수학의 시작 개념원리

공통수학 1

정답 및 풀이

1 다항식의 연산

01 다항식의 덧셈과 뺄셈

● 본책 10~13쪽

1

답 (1) $\boldsymbol{-3x^3+3x^2+(-2y+z^2)x+4y^2z}$

(2) $\boldsymbol{3x^2+xz^2-3x^3-2xy+4zy^2}$

2

(1) $A+2B$

$=-x^3+2x^2+4x-5+2(2x^3-5x^2+6x-1)$

$=-x^3+2x^2+4x-5+4x^3-10x^2+12x-2$

$=3x^3-8x^2+16x-7$

(2) $B-2A$

$=2x^3-5x^2+6x-1-2(-x^3+2x^2+4x-5)$

$=2x^3-5x^2+6x-1+2x^3-4x^2-8x+10$

$=4x^3-9x^2-2x+9$

(3) $3B-(A-B)$

$=3B-A+B$

$=-A+4B$

$=-(-x^3+2x^2+4x-5)$

$\quad+4(2x^3-5x^2+6x-1)$

$=x^3-2x^2-4x+5+8x^3-20x^2+24x-4$

$=9x^3-22x^2+20x+1$

(4) $2(2A-B)-A$

$=4A-2B-A$

$=3A-2B$

$=3(-x^3+2x^2+4x-5)$

$\quad-2(2x^3-5x^2+6x-1)$

$=-3x^3+6x^2+12x-15-4x^3+10x^2-12x+2$

$=-7x^3+16x^2-13$

답 (1) $\boldsymbol{3x^3-8x^2+16x-7}$

(2) $\boldsymbol{4x^3-9x^2-2x+9}$

(3) $\boldsymbol{9x^3-22x^2+20x+1}$

(4) $\boldsymbol{-7x^3+16x^2-13}$

3

답 (가) **결합법칙** (나) **교환법칙** (다) **결합법칙**

4

$7A-3\{B+(2A-C)\}-4C$

$=7A-3(B+2A-C)-4C$

$=7A-3B-6A+3C-4C$

$=A-3B-C$

$=(-7x^4+3x^2+x+4)-3(8x^3-6x^2+1)$

$\quad-(9x^4-3x^3+4x-1)$

$=-7x^4+3x^2+x+4-24x^3+18x^2-3$

$\quad-9x^4+3x^3-4x+1$

$=-16x^4-21x^3+21x^2-3x+2$

답 $\boldsymbol{-16x^4-21x^3+21x^2-3x+2}$

5

$2A-X=3(A-B)$에서

$2A-X=3A-3B$

$\therefore X=-A+3B$

$=-(x^2-2xy+3y^2)+3(2x^2-y^2)$

$=-x^2+2xy-3y^2+6x^2-3y^2$

$=5x^2+2xy-6y^2$

답 $\boldsymbol{5x^2+2xy-6y^2}$

6

$A-B=2x^2+3x-4$ ...... ㉠

$A+2B=5x^2-6x+2$ ...... ㉡

㉡$-$㉠을 하면 $3B=3x^2-9x+6$

$\therefore B=x^2-3x+2$

㉠에 이것을 대입하면

$A-(x^2-3x+2)=2x^2+3x-4$

$\therefore A=2x^2+3x-4+(x^2-3x+2)$

$=2x^2+3x-4+x^2-3x+2=3x^2-2$

$\therefore 3A-2B=3(3x^2-2)-2(x^2-3x+2)$

$=9x^2-6-2x^2+6x-4$

$=7x^2+6x-10$

답 $\boldsymbol{7x^2+6x-10}$

02 다항식의 곱셈

● 본책 14~16쪽

7

(1) $(2ab^2)^2\times(-a^2b)=4a^2b^4\times(-a^2b)=-4a^4b^5$

(2) $(4x^3y^2)^3 \div (2xy^3)^2 = 64x^9y^6 \div 4x^2y^6$
$= 16x^7$

(3) $(a^2b^3c)^3 \times (bc^2)^3 \div (ac)^4 = a^6b^9c^3 \times b^3c^6 \div a^4c^4$
$= a^6b^{12}c^9 \div a^4c^4$
$= a^2b^{12}c^5$

(4) $\left(\frac{2}{3}a^2b\right)^3 \div (a^3b)^2 \times \left(-\frac{1}{2}b^2\right)^3$
$= \frac{8}{27}a^6b^3 \div a^6b^2 \times \left(-\frac{1}{8}b^6\right)$
$= \frac{8}{27}b \times \left(-\frac{1}{8}b^6\right)$
$= -\frac{1}{27}b^7$

답 (1) $\mathbf{-4a^4b^5}$ (2) $\mathbf{16x^7}$
(3) $\mathbf{a^2b^{12}c^5}$ (4) $\mathbf{-\frac{1}{27}b^7}$

8

(1) $2xy(x^2 - xy + 3y^2) = \mathbf{2x^3y - 2x^2y^2 + 6xy^3}$

(2) $(x+1)(2x-5) = 2x^2 - 5x + 2x - 5$
$= \mathbf{2x^2 - 3x - 5}$

(3) $(x-2)(x^2+x+4)$
$= x^3 + x^2 + 4x - 2x^2 - 2x - 8$
$= \mathbf{x^3 - x^2 + 2x - 8}$

(4) $(x^2 - 2xy + 3y)(x - 2y)$
$= x^3 - 2x^2y - 2x^2y + 4xy^2 + 3xy - 6y^2$
$= \mathbf{x^3 - 4x^2y + 4xy^2 + 3xy - 6y^2}$

(5) $(2x^2 - x + 3)(3x^2 - 2)$
$= 6x^4 - 4x^2 - 3x^3 + 2x + 9x^2 - 6$
$= \mathbf{6x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 2x - 6}$

(6) $(2x - 3y + 1)(x + y - 2)$
$= 2x^2 + 2xy - 4x - 3xy - 3y^2 + 6y + x + y - 2$
$= \mathbf{2x^2 - xy - 3x - 3y^2 + 7y - 2}$

답 **풀이 참조**

9

답 **ㄱ, ㄹ**

10

$(1 + x - 3x^2 + x^3)^2$
$= (1 + x - 3x^2 + x^3)(1 + x - 3x^2 + x^3)$

이 식의 전개식에서 x^4항은
$x \times x^3 + (-3x^2) \times (-3x^2) + x^3 \times x$
$= x^4 + 9x^4 + x^4 = 11x^4$

x^5항은
$-3x^2 \times x^3 + x^3 \times (-3x^2)$
$= -3x^5 - 3x^5 = -6x^5$

따라서 x^4의 계수는 11, x^5의 계수는 -6이므로
$a = 11,\ b = -6$
$\therefore a - b = 17$

답 **17**

11

$(x^3 + ax^2 + b)(2x^2 - 3bx + 4)$의 전개식에서 x^4항은
$x^3 \times (-3bx) + ax^2 \times 2x^2 = (2a - 3b)x^4$

x^2항은
$ax^2 \times 4 + b \times 2x^2 = (4a + 2b)x^2$

이때 x^4의 계수와 x^2의 계수가 모두 8이므로
$2a - 3b = 8,\ 4a + 2b = 8$
$\therefore a = \frac{5}{2},\ b = -1$
$\therefore a + b = \frac{3}{2}$

답 $\mathbf{\frac{3}{2}}$

12

$(3x-1)(x^2 - kx - 4k)$의 전개식에서 상수항을 포함한 모든 항의 계수들의 총합은 이 식에 $x=1$을 대입했을 때의 식의 값과 같으므로
$(3-1)(1-k-4k) = 2(1-5k)$

이때 계수들의 총합이 -18이므로
$2(1-5k) = -18,\quad 1 - 5k = -9$
$\therefore k = 2$

답 **2**

03 곱셈 공식

• 본책 17~21쪽

13

(1) $(x+1)(x+3)(x+5)$
$= x^3 + (1+3+5)x^2$
$\quad + (1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 1)x + 1 \times 3 \times 5$
$= \mathbf{x^3 + 9x^2 + 23x + 15}$

(2) $(x-2)(x-4)(x-3)$

$=x^3-(2+4+3)x^2$

$+(2\times4+4\times3+3\times2)x-2\times4\times3$

$=\boldsymbol{x^3-9x^2+26x-24}$

(3) $(x+y+2z)^2$

$=x^2+y^2+(2z)^2$

$+2xy+2y\times2z+2\times2z\times x$

$=\boldsymbol{x^2+y^2+4z^2+2xy+4yz+4zx}$

(4) $(x-3y-z)^2$

$=x^2+(-3y)^2+(-z)^2+2x\times(-3y)$

$+2\times(-3y)\times(-z)+2\times(-z)\times x$

$=\boldsymbol{x^2+9y^2+z^2-6xy+6yz-2zx}$

(5) $(3x+1)^3$

$=(3x)^3+3\times(3x)^2\times1+3\times3x\times1^2+1^3$

$=\boldsymbol{27x^3+27x^2+9x+1}$

(6) $(2x+5)^3$

$=(2x)^3+3\times(2x)^2\times5+3\times2x\times5^2+5^3$

$=\boldsymbol{8x^3+60x^2+150x+125}$

(7) $(3x-2)^3$

$=(3x)^3-3\times(3x)^2\times2+3\times3x\times2^2-2^3$

$=\boldsymbol{27x^3-54x^2+36x-8}$

(8) $(x-4y)^3$

$=x^3-3\times x^2\times4y+3\times x\times(4y)^2-(4y)^3$

$=\boldsymbol{x^3-12x^2y+48xy^2-64y^3}$

(9) $(x+1)(x^2-x+1)=\boldsymbol{x^3+1}$

(10) $(2x+3)(4x^2-6x+9)$

$=(2x)^3+3^3=\boldsymbol{8x^3+27}$

(11) $(x-2)(x^2+2x+4)$

$=x^3-2^3=\boldsymbol{x^3-8}$

(12) $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

$=(2a)^3-b^3=\boldsymbol{8a^3-b^3}$

답 **풀이 참조**

14

(1) (주어진 식)

$=a^3+b^3+(-c)^3-3\times a\times b\times(-c)$

$=a^3+b^3-c^3+3abc$

(2) (주어진 식)

$=a^3+(-2b)^3+(3c)^3-3\times a\times(-2b)\times3c$

$=a^3-8b^3+27c^3+18abc$

(3) (주어진 식)$=x^4+x^2+1$

(4) (주어진 식)

$=\{x^2+x\times4y+(4y)^2\}\{x^2-x\times4y+(4y)^2\}$

$=x^4+x^2\times(4y)^2+(4y)^4$

$=x^4+16x^2y^2+256y^4$

답 (1) $\boldsymbol{a^3+b^3-c^3+3abc}$

(2) $\boldsymbol{a^3-8b^3+27c^3+18abc}$

(3) $\boldsymbol{x^4+x^2+1}$

(4) $\boldsymbol{x^4+16x^2y^2+256y^4}$

15

(1) $(a^2-5bc)(a^2+5bc)=(a^2)^2-(5bc)^2$

$=\boldsymbol{a^4-25b^2c^2}$

(2) $(-x+2y+3z)^2$

$=(-x)^2+(2y)^2+(3z)^2+2\times(-x)\times2y$

$+2\times2y\times3z+2\times3z\times(-x)$

$=\boldsymbol{x^2+4y^2+9z^2-4xy+12yz-6zx}$

(3) $(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$

$=(3x)^3-(2y)^3=\boldsymbol{27x^3-8y^3}$

(4) $(x-4)(x+2)(x+5)$

$=x^3+(-4+2+5)x^2$

$+\{-4\times2+2\times5+5\times(-4)\}x$

$+(-4)\times2\times5$

$=\boldsymbol{x^3+3x^2-18x-40}$

(5) $(9x^2+3xy+y^2)(9x^2-3xy+y^2)$

$=\{(3x)^2+3x\times y+y^2\}\{(3x)^2-3x\times y+y^2\}$

$=(3x)^4+(3x)^2\times y^2+y^4$

$=\boldsymbol{81x^4+9x^2y^2+y^4}$

(6) $(2a+b-c)(4a^2+b^2+c^2-2ab+bc+2ca)$

$=(2a)^3+b^3+(-c)^3-3\times2a\times b\times(-c)$

$=\boldsymbol{8a^3+b^3-c^3+6abc}$

(7) $(x-y)^3(x+y)^3$

$=\{(x+y)(x-y)\}^3=(x^2-y^2)^3$

$=(x^2)^3-3\times(x^2)^2\times y^2+3\times x^2\times(y^2)^2-(y^2)^3$

$=\boldsymbol{x^6-3x^4y^2+3x^2y^4-y^6}$

(8) $(a-b)(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

$=\{(a-b)(a^2+ab+b^2)\}\{(a+b)(a^2-ab+b^2)\}$

$=(a^3-b^3)(a^3+b^3)=\boldsymbol{a^6-b^6}$

답 풀이 참조

다른 풀이 (8) $(a-b)(a+b)$

$\times(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

$=(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$

$=(a^2)^3-(b^2)^3=a^6-b^6$

16

(1) $x^2+5x=X$로 놓으면

$(x^2+5x-2)(x^2+5x-3)$

$=(X-2)(X-3)=X^2-5X+6$

$=(x^2+5x)^2-5(x^2+5x)+6$

$=x^4+10x^3+25x^2-5x^2-25x+6$

$=\boldsymbol{x^4+10x^3+20x^2-25x+6}$

(2) $(a+b-c)(a-b+c)$

$=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}$

$b-c=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(a+X)(a-X)$

$=a^2-X^2=a^2-(b-c)^2$

$=\boldsymbol{a^2-b^2-c^2+2bc}$

(3) $x^2-3x=X$로 놓으면

$(x^2-3x+1)(x^2-3x-4)+2$

$=(X+1)(X-4)+2$

$=X^2-3X-2$

$=(x^2-3x)^2-3(x^2-3x)-2$

$=x^4-6x^3+9x^2-3x^2+9x-2$

$=\boldsymbol{x^4-6x^3+6x^2+9x-2}$

(4) 상수항의 합이 같도록 두 개씩 짝을 지으면

$(x+2)(x-2)(x+5)(x+9)$

$=\{(x+2)(x+5)\}\{(x-2)(x+9)\}$

$=(x^2+7x+10)(x^2+7x-18)$

$x^2+7x=X$로 놓으면

(주어진 식)

$=(X+10)(X-18)=X^2-8X-180$

$=(x^2+7x)^2-8(x^2+7x)-180$

$=x^4+14x^3+49x^2-8x^2-56x-180$

$=\boldsymbol{x^4+14x^3+41x^2-56x-180}$

(5) 상수항의 합이 같도록 두 개씩 짝을 지으면

$(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)$

$=\{(x-4)(x-1)\}\{(x-3)(x-2)\}$

$=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)$

$x^2-5x=X$로 놓으면

(주어진 식)

$=(X+4)(X+6)$

$=X^2+10X+24$

$=(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24$

$=x^4-10x^3+25x^2+10x^2-50x+24$

$=\boldsymbol{x^4-10x^3+35x^2-50x+24}$

답 풀이 참조

17

주어진 식에 $\frac{1}{4}(5-1)$을 곱하면

$(5+1)(5^2+1)(5^4+1)(5^8+1)$

$=\frac{1}{4}(5-1)(5+1)(5^2+1)(5^4+1)(5^8+1)$

$=\frac{1}{4}(5^2-1)(5^2+1)(5^4+1)(5^8+1)$

$=\frac{1}{4}(5^4-1)(5^4+1)(5^8+1)$

$=\frac{1}{4}(5^8-1)(5^8+1)$

$=\frac{1}{4}(5^{16}-1)$

답 $\boldsymbol{\frac{1}{4}(5^{16}-1)}$

18

$9\times11\times101\times10001$

$=(10-1)\times(10+1)\times(100+1)\times(10000+1)$

$=(10-1)\times(10+1)\times(10^2+1)\times(10^4+1)$

$=(10^2-1)\times(10^2+1)\times(10^4+1)$

$=(10^4-1)\times(10^4+1)$

$=10^8-1$

답 $\boldsymbol{10^8-1}$

19

$a^3=199^3=(200-1)^3$

$=200^3-3\times200^2+3\times200-1$

$=8000000-120000+600-1$

$=7880599$

따라서 a^3의 각 자리의 숫자의 합은

$7+8+8+0+5+9+9=46$ 답 **46**

04 곱셈 공식의 변형

● 본책 22~26쪽

20

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(-2)^2-2\times1=2$

(2) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=(-2)^2-4\times1=0$

(3) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=(-2)^3-3\times1\times(-2)=-2$

답 (1) **2** (2) **0** (3) **-2**

21

(1) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=4^2+2\times(-3)=10$

(2) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab=4^2+4\times(-3)=4$

(3) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$=4^3+3\times(-3)\times4=28$

답 (1) **10** (2) **4** (3) **28**

22

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=5^2-2=23$

(2) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=5^2-4=21$

(3) $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=5^3-3\times5=110$

답 (1) **23** (2) **21** (3) **110**

23

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=2^2+2=6$

(2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4=2^2+4=8$

(3) $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=2^3+3\times2=14$

답 (1) **6** (2) **8** (3) **14**

24

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=1^2-2\times(-2)=5$ 답 **5**

25

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$32=6^2-2ab$ $\therefore ab=2$

따라서 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=6^2-4\times2=28$이므로

$a-b=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ ($\because a>b$) 답 **$2\sqrt{7}$**

26

$x^4y-xy^4=xy(x^3-y^3)$

$=xy\{(x-y)^3+3xy(x-y)\}$

이때 $x=\sqrt{2}+1$, $y=\sqrt{2}-1$이므로

$x-y=2$, $xy=1$

$\therefore x^4y-xy^4=1\times(2^3+3\times1\times2)$

$=14$ 답 **14**

27

$x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$에서

$8\sqrt{3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\times2\sqrt{3}$ $\therefore x+\frac{1}{x}=4$

$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=4^3-3\times4=52$ 답 **52**

28

$x^2-\sqrt{6}x-1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-\sqrt{6}-\frac{1}{x}=0$ $\therefore x-\frac{1}{x}=\sqrt{6}$

$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=(\sqrt{6})^3+3\sqrt{6}=9\sqrt{6}$ 답 **$9\sqrt{6}$**

참고 $x=0$을 $x^2-\sqrt{6}x-1=0$의 좌변에 대입하면

$-1\neq0$

이므로 $x\neq0$이다.

29

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$

이때 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$2^2=8+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=-2$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{-2}{-2}=1$

답 **1**

30

$x-y=2+\sqrt{3}$, $y-z=2-\sqrt{3}$을 변끼리 더하면

$x-z=4 \qquad \therefore z-x=-4$

$\therefore x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$

$=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2+(-4)^2\}$

$=15$

답 **15**

31

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=4^2-2\times2=12$

$\therefore a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$+3abc$

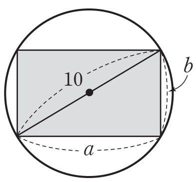
$=4\times(12-2)+3\times(-3)$

$=31$

답 **31**

32

오른쪽 그림과 같이 직사각형의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면 직사각형의 넓이는 ab이다.



이때 원의 지름의 길이가

$2\times5=10$이므로 $\quad a^2+b^2=100$

또 직사각형의 둘레의 길이가 28이므로

$2(a+b)=28 \qquad \therefore a+b=14$

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$100=14^2-2ab, \qquad 2ab=96$

$\therefore ab=48$

따라서 직사각형의 넓이는 48이다.

답 **48**

33

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{BF}$의 길이를 각각 x, y, z라 하면 직육면체의 겉넓이가 100이므로

$2(xy+yz+zx)=100$

$\therefore xy+yz+zx=50$

또 △BGD의 세 변의 길이의 제곱의 합이 138이므로

$(x^2+y^2)+(y^2+z^2)+(z^2+x^2)=138$

$\therefore x^2+y^2+z^2=69$

$\therefore (x+y+z)^2$

$=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

$=69+2\times50=169$

이때 $x>0$, $y>0$, $z>0$이므로

$x+y+z=\sqrt{169}=13$

따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$4(x+y+z)=4\times13=52$

답 **52**

05 다항식의 나눗셈

● 본책 27~32쪽

34

(1) $(6a^2b^3c+9ab^2c^3)\div(-3ab^2c)$

$=\frac{6a^2b^3c}{-3ab^2c}+\frac{9ab^2c^3}{-3ab^2c}$

$=-2ab-3c^2$

(2) $(4xy^4z^5-2x^3y^7z^3)\div2xy^3z^2$

$=\frac{4xy^4z^5}{2xy^3z^2}-\frac{2x^3y^7z^3}{2xy^3z^2}$

$=2yz^3-x^2y^4z$

(3) $(25a^4b^5c^6-5a^3b^2c+10a^6b^7c^9)\div(-5a^2b^5c)$

$=\frac{25a^4b^5c^6}{-5a^2b^5c}-\frac{5a^3b^2c}{-5a^2b^5c}+\frac{10a^6b^7c^9}{-5a^2b^5c}$

$=-5a^2c^5+\frac{a}{b^3}-2a^4b^2c^8$

답 (1) $\boldsymbol{-2ab-3c^2}$

(2) $\boldsymbol{2yz^3-x^2y^4z}$

(3) $\boldsymbol{-5a^2c^5+\frac{a}{b^3}-2a^4b^2c^8}$

35

(1)
$$\begin{array}{rl}
 & \boxed{x^2}+2x-8 \\ \cline{2-2}
x+1\,\big) & x^3+3x^2-6x+1 \\
 & x^3+x^2 \\ \cline{2-2}
 & \boxed{2x^2}-6x \\
 & 2x^2+2x \\ \cline{2-2}
 & \boxed{-8x}+1 \\
 & -8x-8 \\ \cline{2-2}
 & \boxed{9}
\end{array}$$

$\therefore$ **몫: x^2+2x-8, 나머지: 9**

(2)
$$\begin{array}{rl}
 & 2x-\boxed{1} \\ \cline{2-2}
2x^2-1\,\big) & 4x^3-2x^2-4 \\
 & 4x^3-2x \\ \cline{2-2}
 & -2x^2+2x-\boxed{4} \\
 & \boxed{-2x^2}+1 \\ \cline{2-2}
 & \boxed{2x}-\boxed{5}
\end{array}$$

$\therefore$ **몫: $2x-1$, 나머지: $2x-5$**

답 **풀이 참조**

36

(1) $f(x)=(x^2-1)(x-2)+4$
$=x^3-2x^2-x+6$

(2) $f(x)=(x^2+2x+2)(x+1)-x+3$
$=x^3+3x^2+3x+5$

답 (1) $\boldsymbol{x^3-2x^2-x+6}$
(2) $\boldsymbol{x^3+3x^2+3x+5}$

37

(1)
$$\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 1 & \boxed{0} & \boxed{-5} & 1 \\
 & & -2 & \boxed{4} & \boxed{2} \\ \hline
 & 1 & \boxed{-2} & -1 & \boxed{3}
\end{array}$$

$\therefore$ **몫: x^2-2x-1, 나머지: 3**

(2)
$$\begin{array}{r|rrrr}
\boxed{1} & 3 & \boxed{-4} & -2 & 6 \\
 & & 3 & \boxed{-1} & -3 \\ \hline
 & \boxed{3} & -1 & -3 & \boxed{3}
\end{array}$$

$\therefore$ **몫: $3x^2-x-3$, 나머지: 3**

답 **풀이 참조**

38

$$\begin{array}{rl}
 & x^2+x-3 \\ \cline{2-2}
2x^2-x+1\,\big) & 2x^4+x^3-6x^2+7x-5 \\
 & 2x^4-x^3+x^2 \\ \cline{2-2}
 & 2x^3-7x^2+7x \\
 & 2x^3-x^2+x \\ \cline{2-2}
 & -6x^2+6x-5 \\
 & -6x^2+3x-3 \\ \cline{2-2}
 & 3x-2
\end{array}$$

따라서 다항식 $2x^4+x^3-6x^2+7x-5$를 $2x^2-x+1$로 나누었을 때의 몫은 x^2+x-3, 나머지는 $3x-2$이므로 $a=1$, $b=-3$, $c=3$

$\therefore a+b+c=1$

답 **1**

39

$$\begin{array}{rl}
 & x-1 \\ \cline{2-2}
x^2+x+1\,\big) & x^3-2x+1 \\
 & x^3+x^2+x \\ \cline{2-2}
 & -x^2-3x+1 \\
 & -x^2-x-1 \\ \cline{2-2}
 & -2x+2
\end{array}$$

따라서 $Q(x)=x-1$, $R(x)=-2x+2$이므로
$Q(3)+R(-1)=2+4=6$

답 **6**

40

$6x^4-x^3-16x^2+5x=A(3x^2-2x-4)+5x-8$이므로

$A(3x^2-2x-4)$
$=6x^4-x^3-16x^2+5x-(5x-8)$
$=6x^4-x^3-16x^2+8$

$\therefore A=(6x^4-x^3-16x^2+8)\div(3x^2-2x-4)$

$$\begin{array}{rl}
 & 2x^2+x-2 \\ \cline{2-2}
3x^2-2x-4\,\big) & 6x^4-x^3-16x^2+8 \\
 & 6x^4-4x^3-8x^2 \\ \cline{2-2}
 & 3x^3-8x^2 \\
 & 3x^3-2x^2-4x \\ \cline{2-2}
 & -6x^2+4x+8 \\
 & -6x^2+4x+8 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

$\therefore A=2x^2+x-2$

답 $\boldsymbol{2x^2+x-2}$

41

다항식 $f(x)$를 $2x+4$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$$\begin{aligned} f(x)&=(2x+4)Q(x)+R \\ &=2(x+2)Q(x)+R \\ &=(x+2)\times 2Q(x)+R \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 $2Q(x)$, 나머지는 R이다.

답 **몫: $2Q(x)$, 나머지: R**

42

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -5 & -4 & 6 \\ & & 6 & 3 & -3 \\ \hline & 2 & 1 & -1 & \boxed{3} \end{array}$$

따라서 $a=3$, $b=1$, $R=3$이므로

$a+b+R=7$

답 **7**

43

(1)
$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore$ 몫: $x^4-x^3+x^2-x+1$, 나머지: 0

(2)
$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{3} & 3 & -7 & 11 & 1 \\ & & 1 & -2 & 3 \\ \hline & 3 & -6 & 9 & \boxed{4} \end{array}$$

위의 조립제법에서

$$\begin{aligned} &3x^3-7x^2+11x+1 \\ &=\left(x-\frac{1}{3}\right)(3x^2-6x+9)+4 \\ &=\left(x-\frac{1}{3}\right)\times 3(x^2-2x+3)+4 \\ &=(3x-1)(x^2-2x+3)+4 \end{aligned}$$

$\therefore$ 몫: x^2-2x+3, 나머지: 4

답 **(1) 몫: $x^4-x^3+x^2-x+1$, 나머지: 0**
(2) 몫: x^2-2x+3, 나머지: 4

연습 문제

● 본책 33~35쪽

44

전략 주어진 등식에서 X를 A, B에 대한 식으로 나타낸다.

$A-3(X-B)=7A$에서

$A-3X+3B=7A$, $\quad 3X=-6A+3B$

$$\begin{aligned} \therefore\ X&=-2A+B \\ &=-2(3x^2-2xy-y^2)+(x^2+3xy-2y^2) \\ &=-6x^2+4xy+2y^2+x^2+3xy-2y^2 \\ &=-5x^2+7xy \end{aligned}$$

답 **$-5x^2+7xy$**

45

전략 곱셈 공식을 이용하여 두 다항식의 곱으로 나타낸 후 x^2항이 나오는 항만 전개한다.

$(x+2)^3(3x-2)^2$

$=(x^3+6x^2+12x+8)(9x^2-12x+4)$

이 식의 전개식에서 x^2항은

$$\begin{aligned} &6x^2\times 4+12x\times(-12x)+8\times 9x^2 \\ &=24x^2-144x^2+72x^2 \\ &=-48x^2 \end{aligned}$$

따라서 x^2의 계수는 -48이다.

답 **-48**

46

전략 상수항의 곱이 같도록 두 개씩 짝을 지어 전개한 후 공통부분을 한 문자로 놓는다.

상수항의 곱이 같도록 두 개씩 짝을 지으면

$$\begin{aligned} &(x+1)(x-2)(x-5)(x+10) \\ &=\{(x+1)(x+10)\}\{(x-2)(x-5)\} \\ &=(x^2+11x+10)(x^2-7x+10) \end{aligned}$$

$x^2+10=X$로 놓으면

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식})&=(X+11x)(X-7x) \\ &=X^2+4xX-77x^2 \\ &=(x^2+10)^2+4x(x^2+10)-77x^2 \\ &=x^4+20x^2+100+4x^3+40x-77x^2 \\ &=x^4+4x^3-57x^2+40x+100 \end{aligned}$$

따라서 $p=-57$, $q=100$이므로

$-2p-q=-2\times(-57)-100=14$

답 **14**

47

전략 곱셈 공식의 변형을 이용하여 $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$을 $x+y$, xy에 대한 식으로 나타낸다.

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{x^3+y^3}{xy}$$
$$=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}$$
$$=\frac{(\sqrt{2})^3-3\times(-2)\times\sqrt{2}}{-2}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{-2}=-4\sqrt{2}$$

답 ②

48

전략 주어진 조립제법에서 k의 값을 구하고 다항식의 나눗셈에 대한 등식을 세운다.

주어진 조립제법에서 $2k=1$이므로

$$k=\frac{1}{2}$$

즉 다항식 ax^3+bx^2+cx+d를 일차식 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫이 $2x^2+6$이고 나머지가 -2이다.

$$\therefore\ ax^3+bx^2+cx+d$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+6)-2$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\times 2(x^2+3)-2$$
$$=(2x-1)(x^2+3)-2$$

따라서 다항식 ax^3+bx^2+cx+d를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 x^2+3이고 나머지는 -2이다.

답 몫: x^2+3, 나머지: -2

49

전략 x^5항이 나오는 경우만 전개하여 x^5의 계수를 구한다.

$$(1+2x+3x^2+\cdots+100x^{99})^2$$
$$=(1+2x+3x^2+\cdots+100x^{99})$$
$$\times(1+2x+3x^2+\cdots+100x^{99})$$

이 식의 전개식에서 x^5항은

$$1\times 6x^5+2x\times 5x^4+3x^2\times 4x^3$$
$$+4x^3\times 3x^2+5x^4\times 2x+6x^5\times 1$$
$$=6x^5+10x^5+12x^5+12x^5+10x^5+6x^5$$
$$=56x^5$$

따라서 x^5의 계수는 56이다.

답 56

해설 Focus

주어진 식의 전개식에서 x^5항이 나오는 경우는

(상수항)×(오차항)+(일차항)×(사차항)
+(이차항)×(삼차항)+(삼차항)×(이차항)
+(사차항)×(일차항)+(오차항)×(상수항)

이다. 따라서 구하는 x^5의 계수는

$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5)^2$

의 전개식에서의 x^5의 계수와 같다.

50

전략 $99=100-1$, $101=100+1$로 변형하고 곱셈 공식을 이용한다.

$$99^3-101\times(100^2-99)$$
$$=(100-1)^3-(100+1)\times(100^2-100+1)$$
$$=100^3-3\times100^2+3\times100-1-(100^3+1)$$
$$=-3\times100^2+3\times100-2$$
$$=-30000+300-2$$
$$=-29702$$

답 -29702

51

전략 $x^2+3x+1=0$의 양변을 x로 나누어 $x+\frac{1}{x}$의 값을 구한다.

$x^2+3x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$$x+3+\frac{1}{x}=0$$
$$\therefore\ x+\frac{1}{x}=-3$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=(-3)^2-2=7,$$
$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=(-3)^3-3\times(-3)$$
$$=-18$$

이므로

$$x^3-2x^2-3x+5-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}$$
$$=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+5$$
$$=-18-2\times7-3\times(-3)+5$$
$$=-18$$

답 -18

52

전략 주어진 식을 이용하여 $xy+yz+zx$, xyz의 값을 구한다.

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$에서

$$6^2=18+2(xy+yz+zx)$$

$$\therefore\ xy+yz+zx=9$$

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{9}{4}$에서

$$\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{9}{4}$$

$$\frac{9}{xyz}=\frac{9}{4}\qquad \therefore\ xyz=4$$

$$\begin{aligned}\therefore\ & x^3+y^3+z^3\\ &=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\\ &\quad +3xyz\\ &=6\times(18-9)+3\times4=66\end{aligned}$$

답 66

53

전략 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫이 Q, 나머지가 R이면 $A=BQ+R$임을 이용한다.

다항식 $f(x)$를 x^2-2x+3으로 나누었을 때의 몫이 $x-1$이고 나머지가 $3x-2$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2-2x+3)(x-1)+3x-2\\ &=x^3-x^2-2x^2+2x+3x-3+3x-2\\ &=x^3-3x^2+8x-5\end{aligned}$$

$f(x)$를 x^2-x-1로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r@{}l} & x-2\\ x^2-x-1\,\big) & x^3-3x^2+8x-5\\ & x^3-\ x^2-\ x\\ \hline & -2x^2+9x-5\\ & -2x^2+2x+2\\ \hline & 7x-7\end{array}$$

따라서 몫은 $x-2$, 나머지는 $7x-7$이므로 그 합은

$$(x-2)+(7x-7)=8x-9$$

답 $8x-9$

54

전략 $f(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$로 놓고 등식을 세운다.

다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $x+1$이므로

$$f(x)=(x^2+1)Q(x)+x+1$$

$$\begin{aligned}\therefore\ & \{f(x)\}^2\\ &=\{(x^2+1)Q(x)+x+1\}^2\\ &=(x^2+1)^2\{Q(x)\}^2\\ &\quad +2(x^2+1)(x+1)Q(x)+(x+1)^2\\ &=(x^2+1)^2\{Q(x)\}^2\\ &\quad +2(x^2+1)(x+1)Q(x)+(x^2+1)+2x\\ &=(x^2+1)\\ &\quad \times[(x^2+1)\{Q(x)\}^2+2(x+1)Q(x)+1]\\ &\quad +2x\end{aligned}$$

따라서 $\{f(x)\}^2$을 x^2+1로 나눈 나머지는 $2x$이므로

$$R(x)=2x$$

$$\therefore\ R(3)=2\times3=6$$

답 ①

55

전략 조립제법에서 셋째 줄에 적힌 수 중 맨 오른쪽에 있는 수가 나머지, 그 수를 제외한 수가 몫의 계수이다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, $Q(x)=px^2+qx+r$라 하면

1	1	$\boxed{a}$	$\boxed{b}$	$\boxed{c}$
		1	-4	3
	$\boxed{p}$	$\boxed{q}$	$\boxed{r}$	8

위의 조립제법에서 $p=1$이고

$1\times q=-4$에서 $\quad q=-4$

$1\times r=3$에서 $\quad r=3$

$a+1=q=-4$에서 $\quad a=-5$

$b+(-4)=r=3$에서 $\quad b=7$

$c+3=8$에서 $\quad c=5$

따라서 $f(x)=x^3-5x^2+7x+5$,

$Q(x)=x^2-4x+3$, $R=8$이므로

$$\begin{aligned}f(-2)&=(-2)^3-5\times(-2)^2+7\times(-2)+5\\ &=-37\end{aligned}$$

$$Q(3)=3^2-4\times3+3=0$$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(-2)+Q(3)+R&=-37+0+8\\ &=-29\end{aligned}$$

답 -29

56

전략 먼저 a^3+b^3, a^4+b^4의 값을 구한 후 a^7+b^7을 a^3+b^3과 a^4+b^4의 곱으로 나타낸다.

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$5=1^2-2ab$

$\therefore\ ab=-2$

$\therefore\ a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=1^3-3\times(-2)\times1=7,$

$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2$

$=5^2-2\times(-2)^2=17$

$(a^3+b^3)(a^4+b^4)=a^7+a^3b^4+a^4b^3+b^7$이므로

$a^7+b^7=(a^3+b^3)(a^4+b^4)-a^3b^4-a^4b^3$

$=(a^3+b^3)(a^4+b^4)-a^3b^3(a+b)$

$=7\times17-(-2)^3\times1=127$

답 **127**

57

전략 $a+b+c=2$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 정리한 후 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

$a+b+c=2$에서

$b+c=2-a,\ a+c=2-b,\ a+b=2-c$

이므로

$(a+b+c)^2+(-a+b+c)^2$

$+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2$

$=2^2+(2-2a)^2+(2-2b)^2+(2-2c)^2$

$=4+4-8a+4a^2+4-8b+4b^2+4-8c+4c^2$

$=16-8(a+b+c)+4(a^2+b^2+c^2)$

$=16-8\times2+4(a^2+b^2+c^2)$

$=4(a^2+b^2+c^2)$

이때

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=2^2-2\times(-1)=6$

이므로

(주어진 식)$=4(a^2+b^2+c^2)$

$=4\times6=24$

답 **24**

다른 풀이 $(a+b+c)^2+(-a+b+c)^2$

$+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$+a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$

$+a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$

$+a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$

$=4(a^2+b^2+c^2)$

58

전략 주어진 식을 $ab+bc+ca$, abc에 대한 식으로 변형한다.

$a+b+c=3$이므로

$a+b=3-c,\ b+c=3-a,\ c+a=3-b$

$\therefore\ ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

$=ab(3-c)+bc(3-a)+ca(3-b)$

$=3ab-abc+3bc-abc+3ca-abc$

$=3(ab+bc+ca)-3abc$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$3^2=11+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca=-1$

$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

에서

$27=3\times\{11-(-1)\}+3abc$

$\therefore\ abc=-3$

따라서 ㉠에서

$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

$=3\times(-1)-3\times(-3)=6$

답 **6**

59

전략 $\overline{PH}^2+\overline{PI}^2$, $\overline{PH}+\overline{PI}$의 값을 이용한다.

$\overline{PH}=x$, $\overline{PI}=y$라 하면 $\overline{HI}=\overline{OP}=4$이므로 직각삼각형 PIH에서

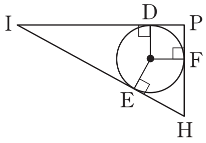
$x^2+y^2=16$

한편 삼각형 PIH에 내접하는 원의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$이므로

이 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi\times r^2=\frac{\pi}{4}$ $\quad\therefore\ r=\frac{1}{2}$ $(\because\ r>0)$

오른쪽 그림과 같이 △PIH와 내접원의 접점을 D, E, F라 하면 $\overline{\mathrm{PD}}=\overline{\mathrm{PF}}=\frac{1}{2}$이므로



$$\overline{\mathrm{HE}}=\overline{\mathrm{HF}}=x-\frac{1}{2},$$

$$\overline{\mathrm{IE}}=\overline{\mathrm{ID}}=y-\frac{1}{2}$$

$\overline{\mathrm{HI}}=4$이므로 $\left(x-\frac{1}{2}\right)+\left(y-\frac{1}{2}\right)=4$

$$\therefore x+y=5$$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로

$$16=5^2-2xy \qquad \therefore xy=\frac{9}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{\mathrm{PH}}^3+\overline{\mathrm{PI}}^3&=x^3+y^3\\&=(x+y)^3-3xy(x+y)\\&=5^3-3\times\frac{9}{2}\times5\\&=125-\frac{135}{2}=\frac{115}{2}\end{aligned}$$

답 ②

60

전략 $x=1+\sqrt{7}$을 (x에 대한 이차식)$=0$의 꼴로 변형한다.

$x=1+\sqrt{7}$에서

$$x-1=\sqrt{7}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$x^2-2x+1=7$$

$$\therefore x^2-2x-6=0$$

이때 다항식 $2x^4-3x^3+x^2-21x$를 x^2-2x-6으로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2+x+15 \\
\hline
x^2-2x-6 & 2x^4-3x^3+x^2-21x \\
 & 2x^4-4x^3-12x^2 \\
\hline
 & x^3+13x^2-21x \\
 & x^3-2x^2-6x \\
\hline
 & 15x^2-15x \\
 & 15x^2-30x-90 \\
\hline
 & 15x+90
\end{array}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &2x^4-3x^3+x^2-21x\\&=(x^2-2x-6)(2x^2+x+15)+15x+90\\&=0+15(1+\sqrt{7})+90\\&=105+15\sqrt{7}\end{aligned}$$

답 $105+15\sqrt{7}$

2 항등식과 나머지정리

Ⅰ. 다항식

01 항등식

● 본책 38~44쪽

61

ㄱ. 주어진 등식은 $x=2$일 때에만 성립하므로 항등식이 아니다.

ㄴ. 주어진 등식의 우변을 전개하면

$$x+1=-3x-3$$

이 등식은 $x=-1$일 때에만 성립하므로 항등식이 아니다.

ㄷ. 주어진 등식의 좌변을 전개하면

$$x^2-2x+1=x^2-2x+1$$

이 등식은 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하므로 항등식이다.

ㄹ. 주어진 등식의 우변을 전개하면

$$2x+5=2x+2+3$$

$$\therefore 2x+5=2x+5$$

이 등식은 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하므로 항등식이다.

ㅁ. 주어진 등식의 좌변을 전개하면

$$-2x^2+2x-1=-2x^2+1$$

이 등식은 $x=1$일 때에만 성립하므로 항등식이 아니다.

ㅂ. 주어진 등식의 좌변을 전개하면

$$x^2-3x+2=x^2-3x+2$$

이 등식은 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하므로 항등식이다.

이상에서 항등식인 것은 ㄷ, ㄹ, ㅂ이다.

답 ㄷ, ㄹ, ㅂ

62

(1) $(a-1)x^2+(b+1)x+c=0$에서

$$a-1=0,\ b+1=0,\ c=0$$

$$\therefore a=1,\ b=-1,\ c=0$$

(2) $ax^2+(2b-1)x+c+5=2x^2-4$에서

$$a=2,\ 2b-1=0,\ c+5=-4$$

$$\therefore a=2,\ b=\frac{1}{2},\ c=-9$$

(3) $(a+2)x^2+(b-3)x+4c=3x^2-2x+8$에서

$a+2=3,\ b-3=-2,\ 4c=8$

$\therefore\ a=1,\ b=1,\ c=2$

답 (1) $\boldsymbol{a=1,\ b=-1,\ c=0}$

(2) $\boldsymbol{a=2,\ b=\frac{1}{2},\ c=-9}$

(3) $\boldsymbol{a=1,\ b=1,\ c=2}$

63

(1) 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-3b=-9 \qquad \therefore\ b=3$

양변에 $x=2$를 대입하면

$3a=-6 \qquad \therefore\ a=-2$

(2) 양변에 $x=-\frac{3}{2}$을 대입하면

$\frac{5}{2}b=\frac{5}{2} \qquad \therefore\ b=1$

양변에 $x=1$을 대입하면

$-5a=10 \qquad \therefore\ a=-2$

답 (1) $\boldsymbol{a=-2,\ b=3}$

(2) $\boldsymbol{a=-2,\ b=1}$

다른 풀이 (1) 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$(a+b)x+a-2b=x-8$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a+b=1,\ a-2b=-8$

$\therefore\ a=-2,\ b=3$

(2) 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$(-2a-b)x-3a+b=3x+7$

양변의 동류항의 계수를 비교하면

$-2a-b=3,\ -3a+b=7$

$\therefore\ a=-2,\ b=1$

해설 Focus

항등식의 미정계수를 구할 때에는 계수 비교법과 수치 대입법 중 계산이 더 간단한 방법을 이용하면 된다. 위의 문제는 x에 적당한 수를 대입하면 식이 간단해지므로 수치 대입법이 더 편리하다.

64

주어진 등식의 우변을 전개한 후 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^3+3x^2-4=ax^3+(b+2a)x^2+(c+2b)x+2c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$1=a,\ 3=b+2a,\ 0=c+2b,\ -4=2c$

$\therefore\ a=1,\ b=1,\ c=-2$

답 $\boldsymbol{a=1,\ b=1,\ c=-2}$

65

$x^3=a(x-1)(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-2)$
$\quad +c(x-1)+d$

가 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$1=d$

양변에 $x=2$를 대입하면

$8=c+d, \qquad 8=c+1$

$\therefore\ c=7$

양변에 $x=3$을 대입하면

$27=2b+2c+d, \qquad 27=2b+14+1$

$2b=12 \qquad \therefore\ b=6$

양변에 $x=0$을 대입하면

$0=-6a+2b-c+d$

$0=-6a+12-7+1$

$6a=6 \qquad \therefore\ a=1$

답 $\boldsymbol{a=1,\ b=6,\ c=7,\ d=1}$

66

$(x+1)(x^2-2)f(x)=x^4+ax^2-b$

가 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=1+a-b$

$\therefore\ a-b=-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

양변에 $x^2=2$를 대입하면

$0=4+2a-b$

$\therefore\ 2a-b=-4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=-2$

$\therefore\ a+b=-5$ 답 $\boldsymbol{-5}$

67

주어진 등식의 좌변을 k에 대하여 정리하면

$(x+y)k+(-2x-y)=4k+1$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x+y=4,\ -2x-y=1$

$\therefore\ x=-5,\ y=9$ 　　답 $x=-5,\ y=9$

68

주어진 등식의 좌변을 x, y에 대하여 정리하면

$(a+b)x+(a-b)y+2=3x-5y+c$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a+b=3,\ a-b=-5,\ 2=c$

$\therefore\ a=-1,\ b=4,\ c=2$

$\therefore\ abc=-8$ 　　답 -8

69

x^3+ax^2+bx-6을 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 0이므로

$$\begin{aligned}x^3+ax^2+bx-6&=(x^2+2x-3)Q(x)\\&=(x+3)(x-1)Q(x)\end{aligned}$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=-3$을 대입하면

$-27+9a-3b-6=0$

$\therefore\ 3a-b=11$ 　　…… ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$1+a+b-6=0$

$\therefore\ a+b=5$ 　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=1$ 　　답 $a=4,\ b=1$

70

x^3+ax^2-2x+1을 x^2+x+2로 나누었을 때의 몫이 $x-1$이므로 나머지를 $px+q$ (p, q는 상수)라 하면

x^3+ax^2-2x+1

$=(x^2+x+2)(x-1)+px+q$

$=x^3+(p+1)x-2+q$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=0,\ -2=p+1,\ 1=-2+q$

$\therefore\ a=0,\ p=-3,\ q=3$

따라서 나머지는 $-3x+3$이다.

답 $a=0$, 나머지: $-3x+3$

해설 Focus

다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면 R는 상수이거나 (R의 차수)<(B의 차수)이다.
따라서 다항식의 나눗셈에서 나누는 식이 이차식이면 나머지는 상수 또는 일차식이므로 $px+q$ (p, q는 상수)로 놓을 수 있다.

71

$x+1$로 나누는 조립제법을 몫에 대하여 연속으로 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & 0 & 2 & 4\\
 & & -1 & 1 & -3\\\hline
-1 & 1 & -1 & 3 & \boxed{1}\\
 & & -1 & 2 & \\\hline
-1 & 1 & -2 & \boxed{5} & \\
 & & -1 & & \\\hline
 & 1 & \boxed{-3} & &
\end{array}$$

$\therefore\ x^3+2x+4$

$=(x+1)(x^2-x+3)+1$

$=(x+1)\{(x+1)(x-2)+5\}+1$

$=(x+1)^2(x-2)+5(x+1)+1$

$=(x+1)^2\{(x+1)\times1-3\}+5(x+1)+1$

$=(x+1)^3-3(x+1)^2+5(x+1)+1$

$\therefore\ a=1,\ b=-3,\ c=5,\ d=1$

답 $a=1,\ b=-3,\ c=5,\ d=1$

72

$x-2$로 나누는 조립제법을 몫에 대하여 연속으로 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & -4 & 3 & -5\\
 & & 2 & -4 & -2\\\hline
2 & 1 & -2 & -1 & \boxed{-7}\\
 & & 2 & 0 & \\\hline
2 & 1 & 0 & \boxed{-1} & \\
 & & 2 & & \\\hline
 & 1 & \boxed{2} & &
\end{array}$$

$\therefore x^3-4x^2+3x-5$

$=(x-2)(x^2-2x-1)-7$

$=(x-2)\{(x-2)\times x-1\}-7$

$=(x-2)^2\times x-(x-2)-7$

$=(x-2)^2\{(x-2)\times 1+2\}-(x-2)-7$

$=(x-2)^3+2(x-2)^2-(x-2)-7$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=-1$, $d=-7$이므로

$abcd=14$ **답 14**

연습 문제

● 본책 45~46쪽

73

전략 수치 대입법과 계수 비교법을 적절히 이용하여 a, b, c의 값을 구한다.

$x^2-x-2=a(x-b)^2+c(x-b)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=b$를 대입하면

$b^2-b-2=0$, $(b+1)(b-2)=0$

$\therefore b=2$ ($\because b>0$)

㉠에 $b=2$를 대입하여 전개하면

$x^2-x-2=a(x-2)^2+c(x-2)$

$=ax^2+(-4a+c)x+4a-2c$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

$1=a$, $-1=-4a+c$, $-2=4a-2c$

$\therefore a=1$, $c=3$

답 $a=1$, $b=2$, $c=3$

74

전략 주어진 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 적당한 값을 대입하여 a, b의 값을 구한다.

$x(x+1)(x+2)$

$=(x+1)(x-1)P(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-a+b$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$6=a+b$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=3$

따라서 $a-b=0$이므로 ㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=-P(0)+b$

$\therefore P(0)=b=3$ **답 ③**

75

전략 주어진 등식이 k에 대한 항등식임을 이용하여 x^2+y^2, $x+y$의 값을 구한다.

주어진 등식의 좌변을 k에 대하여 정리하면

$(x^2+y^2-8)k-x^2-y^2+3x+3y+2=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x^2+y^2-8=0$, $-x^2-y^2+3x+3y+2=0$

$\therefore x^2+y^2=8$, $x+y=2$

이때 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$이므로

$2^2=8+2xy$, $2xy=-4$

$\therefore xy=-2$ **답 -2**

76

전략 x, y 사이의 관계식을 한 문자에 대하여 정리한 후 $axy+bx+cy+2=0$에 대입한다.

$x+y=1$에서 $y=1-x$

이것을 $axy+bx+cy+2=0$에 대입하면

$ax(1-x)+bx+c(1-x)+2=0$

$\therefore -ax^2+(a+b-c)x+c+2=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$-a=0$, $a+b-c=0$, $c+2=0$

$\therefore a=0$, $b=-2$, $c=-2$

$\therefore a-b-c=4$ **답 4**

77

전략 주어진 등식은 x에 대한 항등식이므로 등식의 양변에 적당한 값을 대입하여 a, b, c, d의 값을 구한다.

$(2x-3)^3=a+bP_1(x)+cP_2(x)+dP_3(x)$에서

$(2x-3)^3$

$=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)$

$+d(x-1)(x-2)(x-3)$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=1$을 대입하면 $-1=a$

양변에 $x=2$를 대입하면

$1=a+b$, $1=-1+b$

$\therefore b=2$

양변에 $x=3$을 대입하면

$27=a+2b+2c$

$27=-1+4+2c, \qquad 2c=24$

$\therefore\ c=12$

양변에 $x=0$을 대입하면

$-27=a-b+2c-6d$

$-27=-1-2+24-6d$

$6d=48 \qquad \therefore\ d=8$

$\therefore\ a-b+c-d=-1-2+12-8=1$ 답 **1**

78

전략 $x=1$을 주어진 이차방정식에 대입한 등식은 k에 대한 항등식이다.

$x^2+k(2p-3)x-(p^2-2)k+q+2=0$이 $x=1$을 근으로 가지므로

$1+k(2p-3)-(p^2-2)k+q+2=0$

이 등식의 좌변을 k에 대하여 정리하면

$(-p^2+2p-1)k+q+3=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$-p^2+2p-1=0,\ q+3=0$

$-p^2+2p-1=0$에서 $\qquad (p-1)^2=0$

$\therefore\ p=1$ (중근)

$q+3=0$에서 $\qquad q=-3$

$\therefore\ p+q=-2$ 답 ②

79

전략 $\dfrac{4x+ay+b}{x+y-1}=k$ (k는 상수)로 놓고 이 등식이 x, y에 대한 항등식임을 이용한다.

$\dfrac{4x+ay+b}{x+y-1}=k$ (k는 상수)라 하면

$4x+ay+b=k(x+y-1)$

이 식을 x, y에 대하여 정리하면

$(4-k)x+(a-k)y+b+k=0$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$4-k=0,\ a-k=0,\ b+k=0$

$\therefore\ k=4,\ a=4,\ b=-4$ 답 $\boldsymbol{a=4,\ b=-4}$

80

전략 사차식을 이차식으로 나누었을 때의 몫은 이차식임을 이용한다.

x^4+x^3+ax+b를 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫을 x^2+cx+d (c, d는 상수)라 하면

x^4+x^3+ax+b

$=(x^2-x+1)(x^2+cx+d)$

$=x^4+(c-1)x^3+(-c+d+1)x^2$

$\quad +(c-d)x+d$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$1=c-1,\ 0=-c+d+1,\ a=c-d,\ b=d$

$\therefore\ a=1,\ b=1,\ c=2,\ d=1$

답 $\boldsymbol{a=1,\ b=1}$

다른 풀이 직접 나눗셈을 하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x+1 \\
\hline
x^2-x+1 & x^4+x^3+\qquad+ax+b \\
 & x^4-x^3+x^2 \\
\hline
 & \quad 2x^3-x^2+ax \\
 & \quad 2x^3-2x^2+2x \\
\hline
 & \qquad x^2+(a-2)x+b \\
 & \qquad x^2-x+1 \\
\hline
 & \qquad (a-1)x+b-1
\end{array}
$$

이때 나머지가 0이므로 $\qquad (a-1)x+b-1=0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a-1=0,\ b-1=0 \qquad \therefore\ a=1,\ b=1$

81

전략 조립제법을 연속으로 이용하여 $x-1$에 대한 내림차순으로 정리한다.

