

$$x^2 - 2x + 3 > 0$$

$$\therefore (x-1)^2 + 2 > 0$$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 부등식이 성립한다.

$$\textcircled{b} \quad \frac{x(x-2)}{3} < 1 \text{에서}$$

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

$$(x+1)(x-3) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 3$$

$$\textcircled{a}, \textcircled{b} \text{에서} \quad -1 < x < 3$$

(ii) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log_3 \frac{x}{3} \right)^n$ 은 첫째항과 공비가 모두

$\log_3 \frac{x}{3}$ 이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < \log_3 \frac{x}{3} < 1$$

$$-1 < \log_3 x - 1 < 1, \quad 0 < \log_3 x < 2$$

$$\log_3 1 < \log_3 x < \log_3 9$$

$$\therefore 1 < x < 9$$

(i), (ii)에서 $1 < x < 3$

답 1 < x < 3

124

전략 $-1 < r < 1$ 임을 이용하여 각 등비급수의 공비의 값의 범위를 구한다.

$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 이 수렴하므로

$$-1 < r < 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1}$ 은 공비가 r 인 등비급수이므로 수렴한다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} (r^{n+1} + 3r^n)$ 은 항상 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (r^2)^n$ 은 공비가 r^2 인 등비급수이고 ㉠

$$\text{에서} \quad 0 \leq r^2 < 1$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$ 은 항상 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty} (r^n - r^{2n})$ 도

항상 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \right)^n$ 은 공비가 $\frac{1}{r}$ 인 등비급수이고 ㉠에서

$$\frac{1}{r} < -1 \text{ 또는 } \frac{1}{r} > 1$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \right)^n$ 은 항상 발산한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2} - 1\right)^n$ 은 공비가 $\frac{r}{2} - 1$ 인 등비급수이고 ㉠에서

$$-\frac{3}{2} < \frac{r}{2} - 1 < -\frac{1}{2}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2} - 1\right)^n$ 이 항상 수렴한다고는 할 수 없다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} (r^3)^n$ 은 공비가 r^3 인 등비급수이고 ㉠에서 $-1 < r^3 < 1$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} r^{3n}$ 은 항상 수렴한다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty} (-r)^n$ 은 공비가 $-r$ 인 등비급수이고 ㉠에서 $-1 < -r < 1$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} (-r)^n$ 은 항상 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n + (-r)^n}{2} \text{도 항상 수렴한다.}$$

이상에서 항상 수렴하는 급수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅂ이다. ▶ ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅂ

125

전략 $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ...의 길이를 각각 구하여 $\overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \dots$ 을 등비급수로 나타낸다. $\overline{OA} = 1$ 이므로

$$\overline{AA_1} = \overline{OA} \sin 30^\circ = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{OA_1} = \overline{OA} \cos 30^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{이므로}$$

$$\overline{A_1A_2} = \overline{OA_1} \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\overline{OA_2} = \overline{OA_1} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \text{이므로}$$

$$\overline{A_2A_3} = \overline{OA_2} \sin 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2}$$

⋮

$$\therefore \overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \dots$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} \quad \text{답 } 2 + \sqrt{3}$$

126

전략 주어진 조건을 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공비를 이용하여 나타낸다.

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공비를 각각 r_1 , r_2 라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \frac{8}{3} \text{에서}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{8}{3}$$

$$\frac{1}{1-r_1} + \frac{1}{1-r_2} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{2 - (r_1 + r_2)}{1 - (r_1 + r_2) + r_1 r_2} = \frac{8}{3}$$

$$8 - 8(r_1 + r_2) + 8r_1 r_2 = 6 - 3(r_1 + r_2)$$

$$\therefore r_1 + r_2 = \frac{8}{5} r_1 r_2 + \frac{2}{5} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

수열 $\{a_n b_n\}$ 은 첫째항이 $a_1 b_1 = 1$, 공비가 $r_1 r_2$ 인 등비

수열이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{4}{5}$ 에서

$$\frac{1}{1 - r_1 r_2} = \frac{4}{5}, \quad 1 - r_1 r_2 = \frac{5}{4}$$

$$\therefore r_1 r_2 = -\frac{1}{4} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$r_1 + r_2 = 0 \quad \therefore r_1 = -r_2$$

$$r_1 = -r_2 \text{를 ㉡에 대입하면} \quad -r_2^2 = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore r_1^2 = r_2^2 = \frac{1}{4}$$

따라서 두 수열 $\{a_n^2\}$, $\{b_n^2\}$ 은 모두 첫째항이

$a_1^2 = b_1^2 = 1$, 공비가 $r_1^2 = r_2^2 = \frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \quad \text{답 } \frac{8}{3} \end{aligned}$$

127

전략 순환소수를 분수로 나타내어 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구한다.

$$a_1 = 0.\dot{1} = \frac{1}{9} = \frac{1}{10-1}$$

$$a_2 = 0.\dot{1}0 = \frac{10}{99} = \frac{10}{10^2-1}$$

$$a_3 = 0.\dot{1}0\dot{0} = \frac{100}{999} = \frac{10^2}{10^3 - 1}$$

$$a_4 = 0.\dot{1}00\dot{0} = \frac{1000}{9999} = \frac{10^3}{10^4 - 1}$$

⋮

$$\therefore a_n = \frac{10^{n-1}}{10^n - 1}$$

따라서

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} &= \frac{10^{n+1} - 1}{10^n} - \frac{10^n - 1}{10^{n-1}} \\ &= \frac{10^{n+1} - 1 - 10(10^n - 1)}{10^n} \\ &= \frac{9}{10^n} \end{aligned}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

답 1

다른 풀이 $a_n = \frac{10^{n-1}}{10^n - 1}$ 에서 $\frac{1}{a_n} = \frac{10^n - 1}{10^{n-1}}$ 이므로

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10^{n+1} - 1}{10^n} - 9 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(10 - \frac{1}{10^n} - 9 \right) = 1 \end{aligned}$$

128

전략 삼각형 $P_1Q_1A_1$ 의 넓이를 구하고 부채꼴 OA_1B_1 과 부채꼴 OA_2B_2 의 닮음비를 이용하여 삼각형 $P_2Q_2A_2$ 의 넓이를 구한다.

그림 R_1 에서 $\overline{OC_1} : \overline{P_1C_1} = 3 : 4$ 이므로 $\overline{OC_1} = 3k$,

$\overline{P_1C_1} = 4k$ 라 하면 직각삼각형 P_1OC_1 에서

$$\sqrt{(3k)^2 + (4k)^2} = 1, \quad 5k = 1$$

$$\therefore k = \frac{1}{5}$$

따라서 $\overline{OC_1} = \frac{3}{5}$, $\overline{P_1C_1} = \frac{4}{5}$ 이므로

$$\overline{A_1C_1} = \overline{OA_1} - \overline{OC_1} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

직각삼각형 $A_1P_1C_1$ 에서

$$\overline{A_1P_1} = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

이때 삼각형 $P_1Q_1A_1$ 은 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{P_1Q_1} = \overline{A_1Q_1} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\therefore S_1 = \triangle P_1Q_1A_1 = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{5} \times \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{1}{5}$$

한편 오른쪽 그림과 같이 그림

R_2 의 점 O 에서 $\overline{A_1P_1}$ 에 내린

수선의 발을 H 라 하면

$$\triangle A_1P_1C_1 \sim \triangle A_1OH$$

(AA 닮음)

따라서

$$\overline{A_1P_1} : \overline{A_1O} = \overline{P_1C_1} : \overline{OH} \text{ 이므로}$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{5} : 1 = \frac{4}{5} : \overline{OH}, \quad \frac{2\sqrt{5}}{5} \overline{OH} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \overline{OH} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

이때 $\overline{Q_1H} = \overline{A_1H} = \frac{1}{2} \overline{A_1P_1} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 이므로

$$\overline{OQ_1} = \overline{OH} - \overline{Q_1H} = \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

따라서 부채꼴 OA_1B_1 과 부채꼴 OA_2B_2 의 닮음비가

$$1 : \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ 이므로}$$

$$\triangle P_1Q_1A_1 : \triangle P_2Q_2A_2 = 1^2 : \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 1 : \frac{1}{5}$$

즉 $\triangle P_2Q_2A_2 = \frac{1}{5} \triangle P_1Q_1A_1 = \left(\frac{1}{5}\right)$ 이므로

$$S_2 = \triangle P_1Q_1A_1 + \triangle P_2Q_2A_2 = \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

같은 방법으로 하면

$$S_n = \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

답 ②

1

지수함수와 로그함수의 미분

II. 미분법

01

지수함수와 로그함수의 극한

● 본책 66~70쪽

129

답 (1) 1 (2) $\frac{1}{4}$ (3) 0 (4) ∞ (5) 0 (6) ∞

130

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \log_3 x = \log_3 1 = 0$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 3} \log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$$

답 (1) 0 (2) -1 (3) $-\infty$
(4) ∞ (5) ∞ (6) $-\infty$

131

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{2^x - 2^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - 2^{-2x}} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^x} = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} (5^x - 3^{x+1})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[5^x \left\{ 1 - 3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^x \right\} \right]^{\frac{1}{x}} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} 5 \left\{ 1 - 3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^x \right\}^{\frac{1}{x}} \\ = 5 \times 1 = 5$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} (2^{2x+1} - 3^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2 \times 4^x - 3^x) \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} 4^x \left\{ 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^x \right\} = \infty$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^x + 5^{-x}}{5^x - 5^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^{2x} + 1}{5^{2x} - 1} \\ = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

답 (1) 1 (2) 5 (3) ∞ (4) -1

132

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a \times 3^{x+1} + 1}{3^{x-1} - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3a + \left(\frac{1}{3}\right)^x}{\frac{1}{3} - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x} = 9a$$

따라서 $9a = 27$ 이므로 $a = 3$

답 3

133

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \log_{\frac{1}{2}} (2x+1) - \log_{\frac{1}{2}} x \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_{\frac{1}{2}} \frac{2x+1}{x}$$

$$= \log_{\frac{1}{2}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x}$$

$$= \log_{\frac{1}{2}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x} \right)$$

$$= \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \{ \log_3 (9x^2 - 1) - \log_3 (x^2 + 1) \}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \frac{9x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$= \log_3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$= \log_3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \log_3 9 = 2$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \{ \log_2 7^x - \log_2 (7^x + 2) \}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{7^x}{7^x + 2}$$

$$= \log_2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^x}{7^x + 2}$$

$$= \log_2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 2 \times \left(\frac{1}{7}\right)^x}$$

$$= \log_2 1$$

$$= 0$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 2} (\log_3 |x^2 - 4| - \log_3 |x^3 - 8|)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \log_3 \left| \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} \right|$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \log_3 \left| \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} \right|$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \log_3 \left| \frac{x+2}{x^2+2x+4} \right|$$

$$= \log_3 \lim_{x \rightarrow 2} \left| \frac{x+2}{x^2+2x+4} \right|$$

$$= \log_3 \frac{1}{3}$$

$$= -1$$

답 (1) -1 (2) 2 (3) 0 (4) -1

134

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_2(ax+1) - \log_2(3x-1)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{ax+1}{3x-1} = \log_2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+1}{3x-1} \\ &= \log_2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{1}{x}}{3 - \frac{1}{x}} = \log_2 \frac{a}{3} \end{aligned}$$

따라서 $\log_2 \frac{a}{3} = 2$ 이므로

$$\frac{a}{3} = 4 \quad \therefore a = 12$$

답 12

02 무리수 e와 자연로그

● 본책 71~79쪽

135

$$\begin{aligned} (1) & \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^2 = e^2 \\ (2) & \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{6x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\}^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} \\ (3) & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x}\right\}^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}} \\ (4) & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{8x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{\left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{4x}\right\}^2 = e^2 \end{aligned}$$

답 (1) e^2 (2) $e^{\frac{1}{2}}$ (3) $e^{\frac{1}{3}}$ (4) e^2

136

$$\begin{aligned} (2) & x = \ln \frac{1}{\sqrt{e}} = \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \ln e = -\frac{1}{2} \\ (4) & e^x = 5 \text{에서} \quad \ln e^x = \ln 5 \quad \therefore x = \ln 5 \end{aligned}$$

답 (1) 3 (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\ln 5$

137

$$\begin{aligned} (1) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x)}{-2x} \times (-2) \\ &= 1 \times (-2) = -2 \\ (2) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x}-1}{5x} \times 5 = 1 \times 5 = 5 \\ (3) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4 \ln 10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x-1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x-1}{x} \times \frac{1}{2} \\ &= \ln 2 \times \frac{1}{2} = \frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

답 (1) -2 (2) 5 (3) $\frac{1}{4 \ln 10}$ (4) $\frac{\ln 2}{2}$

138

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{\left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right\}^{-\frac{3}{2}} = e^{-\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned} (2) & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x}{3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right\}^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

(3) $-x=t$ 로 놓으면 $x=-t$ 이고 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2t}\right)^{-t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{\left(1 + \frac{1}{2t}\right)^{2t}\right\}^{-\frac{1}{2}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(4) $x-1=t$ 로 놓으면 $x=t+1$ 이고 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2}{3x-3}} &= \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{2}{3t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{\frac{2}{3}} \\ &= e^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

답 (1) $e^{-\frac{3}{2}}$ (2) $e^{\frac{1}{3}}$ (3) $e^{-\frac{1}{2}}$ (4) $e^{\frac{2}{3}}$

139

$-x=t$ 로 놓으면 $x=-t$ 이고 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{2}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{t}\right)^{-\frac{t}{2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{\left(1 - \frac{a}{t}\right)^{-t}\right\}^{\frac{a}{2}} = e^{\frac{a}{2}} \end{aligned}$$

즉 $e^{\frac{a}{2}} = e^8$ 이므로

$$\frac{a}{2} = 8 \quad \therefore a = 16$$

답 16

140

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times \frac{1}{3}$
 $= 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x}-1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x}-1}{4x} \times 2$
 $= 1 \times 2 = 2$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+3x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{3x}{\ln(1+3x)} \times \frac{1}{3} \right\}$
 $= 1 \times 1 \times \frac{1}{3}$
 $= \frac{1}{3}$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1-e^x}{x} \times \frac{x}{\ln(x+1)} \right\}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ -\frac{e^x-1}{x} \times \frac{x}{\ln(x+1)} \right\}$
 $= -1 \times 1$
 $= -1$
- (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-x}-e}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(e^{-x}-1)}{2x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}-1}{-x} \times \left(-\frac{e}{2}\right)$
 $= 1 \times \left(-\frac{e}{2}\right)$
 $= -\frac{e}{2}$
- (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-2x}}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + 1 - e^{-2x}}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{-2x} \times (-2)$
 $= 1 - 1 \times (-2)$
 $= 3$

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) 2 (3) $\frac{1}{3}$

(4) -1 (5) $-\frac{e}{2}$ (6) 3

141

- (1) $x-2=t$ 로 놓으면 $x=t+2$ 이고 $x \rightarrow 2$ 일 때
 $t \rightarrow 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(3-x)}{e^{2-x}-1}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1-t)}{e^{-t}-1}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1-t)}{-t} \times \frac{-t}{e^{-t}-1} \right\}$
 $= 1 \times 1 = 1$
- (2) $x+1=t$ 로 놓으면 $x=t-1$ 이고 $x \rightarrow -1$ 일 때
 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+e^{x+1}}{x+1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t-1+e^t}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^t-1}{t} + 1 \right)$$

$$= 1 + 1 = 2$$

답 (1) 1 (2) 2

142

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1+3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1+3x)}{3x} \times 3$
 $= \frac{1}{\ln 3} \times 3$
 $= \frac{3}{\ln 3}$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\log_2(1-6x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-6x}{\log_2(1-6x)} \times \left(-\frac{1}{3}\right)$
 $= \ln 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{\ln 2}{3}$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{5^x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{5^x-1}{x}} = \frac{1}{\ln 5}$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x-2^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x-1+1-2^x}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x-1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x-1}{x}$
 $= \ln 6 - \ln 2$
 $= \ln 3$

답 (1) $\frac{3}{\ln 3}$ (2) $-\frac{\ln 2}{3}$ (3) $\frac{1}{\ln 5}$ (4) $\ln 3$

다른 풀이 (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 2^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x(3^x - 1)}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3^x - 1}{x} \times 2^x \right)$
 $= \ln 3 \times 1 = \ln 3$

143

(1) $x-3=t$ 로 놓으면 $x=t+3$ 이고 $x \rightarrow 3$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log(x-2)}{x-3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = \frac{1}{\ln 10}$$

(2) $x+1=t$ 로 놓으면 $x=t-1$ 이고 $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2^{x+1} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2^{x+1} - 1}{x+1} \times \frac{1}{x-1} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{2^t - 1}{t} \times \frac{1}{t-2} \right)$$

$$= \ln 2 \times \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{\ln 2}{2}$$

답 (1) $\frac{1}{\ln 10}$ (2) $-\frac{\ln 2}{2}$

144

(1) $x \rightarrow 0$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(a+6x) = 0$ 이므로

$$\ln a = 0 \quad \therefore a = 1$$

$a=1$ 을 주어진 식에 대입하면

$$b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x)}{6x} \times 6$$

$$= 1 \times 6 = 6$$

(2) $x \rightarrow 2$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} (e^{x-2} - a) = 0$ 이므로

$$1 - a = 0 \quad \therefore a = 1$$

$a=1$ 을 주어진 식에 대입하면

$$b = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{x^2 - 4}$$

이때 $x-2=t$ 로 놓으면 $x=t+2$ 이고 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$b = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{(t+2)^2 - 4}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t(t+4)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^t - 1}{t} \times \frac{1}{t+4} \right)$$

$$= 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

답 (1) $a=1, b=6$

(2) $a=1, b=\frac{1}{4}$

145

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ax \{ \ln(x+b) - \ln x \}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} ax \ln \frac{x+b}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{b}{x} \right)^{ax}$$

$$= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{b}{x} \right)^{\frac{x}{b}} \right\}^{ab}$$

$$= \ln e^{ab} = ab$$

$$\therefore ab = 5$$

답 5

다른 풀이 $\lim_{x \rightarrow \infty} ax \{ \ln(x+b) - \ln x \} = 5$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ax \ln \frac{x+b}{x} = 5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} ax \ln \left(1 + \frac{b}{x} \right) = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\frac{b}{x} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{b}{t}$ 이고 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로 $\textcircled{1}$ 의 좌변에서

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{ab}{t} \ln(1+t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \times ab$$

$$= 1 \times ab = ab$$

$$\therefore ab = 5$$

146

(1) 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} + a}{5x} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉠에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} + a) = 0$ 이므로

$$1 + a = 0 \quad \therefore a = -1$$

$a = -1$ 을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{5x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times \frac{3}{5} \\ &= 1 \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

(2) 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+a)}{3^x - 1} = b \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉡에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+a) = 0$ 이므로

$$\ln a = 0 \quad \therefore a = 1$$

$a = 1$ 을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{3^x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{x}{3^x - 1} \right\} \\ &= 1 \times \frac{1}{\ln 3} \\ &= \frac{1}{\ln 3} \end{aligned}$$

$$\text{답 (1) } a = -1, b = \frac{3}{5} \quad (2) a = 1, b = \frac{1}{\ln 3}$$

147

$x \neq 0$ 일 때, $f(x) = \frac{x}{\ln(1+7x)}$

$x > -\frac{1}{7}$ 에서 함수 $f(x)$ 가 연속이므로 $f(x)$ 는

$x=0$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \therefore f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+7x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\ln(1+7x)} \times \frac{1}{7} \\ &= 1 \times \frac{1}{7} = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{7}$

148

$\overline{AQ} = \overline{PQ}$ 에서 $\overline{AQ}^2 = \overline{PQ}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} \{f(t)\}^2 + 1 &= \{f(t) - t\}^2 + (e^{2t})^2 \\ \{f(t)\}^2 + 1 &= \{f(t)\}^2 - 2tf(t) + t^2 + e^{4t} \end{aligned}$$

$$\therefore f(t) = \frac{e^{4t} - 1 + t^2}{2t} \quad (\text{단, } t \neq 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 0} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{4t} - 1 + t^2}{2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{4t} - 1}{2t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{4t} - 1}{4t} \times 2 + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2} \\ &= 1 \times 2 + 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

답 2

149

$\overline{AB} = e - 1$ 이므로

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \times (e-1) \times 2 \ln t \\ &= (e-1) \ln t \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{S(t)}{t-1} = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{(e-1) \ln t}{t-1}$$

$t-1=s$ 로 놓으면 $t=s+1$ 이고 $t \rightarrow 1+$ 일 때

$s \rightarrow 0+$ 이므로 구하는 극한값은

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{(e-1) \ln t}{t-1} &= (e-1) \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+s)}{s} \\ &= (e-1) \times 1 \\ &= e-1 \end{aligned}$$

답 $e-1$

연습 문제

● 본책 80~82쪽

150

전략 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 임을 이용한다.

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{-\frac{1}{x}} = e$$

ㄴ. $-x=t$ 로 놓으면 $x=-t$ 이고 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{-t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t \right\}^{-1} \\ &= e^{-1} = \frac{1}{e}\end{aligned}$$

ㄷ. $x-2=t$ 로 놓으면 $x=t+2$ 이고 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x-2}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t+2}{2} \right)^{\frac{1}{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \left(1 + \frac{t}{2} \right)^{\frac{2}{t}} \right\}^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

ㄹ. $x+1=t$ 로 놓으면 $x=t-1$ 이고 $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+2)^{\frac{1}{x+1}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

이상에서 극한값이 e 인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

151

전략 지수함수와 로그함수의 극한을 이용하여 A , B , C 의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}A &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{3^{x+1}}{3^x - 3} + \log_{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{3}{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{x-1}} + \log_{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right\} \\ &= 3 + \log_{\frac{1}{2}} 1 = 3 \\ B &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \{ \ln(3+x) - \ln 3 \} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{3+x}{3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{3} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{3} \right)}{\frac{x}{3}} \times \frac{1}{3} \\ &= 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+4x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times \frac{4x}{\ln(1+4x)} \times \frac{1}{2} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \therefore B &< C < A\end{aligned}$$

답 $B < C < A$

152

전략 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ 임을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)(1+3x)}{e^{2x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) + \ln(1+3x)}{e^{2x} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+2x) + \ln(1+3x)}{2x} \times \frac{2x}{e^{2x} - 1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left\{ \frac{\ln(1+2x)}{2x} + \frac{\ln(1+3x)}{3x} \times \frac{3}{2} \right\} \times \frac{2x}{e^{2x} - 1} \right] \\ &= \left(1 + 1 \times \frac{3}{2} \right) \times 1 \\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{5}{2}$

153

전략 $y=3^x-1$ 로 놓고 x 를 y 에 대한 식으로 나타내어 $g(x)$ 를 구한다.

$$y=3^x-1 \text{로 놓으면} \quad 3^x=y+1$$

$$\therefore x = \log_3(y+1)$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \log_3(x+1)$$

즉 $g(x) = \log_3(x+1)$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 3 \times g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 3 \times \log_3(x+1)}{x} \\ &= \ln 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(x+1)}{x} \\ &= \ln 3 \times \frac{1}{\ln 3} = 1\end{aligned}$$

답 1

154

전략 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ 임을 이용할 수 있도록 주어진 식의 좌변을 변형한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x + x \ln a - 1}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3^x - 1}{2x} + \frac{\ln a}{2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3^x - 1}{x} \times \frac{1}{2} + \frac{\ln a}{2} \right) \\ &= \ln 3 \times \frac{1}{2} + \frac{\ln a}{2} = \frac{\ln 3a}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\ln 3a}{2} = 1 \text{ 이므로 } \ln 3a = 2$$

$$3a = e^2 \quad \therefore a = \frac{e^2}{3} \quad \text{답 } \frac{e^2}{3}$$

155

전략 $0 < p < 1$ 일 때 $\lim_{x \rightarrow \infty} p^x = 0$ 이고 $q > 0$, $q \neq 1$ 일 때 $\lim_{x \rightarrow 0} q^x = 1$ 임을 이용한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a \times 3^{x+1} + b \times 2^x}{3^x - 2^{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3a + b \times \left(\frac{2}{3}\right)^x}{1 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^x} = 3a\end{aligned}$$

$$\text{즉 } 3a = 12 \text{ 이므로 } a = 4$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \times 3^{x+1} + b \times 2^x}{3^x - 2^{x-1}} \\ &= \frac{12 + b}{1 - \frac{1}{2}} = 24 + 2b\end{aligned}$$

$$\text{따라서 } 24 + 2b = 8 \text{ 이므로 } b = -8$$

$$\therefore a + b = -4 \quad \text{답 } -4$$

156

전략 주어진 식을 간단히 한 후 e 의 정의를 이용한다.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \times \cdots \times \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \right\}^n \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \times \frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \cdots \times \frac{2n+1}{2n} \right)^n \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n} \right\}^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} \quad \text{답 } e^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

157

전략 진수를 $1 + f(x)$ 의 꼴로 변형한 후 $f(x) = t$ 로 치환한다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{2}{x-1} \right) \quad \dots \textcircled{1}$$

$\frac{2}{x-1} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{t+2}{t}$ 이고 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t+2}{t} \ln(1+t) \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ (t+2) \times \frac{\ln(1+t)}{t} \right\} \\ = 2 \times 1 = 2\end{aligned}$$

답 2

다른 풀이 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+1}{x-1}$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x}{\left(1 - \frac{1}{x} \right)^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x}{\left\{ \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-x} \right\}^{-1}} \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x}{\left\{ \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-x} \right\}^{-1}} \\ &= \ln \frac{e}{e^{-1}} = \ln e^2 = 2\end{aligned}$$

158

전략 주어진 극한값을 이용하여 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\ln(1-3x)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{x} \times \frac{-3x}{\ln(1-3x)} \times \left(-\frac{1}{3} \right) \right\} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \times 1 \times \left(-\frac{1}{3} \right) \\ = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \\ \text{즉 } -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 12 \text{ 이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -36\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{2x}-1}{2x} \times \frac{x}{f(x)} \times 2 \right\} \\ &= 1 \times \left(-\frac{1}{36} \right) \times 2 = -\frac{1}{18}\end{aligned}$$

답 $-\frac{1}{18}$

159

전략 조건 (가)에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 임을 이용하여 a, b 의 값을 먼저 구한다.

조건 (가)에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} (ax+b) = 0$ 이므로

$$a+b=0 \quad \therefore b=-a$$

조건 (가)의 식의 좌변에 $b=-a$ 를 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax-a}{e^{x-1}-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)}{e^{x-1}-1} \\ &= a \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{e^{x-1}-1}\end{aligned}$$

$x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}a \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{e^{x-1}-1} &= a \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t-1} \\ &= a \times 1 = a\end{aligned}$$

$$\therefore a=3, b=-3$$

조건 (나)의 식의 좌변에 $a=3, b=-3$ 을 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{18^x-6^x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{18^x-1+1-6^x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{18^x-1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x-1}{x} \\ &= \ln 18 - \ln 6 \\ &= \ln 3\end{aligned}$$

따라서 $\ln 3 = \ln c$ 이므로 $c=3$

$$\therefore abc = -27$$

답 -27

160

전략 $x \neq e$ 일 때, $f(x)$ 의 식을 구한다.

$$x \neq e \text{ 일 때, } f(x) = \frac{x^2-e^2}{\ln x-1}$$

양의 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 가 연속이므로 $f(x)$ 는 $x=e$ 에서 연속이다.

즉 $\lim_{x \rightarrow e} f(x) = f(e)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{x^2-e^2}{\ln x-1} = f(e)$$

$x-e=t$ 로 놓으면 $x=e+t$ 이고 $x \rightarrow e$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}f(e) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(e+t)^2-e^2}{\ln(e+t)-1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(t+2e)}{\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\frac{t}{e}}{\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)} \times e \times (t+2e) \right\} \\ &= 1 \times e \times 2e = 2e^2\end{aligned}$$

답 $2e^2$

161

전략 점 P의 x좌표를 p 로 놓고 S_1, S_2 를 p 에 대한 식으로 나타낸다.

$P(p, \ln p)$ ($p > 1$)라 하면

$$S_1 = \frac{1}{2} \times (p-1) \times 4 = 2(p-1)$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times (e-1) \times \ln p = \frac{1}{2}(e-1) \ln p$$

$$\therefore \frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{1}{2}(e-1) \ln p}{2(p-1)} = \frac{(e-1) \ln p}{4(p-1)}$$

제1사분면 위의 점 P가 점 B에 한없이 가까워지면 $p \rightarrow 1+$ 이므로 구하는 극한값은

$$\begin{aligned}\lim_{p \rightarrow 1+} \frac{S_2}{S_1} &= \lim_{p \rightarrow 1+} \frac{(e-1) \ln p}{4(p-1)} \\ &= \frac{e-1}{4} \lim_{p \rightarrow 1+} \frac{\ln p}{p-1}\end{aligned}$$

이때 $p-1=t$ 로 놓으면 $p=t+1$ 이고 $p \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{e-1}{4} \lim_{p \rightarrow 1+} \frac{\ln p}{p-1} &= \frac{e-1}{4} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+t)}{t} \\ &= \frac{e-1}{4} \times 1 \\ &= \frac{e-1}{4}\end{aligned}$$

답 $\frac{e-1}{4}$

162

전략 $-x=t$ 로 치환하여 주어진 식의 좌변을 변형한다.
 $-x=t$ 로 놓으면 $x=-t$ 이고 $x \rightarrow -\infty$ 일 때
 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^{-x} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{-t-a}{-t+a} \right)^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t+a}{t-a} \right)^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\frac{a}{t}}{1-\frac{a}{t}} \right)^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{a}{t}\right)^t}{\left(1-\frac{a}{t}\right)^t} \\ &= \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \left(1+\frac{a}{t}\right)^t \right\}^a}{\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \left(1-\frac{a}{t}\right)^{-\frac{t}{a}} \right\}^{-a}} = \frac{e^a}{e^{-a}} = e^{2a} \end{aligned}$$

즉 $e^{2a}=e^0$ 이므로 $a=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

163

전략 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 임을 이용하여 a, b 의 값을 구한다.

함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= f(-1) \\ \therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x+a} + x^3}{x+1} &= b \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$x \rightarrow -1$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로
 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉 $\lim_{x \rightarrow -1} (e^{x+a} + x^3) = 0$ 이므로

$$e^{-1+a} - 1 = 0 \quad \therefore a = 1$$

$a=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x+1} + x^3}{x+1} = b$

$x+1=t$ 로 놓으면 $x=t-1$ 이고 $x \rightarrow -1$ 일 때
 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} b &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t + (t-1)^3}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1 + t(t^2 - 3t + 3)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} (t^2 - 3t + 3) \\ &= 1 + 3 = 4 \\ \therefore a - b &= -3 \end{aligned}$$

답 -3

164

전략 두 점 A, B의 x 좌표를 t 에 대한 식으로 나타낸 후 $S(t)$ 를 구한다.

점 A의 x 좌표는 $e^{x^2} - 1 = t$ 에서

$$\begin{aligned} e^{x^2} &= t + 1, \quad x^2 = \ln(t + 1) \\ \therefore x &= \sqrt{\ln(t + 1)} \quad (\because x \geq 0) \end{aligned}$$

점 B의 x 좌표는 $e^{x^2} - 1 = 5t$ 에서

$$\begin{aligned} e^{x^2} &= 5t + 1, \quad x^2 = \ln(5t + 1) \\ \therefore x &= \sqrt{\ln(5t + 1)} \quad (\because x \geq 0) \end{aligned}$$

직선 $y=t$ 와 $\overline{BC}$ 의 교점을 D라 하면

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AD} \\ &= \frac{1}{2} \times 5t \times \{ \sqrt{\ln(5t + 1)} - \sqrt{\ln(t + 1)} \} \\ &= \frac{5}{2} t \{ \sqrt{\ln(5t + 1)} - \sqrt{\ln(t + 1)} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{S(t)}{t\sqrt{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{5t \{ \sqrt{\ln(5t + 1)} - \sqrt{\ln(t + 1)} \}}{2t\sqrt{t}} \\ &= \frac{5}{2} \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \sqrt{\frac{\ln(5t + 1)}{t}} - \sqrt{\frac{\ln(t + 1)}{t}} \right\} \\ &= \frac{5}{2} \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \sqrt{\frac{\ln(5t + 1)}{5t}} \times 5 \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{\ln(t + 1)}{t}} \right\} \\ &= \frac{5}{2} (\sqrt{5} - 1) \end{aligned}$$

답 ②

03 지수함수와 로그함수의 도함수

● 본책 83~87쪽

165

(1) $y = 2^{3x+1} = 2^{3x} \times 2 = 2 \times 8^x$ 이므로

$$y' = 2 \times 8^x \ln 8 = 2^{3x+1} \ln 8$$

(2) $y' = e^x(6x^2 - 1) + e^x \times 12x$

$$= e^x(6x^2 + 12x - 1)$$

(3) $e^{x+1} = e \times e^x$ 이므로

$$\begin{aligned} y' &= 3^x \ln 3 \times e^{x+1} + 3^x \times e \times e^x \\ &= 3^x e^{x+1} (\ln 3 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) y' &= 3x^2 \left(\frac{1}{3}\right)^x + (x^3 + 3) \left(\frac{1}{3}\right)^x \ln \frac{1}{3} \\
 &= 3x^2 \left(\frac{1}{3}\right)^x - (x^3 + 3) \left(\frac{1}{3}\right)^x \ln 3 \\
 &= (3x^2 - x^3 \ln 3 - 3 \ln 3) \left(\frac{1}{3}\right)^x
 \end{aligned}$$

답 (1) $y' = 2^{3x+1} \ln 8$

(2) $y' = e^x (6x^2 + 12x - 1)$

(3) $y' = 3^x e^{x+1} (\ln 3 + 1)$

(4) $y' = (3x^2 - x^3 \ln 3 - 3 \ln 3) \left(\frac{1}{3}\right)^x$

166

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 6xe^x + (3x^2 + 2)e^x \\
 &= e^x (3x^2 + 6x + 2) \\
 \therefore f'(0) &= 2
 \end{aligned}$$

답 2

167

(1) $y' = e^x \ln x + e^x \times \frac{1}{x} = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$

(2) $y = x \log_5 2x = x(\log_5 2 + \log_5 x)$ 이므로

$$\begin{aligned}
 y' &= \log_5 2 + \log_5 x + x \times \frac{1}{x \ln 5} \\
 &= \log_5 2x + \frac{1}{\ln 5}
 \end{aligned}$$

(3) $y = \ln(5x)^3 = 3(\ln 5 + \ln x) = 3 \ln 5 + 3 \ln x$
이므로

$$y' = 3 \times \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$$

(4) $y = (\log_2 x)^2 = \log_2 x \times \log_2 x$ 이므로

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{1}{x \ln 2} \times \log_2 x + \log_2 x \times \frac{1}{x \ln 2} \\
 &= \frac{2 \log_2 x}{x \ln 2}
 \end{aligned}$$

답 (1) $y' = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$

(2) $y' = \log_5 2x + \frac{1}{\ln 5}$

(3) $y' = \frac{3}{x}$

(4) $y' = \frac{2 \log_2 x}{x \ln 2}$

168

$x > 0$ 이므로 $f(x) = x^3 \ln x^2 = 2x^3 \ln x$

$$\therefore f'(x) = 6x^2 \ln x + 2x^3 \times \frac{1}{x}$$

$$= 6x^2 \ln x + 2x^2$$

$$\therefore f'(e) = 8e^2$$

답 $8e^2$

169

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(-2h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0) + f(0) - f(-2h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0) - f(-2h)}{-2h} \times 2$$

$$= f'(0) + 2f'(0)$$

$$= 3f'(0)$$

이때 $f'(x) = 3^x \ln 3$ 이므로 구하는 극한값은

$$3f'(0) = 3 \ln 3$$

답 $3 \ln 3$

170

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^3) - f(1)}{x^3 - 1} \times (x^2 + x + 1) \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3) - f(1)}{x^3 - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1)$$

$$= 3f'(1)$$

이때 $f(x) = e^x \ln x + x^2$ 에서

$$f'(x) = e^x \ln x + e^x \times \frac{1}{x} + 2x$$

이므로 구하는 극한값은

$$3f'(1) = 3(e + 2)$$

답 $3(e + 2)$

171

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하면 $x=1$ 에서 연속

이므로 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (ax^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow 1-} \ln bx = \ln b$$

$$\therefore a + 1 = \ln b$$

..... ㉠

즉 $f(1)=a+1=\ln b$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{ax^2+1-(a+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{a(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} a(x+1) \\ &= 2a\end{aligned}$$

또

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\ln bx - \ln b}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\ln x}{x-1}\end{aligned}$$

에서 $x-1=t$ 로 놓으면 $x=t+1$ 이고 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$2a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

$a=\frac{1}{2}$ 을 ㉠에 대입하면

$$\frac{3}{2} = \ln b \quad \therefore b=e^{\frac{3}{2}} \quad \text{답 } a=\frac{1}{2}, b=e^{\frac{3}{2}}$$

172

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하면 $x=2$ 에서 연속
이므로 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2)$ 에서

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2+} (x^2+a) &= \lim_{x \rightarrow 2-} be^{x-1} = 4+a \\ \therefore 4+a &= be \quad \dots\dots \text{㉠}\end{aligned}$$

즉 $f(2)=a+4=be$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2+a-(a+4)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} (x+2) \\ &= 4\end{aligned}$$

또

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{be^{x-1}-be}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{be(e^{x-2}-1)}{x-2}\end{aligned}$$

에서 $x-2=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{be(e^{x-2}-1)}{x-2} = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{be(e^t-1)}{t} = be$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로

$$4=be \quad \therefore b=\frac{4}{e}$$

$b=\frac{4}{e}$ 를 ㉠에 대입하면

$$4+a=4 \quad \therefore a=0$$

$$\therefore a+b=\frac{4}{e}$$

답 $\frac{4}{e}$

연습 문제

● 본책 88~89쪽

173

전략 곱의 미분법을 이용하여 $f'(x)$ 를 구한다.

$$\begin{aligned}f'(x) &= (3x^2-14x+13)e^x \\ &\quad + (x^3-7x^2+13x-9)e^x \\ &= (x^3-4x^2-x+4)e^x\end{aligned}$$

$f'(a)=0$ 에서

$$(a^3-4a^2-a+4)e^a=0$$

이때 $e^a>0$ 이므로

$$a^3-4a^2-a+4=0$$

$$(a+1)(a-1)(a-4)=0$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=1 \text{ 또는 } a=4$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$-1 \times 1 \times 4 = -4$$

답 -4

174

전략 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$ 임을 이용한다.

$f(x)=a^{x+1}=a \times a^x$ 에서

$$f'(x)=a \times a^x \ln a = a^{x+1} \ln a$$

이때 $f'(-1)=3$ 이므로

$$\ln a=3 \quad \therefore a=e^3$$

답 e^3

175

전략 $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(a)$ 임을 이용한다.

x 의 값이 0에서 1까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=e-1$$

이때 $f'(x)=e^x$ 이므로 $f'(a)=e^a$

즉 $e^a=e-1$ 이므로

$$a=\ln(e-1) \quad \text{답 } \ln(e-1)$$

176

전략 곱의 미분법을 이용하여 $f'(x)$ 를 구한다.

$x>0$ 이므로 $f(x)=x \ln x^2=2x \ln x$

$$\therefore f'(x)=2 \ln x + 2x \times \frac{1}{x}=2 \ln x + 2$$

$$\therefore f'(e^3)=8 \quad \text{답 } 8$$

177

전략 $f(1)=\log_2 a$ 임을 이용한다.

$f(1)=\log_2 a$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-\log_2 a}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$$

$$\therefore f'(1)=2$$

이때 $f(x)=x \log_2 ax^3=x \log_2 a + 3x \log_2 x$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= \log_2 a + 3 \log_2 x + 3x \times \frac{1}{x \ln 2} \\ &= \log_2 ax^3 + \frac{3}{\ln 2} \end{aligned}$$

따라서 $\log_2 a + \frac{3}{\ln 2}=2$ 이므로

$$\log_2 a + 3 \log_2 e = 2, \quad \log_2 ae^3 = 2$$

$$ae^3=4 \quad \therefore a=\frac{4}{e^3} \quad \text{답 } \frac{4}{e^3}$$

개념 노트

로그의 밑의 변환

$a>0, a \neq 1, b>0, b \neq 1, c>0$ 일 때

$$\textcircled{1} \log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$$

$$\textcircled{2} \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

178

전략 주어진 극한을 $f'(1)$ 에 대한 식으로 나타낸다.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h)-f(1-3h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h)-f(1)+f(1)-f(1-3h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h)-f(1)}{3h} \times 3 \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h} \times 3 \end{aligned}$$

$$= 3f'(1) + 3f'(1) = 6f'(1)$$

이때 $f(x)=e^{x+2} \ln x = e^2 \times e^x \ln x$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^2 \left(e^x \times \ln x + e^x \times \frac{1}{x} \right) \\ &= e^{x+2} \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

따라서 구하는 극한값은

$$6f'(1)=6e^3 \quad \text{답 } 6e^3$$

179

전략 $f'(x)$ 를 구하여 대입한다.

$f(x)=e^{6x}=(e^6)^x$ 에서

$$f'(x)=e^{6x} \ln e^6 = 6e^{6x}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)-6}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6e^{6x}-6}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6(e^{6x}-1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x}-1}{6x} \times 36 \\ &= 1 \times 36 = 36 \quad \text{답 } 36 \end{aligned}$$

180

전략 $g'(e)$ 를 $f'(e)$ 에 대한 식으로 나타낸다.

$x>0$ 에서 $g(x)=f(x) \ln x^4=4f(x) \ln x$ 이므로

$$g'(x)=4f'(x) \ln x + 4f(x) \times \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} \therefore g'(e) &= 4f'(e) + \frac{4f(e)}{e} \\ &= 4f'(e) + 4 (\because f(e)=e) \end{aligned}$$

이때 $f'(e) \times g'(e) = -1$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(e) \times \{4f'(e) + 4\} &= -1 \\ 4\{f'(e)\}^2 + 4f'(e) + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\{2f'(e)+1\}^2=0$$

$$\therefore f'(e)=-\frac{1}{2} \quad \text{답 } -\frac{1}{2}$$

181

전략 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 임을 이용하여 a 의 값을 먼저 구한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x^2-1} = b \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{일 때 극한값이 존재하}$$

고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-2\} = 0 \text{이므로}$$

$$f(1)=2$$

$$\text{이때 } f(1)=a \text{이므로 } a=2$$

$$\text{따라서 } f(x)=x^2 \ln x + 2x \text{이므로}$$

$$f'(x)=2x \times \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} + 2$$

$$=2x \ln x + x + 2$$

$$\therefore b = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} f'(1) = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a+b=\frac{7}{2} \quad \text{답 } \frac{7}{2}$$

182

전략 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이고

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \text{임을 이용한다.}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하면 $x=1$ 에서 연속

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (bx+2) = \lim_{x \rightarrow 1-} (5+a \ln x) = 5$$

$$b+2=5 \quad \therefore b=3$$

$$\text{즉 } f(1)=5 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{3x+2-5}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{3(x-1)}{x-1}$$

$$=3$$

또

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{5+a \ln x-5}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{a \ln x}{x-1} \end{aligned}$$

에서 $x-1=t$ 로 놓으면 $x=t+1$ 이고 $x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{a \ln x}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{a \ln(t+1)}{t} = a$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$a=3$$

$$\therefore a+b=6 \quad \text{답 } 6$$

183

전략 주어진 조건을 이용하여 $f(e)$ 와 $g(e)$, $f'(e)$ 와 $g'(e)$ 사이의 관계식을 구한다.

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x)-g(x)}{x-e} = 0 \text{에서 } x \rightarrow e \text{일 때 극한값이 존}$$

재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow e} \{f(x)-g(x)\} = 0 \text{이므로}$$

$$f(e)-g(e)=0$$

따라서 $f(e)=g(e)$ 이므로

$$a^e = 2 \log_b e = \frac{2}{\ln b} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x)-g(x)}{x-e}$$

$$= \lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x)-f(e)-g(x)+g(e)}{x-e}$$

$$= \lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x)-f(e)}{x-e} - \lim_{x \rightarrow e} \frac{g(x)-g(e)}{x-e}$$

$$= f'(e) - g'(e)$$

$$\text{이므로 } f'(e) - g'(e) = 0$$

$$\therefore f'(e) = g'(e)$$

$$\text{이때 } f'(x) = a^x \ln a, \quad g'(x) = \frac{2}{x \ln b} \text{이므로}$$

$$a^e \ln a = \frac{2}{e \ln b} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$\frac{2}{\ln b} \times \ln a = \frac{2}{e \ln b}, \quad \ln a = \frac{1}{e}$$

$$\therefore a = e^{\frac{1}{e}}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$e = \frac{2}{\ln b}, \quad \ln b = \frac{2}{e}$$

$$\therefore b = e^{\frac{2}{e}}$$

$$\therefore a \times b = e^{\frac{3}{e}}$$

답 ③

184

전략 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이고

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \text{임을 이용한다.}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하면 $x=1$ 에서 연속

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} ae^{-x} = \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2 + bx - 1) = ae^{-1}$$

$$\therefore b = ae^{-1} \quad \dots\dots ㉠$$

즉 $f(1) = ae^{-1} = b$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{ae^{-x} - ae^{-1}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{a(e^{-x+1} - 1)}{e(x-1)} \end{aligned}$$

$-x+1=t$ 로 놓으면 $x=1-t$ 이고 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{a(e^{-x+1} - 1)}{e(x-1)} &= \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{a(e^t - 1)}{-et} \\ &= -\frac{a}{e} \end{aligned}$$

또

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2 + bx - 1 - b}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x-1)(x+1+b)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} (x+1+b) \\ &= b+2 \end{aligned}$$

이고, 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$-\frac{a}{e} = b+2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -e, b = -1$

$$\therefore ab = e$$

답 e

2 삼각함수의 미분

II. 미분법

01 삼각함수의 뜻

● 본책 92~97쪽

185

$$(1) \csc \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$(2) \sec \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$(3) \cot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(4) \csc \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sin \left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$(5) \sec \frac{5}{6}\pi = \frac{1}{\cos \frac{5}{6}\pi} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$(6) \cot \frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\tan \frac{3}{4}\pi} = \frac{1}{-1} = -1$$

답 (1) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (2) $\sqrt{2}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
(4) -1 (5) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (6) -1

186

$$\overline{OP} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

$$(1) \csc \theta = \frac{5}{3}$$

$$(2) \sec \theta = -\frac{5}{4}$$

$$(3) \cot \theta = -\frac{4}{3}$$

답 (1) $\frac{5}{3}$ (2) $-\frac{5}{4}$ (3) $-\frac{4}{3}$

187

(1) $\csc \theta > 0$ 이면 θ 는 제 1 사분면 또는 제 2 사분면의 각이고, $\sec \theta < 0$ 이면 θ 는 제 2 사분면 또는 제 3 사분면의 각이다.

따라서 θ 는 제 2 사분면의 각이다.

II-2

삼각함수의 미분

(2) $\sec \theta > 0$ 이면 θ 는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이고, $\cot \theta < 0$ 이면 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

따라서 θ 는 제4사분면의 각이다.

(3) $\csc \theta \sec \theta < 0$ 이면

$\csc \theta > 0, \sec \theta < 0$ 또는 $\csc \theta < 0, \sec \theta > 0$

따라서 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

답 (1) 제2사분면 (2) 제4사분면

(3) 제2사분면 또는 제4사분면

188

답 $\frac{5}{4}, <, -\frac{\sqrt{5}}{2}, -2, \tan^2 \theta, 5, >, \sqrt{5}$

189

$OP = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ 이므로

$$\csc \theta = -2, \sec \theta = \frac{2}{\sqrt{3}}, \cot \theta = -\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{3\sec^2 \theta + \csc \theta}{\cot^2 \theta} &= \frac{3 \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + (-2)}{(-\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{2}{3}$

190

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

그런데 θ 가 제3사분면의 각이므로

$$\sin \theta = -\frac{1}{2} \quad (\because \sin \theta < 0)$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \csc \theta \cot \theta &= \frac{1}{\sin \theta} \times \frac{1}{\tan \theta} \\ &= -2 \times \sqrt{3} = -2\sqrt{3} \end{aligned}$$

답 $-2\sqrt{3}$

다른 풀이 $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ 에서

$$\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$$

$$= \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 1 = \frac{1}{3}$$

그런데 θ 가 제3사분면의 각이므로

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\because \tan \theta > 0)$$

$$\text{즉 } \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \sqrt{3} \text{이므로}$$

$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$ 에서

$$\csc^2 \theta = 1 + (\sqrt{3})^2 = 4$$

그런데 θ 가 제3사분면의 각이므로

$$\csc \theta = -2 \quad (\because \csc \theta < 0)$$

$$\therefore \csc \theta \cot \theta = -2\sqrt{3}$$

191

(i) $\csc \theta \cot \theta > 0$ 에서

$\csc \theta > 0, \cot \theta > 0$ 일 때, θ 는 제1사분면의 각이다.