$x-1$로 나누는 조립제법을 몫에 대하여 연속으로 이용하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & \\
\hline
1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
 & & 1 & 3 & 6 & & \\
\hline
1 & 1 & 3 & 6 & 10 & & \\
 & & 1 & 4 & & & \\
\hline
1 & 1 & 4 & 10 & & & \\
 & & 1 & & & & \\
\hline
 & 1 & 5 & & & &
\end{array}
$$

$\therefore x^5$

$=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)+1$

$=(x-1)\{(x-1)(x^3+2x^2+3x+4)+5\}$
$+1$

$=(x-1)^2(x^3+2x^2+3x+4)+5(x-1)$
$+1$

$=(x-1)^2\{(x-1)(x^2+3x+6)+10\}$
$+5(x-1)+1$

$=(x-1)^3(x^2+3x+6)+10(x-1)^2$
$+5(x-1)+1$

$=(x-1)^3\{(x-1)(x+4)+10\}$
$+10(x-1)^2+5(x-1)+1$

$=(x-1)^4(x+4)+10(x-1)^3$
$+10(x-1)^2+5(x-1)+1$

$=(x-1)^4\{(x-1)\times1+5\}+10(x-1)^3$
$+10(x-1)^2+5(x-1)+1$

$=(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3$
$+10(x-1)^2+5(x-1)+1$

$\therefore a=1,\ b=5,\ c=10,\ d=10,\ e=5,\ f=1$

답 $\boldsymbol{a=1,\ b=5,\ c=10,\ d=10,\ e=5,\ f=1}$

82

전략 주어진 등식의 양변에 $x=1$, $x=-1$을 각각 대입한다.

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$ …… ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-27=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6$
…… ㉡

㉠+㉡을 하면

$-26=2(a_0+a_2+a_4+a_6)$

$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6=-13$ 답 $\mathbf{-13}$

83

전략 x, y, z 사이의 관계식을 한 문자에 대하여 정리한 후 $axy+byz+czx=12$에 대입한다.

$x-y-z=1$ …… ㉠

$x-2y-3z=0$ …… ㉡

㉠×2−㉡을 하면

$x+z=2$ $\therefore x=-z+2$

㉠−㉡을 하면

$y+2z=1$ $\therefore y=-2z+1$

$x=-z+2$, $y=-2z+1$을 $axy+byz+czx=12$에 대입하면

$a(-z+2)(-2z+1)+b(-2z+1)z$
$+cz(-z+2)$
$=12$

$\therefore (2a-2b-c)z^2+(-5a+b+2c)z$
$+2a-12$
$=0$

이 등식이 z에 대한 항등식이므로

$2a-2b-c=0$ …… ㉢

$-5a+b+2c=0$ …… ㉣

$2a-12=0$

$2a-12=0$에서 $a=6$

㉢, ㉣에 $a=6$을 각각 대입하면

$12-2b-c=0$, $-30+b+2c=0$

$\therefore b=-2,\ c=16$

$\therefore a+b+c=6+(-2)+16=20$ 답 **20**

84

전략 다항식의 나눗셈에 대한 항등식을 세우고 양변에 적당한 값을 대입한다.

$x^n(x^2+ax+b)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $3^n(x-3)$이므로

$x^n(x^2+ax+b)$
$=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$3^n(9+3a+b)=0$

이때 $3^n\neq0$이므로 $9+3a+b=0$

$\therefore b=-3a-9$ …… ㉡

$\therefore x^2+ax+b$
$=x^2+ax-3a-9$
$=(x^2-9)+a(x-3)$
$=(x-3)(x+3+a)$ …… ㉢

㉠에 ㉢을 대입하면

$x^n(x-3)(x+3+a)$
$=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$
$=(x-3)\{(x-3)Q(x)+3^n\}$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

$$x^n(x+3+a)=(x-3)Q(x)+3^n$$

양변에 $x=3$을 대입하면

$$3^n(6+a)=3^n$$

이때 $3^n\neq0$이므로

$$6+a=1 \qquad \therefore a=-5$$

㉡에 $a=-5$를 대입하면 $b=6$

$$\therefore ab=-30$$

답 -30

02 나머지정리와 인수정리

● 본책 47~54쪽

85

나머지정리에 의하여 구하는 나머지는 다음과 같다.

(1) $f(1)=2\times1^3-1^2+1+1=3$

(2) $f(-2)=2\times(-2)^3-(-2)^2+(-2)+1$
$=-21$

(3) $f(3)=2\times3^3-3^2+3+1=49$

(4) $f(-3)=2\times(-3)^3-(-3)^2+(-3)+1$
$=-65$

답 (1) **3** (2) **−21** (3) **49** (4) **−65**

86

나머지정리에 의하여 구하는 나머지는 다음과 같다.

(1) $f\left(\frac{1}{2}\right)=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-8\times\frac{1}{2}+1=-\frac{9}{4}$

(2) $f\left(-\frac{2}{3}\right)=3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2-8\times\left(-\frac{2}{3}\right)+1=\frac{23}{3}$

(3) $f\left(-\frac{3}{2}\right)=3\times\left(-\frac{3}{2}\right)^2-8\times\left(-\frac{3}{2}\right)+1=\frac{79}{4}$

(4) $f\left(\frac{4}{3}\right)=3\times\left(\frac{4}{3}\right)^2-8\times\frac{4}{3}+1=-\frac{13}{3}$

답 (1) $-\frac{9}{4}$ (2) $\frac{23}{3}$ (3) $\frac{79}{4}$ (4) $-\frac{13}{3}$

87

(1) $f(-1)=0$이므로

$$-2-3-k-4=0$$
$$\therefore k=-9$$

(2) $f(2)=0$이므로

$$16-12+2k-4=0, \qquad 2k=0$$
$$\therefore k=0$$

(3) $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$이므로

$$-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}-4=0, \qquad \frac{k}{2}=-5$$
$$\therefore k=-10$$

답 (1) **−9** (2) **0** (3) **−10**

88

나머지정리에 의하여 $f(-3)=f(1)$이므로

$$81-54+9a+3+6=1+2+a-1+6$$
$$9a+36=a+8, \qquad 8a=-28$$
$$\therefore a=-\frac{7}{2}$$

답 $-\frac{7}{2}$

89

$f(x)=3x^3+ax^2+bx-1$이라 하면 나머지정리에 의하여

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=1,\ f(-1)=-19$$

$f\left(\frac{2}{3}\right)=1$에서 $\frac{8}{9}+\frac{4}{9}a+\frac{2}{3}b-1=1$

$\therefore 2a+3b=5$ …… ㉠

$f(-1)=-19$에서 $-3+a-b-1=-19$

$\therefore a-b=-15$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-8,\ b=7$$

따라서 $f(x)=3x^3-8x^2+7x-1$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$$f(2)=24-32+14-1=5$$

답 **5**

90

나머지정리에 의하여

$$f(-1)=2,\ g(-1)=-1$$

따라서 다항식 $2f(x)-3g(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$$2f(-1)-3g(-1)=2\times2-3\times(-1)=7$$

답 **7**

91

$f(x)$를 $x+2$, $x-6$으로 나누었을 때의 나머지가 각각 6, -10이므로 나머지정리에 의하여

$f(-2)=6$, $f(6)=-10$

다항식 $f(x)$를 $x^2-4x-12$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$f(x)=(x^2-4x-12)Q(x)+ax+b$$
$$=(x+2)(x-6)Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$f(-2)=-2a+b$

$\therefore\ -2a+b=6 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠의 양변에 $x=6$을 대입하면

$f(6)=6a+b$

$\therefore\ 6a+b=-10 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=2$

따라서 구하는 나머지는 $-2x+2$이다.

답 $\mathbf{-2x+2}$

92

다항식 $f(x)$를 $x-1$, $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 각각 9, 5이므로 나머지정리에 의하여

$f(1)=9$, $f(-3)=5$

$f(x)$를 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$f(x)=(x^2+2x-3)(x^2+2)+ax+b$$
$$=(x+3)(x-1)(x^2+2)+ax+b \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=a+b$

$\therefore\ a+b=9 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$f(-3)=-3a+b$

$\therefore\ -3a+b=5 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=8$

따라서 $f(x)=(x+3)(x-1)(x^2+2)+x+8$이므로 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-1)=2\times(-2)\times3-1+8=-5$

답 $\mathbf{-5}$

93

$f(x)$를 $(x+1)^2(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x+1)^2(x-3)Q(x)+ax^2+bx+c$

이때 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 2이므로 ax^2+bx+c를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지도 2이다. 즉

$ax^2+bx+c=a(x+1)^2+2 \quad \cdots\cdots ㉠$

이므로

$f(x)=(x+1)^2(x-3)Q(x)+a(x+1)^2+2$

한편 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 -14이므로

$f(3)=16a+2=-14$

$\therefore\ a=-1$

따라서 ㉠에서 구하는 나머지는

$-1\times(x+1)^2+2=-x^2-2x+1$

답 $\mathbf{-x^2-2x+1}$

94

$f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$

이때 $f(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지가 $x+1$이므로 ax^2+bx+c를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지도 $x+1$이다.

즉 $R(x)=ax^2+bx+c=a(x^2+1)+x+1$이므로

$f(x)$
$=(x^2+1)(x-1)Q(x)+a(x^2+1)+x+1$

한편 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로

$f(1)=2a+2=4$

$\therefore\ a=1$

따라서 $R(x)=(x^2+1)+x+1=x^2+x+2$이므로

$R(-2)=4-2+2=4$

답 $\mathbf{4}$

95

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로

$f(2)=4$

따라서 $xf(x-3)$을 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는

$5f(5-3)=5f(2)=5\times4=20$ 답 **20**

96

$f(x)$를 $2x^2-5x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $4x-1$이므로

$$f(x)=(2x^2-5x-3)Q(x)+4x-1$$
$$=(2x+1)(x-3)Q(x)+4x-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f(3x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(3\times1)=f(3)$이므로 ㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f(3)=4\times3-1=11$ 답 **11**

다른 풀이 ㉠의 양변에 x 대신 $3x$를 대입하면

$$f(3x)=(6x+1)(3x-3)Q(3x)+12x-1$$
$$=3(6x+1)(x-1)Q(3x)+12(x-1)+11$$
$$=(x-1)\{3(6x+1)Q(3x)+12\}+11$$

따라서 $f(3x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 11이다.

97

$f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 4이므로

$f(x)=(x-3)Q(x)+4 \quad \cdots\cdots ㉠$

$Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 2이므로

$Q(-1)=2$

$xf(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$-f(-1)$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=-4Q(-1)+4=-4\times2+4=-4$

따라서 구하는 나머지는

$-f(-1)=-(-4)=4$ 답 **4**

98

$f(x)=2x^3-5x^2+ax+b$라 하면 $f(x)$가 $2x+1$, $x-1$로 각각 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, $f(1)=0$

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$에서 $\quad -\frac{1}{4}-\frac{5}{4}-\frac{1}{2}a+b=0$

$\therefore a-2b=-3 \quad \cdots\cdots ㉠$

$f(1)=0$에서 $\quad 2-5+a+b=0$

$\therefore a+b=3 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=1$, $b=2$

$\therefore a-b=-1$ 답 **-1**

99

$f(x)=-x^4+ax^2-2x+b$라 하면 $f(x)$가 x^2-x-2, 즉 $(x+1)(x-2)$로 나누어떨어지므로 $f(x)$는 $x+1$, $x-2$로 각각 나누어떨어진다.

따라서 인수정리에 의하여

$f(-1)=0$, $f(2)=0$

$f(-1)=0$에서 $\quad -1+a+2+b=0$

$\therefore a+b=-1 \quad \cdots\cdots ㉠$

$f(2)=0$에서 $\quad -16+4a-4+b=0$

$\therefore 4a+b=20 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=7$, $b=-8$

따라서 $f(x)=-x^4+7x^2-2x-8$이므로 $f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(-3)=-81+63+6-8=-20$ 답 **-20**

연습 문제

● 본책 55~57쪽

100

전략 주어진 조건을 이용하여 다항식의 나눗셈에 대한 항등식을 세운다.

$f(x)$를 $(kx-2)(x+5)$로 나누었을 때의 몫은 $x-1$이고 나머지는 3이므로

$f(x)=(kx-2)(x+5)(x-1)+3$

이때 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 -5이므로 $\quad f(-1)=-5$

$(-k-2)\times4\times(-2)+3=-5$

$8k+19=-5, \quad 8k=-24$

$\therefore k=-3$ 답 **-3**

101

전략 $f(x)+g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $f(1)+g(1)$임을 이용한다.

$f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$f(x)=(x^2-1)Q(x)+2$$
$$=(x+1)(x-1)Q(x)+2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$g(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면

$$g(x)=(x^2-3x+2)Q'(x)+2x+1$$
$$=(x-1)(x-2)Q'(x)+2x+1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

다항식 $f(x)+g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $f(1)+g(1)$이고 ㉠, ㉡에서

$$f(1)=2,\ g(1)=3$$

따라서 구하는 나머지는

$$f(1)+g(1)=2+3=5$$

답 **5**

102

전략 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)로 놓고 나머지정리를 이용하여 a, b의 값을 구한다.

$(x+2)f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 9이므로

$$3f(1)=9 \qquad \therefore f(1)=3$$

$(2x+1)f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 5이므로

$$-f(-1)=5 \qquad \therefore f(-1)=-5$$

$f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$$
$$=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$f(1)=a+b \qquad \therefore a+b=3 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$f(-1)=-a+b$$
$$\therefore -a+b=-5 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\qquad a=4,\ b=-1$

따라서 $R(x)=4x-1$이므로

$$R(-2)=4\times(-2)-1=-9$$

답 **-9**

103

전략 $f(4x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $f(4a)$임을 이용한다.

$f(x)$를 x^2+3x-4로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $-2x+3$이므로

$$f(x)=(x^2+3x-4)Q(x)-2x+3$$
$$=(x+4)(x-1)Q(x)-2x+3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f(4x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $f(-4)$이므로 ㉠의 양변에 $x=-4$를 대입하면

$$f(-4)=8+3=11$$

답 **11**

104

전략 먼저 다항식의 나눗셈에 대한 항등식을 세우고 상수 a의 값을 구한다.

다항식 $x^{60}-x^{31}+ax^3+1$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 4이므로

$$x^{60}-x^{31}+ax^3+1=(x-1)Q(x)+4$$

양변에 $x=1$을 대입하면

$$a+1=4 \qquad \therefore a=3$$
$$\therefore x^{60}-x^{31}+3x^3+1=(x-1)Q(x)+4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편 $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(-1)$이므로 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$0=-2Q(-1)+4$$
$$\therefore Q(-1)=2$$

답 **2**

105

전략 인수정리를 이용하여 a, b의 값을 구한다.

$f(x)=x^3+ax^2-7x+b$라 하면 $f(x)$가 $x-1$, $x+2$를 인수로 가지므로 인수정리에 의하여

$$f(1)=0,\ f(-2)=0$$

$f(1)=0$에서 $\qquad 1+a-7+b=0$

$$\therefore a+b=6 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f(-2)=0$에서 $\qquad -8+4a+14+b=0$

$$\therefore 4a+b=-6 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-4,\ b=10$$
$$\therefore f(x)=x^3-4x^2-7x+10$$

이때 $f(x)$가 $x-1$, $x+2$, $x-c$를 인수로 가지므로

$$x^3-4x^2-7x+10=(x-1)(x+2)(x-c)$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=0$을 대입하면

$$10=2c \qquad \therefore c=5$$

$$\therefore a+b+c=-4+10+5=11$$

답 **11**

106

전략 다항식 $P(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $P(a)$임을 이용한다.

$f(x)+g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 10이므로

$$f(2)+g(2)=10$$

$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 58이므로

$$\{f(2)\}^2+\{g(2)\}^2=58$$

$f(x)g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$$f(2)g(2)$$

$\{f(2)\}^2+\{g(2)\}^2=\{f(2)+g(2)\}^2-2f(2)g(2)$에서

$$58=10^2-2f(2)g(2)$$

$$\therefore f(2)g(2)=21$$

답 **21**

107

전략 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓고 a, b, c의 값을 구한다.

$x^{10}-x^7+2x^4-6$을 x^3-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}&x^{10}-x^7+2x^4-6\\&=(x^3-x)Q(x)+ax^2+bx+c\\&=x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c \qquad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$-6=c$$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$-2=a-b-6$$

$$\therefore a-b=4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$-4=a+b-6$$

$$\therefore a+b=2 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$a=3,\ b=-1$$

따라서 $R(x)=3x^2-x-6$이므로 $R(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$$R(-2)=12+2-6=8$$

답 **8**

108

전략 $f(x)=A(x)B(x)+C(x)$에서 $f(x)$를 $A(x)$로 나누었을 때의 나머지는 $C(x)$를 $A(x)$로 나누었을 때의 나머지와 같다.

$f(x)$를 $(x-1)^2(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$$f(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$$

이때 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+1$이므로 ax^2+bx+c를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지도 $x+1$이다. 즉

$$ax^2+bx+c=a(x-1)^2+x+1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이므로

$$f(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+a(x-1)^2+x+1$$

한편 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 5이므로

$$f(2)=a+3=5$$

$$\therefore a=2$$

따라서 ㉠에서 구하는 나머지는

$$2(x-1)^2+x+1=2x^2-3x+3$$

답 $\mathbf{2x^2-3x+3}$

109

전략 $f(6x)$를 이차식으로 나누었을 때의 나머지가 $R(x)$이므로 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)로 놓는다.

$f(x)$를 $(x-1)(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지가 x^2+x+1이므로

$$\begin{aligned}&f(x)\\&=(x-1)(x-2)(x-3)Q_1(x)+x^2+x+1\end{aligned}$$

양변에 $x=2$를 대입하면

$$f(2)=7$$

양변에 $x=3$을 대입하면

$$f(3)=13$$

한편 $f(6x)$를 $6x^2-5x+1$, 즉 $(2x-1)(3x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$f(6x)=(2x-1)(3x-1)Q_2(x)+ax+b$$

양변에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면

$$f(3)=\frac{1}{2}a+b$$

$$\therefore \frac{1}{2}a+b=13 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

양변에 $x=\frac{1}{3}$을 대입하면

$$f(2)=\frac{1}{3}a+b$$

$$\therefore \frac{1}{3}a+b=7 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=36$, $b=-5$

따라서 $R(x)=36x-5$이므로

$R(1)=31$ **답 31**

110

전략 다항식의 나눗셈에 대한 항등식을 세우고 나머지정리를 이용한다.

$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$, 나머지는 6이므로

$$f(x)=(x-1)Q(x)+6 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$f(1)=6$$

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$$f(-2)=-3Q(-2)+6$$

나머지정리에 의하여 $Q(-2)=9$이므로

$$f(-2)=-3\times9+6=-21$$

한편 $f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 $ax+b$이므로

$$f(x)=(x-1)(x+2)Q'(x)+ax+b \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$f(1)=a+b \qquad \therefore a+b=6 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$$f(-2)=-2a+b$$

$$\therefore -2a+b=-21 \qquad \cdots\cdots ㉣$$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$$a=9,\ b=-3$$

$\therefore ab=-27$ **답 -27**

111

전략 인수정리를 이용하여 $f(-2)$, $f(2)$의 값을 구한다.

$f(x)+2$가 $x+2$로 나누어떨어지므로

$$f(-2)+2=0$$

$$\therefore f(-2)=-2$$

$f(x)-2$가 $x-2$로 나누어떨어지므로

$$f(2)-2=0$$

$$\therefore f(2)=2$$

이때 $f(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차다항식이므로

$$f(x)=x^2+ax+b\ (a,\ b\text{는 상수})$$

라 하면 $f(-2)=-2$, $f(2)=2$에서

$$4-2a+b=-2,\ 4+2a+b=2$$

$$2a-b=6,\ 2a+b=-2$$

$$\therefore a=1,\ b=-4$$

따라서 $f(x)=x^2+x-4$이므로

$f(10)=100+10-4=106$ **답 106**

112

전략 $F(x)=f(x)-5$로 놓고 $F(x)$의 인수를 구한다.

$F(x)=f(x)-5$라 하면

$$F(1)=f(1)-5=0,\ F(2)=f(2)-5=0,$$

$$F(3)=f(3)-5=0$$

이므로 $F(x)$는 $x-1$, $x-2$, $x-3$을 인수로 갖는다.

이때 $F(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로

$$F(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$\therefore f(x)=F(x)+5$$

$$=(x-1)(x-2)(x-3)+5$$

따라서 $f(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는

$$f(4)=3\times2\times1+5=11$$

답 11

다른 풀이 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면 $f(1)=f(2)=f(3)=5$에서

$$1+a+b+c=5,\ 8+4a+2b+c=5,$$

$$27+9a+3b+c=5$$

세 식을 연립하여 풀면

$a=-6,\ b=11,\ c=-1$

$\therefore f(x)=x^3-6x^2+11x-1$

따라서 $f(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는

$f(4)=4^3-6\times4^2+11\times4-1=11$

113

전략 주어진 조건과 항등식의 성질을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

조건 (가)에서 $g(x)=x^2f(x)$이므로 $g(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지는

$g(4)=16f(4)$ ⋯⋯ ㉠

조건 (나)의 등식에 $g(x)=x^2f(x)$를 대입하면

$x^2f(x)+(3x^2+4x)f(x)=x^3+ax^2+2x+b$

$(4x^2+4x)f(x)=x^3+ax^2+2x+b$

$\therefore 4x(x+1)f(x)=x^3+ax^2+2x+b$ ⋯⋯ ㉡

㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면 $0=b$

㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-1+a-2 \quad \therefore a=3$

따라서 ㉡에서

$4x(x+1)f(x)=x^3+3x^2+2x$

위의 식의 양변에 $x=4$를 대입하면

$4\times4\times5\times f(4)=64+48+8$

$80f(4)=120 \quad \therefore f(4)=\frac{3}{2}$

따라서 ㉠에서 구하는 나머지는

$16f(4)=16\times\frac{3}{2}=24$ **답** ⑤

114

전략 $Q(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)로 놓고 나머지정리를 이용한다.

$f(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $-2x$이므로

$f(x)=(x^2+1)Q(x)-2x$ ⋯⋯ ㉠

$f(x)$를 x^2-1, 즉 $(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 나머지가 6이므로

$f(-1)=6,\ f(1)=6$

㉠의 양변에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면

$f(-1)=2Q(-1)+2,\ f(1)=2Q(1)-2$

$6=2Q(-1)+2,\ 6=2Q(1)-2$

$\therefore Q(-1)=2,\ Q(1)=4$

한편 $Q(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$Q(x)=(x^2-1)Q_1(x)+ax+b$

$=(x+1)(x-1)Q_1(x)+ax+b$ ⋯⋯ ㉡

㉡의 양변에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면

$Q(-1)=-a+b,\ Q(1)=a+b$

$2=-a+b,\ 4=a+b$

$\therefore a=1,\ b=3$

따라서 $Q(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 나머지는 $x+3$이다. **답** $x+3$

115

전략 $x=7$이라 하면 $6=x-1$이므로 $x^{30}+x^{20}+x$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 이용한다.

$x^{30}+x^{20}+x$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$x^{30}+x^{20}+x=(x-1)Q(x)+R$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$R=3$

㉠의 양변에 $x=7$을 대입하면

$7^{30}+7^{20}+7=6\times Q(7)+3$

따라서 $7^{30}+7^{20}+7$을 6으로 나누었을 때의 나머지는 3이다. **답** 3

116

전략 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$에 대한 항등식을 세우고 양변에 적당한 값을 대입한다.

조건 (가)에서 $f(x)$를 $x+1$, x^2-3으로 나눈 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라 하고 나머지를 R라 하면

$f(x)=(x+1)Q_1(x)+R,$

$f(x)=(x^2-3)Q_2(x)+R$

$\therefore f(x)-R=(x+1)Q_1(x),$

$f(x)-R=(x^2-3)Q_2(x)$

따라서 $f(x)-R$는 $x+1$, x^2-3을 인수로 갖고, 최고차항의 계수가 1인 사차다항식이므로

$f(x)-R=(x+1)(x^2-3)(x+k)$ (k는 상수) …… ㉠

로 놓을 수 있다.

한편 조건 (나)에서 $f(x+1)-5$가 x^2+x, 즉 $x(x+1)$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(0+1)-5=0$, $f(-1+1)-5=0$

$\therefore f(1)=5$, $f(0)=5$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)-R=2\times(-2)\times(1+k)$

$5-R=-4-4k$

$\therefore 4k-R=-9$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)-R=1\times(-3)\times k$

$5-R=-3k$

$\therefore 3k-R=-5$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$k=-4$, $R=-7$

따라서 ㉠에서

$f(x)+7=(x+1)(x^2-3)(x-4)$

이므로

$f(x)=(x+1)(x^2-3)(x-4)-7$

$\therefore f(4)=-7$

답 ③

3 인수분해

01 인수분해

본책 60~64쪽

117

(1) $4x^2y+8xy=\mathbf{4xy(x+2)}$

(2) $(2a+b)^2+6a+3b$

$=(2a+b)^2+3(2a+b)$

$=(2a+b)\{(2a+b)+3\}$

$=\mathbf{(2a+b)(2a+b+3)}$

(3) $4x^2+12xy+9y^2$

$=(2x)^2+2\times2x\times3y+(3y)^2$

$=\mathbf{(2x+3y)^2}$

(4) $9x^2-30xy+25y^2$

$=(3x)^2-2\times3x\times5y+(5y)^2$

$=\mathbf{(3x-5y)^2}$

(5) $16a^2-81b^2=(4a)^2-(9b)^2$

$=\mathbf{(4a+9b)(4a-9b)}$

(6) $x^2+4x+3=\mathbf{(x+3)(x+1)}$

(7) $3a^2-5ab-2b^2=\mathbf{(3a+b)(a-2b)}$

답 풀이 참조

118

(1) $x^2+y^2+4z^2+2xy+4yz+4zx$

$=x^2+y^2+(2z)^2+2\times x\times y$

$+2\times y\times2z+2\times2z\times x$

$=\mathbf{(x+y+2z)^2}$

(2) $a^2+4b^2+9c^2-4ab-12bc+6ca$

$=a^2+(-2b)^2+(3c)^2+2\times a\times(-2b)$

$+2\times(-2b)\times3c+2\times3c\times a$

$=\mathbf{(a-2b+3c)^2}$

(3) $x^3+6x^2+12x+8$

$=x^3+3\times x^2\times2+3\times x\times2^2+2^3$

$=\mathbf{(x+2)^3}$

(4) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

$=(2x)^3-3\times(2x)^2\times y+3\times2x\times y^2-y^3$

$=\mathbf{(2x-y)^3}$

(5) $a^3+27b^3=a^3+(3b)^3$
$=(a+3b)\{a^2-a\times 3b+(3b)^2\}$
$=\mathbf{(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)}$

(6) $8x^3-y^3=(2x)^3-y^3$
$=(2x-y)\{(2x)^2+2x\times y+y^2\}$
$=\mathbf{(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)}$

(7) $x^3+y^3+1-3xy$
$=x^3+y^3+1^3-3\times x\times y\times 1$
$=(x+y+1)$
$\times(x^2+y^2+1^2-x\times y-y\times 1-1\times x)$
$=\mathbf{(x+y+1)(x^2+y^2-xy-x-y+1)}$

(8) $8a^3+b^3-c^3+6abc$
$=(2a)^3+b^3+(-c)^3-3\times 2a\times b\times(-c)$
$=(2a+b-c)$
$\times\{(2a)^2+b^2+(-c)^2-2a\times b-b\times(-c)$
$-(-c)\times 2a\}$
$=\mathbf{(2a+b-c)(4a^2+b^2+c^2-2ab+bc+2ca)}$

(9) $a^4+a^2+1=a^4+a^2\times 1^2+1^4$
$=(a^2+a\times 1+1^2)(a^2-a\times 1+1^2)$
$=\mathbf{(a^2+a+1)(a^2-a+1)}$

(10) $x^4+4x^2y^2+16y^4$
$=x^4+x^2\times(2y)^2+(2y)^4$
$=\{x^2+x\times 2y+(2y)^2\}\{x^2-x\times 2y+(2y)^2\}$
$=\mathbf{(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)}$

답 풀이 참조

119

(1) $x^4-y^4=(x^2)^2-(y^2)^2$
$=(x^2+y^2)(x^2-y^2)$
$=\mathbf{(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}$

(2) $9(a+b)^2-c^2=\{3(a+b)\}^2-c^2$
$=\{3(a+b)+c\}\{3(a+b)-c\}$
$=\mathbf{(3a+3b+c)(3a+3b-c)}$

(3) $x^4+x=x(x^3+1)$
$=\mathbf{x(x+1)(x^2-x+1)}$

(4) $(a+b)^3-(a-b)^3$
$=\{(a+b)-(a-b)\}$
$\times\{(a+b)^2+(a+b)(a-b)+(a-b)^2\}$
$=\mathbf{2b(3a^2+b^2)}$

(5) $a^3b-2a^2b^2+ab^3=ab(a^2-2ab+b^2)$
$=\mathbf{ab(a-b)^2}$

(6) $x^2+8x-(a-3)(a+5)$
$=\{x-(a-3)\}\{x+(a+5)\}$
$=\mathbf{(x-a+3)(x+a+5)}$

답 풀이 참조

참고 (6) $x^2+8x-(a-3)(a+5)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -(a-3) & \rightarrow & -a+3 \\ 1 & & a+5 & \rightarrow & \underline{\quad a+5 \quad} \\ & & & & 8 \end{array}$$

120

(1) $a^3-ab^2-b^2c+a^2c=a(a^2-b^2)+c(a^2-b^2)$
$=(a^2-b^2)(a+c)$
$=\mathbf{(a+b)(a-b)(a+c)}$

(2) $x^3-2ax^2+2x-4a=x^2(x-2a)+2(x-2a)$
$=\mathbf{(x-2a)(x^2+2)}$

(3) $4x^2+4x+1-y^2$
$=(2x+1)^2-y^2$
$=\{(2x+1)+y\}\{(2x+1)-y\}$
$=\mathbf{(2x+y+1)(2x-y+1)}$

(4) $6ab+1-9a^2-b^2$
$=1-(9a^2-6ab+b^2)$
$=1-(3a-b)^2$
$=\{1+(3a-b)\}\{1-(3a-b)\}$
$=\mathbf{(3a-b+1)(-3a+b+1)}$

답 풀이 참조

121

$4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$
$=(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2$
$=\{2ab+(a^2+b^2-c^2)\}\{2ab-(a^2+b^2-c^2)\}$
$=(a^2+2ab+b^2-c^2)\{c^2-(a^2-2ab+b^2)\}$
$=\{(a+b)^2-c^2\}\{c^2-(a-b)^2\}$
$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$
$\times\{c+(a-b)\}\{c-(a-b)\}$
$=\mathbf{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$

답 풀이 참조

122

(1) $x^2+x=X$로 놓으면

$(x^2+x)^2-13(x^2+x)+36$
$=X^2-13X+36=(X-4)(X-9)$
$=\mathbf{(x^2+x-4)(x^2+x-9)}$

(2) $1-2x=X$로 놓으면

$(1-2x-x^2)(1-2x+3x^2)+4x^4$
$=(X-x^2)(X+3x^2)+4x^4$
$=X^2+2x^2X-3x^4+4x^4$
$=X^2+2x^2X+x^4$
$=(X+x^2)^2=(1-2x+x^2)^2$
$=\{(x-1)^2\}^2=\mathbf{(x-1)^4}$

(3) $x(x+1)(x+2)(x+3)-15$
$=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}-15$
$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)-15$
$x^2+3x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=X(X+2)-15$
$=X^2+2X-15$
$=(X+5)(X-3)$
$=\mathbf{(x^2+3x+5)(x^2+3x-3)}$

(4) $(x^2+4x+3)(x^2+12x+35)+15$
$=(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$
$=\{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}+15$
$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$
$x^2+8x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X+7)(X+15)+15$
$=X^2+22X+120$
$=(X+12)(X+10)$
$=(x^2+8x+12)(x^2+8x+10)$
$=\mathbf{(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)}$

답 풀이 참조

123

(1) $x^2=X$로 놓으면

$x^4+x^2-6=X^2+X-6$
$=(X+3)(X-2)$
$=\mathbf{(x^2+3)(x^2-2)}$

(2) $x^2=X$로 놓으면

x^4-10x^2+9
$=X^2-10X+9$
$=(X-1)(X-9)$
$=(x^2-1)(x^2-9)$
$=\mathbf{(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)}$

(3) $x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2$
$=(x^2+2)^2-(2x)^2$
$=\mathbf{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}$

(4) $x^4+5x^2+9=(x^4+6x^2+9)-x^2$
$=(x^2+3)^2-x^2$
$=\mathbf{(x^2+x+3)(x^2-x+3)}$

(5) $x^4+y^4-6x^2y^2=(x^4-2x^2y^2+y^4)-4x^2y^2$
$=(x^2-y^2)^2-(2xy)^2$
$=\mathbf{(x^2+2xy-y^2)(x^2-2xy-y^2)}$

답 풀이 참조

다른 풀이 (2) x^4-10x^2+9
$=(x^4-6x^2+9)-4x^2$
$=(x^2-3)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x-3)(x^2-2x-3)$
$=(x+3)(x-1)(x+1)(x-3)$

124

(1) 주어진 식을 전개한 후 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc$
$=a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc$
$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+b^2c+bc^2$
$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$
$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$
$=(b+c)(a+b)(a+c)$
$=\mathbf{(a+b)(b+c)(c+a)}$

(2) x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+xy-6y^2+x+13y-6$
$=x^2+(y+1)x-(6y^2-13y+6)$
$=x^2+(y+1)x-(3y-2)(2y-3)$
$=\{x+(3y-2)\}\{x-(2y-3)\}$
$=\mathbf{(x+3y-2)(x-2y+3)}$

(3) x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&3x^2+4xy+y^2-10x-4y+3\\&=3x^2+(4y-10)x+(y^2-4y+3)\\&=3x^2+(4y-10)x+(y-1)(y-3)\\&=\boldsymbol{(3x+y-1)(x+y-3)}\end{aligned}$$

(4) z에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&x^2-y^2+2yz+2xz+4x+2y+2z+3\\&=(2y+2x+2)z+x^2+4x-y^2+2y+3\\&=2(x+y+1)z+x^2+4x-(y^2-2y-3)\\&=2(x+y+1)z+x^2+4x-(y+1)(y-3)\\&=2(x+y+1)z\\&\quad+\{x+(y+1)\}\{x-(y-3)\}\\&=2(x+y+1)z+(x+y+1)(x-y+3)\\&=\boldsymbol{(x+y+1)(x-y+2z+3)}\end{aligned}$$

답 풀이 참조

다른 풀이 (4) $x^2-y^2+2yz+2xz+4x+2y+2z+3$

$$\begin{aligned}&=(2x+2y+2)z+x^2+4x\\&\quad-(y^2-2y)+3\\&=2(x+y+1)z+(x^2+4x+4)\\&\quad-(y^2-2y+1)\\&=2(x+y+1)z+(x+2)^2-(y-1)^2\\&=2(x+y+1)z+(x+y+1)(x-y+3)\\&=(x+y+1)(x-y+2z+3)\end{aligned}$$

참고 (2) $x^2+(y+1)x-(3y-2)(2y-3)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \searrow\!\!\!\nearrow & 3y-2 & \to & 3y-2 \\ 1 & & -(2y-3) & \to & -2y+3 \\ \cline{5-5} & & & & y+1 \end{array}$$

(3) $3x^2+(4y-10)x+(y-1)(y-3)$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \searrow\!\!\!\nearrow & y-1 & \to & y-1 \\ 1 & & y-3 & \to & 3y-9 \\ \cline{5-5} & & & & 4y-10 \end{array}$$

(4) $x^2+4x-(y+1)(y-3)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \searrow\!\!\!\nearrow & y+1 & \to & y+1 \\ 1 & & -(y-3) & \to & -y+3 \\ \cline{5-5} & & & & 4 \end{array}$$

125

(1) $f(x)=3x^3+7x^2-4$라 하면 $f(-1)=0$이므로 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 갖는다.

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & 7 & 0 & -4 \\ & & -3 & -4 & 4 \\ \hline & 3 & 4 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &3x^3+7x^2-4\\&=(x+1)(3x^2+4x-4)\\&=\boldsymbol{(x+1)(x+2)(3x-2)}\end{aligned}$$

(2) $f(x)=x^3+5x^2-2x-24$라 하면 $f(2)=0$이므로 $f(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 5 & -2 & -24 \\ & & 2 & 14 & 24 \\ \hline & 1 & 7 & 12 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &x^3+5x^2-2x-24\\&=(x-2)(x^2+7x+12)\\&=\boldsymbol{(x-2)(x+3)(x+4)}\end{aligned}$$

(3) $f(x)=x^4-3x^3+3x-1$이라 하면 $f(1)=0$, $f(-1)=0$이므로 $f(x)$는 $x-1$, $x+1$을 인수로 갖는다.

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ & & 1 & -2 & -2 & 1 \\ \hline -1 & 1 & -2 & -2 & 1 & \boxed{0} \\ & & -1 & 3 & -1 & \\ \hline & 1 & -3 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &x^4-3x^3+3x-1\\&=\boldsymbol{(x-1)(x+1)(x^2-3x+1)}\end{aligned}$$

(4) $f(x)=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$라 하면 $f(1)=0$, $f(2)=0$이므로 $f(x)$는 $x-1$, $x-2$를 인수로 갖는다.

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 2 & -7 & -8 & 12 \\ & & 1 & 3 & -4 & -12 \\ \hline 2 & 1 & 3 & -4 & -12 & \boxed{0} \\ & & 2 & 10 & 12 & \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore x^4+2x^3-7x^2-8x+12$

$=(x-1)(x-2)(x^2+5x+6)$

$=\mathbf{(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)}$

답 **풀이 참조**

126

$f(x)=x^3-6x^2-ax-6$이라 하면 $f(x)$가 $x-2$를 인수로 가지므로

$f(2)=8-24-2a-6=0$

$2a=-22 \qquad \therefore a=-11$

$\therefore f(x)=x^3-6x^2+11x-6$

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 2 & -8 & 6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore x^3-6x^2+11x-6$

$=(x-2)(x^2-4x+3)$

$=(x-1)(x-2)(x-3)$

답 $\mathbf{(x-1)(x-2)(x-3)}$

127

(1) $x=98$로 놓으면

$98^3+6\times98^2+12\times98+8$

$=x^3+6x^2+12x+8$

$=(x+2)^3=(98+2)^3$

$=100^3=1000000$

(2) $a=3002$, $b=2003$으로 놓으면

$$\frac{3002^3-2003^3}{3002^2+5005\times2003}$$

$$=\frac{a^3-b^3}{a^2+(a+b)b}$$

$$=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}$$

$=a-b=3002-2003=999$

(3) $10^2-12^2+14^2-16^2+18^2-20^2$

$=(10^2-12^2)+(14^2-16^2)+(18^2-20^2)$

$=(10-12)\times(10+12)+(14-16)\times(14+16)$

$+(18-20)\times(18+20)$

$=-2\times(22+30+38)=-2\times90=-180$

답 (1) **1000000** (2) **999** (3) $\mathbf{-180}$

128

$x^3+y^3-x^2y-xy^2$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y)$

$=(x+y)(x^2-2xy+y^2)$

$=(x+y)(x-y)^2$ …… ㉠

이때 $x=1+\sqrt{3}$, $y=1-\sqrt{3}$이므로

$x+y=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=2$

$x-y=(1+\sqrt{3})-(1-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$

따라서 ㉠에서 구하는 값은

$2\times(2\sqrt{3})^2=24$

답 **24**

129

$a^2+ac-b^2-bc=0$에서

$a^2-b^2+ac-bc=0$

$(a+b)(a-b)+(a-b)c=0$

$(a-b)(a+b+c)=0$

$\therefore a-b=0$ 또는 $a+b+c=0$

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$a+b+c>0$

$\therefore a-b=0$, 즉 $a=b$

따라서 주어진 삼각형은 $a=b$인 이등변삼각형이다.

답 ①

130

$a^3+b^3+c^3-3abc=0$에서

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

$\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore a+b+c=0$ 또는

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$a+b+c>0$

$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

즉 $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$이므로

$a=b=c$

따라서 주어진 삼각형은 정삼각형이고, 둘레의 길이가 18이므로 한 변의 길이는 6이다.

한 변의 길이가 6인 정삼각형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2=9\sqrt{3}$$

답 $9\sqrt{3}$

참고 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이 ⇨ $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

연습 문제

• 본책 73~75쪽

131

전략 식의 모양을 파악하여 가장 적합한 인수분해 공식을 이용한다.

① $8x^3+27y^3=(2x)^3+(3y)^3$
$=(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$

② $9x^2-(y-z)^2=\{3x+(y-z)\}\{3x-(y-z)\}$
$=(3x+y-z)(3x-y+z)$

③ $3(4x-1)^2-12=3\{(4x-1)^2-2^2\}$
$=3\{(4x-1)+2\}\{(4x-1)-2\}$
$=3(4x+1)(4x-3)$

④ $x^4-8x=x(x^3-8)=x(x-2)(x^2+2x+4)$

⑤ $x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3=(x-3y)^3$

답 ④

132

전략 공통부분을 한 문자로 치환하여 인수분해한다.

$x^2-3x=X$로 놓으면

$(x^2-3x)(x^2-3x-1)-6$
$=X(X-1)-6=X^2-X-6$
$=(X-3)(X+2)$
$=(x^2-3x-3)(x^2-3x+2)$
$=(x^2-3x-3)(x-1)(x-2)$

따라서 인수가 아닌 것은 ③이다.

답 ③

133

전략 이차항 $-13x^2$을 분리하여 A^2-B^2의 꼴로 변형한다.

$x^4-13x^2+4=(x^4-4x^2+4)-9x^2$
$=(x^2-2)^2-(3x)^2$
$=(x^2+3x-2)(x^2-3x-2)$

따라서 $a=3$, $b=2$이므로

$a+b=5$

답 5

134

전략 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

주어진 다항식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2-xy-y^2-4x+y+2$
$=2x^2-(y+4)x-(y^2-y-2)$
$=2x^2-(y+4)x-(y+1)(y-2)$
$=\{x-(y+1)\}\{2x+(y-2)\}$
$=(x-y-1)(2x+y-2)$

따라서 $a=1$, $b=-1$, $c=2$, $d=1$이므로

$a+b-c-d=-3$

답 -3

참고 $2x^2-(y+4)x-(y+1)(y-2)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -(y+1) & \longrightarrow & -2y-2 \\ 2 & & y-2 & \longrightarrow & y-2 \\ \hline & & & & -y-4 \end{array}$$

135

전략 다항식을 c에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

주어진 다항식을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2b-ac+ab^2-bc-c+ab$
$=(-a-b-1)c+a^2b+ab^2+ab$
$=-(a+b+1)c+ab(a+b+1)$
$=(a+b+1)(ab-c)$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ③ $ab-c$이다.

답 ③

136

전략 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 0임을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

$2x^4+5x^3+x^2+ax+b$가 $(x+1)^2$을 인수로 가지므로 $(x+1)^2$으로 나누어떨어진다.

이때 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr|r} -1 & 2 & 5 & 1 & a & b \\ & & -2 & -3 & 2 & -a-2 \\ \hline -1 & 2 & 3 & -2 & a+2 & -a+b-2 \\ & & -2 & -1 & 3 & \\ \hline & 2 & 1 & -3 & a+5 & \end{array}$$

나누어떨어지면 나머지가 0이므로

$-a+b-2=0,\ a+5=0$

$\therefore\ a=-5,\ b=-3$

또 $f(x)$를 인수분해하면

$$f(x)=(x+1)^2(2x^2+x-3)$$
$$=(x+1)^2(x-1)(2x+3)$$

답 $\boldsymbol{a=-5,\ b=-3,}$
$\boldsymbol{(x+1)^2(x-1)(2x+3)}$

137

전략 공통부분이 생기도록 두 개씩 짝을 지어 전개한 후 공통부분을 찾아 치환한다.

$(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+k$

$=\{(x-1)(x-7)\}\{(x-3)(x-5)\}+k$

$=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+k$

$x^2-8x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X+7)(X+15)+k$

$=X^2+22X+105+k$ ⋯⋯ ㉠

주어진 식이 x에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해되려면 ㉠이 X에 대한 완전제곱식으로 인수분해되어야 한다.

즉 $X^2+22X+105+k=(X+11)^2$이어야 하므로

$105+k=11^2$

$\therefore\ k=16$

답 **16**

해설 Focus

$x^2-8x+7=X$라 하면

$(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+k$

$=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+k$

$=X(X+8)+k=X^2+8X+k$

이때 $X^2+8X+k=(X+4)^2$이어야 하므로

$k=16$

이다.

이처럼 공통부분을 다르게 놓아도 k의 값은 동일하다.

138

전략 먼저 주어진 이차식을 한 문자에 대한 내림차순으로 정리한다.

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2+kxy-3y^2+x+11y-6$

$=x^2+(ky+1)x-(3y^2-11y+6)$

$=x^2+(ky+1)x-(3y-2)(y-3)$

주어진 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면

$3y-2-(y-3)=ky+1$

$\therefore\ k=2$

답 **2**

참고 $x^2+(ky+1)x-(3y-2)(y-3)$

$$\begin{array}{lcl} 1 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & 3y-2 \ \rightarrow\ 3y-2 \\ 1 & & -(y-3) \ \rightarrow\ -y+3 \\ & & \hline \quad\quad\quad\quad\quad\quad 2y+1 \end{array}$$

139

전략 분자의 식을 전개한 후 한 문자에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해한다.

주어진 식의 분자를 전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리하면

$(b-a)c^2+(c-b)a^2+(a-c)b^2$

$=bc^2-ac^2+a^2c-a^2b+ab^2-b^2c$

$=(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc^2-b^2c$

$=(c-b)a^2-(c+b)(c-b)a+bc(c-b)$

$=(c-b)\{a^2-(c+b)a+bc\}$

$=(c-b)(a-b)(a-c)$

$=(a-b)(b-c)(c-a)$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1$

답 **1**

140

전략 인수분해 공식을 이용하여 주어진 조건에서 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

$a^3+b^3+c^3=3abc$에서

$a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

이때 $a>0,\ b>0,\ c>0$이므로

$a+b+c\neq0$

즉 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$이므로

$\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

따라서 $a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$이므로

$a=b=c$

$$\therefore a+b+c-\frac{ab}{c}-\frac{bc}{a}-\frac{ca}{b}$$
$$=a+a+a-a-a-a$$
$$=0$$

답 **0**

141

전략 인수정리를 이용하여 $f(x)$를 인수분해하고 $f(82)$의 값을 구한다.

$f(x)=x^3+4x^2-28x+32$에서 $f(2)=0$이므로 $f(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 4 & -28 & 32 \\ & & 2 & 12 & -32 \\ \hline & 1 & 6 & -16 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x-2)(x^2+6x-16)$$
$$=(x-2)^2(x+8)$$

즉 $f(82)=80^2\times90=576000$이므로 각 자리의 숫자의 합은 $\quad 5+7+6=18$

답 **18**

142

전략 등식의 좌변을 전개한 후 인수분해하고 주어진 식의 값을 대입한다.

$(a-b+c)(ab+bc-ca)-abc$

$=a^2b+abc-a^2c-ab^2-b^2c+abc$

$\quad +abc+bc^2-ac^2-abc$

$=(b-c)a^2-(b^2-2bc+c^2)a-b^2c+bc^2$

$=(b-c)a^2-(b-c)^2a-bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b-c)a-bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a+c)$

따라서 $(b-c)(a-b)(a+c)=42$이고 $a-b=3$, $b-c=2$이므로

$$2\times3\times(a+c)=42$$
$$\therefore a+c=7$$

답 **7**

143

전략 나무 블록의 부피를 x에 대한 식으로 나타낸 후 인수정리를 이용하여 인수분해한다.

나무 블록의 부피는

$$x\times x\times(x+3)-2\times(1\times1\times1)$$
$$=x^3+3x^2-2$$

$f(x)=x^3+3x^2-2$라 하면 $f(-1)=0$이므로 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 갖는다.

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ & & -1 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\therefore x^3+3x^2-2=(x+1)(x^2+2x-2)$$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=-2$이므로

$$a\times b\times c=-4$$

답 ②

144

전략 주어진 조건을 이용하여 $P(x)$, $Q(x)$를 각각 구한다.

조건 (가), (나)에서

$\{P(x)\}^2+\{Q(x)\}^2$

$=\{P(x)-Q(x)\}^2+2P(x)Q(x)$

$=36+2P(x)Q(x)$

$=2x^4+8x^3+8x^2+18$

이므로

$2P(x)Q(x)=2x^4+8x^3+8x^2-18$

$\therefore P(x)Q(x)=x^4+4x^3+4x^2-9 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(x)=x^4+4x^3+4x^2-9$라 하면 $f(-3)=0$, $f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $x+3$, $x-1$을 인수로 갖는다.

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & 4 & 4 & 0 & -9 \\ & & -3 & -3 & -3 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & \boxed{0} \\ & & 1 & 2 & 3 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$\therefore x^4+4x^3+4x^2-9$$
$$=(x+3)(x-1)(x^2+2x+3)$$

즉 ㉠에서

$P(x)Q(x)=(x+3)(x-1)(x^2+2x+3)$

$\qquad\qquad =(x^2+2x-3)(x^2+2x+3)$

이때 조건 (가)에서 $P(x)-Q(x)=6$이므로

$P(x)=x^2+2x+3$, $Q(x)=x^2+2x-3$

$\therefore P(-1)-Q(2)=2-5=-3$

답 **−3**

145

전략 $x=14$로 놓고 x^2+2x를 치환하여 인수분해한다.

$x=14$로 놓으면

$$(14^2+2\times14)^2-18\times(14^2+2\times14)+45$$
$$=(x^2+2x)^2-18(x^2+2x)+45$$

$x^2+2x=X$로 놓으면

$$(x^2+2x)^2-18(x^2+2x)+45$$
$$=X^2-18X+45$$
$$=(X-3)(X-15)$$
$$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-15)$$
$$=(x+3)(x-1)(x+5)(x-3)$$
$$=17\times13\times19\times11$$
$$\therefore a+b+c+d=60$$

답 ③

146

전략 다항식 $P(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $P(\alpha)=0$임을 이용하여 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

$$P(x)=x^3-(a+b)x^2-(a^2+b^2)x$$
$$+a^3+b^3+ab(a+b)$$

라 하면 $P(x)$가 $x-c$로 나누어떨어지므로

$$P(c)=0$$
$$\therefore c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c$$
$$+a^3+b^3+ab(a+b)$$
$$=0$$

이 식의 좌변을 인수분해하면

$$c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c+a^3+b^3+ab(a+b)$$
$$=c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c+a^3+b^3+a^2b+ab^2$$
$$=c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c$$
$$+a^2(a+b)+b^2(a+b)$$
$$=c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2)c+(a+b)(a^2+b^2)$$
$$=-c^2(a+b-c)+(a^2+b^2)(a+b-c)$$
$$=(a+b-c)(a^2+b^2-c^2)=0$$
$$\therefore a+b-c=0 \text{ 또는 } a^2+b^2-c^2=0$$

이때 a, b, c는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$$a+b>c \qquad \therefore a+b-c\neq0$$
$$\therefore a^2+b^2-c^2=0,\ \text{즉 } a^2+b^2=c^2$$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

답 **빗변의 길이가 c인 직각삼각형**

1 복소수

01 복소수

본책 78~81쪽

147

(2) $5i=0+5i$이므로 $5i$의 실수부분은 0, 허수부분은 5이다.

(3) $\sqrt{3}-1=(\sqrt{3}-1)+0\times i$이므로 $\sqrt{3}-1$의 실수부분은 $\sqrt{3}-1$, 허수부분은 0이다.

(5) $\frac{1+i}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i$이므로 $\frac{1+i}{3}$의 실수부분은 $\frac{1}{3}$, 허수부분은 $\frac{1}{3}$이다.

답 (1) **실수부분: 2, 허수부분: -3**
(2) **실수부분: 0, 허수부분: 5**
(3) **실수부분: $\sqrt{3}-1$, 허수부분: 0**
(4) **실수부분: 4, 허수부분: 1**
(5) **실수부분: $\frac{1}{3}$, 허수부분: $\frac{1}{3}$**

148

(1) $x=2$, $2y=-4$이므로

$$x=2,\ y=-2$$

(2) $2x=0$, $y+3=5$이므로

$$x=0,\ y=2$$

(3) $x-1=3$, $2y-1=-1$이므로

$$x=4,\ y=0$$

(4) $2x+1=9$, $y-3=0$이므로

$$x=4,\ y=3$$

(5) $x+y=-1$, $2x-3y=8$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=1,\ y=-2$$

답 (1) $x=2,\ y=-2$ (2) $x=0,\ y=2$
(3) $x=4,\ y=0$ (4) $x=4,\ y=3$
(5) $x=1,\ y=-2$

149

답 (1) $3+4i$ (2) $5i$ (3) $-3-\sqrt{2}i$
(4) $1+\sqrt{5}$ (5) $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}i$

150

① $i^2=-1<0$

② $7=7+0\times i$이므로 7의 허수부분은 0이다.

③ $-4i=0-4i$는 실수부분이 0, 허수부분이 -4이므로 순허수이다.

④ $1+i$는 실수부분이 1, 허수부분이 1이므로 순허수가 아닌 허수이다.

⑤ $a+(b-3)i$에서 $a=i$, $b=3$이면

$$a+(b-3)i=i$$

즉 $b=3$이어도 실수가 아닐 수 있다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

151

순허수는 복소수 $a+bi$ (a, b는 실수)에서 $a=0$, $b\neq0$인 꼴이므로 $-9i$, $\sqrt{2}i$이다.