$\csc \theta < 0, \cot \theta < 0$ 일 때, θ 는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\sec \theta \tan \theta < 0$ 에서

$\sec \theta > 0, \tan \theta < 0$ 일 때, θ 는 제4사분면의 각이다.

$\sec \theta < 0, \tan \theta > 0$ 일 때, θ 는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제4사분면의 각이다.

답 제4사분면

192

(1) $\tan \theta = -\frac{15}{8}$ 이므로 $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ 에서

$$\sec^2 \theta = 1 + \left(-\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{289}{64}$$

그런데 θ 가 제4사분면의 각이므로

$$\sec \theta = \frac{17}{8} \quad (\because \sec \theta > 0)$$

$$(2) \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = -\frac{8}{15} \text{ 이므로 } 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

에서

$$\csc^2 \theta = 1 + \left(-\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{289}{225}$$

그런데 θ 가 제4사분면의 각이므로

$$\csc \theta = -\frac{17}{15} \quad (\because \csc \theta < 0)$$

$$\text{답 (1) } -\frac{17}{8} \quad (2) -\frac{17}{15}$$

193

(1) (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= (\sin^2 \theta - 2 + \csc^2 \theta) + (\cos^2 \theta - 2 + \sec^2 \theta) \\ &\quad - (\tan^2 \theta - 2 + \cot^2 \theta) \\ &= -2 + (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + (\csc^2 \theta - \cot^2 \theta) \\ &\quad + (\sec^2 \theta - \tan^2 \theta) \\ &= -2 + 1 + 1 + 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) &\frac{1 + \sin \theta}{\csc \theta - \cot \theta} - \frac{1 - \sin \theta}{\csc \theta + \cot \theta} \\ &= \frac{(1 + \sin \theta)(\csc \theta + \cot \theta) - (1 - \sin \theta)(\csc \theta - \cot \theta)}{(\csc \theta - \cot \theta)(\csc \theta + \cot \theta)} \\ &= \frac{2(\cot \theta + \sin \theta \csc \theta)}{\csc^2 \theta - \cot^2 \theta} \\ &= 2(\cot \theta + 1) \end{aligned}$$

$$\text{답 (1) } 1 \quad (2) 2(\cot \theta + 1)$$

194

$$\begin{aligned} &\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \\ &= \frac{(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta}{\sin \theta(1 + \cos \theta)} \\ &= \frac{1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta(1 + \cos \theta)} \\ &= \frac{2(1 + \cos \theta)}{\sin \theta(1 + \cos \theta)} \\ &= \frac{2}{\sin \theta} = 2 \csc \theta \end{aligned}$$

$$\text{즉 } 2 \csc \theta = -3 \text{ 이므로 } \csc \theta = -\frac{3}{2}$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta \text{ 이므로}$$

$$\cot^2 \theta = \csc^2 \theta - 1 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 1 = \frac{5}{4}$$

$$\text{이때 } \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \text{ 에서 } \cot \theta < 0 \text{ 이므로}$$

$$\cot \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \csc \theta + \cot \theta = -\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{답 } -\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

연습 문제

● 본책 98쪽

195

전략 주어진 등식의 양변을 제곱하여 $\sin \theta \cos \theta$ 의 값을 구한다.

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sec \theta - \csc \theta &= \frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\text{답 } \frac{4}{3}$$

196

전략 주어진 각의 범위에서 $\csc \theta$, $\sec \theta$, $\cot \theta$ 의 값의 부호를 이용한다.

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ 이므로}$$

$$\csc \theta > 0, \sec \theta < 0, \cot \theta < 0$$

$\therefore$ (주어진 식)

$$= |\csc \theta| + |\sec \theta| + |\cot \theta|$$

$$= |\cot \theta + \sec \theta|$$

$$= \csc \theta - \sec \theta - \cot \theta + (\cot \theta + \sec \theta)$$

$$= \csc \theta$$

$$\text{답 } \csc \theta$$

197

전략 $\csc \theta$ 의 값을 이용하여 $\cot \theta$ 의 값을 먼저 구한다.

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{에서} \quad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta \text{이므로}$$

$$\cot^2 \theta = \csc^2 \theta - 1 = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = \frac{4}{5}$$

그런데 θ 가 제2사분면의 각이므로

$$\cot \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (\because \cot \theta < 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan \theta + \cot \theta &= \frac{1}{\cot \theta} + \cot \theta \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{9\sqrt{5}}{10} \end{aligned}$$

답 $-\frac{9\sqrt{5}}{10}$

198

전략 주어진 식의 분모를 통분한다.

$$\begin{aligned} &\frac{\tan \theta}{1 + \sec \theta} + \frac{1 + \sec \theta}{\tan \theta} \\ &= \frac{\tan^2 \theta + (1 + \sec \theta)^2}{(1 + \sec \theta) \tan \theta} \\ &= \frac{\tan^2 \theta + 1 + 2 \sec \theta + \sec^2 \theta}{(1 + \sec \theta) \tan \theta} \\ &= \frac{\sec^2 \theta + 2 \sec \theta + \sec^2 \theta}{(1 + \sec \theta) \tan \theta} \\ &= \frac{2 \sec \theta (\sec \theta + 1)}{(1 + \sec \theta) \tan \theta} \\ &= \frac{2 \sec \theta}{\tan \theta} = 2 \times \frac{1}{\cos \theta} \times \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{2}{\sin \theta} = 2 \csc \theta \end{aligned}$$

답 $2 \csc \theta$

199

전략 주어진 식을 이용하여 $\tan \theta$ 의 값을 구한다.

$$\tan \theta + \cot \theta = 2 \text{에서} \quad \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = 2$$

양변에 $\tan \theta$ 를 곱하여 정리하면

$$\tan^2 \theta - 2 \tan \theta + 1 = 0$$

$$(\tan \theta - 1)^2 = 0$$

$$\therefore \tan \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \text{이므로}$$

$$\sec^2 \theta = 1 + 1 = 2$$

$$\sec^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} = 2 \text{에서} \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{이때 } \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{에서 } \cos \theta < 0 \text{이므로}$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{에서 } \sin \theta < 0 \text{이므로}$$

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = -\sqrt{2} \quad \text{답 } -\sqrt{2}$$

다른 풀이 $\tan \theta + \cot \theta = 2$ 에서

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 2$$

$$\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = 2, \quad \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 2$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{에서 } \sin \theta < 0, \cos \theta < 0 \text{이므로}$$

$$\sin \theta + \cos \theta = -\sqrt{2}$$

200

전략 삼각함수의 정의를 이용하여 $\csc^2 \theta - \sec^2 \theta$ 를 $\sin \theta, \cos \theta$ 에 대한 식으로 나타낸다.

이차방정식 $4x^2 - 2x + k = 0$ 의 두 근이 $\sin \theta, \cos \theta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$$

양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

이때

$$\begin{aligned}(\sin \theta - \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\&= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta \\&= 1 - 2 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{7}{4}\end{aligned}$$

이고 $\sin \theta < \cos \theta$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta = -\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \csc^2 \theta - \sec^2 \theta &= \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\&= \frac{-(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta)}{(\sin \theta \cos \theta)^2} \\&= \frac{-\frac{1}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)}{\left(-\frac{3}{8}\right)^2} = \frac{16\sqrt{7}}{9} \quad \text{답} \quad \frac{16\sqrt{7}}{9}\end{aligned}$$

참고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{k}{4}$$

$$\text{즉 } \frac{k}{4} = -\frac{3}{8} \text{ 이므로 } k = -\frac{3}{2}$$

02 삼각함수의 덧셈정리

● 본책 99~106쪽

201

답 30° , $\cos 30^\circ$, $\sin 45^\circ$, $\sin 30^\circ$,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

202

(1) $\sin 15^\circ = \sin (45^\circ - 30^\circ)$

$$\begin{aligned}&= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

(2) $\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\begin{aligned}&= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\&= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

(3) $\tan \frac{5}{12} \pi = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$

$$\begin{aligned}&= \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}} \\&= \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

(4) $\cos 105^\circ = \cos (60^\circ + 45^\circ)$

$$\begin{aligned}&= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\&= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\&= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\sec 105^\circ &= \frac{1}{\cos 105^\circ} \\&= \frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = -\sqrt{2}-\sqrt{6} \\&\quad \text{답 (1) } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad (2) \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\&\quad (3) 2+\sqrt{3} \quad (4) -\sqrt{2}-\sqrt{6}\end{aligned}$$

다른 풀이 (2) $\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$

$$\begin{aligned}&= \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} \\&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \\&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

203

(1) $\sin 40^\circ \cos 20^\circ + \cos 40^\circ \sin 20^\circ$

$$\begin{aligned}&= \sin (40^\circ + 20^\circ) \\&= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

(2) $\cos 55^\circ \cos 25^\circ + \sin 55^\circ \sin 25^\circ$

$$\begin{aligned}&= \cos (55^\circ - 25^\circ) \\&= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

(3) $\frac{\tan 20^\circ + \tan 10^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 10^\circ} = \tan (20^\circ + 10^\circ)$

$$= \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(4) \sin 80^\circ = \sin (90^\circ - 10^\circ) = \cos 10^\circ,$$

$$\sin 125^\circ = \sin (90^\circ + 35^\circ) = \cos 35^\circ$$

이므로

$$\begin{aligned} & \sin 80^\circ \sin 125^\circ - \sin 10^\circ \sin 35^\circ \\ &= \cos 10^\circ \cos 35^\circ - \sin 10^\circ \sin 35^\circ \\ &= \cos (10^\circ + 35^\circ) \\ &= \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{답 (1) } \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2) \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3) \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (4) \frac{\sqrt{2}}{2}$$

204

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos \alpha > 0$ 이고, $\pi < \beta < \frac{3}{2}\pi$ 에서

$\sin \beta < 0$ 이므로

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5},$$

$$\begin{aligned} \sin \beta &= -\sqrt{1 - \cos^2 \beta} \\ &= -\sqrt{1 - \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2} \\ &= -\frac{\sqrt{10}}{10} \end{aligned}$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3},$$

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} (1) \sin (\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{4}{5} \times \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) - \frac{3}{5} \times \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) \\ &= -\frac{9\sqrt{10}}{50} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \cos (\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{3}{5} \times \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) - \frac{4}{5} \times \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{10}}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \tan (\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{4}{3} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{3} \times \frac{1}{3}} = 3 \end{aligned}$$

$$\text{답 (1) } -\frac{9\sqrt{10}}{50} \quad (2) -\frac{\sqrt{10}}{10} \quad (3) 3$$

205

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos \alpha > 0$ 이고, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ 에서

$\cos \beta < 0$ 이므로

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5},$$

$$\begin{aligned} \cos \beta &= -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} \\ &= -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &\quad - (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ &= \sin \alpha (\cos \beta - \sin \beta) \\ &\quad - \cos \alpha (\cos \beta - \sin \beta) \\ &= (\sin \alpha - \cos \alpha) (\cos \beta - \sin \beta) \\ &= \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\right) = \frac{7}{25} \quad \text{답 } \frac{7}{25} \end{aligned}$$

206

이차방정식 $2x^2 - 4x + 1 = 0$ 의 두 근이 $\tan \alpha, \tan \beta$

이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan \alpha + \tan \beta = 2, \tan \alpha \tan \beta = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan (\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4 \quad \text{답 } 4 \end{aligned}$$

207

$\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ 에서 $\cos \alpha > 0$ 이므로

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} (1) \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= 2 \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \times \frac{1}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{9} \end{aligned}$$

$$(2) \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = -\frac{7}{9}$$

$$(3) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times (-2\sqrt{2})}{1 - (-2\sqrt{2})^2} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

답 (1) $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$ (2) $-\frac{7}{9}$ (3) $\frac{4\sqrt{2}}{7}$

다른 풀이 (3) $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{-\frac{4\sqrt{2}}{9}}{-\frac{7}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$

208

$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$$

$$1 + \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \quad \therefore \sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

$\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$ 이므로

$$\cos^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha = 1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$$

이때 $\pi < 2\alpha < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\cos 2\alpha < 0$ 이므로

$$\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\therefore \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

답 $\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}, \cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}, \tan 2\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

209

두 직선 $y = -\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$, $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ 이 x 축의 양의
방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = -\frac{1}{5}, \tan \beta = \frac{2}{3}$$

두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$$\tan \theta = |\tan(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right|$$

$$= \left| \frac{-\frac{1}{5} - \frac{2}{3}}{1 + \left(-\frac{1}{5}\right) \times \frac{2}{3}} \right| = 1$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{답} \quad \frac{\pi}{4}$$

210

$x - 3y - 4 = 0$ 에서

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$$

$2x + y - 3 = 0$ 에서

$$y = -2x + 3$$

따라서 두 직선 $x - 3y - 4 = 0$, $2x + y - 3 = 0$ 이 x 축
의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{1}{3}, \tan \beta = -2$$

$$\therefore \tan \theta = |\tan(\alpha - \beta)|$$

$$= \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right|$$

$$= \left| \frac{\frac{1}{3} - (-2)}{1 + \frac{1}{3} \times (-2)} \right| = 7$$

$$\therefore \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta = 50$$

답 50

211

$x - 3y + 2 = 0$ 에서

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

$kx - 2y - 1 = 0$ 에서

$$y = \frac{k}{2}x - \frac{1}{2}$$

따라서 두 직선 $x - 3y + 2 = 0$, $kx - 2y - 1 = 0$ 이 x 축
의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{1}{3}, \tan \beta = \frac{k}{2}$$

이때 두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$|\tan(\alpha - \beta)| = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| = 1$$

$$\left| \frac{\frac{1}{3} - \frac{k}{2}}{1 + \frac{1}{3} \times \frac{k}{2}} \right| = 1$$

$$\frac{2 - 3k}{6 + k} = \pm 1$$

$$2 - 3k = 6 + k \text{ 또는 } 2 - 3k = -6 - k$$

$$\therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 4$$

답 -1, 4

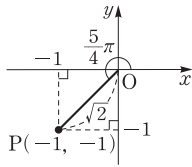
212

(1) 오른쪽 그림과 같이 $\sin x$ 의

계수 -1 을 x 좌표로, $\cos x$

의 계수 -1 을 y 좌표로 하는

점 $P(-1, -1)$ 을 잡으면



$\overline{OP}$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\cos \frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore y = -\sin x - \cos x$$

$$= \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{5}{4}\pi \sin x + \sin \frac{5}{4}\pi \cos x \right)$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{5}{4}\pi \right)$$

이때 $-1 \leq \sin \left(x + \frac{5}{4}\pi \right) \leq 1$ 이므로

$$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{5}{4}\pi \right) \leq \sqrt{2}$$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $\sqrt{2}$, 최솟값은 $-\sqrt{2}$ 이다.

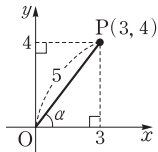
(2) 오른쪽 그림과 같이 $\sin x$ 의 계

수 3을 x 좌표로, $\cos x$ 의 계수 4

를 y 좌표로 하는 점 $P(3, 4)$ 를

잡고 동경 OP 가 x 축의 양의 방

향과 이루는 각의 크기를 α 라 하면



$$\overline{OP} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\therefore y = 3 \sin x + 4 \cos x - 2$$

$$= 5 \left(\frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x \right) - 2$$

$$= 5(\cos \alpha \sin x + \sin \alpha \cos x) - 2$$

$$= 5 \sin(x + \alpha) - 2$$

이때 $-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1$ 이므로

$$-5 \leq 5 \sin(x + \alpha) \leq 5$$

$$\therefore -7 \leq 5 \sin(x + \alpha) - 2 \leq 3$$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 3, 최솟값은 -7 이다.

답 (1) 최댓값: $\sqrt{2}$, 최솟값: $-\sqrt{2}$

(2) 최댓값: 3, 최솟값: -7

213

$$y = -\sin x + \sqrt{a} \cos x$$

$$= \sqrt{1+a} \left(-\frac{1}{\sqrt{1+a}} \sin x + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1+a}} \cos x \right)$$

$$= \sqrt{1+a} (\cos \alpha \sin x + \sin \alpha \cos x)$$

$$= \sqrt{1+a} \sin(x + \alpha)$$

$$\left(\text{단, } \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+a}}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1+a}} \right)$$

이때 $-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1$ 이므로

$$-\sqrt{1+a} \leq \sqrt{1+a} \sin(x + \alpha) \leq \sqrt{1+a}$$

따라서 주어진 함수의 최솟값이 $-\sqrt{1+a}$ 이므로

$$-\sqrt{1+a} = -2$$

$$1+a=4 \quad \therefore a=3$$

답 3

연습 문제

• 본책 107쪽

214

전략 주어진 등식을 이용하여 $\tan \alpha$ 의 값을 구한 후 삼각함수의 덧셈정리를 이용한다.

$$2 \cos \alpha = 3 \sin \alpha \text{에서}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{3} \quad \therefore \tan \alpha = \frac{2}{3}$$

이때 $\tan(\alpha + \beta) = 1$ 에서

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1$$

$$\frac{\frac{2}{3} + \tan \beta}{1 - \frac{2}{3} \tan \beta} = 1$$

$$\frac{2}{3} + \tan \beta = 1 - \frac{2}{3} \tan \beta$$

$$\frac{5}{3} \tan \beta = \frac{1}{3} \quad \therefore \tan \beta = \frac{1}{5}$$

답 ②

215

전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\tan \alpha + \tan \beta$, $\tan \alpha \tan \beta$ 의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2+6x+4=0$ 의 두 근이 $\tan \alpha, \tan \beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan \alpha + \tan \beta = -6, \tan \alpha \tan \beta = 4$$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \frac{-6}{1-4} = 2$$

$$\therefore \sec^2(\alpha + \beta) = 1 + \tan^2(\alpha + \beta) = 1 + 2^2 = 5$$

답 5

216

전략 두 식을 연립하여 $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ 의 값을 구한다.

$$\sin \alpha + \sin \beta = -\frac{\sqrt{5}}{5} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = \frac{1}{5} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta = \frac{1}{5} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$\begin{aligned} & (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) \\ & - 2(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \\ & = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$2 - 2 \cos(\alpha + \beta) = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \frac{4}{5} \quad \text{답 } \frac{4}{5}$$

217

전략 삼각형의 세 내각의 크기의 합이 π 임을 이용한다.

$$A + B + C = \pi \text{이므로}$$

$$\cos C = \cos(\pi - A - B)$$

$$= -\cos(A + B)$$

$$= -(\cos A \cos B - \sin A \sin B)$$

$\dots\dots \textcircled{1}$

$$\text{이때 } \cos A = \frac{12}{13} \text{에서}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13} \left(\because 0 < A < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\cos B = \frac{3}{5} \text{에서}$$

$$\sin B = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \left(\because 0 < B < \frac{\pi}{2} \right)$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서

$$\cos C = -\left(\frac{12}{13} \times \frac{3}{5} - \frac{5}{13} \times \frac{4}{5}\right) = -\frac{16}{65}$$

답 $-\frac{16}{65}$

참고 $0 < A < \pi, 0 < B < \pi$ 이고 $\cos A > 0, \cos B > 0$ 이므로

$$0 < A < \frac{\pi}{2}, 0 < B < \frac{\pi}{2}$$

218

전략 두 직선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β 로 놓고, 두 각의 크기의 차이가 45° 임을 이용한다.

두 직선 $y = -2x, y = ax + b$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β 라 하면

$$\tan \alpha = -2, \tan \beta = a$$

이때 $\alpha - \beta = 45^\circ$ 이므로

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = 1, \quad \frac{-2 - a}{1 - 2a} = 1$$

$$-2 - a = 1 - 2a \quad \therefore a = 3$$

따라서 직선 $y = ax + b$, 즉 $y = 3x + b$ 가 점

$P(-1, 2)$ 를 지나므로

$$2 = -3 + b \quad \therefore b = 5$$

$$\therefore ab = 15$$

답 15

219

전략 $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ 의 값을 이용하여 $\tan \theta$ 의 값을 구한다.

$$\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1.5}{6} = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$\frac{\tan \theta - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \theta \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}$$

$$4(\tan \theta - 1) = 1 + \tan \theta \quad \therefore \tan \theta = \frac{5}{3}$$

따라서 구하는 건물의 높이는

$$\begin{aligned} 6 \tan \theta + 1.5 &= 6 \times \frac{5}{3} + 1.5 \\ &= 11.5 \text{ (m)} \end{aligned}$$

답 11.5 m

03 삼각함수의 극한

● 본책 108~116쪽

220

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin 2x = \sin \left(2 \times \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2\pi} \tan \frac{x}{3} = \tan \frac{2}{3}\pi = -\sqrt{3}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \sin x}{\cos x} = \frac{3 + \sin 0}{\cos 0} = \frac{3}{1} = 3$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\tan x}{\cos x} = \frac{\tan \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3}$$

답 (1) 1 (2) $-\sqrt{3}$ (3) 3 (4) $\frac{2}{3}$

221

답 $7x, \frac{7}{5}, \frac{7}{5}, \frac{5}{7}$

222

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2}{5} = 1 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{5x}{\tan 5x} \times \frac{3}{5} \right) = 1 \times 1 \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

답 (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{3}{5}$

223

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sec x}{\csc x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 2 \cos 2x = 2 \times (-1) = -2$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos x + \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan^2 x}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x (\sin x - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\cos^2 x (\sin x - \cos x)} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{\cos^2 x} = - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{2}$$

답 (1) 1 (2) -2 (3) $\sqrt{2}$ (4) $-2\sqrt{2}$

다른 풀이 (4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan^2 x}{\sin x - \cos x}$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \tan x)(1 - \tan x)}{-\cos x \left(1 - \frac{\sin x}{\cos x} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \tan x)(1 - \tan x)}{-\cos x (1 - \tan x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan x}{-\cos x} = \frac{1 + 1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -2\sqrt{2}$$

224

$x \neq 0$ 일 때, $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ 이고 $x^2 > 0$ 이므로

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ 이므로 함수의 극한

의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$

답 0

225

$$\begin{aligned}
 (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^3 + x^2 + 5x)}{5x^3 + 4x^2 + 2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(3x^3 + x^2 + 5x)}{3x^3 + x^2 + 5x} \times \frac{3x^3 + x^2 + 5x}{5x^3 + 4x^2 + 2x} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^3 + x^2 + 5x)}{3x^3 + x^2 + 5x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + x^2 + 5x}{5x^3 + 4x^2 + 2x} \\
 &= 1 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x + 5}{5x^2 + 4x + 2} \quad \leftarrow x \rightarrow 0 \text{ 일 때 } (3x^3 + x^2 + 5x) \rightarrow 0 \\
 &= 1 \times \frac{5}{2} = \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 2x}{2x} \times \frac{2}{\cos x} \right) \\
 &= 1 \times \frac{2}{1} = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\sin 2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} \times \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{\tan x}{x} \times \frac{1}{2} \right\} \\
 &= 1 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x + \tan 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{x}}{1 + \frac{\tan 3x}{x}} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \times 2 \right)}{1 + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 3x}{3x} \times 3 \right)} \\
 &= \frac{1 \times 2}{1 + 1 \times 3} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{5}{2}$ (2) 2 (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{2}$

226

$$\begin{aligned}
 (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{3x} - 1}{3x} \times \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{3}{2} \right) \\
 &= 1 \times 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\tan 3x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{3x}{\tan 3x} \times \frac{1}{3} \right\} \\
 &= 1 \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{3}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$

227

$$\begin{aligned}
 (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \tan 6x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x \tan 6x(1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \tan 6x(1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \tan 6x(1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{6x}{\tan 6x} \times \frac{1}{6(1 + \cos x)} \right\} \\
 &= 1^2 \times 1 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)}{x^2(1 + \cos 2x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x^2(1 + \cos 2x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2(1 + \cos 2x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \times \frac{4}{1 + \cos 2x} \right\} \\
 &= 1^2 \times 2 = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos 2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)(1 + \cos 2x)}{(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)(1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 x)(1 + \cos 2x)}{(1 - \cos^2 2x)(1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x(1 + \cos 2x)}{\sin^2 2x(1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \left(\frac{2x}{\sin 2x} \right)^2 \times \frac{1 + \cos 2x}{4(1 + \cos x)} \right\} \\
 &= 1^2 \times 1^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

II-2

삼각함수의 미분

$$\begin{aligned}
 (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc x - \cot x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x \sin x (1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin x (1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \sin x (1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{1 + \cos x} \right) \\
 &= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{1}{12}$ (2) 2 (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{1}{2}$

228

(1) $x - \pi = t$ 로 놓으면 $x = \pi + t$ 이고 $x \rightarrow \pi$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + t)}{-t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{-t} = 1
 \end{aligned}$$

(2) $x - \frac{\pi}{2} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{\pi}{2} + t$ 이고 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \tan x &= \lim_{t \rightarrow 0} t \tan \left(\frac{\pi}{2} + t \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{t}{\tan t} \right) \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

(3) $\frac{1}{2x+1} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{1-t}{2t}$ 이고 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} x \tan \frac{1}{2x+1} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{1-t}{2t} \times \tan t \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{1-t}{2} \times \frac{\tan t}{t} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

(4) $x - 1 = t$ 로 놓으면 $x = t + 1$ 이고 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \left(\cos \frac{\pi}{2} x \right)}{x - 1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \left\{ \cos \frac{\pi}{2} (t + 1) \right\}}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} t \right) \right\}}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \left(-\sin \frac{\pi}{2} t \right)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \left(-\sin \frac{\pi}{2} t \right)}{-\sin \frac{\pi}{2} t} \times \frac{-\sin \frac{\pi}{2} t}{\frac{\pi}{2} t} \times \frac{\pi}{2} \right] \\
 &= 1 \times (-1) \times \frac{\pi}{2} \\
 &= -\frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

답 (1) 1 (2) -1 (3) $\frac{1}{2}$ (4) $-\frac{\pi}{2}$

개념 노트

① $\pi \pm x$ 의 삼각함수 (복호동순)

$$\sin(\pi \pm x) = \mp \sin x$$

$$\cos(\pi \pm x) = -\cos x$$

$$\tan(\pi \pm x) = \pm \tan x$$

② $\frac{\pi}{2} \pm x$ 의 삼각함수 (복호동순)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \frac{1}{\tan x}$$

229

(1) $x \rightarrow 0$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(ax + b) = 0$ 이므로

$$\sin b = 0$$

$$\therefore b = 0 \quad (\because b \text{는 정수})$$

$b=0$ 을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin ax}{ax} \times \frac{x}{\tan x} \times a \right) \\ &= 1 \times 1 \times a = a \\ \therefore a &= 3\end{aligned}$$

(2) $x \rightarrow 0$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} (a - b \cos x) = 0$ 이므로

$$a - b = 0 \quad \therefore a = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - a \cos x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(1 - \cos x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(1 - \cos^2 x)}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{a}{1 + \cos x} \right\} \\ &= 1^2 \times \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{2} = 1$ 이므로 $a = 2$

$a = 2$ 를 ①에 대입하면 $b = 2$

(3) $x \rightarrow 0$ 일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x + 4 - b) = 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\ln(4 - b) &= 0, \quad 4 - b = 1 \\ \therefore b &= 3\end{aligned}$$

$b = 3$ 을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\ln(x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin ax}{ax} \times \frac{x}{\ln(x + 1)} \times a \right\} \\ &= 1 \times 1 \times a = a \\ \therefore a &= 7\end{aligned}$$

(4) $x \rightarrow 1$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 1} \sin(2x - a) = 0$ 이므로

$$\sin(2 - a) = 0 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a \text{는 정수})$$

$a = 2$ 를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2x - 2)}{\log_3 x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin\{2(x - 1)\}}{\log_3 x}$$

이때 $x - 1 = t$ 로 놓으면 $x = t + 1$ 이고 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin\{2(x - 1)\}}{\log_3 x} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{\log_3(t + 1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin 2t}{2t} \times \frac{t}{\log_3(t + 1)} \times 2 \right\} \\ &= 1 \times \ln 3 \times 2 = 2 \ln 3\end{aligned}$$

따라서 $2 \ln 3 = \ln b$ 이므로 $b = 9$

$$\begin{aligned}\text{답 (1) } a &= 3, b = 0 & (2) a &= 2, b = 2 \\ (3) a &= 7, b = 3 & (4) a &= 2, b = 9\end{aligned}$$

230

원 $x^2 + y^2 = 4$ 의 반지름의 길이가 2이므로

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times 2^2 \times \theta = 2\theta$$

$\angle BOC = \pi - 2\theta$ 이므로

$$T(\theta) = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin(\pi - 2\theta) = 2 \sin 2\theta$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{T(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{2\theta}{2 \sin 2\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} \times \frac{2\theta}{\sin 2\theta} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2}\end{aligned}$$

다른 풀이 $B(2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$, $C(-2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$

이므로

$$\begin{aligned}T(\theta) &= \frac{1}{2} \times \{2 \cos \theta - (-2 \cos \theta)\} \times 2 \sin \theta \\ &= 4 \cos \theta \sin \theta \\ \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{T(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{2\theta}{4 \cos \theta \sin \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2 \cos \theta} \times \frac{\theta}{\sin \theta} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$



231

전략 주어진 식을 $\sin x$ 에 대한 식으로 변형한 후 극한값을 구한다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec x - \tan x}{\cos x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} \\ &= \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

232

전략 주어진 식의 좌변의 분모, 분자에 $1 + \cos kx$ 를 곱한다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos kx}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos kx)(1 + \cos kx)}{\sin^2 x(1 + \cos kx)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 kx}{\sin^2 x(1 + \cos kx)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 kx}{\sin^2 x(1 + \cos kx)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \times \left(\frac{\sin kx}{kx} \right)^2 \times \frac{k^2}{1 + \cos kx} \right\} \\ &= 1^2 \times 1^2 \times \frac{k^2}{2} = \frac{k^2}{2} \\ \text{즉 } \frac{k^2}{2} &= 4 \text{ 이므로 } k^2 = 8 \\ \therefore k &= 2\sqrt{2} \quad (\because k > 0) \end{aligned}$$

답 $2\sqrt{2}$

233

전략 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ 임을 이용한다.

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \times \frac{x}{\sin x} \right) = 1 \times 1 = 1$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{x} = t \text{로 놓으면 } x = \frac{1}{t} \text{이고 } x \rightarrow \infty \text{일 때 } t \rightarrow 0+ \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \tan \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\tan t}{t} = 1$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \times \cos x \right) \\ &= 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} x - \frac{\pi}{2} = t \text{로 놓으면 } x = \frac{\pi}{2} + t \text{이고 } x \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sec x &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t}{\cos \left(\frac{\pi}{2} + t \right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t}{-\sin t} = 1 \end{aligned}$$

$$\textcircled{5} x \neq 0 \text{인 실수 } x \text{에 대하여 } -1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1 \text{이므로}$$

$$-|x| \leq x \cos \frac{1}{x} \leq |x|$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$$

답 ⑤

234

전략 $\frac{1}{x} = t$ 로 치환하여 주어진 식을 변형한다.

$$\frac{1}{x} = t \text{로 놓으면 } x \rightarrow \infty \text{일 때 } t \rightarrow 0+ \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{3}{x} \cot \frac{5}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \sin 3t \cot 5t \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin 3t}{\tan 5t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin 3t}{3t} \times \frac{5t}{\tan 5t} \times \frac{3}{5} \right) \\ &= 1 \times 1 \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

답 $\frac{3}{5}$

235

전략 $x - \frac{\pi}{2} = t$ 로 치환하여 주어진 식을 변형한다.

$$\begin{aligned} x - \frac{\pi}{2} = t \text{로 놓으면 } x &= \frac{\pi}{2} + t \text{이고 } x \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2x - \pi)^2}{2(1 - \sin x)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(2t)^2}{2\left\{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right)\right\}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4t^2}{2(1 - \cos t)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^2(1 + \cos t)}{(1 - \cos t)(1 + \cos t)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^2(1 + \cos t)}{1 - \cos^2 t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^2(1 + \cos t)}{\sin^2 t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{t}{\sin t} \right)^2 \times 2(1 + \cos t) \right\} \\
 &= 1^2 \times 2 \times 2 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

답 4

236

전략 $x-1=t$ 로 치환하여 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값을 구한다.

$$x \neq 1 \text{ 일 때, } f(x) = \frac{\sin \{2(x-1)\}}{x-1}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned}
 f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \{2(x-1)\}}{x-1}
 \end{aligned}$$

이때 $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 f(1) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} \times 2 \\
 &= 1 \times 2 = 2
 \end{aligned}$$

답 2

237

전략 $x \rightarrow 0$ 일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\rightarrow 0$ 임을 이용한다.

$x \rightarrow 0$ 일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{2x+9} + a) = 0 \text{ 이므로 } \sqrt{9} + a = 0$$

$$\therefore a = -3$$

$a = -3$ 을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{\sqrt{2x+9}-3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x(\sqrt{2x+9}+3)}{(\sqrt{2x+9}-3)(\sqrt{2x+9}+3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x(\sqrt{2x+9}+3)}{2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan 4x}{4x} \times 2(\sqrt{2x+9}+3) \right\} \\
 &= 1 \times 2 = 2 \\
 \therefore a+b &= 9
 \end{aligned}$$

답 9

238

전략 $f(x)$ 를 대입한 후 $\cos x$ 에 대한 식으로 변형한다.

$f(x) = \sec x$ 이므로

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(0)}{f(x) - f(0)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec 2x - 1}{\sec x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos 2x} - 1}{\frac{1}{\cos x} - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos 2x}{\cos 2x}}{\frac{1 - \cos x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 - 2\cos^2 x}{\cos 2x}}{\frac{1 - \cos x}{\cos x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos x(1 - \cos^2 x)}{(1 - \cos x)(2\cos^2 x - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos x(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)(2\cos^2 x - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos x(1 + \cos x)}{2\cos^2 x - 1} = \frac{2 \times 1 \times 2}{2 - 1} = 4
 \end{aligned}$$

답 4

239

전략 치환하거나 적당한 식을 곱하여 극한값을 구할 수 있는 형태로 변형한다.

(i) $x - \frac{\pi}{2} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \csc \left\{ \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right\} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} 2t \csc \frac{t}{2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{\sin \frac{t}{2}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} \times 4 = 1 \times 4 = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + \cos x)}{\sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \times (1 + \cos x) \right\} \\
&= 1^2 \times 2 = 2 \\
& \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3\theta}{\theta^2} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 3\theta)(1 + \cos 3\theta)}{\theta^2(1 + \cos 3\theta)} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3\theta}{\theta^2(1 + \cos 3\theta)} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin 3\theta}{3\theta} \right)^2 \times \frac{9}{1 + \cos 3\theta} \right\} \\
&= 1^2 \times \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \\
& \therefore B = 2 + \frac{9}{2} = \frac{13}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan 3x)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(\tan 3x)}{\tan 3x} \times \frac{\tan 3x}{3x} \times 3 \right\} \\
&= 1 \times 1 \times 3 = 3 \\
& \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log(\sin^2 x)}{\log x^3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2 \log \sin x}{3 \log x} \\
&= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log \sin x - \log x + \log x}{\log x} \\
&= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log \frac{\sin x}{x} + \log x}{\log x} \\
&= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{\log \frac{\sin x}{x}}{\log x} + 1 \right) \leftarrow \lim_{x \rightarrow 0+} \log \frac{\sin x}{x} \\
&= \frac{2}{3} \times (0 + 1) = \frac{2}{3} \quad \begin{aligned} &= \log \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} \\ &= \log 1 = 0 \end{aligned} \\
& \therefore C = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}
\end{aligned}$$

이상에서

$$C < A < B$$

$$\boxed{\text{답}} \quad C < A < B$$

240

전략 $f(x) = ax + b$ 로 놓고 주어진 식에 대입한다.

$f(x) = ax + b$ (a, b 는 유리수, $a \neq 0$)라 하면

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{f(x)+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{ax+b+1}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고

(분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} (ax+b+1) = 0$ 이므로

$$b+1=0 \quad \therefore b=-1$$

$$\therefore \alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{ax}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{1}{a} \right\}$$

$$= 1 \times \frac{1}{a}$$

$$= \frac{1}{a}$$

또 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sin f(x)} = \beta$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sin(ax-1)} = \beta$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 0이 아닌 극한값이 존재하고

(분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} \sin(ax-1) = 0$ 이므로

$$\sin(2a-1) = 0$$

$$2a-1=0 \quad (\because a \text{는 유리수})$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

따라서 $a = \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ 이고

$$\beta = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sin\left(\frac{1}{2}x-1\right)}$$

이때 $x-2=t$ 로 놓으면 $x=t+2$ 이고 $x \rightarrow 2$ 일 때

$t \rightarrow 0$ 이므로

$$\beta = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin \frac{1}{2}t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \times 2$$

$$= 1 \times 2 = 2$$

$$\therefore f(\alpha\beta) = f(4) = 1$$

답 1

241

전략 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 임을 이용한다.

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이려면 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{\sin^2 x} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로
(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 0} (a - \cos x) = 0$ 이므로 $a - 1 = 0$

$$\therefore a = 1$$

$a=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore a + b = \frac{3}{2} \quad \text{답 } \frac{3}{2}$$

242

전략 $\overline{AH}$ 의 길이를 θ 에 대한 식으로 나타낸다.

$\triangle ABC$ 에서

$$\overline{AB} = \overline{BC} \cos \theta = 2 \cos \theta$$

$\triangle ABH$ 에서

$$\overline{AH} = \overline{AB} \sin \theta = 2 \cos \theta \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\overline{AH}}{\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \times 2 \cos \theta \right) \\ &= 1 \times 2 = 2 \end{aligned}$$

답 2

다른 풀이 $\triangle ABC$ 에서

$$\overline{AC} = \overline{BC} \sin \theta = 2 \sin \theta$$

이때 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AH}$ 이

므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times 2 \cos \theta \times 2 \sin \theta &= \frac{1}{2} \times 2 \times \overline{AH} \\ \therefore \overline{AH} &= 2 \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

243

전략 분모, 분자를 x 로 나누고 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 임을 이용한다.

$f(n)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin 2x}{x} + \dots + \frac{\sin nx}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin 2x}{2x} \times 2 + \dots + \frac{\sin nx}{nx} \times n} \\ &= \frac{2}{1 + 2 + \dots + n} \\ &= \frac{2}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{4}{n(n+1)} \\ &= 4 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} f(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(k) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 4 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 4 \quad \text{답 4}$$

244

전략 $x \rightarrow \pi$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 임을 이용하여 b 를 a 에 대한 식으로 나타낸다.

$x \rightarrow \pi$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로
(분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉 $\lim_{x \rightarrow \pi} (\sqrt{a + \cos x} - b) = 0$ 이므로

$$\sqrt{a-1} - b = 0$$

$$\therefore b = \sqrt{a-1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{a + \cos x} - \sqrt{a-1}}{(x-\pi)^2} = \frac{1}{4}$$

이때 $x - \pi = t$ 로 놓으면 $x = \pi + t$ 이고 $x \rightarrow \pi$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{a + \cos x} - \sqrt{a - 1}}{(x - \pi)^2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a + \cos(\pi + t)} - \sqrt{a - 1}}{t^2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a - \cos t} - \sqrt{a - 1}}{t^2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{a - \cos t} - \sqrt{a - 1})(\sqrt{a - \cos t} + \sqrt{a - 1})}{t^2(\sqrt{a - \cos t} + \sqrt{a - 1})} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2(\sqrt{a - \cos t} + \sqrt{a - 1})} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos t)(1 + \cos t)}{t^2(\sqrt{a - \cos t} + \sqrt{a - 1})(1 + \cos t)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{t^2(\sqrt{a - \cos t} + \sqrt{a - 1})(1 + \cos t)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 \times \frac{1}{(\sqrt{a - \cos t} + \sqrt{a - 1})(1 + \cos t)} \right\} \\
 &= 1^2 \times \frac{1}{2\sqrt{a - 1} \times 2} \\
 &= \frac{1}{4\sqrt{a - 1}} \\
 &\text{즉 } \frac{1}{4\sqrt{a - 1}} = \frac{1}{4} \text{ 이므로 } \sqrt{a - 1} = 1 \\
 &\therefore a = 2 \\
 &a = 2 \text{를 ㉠에 대입하면 } b = 1 \\
 &\therefore a + 2b = 4
 \end{aligned}$$

답 4

245

전략 $\overline{OP}$, $\overline{PQ}$ 의 길이를 θ 에 대한 식으로 나타낸다.

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때, $\angle AOP = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이므로 $\triangle AOP$ 에서

$$\begin{aligned}
 \overline{OP} &= 2 \times \overline{AO} \cos(\angle AOP) \\
 &= 2 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2 \sin \theta
 \end{aligned}$$

또 $\angle APO = \angle AOP = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이므로

$$\angle APQ = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \frac{\theta}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\theta$$

따라서 $\triangle APQ$ 에서

$$\begin{aligned}
 \overline{PQ} &= 2 \times \overline{AP} \cos(\angle APQ) \\
 &= 2 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\theta\right) = 2 \sin \frac{2}{3}\theta \\
 \therefore f(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{OP} \times \overline{PQ} \times \sin \frac{\theta}{3} \\
 &= \frac{1}{2} \times 2 \sin \theta \times 2 \sin \frac{2}{3}\theta \times \sin \frac{\theta}{3} \\
 &= 2 \sin \theta \sin \frac{2}{3}\theta \sin \frac{\theta}{3} \\
 \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{f(\theta)}{\theta^3} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{2 \sin \theta \sin \frac{2}{3}\theta \sin \frac{\theta}{3}}{\theta^3} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \times \frac{\sin \frac{2}{3}\theta}{\frac{2}{3}\theta} \times \frac{\sin \frac{\theta}{3}}{\frac{\theta}{3}} \times \frac{4}{9} \right) \\
 &= 1 \times 1 \times 1 \times \frac{4}{9} = \frac{4}{9}
 \end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이 오른쪽 그림과 같

이 원 C 와 y 축의 교점 중 O 가 아닌 점을 R 라 하면

$$\angle ORQ = \angle OPQ = \frac{\theta}{3}$$

이므로 $\triangle ROQ$ 에서

$$\begin{aligned}
 \overline{OQ} &= \overline{OR} \sin(\angle ORQ) \\
 &= 2 \sin \frac{\theta}{3}
 \end{aligned}$$

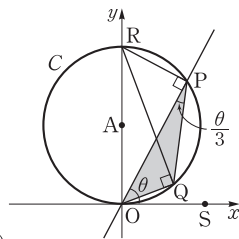
또 $\angle ROP = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이므로 $\triangle ROP$ 에서

$$\begin{aligned}
 \overline{OP} &= \overline{OR} \cos(\angle ROP) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\
 &= 2 \sin \theta
 \end{aligned}$$

한편 $\angle QOS = \angle OPQ = \frac{\theta}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \angle POQ &= \angle POS - \angle QOS \\
 &= \theta - \frac{\theta}{3} = \frac{2}{3}\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore f(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{OQ} \times \overline{OP} \times \sin(\angle POQ) \\
 &= \frac{1}{2} \times 2 \sin \frac{\theta}{3} \times 2 \sin \theta \times \sin \frac{2}{3}\theta \\
 &= 2 \sin \theta \sin \frac{2}{3}\theta \sin \frac{\theta}{3}
 \end{aligned}$$



04 삼각함수의 도함수

● 본책 120~122쪽

246

$$(1) y' = 10x \cos x + (5x^2 - 3)(-\sin x)$$

$$= 10x \cos x - (5x^2 - 3) \sin x$$

$$(2) y' = 3^x \ln 3 - \cos x$$

$$(3) y = \sin^2 x - \cos^2 x$$

$$= \sin x \sin x - \cos x \cos x$$

이므로

$$\begin{aligned} y' &= \cos x \sin x + \sin x \cos x \\ &\quad - \{(-\sin x) \cos x + \cos x (-\sin x)\} \\ &= 2 \sin x \cos x + 2 \sin x \cos x \\ &= 4 \sin x \cos x \end{aligned}$$

$$(4) y = \sin 2x - \ln x$$

$$= 2 \sin x \cos x - \ln x$$

이므로

$$\begin{aligned} y' &= 2 \cos x \cos x + 2 \sin x (-\sin x) - \frac{1}{x} \\ &= 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

답 풀이 참조

247

$$f(x) = x^2 \sin x \text{에서}$$

$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

$$\therefore f'(\pi) = -\pi^2$$

답 $-\pi^2$

248

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{3} - h\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{3} - h\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h} \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{3} - h\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{-h} \\ &= f'\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \cos x + e^x (-\sin x) \\ &= e^x (\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

이므로 구하는 극한값은

$$2f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times e^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (1 - \sqrt{3})e^{\frac{\pi}{3}}$$

답 $(1 - \sqrt{3})e^{\frac{\pi}{3}}$

249

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속

이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (\sin x + a) = \lim_{x \rightarrow 0-} (bx - 1) = a$$

$$\therefore a = -1$$

즉 $f(0) = -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x - 1 + 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{bx - 1 + 1}{x} = b$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$b = 1$$

$$\therefore ab = -1$$

답 -1

연습 문제

● 본책 123쪽

250

전략 $f'(x)$ 를 구하여 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 의 값을 a , b 에 대한 식으로 나타낸다.

$$f'(x) = a \cos x - b \sin x \text{이므로}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{에서} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{\sqrt{2}}{2}b = 0$$

$$\therefore a = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - 1 \text{에서}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b = \sqrt{3} - 1$$

$$\therefore \sqrt{3}a - b = 2(\sqrt{3} - 1) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = 2$, $b = 2$

$$\therefore ab = 4$$

답 4

II-2

삼각함수의 미분

251

전략 도함수의 정의를 이용하여 $f(x)$ 를 구한다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x \sin(x+h) - x \sin x}{h} \\ &= x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= x(\sin x)' = x \cos x \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x + x(-\sin x) \\ &= \cos x - x \sin x \end{aligned}$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{답 } -\frac{\pi}{2}$$

다른 풀이 $f(x)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x \sin(x+h) - x \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - x \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x \sin x (\cos h - 1) + x \cos x \sin h}{h} \\ &= x \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + x \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= x \sin x \times 0 + x \cos x \times 1 = x \cos x \end{aligned}$$

252

전략 $f'(x)$ 를 구하여 대입한다.

$$f(x) = \sin^2 x = \sin x \sin x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \sin x + \sin x \cos x \\ &= 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f'(x)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin x \cos x}{x - \pi}$$

이때 $x - \pi = t$ 로 놓으면 $x = \pi + t$ 이고 $x \rightarrow \pi$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로 구하는 극한값은

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin x \cos x}{x - \pi} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\pi + t) \cos(\pi + t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(-\sin t)(-\cos t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t \cos t}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \times 2 \cos t \right) \\ &= 1 \times 2 = 2 \end{aligned} \quad \text{답 } 2$$

253

전략 극한을 포함한 식을 미분계수를 이용하여 나타낸다.

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow a} \frac{\{f(x)\}^2 - \{f(a)\}^2}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\{f(x) - f(a)\} \{f(x) + f(a)\}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + f(a)\} \\ &= 2f'(a)f(a) \end{aligned}$$

이때 $f'(x) = \cos x - \sin x$ 이므로

$$\begin{aligned} 2f'(a)f(a) &= 2(\cos a - \sin a)(\sin a + \cos a) \\ &= 2(\cos^2 a - \sin^2 a) \\ &= 2\{(1 - \sin^2 a) - \sin^2 a\} \\ &= 2 - 4\sin^2 a \end{aligned}$$

따라서 $2 - 4\sin^2 a = 1$ 이므로

$$\sin^2 a = \frac{1}{4} \quad \text{답 } \frac{1}{4}$$

254

전략 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이고

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \text{임을 이용한다.}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속

이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (3x^2 + ax + b) = \lim_{x \rightarrow 0-} \cos x = 1$$

$$\therefore b = 1$$

즉 $f(0) = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{3x^2 + ax + 1 - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} (3x + a) \\ &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\cos x - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \left\{ \frac{\sin x}{x} \times \left(-\frac{\sin x}{\cos x + 1} \right) \right\} \\ &= 1 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$a=0$$

따라서 $x>0$ 에서 $f(x)=3x^2+1$ 이므로

$$f(2)=13$$

답 13

255

전략 $f'(x)$ 를 구한 다음 삼각함수의 합성을 이용하여 $f'(a)$ 를 간단히 한다.

$$f'(x) = -\sqrt{3} \sin x - \cos x - 1 \text{이므로}$$

$$f'(a) = -\sqrt{3} \sin a - \cos a - 1$$

$$= 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin a - \frac{1}{2} \cos a \right) - 1$$

$$= 2 \left(\cos \frac{7}{6} \pi \sin a + \sin \frac{7}{6} \pi \cos a \right) - 1$$

$$= 2 \sin \left(a + \frac{7}{6} \pi \right) - 1$$

$$\text{즉 } 2 \sin \left(a + \frac{7}{6} \pi \right) - 1 = -\sqrt{2} - 1 \text{이므로}$$

$$\sin \left(a + \frac{7}{6} \pi \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{이때 } 0 \leq a \leq \frac{\pi}{2} \text{에서 } \frac{7}{6} \pi \leq a + \frac{7}{6} \pi \leq \frac{5}{3} \pi \text{이므로}$$

$$a + \frac{7}{6} \pi = \frac{5}{4} \pi$$

$$\therefore a = \frac{\pi}{12}$$

답 $\frac{\pi}{12}$

참고 $f'(a) = -\sqrt{3} \sin a - \cos a - 1$

$$= 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin a - \frac{1}{2} \cos a \right) - 1$$

$$= 2 \left(\cos \frac{4}{3} \pi \cos a + \sin \frac{4}{3} \pi \sin a \right) - 1$$

$$= 2 \cos \left(a - \frac{4}{3} \pi \right) - 1$$

로 변형하여도 동일한 답을 구할 수 있다.