답 $\boldsymbol{-9i,\ \sqrt{2}i}$

02 복소수의 연산

● 본책 82~91쪽

152

(1) $3i+(1-4i)=(0+1)+(3-4)i=1-i$

(2) $(5-3i)+(2-7i)=(5+2)+(-3-7)i$
$=7-10i$

(3) $(4+3i)-(2-5i)=(4-2)+(3+5)i=2+8i$

(4) $(-9-3i)-(5-2i)=(-9-5)+(-3+2)i$
$=-14-i$

답 (1) $\boldsymbol{1-i}$ (2) $\boldsymbol{7-10i}$
(3) $\boldsymbol{2+8i}$ (4) $\boldsymbol{-14-i}$

153

(1) $(1-i)(2+3i)=2+3i-2i-3i^2$
$=2+3i-2i+3=5+i$

(2) $(-2+3i)(5-6i)=-10+12i+15i-18i^2$
$=-10+12i+15i+18$
$=8+27i$

(3) $(\sqrt{3}+2i)(\sqrt{3}-2i)=(\sqrt{3})^2-(2i)^2$
$=3-4i^2=3+4=7$

(4) $(1+2i)^2=1+4i+4i^2$
$=1+4i-4=-3+4i$

답 (1) $\boldsymbol{5+i}$ (2) $\boldsymbol{8+27i}$
(3) $\boldsymbol{7}$ (4) $\boldsymbol{-3+4i}$

154

(1) $\dfrac{1}{2+3i}=\dfrac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{2-3i}{4-9i^2}$
$=\dfrac{2-3i}{13}=\dfrac{2}{13}-\dfrac{3}{13}i$

(2) $\dfrac{1}{4-5i}=\dfrac{4+5i}{(4-5i)(4+5i)}=\dfrac{4+5i}{16-25i^2}$
$=\dfrac{4+5i}{41}=\dfrac{4}{41}+\dfrac{5}{41}i$

(3) $\dfrac{1+i}{2-i}=\dfrac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{2+i+2i+i^2}{4-i^2}$
$=\dfrac{1+3i}{5}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i$

(4) $\dfrac{8i}{1+4i}=\dfrac{8i(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)}=\dfrac{8i-32i^2}{1-16i^2}$
$=\dfrac{32+8i}{17}=\dfrac{32}{17}+\dfrac{8}{17}i$

답 (1) $\boldsymbol{\dfrac{2}{13}-\dfrac{3}{13}i}$ (2) $\boldsymbol{\dfrac{4}{41}+\dfrac{5}{41}i}$
(3) $\boldsymbol{\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i}$ (4) $\boldsymbol{\dfrac{32}{17}+\dfrac{8}{17}i}$

155

(1) $(7+5i)+\overline{6-2i}=(7+5i)+(6+2i)$
$=13+7i$

(2) $(2-i)^2-i(2+i)=(4-4i+i^2)-(2i+i^2)$
$=4-4i-1-2i+1$
$=4-6i$

(3) $\dfrac{3}{1-i}-\dfrac{(1-i)^2}{1+i}=\dfrac{3}{1-i}-\dfrac{-2i}{1+i}$
$=\dfrac{3(1+i)+2i(1-i)}{(1-i)(1+i)}$
$=\dfrac{3+3i+2i-2i^2}{1-i^2}$
$=\dfrac{5+5i}{2}=\dfrac{5}{2}+\dfrac{5}{2}i$

(4) $\frac{1-3i}{2-i}+(1+3i)^2$

$=\frac{(1-3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}+(1+6i+9i^2)$

$=\frac{2+i-6i-3i^2}{4-i^2}+1+6i-9$

$=\frac{5-5i}{5}-8+6i$

$=1-i-8+6i=-7+5i$

답 (1) $\mathbf{13+7i}$ (2) $\mathbf{4-6i}$

(3) $\mathbf{\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i}$ (4) $\mathbf{-7+5i}$

156

$(1+i)x^2+3xi-4+2i=(x^2-4)+(x^2+3x+2)i$

이 복소수가 실수가 되려면

$x^2+3x+2=0,\quad (x+2)(x+1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$

따라서 모든 실수 x의 값의 합은

$-2+(-1)=-3$ 답 $\mathbf{-3}$

157

$z=2(k+1)-k(1-i)^2$

$=2(k+1)-k(-2i)$

$=2(k+1)+2ki$ ...... ㉠

z가 순허수이므로

$2(k+1)=0,\ 2k\neq0$

$2(k+1)=0$에서 $k=-1$

$2k\neq0$에서 $k\neq0$

따라서 $k=-1$이므로 ㉠에 이것을 대입하면

$z=-2i$ 답 $\mathbf{-2i}$

158

$z=(1+i)a^2-(1+3i)a+2(i-1)$

$=(a^2-a-2)+(a^2-3a+2)i$

이때 z^2이 음의 실수가 되려면 z는 순허수이어야 하므로

$a^2-a-2=0,\ a^2-3a+2\neq0$

(i) $a^2-a-2=0$에서

$(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

(ii) $a^2-3a+2\neq0$에서

$(a-1)(a-2)\neq0$

$\therefore a\neq1,\ a\neq2$

(i), (ii)에서 $a=-1$ 답 $\mathbf{-1}$

159

(1) $(3+xi)(2-i)=13+yi$에서

$6-3i+2xi+x=13+yi$

$\therefore (6+x)+(2x-3)i=13+yi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$6+x=13,\ 2x-3=y$

$\therefore x=7,\ y=11$

(2) $\frac{x}{1+3i}+\frac{y}{1-3i}=\frac{9}{2+i}$에서

$\frac{x(1-3i)+y(1+3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{9(2-i)}{(2+i)(2-i)}$

$\frac{(x+y)+(-3x+3y)i}{10}=\frac{18-9i}{5}$

$\therefore (x+y)+(-3x+3y)i=36-18i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=36,\ -3x+3y=-18$

두 식을 연립하여 풀면

$x=21,\ y=15$

(3) $\overline{(4+i)x+(2-3i)y}=2-3i$에서

$\overline{(4x+2y)+(x-3y)i}=2-3i$

$\therefore (4x+2y)-(x-3y)i=2-3i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$4x+2y=2,\ x-3y=3$

두 식을 연립하여 풀면

$x=\frac{6}{7},\ y=-\frac{5}{7}$

답 (1) $\mathbf{x=7,\ y=11}$ (2) $\mathbf{x=21,\ y=15}$

(3) $\mathbf{x=\frac{6}{7},\ y=-\frac{5}{7}}$

160

$z=\frac{3+\sqrt{7}i}{2}$에서

$2z=3+\sqrt{7}i\qquad \therefore 2z-3=\sqrt{7}i$

양변을 제곱하면

$4z^2-12z+9=-7,\qquad 4z^2-12z+16=0$

$\therefore z^2-3z+4=0$

$\therefore z^3-2z^2+z-2$

$=z(z^2-3z+4)+z^2-3z-2$

$=z(z^2-3z+4)+(z^2-3z+4)-6$

$=-6$

답 **−6**

161

$z=1-i$에서 $\quad z-1=-i$

양변을 제곱하면 $\quad z^2-2z+1=-1$

$\therefore z^2-2z+2=0$

$\therefore z^4-2z^3+3z^2-2z+1$

$=z^2(z^2-2z+2)+z^2-2z+1$

$=z^2(z^2-2z+2)+(z^2-2z+2)-1$

$=-1$

답 **−1**

162

$$x+y=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$$

$$xy=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=\frac{4}{4}=1$$

$$\therefore \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$$

$$=\frac{1^2-2\times1}{1}=-1$$

답 **−1**

다른 풀이 $\displaystyle \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}+\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$

$$=\frac{(1-\sqrt{3}i)^2+(1+\sqrt{3}i)^2}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$$

$$=\frac{1-2\sqrt{3}i-3+1+2\sqrt{3}i-3}{4}$$

$$=-1$$

163

$\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}=\alpha(\overline{\alpha}-\overline{\beta})-\beta(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$

$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$

$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})$

$=(4+\sqrt{5}i)(4-\sqrt{5}i)$

$=16+5=21$

답 **21**

164

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$z+\overline{z}=6$에서 $\quad (a+bi)+(a-bi)=6$

$2a=6 \qquad \therefore a=3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$z\overline{z}=25$에서 $\quad (a+bi)(a-bi)=25$

$\therefore a^2+b^2=25 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$9+b^2=25,\qquad b^2=16$

$\therefore b=\pm4$

따라서 복소수 z는 $3+4i$ 또는 $3-4i$이다.

답 $\mathbf{3+4i,\ 3-4i}$

165

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$iz+(1-i)\overline{z}=2i$에서

$i(a+bi)+(1-i)(a-bi)=2i$

$ai-b+a-bi-ai-b=2i$

$\therefore (a-2b)-bi=2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-2b=0,\ -b=2$

$\therefore a=-4,\ b=-2$

따라서 $z=-4-2i$, $\overline{z}=-4+2i$이므로

$z+\overline{z}=(-4-2i)+(-4+2i)=-8$

답 **−8**

166

ㄱ. z^2-z가 실수이므로 $\overline{z^2-z}$도 실수이다. (참)

ㄴ. $z^2-z=(a+bi)^2-(a+bi)$

$=a^2+2abi-b^2-a-bi$

$=(a^2-a-b^2)+(2a-1)bi$

이때 z^2-z가 실수이므로

$(2a-1)b=0 \qquad \therefore a=\dfrac{1}{2}\ (\because b\neq0)$

즉 $z=\dfrac{1}{2}+bi$이므로

$\overline{z}=\dfrac{1}{2}-bi$

$\therefore z+\overline{z}=\left(\dfrac{1}{2}+bi\right)+\left(\dfrac{1}{2}-bi\right)=1$ (참)

ㄷ. $z\overline{z}=\left(\frac{1}{2}+bi\right)\left(\frac{1}{2}-bi\right)=\frac{1}{4}+b^2$

이때 b는 0이 아닌 실수이므로 $b^2>0$

$\frac{1}{4}+b^2>\frac{1}{4}$ $\therefore z\overline{z}>\frac{1}{4}$ (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

연습 문제

본책 92~94쪽

167

전략 주어진 복소수의 분모를 실수화하여 실수부분과 허수부분을 구한다.

$$\frac{a+3i}{2-i}=\frac{(a+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{2a+ai+6i-3}{5}$$
$$=\frac{2a-3}{5}+\frac{a+6}{5}i$$

따라서 복소수 $\frac{a+3i}{2-i}$의 실수부분은 $\frac{2a-3}{5}$, 허수부분은 $\frac{a+6}{5}$이므로

$\frac{2a-3}{5}+\frac{a+6}{5}=3,$ $3a+3=15$

$\therefore a=4$

답 ④

168

전략 복소수 z를 (실수부분)+(허수부분)i의 꼴로 정리한다.

$z=i(x-2i)^2=i(x^2-4xi-4)$

$=4x+(x^2-4)i$ ⋯⋯ ㉠

㉠이 실수가 되려면

$x^2-4=0,$ $x^2=4$ $\therefore x=\pm2$

이때 양수 x의 값이 a이므로 $a=2$

㉠에 $x=2$를 대입하면

$z=8$ $\therefore b=8$

$\therefore b-a=6$

답 **6**

169

전략 $\overline{a+bi}=a-bi$임을 이용한다.

$(2+i)\overline{(x-yi)}=5(1-i)$에서

$(2+i)(x+yi)=5(1-i)$

$2x+2yi+xi-y=5-5i$

$\therefore (2x-y)+(x+2y)i=5-5i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2x-y=5,\ x+2y=-5$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=-3$

$\therefore x+y=-2$

답 ①

170

전략 $x+y$, xy의 값을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

$$x=\frac{7}{2-\sqrt{3}i}=\frac{7(2+\sqrt{3}i)}{(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)}=2+\sqrt{3}i$$

$$y=\frac{7}{2+\sqrt{3}i}=\frac{7(2-\sqrt{3}i)}{(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)}=2-\sqrt{3}i$$

따라서 $x+y=(2+\sqrt{3}i)+(2-\sqrt{3}i)=4$,

$xy=(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)=7$이므로

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{x^3+y^3}{xy}$$
$$=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}$$
$$=\frac{4^3-3\times7\times4}{7}=-\frac{20}{7}$$

답 $-\frac{20}{7}$

171

전략 $\alpha+\beta$, $\overline{\alpha+\beta}$의 값을 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

$\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=\overline{\alpha}(\alpha+\beta)+\overline{\beta}(\alpha+\beta)$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$

$=(2-i)(2+i)=5$

답 **5**

172

전략 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓고 주어진 식에 대입하여 a, b의 값을 구한다.

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$z-\overline{z}=2i$에서 $(a+bi)-(a-bi)=2i$

$2bi=2i$ $\therefore b=1$ ⋯⋯ ㉠

또 $z\overline{z}=17$에서 $(a+bi)(a-bi)=17$

$\therefore a^2+b^2=17$ ⋯⋯ ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면 $a^2=16$ $\therefore a=\pm4$

따라서 복소수 z는 $4+i$ 또는 $-4+i$이다.

답 $\boldsymbol{4+i,\ -4+i}$

173

전략 $\overline{a+bi}=a-bi$임을 이용하여 z를 구한다.

$\overline{z-3i}=5+i$이므로 $\quad z-3i=\overline{5+i}$

즉 $z-3i=5-i$이므로 $\quad z=5+2i$

$\therefore z\overline{z}=(5+2i)(5-2i)=29$ **답 29**

다른 풀이 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$z-3i=a+(b-3)i$

따라서 $z-3i$의 켤레복소수는 $a-(b-3)i$이므로

$a=5,\ -(b-3)=1 \quad \therefore a=5,\ b=2$

즉 $z=5+2i$이므로 $\quad z\overline{z}=(5+2i)(5-2i)=29$

174

전략 분모의 켤레복소수를 분모, 분자에 각각 곱하여 분모를 실수화하고, 주어진 식을 간단히 나타낸다.

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$$

이므로 주어진 식은

$$i+\frac{2-i}{x+yi}=1-i,\quad \frac{2-i}{x+yi}=1-2i$$

$$\therefore x+yi=\frac{2-i}{1-2i}=\frac{(2-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$$

$$=\frac{4+3i}{5}=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$$

따라서 $x=\frac{4}{5}$, $y=\frac{3}{5}$이므로

$x-y=\frac{1}{5}$ **답** $\frac{1}{5}$

175

전략 주어진 등식을 우변에 순허수만 남도록 변형한 후 양변을 제곱하여 식의 값이 0인 이차식을 만든다.

$x=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $\quad 2x+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면 $\quad 4x^2+4x+1=-3$

$4x^2+4x+4=0 \quad \therefore x^2+x+1=0$

$$\begin{aligned}\therefore x^4+7x^3-x-3 &=x^2(x^2+x+1)+6x^3-x^2-x-3\\ &=6x^3-x^2-x-3\\ &=6x(x^2+x+1)-7x^2-7x-3\\ &=-7x^2-7x-3\\ &=-7(x^2+x+1)+4\\ &=4\end{aligned}$$

답 4

다른 풀이 $x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x^3-1=0 \quad \therefore x^3=1$

$$\begin{aligned}\therefore x^4+7x^3-x-3 &=x^3\times x+7x^3-x-3\\ &=x+7-x-3\\ &=4\end{aligned}$$

176

전략 $\overline{z_1}-\overline{z_2}=\overline{z_1-z_2}$임을 이용한다.

$z+w=3+6i$ ...... ㉠

$\overline{z}-\overline{w}=\overline{z-w}=1-4i$이므로

$z-w=1+4i$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면 $\quad 2z=4+10i$

$\therefore z=2+5i$

㉠−㉡을 하면 $\quad 2w=2+2i$

$\therefore w=1+i$

$\therefore z\overline{w}=(2+5i)(1-i)$

$=7+3i$

따라서 $p=7$, $q=3$이므로

$p+q=10$ **답 10**

다른 풀이 실수 a, b, c, d에 대하여 $z=a+bi$, $w=c+di$라 하면 $\overline{z}=a-bi$, $\overline{w}=c-di$이므로

$$\begin{aligned}z+w&=(a+bi)+(c+di)\\ &=(a+c)+(b+d)i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{z}-\overline{w}&=(a-bi)-(c-di)\\ &=(a-c)+(-b+d)i\end{aligned}$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+c=3$ ...... ㉠

$b+d=6$ ...... ㉡

$a-c=1$ ...... ㉢

$-b+d=-4$ ...... ㉣

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$a=2,\ c=1$

㉡, ㉣을 연립하여 풀면

$b=5,\ d=1$

즉 $z=2+5i$, $w=1+i$이므로

$z\overline{w}=(2+5i)(1-i)=7+3i$

따라서 $p=7$, $q=3$이므로

$p+q=10$

177

전략 z를 $a+bi$(a, b는 실수)의 꼴로 정리한 후 $z\bar{z}=0$에 대입한다.

$z=(1+i)x+(1-i)y-3+5i$
$\quad=(x+y-3)+(x-y+5)i$

따라서 $\bar{z}=(x+y-3)-(x-y+5)i$이므로

$z\bar{z}=0$에서

$$\{(x+y-3)+(x-y+5)i\}\times\{(x+y-3)-(x-y+5)i\}=0$$

$$\therefore (x+y-3)^2+(x-y+5)^2=0$$

이때 $x+y-3$, $x-y+5$는 실수이므로

$$x+y-3=0,\ x-y+5=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=-1,\ y=4$$

$$\therefore x^2+y^2=(-1)^2+4^2=17$$

답 17

178

전략 주어진 등식을 a에 대한 식으로 나타낸 후 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

$z=a+2i$에서 $\bar{z}=a-2i$이므로 $\bar{z}=\dfrac{z^2}{4i}$에서

$$a-2i=\frac{(a+2i)^2}{4i}$$

$$4i(a-2i)=(a^2-4)+4ai$$

$$\therefore 8+4ai=(a^2-4)+4ai$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2-4=8$$

$$\therefore a^2=12$$

답 12

179

전략 z^2이 실수이려면 z가 실수이거나 순허수이어야 함을 이용한다.

$z=a(2+i)-1+2i=(2a-1)+(a+2)i$

z^2이 실수가 되려면 z는 실수 또는 순허수이어야 하므로

$$2a-1=0 \text{ 또는 } a+2=0$$

$$\therefore a=\frac{1}{2} \text{ 또는 } a=-2$$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$$\frac{1}{2}\times(-2)=-1$$

답 -1

다른 풀이 $z=(2a-1)+(a+2)i$에서

$$z^2=(2a-1)^2+2(2a-1)(a+2)i-(a+2)^2$$

z^2이 실수가 되려면

$$2(2a-1)(a+2)=0$$

$$\therefore a=\frac{1}{2} \text{ 또는 } a=-2$$

해설 Focus

$z=a+bi$(a, b는 실수)에서 $z^2=(a^2-b^2)+2abi$이므로 z^2이 실수가 되려면

$2ab=0 \qquad \therefore a=0$ 또는 $b=0$

이때 $a=0$, $b\neq0$이면 $z=bi$이므로 z는 순허수이고, $b=0$이면 $z=a$이므로 z는 실수이다.

180

전략 $z^2=-16$을 만족시키는 z의 값은 $\pm4i$임을 이용하여 z를 구한다.

$z=a(3-i)-b(1+i)$
$\quad=(3a-b)+(-a-b)i$

$z^2=-16$에서 $\qquad z=4i$ 또는 $z=-4i$

(i) $z=4i$일 때,

$(3a-b)+(-a-b)i=4i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$3a-b=0,\ -a-b=4$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-1,\ b=-3$$

(ii) $z=-4i$일 때,

$(3a-b)+(-a-b)i=-4i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$3a-b=0,\ -a-b=-4$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=1,\ b=3$$

(i), (ii)에서 $\qquad a^2+b^2=10$

답 10

181

전략 주어진 등식을 우변에 순허수만 남도록 변형한 후 양변을 제곱하여 x에 대한 방정식을 만든다.

$x^2=-3+2i$에서 $\qquad x^2+3=2i$

양변을 제곱하면 $\qquad x^4+6x^2+9=-4$

$$\therefore x^4+6x^2+13=0$$

양변을 x로 나누면 $\quad x^3+6x+\dfrac{13}{x}=0$

$$\therefore x^4+x^3+8x^2+6x+\frac{13}{x}$$
$$=x^4+8x^2+\left(x^3+6x+\frac{13}{x}\right)$$
$$=x^4+8x^2=(x^4+6x^2+13)+2x^2-13$$
$$=2x^2-13=2(-3+2i)-13$$
$$=-19+4i$$

답 $\mathbf{-19+4i}$

182

전략 켤레복소수의 성질을 이용한다.

$\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}=2$에서 $\quad \overline{\alpha}=\dfrac{2}{\alpha},\ \overline{\beta}=\dfrac{2}{\beta}$

$$\therefore \overline{\alpha}+\overline{\beta}=\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}$$
$$=\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{4i}{\alpha\beta} \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편 켤레복소수의 성질에 의하여

$$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\overline{\alpha+\beta}=\overline{2i}=-2i \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\quad \dfrac{4i}{\alpha\beta}=-2i$

$$\therefore \alpha\beta=\frac{4i}{-2i}=-2$$

답 $\mathbf{-2}$

183

전략 $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓고 주어진 식에 대입하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$\dfrac{z+2\overline{z}}{z\overline{z}}=3+2i$에서

$$\frac{(a+bi)+2(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=3+2i$$
$$\frac{3a-bi}{a^2+b^2}=3+2i$$
$$\therefore \frac{3a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i=3+2i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\frac{3a}{a^2+b^2}=3,\ -\frac{b}{a^2+b^2}=2$$

$\dfrac{3a}{a^2+b^2}=3$에서 $\quad 3a=3(a^2+b^2)$

$$\therefore a^2+b^2=a \quad \cdots\cdots ㉠$$

$-\dfrac{b}{a^2+b^2}=2$에서 $\quad -b=2(a^2+b^2)$

$$\therefore a^2+b^2=-\frac{b}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\quad a=-\dfrac{b}{2}$

㉡에 이것을 대입하면

$$\left(-\frac{b}{2}\right)^2+b^2=-\frac{b}{2},\quad \frac{5}{4}b^2+\frac{b}{2}=0$$
$$5b^2+2b=0,\quad b(5b+2)=0$$
$$\therefore b=0 \text{ 또는 } b=-\frac{2}{5}$$

이때 $b=0$이면 $a=0$이고 $z=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $b=-\dfrac{2}{5}$, $a=-\dfrac{b}{2}=\dfrac{1}{5}$이므로

$$z=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$$

답 $\mathbf{\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i}$

184

전략 켤레복소수의 성질을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $z_1=a+bi$에서 $\overline{z_1}=a-bi$이므로

$z_1\overline{z_1}=10$에서 $\quad (a+bi)(a-bi)=10$

$\therefore\ a^2+b^2=10 \quad \cdots\cdots ㉠$ (참)

ㄴ. a, b가 자연수이므로 ㉠에서

$a=1,\ b=3$ 또는 $a=3,\ b=1 \quad \cdots\cdots ㉡$

한편 $z_2=c+di$에서 $\overline{z_2}=c-di$이므로

$z_1+\overline{z_2}=3$에서

$(a+bi)+(c-di)=3$

$\therefore\ (a+c)+(b-d)i=3$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+c=3,\ b-d=0$

$a+c=3$에서 $a<3$이어야 하므로 ㉡에서

$a=1,\ c=2$

$b-d=0$에서 $\quad d=b=3$

$\therefore\ c+d=2+3=5$ (참)

ㄷ. $z_2\overline{z_2}=(c+di)(c-di)=c^2+d^2 \quad \cdots\cdots ㉢$

$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)$

$=(a+c)+(b+d)i$

이므로

$\overline{z_1+z_2}=(a+c)-(b+d)i$

즉 $(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=41$에서

$\{(a+c)+(b+d)i\}\{(a+c)-(b+d)i\}$
$=41$

$\therefore (a+c)^2+(b+d)^2=41$

$a+c=2$이면 $(b+d)^2=37$이므로 자연수 $b+d$는 존재하지 않는다.

$a+c=3$이면 $(b+d)^2=32$이므로 자연수 $b+d$는 존재하지 않는다.

$a+c=4$이면 $(b+d)^2=25$이므로 $\quad b+d=5$

$a+c=5$이면 $(b+d)^2=16$이므로 $\quad b+d=4$

$a+c=6$이면 $(b+d)^2=5$이므로 자연수 $b+d$는 존재하지 않는다.

$a+c\geq7$이면 $(a+c)^2\geq49$이므로 자연수 $b+d$는 존재하지 않는다.

(i) $a+c=4$, $b+d=5$일 때

ⓐ ㉡에서 $a=1$, $b=3$이면 $c=3$, $d=2$이므로 ㉢에서

$z_2\overline{z_2}=c^2+d^2=3^2+2^2=13$

ⓑ ㉡에서 $a=3$, $b=1$이면 $c=1$, $d=4$이므로 ㉢에서

$z_2\overline{z_2}=c^2+d^2=1^2+4^2=17$

(ii) $a+c=5$, $b+d=4$일 때

ⓐ ㉡에서 $a=1$, $b=3$이면 $c=4$, $d=1$이므로 ㉢에서

$z_2\overline{z_2}=c^2+d^2=4^2+1^2=17$

ⓑ ㉡에서 $a=3$, $b=1$이면 $c=2$, $d=3$이므로 ㉢에서

$z_2\overline{z_2}=c^2+d^2=2^2+3^2=13$

(i), (ii)에서 $z_2\overline{z_2}=13$ 또는 $z_2\overline{z_2}=17$이므로 $z_2\overline{z_2}$의 최댓값은 17이다. (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. **답** ⑤

03 i의 거듭제곱, 음수의 제곱근

● 본책 95~99쪽

185

(1) $i^6=i^4\times i^2=i^2=-1$

(2) $(-i)^{11}=-i^{11}=-(i^4)^2\times i^3=-i^3=-(-i)=i$

(3) $i^{100}+(-i)^{200}=i^{100}+i^{200}=(i^4)^{25}+(i^4)^{50}$
$=1+1=2$

(4) $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=\frac{1}{i}+\frac{1}{-1}+\frac{1}{-i}+\frac{1}{1}$
$=\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1=0$

(5) $(1-i)^2=-2i$이므로

$(1-i)^4=\{(1-i)^2\}^2=(-2i)^2$
$=(-2)^2\times i^2=-4$

(6) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2i}{2}=i$이므로

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^6=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^3=i^3=-i$

답 (1) $\mathbf{-1}$ (2) $\boldsymbol{i}$ (3) $\mathbf{2}$ (4) $\mathbf{0}$ (5) $\mathbf{-4}$ (6) $\boldsymbol{-i}$

186

(1) $\pm\sqrt{-5}=\pm\sqrt{5}i$

(2) $\pm\sqrt{-10}=\pm\sqrt{10}i$

(3) $\pm\sqrt{-20}=\pm\sqrt{20}i=\pm2\sqrt{5}i$

(4) $\pm\sqrt{-\frac{1}{36}}=\pm\sqrt{\frac{1}{36}}i=\pm\frac{1}{6}i$

답 (1) $\boldsymbol{\pm\sqrt{5}i}$ (2) $\boldsymbol{\pm\sqrt{10}i}$ (3) $\boldsymbol{\pm2\sqrt{5}i}$ (4) $\boldsymbol{\pm\frac{1}{6}i}$

187

(1) $-5<0$, $-9<0$이므로

$\sqrt{-5}\sqrt{-9}=-\sqrt{(-5)\times(-9)}$
$=-\sqrt{45}=-3\sqrt{5}$

(2) $\sqrt{3}\sqrt{-6}=\sqrt{3}\sqrt{6}i=\sqrt{18}i=3\sqrt{2}i$

(3) $12>0$, $-4<0$이므로

$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{-4}}=-\sqrt{\frac{12}{-4}}=-\sqrt{-3}=-\sqrt{3}i$

(4) $\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-2}}=\frac{\sqrt{4}i}{\sqrt{2}i}=\sqrt{2}$

답 (1) $\boldsymbol{-3\sqrt{5}}$ (2) $\boldsymbol{3\sqrt{2}i}$ (3) $\boldsymbol{-\sqrt{3}i}$ (4) $\boldsymbol{\sqrt{2}}$

다른 풀이 (1) $\sqrt{-5}\sqrt{-9}=\sqrt{5}i\times\sqrt{9}i=-\sqrt{45}$
$=-3\sqrt{5}$

(3) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{-4}}=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{4}i}=\frac{2\sqrt{3}}{2i}=\frac{\sqrt{3}}{i}=-\sqrt{3}i$

188

(1) $i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$이므로

$$\begin{aligned}&1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{144}\\&=1+(i+i^2+i^3+i^4)\\&\quad+i^4(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots\\&\quad+i^{140}(i+i^2+i^3+i^4)\\&=1\end{aligned}$$

(2) $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1=0$이므로

$$\begin{aligned}&\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\cdots+\frac{1}{i^{2023}}\\&=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)\\&\quad+\frac{1}{i^4}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\cdots\\&\quad+\frac{1}{i^{2020}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}\right)\\&=\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}=-i-1+i=-1\end{aligned}$$

답 (1) **1** (2) **−1**

189

$$\begin{aligned}&i+2i^2+3i^3+4i^4+\cdots+10i^{10}\\&=i-2-3i+4+5i-6-7i+8+9i-10\\&=(-2+4-6+8-10)+(1-3+5-7+9)i\\&=-6+5i\end{aligned}$$

답 $\boldsymbol{-6+5i}$

190

$$\begin{aligned}&\frac{1}{i}+\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}+\frac{4}{i^4}+\cdots+\frac{50}{i^{50}}\\&=\left(\frac{1}{i}+\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}+\frac{4}{i^4}\right)+\left(\frac{5}{i^5}+\frac{6}{i^6}+\frac{7}{i^7}+\frac{8}{i^8}\right)+\cdots\\&\quad+\left(\frac{45}{i^{45}}+\frac{46}{i^{46}}+\frac{47}{i^{47}}+\frac{48}{i^{48}}\right)+\frac{49}{i^{49}}+\frac{50}{i^{50}}\\&=\left(\frac{1}{i}+\frac{2}{-1}+\frac{3}{-i}+\frac{4}{1}\right)\\&\quad+\left(\frac{5}{i}+\frac{6}{-1}+\frac{7}{-i}+\frac{8}{1}\right)+\cdots\\&\quad+\left(\frac{45}{i}+\frac{46}{-1}+\frac{47}{-i}+\frac{48}{1}\right)+\frac{49}{i}+\frac{50}{-1}\\&=(-i-2+3i+4)+(-5i-6+7i+8)+\cdots\\&\quad+(-45i-46+47i+48)-49i-50\\&=(2+2i)\times 12-49i-50\\&=-26-25i\end{aligned}$$

따라서 $a=-26$, $b=-25$이므로

$$b-a=-25-(-26)=1$$

답 **1**

191

(1) $(1-i)^2=-2i$이므로

$$\begin{aligned}(1-i)^{56}&=\{(1-i)^2\}^{28}=(-2i)^{28}\\&=(-2)^{28}\times i^{28}=2^{28}\times(i^4)^7\\&=2^{28}\end{aligned}$$

(2) $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2026}&=(-i)^{2026}=i^{2026}\\&=(i^4)^{506}\times i^2=i^2\\&=-1\end{aligned}$$

(3) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}i}\right)^2=\frac{2i}{-2}=-i$, $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}i}\right)^2=\frac{-2i}{-2}=i$이므로

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}i}\right)^{100}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}i}\right)^{100}\\&=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}i}\right)^2\right\}^{50}+\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}i}\right)^2\right\}^{50}\\&=(-i)^{50}+i^{50}=i^{50}+i^{50}\\&=(i^4)^{12}\times i^2+(i^4)^{12}\times i^2\\&=-1+(-1)=-2\end{aligned}$$

답 (1) $\boldsymbol{2^{28}}$ (2) **−1** (3) **−2**

192

$z^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2=\frac{2}{2i}=\frac{1}{i}=-i$이므로

$$\begin{aligned}&z^2+z^4+z^6+z^8+z^{10}\\&=z^2+(z^2)^2+(z^2)^3+(z^2)^4+(z^2)^5\\&=-i+(-i)^2+(-i)^3+(-i)^4+(-i)^5\\&=-i+i^2-i^3+i^4-i^5\\&=-i-1+i+1-i=-i\end{aligned}$$

답 $\boldsymbol{-i}$

193

$$\frac{i+1}{i-1}=\frac{(i+1)(-i-1)}{(i-1)(-i-1)}=\frac{-(i+1)^2}{2}=\frac{-2i}{2}=-i$$

즉 $\left(\frac{i+1}{i-1}\right)^n=(-i)^n$이므로

$$\left(\frac{i+1}{i-1}\right)^2=(-i)^2=i^2=-1$$

$$\left(\frac{i+1}{i-1}\right)^3=(-i)^3=-i^3=i$$

따라서 $\left(\frac{i+1}{i-1}\right)^n=i$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 3이다.

답 **3**

194

(1) $\sqrt{-4}\sqrt{-8}+\sqrt{3}\sqrt{-3}+\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}$

$=-\sqrt{32}+\sqrt{-9}-\sqrt{\frac{8}{-2}}$

$=-4\sqrt{2}+3i-\sqrt{-4}$

$=-4\sqrt{2}+3i-2i$

$=-4\sqrt{2}+i$

(2) $\frac{\sqrt{-20}}{\sqrt{-5}}+\sqrt{-9}\sqrt{-4}+\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{-9}}$

$=\sqrt{\frac{-20}{-5}}-\sqrt{36}-\sqrt{\frac{81}{-9}}$

$=\sqrt{4}-6-\sqrt{-9}$

$=2-6-3i=-4-3i$

답 (1) $\boldsymbol{-4\sqrt{2}+i}$ (2) $\boldsymbol{-4-3i}$

195

0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이므로

$a>0$, $b<0$ $\quad\therefore a-b>0$

따라서 $|a|=a$, $\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|=a-b$,

$\sqrt{b^2}=|b|=-b$이므로

$|a|+\sqrt{(a-b)^2}-\sqrt{b^2}=a+(a-b)-(-b)$

$=2a$

답 $\boldsymbol{2a}$

개념 노트

$$\sqrt{A^2}=|A|=\begin{cases} A & (A\geq 0) \\ -A & (A<0)\end{cases}$$

196

$\sqrt{a-4}\sqrt{1-a}=-\sqrt{(a-4)(1-a)}$이므로

$a-4<0$, $1-a<0$ ($\because a\neq 1$, $a\neq 4$)

즉 $1<a<4$이므로

$\sqrt{(a-4)^2}+|a-1|=|a-4|+|a-1|$

$=-(a-4)+(a-1)$

$=3$

답 **3**

연습 문제

● 본책 100~101쪽

197

전략 i^n의 규칙성을 이용한다.

$i-2i^2+3i^3-4i^4+\cdots-30i^{30}$

$=(i-2i^2+3i^3-4i^4)+(5i^5-6i^6+7i^7-8i^8)+\cdots$

$\quad+(25i^{25}-26i^{26}+27i^{27}-28i^{28})+29i^{29}-30i^{30}$

$=(i+2-3i-4)+(5i+6-7i-8)+\cdots$

$\quad+(25i+26-27i-28)+29i+30$

$=(-2-2i)\times 7+29i+30$

$=16+15i$

따라서 $p=16$, $q=15$이므로

$p-q=1$

답 **1**

198

전략 $(1\pm i)^2$은 순허수임을 이용한다.

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2i}{2}=i$, $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+2}$

$=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{2n}+\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{2n+1}$

$=i^{2n}+(-i)^{2n+1}$

$=(i^2)^n+\{(-i)^2\}^n\times(-i)$

$=(-1)^n+(-1)^n\times(-i)$

$=1+1\times(-i)$ ← n은 짝수

$=1-i$

답 $\boldsymbol{1-i}$

199

전략 복소수 x의 분모를 실수화하여 x^n의 규칙성을 파악한다.

$x=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$1+x+x^2+x^3=1+(-i)+(-i)^2+(-i)^3$

$=1-i-1+i=0$

$\therefore 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2000}$

$=(1+x+x^2+x^3)$

$\quad+x^4(1+x+x^2+x^3)+\cdots$

$\quad+x^{1996}(1+x+x^2+x^3)+x^{2000}$

$=x^{2000}=(-i)^{2000}=i^{2000}$

$=(i^4)^{500}=1$

답 **1**

200

전략 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$임을 이용하여 음수의 제곱근을 허수단위 i를 사용하여 나타낸다.

ㄱ. $\dfrac{\sqrt{-5}}{\sqrt{-2}}=\dfrac{\sqrt{5}i}{\sqrt{2}i}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{5}{2}}=\sqrt{\dfrac{-5}{-2}}$ (참)

ㄴ. $\dfrac{\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}i}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{5}{2}}i=\sqrt{\dfrac{-5}{2}}$ (참)

ㄷ. $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{-2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}i}=\dfrac{\sqrt{5}i}{\sqrt{2}i^2}=\dfrac{\sqrt{5}i}{-\sqrt{2}}$

$=-\sqrt{\dfrac{5}{2}}i=-\sqrt{\dfrac{5}{-2}}$

$\therefore \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{-2}}\neq\sqrt{\dfrac{5}{-2}}$ (거짓)

ㄹ. $\sqrt{-2}\sqrt{5}=\sqrt{2}i\times\sqrt{5}=\sqrt{10}i=\sqrt{-10}$

$=\sqrt{(-2)\times5}$ (참)

ㅁ. $\sqrt{-2}\sqrt{-5}=\sqrt{2}i\times\sqrt{5}i=\sqrt{10}i^2$

$=-\sqrt{10}=-\sqrt{(-2)\times(-5)}$

$\therefore \sqrt{-2}\sqrt{-5}\neq\sqrt{(-2)\times(-5)}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ의 3개이다. **답** **3**

201

전략 음수의 제곱근의 성질을 이용하여 계산한다.

$(\sqrt{-5})^2=(\sqrt{5}i)^2=-5$

$\sqrt{-9}\sqrt{-12}=-\sqrt{108}=-6\sqrt{3}$

$\sqrt{3}\sqrt{-3}=\sqrt{-9}=3i$

$\dfrac{\sqrt{-75}}{\sqrt{-3}}=\sqrt{\dfrac{-75}{-3}}=\sqrt{25}=5$

$\dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{-4}}=-\sqrt{\dfrac{36}{-4}}=-\sqrt{-9}=-3i$

$\therefore$ (주어진 식)

$=-5-(-6\sqrt{3})+3i+5-(-3i)$

$=6\sqrt{3}+6i$

따라서 $a=6\sqrt{3}$, $b=6$이므로

$\dfrac{a}{b}=\sqrt{3}$ **답** $\boldsymbol{\sqrt{3}}$

202

전략 음수의 제곱근의 성질을 이용하여 a, b, c의 부호를 구한다.

$a\neq0$, $b\neq0$, $c\neq0$이므로

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 $a<0$, $b<0$

$\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{c}{b}}$에서 $b<0$, $c>0$

즉 $a<0$, $b<0$, $c>0$이므로

$a+b<0$, $c-a>0$

$\therefore \sqrt{(a+b)^2}+|c-a|-\sqrt{b^2}+\sqrt{c^2}$

$=|a+b|+|c-a|-|b|+|c|$

$=-(a+b)+(c-a)-(-b)+c$

$=-2a+2c$

답 $\boldsymbol{-2a+2c}$

203

전략 자연수 k에 대하여 $i^{4k}=1$임을 이용하여 $f(7)$, $f(77)$의 값을 구한다.

$i^7=i^4\times i^3=i^3=-i$, $i^{77}=(i^4)^{19}\times i=i$이므로

$f(7)=\dfrac{i^7}{2-i^7}=\dfrac{-i}{2+i}$

$f(77)=\dfrac{i^{77}}{2-i^{77}}=\dfrac{i}{2-i}$

$\therefore f(7)+f(77)=\dfrac{-i}{2+i}+\dfrac{i}{2-i}$

$=\dfrac{-i(2-i)+i(2+i)}{(2+i)(2-i)}$

$=\dfrac{-2i-1+2i-1}{5}$

$=-\dfrac{2}{5}$

답 $\boldsymbol{-\dfrac{2}{5}}$

해설 Focus

음이 아닌 정수 k에 대하여

① $n=4k+1$이면 $i^n=i$이므로

$f(n)=\dfrac{i}{2-i}=\dfrac{-1+2i}{5}$

② $n=4k+2$이면 $i^n=i^2=-1$이므로

$f(n)=\dfrac{-1}{2-(-1)}=-\dfrac{1}{3}$

③ $n=4k+3$이면 $i^n=i^3=-i$이므로

$f(n)=\dfrac{-i}{2+i}=\dfrac{-1-2i}{5}$

④ $n=4k+4$이면 $i^n=i^4=1$이므로

$f(n)=\dfrac{1}{2-1}=1$

204

전략 i^n (n은 자연수)의 값은 i, -1, $-i$, 1이 순서대로 반복됨을 이용한다.

$1+i+i^2+i^3=1+i-1-i=0$이므로

$$\begin{aligned}&1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{101}\\&=(1+i+i^2+i^3)+i^4(1+i+i^2+i^3)+\cdots\\&\quad+i^{96}(1+i+i^2+i^3)+i^{100}+i^{101}\\&=i^{100}+i^{101}=(i^4)^{25}+(i^4)^{25}\times i\\&=1+i\end{aligned}$$

$$\therefore z=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$$

$$\therefore z^3+z+7=i^3+i+7=-i+i+7=7$$

답 ⑤

205

전략 z의 분모를 실수화한 후 z의 거듭제곱을 구한다.

$z=\frac{1+i}{i}=\frac{(1+i)\times i}{i^2}=1-i$이므로

$$\begin{aligned}&z^2=(1-i)^2=-2i\\&z^3=z^2z=-2i(1-i)=-2-2i\\&z^4=(z^2)^2=(-2i)^2=-4\\&z^5=z^4z=-4(1-i)=-4+4i\\&z^6=z^4z^2=-4\times(-2i)=8i\\&z^7=z^4z^3=-4(-2-2i)=8+8i\\&z^8=(z^4)^2=(-4)^2=16\end{aligned}$$

따라서 z^n이 양의 정수가 되는 자연수 n의 최솟값은 8이다.

답 8

206

전략 $z^2=-a\,(a>0)$이면 $z=\pm\sqrt{-a}=\pm\sqrt{a}i$임을 이용한다.

$\sqrt{x}\sqrt{y}=-\sqrt{xy}$에서

$$x<0,\ y<0$$

$z=x^2+3x-yi-18+i$

$\quad=(x^2+3x-18)+(-y+1)i$

이고, $z^2=-16$에서 $z=\pm4i$이므로

$$x^2+3x-18=0,\ -y+1=\pm4$$

$x^2+3x-18=0$에서 $\quad(x+6)(x-3)=0$

$$\therefore x=-6\ (\because x<0)$$

$-y+1=\pm4$에서 $\quad y=-3$ 또는 $y=5$

그런데 $y<0$이므로 $\quad y=-3$

$$\therefore xy=-6\times(-3)=18$$

답 18

207

전략 $(-i)^n$의 규칙성을 이용한다.

$(1-i)^2=-2i$이므로

$$(1-i)^{2n}=\{(1-i)^2\}^n=(-2i)^n=2^n\times(-i)^n$$

즉 $(1-i)^{2n}=2^ni$에서 $\quad 2^n\times(-i)^n=2^ni$

$$\therefore (-i)^n=i \quad \cdots\cdots ㉠$$

음이 아닌 정수 k에 대하여

$n=4k+1$일 때,

$$(-i)^n=(-i)^{4k+1}=-i^{4k+1}=-i$$

$n=4k+2$일 때,

$$(-i)^n=(-i)^{4k+2}=i^{4k+2}=i^2=-1$$

$n=4k+3$일 때,

$$(-i)^n=(-i)^{4k+3}=-i^{4k+3}=-i^3=i$$

$n=4k+4$일 때,

$$(-i)^n=(-i)^{4k+4}=i^{4k+4}=i^4=1$$

즉 $n=4k+3$일 때 ㉠을 만족시킨다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 100 이하의 자연수 n은

$$3,\ 7,\ 11,\ \cdots,\ 99$$

의 25개이다.

답 25

208

전략 근호 안의 식의 부호를 조사하고 음수의 제곱근의 성질을 이용한다.

$-1<x<1$이므로

$$x+1>0,\ x-1<0,\ 1-x>0,\ -1-x<0$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}\sqrt{1-x}\sqrt{-1-x}\\&=\sqrt{(x+1)(x-1)}\sqrt{(1-x)(-1-x)}\end{aligned}$$

이때 $(x+1)(x-1)<0,\ (1-x)(-1-x)<0$이므로

$$\begin{aligned}&(\text{주어진 식})\\&=-\sqrt{(x+1)(x-1)(1-x)(-1-x)}\\&=-\sqrt{(x+1)^2(x-1)^2}\\&=-\sqrt{(x+1)^2}\sqrt{(x-1)^2}\\&=-|x+1||x-1|\\&=-(x+1)\{-(x-1)\}\\&=x^2-1\end{aligned}$$

답 x^2-1

2 이차방정식

Ⅱ. 방정식과 부등식

01 이차방정식

● 본책 104~111쪽

209

(1) $x^2-3x=0$에서 $\quad x(x-3)=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=0}$ **또는** $\boldsymbol{x=3}$

(2) $x^2-5x+6=0$에서 $\quad (x-2)(x-3)=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=2}$ **또는** $\boldsymbol{x=3}$

(3) $2x^2-x-3=0$에서 $\quad (x+1)(2x-3)=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=-1}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{3}{2}}$

(4) $3x^2+5x-2=0$에서 $\quad (x+2)(3x-1)=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{1}{3}}$

(5) $4x^2-4x+1=0$에서 $\quad (2x-1)^2=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=\frac{1}{2}}$ **(중근)**

(6) $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1=0$에서

$x^2-3x+2=0, \quad (x-1)(x-2)=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=1}$ **또는** $\boldsymbol{x=2}$

답 풀이 참조

210

(1) $2x^2-7x+4=0$에서

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times2\times4}}{2\times2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{7\pm\sqrt{17}}{4}}\ \textbf{(실근)}$$

(2) $x^2-3x+4=0$에서

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times4}}{2\times1}$$
$$=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{3\pm\sqrt{7}i}{2}}\ \textbf{(허근)}$$

(3) $2x^2+x+1=0$에서

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times2\times1}}{2\times2}=\frac{-1\pm\sqrt{-7}}{4}$$
$$=\boldsymbol{\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{4}}\ \textbf{(허근)}$$

(4) $3x^2+4x-2=0$에서

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-3\times(-2)}}{3}$$
$$=\boldsymbol{\frac{-2\pm\sqrt{10}}{3}}\ \textbf{(실근)}$$

(5) $3x^2-2x+1=0$에서

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-3\times1}}{3}$$
$$=\frac{1\pm\sqrt{-2}}{3}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1\pm\sqrt{2}i}{3}}\ \textbf{(허근)}$$

(6) $4x^2-2\sqrt{3}x-1=0$에서

$$x=\frac{-(-\sqrt{3})\pm\sqrt{(-\sqrt{3})^2-4\times(-1)}}{4}$$
$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{7}}{4}}\ \textbf{(실근)}$$

답 풀이 참조

211

(1) $3(x+1)^2=x(x+2)$에서

$3x^2+6x+3=x^2+2x, \quad 2x^2+4x+3=0$

$\therefore x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-2\times3}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{2}i}{2}$

(2) $\frac{3x^2+2}{5}-x=\frac{x^2-x}{2}$에서

$2(3x^2+2)-10x=5(x^2-x)$

$6x^2-10x+4=5x^2-5x$

$x^2-5x+4=0, \quad (x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$

답 (1) $\boldsymbol{x=\frac{-2\pm\sqrt{2}i}{2}}$ (2) $\boldsymbol{x=1}$ **또는** $\boldsymbol{x=4}$

212

주어진 방정식의 양변에 $2-\sqrt{3}$을 곱하면

$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})x^2-(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})x$

$+2-\sqrt{3}=0$

$x^2-(3-\sqrt{3})x+2-\sqrt{3}=0$

$(x-1)\{x-(2-\sqrt{3})\}=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2-\sqrt{3}$

답 $\boldsymbol{x=1}$ **또는** $\boldsymbol{x=2-\sqrt{3}}$

213

$x^2-(a+2)x+2a=0$에 $x=3$을 대입하면

$9-3(a+2)+2a=0 \qquad \therefore a=3$

$x^2+ax+a^2=0$에 $a=3$을 대입하면

$x^2+3x+9=0$

$\therefore x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times9}}{2}$

$=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

답 $\boldsymbol{x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}}$

214

$3ax^2+(a^2+3a)x+2a(a-1)=0$은 x에 대한 이차 방정식이므로

$a\neq0$

이 이차방정식의 한 근이 -1이므로 $x=-1$을 대입하면

$3a-(a^2+3a)+2a(a-1)=0$

$a^2-2a=0, \qquad a(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a\neq0)$

주어진 방정식에 $a=2$를 대입하면

$6x^2+10x+4=0, \qquad 3x^2+5x+2=0$

$(x+1)(3x+2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-\dfrac{2}{3}$

$\therefore b=-\dfrac{2}{3}$ 답 $\boldsymbol{a=2,\ b=-\dfrac{2}{3}}$

215

(1) $x^2-2|x|-8=0$에서

(i) $x<0$일 때, $|x|=-x$이므로

$x^2+2x-8=0, \qquad (x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

그런데 $x<0$이므로 $\quad x=-4$

(ii) $x\geq0$일 때, $|x|=x$이므로

$x^2-2x-8=0, \qquad (x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

그런데 $x\geq0$이므로 $\quad x=4$

(i), (ii)에서 $\quad$ **$x=-4$ 또는 $x=4$**

(2) $x^2+|2x-1|=3$에서

(i) $x<\dfrac{1}{2}$일 때, $|2x-1|=-(2x-1)$이므로

$x^2-(2x-1)=3, \qquad x^2-2x-2=0$

$\therefore x=1\pm\sqrt{3}$

그런데 $x<\dfrac{1}{2}$이므로 $\quad x=1-\sqrt{3}$

(ii) $x\geq\dfrac{1}{2}$일 때, $|2x-1|=2x-1$이므로

$x^2+2x-1=3, \qquad x^2+2x-4=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{5}$

그런데 $x\geq\dfrac{1}{2}$이므로 $\quad x=-1+\sqrt{5}$

(i), (ii)에서 $\quad$ **$x=1-\sqrt{3}$ 또는 $x=-1+\sqrt{5}$**

(3) $x^2-3x-1=|x-2|$에서

(i) $x<2$일 때, $|x-2|=-(x-2)$이므로

$x^2-3x-1=-(x-2)$

$x^2-2x-3=0, \qquad (x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

그런데 $x<2$이므로 $\quad x=-1$

(ii) $x\geq2$일 때, $|x-2|=x-2$이므로

$x^2-3x-1=x-2, \qquad x^2-4x+1=0$

$\therefore x=2\pm\sqrt{3}$

그런데 $x\geq2$이므로 $\quad x=2+\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 $\quad$ **$x=-1$ 또는 $x=2+\sqrt{3}$**

답 풀이 참조

216

$|x-2|+1=x^2-\sqrt{x^2}$에서

$|x-2|+1=x^2-|x|$

(i) $x<0$일 때,

$|x-2|=-(x-2),\ |x|=-x$이므로

$-(x-2)+1=x^2-(-x)$

$x^2+2x-3=0, \qquad (x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

그런데 $x<0$이므로 $\quad x=-3$

(ii) $0\leq x<2$일 때,

$|x-2|=-(x-2),\ |x|=x$이므로

$-(x-2)+1=x^2-x$

$x^2=3 \qquad \therefore x=\pm\sqrt{3}$

그런데 $0\leq x<2$이므로 $\quad x=\sqrt{3}$

(iii) $x \geq 2$일 때,

$|x-2|=x-2$, $|x|=x$이므로

$x-2+1=x^2-x$

$x^2-2x+1=0, \quad (x-1)^2=0$

$\therefore x=1$ (중근)

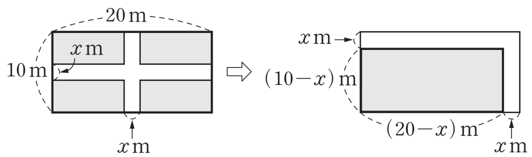
그런데 $x \geq 2$이므로 $x=1$은 해가 아니다.

이상에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=\sqrt{3}$

답 $x=-3$ 또는 $x=\sqrt{3}$

217

길의 폭을 x m라 하면 길을 제외한 잔디밭의 넓이는 다음 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같다.



길을 제외한 잔디밭의 넓이가 144 m^2이므로

$(20-x)(10-x)=144$

$x^2-30x+56=0, \quad (x-2)(x-28)=0$

$\therefore x=2 \ (\because 0<x<10)$

따라서 길의 폭은 2 m이다.

답 **2 m**

218

x초 후의 직사각형의 가로의 길이는 $24-x$, 세로의 길이는 $18+2x$이므로

$(24-x)(18+2x)=24 \times 18$

$-x^2+15x=0, \quad x(x-15)=0$

$\therefore x=15 \ (\because x>0)$

따라서 15초 후에 처음 직사각형의 넓이와 같아진다.

답 **15초**

219

(1) $[x]^2-12[x]+32=0$에서

$([x]-4)([x]-8)=0$

$\therefore [x]=4$ 또는 $[x]=8$

$[x]=4$에서 $\quad 4 \leq x<5$

$[x]=8$에서 $\quad 8 \leq x<9$

$\therefore 4 \leq x<5$ 또는 $8 \leq x<9$

(2) (i) $1<x<2$일 때, $[x]=1$이므로

$x^2-1-3=0, \quad x^2=4$

$\therefore x=\pm 2$

그런데 $1<x<2$이므로 해가 없다.

(ii) $2 \leq x<3$일 때, $[x]=2$이므로

$x^2-2-3=0, \quad x^2=5$

$\therefore x=\pm\sqrt{5}$

그런데 $2 \leq x<3$이므로 $\quad x=\sqrt{5}$

(i), (ii)에서 $\quad x=\sqrt{5}$

답 (1) $4 \leq x<5$ 또는 $8 \leq x<9$ (2) $x=\sqrt{5}$

02 이차방정식의 판별식

● 본책 112~116쪽

220

주어진 각 이차방정식의 판별식을 D라 하자.

(1) $D=3^2-4 \times 1 \times (-2)=17>0$

따라서 **서로 다른 두 실근**을 갖는다.

(2) $\dfrac{D}{4}=(-2)^2-1 \times 7=-3<0$

따라서 **서로 다른 두 허근**을 갖는다.

(3) $\dfrac{D}{4}=6^2-4 \times 9=0$

따라서 **중근**을 갖는다.

(4) $\dfrac{D}{4}=(-\sqrt{3})^2-1 \times 3=0$

따라서 **중근**을 갖는다.

(5) $3x^2-4x-2=0$이므로

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-3 \times (-2)=10>0$

따라서 **서로 다른 두 실근**을 갖는다.

(6) $2x^2+3x+5=0$이므로

$D=3^2-4 \times 2 \times 5=-31<0$

따라서 **서로 다른 두 허근**을 갖는다.

답 **풀이 참조**

221

보기의 각 이차방정식의 판별식을 D라 하자.

ㄱ. $\dfrac{D}{4}=(-1)^2-1 \times 4=-3<0$

ㄴ. $\dfrac{D}{4}=(-2)^2-1 \times (-5)=9>0$

ㄷ. $D=3^2-4\times2\times4=-23<0$

ㄹ. $\frac{D}{4}=3^2-9\times1=0$

ㅁ. $D=(-1)^2-4\times\frac{1}{4}\times1=0$

ㅂ. $D=(-1)^2-4\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}>0$

(1) 실근을 가지려면 $D\geq0$이어야 하므로

ㄴ, ㄹ, ㅁ, ㅂ

(2) 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

ㄱ, ㄷ

답 (1) **ㄴ, ㄹ, ㅁ, ㅂ** (2) **ㄱ, ㄷ**

222

이차방정식 $x^2+4x+a-3=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=2^2-1\times(a-3)=7-a$$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=7-a>0 \qquad \therefore a<7$$

(2) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=7-a=0 \qquad \therefore a=7$$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=7-a<0 \qquad \therefore a>7$$

답 (1) $\boldsymbol{a<7}$ (2) $\boldsymbol{a=7}$ (3) $\boldsymbol{a>7}$

223

이차방정식 $x^2+(2k-1)x+k^2-3=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(2k-1)^2-4\times1\times(k^2-3)=-4k+13$$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$$D=-4k+13>0 \qquad \therefore k<\frac{13}{4}$$

(2) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$$D=-4k+13=0 \qquad \therefore k=\frac{13}{4}$$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$$D=-4k+13<0 \qquad \therefore k>\frac{13}{4}$$

답 (1) $\boldsymbol{k<\frac{13}{4}}$ (2) $\boldsymbol{k=\frac{13}{4}}$ (3) $\boldsymbol{k>\frac{13}{4}}$

224

이차방정식 $x^2-2(k-1)x+k^2-5k+4=0$이 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-1\times(k^2-5k+4)\geq0$$

$$3k-3\geq0 \qquad \therefore k\geq1$$

답 $\boldsymbol{k\geq1}$

225

$(k-1)x^2+2kx+k-1=0$이 이차방정식이므로

$$k-1\neq0 \qquad \therefore k\neq1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이차방정식 $(k-1)x^2+2kx+k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-(k-1)^2>0$$

$$2k-1>0 \qquad \therefore k>\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{2}<k<1$ 또는 $k>1$

답 $\boldsymbol{\frac{1}{2}<k<1}$ **또는** $\boldsymbol{k>1}$

226

이차방정식 $x^2+2(k+a)x+k^2+6k+b=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(k+a)^2-(k^2+6k+b)=0$$

$$\therefore (2a-6)k+a^2-b=0$$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$2a-6=0,\ a^2-b=0 \qquad \therefore a=3,\ b=9$$

$$\therefore a+b=12$$

답 **12**

227

$(k-2)x^2+4(k-2)x+3k-2$가 이차식이므로

$$k-2\neq0 \qquad \therefore k\neq2$$

이 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $(k-2)x^2+4(k-2)x+3k-2=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=\{2(k-2)\}^2-(k-2)(3k-2)=0$$

$$k^2-8k+12=0, \qquad (k-2)(k-6)=0$$

$$\therefore k=2 \text{ 또는 } k=6$$

그런데 $k\neq2$이므로 $k=6$

답 **6**

연습 문제

• 본책 117~118쪽

228

전략 근의 공식을 이용하여 이차방정식의 해를 구한다.

이차방정식 $x^2-ax+7=0$의 해는

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-28}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{b}i}{2}$$

따라서 $a=5$, $b=-(a^2-28)=3$이므로

$$a+b=8$$

답 8

229

전략 주어진 이차방정식에 $x=\alpha$를 대입한 다음 식을 변형한다.

이차방정식 $2x^2-2x+1=0$의 한 근이 $x=\alpha$이므로 $x=\alpha$를 대입하면

$$2\alpha^2-2\alpha+1=0, \qquad \alpha^2-\alpha+\frac{1}{2}=0$$

$$\therefore \alpha^2=\alpha-\frac{1}{2}$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$\alpha^4=\alpha^2-\alpha+\frac{1}{4}$$

$$\therefore \alpha^4-\alpha^2+\alpha=\frac{1}{4}$$

답 ①

다른 풀이 이차방정식 $2x^2-2x+1=0$의 해는

$$x=\frac{1\pm i}{2}$$

이때 $\alpha=\frac{1+i}{2}$라 하면

$$\alpha^2=\left(\frac{1+i}{2}\right)^2=\frac{i}{2},\ \alpha^4=(\alpha^2)^2=\left(\frac{i}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore \alpha^4-\alpha^2+\alpha=-\frac{1}{4}-\frac{i}{2}+\frac{1+i}{2}=\frac{1}{4}$$

230

전략 주어진 이차방정식에 $x=1$을 대입하여 상수 a의 값을 먼저 구한다.

$(a+1)x^2+x+a^2-2=0$이 x에 대한 이차방정식이므로

$$a+1\neq 0 \qquad \therefore a\neq -1$$

이 방정식의 한 근이 1이므로 $x=1$을 대입하면

$$(a+1)+1+a^2-2=0$$

$$a^2+a=0, \qquad a(a+1)=0$$

$$\therefore a=0\ (\because a\neq -1)$$

주어진 방정식에 $a=0$을 대입하면

$$x^2+x-2=0, \qquad (x+2)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 다른 한 근은 -2이다.

답 ③

231

전략 $x\geq 2$인 경우와 $x<2$인 경우로 나누어 절댓값 기호를 없애고 방정식을 푼다.

$x^2-|x-2|-4=0$에서

(i) $x<2$일 때, $|x-2|=-(x-2)$이므로

$$x^2+(x-2)-4=0$$

$$x^2+x-6=0, \qquad (x+3)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=2$$

그런데 $x<2$이므로 $\quad x=-3$

(ii) $x\geq 2$일 때, $|x-2|=x-2$이므로

$$x^2-(x-2)-4=0$$

$$x^2-x-2=0, \qquad (x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

그런데 $x\geq 2$이므로 $\quad x=2$

(i), (ii)에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=2$

이때 $x^2+ax+b=0$에 $x=-3$을 대입하면

$$9-3a+b=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$x^2+ax+b=0$에 $x=2$를 대입하면

$$4+2a+b=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=1$, $b=-6$

$$\therefore a-b=7$$

답 7

232

전략 주어진 기호의 뜻에 따라 이차방정식을 세운다.

$x*x=2\times x\times x-x-x+1=2x^2-2x+1$

$1*x=2\times 1\times x-1-x+1=x$

즉 $x*x=|1*x|+1$에서

$$2x^2-2x+1=|x|+1$$

$$\therefore 2x^2-2x=|x|$$

(i) $x<0$일 때, $|x|=-x$이므로

$$2x^2-2x=-x$$

$$2x^2-x=0, \qquad x(2x-1)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{1}{2}$$

그런데 $x<0$이므로 해가 없다.

(ii) $x \ge 0$일 때, $|x|=x$이므로

$$2x^2-2x=x$$

$$2x^2-3x=0, \quad x(2x-3)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}$$

(i), (ii)에서 $\quad x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

답 **0, $\frac{3}{2}$**

233

전략 판별식을 이용하여 k에 대한 부등식을 세운다.

이차방정식 $x^2-2(k+2)x+k^2+24=0$이 서로 다른 두 허근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(k+2)\}^2-(k^2+24)<0$$

$$4k-20<0 \qquad \therefore k<5$$

따라서 구하는 자연수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

답 **4**

234

전략 주어진 이차방정식에 $x=2$를 대입하여 k에 대한 항등식을 세운다.

$2x^2+a(k+1)x+b(k-3)=0$에 $x=2$를 대입하면

$$8+2a(k+1)+b(k-3)=0$$

$$\therefore (2a+b)k+2a-3b+8=0$$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$2a+b=0,\ 2a-3b+8=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-1,\ b=2$

$$\therefore a+b=1$$

답 **1**

개념 노트

항등식의 성질

① 등식 $ax+b=0$이 x에 대한 항등식이면

$a=0,\ b=0$

② 등식 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면

$a=0,\ b=0,\ c=0$

235

전략 판별식을 이용하여 a, b에 대한 부등식을 세운다.

이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=a^2-4b>0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이차방정식 $x^2+(a-2c)x+b-ac=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=(a-2c)^2-4(b-ac)$$

$$=a^2-4ac+4c^2-4b+4ac$$

$$=(a^2-4b)+4c^2$$

이때 ㉠에서 $a^2-4b>0$이고, $4c^2 \ge 0$이므로

$$(a^2-4b)+4c^2>0 \qquad \therefore D_2>0$$

따라서 이차방정식 $x^2+(a-2c)x+b-ac=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

답 **서로 다른 두 실근**

236

전략 (판별식)=0을 만족시키는 y의 값의 개수가 1임을 이용한다.

$2x^2-3y^2-4x+ay-xy+1=0$에서

$$2x^2-(y+4)x-3y^2+ay+1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(y+4)^2-4\times2\times(-3y^2+ay+1)=0$$

$$\therefore 25y^2-8(a-1)y+8=0$$

y에 대한 이 이차방정식의 실근이 1개이므로 이 이차방정식의 판별식을 D'이라 하면

$$\frac{D'}{4}=\{-4(a-1)\}^2-25\times8=0$$

$$(a-1)^2=\frac{25}{2}, \qquad a-1=\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore a=\frac{2+5\sqrt{2}}{2}\ (\because a>0)$$

답 **$\frac{2+5\sqrt{2}}{2}$**

237

전략 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 (이차식)=0이 중근을 가져야 함을 이용하여 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

$a(1+x^2)+2bx+c(1-x^2)$

$=(a-c)x^2+2bx+a+c$

이 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $(a-c)x^2+2bx+a+c=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=b^2-(a-c)(a+c)=0$$

$$b^2-a^2+c^2=0 \qquad \therefore a^2=b^2+c^2$$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

답 **빗변의 길이가 a인 직각삼각형**

238

전략 삼각형의 닮음을 이용하여 이차방정식을 세운다.

$\overline{AP}=x$라 하면 $\overline{DR}=x$

삼각형 DOR와 삼각형 DBC는 서로 닮음이므로

$\overline{DR}:\overline{DC}=\overline{OR}:\overline{BC}$에서

$x:2=\overline{OR}:4$, $2\overline{OR}=4x$ $\therefore \overline{OR}=2x$

$\therefore \overline{PO}=\overline{PR}-\overline{OR}=4-2x$

따라서 사각형 APOS의 넓이는

$x(4-2x)=4x-2x^2$

또 $\overline{RC}=\overline{DC}-\overline{DR}=2-x$이므로 사각형 OQCR의 넓이는

$2x(2-x)=4x-2x^2$

이때 사각형 APOS와 사각형 OQCR의 넓이의 합이 3이므로

$(4x-2x^2)+(4x-2x^2)=3$

$4x^2-8x+3=0$, $(2x-1)(2x-3)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

이때 $\overline{AP}<\overline{PB}$이므로 $x=\frac{1}{2}$ ($\because x<1$)

답 ③

참고 $\overline{AP}<\overline{PB}$에서 $x<2-x$ $\therefore x<1$

239

전략 주어진 식을 x에 대한 이차식으로 생각하고, 판별식을 이용한다.

$2x^2+xy-y^2-x+2y+k$

$=2x^2+(y-1)x-(y^2-2y-k)$

이차방정식 $2x^2+(y-1)x-(y^2-2y-k)=0$의 판별식을 D라 하면 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-(y-1)\pm\sqrt{D}}{4} \quad \cdots\cdots (*)$$

따라서 주어진 이차식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 D가 완전제곱식이어야 한다.

$D=(y-1)^2-4\times2\times\{-(y^2-2y-k)\}$

$=9y^2-18y+1-8k$

이므로 $9y^2-18y+1-8k=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\frac{D'}{4}=(-9)^2-9(1-8k)=0$

$72k=-72$ $\therefore k=-1$

답 -1

해설 Focus

주어진 이차식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 $(*)$에서 근호가 없어져야 하므로 D가 완전제곱식이어야 한다.

이때 $k=-1$이면 $D=9y^2-18y+9=9(y-1)^2$이므로

$$x=\frac{-y+1\pm\sqrt{9(y-1)^2}}{4}$$

$\therefore x=-y+1$ 또는 $x=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$

따라서 주어진 이차식은

$2x^2+xy-y^2-x+2y-1$

$=(x+y-1)(2x-y+1)$

과 같이 인수분해된다.

03 이차방정식의 근과 계수의 관계

본책 119~127쪽

240

(1) $\alpha+\beta=-3$

(2) $\alpha\beta=-2$

(3) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$

(4) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-3)^2-2\times(-2)=13$

답 (1) $\mathbf{-3}$ (2) $\mathbf{-2}$ (3) $\mathbf{\frac{3}{2}}$ (4) **13**

241

(1) $\alpha+\beta=-\frac{-6}{3}=2$

(2) $\alpha\beta=\frac{2}{3}$

(3) $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta$

$=2^2-3\times\frac{2}{3}=2$

(4) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\frac{2^2-2\times\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{8}{3}}{\frac{2}{3}}=4$

답 (1) **2** (2) $\mathbf{\frac{2}{3}}$ (3) **2** (4) **4**

242

(1) $4+6=10$, $4\times6=24$이므로

$x^2-10x+24=0$

(2) $5+(-2)=3$, $5\times(-2)=-10$이므로

$x^2-3x-10=0$

(3) $(1-\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})=2$,

$(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})=-4$이므로

$x^2-2x-4=0$

(4) $(3+i)+(3-i)=6$, $(3+i)(3-i)=10$이므로

$x^2-6x+10=0$

답 (1) $\boldsymbol{x^2-10x+24=0}$ (2) $\boldsymbol{x^2-3x-10=0}$

(3) $\boldsymbol{x^2-2x-4=0}$ (4) $\boldsymbol{x^2-6x+10=0}$

243

(1) $x^2-x-3=0$에서 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

$\therefore x^2-x-3=\left(x-\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$

(2) $x^2+9=0$에서 $x^2=-9$ $\therefore x=\pm3i$

$\therefore x^2+9=(x+3i)(x-3i)$

답 (1) $\boldsymbol{\left(x-\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right)}$

(2) $\boldsymbol{(x+3i)(x-3i)}$

244

이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=4$

(1) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=4\times3=12$

(2) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=3^2-4=5$

(3) $(2\alpha-1)(2\beta-1)=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1$

$=4\times4-2\times3+1=11$

(4) $\dfrac{\beta}{\alpha-1}+\dfrac{\alpha}{\beta-1}=\dfrac{\beta(\beta-1)+\alpha(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}$

$=\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\alpha-\beta}{\alpha\beta-\alpha-\beta+1}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$

$=\dfrac{3^2-2\times4-3}{4-3+1}=\dfrac{-2}{2}=-1$

(5) $\dfrac{\beta}{\alpha^2}+\dfrac{\alpha}{\beta^2}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2\beta^2}=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^2}$

$=\dfrac{3^3-3\times4\times3}{4^2}=-\dfrac{9}{16}$

답 (1) **12** (2) **5** (3) **11**

(4) $\boldsymbol{-1}$ (5) $\boldsymbol{-\dfrac{9}{16}}$

245

이차방정식 $x^2-2x+4=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-2\alpha+4=0$, $\beta^2-2\beta+4=0$

$\therefore \alpha^2-\alpha+4=\alpha$, $\beta^2-\beta+4=\beta$

$\therefore \dfrac{\beta}{\alpha^2-\alpha+4}+\dfrac{\alpha}{\beta^2-\beta+4}$

$=\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$ …… ㉠

한편 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=4$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=2^2-2\times4=-4$

㉠에 $\alpha\beta=4$, $\alpha^2+\beta^2=-4$를 대입하면

$\dfrac{\beta}{\alpha^2-\alpha+4}+\dfrac{\alpha}{\beta^2-\beta+4}=\dfrac{-4}{4}=-1$

답 $\boldsymbol{-1}$

246

이차방정식 $ax^2+2x+b=0$의 두 근이 -1, $\dfrac{1}{3}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{2}{a}$, $-1\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{b}{a}$

$\therefore a=3$, $b=-1$

따라서 이차방정식 $bx^2+ax+a-b=0$의 두 근의 곱은 $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{3-(-1)}{-1}=-4$

답 $\boldsymbol{-4}$

247

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$ …… ㉠

또 이차방정식 $x^2-ax-b=0$의 두 근이 $\alpha-1$, $\beta-1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\alpha-1)+(\beta-1)=a,\ (\alpha-1)(\beta-1)=-b$$

$$\therefore \alpha+\beta-2=a,\ \alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=-b \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에 ㉠을 대입하면

$$-a-2=a,\ b+a+1=-b$$

$$\therefore a=-1,\ b=0$$

답 $\boldsymbol{a=-1,\ b=0}$

248

두 근의 차가 4이므로 두 근을 α, $\alpha+4$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+(\alpha+4)=k-2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\alpha(\alpha+4)=k+2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $\alpha=\frac{k}{2}-3$이므로 ㉡에 이것을 대입하면

$$\left(\frac{k}{2}-3\right)\left(\frac{k}{2}+1\right)=k+2$$

$$(k-6)(k+2)=4(k+2)$$

$$k^2-8k-20=0, \qquad (k+2)(k-10)=0$$

$$\therefore k=-2 \text{ 또는 } k=10$$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$$-2+10=8$$

답 **8**

249

한 근이 다른 근의 3배이므로 두 근을 α, $3\alpha\,(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+3\alpha=a+1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\alpha\times3\alpha=a \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $\alpha=\frac{a+1}{4}$이므로 ㉡에 이것을 대입하면

$$\frac{a+1}{4}\times\frac{3(a+1)}{4}=a$$

$$3(a+1)^2=16a$$

$$3a^2-10a+3=0, \qquad (3a-1)(a-3)=0$$

$$\therefore a=\frac{1}{3} \text{ 또는 } a=3$$

답 $\boldsymbol{\frac{1}{3},\ 3}$

다른 풀이 $x^2-(a+1)x+a=0$에서

$$(x-1)(x-a)=0 \qquad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=a$$

이때 한 근이 다른 근의 3배이므로

$$1\times3=a \text{ 또는 } a\times3=1$$

$$\therefore a=3 \text{ 또는 } a=\frac{1}{3}$$

250

두 근의 비가 2 : 5이므로 두 근을 2α, $5\alpha\,(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$2\alpha+5\alpha=7,\ 2\alpha\times5\alpha=k$$

$$\therefore \alpha=1,\ k=10$$

따라서 이차방정식 $x^2+kx-2k+3=0$의 두 근의 곱은

$$-2k+3=-2\times10+3=-17$$

답 **−17**

251

이차방정식 $2x^2-5x+4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{5}{2},\ \alpha\beta=2$$

두 근 $\alpha+1$, $\beta+1$의 합과 곱을 구하면

$$(\alpha+1)+(\beta+1)=\alpha+\beta+2=\frac{5}{2}+2=\frac{9}{2}$$

$$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1$$

$$=2+\frac{5}{2}+1=\frac{11}{2}$$

따라서 $\alpha+1$, $\beta+1$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$$2\left(x^2-\frac{9}{2}x+\frac{11}{2}\right)=0 \qquad \therefore 2x^2-9x+11=0$$

답 $\boldsymbol{2x^2-9x+11=0}$

252

이차방정식 $x^2+3x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=-2$$

두 근 α^3, β^3의 합과 곱을 구하면

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$=(-3)^3-3\times(-2)\times(-3)=-45$$

$$\alpha^3\times\beta^3=(\alpha\beta)^3=(-2)^3=-8$$

따라서 α^3, β^3을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2+45x-8=0$$

답 $\boldsymbol{x^2+45x-8=0}$

253

(1) 이차방정식 $x^2+6x+4=0$의 근은

$$x=-3\pm\sqrt{5}$$

$$\therefore x^2+6x+4$$
$$=\{x-(-3+\sqrt{5})\}\{x-(-3-\sqrt{5})\}$$
$$=\boldsymbol{(x+3-\sqrt{5})(x+3+\sqrt{5})}$$

(2) 이차방정식 $3x^2-2x+2=0$의 근은

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}i}{3}$$

$$\therefore 3x^2-2x+2$$
$$=\boldsymbol{3\left(x-\frac{1+\sqrt{5}i}{3}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}i}{3}\right)}$$

답 **풀이 참조**

254

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로

$$f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0$$

$f(2x-1)=0$이려면

$$2x-1=\alpha \text{ 또는 } 2x-1=\beta$$

$$\therefore x=\frac{\alpha+1}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\beta+1}{2}$$

따라서 이차방정식 $f(2x-1)=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha+1}{2}\times\frac{\beta+1}{2}=\frac{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}{4}$$
$$=\frac{4+3+1}{4}$$
$$=2$$

답 **2**

255

이차방정식 $x^2+ax-b=0$에서 a, b가 유리수이고 한 근이 $\sqrt{2}+1$, 즉 $1+\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=-a$이므로 $\quad a=-2$

$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-b$이므로 $\quad b=1$

$$\therefore ab=-2$$

답 **-2**

256

이차방정식 $x^2+6x+a=0$에서 a, b가 실수이고 한 근이 $b+\sqrt{3}i$이므로 다른 한 근은 $b-\sqrt{3}i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(b+\sqrt{3}i)+(b-\sqrt{3}i)=-6$이므로 $\quad b=-3$

$(b+\sqrt{3}i)(b-\sqrt{3}i)=a$이므로 $\quad a=12$

$$\therefore a+b=9$$

답 **9**

257

$$\frac{1}{1+2i}=\frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{1-2i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$$

이차방정식 $5x^2+ax+b=0$에서 a, b가 실수이고 한 근이 $\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$이므로 다른 한 근은 $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right)=-\frac{a}{5}$이므로 $\quad a=-2$

$\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right)\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right)=\frac{b}{5}$이므로 $\quad b=1$

이차방정식 $ax^2-5x-b=0$에 $a=-2$, $b=1$을 대입하면

$$-2x^2-5x-1=0 \qquad \therefore 2x^2+5x+1=0$$

따라서 이차방정식 $2x^2+5x+1=0$의 근은

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{4}$$

답 $\boldsymbol{x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{4}}$

연습 문제

본책 128~130쪽

258

전략 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$$

② $(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1$
$$=3+2+1=6$$

③ $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$$=2^2-4\times3=-8$$

④ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$$=2^3-3\times3\times2=-10$$

⑤ $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$
$$=\frac{2^2-2\times3}{3}=-\frac{2}{3}$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

답 ③

259

전략 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구하고, 주어진 등식의 좌변을 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$에 대한 식으로 변형한다.

이차방정식 $x^2+2x+k=0$의 서로 다른 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=k$ …… ㉠

$\alpha^2+\beta^2=8$에서

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=8$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$(-2)^2-2k=8$, $2k=-4$

$\therefore k=-2$

답 ④

260

전략 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b를 α, β에 대한 식으로 나타낸다.

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$ …… ㉠

또 이차방정식 $x^2-bx+a=0$의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+1)+(\beta+1)=b$, $(\alpha+1)(\beta+1)=a$

$\therefore \alpha+\beta+2=b$, $\alpha\beta+\alpha+\beta+1=a$

…… ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$-a+2=b$, $b-a+1=a$

$\therefore a+b=2$, $2a-b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

따라서 ㉠에서 $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=1$이므로

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=(-1)^2-2\times1=-1$$
$$\therefore \alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$$
$$=(-1)^2-2\times1^2=-1$$

답 ②

261

전략 연속하는 두 정수를 α, $\alpha+1$로 놓고 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식 $x^2+(k+2)x+9-k=0$의 두 근을 α, $\alpha+1$이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+1)=-(k+2)$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+1)=9-k$ …… ㉡

㉠에서 $\alpha=\dfrac{-k-3}{2}$

㉡에 이것을 대입하면

$$\frac{-k-3}{2}\left(\frac{-k-3}{2}+1\right)=9-k$$

$k^2+8k-33=0$, $(k+11)(k-3)=0$

$\therefore k=-11$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-11+3=-8$

답 -8

다른 풀이 이차방정식의 두 근을 α, $\beta\ (\alpha>\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-(k+2)$, $\alpha\beta=9-k$

이때 두 근이 연속하는 정수이므로 두 근의 차는 1이다.

즉 $\alpha-\beta=1$이므로 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에서

$1^2=\{-(k+2)\}^2-4(9-k)$

$k^2+8k-33=0$, $(k+11)(k-3)=0$

$\therefore k=-11$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-11+3=-8$

262

전략 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha^2+\dfrac{1}{\beta}$, $\beta^2+\dfrac{1}{\alpha}$의 합과 곱을 구한다.

이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$

두 근 $\alpha^2+\dfrac{1}{\beta}$, $\beta^2+\dfrac{1}{\alpha}$의 합과 곱을 구하면

$$\left(\alpha^2+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta^2+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}$$
$$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$$
$$=3^2-2\times1+3=10$$
$$\left(\alpha^2+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta^2+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha^2\beta^2+\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha\beta}$$
$$=1^2+3+1=5$$

따라서 $\alpha^2+\dfrac{1}{\beta}$, $\beta^2+\dfrac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-10x+5=0$이므로

$a=-10$, $b=5$

$\therefore a+b=-5$

답 -5

263

전략 켤레근의 성질을 이용하여 유리수 a, b의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 a, b가 유리수이고 한 근이 $2-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=-a$이므로 $\quad a=-4$

$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=b$이므로 $\quad b=1$

이차방정식 $x^2+bx+a=0$에 $a=-4$, $b=1$을 대입하면

$$x^2+x-4=0$$

이 이차방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-4$$

$$\therefore\ \alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=-(\alpha-\beta)$$

이때

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=(-1)^2-4\times(-4)=17$$

이므로 $\quad \alpha-\beta=\sqrt{17}\ (\because\ \alpha>\beta)$

$$\therefore\ \alpha^2-\beta^2=-(\alpha-\beta)=-\sqrt{17}$$

답 $-\sqrt{17}$

264

전략 $|f(x)|=k\ (k>0)$이면 $f(x)=k$ 또는 $f(x)=-k$임을 이용한다.

$|x^2-2x-a+3|=1$에서

$x^2-2x-a+3=1$

또는 $x^2-2x-a+3=-1$

$\therefore\ x^2-2x-a+2=0$

또는 $x^2-2x-a+4=0$

이때 $a>3$에서 두 이차방정식은 실근을 가지므로 주어진 방정식의 모든 실근의 곱은 두 이차방정식의 모든 근의 곱과 같다.

$x^2-2x-a+2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 $\quad -a+2$

$x^2-2x-a+4=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 $\quad -a+4$

이때 두 이차방정식의 근을 모두 곱하면 8이 되어야 하므로 $\quad (-a+2)(-a+4)=8$

$a^2-6a=0,\quad a(a-6)=0$

$\therefore\ a=6\ (\because\ a>3)$

답 6

265

전략 $\beta P(\alpha)+\alpha P(\beta)$를 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$에 대한 식으로 나타낸다.

이차방정식 $x^2+x-1=0$의 서로 다른 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-1$$

$$\therefore\ \beta P(\alpha)+\alpha P(\beta)$$
$$=\beta(2\alpha^2-3\alpha)+\alpha(2\beta^2-3\beta)$$
$$=2\alpha^2\beta-3\alpha\beta+2\alpha\beta^2-3\alpha\beta$$
$$=2\alpha\beta(\alpha+\beta)-6\alpha\beta$$
$$=2\times(-1)\times(-1)-6\times(-1)$$
$$=8$$

답 ④

266

전략 $\alpha^2-4\alpha+2=0$, $\beta^2-4\beta+2=0$임을 이용한다.

이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 근이 α, β이므로

$$\alpha^2-4\alpha+2=0,\ \beta^2-4\beta+2=0$$

$$\therefore\ \sqrt{2\alpha^3-7\alpha^2+4\alpha}+\sqrt{2\beta^3-7\beta^2+4\beta}$$
$$=\sqrt{2\alpha(\alpha^2-4\alpha+2)+\alpha^2}$$
$$+\sqrt{2\beta(\beta^2-4\beta+2)+\beta^2}$$
$$=\sqrt{\alpha^2}+\sqrt{\beta^2}$$
$$=|\alpha|+|\beta| \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-2=2>0$$

이므로 α, β는 실수이다.

또 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4>0,\ \alpha\beta=2>0$$

이므로 $\quad \alpha>0,\ \beta>0$

따라서 ㉠에서

$$\sqrt{2\alpha^3-7\alpha^2+4\alpha}+\sqrt{2\beta^3-7\beta^2+4\beta}$$
$$=\alpha+\beta=4$$

답 4

267

전략 근과 계수의 관계를 이용하여 주어진 등식을 k에 대한 이차방정식으로 나타낸다.

이차방정식 $x^2-(4k+1)x+2k+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4k+1,\ \alpha\beta=2k+1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\alpha-\beta=6$에서

$$\alpha\beta(\alpha+\beta)-(\alpha+\beta)=6 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에 ㉠을 대입하면

$$(2k+1)(4k+1)-(4k+1)=6$$

$$4k^2+k-3=0,\qquad (k+1)(4k-3)=0$$

$$\therefore k=-1\ (\because k\text{는 정수})$$

답 -1

268

전략 두 근 $\frac{2}{3}$와 $\frac{7}{2}$을 이용하여 a, c의 관계식을 구하고, 두 근 $\frac{5}{3}$와 1을 이용하여 a, b의 관계식을 구한다.

$ax^2+bx+c=0$에서 a와 c를 바르게 보고 풀었을 때의 두 근이 $\frac{2}{3}$와 $\frac{7}{2}$이므로 두 근의 곱은

$$\frac{c}{a}=\frac{2}{3}\times\frac{7}{2}=\frac{7}{3}$$

$$\therefore c=\frac{7}{3}a \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $ax^2+bx+c=0$에서 a와 b를 바르게 보고 풀었을 때의 두 근이 $\frac{5}{3}$와 1이므로 두 근의 합은

$$-\frac{b}{a}=\frac{5}{3}+1=\frac{8}{3}$$

$$\therefore b=-\frac{8}{3}a \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$ax^2+bx+c=0$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$$ax^2-\frac{8}{3}ax+\frac{7}{3}a=0$$

이때 $a\neq0$이므로 양변에 $\frac{3}{a}$을 곱하면

$$3x^2-8x+7=0$$

따라서 처음 이차방정식의 근은

$$x=\frac{4\pm\sqrt{5}i}{3}$$

답 $x=\frac{4\pm\sqrt{5}i}{3}$

269

전략 두 근의 곱이 음수이므로 두 근을 α, -2α로 놓는다.

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 $-18<0$이므로 두 근의 부호는 서로 다르다.

이때 두 근의 절댓값의 비가 2 : 1이므로 두 근을 α, -2α $(\alpha\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+(-2\alpha)=-(m-5) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\alpha\times(-2\alpha)=-18 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에서 $\alpha^2=9 \qquad \therefore \alpha=\pm3$

㉠에서 $m=\alpha+5$이므로

$m=2$ 또는 $m=8$

답 2, 8

270

전략 $f(x)=k$이면 $f(x)-k=0$임을 이용한다.

이차방정식 $x^2+x-4=0$의 두 근이 α, β이므로

$$x^2+x-4=(x-\alpha)(x-\beta)$$

로 인수분해된다.

한편 $f(\alpha)=f(\beta)=1$에서

$$f(\alpha)-1=f(\beta)-1=0$$

즉 이차방정식 $f(x)-1=0$의 두 근이 α, β이고 이차식 $f(x)$의 이차항의 계수가 1이므로

$$f(x)-1=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+x-4$$

$$\therefore f(x)=x^2+x-3$$

답 $f(x)=x^2+x-3$

271

전략 켤레근의 성질을 이용하여 m, n의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2+mx+n=0$에서 m, n이 실수이고 한 근이 $-1+2i$이므로 다른 한 근은 $-1-2i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1+2i)+(-1-2i)=-m$이므로 $\qquad m=2$

$(-1+2i)(-1-2i)=n$이므로 $\qquad n=5$

두 근 $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$의 합과 곱을 구하면

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$$

$$\frac{1}{m}\times\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$$

즉 $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2-\frac{7}{10}x+\frac{1}{10}=0$$

따라서 $a=-\frac{7}{10}$, $b=\frac{1}{10}$이므로

$$a+b=-\frac{3}{5}$$

답 $-\frac{3}{5}$

272

전략 $|A|^2=A^2$임을 이용하여 주어진 등식을 변형한다.

이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=k \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$|\alpha|+|\beta|=6$의 양변을 제곱하면

$$|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2=36$$

$$\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2=36$$

$$\therefore (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|=36 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에 ㉠을 대입하면

$$4^2-2k+2|k|=36$$

$$\therefore k-|k|=-10$$

(i) $k\geq 0$일 때,

$$k-|k|=k-k=0$$

이므로 등식을 만족시키지 않는다.

(ii) $k<0$일 때,

$$k-|k|=k+k=-10$$

$$2k=-10 \quad \therefore k=-5$$

(i), (ii)에서 $\quad k=-5$

답 **-5**

273

전략 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+1$, $\beta+1$의 합과 곱을 구한다.

이차방정식 $x^2-5x+2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=2$$

한편 $Q(x)=P(x)+x-3$이라 하면 이차방정식 $Q(x)=0$의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$이다.

$\alpha+1$, $\beta+1$의 합과 곱을 구하면

$$(\alpha+1)+(\beta+1)=\alpha+\beta+2=5+2=7,$$

$$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=2+5+1=8$$

이므로

$$Q(x)=a(x^2-7x+8)\ (a\text{는 0이 아닌 상수})$$

이라 할 수 있다.

이때 $Q(-1)=P(-1)-1-3=-4$이므로

$$a\{(-1)^2-7\times(-1)+8\}=-4$$

$$\therefore a=-\frac{1}{4}$$

즉 $Q(x)=-\frac{1}{4}(x^2-7x+8)$이므로

$$Q(2)=-\frac{1}{4}\times(2^2-7\times2+8)=\frac{1}{2}$$

따라서 $P(2)+2-3=\frac{1}{2}$이므로

$$P(2)=\frac{3}{2}$$

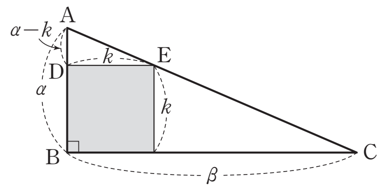
답 $\mathbf{\frac{3}{2}}$

274

전략 정사각형의 한 변의 길이를 k로 놓고, 삼각형의 닮음을 이용하여 k를 α, β에 대한 식으로 나타낸다.

이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=2$$



위의 그림과 같이 직각삼각형 ABC에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를 k라 하면

$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{DE}:\overline{BC}$$

$$(\alpha-k):\alpha=k:\beta$$

$$(\alpha-k)\beta=\alpha k$$

$$(\alpha+\beta)k=\alpha\beta$$

$$\therefore k=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

이때 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$인 정사각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이고, 둘레의 길이는 $4\times\frac{1}{2}=2$이므로

이차방정식 $4x^2+mx+n=0$의 두 근은 $\frac{1}{4}$, 2이다.

$\frac{1}{4}$, 2를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 4인 이차방정식은

$$4\left\{x^2-\left(\frac{1}{4}+2\right)x+\frac{1}{4}\times2\right\}=0$$

$$\therefore 4x^2-9x+2=0$$

따라서 $m=-9$, $n=2$이므로

$$m+n=-7$$

답 ⑤

Ⅱ. 방정식과 부등식

3 이차방정식과 이차함수

01 이차방정식과 이차함수의 관계

● 본책 132~142쪽

275

$y=-3x^2+6kx-k^2-k-5$

$=-3(x-k)^2+2k^2-k-5$

이므로 이 함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(k,\ 2k^2-k-5)$

이 점이 직선 $y=x-1$ 위에 있으므로

$2k^2-k-5=k-1$

$k^2-k-2=0,\qquad (k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=2\ (\because k>0)$

답 **2**

276

이차함수의 식을 $y=a(x+3)(x-1)$ (a는 상수)이라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=-3a \qquad \therefore a=-1$

따라서 이차함수의 식은

$y=-(x+3)(x-1)$

이 함수의 그래프가 점 $(2,\ k)$를 지나므로

$k=-5\times1=-5$

답 **−5**

277

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서

그래프가 아래로 볼록하므로 $\quad a>0$

축이 y축의 왼쪽에 있으므로

$-\dfrac{b}{2a}<0 \qquad \therefore b>0$

y축과의 교점이 원점이므로 $\quad c=0$

ㄱ. $a>0,\ b>0$이므로 $\quad ab>0$ (참)

ㄴ. $x=-1$일 때 $y<0$이므로 $\quad a-b+c<0$

이때 $c=0$이므로 $\quad a-b<0$ (거짓)

ㄷ. $x=-2$일 때 $y=0$이므로 $\quad 4a-2b+c=0$ (참)

ㄹ. $x=\dfrac{1}{3}$일 때 $y>0$이므로 $\quad \dfrac{1}{9}a+\dfrac{1}{3}b+c>0$

$\therefore a+3b+9c>0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 **ㄱ, ㄷ, ㄹ**

278

(1) 이차방정식 $3x^2+6x=0$에서

$x(x+2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-2$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $-2,\ 0$이다.

(2) 이차방정식 $-x^2-2x+8=0$에서

$x^2+2x-8=0,\qquad (x+4)(x-2)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $-4,\ 2$이다.

(3) 이차방정식 $-x^2+8x-16=0$에서

$x^2-8x+16=0,\qquad (x-4)^2=0$

$\therefore x=4$ (중근)

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 4이다.

답 (1) **−2, 0** (2) **−4, 2** (3) **4**

279

(1) 이차방정식 $x^2+2x-4=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1^2-1\times(-4)=5>0$

이므로 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 2이다.

(2) 이차방정식 $2x^2-3x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4\times2\times3=-15<0$

이므로 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 0이다.

(3) 이차방정식 $-x^2+4x-4=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=2^2-(-1)\times(-4)=0$

이므로 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 1이다.

(4) 이차방정식 $3x^2-4x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-3\times(-2)=10>0$

이므로 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 2이다.

답 (1) **2** (2) **0** (3) **1** (4) **2**

280

(1) $2x^2+x-2=10x-6$에서

$$2x^2-9x+4=0, \qquad (2x-1)(x-4)=0$$

$$\therefore x=\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=4$$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x좌표는 $\frac{1}{2}$, 4이다.

(2) $-x^2+3x+1=-x-6$에서

$$x^2-4x-7=0 \qquad \therefore x=2\pm\sqrt{11}$$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x좌표는 $2\pm\sqrt{11}$이다.

(3) $x^2-3x+7=3x-2$에서 $\quad x^2-6x+9=0$

$$(x-3)^2=0 \qquad \therefore x=3 \text{ (중근)}$$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x좌표는 3이다.

답 (1) $\mathbf{\frac{1}{2}}$, **4** (2) $\mathbf{2\pm\sqrt{11}}$ (3) **3**

281

(1) $x^2-3x+3=x-2$에서 $\quad x^2-4x+5=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times5=-1<0$$

이므로 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

(2) $4x^2+5x+2=x+1$에서 $\quad 4x^2+4x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=2^2-4\times1=0$$

이므로 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다. (접한다.)

(3) $2x^2+3x=2x-1$에서 $\quad 2x^2+x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=1^2-4\times2\times1=-7<0$$

이므로 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

(4) $-2x^2+8x+2=2x+5$에서 $\quad 2x^2-6x+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-2\times3=3>0$$

이므로 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

답 (1) **만나지 않는다.**
(2) **한 점에서 만난다. (접한다.)**
(3) **만나지 않는다.**
(4) **서로 다른 두 점에서 만난다.**

282

이차함수 $y=x^2+ax-4$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -1, b이므로 이차방정식 $x^2+ax-4=0$의 두 근이 -1, b이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1+b=-a, \ -1\times b=-4$$

$$\therefore a=-3, \ b=4$$

$$\therefore ab=-12$$

답 $\mathbf{-12}$

283

이차함수 $y=x^2+2x+k$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2+2x+k=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-2, \ \alpha\beta=k \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 두 점 사이의 거리가 4이므로

$$|\alpha-\beta|=4$$

양변을 제곱하면 $\quad (\alpha-\beta)^2=16$

$$\therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에 ㉠을 대입하면

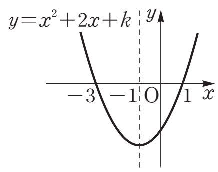
$$(-2)^2-4k=16 \qquad \therefore k=-3$$

답 $\mathbf{-3}$

다른 풀이 $y=x^2+2x+k=(x+1)^2+k-1$

이므로 이 이차함수의 그래프의 축의 방정식은 $x=-1$이다.

이때 주어진 이차함수의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하면 $\overline{AB}=4$이므로



$$\mathrm{A}(-3, 0), \ \mathrm{B}(1, 0)$$

따라서 이차방정식 $x^2+2x+k=0$의 두 근이 -3, 1이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-3\times1=k \qquad \therefore k=-3$$

284

이차방정식 $x^2-2kx+k^2+k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k^2+k+3)=-k-3$$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로

$-k-3>0 \qquad \therefore k<-3$

(2) 접하려면 $D=0$이어야 하므로

$-k-3=0 \qquad \therefore k=-3$

(3) 만나지 않으려면 $D<0$이어야 하므로

$-k-3<0 \qquad \therefore k>-3$

답 (1) $\boldsymbol{k<-3}$ (2) $\boldsymbol{k=-3}$ (3) $\boldsymbol{k>-3}$

285

이차함수 $y=ax^2-8x+a+6$의 그래프가 x축과 접해야 하므로 이차방정식 $ax^2-8x+a+6=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-4)^2-a(a+6)=0$$

$a^2+6a-16=0, \qquad (a+8)(a-2)=0$

$\therefore a=-8$ 또는 $a=2$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(-8)^2+2^2=68$

답 **68**

286

이차함수 $y=2x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 교점의 x좌표는 이차방정식

$2x^2-3x+1=ax+b$, 즉

$2x^2-(3+a)x+1-b=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

의 실근과 같으므로 이차방정식 ㉠의 두 근이 -2, 5이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2+5=\frac{3+a}{2},\ -2\times5=\frac{1-b}{2}$$

$\therefore a=3,\ b=21 \qquad \therefore a+b=24$

답 **24**

287

이차함수 $y=2x^2+5x-3$의 그래프와 직선 $y=-x+k$의 교점의 x좌표는 이차방정식

$2x^2+5x-3=-x+k$, 즉

$2x^2+6x-3-k=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

의 실근과 같으므로 이차방정식 ㉠의 한 근이 -3이다.

㉠에 $x=-3$을 대입하면

$18-18-3-k=0 \qquad \therefore k=-3$

㉠에 $k=-3$을 대입하면 $\qquad 2x^2+6x=0$

$x(x+3)=0 \qquad \therefore x=-3$ 또는 $x=0$

따라서 점 B의 x좌표는 0이므로 $y=-x-3$에 $x=0$을 대입하면 $\qquad y=-3$

즉 점 B의 좌표는 $(0,\ -3)$이다.

답 $\boldsymbol{(0,\ -3)}$

다른 풀이 $2x^2+5x-3=-x+k$, 즉

$2x^2+6x-3-k=0$의 한 근이 -3이므로 다른 한 근을 α라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-3+\alpha=-\frac{6}{2} \qquad \therefore \alpha=0$$

따라서 점 B의 x좌표가 0이므로 점 B의 좌표는

$(0,\ -3)$

288

이차함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프와 직선 $y=2x-1$의 교점의 x좌표는 이차방정식

$x^2-ax+b=2x-1$, 즉

$x^2-(a+2)x+b+1=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

의 실근과 같다.

이때 a, b가 유리수이고 이차방정식 ㉠의 한 근이 $2-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=a+2$

$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=b+1$

$\therefore a=2,\ b=0 \qquad \therefore a+b=2$

답 **2**

289

이차방정식 $x^2-5x-3=-x+k$, 즉

$x^2-4x-3-k=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-(-3-k)=k+7$$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로

$k+7>0 \qquad \therefore k>-7$

(2) 접하려면 $D=0$이어야 하므로

$k+7=0 \qquad \therefore k=-7$

(3) 만나지 않으려면 $D<0$이어야 하므로

$k+7<0 \qquad \therefore k<-7$

답 (1) $\boldsymbol{k>-7}$ (2) $\boldsymbol{k=-7}$ (3) $\boldsymbol{k<-7}$

290

이차함수 $y=x^2-2mx+1+m^2$의 그래프와 직선 $y=2x-1$이 만나므로 이차방정식 $x^2-2mx+1+m^2=2x-1$, 즉 $x^2-2(m+1)x+2+m^2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(m+1)\}^2-(2+m^2)\geq 0$$

$$2m-1\geq 0 \qquad \therefore m\geq\frac{1}{2}$$

답 $\boldsymbol{m\geq\frac{1}{2}}$

291

직선 $y=ax+b$는 직선 $y=-2x+3$과 평행하므로

$$a=-2$$

직선 $y=-2x+b$가 이차함수 $y=x^2+x+4$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $x^2+x+4=-2x+b$, 즉 $x^2+3x+4-b=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=3^2-4\times1\times(4-b)=0$$

$$4b-7=0 \qquad \therefore b=\frac{7}{4}$$

답 $\boldsymbol{a=-2,\ b=\frac{7}{4}}$

개념 노트

두 일차함수의 그래프의 평행

서로 평행한 두 일차함수의 그래프는 기울기가 같고 y절편이 다르다.

⇨ 두 일차함수 $y=ax+b$와 $y=cx+d$의 그래프가 서로 평행하면 $\quad a=c,\ b\neq d$

연습 문제

본책 143~144쪽

292

전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $f(x)=0$의 실근임을 이용한다.

이차함수 $y=x^2-(a+2)x+b^2-b$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 1, 6이므로 이차방정식 $x^2-(a+2)x+b^2-b=0$의 두 근이 1, 6이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$1+6=a+2,\ 1\times6=b^2-b$$

$7=a+2$에서 $\qquad a=5$

$6=b^2-b$에서 $\qquad b^2-b-6=0$

$$(b+2)(b-3)=0 \qquad \therefore b=3\ (\because b>0)$$

$$\therefore a+b=8$$

답 **8**

293

전략 이차함수의 그래프가 지나는 점과 이차방정식의 판별식을 이용하여 a, b에 대한 식을 세운다.

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 점 $(-1,\ 4)$를 지나므로

$$4=1-a+b \qquad \therefore b=a+3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=a^2-4b=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에 ㉠을 대입하면 $\qquad a^2-4(a+3)=0$

$$a^2-4a-12=0, \qquad (a+2)(a-6)=0$$

$$\therefore a=6\ (\because a>0)$$

㉠에 $a=6$을 대입하면 $\qquad b=9$

$$\therefore ab=54$$

답 **54**

294

전략 이차방정식 $x^2+2kx+k=0$은 중근을 갖고, 이차방정식 $2x^2-x+k=0$은 허근을 가짐을 이용한다.

이차함수 $y=x^2+2kx+k$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2+2kx+k=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=k^2-k=0, \qquad k(k-1)=0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 이차함수 $y=2x^2-x+k$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 이차방정식 $2x^2-x+k=0$의 판별식을 D_2라 하면 $\quad D_2=(-1)^2-4\times2\times k<0$

$$1-8k<0 \qquad \therefore k>\frac{1}{8} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\qquad k=1$

답 **1**

295

전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표가 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 실근임을 이용한다.

이차함수 $y=x^2-x+3$의 그래프와 직선 $y=ax+2$의 교점의 x좌표는 이차방정식

$$x^2-x+3=ax+2,\ 즉$$

$$x^2-(a+1)x+1=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

의 실근과 같으므로 이차방정식 ㉠의 두 근이 x_1, x_2이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=a+1$

즉 $a+1=4$이므로 $\quad a=3$

이때 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)가 직선 $y=3x+2$ 위의 점이므로

$y_1=3x_1+2,\ y_2=3x_2+2$

$\therefore\ y_1+y_2=3x_1+2+3x_2+2$

$=3(x_1+x_2)+4$

$=3\times4+4=16$

답 **16**

296

전략 이차방정식의 켤레근의 성질을 이용하여 다른 교점의 x좌표를 구한다.

이차함수 $y=-x^2+4x-1$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 교점의 x좌표는 이차방정식

$-x^2+4x-1=ax+b$, 즉

$x^2+(a-4)x+b+1=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

의 실근과 같다.

이때 a, b가 모두 유리수이고 이차방정식 ㉠의 한 근이 $1+\sqrt{5}$이므로 다른 한 근은 $1-\sqrt{5}$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})=-a+4$

$(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})=b+1$

$\therefore\ a=2,\ b=-5$

$\therefore\ ab=-10$

답 **-10**

297

전략 두 직선의 기울기가 같음을 이용하여 직선의 방정식을 구하고, 이차함수의 식과 연립하여 얻은 이차방정식이 중근을 가짐을 이용한다.

직선 $y=mx+3$은 직선 $y=4x-5$와 평행하므로

$m=4$

직선 $y=4x+3$이 이차함수 $y=ax^2+1$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $ax^2+1=4x+3$, 즉 $ax^2-4x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-a\times(-2)=0$

$4+2a=0 \qquad \therefore\ a=-2$

$\therefore\ a^2+m^2=4+16=20$

답 ④

298

전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접하면 이차방정식 $f(x)=g(x)$가 중근을 가짐을 이용한다.

이차함수 $y=x^2+ax+3a-1$의 그래프가 직선 $y=-x+4$에 접하므로 이차방정식

$x^2+ax+3a-1=-x+4$, 즉

$x^2+(a+1)x+3a-5=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(a+1)^2-4(3a-5)=0$

$a^2-10a+21=0, \qquad (a-3)(a-7)=0$

$\therefore\ a=3$ 또는 $a=7 \qquad \cdots\cdots ㉠$

또 이차함수 $y=x^2+ax+3a-1$의 그래프가 직선 $y=5x+7$에 접하므로 이차방정식

$x^2+ax+3a-1=5x+7$, 즉

$x^2+(a-5)x+3a-8=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(a-5)^2-4(3a-8)=0$

$a^2-22a+57=0, \qquad (a-3)(a-19)=0$

$\therefore\ a=3$ 또는 $a=19 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $\quad a=3$

답 **3**

299

전략 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 이용하여 함수식을 세운다.

세 이차함수의 최고차항의 계수의 절댓값이 같으므로 양수 k에 대하여 두 이차함수 $f(x)$, $h(x)$의 최고차항의 계수를 k라 하면 이차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수는 $-k$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -1, 1이므로 $\quad f(x)=k(x+1)(x-1)$

함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -2, 1이므로 $\quad g(x)=-k(x+2)(x-1)$

함수 $y=h(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 1, 2이므로 $\quad h(x)=k(x-1)(x-2)$

$f(x)+g(x)+h(x)=0$에서

$k(x+1)(x-1)-k(x+2)(x-1)$

$+k(x-1)(x-2)=0$

$k(x-1)\{(x+1)-(x+2)+(x-2)\}=0$

$k(x-1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=3$

따라서 방정식 $f(x)+g(x)+h(x)=0$의 모든 근의 합은

$$1+3=4$$

답 ④

다른 풀이 $f(x)+g(x)+h(x)=0$에서

$$k(x+1)(x-1)-k(x+2)(x-1)+k(x-1)(x-2)=0$$

$$\therefore\ kx^2-4kx+3k=0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 방정식 $f(x)+g(x)+h(x)=0$의 모든 근의 합은

$$-\frac{-4k}{k}=4\ (\because\ k\neq 0)$$

300

전략 이차방정식 $3x^2+kx-1=0$의 두 근의 차가 $\frac{4}{3}$임을 이용한다.

이차함수 $y=3x^2+kx-1$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $3x^2+kx-1=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{k}{3},\ \alpha\beta=-\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\overline{\text{PQ}}=|\alpha-\beta|=\frac{4}{3}$이므로

$$(\alpha-\beta)^2=\frac{16}{9}$$

$$\therefore\ (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{16}{9} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에 ㉠을 대입하면

$$\left(-\frac{k}{3}\right)^2-4\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{9}$$

$$\frac{k^2}{9}+\frac{4}{3}=\frac{16}{9},\qquad k^2=4$$

$$\therefore\ k=\pm 2$$

따라서 $y=3x^2\pm 2x-1=3\left(x\pm\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$의 그래프의 꼭짓점 R의 좌표는

$$\left(\mp\frac{1}{3},\ -\frac{4}{3}\right)$$

$$\therefore\ \triangle\text{PQR}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{8}{9}$$

답 $\frac{8}{9}$

301

전략 이차방정식의 판별식을 이용하여 k에 대한 항등식을 세운다.

이차함수 $y=x^2-2(a+k)x+k^2-2k+b$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2-2(a+k)x+k^2-2k+b=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(a+k)\}^2-(k^2-2k+b)=0$$

$$\therefore\ (2a+2)k+a^2-b=0$$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$2a+2=0,\ a^2-b=0 \qquad \therefore\ a=-1,\ b=1$$

$$\therefore\ ab=-1$$

답 -1

302

전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 만나지 않으면 이차방정식 $f(x)=g(x)$는 실근을 갖지 않음을 이용한다.

이차함수 $y=\frac{1}{4}x^2+kx+14$의 그래프가 직선 $y=-2x-k^2-6$보다 항상 위쪽에 있으려면 이차함수의 그래프와 직선이 만나지 않아야 하므로 이차방정식 $\frac{1}{4}x^2+kx+14=-2x-k^2-6$, 즉 $\frac{1}{4}x^2+(k+2)x+k^2+20=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(k+2)^2-4\times\frac{1}{4}\times(k^2+20)<0$$

$$4k-16<0 \qquad \therefore\ k<4$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 k는 1, 2, 3의 3개이다.