3 여러 가지 미분법

II. 미분법

01 함수의 몫의 미분법

• 본책 126~131쪽

256

$$(1) y' = -\frac{2(2x+3)}{(x^2+3x+1)^2}$$

$$(2) y' = \frac{(3x^2-2)(x+1) - (x^3-2x+3) \times 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3+3x^2-5}{(x+1)^2}$$

$$(3) y' = \frac{3^x \ln 3 \times (x+2) - 3^x \times 1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{3^x(x \ln 3 + 2 \ln 3 - 1)}{(x+2)^2}$$

$$(4) y' = \frac{1 \times \ln x - x \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

답 풀이 참조

257

$$f'(x) = \frac{(3x^2-2x)(x^2-1) - (x^3-x^2+1) \times 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$\therefore f'(\sqrt{2}) = -2$$

답 -2

258

$$(1) y' = -6x^{-3}$$

$$(2) y = 3x^2 - \frac{2}{x^3} = 3x^2 - 2x^{-3} \text{이므로}$$

$$y' = 6x + 6x^{-4}$$

$$= 6x + \frac{6}{x^4}$$

$$(3) y = \frac{x^3-2x^2+3}{x^5} = x^{-2} - 2x^{-3} + 3x^{-5} \text{이므로}$$

II-3

여러 가지 미분법

$$y' = -2x^{-3} + 6x^{-4} - 15x^{-6}$$

$$= -\frac{2}{x^3} + \frac{6}{x^4} - \frac{15}{x^6}$$

$$\text{답 (1) } y' = -6x^{-3} \quad (2) y' = 6x + \frac{6}{x^4}$$

$$(3) y' = -\frac{2}{x^3} + \frac{6}{x^4} - \frac{15}{x^6}$$

259

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \cdots + \frac{9}{x^9}$$

$$= x^{-1} + 2x^{-2} + 3x^{-3} + \cdots + 9x^{-9}$$

$$\therefore f'(x) = -x^{-2} - 2^2x^{-3} - 3^2x^{-4} - \cdots - 9^2x^{-10}$$

$$\therefore f'(1) = -1 - 2^2 - 3^2 - \cdots - 9^2$$

$$= -(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2)$$

$$= -\sum_{n=1}^9 n^2 = -\frac{9 \times 10 \times 19}{6} = -285$$

답 -285

260

$$(1) y' = \sec x \tan x - \sqrt{5}(-\csc x \cot x)$$

$$= \sec x \tan x + \sqrt{5} \csc x \cot x$$

$$(2) y' = 5e^x \tan x + 5e^x \sec^2 x = 5e^x(\tan x + \sec^2 x)$$

$$(3) y' = \sec x \tan x \tan x + \sec x \sec^2 x$$

$$= \sec x(\tan^2 x + \sec^2 x)$$

$$(4) y' = \frac{-\sec^2 x(1 + \tan x) - (1 - \tan x)\sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= -\frac{2\sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

답 풀이 참조

261

$$f'(x) = \frac{\sec x \tan x \tan x - (1 + \sec x) \sec^2 x}{\tan^2 x}$$

$$= \frac{\sec x(\tan^2 x - \sec^2 x - \sec x)}{\tan^2 x}$$

$$= -\frac{\sec x(\sec x + 1)}{\tan^2 x}$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{2 \times 3}{(\sqrt{3})^2} = -2$$

답 -2

02 합성함수의 미분법

● 본책 132~140쪽

262

$$(1) y' = 3(x^2 + 1)^2(x^2 + 1)'(x^3 + x - 1)^2$$

$$+ (x^2 + 1)^3 \times 2(x^3 + x - 1)(x^3 + x - 1)'$$

$$= 3(x^2 + 1)^2 \times 2x(x^3 + x - 1)^2$$

$$+ (x^2 + 1)^3 \times 2(x^3 + x - 1)(3x^2 + 1)$$

$$= 2(x^2 + 1)^2(x^3 + x - 1)(6x^4 + 7x^2 - 3x + 1)$$

$$(2) y' = \frac{4(3x + 2)^2 - (4x - 1) \times 2(3x + 2)(3x + 2)'}{(3x + 2)^4}$$

$$= \frac{4(3x + 2)^2 - 2(4x - 1)(3x + 2) \times 3}{(3x + 2)^4}$$

$$= \frac{4(3x + 2) - 6(4x - 1)}{(3x + 2)^3}$$

$$= -\frac{2(6x - 7)}{(3x + 2)^3}$$

$$(3) y' = 2 \ln x \times (\ln x)'$$

$$= 2 \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$(4) y' = 3(1 - \tan x)^2(1 - \tan x)'$$

$$= 3(1 - \tan x)^2(-\sec^2 x)$$

$$= -3(1 - \tan x)^2 \sec^2 x$$

답 풀이 참조

263

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \text{ 이므로}$$

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$f(x) = (x^2 + 5x)^2 \text{ 에서}$$

$$f'(x) = 2(x^2 + 5x)(x^2 + 5x)'$$

$$= 2(x^2 + 5x)(2x + 5)$$

$$g(x) = \frac{4x - 3}{2x - 1} \text{ 에서}$$

$$g'(x) = \frac{4(2x - 1) - (4x - 3) \times 2}{(2x - 1)^2}$$

$$= \frac{2}{(2x - 1)^2}$$

따라서 $g(1) = 1$, $g'(1) = 2$ 이므로

$$h'(1) = f'(g(1))g'(1)$$

$$= 2f'(1)$$

$$= 2 \times 84 = 168$$

답 168

264

- (1) $y' = e^{x^2+x+1}(x^2+x+1)' = (2x+1)e^{x^2+x+1}$
 (2) $y' = 3^{\cos x} \ln 3 \times (\cos x)'$
 $= 3^{\cos x} \ln 3 \times (-\sin x)$
 $= -\ln 3 \times 3^{\cos x} \sin x$
 (3) $y' = \sec^2(\cot x) \times (\cot x)'$
 $= \sec^2(\cot x) \times (-\csc^2 x)$
 $= -\sec^2(\cot x) \csc^2 x$
 (4) $y' = 2 \cos(x^2-x+2) \times \{\cos(x^2-x+2)\}'$
 $= 2 \cos(x^2-x+2)$
 $\times \{-\sin(x^2-x+2)\}(x^2-x+2)'$
 $= -2(2x-1) \cos(x^2-x+2) \sin(x^2-x+2)$

답 풀이 참조

265

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(5^x-5^{-x})'(5^x+5^{-x})-(5^x-5^{-x})(5^x+5^{-x})'}{(5^x+5^{-x})^2} \\ &= \frac{(5^x+5^{-x})^2 \ln 5 - (5^x-5^{-x})^2 \ln 5}{(5^x+5^{-x})^2} \\ &= \frac{\{(5^x+5^{-x})^2 - (5^x-5^{-x})^2\} \ln 5}{(5^x+5^{-x})^2} \\ &= \frac{4 \ln 5}{(5^x+5^{-x})^2} \\ \therefore f'(0) &= \ln 5 \end{aligned}$$

답 ln 5

266

- (1) $y' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$
 (2) $y' = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^2 x \times \ln 2} = \frac{2 \cos x}{\sin x \times \ln 2} = \frac{2 \cot x}{\ln 2}$
 (3) $y' = \ln |x| + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln |x|$
 (4) $y' = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln |x| \times 2x}{x^4}$
 $= \frac{x - 2x \ln |x|}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln |x|}{x^3}$

답 풀이 참조

다른 풀이 (2) $y = \log_2(\sin^2 x) = 2 \log_2 |\sin x|$ 이므로

$$y' = \frac{2 \cos x}{\ln 2 \times \sin x} = \frac{2 \cot x}{\ln 2}$$

267

- (1) $x > 0, y > 0$ 이므로 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면 $\ln y = \ln x^x = x \ln x$

x 에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$\therefore y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

- (2) $x > 1, y > 0$ 이므로 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면 $\ln y = \ln(\ln x)^x = x \ln(\ln x)$

x 에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y} = \ln(\ln x) + x \times \frac{1}{\ln x}$$

$$= \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}$$

$$\therefore y' = y \left\{ \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right\}$$

$$= (\ln x)^x \left\{ \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right\}$$

- (3) 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln |y|$$

$$= \ln \left| \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x+3)^3} \right|$$

$$= 2 \ln |x-1| + \ln |x+1| - 3 \ln |x+3|$$

x 에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x+3}$$

$$= \frac{10x+6}{(x-1)(x+1)(x+3)}$$

$$\therefore y' = y \times \frac{10x+6}{(x-1)(x+1)(x+3)}$$

$$= \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x+3)^3}$$

$$\times \frac{10x+6}{(x-1)(x+1)(x+3)}$$

$$= \frac{(x-1)(10x+6)}{(x+3)^4}$$

- (4) 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln y = \ln \sqrt{\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^3}}$$

$$= \frac{1}{2} (\ln |x-1| + \ln |x+3| - 3 \ln |x+1|)$$

x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3} - \frac{3}{x+1} \right) \\ &= \frac{-x^2 - 2x + 11}{2(x-1)(x+1)(x+3)} \\ \therefore y' &= y \times \frac{-x^2 - 2x + 11}{2(x-1)(x+1)(x+3)} \\ &= \sqrt{\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^3}} \\ &\quad \times \frac{-x^2 - 2x + 11}{2(x-1)(x+1)(x+3)} \\ &= \frac{-x^2 - 2x + 11}{2(x+1)^2 \sqrt{(x-1)(x+1)(x+3)}}\end{aligned}$$

답 풀이 참조

268

주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\begin{aligned}\ln |f(x)| &= \ln \left| \frac{e^x \cos x}{1 + \sin x} \right| \\ &= x + \ln |\cos x| - \ln (1 + \sin x)\end{aligned}$$

x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)} &= 1 - \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x} \\ \therefore f'(x) &= f(x) \left(1 - \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) \\ &= \frac{e^x \cos x}{1 + \sin x} \left(1 - \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) \\ \therefore f'(\pi) &= -e^\pi \times (1 + 1) = -2e^\pi\end{aligned}$$

답 $-2e^\pi$

269

$$(1) y' = e(3x-2)^{e-1} \times 3 = 3e(3x-2)^{e-1}$$

$$(2) y = \sqrt[3]{4x-x^2} = (4x-x^2)^{\frac{1}{3}} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{3} (4x-x^2)^{-\frac{2}{3}} (4-2x) \\ &= \frac{4-2x}{3\sqrt[3]{(4x-x^2)^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) y' &= 3\pi x^{3\pi-1} \cos x + x^{3\pi} (-\sin x) \\ &= x^{3\pi-1} (3\pi \cos x - x \sin x)\end{aligned}$$

답 풀이 참조

270

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2\sqrt{x^2+1} + (2x-1) \times \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} \\ &= 2\sqrt{x^2+1} + (2x-1) \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{2(x^2+1) + x(2x-1)}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{4x^2-x+2}{\sqrt{x^2+1}} \\ \therefore f'(1) &= \frac{5\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

답 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

연습 문제

• 본책 141~142쪽

271

전략 $(\tan x)' = \sec^2 x$ 임을 이용하여 $f'(x)$ 를 구한다.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\sec^2 x \times x - \tan x \times 1}{x^2} \\ &= \frac{x \sec^2 x - \tan x}{x^2}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\frac{\pi}{4} \times (\sqrt{2})^2 - 1}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} \\ &= \frac{8}{\pi} - \frac{16}{\pi^2}\end{aligned}$$

따라서 $a=8$, $b=-16$ 이므로

$$a+b=-8$$

답 -8

272

전략 함수의 몫의 미분법을 이용하여 $g'(x)$ 를 $f(x)$ 와 $f'(x)$ 에 대한 식으로 나타낸다.

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{f'(x)(e^x+1)^2 - f(x) \times 2(e^x+1)e^x}{(e^x+1)^4} \\ &= \frac{f'(x)(e^x+1) - f(x) \times 2e^x}{(e^x+1)^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore g'(0) &= \frac{2f'(0) - 2f(0)}{8} \\ &= \frac{1}{4} \{f'(0) - f(0)\} \\ &= \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ③

273

전략 주어진 극한을 미분계수에 대한 식으로 나타낸다.

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{6} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{6} - h\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{6} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{\pi}{6}\right) - f\left(\frac{\pi}{6} - h\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{6} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h} \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{6} - h\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{-h} \\ &= f'\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2 \cos x \times (-\sin x) \\ &= -2 \sin x \cos x\end{aligned}$$

이므로 구하는 극한값은

$$2f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$$

답 $-\sqrt{3}$

274

전략 $y = \{g(x)\}^n$ 의 도함수는 $y' = n\{g(x)\}^{n-1}g'(x)$ 임을 이용한다.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3\left(\frac{2x+a}{x+1}\right)^2 \times \frac{2(x+1) - (2x+a) \times 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{3(2x+a)^2(2-a)}{(x+1)^4}\end{aligned}$$

이때 $f'(0) = 3$ 이므로 $3a^2(2-a) = 3$

$$a^3 - 2a^2 + 1 = 0, \quad (a-1)(a^2 - a - 1) = 0$$

$$\therefore a = 1 \quad (\because a \text{는 정수})$$

답 1

275

전략 $\{\ln |g(x)|\}' = \frac{g'(x)}{g(x)}$ 임을 이용하여 $f'(x)$ 를 구한다.

$$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3+2} \text{이므로 } f'(a) = 1 \text{에서}$$

$$\frac{3a^2}{a^3+2} = 1, \quad a^3 - 3a^2 + 2 = 0$$

$$(a-1)(a^2 - 2a - 2) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 1 \pm \sqrt{3}$$

따라서 구하는 합은

$$1 + (1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3}) = 3$$

답 3

276

전략 합성함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구한다.

$$y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \text{에서}$$

$$y' = f'(g(x))g'(x)$$

이므로 $x = \frac{\pi}{6}$ 에서의 미분계수는

$$f'\left(g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$f(x) = \sqrt{1+x^2}$ 에서

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$g(x) = \sin 2x \text{에서 } g'(x) = 2 \cos 2x$$

$$\therefore f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} \times 1 = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

답 $\frac{\sqrt{21}}{7}$

277

전략 함수의 몫의 미분법을 이용하여 $f'(x)$ 를 구한 후 부등식에 대입한다.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2(x^2+4) - (2x-3) \times 2x}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{-2x^2+6x+8}{(x^2+4)^2}\end{aligned}$$

$$\text{이므로 } f'(x) \geq 0 \text{에서 } \frac{-2x^2+6x+8}{(x^2+4)^2} \geq 0$$

$$\text{그런데 } (x^2+4)^2 > 0 \text{이므로 } -2x^2+6x+8 \geq 0$$

$$x^2 - 3x - 4 \leq 0, \quad (x+1)(x-4) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 4$$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, \dots, 4$ 이므로 구하는 합은

$$-1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 9$$

답 9

278

전략 합성함수의 미분법을 이용하여 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분한다.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = xe^x \text{이므로} \\ f'(g(x))g'(x) &= e^x + xe^x \\ &= (1+x)e^x \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

이때 $g(x)=9$ 에서

$$\begin{aligned}x^3+1 &= 9, & x^3-8 &= 0 \\ (x-2)(x^2+2x+4) &= 0 \\ \therefore x &= 2 \quad (\because x^2+2x+4 > 0) \\ \therefore g(2) &= 9\end{aligned}$$

$$g'(x) = 3x^2 \text{이므로} \quad g'(2) = 12$$

따라서 ①에 $x=2$ 를 대입하면

$$\begin{aligned}f'(g(2))g'(2) &= 3e^2 \\ 12f'(9) &= 3e^2 \\ \therefore f'(9) &= \frac{e^2}{4}\end{aligned}$$

답 $\frac{e^2}{4}$

279

전략 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{q(x)}{p(x)} = \alpha$ (α 는 실수)일 때, $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} q(x) = 0$ 임을 이용한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-4}{x-2} &= 12 \text{에서 } x \rightarrow 2 \text{일 때 극한값이 존재} \\ \text{하고 (분모)} \rightarrow 0 \text{이므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{이어야 한다.} \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \{g(x)-4\} &= 0 \text{이므로} \quad g(2) = 4 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-4}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} \\ &= g'(2) = 12\end{aligned}$$

한편 $h(x) = f(g(x))$ 에서 $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$ 이므로

$$h'(2) = f'(g(2))g'(2) = 12f'(4)$$

$$\begin{aligned}\text{이때 } f'(x) &= \frac{2x-1}{x^2-x+2} \text{이므로} \quad f'(4) = \frac{1}{2} \\ \therefore h'(2) &= 12 \times \frac{1}{2} = 6\end{aligned}$$

답 ②

280

전략 양변에 자연로그를 취한 다음 x 에 대하여 미분한다.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} \\ &= f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

한편 $f(x) = x^{\cos x}$ 의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x) = \ln x^{\cos x} = \cos x \times \ln x$$

x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)} &= -\sin x \times \ln x + \cos x \times \frac{1}{x} \\ \therefore f'(x) &= f(x) \times \left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x \right) \\ &= x^{\cos x} \left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x \right)\end{aligned}$$

따라서 구하는 극한값은

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\ln \frac{\pi}{2} = \ln \frac{2}{\pi} \quad \text{답 } \ln \frac{2}{\pi}$$

281

전략 삼각형의 내심의 성질을 이용하여 $r(\theta)$ 를 구한 다음 함수의 몫의 미분법을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이

$\triangle ABC$ 에 내접하는 원의

중심을 O 라 하고, 점 O 에

서 변 BC 에 내린 수선의

발을 H 라 하면 점 O 는

$\triangle ABC$ 의 내심이므로

$$\angle OBH = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{\pi}{6},$$

$$\angle OCH = \frac{1}{2} \angle ACB = \theta$$

따라서 $\triangle OBH$ 에서

$$\overline{BH} = \frac{r(\theta)}{\tan \frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}r(\theta)$$

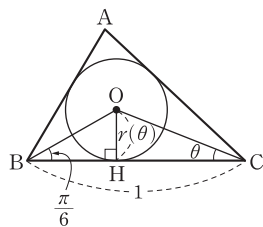
$$\text{또 } \triangle OHC \text{에서} \quad \overline{CH} = \frac{r(\theta)}{\tan \theta}$$

이때 $\overline{BH} + \overline{HC} = \overline{BC}$ 이므로

$$\sqrt{3}r(\theta) + \frac{r(\theta)}{\tan \theta} = 1$$

$$(\sqrt{3} \tan \theta + 1)r(\theta) = \tan \theta$$

$$\therefore r(\theta) = \frac{\tan \theta}{1 + \sqrt{3} \tan \theta}$$



따라서

$$\begin{aligned} r'(\theta) &= \frac{\sec^2 \theta (1 + \sqrt{3} \tan \theta) - \tan \theta \times \sqrt{3} \sec^2 \theta}{(1 + \sqrt{3} \tan \theta)^2} \\ &= \frac{\sec^2 \theta}{(1 + \sqrt{3} \tan \theta)^2} \end{aligned}$$

이므로

$$r'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(1 + \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{3} \quad \text{답 } \frac{1}{3}$$

282

전략 $f(x) = \ln(e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{nx})$ 으로 놓고 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

$f(x) = \ln(e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{nx})$ 이라 하면

$$\begin{aligned} f(0) &= \ln n \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{nx}}{n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{nx}) - \ln n}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= f'(0) = 13 \end{aligned}$$

이때 $f'(x) = \frac{e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x} + \dots + ne^{nx}}{e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{nx}}$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{n+1}{2} = 13$ 이므로

$$n+1=26 \quad \therefore n=25 \quad \text{답 } 25$$

03 매개변수로 나타낸 함수의 미분법 ● 본책 143~144쪽

283

(1) $x = \sqrt{t+3}$ 에서 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t+3}}$

$y = 4t^2$ 에서 $\frac{dy}{dt} = 8t$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{8t}{\frac{1}{2\sqrt{t+3}}} = 16t\sqrt{t+3}$$

(2) $x = 3 \cos t$ 에서 $\frac{dx}{dt} = -3 \sin t$

$y = 2 \sin t$ 에서 $\frac{dy}{dt} = 2 \cos t$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2 \cos t}{-3 \sin t} = -\frac{2}{3} \cot t$$

답 (1) $\frac{dy}{dx} = 16t\sqrt{t+3}$ (2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3} \cot t$

284

$x = t^2 - 3t + 5$ 에서 $\frac{dx}{dt} = 2t - 3$

$y = t^3 + 9t - 1$ 에서 $\frac{dy}{dt} = 3t^2 + 9$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 + 9}{2t - 3} \quad \left(\text{단, } t \neq \frac{3}{2} \right)$$

따라서 $t = -2$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$$\frac{12+9}{-4-3} = -3 \quad \text{답 } -3$$

04 음함수와 역함수의 미분법 ● 본책 145~150쪽

285

답 (1) $x^2 - y + 2 = 0$

(2) $x^2 + 4y^2 - 9 = 0$

(3) $xy - x - y = 0$

286

답 $2x, 8y, x+4y, \frac{x-y}{x+4y}, x+4y$

287

답 $3x+2, \frac{1}{3}y^3-\frac{2}{3}, y^2, y^2, \frac{1}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}}$

288

(1) 주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2(x-2)+2(y+1)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x-2}{y+1} \quad (\text{단, } y \neq -1)$$

(2) 주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{2y}{2\sqrt{y^2+2}} \times \frac{dy}{dx} = 4x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{4x\sqrt{y^2+2}}{y} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

(3) 주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = 8x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 8xy$$

답 풀이 참조

289

$x \cos y + y \cos x = \frac{\pi}{3}$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$\cos y - x \sin y \frac{dy}{dx} + \cos x \frac{dy}{dx} - y \sin x = 0$$

$$(\cos x - x \sin y) \frac{dy}{dx} = y \sin x - \cos y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y \sin x - \cos y}{\cos x - x \sin y}$$

(단, $\cos x - x \sin y \neq 0$)

따라서 점 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

답 -2

290

(1) 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{y+1} + y \times \frac{1}{2\sqrt{y+1}} = \frac{3y+2}{2\sqrt{y+1}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{2\sqrt{y+1}}{3y+2}$$

(2) 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = 2y + e^{-y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2y + e^{-y}}$$

(3) $y = \sqrt[5]{\frac{x}{2}}$ 에서 $y^5 = \frac{x}{2} \quad \therefore x = 2y^5$

양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = 10y^4$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{10y^4} = \frac{1}{10\sqrt[5]{\left(\frac{x}{2}\right)^4}} \\ &= \frac{1}{10} \sqrt[5]{\frac{16}{x^4}} \end{aligned}$$

답 풀이 참조

291

$x = \frac{2y}{y^2-4}$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2(y^2-4) - 2y \times 2y}{(y^2-4)^2} = \frac{-2y^2-8}{(y^2-4)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{(y^2-4)^2}{2y^2+8}$$

$$\therefore \lim_{y \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ -\frac{(y^2-4)^2}{2y^2+8} \right\} = -2$$

답 -2

292

$f^{-1}(-5) = a$ 라 하면 $f(a) = -5$

즉 $a^3 - 3a^2 + 3a + 2 = -5$ 이므로

$$a^3 - 3a^2 + 3a + 7 = 0$$

$$(a+1)(a^2-4a+7) = 0$$

$$\therefore a = -1 \quad (\because a^2-4a+7 > 0)$$

따라서 $f^{-1}(-5) = -1$ 이고

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ 이므로

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(-5) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(-5))} = \frac{1}{f'(-1)} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{12}$

293

$f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=a$ 라 하면 $f(a)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$$\cos a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0 < a < \pi$ 이므로 $a = \frac{\pi}{6}$

따라서 $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$ 이고 $f'(x)=-\sin x$ 이므로

$$\begin{aligned} (f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)} \\ &= \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)} \\ &= \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \end{aligned}$$

답 -2

294

$g(-1)=a$ 라 하면 $f(a)=-1$ 이므로

$$1 - \ln a = -1, \quad \ln a = 2$$

$$\therefore a = e^2$$

따라서 $g(-1)=e^2$ 이고 $f'(x)=-\frac{1}{x}$ 이므로

$$\begin{aligned} g'(-1) &= \frac{1}{f'(g(-1))} = \frac{1}{f'(e^2)} \\ &= \frac{1}{-\frac{1}{e^2}} = -e^2 \end{aligned}$$

답 $-e^2$

연습문제

● 본책 151~152쪽

295

전략 $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ 를 구한 후 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t + \sin t + t \cos t = t \cos t$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos t - (\cos t - t \sin t) = t \sin t$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t \sin t}{t \cos t} \\ &= \tan t \quad (\text{단, } t \cos t \neq 0) \end{aligned}$$

따라서 $t = \frac{\pi}{3}$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

답 $\sqrt{3}$

296

전략 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 극한을 $f'(1)$ 에 대한 식으로 변형한다.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-h)}{-h} \\ &= f'(1) + f'(1) = 2f'(1) \end{aligned}$$

한편

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{(1+t)-t}{(1+t)^2} = \frac{1}{(1+t)^2}$$

이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{1}{\frac{(1+t)^2}{2t}} = \frac{1}{2t(1+t)^2} \end{aligned}$$

$x=1$ 일 때, $t^2=1$ 에서

$$t=1 \quad (\because t>0)$$

따라서 구하는 극한값은

$$2f'(1) = 2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

297

전략 주어진 곡선이 지나는 점의 좌표와 접선의 기울기를 이용하여 a, b 의 값을 구한다.

곡선 $x^3 + y^3 + axy + b = 0$ 이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$1 + b = 0 \quad \therefore b = -1$$

$x^3 + y^3 + axy + b = 0$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} + ay + ax \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(3y^2 + ax) \frac{dy}{dx} = -3x^2 - ay$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + ay}{3y^2 + ax} \quad (\text{단, } 3y^2 + ax \neq 0)$$

이때 $x=0, y=1$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값이 $\frac{2}{3}$ 이므로

$$-\frac{a}{3} = \frac{2}{3} \quad \therefore a = -2$$

$$\therefore a + b = -3$$

답 -3

298

전략 두 곡선의 교점의 좌표를 이용하여 a 의 값을 구한다.

두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로 곡선 $y=f(x)$ 는 점 $(1, 1)$ 을 지난다.

즉 $f(1)=1$ 이므로

$$1 + a - 4 = 1 \quad \therefore a = 4$$

따라서 $f(x) = x^3 + 4x - 4$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 4$$

이므로 $f'(0) = 4$

한편 $g(12) = k$ 라 하면

$$f(k) = 12$$

즉 $k^3 + 4k - 4 = 12$ 이므로

$$k^3 + 4k - 16 = 0$$

$$(k-2)(k^2 + 2k + 8) = 0$$

$$\therefore k = 2 \quad (\because k^2 + 2k + 8 > 0)$$

따라서 $g(12) = 2$ 이므로

$$g'(12) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{16}$$

$$\therefore \frac{f'(0)}{g'(12)} = 64$$

답 64

해설 Focus

$f(x) = x^3 + ax - 4$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + a > 0$$

즉 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

299

전략 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한 후 삼각함수의 극한을 이용한다.

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2}{1 - \cos 2t} \quad (\text{단, } \cos 2t \neq 1)$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dx}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t^2}{1 - \cos 2t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t^2(1 + \cos 2t)}{(1 - \cos 2t)(1 + \cos 2t)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t^2(1 + \cos 2t)}{\sin^2 2t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{2t}{\sin 2t} \right)^2 \times \frac{3}{4} (1 + \cos 2t) \right\}$$

$$= 1^2 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

300

전략 $\frac{dy}{dx}$ 를 θ 에 대한 식으로 나타낸 다음 $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 을 만족시키는 θ 의 값을 구한다.

$$\frac{dx}{d\theta} = -2 \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 3 \cos \theta \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3 \cos \theta}{-2 \sin \theta} = -\frac{3}{2} \cot \theta$$

$$-\frac{3}{2} \cot \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{에서} \quad \cot \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{즉 } \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} = \sqrt{3} \text{이므로}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \theta = \frac{4}{3}\pi \quad (\because 0 < \theta < 2\pi)$$

$$\text{그런데 } \theta = \frac{4}{3}\pi \text{이면 } b < 0 \text{이므로} \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore a = 4 + 2 \times \frac{1}{2} = 5,$$

$$b = 2 + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore ab = 10 + \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

답 $10 + \frac{15\sqrt{3}}{2}$

301

전략 음함수의 미분법을 이용하여 a, b 에 대한 식을 세운다.

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \text{의 각 항을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x}{y} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

점 (a, b) 에서의 접선의 기울기가 $\frac{3a}{b}$ 이므로

$$\frac{3a}{b} = 2\sqrt{3} \quad \therefore a = \frac{2\sqrt{3}}{3}b \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 점 (a, b) 는 곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{12} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦을 ⑧에 대입하면

$$\frac{b^2}{3} - \frac{b^2}{12} = 1 \quad \therefore b^2 = 4$$

따라서 ⑦에서

$$a^2 = \frac{4}{3}b^2 = \frac{4}{3} \times 4 = \frac{16}{3}$$

$$\therefore 3a^2 + b^2 = 20$$

답 20

302

전략 $g(a) = b$ 이면 $g'(a) = \frac{1}{f'(b)}$ 임을 이용한다.

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} \text{이므로}$$

$$f'(a) = \frac{e^a}{e^a + 1}$$

한편 함수 $f(x) = \ln(e^x + 1)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

로 $g(a) = b$ 라 하면

$$f(b) = a$$

즉 $\ln(e^b + 1) = a$ 이므로

$$e^b + 1 = e^a$$

$$\therefore g'(a) = \frac{1}{f'(b)} = \frac{e^b + 1}{e^b} = \frac{e^a}{e^a - 1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{f'(a)} + \frac{1}{g'(a)} &= \frac{e^a + 1}{e^a} + \frac{e^a - 1}{e^a} \\ &= \frac{2e^a}{e^a} = 2 \end{aligned}$$

답 2

303

전략 주어진 조건을 이용하여 $g(-2), g'(-2)$ 의 값을 구한다.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x)}{x+2} = b \text{에서 } x \rightarrow -2 \text{일 때 극한값이 존재하}$$

고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow -2} g(x) = 0 \text{이므로}$$

$$g(-2) = 0$$

이때 $g(-2) = 0$ 에서 $f(0) = -2$ 이므로

$$\ln \frac{1}{a} = -2, \quad \frac{1}{a} = e^{-2}$$

$$\therefore a = e^2$$

$$\therefore b = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x)}{x+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x) - g(-2)}{x+2}$$

$$= g'(-2)$$

$$= \frac{1}{f'(0)}$$

한편

$$f(x) = \ln \left(\frac{\sec x + \tan x}{e^2} \right)$$

$$= \ln(\sec x + \tan x) - 2$$

에서

$$f'(x) = \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x}$$

$$= \frac{\sec x (\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x}$$

$$= \sec x$$

$$\text{이므로 } b = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

$$\therefore ab = e^2$$

답 ③

304

전략 접점의 x 좌표를 k 로 놓고 $f(t)$ 를 k 에 대한 함수로 나타낸 후 음함수의 미분법을 이용한다.

$$y = \frac{1}{e^x} + e^t = e^{-x} + e^t \text{에서}$$

$$y' = -e^{-x}$$

실수 k 에 대하여 접점의 좌표를 $(k, e^{-k} + e^t)$ 이라 하면 접선의 기울기는 $-e^{-k}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (e^{-k} + e^t) = -e^{-k}(x - k)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$\begin{aligned} -e^{-k} - e^t &= ke^{-k} \\ \therefore (k+1)e^{-k} + e^t &= 0 \end{aligned} \quad \text{..... ㉠}$$

㉠의 각 항을 k 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} e^{-k} + (k+1) \times (-e^{-k}) + e^t \frac{dt}{dk} &= 0 \\ e^t \frac{dt}{dk} &= ke^{-k} \\ \therefore \frac{dt}{dk} &= \frac{ke^{-k}}{e^t} \end{aligned} \quad \text{..... ㉡}$$

이때 $f(t) = -e^{-k}$ 이므로 양변을 k 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(t) \frac{dt}{dk} &= e^{-k} \\ \text{㉡을 대입하면} \\ f'(t) \times \frac{ke^{-k}}{e^t} &= e^{-k} \\ \therefore f'(t) &= \frac{e^t}{k} \end{aligned} \quad \text{..... ㉢}$$

한편 $f(a) = -e\sqrt{e} = -e^{\frac{3}{2}}$ 이고 $f(t) = -e^{-k}$ 이므로 $t=a$ 일 때 $k = -\frac{3}{2}$ 이다.

이때 ㉢에서

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} + e^a &= 0 \\ \therefore e^a &= \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

따라서 ㉢에서

$$f'(a) = \frac{e^a}{-\frac{3}{2}} = \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}e\sqrt{e}$$

답 ①

305

전략 주어진 조건을 이용하여 $f(2)$, $f(3)$, $f'(2)$, $f'(3)$ 의 값을 구한다.

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = 6$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-3\} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(2) &= 3 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \\ &= f'(2) = 6 \end{aligned}$$

또 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-1}{x-3} = \frac{1}{3}$ 에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 극한값이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉 $\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x)-1\} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(3) &= 1 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-1}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} \\ &= f'(3) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

이때 함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $f(2)=3$, $f(3)=1$ 에서

$$g(3)=2, g(1)=3$$

한편 $g(g(x))=h(x)$ 로 놓으면

$$h(1)=g(g(1))=g(3)=2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(g(x))-2}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} \\ &= h'(1) \end{aligned}$$

이때 $h'(x) = g'(g(x))g'(x)$ 이므로 구하는 극한값은

$$\begin{aligned} h'(1) &= g'(g(1))g'(1) \\ &= g'(3)g'(1) \\ &= \frac{1}{f'(2)} \times \frac{1}{f'(3)} \\ &= \frac{1}{6} \times 3 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2}$

4 도함수의 활용

II. 미분법

01 접선의 방정식

● 본책 154~162쪽

306

(1) $f(x) = \sqrt{x^2+5}$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

점 (2, 3)에서의 접선의 기울기는

$$f'(2) = \frac{2}{3}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-3 = \frac{2}{3}(x-2) \quad \therefore y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

(2) $f(x) = \ln x^2 = 2\ln|x|$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{2}{x}$$

점 (e, 2)에서의 접선의 기울기는

$$f'(e) = \frac{2}{e}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-2 = \frac{2}{e}(x-e) \quad \therefore y = \frac{2}{e}x$$

(3) $f(x) = xe^x - 2$ 로 놓으면

$$f'(x) = e^x + xe^x$$

점 (0, -2)에서의 접선의 기울기는

$$f'(0) = 1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = x - 2$$

답 (1) $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

(2) $y = \frac{2}{e}x$

(3) $y = x - 2$

307

$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x^2+2) - (2x+1) \times 2x}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{-2x^2 - 2x + 4}{(x^2+2)^2} \end{aligned}$$

점 $(0, \frac{1}{2})$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(0) = 1$$

이므로 점 $(0, \frac{1}{2})$ 에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 -1이다.

따라서 점 $(0, \frac{1}{2})$ 을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$$y = -x + \frac{1}{2} \quad \therefore 2x + 2y - 1 = 0$$

즉 $a=2, b=2$ 이므로

$$ab=4$$

답 4

308

$f(x) = \sqrt{4x-7}$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x-7}} = \frac{2}{\sqrt{4x-7}}$$

점점의 좌표를 $(t, \sqrt{4t-7})$ 이라 하면 직선 $y=2x+5$ 에 평행한 직선의 기울기는 2이므로

$$f'(t) = \frac{2}{\sqrt{4t-7}} = 2$$

$$\sqrt{4t-7} = 1 \quad \therefore t = 2$$

따라서 점점의 좌표가 (2, 1)이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-1 = 2(x-2) \quad \therefore y = 2x-3$$

답 $y = 2x - 3$

309

$f(x) = e^{-x}$ 으로 놓으면

$$f'(x) = -e^{-x}$$

점점의 좌표를 (t, e^{-t}) 이라 하면 점선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 135° 이므로 점선의 기울기는

$$\tan 135^\circ = -1$$

즉 $f'(t) = -e^{-t} = -1$ 이므로

$$e^{-t} = 1 \quad \therefore t = 0$$

따라서 점점의 좌표가 (0, 1)이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y = -x + 1$$

답 $y = -x + 1$

II-4

도
함
수
의
활
용

310

$f(x) = \sin 2x$ 로 놓으면 $f'(x) = 2 \cos 2x$
 접점의 좌표를 $(t, \sin 2t)$ 라 하면 직선 $x - 2y + 2 = 0$,

즉 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 에 수직인 직선의 기울기는 -2 이므로

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2 \cos 2t = -2 \\ \cos 2t &= -1, \quad 2t = \pi \quad (\because 0 \leq 2t \leq 2\pi) \\ \therefore t &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

따라서 접점의 좌표가 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y = -2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \therefore y = -2x + \pi$$

답 $y = -2x + \pi$

311

(1) $f(x) = x \ln x$ 로 놓으면

$$f'(x) = \ln x + 1$$

접점의 좌표를 $(t, t \ln t)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = \ln t + 1$$

따라서 점 $(t, t \ln t)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\begin{aligned} y - t \ln t &= (\ln t + 1)(x - t) \\ \therefore y &= (\ln t + 1)x - t \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이 직선이 점 $(0, -1)$ 을 지나므로

$$-1 = -t \quad \therefore t = 1$$

$t = 1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y = x - 1$$

(2) $f(x) = \sqrt{x}$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{t})$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

따라서 점 $(t, \sqrt{t})$ 에서의 접선의 방정식은

$$\begin{aligned} y - \sqrt{t} &= \frac{1}{2\sqrt{t}}(x - t) \\ \therefore y &= \frac{1}{2\sqrt{t}}x + \frac{\sqrt{t}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이 직선이 점 $(-1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -\frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{\sqrt{t}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} \quad \therefore t = 1$$

$t = 1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

답 (1) $y = x - 1$ (2) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

312

$f(x) = e^{x-1}$ 으로 놓으면

$$f'(x) = e^{x-1}$$

접점의 좌표를 (t, e^{t-1}) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = e^{t-1}$$

따라서 점 (t, e^{t-1}) 에서의 접선의 방정식은

$$\begin{aligned} y - e^{t-1} &= e^{t-1}(x - t) \\ \therefore y &= e^{t-1}x + e^{t-1}(1 - t) \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이 직선이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$\begin{aligned} 0 &= e^{t-1} + e^{t-1}(1 - t) \\ \therefore e^{t-1}(2 - t) &= 0 \end{aligned}$$

이때 $e^{t-1} > 0$ 이므로

$$2 - t = 0 \quad \therefore t = 2$$

$t = 2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y = ex - e$$

따라서 이 직선이 점 $(k, \frac{e}{2})$ 를 지나므로

$$\frac{e}{2} = ek - e, \quad ek = \frac{3}{2}e$$

$$\therefore k = \frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

313

$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x} = x + \frac{2}{x}$ 로 놓으면

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$$

접점의 좌표를 $(t, t + \frac{2}{t})$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = 1 - \frac{2}{t^2}$$

따라서 점 $(t, t + \frac{2}{t})$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (t + \frac{2}{t}) = (1 - \frac{2}{t^2})(x - t)$$

이 직선이 점 (3, 1)을 지나므로

$$1 - (t + \frac{2}{t}) = (1 - \frac{2}{t^2})(3 - t)$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0, \quad (t + 3)(t - 1) = 0$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 1$$

따라서 점 (3, 1)에서 곡선 $y = \frac{x^2 + 2}{x}$ 에 그을 수 있는 접선의 개수는 2이다. **답 2**

314

$f(x) = xe^{-x}$ 으로 놓으면

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$$

접점의 좌표를 (t, te^{-t}) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = e^{-t}(1 - t)$$

따라서 점 (t, te^{-t}) 에서의 접선의 방정식은

$$y - te^{-t} = e^{-t}(1 - t)(x - t)$$

이 직선이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로

$$-te^{-t} = e^{-t}(1 - t)(a - t)$$

$$\therefore e^{-t}(t^2 - at + a) = 0$$

이때 $e^{-t} > 0$ 이므로

$$t^2 - at + a = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $(a, 0)$ 에서 곡선 $y = xe^{-x}$ 에 한 개의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 중근을 가져야 한다.

따라서 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 4a = 0, \quad a(a - 4) = 0$$

$$\therefore a = 4 \quad (\because a \neq 0)$$

답 4

315

$f(x) = a - 2\sin^2 x$, $g(x) = 2\cos x$ 로 놓으면

$$f'(x) = -4\sin x \cos x, \quad g'(x) = -2\sin x$$

두 곡선의 접점의 x 좌표를 t 라 하면

$$f(t) = g(t) \text{에서}$$

$$a - 2\sin^2 t = 2\cos t \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서}$$

$$-4\sin t \cos t = -2\sin t$$

$0 < t < \pi$ 에서 $\sin t > 0$ 이므로

$$-4\cos t = -2, \quad \cos t = \frac{1}{2}$$

$$\therefore t = \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 < t < \pi)$$

$t = \frac{\pi}{3}$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a - \frac{3}{2} = 1 \quad \therefore a = \frac{5}{2} \quad \text{답 } \frac{5}{2}$$

316

$f(x) = \frac{a}{2x}$, $g(x) = e^x$ 으로 놓으면

$$f'(x) = -\frac{a}{2x^2}, \quad g'(x) = e^x$$

두 곡선의 접점의 x 좌표를 t 라 하면

$$f(t) = g(t) \text{에서}$$

$$\frac{a}{2t} = e^t \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서}$$

$$-\frac{a}{2t^2} = e^t \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서

$$\frac{a}{2t} = -\frac{a}{2t^2} \quad \therefore t = -1 \quad (\because a \neq 0)$$

따라서 두 곡선이 점 $(-1, \frac{1}{e})$ 에서 공통인 접선을 갖

고 이 점에서의 접선의 기울기가 $g'(-1) = \frac{1}{e}$ 이므로

구하는 접선의 방정식은

$$y - \frac{1}{e} = \frac{1}{e}(x + 1)$$

$$\therefore y = \frac{1}{e}x + \frac{2}{e} \quad \text{답 } y = \frac{1}{e}x + \frac{2}{e}$$

317

$\frac{dx}{d\theta} = \sin \theta$, $\frac{dy}{d\theta} = 1 - \cos \theta$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \quad (\text{단, } \sin \theta \neq 0)$$

따라서 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 일 때

$$x=1, y=\frac{\pi}{2}-1, \frac{dy}{dx}=1$$

이므로 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 에 대응하는 점에서의 접선의 방정식은

$$y - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = x - 1$$

$$\therefore y = x + \frac{\pi}{2} - 2$$

이 직선이 점 $(2, a)$ 를 지나므로

$$a = \frac{\pi}{2}$$

답 $\frac{\pi}{2}$

318

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-2t(1+t^2) - (1-t^2) \times 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2(1+t^2) - 2t \times 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}$$

이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}}{\frac{-4t}{(1+t^2)^2}} = \frac{t^2-1}{2t} \quad (\text{단, } t \neq 0)$$

이때 $\frac{1-t^2}{1+t^2} = -\frac{3}{5}$ 에서

$$-5+5t^2=3+3t^2, \quad t^2=4$$

$$\therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{4}{5} \text{에서} \quad 5t = 2+2t^2$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0, \quad (2t-1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } t = 2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 $t = 2$

$t = 2$ 일 때, $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}$ 이므로 점 $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 에서의 접

선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y - \frac{4}{5} = -\frac{4}{3}\left(x + \frac{3}{5}\right)$$

$$\therefore y = -\frac{4}{3}x$$

답 $y = -\frac{4}{3}x$

319

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \times \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \quad (\text{단, } xy \neq 0)$$

따라서 점 $(4, 9)$ 에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = -\frac{3}{2}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - 9 = -\frac{3}{2}(x - 4) \quad \therefore y = -\frac{3}{2}x + 15$$

이 직선의 x 절편은 10, y 절편은 15이므로 구하는 합은 25이다. 답 25

320

곡선 $x^3 + y^2 + ax + by = 0$ 이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$1 + 4 + a + 2b = 0$$

$$\therefore a + 2b = -5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x^3 + y^2 + ax + by = 0$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 + 2y \frac{dy}{dx} + a + b \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2y + b) \frac{dy}{dx} = -3x^2 - a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + a}{2y + b} \quad (\text{단, } 2y + b \neq 0)$$

점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기가 -1 이므로

$$-\frac{3+a}{4+b} = -1, \quad 3+a = 4+b$$

$$\therefore a - b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -1, b = -2$

$$\therefore ab = 2$$

답 2

연습 문제

● 본책 163~164쪽

321

전략 $\{\sqrt{f(x)}\}' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ 임을 이용하여 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기를 구한다.

$f(x) = \sqrt{1 + \sin \pi x}$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{\pi \cos \pi x}{2\sqrt{1 + \sin \pi x}}$$

점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는

$$f'(1) = -\frac{\pi}{2}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - 1 = -\frac{\pi}{2}(x - 1) \quad \therefore y = -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2} + 1$$

따라서 $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2} + 1$ 이므로

$$a - b = -\pi - 1 \quad \text{답 } -\pi - 1$$

322

전략 기울기가 1인 접선의 접점의 좌표를 구한다.

$$f(x) = e^x \text{로 놓으면} \quad f'(x) = e^x$$

접점의 좌표를 (t, e^t) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 1이므로

$$f'(t) = e^t = 1 \quad \therefore t = 0$$

즉 접점의 좌표가 $(0, 1)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = x + 1 \quad \therefore x - y + 1 = 0$$

따라서 직선 $x - y + 1 = 0$ 과 원점 사이의 거리는

$$\frac{|1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

323

전략 접점의 좌표를 $(t, \frac{\ln t}{t})$ 로 놓고 접선의 방정식을 세운 후 접선이 원점을 지나도록 이용하여 t 의 값을 구한다.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \text{로 놓으면} \quad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

접점의 좌표를 $(t, \frac{\ln t}{t})$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$$

따라서 점 $(t, \frac{\ln t}{t})$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \frac{\ln t}{t} = \frac{1 - \ln t}{t^2}(x - t)$$

$$\therefore y = \frac{1 - \ln t}{t^2}x + \frac{2\ln t - 1}{t} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0 = \frac{2\ln t - 1}{t}, \quad 2\ln t - 1 = 0$$

$$\ln t = \frac{1}{2} \quad \therefore t = e^{\frac{1}{2}}$$

$$t = e^{\frac{1}{2}} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면} \quad y = \frac{1}{2e}x$$

따라서 이 직선이 점 $(a, \frac{1}{2})$ 을 지나므로

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2e} \times a \quad \therefore a = e$$

답 e

324

전략 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 가 $x = a$ 인 점에서 접하면 $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$ 임을 이용한다.

$$f(x) = k - \cos^2 x, \quad g(x) = \cos x \text{로 놓으면}$$

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x, \quad g'(x) = -\sin x$$

$$f(t) = g(t) \text{에서}$$

$$k - \cos^2 t = \cos t$$

$$\therefore k = \cos^2 t + \cos t \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서}$$

$$2 \sin t \cos t = -\sin t$$

이때 $0 < t < \pi$ 에서 $\sin t > 0$ 이므로

$$2 \cos t = -1 \quad \therefore \cos t = -\frac{1}{2}$$

$$\cos t = -\frac{1}{2} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$k = -\frac{1}{4} \quad \text{답 } -\frac{1}{4}$$

325

전략 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1 \text{의 각 항을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$x - \frac{y}{2} \times \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

따라서 점 (2, 2)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{2 \times 2}{2} = 2$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - 2 = 2(x - 2) \quad \therefore y = 2x - 2$$

이 직선의 x 절편과 y 절편은 각각 1, -2 이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1 \quad \text{답 1}$$

326

전략 접선의 방정식을 t 에 대한 식으로 나타내어 $f(t)$ 를 구한다.