답 3

303

전략 방정식 $f(2x-1)=0$의 해를 α, β로 나타낸다.

이차함수 $y=f(2x-1)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $f(2x-1)=0$의 실근이다.

이때 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(2x-1)=0$이려면

$$2x-1=\alpha \text{ 또는 } 2x-1=\beta$$

$$\therefore\ x=\frac{\alpha+1}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\beta+1}{2}$$

따라서 두 교점 사이의 거리는

$$\frac{\beta+1}{2}-\frac{\alpha+1}{2}=\frac{\beta-\alpha}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=4$에서

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=6^2-4\times4=20$$
$$\therefore \beta-\alpha=2\sqrt{5}\ (\because \alpha<\beta)$$

㉠에 이것을 대입하면 구하는 거리는 $\sqrt{5}$이다.

답 $\sqrt{5}$

02 이차함수의 최대·최소

● 본책 145~151쪽

304

(1) $\boldsymbol{y=3x^2-6x+2}$
$\boldsymbol{=3(x-1)^2-1}$

(2) $x=1$일 때 **최솟값 -1**을 갖고, **최댓값은 없다.**

답 풀이 참조

305

(1) $y=2x^2+6x+3=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$

따라서 $x=-\frac{3}{2}$일 때 **최솟값 $-\frac{3}{2}$**을 갖고, **최댓값은 없다.**

(2) $y=-3x^2+12x-15=-3(x-2)^2-3$

따라서 $x=2$일 때 **최댓값 -3**을 갖고, **최솟값은 없다.**

(3) $y=3x^2-18x+25=3(x-3)^2-2$

따라서 $x=3$일 때 **최솟값 -2**를 갖고, **최댓값은 없다.**

(4) $y=-\frac{1}{2}x^2-2x+5=-\frac{1}{2}(x+2)^2+7$

따라서 $x=-2$일 때 **최댓값 7**을 갖고, **최솟값은 없다.**

답 풀이 참조

306

답 **2, 3, 2, 2, -3, 5, 5, -3**

307

(1) 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 -1은 주어진 범위에 포함되지 않는다.

$0\le x\le1$에서

$x=0$일 때 $y=4$, $x=1$일 때 $y=7$

따라서 **최댓값은 7, 최솟값은 4**이다.

(2) 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 1은 주어진 범위에 포함되지 않는다.

$2\le x\le3$에서

$x=2$일 때 $y=-4$, $x=3$일 때 $y=-10$

따라서 **최댓값은 -4, 최솟값은 -10**이다.

(3) $y=3x^2-6x+6=3(x-1)^2+3$

이므로 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 1은 주어진 범위에 포함된다.

$-1\le x\le2$에서

$x=-1$일 때 $y=15$, $x=1$일 때 $y=3$,

$x=2$일 때 $y=6$

따라서 **최댓값은 15, 최솟값은 3**이다.

(4) $y=-4x^2+4x+3=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4$

이므로 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 $\frac{1}{2}$은 주어진 범위에 포함된다.

$-1\le x\le3$에서

$x=-1$일 때 $y=-5$, $x=\frac{1}{2}$일 때 $y=4$,

$x=3$일 때 $y=-21$

따라서 **최댓값은 4, 최솟값은 -21**이다.

답 풀이 참조

308

$y=-3x^2+2x+1=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$

이므로 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 $\frac{1}{3}$이 $0\le x\le1$에 포함된다.

$0\le x\le1$에서

$x=0$일 때 $y=1$, $x=\frac{1}{3}$일 때 $y=\frac{4}{3}$,

$x=1$일 때 $y=0$

따라서 $M=\frac{4}{3}$, $m=0$이므로

$$M+m=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

309

$y=\frac{1}{3}x^2-2x+k=\frac{1}{3}(x-3)^2-3+k$

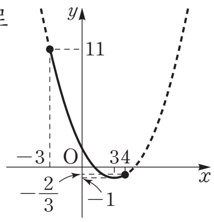
이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 3이 $-3\le x\le 4$에 포함되므로 $x=3$일 때 최솟값 $-3+k$를 갖는다.

즉 $-3+k=-1$이므로 $\quad k=2$

따라서 $y=\frac{1}{3}(x-3)^2-1$이므로

$x=-3$일 때 $y=11$,

$x=4$일 때 $y=-\frac{2}{3}$



즉 주어진 이차함수의 최댓값은 11이다.

답 **11**

310

$x^2+4x=t$로 놓으면

$$t=x^2+4x=(x+2)^2-4$$

$$\therefore t\ge -4$$

이때 주어진 함수는

$$y=-t^2-10t+15$$
$$=-(t+5)^2+40\ (t\ge -4)$$

이므로 $t=-4$일 때 최댓값 39를 갖는다.

답 **39**

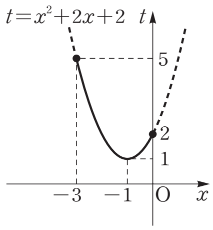
311

$x^2+2x+2=t$로 놓으면

$$t=x^2+2x+2$$
$$=(x+1)^2+1$$

$-3\le x\le 0$이므로 [그림 1]에서

$$1\le t\le 5$$



[그림 1]

이때 주어진 함수는

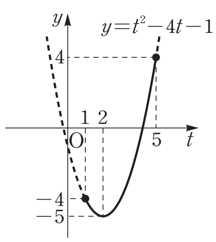
$$y=t^2-4t-1$$
$$=(t-2)^2-5$$
$$(1\le t\le 5)$$

이므로 [그림 2]에서

$t=5$일 때 최댓값 4,

$t=2$일 때 최솟값 -5

를 갖는다.



[그림 2]

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$$4+(-5)=-1$$

답 **−1**

312

$y=-5t^2+30t=-5(t-3)^2+45$

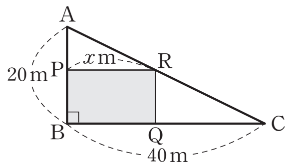
이때 $0\le t\le 6$이므로 $t=3$일 때 최댓값 45를 갖는다.

따라서 물체가 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이는 45 m이다.

답 **45 m**

313

오른쪽 그림과 같이 상가 건물의 바닥면의 가로의 길이를 x m라 하면



$\triangle APR \backsim \triangle ABC$

(AA 닮음)이므로

$\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{PR}:\overline{BC}$에서

$\overline{AP}:20=x:40,\qquad 40\overline{AP}=20x$

$\therefore \overline{AP}=\frac{1}{2}x\ (\text{m})$

$\therefore \overline{PB}=20-\frac{1}{2}x\ (\text{m})$

직사각형 PBQR의 넓이를 $S\ \text{m}^2$라 하면

$$S=\overline{PR}\times\overline{PB}$$
$$=x\left(20-\frac{1}{2}x\right)=-\frac{1}{2}x^2+20x$$
$$=-\frac{1}{2}(x-20)^2+200$$

이때 $0<x<40$이므로 S는 $x=20$일 때 최댓값 200을 갖는다.

따라서 상가 건물의 바닥면의 넓이의 최댓값은 $200\ \text{m}^2$이다.

답 **200 m²**

314

$4x^2+y^2-16x+2y+1$

$=4(x-2)^2+(y+1)^2-16$

이때 x, y가 실수이므로

$$(x-2)^2\ge 0,\ (y+1)^2\ge 0$$

따라서 주어진 식은 $x=2$, $y=-1$일 때 최솟값 -16을 갖는다.

답 **−16**

315

$2x^2-y^2$에 $y=2x-1$을 대입하면

$$2x^2-y^2=2x^2-(2x-1)^2=-2x^2+4x-1$$
$$=-2(x-1)^2+1$$

따라서 주어진 이차식은 $x=1$, $y=1$일 때 최댓값 1을 갖는다.

답 1

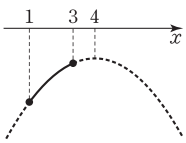
연습 문제 • 본책 152~153쪽

316

전략 주어진 x의 값의 범위에서 이차함수의 그래프를 그려 본다.

$y=-ax^2+8ax-14a-b$
$=-a(x-4)^2+2a-b$

$a>0$이므로 $1\le x\le 3$에서 이 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 4는 $1\le x\le 3$에 포함되지 않는다.

따라서 $x=3$일 때 최댓값 $a-b$를 가지므로

$a-b=-2$ ······ ㉠

$x=1$일 때 최솟값 $-7a-b$를 가지므로

$-7a-b=-10$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$

$\therefore a+b=4$

답 4

317

전략 주어진 조건을 이용하여 함수 $f(x)$를 구한다.

$f(-5)=f(3)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은

$$x=\frac{-5+3}{2}=-1$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 1)$이므로

$f(x)=(x+1)^2+1$

$-2\le x\le 2$에서

$f(-2)=2$, $f(2)=10$

이므로 구하는 최댓값은 10이다.

답 10

318

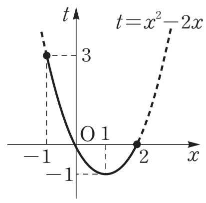
전략 x^2-2x를 t로 치환하고, $-1\le x\le 2$에서 t의 값의 범위를 구한다.

$x^2-2x=t$로 놓으면

$t=x^2-2x$
$=(x-1)^2-1$

$-1\le x\le 2$이므로 [그림 1]에서

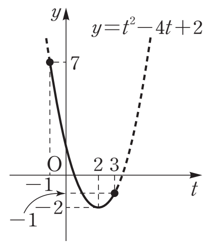
$-1\le t\le 3$



[그림 1]

이때 주어진 함수는

$y=(t-1)^2-2t+1$
$=t^2-4t+2$
$=(t-2)^2-2$
$(-1\le t\le 3)$



[그림 2]

이므로 [그림 2]에서

$t=-1$일 때 최댓값 7,
$t=2$일 때 최솟값 -2

를 갖는다.

따라서 $M=7$, $m=-2$이므로

$M+m=5$

답 ②

319

전략 주어진 함수식을 변형하여 최댓값을 구한다.

$y=-200x^2+1600x-1700$
$=-200(x-4)^2+1500$

이므로 $x=4$일 때 최댓값 1500을 갖는다.

따라서 입장권 한 장의 가격을 4만 원으로 정할 때 수익이 최대가 되고, 그때의 수익은 1500만 원이다.

답 **가격: 4만 원, 수익: 1500만 원**

320

전략 $-3\le x\le 0$인 경우와 $0\le x\le 3$인 경우로 나누어 최댓값과 최솟값을 구한다.

(i) $-3\le x\le 0$일 때

$y=x^2+4x+5=(x+2)^2+1$에서

$x=-3$일 때 $y=2$, $x=-2$일 때 $y=1$,
$x=0$일 때 $y=5$

이므로 최댓값은 5, 최솟값은 1이다.

(ii) $0 \le x \le 3$일 때

$y = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$에서

$x=0$일 때 $y=5$, $x=2$일 때 $y=1$,

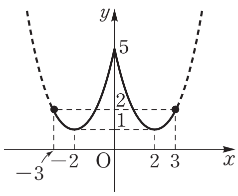
$x=3$일 때 $y=2$

이므로 최댓값은 5, 최솟값은 1이다.

(i), (ii)에서 주어진 함수의 최댓값은 5, 최솟값은 1이므로 구하는 차는

$5-1=4$ **답 4**

참고 $-3 \le x \le 3$에서 $y = x^2 - 4|x| + 5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



321

전략 먼저 주어진 이차함수의 식을 변형하여 $f(a)$를 구한다.

$y = -x^2 - 2ax + 4a - 1$

$= -(x+a)^2 + a^2 + 4a - 1$

따라서 $x=-a$일 때 최댓값은 a^2+4a-1이므로

$f(a) = a^2 + 4a - 1 = (a+2)^2 - 5$

$-5 \le a \le 0$에서

$f(-5)=4$, $f(-2)=-5$, $f(0)=-1$

이므로 $f(a)$는 $a=-2$일 때 최솟값 -5, $a=-5$일 때 최댓값 4를 갖는다.

따라서 구하는 합은

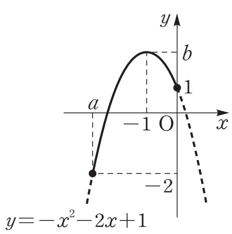
$4+(-5)=-1$ **답 ③**

322

전략 x의 값의 범위와 y의 값의 범위를 만족시키는 이차함수의 그래프를 그려 본다.

$y = -x^2 - 2x + 1 = -(x+1)^2 + 2$

$a \le x \le 0$에서 $-2 \le y \le b$이려면 이 함수의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $x=a$일 때 $y=-2$이므로

$-2 = -a^2 - 2a + 1$

$a^2 + 2a - 3 = 0$

$(a+3)(a-1) = 0$

$\therefore a = -3$ ($\because a < 0$)

또 $x=-1$일 때 $y=b$이므로

$b=2$

$\therefore a+b=-1$ **답 −1**

323

전략 주어진 조건을 이용하여 p, q에 대한 식을 세운다.

조건 (가)에서 이차함수 $f(x) = -x^2 + px - q$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D = p^2 - 4q = 0$

$\therefore q = \dfrac{p^2}{4}$ ⋯⋯ ㉠

$\therefore f(x) = -x^2 + px - \dfrac{p^2}{4}$

$= -\left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표 $\dfrac{p}{2}$가 $-p \le x \le p$에 포함되므로

$f(-p) = -\dfrac{9}{4}p^2$, $f\left(\dfrac{p}{2}\right)=0$, $f(p) = -\dfrac{p^2}{4}$

에서 이차함수 $f(x)$는 $x=-p$일 때 최솟값 $-\dfrac{9}{4}p^2$을 갖는다.

즉 $-\dfrac{9}{4}p^2 = -54$이므로 $p^2=24$

㉠에 $p^2=24$를 대입하면

$q = \dfrac{24}{4} = 6$

$\therefore p^2 + q^2 = 24 + 36 = 60$ **답 60**

324

전략 x^2+2x-1을 t로 치환하고, t의 값의 범위를 구한다.

$x^2+2x-1=t$로 놓으면

$t = x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 2$

$\therefore t \ge -2$

이때 주어진 함수는

$y = -2t^2 + 12t - k$

$= -2(t-3)^2 + 18 - k$ $(t \ge -2)$

이므로 $t=3$일 때 최댓값 $18-k$를 갖는다.

즉 $18-k=15$이므로

$k=3$ **답 3**

325

전략 두 점 P, Q의 y좌표가 같음을 이용하여 $\overline{PQ}$의 길이에 대한 식을 세운다.

점 P의 x좌표를 a라 하면

$$P(a, (a+1)^2)$$

이때 두 점 P, Q의 y좌표가 같으므로 $y=x-3$에 $y=(a+1)^2$을 대입하면

$$(a+1)^2=x-3 \qquad \therefore x=a^2+2a+4$$

즉 점 Q의 좌표는 $(a^2+2a+4, (a+1)^2)$이므로

$$\overline{PQ}=(a^2+2a+4)-a=a^2+a+4$$
$$=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$일 때 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 $\frac{15}{4}$이다.

답 $\frac{15}{4}$

326

전략 x^2+y^2+2를 y에 대한 이차식으로 나타내어 최댓값과 최솟값을 구한다.

$y=x+1$에서 $x=y-1$이므로

$$x^2+y^2+2=(y-1)^2+y^2+2=2y^2-2y+3$$
$$=2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2} \ (-1\le y\le 3)$$

따라서 주어진 식은 $y=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $\frac{5}{2}$, $y=3$일 때 최댓값 15를 가지므로

$$M=15, \ m=\frac{5}{2}$$
$$\therefore M-4m=15-4\times\frac{5}{2}=5$$

답 5

327

전략 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 3 미만일 때와 3 이상일 때로 나누어 최솟값을 구한다.

$y=2x^2-8kx=2(x-2k)^2-8k^2 \ (x\ge 3)$

(ⅰ) $2k<3$, 즉 $k<\frac{3}{2}$일 때,

꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 포함되지 않으므로 $x=3$일 때 최솟값 $18-24k$를 갖는다.

즉 $18-24k=16$이므로

$$k=\frac{1}{12}$$

(ⅱ) $2k\ge 3$, 즉 $k\ge\frac{3}{2}$일 때,

꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 포함되므로 $x=2k$일 때 최솟값 $-8k^2$을 갖는다.

즉 $-8k^2=16$이므로 $\qquad k^2=-2$

이때 이를 만족시키는 실수 k의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\qquad k=\frac{1}{12}$

답 $\frac{1}{12}$

328

전략 $\overline{AQ}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CQ}$의 길이를 x에 대한 식으로 나타낸다.

선분 AP는 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC의 높이이므로

$$\overline{AP}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$$

이때 $\overline{PQ}=x$이므로

$$\overline{AQ}=\overline{AP}-\overline{PQ}=\sqrt{3}-x$$
$$\therefore \overline{AQ}^2=(\sqrt{3}-x)^2=x^2-2\sqrt{3}x+3$$

또 삼각형 BPQ는 직각삼각형이고, $\triangle BPQ\equiv\triangle CPQ$ (SAS 합동)이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{BQ}^2=\overline{CQ}^2=\overline{BP}^2+\overline{PQ}^2=1+x^2$$
$$\therefore \overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2+\overline{CQ}^2$$
$$=(x^2-2\sqrt{3}x+3)+(1+x^2)+(1+x^2)$$
$$=3x^2-2\sqrt{3}x+5$$
$$=3\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+4$$

따라서 $\overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2+\overline{CQ}^2$은 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$일 때 최솟값 4를 가지므로

$$a=\frac{\sqrt{3}}{3}, \ m=4$$
$$\therefore \frac{m}{a}=4\times\frac{3}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$$

답 ③

개념 노트

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이를 h, 넓이를 S라 하면

① $h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ② $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

Ⅱ. 방정식과 부등식

4 여러 가지 방정식

01 삼차방정식과 사차방정식

● 본책 156~164쪽

329

(1) $(x-2)(2x-5)(x-3)=0$에서

$\boldsymbol{x=2}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{5}{2}}$ **또는** $\boldsymbol{x=3}$

(2) $(x+2)(x^2-3x+4)=0$에서

$\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{2}}$

(3) $x^3+4x=0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x^2+4)=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=0}$ **또는** $\boldsymbol{x=\pm 2i}$

(4) $x^3+3x^2+2x=0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x+2)(x+1)=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=0}$ **또는** $\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=-1}$

(5) $2x^3-x^2+2x-1=0$의 좌변을 인수분해하면

$x^2(2x-1)+(2x-1)=0$

$(2x-1)(x^2+1)=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=\frac{1}{2}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\pm i}$

(6) $x^3+8=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x+2)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=1\pm\sqrt{3}i}$

(7) $x^3-27=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x-3)(x^2+3x+9)=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=3}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{-3\pm 3\sqrt{3}i}{2}}$

(8) $x^3+6x^2+12x+8=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x+2)^3=0$ $\quad\therefore$ $\boldsymbol{x=-2}$ **(삼중근)**

답 **풀이 참조**

330

(1) $(x+3)(x+2)(x-1)(x-4)=0$에서

$\boldsymbol{x=-3}$ **또는** $\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=1}$ **또는** $\boldsymbol{x=4}$

(2) $(x^2-3x+2)(x^2-3x-2)=0$에서

$(x-1)(x-2)(x^2-3x-2)=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=1}$ **또는** $\boldsymbol{x=2}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}}$

(3) $x^4-2x^2=0$에서

$x^2(x^2-2)=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=0}$ **(중근) 또는** $\boldsymbol{x=\pm\sqrt{2}}$

(4) $x^4-1=0$에서

$(x^2+1)(x^2-1)=0$

$(x^2+1)(x+1)(x-1)=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=\pm i}$ **또는** $\boldsymbol{x=-1}$ **또는** $\boldsymbol{x=1}$

(5) $x^4-3x^3-4x^2+12x=0$에서

$x^3(x-3)-4x(x-3)=0$

$(x^3-4x)(x-3)=0$

$x(x^2-4)(x-3)=0$

$x(x+2)(x-2)(x-3)=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=0}$ **또는** $\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=2}$ **또는** $\boldsymbol{x=3}$

(6) $x^4-2x^3+x-2=0$에서

$x^3(x-2)+(x-2)=0$

$(x-2)(x^3+1)=0$

$(x-2)(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=2}$ **또는** $\boldsymbol{x=-1}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$

답 **풀이 참조**

331

(1) $f(x)=x^3-4x^2+8$이라 하면

$f(2)=8-16+8=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -4 & 0 & 8 \\ & & 2 & -4 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore$ $f(x)=(x-2)(x^2-2x-4)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-2)(x^2-2x-4)=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=2}$ **또는** $\boldsymbol{x=1\pm\sqrt{5}}$

(2) $f(x)=3x^3-14x^2+20x-9$라 하면

$f(1)=3-14+20-9=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 3 & -14 & 20 & -9 \\ & & 3 & -11 & 9 \\ \hline & 3 & -11 & 9 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore$ $f(x)=(x-1)(3x^2-11x+9)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(3x^2-11x+9)=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=1}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{11\pm\sqrt{13}}{6}}$

(3) $f(x)=x^4+4x^3-x^2-16x-12$라 하면

$f(-1)=1-4-1+16-12=0,$

$f(2)=16+32-4-32-12=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	4	-1	-16	-12
		-1	-3	4	12
2	1	3	-4	-12	0
		2	10	12	
	1	5	6	0	

$\therefore f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+5x+6)$

$=(x+1)(x-2)(x+3)(x+2)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+3)(x+2)(x+1)(x-2)=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=-3}$ **또는** $\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=-1}$

또는 $\boldsymbol{x=2}$

(4) $f(x)=x^4-6x^2-3x+2$라 하면

$f(-1)=1-6+3+2=0,$

$f(-2)=16-24+6+2=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	0	-6	-3	2
		-1	1	5	-2
-2	1	-1	-5	2	0
		-2	6	-2	
	1	-3	1	0	

$\therefore f(x)=(x+1)(x+2)(x^2-3x+1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x+2)(x^2-3x+1)=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{x=-1}$ **또는** $\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$

답 **풀이 참조**

332

(1) $x^2+3x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X-3)(X+4)=8,\quad X^2+X-20=0$

$(X+5)(X-4)=0$

$\therefore X=-5$ 또는 $X=4$

(i) $X=-5$일 때, $\quad x^2+3x+5=0$

$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{11}i}{2}$

(ii) $X=4$일 때, $\quad x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서

$\boldsymbol{x=-4}$ **또는** $\boldsymbol{x=1}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{-3\pm\sqrt{11}i}{2}}$

(2) $(x^2+2x)^2=2x^2+4x+3$에서

$(x^2+2x)^2-2x^2-4x-3=0$

$\therefore (x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-3=0$

$x^2+2x=X$로 놓으면

$X^2-2X-3=0,\quad (X+1)(X-3)=0$

$\therefore X=-1$ 또는 $X=3$

(i) $X=-1$일 때, $\quad x^2+2x+1=0$

$(x+1)^2=0\quad \therefore x=-1$ (중근)

(ii) $X=3$일 때, $\quad x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서

$\boldsymbol{x=-1}$ **(중근) 또는** $\boldsymbol{x=-3}$ **또는** $\boldsymbol{x=1}$

(3) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0$에서

$\{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}+15=0$

$\therefore (x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15=0$

$x^2+8x=X$로 놓으면

$(X+7)(X+15)+15=0$

$X^2+22X+120=0$

$(X+12)(X+10)=0$

$\therefore X=-12$ 또는 $X=-10$

(i) $X=-12$일 때, $\quad x^2+8x+12=0$

$(x+6)(x+2)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=-2$

(ii) $X=-10$일 때, $\quad x^2+8x+10=0$

$\therefore x=-4\pm\sqrt{6}$

(i), (ii)에서

$\boldsymbol{x=-6}$ **또는** $\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=-4\pm\sqrt{6}}$

답 **풀이 참조**

참고 공통부분을 다르게 생각할 수도 있다.

(3) $(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15=0$에서

① $x^2+8x+7=X$로 놓으면 $X(X+8)+15=0$

$(X+5)(X+3)=0$ $\therefore X=-5$ 또는 $X=-3$

② $x^2+8x+11=X$로 놓으면 $(X-4)(X+4)+15=0$

$(X+1)(X-1)=0$ $\therefore X=-1$ 또는 $X=1$

333

(1) $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-X-72=0,\quad (X+8)(X-9)=0$

$\therefore X=-8$ 또는 $X=9$

따라서 $x^2=-8$ 또는 $x^2=9$이므로

$\boldsymbol{x=\pm 2\sqrt{2}i}$ **또는** $\boldsymbol{x=\pm 3}$

(2) $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$2X^2-X-1=0,\quad (2X+1)(X-1)=0$

$\therefore X=-\frac{1}{2}$ 또는 $X=1$

따라서 $x^2=-\frac{1}{2}$ 또는 $x^2=1$이므로

$\boldsymbol{x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i}$ **또는** $\boldsymbol{x=\pm 1}$

(3) $x^4-6x^2+1=0$에서

$(x^4-2x^2+1)-4x^2=0$

$(x^2-1)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)=0$

$\therefore x^2+2x-1=0$ 또는 $x^2-2x-1=0$

(i) $x^2+2x-1=0$에서 $x=-1\pm\sqrt{2}$

(ii) $x^2-2x-1=0$에서 $x=1\pm\sqrt{2}$

(i), (ii)에서

$\boldsymbol{x=-1\pm\sqrt{2}}$ **또는** $\boldsymbol{x=1\pm\sqrt{2}}$

(4) $x^4+16=0$에서

$(x^4+8x^2+16)-8x^2=0$

$(x^2+4)^2-(2\sqrt{2}x)^2=0$

$(x^2+2\sqrt{2}x+4)(x^2-2\sqrt{2}x+4)=0$

$\therefore x^2+2\sqrt{2}x+4=0$ 또는 $x^2-2\sqrt{2}x+4=0$

(i) $x^2+2\sqrt{2}x+4=0$에서 $x=-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i$

(ii) $x^2-2\sqrt{2}x+4=0$에서 $x=\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i$

(i), (ii)에서

$\boldsymbol{x=-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}$ **또는** $\boldsymbol{x=\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}$

답 **풀이 참조**

334

$x^3-px+6=0$의 한 근이 -3이므로 $x=-3$을 대입하면

$-27+3p+6=0$ $\therefore p=7$

따라서 주어진 방정식은

$x^3-7x+6=0$

이 방정식의 한 근이 -3이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 변형하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & -3 & 9 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore (x+3)(x^2-3x+2)=0$

이때 α, β는 이차방정식 $x^2-3x+2=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$

$\therefore p+\alpha+\beta=7+3=10$

답 **10**

335

$x^4+ax^3+3x^2+x+b=0$의 두 근이 -1, 2이므로 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면

$1-a+3-1+b=0$에서

$a-b=3$ ⋯⋯ ㉠

$16+8a+12+2+b=0$에서

$8a+b=-30$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-6$

따라서 주어진 방정식은

$x^4-3x^3+3x^2+x-6=0$

이 방정식의 두 근이 -1, 2이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -3 & 3 & 1 & -6 \\ & & -1 & 4 & -7 & 6 \\ \hline 2 & 1 & -4 & 7 & -6 & \boxed{0} \\ & & 2 & -4 & 6 & \\ \hline & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore (x+1)(x-2)(x^2-2x+3)=0$

이때 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 두 근의 곱은 3이다.

답 **3**

336

$f(x)=x^3+x^2+kx-k-2$라 하면

$f(1)=1+1+k-k-2=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & k & -k-2 \\ & & 1 & 2 & k+2 \\ \hline & 1 & 2 & k+2 & 0 \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2+2x+k+2)$

이때 방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지려면

(i) 이차방정식 $x^2+2x+k+2=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우

$1+2+k+2=0$

$\therefore k=-5$

(ii) 이차방정식 $x^2+2x+k+2=0$이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-(k+2)=0$

$\therefore k=-1$

(i), (ii)에서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은

$-5+(-1)=-6$ 답 -6

337

$f(x)=x^3+3x^2+(k+2)x+k$라 하면

$f(-1)=-1+3-(k+2)+k=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & k+2 & k \\ & & -1 & -2 & -k \\ \hline & 1 & 2 & k & 0 \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x^2+2x+k)$

이때 방정식 $f(x)=0$이 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+2x+k=0$이 허근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-k<0 \qquad \therefore k>1$ 답 $k>1$

338

$f(x)=x^3-3x^2+(a+2)x-2a$라 하면

$f(2)=8-12+2(a+2)-2a=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -3 & a+2 & -2a \\ & & 2 & -2 & 2a \\ \hline & 1 & -1 & a & 0 \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-2)(x^2-x+a)$

이때 방정식 $f(x)=0$의 세 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 $x^2-x+a=0$이 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4a\geq 0 \qquad \therefore a\leq\frac{1}{4}$ 답 $a\leq\frac{1}{4}$

339

처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라 하면 새로 만든 직육면체의 가로의 길이는 $(x-1)$ cm, 세로의 길이는 $(x+2)$ cm, 높이는 $(x+3)$ cm이므로

$(x-1)(x+2)(x+3)=\frac{5}{2}x^3$

$x^3+4x^2+x-6=\frac{5}{2}x^3$

$\therefore 3x^3-8x^2-2x+12=0$ ······ ㉠

$f(x)=3x^3-8x^2-2x+12$라 하면

$f(2)=24-32-4+12=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 3 & -8 & -2 & 12 \\ & & 6 & -4 & -12 \\ \hline & 3 & -2 & -6 & 0 \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-2)(3x^2-2x-6)$

즉 ㉠에서

$(x-2)(3x^2-2x-6)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{19}}{3}$

이때 x는 자연수이므로 $x=2$

따라서 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는 2 cm이다.

답 2 cm

340

직육면체 모양의 상자의 가로의 길이는 $(15-2x)$ cm, 세로의 길이는 $(12-2x)$ cm, 높이는 x cm이므로

$(15-2x)(12-2x)x=176$

$\therefore 2x^3-27x^2+90x-88=0$ ······ ㉠

$f(x)=2x^3-27x^2+90x-88$이라 하면

$$f(2)=16-108+180-88=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -27 & 90 & -88 \\ & & 4 & -46 & 88 \\ \hline & 2 & -23 & 44 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x-2)(2x^2-23x+44)$$

즉 ㉠에서 $\quad (x-2)(2x^2-23x+44)=0$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=\frac{23\pm\sqrt{177}}{4}$$

이때 x는 자연수이므로 $\quad x=2$ **답 2**

참고 모서리의 길이는 양수이므로

$15-2x>0$, $12-2x>0$, $x>0$

$\therefore 0<x<6$

연습 문제

본책 165~166쪽

341

전략 주어진 방정식에서 좌변의 식의 값을 0으로 만드는 x의 값을 찾아 좌변을 인수분해한다.

$f(x)=x^3-9x^2+13x+23$이라 하면

$$f(-1)=-1-9-13+23=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -9 & 13 & 23 \\ & & -1 & 10 & -23 \\ \hline & 1 & -10 & 23 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x+1)(x^2-10x+23)$$

따라서 주어진 방정식은

$$(x+1)(x^2-10x+23)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=5\pm\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore |\alpha|+|\beta|+|\gamma|&=1+(5+\sqrt{2})+(5-\sqrt{2})\\&=11\end{aligned}$$

답 11

342

전략 주어진 방정식에서 좌변을 인수분해하여 α를 한 근으로 하는 이차방정식을 구한다.

$f(x)=x^4-2x^3+x^2-4$라 하면

$$f(-1)=1+2+1-4=0,$$

$$f(2)=16-16+4-4=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & -4 \\ & & -1 & 3 & -4 & 4 \\ \hline 2 & 1 & -3 & 4 & -4 & \boxed{0} \\ & & 2 & -2 & 4 & \\ \hline & 1 & -1 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x+1)(x-2)(x^2-x+2)$$

따라서 허근 α는 이차방정식 $x^2-x+2=0$의 한 근이므로 $\quad \alpha^2-\alpha+2=0$

양변을 α로 나누면 $\quad \alpha-1+\dfrac{2}{\alpha}=0$

$$\therefore \alpha+\frac{2}{\alpha}=1$$

답 1

343

전략 상수항의 합이 같은 것끼리 두 개씩 짝을 지어 전개한다.

$x(x-1)(x-2)(x-3)=24$에서

$$\{x(x-3)\}\{(x-1)(x-2)\}=24$$

$$(x^2-3x)(x^2-3x+2)=24$$

$x^2-3x=X$로 놓으면

$$X(X+2)=24$$

$$X^2+2X-24=0, \qquad (X+6)(X-4)=0$$

$$\therefore X=-6 \text{ 또는 } X=4$$

(i) $X=-6$일 때, $\quad x^2-3x+6=0$

$$\therefore x=\frac{3\pm\sqrt{15}i}{2}$$

(ii) $X=4$일 때, $\quad x^2-3x-4=0$

$$(x+1)(x-4)=0 \qquad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=4$$

(i), (ii)에서

$$\alpha\beta=-1\times4=-4,$$

$$\gamma\delta=\frac{3+\sqrt{15}i}{2}\times\frac{3-\sqrt{15}i}{2}=\frac{9+15}{4}=6$$

$$\therefore \alpha\beta-\gamma\delta=-4-6=-10$$

답 -10

참고 이차방정식의 판별식과 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha\beta$, $\gamma\delta$의 값을 구할 수도 있다.

즉 이차방정식 $x^2-3x+6=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=9-24=-15<0$$

이므로 이 이차방정식은 허근을 갖는다.

이차방정식 $x^2-3x-4=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=9+16=25>0$$

이므로 이 이차방정식은 실근을 갖는다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta=-4,\ \gamma\delta=6$$

344

전략 이차항 $-15x^2$을 분리하여 좌변을 A^2-B^2의 꼴로 변형한다.

$x^4-15x^2+25=0$에서

$$(x^4+10x^2+25)-25x^2=0$$
$$(x^2+5)^2-(5x)^2=0$$
$$(x^2+5x+5)(x^2-5x+5)=0$$
$$\therefore\ x^2+5x+5=0 \text{ 또는 } x^2-5x+5=0$$

이차방정식 $x^2+5x+5=0$의 두 근을 α, β, 이차방정식 $x^2-5x+5=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-5,\ \alpha\beta=5,\ \gamma+\delta=5,\ \gamma\delta=5$$
$$\therefore\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}$$
$$=\frac{-5}{5}+\frac{5}{5}=0$$

답 0

345

전략 주어진 방정식에 $x=-1$을 대입하면 등식이 성립함을 이용하여 a의 값을 구한다.

$x^3-x^2+ax-1=0$의 한 근이 -1이므로 $x=-1$을 대입하면

$$-1-1-a-1=0 \qquad \therefore\ a=-3$$

따라서 주어진 방정식은

$$x^3-x^2-3x-1=0$$

이 방정식의 한 근이 -1이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ & & -1 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\therefore\ (x+1)(x^2-2x-1)=0$$

이때 α, β는 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1$$
$$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=2^2-2\times(-1)=6$$
$$\therefore\ a^2+\alpha^2+\beta^2=(-3)^2+6=15$$

답 15

346

전략 주어진 방정식에 $x=3$, $x=-2$를 대입하여 a, b에 대한 연립방정식을 세운다.

$x^4+ax^3+ax^2+11x+b=0$의 두 근이 3, -2이므로 $x=3$, $x=-2$를 각각 대입하면

$81+27a+9a+33+b=0$에서

$$36a+b=-114 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$16-8a+4a-22+b=0$에서

$$4a-b=-6 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-3,\ b=-6$

따라서 주어진 방정식은

$$x^4-3x^3-3x^2+11x-6=0$$

이 방정식의 두 근이 3, -2이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 1 & -3 & -3 & 11 & -6 \\ & & 3 & 0 & -9 & 6 \\ \hline -2 & 1 & 0 & -3 & 2 & \boxed{0} \\ & & -2 & 4 & -2 & \\ \hline & 1 & -2 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$(x-3)(x+2)(x^2-2x+1)=0$$
$$\therefore\ (x-3)(x+2)(x-1)^2=0$$

따라서 나머지 근은

$$x=1\ (\text{중근})$$

답 $x=1$ (중근)

347

전략 주어진 방정식에서 좌변의 식의 값을 0으로 만드는 x의 값을 찾아 좌변을 인수분해하고 판별식을 이용한다.

$f(x)=x^3-(2k+1)x-2k$라 하면

$$f(-1)=-1+2k+1-2k=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -2k-1 & -2k \\ & & -1 & 1 & 2k \\ \hline & 1 & -1 & -2k & \boxed{0} \end{array}$$

$$\therefore\ f(x)=(x+1)(x^2-x-2k)$$

이때 방정식 $f(x)=0$의 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 $x^2-x-2k=0$이 실근을 가져야 한다.
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=1+8k\geq 0 \qquad \therefore k\geq -\frac{1}{8}$$

답 $\boldsymbol{k\geq -\frac{1}{8}}$

348

전략 주어진 방정식에서 좌변을 인수분해하여 α, β를 두 근으로 하는 이차방정식을 구한다.

$f(x)=x^4-4x^3+7x^2-8x+4$라 하면

$$f(1)=1-4+7-8+4=0,$$
$$f(2)=16-32+28-16+4=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -4 & 7 & -8 & 4 \\
 & & 1 & -3 & 4 & -4 \\ \hline
2 & 1 & -3 & 4 & -4 & \boxed{0} \\
 & & 2 & -2 & 4 & \\ \hline
 & 1 & -1 & 2 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x^2-x+2)$$

따라서 주어진 방정식은

$$(x-1)(x-2)(x^2-x+2)=0$$

이때 α, β는 이차방정식 $x^2-x+2=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=2$$
$$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$
$$=1^3-3\times2\times1=-5$$

답 $\boldsymbol{-5}$

참고 이차방정식 $x^2-x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=1-8=-7<0$$

이므로 이 이차방정식은 두 허근을 갖는다.

349

전략 α, β의 관계식을 이용하여 실수와 허수를 구분한다.

α가 실수이고 β가 허수이면 α^2은 실수이고 -2β는 허수이므로

$$\alpha^2\neq -2\beta$$

따라서 α는 허수이고, β는 실수이다.
삼차방정식 $x^3-x^2-kx+k=0$에서

$$x^2(x-1)-k(x-1)=0$$
$$(x-1)(x^2-k)=0$$
$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{k}$$

이때 β는 실수, α, γ는 허수이므로

$$\beta=1,\ \alpha^2=\gamma^2=k\ (k<0)$$

따라서 $\alpha^2=-2\beta=-2$이므로 $\quad k=-2$
즉 $\gamma^2=-2$이므로

$$\beta^2+\gamma^2=1^2+(-2)=-1$$

답 ⑤

350

전략 주어진 방정식을 $(x-a)(x^2+px+q)=0$의 꼴로 인수분해 한 후 이차방정식 $x^2+px+q=0$이 $x\neq a$인 서로 다른 두 실근을 가져야 함을 이용한다.

$f(x)=x^3+(4-a)x^2-5ax+a^2$이라 하면

$$f(a)=a^3+(4-a)a^2-5a^2+a^2=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
a & 1 & 4-a & -5a & a^2 \\
 & & a & 4a & -a^2 \\ \hline
 & 1 & 4 & -a & \boxed{0}
\end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x-a)(x^2+4x-a)$$

이때 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2+4x-a=0$이 $x\neq a$인 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
따라서 이차방정식 $x^2+4x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=4+a>0 \qquad \therefore a>-4 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

또 $x=a$는 이차방정식 $x^2+4x-a=0$의 근이 아니어야 하므로

$$a^2+4a-a\neq 0, \qquad a(a+3)\neq 0$$
$$\therefore a\neq 0,\ a\neq -3 \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 음의 정수 a는 -2, -1의 2개이다.

답 **2**

351

전략 주어진 방정식을 $(x-\alpha)(2x^2+px+q)=0$ (α는 실수)의 꼴로 인수분해한 후 이차방정식 $2x^2+px+q=0$이 $x=\alpha$를 중근으로 갖거나 허근을 가져야 함을 이용한다.

$f(x)=2x^3-6x^2-2(k-2)x+2k$라 하면

$$f(1)=2-6-2k+4+2k=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & -6 & -2k+4 & 2k \\ & & 2 & -4 & -2k \\ \hline & 2 & -4 & -2k & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-1)(2x^2-4x-2k)$

이때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근이 1개이려면 이차방정식 $2x^2-4x-2k=0$이 $x=1$을 중근으로 갖거나 허근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $2x^2-4x-2k=0$이 $x=1$을 중근으로 갖는 경우

$2x^2-4x-2k=0$에 $x=1$을 대입하면

$2-4-2k=0 \qquad \therefore k=-1$

$2x^2-4x-2k=0$에 $k=-1$을 대입하면

$2x^2-4x+2=0, \qquad (x-1)^2=0$

$\therefore x=1$ (중근)

(ii) 이차방정식 $2x^2-4x-2k=0$이 허근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4+4k<0$

$\therefore k<-1$

(i), (ii)에서 실수 k의 값의 범위는

$k\le-1$

답 $\boldsymbol{k\le-1}$

352

전략 주어진 사차방정식이 중근을 포함한 서로 다른 세 실근을 가져야 함을 이용한다.

$x^4+(2a+1)x^3+(3a+2)x^2+(a+2)x=0$에서

$x\{x^3+(2a+1)x^2+(3a+2)x+a+2\}=0$

$f(x)=x^3+(2a+1)x^2+(3a+2)x+a+2$라 하면

$f(-1)=-1+2a+1-(3a+2)+a+2=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & 2a+1 & 3a+2 & a+2 \\ & & -1 & -2a & -a-2 \\ \hline & 1 & 2a & a+2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x^2+2ax+a+2)$

따라서 주어진 방정식은

$x(x+1)(x^2+2ax+a+2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x^2+2ax+a+2=0$

이때 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되려면 한 중근과 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$의 두 실근을 α, β라 할 때

(i) $\alpha=-1$, $\beta\ne0$, $\alpha\ne\beta$인 경우

$x^2+2ax+a+2=0$에 $x=-1$을 대입하면

$1-2a+a+2=0 \qquad \therefore a=3$

$x^2+2ax+a+2=0$에 $a=3$을 대입하면

$x^2+6x+5=0, \qquad (x+5)(x+1)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=-1$

따라서 주어진 방정식의 근은

$x=-5$ 또는 $x=-1$ (중근) 또는 $x=0$

(ii) $\alpha=0$, $\beta\ne-1$, $\alpha\ne\beta$인 경우

$x^2+2ax+a+2=0$에 $x=0$을 대입하면

$a+2=0 \qquad \therefore a=-2$

$x^2+2ax+a+2=0$에 $a=-2$를 대입하면

$x^2-4x=0, \qquad x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

따라서 주어진 방정식의 근은

$x=-1$ 또는 $x=0$ (중근) 또는 $x=4$

(iii) $\alpha=\beta$, $\alpha\ne0$, $\alpha\ne-1$인 경우

이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(a+2)=0$

$a^2-a-2=0, \qquad (a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

$x^2+2ax+a+2=0$에 $a=-1$을 대입하면

$x^2-2x+1=0, \qquad (x-1)^2=0$

$\therefore x=1$ (중근)

즉 $a=-1$일 때 주어진 방정식의 근은

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$ (중근)

$x^2+2ax+a+2=0$에 $a=2$를 대입하면

$x^2+4x+4=0, \qquad (x+2)^2=0$

$\therefore x=-2$ (중근)

즉 $a=2$일 때 주어진 방정식의 근은

$x=-2$ (중근) 또는 $x=-1$ 또는 $x=0$

이상에서

$a=-2$ 또는 $a=-1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=3$

따라서 구하는 곱은

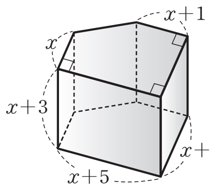
$-2\times(-1)\times2\times3=12$

답 **12**

353

전략 오각기둥의 부피를 이용하여 삼차방정식을 세운다.

주어진 전개도를 접어 오각기둥을 만들면 다음 그림과 같다.



이 오각기둥의 부피가 216이므로

$$\left[x(x+5)+\frac{1}{2}\{(x+1)+(x+5)\}\times 2\right]$$
$$\times(x+3)=216$$
$$(x^2+7x+6)(x+3)=216$$
$$\therefore\ x^3+10x^2+27x-198=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$f(x)=x^3+10x^2+27x-198$이라 하면

$$f(3)=27+90+81-198=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

3	1	10	27	-198
		3	39	198
	1	13	66	0

$$\therefore\ f(x)=(x-3)(x^2+13x+66)$$

따라서 ㉠에서

$$(x-3)(x^2+13x+66)=0$$
$$\therefore\ x=3 \text{ 또는 } x=\frac{-13\pm\sqrt{95}i}{2}$$

이때 x는 실수이므로 $\quad x=3$

답 **3**

02 삼차방정식의 근과 계수의 관계

● 본책 167~171쪽

354

(1) $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}$

(2) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{4}{2}=2$

(3) $\alpha\beta\gamma=-\frac{5}{2}$

(4) $\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{5}{2}}=-\frac{1}{5}$

(5) $(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$

$=1+(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\alpha\beta\gamma$

$=1+\frac{1}{2}+2-\frac{5}{2}=1$

답 (1) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ (2) **2** (3) $\mathbf{-\frac{5}{2}}$ (4) $\mathbf{-\frac{1}{5}}$ (5) **1**

355

(1) 세 근이 2, -3, -4이므로

(세 근의 합)$=2+(-3)+(-4)=-5$

(두 근끼리의 곱의 합)

$=2\times(-3)+(-3)\times(-4)+(-4)\times 2$

$=-2$

(세 근의 곱)$=2\times(-3)\times(-4)=24$

따라서 구하는 삼차방정식은

$x^3+5x^2-2x-24=0$

(2) 세 근이 $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$, -2이므로

(세 근의 합)$=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})+(-2)$

$=0$

(두 근끼리의 곱의 합)

$=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})\times(-2)$

$\quad+(-2)\times(1+\sqrt{3})$

$=-6$

(세 근의 곱)$=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})\times(-2)=4$

따라서 구하는 삼차방정식은

$x^3-6x-4=0$

(3) 세 근이 -1, $3+i$, $3-i$이므로

(세 근의 합)$=-1+(3+i)+(3-i)=5$

(두 근끼리의 곱의 합)

$=-1\times(3+i)+(3+i)(3-i)$

$\quad+(3-i)\times(-1)$

$=4$

(세 근의 곱)$=-1\times(3+i)(3-i)=-10$

따라서 구하는 삼차방정식은

$x^3-5x^2+4x+10=0$

답 (1) $\mathbf{x^3+5x^2-2x-24=0}$
(2) $\mathbf{x^3-6x-4=0}$
(3) $\mathbf{x^3-5x^2+4x+10=0}$

356

주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이고 $2+\sqrt{5}$가 근이므로 $2-\sqrt{5}$도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 세 근이 -2, $2+\sqrt{5}$, $2-\sqrt{5}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2+(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=a,$$
$$-2\times(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=-b$$
$$\therefore a=2,\ b=-2$$

답 $\boldsymbol{a=2,\ b=-2}$

357

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이고 $1-3i$가 근이므로 $1+3i$도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 세 근이 1, $1-3i$, $1+3i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$1+(1-3i)+(1+3i)=-a,$$
$$1\times(1-3i)+(1-3i)(1+3i)+(1+3i)\times1=b$$
$$\therefore a=-3,\ b=12$$

답 $\boldsymbol{a=-3,\ b=12}$

358

$x^3+2x^2+3x+4=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=-2,$$
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,$$
$$\alpha\beta\gamma=-4$$

(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-\dfrac{3}{4}$

(2) $\alpha+\beta+\gamma=-2$이므로

$$\alpha+\beta=-2-\gamma,\ \beta+\gamma=-2-\alpha,$$
$$\gamma+\alpha=-2-\beta$$
$$\begin{aligned}\therefore\ &(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)\\&=(-2-\gamma)(-2-\alpha)(-2-\beta)\\&=-(2+\alpha)(2+\beta)(2+\gamma)\\&=-\{8+4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\&\qquad+\alpha\beta\gamma\}\\&=-\{8+4\times(-2)+2\times3-4\}=-2\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}&\frac{\gamma}{\alpha\beta}+\frac{\alpha}{\beta\gamma}+\frac{\beta}{\gamma\alpha}\\&=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta\gamma}\\&=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma}\\&=\frac{(-2)^2-2\times3}{-4}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 (1) $\boldsymbol{-\dfrac{3}{4}}$ (2) $\boldsymbol{-2}$ (3) $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

359

$x^3-x^2+3x-3=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,\ \alpha\beta\gamma=3$$

따라서 $\beta+\gamma=1-\alpha$, $\gamma+\alpha=1-\beta$, $\alpha+\beta=1-\gamma$이므로

$$\begin{aligned}&\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\gamma}\\&=\frac{1-\alpha}{\alpha}+\frac{1-\beta}{\beta}+\frac{1-\gamma}{\gamma}\\&=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-3\\&=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}-3\\&=\frac{3}{3}-3=-2\end{aligned}$$

답 $\boldsymbol{-2}$

360

주어진 삼차방정식의 세 근을 α, 2α, 3α $(\alpha\neq0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+2\alpha+3\alpha=12,\qquad 6\alpha=12$$
$$\therefore \alpha=2$$

따라서 세 근이 2, 4, 6이므로

$$2\times4+4\times6+6\times2=a,\ 2\times4\times6=-b$$
$$\therefore a=44,\ b=-48$$

답 $\boldsymbol{a=44,\ b=-48}$

361

$x^3-3x^2-x+1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1,\ \alpha\beta\gamma=-1$$

구하는 삼차방정식의 세 근이 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$이므로

$$(\text{세 근의 합})=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$$
$$=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-1}{-1}=1$$

(두 근끼리의 곱의 합)

$$=\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\times\frac{1}{\alpha}$$
$$=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{3}{-1}=-3$$
$$(\text{세 근의 곱})=\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\gamma}$$
$$=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{-1}=-1$$

따라서 구하는 삼차방정식은

$$x^3-x^2-3x+1=0$$

답 $\mathbf{x^3-x^2-3x+1=0}$

362

주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이고 $1+\sqrt{2}$가 근이므로 $1-\sqrt{2}$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-6$$
$$\therefore \alpha=6$$

따라서 나머지 두 근의 합은

$$(1-\sqrt{2})+6=7-\sqrt{2}$$

답 $\mathbf{7-\sqrt{2}}$

363

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이고 $2-i$가 근이므로 $2+i$도 근이다.

나머지 한 근이 c이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$c(2-i)(2+i)=5, \qquad 5c=5$$
$$\therefore c=1$$

따라서 주어진 방정식의 세 근이 1, $2-i$, $2+i$이므로

$$1+(2-i)+(2+i)=-a,$$
$$1\times(2-i)+(2-i)(2+i)+(2+i)\times1=b$$
$$\therefore a=-5,\ b=9$$
$$\therefore a+b+c=5$$

답 **5**

03 방정식 $x^3=1$의 허근

● 본책 172~173쪽

364

$x^3=-1$에서

$$x^3+1=0 \qquad \therefore (x+1)(x^2-x+1)=0$$

ω는 $x^3=-1$과 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로

$$\omega^3=-1,\ \omega^2-\omega+1=0$$

(1) $\dfrac{\omega^{100}+\omega^{102}}{\omega^{101}}=\dfrac{(\omega^3)^{33}\times\omega+(\omega^3)^{34}}{(\omega^3)^{33}\times\omega^2}$

$$=\frac{-\omega+1}{-\omega^2}=\frac{-\omega^2}{-\omega^2}=1$$

(2) $\omega(2\omega-1)(2+\omega^2)$

$$=\omega(2\omega^3-\omega^2+4\omega-2)$$
$$=2\omega^4-\omega^3+4\omega^2-2\omega$$
$$=2\omega^3\times\omega-\omega^3+4\omega^2-2\omega$$
$$=-2\omega+1+4\omega^2-2\omega$$
$$=4(\omega^2-\omega)+1$$
$$=4\times(-1)+1=-3$$

(3) $\omega^5-\omega^4+\omega^3-\omega^2+\omega$

$$=\omega^3(\omega^2-\omega+1)-(\omega^2-\omega)$$
$$=-1\times0-(-1)=1$$

답 (1) **1** (2) **−3** (3) **1**

365

$x^3-1=0$에서 $\qquad (x-1)(x^2+x+1)=0$

방정식 $x^2+x+1=0$의 계수가 실수이고 한 허근이 ω이므로 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$$
$$\therefore \frac{1}{\omega-1}+\frac{1}{\overline{\omega}-1}=\frac{\overline{\omega}-1+\omega-1}{(\omega-1)(\overline{\omega}-1)}$$
$$=\frac{(\omega+\overline{\omega})-2}{\omega\overline{\omega}-(\omega+\overline{\omega})+1}$$
$$=\frac{-1-2}{1-(-1)+1}$$
$$=-1$$

답 **−1**

366

$x^3+1=0$에서 $\qquad (x+1)(x^2-x+1)=0$

방정식 $x^2-x+1=0$의 계수가 실수이고 한 허근이 ω이므로 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \dfrac{(2\omega+1)\overline{(2\omega+1)}}{(\omega-1)\overline{(\omega-1)}}=\dfrac{(2\omega+1)(2\overline{\omega}+1)}{(\omega-1)(\overline{\omega}-1)}$

$=\dfrac{4\omega\overline{\omega}+2(\omega+\overline{\omega})+1}{\omega\overline{\omega}-(\omega+\overline{\omega})+1}$

$=\dfrac{4+2+1}{1-1+1}$

$=7$

답 **7**

연습 문제 · 본책 174~175쪽

367

전략 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

$2x^3+3x^2-4x+4=0$의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{3}{2}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$

$\alpha\beta\gamma=-2$

$\therefore (2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$

$=8-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$
$-\alpha\beta\gamma$

$=8-4\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)+2\times(-2)-(-2)$

$=12$

답 **12**

다른 풀이 $2x^3+3x^2-4x+4=0$의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$이므로

$2x^3+3x^2-4x+4=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

양변에 $x=2$를 대입하면

$2\times8+3\times4-4\times2+4$
$=2(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$

$\therefore (2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=12$

368

전략 연속하는 세 정수를 $\alpha-1,\ \alpha,\ \alpha+1$로 놓는다.