$g(x) = (\ln x)^2$ 으로 놓으면

$$g'(x) = 2\ln x \times \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}$$

점 $(t, (\ln t)^2)$ 에서의 접선의 기울기는

$$g'(t) = \frac{2\ln t}{t}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - (\ln t)^2 = \frac{2\ln t}{t}(x - t)$$

$$\therefore y = \frac{2\ln t}{t}x - 2\ln t + (\ln t)^2$$

$y=0$ 을 대입하면

$$0 = \frac{2\ln t}{t}x - 2\ln t + (\ln t)^2$$

$$\therefore x = t - \frac{t\ln t}{2} \quad (\text{단, } t \neq 1)$$

따라서 $t \neq 1$ 일 때, $f(t) = t - \frac{t\ln t}{2}$ 이므로

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{2}\left(\ln t + t \times \frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln t$$

$$\therefore f'(\sqrt{e}) = \frac{1}{4} \quad \text{답 } \frac{1}{4}$$

327

전략 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $\tan \theta$ 를 구한다.

$f(x) = \sin x$ 로 놓으면

$$f'(x) = \cos x$$

점 $P(t, \sin t)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = \cos t$$

따라서 점 P 에서의 접선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α 라 하면

$$\tan \alpha = \cos t$$

또 점 P 를 지나고 기울기가 -1 인 직선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 β 라 하면

$$\tan \beta = -1$$

$$\therefore \tan \theta = |\tan(\alpha - \beta)|$$

$$= \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right|$$

$$= \frac{1 + \cos t}{1 - \cos t}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \pi^-} \frac{\tan \theta}{(\pi - t)^2} = \lim_{t \rightarrow \pi^-} \frac{1 + \cos t}{(1 - \cos t)(\pi - t)^2}$$

$t - \pi = s$ 로 놓으면 $t = \pi + s$ 이고 $t \rightarrow \pi^-$ 일 때

$s \rightarrow 0^-$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow \pi^-} \frac{1 + \cos t}{(1 - \cos t)(\pi - t)^2}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{1 + \cos(\pi + s)}{\{1 - \cos(\pi + s)\} \times (-s)^2}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos s}{s^2(1 + \cos s)}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{(1 - \cos s)(1 + \cos s)}{s^2(1 + \cos s)^2}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0^-} \left\{ \frac{\sin^2 s}{s^2} \times \frac{1}{(1 + \cos s)^2} \right\}$$

$$= 1^2 \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \quad \text{답 ③}$$

328

전략 접점의 좌표를 $(t, (t-1)e^t)$ 으로 놓고 t 에 대한 방정식을 세운 후 방정식의 서로 다른 실근이 2개임을 이용한다.

$f(x) = (x-1)e^x$ 으로 놓으면

$$f'(x) = e^x + (x-1)e^x$$

$$= xe^x$$

접점의 좌표를 $(t, (t-1)e^t)$ 이라 하면 이 점에서의

접선의 기울기는

$$f'(t) = te^t$$

따라서 점 $(t, (t-1)e^t)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (t-1)e^t = te^t(x - t)$$

이 직선이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로

$$-(t-1)e^t = te^t(a - t)$$

$$\therefore e^t \{t^2 - (a+1)t + 1\} = 0$$

이때 $e' > 0$ 이므로

$$t^2 - (a+1)t + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $(a, 0)$ 에서 곡선 $y = (x-1)e^x$ 에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

따라서 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} D &= (a+1)^2 - 4 > 0, & a^2 + 2a - 3 > 0 \\ (a+3)(a-1) &> 0 \\ \therefore a < -3 \text{ 또는 } a > 1 \end{aligned}$$

즉 $a = -3, \beta = 1$ 이므로

$$a^2 + \beta^2 = 10$$

답 10

329

전략 매개변수로 나타난 함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.

$$\frac{dx}{dt} = e^t + e^{-t}, \quad \frac{dy}{dt} = 2e^t \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2e^t}{e^t + e^{-t}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9}{5} \text{에서} \quad \frac{2e^t}{e^t + e^{-t}} = \frac{9}{5}$$

$$10e^t = 9e^t + 9e^{-t}$$

$$e^t = 9e^{-t}, \quad e^{2t} = 9$$

$$\therefore e^t = 3 \quad (\because e^t > 0)$$

따라서 $a = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}, b = 2 \times 3 = 6$ 이므로

$$ab = 16$$

답 16

330

전략 음함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.

$y^3 - 3y^2 + 10x + 4y = 0$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$3y^2 \frac{dy}{dx} - 6y \frac{dy}{dx} + 10 + 4 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(3y^2 - 6y + 4) \frac{dy}{dx} = -10$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{10}{3y^2 - 6y + 4}$$

$$= -\frac{10}{3(y-1)^2 + 1}$$

즉 접선의 기울기는 $y=1$ 일 때 최솟값 -10 을 갖는다.

이때 $y^3 - 3y^2 + 10x + 4y = 0$ 에 $y=1$ 을 대입하면

$$2 + 10x = 0 \quad \therefore x = -\frac{1}{5}$$

따라서 기울기가 최소인 접선의 접점의 좌표는

$(-\frac{1}{5}, 1)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y - 1 = -10\left(x + \frac{1}{5}\right) \quad \therefore y = -10x - 1$$

답 $y = -10x - 1$

331

전략 접점의 좌표를 (t, te^t) 으로 놓고 t 에 대한 이차방정식을 세운 후 근과 계수의 관계를 이용한다.

$f(x) = xe^x$ 으로 놓으면

$$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

접점의 좌표를 (t, te^t) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = (1+t)e^t$$

따라서 점 (t, te^t) 에서의 접선의 방정식은

$$y - te^t = (1+t)e^t(x - t)$$

$$\therefore y = (1+t)e^t x - t^2 e^t$$

이 직선이 점 $(2, 0)$ 을 지나므로

$$0 = 2(1+t)e^t - t^2 e^t$$

$$\therefore e^t(t^2 - 2t - 2) = 0$$

이때 $e^t > 0$ 이므로

$$t^2 - 2t - 2 = 0$$

이차방정식 $t^2 - 2t - 2 = 0$ 의 두 실근을 t_1, t_2 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$t_1 + t_2 = 2, \quad t_1 t_2 = -2$$

한편 두 접선의 기울기는 $f'(t_1) = (1+t_1)e^{t_1}$,

$f'(t_2) = (1+t_2)e^{t_2}$ 이므로

$$\begin{aligned} m_1 m_2 &= (1+t_1)e^{t_1} \times (1+t_2)e^{t_2} \\ &= (1+t_1+t_2+t_1 t_2)e^{t_1+t_2} \\ &= 1 \times e^2 = e^2 \end{aligned}$$

답 e^2

참고 이차방정식 $t^2 - 2t - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - (-2) = 3 > 0$$

따라서 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

332

전략 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 가 접함을 이용한다.

함수 $f(x)=e^{ax}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고 서로 접하므로 두 그래프의 공통인 접선의 방정식은 $y=x$ 이다.

두 함수의 그래프의 접점의 좌표를 (t, e^{at}) 이라 하면 점 (t, e^{at}) 은 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$$e^{at}=t \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (t, e^{at}) 에서의 접선의 기울기가 1이므로

$$f'(x)=ae^{ax} \text{에서}$$

$$f'(t)=ae^{at}=1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면} \quad at=1$$

$$at=1 \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면}$$

$$ae=1 \quad \therefore a=\frac{1}{e} \quad \text{답 } \frac{1}{e}$$

02 함수의 극대와 극소

● 본책 165~174쪽

333

$$(1) y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \text{이므로} \quad y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore y''=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$$(2) y'=2e^{2x} \text{이므로} \quad y''=4e^{2x}$$

$$(3) y'=\frac{1}{x}=x^{-1} \text{이므로}$$

$$y''=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$$

$$(4) y'=\cos x \text{이므로} \quad y''=-\sin x$$

$$\text{답 (1) } y''=-\frac{1}{4x\sqrt{x}} \quad (2) y''=4e^{2x}$$

$$(3) y''=-\frac{1}{x^2} \quad (4) y''=-\sin x$$

334

$$\text{답 (1) } -1, -1, -1, -2, 1, 2$$

$$(2) \frac{2}{x^3}, -1, -2, 2, -1, -2, 1, 2$$

335

$$(1) y'=3x^2 \ln x + x^3 \times \frac{1}{x} = x^2(3 \ln x + 1) \text{이므로}$$

$$y''=2x(3 \ln x + 1) + x^2 \times \frac{3}{x}$$

$$=x(6 \ln x + 5)$$

$$(2) y'=2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x \text{이므로}$$

$$y''=(2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x$$

$$=(x^2+4x+2)e^x$$

$$(3) y'=\frac{-2x}{(x^2+1)^2} \text{이므로}$$

$$y''=\frac{-2(x^2+1)^2+2x \times 2(x^2+1) \times 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

$$\text{답 (1) } y''=x(6 \ln x + 5)$$

$$(2) y''=(x^2+4x+2)e^x$$

$$(3) y''=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

336

$$f'(x)=\frac{\ln x - x \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \text{이므로}$$

$$f''(x)$$

$$=\frac{\frac{1}{x} \times (\ln x)^2 - (\ln x - 1) \times 2 \ln x \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^4}$$

$$=\frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3}$$

$$\therefore f''(e)=\frac{1}{e} \quad \text{답 } \frac{1}{e}$$

337

$$f(x)=(x+a)e^{bx} \text{에서}$$

$$f'(x)=e^{bx} + (x+a) \times be^{bx}$$

$$=(bx+ab+1)e^{bx}$$

$$\text{이때 } f'(0)=3 \text{이므로}$$

$$ab+1=3 \quad \therefore ab=2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{즉 } f'(x)=(bx+3)e^{bx} \text{이므로}$$

$$f''(x)=be^{bx} + (bx+3) \times be^{bx}$$

$$=b(bx+4)e^{bx}$$

이때 $f''(0) = -2$ 이므로

$$4b = -2 \quad \therefore b = -\frac{1}{2}$$

$b = -\frac{1}{2}$ 을 ①에 대입하면

$$-\frac{1}{2}a = 2 \quad \therefore a = -4$$

$$\therefore \frac{a}{b} = 8$$

답 8

338

$$(1) f'(x) = e^x - 1$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad e^x = 1 \quad \therefore x = 0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, 0]$ 에서 감소하고, 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가한다.

$$(2) f'(x) = 1 - 2\sin x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi \quad (\because 0 < x < \pi)$$

$0 < x < \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(0, \frac{\pi}{6}]$, $[\frac{5}{6}\pi, \pi)$ 에서

증가하고, 구간 $[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi]$ 에서 감소한다.

답 풀이 참조

339

$$f'(x) = a + \frac{2x}{x^2 + 4} = \frac{ax^2 + 2x + 4a}{x^2 + 4}$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{ax^2 + 2x + 4a}{x^2 + 4} \geq 0$$

이때 $x^2 + 4 > 0$ 이므로

$$ax^2 + 2x + 4a \geq 0 \quad \dots\dots ①$$

(i) $a = 0$ 일 때

$$2x \geq 0 \text{에서} \quad x \geq 0$$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 부등식 ①이 성립하는 것은 아니다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때

이차부등식 ①이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야

$$\text{하므로} \quad a > 0 \quad \dots\dots ②$$

또 이차방정식 $ax^2 + 2x + 4a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - 4a^2 \leq 0, \quad (2a+1)(2a-1) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -\frac{1}{2} \text{ 또는 } a \geq \frac{1}{2} \quad \dots\dots ③$$

$$②, ③ \text{에서} \quad a \geq \frac{1}{2}$$

$$(i), (ii) \text{에서} \quad a \geq \frac{1}{2} \quad \text{답 } a \geq \frac{1}{2}$$

개념 노트

이차부등식이 항상 성립할 조건

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때, 모든 실수 x 에 대하여

① 이차부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 이 성립하려면

$$a > 0, D \leq 0$$

② 이차부등식 $ax^2 + bx + c \leq 0$ 이 성립하려면

$$a < 0, D \leq 0$$

340

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{kx} + (x^2 + 1) \times ke^{kx} \\ &= e^{kx}(kx^2 + 2x + k) \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로

$$e^{kx}(kx^2 + 2x + k) \leq 0$$

이때 $e^{kx} > 0$ 이므로

$$kx^2 + 2x + k \leq 0 \quad \dots\dots ①$$

(i) $k=0$ 일 때

$$2x \leq 0 \text{에서 } x \leq 0$$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 부등식 ㉠이 성립하는 것은 아니다.

(ii) $k \neq 0$ 일 때

이차부등식 ㉠이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 $k < 0$ ㉡

또 이차방정식 $kx^2 + 2x + k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - k^2 \leq 0, \quad (k+1)(k-1) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -1 \text{ 또는 } k \geq 1 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$$\text{㉡, ㉢에서 } k \leq -1$$

(i), (ii)에서 $k \leq -1$

따라서 실수 k 의 최댓값은 -1 이다. **답 -1**

341

$$(1) f'(x) = \frac{(2x-3)(x^2+3) - (x^2-3x) \times 2x}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{3x^2 + 6x - 9}{(x^2+3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } 3x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x = -3 \text{에서 극댓값 } \frac{3}{2},$$

$$x = 1 \text{에서 극솟값 } -\frac{1}{2}$$

을 갖는다.

$$(2) f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + 1 = \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \sqrt{1-x^2} = x$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 1 - x^2 = x^2, \quad x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because 0 < x < 1)$$

$0 < x < 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{에서 극댓값 } \sqrt{2}$$

를 갖는다.

$$(3) f'(x) = 2xe^{-x} + x^2 \times (-e^{-x}) = x(2-x)e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x = 2 \text{에서 극댓값 } \frac{4}{e^2},$$

$$x = 0 \text{에서 극솟값 } 0$$

을 갖는다.

$$(4) f'(x) = -2 \cos x \sin x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } -2 \cos x \sin x = 0$$

이때 $0 < x < \pi$ 에서 $\sin x > 0$ 이므로

$$\cos x = 0 \quad \therefore x = \frac{\pi}{2}$$

$0 < x < \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 는

$$x = \frac{\pi}{2} \text{에서 극솟값 } 0$$

을 갖는다.

답 (1) 극댓값: $\frac{3}{2}$, 극솟값: $-\frac{1}{2}$

(2) 극댓값: $\sqrt{2}$

(3) 극댓값: $\frac{4}{e^2}$, 극솟값: 0

(4) 극솟값: 0

342

(1) $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

$f'(x) = 0$ 에서 $1+x=0$

$\therefore x = -1$

$f''(x) = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$ 이므로

$f''(-1) = e^{-1} > 0$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극소이므로
극솟값은

$$f(-1) = -\frac{1}{e}$$

(2) $f'(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x$

$f'(x) = 0$ 에서

$$\sqrt{3}\cos x = \sin x$$

$$\tan x = \sqrt{3}$$

$\therefore x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi (\because 0 < x < 2\pi)$

$f''(x) = -\sqrt{3}\sin x - \cos x$ 이므로

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = -2 < 0$$

$$f''\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{3}$ 에서 극대이고 $x = \frac{4}{3}\pi$
에서 극소이므로

극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = 2$

극솟값은

$$f\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

(3) $f'(x) = (\ln x)^2 + x \times 2 \ln x \times \frac{1}{x}$

$$= \ln x (\ln x + 2)$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$\ln x = 0 \text{ 또는 } \ln x + 2 = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = \frac{1}{e^2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} (\ln x + 2) + \ln x \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{2}{x} (\ln x + 1)$$

이므로

$$f''(1) = 2 > 0$$

$$f''\left(\frac{1}{e^2}\right) = -2e^2 < 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{1}{e^2}$ 에서 극대이고 $x = 1$

에서 극소이므로

극댓값은 $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{4}{e^2}$

극솟값은 $f(1) = 0$

(4) $f'(x) = e^x (\sin x + \cos x) + e^x (\cos x - \sin x)$

$$= 2e^x \cos x$$

$f'(x) = 0$ 에서 $\cos x = 0$

$$\therefore x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi (\because 0 < x < 2\pi)$$

$$f''(x) = 2e^x \cos x + 2e^x (-\sin x)$$

$$= 2e^x (\cos x - \sin x)$$

이므로

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2e^{\frac{\pi}{2}} < 0$$

$$f''\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 2e^{\frac{3}{2}\pi} > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 극대이고

$x = \frac{3}{2}\pi$ 에서 극소이므로

극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$

극솟값은 $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -e^{\frac{3}{2}\pi}$

답 (1) 극솟값: $-\frac{1}{e}$

(2) 극댓값: 2, 극솟값: -2

(3) 극댓값: $\frac{4}{e^2}$, 극솟값: 0

(4) 극댓값: $e^{\frac{\pi}{2}}$, 극솟값: $-e^{\frac{3}{2}\pi}$

343

$$f'(x) = 2ax - b + \frac{1}{x}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극솟값 -2 를 가지므로

$$f(1) = -2, f'(1) = 0$$

$$f(1) = -2 \text{에서} \quad a - b = -2 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$f'(1) = 0 \text{에서} \quad 2a - b + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = 3$$

$$\boxed{\text{답}} \quad a = 1, b = 3$$

344

$$\begin{aligned} f'(x) &= ke^{kx} \sin x + e^{kx} \cos x \\ &= e^{kx}(k \sin x + \cos x) \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 가 $x = \frac{\pi}{4}$ 에서 극값을 가지므로

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad e^{\frac{\pi}{4}k} \left(\frac{k}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0$$

$$k + 1 = 0 \quad \therefore k = -1$$

따라서

$$f(x) = e^{-x} \sin x, \quad f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$$

이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$$\cos x - \sin x = 0$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{5\pi}{4} \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

이때

$$\begin{aligned} f''(x) &= -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x) \\ &= -2e^{-x} \cos x \end{aligned}$$

이므로

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}} < 0,$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{5\pi}{4}} > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{4}$ 에서 극대, $x = \frac{5\pi}{4}$ 에서 극소이므로

$$\text{극댓값은} \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{극솟값은} \quad f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{4}}$$

$$\boxed{\text{답}} \quad \text{극댓값: } \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}, \text{ 극솟값: } -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{4}}$$

345

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{4x^2} - 4 = \frac{-16x^2 + 4x - a}{4x^2}$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면

$f'(x) = 0$ 을 만족시키는 서로 다른 두 양수 x 가 존재해야 하므로 이차방정식

$$-16x^2 + 4x - a = 0, \text{ 즉 } 16x^2 - 4x + a = 0$$

이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $16x^2 - 4x + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 16a > 0 \quad \therefore a < \frac{1}{4}$$

(ii) 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두 근의 합}) = \frac{1}{4} > 0,$$

$$(\text{두 근의 곱}) = \frac{a}{16} > 0$$

$$\therefore a > 0$$

$$(i), (ii) \text{에서} \quad 0 < a < \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{답}} \quad 0 < a < \frac{1}{4}$$

346

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x(x^2 + 2x + k) + e^x(2x + 2) \\ &= e^x(x^2 + 4x + k + 2) \end{aligned}$$

이때 $e^x > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $x^2 + 4x + k + 2 = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

따라서 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 2^2 - (k + 2) \leq 0, \quad 2 - k \leq 0$$

$$\therefore k \geq 2$$

$$\boxed{\text{답}} \quad k \geq 2$$

연습 문제

● 본책 175~176쪽

347

전략 미분계수의 정의를 이용한다.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(2+h) - f'(2)}{h} = f''(2)$$

이때 $f'(x) = \frac{2x}{x^2+2}$ 이므로

$$f''(x) = \frac{2(x^2+2) - 2x \times 2x}{(x^2+2)^2} \\ = \frac{-2(x^2-2)}{(x^2+2)^2}$$

따라서 구하는 값은

$$f''(2) = -\frac{1}{9} \quad \text{답 } -\frac{1}{9}$$

348

전략 y', y'' 을 구하여 주어진 등식에 대입한다.

$y = e^{-x} \cos x$ 에서

$$y' = -e^{-x} \cos x + e^{-x} \times (-\sin x) \\ = -e^{-x}(\cos x + \sin x)$$

$$y'' = e^{-x}(\cos x + \sin x) \\ - e^{-x}(-\sin x + \cos x) \\ = 2e^{-x} \sin x$$

이를 $y'' + 2y' = ky$ 에 대입하면

$$2e^{-x} \sin x - 2e^{-x}(\cos x + \sin x) = ke^{-x} \cos x \\ \therefore -2e^{-x} \cos x = ke^{-x} \cos x$$

이 등식이 x 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$k = -2 \quad \text{답 } -2$$

349

전략 $f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값을 구한다.

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$\ln(1+x) = 1, \quad 1+x = e \\ \therefore x = e-1$$

$x > -1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	$e-1$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗		↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-1, e-1]$ 에서 증가하고 구간 $[e-1, \infty)$ 에서 감소하므로

$$a = e-1 \quad \text{답 } e-1$$

350

전략 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 함을 이용한다.

$$f'(x) = 2 - \frac{2x}{x^2+k} = \frac{2(x^2-x+k)}{x^2+k}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$x^2 - x + k \geq 0 \quad (\because x^2 + k > 0)$$

따라서 이차방정식 $x^2 - x + k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 1 - 4k \leq 0$$

$$\therefore k \geq \frac{1}{4} \quad \text{답 } k \geq \frac{1}{4}$$

351

전략 $f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값을 이용하여 a, b 의 값을 구한다.

$$f'(x) = (2x-2)e^x + (x^2-2x-7)e^x \\ = (x^2-9)e^x$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$x^2 - 9 = 0, \quad (x+3)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		↗	$8e^{-3}$	↘	$-4e^3$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -3$ 에서 극댓값 $8e^{-3}$, $x = 3$ 에서 극솟값 $-4e^3$ 을 가지므로

$$a = 8e^{-3}, \quad b = -4e^3$$

$$\therefore a \times b = -32 \quad \text{답 } ①$$

352

전략 주어진 조건을 이용하여 a, b 에 대한 식을 세운다.

$$f'(x) = e^{ax+b} + x \times ae^{ax+b} = e^{ax+b}(1+ax)$$

함수 $f(x)$ 가 $x = -2$ 에서 극솟값 $-\frac{2}{e}$ 를 가지므로

$$f(-2) = -\frac{2}{e}, \quad f'(-2) = 0$$

$$f(-2) = -\frac{2}{e} \text{에서} \quad -2e^{-2a+b} = -2e^{-1}$$

$$\therefore -2a+b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$f'(-2)=0 \text{에서} \quad e^{-2a+b}(1-2a)=0$$

$$1-2a=0 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

$a=\frac{1}{2}$ 을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$-1+b=-1 \quad \therefore b=0$$

따라서 $f(x)=xe^{\frac{1}{2}x}$ 이므로

$$f(4)=4e^2 \quad \text{답 } 4e^2$$

353

전략 $f''(x)$ 를 구하여 삼각함수에 대한 방정식을 세운다.

$$f'(x)=3e^{3x}\sin x + e^{3x}\cos x$$

$$=e^{3x}(3\sin x + \cos x)$$

$$f''(x)=3e^{3x}(3\sin x + \cos x)$$

$$+ e^{3x}(3\cos x - \sin x)$$

$$=2e^{3x}(4\sin x + 3\cos x)$$

이때 $x=a$ 가 방정식 $f''(x)=0$ 의 해이므로

$$f''(a)=2e^{3a}(4\sin a + 3\cos a)=0$$

$$2e^{3a}>0 \text{이므로} \quad 4\sin a + 3\cos a=0$$

$\sin a \neq 0$ 이므로 양변을 $\sin a$ 로 나누면

$$4+3\cot a=0$$

$$\therefore \cot a = -\frac{4}{3} \quad \text{답 } -\frac{4}{3}$$

354

전략 주어진 조건에서 $a=f'(\pi)$, $b=f''(\pi)$ 임을 알아낸다.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f'(x)-a}{x-\pi} = b \text{에서 } x \rightarrow \pi \text{일 때 극한값이 존재}$$

하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉 } \lim_{x \rightarrow \pi} \{f'(x)-a\}=0 \text{이므로} \quad a=f'(\pi)$$

$$\therefore b = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f'(x)-f'(\pi)}{x-\pi} = f''(\pi)$$

이때

$$f'(x)=e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$=e^x(\sin x + \cos x),$$

$$f''(x)=e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x)$$

$$=2e^x \cos x$$

이므로

$$a=f'(\pi)=-e^\pi, \quad b=f''(\pi)=-2e^\pi$$

$$\therefore a+b=-3e^\pi \quad \text{답 } -3e^\pi$$

355

전략 $f'(\frac{\pi}{3})=0$, $f'(\pi)=0$ 임을 이용한다.

$$f'(x)=a \cos x - b \sin x + 1$$

함수 $f(x)$ 가 $x=\frac{\pi}{3}$ 와 $x=\pi$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(\frac{\pi}{3})=0, \quad f'(\pi)=0$$

$$f'(\frac{\pi}{3})=0 \text{에서} \quad \frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b + 1 = 0$$

$$\therefore a - \sqrt{3}b + 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$f'(\pi)=0 \text{에서} \quad -a + 1 = 0$$

$$\therefore a = 1$$

$a=1$ 을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$1 - \sqrt{3}b + 2 = 0 \quad \therefore b = \sqrt{3}$$

따라서

$$f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x + x,$$

$$f'(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 1$$

$$\text{이므로} \quad f''(x) = -\sin x - \sqrt{3} \cos x$$

$$\text{이때 } f''(\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3} < 0, \quad f''(\pi) = \sqrt{3} > 0 \text{이므로}$$

$f(x)$ 는 $x=\frac{\pi}{3}$ 에서 극대이고 $x=\pi$ 에서 극소이다.

따라서 구하는 극솟값은

$$f(\pi) = \pi - \sqrt{3} \quad \text{답 } \pi - \sqrt{3}$$

해설 Focus

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad \cos x - \sqrt{3} \sin x = -1$$

$$2 \sin(x + \frac{5}{6}\pi) = -1$$

$$\therefore \sin(x + \frac{5}{6}\pi) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{이때 } \frac{5}{6}\pi \leq x + \frac{5}{6}\pi \leq \frac{17}{6}\pi \text{이므로}$$

$$x + \frac{5}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x + \frac{5}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \pi$$

따라서 $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 는 극댓값과 극솟값을 각각 한 개씩 갖는다.

356

전략 모든 양수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 또는 $f'(x) \leq 0$ 이어야 함을 이용한다.

$$f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{a}{x^2} - 1 = \frac{-x^2 + 2x + a}{x^2}$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 모든 양수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 또는 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

이때 $x^2 > 0$ 이므로 모든 양수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$, 즉 $-x^2 + 2x + a \leq 0$ 이어야 한다.

$$g(x) = -x^2 + 2x + a \text{로 놓으면}$$

$$g(x) = -(x-1)^2 + a + 1$$

따라서 $x > 0$ 일 때, 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 $a+1$ 을 가지므로

$$a+1 \leq 0 \quad \therefore a \leq -1$$

즉 정수 a 의 최댓값은 -1 이다.

답 -1

357

전략 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값을 구하여 a_n 의 규칙을 찾는다.

$$f'(x)$$

$$= -e^{-x}(\sin x + \cos x) + e^{-x}(\cos x - \sin x)$$

$$= -2e^{-x} \sin x$$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad \sin x = 0$$

$$\therefore x = k\pi \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

이때

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2e^{-x} \sin x - 2e^{-x} \cos x \\ &= 2e^{-x}(\sin x - \cos x) \end{aligned}$$

이므로

$$f''(\pi) = 2e^{-\pi} > 0, \quad f''(2\pi) = -2e^{-2\pi} < 0,$$

$$f''(3\pi) = 2e^{-3\pi} > 0,$$

$$f''(4\pi) = -2e^{-4\pi} < 0, \dots$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2n\pi$ ($n=1, 2, 3, \dots$)에서 극대이므로 극댓값은

$$f(2n\pi) = e^{-2n\pi}$$

극댓값이 큰 것부터 차례대로 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 이므로

$$a_n = e^{-2n\pi} \quad \therefore \ln a_n = -2n\pi$$

$$\therefore \ln a_{99} - \ln a_{100}$$

$$= -198\pi - (-200\pi) = 2\pi$$

답 2\pi

358

전략 곡선 위의 점 P, Q에서의 접선의 방정식을 이용하여 $f(t)$, $g(t)$ 를 구한다.

$$y = -\ln x \text{에서} \quad y' = -\frac{1}{x}$$

점 P($t, -\ln t$)에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{t}$ 이므로

접선의 방정식은

$$y + \ln t = -\frac{1}{t}(x - t)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{t}x + 1 - \ln t$$

$$y=0 \text{을 대입하면} \quad 0 = -\frac{1}{t}x + 1 - \ln t$$

$$\frac{1}{t}x = 1 - \ln t \quad \therefore x = t - t \ln t$$

또 점 Q($2t, -\ln 2t$)에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{2t}$

이므로 접선의 방정식은

$$y + \ln 2t = -\frac{1}{2t}(x - 2t)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2t}x + 1 - \ln 2t$$

$$y=0 \text{을 대입하면} \quad 0 = -\frac{1}{2t}x + 1 - \ln 2t$$

$$\frac{1}{2t}x = 1 - \ln 2t \quad \therefore x = 2t - 2t \ln 2t$$

따라서 $f(t) = t - t \ln t$, $g(t) = 2t - 2t \ln 2t$ 이므로

$$h(t) = f(t) - g(t)$$

$$= -t - t \ln t + 2t \ln 2t$$

$$= t(-1 - \ln t + 2 \ln 2t)$$

$$\therefore h'(t)$$

$$= -1 - \ln t + 2 \ln 2t + t\left(-\frac{1}{t} + 2 \times \frac{1}{t}\right)$$

$$= -\ln t + 2 \ln 2t = \ln 4t$$

$$h'(t)=0 \text{에서} \quad \ln 4t = 0$$

$$4t = 1 \quad \therefore t = \frac{1}{4}$$

이때 $h''(t) = \frac{1}{t}$ 이므로

$$h''\left(\frac{1}{4}\right) = 4 > 0$$

따라서 함수 $h(t)$ 는 $t = \frac{1}{4}$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$h\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$

답 극솟값: $-\frac{1}{4}$

03 곡선의 볼록과 변곡점

● 본책 177~181쪽

359

$f(x)=e^x$ 에서

$$f'(x)=e^x, f''(x)=e^x$$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 $f''(x)>0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 아래로 볼록하다.

[답 풀이 참조]

360

$f(x)=\ln x$ 에서

$$f'(x)=\frac{1}{x}, f''(x)=-\frac{1}{x^2}$$

따라서 $x>0$ 에서 $f''(x)<0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(0, \infty)$ 에서 위로 볼록하다.

[답 풀이 참조]

361

[답] $\cos x, -\sin x, \pi, <, \pi, >, (0, \pi), (\pi, 2\pi)$

362

(1) $f'(x)=-2xe^{-x^2}$ 이므로

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2e^{-x^2} - 2x \times (-2xe^{-x^2}) \\ &= 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) \end{aligned}$$

(2) $f''(x)=0$ 에서 $2x^2-1=0$ ($\because e^{-x^2}>0$)

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(3) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가

바뀌므로 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 좌표는

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

[답 풀이 참조]

363

(1) $f(x)=x^4+4x^3+20$ 으로 놓으면

$$f'(x)=4x^3+12x^2$$

$$f''(x)=12x^2+24x=12x(x+2)$$

$f''(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

$x<-2$ 또는 $x>0$ 에서 $f''(x)>0$

$-2< x < 0$ 에서 $f''(x)<0$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -2)$,

$(0, \infty)$ 에서 아래로 볼록하고, 구간 $(-2, 0)$ 에서 위로 볼록하다.

이때 변곡점의 좌표는 $(-2, 4), (0, 20)$ 이다.

(2) $f(x)=x+2\cos x$ 로 놓으면

$$f'(x)=1-2\sin x$$

$$f''(x)=-2\cos x$$

$f''(x)=0$ 에서

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$ 에서 $f''(x)<0$

$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $f''(x)>0$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(0, \frac{\pi}{2}), (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$

에서 위로 볼록하고, 구간 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ 에서 아래로 볼록하다.

이때 변곡점의 좌표는 $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$ 이다.

(3) $f(x)=\frac{1}{x^2+3}$ 로 놓으면

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2(x^2+3)^2+2x \times 2(x^2+3) \times 2x}{(x^2+3)^4}$$

$$= \frac{-2(x^2+3)+8x^2}{(x^2+3)^3}$$

$$= \frac{6(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$$

$f''(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x<-1$ 또는 $x>1$ 에서 $f''(x)>0$

$-1 < x < 1$ 에서 $f''(x)<0$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1)$,

$(1, \infty)$ 에서 아래로 볼록하고, 구간 $(-1, 1)$ 에서 위로 볼록하다.

이때 변곡점의 좌표는 $(-1, \frac{1}{4}), (1, \frac{1}{4})$ 이다.

(4) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ = \frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

$$x < -1 \text{ 또는 } x > 1 \text{에서 } f''(x) < 0$$

$$-1 < x < 1 \text{에서 } f''(x) > 0$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1)$,

$(1, \infty)$ 에서 위로 볼록하고, 구간 $(-1, 1)$ 에서 아래로 볼록하다.

이때 변곡점의 좌표는 $(-1, \ln 2)$, $(1, \ln 2)$ 이다.

답 풀이 참조

364

$$f'(x) = 2ax + b - \frac{4}{x} \text{이므로}$$

$$f''(x) = 2a + \frac{4}{x^2}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 극대이므로

$$f'(2) = 0$$

$$\therefore 4a + b - 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 변곡점의 x 좌표가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$f''(\sqrt{2}) = 0$$

$$2a + 2 = 0 \quad \therefore a = -1$$

$a = -1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-4 + b - 2 = 0 \quad \therefore b = 6$$

$$\therefore a + b = 5$$

답 5

365

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \text{이므로}$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=2$ 인 점에서의 접선의 기울기가 4이므로

$$f'(2) = 4$$

$$\therefore 12a + 4b + c = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 좌표가 $(1, 2)$ 이므로

$$f(1) = 2, f''(1) = 0$$

$$f(1) = 2 \text{에서 } a + b + c = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$f''(1) = 0 \text{에서 } 6a + 2b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = -3, c = 4$$

답 $a = 1, b = -3, c = 4$

04 함수의 그래프

● 본책 182~185쪽

366

(1) (i) $x^2 + 3 \neq 0$ 이므로 정의역은 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(0) = 1$ 이므로 그래프와 y 축의 교점의 좌표는 $(0, 1)$ 이다.

(iii) $f(-x) = \frac{3}{(-x)^2 + 3} = \frac{3}{x^2 + 3} = f(x)$
이므로 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

$$(iv) f'(x) = \frac{-3 \times 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-6x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$\text{이므로 } f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0$$

$$f''(x) = \frac{-6(x^2 + 3)^2 + 6x \times 2(x^2 + 3) \times 2x}{(x^2 + 3)^4}$$

$$= \frac{18x^2 - 18}{(x^2 + 3)^3} = \frac{18(x+1)(x-1)}{(x^2 + 3)^3}$$

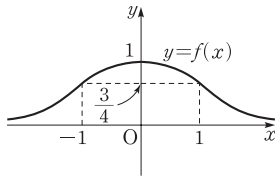
이므로 $f''(x) = 0$ 에서

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

x	$\dots$	-1	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$ 변곡점	$\curvearrowright$	1 극대	$\curvearrowleft$	$\frac{3}{4}$ 변곡점	$\searrow$

(v) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2 + 3} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2 + 3} = 0$ 이므로 점근선은 x 축이다.

따라서 함수 $f(x) = \frac{3}{x^2+3}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



- (2) (i) 정의역은 $x \neq 1$ 인 실수 전체의 집합이다.
(ii) $f(0) = -2$ 이므로 그래프와 y 축의 교점의 좌표는 $(0, -2)$ 이다.

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad f'(x) &= \frac{(2x+1)(x-1) - (x^2+x+2)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

이므로 $f'(x) = 0$ 에서
 $x = -1$ 또는 $x = 3$
 $f''(x)$

$$= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x-3) \times 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{8}{(x-1)^3}$$

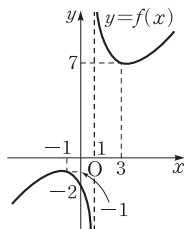
이때 $f''(x) \neq 0$ 이므로 변곡점은 없다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-1 극대	$\searrow$		$\searrow$	7 극소	$\nearrow$

(iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+x+2}{x-1} = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x+2}{x-1} = \infty$
또 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+x+2}{x-1} = -\infty,$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+x+2}{x-1} = \infty$ 이므로 점근선은 직선 $x=1$ 이다.

따라서 함수

$f(x) = \frac{x^2+x+2}{x-1}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



- (3) (i) 정의역은 $x \geq 1$ 인 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$$2\sqrt{x-1} = 1$$

$$4(x-1) = 1 \quad \therefore x = \frac{5}{4}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{4(x-1)\sqrt{x-1}} \\ &= -\frac{1}{4(x-1)^{3/2}} \end{aligned}$$

이때 $f''(x) \neq 0$ 이므로 변곡점은 없다.

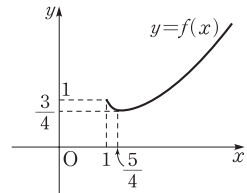
x	1	$\cdots$	$\frac{5}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$ 극소	$\nearrow$

(iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x-1}) = \infty$

따라서 함수

$$f(x) = x - \sqrt{x-1}$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



- (4) (i) 정의역은 $x \geq -2$ 인 실수 전체의 집합이다.

(ii) $x\sqrt{x+2} = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = 0$

따라서 그래프와 x 축의 교점의 좌표는

$(-2, 0), (0, 0)$ 이다.

(iii) $f'(x) = \sqrt{x+2} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

$$= \frac{3x+4}{2\sqrt{x+2}}$$

이므로 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -\frac{4}{3}$

$$f''(x) = \frac{6\sqrt{x+2} - (3x+4) \times \frac{1}{\sqrt{x+2}}}{4(x+2)}$$

$$= \frac{3x+8}{4(x+2)\sqrt{x+2}}$$

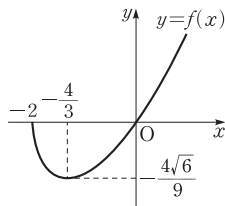
이때 $x \geq -2$ 에서 $f''(x) \neq 0$ 이므로 변곡점은 없다.

x	-2	...	$-\frac{4}{3}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f''(x)$		+	+	+
$f(x)$	0	↘	$-\frac{4\sqrt{6}}{9}$ 극소	↗

(iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} x\sqrt{x+2} = \infty$

따라서 함수

$f(x) = x\sqrt{x+2}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

367

(1) (i) 정의역은 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(0) = 1$ 이므로 그래프와 y 축의 교점의 좌표는 $(0, 1)$ 이다.

(iii) $f(-x) = e^{-x^2} = f(x)$ 이므로 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

(iv) $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ 이므로 $f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$$

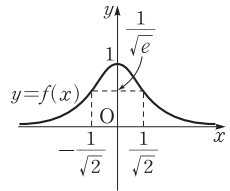
이므로 $f''(x) = 0$ 에서 $x^2 = \frac{1}{2}$

$$\therefore x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 또는 } x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

x	...	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	0	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$ 변곡점	↘	1 극대	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$ 변곡점	↗

(v) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} = 0$ 이므로 점근선은 x 축이다.

따라서 함수 $f(x) = e^{-x^2}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(x) = \ln(x^2 + 1) = 2\ln(x^2 + 1)$

(i) $x^2 + 1 > 0$ 이므로 정의역은 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(0) = 0$ 이므로 그래프는 원점을 지난다.

(iii) $f(-x) = \ln(x^2 + 1) = f(x)$ 이므로 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

(iv) $f'(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$

이므로 $f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{4(x^2 + 1) - 4x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-4(x+1)(x-1)}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

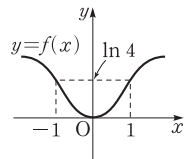
이므로 $f''(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-
$f(x)$	↘	$\ln 4$ 변곡점	↘	0 극소	↗	$\ln 4$ 변곡점	↗

(v) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 1) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x^2 + 1) = \infty$

따라서 함수

$f(x) = \ln(x^2 + 1)^2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

368

(i) 주어진 함수의 정의역은

$$\{x \mid 0 \leq x \leq \pi\}$$

(ii) $f(0) = 1$ 이므로 그래프와 y 축의 교점의 좌표는 $(0, 1)$ 이다.

또 $\cos x - \sin x = 0$ 에서 $\cos x = \sin x$

$\therefore x = \frac{\pi}{4} \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$

즉 그래프와 x 축의 교점의 좌표는 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 이다.

(iii) $f'(x) = -\sin x - \cos x$ 이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$\sin x = -\cos x$

$\therefore x = \frac{3}{4}\pi \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$

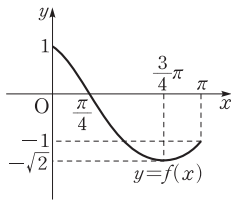
$f''(x) = -\cos x + \sin x$ 이므로 $f''(x) = 0$ 에서

$\sin x = \cos x \quad \therefore x = \frac{\pi}{4} \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$

x	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	π
$f'(x)$		-	-	-	0	+	
$f''(x)$		-	0	+	+	+	
$f(x)$	1	$\searrow$	0 변곡점	$\searrow$	$-\sqrt{2}$ 극소	$\nearrow$	-1

따라서 함수

$f(x) = \cos x - \sin x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

369

(i) 주어진 함수의 정의역은

$\{x \mid 0 \leq x \leq 2\pi\}$

(ii) $(2 - \sin x) \sin x = 0$ 에서 $\sin x = 0$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = \pi$ 또는 $x = 2\pi$

$(\because 0 \leq x \leq 2\pi)$

즉 그래프와 x 축의 교점의 좌표는 $(0, 0)$,

$(\pi, 0)$, $(2\pi, 0)$ 이다.

(iii) $f'(x) = -\cos x \sin x + (2 - \sin x) \cos x$

$= 2(1 - \sin x) \cos x$

이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$\sin x = 1$ 또는 $\cos x = 0$

$\therefore x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$

$f''(x) = 2 \times (-\cos x) \times \cos x$

$+ 2(1 - \sin x) \times (-\sin x)$

$= -2\cos^2 x - 2\sin x + 2\sin^2 x$

$= -2(1 - \sin^2 x) - 2\sin x + 2\sin^2 x$

$= 4\sin^2 x - 2\sin x - 2$

$= 2(2\sin x + 1)(\sin x - 1)$

이므로 $f''(x) = 0$ 에서

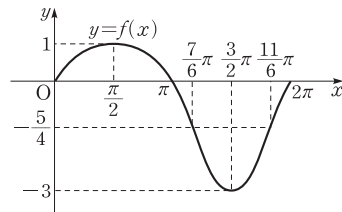
$\sin x = -\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x = 1$

$\therefore x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{7}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$

$(\because 0 \leq x \leq 2\pi)$

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{7}{6}\pi$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	$\frac{11}{6}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	-	-	0	+	+	+	
$f''(x)$		-	0	-	0	+	+	+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1 극대	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$ 변곡점	$\searrow$	-3 극소	$\nearrow$	$-\frac{5}{4}$ 변곡점	$\nearrow$	0

따라서 함수 $f(x) = (2 - \sin x) \sin x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



답 풀이 참조

연습 문제

● 본책 186~187쪽

370

전략 함수 $f(x)$ 에 대하여 어떤 구간에서 $f''(x) < 0$ 이면 곡선 $y = f(x)$ 가 이 구간에서 위로 볼록함을 이용한다.

$f(x) = e^x(x^2 + 4x + 2)$ 로 놓으면

$f'(x) = e^x(x^2 + 4x + 2) + e^x(2x + 4)$

$= e^x(x^2 + 6x + 6)$

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x(x^2+6x+6) + e^x(2x+6) \\ &= e^x(x^2+8x+12) \end{aligned}$$

곡선 $y=f(x)$ 가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$ 이어야 하므로

$$e^x(x^2+8x+12)<0$$

이때 $e^x>0$ 이므로 $x^2+8x+12<0$

$$(x+6)(x+2)<0 \quad \therefore -6<x<-2$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(-6, -2)$ 에서 위로 볼록하므로 $b-a$ 의 최댓값은

$$-2-(-6)=4$$

답 4

371

전략 이계도함수를 구하여 변곡점의 좌표를 구한다.

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} \text{로 놓으면}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x \times 2(x^2+1) \times 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } 3x^2-1=0$$

$$x^2 = \frac{1}{3} \quad \therefore x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 또는 } x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 또는 } x > \frac{\sqrt{3}}{3} \text{에서 } f''(x) > 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3} \text{에서 } f''(x) < 0$$

$$\text{즉 } x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{과 } x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{의 좌우에서 } f''(x) \text{의 부호가}$$

바뀌므로 두 변곡점의 좌표는

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$$

따라서 두 변곡점 사이의 거리는

$$\frac{\sqrt{3}}{3} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

372

전략 이계도함수를 구하여 변곡점의 좌표를 구한다.

$$f(x) = e^x - e^{-x} + 1 \text{로 놓으면}$$

$$f'(x) = e^x + e^{-x}$$

$$f''(x) = e^x - e^{-x} = e^{-x}(e^{2x}-1)$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } e^{-x}>0 \text{이므로}$$

$$e^{2x}-1=0 \quad \therefore x=0$$

$$x<0 \text{에서 } f''(x)<0$$

$$x>0 \text{에서 } f''(x)>0$$

즉 $x=0$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(0, 1)$ 이다.

점 $(0, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(0)=2$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=2x+1$$

답 $y=2x+1$

373

전략 주어진 그래프를 이용하여 $f''(x)$ 의 부호를 조사한다.

$f''(x)$ 의 부호를 조사하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$	b	$\cdots$
$f''(x)$	-	-	-	0	+	0	-

따라서 $x=0, x=b$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 x 좌표는 $0, b$ 이다.

답 $0, b$

374

전략 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$ 이고 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 x 좌표가 β 이면 $f''(\beta)=0$ 임을 이용한다.

$$f'(x) = a \cos x - b \sin x - 1 \text{이므로}$$

$$f''(x) = -a \sin x - b \cos x$$

$$f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0 \text{에서}$$

$$b-1=0 \quad \therefore b=1$$

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=0 \text{에서}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2} = 0 \quad \therefore a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{따라서 } f'(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos x - \sin x - 1 \text{이므로}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2$$

답 -2

참고 $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{\pi}{2}$ 에서 극댓값을 갖는다.

375

전략 곡선 $y=f(x)$ 가 $x=a$ 에서 x 축에 접하면 $f(a)=0$, $f'(a)=0$ 임을 이용한다.

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축의 접점의 x 좌표를 t 라 하면

$$f(t)=0, f'(t)=0$$

$$f(t)=0\text{에서 } \ln(a\cos t+2)=0$$

$$\therefore a\cos t=-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(x)=-\frac{a\sin x}{a\cos x+2}\text{이므로 } f'(t)=0\text{에서}$$

$$-\frac{a\sin t}{a\cos t+2}=0, \quad \sin t=0$$

$$\therefore t=\pi \quad (\because 0<t<2\pi)$$

$$t=\pi\text{를 } \textcircled{1}\text{에 대입하면 } -a=-1 \quad \therefore a=1$$

따라서

$$f(x)=\ln(\cos x+2), f'(x)=-\frac{\sin x}{\cos x+2}$$

이므로

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{\cos x(\cos x+2)-\sin x \times (-\sin x)}{(\cos x+2)^2} \\ &= -\frac{2\cos x+1}{(\cos x+2)^2} \end{aligned}$$

$$f''(x)=0\text{에서}$$

$$2\cos x+1=0, \quad \cos x=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore x=\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x=\frac{4}{3}\pi \quad (\because 0<x<2\pi)$$

이때 $x=\frac{2}{3}\pi$, $x=\frac{4}{3}\pi$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 y 좌표는

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=f\left(\frac{4}{3}\pi\right)=\ln \frac{3}{2} \quad \text{답 } \ln \frac{3}{2}$$

376

전략 $y=f'(x)$ 의 그래프를 이용하여 $f(x)$ 와 $f''(x)$ 의 성질을 파악한다.

$$\neg. f'(0)=f'(c)=f'(e)=f'(g)=0$$

이때 $x=0$, $x=c$, $x=g$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지만 $x=e$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 구간 (a, h) 에서 $f(x)$ 가 극값을 갖는 x 의 값은 0, c , g 의 3개이다. (거짓)

ㄴ. 구간 (b, d) 에서 $f'(x)$ 가 증가하므로

$$f''(x)>0$$

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록하다.

(참)

$$\square. f''(b)=f''(d)=f''(e)=f''(f)=0$$

이때 $x=b$, $x=d$, $x=e$, $x=f$ 의 좌우에서

$f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 $y=f(x)$ 의 그래프의 변곡점은 4개이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, $\square$ 이다.

답 ㄴ, $\square$

377

전략 주어진 곡선의 변곡점의 좌표를 a 에 대한 식으로 나타낸다.

$$f(x)=\left(\ln \frac{1}{2ax}\right)^2\text{으로 놓으면}$$

$$f(x)=(-\ln 2ax)^2=(\ln 2ax)^2$$

$$\therefore f'(x)=2 \times \ln 2ax \times \frac{2a}{2ax}$$

$$= \frac{2\ln 2ax}{x}$$

$$f''(x)=\frac{2 \times \frac{2a}{2ax} \times x - 2\ln 2ax}{x^2}$$

$$= \frac{2-2\ln 2ax}{x^2}$$

$$f''(x)=0\text{에서 } 2-2\ln 2ax=0$$

$$\ln 2ax=1, \quad 2ax=e$$

$$\therefore x=\frac{e}{2a}$$

이때 $x=\frac{e}{2a}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로

변곡점의 좌표는 $\left(\frac{e}{2a}, 1\right)$

따라서 점 $\left(\frac{e}{2a}, 1\right)$ 이 직선 $y=4x$ 위에 있으므로

$$1=4 \times \frac{e}{2a} \quad \therefore a=2e$$

답 2e

378

전략 변곡점의 좌표가 $(1, 0)$ 임을 이용한다.

$$f'(x)=3x^2+2ax\text{이므로}$$

$$f''(x)=6x+2a$$

곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 좌표가 $(1, 0)$ 이므로

$$f(1)=0, f''(1)=0$$

$$f(1)=0\text{에서 } 1+a+b=0$$

$$\therefore a+b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f''(1)=0\text{에서 } 6+2a=0 \quad \therefore a=-3$$

$a=-3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-3+b=-1 \quad \therefore b=2$$

따라서

$$f(x)=x^3-3x^2+2, f'(x)=3x^2-6x,$$

$$f''(x)=6x-6$$

이므로 $f'(x)=0$ 에서

$$3x(x-2)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

이때 $f''(0)=-6<0, f''(2)=6>0$ 이므로 함수

$f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대, $x=2$ 에서 극소이다.

따라서 극댓값은 $f(0)=2$, 극솟값은 $f(2)=-2$ 이므로 구하는 곱은

$$2 \times (-2) = -4$$

답 -4

379

전략 점 $(t, f(t))$ 가 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이 되려면 $f''(t)=0$ 이고 $x=t$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌어야 한다.

$f(x)=ax^2+\cos 2x$ 로 놓으면

$$f'(x)=2ax-2\sin 2x$$

$$f''(x)=2a-4\cos 2x$$

곡선 $y=f(x)$ 가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$ 이 실근을 갖고, 이 실근의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌어야 한다.

$$f''(x)=0\text{에서 } \cos 2x=\frac{a}{2}$$

이때 $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ 이므로

$$-1 \leq \frac{a}{2} \leq 1 \quad \therefore -2 \leq a \leq 2$$

$a=-2$ 이면 $f''(x)=-4-4\cos 2x \leq 0$

$a=2$ 이면 $f''(x)=4-4\cos 2x \geq 0$

즉 $a=-2$ 또는 $a=2$ 이면 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 곡선 $y=f(x)$ 가 변곡점을 갖지 않는다.

따라서 구하는 a 의 값의 범위는

$$-2 < a < 2$$

답 $-2 < a < 2$

다른 풀이 곡선 $y=f(x)$ 가 변곡점을 가지려면

$$(f''(x)\text{의 최솟값}) < 0 < (f''(x)\text{의 최댓값})$$

이어야 한다.

이때 $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ 이므로

$$-4 \leq -4\cos 2x \leq 4$$

$$\therefore 2a-4 \leq 2a-4\cos 2x \leq 2a+4, \text{ 즉}$$

$$2a-4 \leq f''(x) \leq 2a+4$$

따라서 $2a-4 < 0, 2a+4 > 0$ 이어야 하므로

$$-2 < a < 2$$

380

전략 $f'(x), f''(x)$ 를 구하여 곡선 $y=f(x)$ 를 그려 본다.

$f'(x)=-4xe^{-2x^2}$ 이므로 $f'(x)=0$ 에서

$$x=0$$

$$f''(x)=-4e^{-2x^2}+(-4x) \times (-4xe^{-2x^2})$$

$$=4e^{-2x^2}(4x^2-1)=4e^{-2x^2}(2x+1)(2x-1)$$

이므로 $f''(x)=0$ 에서

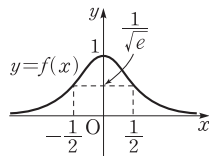
$$x=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=\frac{1}{2}$$

x	$\dots$	$-\frac{1}{2}$	$\dots$	0	$\dots$	$\frac{1}{2}$	$\dots$
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$ 변곡점	$\curvearrowright$	1 극대	$\curvearrowleft$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$ 변곡점	$\searrow$

한편 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x^2}=0, \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2x^2}=0$ 이므로 점근선은 x 축이다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 는 오른

쪽 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 1을 갖는다. (거짓)

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$ 는 x 축과 만나지 않는다. (참)

ㄷ. 구간 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 에서 $f''(x) < 0$ 이므로 곡선

$y=f(x)$ 는 위로 볼록하다. (참)

ㄹ. 곡선 $y=f(x)$ 의 두 변곡점의 x 좌표는 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
 이고 $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=2e^{-\frac{1}{2}}, f'\left(\frac{1}{2}\right)=-2e^{-\frac{1}{2}}$ 이므로
 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점에서의 접선의 기울기의
 곱은 $2e^{-\frac{1}{2}} \times (-2e^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{4}{e}$ (거짓)
 이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. **답 ㄴ, ㄷ**

05 함수의 최댓값과 최솟값

● 본책 188~193쪽

381

$$(1) f'(x) = \frac{(2x-3)(x+2)-(x^2-3x-1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2} = \frac{(x+5)(x-1)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1 (\because -1 \leq x \leq 2)$$

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{3}{4}$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 3, 최솟값은 -1 이다.

$$(2) f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \sqrt{x-1}=1$$

양변을 제곱하면

$$x-1=1 \quad \therefore x=2$$

$1 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	2	...	5
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 1, 최솟값은 0이다.

답 (1) 최댓값: 3, 최솟값: -1

(2) 최댓값: 1, 최솟값: 0

382

$$(1) f'(x) = e^{-x^2} + x \times (-2xe^{-x^2}) = (1-2x^2)e^{-x^2}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	1
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$-\frac{1}{e}$	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\searrow$	$\frac{1}{e}$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{\sqrt{2e}}$, 최솟값은

$-\frac{1}{\sqrt{2e}}$ 이다.

$$(2) f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4}$$

$$= \frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$\ln x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \sqrt{e}$$

$1 \leq x \leq e$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	$\sqrt{e}$	...	e
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	$\frac{1}{e^2}$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{2e}$, 최솟값은 0이다.

답 (1) 최댓값: $\frac{1}{\sqrt{2e}}$, 최솟값: $-\frac{1}{\sqrt{2e}}$

(2) 최댓값: $\frac{1}{2e}$, 최솟값: 0

383

$$f'(x) = 2 - \left(\ln x + x \times \frac{1}{x} \right) = 1 - \ln x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$\ln x = 1 \quad \therefore x = e$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	e	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=e$ 에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$f(e) = e$$

즉 $a=e$, $b=e$ 이므로

$$a+b=2e$$

답 2e

384

$$\begin{aligned} (1) f'(x) &= \cos x(1 - \sin x) + \sin x \times (-\cos x) \\ &= \cos x(1 - 2\sin x) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$\cos x = 0 \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = -\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{6} \left(\because -\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} \right)$$

$-\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\pi$	...	$-\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{\pi}{6}$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	$\frac{1}{4}$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{4}$, 최솟값은 -2 이다.

$$\begin{aligned} (2) f'(x) &= -\sin x \times \sin x + (1 + \cos x) \cos x \\ &= -\sin^2 x + \cos x + \cos^2 x \\ &= -(1 - \cos^2 x) + \cos x + \cos^2 x \\ &= 2\cos^2 x + \cos x - 1 \\ &= (\cos x + 1)(2\cos x - 1) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$\cos x = -1 \text{ 또는 } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \pi \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi \quad (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	π	...	$\frac{5}{3}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, 최솟값은 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 이다.

답 (1) 최댓값: $\frac{1}{4}$, 최솟값: -2

(2) 최댓값: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, 최솟값: $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

385

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}(\sin x + \cos x) + e^{-x}(\cos x - \sin x) \\ &= -2e^{-x} \sin x \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \sin x = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \pi \text{ 또는 } x = 2\pi$$

$$(\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	π	...	2π
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	1	↘	$-\frac{1}{e^\pi}$	↗	$\frac{1}{e^{2\pi}}$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 1, 최솟값은 $-\frac{1}{e^\pi}$ 이므로

$$M = 1, m = -\frac{1}{e^\pi}$$

$$\therefore M + m = 1 - \frac{1}{e^\pi}$$

답 $1 - \frac{1}{e^\pi}$

386

$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} + 2 = \ln x + 3$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad \ln x = -3 \quad \therefore x = \frac{1}{e^3}$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{1}{e^3}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$a - \frac{1}{e^3}$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{1}{e^3}$ 에서 극소이면서 최소이므로

$$a - \frac{1}{e^3} = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{e^3} \quad \text{답 } \frac{1}{e^3}$$

387

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a(x^2+x+1) - (ax+b)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{-ax^2 - 2bx + a - b}{(x^2+x+1)^2} \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극대이면서 최대이다.

$$f'(2) = 0 \text{에서} \quad \frac{-4a - 4b + a - b}{49} = 0$$

$$\therefore 3a + 5b = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$f(2) = 1 \text{에서} \quad \frac{2a+b}{7} = 1$$

$$\therefore 2a + b = 7 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 5, b = -3$

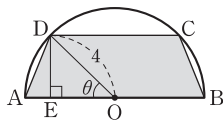
$$\therefore ab = -15 \quad \text{답 } -15$$

388

오른쪽 그림과 같이 점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 E라 하고,

$\angle DOE = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ 라 하면 $\overline{OD} = 4$ 이므로

$$\overline{DE} = 4 \sin \theta$$



또 $\overline{EO} = 4 \cos \theta$ 이므로 $\overline{DC} = 2\overline{EO} = 8 \cos \theta$

등변사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하면

$$S(\theta) = \frac{1}{2} (8 \cos \theta + 8) \times 4 \sin \theta$$

$$= 16(\cos \theta + 1) \sin \theta$$

$$\therefore S'(\theta)$$

$$= 16(-\sin \theta) \times \sin \theta + 16(\cos \theta + 1) \cos \theta$$

$$= 16(-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \cos \theta)$$

$$= 16(2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1)$$

$$= 16(\cos \theta + 1)(2 \cos \theta - 1)$$

$$S'(\theta) = 0 \text{에서} \quad \cos \theta = -1 \text{ 또는 } \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $S(\theta)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		+	0	-	
$S(\theta)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 $S(\theta)$ 는 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 에서 극대이면서 최대이므로 등변사다리꼴 ABCD의 넓이의 최댓값은

$$S\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12\sqrt{3} \quad \text{답 } 12\sqrt{3}$$

389

오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를

r ($0 < r < 2$), 높이를 h 라 하면

$$h = 2\sqrt{4 - r^2}$$

원기둥의 부피를 $V(r)$ 라 하면

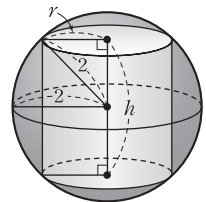
$$V(r) = \pi r^2 \times 2\sqrt{4 - r^2}$$

$$= 2\pi r^2 \sqrt{4 - r^2}$$

$$\therefore V'(r) = 4\pi r \sqrt{4 - r^2} + 2\pi r^2 \times \frac{-2r}{2\sqrt{4 - r^2}}$$

$$= \frac{4\pi r(4 - r^2) - 2\pi r^3}{\sqrt{4 - r^2}}$$

$$= \frac{2\pi r(8 - 3r^2)}{\sqrt{4 - r^2}}$$



$V'(r)=0$ 에서

$$r^2 = \frac{8}{3} \quad \therefore r = \frac{2\sqrt{6}}{3} \quad (\because 0 < r < 2)$$

$0 < r < 2$ 에서 함수 $V(r)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	...	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$	...	2
$V'(r)$		+	0	-	
$V(r)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(r)$ 는 $r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ 에서 극대이면서 최대이므로 원기둥의 부피가 최대가 되도록 하는 밑면의 반지름의 길이는 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 이다. 답 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

연습문제

● 본책 194쪽

390

전략 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호를 파악한다.

$$f'(x) = \frac{xe^{x+1} - e^{x+1}}{x^2} = \frac{e^{x+1}(x-1)}{x^2}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	e^2	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값 e^2 을 갖는다.

답 e^2

391

전략 주어진 구간에서 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값을 구한다.

$$f'(x) = a(1 - 2\cos 2x)$$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = -\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } 2x = \frac{\pi}{3} \quad (\because -\pi \leq 2x \leq \pi)$$

$$\therefore x = -\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{6}$$

$a > 0$ 이므로 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\frac{\pi}{2}$	...	$-\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\frac{a}{2}\pi$	↗	$a\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$	↘	$a\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	↗	$\frac{a}{2}\pi$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{\pi}{2}$ 에서 최솟값 $-\frac{a}{2}\pi$ 를 가지므로

$$-\frac{a}{2}\pi = -\pi \quad \therefore a = 2$$

답 2

392

전략 $x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 파악한다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2 + 5 - (x+2) \times 2x}{(x^2+5)^2} \\ &= \frac{-x^2 - 4x + 5}{(x^2+5)^2} = -\frac{(x+5)(x-1)}{(x^2+5)^2} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$ ($\because x \geq 0$)

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$\frac{2}{5}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘

이때 $0 < a < 1$ 이면 최댓값이 $f(a)$ 이고 $f(a) < \frac{1}{2}$ 이

므로 $a \geq 1$ ㉠

또 최솟값이 $\frac{2}{5}$ 이려면 $f(a) \geq \frac{2}{5}$ 이어야 하므로

$$\frac{a+2}{a^2+5} \geq \frac{2}{5}, \quad 5(a+2) \geq 2(a^2+5)$$

$$2a^2 - 5a \leq 0, \quad a(2a-5) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq \frac{5}{2} \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서} \quad 1 \leq a \leq \frac{5}{2} \quad \text{답 } 1 \leq a \leq \frac{5}{2}$$

393

전략 $f(x)$ 를 $\cos x$ 에 대한 삼차식의 꼴로 변형한 후 $\cos x=t$ 로 치환한다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^3 x + 3\sin^2 x + 1 \\ &= \cos^3 x + 3(1 - \cos^2 x) + 1 \\ &= \cos^3 x - 3\cos^2 x + 4 \end{aligned}$$

이때 $\cos x=t$ ($-1 \leq t \leq 1$)로 놓고 주어진 함수를 $g(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} g(t) &= t^3 - 3t^2 + 4 \\ \therefore g'(t) &= 3t^2 - 6t = 3t(t-2) \end{aligned}$$

$g'(t)=0$ 에서 $t=0$ ($\because -1 \leq t \leq 1$)
 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	...	0	...	1
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$	0	↗	4	↘	2

따라서 함수 $g(t)$ 의 최댓값은 4, 최솟값은 0이므로

$$\begin{aligned} M &= 4, m = 0 \\ \therefore M + m &= 4 \end{aligned}$$

답 4

394

전략 접선의 기울기를 이용하여 접선과 수직인 직선의 방정식을 구한다.

$$y=a^x \text{에서 } y'=a^x \ln a$$

즉 점 $A(t, a^t)$ 에서의 접선 l 의 기울기가 $a^t \ln a$ 이므로 점 A 를 지나고 직선 l 에 수직인 직선의 방정식은

$$y - a^t = -\frac{1}{a^t \ln a} (x - t)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{a^t \ln a} x + \frac{t}{a^t \ln a} + a^t$$

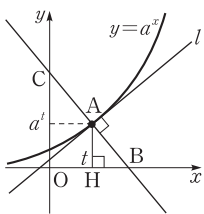
$$y=0 \text{을 대입하면 } -\frac{1}{a^t \ln a} x + \frac{t}{a^t \ln a} + a^t = 0$$

$$\therefore x = t + a^{2t} \ln a \quad \therefore B(t + a^{2t} \ln a, 0)$$

한편 점 A 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\begin{aligned} \overline{AC} : \overline{AB} &= \overline{HO} : \overline{HB} \\ &= t : a^{2t} \ln a \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{t}{a^{2t} \ln a}$$



이때 $f(t) = \frac{t}{a^{2t} \ln a}$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{a^{2t} \ln a - t \times 2a^{2t} (\ln a)^2}{(a^{2t} \ln a)^2} \\ &= \frac{1 - 2t \ln a}{a^{2t} \ln a} \end{aligned}$$

$$f'(t)=0 \text{에서 } 2t \ln a = 1$$

$$\therefore t = \frac{1}{2 \ln a}$$

$t > 0$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	$\frac{1}{2 \ln a}$	...
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(t)$ 는 $t = \frac{1}{2 \ln a}$ 에서 극대이면서 최대
 이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \ln a} &= 1, \quad \ln a = \frac{1}{2} \\ \therefore a &= \sqrt{e} \end{aligned}$$

답 ②

395

전략 $x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 t 에 대한 식으로 나타낸다.

$$f'(x) = 4x - \frac{t}{x} \text{이므로 } f'(x)=0 \text{에서}$$

$$4x = \frac{t}{x}, \quad x^2 = \frac{t}{4}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{t}}{2} (\because x > 0)$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\sqrt{t}}{2}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\sqrt{t}}{2}$ 에서 극소이면서 최소이
 므로

$$\begin{aligned} g(t) &= f\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right) = \frac{t}{2} - t(\ln \sqrt{t} - \ln 2) \\ &= \left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right)t - \frac{1}{2}t \ln t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore g'(t) &= \ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\ln t + t \times \frac{1}{t} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \ln t + \ln 2\end{aligned}$$

$$g'(t)=0 \text{에서} \quad \frac{1}{2} \ln t = \ln 2 \quad \therefore t=4$$

$t > 0$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	4	...
$g'(t)$		+	0	-
$g(t)$		↗	극대	↘

따라서 함수 $g(t)$ 는 $t=4$ 에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최대값은

$$g(4)=2$$

답 2

06 방정식과 부등식의 활용

● 본책 195~199쪽

396

$$(1) x = \ln x \text{에서} \quad \ln x - x = 0$$

$$f(x) = \ln x - x \text{로 놓으면}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad x=1$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

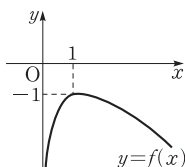
x	0	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	-1	↘

$$\text{이때} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x - x) = -\infty \text{이므로}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 만나지 않으므로 방정식 $f(x)=0$, 즉 $\ln x - x = 0$ 의 실근의 개수는 0이다.



$$(2) f(x) = xe^{-x} \text{으로 놓으면}$$

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

$$f'(x)=0 \text{에서} e^{-x} > 0 \text{이므로}$$

$$1-x=0 \quad \therefore x=1$$

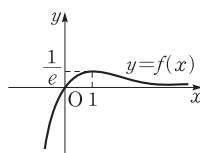
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘

$$\text{이때} f(0)=0 \text{이고}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} \\ &= -\infty\end{aligned}$$



이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 위의 그림과 같다. 따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 한 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$, 즉 $xe^{-x}=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

답 (1) 0 (2) 1

397

$$\sqrt{x+1} - x + k = 0 \text{에서} \quad k = x - \sqrt{x+1}$$

$$f(x) = x - \sqrt{x+1} \text{로 놓으면}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{2\sqrt{x+1} - 1}{2\sqrt{x+1}}\end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \text{에서} \quad \sqrt{x+1} = \frac{1}{2}$$

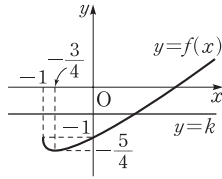
$$x+1 = \frac{1}{4} \quad \therefore x = -\frac{3}{4}$$

$x \geq -1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	$-\frac{3}{4}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	-1	↘	$-\frac{5}{4}$	↗

이때 $f(0) = -1$ 이고

$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x+1}) = \infty$ 이므로
함수 $y = f(x)$ 의 그래프
는 오른쪽 그림과 같다.



주어진 방정식의 서로 다른

실근의 개수는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$
의 교점의 개수와 같으므로

(i) $-\frac{5}{4} < k \leq -1$ 이면 2

(ii) $k = -\frac{5}{4}$ 또는 $k > -1$ 이면 1

(iii) $k < -\frac{5}{4}$ 이면 0

답 풀이 참조

398

$2\ln x = x + k$ 에서 $2\ln x - x = k$

방정식 $2\ln x - x = k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1이
려면 함수 $y = 2\ln x - x$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 한
점에서 만나야 한다.

$f(x) = 2\ln x - x$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$$

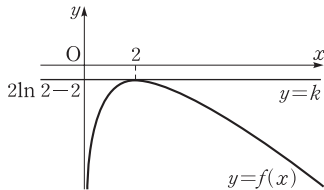
$f'(x) = 0$ 에서 $2 - x = 0 \quad \therefore x = 2$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면
다음과 같다.

x	0	...	2	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	$2\ln 2 - 2$	↘

이때 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2\ln x - x) = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} (2\ln x - x) = -\infty$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그
래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 한 점
에서 만나려면

$$k = 2\ln 2 - 2$$

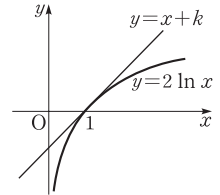
답 $2\ln 2 - 2$

다른 풀이 $2\ln x = x + k$ 에서

$g(x) = 2\ln x$, $h(x) = x + k$ 로 놓으면

$$g'(x) = \frac{2}{x}, \quad h'(x) = 1$$

방정식 $2\ln x = x + k$ 의 서로
다른 실근의 개수가 1이려면
함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 직
선 $y = h(x)$ 가 접해야 한다.



접점의 x 좌표를 t 라 하면

$g(t) = h(t)$ 에서

$$2\ln t = t + k$$

..... ㉠

$g'(t) = h'(t)$ 에서

$$\frac{2}{t} = 1 \quad \therefore t = 2$$

$t = 2$ 를 ㉠에 대입하면

$$2\ln 2 = 2 + k \quad \therefore k = 2\ln 2 - 2$$

399

방정식 $2\sqrt{x+1} - x = a$ 가 서로 다른 두 실근을 가지
려면 함수 $y = 2\sqrt{x+1} - x$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가
두 점에서 만나야 한다.

$f(x) = 2\sqrt{x+1} - x$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1 = \frac{1 - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$$

$f'(x) = 0$ 에서 $\sqrt{x+1} = 1$

$$x + 1 = 1 \quad \therefore x = 0$$

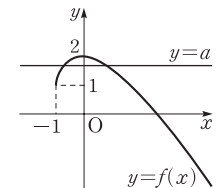
$x \geq -1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내
면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	1	↗	2	↘

이때

$\lim_{x \rightarrow \infty} (2\sqrt{x+1} - x) = -\infty$ 이

므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는
오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프

와 직선 $y = a$ 가 두 점에서 만나려면

$$1 \leq a < 2$$

답 $1 \leq a < 2$

400

$$(k-2)e^x - x + 1 = 0 \text{에서} \quad (k-2)e^x = x - 1$$

$$\therefore k-2 = e^{-x}(x-1)$$

주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y = e^{-x}(x-1)$ 의 그래프와 직선 $y = k-2$ 가 만나야 한다.

$f(x) = e^{-x}(x-1)$ 로 놓으면

$$f'(x) = -e^{-x}(x-1) + e^{-x} = -e^{-x}(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad x-2=0 \quad \therefore x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e^2}$	$\searrow$

이때 $f(0) = -1$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}(x-1) = 0,$$

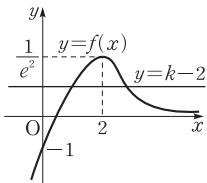
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}(x-1) = -\infty \text{이므로}$$

로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k-2$ 가 만나려면

$$k-2 \leq \frac{1}{e^2} \quad \therefore k \leq \frac{1}{e^2} + 2$$

즉 실수 k 의 최댓값은 $\frac{1}{e^2} + 2$ 이다. ▶ $\frac{1}{e^2} + 2$



401

$$e^x \geq x+1 \text{에서} \quad e^x - x - 1 \geq 0$$

$$f(x) = e^x - x - 1 \text{로 놓으면} \quad f'(x) = e^x - 1$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad e^x = 1 \quad \therefore x = 0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최솟값 0을 가지므로

$$f(x) \geq 0, \text{ 즉 } e^x - x - 1 \geq 0$$

즉 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $e^x \geq x+1$ 이 성립한다. ▶ 풀이 참조

402

$$(1) \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2} \text{에서}$$

$$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} > 0$$

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \text{으로 놓으면}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}$$

$x > 0$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

이때 $f(0) = 0$ 이므로

$$f(x) > 0, \text{ 즉 } \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} > 0$$

따라서 $x > 0$ 일 때, 부등식 $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$ 이 성립한다.

$$(2) f(x) = (x-2)e^x + x + 2 \text{로 놓으면}$$

$$f'(x) = e^x + (x-2)e^x + 1 = (x-1)e^x + 1$$

$$f''(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$$

즉 $x > 0$ 에서 $f''(x) > 0$ 이므로 함수 $f'(x)$ 는 증가한다.

$$\text{이때 } f'(0) = 0 \text{이므로} \quad f'(x) > 0$$

즉 $x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가하고 $f(0) = 0$ 이므로 $f(x) > 0$

따라서 $x > 0$ 일 때, 부등식 $(x-2)e^x + x + 2 > 0$ 이 성립한다.

▶ 풀이 참조

403

$$\ln(e^x - 1) \leq 2x + a \text{에서}$$

$$2x + a - \ln(e^x - 1) \geq 0$$

$$f(x) = 2x + a - \ln(e^x - 1) \text{로 놓으면}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{e^x - 2}{e^x - 1}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad e^x = 2 \quad \therefore x = \ln 2$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\ln 2$	$\cdots$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$2 \ln 2 + a$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\ln 2$ 에서 최솟값 $2\ln 2+a$ 를 가지므로 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$2\ln 2 + a \geq 0$$

$$\therefore a \geq -2\ln 2$$

$$\text{답 } a \geq -2\ln 2$$

404

$$f(x) > g(x) \text{에서 } f(x) - g(x) > 0$$

$$h(x) = f(x) - g(x) = \cos x + x^2 - k \text{로 놓으면}$$

$$h'(x) = -\sin x + 2x$$

$$h''(x) = -\cos x + 2$$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 에서 $1 \leq -\cos x + 2 \leq 3$ 이므로

$$h''(x) > 0$$

즉 $x > 0$ 에서 $h''(x) > 0$ 이므로 함수 $h'(x)$ 는 증가한다.

$$\text{이때 } h'(0) = 0 \text{이므로 } h'(x) > 0$$

따라서 $x > 0$ 에서 함수 $h(x)$ 는 증가하므로 $h(x) > 0$

이 성립하려면 $h(0) \geq 0$

$$1 - k \geq 0 \quad \therefore k \leq 1$$

$$\text{답 } k \leq 1$$

07 속도와 가속도

● 본책 200~202쪽

405

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = \cos t + \sin t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\sin t + \cos t$$

따라서 $t = \pi$ 에서의 점 P의 속도는 -1

$t = \pi$ 에서의 점 P의 가속도는 -1

$$\text{답 속도: } -1, \text{ 가속도: } -1$$

406

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = \cos t + 2kt$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\sin t + 2k$$

$t = \frac{\pi}{2}$ 에서의 점 P의 속도는 $k\pi$

즉 $k\pi = 2\pi$ 이므로 $k = 2$

따라서 $a = -\sin t + 4$ 이므로 $t = \pi$ 에서의 점 P의 가속도는 4이다.

$$\text{답 } 4$$

407

$$x = \ln t^4 - t^2 = 4\ln t - t^2$$

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{4}{t} - 2t$$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$v = 0$ 에서

$$\frac{4}{t} - 2t = 0, \quad t^2 = 2$$

$$\therefore t = \sqrt{2} \quad (\because t > 0)$$

따라서 $t = \sqrt{2}$ 에서의 점 P의 위치는

$$4\ln \sqrt{2} - 2 = 2\ln 2 - 2$$

$$\text{답 } 2\ln 2 - 2$$

408

$$\frac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t),$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t)$$

이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는

$$(e^t (\cos t - \sin t), e^t (\sin t + \cos t))$$

따라서 $t = 2\pi$ 에서의 점 P의 속도는

$$(e^{2\pi}, e^{2\pi})$$

또

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^t (\cos t - \sin t) + e^t (-\sin t - \cos t)$$

$$= -2e^t \sin t,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = e^t (\sin t + \cos t) + e^t (\cos t - \sin t)$$

$$= 2e^t \cos t$$

이므로 시각 t 에서의 점 P의 가속도는

$$(-2e^t \sin t, 2e^t \cos t)$$

따라서 $t = 2\pi$ 에서의 점 P의 가속도는

$$(0, 2e^{2\pi})$$

$$\text{답 속도: } (e^{2\pi}, e^{2\pi}), \text{ 가속도: } (0, 2e^{2\pi})$$

409

$$\frac{dx}{dt} = 2t + k, \quad \frac{dy}{dt} = 4kt + 4$$

이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는

$$(2t + k, 4kt + 4)$$

따라서 $t=1$ 에서의 점 P의 속도는

$$(2 + k, 4k + 4)$$

이때 $t=1$ 에서의 점 P의 속력이 $4\sqrt{10}$ 이므로

$$\sqrt{(2+k)^2 + (4k+4)^2} = 4\sqrt{10}$$

$$17k^2 + 36k + 20 = 160$$

$$17k^2 + 36k - 140 = 0$$

$$(17k + 70)(k - 2) = 0$$

$$\therefore k = 2 \quad (\because k > 0)$$

답 2

410

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = \sin t$$

이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는

$$(1 - \cos t, \sin t)$$

따라서 시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2} = \sqrt{2(1 - \cos t)}$$

$0 \leq t \leq 2\pi$ 에서 $-1 \leq \cos t \leq 1$ 이므로 점 P의 속력은

$\cos t = -1$, 즉 $t = \pi$ 일 때 최대이다.

$t = \pi$ 에서의 점 P의 위치는 $(\pi, 2)$

한편 $\frac{d^2x}{dt^2} = \sin t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \cos t$ 이므로 시각 t 에서의

점 P의 가속도는 $(\sin t, \cos t)$

따라서 $t = \pi$ 에서의 점 P의 가속도는

$$(0, -1)$$

답 위치: $(\pi, 2)$, 가속도: $(0, -1)$

연습문제

● 본책 203~204쪽

411

전략 $y = e^x + e^{-x} - 3$ 의 그래프와 x 축의 교점의 개수를 구한다.

$$e^x + e^{-x} = 3 \text{에서} \quad e^x + e^{-x} - 3 = 0$$

$f(x) = e^x + e^{-x} - 3$ 으로 놓으면

$$f'(x) = e^x - e^{-x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad e^{2x} = 1 \quad \therefore x = 0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

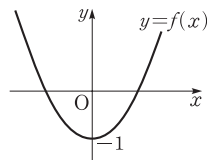
x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + e^{-x} - 3) = \infty$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + e^{-x} - 3) = \infty$ 이므로

로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 x 축과 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x) = 0$, 즉 $e^x + e^{-x} - 3 = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

답 2

412

전략 주어진 방정식을 $f(x) = k$ 의 꼴로 변형한 후 $y = f(x)$ 의 그래프를 그려 본다.

$$\frac{\ln x}{x} = kx \text{에서} \quad \frac{\ln x}{x^2} = k$$

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수

$y = \frac{\ln x}{x^2}$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 두 점에서 만나야 한다.

$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad \ln x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \sqrt{e}$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$ 이므로

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는
오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 두 점
에서 만나려면

$$0 < k < \frac{1}{2e}$$

답 $0 < k < \frac{1}{2e}$

다른 풀이 $\frac{\ln x}{x} = kx$ 에서 $\ln x = kx^2$

$f(x) = \ln x$, $g(x) = kx^2$ 으로 놓으면

$$f'(x) = \frac{1}{x}, g'(x) = 2kx$$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$
의 그래프가 $x=a$ 에서 접한
다고 하면 $f(a)=g(a)$ 에서

$$\ln a = ka^2 \quad \dots\dots ㉠$$

$f'(a)=g'(a)$ 에서

$$\frac{1}{a} = 2ka$$

$$\therefore k = \frac{1}{2a^2}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

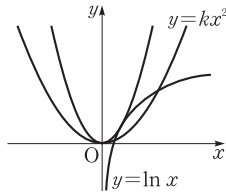
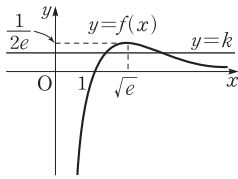
$$\ln a = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \sqrt{e}$$

$a = \sqrt{e}$ 를 ㉡에 대입하면

$$k = \frac{1}{2e}$$

따라서 방정식 $\ln x = kx^2$ 이 서로 다른 두 실근을 가지
려면

$$0 < k < \frac{1}{2e}$$



$\dots\dots ㉡$

413

전략 함수 $f(x)$ 에 대하여 어떤 구간에서 $f'(x) > 0$ 이면 이 구
간에서 $f(x)$ 는 증가함을 이용한다.

$$e^{-x} > 1-x \text{에서} \quad e^{-x} + x - 1 > 0$$

$f(x) = e^{-x} + x - 1$ 로 놓으면

$$f'(x) = -e^{-x} + 1$$

$x > 0$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

이때 $f(0) = 0$ 이므로

$$f(x) > 0, \text{ 즉 } e^{-x} + x - 1 > 0$$

따라서 $x > 0$ 일 때, 부등식 $e^{-x} > 1-x$ 가 성립한다.

답 풀이 참조

414

전략 주어진 부등식을 $f(x) \geq 0$ 의 꼴로 변형한 후 $x > 0$ 에서
 $f(x)$ 의 최솟값을 구한다.

$$x \ln x \geq x + a \text{에서} \quad x \ln x - x - a \geq 0$$

$f(x) = x \ln x - x - a$ 로 놓으면

$$f'(x) = \ln x$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$\ln x = 0 \quad \therefore x = 1$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면
다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$-1-a$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값 $-1-a$ 를 가
지므로 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$-1-a \geq 0 \quad \therefore a \leq -1$$

답 $a \leq -1$

415

전략 $t=1$ 에서의 속도를 이용하여 상수 k 의 값을 구한다.

$$x = \ln t^2 + e^t - kt^2 = 2 \ln t + e^t - kt^2$$

점 P의 시각 t 에서의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{2}{t} + e^t - 2kt$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{2}{t^2} + e^t - 2k$$

$t=1$ 에서의 점 P의 속도가 e 이므로

$$2 + e - 2k = e \quad \therefore k = 1$$

따라서 $a = -\frac{2}{t^2} + e^t - 2$ 이므로 $t=2$ 에서의 점 P의
가속도는

$$e^2 - \frac{5}{2}$$

답 $e^2 - \frac{5}{2}$

416

전략 $x=0, y=0$ 을 만족시키는 t 의 값을 구한다.

$x=0, y=0$ 에서

$$\cos 3t=0, \sin 3t=1$$

$$t>0\text{이므로 } 3t=\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi, \dots$$

$$\therefore t=\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \dots$$

따라서 점 P가 두 번째로 원점을 지나는 시각은 $\frac{5}{6}\pi$ 이다.

이때 $\frac{dx}{dt}=-3\sin 3t, \frac{dy}{dt}=-3\cos 3t$ 에서

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-9\cos 3t, \frac{d^2y}{dt^2}=9\sin 3t$$

이므로 시각 t 에서의 점 P의 가속도는

$$(-9\cos 3t, 9\sin 3t)$$

따라서 $t=\frac{5}{6}\pi$ 에서의 점 P의 가속도는

$$(0, 9) \quad \text{답 } (0, 9)$$

417

전략 $y=x^2-5x+2\ln x$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수가 3이 되도록 하는 t 의 값의 범위를 구한다.

$g(x)=x^2-5x+2\ln x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x-5+\frac{2}{x} \\ &= \frac{2x^2-5x+2}{x} \\ &= \frac{(2x-1)(x-2)}{x} \end{aligned}$$

$g'(x)=0$ 에서

$$(2x-1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=2$$

$x>0$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...	2	...
$g'(x)$		+	0	-	0	+
$g(x)$		↗	$-\frac{9}{4}-2\ln 2$	↘	$-6+2\ln 2$	↗

이때 $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)=-\infty,$

$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)=\infty$ 이므로

함수 $y=g(x)$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같다.

$f(t)=3$ 이라면 함수

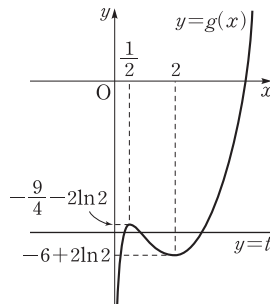
$y=g(x)$ 의 그래프와

직선 $y=t$ 의 교점의 개

수가 3이어야 하므로

$$-6+2\ln 2 < t < -\frac{9}{4}-2\ln 2$$

$$\text{답 } -6+2\ln 2 < t < -\frac{9}{4}-2\ln 2$$



418

전략 주어진 부등식을 $h(x)>0$ 의 꼴로 변형한 후 $x>0$ 에서 $h'(x)$ 의 부호를 조사한다.

$f(x)>g(x)$ 에서

$$x^2-x+2>ke^{-x}$$

이때 $e^x>0$ 이므로 양변에 e^x 을 곱하면

$$(x^2-x+2)e^x>k$$

$$\therefore (x^2-x+2)e^x-k>0$$

$h(x)=(x^2-x+2)e^x-k$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} h'(x) &= (2x-1)e^x+(x^2-x+2)e^x \\ &= e^x(x^2+x+1) \end{aligned}$$

$x>0$ 에서 $h'(x)>0$ 이므로 함수 $h(x)$ 는 증가한다.

따라서 $x>0$ 에서 $h(x)>0$ 이 성립하려면

$$h(0)\geq 0, \quad 2-k\geq 0$$

$$\therefore k\leq 2$$

즉 실수 k 의 최댓값은 2이다.

답 2

419

전략 점 P의 속력을 t 와 a 에 대한 식으로 나타낸다.

$$\frac{dx}{dt}=-\sin t+a, \frac{dy}{dt}=\cos t$$

따라서 시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\begin{aligned} &\sqrt{(-\sin t+a)^2+(\cos t)^2} \\ &=\sqrt{a^2-2a\sin t+1} \end{aligned}$$

이때 $a > 0$ 이고, $-1 \leq \sin t \leq 1$ 이므로 점 P의 속력은 $\sin t = 1$ 일 때 최소이다.

$$\begin{aligned} \text{즉 } \sqrt{a^2 - 2a + 1} &= 5 \text{이므로} & |a - 1| &= 5 \\ \therefore a &= 6 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

답 6

420

전략 점 P의 속력을 t 에 대한 식으로 나타낸 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \cos^2 t - \sin^2 t = 2 \cos^2 t$$

$$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t$$

따라서 시간 t 에서의 점 P의 속력은

$$\begin{aligned} \sqrt{(2 \cos^2 t)^2 + (\sec^2 t)^2} &= \sqrt{4 \cos^4 t + \sec^4 t} \\ &= \sqrt{4 \cos^4 t + \frac{1}{\cos^4 t}} \end{aligned}$$

이때 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos^4 t > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} 4 \cos^4 t + \frac{1}{\cos^4 t} &\geq 2 \sqrt{4 \cos^4 t \times \frac{1}{\cos^4 t}} \\ &= 2 \times 2 = 4 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $\cos^4 t = \frac{1}{2}$ 일 때 성립)

따라서 구하는 속력의 최솟값은

$$\sqrt{4} = 2$$

답 ③

개념 노트

산술평균과 기하평균의 관계

$a > 0, b > 0$ 일 때

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{일 때 성립})$$

421

전략 주어진 방정식을 $h(x) = \frac{1}{k}$ 의 꼴로 변형한 후 $y = h(x)$ 의 그래프를 그려 본다.

$$f(x) = g(x) \text{에서} \quad e^x = k \sin x$$

$$\therefore \frac{\sin x}{e^x} = \frac{1}{k}$$

방정식 $f(x) = g(x)$ 의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3이려면 $x > 0$ 일 때 함수 $y = \frac{\sin x}{e^x}$ 의 그래프와 직선

$y = \frac{1}{k}$ 이 세 점에서 만나야 한다.

$h(x) = \frac{\sin x}{e^x}$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\cos x \times e^x - \sin x \times e^x}{e^{2x}} \\ &= \frac{\cos x - \sin x}{e^x} \end{aligned}$$

$x > 0$ 일 때, $h'(x) = 0$ 에서

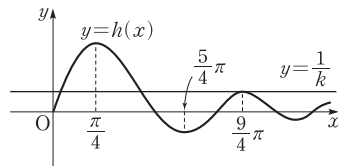
$$\sin x = \cos x$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \dots$$

$x > 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{5}{4}\pi$	...	$\frac{9}{4}\pi$	...
$h'(x)$		+	0	-	0	+	0	-
$h(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $x > 0$ 일 때 함수 $y = h(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 $y = h(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{k}$ 이 세 점에서 만나야 하므로

$$\frac{1}{k} = h\left(\frac{9}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}}$$

$$\therefore k = \sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$$

답 ④

422

전략 직선 OP와 직선 AB의 교점이 점 Q임을 이용하여 점 Q의 위치를 t 에 대한 식으로 나타낸다.

t 초 후의 호 AP의 길이가 t 이므로

$$\angle AOP = t$$

즉 직선 OP의 기울기는 $\tan t$ 이므로 직선 OP의 방정식은

$$y = (\tan t)x$$

또 직선 AB의 방정식은

$$y = -x + 1$$

따라서 점 Q는 두 직선 $y = (\tan t)x$ 와 $y = -x + 1$ 의 교점이므로 점 Q의 x 좌표는 $(\tan t)x = -x + 1$ 에서

$$x = \frac{1}{1 + \tan t}$$

즉 점 Q의 t 초 후의 위치 (x, y) 는

$$x = \frac{1}{1 + \tan t}, y = \frac{\tan t}{1 + \tan t}$$

이때

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-\sec^2 t}{(1 + \tan t)^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{\sec^2 t(1 + \tan t) - \tan t \times \sec^2 t}{(1 + \tan t)^2} \\ &= \frac{\sec^2 t}{(1 + \tan t)^2} \end{aligned}$$

이므로 t 초 후의 점 Q의 속도는

$$\left(\frac{-\sec^2 t}{(1 + \tan t)^2}, \frac{\sec^2 t}{(1 + \tan t)^2} \right)$$

한편 t_1 초 후의 점 P의 x 좌표를 $\frac{3}{5}$ 이라 하면

$\cos t_1 = \frac{3}{5}$ 이므로

$$\sin t_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5},$$

$$\sec^2 t_1 = \frac{1}{\cos^2 t_1} = \frac{25}{9}$$

$$\therefore \tan t_1 = \frac{\sin t_1}{\cos t_1} = \frac{4}{3}$$

따라서 점 P의 x 좌표가 $\frac{3}{5}$ 인 순간, 즉 t_1 초 후의 점 Q의 속도는

$$\left(\frac{-\frac{25}{9}}{\left(\frac{7}{3}\right)^2}, \frac{\frac{25}{9}}{\left(\frac{7}{3}\right)^2} \right), \text{ 즉 } \left(-\frac{25}{49}, \frac{25}{49} \right)$$

즉 $a = -\frac{25}{49}$, $b = \frac{25}{49}$ 이므로

$$b - a = \frac{50}{49}$$

답 $\frac{50}{49}$

1 여러 가지 함수의 적분

III. 적분법

01 여러 가지 함수의 부정적분

● 본책 206~211쪽

423

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{4}{x^3} dx &= 4 \int x^{-3} dx \\ &= 4 \times \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C \\ &= -2x^{-2} + C = -\frac{2}{x^2} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx &= \int x^{-\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{1}{-\frac{3}{2}+1} x^{-\frac{3}{2}+1} + C \\ &= -2x^{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int (\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}) dx &= \int x^{\frac{1}{3}} dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\frac{1}{3}+1} x^{\frac{1}{3}+1} + \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C \\ &= \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{3}{4} x^3 \sqrt[3]{x} + \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int \frac{x^3 - x + 2}{x^2} dx &= \int \left(x - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx \\ &= \int x dx - \int \frac{1}{x} dx + 2 \int x^{-2} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 - \ln |x| + 2 \times \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C \\ &= \frac{1}{2} x^2 - \ln |x| - \frac{2}{x} + C \end{aligned}$$

답 풀이 참조

424

$$\begin{aligned} (1) \int 2e^{x+3} dx &= \int 2e^x e^3 dx = 2e^3 \int e^x dx \\ &= 2e^3 e^x + C = 2e^{x+3} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int 5^{2x-1} dx &= \int (5^2)^x \times \frac{1}{5} dx \\
 &= \frac{1}{5} \int 25^x dx = \frac{25^x}{5 \ln 25} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int (e^{2x} - e^x + 3) dx \\
 &= \int (e^2)^x dx - \int e^x dx + 3 \int dx \\
 &= \frac{(e^2)^x}{\ln e^2} - e^x + 3x + C \\
 &= \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + 3x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \int (2^{x+2} + 3^{2x}) dx &= \int \{2^x \times 2^2 + (3^2)^x\} dx \\
 &= 4 \int 2^x dx + \int 9^x dx \\
 &= 4 \times \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{9^x}{\ln 9} + C \\
 &= \frac{2^{x+2}}{\ln 2} + \frac{9^x}{\ln 9} + C
 \end{aligned}$$

 풀이 참조



개념 노트

0이 아닌 상수 a 에 대하여

$$\begin{aligned}
 \int e^{ax} dx &= \int (e^a)^x dx \\
 &= \frac{(e^a)^x}{\ln e^a} + C = \frac{1}{a} e^{ax} + C
 \end{aligned}$$

425

$$\begin{aligned}
 (1) \int (2 \cos x + 5 \sin x) dx \\
 &= 2 \int \cos x dx + 5 \int \sin x dx \\
 &= 2 \sin x - 5 \cos x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int (\sec^2 x - 3 \csc^2 x) dx \\
 &= \int \sec^2 x dx - 3 \int \csc^2 x dx \\
 &= \tan x + 3 \cot x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int \sec x (2 \tan x + \sec x) dx \\
 &= \int (2 \sec x \tan x + \sec^2 x) dx \\
 &= 2 \int \sec x \tan x dx + \int \sec^2 x dx \\
 &= 2 \sec x + \tan x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \int \frac{\cos^3 x + 2}{\cos^2 x} dx \\
 &= \int \left(\cos x + \frac{2}{\cos^2 x} \right) dx \\
 &= \int \cos x dx + 2 \int \sec^2 x dx \\
 &= \sin x + 2 \tan x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \int \frac{\cot x - \csc x}{\sin x} dx \\
 &= \int (\cot x - \csc x) \csc x dx \\
 &= \int (\cot x \csc x - \csc^2 x) dx \\
 &= \int \cot x \csc x dx - \int \csc^2 x dx \\
 &= -\csc x + \cot x + C
 \end{aligned}$$

 풀이 참조

426

$$\begin{aligned}
 (1) \int \left(x + \frac{1}{x^2} \right) \left(x - \frac{1}{x^2} \right) dx \\
 &= \int \left(x^2 - \frac{1}{x^4} \right) dx \\
 &= \int x^2 dx - \int x^{-4} dx \\
 &= \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{3x^3} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int \frac{x^3 + 3x^2 - x + 2}{x^2} dx \\
 &= \int \left(x + 3 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx \\
 &= \int x dx + 3 \int dx - \int \frac{1}{x} dx + 2 \int x^{-2} dx \\
 &= \frac{1}{2} x^2 + 3x - \ln |x| - \frac{2}{x} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int \frac{(\sqrt[3]{x} + 1)^3}{x} dx \\
 &= \int \frac{x + 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + 1}{x} dx \\
 &= \int \left(1 + 3x^{-\frac{1}{3}} + 3x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{x} \right) dx \\
 &= \int dx + 3 \int x^{-\frac{1}{3}} dx + 3 \int x^{-\frac{2}{3}} dx + \int \frac{1}{x} dx
 \end{aligned}$$

$$= x + \frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}} + 9x^{\frac{1}{3}} + \ln|x| + C$$

$$= x + \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + 9\sqrt[3]{x} + \ln|x| + C$$