삼차방정식 $x^3+6x^2+ax+b=0$의 세 근을 $\alpha-1,\ \alpha,\ \alpha+1$이라 하자.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha-1)+\alpha+(\alpha+1)=-6$

$\therefore \alpha=-2$

따라서 주어진 방정식의 세 근이 $-3,\ -2,\ -1$이므로

$-3\times(-2)+(-2)\times(-1)+(-1)\times(-3)$
$=a$

$-3\times(-2)\times(-1)=-b$

$\therefore a=11,\ b=6$

$\therefore ab=66$

답 **66**

369

전략 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha^2,\ \beta^2,\ \gamma^2$의 합, 두 수끼리의 곱의 합, 곱을 구한다.

$x^3+3x-2=0$의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,\ \alpha\beta\gamma=2$

구하는 삼차방정식의 세 근이 $\alpha^2,\ \beta^2,\ \gamma^2$이므로

(세 근의 합)$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=0^2-2\times3=-6$

(두 근끼리의 곱의 합)

$=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2(\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2+\alpha^2\beta\gamma)$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

$=3^2-2\times2\times0=9$

(세 근의 곱)$=\alpha^2\beta^2\gamma^2=(\alpha\beta\gamma)^2=2^2=4$

따라서 구하는 삼차방정식은

$x^3+6x^2+9x-4=0$

답 $\boldsymbol{x^3+6x^2+9x-4=0}$

370

전략 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$의 합, 두 수끼리의 곱의 합, 곱을 구한다.

$x^3+6x^2-4x-16=0$의 세 근이 $2\alpha,\ 2\beta,\ 2\gamma$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+2\beta+2\gamma=-6$

$2\alpha\times2\beta+2\beta\times2\gamma+2\gamma\times2\alpha=-4$

$2\alpha\times2\beta\times2\gamma=16$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma=-3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1,$
$\alpha\beta\gamma=2$

따라서 α, β, γ를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3+3x^2-x-2=0$$

즉 $f(x)=x^3+3x^2-x-2$이므로

$$a=3,\ b=-1,\ c=-2$$

$$\therefore abc=3\times(-1)\times(-2)=6$$

답 **6**

371

전략 $\frac{2}{1-i}$의 분모를 실수화하고 켤레근을 구한다.

$$\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2(1+i)}{2}=1+i$$

즉 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이고 한 근이 $1+i$이므로 $1-i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha(1+i)+(1+i)(1-i)+\alpha(1-i)=4$$

$$2\alpha+2=4 \qquad \therefore \alpha=1$$

따라서 주어진 방정식의 세 근이 $1+i$, $1-i$, 1이므로

$$a=(1+i)(1-i)\times 1=2$$

답 **2**

참고 주어진 삼차방정식의 세 근의 합을 이용하여 a의 값을 구할 수도 있다.

즉 $a+1=(1+i)+(1-i)+1=3$이므로

$$a=2$$

372

전략 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$x^3=1$에서

$$x^3-1=0 \qquad \therefore (x-1)(x^2+x+1)=0$$

따라서 ω는 $x^3=1$과 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$$

$$\therefore \frac{\omega^{125}}{\omega^{124}+1}+\frac{\omega^{124}}{\omega^{125}+1}$$

$$=\frac{(\omega^3)^{41}\times\omega^2}{(\omega^3)^{41}\times\omega+1}+\frac{(\omega^3)^{41}\times\omega}{(\omega^3)^{41}\times\omega^2+1}$$

$$=\frac{\omega^2}{\omega+1}+\frac{\omega}{\omega^2+1}$$

$$=\frac{\omega^2}{-\omega^2}+\frac{\omega}{-\omega}$$

$$=-1-1=-2$$

답 **−2**

373

전략 $x^2-x+1=0$이므로 $x^3+1=0$임을 이용한다.

$x^2-x+1=0$의 양변에 $x+1$을 곱하면

$$(x+1)(x^2-x+1)=0, \qquad x^3+1=0$$

$$\therefore x^3=-1$$

따라서 ω는 $x^2-x+1=0$과 $x^3=-1$의 한 허근이므로

$$\omega^2-\omega+1=0,\ \omega^3=-1$$

$$\therefore (-1-\omega^{1000})(1-\omega^{1001})(1+\omega^{1002})$$

$$=\{-1-(\omega^3)^{333}\times\omega\}\{1-(\omega^3)^{333}\times\omega^2\}$$

$$\times\{1+(\omega^3)^{334}\}$$

$$=(-1+\omega)(1+\omega^2)(1+1)$$

$$=\omega^2\times\omega\times 2$$

$$=2\omega^3=-2$$

답 **−2**

374

전략 삼차방정식 $f(x+1)=0$의 세 근을 α, β, γ로 나타낸다.

삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

$$f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0,\ f(\gamma)=0$$

이때 $f(x+1)=0$의 해는

$$x+1=\alpha \text{ 또는 } x+1=\beta \text{ 또는 } x+1=\gamma$$

를 만족시키는 x의 값이므로

$$x=\alpha-1 \text{ 또는 } x=\beta-1 \text{ 또는 } x=\gamma-1$$

따라서 삼차방정식 $f(x+1)=0$의 세 근의 곱은

$$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$$

$$=\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)-1$$

$$=(\alpha\beta\gamma+\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-1$$

$$=1-3-1=-3$$

답 **−3**

375

전략 방정식 $f(x)+2=0$의 근이 1, 3, 5임을 이용한다.

$f(1)=f(3)=f(5)=-2$에서

$$f(1)+2=0,\ f(3)+2=0,\ f(5)+2=0$$

즉 삼차방정식 $f(x)+2=0$의 세 근이 1, 3, 5이다.

이때 1, 3, 5를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3-(1+3+5)x^2+(1\times3+3\times5+5\times1)x$$

$$-1\times3\times5=0$$

$$\therefore x^3-9x^2+23x-15=0$$

즉 $f(x)+2=x^3-9x^2+23x-15$이므로

$$f(x)=x^3-9x^2+23x-17$$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 17이다.

답 **17**

376

전략 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$임을 이용하여 좌변을 간단히 한다.

$x^3=1$에서

$$x^3-1=0 \qquad \therefore\ (x-1)(x^2+x+1)=0$$

따라서 ω는 $x^3=1$과 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &1+2\omega+3\omega^2+4\omega^3+5\omega^4+6\omega^5+7\omega^6\\ &=1+2\omega+3\omega^2+4\omega^3+5\omega^3\times\omega\\ &\quad+6\omega^3\times\omega^2+7\times(\omega^3)^2\\ &=1+2\omega+3\omega^2+4+5\omega+6\omega^2+7\\ &=12+7\omega+9\omega^2\\ &=12+7\omega+9(-\omega-1)\\ &=-2\omega+3\end{aligned}$$

따라서 $a=-2$, $b=3$이므로

$$a+b=1$$

답 **1**

377

전략 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하여 ω를 한 근으로 하는 이차방정식을 구한다.

$f(x)=x^3+x^2-x+2$라 하면

$$f(-2)=-8+4+2+2=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ & & -2 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\therefore\ f(x)=(x+2)(x^2-x+1)$$

따라서 주어진 방정식은 $(x+2)(x^2-x+1)=0$

이때 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로

$$\omega^2-\omega+1=0$$

또한 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 양변에 $x+1$을 곱하면

$$(x+1)(x^2-x+1)=0$$

$$x^3+1=0 \qquad \therefore\ x^3=-1$$

즉 ω는 $x^3=-1$의 한 허근이므로

$$\omega^3=-1$$

한편 방정식 $x^2-x+1=0$의 계수가 실수이고 한 허근이 ω이므로 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega\overline{\omega}=1$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{\omega}{\overline{\omega}}-\omega^{1001}&=\frac{\omega^2}{\overline{\omega}\times\omega}-(\omega^3)^{333}\times\omega^2\\ &=\omega^2+\omega^2=2\omega^2\end{aligned}$$

답 ⑤

378

전략 z, $\overline{z}$를 두 근으로 하는 이차방정식을 세운다.

$z+\overline{z}=-1$, $z\overline{z}=1$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 z, $\overline{z}$는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이다.

이때 $x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$을 곱하면

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$x^3-1=0 \qquad \therefore\ x^3=1$$

따라서 z, $\overline{z}$는 삼차방정식 $x^3=1$의 두 허근이므로

$$z^3=1,\ (\overline{z})^3=1$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\frac{\overline{z}}{z^5}+\frac{(\overline{z})^2}{z^4}+\frac{(\overline{z})^3}{z^3}+\frac{(\overline{z})^4}{z^2}+\frac{(\overline{z})^5}{z}\\ &=\frac{\overline{z}}{z^2}+\frac{(\overline{z})^2}{z}+\frac{1}{1}+\frac{\overline{z}}{z^2}+\frac{(\overline{z})^2}{z}\\ &=\frac{2\overline{z}}{z^2}+\frac{2(\overline{z})^2}{z}+1\\ &=\frac{2z\overline{z}+2(z\overline{z})^2}{z^3}+1\\ &=\frac{2\times1+2\times1^2}{1}+1=5\end{aligned}$$

답 ④

다른 풀이 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$$\overline{z}=a-bi$$

$z+\overline{z}=-1$에서 $(a+bi)+(a-bi)=-1$

$$2a=-1 \qquad \therefore\ a=-\frac{1}{2}$$

$z\overline{z}=1$에서 $(a+bi)(a-bi)=1$

$$a^2+b^2=1,\qquad \frac{1}{4}+b^2=1$$

$$b^2=\frac{3}{4} \qquad \therefore\ b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$라 하면 $\bar{z}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$이고

$$z^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\bar{z}$$

$$z^3=z^2\times z=\bar{z}\times z=1$$

$$\therefore \frac{\bar{z}}{z^5}+\frac{(\bar{z})^2}{z^4}+\frac{(\bar{z})^3}{z^3}+\frac{(\bar{z})^4}{z^2}+\frac{(\bar{z})^5}{z}$$

$$=\frac{z^2}{z^5}+\frac{z^4}{z^4}+\frac{z^6}{z^3}+\frac{z^8}{z^2}+\frac{z^{10}}{z}$$

$$=\frac{1}{z^3}+1+z^3+z^6+z^9$$

$$=1+1+1+1+1=5$$

379

전략 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $\cdots$의 값을 구하여 $f(n)$의 값을 추정한다.

$x^3=1$에서

$$x^3-1=0 \qquad \therefore (x-1)(x^2+x+1)=0$$

따라서 ω는 $x^3=1$과 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$$

$f(n)=\dfrac{\omega^{2n}}{\omega^n+1}$에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 대입하면

$$f(1)=\frac{\omega^2}{\omega+1}=\frac{\omega^2}{-\omega^2}=-1$$

$$f(2)=\frac{\omega^4}{\omega^2+1}=\frac{\omega^3\times\omega}{\omega^2+1}=\frac{\omega}{-\omega}=-1$$

$$f(3)=\frac{\omega^6}{\omega^3+1}=\frac{(\omega^3)^2}{\omega^3+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$f(4)=\frac{\omega^8}{\omega^4+1}=\frac{(\omega^3)^2\times\omega^2}{\omega^3\times\omega+1}=\frac{\omega^2}{\omega+1}$$

$$=f(1)=-1$$

$$f(5)=\frac{\omega^{10}}{\omega^5+1}=\frac{(\omega^3)^2\times\omega^4}{\omega^3\times\omega^2+1}=\frac{\omega^4}{\omega^2+1}$$

$$=f(2)=-1$$

$$\vdots$$

$$\therefore f(n)=\begin{cases}-1 & (n=3k-2,\ 3k-1)\\ \dfrac{1}{2} & (n=3k)\end{cases}$$

(단, k는 자연수이다.)

$$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(20)$$

$$=\left(-1-1+\frac{1}{2}\right)\times 6+(-1)+(-1)$$

$$=-11$$

답 -11

04 미지수가 2개인 연립이차방정식

● 본책 176~184쪽

380

(1) $\begin{cases}x+2y=5 & \cdots\cdots ㉠\\ 2x^2+y^2=19 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $\quad x=5-2y \quad \cdots\cdots ㉢$

㉡에 ㉢을 대입하면

$$2(5-2y)^2+y^2=19$$

$$9y^2-40y+31=0, \qquad (y-1)(9y-31)=0$$

$$\therefore y=1 \text{ 또는 } y=\frac{31}{9}$$

(i) ㉢에 $y=1$을 대입하면 $\quad x=3$

(ii) ㉢에 $y=\dfrac{31}{9}$을 대입하면 $\quad x=-\dfrac{17}{9}$

(i), (ii)에서 $\quad \begin{cases}\boldsymbol{x=3}\\ \boldsymbol{y=1}\end{cases}$ **또는** $\begin{cases}\boldsymbol{x=-\dfrac{17}{9}}\\ \boldsymbol{y=\dfrac{31}{9}}\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x^2+xy=-4 & \cdots\cdots ㉠\\ 2x+y=3 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉡에서 $\quad y=-2x+3 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉠에 ㉢을 대입하면

$$x^2+x(-2x+3)=-4$$

$$x^2-3x-4=0, \qquad (x+1)(x-4)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=4$$

(i) ㉢에 $x=-1$을 대입하면 $\quad y=5$

(ii) ㉢에 $x=4$를 대입하면 $\quad y=-5$

(i), (ii)에서 $\quad \begin{cases}\boldsymbol{x=-1}\\ \boldsymbol{y=5}\end{cases}$ **또는** $\begin{cases}\boldsymbol{x=4}\\ \boldsymbol{y=-5}\end{cases}$

답 풀이 참조

381

(1) $\begin{cases}2x^2-3xy+y^2=0 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2+y^2=20 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면

$$(2x-y)(x-y)=0$$

$$\therefore y=2x \text{ 또는 } y=x$$

(i) ㉡에 $y=2x$를 대입하면

$$x^2+(2x)^2=20, \qquad x^2=4$$

$$\therefore x=\pm 2$$

$y=2x$이므로

$x=\pm2$, $y=\pm4$ (복호동순)

(ii) ㉡에 $y=x$를 대입하면

$x^2+x^2=20,\quad x^2=10$

$\therefore x=\pm\sqrt{10}$

$y=x$이므로

$x=\pm\sqrt{10}$, $y=\pm\sqrt{10}$ (복호동순)

(i), (ii)에서

$\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=\sqrt{10} \\ y=\sqrt{10} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{10} \\ y=-\sqrt{10} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x^2-5xy+2y^2=0 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ x^2+3xy+2y^2=9 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

㉠의 좌변을 인수분해하면

$(2x-y)(x-2y)=0$

$\therefore y=2x$ 또는 $x=2y$

(i) ㉡에 $y=2x$를 대입하면

$x^2+3x\times2x+2\times(2x)^2=9$

$15x^2=9\quad \therefore x=\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$

$y=2x$이므로

$x=\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$, $y=\pm\frac{2\sqrt{15}}{5}$ (복호동순)

(ii) ㉡에 $x=2y$를 대입하면

$(2y)^2+3\times2y\times y+2y^2=9$

$12y^2=9\quad \therefore y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x=2y$이므로

$x=\pm\sqrt{3}$, $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (복호동순)

(i), (ii)에서

$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{15}}{5} \\ y=\frac{2\sqrt{15}}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{15}}{5} \\ y=-\frac{2\sqrt{15}}{5} \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

답 **풀이 참조**

382

(1) $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2-xy+y^2=49 \end{cases}$에서

$\begin{cases} x+y=2 \\ (x+y)^2-3xy=49 \end{cases}$

$x+y=a$, $xy=b$로 놓으면

$\begin{cases} a=2 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ a^2-3b=49 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

㉡에 ㉠을 대입하면

$4-3b=49\quad \therefore b=-15$

즉 $x+y=2$, $xy=-15$이므로 x, y는 이차방정식 $t^2-2t-15=0$의 두 근이다.

$(t+3)(t-5)=0$에서 $\quad t=-3$ 또는 $t=5$

따라서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=2 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$에서

$\begin{cases} (x+y)^2-2xy+x+y=2 \\ (x+y)^2-xy=1 \end{cases}$

$x+y=a$, $xy=b$로 놓으면

$\begin{cases} a^2-2b+a=2 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ a^2-b=1 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$

㉡에서 $\quad b=a^2-1 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉠에 ㉢을 대입하면

$a^2-2(a^2-1)+a=2$

$a^2-a=0,\quad a(a-1)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=1$

㉢에 $a=0$을 대입하면 $\quad b=-1$

㉢에 $a=1$을 대입하면 $\quad b=0$

(i) $a=0$, $b=-1$, 즉 $x+y=0$, $xy=-1$일 때, x, y는 이차방정식 $t^2-1=0$의 두 근이다.

$(t+1)(t-1)=0$에서 $\quad t=-1$ 또는 $t=1$

$\therefore x=1$, $y=-1$ 또는 $x=-1$, $y=1$

(ii) $a=1$, $b=0$, 즉 $x+y=1$, $xy=0$일 때, x, y는 이차방정식 $t^2-t=0$의 두 근이다.

$t(t-1)=0$에서 $\quad t=0$ 또는 $t=1$

$\therefore x=0$, $y=1$ 또는 $x=1$, $y=0$

(i), (ii)에서

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\text{또는 } \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

답 **풀이 참조**

383

$\begin{cases} x+y=2a+1 \\ xy=a^2+3 \end{cases}$ 의 해 x, y는 t에 대한 이차방정식

$t^2-(2a+1)t+a^2+3=0$ …… ㉠

의 두 근이다.

이때 주어진 연립방정식이 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 한다.

㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(2a+1)^2-4(a^2+3)\geq 0$

$4a-11\geq 0$ $\quad\therefore a\geq \frac{11}{4}$

따라서 정수 a의 최솟값은 3이다. 답 **3**

384

두 자리 자연수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=73 & \cdots\cdots ㉠ \\ (10y+x)+(10x+y)=121 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $\quad y=11-x$ …… ㉢

㉠에 ㉢을 대입하면

$x^2+(11-x)^2=73$

$x^2-11x+24=0$, $\quad (x-3)(x-8)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=8$

㉢에 $x=3$을 대입하면 $\quad y=8$

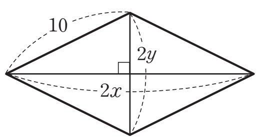
㉢에 $x=8$을 대입하면 $\quad y=3$

이때 구하는 자연수는 50 이상이므로 83이다.

답 **83**

385

오른쪽 그림과 같이 마름모의 두 대각선의 길이를 각각 $2x$, $2y$ $(x>y)$라 하면



$\begin{cases} x^2+y^2=10^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-2y=4\sqrt{5} & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $\quad x=y+2\sqrt{5}$ …… ㉢

㉠에 ㉢을 대입하면

$(y+2\sqrt{5})^2+y^2=100$

$y^2+2\sqrt{5}y-40=0$

$\therefore y=-\sqrt{5}\pm 3\sqrt{5}$

그런데 $y>0$이므로 $\quad y=2\sqrt{5}$

㉢에 $y=2\sqrt{5}$를 대입하면

$x=4\sqrt{5}$

따라서 마름모의 두 대각선의 길이가 각각 $8\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$이므로 구하는 합은

$8\sqrt{5}+4\sqrt{5}=12\sqrt{5}$

답 $\mathbf{12\sqrt{5}}$

386

두 이차방정식의 공통인 근을 α라 하면

$\begin{cases} \alpha^2-(k+4)\alpha+5k=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2+(k-2)\alpha-5k=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면

$2\alpha^2-6\alpha=0$ ← 상수항 소거

$\alpha^2-3\alpha=0$, $\quad \alpha(\alpha-3)=0$

$\therefore \alpha=0$ 또는 $\alpha=3$

(i) $\alpha=0$일 때,

㉠에 $\alpha=0$을 대입하면 $\quad k=0$

이때 $k\neq 0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha=3$일 때,

㉠에 $\alpha=3$을 대입하면

$9-3(k+4)+5k=0$

$2k=3$ $\quad\therefore k=\frac{3}{2}$

(i), (ii)에서 $\quad k=\frac{3}{2}$

답 $\mathbf{\frac{3}{2}}$

387

두 이차방정식의 공통인 근을 α라 하면

$\begin{cases} \alpha^2+4m\alpha-2m+1=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2+m\alpha+m+1=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면

$3ma-3m=0$ ← 이차항 소거

$3m(a-1)=0$

$\therefore m=0$ 또는 $a=1$

(i) $m=0$일 때,

두 이차방정식이 모두 $x^2+1=0$으로 일치하므로 공통인 근이 2개이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=1$일 때,

㉠에 $a=1$을 대입하면

$1+4m-2m+1=0$

$\therefore m=-1$

(i), (ii)에서 $m=-1$이고 공통인 근은 $x=1$이다.

답 $\boldsymbol{m=-1}$, **공통인 근:** $\boldsymbol{x=1}$

388

$xy-x-y-1=0$에서

$x(y-1)-(y-1)-2=0$

$\therefore (x-1)(y-1)=2$

x, y가 정수이므로 $x-1$, $y-1$도 정수이다.

따라서 $x-1$, $y-1$의 값은 다음 표와 같다.

$x-1$	1	2	−1	−2
$y-1$	2	1	−2	−1

(i) $x-1=1$, $y-1=2$일 때, $x=2$, $y=3$

(ii) $x-1=2$, $y-1=1$일 때, $x=3$, $y=2$

(iii) $x-1=-1$, $y-1=-2$일 때, $x=0$, $y=-1$

(iv) $x-1=-2$, $y-1=-1$일 때, $x=-1$, $y=0$

이상에서 구하는 x, y의 값은

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\text{또는 } \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$$

답 **풀이 참조**

389

$xy+y-2x=7$에서

$y(x+1)-2(x+1)+2=7$

$\therefore (x+1)(y-2)=5$

x, y가 정수이므로 $x+1$, $y-2$도 정수이다.

따라서 $x+1$, $y-2$의 값은 다음 표와 같다.

$x+1$	1	5	−1	−5
$y-2$	5	1	−5	−1

(i) $x+1=1$, $y-2=5$일 때,

$x=0$, $y=7$ $\therefore x+y=7$

(ii) $x+1=5$, $y-2=1$일 때,

$x=4$, $y=3$ $\therefore x+y=7$

(iii) $x+1=-1$, $y-2=-5$일 때,

$x=-2$, $y=-3$ $\therefore x+y=-5$

(iv) $x+1=-5$, $y-2=-1$일 때,

$x=-6$, $y=1$ $\therefore x+y=-5$

이상에서 $x+y$의 최댓값은 7이다.

답 **7**

390

$x^2+y^2-4x-2y+5=0$에서

$(x^2-4x+4)+(y^2-2y+1)=0$

$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로 $x-2$, $y-1$도 실수이다.

따라서 $x-2=0$, $y-1=0$이므로

$x=2$, $y=1$

$\therefore xy=2$ 답 **2**

다른 풀이 주어진 방정식의 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-4x+y^2-2y+5=0$ …… ㉠

x가 실수이므로 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 한다.

㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-(y^2-2y+5)\geq 0$

$y^2-2y+1\leq 0$

$\therefore (y-1)^2\leq 0$

이때 y도 실수이므로

$y-1=0$ $\therefore y=1$

㉠에 $y=1$을 대입하면

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$ $\therefore x=2$ (중근)

$\therefore xy=2$

연습 문제 · 본책 185~186쪽

391

전략 상수항이 0인 이차방정식을 인수분해하여 x, y 사이의 관계식을 구한다.

$x^2-3xy+2y^2=0$에서

$(x-y)(x-2y)=0 \qquad \therefore x=y$ 또는 $x=2y$

(i) $x^2-y^2=9$에 $x=y$를 대입하면

$y^2-y^2=0\neq 9$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $x^2-y^2=9$에 $x=2y$를 대입하면

$(2y)^2-y^2=9, \qquad y^2=3$

$\therefore y=\pm\sqrt{3}$

$x=2y$이므로

$x=\pm 2\sqrt{3},\ y=\pm\sqrt{3}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=2\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

이때 $\alpha_1<\alpha_2$이므로 $\qquad \alpha_1=-2\sqrt{3},\ \alpha_2=2\sqrt{3}$

따라서 $\beta_1=-\sqrt{3},\ \beta_2=\sqrt{3}$이므로

$\beta_1-\beta_2=-\sqrt{3}-\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$

답 ①

392

전략 $x+y=a$, $xy=b$로 놓고 주어진 방정식을 a, b에 대한 방정식으로 변형한다.

$\begin{cases} xy+x+y=9 \\ x^2y+xy^2=20 \end{cases}$에서 $\begin{cases} xy+x+y=9 \\ xy(x+y)=20 \end{cases}$

$x+y=a$, $xy=b$로 놓으면

$\begin{cases} a+b=9 & \cdots\cdots ㉠ \\ ab=20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\qquad b=9-a \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉡에 ㉢을 대입하면 $\qquad a(9-a)=20$

$a^2-9a+20=0, \qquad (a-4)(a-5)=0$

$\therefore a=4$ 또는 $a=5$

㉢에 $a=4$를 대입하면 $\qquad b=5$

㉢에 $a=5$를 대입하면 $\qquad b=4$

(i) $a=4$, $b=5$, 즉 $x+y=4$, $xy=5$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-4t+5=0$의 두 근이므로 이를 만족시키는 자연수 x, y는 존재하지 않는다.

(ii) $a=5$, $b=4$, 즉 $x+y=5$, $xy=4$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-5t+4=0$의 두 근이다.

$(t-1)(t-4)=0$에서 $\qquad t=1$ 또는 $t=4$

$\therefore x=1,\ y=4$ 또는 $x=4,\ y=1$

(i), (ii)에서 $\qquad \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

$\therefore x^2+y^2=17$

답 **17**

393

전략 일차방정식을 y에 대한 식으로 변형하여 이차방정식에 대입했을 때, x에 대한 이차방정식이 실근을 갖지 않음을 이용한다.

$\begin{cases} x^2+2x-2y=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y=a & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $y=a-x$이므로 ㉠에 대입하면

$x^2+2x-2(a-x)=0$

$\therefore x^2+4x-2a=0 \qquad \cdots\cdots ㉢$

주어진 연립방정식이 실근을 갖지 않으려면 이차방정식 ㉢이 실근을 갖지 않아야 한다.

㉢의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=4+2a<0 \qquad \therefore a<-2$

따라서 정수 a의 최댓값은 -3이다.

답 $\mathbf{-3}$

394

전략 공통인 근을 α로 놓고, α에 대한 연립이차방정식을 세운다.

두 이차방정식의 공통인 근을 α라 하면

$\begin{cases} p\alpha^2+\alpha+1=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha^2+p\alpha+1=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면

$(p-1)\alpha^2-(p-1)\alpha=0$

$(p-1)(\alpha^2-\alpha)=0$

$\therefore (p-1)\alpha(\alpha-1)=0$

이때 $\alpha\neq 0$이므로 $\qquad p=1$ 또는 $\alpha=1$

(i) $p=1$일 때,

두 이차방정식은 모두 $x^2+x+1=0$으로 허근을 갖는다.

즉 공통인 실근을 갖는다는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=1$일 때,

㉠에 $a=1$을 대입하면

$p+1+1=0 \qquad \therefore p=-2$

(i), (ii)에서 $\quad p=-2$ 답 -2

395

전략 좌변을 x에 대한 내림차순으로 정리하고, 이차방정식이 실근을 가질 조건을 이용한다.

$x^2-2xy+2y^2-4x+2y+5=0$의 좌변을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2-2(y+2)x+2y^2+2y+5=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

x가 실수이므로 이차방정식 ㉠이 실근을 가져야 한다.

㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(y+2)^2-(2y^2+2y+5)\geq 0$

$y^2-2y+1\leq 0 \qquad \therefore (y-1)^2\leq 0$

이때 y도 실수이므로

$y-1=0 \qquad \therefore y=1$

㉠에 $y=1$을 대입하면

$x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0 \qquad \therefore x=3$

$\therefore xy=3$ 답 3

396

전략 미정계수를 포함하지 않는 두 방정식을 연립하여 해를 구한다.

두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases} 2x+y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=-45 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

를 만족시킨다.

㉠에서 $\quad y=3-2x \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉡에 ㉢을 대입하면 $\quad x^2-(3-2x)^2=-45$

$x^2-4x-12=0, \qquad (x+2)(x-6)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=6$

㉢에 $x=-2$를 대입하면 $\quad y=7$

㉢에 $x=6$을 대입하면 $\quad y=-9$

(i) $a^2x^2-y^2=-1$, $x+y=b^2$에 각각 $x=-2$, $y=7$을 대입하면

$4a^2-49=-1, \ -2+7=b^2$

$\therefore a^2=12, \ b^2=5$

(ii) $a^2x^2-y^2=-1$, $x+y=b^2$에 각각 $x=6$, $y=-9$를 대입하면

$36a^2-81=-1, \ 6-9=b^2$

$\therefore a^2=\frac{20}{9}, \ b^2=-3$

그런데 $b^2=-3$을 만족시키는 실수 b는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a^2=12$, $b^2=5$이므로

$a^2+b^2=17$ 답 17

397

전략 xy를 a에 대한 식으로 나타낸 후 x, y를 두 실근으로 하는 이차방정식을 세운다.

$\begin{cases} x+y=2a-1 \\ x^2+xy+y^2=3a^2-4a+2 \end{cases}$에서

$\begin{cases} x+y=2a-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x+y)^2-xy=3a^2-4a+2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에 ㉠을 대입하면

$(2a-1)^2-xy=3a^2-4a+2$

$\therefore xy=a^2-1 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉢을 만족시키는 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-(2a-1)t+a^2-1=0$의 두 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2a-1)^2-4(a^2-1)\geq 0$

$-4a+5\geq 0 \qquad \therefore a\leq \frac{5}{4}$

따라서 정수 a의 최댓값은 1이다. 답 1

398

전략 변의 길이와 넓이의 조건을 이용하여 a, b에 대한 연립방정식을 세운다.

$\overline{AF}=\overline{AB}+\overline{EF}-\overline{EB}$이므로

$5=a+b-1$

$\therefore a+b=6 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\square EFGH=b^2$, $\square EBCI=a$이므로

$a=\frac{1}{4}b^2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠에 ㉡을 대입하면

$\frac{1}{4}b^2+b=6, \qquad b^2+4b-24=0$

$\therefore b=-2\pm2\sqrt{7}$

이때 $b>0$이므로 $\quad b=-2+2\sqrt{7}$ 답 ③

399

전략 이차방정식의 판별식을 이용하여 a, b에 대한 방정식을 세우고, a, b가 정수임을 이용하여 해를 구한다.

이차방정식 $x^2-2ax+a^2-ab-2a-4b-1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-(a^2-ab-2a-4b-1)=0$$
$$ab+2a+4b=-1$$
$$a(b+2)+4(b+2)-8=-1$$
$$\therefore (a+4)(b+2)=7$$

이때 a, b가 정수이므로 $a+4$, $b+2$도 정수이다.

따라서 $a+4$, $b+2$의 값은 다음 표와 같다.

$a+4$	-7	-1	1	7
$b+2$	-1	-7	7	1

(i) $a+4=-7$, $b+2=-1$일 때,

$a=-11$, $b=-3$ $\quad \therefore ab=33$

(ii) $a+4=-1$, $b+2=-7$일 때,

$a=-5$, $b=-9$ $\quad \therefore ab=45$

(iii) $a+4=1$, $b+2=7$일 때,

$a=-3$, $b=5$ $\quad \therefore ab=-15$

(iv) $a+4=7$, $b+2=1$일 때,

$a=3$, $b=-1$ $\quad \therefore ab=-3$

이상에서 ab의 최솟값은 -15이다.

답 -15

400

전략 $x\geq y$인 경우와 $x<y$인 경우로 나누어 주어진 연립방정식의 해를 구한다.

(i) $x\geq y$일 때,

$x\odot y=-x$이므로 $\begin{cases} 3x-y^2=-x \\ 2x+y-1=-x \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} y^2=4x & \cdots\cdots ㉠ \\ y=-3x+1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에 ㉡을 대입하면 $\quad (-3x+1)^2=4x$

$9x^2-10x+1=0$, $\quad (9x-1)(x-1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{9}$ 또는 $x=1$

㉡에 $x=\frac{1}{9}$을 대입하면 $\quad y=\frac{2}{3}$

㉡에 $x=1$을 대입하면 $\quad y=-2$

그런데 $x\geq y$이므로 $\quad x=1$, $y=-2$

(ii) $x<y$일 때,

$x\odot y=2y$이므로 $\begin{cases} 3x-y^2=2y \\ 2x+y-1=2y \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} 3x-y^2-2y=0 & \cdots\cdots ㉢ \\ y=2x-1 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢에 ㉣을 대입하면

$3x-(2x-1)^2-2(2x-1)=0$

$4x^2-3x-1=0$, $\quad (4x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{4}$ 또는 $x=1$

㉣에 $x=-\frac{1}{4}$을 대입하면 $\quad y=-\frac{3}{2}$

㉣에 $x=1$을 대입하면 $\quad y=1$

이때 $x<y$를 만족시키는 x, y의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $\quad x=1$, $y=-2$

즉 $p=1$, $q=-2$이므로

$p-q=3$

답 3

401

전략 삼차방정식의 한 실근이 이차방정식의 근임을 이용한다.

$x^3+ax^2+bx+c=0$의 계수가 모두 실수이고 $1+\sqrt{3}i$가 근이므로 $1-\sqrt{3}i$도 근이다.

나머지 한 실근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)=-a$에서

$\alpha+2=-a$ $\quad \therefore a=-\alpha-2$ $\quad \cdots\cdots ㉠$

$\alpha(1+\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)+\alpha(1-\sqrt{3}i)=b$

에서 $\quad b=2\alpha+4$ $\quad \cdots\cdots ㉡$

$\alpha(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=-c$에서

$4\alpha=-c$ $\quad \therefore c=-4\alpha$ $\quad \cdots\cdots ㉢$

한편 방정식 $x^2+ax+2=0$과의 공통인 근은 α이므로 $\quad \alpha^2+a\alpha+2=0$ $\quad \cdots\cdots ㉣$

㉣에 ㉠을 대입하면 $\quad \alpha^2-(\alpha+2)\alpha+2=0$

$-2\alpha+2=0$ $\quad \therefore \alpha=1$

㉠, ㉡, ㉢에 $\alpha=1$을 대입하면

$a=-3$, $b=6$, $c=-4$

$\therefore a-b+c=-3-6+(-4)=-13$

답 -13

5 여러 가지 부등식

Ⅱ. 방정식과 부등식

01 일차부등식

● 본책 188~189쪽

402

(1) $c>0$이므로 $a<b$에서 $\quad ac<bc$

$b>0$이므로 $c<d$에서 $\quad bc<bd$

따라서 $ac<bc<bd$이므로

$ac<bd$

(2) $a<0$, $b<0$이므로 $\quad a+b<0$

$a<b$이므로 $\quad a-b<0$

따라서 $(a+b)(a-b)>0$이므로

$a^2-b^2>0 \quad \therefore a^2>b^2$

답 (1) $<$ (2) $>$

다른 풀이 (2) $b<0$이므로 $a<b$에서 $\quad ab>b^2$

$a<0$이므로 $a<b$에서 $\quad a^2>ab$

따라서 $a^2>ab>b^2$이므로 $\quad a^2>b^2$

403

$ax-10\geq 2x-5a$에서

$(a-2)x\geq -5(a-2)$

(i) $a-2>0$, 즉 $a>2$일 때,

$x\geq -5$

(ii) $a-2<0$, 즉 $a<2$일 때,

$x\leq -5$

(iii) $a-2=0$, 즉 $a=2$일 때,

$0\times x\geq 0$이므로 해는 모든 실수이다.

이상에서 주어진 부등식의 해는

$$\begin{cases} a>2\text{일 때}, & x\geq -5 \\ a<2\text{일 때}, & x\leq -5 \\ a=2\text{일 때, 해는 모든 실수이다.} \end{cases}$$

답 풀이 참조

404

$(a+b)x-2b\leq 0$에서

$(a+b)x\leq 2b$

이 부등식의 해가 $x\geq -2$이므로

$a+b<0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$(a+b)x\leq 2b$의 양변을 $a+b$로 나누면

$x\geq \dfrac{2b}{a+b}$

따라서 $\dfrac{2b}{a+b}=-2$이므로

$2b=-2(a+b), \quad 2a=-4b$

$\therefore a=-2b$

㉠에 $a=-2b$를 대입하면

$-b<0 \quad \therefore b>0$

이때 $bx-4a\geq 0$, 즉 $bx+8b\geq 0$에서

$bx\geq -8b$

$\therefore x\geq -8 \ (\because b>0)$

답 $x\geq -8$

02 연립일차부등식

● 본책 190~197쪽

405

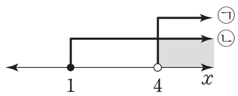
(1) $2x-5>3$에서 $\quad 2x>8$

$\therefore x>4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$-x+6\leq 2x+3$에서 $\quad -3x\leq -3$

$\therefore x\geq 1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$x>4$

(2) $3x+2<2(x-1)$에서

$3x+2<2x-2$

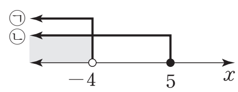
$\therefore x<-4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$-x-1\leq -3(x-3)$에서

$-x-1\leq -3x+9, \quad 2x\leq 10$

$\therefore x\leq 5 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$x<-4$

(3) $x-4\le 3x+5$에서 $\quad -2x\le 9$

$\therefore x\ge -\frac{9}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

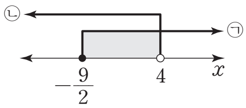
$\frac{3}{4}x<3-\frac{4-x}{3}$의 양변에 12를 곱하면

$9x<36-4(4-x)$

$9x<36-16+4x, \quad 5x<20$

$\therefore x<4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$-\frac{9}{2}\le x<4$

(4) $0.4x+0.2\le 0.1x-0.7$의 양변에 10을 곱하면

$4x+2\le x-7, \quad 3x\le -9$

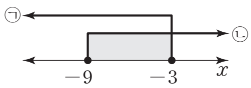
$\therefore x\le -3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{9x-1}{6}\le\frac{5x+4}{3}$의 양변에 6을 곱하면

$9x-1\le 2(5x+4), \quad 9x-1\le 10x+8$

$\therefore x\ge -9$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$-9\le x\le -3$

답 (1) $\boldsymbol{x>4}$ (2) $\boldsymbol{x<-4}$
(3) $\boldsymbol{-\frac{9}{2}\le x<4}$ (4) $\boldsymbol{-9\le x\le -3}$

406

$0.3(2x-1)\ge 1.2x+1$의 양변에 10을 곱하면

$3(2x-1)\ge 12x+10$

$6x-3\ge 12x+10, \quad -6x\ge 13$

$\therefore x\le -\frac{13}{6}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

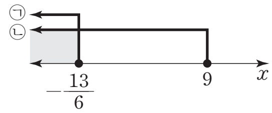
$\frac{x-1}{3}-\frac{x+1}{4}\le\frac{1}{6}$의 양변에 12를 곱하면

$4(x-1)-3(x+1)\le 2$

$4x-4-3x-3\le 2$

$\therefore x\le 9$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$x\le -\frac{13}{6}$

따라서 x의 값 중 가장 큰 정수는 -3이다. 답 $\boldsymbol{-3}$

407

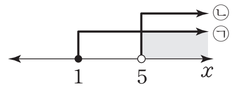
(1) 주어진 부등식은

$\begin{cases} x+7\le 5x+3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 5x+3<6x-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 풀면 $\quad -4x\le -4 \quad \therefore x\ge 1$

㉡을 풀면 $\quad x>5$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



$x>5$

(2) 주어진 부등식은

$\begin{cases} \frac{x-3}{2}\le 2-3x & \cdots\cdots ㉠ \\ 2-3x<-\frac{3}{4}(2x-1) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 양변에 2를 곱하면

$x-3\le 2(2-3x)$

$x-3\le 4-6x, \quad 7x\le 7$

$\therefore x\le 1$

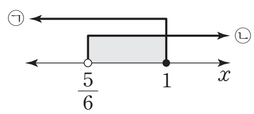
㉡의 양변에 4를 곱하면

$4(2-3x)<-3(2x-1)$

$8-12x<-6x+3, \quad -6x<-5$

$\therefore x>\frac{5}{6}$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



$\frac{5}{6}<x\le 1$

답 (1) $\boldsymbol{x>5}$ (2) $\boldsymbol{\frac{5}{6}<x\le 1}$

408

주어진 부등식은

$$\begin{cases} 5-4(x+5)\le 5(3-2x) & \cdots\cdots ㉠ \\ 5(3-2x)\le 8x-3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

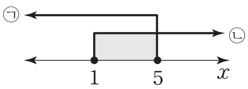
㉠을 풀면 $\quad 5-4x-20\le 15-10x$

$6x\le 30 \qquad \therefore x\le 5$

㉡을 풀면 $\quad 15-10x\le 8x-3$

$-18x\le -18 \qquad \therefore x\ge 1$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



$1\le x\le 5$

따라서 정수 x는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다. **답 5**

409

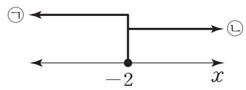
(1) $x+8\le -x+4$에서

$2x\le -4 \qquad \therefore x\le -2 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$5x+3\ge x-5$에서

$4x\ge -8 \qquad \therefore x\ge -2 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$x=-2$

(2) $5x<3(2x-1)$에서

$5x<6x-3, \qquad -x<-3$

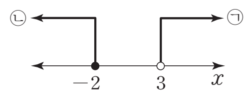
$\therefore x>3 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$2(x-3)\ge 4x-2$에서

$2x-6\ge 4x-2, \qquad -2x\ge 4$

$\therefore x\le -2 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



(3) $0.3x-0.1\ge 0.2x+0.4$의 양변에 10을 곱하면

$3x-1\ge 2x+4$

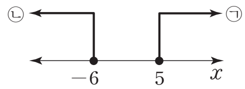
$\therefore x\ge 5 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\frac{2}{3}x+5\le -\frac{1}{2}x-2$의 양변에 6을 곱하면

$4x+30\le -3x-12, \qquad 7x\le -42$

$\therefore x\le -6 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



(4) 주어진 부등식은

$$\begin{cases} 2-3x<x-6 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-6\le -\frac{1}{2}(x+6) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠을 풀면 $\quad -4x<-8 \qquad \therefore x>2$

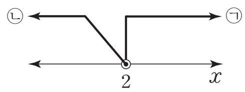
㉡의 양변에 2를 곱하면

$2(x-6)\le -(x+6)$

$2x-12\le -x-6, \qquad 3x\le 6$

$\therefore x\le 2$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는 없다.



답 (1) $x=-2$ (2) 해는 없다. (3) 해는 없다. (4) 해는 없다.

410

$2x-1\le 4x+5$에서 $\qquad -2x\le 6$

$\therefore x\ge -3$

$\frac{x+a}{2}\le \frac{2x-1}{5}+2$의 양변에 10을 곱하면

$5(x+a)\le 2(2x-1)+20$

$5x+5a\le 4x-2+20$

$\therefore x\le 18-5a$

주어진 연립부등식의 해가 $b\le x\le -2$이므로

$b=-3, \ 18-5a=-2$

따라서 $a=4, \ b=-3$이므로

$a-b=7$ **답 7**

411

주어진 부등식은

$$\begin{cases} 2x+a<3x+4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+4\le -4x+b & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠을 풀면　　$x>a-4$

㉡을 풀면　　$7x\le b-4$　　$\therefore x\le\frac{b-4}{7}$

주어진 부등식의 해가 $-3<x\le4$이므로

$$a-4=-3,\ \frac{b-4}{7}=4$$

따라서 $a=1$, $b=32$이므로

$$a+b=33$$

답 **33**

412

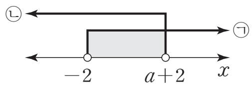
$\frac{x-2}{6}<\frac{x}{3}$의 양변에 6을 곱하면

$x-2<2x$　　$\therefore x>-2$　　…… ㉠

$2(x+1)>3x-a$에서　　$2x+2>3x-a$

$\therefore x<a+2$　　…… ㉡

주어진 연립부등식이 해를 갖도록 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



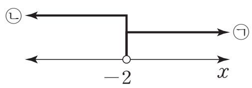
$-2<a+2$　　$\therefore a>-4$

답 $\boldsymbol{a>-4}$

참고　$a+2=-2$, 즉 $a=-4$일 때, ㉡에서

$x<-2$

이때 오른쪽 그림과 같이 공통부분이 없으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



413

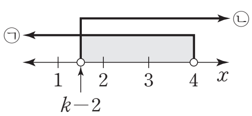
$5(x+1)>7x-3$에서

$5x+5>7x-3$,　　$-2x>-8$

$\therefore x<4$　　…… ㉠

$6x+2>5x+k$에서　　$x>k-2$　　…… ㉡

주어진 연립부등식의 정수인 해가 2개가 되도록 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$1\le k-2<2$　　$\therefore 3\le k<4$

답 $\boldsymbol{3\le k<4}$

참고　$k-2=2$, 즉 $k=4$이면 주어진 연립부등식의 정수인 해는 3의 1개뿐이다.

414

주어진 조건을 연립부등식으로 나타내면

$$\begin{cases}\frac{x}{2}-7\le0\\2(x-3)>10\end{cases}$$

$\frac{x}{2}-7\le0$에서　　$\frac{x}{2}\le7$

$\therefore x\le14$　　…… ㉠

$2(x-3)>10$에서

$2x-6>10$,　　$2x>16$

$\therefore x>8$　　…… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은

$8<x\le14$

이때 x는 정수이므로 9, 10, …, 14의 6개이다.

답 **6**

415

학생 수를 x라 하면 초콜릿의 개수는 $4x+10$이다. 이때 초콜릿을 6개씩 나누어 주면 2개 이상 4개 미만의 초콜릿이 남으므로

$6x+2\le4x+10<6x+4$

$6x+2\le4x+10$에서　　$2x\le8$

$\therefore x\le4$　　…… ㉠

$4x+10<6x+4$에서　　$-2x<-6$

$\therefore x>3$　　…… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은

$3<x\le4$

이때 x는 자연수이므로　　$x=4$

따라서 초콜릿의 개수는

$4\times4+10=26$

답 **26**

참고　한 사람에게 n개씩 나누어 주는 경우

⇨ 사람 수를 x로 놓는다.

416

두 식품 A, B에 대하여 각각 1 g을 섭취하여 얻을 수 있는 열량과 단백질의 양은 다음 표와 같다.

식품	열량(kcal)	단백질(g)
A	1.2	0.2
B	3.2	0.1

식품 A의 섭취량을 x g이라 하면 식품 B의 섭취량은 $(200-x)$ g이므로

$$\begin{cases} 1.2x+3.2(200-x)\geq 300 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ 0.2x+0.1(200-x)\geq 30 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠의 양변에 10을 곱하면

$12x+32(200-x)\geq 3000$

$12x+6400-32x\geq 3000$

$-20x\geq -3400$

$\therefore x\leq 170$ ······ ㉢

㉡의 양변에 10을 곱하면

$2x+200-x\geq 300$

$\therefore x\geq 100$ ······ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분은

$100\leq x\leq 170$

따라서 식품 A를 100 g 이상 170 g 이하로 섭취해야 한다.

답 100 g 이상 170 g 이하

연습 문제

● 본책 198~199쪽

417

전략 각 부등식을 풀어 연립부등식의 해를 구한다.

$10-4x<-9x+30$에서

$5x<20$ $\therefore x<4$ ······ ㉠

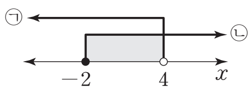
$-9x\leq 12-2(x-1)$에서

$-9x\leq 12-2x+2$

$-7x\leq 14$

$\therefore x\geq -2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$-2\leq x<4$

따라서 $a=-2$, $b=4$이므로

$b-a=6$

답 6

418

전략 주어진 부등식을 연립부등식으로 변형하여 푼다.

주어진 부등식은

$$\begin{cases} 1-\dfrac{2(1-x)}{3}<\dfrac{3x+5}{4} & \cdots\cdots \text{㉠} \\ \dfrac{3x+5}{4}<\dfrac{x-1}{2}+1 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠의 양변에 12를 곱하면

$12-8(1-x)<3(3x+5)$

$12-8+8x<9x+15$

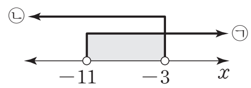
$\therefore x>-11$

㉡의 양변에 4를 곱하면

$3x+5<2(x-1)+4$

$3x+5<2x-2+4$ $\therefore x<-3$

㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



$-11<x<-3$

따라서 x의 값 중에서 가장 큰 정수는 -4이다.

답 −4

419

전략 각 부등식의 해를 구하여 주어진 수직선과 비교한다.

$\dfrac{3x+a}{2}\leq\dfrac{x}{3}+1$의 양변에 6을 곱하면

$3(3x+a)\leq 2x+6$

$9x+3a\leq 2x+6$, $7x\leq -3a+6$

$\therefore x\leq\dfrac{-3a+6}{7}$

$\dfrac{x}{3}-\dfrac{2x+1}{6}\geq\dfrac{x-1}{2}$의 양변에 6을 곱하면

$2x-(2x+1)\geq 3(x-1)$

$2x-2x-1\geq 3x-3$

$-3x\geq -2$ $\therefore x\leq\dfrac{2}{3}$

주어진 그림에서 연립부등식의 해가 $x\leq -\dfrac{1}{2}$이므로

$\dfrac{-3a+6}{7}=-\dfrac{1}{2}$, $-6a+12=-7$

$\therefore a=\dfrac{19}{6}$

답 $\dfrac{19}{6}$

420

전략 각 부등식의 해가 $x\le8$, $x\ge8$이어야 함을 이용한다.

$4x-3(1+x)\ge a$에서 $\quad 4x-3-3x\ge a$

$\therefore x\ge a+3$

$3(x-1)+b\le2(x+5)$에서

$3x-3+b\le2x+10$

$\therefore x\le-b+13$

주어진 연립부등식의 해가 $x=8$이므로

$a+3=8,\ -b+13=8$

$\therefore a=5,\ b=5$

$\therefore a+b=10$ **답 10**

421

전략 각 부등식의 해를 구한 다음 공통부분이 없도록 수직선에 나타낸다.

$8-3x\ge5x$에서 $\quad -8x\ge-8$

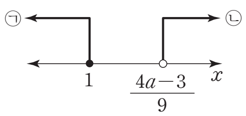
$\therefore x\le1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\dfrac{3x+1}{4}>\dfrac{1}{3}a$의 양변에 12를 곱하면

$3(3x+1)>4a,\quad 9x+3>4a$

$\therefore x>\dfrac{4a-3}{9}$ $\cdots\cdots$ ㉡

주어진 연립부등식의 해가 없도록 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$\dfrac{4a-3}{9}\ge1,\quad 4a-3\ge9 \quad \therefore a\ge3$

따라서 상수 a의 값이 될 수 있는 것은 ⑤이다. **답 ⑤**

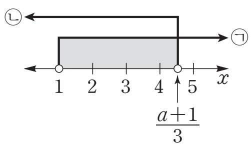
422

전략 연립부등식의 해를 a에 대한 식으로 나타낸다.

$x+2>3$에서 $\quad x>1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$3x<a+1$에서 $\quad x<\dfrac{a+1}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉡

주어진 연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합이 9가 되도록 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$4<\dfrac{a+1}{3}\le5,\quad 12<a+1\le15$

$\therefore 11<a\le14$

따라서 자연수 a의 최댓값은 14이다. **답 ⑤**

참고 $2+3+4=9$이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 값은 2, 3, 4이다.

423

전략 잘못 푼 연립부등식의 해를 이용하여 a, b의 값을 구한다.

$5x-4a<3x+2a$에서 $\quad 2x<6a$

$\therefore x<3a$ $\cdots\cdots$ ㉠

$5x-4a\le6x+b$에서

$x\ge-4a-b$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 $-3\le x<6$이므로

$3a=6,\ -4a-b=-3$

$\therefore a=2,\ b=-5$

따라서 주어진 부등식은 $5x-8<3x+4\le6x-5$이므로

$$\begin{cases}5x-8<3x+4\\3x+4\le6x-5\end{cases}$$

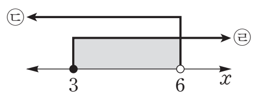
$5x-8<3x+4$에서 $\quad 2x<12$

$\therefore x<6$ $\cdots\cdots$ ㉢

$3x+4\le6x-5$에서 $\quad -3x\le-9$

$\therefore x\ge3$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



$3\le x<6$ **답 $3\le x<6$**

424

전략 y를 x에 대한 식으로 나타내어 부등식에 대입한다.

$2x+3y-1=10x+y-3$에서

$y=4x-1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$3x+2<2y<2x+5$에 ㉠을 대입하면

$3x+2<2(4x-1)<2x+5$

$3x+2<8x-2<2x+5$

$$\therefore \begin{cases}3x+2<8x-2\\8x-2<2x+5\end{cases}$$

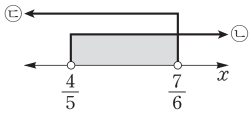
$3x+2<8x-2$에서 $\quad -5x<-4$

$\therefore x>\dfrac{4}{5}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

$8x-2<2x+5$에서

$6x<7 \quad \therefore x<\dfrac{7}{6}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



$\dfrac{4}{5}<x<\dfrac{7}{6}$

이때 x는 자연수이므로 $\quad x=1$

㉠에 $x=1$을 대입하면 $\quad y=3$

답 $\boldsymbol{x=1,\ y=3}$

425

전략 주어진 부등식을 연립부등식으로 변형한 후 각 부등식의 해의 공통부분에 정수가 없도록 수직선에 나타낸다.

주어진 부등식은

$$\begin{cases} \dfrac{-x+a}{3}<1-\dfrac{x}{2} \\ 1-\dfrac{x}{2}<\dfrac{-x+1}{4} \end{cases}$$

$\dfrac{-x+a}{3}<1-\dfrac{x}{2}$의 양변에 6을 곱하면

$2(-x+a)<6-3x$

$-2x+2a<6-3x$

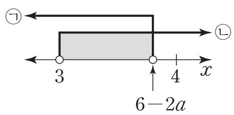
$\therefore x<6-2a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$1-\dfrac{x}{2}<\dfrac{-x+1}{4}$의 양변에 4를 곱하면

$4-2x<-x+1$

$\therefore x>3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 없도록 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$6-2a\le 4, \quad -2a\le -2$

$\therefore a\ge 1$

답 $\boldsymbol{a\ge 1}$

426

전략 각 부등식의 해를 구한 다음 공통부분에 음의 정수가 1개만 포함되도록 수직선에 나타낸다.