답 풀이 참조

427

$$f(x) = \int \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} dx$$

$$= \int \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2} dx$$

$$= \int (\sqrt{x}+2) dx = \int (x^{\frac{1}{2}}+2) dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x + C$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2x + C$$

이때 $f(1) = \frac{2}{3}$ 이므로

$$\frac{2}{3} + 2 + C = \frac{2}{3} \quad \therefore C = -2$$

따라서 $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2x - 2$ 이므로

$$f(9) = 34$$

답 34

428

$$(1) \int \frac{xe^x - 2ex - 1}{x} dx$$

$$= \int \left(e^x - 2e - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \int e^x dx - 2e \int dx - \int \frac{1}{x} dx$$

$$= e^x - 2ex - \ln|x| + C$$

$$(2) \int \frac{8^x + 1}{2^x + 1} dx$$

$$= \int \frac{(2^x + 1)(4^x - 2^x + 1)}{2^x + 1} dx$$

$$= \int (4^x - 2^x + 1) dx$$

$$= \int 4^x dx - \int 2^x dx + \int dx$$

$$= \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{2^x}{\ln 2} + x + C$$

$$(3) \int (2^x + 2^{-x})^2 dx$$

$$= \int (4^x + 4^{-x} + 2) dx$$

$$= \int 4^x dx + \int \left(\frac{1}{4}\right)^x dx + 2 \int dx$$

$$= \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^x}{\ln \frac{1}{4}} + 2x + C$$

$$= \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{4^{-x}}{\ln 4} + 2x + C$$

답 풀이 참조

429

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 2e^x(e^x - 1) dx$$

$$= \int (2e^{2x} - 2e^x) dx$$

$$= 2 \int (e^2)^x dx - 2 \int e^x dx$$

$$= 2 \times \frac{(e^2)^x}{\ln e^2} - 2e^x + C$$

$$= e^{2x} - 2e^x + C$$

이때 $f(0) = 1$ 이므로

$$1 - 2 + C = 1 \quad \therefore C = 2$$

따라서 $f(x) = e^{2x} - 2e^x + 2$ 이므로

$$f(1) = e^2 - 2e + 2$$

답 $e^2 - 2e + 2$

430

$$(1) \int (\tan x + 3) \cos x dx$$

$$= \int \left(\frac{\sin x}{\cos x} + 3 \right) \cos x dx$$

$$= \int (\sin x + 3 \cos x) dx$$

$$= \int \sin x dx + 3 \int \cos x dx$$

$$= -\cos x + 3 \sin x + C$$

$$(2) \int 3 \cot^2 x dx = \int 3(\csc^2 x - 1) dx$$

$$= 3 \int \csc^2 x dx - 3 \int dx$$

$$= -3 \cot x - 3x + C$$

$$\begin{aligned}
(3) \int \frac{1}{1+\cos x} dx &= \int \frac{1-\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)} dx \\
&= \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} dx \\
&= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x} \right) dx \\
&= \int (\csc^2 x - \csc x \cot x) dx \\
&= \int \csc^2 x dx - \int \csc x \cot x dx \\
&= -\cot x + \csc x + C
\end{aligned}$$

답 풀이 참조

431

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int \frac{1-\cos^3 x}{1-\sin^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x} dx \\
&= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x \right) dx \\
&= \int (\sec^2 x - \cos x) dx \\
&= \int \sec^2 x dx - \int \cos x dx \\
&= \tan x - \sin x + C
\end{aligned}$$

이때 $f(0)=0$ 이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=\tan x - \sin x$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

02 여러 가지 함수의 정적분

● 본책 212~218쪽

432

$$\begin{aligned}
(1) \int_1^e \frac{3x^3-2x^2+1}{x} dx &= \int_1^e \left(3x^2-2x+\frac{1}{x} \right) dx \\
&= \left[x^3-x^2+\ln|x| \right]_1^e \\
&= e^3-e^2+1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \int_1^4 (\sqrt{x}-2)^2 dx &= \int_1^4 (x-4\sqrt{x}+4) dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x \right]_1^4 \\
&= \left(8 - \frac{64}{3} + 16 \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{8}{3} + 4 \right) = \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

답 (1) e^3-e^2+1 (2) $\frac{5}{6}$

433

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{k}{\sqrt{x}} \right) dx &= \int_1^4 (x^{\frac{1}{2}} + kx^{-\frac{1}{2}}) dx \\
&= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2kx^{\frac{1}{2}} \right]_1^4 \\
&= \frac{16}{3} + 4k - \left(\frac{2}{3} + 2k \right) \\
&= \frac{14}{3} + 2k
\end{aligned}$$

즉 $\frac{14}{3} + 2k = 4$ 이므로

$$2k = -\frac{2}{3} \quad \therefore k = -\frac{1}{3} \quad \text{답 } -\frac{1}{3}$$

434

$$\begin{aligned}
(1) \int_0^1 (e^x + e^{-x})^2 dx &= \int_0^1 (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx \\
&= \left[\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^1 \\
&= \left(\frac{1}{2}e^2 + 2 - \frac{1}{2}e^{-2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2e^2} + 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \int_0^1 (2^x-1)(4^x+2^x+1) dx &= \int_0^1 (8^x-1) dx = \left[\frac{8^x}{\ln 8} - x \right]_0^1 \\
&= \left(\frac{8}{\ln 8} - 1 \right) - \frac{1}{\ln 8} \\
&= \frac{7}{\ln 8} - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{1-e^x} dx + \int_{\ln 3}^{\ln 2} \frac{e^{3t}}{1-e^t} dt \\
 &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{1-e^x} dx - \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{3x}}{1-e^x} dx \\
 &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1-e^{3x}}{1-e^x} dx \\
 &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{(1-e^x)(1+e^x+e^{2x})}{1-e^x} dx \\
 &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} (1+e^x+e^{2x}) dx \\
 &= \left[x + e^x + \frac{1}{2} e^{2x} \right]_{\ln 2}^{\ln 3} \\
 &= \left(\ln 3 + 3 + \frac{9}{2} \right) - \left(\ln 2 + 2 + 2 \right) \\
 &= \ln \frac{3}{2} + \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos x + 1)^2 dx + \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 1)^2 dx \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos x + 1)^2 dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos x - 1)^2 dx \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \{ (\cos x + 1)^2 - (\cos x - 1)^2 \} dx \\
 &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx \\
 &= 4 \left[\sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
 &= 4 \times (-1) = -4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{답} \quad (1) \quad & \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2e^2} + 2 \quad (2) \quad \frac{7}{\ln 8} - 1 \\
 (3) \quad & \ln \frac{3}{2} + \frac{7}{2} \quad (4) \quad -4
 \end{aligned}$$

435

$$\begin{aligned}
 \int_0^k \frac{1}{1-\sin^2 x} dx &= \int_0^k \frac{1}{\cos^2 x} dx \\
 &= \int_0^k \sec^2 x dx \\
 &= \left[\tan x \right]_0^k \\
 &= \tan k
 \end{aligned}$$

즉 $\tan k = \sqrt{3}$ 이므로

$$k = \frac{\pi}{3} \left(\because 0 < k < \frac{\pi}{2} \right)$$

답 $\frac{\pi}{3}$

436

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx \\
 &= \int_{-1}^0 e^{-x} dx + \int_0^{\pi} \cos x dx \\
 &= \left[-e^{-x} \right]_{-1}^0 + \left[\sin x \right]_0^{\pi} \\
 &= e - 1
 \end{aligned}$$

답 $e-1$

437

(1) $0 \leq x \leq \pi$ 일 때, $\cos x = 0$ 에서

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{즉 } |\cos x| = \begin{cases} \cos x & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \\ -\cos x & (\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\pi} |\cos x| dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) dx \\
 &= \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
 &= 1 + 1 = 2
 \end{aligned}$$

(2) $2^x - 4 = 0$ 에서 $2^x = 4$

$$\therefore x = 2$$

$$\text{즉 } |2^x - 4| = \begin{cases} -2^x + 4 & (x \leq 2) \\ 2^x - 4 & (x \geq 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^4 |2^x - 4| dx \\
 &= \int_{-1}^2 (-2^x + 4) dx + \int_2^4 (2^x - 4) dx \\
 &= \left[-\frac{2^x}{\ln 2} + 4x \right]_{-1}^2 + \left[\frac{2^x}{\ln 2} - 4x \right]_2^4 \\
 &= \left(-\frac{7}{2\ln 2} + 12 \right) + \left(\frac{12}{\ln 2} - 8 \right) \\
 &= \frac{17}{2\ln 2} + 4
 \end{aligned}$$

(3) $(x-1)\sqrt{x} = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 1$

$$\text{즉 } |(x-1)\sqrt{x}| = \begin{cases} (1-x)\sqrt{x} & (0 \leq x \leq 1) \\ (x-1)\sqrt{x} & (x \geq 1) \end{cases} \text{이므로}$$

로

$$\begin{aligned}
& \int_0^4 |(x-1)\sqrt{x}| dx \\
&= \int_0^1 (1-x)\sqrt{x} dx + \int_1^4 (x-1)\sqrt{x} dx \\
&= \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}) dx + \int_1^4 (x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) dx \\
&= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 + \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 \\
&= \frac{4}{15} + \frac{116}{15} = 8
\end{aligned}$$

☐ (1) 2 (2) $\frac{17}{2\ln 2} + 4$ (3) 8

438

(1) $f(x) = \cos x$, $g(x) = x \cos x$ 라 하면
 $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$,
 $g(-x) = -x \cos(-x)$
 $= -x \cos x = -g(x)$
 이므로 $f(x)$ 는 우함수, $g(x)$ 는 기함수이다.

$$\begin{aligned}
& \therefore \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - x \cos x) dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \cos x dx \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx - 0 \\
&= 2 \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

(2) $f(x) = \cos x$, $g(x) = x \sin^2 x + x^3 \cos x$ 라 하면
 $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$,
 $g(-x) = -x \sin^2(-x) + (-x)^3 \cos(-x)$
 $= -x \sin^2 x - x^3 \cos x = -g(x)$
 이므로 $f(x)$ 는 우함수, $g(x)$ 는 기함수이다.

$$\begin{aligned}
& \therefore \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos x + x \sin^2 x + x^3 \cos x) dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx \\
&\quad + \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (x \sin^2 x + x^3 \cos x) dx \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx + 0 \\
&= 2 \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = 2 \times \frac{1}{2} = 1
\end{aligned}$$

(3) $f(x) = e^x + e^{-x}$ 이라 하면

$$f(-x) = e^{-x} + e^x = f(x)$$

이므로 $f(x)$ 는 우함수이다.

$$\begin{aligned}
& \therefore \int_{-2}^0 (e^x + e^{-x}) dx + \int_0^2 (e^x + e^{-x}) dx \\
&= \int_{-2}^2 (e^x + e^{-x}) dx \\
&= 2 \int_0^2 (e^x + e^{-x}) dx \\
&= 2 \left[e^x - e^{-x} \right]_0^2 = 2 \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right)
\end{aligned}$$

(4) $f(x) = 3^x + 3^{-x}$, $g(x) = 4^x - 4^{-x}$ 이라 하면

$$f(-x) = 3^{-x} + 3^x = f(x),$$

$$g(-x) = 4^{-x} - 4^x = -(4^x - 4^{-x}) = -g(x)$$

이므로 $f(x)$ 는 우함수, $g(x)$ 는 기함수이다.

$$\begin{aligned}
& \therefore \int_{-1}^1 (3^x + 4^x + 3^{-x} - 4^{-x}) dx \\
&= \int_{-1}^1 (3^x + 3^{-x}) dx + \int_{-1}^1 (4^x - 4^{-x}) dx \\
&= 2 \int_0^1 (3^x + 3^{-x}) dx + 0 \\
&= 2 \left[\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^{-x}}{\ln 3} \right]_0^1 \\
&= 2 \times \frac{8}{3 \ln 3} = \frac{16}{3 \ln 3}
\end{aligned}$$

☐ (1) $\sqrt{2}$ (2) 1 (3) $2 \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right)$ (4) $\frac{16}{3 \ln 3}$

439

$y = |\sin x|$ 는 주기가 π 인 주기함수이므로

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\pi} |\sin x| dx = \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x| dx \\
&= \int_{2\pi}^{3\pi} |\sin x| dx \\
& \therefore \int_0^{3\pi} |\sin x| dx = 3 \int_0^{\pi} |\sin x| dx \\
&= 3 \int_0^{\pi} \sin x dx \\
&= 3 \left[-\cos x \right]_0^{\pi} \\
&= 3 \times 2 = 6
\end{aligned}$$

☐ 6

440

모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(x+2)$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_1^3 f(x) dx = \cdots \\ &= \int_9^{11} f(x) dx\end{aligned}$$

$$\therefore \int_{-1}^{11} f(x) dx = 6 \int_{-1}^1 f(x) dx$$

이때 $-1 \leq x \leq 1$ 에서

$$f(-x) = e^{-x} + e^x = f(x)$$

이므로 $f(x)$ 는 우함수이다.

따라서

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (e^x + e^{-x}) dx \\ &= 2 \int_0^1 (e^x + e^{-x}) dx \\ &= 2 \left[e^x - e^{-x} \right]_0^1 \\ &= 2 \left(e - \frac{1}{e} \right)\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{11} f(x) dx &= 6 \times 2 \left(e - \frac{1}{e} \right) = 12 \left(e - \frac{1}{e} \right) \\ \text{답 } 12 \left(e - \frac{1}{e} \right)\end{aligned}$$

연습문제

• 본책 219~221쪽

441

전략 $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ 임을 이용하여 $\int f(x) dx$ 를 구한다.

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} dx \\ &= x^{\frac{2}{3}} + C_1\end{aligned}$$

이때 $f(8) = 3$ 이므로

$$4 + C_1 = 3 \quad \therefore C_1 = -1$$

$$\therefore f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 1$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 부정적분은

$$\begin{aligned}\int (x^{\frac{2}{3}} - 1) dx &= \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} - x + C \\ &= \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} - x + C \\ \text{답 } \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} - x + C\end{aligned}$$

442

전략 $f'(x) = \tan^2 x$ 임을 이용하여 $f(x)$ 를 구한다.

$f'(x) = \tan^2 x$ 이므로

$$\begin{aligned}f(x) &= \int f'(x) dx = \int \tan^2 x dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \tan x - x + C\end{aligned}$$

이때 $f(0) = 2\pi$ 이므로 $C = 2\pi$

따라서 $f(x) = \tan x - x + 2\pi$ 이므로

$$f(\pi) = \pi \quad \text{답 } \pi$$

443

전략 분자의 각 항을 분모로 나누어 피적분함수를 적분할 수 있는 꼴로 변형한다.

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + 5 \sin^3 x}{\sin^2 x} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} + 5 \sin x \right) dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\csc^2 x + 5 \sin x) dx \\ &= \left[-\cot x - 5 \cos x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{2} - 1\end{aligned}$$

따라서 $a = -\frac{5}{2}$, $b = \frac{7}{2}$ 이므로

$$a + b = 1 \quad \text{답 } 1$$

444

전략 정적분의 값과 함숫값을 각각 a 에 대한 식으로 나타낸다.

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 (e^x - ax) dx \\ &= \left[e^x - \frac{1}{2} ax^2 \right]_0^1 = e - \frac{1}{2} a - 1\end{aligned}$$

$$f(1) = e - a$$

이때 $\int_0^1 f(x) dx = f(1)$ 이므로

$$e - \frac{1}{2}a - 1 = e - a, \quad \frac{1}{2}a = 1$$

$$\therefore a = 2$$

답 2

445

전략 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 (-2^x + 2) dx + \int_1^2 (2^x - 2) dx \\ &= \left[-\frac{2^x}{\ln 2} + 2x \right]_0^1 + \left[\frac{2^x}{\ln 2} - 2x \right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{1}{\ln 2} + 2 \right) + \left(\frac{2}{\ln 2} - 2 \right) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{\ln 2}$

446

전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x 의 값을 기준으로 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

$$\frac{x-4}{x} = 0 \text{에서} \quad x = 4$$

$$\therefore \left| \frac{x-4}{x} \right| = \begin{cases} \frac{4-x}{x} & (0 < x < 4) \\ \frac{x-4}{x} & (x < 0 \text{ 또는 } x \geq 4) \end{cases} \quad \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} &\int_2^8 \left| \frac{x-4}{x} \right| dx \\ &= \int_2^4 \frac{4-x}{x} dx + \int_4^8 \frac{x-4}{x} dx \\ &= \int_2^4 \left(\frac{4}{x} - 1 \right) dx + \int_4^8 \left(1 - \frac{4}{x} \right) dx \\ &= \left[4 \ln |x| - x \right]_2^4 + \left[x - 4 \ln |x| \right]_4^8 \\ &= (4 \ln 2 - 2) + (4 - 4 \ln 2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

답 2

447

전략 우함수와 기함수의 정적분의 성질을 이용한다.

$$\begin{aligned} &\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (x^3 + \sin x + a) \cos x dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (x^3 \cos x + \sin x \cos x + a \cos x) dx \end{aligned}$$

$f(x) = x^3 \cos x + \sin x \cos x$, $g(x) = a \cos x$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 \cos(-x) + \sin(-x) \cos(-x) \\ &= -x^3 \cos x - \sin x \cos x = -f(x), \\ g(-x) &= a \cos(-x) = a \cos x = g(x) \end{aligned}$$

이므로 $f(x)$ 는 기함수, $g(x)$ 는 우함수이다.

$\therefore$ (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (x^3 \cos x + \sin x \cos x) dx \\ &\quad + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a \cos x dx \\ &= 0 + 2a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx \\ &= 2a \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}a \end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{2}a = 1$ 이므로 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

448

전략 함수 $f(x)$ 가 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 주기함수임을 이용한다.

모든 실수 x 에 대하여 $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) dx = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} f(x) dx \\ &= \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} f(x) dx = \int_{\frac{7\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} f(x) dx \\ \therefore \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} f(x) dx &= 5 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \end{aligned}$$

이때 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서

$$f(-x) = \sec^2(-x) = \sec^2 x = f(x)$$

이므로 $f(x)$ 는 우함수이다.

따라서

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx \\ &= 2 \left[\tan x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} f(x) dx = 5 \times 2 = 10$$

답 10

449

전략 $f'(-x) = f'(x)$ 임을 이용하여 $x < 0$ 에서 $g'(x)$ 를 구한다.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(2 - \frac{3}{x^2}\right) dx = 2x + \frac{3}{x} + C_1$$

이때 $f(1) = 5$ 이므로 $C_1 = 0$

$$\therefore f(x) = 2x + \frac{3}{x}$$

한편 조건 ㉞에서

$$g'(x) = f'(-x) = 2 - \frac{3}{x^2} = f'(x)$$

$$\therefore g(x) = \int g'(x) dx = \int f'(x) dx$$

$$= f(x) + C_2 = 2x + \frac{3}{x} + C_2 \quad (x < 0)$$

조건 ㉝에서 $f(2) + g(-2) = 9$ 이므로

$$\frac{11}{2} + \left(-\frac{11}{2} + C_2\right) = 9 \quad \therefore C_2 = 9$$

따라서 $x < 0$ 에서 $g(x) = 2x + \frac{3}{x} + 9$ 이므로

$$g(-3) = 2$$

답 ②

450

전략 주어진 등식의 양변을 적분하여 $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ 를 구한다.

$$\frac{d}{dx}\{f(x) + g(x)\} = e^x \text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x) + g(x)\} \right] dx = \int e^x dx$$

$$\therefore f(x) + g(x) = e^x + C_1$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0 = 1 + C_1 \quad \therefore C_1 = -1$$

$$\therefore f(x) + g(x) = e^x - 1 \quad \dots\dots ㉞$$

$$\text{또 } \frac{d}{dx}\{f(x) - g(x)\} = e^{-2x} \text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x) - g(x)\} \right] dx = \int e^{-2x} dx$$

$$\therefore f(x) - g(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C_2$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0 = -\frac{1}{2} + C_2 \quad \therefore C_2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) - g(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉟$$

㉞, ㉟을 연립하여 풀면

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{1}{2}\right),$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{g(\ln 2)}{f(\ln 2)} = \frac{\frac{5}{16}}{\frac{11}{16}} = \frac{5}{11}$$

답 $\frac{5}{11}$

451

전략 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 피적분함수를 적분할 수 있는 꼴로 변형한다.

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)$$

$$= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$= \cos^2 \frac{x}{2} - \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$$

$$\text{이므로 } \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos x + 1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \int \cos^2 \frac{x}{2} dx$$

$$= \int \frac{\cos x + 1}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos x dx + \frac{1}{2} \int dx$$

$$= \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} x + C$$

이때 $f(0) = \pi$ 이므로

$$C = \pi$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} x + \pi$ 이므로

$$f(\pi) = \frac{3}{2} \pi$$

답 $\frac{3}{2} \pi$

452

전략 지수함수의 적분을 이용하여 a_n 을 적분 기호 없이 나타낸다.

$$a_n = \ln 3 \times \int_0^n 3^x dx = \ln 3 \times \left[\frac{3^x}{\ln 3} \right]_0^n$$

$$= \ln 3 \times \left(\frac{3^n}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} \right)$$

$$= 3^n - 1$$

$$\text{즉 } \frac{1}{1+a_n} = \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$



개념 노트

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ ($a \neq 0, -1 < r < 1$)의 합은

$$\frac{a}{1-r}$$

453

전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되게 하는 x 의 값을 기준으로 구간을 나누어 정적분의 값을 구한다.

$$\sin x = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \text{이므로}$$

$$\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right| dx = \int_0^{2\pi} \frac{|\sin x|}{2} dx$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때, $\sin x = 0$ 에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=\pi \text{ 또는 } x=2\pi$$

즉 $|\sin x| = \begin{cases} \sin x & (0 \leq x \leq \pi) \\ -\sin x & (\pi \leq x \leq 2\pi) \end{cases}$ 이므로 구하는 값은

$$\int_0^{2\pi} \frac{|\sin x|}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin x dx + \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\cos x \right]_0^{\pi} + \frac{1}{2} \left[\cos x \right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 = 2$$

답 2

454

전략 함수 $f(x)$ 는 주기가 4인 주기함수임을 이용한다.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{-x}} & (-2 \leq x \leq 0) \\ \frac{1}{e^x} & (0 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^x & (-2 \leq x \leq 0) \\ e^{-x} & (0 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

이고 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4) = f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x) dx &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx \\ &= \int_0^2 f(x) dx + \int_{-2}^0 f(x) dx \\ &= \int_0^2 e^{-x} dx + \int_{-2}^0 e^x dx \\ &= \left[-e^{-x} \right]_0^2 + \left[e^x \right]_{-2}^0 \\ &= \left(-\frac{1}{e^2} + 1 \right) + \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{답 } 2 \left(1 - \frac{1}{e^2} \right)$$

다른 풀이 $-2 \leq x \leq 2$ 에서

$$f(-x) = \frac{1}{e^{|-x|}} = \frac{1}{e^{|x|}} = f(x)$$

이므로 $f(x)$ 는 우함수이다.

따라서

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 f(x) dx &= 2 \int_0^2 f(x) dx \\ &= 2 \int_0^2 \frac{1}{e^{|x|}} dx \\ &= 2 \int_0^2 \frac{1}{e^x} dx = 2 \int_0^2 e^{-x} dx \\ &= 2 \left[-e^{-x} \right]_0^2 = 2 \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) \end{aligned}$$

이므로

$$\int_0^4 f(x) dx = \int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \left(1 - \frac{1}{e^2} \right)$$



개념 노트

함수 $f(x)$ 가 주기가 p 인 주기함수이면

$$\int_a^{a+p} f(x) dx = \int_b^{b+p} f(x) dx$$

455

전략 함수 $f(x)$ 는 첫째항이 -1 , 공비가 $-\sin x$ 인 등비급수임을 이용한다.

함수 $f(x) = -1 + \sin x - \sin^2 x + \sin^3 x - \dots$ 는 첫째항이 -1 , 공비가 $-\sin x$ 인 등비급수이다.

이때 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $-1 < -\sin x < 1$ 이므로

$$f(x) = \frac{-1}{1 + \sin x}$$

$$\begin{aligned} \therefore F(x) &= \int f(x) dx \\ &= \int \frac{-1}{1 + \sin x} dx \\ &= \int \frac{-(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} dx \\ &= \int \frac{\sin x - 1}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx \\ &= \int (\sec x \tan x - \sec^2 x) dx \\ &= \sec x - \tan x + C \end{aligned}$$

$F(0) = 1$ 이므로

$$1 + C = 1 \quad \therefore C = 0$$

따라서 $F(x) = \sec x - \tan x$ 이므로

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 - \sqrt{3}$$

답 2 $-\sqrt{3}$

456

전략 함수 $f(x)$ 가 기함수임을 이용하여 주어진 정적분의 식을 간단히 한다.

$$\begin{aligned} &\int_{-2}^2 f'(x)(1 + \sin x + \sin^3 x) dx \\ &= \int_{-2}^2 \{f'(x) + f'(x)\sin x + f'(x)\sin^3 x\} dx \end{aligned}$$

조건 (㉔)에서 곡선 $y = f(x)$ 가 원점에 대하여 대칭이므로 $f(0) = 0$ 이고, 함수 $f(x)$ 는 기함수이다.

따라서 $f'(x)$ 는 우함수이므로

$$f'(-x) = f'(x)$$

이때 $g(x) = f'(x)\sin x + f'(x)\sin^3 x$ 라 하면

$$\begin{aligned} g(-x) &= f'(-x)\sin(-x) + f'(-x)\sin^3(-x) \\ &= -f'(x)\sin x - f'(x)\sin^3 x \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

이므로 $g(x)$ 는 기함수이다.

$$\begin{aligned} \therefore &\int_{-2}^2 f'(x)(1 + \sin x + \sin^3 x) dx \\ &= \int_{-2}^2 f'(x) dx \\ &\quad + \int_{-2}^2 \{f'(x)\sin x + f'(x)\sin^3 x\} dx \\ &= 2 \int_0^2 f'(x) dx + 0 \\ &= 2 \left[f(x) \right]_0^2 \\ &= 2 \{f(2) - f(0)\} \\ &= 2 \times 3 = 6 \end{aligned}$$

답 6

해설 Focus

함수 $f(x)$ 가 기함수이므로

$$f(-x) = -f(x)$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(-x) \times (-x)' = -f'(x)$$

$$\therefore f'(-x) = f'(x)$$

따라서 함수 $f'(x)$ 는 우함수이다.

2

치환적분법과 부분적분법

III. 적분법

01

치환적분법

● 본책 224~236쪽

457

답 (1) $\sin x, t^2, t^3, 1 - \cos x$ (2) $4, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}t^4, 4x+1$

458

답 $3x^2, 0, 8, 8, 0, e^t, e^t, 8, 0, e^8 - 1$

459

(1) $5x^2 + 1 = t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
 10x &= \frac{dt}{dx} \\
 \therefore \int 10x(5x^2 + 1)^6 dx &= \int t^6 dt \\
 &= \frac{1}{7} t^7 + C \\
 &= \frac{1}{7} (5x^2 + 1)^7 + C
 \end{aligned}$$

(2) $x^3 - 3x + 4 = t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
 3x^2 - 3 &= \frac{dt}{dx} \\
 \therefore \int (x^2 - 1)(x^3 - 3x + 4) dx &= \int t \times \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int t dt \\
 &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} t^2 + C \\
 &= \frac{1}{6} (x^3 - 3x + 4)^2 + C
 \end{aligned}$$

(3) $x^3 + 1 = t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
 3x^2 &= \frac{dt}{dx} \\
 \therefore \int 6x^2(x^3 + 1)^2 dx &= \int t^2 \times 2 dt \\
 &= 2 \int t^2 dt \\
 &= 2 \times \frac{1}{3} t^3 + C \\
 &= \frac{2}{3} (x^3 + 1)^3 + C
 \end{aligned}$$

(4) $\frac{1}{4}x - 1 = t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} &= \frac{dt}{dx} \\
 \therefore \int \left(\frac{1}{4}x - 1\right)^3 dx &= \int t^3 \times 4 dt \\
 &= 4 \int t^3 dt = 4 \times \frac{1}{4} t^4 + C \\
 &= \left(\frac{1}{4}x - 1\right)^4 + C
 \end{aligned}$$

답 풀이 참조

460

(1) $\sqrt{x^2 + 3x} = t$ 로 놓고 양변을 제곱하면

$$\begin{aligned}
 x^2 + 3x &= t^2 \\
 \text{양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \quad 2x + 3 &= 2t \frac{dt}{dx} \\
 \therefore \int (2x + 3)\sqrt{x^2 + 3x} dx &= \int t \times 2t dt \\
 &= 2 \int t^2 dt = \frac{2}{3} t^3 + C \\
 &= \frac{2}{3} (\sqrt{x^2 + 3x})^3 + C \\
 &= \frac{2}{3} (x^2 + 3x)\sqrt{x^2 + 3x} + C
 \end{aligned}$$

(2) $\sqrt{1 - x^2} = t$ 로 놓고 양변을 제곱하면

$$\begin{aligned}
 1 - x^2 &= t^2 \quad \therefore x^2 = 1 - t^2 \\
 \text{양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \quad 2x &= -2t \frac{dt}{dx} \\
 \therefore \int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}} dx &= \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \times x dx \\
 &= \int \frac{1 - t^2}{t} \times (-t) dt \\
 &= \int (t^2 - 1) dt = \frac{1}{3} t^3 - t + C \\
 &= \frac{1}{3} (\sqrt{1 - x^2})^3 - \sqrt{1 - x^2} + C \\
 &= -\frac{1}{3} (x^2 + 2)\sqrt{1 - x^2} + C
 \end{aligned}$$

(3) $\sqrt{2x^3-x^2}=t$ 로 놓고 양변을 제곱하면

$$2x^3-x^2=t^2$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$6x^2-2x=2t \frac{dt}{dx}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{3x^2-x}{\sqrt{2x^3-x^2}} dx &= \int \frac{1}{t} \times t dt \\ &= \int dt = t + C \\ &= \sqrt{2x^3-x^2} + C \end{aligned}$$

답 풀이 참조

461

$\sqrt{x^2+1}=t$ 로 놓고 양변을 제곱하면 $x^2+1=t^2$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x=2t \frac{dt}{dx}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int x\sqrt{x^2+1} dx = \int t \times t dt \\ &= \int t^2 dt \\ &= \frac{1}{3} t^3 + C \\ &= \frac{1}{3} (\sqrt{x^2+1})^3 + C \\ &= \frac{1}{3} (x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C \end{aligned}$$

이때 $f(0)=3$ 이므로

$$\frac{1}{3} + C = 3 \quad \therefore C = \frac{8}{3}$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{3} (x^2+1)\sqrt{x^2+1} + \frac{8}{3}$ 이므로

$$f(-2) = \frac{1}{3} (5\sqrt{5}+8) \quad \text{답} \quad \frac{1}{3} (5\sqrt{5}+8)$$

462

(1) $2x+3=t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2 = \frac{dt}{dx}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int 10^{2x+3} dx &= \int 10^t \times \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int 10^t dt = \frac{10^t}{2 \ln 10} + C \\ &= \frac{1}{2 \ln 10} 10^{2x+3} + C \end{aligned}$$

(2) $\sqrt{e^x-1}=t$ 로 놓고 양변을 제곱하면

$$e^x-1=t^2$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$e^x=2t \frac{dt}{dx}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}} dx &= \int \frac{1}{t} \times 2t dt \\ &= \int 2 dt \\ &= 2t + C \\ &= 2\sqrt{e^x-1} + C \end{aligned}$$

(3) $\ln(x+1)=t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{x+1} = \frac{dt}{dx}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx &= \int t dt \\ &= \frac{1}{2} t^2 + C \\ &= \frac{1}{2} \{\ln(x+1)\}^2 + C \end{aligned}$$

(4) $\ln x=t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{2}{x(\ln x)^2} dx &= \int \frac{2}{t^2} dt \\ &= 2 \int t^{-2} dt \\ &= -\frac{2}{t} + C \\ &= -\frac{2}{\ln x} + C \end{aligned}$$

답 풀이 참조

463

$2-e^x=t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$-e^x = \frac{dt}{dx}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int e^x (2-e^x)^3 dx \\ &= \int t^3 \times (-1) dt = -\int t^3 dt \\ &= -\frac{1}{4} t^4 + C \\ &= -\frac{1}{4} (2-e^x)^4 + C \end{aligned}$$

이때 $f(0)=2$ 이므로 $-\frac{1}{4}+C=2$

$$\therefore C=\frac{9}{4}$$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}(2-e^x)^4+\frac{9}{4}$ 이므로

$$f(\ln 2)=\frac{9}{4} \quad \text{답 } \frac{9}{4}$$

464

(1) $4x-3=t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$4=\frac{dt}{dx}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \cos(4x-3) dx &= \int \cos t \times \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} \int \cos t dt \\ &= \frac{1}{4} \sin t + C = \frac{1}{4} \sin(4x-3) + C \end{aligned}$$

(2) $\cot x=t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$-\csc^2 x = \frac{dt}{dx}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \cot x \csc^2 x dx &= \int t \times (-1) dt = -\int t dt \\ &= -\frac{1}{2} t^2 + C = -\frac{1}{2} \cot^2 x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x} dx &= \int \frac{\cos^2 x \cos x}{1+\sin x} dx \\ &= \int \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x} \times \cos x dx \\ &= \int (1-\sin x) \cos x dx \end{aligned}$$

$1-\sin x=t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$-\cos x = \frac{dt}{dx}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x} dx &= \int (1-\sin x) \cos x dx \\ &= \int t \times (-1) dt = -\int t dt \\ &= -\frac{1}{2} t^2 + C \\ &= -\frac{1}{2} (1-\sin x)^2 + C \end{aligned}$$

답 풀이 참조

465

$1+\tan x=t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\sec^2 x = \frac{dt}{dx}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int \frac{\sec^2 x}{1+\tan x} dx \\ &= \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C \\ &= \ln |1+\tan x| + C \end{aligned}$$

이때 $f(0)=0$ 이므로

$$C=0$$

따라서 $f(x)=\ln |1+\tan x|$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\ln 2 \quad \text{답 } \ln 2$$

466

(1) $(e^x+e^{-x})'=e^x-e^{-x}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} dx &= \int \frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}} dx \\ &= \ln(e^x+e^{-x}) + C \end{aligned}$$

($\because e^x+e^{-x}>0$)

(2) $(1-\sin x)'=-\cos x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{1-\sin x} dx &= -\int \frac{(1-\sin x)'}{1-\sin x} dx \\ &= -\ln(1-\sin x) + C \end{aligned}$$

($\because 1-\sin x>0$)

(3) $(4^x-x^2)'=4^x \ln 4 - 2x = 2(4^x \ln 2 - x)$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \frac{4^x \ln 2 - x}{4^x - x^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{(4^x - x^2)'}{4^x - x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |4^x - x^2| + C \end{aligned}$$

답 풀이 참조

467

$(3e^{2x}-2)'=6e^{2x}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{e^{2x}}{3e^{2x}-2} dx \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{(3e^{2x}-2)'}{3e^{2x}-2} dx \\ &= \frac{1}{6} \ln |3e^{2x}-2| + C \end{aligned}$$

이때 $f(0)=f(k)$ 에서

$$C = \frac{1}{6} \ln |3e^{2k} - 2| + C$$

$$\ln |3e^{2k} - 2| = 0$$

$$3e^{2k} - 2 = \pm 1$$

$$3e^{2k} = 1 \text{ 또는 } 3e^{2k} = 3$$

$$e^{2k} = \frac{1}{3} \text{ 또는 } e^{2k} = 1$$

$$\therefore k = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} \quad (\because k \neq 0)$$

$$\text{답 } \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3}$$

468

$$(1) \frac{2x^3+x-1}{x-1} = 2x^2+2x+3+\frac{2}{x-1} \text{ 이므로}$$

$$\int \frac{2x^3+x-1}{x-1} dx$$

$$= \int \left(2x^2 + 2x + 3 + \frac{2}{x-1} \right) dx$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + x^2 + 3x + 2\ln|x-1| + C$$

$$(2) \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

이므로

$$\int \frac{1}{x^2-3x+2} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$= \ln|x-2| - \ln|x-1| + C$$

$$= \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C$$

$$(3) \frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

(A, B는 상수)로 놓으면

$$\frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

$$= \frac{(A+B)x + (2A-3B)}{(x-3)(x+2)}$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$$A+B=7, 2A-3B=4$$

$$\therefore A=5, B=2$$

$$\therefore \int \frac{7x+4}{(x-3)(x+2)} dx$$

$$= \int \left(\frac{5}{x-3} + \frac{2}{x+2} \right) dx$$

$$= 5\ln|x-3| + 2\ln|x+2| + C$$

답 풀이 참조

469

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3} = \frac{x+1}{(x-3)(x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1}$$

(A, B는 상수)로 놓으면

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3} = \frac{A(x-1)+B(x-3)}{(x-3)(x-1)}$$

$$= \frac{(A+B)x - (A+3B)}{(x-3)(x-1)}$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$$A+B=1, A+3B=-1$$

$$\therefore A=2, B=-1$$

$$\therefore f(x) = \int \frac{x+1}{x^2-4x+3} dx$$

$$= \int \left(\frac{2}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$= 2\ln|x-3| - \ln|x-1| + C$$

이때 $f(2)=0$ 이므로

$$C=0$$

따라서 $f(x) = 2\ln|x-3| - \ln|x-1|$ 이므로

$$f(4) = -\ln 3$$

답 $-\ln 3$

470

(1) $\sin x = t$ 로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\cos x = \frac{dt}{dx}$$

$$x=0 \text{ 일 때 } t=0, x=\frac{\pi}{6} \text{ 일 때 } t=\frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\sin^2 x) \cos x dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t^2) dt$$

$$= \left[t - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{11}{24}$$

(2) $x^2+2x+5=t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x+2=\frac{dt}{dx}$$

$x=-1$ 일 때 $t=4$, $x=1$ 일 때 $t=8$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+2x+5} dx \\ &= \int_4^8 \frac{1}{t} \times \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_4^8 \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln |t| \right]_4^8 = \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

(3) $\sqrt{x+2}=t$ 로 놓고 양변을 제곱하면

$$x+2=t^2 \quad \therefore x=t^2-2$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$1=2t \frac{dt}{dx}$$

$x=2$ 일 때 $t=2$, $x=7$ 일 때 $t=3$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_2^7 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx &= \int_2^3 \frac{t^2-2}{t} \times 2t dt \\ &= 2 \int_2^3 (t^2-2) dt \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} t^3 - 2t \right]_2^3 = \frac{26}{3} \end{aligned}$$

(4) $\ln x=t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$$

$x=1$ 일 때 $t=0$, $x=e$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x^{\frac{1}{x}} dx &= \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx \\ &= \int_0^1 t dt \\ &= \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos x} dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \sin x}{1+\cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos^2 x) \sin x}{1+\cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x) \sin x dx \end{aligned}$$

$1-\cos x=t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\sin x = \frac{dt}{dx}$$

$x=0$ 일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos x} dx &= \int_0^1 t dt \\ &= \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(6) $e^x=t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$e^x = \frac{dt}{dx}$$

$x=\ln 2$ 일 때 $t=2$, $x=1$ 일 때 $t=e$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int_{\ln 2}^1 \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx \\ &= \int_{\ln 2}^1 \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx = \int_2^e \frac{1}{t^2-1} dt \\ &= \int_2^e \frac{1}{(t-1)(t+1)} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_2^e \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln |t-1| - \ln |t+1| \right]_2^e \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \ln \frac{e-1}{e+1} - (-\ln 3) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{3(e-1)}{e+1} \end{aligned}$$

$$\text{답 (1) } \frac{11}{24} \quad (2) \frac{1}{2} \ln 2 \quad (3) \frac{26}{3}$$

$$(4) \frac{1}{2} \quad (5) \frac{1}{2} \quad (6) \frac{1}{2} \ln \frac{3(e-1)}{e+1}$$

471

(1) $x=\sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓고 양변을 θ 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta$$

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=\frac{1}{2}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} \times \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta}} \times \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

- (2) $x=3\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$ 로 놓고 양변을 θ 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{d\theta}=3\cos\theta$$

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=3$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9(1-\sin^2\theta)} \times 3\cos\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^2\theta} \times 3\cos\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\cos^2\theta d\theta \end{aligned}$$

이때 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ 에서

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9 \times \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{9}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{9}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{9}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{9}{4} \pi \end{aligned}$$

- (3) $x=3\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 로 놓고 양변을 θ 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{d\theta}=3\sec^2\theta$$

$x=-\sqrt{3}$ 일 때 $\theta=-\frac{\pi}{6}$, $x=\sqrt{3}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+9} dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{9(\tan^2\theta+1)} \times 3\sec^2\theta d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{9\sec^2\theta} \times 3\sec^2\theta d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3} d\theta = \left[\frac{1}{3} \theta \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{9} \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{9}{4}\pi$ (3) $\frac{\pi}{9}$

연습문제

● 본책 237~238쪽

472

전략 $\sqrt{\ln x+7}=t$ 로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$\sqrt{\ln x+7}=t$ 로 놓고 양변을 제곱하면

$$\ln x+7=t^2$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{x}=2t \frac{dt}{dx}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x+7}} dx \\ &= \int \frac{1}{t} \times 2t dt = \int 2 dt \\ &= 2t + C = 2\sqrt{\ln x+7} + C \end{aligned}$$

이때 $f(e^2)=4$ 이므로

$$2 \times 3 + C = 4 \quad \therefore C = -2$$

따라서 $f(x)=2\sqrt{\ln x+7}-2$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{e^3}\right)=2 \times 2 - 2 = 2$$

답 2

473

전략 $f(x)$ 를 하나의 부정적분으로 나타낸 후 간단히 한다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1} dx - \int \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx \\ &= \int \frac{e^{2x}-e^x}{e^{2x}-1} dx \\ &= \int \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x-1)(e^x+1)} dx \\ &= \int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1} dx \\ &= \ln(e^x+1) + C \quad (\because e^x+1>0) \end{aligned}$$

이때 $f(\ln 9)=\ln 5$ 이므로

$$\ln 10 + C = \ln 5 \quad \therefore C = -\ln 2$$

따라서 $f(x)=\ln(e^x+1)-\ln 2$ 이므로

$$f(\ln 3)=\ln 2$$

답 $\ln 2$

474

전략 $f'(x)$ 의 식의 분모를 인수분해하여 부분분수로 변형한다.

$$\begin{aligned} \frac{3}{x^2+x-2} &= \frac{3}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \\ \text{이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{3}{x^2+x-2} dx \\
 &= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx \\
 &= \ln|x-1| - \ln|x+2| + C \\
 &= \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C \\
 \therefore f(-1) - f(2) &= \ln 2 + C - \left(\ln \frac{1}{4} + C \right) \\
 &= \ln 2 + \ln 4 \\
 &= \ln 8
 \end{aligned}$$

답 ln 8

475

전략 $\ln x = t$ 로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$\ln x = t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$$

$x=1$ 일 때 $t=0$, $x=a$ 일 때 $t=\ln a$ 이므로

$$\begin{aligned}
 f(a) &= \int_1^a \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \int_0^{\ln a} \sqrt{t} dt \\
 &= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\ln a} = \frac{2}{3} (\ln a)^{\frac{3}{2}} \\
 \therefore f(a^4) &= \frac{2}{3} (\ln a^4)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (4 \ln a)^{\frac{3}{2}} \\
 &= 4^{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3} (\ln a)^{\frac{3}{2}} \\
 &= 8f(a)
 \end{aligned}$$

답 ②

476

전략 $f(x) = \int f'(x) dx$ 임을 이용하여 $f(x)$ 를 구한다.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int f'(x) dx = \int (\tan x + \tan^3 x) dx \\
 &= \int \tan x (1 + \tan^2 x) dx \\
 &= \int \tan x \sec^2 x dx
 \end{aligned}$$

$\tan x = t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\sec^2 x = \frac{dt}{dx}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore f(x) &= \int \tan x \sec^2 x dx = \int t dt \\
 &= \frac{1}{2} t^2 + C = \frac{1}{2} \tan^2 x + C
 \end{aligned}$$

이때 $f(0) = 1$ 이므로 $C = 1$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2} \tan^2 x + 1$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

477

전략 $f'(x) = \frac{1}{2+e^x}$ 임을 이용하여 $f(x)$ 를 구한다.

$$f'(x) = \frac{1}{2+e^x} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{1}{2+e^x} dx \\
 &= \int \frac{e^{-x}}{2e^{-x}+1} dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int \frac{(2e^{-x}+1)'}{2e^{-x}+1} dx \\
 &= -\frac{1}{2} \ln(2e^{-x}+1) + C \\
 &\quad (\because 2e^{-x}+1 > 0)
 \end{aligned}$$

이때 곡선 $y=f(x)$ 가 원점을 지나므로

$$f(0) = -\frac{1}{2} \ln 3 + C = 0 \quad \therefore C = \frac{1}{2} \ln 3$$

따라서 $f(x) = -\frac{1}{2} \ln(2e^{-x}+1) + \frac{1}{2} \ln 3$ 이므로

$$f(\ln 2) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$$

478

전략 $e^x = t$ 로 놓고 치환적분법을 이용한다.

주어진 그래프에서 $f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ x & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$

$e^x = t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$e^x = \frac{dt}{dx}$$

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=\ln 2$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\ln 2} e^{2x} f(e^x) dx &= \int_1^2 e^x f(e^x) \times e^x dx \\
 &= \int_1^2 t f(t) dt \\
 &= \int_1^2 t \times t dt = \int_1^2 t^2 dt \\
 &= \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_1^2 = \frac{7}{3}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{7}{3}$

479

전략 역함수의 미분법을 이용하여 피적분함수를 적분할 수 있는 꼴로 변형한다.

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 역함수의 미분법에 의하여

$$\begin{aligned} g'(f(x)) &= \frac{1}{f'(x)} \\ \therefore \int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)} dx \\ &= \int_1^a \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left[\ln |f(x)| \right]_1^a \\ &= \ln f(a) - \ln f(1) = \ln f(a) - \ln 8 \end{aligned}$$

즉 $\ln f(a) - \ln 8 = 2 \ln a + \ln(a+1) - \ln 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \ln f(a) &= \ln a^2 + \ln(a+1) + \ln 4 \\ &= \ln 4a^2(a+1) \end{aligned}$$

따라서 $f(a) = 4a^2(a+1)$ 이므로

$$f(2) = 48$$

답 ④

해설 Focus

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이고 $g(x)$ 의 정의역이 양의 실수 전체의 집합이므로 $f(x)$ 의 치역도 양의 실수 전체의 집합이다.

따라서 모든 양수 a 에 대하여 $f(a) > 0$ 이다.

480

전략 $x = a \tan \theta$ 로 놓고 삼각치환법을 이용한다.

$x = a \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$)로 놓고 양변을 θ 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{d\theta} = a \sec^2 \theta$$

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=a$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{1}{a^2+x^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a^2(1+\tan^2 \theta)} \times a \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a^2 \sec^2 \theta} \times a \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a} d\theta = \left[\frac{1}{a} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4a} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{\pi}{4a} = \frac{\pi}{16}$ 이므로 $a=4$

답 4

481

전략 $x^2-2x+3=t$ 로 놓고 치환적분법을 이용하여 $f(x)$ 를 적분 기호 없이 나타낸다.

$x^2-2x+3=t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} 2x-2 &= \frac{dt}{dx} \\ \therefore f(x) &= \ln 4 \times \int (x-1) 2^{x^2-2x+3} dx \\ &= \ln 4 \times \int 2^t \times \frac{1}{2} dt = \ln 2 \times \int 2^t dt \\ &= \ln 2 \times \frac{2^t}{\ln 2} + C = 2^t + C \\ &= 2^{x^2-2x+3} + C = 2^{(x-1)^2+2} + C \end{aligned}$$

따라서 구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최솟값, $x=3$ 일 때 최댓값을 갖는다.

이때 $f(x)$ 의 최솟값이 3이므로

$$f(1) = 2^2 + C = 3 \quad \therefore C = -1$$

즉 $f(x) = 2^{(x-1)^2+2} - 1$ 이므로 구하는 최댓값은

$$f(3) = 2^6 - 1 = 63$$

답 63

개념 노트

지수함수 $y = a^{f(x)}$ 은

(1) $a > 1$ 인 경우

$f(x)$ 가 최대일 때 최댓값, $f(x)$ 가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

(2) $0 < a < 1$ 인 경우

$f(x)$ 가 최대일 때 최솟값, $f(x)$ 가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

482

전략 주어진 조건을 그림으로 나타내고 삼각형의 외심의 성질을 이용한다.

삼각형 APB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BP}}{\sin \theta} = 2 \times 2 \quad \therefore \overline{BP} = 4 \sin \theta$$

한편 삼각형 APB의 외심이

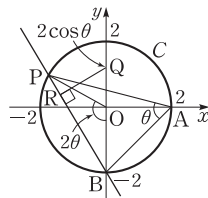
원점 O이므로

$$\angle POB = 2 \angle PAB = 2\theta$$

$$\therefore \angle OBP$$

$$= \frac{1}{2}(\pi - 2\theta)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \theta$$



또 $\overline{BQ} = 2 + 2\cos\theta$ 이므로 직각삼각형 BQR에서

$$\begin{aligned}\overline{BR} &= \overline{BQ} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= (2 + 2\cos\theta) \sin\theta \\ \therefore \overline{PR} &= \overline{BP} - \overline{BR} \\ &= 4\sin\theta - (2 + 2\cos\theta) \sin\theta \\ &= 2(1 - \cos\theta) \sin\theta\end{aligned}$$

즉 $f(\theta) = 2(1 - \cos\theta) \sin\theta$ 이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta) d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2(1 - \cos\theta) \sin\theta d\theta$$

$1 - \cos\theta = t$ 로 놓고 양변을 θ 에 대하여 미분하면

$$\sin\theta = \frac{dt}{d\theta}$$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ 일 때 $t = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때 $t = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta) d\theta &= \int_{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} 2t dt \\ &= \left[t^2\right]_{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}-3}{2}\end{aligned}$$

답 ①

다른 풀이 원 C 위의 점 S(0, 2)

에 대하여

$$\begin{aligned}\angle PSB &= \angle PAB = \theta, \\ \angle SPB &= 90^\circ\end{aligned}$$

이므로 직각삼각형 PBS에서

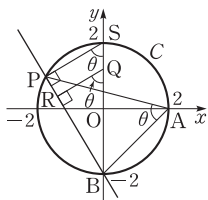
$$\overline{BP} = \overline{BS} \sin\theta = 4\sin\theta$$

한편 $\triangle PBS \sim \triangle RBQ$ (AA 닮음)이므로

$$\angle RQB = \angle PSB = \theta$$

따라서 직각삼각형 RBQ에서

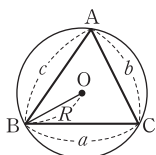
$$\overline{BR} = \overline{BQ} \sin\theta = (2 + 2\cos\theta) \sin\theta$$



개념 노트

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \\ &= 2R\end{aligned}$$



02 부분적분법

● 본책 239~243쪽

483

- 답 (1) $x, \sin x, 1, -\cos x, -x \cos x, -\cos x, -x \cos x + \sin x + C$
(2) $x+3, e^x, 1, e^x, (x+3)e^x, e^x, (x+2)e^x + C$

484

- 답 $\ln x, x, \frac{1}{x}, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{2}x^2 \ln x, \frac{1}{2}x, \frac{1}{2}e^2, \frac{1}{4}x^2, \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$

485

- (1) $f(x) = x, g'(x) = e^{-x}$ 으로 놓으면

$$f'(x) = 1, g(x) = -e^{-x}$$

$$\therefore \int x e^{-x} dx$$

$$= x \times (-e^{-x}) - \int 1 \times (-e^{-x}) dx$$

$$= -x e^{-x} + \int e^{-x} dx$$

$$= -e^{-x}(x+1) + C$$

- (2) $f(x) = \ln x, g'(x) = x^3$ 으로 놓으면

$$f'(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \frac{1}{4}x^4$$

$$\therefore \int x^3 \ln x dx$$

$$= \ln x \times \frac{1}{4}x^4 - \int \frac{1}{x} \times \frac{1}{4}x^4 dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C$$

- (3) $f(x) = 2x+1, g'(x) = \sin 2x$ 로 놓으면

$$f'(x) = 2, g(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\therefore \int (2x+1) \sin 2x dx$$

$$= (2x+1) \times \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right)$$

$$- \int 2 \times \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) dx$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2}(2x+1)\cos 2x + \int \cos 2x dx \\ &= -\frac{1}{2}(2x+1)\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + C \end{aligned}$$

답 풀이 참조

486

$u(x)=x$, $v'(x)=\cos 2x$ 로 놓으면

$$u'(x)=1, v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int x \cos 2x dx \\ &= x \times \frac{1}{2} \sin 2x - \int 1 \times \frac{1}{2} \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{2}x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C \end{aligned}$$

이때 $f(0)=\frac{1}{4}$ 이므로

$$\frac{1}{4} + C = \frac{1}{4} \quad \therefore C=0$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8} \quad \text{답 } \frac{\pi}{8}$$

487

(1) $f(x)=x^2$, $g'(x)=e^{-x}$ 으로 놓으면

$$f'(x)=2x, g(x)=-e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int x^2 e^{-x} dx &= -x^2 e^{-x} - \int (-2xe^{-x}) dx \\ &= -x^2 e^{-x} + 2 \int xe^{-x} dx \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

한편 $\int xe^{-x} dx$ 에서

$u(x)=x$, $v'(x)=e^{-x}$ 으로 놓으면

$$u'(x)=1, v(x)=-e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int xe^{-x} dx &= -xe^{-x} - \int (-e^{-x}) dx \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①을 ②에 대입하면

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-x} dx &= -x^2 e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x} + C_1) \\ &= -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C \end{aligned}$$

(2) $f(x)=\sin 3x$, $g'(x)=e^{-x}$ 으로 놓으면

$$f'(x)=3\cos 3x, g(x)=-e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int e^{-x} \sin 3x dx &= -e^{-x} \sin 3x - \int (-3e^{-x} \cos 3x) dx \\ &= -e^{-x} \sin 3x + 3 \int e^{-x} \cos 3x dx \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

한편 $\int e^{-x} \cos 3x dx$ 에서

$u(x)=\cos 3x$, $v'(x)=e^{-x}$ 으로 놓으면

$$u'(x)=-3\sin 3x, v(x)=-e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int e^{-x} \cos 3x dx &= -e^{-x} \cos 3x - \int 3e^{-x} \sin 3x dx \\ &= -e^{-x} \cos 3x - 3 \int e^{-x} \sin 3x dx \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①을 ②에 대입하면

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \sin 3x dx &= -e^{-x} \sin 3x \\ &\quad + 3(-e^{-x} \cos 3x - 3 \int e^{-x} \sin 3x dx) \\ &= 10 \int e^{-x} \sin 3x dx \\ &= -e^{-x} \sin 3x - 3e^{-x} \cos 3x \\ \therefore \int e^{-x} \sin 3x dx &= \frac{1}{10}(-e^{-x} \sin 3x - 3e^{-x} \cos 3x) + C \\ &= -\frac{1}{10}e^{-x}(\sin 3x + 3\cos 3x) + C \end{aligned}$$

답 풀이 참조

488

$u(x)=(\ln x)^2$, $v'(x)=1$ 로 놓으면

$$u'(x)=\frac{2\ln x}{x}, v(x)=x$$

$$\begin{aligned}
 \therefore f(x) &= \int (\ln x)^2 dx \\
 &= x(\ln x)^2 - \int 2 \ln x dx \\
 &= x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx \quad \cdots \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

한편 $\int \ln x dx$ 에서 $p(x) = \ln x$, $q'(x) = 1$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}
 p'(x) &= \frac{1}{x}, \quad q(x) = x \\
 \therefore \int \ln x dx &= x \ln x - \int dx \\
 &= x \ln x - x + C_1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

②을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x + C_1) \\
 &= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C
 \end{aligned}$$

이때 $f(1) = 2$ 이므로 $2 + C = 2 \quad \therefore C = 0$

따라서 $f(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} + \frac{2}{e} + \frac{2}{e} = \frac{5}{e} \quad \text{답 } \frac{5}{e}$$

489

(1) $f(x) = x - 1$, $g'(x) = e^{-x}$ 으로 놓으면

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1, \quad g(x) = -e^{-x} \\
 \therefore \int_0^1 (x-1)e^{-x} dx \\
 &= \left[-(x-1)e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) dx \\
 &= -1 - \left[e^{-x} \right]_0^1 = -1 - \left(\frac{1}{e} - 1 \right) = -\frac{1}{e}
 \end{aligned}$$

(2) $f(x) = x$, $g'(x) = \sin x + \cos x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1, \quad g(x) = -\cos x + \sin x \\
 \therefore \int_0^\pi x(\sin x + \cos x) dx \\
 &= \left[x(-\cos x + \sin x) \right]_0^\pi \\
 &\quad - \int_0^\pi (-\cos x + \sin x) dx \\
 &= \pi - \left[-\sin x - \cos x \right]_0^\pi = \pi - 2
 \end{aligned}$$

(3) $f(x) = \ln x$, $g'(x) = \frac{1}{x^2}$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = -\frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx \\
 &= \left[-\frac{1}{x} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx \\
 &= -\frac{1}{e} + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e \\
 &= -\frac{1}{e} + \left(-\frac{1}{e} + 1 \right) = 1 - \frac{2}{e} \\
 \text{답 } (1) &-\frac{1}{e} \quad (2) \pi - 2 \quad (3) 1 - \frac{2}{e}
 \end{aligned}$$

490

$f(x) = \cos x$, $g'(x) = e^{-x}$ 으로 놓으면

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -\sin x, \quad g(x) = -e^{-x} \\
 \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx \\
 &= \left[-e^{-x} \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin x dx \\
 &= 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin x dx \quad \cdots \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin x dx$ 에서

$u(x) = \sin x$, $v'(x) = e^{-x}$ 으로 놓으면

$$\begin{aligned}
 u'(x) &= \cos x, \quad v(x) = -e^{-x} \\
 \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin x dx \\
 &= \left[-e^{-x} \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-e^{-x} \cos x) dx \\
 &= -e^{-\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx \quad \cdots \cdots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

②을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx \\
 &= 1 - \left(-e^{-\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx \right) \\
 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx &= 1 + e^{-\frac{\pi}{2}} \\
 \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{2}}
 \end{aligned}$$

따라서 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ 이므로

$$ab = \frac{1}{4} \quad \text{답 } \frac{1}{4}$$

따라서 $f(x) = \begin{cases} -\cos x + 1 & (x > 0) \\ -2(x+1)e^{-x} + C_2 & (x < 0) \end{cases}$ 이고

$f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} (-\cos x + 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \{-2(x+1)e^{-x} + C_2\} \\ 0 &= -2 + C_2 \quad \therefore C_2 = 2 \end{aligned}$$

즉 $x < 0$ 에서 $f(x) = -2(x+1)e^{-x} + 2$ 이므로

$$f(-2) = 2e^2 + 2 \quad \text{답 } 2e^2 + 2$$

495

전략 $f'(x)=0$ 인 x 의 값을 이용하여 $f(x)$ 가 극값을 갖는 x 의 값을 구한다.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (x-2) \ln x dx$$

$u(x) = \ln x$, $v'(x) = x-2$ 로 놓으면

$$u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right) \ln x \\ &\quad - \int \frac{1}{x} \times \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right) dx \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right) \ln x - \int \left(\frac{1}{2}x - 2\right) dx \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right) \ln x - \frac{1}{4}x^2 + 2x + C \end{aligned}$$

한편 $f'(x) = (x-2) \ln x = 0$ 에서

$$x-2=0 \text{ 또는 } \ln x=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

x	0	...	1	...	2	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극대값을 가지므로

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} + C &= \frac{3}{4} \quad \therefore C = -1 \end{aligned}$$

즉 $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right) \ln x - \frac{1}{4}x^2 + 2x - 1$ 이므로

$f(x)$ 의 극솟값은

$$f(2) = -2 \ln 2 + 2 \quad \text{답 } -2 \ln 2 + 2$$

496

전략 부분적분법을 두 번 적용한다.

$f(x) = \sin x$, $g'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$$f'(x) = \cos x, g(x) = e^x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^\pi e^x \sin x dx &= \left[e^x \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x dx \\ &= - \int_0^\pi e^x \cos x dx \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

$\int_0^\pi e^x \cos x dx$ 에서

$u(x) = \cos x$, $v'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$$u'(x) = -\sin x, v(x) = e^x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^\pi e^x \cos x dx &= \left[e^x \cos x \right]_0^\pi - \int_0^\pi (-e^x \sin x) dx \\ &= -e^\pi - 1 + \int_0^\pi e^x \sin x dx \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^x \sin x dx &= e^\pi + 1 - \int_0^\pi e^x \sin x dx \\ 2 \int_0^\pi e^x \sin x dx &= e^\pi + 1 \\ \therefore \int_0^\pi e^x \sin x dx &= \frac{e^\pi + 1}{2} \quad \text{답 } \frac{e^\pi + 1}{2} \end{aligned}$$

497

전략 부분적분법을 이용하여 $F(x)$ 를 적분 기호 없이 나타낸 후 미분하여 $F'(x)$ 를 구한다.

$f(t) = \ln t$, $g'(t) = 1$ 로 놓으면

$$f'(t) = \frac{1}{t}, g(t) = t$$

$$\begin{aligned} \therefore F(x) &= \int_{e^x}^{e^{2x}} \ln t dt \\ &= \left[t \ln t \right]_{e^x}^{e^{2x}} - \int_{e^x}^{e^{2x}} dt \\ &= 2xe^{2x} - xe^x - \left[t \right]_{e^x}^{e^{2x}} \\ &= 2xe^{2x} - xe^x - (e^{2x} - e^x) \\ &= (2x-1)e^{2x} - (x-1)e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2e^{2x} + (2x-1) \times 2e^{2x} - e^x - (x-1)e^x \\ &= 4xe^{2x} - xe^x = xe^x(4e^x - 1) \end{aligned}$$

이므로 $F'(x)=0$ 에서

$$x=0 \text{ 또는 } 4e^x-1=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=-\ln 4$$

x	$\cdots$	$-\ln 4$	$\cdots$	0	$\cdots$
$F'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $F(x)$ 는 $x=-\ln 4$ 에서 극댓값을 가지므로

$$a=-\ln 4$$

답 $-\ln 4$

다른 풀이 $\ln t$ 의 한 부정적분을 $G(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{e^x}^{e^{2x}} \ln t \, dt \\ &= \left[G(t) \right]_{e^x}^{e^{2x}} = G(e^{2x}) - G(e^x) \end{aligned}$$

이때 $G'(x) = \ln x$ 이므로

$$\begin{aligned} F'(x) &= G'(e^{2x}) \times 2e^{2x} - G'(e^x) \times e^x \\ &= 2x \times 2e^{2x} - x \times e^x \\ &= xe^x(4e^x - 1) \end{aligned}$$

03 정적분으로 정의된 함수

● 본책 245~250쪽

498

(1) $\int_1^e f(t)dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = \ln x + k$$

$$\therefore k = \int_1^e f(t)dt = \int_1^e (\ln t + k)dt$$

$u(t) = \ln t + k$, $v'(t) = 1$ 로 놓으면

$$u'(t) = \frac{1}{t}, v(t) = t$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_1^e (\ln t + k)dt &= \left[t \ln t + kt \right]_1^e - \int_1^e dt \\ &= e + ke - k - \left[t \right]_1^e \\ &= e + ke - k - (e - 1) \\ &= ke - k + 1 \end{aligned}$$

따라서 $k = ke - k + 1$ 이므로

$$(2-e)k = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{2-e}$$

$$\therefore f(x) = \ln x + \frac{1}{2-e}$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t) \sin t \, dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = \cos x + k$$

$$\therefore k = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t) \sin t \, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos t + k) \sin t \, dt$$

$\cos t + k = s$ 로 놓고 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$-\sin t = \frac{ds}{dt}$$

$t=0$ 일 때 $s=1+k$, $t=\frac{\pi}{3}$ 일 때 $s=\frac{1}{2}+k$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos t + k) \sin t \, dt$$

$$= \int_{1+k}^{\frac{1}{2}+k} s \times (-1)ds$$

$$= \int_{\frac{1}{2}+k}^{1+k} s \, ds$$

$$= \left[\frac{1}{2} s^2 \right]_{\frac{1}{2}+k}^{1+k}$$

$$= \frac{1}{2}k + \frac{3}{8}$$

따라서 $k = \frac{1}{2}k + \frac{3}{8}$ 이므로

$$\frac{1}{2}k = \frac{3}{8} \quad \therefore k = \frac{3}{4}$$

$$\therefore f(x) = \cos x + \frac{3}{4}$$

답 (1) $f(x) = \ln x + \frac{1}{2-e}$

(2) $f(x) = \cos x + \frac{3}{4}$

다른 풀이 (2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos t + k) \sin t \, dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos t \sin t + k \sin t) \, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} \sin 2t + k \sin t \right) \, dt$$

$$= \left[-\frac{1}{4} \cos 2t - k \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{2}k + \frac{3}{8}$$

499

$\int_0^1 f'(t)dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = e^x + 3x + k \quad \therefore f'(x) = e^x + 3$$

따라서

$$\begin{aligned} k &= \int_0^1 f'(t)dt = \int_0^1 (e^t + 3)dt \\ &= [e^t + 3t]_0^1 = e + 2 \end{aligned}$$

이므로 $f(x) = e^x + 3x + e + 2$

$$\therefore f(1) = 2e + 5 \quad \text{답 } 2e + 5$$

500

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$xf(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$$

따라서 $f(x) = -e^x$ 이므로

$$f(3) = -e^3 \quad \text{답 } -e^3$$

501

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = \cos x + a \sin x$$

또 주어진 등식의 양변에 $x = \frac{\pi}{4}$ 를 대입하면

$$0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}a + \sqrt{2} \quad \therefore a = 3$$

따라서 $f(x) = \cos x + 3 \sin x$ 이므로

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -3 \quad \text{답 } -3$$

502

주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0 = 1 + a \quad \therefore a = -1$$

이때 주어진 등식에서

$$x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = e^x + x^2 - x - 1$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = e^x + 2x - 1$$

$$\therefore \int_0^x f(t)dt = e^x + 2x - 1$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = e^x + 2$$

따라서 $b = f(1) = e + 2$ 이므로

$$a + b = e + 1 \quad \text{답 } e + 1$$

503

주어진 등식에서

$$x \int_0^x f'(t)dt - \int_0^x tf'(t)dt = \cos 2x - x^2 - 1$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} \int_0^x f'(t)dt + xf'(x) - xf'(x) \\ = -2 \sin 2x - 2x \end{aligned}$$

$$\therefore \int_0^x f'(t)dt = -2 \sin 2x - 2x$$

$$\int_0^x f'(t)dt = [f(t)]_0^x = f(x) - f(0) \text{이므로}$$

$$f(x) - f(0) = -2 \sin 2x - 2x$$

이때 $f(0) = 2$ 이므로

$$f(x) = -2 \sin 2x - 2x + 2$$

$$\text{답 } f(x) = -2 \sin 2x - 2x + 2$$

504

$f(x) = \int_1^x \sqrt{t}(t-2)dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \sqrt{x}(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 2$ ($\because x > 1$)

x	1	...	2	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	극소	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이므로 구하는 극
솟값은

$$\begin{aligned} f(2) &= \int_1^2 \sqrt{t}(t-2)dt \\ &= \int_1^2 (t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}})dt \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} \right]_1^2$$

$$= \frac{14 - 16\sqrt{2}}{15} \quad \text{답 } \frac{14 - 16\sqrt{2}}{15}$$

505

$f(x) = \int_0^x (1 - 2\sin t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 1 - 2\sin x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi \quad (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

이때

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (1 - 2\sin t) dt \\ &= \left[t + 2\cos t \right]_0^x = x + 2\cos x - 2 \end{aligned}$$

이므로

$$f(0) = 0, f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 2,$$

$$f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3} - 2, f(2\pi) = 2\pi$$

따라서 $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 2π , 최솟값은 $\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3} - 2$ 이다.

답 최댓값: 2π , 최솟값: $\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3} - 2$

참고 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) - f(2\pi) = \sqrt{3} - 2 - \frac{11}{6}\pi < 0$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) < f(2\pi)$$

또 $\sqrt{3} + 2 > \pi$ 이므로

$$f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3} - 2 < 0 \quad \therefore f\left(\frac{5}{6}\pi\right) < f(0)$$

506

(1) $f(t) = e^t t^3$ 으로 놓고 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면 주어진 식은

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^3 - 1} \int_1^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left[F(t) \right]_1^x}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x^2) - F(1)}{x^3 - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{F(x^2) - F(1)}{x^2 - 1} \times \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{F(x^2) - F(1)}{x^2 - 1} \times \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} \right\} \\ &= \frac{2}{3} F'(1) \end{aligned}$$

이때 $F'(t) = f(t)$ 이므로

$$\frac{2}{3} F'(1) = \frac{2}{3} f(1) = \frac{2}{3} e$$

(2) $f(t) = (\sin t + 1)^2$ 으로 놓고 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면 주어진 식은

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x^2 - \pi^2} \int_{\pi}^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\left[F(t) \right]_{\pi}^x}{x^2 - \pi^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{F(x) - F(\pi)}{x^2 - \pi^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \left\{ \frac{F(x) - F(\pi)}{x - \pi} \times \frac{1}{x + \pi} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} F'(\pi) \end{aligned}$$

이때 $F'(t) = f(t)$ 이므로

$$\frac{1}{2\pi} F'(\pi) = \frac{1}{2\pi} f(\pi) = \frac{1}{2\pi}$$

$$\text{답 (1)} \frac{2}{3} e \quad (2) \frac{1}{2\pi}$$

507

(1) $f(x) = 3^x + e^x$ 으로 놓고 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면 주어진 식은

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{3h} \int_1^{1+2h} f(x) dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[F(x) \right]_1^{1+2h}}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+2h) - F(1)}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+2h) - F(1)}{2h} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3} F'(1) \end{aligned}$$

이때 $F'(x) = f(x)$ 이므로

$$\frac{2}{3} F'(1) = \frac{2}{3} f(1) = \frac{2}{3} (3 + e)$$

(2) $f(x) = x \ln x^2$ 으로 놓고 $f(x)$ 의 한 부정적분을

$F(x)$ 라 하면 주어진 식은

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{e^2-h}^{e^2+h} f(x) dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[F(x) \right]_{e^2-h}^{e^2+h}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(e^2+h) - F(e^2-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(e^2+h) - F(e^2) + F(e^2) - F(e^2-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(e^2+h) - F(e^2)}{h} \\ & \quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(e^2-h) - F(e^2)}{-h} \\ &= F'(e^2) + F'(e^2) = 2F'(e^2) \\ \text{이때 } F'(x) &= f(x) \text{ 이므로} \\ 2F'(e^2) &= 2f(e^2) = 2e^2 \ln e^4 = 8e^2 \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{2}{3}(3+e)$ (2) $8e^2$

연습문제

● 본책 251~252쪽

508

전략 $\int_0^1 t f(t) dt = k$ 로 놓으면 $f(x) = e^{x^2} + k$ 임을 이용한다.

$$\int_0^1 t f(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \text{로 놓으면}$$

$$f(x) = e^{x^2} + k$$

따라서

$$\begin{aligned} k &= \int_0^1 t f(t) dt = \int_0^1 t(e^{t^2} + k) dt \\ &= \int_0^1 (te^{t^2} + kt) dt = \left[\frac{1}{2}e^{t^2} + \frac{1}{2}kt^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}k - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{1}{2}k = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2} \quad \therefore k = e - 1$$

$$\therefore \int_0^1 x f(x) dx = k = e - 1$$

답 $e - 1$

509

전략 $\int_0^\pi f(t) \cos t dt = k$ 로 놓으면 $f(x) = x + k$ 임을 이용한
다.

$$\int_0^\pi f(t) \cos t dt = k \quad (k \text{는 상수}) \text{로 놓으면}$$

$$f(x) = x + k$$

$$\therefore k = \int_0^\pi f(t) \cos t dt$$

$$= \int_0^\pi (t + k) \cos t dt$$

$$u(t) = t + k, \quad v'(t) = \cos t \text{로 놓으면}$$

$$u'(t) = 1, \quad v(t) = \sin t$$

$$\therefore k = \left[(t + k) \sin t \right]_0^\pi - \int_0^\pi \sin t dt$$

$$= - \left[-\cos t \right]_0^\pi$$

$$= -2$$

$$\text{따라서 } f(x) = x - 2 \text{ 이므로}$$

$$f(3) = 1$$

답 1

510

전략 주어진 등식의 양변을 미분하여 $F'(x)$ 를 구하고 미분계수의 정의를 이용한다.

$$F(x) = \int_{\frac{\pi}{6}}^x (e^t + \cos t) dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분}$$

하면

$$F'(x) = e^x + \cos x$$

$$\text{이때 } F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{F(x)}{x - \frac{\pi}{6}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{F(x) - F\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x - \frac{\pi}{6}} \\ &= F'\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= e^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

답 $e^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

다른 풀이 $g(t) = e^t + \cos t$ 로 놓고 $g(t)$ 의 한 부정적분을 $G(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{F(x)}{x - \frac{\pi}{6}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1}{x - \frac{\pi}{6}} \int_{\frac{\pi}{6}}^x g(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\left[G(t) \right]_{\frac{\pi}{6}}^x}{x - \frac{\pi}{6}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{G(x) - G\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x - \frac{\pi}{6}} \\ &= G'\left(\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

이때 $G'(t) = g(t)$ 이므로

$$G'\left(\frac{\pi}{6}\right) = g\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

511

전략 피적분함수에 x 가 포함되지 않도록 주어진 등식의 좌변을 변형하고 양변을 x 에 대하여 미분한다.

주어진 등식에서

$$x \int_1^x f(t) dt - \int_1^x t f(t) dt = x^3 \ln x + ax + b$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}\int_1^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) \\ = 3x^2 \ln x + x^2 + a \\ \therefore \int_1^x f(t) dt = 3x^2 \ln x + x^2 + a\end{aligned}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = 1 + a \quad \therefore a = -1$$

또 주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = a + b \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore ab = -1$$

답 -1

512

전략 $g(t) = e^{-\frac{t}{2}}$, $G'(t) = g(t)$ 로 놓고 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 식을 정리한다.

$g(t) = e^{-\frac{t}{2}}$ 으로 놓으면

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_x^{x+h} g(t) dt \\ \therefore f(0) &= \int_0^h g(t) dt\end{aligned}$$

$g(t)$ 의 한 부정적분을 $G(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h g(t) dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[G(t) \right]_0^h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(h) - G(0)}{h} \\ &= G'(0)\end{aligned}$$

이때 $G'(t) = g(t)$ 이므로

$$G'(0) = g(0) = 1$$

답 1

513

전략 $\int_0^1 f(t) dt = k$ 로 놓으면 $f(x) = \frac{x}{x^2+1} + 2k$ 임을 이용한 다.

$\int_0^1 f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} + 2k$$

따라서

$$\begin{aligned}k &= \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \left(\frac{t}{t^2+1} + 2k \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln(t^2+1) + 2kt \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 + 2k\end{aligned}$$

$$\text{이므로 } k = -\frac{1}{2} \ln 2$$

즉 $f(x) = \frac{x}{x^2+1} - \ln 2$ 이므로

$$f(1) = \frac{1}{2} - \ln 2 \quad \text{답 } \frac{1}{2} - \ln 2$$

514

전략 $x-t=u$ 로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$x-t=u$ 로 놓고 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$-1 = \frac{du}{dt}$$

$t=0$ 일 때 $u=x$, $t=x$ 일 때 $u=0$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^x f(x-t) dt &= \int_x^0 f(u) \times (-1) du \\ &= \int_0^x f(u) du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^x f(u)du &= \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} \\ &= \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1+\cos x} \\ &= 1-\cos x\end{aligned}$$

$\int_0^x f(u)du = 1-\cos x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = \sin x \quad \therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$

515

전략 먼저 $f'(x)$ 를 구하고 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_1^x (\ln t - 1)dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ f'(x) &= \ln x - 1 \\ f'(x) &= 0 \text{에서 } \ln x = 1 \quad \therefore x = e\end{aligned}$$

x	0	...	e	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	극소	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=e$ 에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$$\begin{aligned}f(e) &= \int_1^e (\ln t - 1)dt \\ u(t) &= \ln t - 1, v'(t) = 1 \text{로 놓으면} \\ u'(t) &= \frac{1}{t}, v(t) = t \\ \therefore f(e) &= \left[t(\ln t - 1) \right]_1^e - \int_1^e dt \\ &= 1 - \left[t \right]_1^e = 1 - (e - 1) \\ &= 2 - e \quad \text{답 } 2 - e\end{aligned}$$

516

전략 먼저 $f'(x)$ 를 구하고 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_0^x (1 + \sin t) \cos t dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여} \\ &\text{미분하면} \\ f'(x) &= (1 + \sin x) \cos x\end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \cos x = 0$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		/	극대	\	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin t) \cos t dt$$

$1 + \sin t = u$ 로 놓고 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\cos t = \frac{du}{dt}$$

$t=0$ 일 때 $u=1$, $t=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $u=2$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_1^2 u du = \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_1^2 = \frac{3}{2} \quad \text{답 } \frac{3}{2}$$

517

전략 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하여 $f'(x)$ 를 구한 다음 부분적분법을 이용한다.

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + x f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x + f(x)$$

$$x f'(x) = x(2 \sin x + x \cos x)$$

$$\therefore f'(x) = 2 \sin x + x \cos x$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (2 \sin x + x \cos x) dx$$

$$= 2 \int \sin x dx + \int x \cos x dx$$

$$= -2 \cos x + \int x \cos x dx$$

$u(x) = x, v'(x) = \cos x$ 로 놓으면

$$u'(x) = 1, v(x) = \sin x$$

$$\therefore f(x) = -2 \cos x + x \sin x - \int \sin x dx$$

$$= -2 \cos x + x \sin x + \cos x + C$$

$$= x \sin x - \cos x + C$$

한편 주어진 등식의 양변에 $x = \frac{\pi}{2}$ 를 대입하면

$$\frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \quad \therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

따라서 $\frac{\pi}{2} + C = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$C = 0$$

즉 $f(x) = x \sin x - \cos x$ 이므로

$$f(\pi) = 1$$

답 1

518

전략 $x-t=u$ 로 놓고 치환적분법을 이용한다.

$x-t=u$ 로 놓고 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$-1 = \frac{du}{dt}$$

$t=0$ 일 때 $u=x$, $t=x$ 일 때 $u=0$ 이므로

$$f(x) = \int_0^x t \sin(x-t) dt$$

$$= \int_x^0 (x-u) \sin u \times (-1) du$$

$$= \int_0^x (x-u) \sin u du$$

$$= x \int_0^x \sin u du - \int_0^x u \sin u du$$

$$f(x) = x \int_0^x \sin u du - \int_0^x u \sin u du \text{의 양변을 } x \text{에}$$

대하여 미분하면

$$f'(x) = \int_0^x \sin u du + x \sin x - x \sin x$$

$$= \int_0^x \sin u du = \left[-\cos u \right]_0^x$$

$$= 1 - \cos x$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{1}{1 + \cos x} \right\}$$

$$= 1^2 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

519

전략 $e^t \sin \frac{\pi}{2} t = g(t)$, $G'(t) = g(t)$ 로 놓고 미분계수의 정의를 이용하여 주어진 등식의 좌변을 간단히 한다.

$g(t) = e^t \sin \frac{\pi}{2} t$ 로 놓고 $g(t)$ 의 한 부정적분을 $G(t)$

라 하면 주어진 등식의 좌변은

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4} \int_{f(2)}^{f(x)} g(t) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\left[G(t) \right]_{f(2)}^{f(x)}}{x^2 - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{G(f(x)) - G(f(2))}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{1}{x+2} \times \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \frac{G(f(x)) - G(f(2))}{f(x) - f(2)} \right\}$$

$$= \frac{1}{4} f'(2) G'(f(2))$$

$$= \frac{1}{4} f'(2) G'(1) \quad (\because f(2) = 1)$$

이때 $G'(t) = g(t)$ 이므로

$$\frac{1}{4} f'(2) G'(1) = \frac{1}{4} f'(2) g(1) = \frac{e}{4} f'(2)$$

따라서 $\frac{e}{4} f'(2) = 2e$ 이므로

$$f'(2) = 8$$

답 8

III-2

한편 주어진 등식의 양변에

3 정적분의 활용

III. 적분법

01 구분구적법

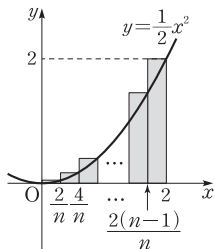
● 본책 254~256쪽

520

오른쪽 그림과 같이 구간 $[0, 2]$ 를 n 등분 하면 각 소구간의 오른쪽 끝 점의 x 좌표는 차례대로

$$\frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \frac{6}{n}, \dots,$$

$$\frac{2(n-1)}{n}, \frac{2n}{n} = 2$$



이때 각 소구간의 길이를 가로로 길이로 하고, 각 소구간의 오른쪽 끝 점에서의 함수값을 세로로 길이로 하는 n 개의 직사각형을 만들면 각 직사각형의 세로의 길이는 차례대로

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{n}\right)^2, \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{n}\right)^2, \frac{1}{2} \times \left(\frac{6}{n}\right)^2, \dots,$$

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{2n}{n}\right)^2$$

이 직사각형의 넓이의 합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{n} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{2}{n} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{n}\right)^2 \\ &\quad + \frac{2}{n} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{6}{n}\right)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{2}{n} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{2n}{n}\right)^2 \\ &= \frac{4}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \\ &= \frac{4}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{2}{3} \times 1 \times 2 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{4}{3}$

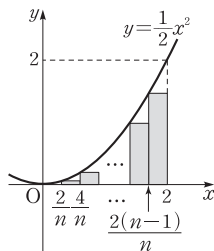
다른 풀이 오른쪽 그림과 같이

구간 $[0, 2]$ 를 n 등분 한 후 각 소구간의 길이를 가로로 길이로 하고, 각 소구간의 왼쪽 끝 점에서의 함수값을 세로로 길이로 하는 직사각형을 만들면 그 넓이의 합 T_n 은

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{2}{n} \times \frac{1}{2} \times 0 + \frac{2}{n} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{n}\right)^2 \\ &\quad + \frac{2}{n} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{n}\right)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{2}{n} \times \frac{1}{2} \times \left\{ \frac{2(n-1)}{n} \right\}^2 \\ &= \frac{4}{n^3} \{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2\} \\ &= \frac{4}{n^3} \times \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\ &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{2}{3} \times 1 \times 2 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$



521

각 직육면체의 높이는 $\frac{h}{n}$ 이고, 밑면의 한 변의 길이는 위에서부터 차례대로

$$\frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \frac{3a}{n}, \dots, \frac{(n-1)a}{n}$$

이 직육면체의 부피의 합을 V_n 이라 하면

$$\begin{aligned} V_n &= \left(\frac{a}{n}\right)^2 \times \frac{h}{n} + \left(\frac{2a}{n}\right)^2 \times \frac{h}{n} + \left(\frac{3a}{n}\right)^2 \times \frac{h}{n} \\ &\quad + \dots + \left\{ \frac{(n-1)a}{n} \right\}^2 \times \frac{h}{n} \\ &= \frac{a^2 h}{n^3} \{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2\} \\ &= \frac{a^2 h}{n^3} \times \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\ &= \frac{1}{6} a^2 h \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

따라서 구하는 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n \rightarrow \infty} V_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} a^2 h \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{6} a^2 h \times 1 \times 2 = \frac{1}{3} a^2 h \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{3} a^2 h$

02 정적분과 급수

● 본책 257~259쪽

522

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \tan^2 \frac{k\pi}{4n} = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\tan^2 \frac{k\pi}{4n} \right) \times \frac{\pi}{4n}$$

$\frac{k\pi}{4n}$ 를 x 로, $\frac{\pi}{4n}$ 를 dx 로 나타내면

$k=1$ 일 때 $n \rightarrow \infty$ 이면 $x=0$, $k=n$ 일 때 $x=\frac{\pi}{4}$

이므로 적분 구간은 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x - 1) dx \\ &= 4 \left[\tan x - x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 4 \times \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 4 - \pi \end{aligned}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{n+k}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right) \times \frac{1}{n}$$

$1 + \frac{k}{n}$ 를 x 로, $\frac{1}{n}$ 을 dx 로 나타내면

$k=1$ 일 때 $n \rightarrow \infty$ 이면 $x=1$, $k=n$ 일 때 $x=2$ 이므로 적분 구간은 $[1, 2]$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= \int_1^2 \ln x dx \\ &= \left[x \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 dx \\ &= 2 \ln 2 - \left[x \right]_1^2 \\ &= 2 \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

답 (1) $4 - \pi$ (2) $2 \ln 2 - 1$

523

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{4}{n}} + e^{\frac{6}{n}} + \dots + e^{\frac{2n}{n}})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{2k}{n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{\frac{2k}{n}} \times \frac{2}{n}$$

$\frac{2k}{n}$ 를 x 로, $\frac{2}{n}$ 를 dx 로 나타내면

$k=1$ 일 때 $n \rightarrow \infty$ 이면 $x=0$, $k=n$ 일 때 $x=2$ 이므로 적분 구간은 $[0, 2]$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= \frac{1}{2} \int_0^2 e^x dx = \frac{1}{2} \left[e^x \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2} (e^2 - 1) \end{aligned}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n}$$

$\frac{k\pi}{n}$ 를 x 로, $\frac{1}{n}$ 을 dx 로 나타내면

$k=1$ 일 때 $n \rightarrow \infty$ 이면 $x=0$, $k=n$ 일 때 $x=1$ 이므로 적분 구간은 $[0, 1]$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= \int_0^1 \sin \pi x dx \\ &= \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi x \right]_0^1 = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{1}{2} (e^2 - 1)$ (2) $\frac{2}{\pi}$

연습문제

● 본책 260쪽

524

전략 주어진 도형을 n 개의 직사각형으로 나누고 직사각형의 넓이의 합을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 구간

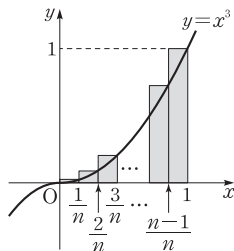
$[0, 1]$ 을 n 등분 하면 각 소

구간의 오른쪽 끝 점의 x 좌

표는 차례대로

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots,$$

$$\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1$$



III-3

오른쪽
그림과
같이
나누고
직사각형의
넓이의
합을
구한다.

이때 각 소구간의 길이를 가로의 길이로 하고, 각 소구간의 오른쪽 끝 점에서의 함수값을 세로의 길이로 하는 n 개의 직사각형을 만들면 각 직사각형의 세로의 길이는 차례대로

$$\left(\frac{1}{n}\right)^3, \left(\frac{2}{n}\right)^3, \left(\frac{3}{n}\right)^3, \dots, \left(\frac{n-1}{n}\right)^3, \left(\frac{n}{n}\right)^3$$

이 직사각형의 넓이의 합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \frac{1}{n} \times \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \frac{1}{n} \times \left(\frac{3}{n}\right)^3 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n} \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 + \frac{1}{n} \times \left(\frac{n}{n}\right)^3 \\ &= \frac{1}{n^4} \{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3\} \\ &= \frac{1}{n^4} \times \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4n^2} \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4} \quad \text{답 } \frac{1}{4}$$

525

전략 $\frac{k}{n}$, $\frac{2k}{n}$, $3 + \frac{2k}{n}$ 를 각각 적분변수로 정하여 정적분으로 나타낸다.

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(3 + \frac{2k}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(3 + \frac{2k}{n}\right)^2 \times \frac{2}{n} \\ \frac{2k}{n} \text{를 } x \text{로, } \frac{2}{n} \text{를 } dx \text{로 나타내면} \end{aligned}$$

$k=1$ 일 때 $n \rightarrow \infty$ 이면 $x=0$, $k=n$ 일 때 $x=2$ 이므로 적분 구간은 $[0, 2]$ 이다.

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \frac{1}{2} \int_0^2 (3+x)^2 dx$$

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(3 + \frac{2k}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(3 + \frac{2k}{n}\right)^2 \times \frac{2}{n} \end{aligned}$$

$3 + \frac{2k}{n}$ 를 x 로, $\frac{2}{n}$ 를 dx 로 나타내면

$k=1$ 일 때 $n \rightarrow \infty$ 이면 $x=3$, $k=n$ 일 때 $x=5$ 이므로 적분 구간은 $[3, 5]$ 이다.

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \frac{1}{2} \int_3^5 x^2 dx$$

ㄷ. $\frac{k}{n}$ 를 x 로, $\frac{1}{n}$ 을 dx 로 나타내면

$k=1$ 일 때 $n \rightarrow \infty$ 이면 $x=0$, $k=n$ 일 때 $x=1$ 이므로 적분 구간은 $[0, 1]$ 이다.

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \int_0^1 (3+2x)^2 dx$$

이상에서 주어진 식을 정적분으로 바르게 나타낸 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

526

전략 주어진 식을 피적분함수가 $f'(x)$ 인 정적분으로 변형한다.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{6}{n} f' \left(1 + \frac{3k}{n}\right) \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f' \left(1 + \frac{3k}{n}\right) \times \frac{3}{n} \\ 1 + \frac{3k}{n} \text{를 } x \text{로, } \frac{3}{n} \text{을 } dx \text{로 나타내면} \end{aligned}$$

$k=1$ 일 때 $n \rightarrow \infty$ 이면 $x=1$, $k=n$ 일 때 $x=4$ 이므로 적분 구간은 $[1, 4]$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= 2 \int_1^4 f'(x) dx = 2 \left[f(x) \right]_1^4 \\ &= 2 \{ f(4) - f(1) \} \\ &= 2 \times (4 - 2) = 4 \quad \text{답 } 4 \end{aligned}$$

527

전략 먼저 주어진 식을 Σ 를 이용하여 간단히 나타낸다.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\frac{2k}{n}}} \times \frac{2}{n} \end{aligned}$$

$\frac{2k}{n}$ 를 x 로, $\frac{2}{n}$ 를 dx 로 나타내면

$k=1$ 일 때 $n \rightarrow \infty$ 이면 $x=0$, $k=n$ 일 때 $x=2$ 이므로 적분 구간은 $[0, 2]$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[2x^{\frac{1}{2}} \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2} \quad \text{답 } \sqrt{2} \end{aligned}$$

528

전략 삼각형의 닮음을 이용하여 급수를 $\frac{k}{n}$ 를 포함한 식으로 나타낸다.

$\triangle ABC \sim \triangle AB_kC_k$ ($k=1, 2, \dots, n-1$)이므로

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AB_k} : \overline{B_kC_k}$$

$$2 : 1 = \frac{2k}{n} : \overline{B_kC_k}$$

$$\therefore \overline{B_kC_k} = \frac{k}{n}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \overline{B_kC_k}^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$\frac{k}{n}$ 를 x 로, $\frac{1}{n}$ 을 dx 로 나타내면

$k=1$ 일 때 $n \rightarrow \infty$ 이면 $x=0$, $k=n$ 일 때 $x=1$ 이므로 적분 구간은 $[0, 1]$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= 2 \int_0^1 x^2 dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \\ &= 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{2}{3}$$

529

전략 주어진 식을 정적분으로 변형한 후 삼각치환법을 이용한다.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \frac{n}{n^2+3^2} + \dots + \frac{n}{2n^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \times \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$\frac{k}{n}$ 를 x 로, $\frac{1}{n}$ 을 dx 로 나타내면

$k=1$ 일 때 $n \rightarrow \infty$ 이면 $x=0$, $k=n$ 일 때 $x=1$ 이므로 적분 구간은 $[0, 1]$ 이다.