$\dfrac{x}{4}-\dfrac{a}{2}\le\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{8}$의 양변에 8을 곱하면

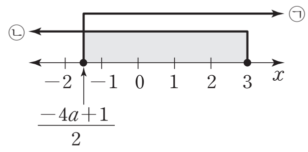
$2x-4a\le 4x-1, \quad -2x\le 4a-1$

$\therefore x\ge\dfrac{-4a+1}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$4x+1\ge 6x-5$에서

$-2x\ge -6 \quad \therefore x\le 3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

주어진 연립부등식을 만족시키는 음의 정수 x가 1개뿐이도록 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉 $-2<\dfrac{-4a+1}{2}\le -1$이어야 하므로

$-4<-4a+1\le -2, \quad -5<-4a\le -3$

$\therefore \dfrac{3}{4}\le a<\dfrac{5}{4}$

답 $\boldsymbol{\dfrac{3}{4}\le a<\dfrac{5}{4}}$

427

전략 직선과 이차함수의 그래프의 위치 관계를 부등식으로 나타낸다.

직선 $y=x+k$와 이차함수 $y=x^2-2x+4$의 그래프가 만나려면 이차방정식 $x+k=x^2-2x+4$, 즉 $x^2-3x-k+4=0$의 실근이 존재해야 한다.

따라서 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-3)^2-4\times1\times(-k+4)\ge 0$

$9+4k-16\ge 0, \quad 4k\ge 7$

$\therefore k\ge\dfrac{7}{4}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 직선 $y=x+k$와 이차함수 $y=x^2-5x+15$의 그래프가 만나지 않으려면 이차방정식 $x+k=x^2-5x+15$, 즉 $x^2-6x-k+15=0$의 실근이 존재하지 않아야 한다.

따라서 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=(-3)^2-1\times(-k+15)<0$

$9+k-15<0$

$\therefore k<6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $\quad \dfrac{7}{4}\le k<6$

따라서 정수 k는 2, 3, 4, 5의 4개이다.

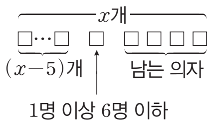
답 ②

428

전략 의자의 개수를 x로 놓고, 학생 수에 대한 부등식을 세운다.

의자의 개수를 x라 하면 전체 학생 수는 $5x+8$이다.

이때 6명씩 앉으면 의자 4개가 남는다는 것은 의자 $(x-5)$개에는 6명씩 앉고 다른 한 의자에는 최소 1명에서 최대 6명까지 앉을 수 있다는 뜻이다.



즉 전체 학생 수는 $6(x-5)+1$ 이상 $6(x-5)+6$ 이하이다.

따라서 부등식을 세우면

$$6(x-5)+1\le 5x+8\le 6(x-5)+6$$

$$\therefore \begin{cases} 6(x-5)+1\le 5x+8 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ 5x+8\le 6(x-5)+6 & \cdots\cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠을 풀면 $\quad 6x-30+1\le 5x+8$

$\therefore x\le 37 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉡을 풀면 $\quad 5x+8\le 6x-30+6$

$\therefore x\ge 32 \quad \cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분은

$32\le x\le 37$

따라서 가능한 의자의 개수가 될 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

다른 풀이 6명씩 앉으면 의자 4개가 남는다는 것은 학생 수가 $6(x-5)$ 초과 $6(x-4)$ 이하라는 뜻이므로

$$6(x-5)<5x+8\le 6(x-4)$$

$\therefore 32\le x<38$

03 절댓값 기호를 포함한 일차부등식

● 본책 200~202쪽

429

(1) $|2x-1|>4$에서

$2x-1<-4$ 또는 $2x-1>4$

$\therefore x<-\dfrac{3}{2}$ 또는 $x>\dfrac{5}{2}$

(2) $1<\left|5-\dfrac{4}{3}x\right|<2$에서

$-2<5-\dfrac{4}{3}x<-1$ 또는 $1<5-\dfrac{4}{3}x<2$

(i) $-2<5-\dfrac{4}{3}x<-1$에서

$-7<-\dfrac{4}{3}x<-6 \qquad \therefore \dfrac{9}{2}<x<\dfrac{21}{4}$

(ii) $1<5-\dfrac{4}{3}x<2$에서

$-4<-\dfrac{4}{3}x<-3 \qquad \therefore \dfrac{9}{4}<x<3$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$\dfrac{9}{4}<x<3$ 또는 $\dfrac{9}{2}<x<\dfrac{21}{4}$

답 (1) $x<-\dfrac{3}{2}$ 또는 $x>\dfrac{5}{2}$

(2) $\dfrac{9}{4}<x<3$ 또는 $\dfrac{9}{2}<x<\dfrac{21}{4}$

430

$|3x-a|<b$에서 $\qquad -b<3x-a<b$

$a-b<3x<a+b$

$\therefore \dfrac{a-b}{3}<x<\dfrac{a+b}{3}$

주어진 부등식의 해가 $-2<x<4$이므로

$\dfrac{a-b}{3}=-2,\ \dfrac{a+b}{3}=4$

$a-b=-6,\ a+b=12$

$\therefore a=3,\ b=9$

$\therefore ab=27$

답 27

431

(1) $2|x-2|<-x+5$에서

(i) $x<2$일 때, $x-2<0$이므로

$-2(x-2)<-x+5$

$\therefore x>-1$

그런데 $x<2$이므로

$-1<x<2$

(ii) $x\ge 2$일 때, $x-2\ge 0$이므로

$2(x-2)<-x+5$

$3x<9 \qquad \therefore x<3$

그런데 $x\ge 2$이므로

$2\le x<3$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-1<x<3$

(2) $|x+1|-|2-x|<-x+1$에서

(ⅰ) $x<-1$일 때,

$x+1<0$, $2-x>0$이므로

$-(x+1)-(2-x)<-x+1$

$\therefore x<4$

그런데 $x<-1$이므로

$x<-1$

(ⅱ) $-1\le x<2$일 때,

$x+1\ge 0$, $2-x>0$이므로

$x+1-(2-x)<-x+1$

$3x<2 \qquad \therefore x<\frac{2}{3}$

그런데 $-1\le x<2$이므로

$-1\le x<\frac{2}{3}$

(ⅲ) $x\ge 2$일 때,

$x+1>0$, $2-x\le 0$이므로

$x+1+(2-x)<-x+1$

$\therefore x<-2$

그런데 $x\ge 2$이므로 해는 없다.

이상에서 주어진 부등식의 해는

$x<\frac{2}{3}$

답 (1) $\boldsymbol{-1<x<3}$ (2) $\boldsymbol{x<\frac{2}{3}}$

432

$2|x-1|+|x+3|\le 5$에서

(ⅰ) $x<-3$일 때,

$x-1<0$, $x+3<0$이므로

$-2(x-1)-(x+3)\le 5$

$-3x\le 6$

$\therefore x\ge -2$

그런데 $x<-3$이므로 해는 없다.

(ⅱ) $-3\le x<1$일 때,

$x-1<0$, $x+3\ge 0$이므로

$-2(x-1)+(x+3)\le 5$

$\therefore x\ge 0$

그런데 $-3\le x<1$이므로

$0\le x<1$

(ⅲ) $x\ge 1$일 때,

$x-1\ge 0$, $x+3>0$이므로

$2(x-1)+(x+3)\le 5$

$3x\le 4 \qquad \therefore x\le\frac{4}{3}$

그런데 $x\ge 1$이므로 $\quad 1\le x\le\frac{4}{3}$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$0\le x\le\frac{4}{3}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 실수 x의 최댓값은 $M=\frac{4}{3}$, 최솟값은 $m=0$이므로

$M-m=\frac{4}{3}$

답 $\boldsymbol{\frac{4}{3}}$

연습 문제 • 본책 203쪽

433

전략 주어진 부등식의 해를 a에 대한 식으로 나타낸다.

$a+1$이 양수이므로 $|x-7|\le a+1$에서

$-(a+1)\le x-7\le a+1$

$\therefore -a+6\le x\le a+8 \qquad \cdots\cdots ㉠$

부등식 ㉠을 만족시키는 모든 정수 x의 개수는

$(a+8)-(-a+6)+1=2a+3$

이때 주어진 부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 개수가 9이므로

$2a+3=9, \qquad 2a=6$

$\therefore a=3$

답 ③

해설 Focus

정수 a, b에 대하여

① $a<x<b$를 만족시키는 정수 x의 개수는

$b-a-1$

② $a\le x<b$ (또는 $a<x\le b$)를 만족시키는 정수 x의 개수는

$b-a$

③ $a\le x\le b$를 만족시키는 정수 x의 개수는

$b-a+1$

434

전략 $|A|>k$이면 $A<-k$ 또는 $A>k$임을 이용한다.

$3x-2\le 10-x$에서

$4x\le 12 \qquad \therefore x\le 3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

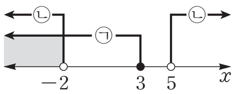
$|2x-3|>7$에서

$2x-3<-7$ 또는 $2x-3>7$

$2x<-4$ 또는 $2x>10$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>5 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$x<-2$

따라서 정수 x의 최댓값은 -3이다. **답** -3

435

전략 실수 A에 대하여 $|A|\ge 0$임을 이용하여 주어진 부등식의 해가 존재하지 않을 조건을 구한다.

$|x-2|\le \frac{2}{3}k-4$의 해가 존재하지 않으려면

$\frac{2}{3}k-4<0$이어야 하므로

$\frac{2}{3}k<4 \qquad \therefore k<6$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다. **답** 5

436

전략 $x<3$인 경우와 $x\ge 3$인 경우로 나누어 부등식을 푼다.

$|3-x|\ge -2(x+5)$에서

(i) $x<3$일 때, $3-x>0$이므로

$3-x\ge -2(x+5), \qquad 3-x\ge -2x-10$

$\therefore x\ge -13$

그런데 $x<3$이므로 $\qquad -13\le x<3$

(ii) $x\ge 3$일 때, $3-x\le 0$이므로

$-(3-x)\ge -2(x+5)$

$-3+x\ge -2x-10$

$3x\ge -7 \qquad \therefore x\ge -\frac{7}{3}$

그런데 $x\ge 3$이므로 $\qquad x\ge 3$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $\qquad x\ge -13$

$\therefore a=-13$ **답** -13

437

전략 $|A|<k$이면 $-k<A<k$임을 이용한다.

$||x+1|-5|<2$에서

$-2<|x+1|-5<2$

$3<|x+1|<7$

$\therefore -7<x+1<-3$ 또는 $3<x+1<7$

(i) $-7<x+1<-3$에서 $\qquad -8<x<-4$

(ii) $3<x+1<7$에서 $\qquad 2<x<6$

(i), (ii)에서 $\qquad -8<x<-4$ 또는 $2<x<6$

따라서 정수 x는 -7, -6, -5, 3, 4, 5의 6개이다.

답 6

438

전략 $\sqrt{A^2}=|A|$임을 이용하여 절댓값 기호를 포함한 부등식으로 변형한다.

$2\sqrt{(1-x)^2}+3|x+1|<9$에서

$2|1-x|+3|x+1|<9$

(i) $x<-1$일 때,

$1-x>0$, $x+1<0$이므로

$2(1-x)-3(x+1)<9$

$-5x<10 \qquad \therefore x>-2$

그런데 $x<-1$이므로

$-2<x<-1$

(ii) $-1\le x<1$일 때,

$1-x>0$, $x+1\ge 0$이므로

$2(1-x)+3(x+1)<9$

$\therefore x<4$

그런데 $-1\le x<1$이므로

$-1\le x<1$

(iii) $x\ge 1$일 때,

$1-x\le 0$, $x+1>0$이므로

$-2(1-x)+3(x+1)<9$

$5x<8 \qquad \therefore x<\frac{8}{5}$

그런데 $x\ge 1$이므로

$1\le x<\frac{8}{5}$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$-2<x<\frac{8}{5}$

한편 $5x+a<6x+4<x+b$에서

$$\begin{cases} 5x+a<6x+4 \\ 6x+4<x+b \end{cases}$$

$5x+a<6x+4$에서 $\quad x>a-4$

$6x+4<x+b$에서 $\quad x<\dfrac{b-4}{5}$

이 부등식의 해가 $-2<x<\dfrac{8}{5}$이므로

$$a-4=-2,\ \frac{b-4}{5}=\frac{8}{5}$$

$\therefore a=2,\ b=12$

$\therefore a+b=14$

답 **14**

439

전략 $x<-1$, $-1\le x<1$, $x\ge1$인 경우로 나누어 좌변의 식의 값의 범위를 구한다.

$f(x)=2|x+1|+|x-1|$이라 하면 주어진 부등식은

$f(x)\le k$ …… ㉠

(i) $x<-1$일 때,

$x+1<0$, $x-1<0$이므로

$$f(x)=-2(x+1)-(x-1)$$
$$=-3x-1$$

그런데 $x<-1$에서 $-3x>3$이므로

$-3x-1>2$

$\therefore f(x)>2$

(ii) $-1\le x<1$일 때,

$x+1\ge0$, $x-1<0$이므로

$$f(x)=2(x+1)-(x-1)=x+3$$

그런데 $-1\le x<1$에서 $2\le x+3<4$이므로

$2\le f(x)<4$

(iii) $x\ge1$일 때,

$x+1>0$, $x-1\ge0$이므로

$$f(x)=2(x+1)+(x-1)$$
$$=3x+1$$

그런데 $x\ge1$에서 $3x\ge3$이므로

$3x+1\ge4$

$\therefore f(x)\ge4$

이상에서 $\quad f(x)\ge2$

따라서 부등식 ㉠이 해를 가지려면

$k\ge2$

답 $\boldsymbol{k\ge2}$

04 이차부등식

● 본책 204~210쪽

440

(1) 부등식 $f(x)\ge g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x\le b$ 또는 $x\ge d$

(2) $f(x)g(x)<0$이면

$f(x)>0$, $g(x)<0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)>0$

(i) $f(x)>0$, $g(x)<0$일 때,

$f(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$x<a$ 또는 $x>c$ …… ㉠

$g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$x<0$ 또는 $x>e$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $\quad x<a$ 또는 $x>e$

(ii) $f(x)<0$, $g(x)>0$일 때,

$f(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$a<x<c$ …… ㉢

$g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$0<x<e$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분은 $\quad 0<x<c$

(i), (ii)에서 구하는 부등식의 해는

$x<a$ 또는 $0<x<c$ 또는 $x>e$

답 (1) $\boldsymbol{x\le b}$ **또는** $\boldsymbol{x\ge d}$

(2) $\boldsymbol{x<a}$ **또는** $\boldsymbol{0<x<c}$ **또는** $\boldsymbol{x>e}$

441

$ax^2+(b-m)x+c-n\le0$에서

$ax^2+bx+c\le mx+n$

따라서 이 부등식의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로

$-2\le x\le2$

답 $\boldsymbol{-2\le x\le2}$

442

(1) $2(x^2-2x)+1>-x+3$에서

$2x^2-3x-2>0,\quad (2x+1)(x-2)>0$

$\therefore \boldsymbol{x<-\frac{1}{2}}$ **또는** $\boldsymbol{x>2}$

(2) $-x^2+3\geq -6x$에서

$x^2-6x-3\leq 0$

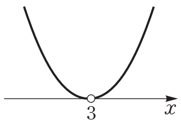
이차방정식 $x^2-6x-3=0$의 해는

$x=3\pm 2\sqrt{3}$

따라서 주어진 부등식의 해는

$\mathbf{3-2\sqrt{3}\leq x\leq 3+2\sqrt{3}}$

(3) $x^2+9>6x$에서



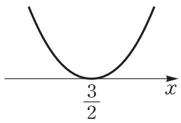
$x^2-6x+9>0$

$\therefore (x-3)^2>0$

따라서 주어진 부등식의 해는

$x\neq 3$인 모든 실수이다.

(4) $5x^2-10x+7\leq x^2+2x-2$에서

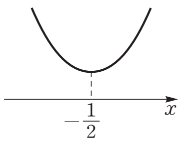


$4x^2-12x+9\leq 0$

$(2x-3)^2\leq 0$

$\therefore \mathbf{x=\frac{3}{2}}$

(5) $-2x^2-2x<3$에서



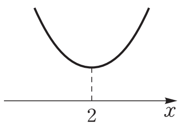
$2x^2+2x+3>0$

$\therefore 2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}>0$

따라서 주어진 부등식의 해는

모든 실수이다.

(6) $2x^2\leq 4(2x-5)+11$에서



$2x^2-8x+9\leq 0$

$2(x-2)^2+1\leq 0$

따라서 주어진 부등식의 **해는 없다.**

답 **풀이 참조**

443

$ax^2+2ax-3a>0$에서

$a(x^2+2x-3)>0$

$\therefore a(x+3)(x-1)>0 \quad \cdots\cdots ㉠$

(i) $a>0$일 때,

㉠의 양변을 a로 나누면

$(x+3)(x-1)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>1$

(ii) $a=0$일 때,

㉠에서 $0\times(x+3)(x-1)>0$이므로 해는 없다.

(iii) $a<0$일 때,

㉠의 양변을 a로 나누면

$(x+3)(x-1)<0$

$\therefore -3<x<1$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$a>0$일 때, $x<-3$ 또는 $x>1$

$a=0$일 때, 해는 없다.

$a<0$일 때, $-3<x<1$

답 **풀이 참조**

444

(1) (i) $x<0$일 때, $x^2+2x-3<0$

$(x+3)(x-1)<0$

$\therefore -3<x<1$

그런데 $x<0$이므로 $-3<x<0$

(ii) $x\geq 0$일 때, $x^2-2x-3<0$

$(x+1)(x-3)<0$

$\therefore -1<x<3$

그런데 $x\geq 0$이므로 $0\leq x<3$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-3<x<3$

(2) (i) $x<1$일 때, $x^2-2x\geq -2(x-1)+2$

$x^2-4\geq 0$, $(x+2)(x-2)\geq 0$

$\therefore x\leq -2$ 또는 $x\geq 2$

그런데 $x<1$이므로 $x\leq -2$

(ii) $x\geq 1$일 때, $x^2-2x\geq 2(x-1)+2$

$x^2-4x\geq 0$, $x(x-4)\geq 0$

$\therefore x\leq 0$ 또는 $x\geq 4$

그런데 $x\geq 1$이므로 $x\geq 4$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x\leq -2$ 또는 $x\geq 4$

답 (1) **$-3<x<3$**

(2) **$x\leq -2$ 또는 $x\geq 4$**

다른 풀이 (1) $x^2-2|x|-3<0$에서

$|x|^2-2|x|-3<0$

$(|x|+1)(|x|-3)<0$

그런데 $|x|+1>0$이므로

$|x|-3<0$, $|x|<3$

$\therefore -3<x<3$

445

한 대의 가격을 x만 원 인상하면 가격은 $(20+x)$만 원, 월 판매량은 $(90-3x)$대가 된다.
한 달 동안의 총판매액이 1872만 원 이상이 되려면

$(20+x)(90-3x) \geq 1872$

$-3x^2+30x-72 \geq 0$

$x^2-10x+24 \leq 0, \quad (x-4)(x-6) \leq 0$

$\therefore 4 \leq x \leq 6$

따라서 $24 \leq 20+x \leq 26$이므로 최고로 정할 수 있는 한 대의 가격은 26만 원이다.

답 ③

446

이차방정식 $3x^2+(a+2)x+a=0$의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식이 허근을 가져야 하므로

$D=(a+2)^2-12a<0$

$\therefore a^2-8a+4<0 \quad \cdots\cdots ㉠$

이차방정식 $a^2-8a+4=0$의 해는

$a=4\pm2\sqrt{3}$

이므로 이차부등식 ㉠의 해는

$4-2\sqrt{3}<a<4+2\sqrt{3}$

따라서 정수 a는 1, 2, 3, ⋯, 7의 7개이다. 답 **7**

05 이차부등식의 해의 조건

● 본책 211~215쪽

447

해가 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)<0$

$\therefore x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}<0 \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠과 주어진 이차부등식 $ax^2+bx+1>0$의 부등호의 방향이 다르므로 $\quad a<0$

㉠의 양변에 a를 곱하면 $\quad ax^2+\frac{a}{6}x-\frac{a}{6}>0$

이 부등식이 $ax^2+bx+1>0$과 일치하므로

$b=\frac{a}{6}, 1=-\frac{a}{6} \quad \therefore a=-6, b=-1$

$\therefore a+b=-7$ 답 **−7**

다른 풀이 이차방정식 $ax^2+bx+1=0$의 두 근이 $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{b}{a}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{a}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$

$\therefore a=-6, b=-1$

$\therefore a+b=-7$

448

해가 $x<-3$ 또는 $x>5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+3)(x-5)>0$

$\therefore x^2-2x-15>0 \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠과 주어진 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 부등호의 방향이 다르므로

$a<0$

㉠의 양변에 a를 곱하면 $\quad ax^2-2ax-15a<0$

이 부등식이 $ax^2+bx+c<0$과 일치하므로

$b=-2a, c=-15a \quad \cdots\cdots ㉡$

$cx^2+bx+a<0$에 ㉡을 대입하면

$-15ax^2-2ax+a<0$

양변을 $-a$로 나누면

$15x^2+2x-1<0 \ (\because -a>0)$

$(3x+1)(5x-1)<0$

$\therefore -\frac{1}{3}<x<\frac{1}{5}$

답 $\boldsymbol{-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{5}}$

다른 풀이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 -3, 5이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{b}{a}=-3+5, \frac{c}{a}=-3\times5$

$\therefore b=-2a, c=-15a$

449

해가 $x<-2$ 또는 $x>1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-1)>0 \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠과 $f(x)<0$의 부등호의 방향이 다르므로 ㉠의 양변에 $a<0$인 상수 a를 곱하면

$a(x+2)(x-1)<0$

즉 $f(x)=a(x+2)(x-1)$이라 하면

$$f(3x-1)=a(3x-1+2)(3x-1-1)$$
$$=a(3x+1)(3x-2)$$

부등식 $f(3x-1)\geq 0$, 즉 $a(3x+1)(3x-2)\geq 0$에서

$(3x+1)(3x-2)\leq 0$ ($\because a<0$)

$\therefore -\frac{1}{3}\leq x\leq \frac{2}{3}$ 답 $-\frac{1}{3}\leq x\leq \frac{2}{3}$

다른 풀이 $f(x)<0$의 해가 $x<-2$ 또는 $x>1$이므로 $f(x)\geq 0$의 해는 $-2\leq x\leq 1$이다.
따라서 $f(3x-1)\geq 0$의 해는 $-2\leq 3x-1\leq 1$에서

$-1\leq 3x\leq 2$ $\quad\therefore -\frac{1}{3}\leq x\leq \frac{2}{3}$

450

모든 실수 x에 대하여 이차부등식
$ax^2+6x+(2a+3)\leq 0$이 성립하려면

$a<0$ ...... ㉠

또 이차방정식 $ax^2+6x+(2a+3)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-a(2a+3)\leq 0$

$2a^2+3a-9\geq 0$, $\quad (a+3)(2a-3)\geq 0$

$\therefore a\leq -3$ 또는 $a\geq \frac{3}{2}$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $\quad a\leq -3$ 답 $a\leq -3$

451

모든 실수 x에 대하여 부등식
$(a-1)x^2-2(a-1)x+1>0$이 성립하려면

(i) $a-1=0$, 즉 $a=1$일 때,
$0\times x^2-0\times x+1>0$에서 $1>0$이므로 주어진 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $a-1\neq 0$, 즉 $a\neq 1$일 때,
주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$a-1>0$ $\quad\therefore a>1$ ...... ㉠

또 이차방정식 $(a-1)x^2-2(a-1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(a-1)<0$

$(a-1)(a-2)<0$

$\therefore 1<a<2$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $\quad 1<a<2$

(i), (ii)에서 구하는 실수 a의 값의 범위는

$1\leq a<2$ 답 $1\leq a<2$

452

이차함수 $y=x^2-4kx+1$의 그래프가 직선 $y=2x-k^2$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-4kx+1>2x-k^2$, 즉 $x^2-2(2k+1)x+k^2+1>0$이 성립해야 한다.
이차방정식 $x^2-2(2k+1)x+k^2+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k+1)^2-(k^2+1)<0$

$3k^2+4k<0$, $\quad k(3k+4)<0$

$\therefore -\frac{4}{3}<k<0$ 답 $-\frac{4}{3}<k<0$

참고 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있다.
⇨ 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>g(x)$가 성립한다.

453

이차부등식 $2x^2-ax-a+6<0$이 해를 가지려면 이차방정식 $2x^2-ax-a+6=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-8(-a+6)>0$

$a^2+8a-48>0$, $\quad (a+12)(a-4)>0$

$\therefore a<-12$ 또는 $a>4$

답 $a<-12$ 또는 $a>4$

454

이차부등식 $(a-3)x^2-2(a-3)x-2>0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$(a-3)x^2-2(a-3)x-2\leq 0$

이 성립해야 하므로 $a-3<0$에서

$a<3$ ...... ㉠

또 이차방정식 $(a-3)x^2-2(a-3)x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-3)^2+2(a-3)\leq 0$

$(a-1)(a-3)\leq 0$

$\therefore\ 1\le a\le 3$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $1\le a<3$ 답 $\mathbf{1\le a<3}$

455

이차부등식 $(a+1)x^2-2(a+1)x+4\le 0$이 단 하나의 해를 가지려면

$a+1>0$ $\therefore\ a>-1$ ...... ㉠

또 이차방정식 $(a+1)x^2-2(a+1)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+1)^2-4(a+1)=0$

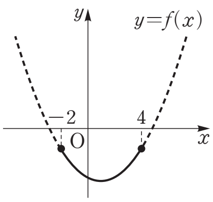
$(a+1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=3$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $a=3$ 답 **3**

456

$f(x)=x^2-2ax+a^2-16$이라 하면 $-2\le x\le 4$에서 $f(x)<0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $f(-2)<0$에서 $4+4a+a^2-16<0$

$a^2+4a-12<0$, $(a+6)(a-2)<0$

$\therefore\ -6<a<2$ ...... ㉠

(ii) $f(4)<0$에서 $16-8a+a^2-16<0$

$a^2-8a<0$, $a(a-8)<0$

$\therefore\ 0<a<8$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은

$0<a<2$ 답 $\mathbf{0<a<2}$

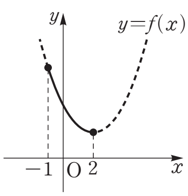
457

$x^2-4x>a^2-8$에서 $x^2-4x-a^2+8>0$

$f(x)=x^2-4x-a^2+8$이라 하면

$f(x)=(x-2)^2-a^2+4$

$-1\le x\le 2$에서 $f(x)>0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $-1\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 최솟값인 $f(2)$가 0보다 커야 하므로

$f(2)=-a^2+4>0$

$a^2-4<0$, $(a+2)(a-2)<0$

$\therefore\ -2<a<2$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1의 3개이다. 답 **3**

458

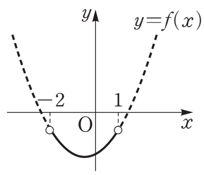
$-2<x<1$에서 이차함수 $y=-2x^2+3ax+8$의 그래프가 직선 $y=a^2x-4$보다 항상 위쪽에 있으려면 $-2<x<1$에서 이차부등식

$-2x^2+3ax+8>a^2x-4$, 즉

$2x^2+(a^2-3a)x-12<0$

이 항상 성립해야 한다.

$f(x)=2x^2+(a^2-3a)x-12$라 하면 $-2<x<1$에서 $f(x)<0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $f(-2)\le 0$에서 $8-2(a^2-3a)-12\le 0$

$a^2-3a+2\ge 0$, $(a-1)(a-2)\ge 0$

$\therefore\ a\le 1$ 또는 $a\ge 2$ ...... ㉠

(ii) $f(1)\le 0$에서 $2+a^2-3a-12\le 0$

$a^2-3a-10\le 0$, $(a+2)(a-5)\le 0$

$\therefore\ -2\le a\le 5$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은

$-2\le a\le 1$ 또는 $2\le a\le 5$

답 $\mathbf{-2\le a\le 1}$ **또는** $\mathbf{2\le a\le 5}$

연습 문제

● 본책 216~218쪽

459

전략 $f(x)>0$인 x의 값의 범위와 $f(x)<g(x)$인 x의 값의 범위의 공통부분을 구한다.

부등식 $0<f(x)<g(x)$에서

$$\begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}$$

(ⅰ) $f(x)>0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x<-2$ 또는 $x>2$ …… ㉠

(ⅱ) $f(x)<g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$-1<x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $2<x<3$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=3$이므로

$\alpha+\beta=5$

답 5

460

전략 이차부등식의 해를 구하거나 좌변을 $(x-p)^2+q$의 꼴로 변형한다.

ㄱ. $(x+1)^2\geq 0$은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 해는 모든 실수이다.

ㄴ. 이차방정식 $x^2-x-1=0$의 해는

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

이므로 $x^2-x-1>0$의 해는

$$x<\frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ㄷ. $x^2+6x+9>0$에서 $(x+3)^2>0$

따라서 해는 $x\neq-3$인 모든 실수이다.

ㄹ. $x^2-4x+6>0$에서 $(x-2)^2+2>0$

따라서 해는 모든 실수이다.

이상에서 해가 모든 실수인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

461

전략 이차방정식의 판별식을 이용하여 a의 값을 먼저 구한다.

$x^2+6x+6-a=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=9-(6-a)=0$$

$a+3=0$ $\therefore a=-3$

즉 주어진 이차부등식은 $-3x^2+4x+15>0$이므로

$3x^2-4x-15<0$, $(3x+5)(x-3)<0$

$$\therefore -\frac{5}{3}<x<3$$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2의 4개이다.

답 4

462

전략 $x<1$인 경우와 $x\geq1$인 경우로 나누어 부등식을 푼다.

$x^2-x\leq 2|x-1|$에서

(ⅰ) $x<1$일 때,

$x^2-x\leq-2(x-1)$

$x^2+x-2\leq0$

$(x+2)(x-1)\leq0$

$\therefore -2\leq x\leq1$

그런데 $x<1$이므로 $-2\leq x<1$

(ⅱ) $x\geq1$일 때,

$x^2-x\leq2(x-1)$

$x^2-3x+2\leq0$

$(x-1)(x-2)\leq0$

$\therefore 1\leq x\leq2$

그런데 $x\geq1$이므로 $1\leq x\leq2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 부등식의 해는

$-2\leq x\leq2$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=2$이므로

$\beta-\alpha=4$

답 4

463

전략 주어진 식을 이용하여 이차부등식을 세운다.

공의 높이가 80 m 이상이려면

$50t-5t^2\geq80$, $5t^2-50t+80\leq0$

$t^2-10t+16\leq0$, $(t-2)(t-8)\leq0$

$\therefore 2\leq t\leq8$

따라서 공의 높이가 80 m 이상인 시간은 2초부터 8초까지이므로 $8-2=6$(초) 동안이다.

답 6초

464

전략 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 이차부등식을 세우고, 이차부등식이 항상 성립할 조건을 이용한다.

이차함수 $y=ax^2-3$의 그래프가 직선 $y=-4x-a$보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2-3<-4x-a$, 즉

$ax^2+4x+a-3<0$이 성립해야 하므로

$a<0$ …… ㉠

또 이차방정식 $ax^2+4x+a-3=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=4-a(a-3)<0$$

$$a^2-3a-4>0, \qquad (a+1)(a-4)>0$$

$$\therefore a<-1 \text{ 또는 } a>4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분은

$a<-1$ **답** $\boldsymbol{a<-1}$

465

전략 $n>5$, $n=5$, $n<5$인 경우로 나누어 주어진 부등식의 해를 구한다.

$x^2-(n+5)x+5n\le 0$에서

$$(x-5)(x-n)\le 0$$

(i) $n<5$일 때,

주어진 부등식의 해는 $n\le x\le 5$

이때 정수 x의 개수가 3이므로

$$5-n+1=3 \qquad \therefore n=3$$

(ii) $n=5$일 때,

주어진 부등식의 해는 $x=5$

이때 정수 x의 개수가 1이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $n>5$일 때,

주어진 부등식의 해는 $5\le x\le n$

이때 정수 x의 개수가 3이므로

$$n-5+1=3 \qquad \therefore n=7$$

이상에서 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은

$3+7=10$ **답** ③

466

전략 $x<0$, $0\le x<2$, $x\ge 2$인 경우로 나누어 절댓값을 포함한 부등식의 해를 먼저 구한다.

$|x|+|x-2|<3$에서

(i) $x<0$일 때,

$$-x-(x-2)<3, \qquad -2x<1$$

$$\therefore x>-\frac{1}{2}$$

그런데 $x<0$이므로 $-\frac{1}{2}<x<0$

(ii) $0\le x<2$일 때,

$$x-(x-2)<3$$

즉 $0\times x<1$이므로 부등식이 항상 성립한다.

$$\therefore 0\le x<2$$

(iii) $x\ge 2$일 때,

$$x+(x-2)<3, \qquad 2x<5$$

$$\therefore x<\frac{5}{2}$$

그런데 $x\ge 2$이므로 $2\le x<\frac{5}{2}$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$$-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$$

해가 $-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$이고 x^2의 계수가 4인 이차부등식은

$$4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)<0$$

$\therefore 4x^2-8x-5<0$ **답** ③

467

전략 부등식의 해를 이용하여 a의 부호를 알아내고 b, c를 a에 대한 식으로 나타낸다.

해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$\left(x-\frac{1}{14}\right)\left(x-\frac{1}{10}\right)<0$$

$$\therefore x^2-\frac{6}{35}x+\frac{1}{140}<0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠과 주어진 부등식 $ax^2+bx+c>0$의 부등호의 방향이 다르므로

$$a<0$$

㉠의 양변에 a를 곱하면

$$ax^2-\frac{6}{35}ax+\frac{1}{140}a>0$$

이 부등식이 $ax^2+bx+c>0$과 일치하므로

$$b=-\frac{6}{35}a,\ c=\frac{1}{140}a \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$4cx^2-2bx+a>0$에 ㉡을 대입하면

$$\frac{1}{35}ax^2+\frac{12}{35}ax+a>0$$

$$x^2+12x+35<0\ (\because a<0)$$

$$(x+7)(x+5)<0$$

$\therefore -7<x<-5$ **답** $\boldsymbol{-7<x<-5}$

468

전략 해가 $0\le x\le 1$인 이차부등식을 이용하여 $P(x)$를 구한다.

조건 (가)에서 $P(x)\ge -2x-3$, 즉 $P(x)+2x+3\ge 0$의 해가 $0\le x\le 1$이다.

해가 $0\le x\le 1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$x(x-1)\le 0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠과 $P(x)+2x+3\ge 0$의 부등호의 방향이 다르므로 ㉠의 양변에 $a<0$인 상수 a를 곱하면

$$ax(x-1)\ge 0$$

즉 $P(x)+2x+3=ax(x-1)$이라 하면

$$P(x)=ax^2-(a+2)x-3 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

또 조건 (나)에서 $P(x)=-3x-2$, 즉 $P(x)+3x+2=0$이 중근을 갖는다.

$P(x)+3x+2=0$에 ㉡을 대입하면

$$ax^2-(a-1)x-1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(a-1)^2+4a=0$$

$$a^2+2a+1=0, \qquad (a+1)^2=0$$

$$\therefore\ a=-1\ (\text{중근})$$

따라서 $P(x)=-x^2-x-3$이므로

$$P(-1)=-(-1)^2-(-1)-3=-3$$

답 ①

469

전략 주어진 부등식의 해를 이용하여 $f(x)$를 미정계수로 나타낸다.

해가 $1<x<5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-1)(x-5)<0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠과 $f(x)>0$의 부등호의 방향이 다르므로 ㉠의 양변에 $a<0$인 상수 a를 곱하면

$$a(x-1)(x-5)>0$$

즉 $f(x)=a(x-1)(x-5)$라 하면

$$f(3-2x)=a(3-2x-1)(3-2x-5)$$
$$=4a(x-1)(x+1)$$

이고, $f(0)=5a$이므로 부등식 $f(3-2x)>f(0)$에서

$$4a(x-1)(x+1)>5a$$

$$4x^2-4<5\ (\because\ a<0)$$

$$4x^2-9<0$$

$$(2x+3)(2x-3)<0$$

$$\therefore\ -\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2}$$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1의 3개이다. 답 **3**

470

전략 이차방정식의 판별식을 이용하여 부등식을 세운다.

이차부등식 $-x^2+2(k+3)x+4(k+3)>0$, 즉 $x^2-2(k+3)x-4(k+3)<0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여

$$x^2-2(k+3)x-4(k+3)\ge 0$$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-2(k+3)x-4(k+3)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(k+3)^2+4(k+3)\le 0$$

$$(k+7)(k+3)\le 0$$

$$\therefore\ -7\le k\le -3$$

따라서 정수 k의 최솟값은 -7이다. 답 **−7**

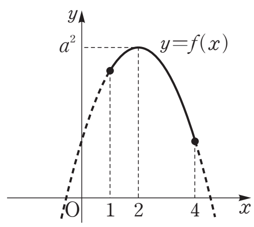
471

전략 조건을 만족시키도록 $y=-x^2+4x+a^2-4$의 그래프를 그려 본다.

$f(x)=-x^2+4x+a^2-4$라 하면

$$f(x)=-(x-2)^2+a^2$$

$1\le x\le 4$에서 $f(x)\ge 0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



즉 $1\le x\le 4$에서 $y=f(x)$의 최솟값인 $f(4)$가 0보다 크거나 같아야 하므로

$$f(4)=-16+16+a^2-4\ge 0$$

$$a^2-4\ge 0, \qquad (a+2)(a-2)\ge 0$$

$$\therefore\ a\le -2\ \text{또는}\ a\ge 2$$

따라서 주어진 부등식이 항상 성립하도록 하는 실수 a의 값이 아닌 것은 ④이다. 답 ④

472

전략 $[x]$를 한 문자로 생각하여 좌변을 인수분해한다.

$3[x]^2-[x]-10<0$에서

$$(3[x]+5)([x]-2)<0 \qquad \therefore -\frac{5}{3}<[x]<2$$

그런데 $[x]$는 정수이므로 $\quad [x]=-1,\ 0,\ 1$

$[x]=-1$에서 $\quad -1\le x<0$

$[x]=0$에서 $\quad 0\le x<1$

$[x]=1$에서 $\quad 1\le x<2$

따라서 주어진 부등식의 해는 $-1\le x<2$이므로

$$a=-1,\ b=2 \qquad \therefore a+b=1$$

답 **1**

해설 Focus

정수 n에 대하여

$[x]=n \Longleftrightarrow n\le x<n+1$

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

473

전략 이차부등식의 해를 이용하여 a의 부호를 알아내고 b, c를 a에 대한 식으로 나타낸다.

이차부등식 $ax^2+bx+c\ge0$의 해가 $x=2$이므로

$$a<0$$

또 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 $x=2$를 중근으로 가져야 하므로

$$ax^2+bx+c=a(x-2)^2=ax^2-4ax+4a$$

$$\therefore b=-4a,\ c=4a$$

ㄱ. $ax^2+bx+c\le0$, 즉 $ax^2-4ax+4a\le0$에서

$a(x-2)^2\le0$

이때 $a<0$이므로 $\quad (x-2)^2\ge0$

따라서 해는 모든 실수이다. (참)

ㄴ. $-ax^2+bx-c\le0$, 즉 $-ax^2-4ax-4a\le0$에서

$-a(x+2)^2\le0$

이때 $-a>0$이므로 $\quad (x+2)^2\le0$

따라서 해는 $x=-2$이다. (거짓)

ㄷ. $cx^2+bx+a\ge0$, 즉 $4ax^2-4ax+a\ge0$에서

$a(2x-1)^2\ge0$

이때 $a<0$이므로 $\quad (2x-1)^2\le0$

따라서 해는 $x=\frac{1}{2}$이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

474

전략 근호 안의 식의 값이 0 또는 양수이어야 함을 이용하여 부등식을 세운다.

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{(a-1)x^2-8(a-1)x+4}$가 실수이려면 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$(a-1)x^2-8(a-1)x+4\ge0$$

이 성립해야 한다.

(i) $a=1$일 때, $0\times x^2-0\times x+4\ge0$에서 $4\ge0$이므로 이 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $a\ne1$일 때,

$a-1>0$이어야 하므로

$$a>1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 이차방정식 $(a-1)x^2-8(a-1)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=16(a-1)^2-4(a-1)\le0$$

$$4a^2-9a+5\le0, \qquad (a-1)(4a-5)\le0$$

$$\therefore 1\le a\le\frac{5}{4} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분은 $\quad 1<a\le\frac{5}{4}$

(i), (ii)에서 구하는 실수 a의 값의 범위는

$$1\le a\le\frac{5}{4}$$

답 $\mathbf{1\le a\le\frac{5}{4}}$

475

전략 이차부등식 $f(x)\le0$의 해가 단 한 개이려면 $f(x)$의 이차항의 계수가 양수이고, $f(x)=0$이 중근을 가져야 한다.

이차부등식 $3x^2+2(a+b+c)x+ab+bc+ca\le0$의 해가 단 한 개 존재하므로 이차방정식 $3x^2+2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=0$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$$

$$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$$

따라서 $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$이므로

$$a=b=c$$

$$\therefore \frac{3b}{a}+\frac{3c}{b}+\frac{3a}{c}=\frac{3a}{a}+\frac{3b}{b}+\frac{3c}{c}=9$$

답 **9**

06 연립이차부등식

● 본책 219~222쪽

476

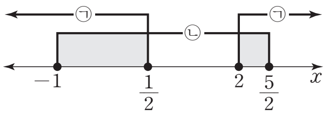
(1) $2x^2-5x+2\ge0$에서 $\quad (2x-1)(x-2)\ge0$

$\therefore\ x\le\frac{1}{2}$ 또는 $x\ge2 \quad\cdots\cdots$ ㉠

$2x^2-3x-5\le0$에서 $\quad (x+1)(2x-5)\le0$

$\therefore\ -1\le x\le\frac{5}{2} \quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$\boldsymbol{-1\le x\le\frac{1}{2}}\ \textbf{또는}\ \boldsymbol{2\le x\le\frac{5}{2}}$$

(2) $|x-2|<4$에서 $\quad -4<x-2<4$

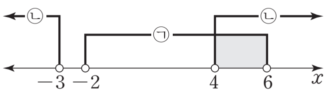
$\therefore\ -2<x<6 \quad\cdots\cdots$ ㉠

$-x^2+x+12<0$에서 $\quad x^2-x-12>0$

$(x+3)(x-4)>0$

$\therefore\ x<-3$ 또는 $x>4 \quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$\boldsymbol{4<x<6}$$

(3) $-2x-7<x^2-15$에서 $\quad x^2+2x-8>0$

$(x+4)(x-2)>0$

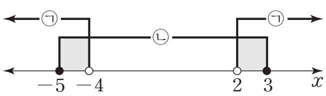
$\therefore\ x<-4$ 또는 $x>2 \quad\cdots\cdots$ ㉠

$x^2-15\le-2x$에서 $\quad x^2+2x-15\le0$

$(x+5)(x-3)\le0$

$\therefore\ -5\le x\le3 \quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 부등식의 해는

$$\boldsymbol{-5\le x<-4}\ \textbf{또는}\ \boldsymbol{2<x\le3}$$

(4) $|x^2-4x-6|\le6$에서

$-6\le x^2-4x-6\le6$

$-6\le x^2-4x-6$에서 $\quad x^2-4x\ge0$

$x(x-4)\ge0$

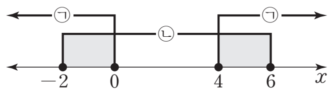
$\therefore\ x\le0$ 또는 $x\ge4 \quad\cdots\cdots$ ㉠

$x^2-4x-6\le6$에서 $\quad x^2-4x-12\le0$

$(x+2)(x-6)\le0$

$\therefore\ -2\le x\le6 \quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 부등식의 해는

$$\boldsymbol{-2\le x\le0}\ \textbf{또는}\ \boldsymbol{4\le x\le6}$$

답 **풀이 참조**

477

$x^2-6x+8>0$에서

$(x-2)(x-4)>0$

$\therefore\ x<2$ 또는 $x>4 \quad\cdots\cdots$ ㉠

$x^2-(6-a)x-6a\le0$에서

$(x+a)(x-6)\le0 \quad\cdots\cdots$ ㉡

(i) $-a>6$일 때, ㉡의 해는

$6\le x\le-a$

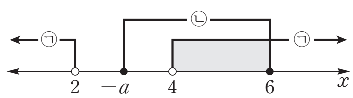
(ii) $-a=6$일 때, ㉡에서 $\quad (x-6)^2\le0$

$\therefore\ x=6$

(iii) $-a<6$일 때, ㉡의 해는

$-a\le x\le6$

이상에서 ㉠, ㉡의 공통부분이 $4<x\le6$이 되도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 $2\le-a\le4$이므로

$-4\le a\le-2$

답 $\boldsymbol{-4\le a\le-2}$

478

$x^2-x-6>0$에서 $\quad (x+2)(x-3)>0$

$\therefore\ x<-2$ 또는 $x>3 \quad\cdots\cdots$ ㉠

$2x^2-(2a+3)x+3a<0$에서

$(2x-3)(x-a)<0 \quad\cdots\cdots$ ㉡

(i) $a>\frac{3}{2}$일 때, ㉡의 해는

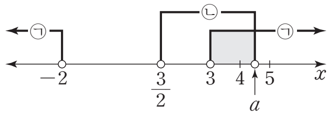
$\frac{3}{2}<x<a$

(ii) $a=\frac{3}{2}$일 때, ㉡에서 $(2x-3)^2<0$이므로 해가 없다.

(iii) $a<\frac{3}{2}$일 때, ㉡의 해는

$a<x<\frac{3}{2}$

㉠, ㉡의 공통부분에 속하는 정수 x가 4뿐이도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore\ 4<a\leq 5$ 답 **$4<a\leq 5$**

479

$x^2+2x-3>0$에서 $(x+3)(x-1)>0$

$\therefore\ x<-3$ 또는 $x>1$ ...... ㉠

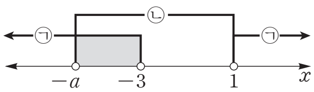
$x^2+(a-1)x-a<0$에서

$(x+a)(x-1)<0$ ...... ㉡

(i) $-a<1$일 때

㉡의 해는 $-a<x<1$

㉠, ㉡의 공통부분이 존재하도록 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



즉 $-a<-3$이므로 $a>3$

(ii) $-a=1$일 때

㉡에서 $(x-1)^2<0$

이를 만족시키는 실수 x의 값은 존재하지 않으므로 주어진 연립부등식은 해를 갖지 않는다.

(iii) $-a>1$일 때

㉡의 해는 $1<x<-a$

이때 ㉠, ㉡의 공통부분이 반드시 존재하므로 주어진 연립부등식은 해를 갖는다.

이상에서 $a<-1$ 또는 $a>3$

답 **$a<-1$ 또는 $a>3$**

480

이차방정식 $x^2+ax+a^2-3=0$의 판별식을 D_1이라 하면 이 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$D_1=a^2-4(a^2-3)>0$

$a^2-4<0$

$(a+2)(a-2)<0$

$\therefore\ -2<a<2$ ...... ㉠

이차방정식 $x^2+ax+a=0$의 판별식을 D_2라 하면 이 방정식이 허근을 가지므로

$D_2=a^2-4a<0$

$a(a-4)<0$

$\therefore\ 0<a<4$ ...... ㉡

구하는 실수 a의 값의 범위는 ㉠, ㉡의 공통부분이므로

$0<a<2$ 답 **$0<a<2$**

481

꽃밭의 가로의 길이를 x m라 하면 세로의 길이는 $(15-x)$ m이므로

$x>0,\ 15-x>0,\ 15-x>x$

$\therefore\ 0<x<\frac{15}{2}$ ...... ㉠

꽃밭의 넓이는 $x(15-x)\ \text{m}^2$이고 꽃밭의 넓이가 $36\ \text{m}^2$ 이상 $50\ \text{m}^2$ 이하이므로

$36\leq x(15-x)\leq 50$

$\therefore \begin{cases} 36\leq x(15-x) \\ x(15-x)\leq 50 \end{cases}$

$36\leq x(15-x)$에서

$x^2-15x+36\leq 0$

$(x-3)(x-12)\leq 0$

$\therefore\ 3\leq x\leq 12$ ...... ㉡

$x(15-x)\leq 50$에서

$x^2-15x+50\geq 0$

$(x-5)(x-10)\geq 0$

$\therefore\ x\leq 5$ 또는 $x\geq 10$ ...... ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분은

$3\leq x\leq 5$

따라서 꽃밭의 가로의 길이의 범위는 3 m 이상 5 m 이하이다.

답 **3 m 이상 5 m 이하**

연습 문제 ● 본책 223쪽

482

전략 먼저 연립부등식의 해를 구한다.

$x^2 \le x+6$에서

$x^2-x-6\le 0,\quad (x+2)(x-3)\le 0$

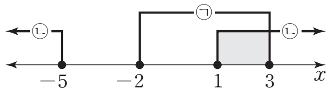
$\therefore\ -2\le x\le 3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x^2+4x\ge 5$에서

$x^2+4x-5\ge 0,\quad (x+5)(x-1)\ge 0$

$\therefore\ x\le -5$ 또는 $x\ge 1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 연립부등식의 해는

$1\le x\le 3$

즉 이차부등식 $ax^2+bx-1\ge 0$의 해가 $1\le x\le 3$이므로 $a<0$

해가 $1\le x\le 3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-3)\le 0 \qquad \therefore\ x^2-4x+3\le 0$

양변에 a를 곱하면

$ax^2-4ax+3a\ge 0$ ($\because\ a<0$)

이 부등식이 $ax^2+bx-1\ge 0$과 같으므로

$b=-4a,\ -1=3a \qquad \therefore\ a=-\dfrac{1}{3},\ b=\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ a+b=1$

답 **1**

483

전략 주어진 연립부등식의 해의 조건을 만족시키도록 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타낸다.

$x^2-3x-10\le 0$에서 $\quad (x+2)(x-5)\le 0$

$\therefore\ -2\le x\le 5 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$(x-2)(x-a)>0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

에서

(i) $a<2$일 때, ㉡의 해는

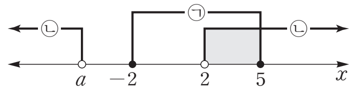
$x<a$ 또는 $x>2$

(ii) $a=2$일 때, ㉡에서 $(x-2)^2>0$이므로 해는 $x\ne 2$인 모든 실수이다.

(iii) $a>2$일 때, ㉡의 해는

$x<2$ 또는 $x>a$

이상에서 ㉠, ㉡의 공통부분이 $2<x\le 5$가 되도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 $a\le -2$이므로 실수 a의 최댓값은 -2이다.

답 **−2**

484

전략 주어진 조건을 이용하여 x에 대한 이차부등식을 세운다.

변의 길이는 양수이므로

$x-4>0,\ x-10>0$

$\therefore\ x>10 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

직각삼각형의 넓이가 36 이하이므로

$\dfrac{1}{2}(x-4)(x-10)\le 36$

$x^2-14x-32\le 0$

$(x+2)(x-16)\le 0$

$\therefore\ -2\le x\le 16 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

빗변의 길이가 $2\sqrt{17}$ 이상이므로

$\sqrt{(x-4)^2+(x-10)^2}\ge 2\sqrt{17}$

$(x-4)^2+(x-10)^2\ge 68$

$x^2-14x+24\ge 0$

$(x-2)(x-12)\ge 0$

$\therefore\ x\le 2$ 또는 $x\ge 12 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분은 $\quad 12\le x\le 16$

따라서 정수 x는 12, 13, 14, 15, 16의 5개이다.

답 **5**

485

전략 각 부등식의 해를 a에 대한 식으로 나타내고 해의 공통부분에 속하는 정수가 없도록 수직선 위에 나타낸다.

$x^2-(a^2-3)x-3a^2<0$에서

$(x-a^2)(x+3)<0$

이때 $a>2$에서 $a^2>4$이므로

$-3<x<a^2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

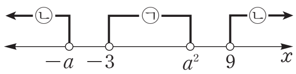
$x^2+(a-9)x-9a>0$에서

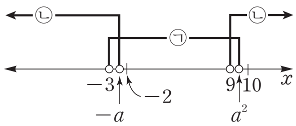
$(x+a)(x-9)>0$

이때 $-a<-2$이므로

$x<-a$ 또는 $x>9 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분에 속하는 정수 x가 존재하지 않으려면 [그림 1]과 같이 해가 존재하지 않거나, [그림 2]와 같이 해의 범위에 속하는 정수가 존재하지 않아야 한다.


[그림 1]


[그림 2]

$-a\le-2$에서 $\quad a\ge2$ …… ㉢

$a^2\le10$에서 $\quad -\sqrt{10}\le a\le\sqrt{10}$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분은

$$2\le a\le\sqrt{10}$$

이때 $a>2$이므로 주어진 조건을 만족시키는 실수 a의 값의 범위는

$$2<a\le\sqrt{10}$$

따라서 $M=\sqrt{10}$이므로

$$M^2=(\sqrt{10})^2=10$$

답 **10**

486

전략 각 이차방정식의 판별식을 이용하여 이차부등식을 세운다.

주어진 두 이차방정식 중 적어도 하나가 실근을 갖는 경우는 두 이차방정식이 각각 실근을 갖는 경우를 합친 것과 같다.