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

이때 $x = \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$)로 놓으면

$$\frac{dx}{d\theta} = \sec^2 \theta$$

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=1$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \times \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sec^2 \theta} \times \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{\pi}{4}$$

03 도형의 넓이

● 본책 261~267쪽

530

$$\text{답 } 1, e^x, 1, e - \frac{1}{e}$$

531

$$\text{답 } e^y, e^y, e^y, e^4 - e^2$$

532

$$\frac{2}{x} = -x + 3 \text{에서} \quad x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0 \quad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 곡선 $y = \frac{2}{x}$ 와 직선 $y = -x + 3$ 의 교점의 x 좌

표는 **1**, 2이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_1^2 \left\{ (-x+3) - \frac{2}{x} \right\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2\ln|x| \right]_1^2 \\ &= \frac{3}{2} - 2\ln 2 \end{aligned} \quad \text{답 풀이 참조}$$

533

(1) 곡선 $y = \sqrt{1-x}$ 와 x 축

의 교점의 x 좌표는

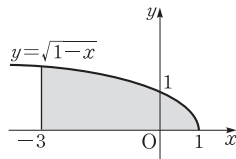
$$\sqrt{1-x} = 0 \text{에서}$$

$$x=1$$

$$-3 \leq x \leq 1 \text{에서 } y \geq 0 \text{이}$$

므로 구하는 넓이는

$$\int_{-3}^1 \sqrt{1-x} dx = \left[-\frac{2}{3} (1-x)^{\frac{3}{2}} \right]_{-3}^1 = \frac{16}{3}$$



(2) 곡선 $y = \ln(x+1)$ 과 x 축의

교점의 x 좌표는

$\ln(x+1)=0$ 에서

$$x+1=1$$

$$\therefore x=0$$

$0 \leq x \leq 2$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구

하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \ln(x+1) dx \\ &= \left[x \ln(x+1) \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{x}{x+1} dx \\ &= 2 \ln 3 - \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= 2 \ln 3 - \left[x - \ln|x+1| \right]_0^2 \\ &= 2 \ln 3 - (2 - \ln 3) = 3 \ln 3 - 2 \end{aligned}$$

(3) 곡선 $y = e^x - 1$ 과 x 축의 교

점의 x 좌표는 $e^x - 1 = 0$ 에

서 $x=0$

$-1 \leq x \leq 0$ 에서 $y \leq 0$,

$0 \leq x \leq 1$ 에서 $y \geq 0$ 이므로

구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx \\ &= \int_{-1}^0 (-e^x + 1) dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx \\ &= \left[-e^x + x \right]_{-1}^0 + \left[e^x - x \right]_0^1 = e + \frac{1}{e} - 2 \end{aligned}$$

(4) 곡선 $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$)

와 x 축의 교점의 x 좌표는

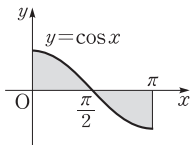
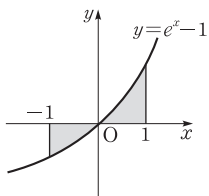
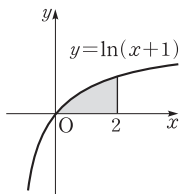
$$\cos x = 0 \text{에서 } x = \frac{\pi}{2}$$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $y \geq 0$,

$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi |\cos x| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\cos x) dx \\ &= \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\text{답 (1) } \frac{16}{3} \quad (2) 3 \ln 3 - 2 \quad (3) e + \frac{1}{e} - 2 \quad (4) 2$$



534

곡선 $y = \sqrt{x}$ 와 x 축 및 직선

$x=4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이

를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 \sqrt{x} dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

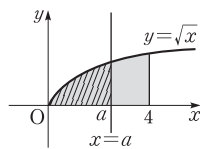
곡선 $y = \sqrt{x}$ 와 x 축 및 직선 $x=a$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \int_0^a \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^a = \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}}$$

이때 $S = 2S_1$ 이므로 $\frac{16}{3} = 2 \times \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}}, \quad a^{\frac{3}{2}} = 4$

$$a^3 = 16 \quad \therefore a = \sqrt[3]{16}$$

$$\text{답 } \sqrt[3]{16}$$



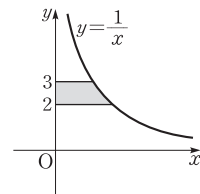
535

(1) $y = \frac{1}{x}$ 에서 $x = \frac{1}{y}$

$2 \leq y \leq 3$ 에서 $x > 0$ 이므로

구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{1}{y} dy &= \left[\ln |y| \right]_2^3 \\ &= \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$



(2) $y = \ln(x+1) - 1$ 에서

$$x = e^{y+1} - 1$$

곡선 $x = e^{y+1} - 1$ 과 y 축의 교

점의 y 좌표는 $e^{y+1} - 1 = 0$ 에

서

$$y+1=0 \quad \therefore y=-1$$

$-1 \leq y \leq 1$ 에서 $x \geq 0$ 이므로 구하는 넓이는

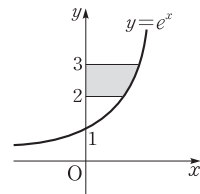
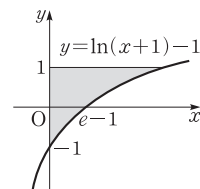
$$\int_{-1}^1 (e^{y+1} - 1) dy = \left[e^{y+1} - y \right]_{-1}^1 = e^2 - 3$$

(3) $y = e^x$ 에서 $x = \ln y$

$2 \leq y \leq 3$ 에서 $x > 0$ 이므로

구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_2^3 \ln y dy \\ &= \left[y \ln y \right]_2^3 - \int_2^3 dy \\ &= 3 \ln 3 - 2 \ln 2 - \left[y \right]_2^3 = \ln \frac{27}{4} - 1 \end{aligned}$$



(4) $y = \sqrt{x+1} - 1$ 에서

$$x = y^2 + 2y$$

$$(y \geq -1)$$

곡선 $x = y^2 + 2y$ 와 y 축

의 교점의 y 좌표는

$$y^2 + 2y = 0 \text{에서}$$

$$y(y+2) = 0$$

$$\therefore y = 0 \quad (\because y \geq -1)$$

$-1 \leq y \leq 0$ 에서 $x \leq 0$, $0 \leq y \leq 1$ 에서 $x \geq 0$ 이므로

구하는 넓이는

$$\int_{-1}^1 |y^2 + 2y| dy$$

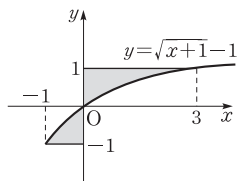
$$= \int_{-1}^0 (-y^2 - 2y) dy + \int_0^1 (y^2 + 2y) dy$$

$$= \left[-\frac{1}{3}y^3 - y^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3}y^3 + y^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{3}$$

$$= 2$$

☞ (1) $\ln \frac{3}{2}$ (2) $e^2 - 3$ (3) $\ln \frac{27}{4} - 1$ (4) 2



536

$y = \ln(x+k)$ 에서

$$x = e^y - k$$

곡선 $x = e^y - k$ 과 y 축의 교점

의 y 좌표는 $e^y - k = 0$ 에서

$$y = \ln k$$

$0 \leq y \leq \ln k$ 에서 $x \leq 0$ 이고 곡

선 $x = e^y - k$ 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\int_0^{\ln k} |e^y - k| dy = 1$$

$$\int_0^{\ln k} (-e^y + k) dy = 1$$

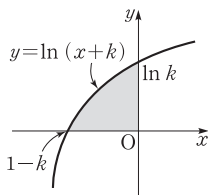
$$\left[-e^y + ky \right]_0^{\ln k} = 1$$

$$-k + k \ln k + 1 = 1$$

$$k(\ln k - 1) = 0$$

$$\ln k = 1 \quad (\because k > 1)$$

$$\therefore k = e$$



다른 풀이 곡선 $y = \ln(x+k)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$\ln(x+k) = 0 \text{에서}$$

$$x+k=1 \quad \therefore x=1-k$$

$1-k \leq x \leq 0$ 에서 $y \geq 0$ 이고 곡선 $y = \ln(x+k)$ 와 x

축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\int_{1-k}^0 \ln(x+k) dx = 1$$

$$\left[x \ln(x+k) \right]_{1-k}^0 - \int_{1-k}^0 \frac{x}{x+k} dx = 1$$

$$- \int_{1-k}^0 \left(1 - \frac{k}{x+k} \right) dx = 1$$

$$- \left[x - k \ln|x+k| \right]_{1-k}^0 = 1$$

$$k \ln k + 1 - k = 1$$

$$k(\ln k - 1) = 0$$

$$\therefore k = e \quad (\because k > 1)$$

537

(1) 두 곡선 $y = e^x$ 과 $y = e^{-x}$ 의

교점의 x 좌표는 $e^x = e^{-x}$ 에서

$$e^{2x} = 1 \quad \therefore x = 0$$

$-1 \leq x \leq 0$ 에서 $e^x \leq e^{-x}$,

$0 \leq x \leq 1$ 에서 $e^x \geq e^{-x}$ 이므

로 구하는 넓이는

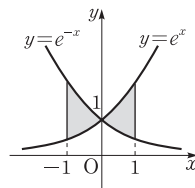
$$\int_{-1}^1 |e^x - e^{-x}| dx$$

$$= \int_{-1}^0 (e^{-x} - e^x) dx + \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx$$

$$= \left[-e^{-x} - e^x \right]_{-1}^0 + \left[e^x + e^{-x} \right]_0^1$$

$$= \left(e + \frac{1}{e} - 2 \right) + \left(e + \frac{1}{e} - 2 \right)$$

$$= 2 \left(e + \frac{1}{e} - 2 \right)$$



(2) 두 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 과 $y = \sqrt{x}$

의 교점의 x 좌표는

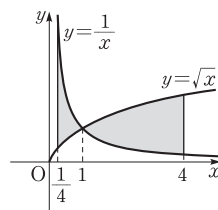
$$\frac{1}{x} = \sqrt{x} \text{에서}$$

$$x\sqrt{x} = 1$$

$$x^3 - 1 = 0$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$\therefore x = 1 \quad (\because x^2+x+1 > 0)$$



$\frac{1}{4} \leq x \leq 1$ 에서 $\frac{1}{x} \geq \sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 4$ 에서 $\frac{1}{x} \leq \sqrt{x}$

이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{4}}^4 \left| \frac{1}{x} - \sqrt{x} \right| dx \\ &= \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(\frac{1}{x} - \sqrt{x} \right) dx + \int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \left[\ln |x| - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{1}{4}}^1 + \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \ln |x| \right]_1^4 \\ &= \left(\ln 4 - \frac{7}{12} \right) + \left(\frac{14}{3} - \ln 4 \right) \\ &= \frac{49}{12} \end{aligned}$$

(3) 두 곡선 $y=2\sin x$ 와 $y=\sin 2x$ 의 교점의 x 좌표는

$2\sin x = \sin 2x$ 에서

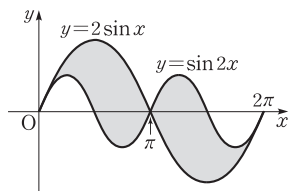
$$2\sin x = 2\sin x \cos x$$

$$\sin x(1 - \cos x) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ 또는 } \cos x = 1$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\pi \text{ 또는 } x=2\pi$$

$$(\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$



$0 \leq x \leq \pi$ 에서 $2\sin x \geq \sin 2x$, $\pi \leq x \leq 2\pi$ 에서

$2\sin x \leq \sin 2x$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} |2\sin x - \sin 2x| dx \\ &= \int_0^{\pi} (2\sin x - \sin 2x) dx \\ & \quad + \int_{\pi}^{2\pi} (\sin 2x - 2\sin x) dx \\ &= \left[-2\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\pi} \\ & \quad + \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + 2\cos x \right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$

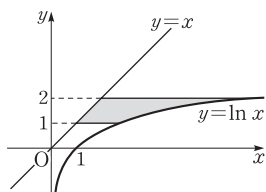
(4) $y=\ln x$ 에서

$$x=e^y$$

$1 \leq y \leq 2$ 에서 $e^y > y$

이므로 구하는 넓이

는



$$\int_1^2 (e^y - y) dy = \left[e^y - \frac{1}{2} y^2 \right]_1^2 = e^2 - e - \frac{3}{2}$$

$$\text{답 (1)} 2\left(e + \frac{1}{e} - 2\right) \quad (2) \frac{49}{12}$$

$$(3) 8 \quad (4) e^2 - e - \frac{3}{2}$$

538

$y=\ln x$ 에서 $y'=\frac{1}{x}$

곡선 위의 점 $(e, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{e}$ 이므로

접선의 방정식은

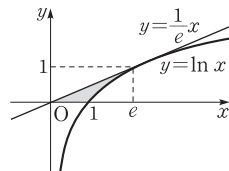
$$y-1 = \frac{1}{e}(x-e) \quad \therefore y = \frac{1}{e}x$$

따라서 오른쪽 그림에서 구

하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^e \frac{1}{e} x dx \\ & - \int_1^e \ln x dx \\ &= \left[\frac{1}{2e} x^2 \right]_0^e - \left([x \ln x]_1^e - \int_1^e dx \right) \\ &= \frac{1}{2} e - e + [x]_1^e \\ &= \frac{1}{2} e - e + (e-1) \\ &= \frac{1}{2} e - 1 \end{aligned}$$

$$\text{답 } \frac{1}{2} e - 1$$



다른 풀이 $y=\ln x$ 에서 $x=e^y$

$y=\frac{1}{e}x$ 에서 $x=ey$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^1 (e^y - ey) dy = \left[e^y - \frac{e}{2} y^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} e - 1$$

539

$y=\sqrt{x-1}$ 에서 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

점점의 좌표를 $(t, \sqrt{t-1})$ 이라 하면 이 점에서의 접선

의 기울기는 $\frac{1}{2\sqrt{t-1}}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \sqrt{t-1} = \frac{1}{2\sqrt{t-1}}(x-t) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-\sqrt{t-1} = \frac{1}{2\sqrt{t-1}} \times (-t)$$

$$2(t-1) = t$$

$$\therefore t = 2$$

$t=2$ 를 ㉠에 대입하면

$$y-1 = \frac{1}{2}(x-2) \quad \therefore y = \frac{1}{2}x$$

따라서 오른쪽 그림에서 구

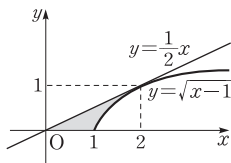
하는 넓이는

$$\int_0^2 \frac{1}{2}x dx - \int_1^2 \sqrt{x-1} dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^2 \right]_0^2 - \left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2$$

$$= 1 - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$



답 $\frac{1}{3}$

540

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$

는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭

이므로 두 곡선으로 둘러싸

인 도형의 넓이는 곡선

$y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘

러싸인 도형의 넓이의 2배와

같다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는

$\sqrt{4x-3}=x$ 에서

$$4x-3=x^2, \quad x^2-4x+3=0$$

$$(x-1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

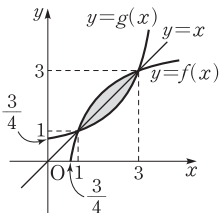
따라서 구하는 넓이는

$$2 \int_1^3 (\sqrt{4x-3} - x) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{6}(4x-3)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^3$$

$$= 2 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{3}$$



답 $\frac{2}{3}$

541

$f(0)=2$, $f(1)=e+1$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 두 점 $(0, 2)$, $(1, e+1)$ 을 지난다.

이때 두 곡선 $y=f(x)$ 와

$y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에

대하여 대칭이므로 오른쪽

그림에서

(A의 넓이)

= (B의 넓이)

$$\therefore \int_0^1 f(x) dx + \int_2^{e+1} g(x) dx$$

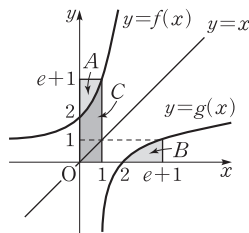
= (C의 넓이) + (B의 넓이)

= (C의 넓이) + (A의 넓이)

$$= 1 \times (e+1)$$

$$= e+1$$

답 $e+1$



III-3

오른
가운데
왼쪽
아래

연습 문제

● 본책 268~270쪽

542

전략 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인

도형의 넓이는 $\int_a^b |f(x)| dx$ 임을 이용한다.

곡선 $y=-\ln(x+2)$ 와

x 축의 교점의 x 좌표는

$-\ln(x+2)=0$ 에서

$$x+2=1$$

$$\therefore x=-1$$

$-1 \leq x \leq e-2$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{e-2} \ln(x+2) dx$$

$$= \left[x \ln(x+2) \right]_{-1}^{e-2} - \int_{-1}^{e-2} \frac{x}{x+2} dx$$

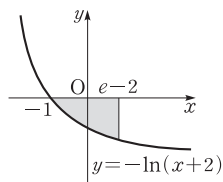
$$= e-2 - \int_{-1}^{e-2} \left(1 - \frac{2}{x+2} \right) dx$$

$$= e-2 - \left[x-2 \ln(x+2) \right]_{-1}^{e-2}$$

$$= e-2 - (e-3)$$

$$= 1$$

답 1



543

전략 곡선 $y=\sqrt{x-1}$ 과 x 축 및 직선 $x=k$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 k 에 대한 식으로 나타낸다.

곡선 $y=\sqrt{x-1}$ 과 x 축의

교점의 x 좌표는

$\sqrt{x-1}=0$ 에서 $x=1$

$1 \leq x \leq k$ 에서 $y \geq 0$ 이므로

곡선 $y=\sqrt{x-1}$ 과 x 축 및

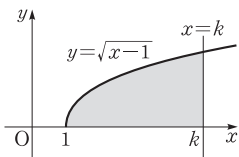
직선 $x=k$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_1^k \sqrt{x-1} dx = \left[\frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^k = \frac{2}{3} (k-1)^{\frac{3}{2}}$$

따라서 $\frac{2}{3} (k-1)^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3}$ 이므로 $(k-1)^{\frac{3}{2}} = 8$

$$k-1=4 \quad \therefore k=5$$

답 5



544

전략 곡선 $y=e^x$ 과 x 축, y 축 및 직선 $x=\ln 3$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=e^x$ 과 x 축, y 축 및 직선 $x=k$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같음을 이용한다.

곡선 $y=e^x$ 과 x 축, y 축 및 직선

$x=\ln 3$ 로 둘러싸인 도형의 넓

이를 S 라 하면

$$S = \int_0^{\ln 3} e^x dx = [e^x]_0^{\ln 3} = 2$$

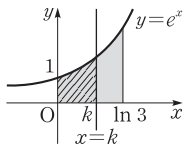
곡선 $y=e^x$ 과 x 축, y 축 및 직선 $x=k$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \int_0^k e^x dx = [e^x]_0^k = e^k - 1$$

이때 $S=2S_1$ 이므로 $2=2 \times (e^k - 1)$

$$e^k = 2 \quad \therefore k = \ln 2$$

답 $\ln 2$



545

전략 곡선 $x=g(y)$ 와 y 축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_c^d |g(y)| dy$ 임을 이용한다.

$y=(x+2)^2$ 에서

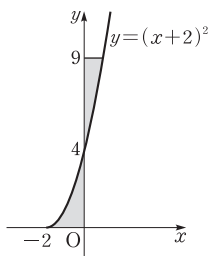
$$\sqrt{y}=x+2 \quad (\because x \geq -2)$$

$$\therefore x = \sqrt{y} - 2$$

곡선 $x=\sqrt{y}-2$ 와 y 축의 교점

의 y 좌표는 $\sqrt{y}-2=0$ 에서

$$y=4$$



$0 \leq y \leq 4$ 에서 $x \leq 0$, $4 \leq y \leq 9$ 에서 $x \geq 0$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^9 |\sqrt{y}-2| dy \\ &= \int_0^4 (-\sqrt{y}+2) dy + \int_4^9 (\sqrt{y}-2) dy \\ &= \left[-\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} + 2y \right]_0^4 + \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - 2y \right]_4^9 \\ &= \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{16}{3}$

546

전략 곡선과 두 직선의 교점의 x 좌표를 구한 다음 구간을 나누어 곡선과 두 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

곡선 $y=\frac{1}{x}$ 과 직선 $y=2x$

의 교점의 x 좌표는

$$\frac{1}{x} = 2x \text{에서}$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because x > 0)$$

곡선 $y=\frac{1}{x}$ 과 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}x \text{에서}$$

$$x^2 = 2 \quad \therefore x = \sqrt{2} \quad (\because x > 0)$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(2x - \frac{1}{2}x \right) dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}x \right) dx \\ &= \left[\frac{3}{4} x^2 \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[\ln x - \frac{1}{4} x^2 \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{3}{8} + \left(\ln 2 - \frac{3}{8} \right) \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

답 $\ln 2$

다른 풀이 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \left[\ln x \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= \ln \sqrt{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \ln 2 \end{aligned}$$

547

전략 접선의 방정식을 구한 후 곡선 $y = \frac{1}{x+1}$ 과 접선의 위치 관계를 파악한다.

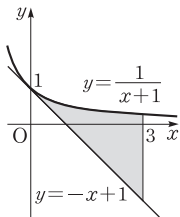
$$y = \frac{1}{x+1} \text{에서} \quad y' = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

곡선 위의 점 $(0, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 -1 이므로 접선의 방정식은

$$y = -x + 1$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^3 \left\{ \frac{1}{x+1} - (-x+1) \right\} dx \\ &= \left[\ln|x+1| + \frac{1}{2}x^2 - x \right]_0^3 \\ &= \ln 4 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$



답 $\ln 4 + \frac{3}{2}$

548

전략 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 를 그리고 넓이가 같은 두 도형을 찾는다.

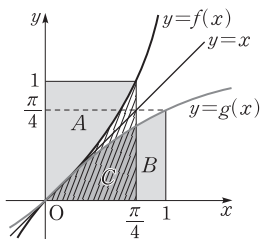
$f(0)=0$, $f(\frac{\pi}{4})=1$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 두 점

$(0, 0)$, $(\frac{\pi}{4}, 1)$ 을 지난다.

이때 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서

(A의 넓이)
= (B의 넓이)

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx \\ &= (\text{C의 넓이}) + (\text{B의 넓이}) \\ &= (\text{C의 넓이}) + (\text{A의 넓이}) \\ &= \frac{\pi}{4} \times 1 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$



답 $\frac{\pi}{4}$

549

전략 구하는 넓이를 정적분을 이용하여 나타내고 치환적분법을 이용한다.

곡선 $y = x \ln(x^2+1)$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는

$$x \ln(x^2+1) = 0 \text{에서} \quad x = 0$$

$0 \leq x \leq 1$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^1 x \ln(x^2+1) dx$$

이때 $x^2+1=t$ 로 놓으면

$$2x = \frac{dt}{dx}$$

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=1$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x \ln(x^2+1) dx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{2} \ln t dt = \frac{1}{2} \int_1^2 \ln t dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[t \ln t \right]_1^2 - \int_1^2 dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2 \ln 2 - \left[t \right]_1^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} (2 \ln 2 - 1) \\ &= \ln 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ①

550

전략 곡선 $y=e^{2x}$ 과 직선 $y=-x+k$ 의 교점의 x 좌표를 α 라고 하고 S_1 , S_2 를 각각 정적분으로 나타낸다.

곡선 $y=e^{2x}$ 과 직선 $y=-x+k$ 의 교점의 x 좌표를 α 라 하면

$$S_1 = \int_0^{\alpha} (-x+k-e^{2x}) dx,$$

$$S_2 = \int_{\alpha}^1 (e^{2x}+x-k) dx$$

$S_1=S_2$ 에서 $S_1-S_2=0$ 이므로

$$\int_0^{\alpha} (-x+k-e^{2x}) dx - \int_{\alpha}^1 (e^{2x}+x-k) dx = 0$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\alpha} (-x+k-e^{2x}) dx + \int_{\alpha}^1 (-x+k-e^{2x}) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 (-x+k-e^{2x}) dx = 0$$

$$\left[-\frac{1}{2}x^2 + kx - \frac{1}{2}e^{2x} \right]_0^1 = 0$$

$$k - \frac{1}{2}e^2 = 0$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}e^2$$

답 $\frac{1}{2}e^2$

III-3

오
조
대
의
미
하
요

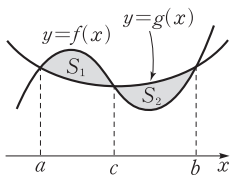
다른 풀이 $S_1 = S_2$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{(-x+k) - e^{2x}\} dx &= 0 \\ \left[-\frac{1}{2}x^2 + kx - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 &= 0 \\ k - \frac{1}{2}e^2 &= 0 \\ \therefore k &= \frac{1}{2}e^2 \end{aligned}$$

개념 노트

오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 S_1 , S_2 라 할 때, $S_1 = S_2$ 이면

$$\int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx = 0$$



551

전략 두 곡선 $y=\cos x$, $y=\sqrt{3}\sin x$ 의 교점의 x 좌표를 이용하여 S_1 , S_2 를 각각 구한다.

두 곡선 $y=\cos x$ 와 $y=\sqrt{3}\sin x$ 의 교점의 x 좌표는 $\cos x = \sqrt{3}\sin x$ 에서

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \quad \left(\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

따라서

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos x - \sqrt{3}\sin x) dx \\ &= \left[\sin x + \sqrt{3}\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = 2 - \sqrt{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3}\sin x dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= \left[-\sqrt{3}\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \left[\sin x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(-\frac{3}{2} + \sqrt{3} \right) + \frac{1}{2} = \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

이므로 $S_2 - S_1 = 2\sqrt{3} - 3$ **답** $2\sqrt{3} - 3$

참고 $S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - S_1 = \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (2 - \sqrt{3})$
 $= 1 - (2 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$

과 같이 구할 수도 있다.

552

전략 접선의 방정식과 접선에 수직인 직선의 방정식을 구한 후 곡선 $y=e^x$ 과 두 직선의 위치 관계를 파악한다.

$$y=e^x \text{에서} \quad y'=e^x$$

곡선 위의 점 $(1, e)$ 에서의 접선의 기울기는 e 이므로 접선의 방정식은

$$y - e = e(x - 1) \quad \therefore y = ex$$

한편 접선 $y=ex$ 에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{e}$ 이

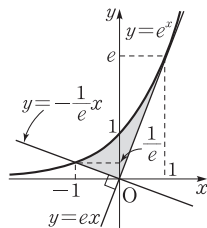
므로 접선에 수직이고 점 $\left(-1, \frac{1}{e}\right)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}(x + 1) \quad \therefore y = -\frac{1}{e}x$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는

넓이는

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^0 \left\{ e^x - \left(-\frac{1}{e}x \right) \right\} dx \\ &+ \int_0^1 (e^x - ex) dx \\ &= \left[e^x + \frac{1}{2e}x^2 \right]_{-1}^0 \\ &+ \left[e^x - \frac{e}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \left(1 - \frac{3}{2e} \right) + \left(\frac{e}{2} - 1 \right) = \frac{e^2 - 3}{2e} \end{aligned}$$



다른 풀이 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 e^x dx - \left(\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{e} + \frac{1}{2} \times 1 \times e \right) \\ &= \left[e^x \right]_{-1}^1 - \left(\frac{1}{2e} + \frac{e}{2} \right) \\ &= \left(e - \frac{1}{e} \right) - \left(\frac{1}{2e} + \frac{e}{2} \right) = \frac{e^2 - 3}{2e} \end{aligned}$$

참고 점 $\left(-1, \frac{1}{e}\right)$ 은 곡선 $y=e^x$ 위의 점이므로 점

$\left(-1, \frac{1}{e}\right)$ 은 곡선 $y=e^x$ 과 직선 $y=-\frac{1}{e}x$ 의 교점이다.

553

전략 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 의 접점의 x 좌표가 t 이면 $f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$ 임을 이용한다.

$$f(x) = k \ln x, \quad g(x) = \frac{1}{2}x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = \frac{k}{x}, \quad g'(x) = \frac{1}{2}$$

이때 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표를 t 라 하면

$$f(t)=g(t) \text{에서} \quad k \ln t = \frac{1}{2}t \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f'(t)=g'(t) \text{에서} \quad \frac{k}{t} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}t \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

②을 ①에 대입하면

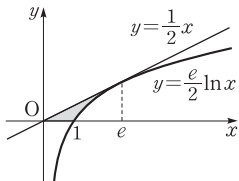
$$\frac{1}{2}t \ln t = \frac{1}{2}t, \quad \ln t = 1 \quad (\because t > 0)$$

$$\therefore t = e$$

$$t=e \text{를 } \textcircled{㉡} \text{에 대입하면} \quad k = \frac{e}{2}$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^e \frac{1}{2}x dx \\ & - \int_1^e \frac{e}{2} \ln x dx \\ & = \left[\frac{1}{4}x^2 \right]_0^e - \frac{e}{2} \left([x \ln x]_1^e - \int_1^e dx \right) \\ & = \frac{e^2}{4} - \frac{e}{2} \left(e - [x]_1^e \right) \\ & = \frac{e^2}{4} - \frac{e}{2} \{ e - (e-1) \} \\ & = \frac{e^2 - 2e}{4} \end{aligned}$$



$$\text{답} \quad \frac{e^2 - 2e}{4}$$

554

전략 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭임을 이용한다.

두 곡선 $y=f(x)$,

$y=f^{-1}(x)$ 는 직선 $y=x$

에 대하여 대칭이므로 두

곡선으로 둘러싸인 도형의

넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직

선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형

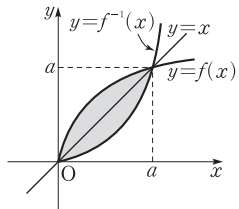
의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\sqrt{ax}=x \text{에서}$$

$$ax=x^2, \quad x(x-a)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=a$$



따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} 2 \int_0^a (\sqrt{ax} - x) dx &= 2 \left[\frac{2}{3a} (ax)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^a \\ &= 2 \times \frac{1}{6}a^2 \\ &= \frac{1}{3}a^2 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \frac{1}{3}a^2 = \frac{25}{3} \text{이므로}$$

$$a^2 = 25 \quad \therefore a = 5 \quad (\because a > 0)$$

답 5

555

전략 함수 $y=|\sin x|$ 는 주기가 π 인 주기함수임을 이용한다.

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left| \left(\frac{1}{2} \right)^n \sin x \right| dx \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^n \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin x| dx \end{aligned}$$

이때 $y=|\sin x|$ 는 주기가 π 인 주기함수이므로 임의의 자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin x| dx &= \int_0^\pi \sin x dx \\ &= [-\cos x]_0^\pi = 2 \end{aligned}$$

$$\therefore S_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n \times 2 = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

답 2

556

전략 곡선 $y=a \cos x$ 와 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 두 곡선 $y=a \cos x$, $y=\sin x$ 와 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같음을 이용한다.

두 곡선 $y=a \cos x$, $y=\sin x$ 의 교점의 x 좌표를 α 라 하면

$$a \cos \alpha = \sin \alpha \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{이므로}$$

$$a^2 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1+a^2}$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \quad (\because \cos \alpha > 0)$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

한편 곡선 $y = a \cos x$ 와 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos x dx$$

$$= \left[a \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = a$$

두 곡선 $y = a \cos x$, $y = \sin x$ 와 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \int_0^a (a \cos x - \sin x) dx$$

$$= \left[a \sin x + \cos x \right]_0^a$$

$$= a \sin \alpha + \cos \alpha - 1$$

$$= a \times \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} - 1$$

$$= \sqrt{1+a^2} - 1$$

이때 $S = 2S_1$ 이므로

$$a = 2(\sqrt{1+a^2} - 1)$$

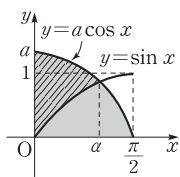
$$\therefore a + 2 = 2\sqrt{1+a^2}$$

양변을 제곱하면

$$a^2 + 4a + 4 = 4 + 4a^2$$

$$3a^2 - 4a = 0, \quad a(3a - 4) = 0$$

$$\therefore a = \frac{4}{3} \quad (\because a > 0)$$



557

전략 $f(x)$ 의 최댓값과 주어진 도형의 넓이를 각각 a 에 대한 식으로 나타낸다.

$f(x) = \int_0^x (a-t)e^t dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = (a-x)e^x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서} \quad x = a$$

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대이면서 최대이므로 $f(x)$ 의 최댓값은

$$f(a) = \int_0^a (a-t)e^t dt$$

$$= \left[(a-t)e^t \right]_0^a - \int_0^a (-e^t) dt$$

$$= -a + \left[e^t \right]_0^a = e^a - a - 1$$

$$\therefore e^a - a - 1 = 20$$

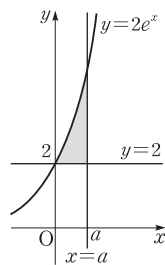
따라서 곡선 $y = 2e^x$ 과 두 직선 $x=a$, $y=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^a (2e^x - 2) dx$$

$$= \left[2e^x - 2x \right]_0^a$$

$$= 2(e^a - a - 1)$$

$$= 2 \times 20 = 40$$



답 40

558

전략 두 곡선 $y = e^{x-1}$, $y = \ln x + 1$ 의 공통인 접선의 방정식이 $y = x$ 임을 이용한다.

$$y = e^{x-1} \text{에서} \quad x-1 = \ln y$$

$$\therefore x = \ln y + 1$$

x 와 y 를 바꾸면 $y = \ln x + 1$

따라서 두 함수 $y = e^{x-1}$ 과 $y = \ln x + 1$ 은 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

이때 두 곡선이 서로 접하므로 두 곡선의 공통인 접선의 방정식은 $y = x$ 이다.

두 곡선과 직선 $y = x$ 의 접점의 x 좌표를 t 라 하면 점 (t, e^{t-1}) 에서의 접선의 기울기가 1이므로

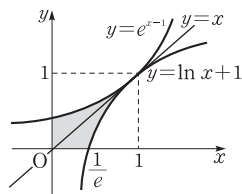
$$e^{t-1} = 1, \quad t-1 = 0 \quad \therefore t = 1$$

즉 두 곡선은 점 $(1, 1)$ 에서 접하므로 구하는 넓이는

$$2 \int_0^1 (e^{x-1} - x) dx = 2 \left[e^{x-1} - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e} \right)$$

$$= 1 - \frac{2}{e}$$



답 1 - 2/e

04 입체도형의 부피

● 본책 271~275쪽

559

답 $3\sqrt{x}, 3\sqrt{x}, 2x^{\frac{3}{2}}, 32\sqrt{2}$

560

답 $3x^2+2, 10, 3x^2+2, x^3+2x, 10, 1020$

561

구하는 부피는

$$\begin{aligned} & \int_0^5 \ln(x+1) dx \\ &= \left[x \ln(x+1) \right]_0^5 - \int_0^5 \frac{x}{x+1} dx \\ &= 5 \ln 6 - \int_0^5 \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= 5 \ln 6 - \left[x - \ln(x+1) \right]_0^5 \\ &= 5 \ln 6 - (5 - \ln 6) \\ &= 6 \ln 6 - 5 \end{aligned}$$

답 $6 \ln 6 - 5$

562

물의 높이가 t cm일 때의 수면의 넓이를 $S(t)$ cm²라 하면

$$\int_0^x S(t) dt = x^3 - 2x^2 + 3x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$S(x) = 3x^2 - 4x + 3$$

$$\therefore S(3) = 18$$

따라서 물의 높이가 3 cm일 때, 수면의 넓이는 18 cm²이다.

답 18 cm^2

563

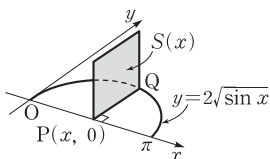
오른쪽 그림과 같이 x 축 위의 점

$P(x, 0)$ ($0 \leq x \leq \pi$)을

지나고 x 축에 수직인 직

선이 곡선 $y = 2\sqrt{\sin x}$ 와 만나는

점을 Q 라 하면 $Q(x, 2\sqrt{\sin x})$



점 P 를 지나고 x 축에 수직인 평면으로 주어진 입체도형을 자른 단면은 한 변의 길이가 $\overline{PQ}$ 인 정사각형이므로 그 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = (\overline{PQ})^2 = 4 \sin x$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^\pi S(x) dx &= \int_0^\pi 4 \sin x dx \\ &= \left[-4 \cos x \right]_0^\pi = 8 \end{aligned}$$

답 8

564

오른쪽 그림과 같이 x 축 위의

점 $P(x, 0)$ ($0 \leq x \leq 2$)을 지

나고 x 축에 수직인 직선이 곡

선 $y = \frac{2}{x+1}$ 와 만나는 점을

Q 라 하면

$$Q\left(x, \frac{2}{x+1}\right)$$

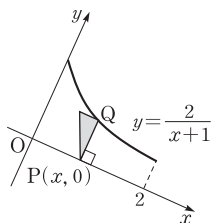
점 P 를 지나고 x 축에 수직인 평면으로 주어진 입체도형을 자른 단면은 한 변의 길이가 $\overline{PQ}$ 인 정삼각형이므로 그 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{2}{x+1} \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{(x+1)^2}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^2 S(x) dx &= \int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{(x+1)^2} dx \\ &= \left[-\frac{\sqrt{3}}{x+1} \right]_0^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

답 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$



565

오른쪽 그림과 같이 반구의 밑

면의 중심을 원점, 반구를 자

른 평면과 밑면의 교선을 x 축

으로 정하자.

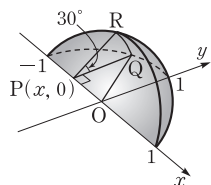
x 축 위의 점

$P(x, 0)$ ($-1 \leq x \leq 1$)을 지나고 x 축에 수직인 평면

으로 주어진 입체도형을 자른 단면을 부채꼴 PQR 라

하면 $\triangle POQ$ 에서

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{OQ}^2 - \overline{OP}^2} = \sqrt{1 - x^2}$$



이때 부채꼴 PQR의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{1}{2} \times \overline{PQ}^2 \times \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\pi}{12} (1-x^2)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_{-1}^1 S(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{\pi}{12} (1-x^2) dx$$

$$= \frac{\pi}{12} \times 2 \int_0^1 (1-x^2) dx$$

$$= \frac{\pi}{6} \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1$$

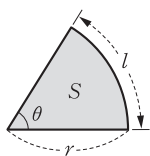
$$= \frac{\pi}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{\pi}{9}$$

답 $\frac{\pi}{9}$

개념 노트

반지름의 길이가 r , 중심각의 크기가 θ 인 부채꼴의 호의 길이를 l , 넓이를 S 라 하면

$$l = r\theta, S = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} r l$$



연습 문제

● 본책 276쪽

566

전략 반지름의 길이가 r , 호의 길이가 l 인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}rl$ 임을 이용한다.

입체도형을 밑면으로부터의 높이가 x 인 지점에서 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{1}{2} (6-x)^2 = \frac{1}{2} (x^2 - 12x + 36)$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^6 S(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^6 (x^2 - 12x + 36) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 - 6x^2 + 36x \right]_0^6$$

$$= \frac{1}{2} \times 72$$

$$= 36$$

답 36

567

전략 물의 깊이가 t 일 때의 수면의 넓이를 $S(t)$ 라 하고 물의 부피를 정적분으로 나타낸다.

물의 깊이가 t 일 때의 수면의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$\int_0^x S(t) dt = \frac{1}{\ln 3} (9^x + 3^x - 2)$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$S(x) = 2 \times 9^x + 3^x$$

$S(x) = 21$ 에서

$$2 \times 9^x + 3^x = 21$$

$$\therefore 2 \times (3^x)^2 + 3^x - 21 = 0$$

$3^x = k$ ($k > 0$)라 하면

$$2k^2 + k - 21 = 0, \quad (2k+7)(k-3) = 0$$

$$\therefore k = 3 \quad (\because k > 0)$$

즉 $3^x = 3$ 에서

$$x = 1$$

따라서 수면의 넓이가 21이 되도록 물을 넣었을 때, 채워진 물의 깊이는 1이다.

답 1

568

전략 구간 $[a, b]$ 에서 x 좌표가 x 인 점을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$ 인 입체도형의 부피는

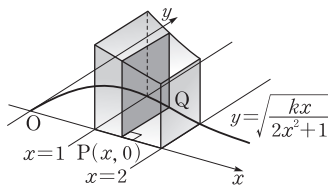
$$\int_a^b S(x) dx$$

다음 그림과 같이 x 축 위의 점 $P(x, 0)$ ($1 \leq x \leq 2$)을

지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y = \sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}}$ 와

만나는 점을 Q라 하면

$$Q\left(x, \sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}}\right)$$



점 P를 지나고 x 축에 수직인 평면으로 주어진 입체도형을 자른 단면은 한 변의 길이가 PQ 인 정사각형이므로 그 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \left(\sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}} \right)^2 = \frac{kx}{2x^2+1}$$

따라서 주어진 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned}\int_1^2 S(x)dx &= \int_1^2 \frac{kx}{2x^2+1} dx \\ &= \frac{k}{4} \int_1^2 \frac{4x}{2x^2+1} dx \\ &= \frac{k}{4} \left[\ln|2x^2+1| \right]_1^2 \\ &= \frac{k}{4} \ln 3\end{aligned}$$

즉 $\frac{k}{4} \ln 3 = 2 \ln 3$ 이므로

$$\frac{k}{4} = 2 \quad \therefore k = 8$$

답 ③

569

전략 입체도형의 밑면을 좌표평면 위에 나타내고, 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 밑면의 중심을 원점, 밑면의 지름을 포함하는 직선을 x 축으로 정하자.

x 축 위의 점

$H(x, 0) (-2 \leq x \leq 2)$ 을 지

나고 x 축에 수직인 평면으로 주어진 입체도형을 자른 단면을 $\triangle PQR$ 라 하면

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= 2\overline{QH} = 2\sqrt{\overline{OQ}^2 - \overline{OH}^2} \\ &= 2\sqrt{4 - x^2}\end{aligned}$$

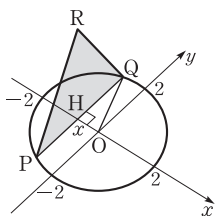
이때 $\triangle PQR$ 의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \overline{PQ}^2 = \sqrt{3}(4 - x^2)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 S(x)dx &= \int_{-2}^2 \sqrt{3}(4 - x^2)dx \\ &= \sqrt{3} \times 2 \int_0^2 (4 - x^2)dx \\ &= 2\sqrt{3} \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 \\ &= 2\sqrt{3} \times \frac{16}{3} \\ &= \frac{32\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

답 $\frac{32\sqrt{3}}{3}$



570

전략 그릇에 남아 있는 물이 이루는 입체도형의 밑면인 반원을 좌표평면 위에 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 그릇의 밑면의 중심을 원점, 밑면의 지름을 포함하는 직선을 x 축으로 정하자.

x 축 위의 점

$P(x, 0) (-4 \leq x \leq 4)$ 을 지

나고 x 축에 수직인 평면으로 그릇에 남아 있는 물을 자른 단면을 $\triangle PQR$ 라 하면 $\triangle POQ$ 에서

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{OQ}^2 - \overline{OP}^2} = \sqrt{16 - x^2}$$

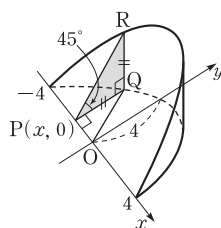
이때 $\overline{QR} = \overline{PQ} = \sqrt{16 - x^2}$ 이므로 $\triangle PQR$ 의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned}S(x) &= \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{QR} \\ &= \frac{1}{2} (16 - x^2)\end{aligned}$$

따라서 그릇에 남아 있는 물의 부피는

$$\begin{aligned}\int_{-4}^4 S(x)dx &= \int_{-4}^4 \frac{1}{2} (16 - x^2)dx \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \int_0^4 (16 - x^2)dx \\ &= \left[16x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 \\ &= \frac{128}{3}\end{aligned}$$

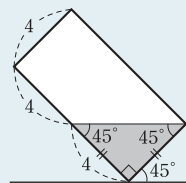
답 $\frac{128}{3}$



해설 Focus

지면과 수면은 평행하므로 그릇이 지면과 만나는 점과 그릇의 두 밑면의 중심을 포함하는 평면으로 그릇을 자른 단면은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 그릇에 남아 있는 물의 단면은 직각이등변삼각형이다.



III-3

오른쪽 그림의 밑면

05 속도와 거리

• 본책 277~281쪽

571

(1) 시각 $t=3$ 에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} & 0 + \int_0^3 (1-t)e^t dt \\ &= \left[(1-t)e^t \right]_0^3 - \int_0^3 (-e^t) dt \\ &= -2e^3 - 1 + \left[e^t \right]_0^3 \\ &= -2e^3 - 1 + (e^3 - 1) \\ &= -e^3 - 2 \end{aligned}$$

(2) 시각 $t=2$ 에서 $t=5$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_2^5 |(1-t)e^t| dt = \int_2^5 (t-1)e^t dt \\ &= \left[(t-1)e^t \right]_2^5 - \int_2^5 e^t dt \\ &= 4e^5 - e^2 - \left[e^t \right]_2^5 \\ &= 4e^5 - e^2 - (e^5 - e^2) \\ &= 3e^5 \end{aligned}$$

답 (1) $-e^3 - 2$ (2) $3e^5$

572

시각 $t=a$ ($0 < a \leq 3$)에서의 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^a \cos \pi t dt = \left[\frac{1}{\pi} \sin \pi t \right]_0^a = \frac{1}{\pi} \sin a\pi$$

$$\frac{1}{\pi} \sin a\pi = 0 \text{에서} \quad \sin a\pi = 0$$

$$\therefore a=1, 2, 3 \quad (\because 0 < a \leq 3)$$

따라서 점 P는 원점을 3번 지난다.

답 3

573

$$\frac{dx}{dt} = -(2t+4) \sin(t^2+4t),$$

$$\frac{dy}{dt} = (2t+4) \cos(t^2+4t)$$

이므로 시각 $t=0$ 에서 $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^4 \sqrt{(2t+4)^2 \sin^2(t^2+4t) + (2t+4)^2 \cos^2(t^2+4t)} dt \\ &= \int_0^4 \sqrt{(2t+4)^2} dt = \int_0^4 (2t+4) dt \\ &= \left[t^2 + 4t \right]_0^4 = 32 \end{aligned}$$

답 32

574

$\frac{dx}{dt} = 4t$, $\frac{dy}{dt} = t^2 - 4$ 이므로 시각 $t=0$ 에서 $t=a$ 까

지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^a \sqrt{(4t)^2 + (t^2-4)^2} dt \\ &= \int_0^a \sqrt{t^4 + 8t^2 + 16} dt = \int_0^a \sqrt{(t^2+4)^2} dt \\ &= \int_0^a (t^2+4) dt = \left[\frac{1}{3} t^3 + 4t \right]_0^a \\ &= \frac{1}{3} a^3 + 4a \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{3} a^3 + 4a = 21$ 이므로

$$a^3 + 12a - 63 = 0$$

$$(a-3)(a^2+3a+21) = 0$$

$$\therefore a=3 \quad (\because a^2+3a+21 > 0)$$

답 3

575

$$(1) \frac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t),$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t)$$

이므로 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{e^{2t} (\cos t - \sin t)^2 + e^{2t} (\sin t + \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2e^{2t}} dt = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t dt \\ &= \sqrt{2} \left[e^t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} (e^{\frac{\pi}{2}} - 1) \end{aligned}$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = x^2 - \frac{1}{4x^2} \text{이므로 곡선의 길이는}$$

$$\begin{aligned} & \int_1^3 \sqrt{1 + \left(x^2 - \frac{1}{4x^2}\right)^2} dx \\ &= \int_1^3 \sqrt{x^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^4}} dx \\ &= \int_1^3 \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)^2} dx \\ &= \int_1^3 \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4x} \right]_1^3 \\ &= \frac{53}{6} \end{aligned}$$

답 (1) $\sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$ (2) $\frac{53}{6}$

576

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}} \times 2x = x\sqrt{x^2+2}$ 이므로

$0 \leq x \leq a$ 에서 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} & \int_0^a \sqrt{1+(x\sqrt{x^2+2})^2} dx \\ &= \int_0^a \sqrt{x^4+2x^2+1} dx = \int_0^a \sqrt{(x^2+1)^2} dx \\ &= \int_0^a (x^2+1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3+x \right]_0^a \\ &= \frac{1}{3}a^3+a \end{aligned}$$

즉 $\frac{1}{3}a^3+a=12$ 이므로 $a^3+3a-36=0$

$$(a-3)(a^2+3a+12)=0$$

$$\therefore a=3 \quad (\because a^2+3a+12>0)$$

답 3

연습문제

● 본책 282쪽

577

전략 시각 $t=a$ 에서 $t=b$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_a^b |v(t)| dt$ 임을 이용한다.

$$\int_1^3 \left| \frac{2t}{1+t^2} \right| dt = \int_1^3 \frac{2t}{1+t^2} dt = \left[\ln |1+t^2| \right]_1^3 = \ln 5$$

답 ln 5

578

전략 시각 $t=a$ 에서 $t=b$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$ 임을 이용한다.

$\frac{dx}{dt} = -3, \frac{dy}{dt} = 3\sqrt{t}$ 이므로 시각 $t=3$ 에서 $t=8$ 까

지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_3^8 \sqrt{(-3)^2 + (3\sqrt{t})^2} dt \\ &= \int_3^8 \sqrt{9+9t} dt = 3 \int_3^8 \sqrt{1+t} dt \\ &= 3 \left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} \right]_3^8 = 3 \times \frac{38}{3} = 38 \end{aligned}$$

답 38

579

전략 곡선 $y=f(x)$ ($a \leq x \leq b$)의 길이는

$\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$ 임을 이용한다.

$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x}{\cos x}$ 이므로 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx \end{aligned}$$

이때 $\sin x=t$ 로 놓으면

$$\cos x = \frac{dt}{dx}$$

$x=0$ 일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{6}$ 일 때 $t=\frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t^2} dt \\ &= -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(t-1)(t+1)} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= -\frac{1}{2} \left[\ln |t-1| - \ln |t+1| \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2} \ln 3 \end{aligned}$$

답 $\frac{1}{2} \ln 3$

580

전략 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$ 와 $f'(x)$ 사이의 관계식을 구한다.

$\{2f(x)+f'(x)\}\{2f(x)-f'(x)\}=4f(x)$ 에서

$$4\{f(x)\}^2 - \{f'(x)\}^2 = 4f(x)$$

$$\therefore \{f'(x)\}^2 = 4\{f(x)\}^2 - 4f(x)$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ ($0 \leq x \leq 5$)의 길이는

$$\begin{aligned} & \int_0^5 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2} dx \\ &= \int_0^5 \sqrt{4\{f(x)\}^2 - 4f(x) + 1} dx \end{aligned}$$

III-3

오
전
대
의
미
학

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^5 \sqrt{\{2f(x)-1\}^2} dx \\
 &= \int_0^5 \{2f(x)-1\} dx \quad (\because 2f(x)-1 \geq 1) \\
 &= 2 \int_0^5 f(x) dx - \int_0^5 1 dx \\
 &= 2 \int_0^5 f(x) dx - [x]_0^5 \\
 &= 2 \int_0^5 f(x) dx - 5 \\
 \text{즉 } 2 \int_0^5 f(x) dx - 5 &= 10 \text{ 이므로} \\
 \int_0^5 f(x) dx &= \frac{15}{2}
 \end{aligned}$$

답 15/2

581

전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 곡선과 직선이 만나는 서로 다른 두 점의 중점의 좌표를 구한다.

곡선 $y=x^2$ 과 직선 $y=t^2x - \frac{\ln t}{8}$ 가 만나는 서로 다른 두 점을 $A(\alpha, \alpha^2)$, $B(\beta, \beta^2)$ 이라 하면 α, β 는 이차방정식 $x^2 = t^2x - \frac{\ln t}{8}$, 즉 $x^2 - t^2x + \frac{\ln t}{8} = 0$ 의 서로 다른 두 실근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = t^2, \alpha\beta = \frac{\ln t}{8}$$

이때 두 점 A, B의 중점의 좌표는 $(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha^2+\beta^2}{2})$

이고

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha+\beta}{2} &= \frac{t^2}{2}, \\
 \frac{\alpha^2+\beta^2}{2} &= \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{2} \\
 &= \frac{(t^2)^2 - 2 \times \frac{\ln t}{8}}{2} \\
 &= \frac{t^4}{2} - \frac{\ln t}{8}
 \end{aligned}$$

이므로 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 는

$$x = \frac{t^2}{2}, y = \frac{t^4}{2} - \frac{\ln t}{8}$$

따라서 $\frac{dx}{dt} = t, \frac{dy}{dt} = 2t^3 - \frac{1}{8t}$ 이므로 시각 $t=1$ 에서 $t=e$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}
 &\int_1^e \sqrt{t^2 + \left(2t^3 - \frac{1}{8t}\right)^2} dt \\
 &= \int_1^e \sqrt{4t^6 + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{64t^2}} dt \\
 &= \int_1^e \sqrt{\left(2t^3 + \frac{1}{8t}\right)^2} dt \\
 &= \int_1^e \left(2t^3 + \frac{1}{8t}\right) dt \\
 &= \left[\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{8} \ln |t| \right]_1^e \\
 &= \frac{e^4}{2} - \frac{3}{8}
 \end{aligned}$$

답 ①

582

전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 점 P의 속력이 최소일 때의 시각을 구한다.

$\frac{dx}{dt} = t - \frac{1}{t}, \frac{dy}{dt} = 2$ 이므로 점 P의 시각 t 에서의 속력은

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + 2^2} &= \sqrt{t^2 + 2 + \frac{1}{t^2}} \\
 &= \sqrt{\left(t + \frac{1}{t}\right)^2} \\
 &= t + \frac{1}{t}
 \end{aligned}$$

$t > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{t \times \frac{1}{t}} = 2$$

이때 등호는 $t = \frac{1}{t}$, 즉 $t=1$ 일 때 성립하므로 $t=1$ 일 때 점 P의 속력이 최소가 된다.

따라서 속력이 최소일 때부터 $t=5$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^5 \left(t + \frac{1}{t}\right) dt = \left[\frac{1}{2}t^2 + \ln |t| \right]_1^5 = 12 + \ln 5$$

답 12+ln5