이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=a^2-(a+2)\ge0$$

$$a^2-a-2\ge0,\qquad (a+1)(a-2)\ge0$$

$\therefore\ a\le-1$ 또는 $a\ge2$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+(a-1)x+a^2=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=(a-1)^2-4a^2\ge0$$

$$3a^2+2a-1\le0,\qquad (a+1)(3a-1)\le0$$

$\therefore\ -1\le a\le\frac{1}{3}$ …… ㉡

따라서 적어도 하나가 실근을 갖는 실수 a의 값의 범위는 ㉠, ㉡에서

$a\le\frac{1}{3}$ 또는 $a\ge2$

답 **$a\le\frac{1}{3}$ 또는 $a\ge2$**

다른 풀이 주어진 두 이차방정식 중 적어도 하나가 실근을 갖는 경우는 모든 경우에서 두 이차방정식이 모두 허근을 갖는 경우를 제외한 것과 같다.

이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=a^2-(a+2)<0$$

$$a^2-a-2<0,\qquad (a+1)(a-2)<0$$

$\therefore\ -1<a<2$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+(a-1)x+a^2=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=(a-1)^2-4a^2<0$$

$$3a^2+2a-1>0,\qquad (a+1)(3a-1)>0$$

$\therefore\ a<-1$ 또는 $a>\frac{1}{3}$ …… ㉡

두 이차방정식이 모두 허근을 갖는 a의 값의 범위는 ㉠, ㉡의 공통부분인 $\frac{1}{3}<a<2$이다.

따라서 적어도 하나가 실근을 갖는 실수 a의 값의 범위는

$a\le\frac{1}{3}$ 또는 $a\ge2$

487

전략 주어진 조건을 만족시키도록 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타낸다.

$x^2-5x-6\ge0$에서 $\quad (x+1)(x-6)\ge0$

$\therefore\ x\le-1$ 또는 $x\ge6$ …… ㉠

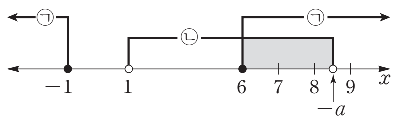
$x^2-(1-a)x-a<0$에서

$(x+a)(x-1)<0$ …… ㉡

(i) $-a>1$일 때,

㉡의 해는 $\quad 1<x<-a$

㉠, ㉡의 공통부분에 속하는 정수 x의 개수가 3이려면 다음 그림과 같아야 한다.



즉 $8<-a\le9$이므로 $\quad -9\le a<-8$

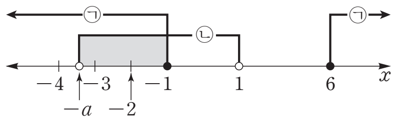
(ii) $-a=1$일 때,

㉡에서 $(x-1)^2<0$을 만족시키는 실수 x가 존재하지 않으므로 주어진 연립부등식은 해를 갖지 않는다.

(iii) $-a<1$일 때,

㉡의 해는 $\quad -a<x<1$

㉠, ㉡의 공통부분에 속하는 정수 x의 개수가 3이려면 다음 그림과 같아야 한다.



즉 $-4\le -a<-3$이므로 $\quad 3<a\le 4$

이상에서

$-9\le a<-8$ 또는 $3<a\le 4$

답 $\boldsymbol{-9\le a<-8}$ **또는** $\boldsymbol{3<a\le 4}$

07 이차방정식의 실근의 조건

● 본책 224~228쪽

488

이차방정식 $(m^2+1)x^2-2(m-2)x+4=0$의 서로 다른 두 근을 α, β, 판별식을 D라 하면 두 근이 모두 음수이므로

(i) $\dfrac{D}{4}=(m-2)^2-4(m^2+1)>0$

$3m^2+4m<0, \quad m(3m+4)<0$

$\therefore -\dfrac{4}{3}<m<0$

(ii) $\alpha+\beta<0$에서 $\quad \dfrac{2(m-2)}{m^2+1}<0$

그런데 $m^2+1>0$이므로 $\quad 2(m-2)<0$

$\therefore m<2$

(iii) $\alpha\beta=\dfrac{4}{m^2+1}$에서 $m^2+1>0$이므로 항상 $\alpha\beta>0$ 이다.

이상에서 구하는 m의 값의 범위는

$-\dfrac{4}{3}<m<0$

답 $\boldsymbol{-\dfrac{4}{3}<m<0}$

489

이차방정식 $x^2-5x+a^2-4a+3=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta<0$에서 $\quad a^2-4a+3<0$

$(a-1)(a-3)<0 \quad \therefore 1<a<3$

따라서 정수 a의 값은 2이다.

답 **2**

490

이차방정식 $x^2+(a^2-a-12)x+a^2-6a+5=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta<0$에서 $\quad a^2-6a+5<0$

$(a-1)(a-5)<0$

$\therefore 1<a<5 \quad\cdots\cdots ㉠$

또 두 근의 절댓값이 같으므로

$\alpha+\beta=0$에서 $\quad -(a^2-a-12)=0$

$a^2-a-12=0, \quad (a+3)(a-4)=0$

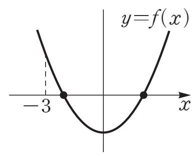
$\therefore a=-3$ 또는 $a=4 \quad\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 a의 값은 4이다.

답 **4**

491

$f(x)=x^2-kx+k+3$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -3보다 크므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4(k+3)\ge 0$

$k^2-4k-12\ge 0, \quad (k+2)(k-6)\ge 0$

$\therefore k\le -2$ 또는 $k\ge 6$

(ii) $f(-3)=9+3k+k+3>0$에서

$4k>-12 \quad \therefore k>-3$

(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=\dfrac{k}{2}$이므로

$\dfrac{k}{2}>-3 \quad \therefore k>-6$

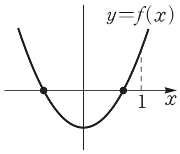
이상에서 구하는 k의 값의 범위는

$-3<k\le -2$ 또는 $k\ge 6$

답 $\boldsymbol{-3<k\le -2}$ **또는** $\boldsymbol{k\ge 6}$

492

$f(x)=2x^2+3mx+5m-2$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 작으므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=9m^2-8(5m-2)\geq 0$$
$$9m^2-40m+16\geq 0$$
$$(9m-4)(m-4)\geq 0$$
$$\therefore\ m\leq\frac{4}{9}\ \text{또는}\ m\geq 4$$

(ii) $f(1)=2+3m+5m-2>0$에서

$$8m>0 \qquad \therefore\ m>0$$

(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-\frac{3m}{4}$이므로

$$-\frac{3m}{4}<1 \qquad \therefore\ m>-\frac{4}{3}$$

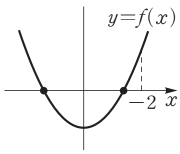
이상에서 구하는 m의 값의 범위는

$$0<m\leq\frac{4}{9}\ \text{또는}\ m\geq 4$$

답 $\mathbf{0<m\leq\frac{4}{9}}$ **또는** $\mathbf{m\geq 4}$

493

$f(x)=x^2+2ax+3a$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -2보다 작으므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-3a\geq 0$$
$$a(a-3)\geq 0$$
$$\therefore\ a\leq 0\ \text{또는}\ a\geq 3$$

(ii) $f(-2)=4-4a+3a>0$에서

$$-a>-4 \qquad \therefore\ a<4$$

(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-a$이므로

$$-a<-2 \qquad \therefore\ a>2$$

이상에서 a의 값의 범위는

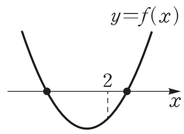
$$3\leq a<4$$

따라서 실수 a의 최솟값은 3이다.

답 **3**

494

$f(x)=x^2-(m-4)^2x+2m$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 2가 있으므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



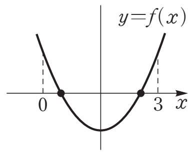
따라서 $f(2)<0$이어야 하므로

$$4-2(m-4)^2+2m<0$$
$$m^2-9m+14>0$$
$$(m-2)(m-7)>0$$
$$\therefore\ m<2\ \text{또는}\ m>7$$

답 $\mathbf{m<2}$ **또는** $\mathbf{m>7}$

495

$f(x)=x^2-4x+k-1$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 0과 3 사이에 있으므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=4-(k-1)\geq 0$$
$$-k\geq -5 \qquad \therefore\ k\leq 5 \qquad \cdots\cdots\ ㉠$$

(ii) $f(0)=k-1>0$에서

$$k>1 \qquad \cdots\cdots\ ㉡$$

$f(3)=9-12+k-1>0$에서

$$k>4 \qquad \cdots\cdots\ ㉢$$

(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=2$이고 $0<2<3$이다.

이상에서 구하는 k의 값의 범위는 ㉠, ㉡, ㉢의 공통부분이므로

$$4<k\leq 5$$

답 $\mathbf{4<k\leq 5}$

Ⅱ-5 여러 가지 부등식

연습 문제 ● 본책 229쪽

496

전략 두 근이 모두 음수이면 (판별식)≥ 0, (두 근의 합)<0, (두 근의 곱)>0임을 이용한다.

이차방정식 $x^2-4(k-2)x+k^2+11=0$의 두 근을 α, β, 판별식을 D라 하면 두 근이 모두 음수이므로

(i) $\frac{D}{4}=4(k-2)^2-(k^2+11)\geq 0$

$3k^2-16k+5\geq 0$, $\quad (3k-1)(k-5)\geq 0$

$\therefore k\leq \frac{1}{3}$ 또는 $k\geq 5$

(ii) $\alpha+\beta<0$에서 $\quad 4(k-2)<0 \quad \therefore k<2$

(iii) $\alpha\beta>0$에서 $\quad k^2+11>0$

이상에서 k의 값의 범위는

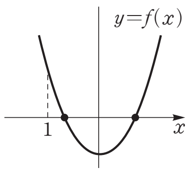
$k\leq \frac{1}{3}$

답 $\boldsymbol{k\leq \frac{1}{3}}$

497

전략 x축과의 교점의 x좌표가 모두 1보다 크도록 $y=x^2-2(a+1)x+3$의 그래프를 그려 본다.

$f(x)=x^2-2(a+1)x+3$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 크므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+1)^2-3\geq 0$

$\therefore a^2+2a-2\geq 0$

이차방정식 $a^2+2a-2=0$의 두 근이 $a=-1\pm\sqrt{3}$이므로 부등식의 해는

$a\leq -1-\sqrt{3}$ 또는 $a\geq -1+\sqrt{3}$

(ii) $f(1)=1-2(a+1)+3>0$에서

$-2a>-2 \quad \therefore a<1$

(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=a+1$이므로

$a+1>1 \quad \therefore a>0$

이상에서 a의 값의 범위는

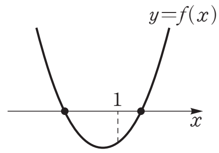
$-1+\sqrt{3}\leq a<1$

답 $\boldsymbol{-1+\sqrt{3}\leq a<1}$

498

전략 주어진 조건을 만족시키도록 $y=x^2+2ax+a^2-9$의 그래프를 그려 본다.

$f(x)=x^2+2ax+a^2-9$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 1이 있으므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



따라서 $f(1)<0$이어야 하므로

$1+2a+a^2-9<0$

$a^2+2a-8<0$

$(a+4)(a-2)<0$

$\therefore -4<a<2$

따라서 정수 a는 -3, -2, -1, 0, 1의 5개이다.

답 **5**

499

전략 (두 근의 합)<0, (두 근의 곱)<0임을 이용한다.

이차방정식 $x^2+4kx+2k^2+k-1=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta<0$에서 $\quad 2k^2+k-1<0$

$(k+1)(2k-1)<0$

$\therefore -1<k<\frac{1}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 음수인 근의 절댓값이 양수인 근의 절댓값보다 크므로

$\alpha+\beta<0$에서 $\quad -4k<0$

$\therefore k>0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은

$0<k<\frac{1}{2}$

답 $\boldsymbol{0<k<\frac{1}{2}}$

500

전략 조건을 만족시키는 $y=x^2-4kx+3k^2-k+2$의 그래프를 그린 다음 판별식, 함숫값, 축의 위치에 대한 부등식을 세운다.

$2(x-1)+3=7-x$에서

$2x+1=7-x$

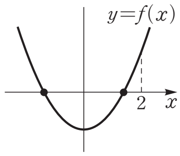
$3x=6$

$\therefore x=2$

따라서

$f(x)=x^2-4kx+3k^2-k+2$

라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 2보다 작으므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=4k^2-(3k^2-k+2)\geq0$$

$$k^2+k-2\geq0, \qquad (k+2)(k-1)\geq0$$

$$\therefore\ k\leq-2 \text{ 또는 } k\geq1$$

(ii) $f(2)=4-8k+3k^2-k+2>0$에서

$$3k^2-9k+6>0, \qquad k^2-3k+2>0$$

$$(k-1)(k-2)>0$$

$$\therefore\ k<1 \text{ 또는 } k>2$$

(iii) $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=2k$이므로

$$2k<2 \qquad \therefore\ k<1$$

이상에서 k의 값의 범위는

$$k\leq-2$$

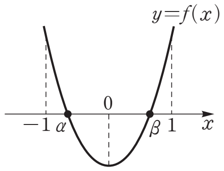
따라서 실수 k의 최댓값은 -2이다.

답 $\mathbf{-2}$

501

전략 $f(x)=2x^2-ax+2a-1$이라 하고 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서의 $f(x)$의 값의 부호를 이용한다.

$f(x)=2x^2-ax+2a-1$이라 하면 주어진 조건을 만족시키는 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $f(-1)>0$에서

$$2+a+2a-1>0, \qquad 3a>-1$$

$$\therefore\ a>-\frac{1}{3}$$

(ii) $f(0)<0$에서 $\quad 2a-1<0$

$$\therefore\ a<\frac{1}{2}$$

(iii) $f(1)>0$에서 $\quad 2-a+2a-1>0$

$$\therefore\ a>-1$$

이상에서 구하는 a의 값의 범위는

$$-\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$$

답 $\mathbf{-\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}}$

502

전략 $y=x^2-2kx+k+2$의 그래프의 축의 위치에 따라 경우를 나누어 푼다.

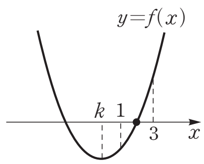
$x^2-4x+3=0$에서 $\qquad (x-1)(x-3)=0$

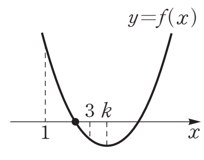
$$\therefore\ x=1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 $f(x)=x^2-2kx+k+2$라 하면 $f(x)=0$의 근 중 적어도 한 개가 1과 3 사이에 있어야 한다.

이때 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$이므로

(i) $k\leq1$ 또는 $k\geq3$일 때





$y=f(x)$의 그래프가 위의 그림과 같아야 하므로

$$f(1)f(3)<0, \qquad (3-k)(11-5k)<0$$

$$\therefore\ \frac{11}{5}<k<3$$

그런데 $k\leq1$ 또는 $k\geq3$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $1<k<2$일 때

$f(1)<f(3)$이므로 $\qquad f(k)\leq0,\ f(3)>0$

$f(k)=-k^2+k+2\leq0$에서

$$(k+1)(k-2)\geq0$$

$$\therefore\ k\leq-1 \text{ 또는 } k\geq2 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$f(3)=11-5k>0$에서

$$k<\frac{11}{5} \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분은

$$k\leq-1 \text{ 또는 } 2\leq k<\frac{11}{5}$$

그런데 $1<k<2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $2\leq k<3$일 때

$f(1)\geq f(3)$이므로 $\qquad f(k)\leq0,\ f(1)>0$

$f(k)\leq0$에서

$$k\leq-1 \text{ 또는 } k\geq2 \qquad \cdots\cdots \text{㉢}$$

$f(1)=3-k>0$에서 $\qquad k<3 \qquad \cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분은 $\qquad k\leq-1$ 또는 $2\leq k<3$

그런데 $2\leq k<3$이므로 $\qquad 2\leq k<3$

이상에서 $\qquad 2\leq k<3$

답 $\mathbf{2\leq k<3}$

01 경우의 수

● 본책 232~241쪽

503

김밥 4종류 중 한 가지를 택하는 경우는 4가지,
라면 3종류 중 한 가지를 택하는 경우는 3가지,
볶음밥 3종류 중 한 가지를 택하는 경우는 3가지이다.
따라서 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$4+3+3=10$

답 10

504

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내자.

(1) 합이 11 이상인 경우는 합이 11 또는 12인 경우이다.

(i) 합이 11인 경우는
(5, 6), (6, 5)의 2가지

(ii) 합이 12인 경우는
(6, 6)의 1가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$2+1=3$

(2) 차가 1 이하인 경우는 차가 0 또는 1인 경우이다.

(i) 차가 0인 경우는
(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)의 6가지

(ii) 차가 1인 경우는
(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 5), (5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1)의 10가지

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$6+10=16$

답 (1) 3 (2) 16

505

모자를 고르는 방법은 4가지이고, 그 각각에 대하여 티셔츠를 고르는 방법은 3가지, 이들 각각에 대하여 바지를 고르는 방법은 5가지이다.
따라서 곱의 법칙에 의하여 구하는 방법의 수는

$4\times3\times5=60$

답 60

506

집에서 도서관까지 가는 방법은 3가지이고, 그 각각에 대하여 도서관에서 학교까지 가는 방법은 4가지이다.
따라서 곱의 법칙에 의하여 구하는 방법의 수는

$3\times4=12$

답 12

507

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 나오는 두 눈의 수의 합이 3의 배수일 때,

합이 3인 경우는
(1, 2), (2, 1)의 2가지

합이 6인 경우는
(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지

합이 9인 경우는
(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)의 4가지

합이 12인 경우는
(6, 6)의 1가지

따라서 합이 3의 배수인 경우의 수는

$2+5+4+1=12$

(ii) 나오는 두 눈의 수의 합이 5의 배수일 때,

합이 5인 경우는
(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지

합이 10인 경우는
(4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지

따라서 합이 5의 배수인 경우의 수는

$4+3=7$

(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$12+7=19$

답 19

508

차가 2 이하인 경우는 차가 0 또는 1 또는 2인 경우이다.
이때 두 개의 상자에서 꺼낸 공에 적힌 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 차가 0인 경우는

$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)$
의 5가지

(ii) 차가 1인 경우는

$(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 4),$
$(4, 3), (3, 2), (2, 1)$의 8가지

(iii) 차가 2인 경우는

$(1, 3), (2, 4), (3, 5), (5, 3), (4, 2),$
$(3, 1)$의 6가지

(i)~(iii)은 동시에 일어날 수 없으므로 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$5+8+6=19$ 답 **19**

509

5로 나누어떨어지는 수, 즉 5의 배수는

$5, 10, 15, \cdots, 100$의 20개

7로 나누어떨어지는 수, 즉 7의 배수는

$7, 14, 21, \cdots, 98$의 14개

5와 7로 나누어떨어지는 수, 즉 35의 배수는

$35, 70$의 2개

따라서 구하는 수의 개수는

$20+14-2=32$ 답 **32**

510

x, y, z가 음이 아닌 정수이므로

$x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$

$2x+y+z=5$에서 $2x\leq 5$, 즉 $x\leq \frac{5}{2}$이므로

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

(i) $x=0$일 때, $y+z=5$이므로 순서쌍 (y, z)는

$(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1),$
$(5, 0)$의 6개

(ii) $x=1$일 때, $y+z=3$이므로 순서쌍 (y, z)는

$(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)$의 4개

(iii) $x=2$일 때, $y+z=1$이므로 순서쌍 (y, z)는

$(0, 1), (1, 0)$의 2개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$6+4+2=12$ 답 **12**

511

x, y가 자연수이므로 $x\geq 1, y\geq 1$

$3x+y\leq 10$에서 $3x<10$, 즉 $x<\frac{10}{3}$이므로

$x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

(i) $x=1$일 때, $y\leq 7$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), \cdots, (1, 7)$의 7개

(ii) $x=2$일 때, $y\leq 4$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)$의 4개

(iii) $x=3$일 때, $y\leq 1$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(3, 1)$의 1개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$7+4+1=12$ 답 **12**

512

500원, 1000원, 2000원짜리 우표를 각각 x장, y장, z장 산다고 하면

$500x+1000y+2000z=10000$

$\therefore x+2y+4z=20$

그런데 3종류의 우표가 적어도 한 장씩은 포함되어야 하므로 x, y, z는 자연수이다.

$x+2y+4z=20$에서 $4z<20$, 즉 $z<5$이므로

$z=1$ 또는 $z=2$ 또는 $z=3$ 또는 $z=4$

(i) $z=1$일 때, $x+2y=16$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(2, 7), (4, 6), (6, 5), (8, 4), (10, 3),$
$(12, 2), (14, 1)$의 7개

(ii) $z=2$일 때, $x+2y=12$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(2, 5), (4, 4), (6, 3), (8, 2), (10, 1)$
의 5개

(iii) $z=3$일 때, $x+2y=8$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(2, 3), (4, 2), (6, 1)$의 3개

(iv) $z=4$일 때, $x+2y=4$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(2, 1)$의 1개

이상에서 구하는 방법의 수는

$7+5+3+1=16$ 답 **16**

513

백의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

$1, 2, 3, 6$의 4개

십의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

$4, 8$의 2개

일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은

$0, 2, 4, 6, 8$의 5개

따라서 곱의 법칙에 의하여 구하는 자연수의 개수는

$4\times2\times5=40$

답 **40**

514

(1) $(a+b+c)(x+y+z)$를 전개할 때, a, b, c에 x, y, z를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 곱의 법칙에 의하여 구하는 항의 개수는

$3\times3=9$

(2) $(a+b)(c+d)$를 전개할 때, a, b에 c, d를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 곱의 법칙에 의하여 항의 개수는 $2\times2=4$

$(x+y+z)(p-q)$를 전개할 때, x, y, z에 p, $-q$를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 곱의 법칙에 의하여 항의 개수는 $3\times2=6$

이때 곱해지는 각 항이 모두 서로 다른 문자이므로 동류항이 생기지 않는다.

따라서 합의 법칙에 의하여 구하는 항의 개수는

$4+6=10$

답 (1) **9** (2) **10**

515

서로 다른 주사위 3개를 동시에 던졌을 때, 나오는 세 눈의 수의 곱이 홀수이려면 세 눈의 수가 모두 홀수이어야 한다.

주사위에서 홀수인 눈의 수는 $1, 3, 5$의 3개이므로 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$3\times3\times3=27$

답 **27**

516

(1) 144를 소인수분해하면 $144=2^4\times3^2$

이때 144의 양의 약수는 2^4의 양의 약수와 3^2의 양의 약수에서 각각 하나씩 택하여 곱한 것이다.

2^4의 양의 약수는 $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4$의 5개

3^2의 양의 약수는 $1, 3, 3^2$의 3개

따라서 곱의 법칙에 의하여 144의 양의 약수의 개수는 $5\times3=15$

(2) 144와 504의 양의 공약수의 개수는 144와 504의 최대공약수의 양의 약수의 개수와 같다.

144와 504의 최대공약수는 72이고 72를 소인수분해하면 $72=2^3\times3^2$

2^3의 양의 약수는 $1, 2, 2^2, 2^3$의 4개

3^2의 양의 약수는 $1, 3, 3^2$의 3개

따라서 곱의 법칙에 의하여 구하는 양의 공약수의 개수는 $4\times3=12$

답 (1) **15** (2) **12**

해설 Focus

자연수 $N=p^aq^br^c$ (p, q, r는 서로 다른 소수, a, b, c는 자연수)에 대하여

p^a의 양의 약수는 $1, p, p^2, \cdots, p^a$의 $(a+1)$개

q^b의 양의 약수는 $1, q, q^2, \cdots, q^b$의 $(b+1)$개

r^c의 양의 약수는 $1, r, r^2, \cdots, r^c$의 $(c+1)$개

따라서 N의 양의 약수의 개수는

$(a+1)(b+1)(c+1)$

517

270을 소인수분해하면

$270=2\times3^3\times5$

이때 홀수인 양의 약수는 3^3의 양의 약수와 5의 양의 약수에서 하나씩 택하여 곱한 것이다.

3^3의 양의 약수는 $1, 3, 3^2, 3^3$의 4개

5의 양의 약수는 $1, 5$의 2개

따라서 곱의 법칙에 의하여 구하는 약수의 개수는

$4\times2=8$

답 **8**

다른 풀이 $270=2\times3^3\times5$에서

2의 양의 약수 중 홀수는 1의 1개

3^3의 양의 약수 중 홀수는 $1, 3, 3^2, 3^3$의 4개

5의 양의 약수 중 홀수는 $1, 5$의 2개

따라서 곱의 법칙에 의하여 구하는 약수의 개수는

$1\times4\times2=8$

518

600을 소인수분해하면

$600=2^3\times3\times5^2$

2의 배수는 2를 소인수로 가지므로 600의 양의 약수 중 2의 배수의 개수는 $2^2\times3\times5^2$의 양의 약수의 개수와 같다.
2^2의 양의 약수는 　1, 2, 2^2의 3개
3의 양의 약수는 　1, 3의 2개
5^2의 양의 약수는 　1, 5, 5^2의 3개
$\therefore p=3\times2\times3=18$
3의 배수는 3을 소인수로 가지므로 600의 양의 약수 중 3의 배수의 개수는 $2^3\times5^2$의 양의 약수의 개수와 같다.
2^3의 양의 약수는 　1, 2, 2^2, 2^3의 4개
5^2의 양의 약수는 　1, 5, 5^2의 3개
$\therefore q=4\times3=12$
$\therefore p+q=18+12=30$ 　답 **30**

519
같은 도시를 두 번 이상 지나지 않고 A 도시에서 출발하여 D 도시로 가는 경우는 다음 4가지이다.
(i) A → B → D로 가는 경우의 수는
$2\times3=6$
(ii) A → C → D로 가는 경우의 수는
$3\times2=6$
(iii) A → B → C → D로 가는 경우의 수는
$2\times2\times2=8$
(iv) A → C → B → D로 가는 경우의 수는
$3\times2\times3=18$
(i)~(iv)는 동시에 일어날 수 없으므로 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$6+6+8+18=38$ 　답 **38**

520
같은 도로를 두 번 이상 지나지 않으면서 A 지점에서 출발하여 C 지점으로 이동한 후 다시 A 지점으로 돌아오는 경우는 다음 4가지이다.
(i) A → C → A로 가는 경우의 수는
$3\times2=6$
(ii) A → B → C → A로 가는 경우의 수는
$2\times2\times3=12$
(iii) A → C → B → A로 가는 경우의 수는
$3\times2\times2=12$
(iv) A → B → C → B → A로 가는 경우의 수는
$2\times2\times1\times1=4$
(i)~(iv)는 동시에 일어날 수 없으므로 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$6+12+12+4=34$ 　답 **34**

해설 Focus
(i)의 경우, 같은 도로를 두 번 이상 지나지 않아야 하므로 A에서 C로 갈 때 지나간 도로는 C에서 A로 올 때 다시 지날 수 없다. 따라서 A → C의 경우의 수는 3이고, C → A의 경우의 수는 2이다.

521
가장 많은 영역과 인접하고 있는 영역 B부터 시작하여 B → A → C → D의 순서로 칠할 때,
B에 칠할 수 있는 색은 4가지
A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지
C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지
D에 칠할 수 있는 색은 B와 C에 칠한 색을 제외한 2가지
따라서 곱의 법칙에 의하여 구하는 방법의 수는
$4\times3\times2\times2=48$ 　답 **48**

522
가장 많은 영역과 인접하고 있는 영역 E부터 시작하여 E → B → C → D → A의 순서로 칠할 때,
E에 칠할 수 있는 색은 4가지
B에 칠할 수 있는 색은 E에 칠한 색을 제외한 3가지
C에 칠할 수 있는 색은 B와 E에 칠한 색을 제외한 2가지
D에 칠할 수 있는 색은 C와 E에 칠한 색을 제외한 2가지
A에 칠할 수 있는 색은 B와 E에 칠한 색을 제외한 2가지
따라서 곱의 법칙에 의하여 구하는 방법의 수는
$4\times3\times2\times2\times2=96$ 　답 **96**

523

(ⅰ) A와 C에 같은 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 5가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지

C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지

D에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지

따라서 이 경우의 칠하는 방법의 수는

$5\times4\times1\times4=80$

(ⅱ) A와 C에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 5가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지

C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지

D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 3가지

따라서 이 경우의 칠하는 방법의 수는

$5\times4\times3\times3=180$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는

$80+180=260$

답 **260**

524

(1) 100원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지

50원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

10원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 지불하는 방법의 수는

$3\times5\times4-1=59$

(2) 100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 100원, 200원의 3가지 …… ㉠

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 50원, 100원, 150원, 200원의 5가지 …… ㉡

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 10원, 20원, 30원의 4가지

그런데 ㉠, ㉡에서 100원, 200원을 만들 수 있는 경우가 중복되므로 100원짜리 동전 2개를 50원짜리 동전 4개로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 50원짜리 동전 8개, 10원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 50원, 100원, ⋯, 400원의 9가지

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 10원, 20원, 30원의 4가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는

$9\times4-1=35$

답 (1) **59** (2) **35**

525

(ⅰ) 지불하는 방법의 수

500원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개의 2가지

100원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, ⋯, 7개의 8가지

10원짜리 동전을 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로

$a=2\times8\times5-1=79$

(ⅱ) 지불할 수 있는 금액의 수

500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 500원의 2가지 …… ㉠

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 100원, 200원, 300원, 400원, 500원, 600원, 700원의 8가지 …… ㉡

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 10원, 20원, 30원, 40원의 5가지

그런데 ㉠, ㉡에서 500원을 만들 수 있는 경우가 중복되므로 500원짜리 동전 1개를 100원짜리 동전 5개로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 100원짜리 동전 12개, 10원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 100원, 200원, ⋯, 1200원의 13가지

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 10원, 20원, 30원, 40원의 5가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로

$b=13\times5-1=64$

$\therefore a+b=79+64=143$ 답 143

연습 문제

● 본책 242~243쪽

526

전략 x, y가 음이 아닌 정수임을 이용하여 x, y의 값의 범위를 구하고, y의 값에 따라 순서쌍 (x, y)의 개수를 구한다.

x, y가 음이 아닌 정수이므로 $x\geq0$, $y\geq0$

$2x+3y\leq9$에서 $3y\leq9$, 즉 $y\leq3$이므로

$y=0$ 또는 $y=1$ 또는 $y=2$ 또는 $y=3$

(i) $y=0$일 때,

$2x\leq9$, 즉 $x\leq\frac{9}{2}$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$, $(4, 0)$의 5개

(ii) $y=1$일 때,

$2x\leq6$, 즉 $x\leq3$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$의 4개

(iii) $y=2$일 때,

$2x\leq3$, 즉 $x\leq\frac{3}{2}$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(0, 2)$, $(1, 2)$의 2개

(iv) $y=3$일 때,

$2x\leq0$, 즉 $x\leq0$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(0, 3)$의 1개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$5+4+2+1=12$ 답 12

527

전략 각 항의 문자가 모두 다를 때, 전개식의 항의 개수는 각 다항식의 항의 개수의 곱과 같음을 이용한다.

$(a+b+c)^2(x+y)$

$=(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)(x+y)$

위의 식에서 a^2, b^2, c^2, $2ab$, $2bc$, $2ca$에 x, y를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 구하는 항의 개수는

$6\times2=12$ 답 12

528

전략 54^n의 양의 약수의 개수를 n에 대한 식으로 나타낸다.

$54=2\times3^3$이므로

$54^n=(2\times3^3)^n=2^n\times3^{3n}$

2^n의 양의 약수는 $1, 2, 2^2, \cdots, 2^n$의 $(n+1)$개

3^{3n}의 양의 약수는 $1, 3, 3^2, \cdots, 3^{3n}$의 $(3n+1)$개

따라서 곱의 법칙에 의하여 54^n의 양의 약수의 개수는

$(n+1)(3n+1)$

즉 $(n+1)(3n+1)=40$이므로

$3n^2+4n-39=0$, $(3n+13)(n-3)=0$

$\therefore n=3$ ($\because$ n은 자연수) 답 3

529

전략 동시에 갈 수 없는 길이면 합의 법칙을, 이어지는 길이면 곱의 법칙을 이용한다.

(i) 강남 → 시청 → 청량리로 가는 경우의 수는

$3\times4=12$

(ii) 강남 → 잠실 → 청량리로 가는 경우의 수는

$3\times2=6$

(iii) 강남 → 시청 → 잠실 → 청량리로 가는 경우의 수는

$3\times2\times2=12$

(iv) 강남 → 잠실 → 시청 → 청량리로 가는 경우의 수는

$3\times2\times4=24$

이상에서 구하는 경우의 수는

$12+6+12+24=54$ 답 54

530

전략 곱의 법칙을 이용하여 지불하는 방법의 수와 지불할 수 있는 금액의 수를 각각 구한다.

(i) 지불하는 방법의 수

10000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장의 3가지

5000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장의 4가지

1000원짜리 지폐를 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장, 4장의 5가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로

$a=3\times4\times5-1=59$

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

5000원짜리 지폐 2장의 금액과 10000원짜리 지폐 1장의 금액이 같으므로 10000원짜리 지폐 2장을 5000원짜리 지폐 4장으로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 5000원짜리 지폐 7장, 1000원짜리 지폐 4장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

5000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 금액은

0원, 5000원, 10000원, $\cdots$, 35000원

의 8가지

1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 금액은

0원, 1000원, 2000원, 3000원, 4000원

의 5가지

이때 0원을 지불하는 것은 제외해야 하므로

$b=8\times5-1=39$

(i), (ii)에서 $a-b=59-39=20$

답 **20**

531

전략 전체 자연수에서 3 또는 5로 나누어떨어지는 자연수를 제외한다.

3으로 나누어떨어지는 수, 즉 3의 배수는

3, 6, 9, $\cdots$, 99의 33개

5로 나누어떨어지는 수, 즉 5의 배수는

5, 10, 15, $\cdots$, 100의 20개

3과 5로 나누어떨어지는 수, 즉 15의 배수는

15, 30, 45, $\cdots$, 90의 6개

따라서 3 또는 5로 나누어떨어지는 자연수의 개수는

$33+20-6=47$

이므로 3과 5로 모두 나누어떨어지지 않는 자연수의 개수는

$100-47=53$

답 **53**

532

전략 판별식을 이용하여 a, b에 대한 부등식을 세운다.

이차방정식 $x^2+2ax+b=0$의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식이 실근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-b\geq0$, 즉 $a^2\geq b$

(i) $a=1$일 때,

$b\leq1$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$의 1개

(ii) $a=2$일 때,

$b\leq4$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$의 4개

(iii) $a=3$일 때,

$b\leq9$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$, $\cdots$, $(3, 6)$의 6개

(iv) $a=4$일 때,

$b\leq16$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$, $\cdots$, $(4, 6)$의 6개

(v) $a=5$일 때,

$b\leq25$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(5, 1)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$, $\cdots$, $(5, 6)$의 6개

(vi) $a=6$일 때,

$b\leq36$이므로 순서쌍 (a, b)는

$(6, 1)$, $(6, 2)$, $(6, 3)$, $\cdots$, $(6, 6)$의 6개

이상에서 구하는 순서쌍의 개수는

$1+4+6+6+6+6=29$

답 **29**

533

전략 동시에 갈 수 없는 길이면 합의 법칙을, 이어지는 길이면 곱의 법칙을 이용한다.

A 지점과 C 지점을 연결하는 도로를 x개 추가한다고 하자.

(i) A → B → D로 가는 경우의 수는

$3\times3=9$

(ii) A → C → D로 가는 경우의 수는

$x\times2=2x$

(iii) A → B → C → D로 가는 경우의 수는

$3\times2\times2=12$

(iv) A → C → B → D로 가는 경우의 수는

$x\times2\times3=6x$

이상에서 A 지점에서 D 지점으로 가는 경우의 수는

$9+2x+12+6x=8x+21$

즉 $8x+21=53$이므로

$8x=32$ $\therefore x=4$

따라서 추가해야 하는 도로의 개수는 4이다.

답 **4**

534

전략 먼저 1, 6이 적힌 정사각형에 색을 칠하는 경우의 수를 구한 후 각 정사각형을 칠할 수 있는 색의 개수를 차례대로 구한다.

조건 (가)에서 1, 6이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 4가지

2가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 3가지

3이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2, 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지

5가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2, 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지

4가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1, 5가 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지

따라서 조건을 만족시키도록 색을 칠하는 경우의 수는

$4\times3\times2\times2\times2=96$ **답** ③

535

전략 B와 C에 같은 색을 칠하는 경우와 다른 색을 칠하는 경우로 나누어 생각한다.

(i) B와 C에 같은 색을 칠하는 경우

B에 칠할 수 있는 색은 4가지

A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지

C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지

D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지

따라서 이 경우의 칠하는 방법의 수는

$4\times3\times1\times3=36$

(ii) B와 C에 다른 색을 칠하는 경우

B에 칠할 수 있는 색은 4가지

A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 3가지

C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지

D에 칠할 수 있는 색은 B와 C에 칠한 색을 제외한 2가지

따라서 이 경우의 칠하는 방법의 수는

$4\times3\times2\times2=48$

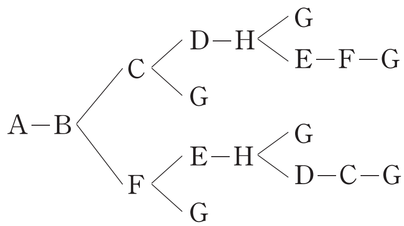
(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$36+48=84$ **답** 84

536

전략 각 꼭짓점에서 이동할 수 있는 꼭짓점을 이용하여 수형도를 그린다.

주어진 정육면체의 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 B로 움직인 후 꼭짓점 G에 도착하는 경우를 수형도를 그려서 구해 보면 다음과 같이 6가지가 있다.



같은 방법으로 구해 보면 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 D, E로 움직인 후 꼭짓점 G에 도착하는 경우도 각각 6가지씩이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times3=18$ **답** 18

02 순열

● 본책 244~252쪽

537

(1) ${}_5P_2=5\times4=20$

(2) ${}_4P_0=1$

(3) $4!=4\times3\times2\times1=24$

(4) ${}_6P_2\times3!=(6\times5)\times(3\times2\times1)=180$

답 (1) **20** (2) **1** (3) **24** (4) **180**

538

(1) $24=4\times3\times2$이므로 ${}_nP_3=24$에서

$n(n-1)(n-2)=4\times3\times2$

$\therefore n=4$

(2) $720=6\times5\times4\times3\times2\times1=6!$이므로 ${}_nP_n=720$에서

$n!=6!$ $\therefore n=6$

(3) $56=8\times7$이므로 ${}_8P_r=56=8\times7$에서

$r=2$

(4) ${}_{10}\mathrm{P}_r=1$에서 $\quad r=0$

(5) ${}_6\mathrm{P}_3=\dfrac{6!}{(6-3)!}=\dfrac{6!}{3!}=\dfrac{6!}{n!}$이므로 $\quad n=3$

(6) ${}_9\mathrm{P}_r=\dfrac{9!}{(9-r)!}=\dfrac{9!}{4!}$이므로

$9-r=4 \qquad \therefore r=5$

답 (1) **4** (2) **6** (3) **2** (4) **0** (5) **3** (6) **5**

539

(1) 7명의 학생을 일렬로 세우는 방법의 수는

$7!=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=5040$

(2) 5장의 카드 중 3장을 뽑아 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_5\mathrm{P}_3=5\times4\times3=60$

답 (1) **5040** (2) **60**

540

${}_{n-1}\mathrm{P}_r+r\times{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$

$=\dfrac{(n-1)!}{\{(n-1)-r\}!}+r\times\dfrac{(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!}$

$=\dfrac{(n-1)!}{(n-r-1)!}+r\times\dfrac{(n-1)!}{(n-r)!}$

$=\dfrac{(n-r)\times(n-1)!+r\times(n-1)!}{(n-r)!}$

$=\dfrac{\boxed{n}\times(n-1)!}{(n-r)!}$

$=\dfrac{\boxed{n!}}{(n-r)!}={}_n\mathrm{P}_r$

$\therefore {}_n\mathrm{P}_r={}_{n-1}\mathrm{P}_r+r\times{}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$

답 (가) $\boldsymbol{n}$ (나) $\boldsymbol{n!}$

541

(1) ${}_{n+2}\mathrm{P}_3=10{}_n\mathrm{P}_2$에서

$(n+2)(n+1)n=10n(n-1)$

이때 $n+2\geq3$, $n\geq2$에서 $n\geq2$이므로 양변을 n으로 나누면

$(n+2)(n+1)=10(n-1)$

$n^2-7n+12=0, \qquad (n-3)(n-4)=0$

$\therefore n=3$ 또는 $n=4$

(2) $4{}_n\mathrm{P}_3=5{}_{n-1}\mathrm{P}_3$에서

$4n(n-1)(n-2)=5(n-1)(n-2)(n-3)$

이때 $n\geq3$, $n-1\geq3$에서 $n\geq4$이므로 양변을 $(n-1)(n-2)$로 나누면

$4n=5(n-3), \qquad 4n=5n-15$

$\therefore n=15$

(3) ${}_n\mathrm{P}_3+3{}_n\mathrm{P}_2=5{}_{n+1}\mathrm{P}_2$에서

$n(n-1)(n-2)+3n(n-1)=5(n+1)n$

이때 $n\geq3$, $n\geq2$, $n+1\geq2$에서 $n\geq3$이므로 양변을 n으로 나누면

$(n-1)(n-2)+3(n-1)=5(n+1)$

$n^2-5n-6=0, \qquad (n+1)(n-6)=0$

$\therefore n=6\ (\because n\geq3)$

(4) ${}_n\mathrm{P}_3:{}_{n+2}\mathrm{P}_3=5:12$에서 $\qquad 12{}_n\mathrm{P}_3=5{}_{n+2}\mathrm{P}_3$

$12n(n-1)(n-2)=5(n+2)(n+1)n$

이때 $n\geq3$, $n+2\geq3$에서 $n\geq3$이므로 양변을 n으로 나누면

$12(n-1)(n-2)=5(n+2)(n+1)$

$7n^2-51n+14=0$

$(7n-2)(n-7)=0$

$\therefore n=7\ (\because n\geq3)$

답 (1) **3 또는 4** (2) **15** (3) **6** (4) **7**

542

서로 다른 7개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_7\mathrm{P}_3=7\times6\times5=210$ 답 **210**

543

서로 다른 6개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_6\mathrm{P}_3=6\times5\times4=120$ 답 **120**

544

학생 9명 중 n명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수는 서로 다른 9개에서 n개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_9\mathrm{P}_n=504=9\times8\times7$

$\therefore n=3$ 답 **3**

545

(1) a와 b를 한 묶음으로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$5!=120$

그 각각에 대하여 a와 b가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$120\times2=240$

(2) c, d, e, f를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$4!=24$

그 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중 2개의 자리에 a, b를 나열하는 방법의 수는

${}_5P_2=20$

따라서 구하는 방법의 수는

$24\times20=480$

답 (1) **240** (2) **480**

다른 풀이 (2) 6개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수에서 a, b가 이웃하도록 나열하는 방법의 수를 빼면 되므로 구하는 방법의 수는

$6!-240=720-240=480$

546

여학생 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$4!=24$

여학생 4명의 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 남학생 5명을 세우는 방법의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 방법의 수는

$24\times120=2880$ 답 **2880**

547

남학생 3명을 한 사람으로 생각하여 $(n+1)$명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $(n+1)!$

그 각각에 대하여 남학생 3명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$

즉 $(n+1)!\times6=36$이므로

$(n+1)!=6=3!$

$n+1=3$ $\quad\therefore n=2$ 답 **2**

548

(1) a를 맨 처음에, b를 맨 마지막에 고정시키고, 나머지 c, d, e, f의 4개의 문자를 일렬로 나열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$4!=24$

(2) a와 b 사이에 나머지 4개의 문자 중 3개를 택하여 나열하는 경우의 수는

${}_4P_3=24$

a○○○b를 한 묶음으로 생각하여 2개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2!=2$

a와 b가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times2\times2=96$

답 (1) **24** (2) **96**

549

5명의 남학생 중 2명을 택하여 양 끝에 세우는 방법의 수는

${}_5P_2=20$

양 끝에 세운 남학생 2명을 제외한 나머지 7명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$7!=5040$

따라서 구하는 방법의 수는

$20\times5040=100800$ 답 **100800**

550

적어도 2개의 모음이 이웃하도록 나열하는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 모음 중 어느 것도 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수를 빼면 된다.

promise의 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $7!=5040$

자음 p, r, m, s를 일렬로 나열한 다음 그 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 모음 3개를 나열하는 경우의 수는

$4!\times{}_5P_3=1440$

따라서 구하는 경우의 수는

$5040-1440=3600$ 답 **3600**

551

(1) 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 　1, 2, 3, 4의 4가지

이 각각에 대하여 십의 자리, 일의 자리에는 백의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중 2개를 택하여 나열하면 되므로 　${}_4P_2=12$

따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$4\times12=48$

(2) 홀수는 일의 자리의 숫자가 홀수이어야 하므로

$\square\square1$, $\square\square3$의 꼴이다.

이때 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3가지이고, 십의 자리에는 백의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3가지가 올 수 있으므로 구하는 홀수의 개수는

$2\times(3\times3)=18$

(3) 3의 배수는 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

이때 0, 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 3개를 택하여 합이 3의 배수가 되는 경우는

0, 1, 2 또는 0, 2, 4 또는 1, 2, 3 또는 2, 3, 4

(i) 0, 1, 2 또는 0, 2, 4일 때,

백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$2\times(2\times2!)=8$

(ii) 1, 2, 3 또는 2, 3, 4일 때,

만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$2\times3!=12$

(i), (ii)에서 구하는 3의 배수의 개수는

$8+12=20$

답 (1) **48** 　(2) **18** 　(3) **20**

552

$1\square\square\square\square$의 꼴의 자연수의 개수는 　$4!=24$

$2\square\square\square\square$의 꼴의 자연수의 개수는 　$4!=24$

따라서 50번째에 오는 수는 $3\square\square\square\square$의 꼴의 자연수 중에서 두 번째 수이다.

3으로 시작하는 수를 크기가 작은 수부터 차례대로 나열하면 30124, 30142, …이므로 50번째에 오는 수는 30142이다. 　답 **30142**

553

$5\square\square\square\square$의 꼴의 자연수의 개수는 　$4!=24$

$4\square\square\square\square$의 꼴의 자연수의 개수는 　$4!=24$

$35\square\square\square$의 꼴의 자연수의 개수는 　$3!=6$

$34\square\square\square$의 꼴의 자연수의 개수는 　$3!=6$

따라서 34000보다 큰 자연수의 개수는

$24+24+6+6=60$ 　답 **60**

554

$D\square\square\square\square\square$의 꼴의 문자열의 개수는 　$5!=120$

$E\square\square\square\square\square$의 꼴의 문자열의 개수는 　$5!=120$

$FDE\square\square\square$의 꼴의 문자열의 개수는 　$3!=6$

이때 FDIENR는 $FDI\square\square\square$의 꼴에서 첫 번째에 오는 문자열이므로

$120+120+6+1=247$(번째) 　답 **247번째**

연습 문제

본책 253~255쪽

555

전략 주어진 부등식을 r에 대한 식으로 변형한다.

$2r+1\le16$, $2r\le16$이므로

$r\le\frac{15}{2}$ 　…… ㉠

${}_{16}P_{2r+1}\le4\,{}_{16}P_{2r}$에서

$\frac{16!}{\{16-(2r+1)\}!}\le4\times\frac{16!}{(16-2r)!}$

$\frac{16!}{(15-2r)!}\le4\times\frac{16!}{(16-2r)!}$

$(16-2r)!\le4\times(15-2r)!$

$16-2r\le4$ 　← $(16-2r)!=(16-2r)\times(15-2r)!$

$-2r\le-12$ 　$\therefore r\ge6$ 　…… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은

$6\le r\le\frac{15}{2}$

따라서 자연수 r는 6, 7이므로 구하는 합은

$6+7=13$ 　답 **13**

556

전략 A를 맨 앞에 세울 때, 바로 뒤에 B를 세울 수 없음을 이용한다.

A를 맨 앞에 세울 때, A의 바로 뒤에 세울 수 있는 사람은 C, D, E, F의 4명이고, 나머지 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$4\times24=96$ **답 96**

다른 풀이 A를 맨 앞에 세우고 나머지 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$5!=120$

A를 맨 앞에 세우고 B와 A를 이웃하게 세우는 방법의 수는

$4!=24$ ← AB□□□□

따라서 구하는 방법의 수는

$120-24=96$

557

전략 남학생 3명을 한 사람, 여학생 5명을 한 사람으로 생각한다.

남학생 3명을 한 사람, 여학생 5명을 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4!=24$

남학생 3명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3!=6$

여학생 5명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $5!=120$

따라서 구하는 방법의 수는

$24\times6\times120=17280$ **답 17280**

558

전략 이웃해도 되는 카드를 일렬로 나열한 다음 그 사이사이와 양 끝에 이웃하지 않아야 할 카드를 나열한다.

홀수 1, 3, 5가 적혀 있는 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

1, 3, 5가 적혀 있는 세 장의 카드의 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 2, 4가 적혀 있는 카드를 나열하는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times12=72$ **답 ⑤**

다른 풀이 전체 5장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

이때 2, 4가 적혀 있는 카드를 한 장으로 생각하여 4장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

2, 4가 적혀 있는 카드끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

즉 2, 4가 적혀 있는 카드를 이웃하게 나열하는 경우의 수는

$24\times2=48$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-48=72$

559

전략 b, e 사이에 적어도 1개의 문자가 들어가는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 b, e가 이웃하는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$

이때 b와 e를 한 묶음으로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

그 각각에 대하여 b와 e가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

즉 b와 e가 서로 이웃하도록 나열하는 경우의 수는

$120\times2=240$

따라서 b와 e 사이에 적어도 1개의 문자가 들어가는 경우의 수는

$720-240=480$ **답 480**

560

전략 천의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 먼저 택한다.

홀수인 1, 3, 5, 7 중에서 2개를 택하여 천의 자리와 일의 자리에 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

나머지 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 백의 자리와 십의 자리에 나열하는 경우의 수는 ${}_5P_2=20$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$12\times20=240$ **답 240**

561

전략 순열의 수를 이용하여 맨 앞의 문자가 A인 문자열의 개수부터 구해 본다.

A□□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $4!=24$

B □□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $4!=24$

C □□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $4!=24$

DA□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $3!=6$

DB□□□의 꼴의 문자열의 개수는 $3!=6$

이때 $24+24+24+6+6=84$이므로 86번째에 오는 문자열은 DC□□□의 꼴의 2번째 문자열이다.

DC□□□의 꼴의 문자열을 사전식으로 배열하면

DCABE, DCAEB, ⋯

이므로 86번째에 오는 문자열은 DCAEB이다.

따라서 구하는 문자는 B이다.

답 B

562

전략 먼저 A와 B의 자리를 정하는 방법을 구한다.

조건 (가)에서 A와 B가 같이 앉을 수 있는 2인용 의자는 마부가 앉아 있는 의자를 제외한 3개이고, 두 사람은 자리를 서로 바꿔 앉을 수 있으므로 A와 B의 자리를 정하는 경우의 수는

$3\times2!=6$

나머지 5개의 자리에 C와 D가 앉는 모든 경우의 수는

${}_5P_2=20$

C와 D가 같은 2인용 의자에 이웃하여 앉는 경우의 수는 $2\times2!=4$

따라서 조건 (나)를 만족시키도록 C와 D가 앉는 경우의 수는

$20-4=16$

남은 3개의 좌석에 E, F, G가 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times16\times6=576$

답 576

563

전략 적어도 한쪽 끝에 홀수가 오는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 양 끝에 모두 짝수가 오는 경우의 수를 빼서 구한다.

6개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$

이때 서로 다른 한 자리 자연수 6개 중에서 짝수의 개수를 n이라 하면 양 끝에 짝수가 오는 경우의 수는

${}_nP_2\times4!$

즉 적어도 한쪽 끝에 홀수가 오는 경우의 수는

$720-{}_nP_2\times4!=432$

${}_nP_2\times4!=288,\quad {}_nP_2=12$

$n(n-1)=4\times3\qquad\therefore n=4$

따라서 홀수의 개수는

$6-4=2$

답 2

564

전략 '짝홀짝홀짝' 또는 '홀짝홀짝홀'로 나열하는 방법의 수를 구한다.

(i) (짝, 홀, 짝, 홀, 짝)인 경우

3개의 짝수를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$3!=6$

짝수 사이사이에 4개의 홀수 중 2개의 홀수를 택하여 나열하는 방법의 수는 ${}_4P_2=12$

따라서 이 경우의 방법의 수는

$6\times12=72$

(ii) (홀, 짝, 홀, 짝, 홀)인 경우

4개의 홀수 중 3개의 홀수를 택하여 일렬로 나열하는 방법의 수는 ${}_4P_3=24$

홀수 사이사이에 3개의 짝수 중 2개의 짝수를 택하여 나열하는 방법의 수는 ${}_3P_2=6$

따라서 이 경우의 방법의 수는

$24\times6=144$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$72+144=216$

답 216

565

전략 만의 자리의 숫자가 2, 3, 4인 짝수의 개수를 먼저 구한다.

(i) 2□□□□의 꼴인 짝수의 개수

일의 자리의 숫자는 4 또는 6이고 그 각각에 대하여 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에는 나머지 3개의 숫자를 일렬로 나열하면 되므로

$2\times3!=12$

(ii) 3□□□□의 꼴인 짝수의 개수

일의 자리의 숫자는 2 또는 4 또는 6이고 그 각각에 대하여 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에는 나머지 3개의 숫자를 일렬로 나열하면 되므로

$3\times3!=18$

(iii) 4□□□□의 꼴인 짝수의 개수

일의 자리의 숫자는 2 또는 6이고 그 각각에 대하여 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에는 나머지 3개의 숫자를 일렬로 나열하면 되므로

$2\times3!=12$

(iv) 52□□□의 꼴인 짝수의 개수

일의 자리의 숫자는 4 또는 6이고 그 각각에 대하여 백의 자리, 십의 자리에는 나머지 2개의 숫자를 일렬로 나열하면 되므로

$2\times2!=4$

(v) 53□□□의 꼴인 짝수의 개수

일의 자리의 숫자는 2 또는 4 또는 6이고 그 각각에 대하여 백의 자리, 십의 자리에는 나머지 2개의 숫자를 일렬로 나열하면 되므로

$3\times2!=6$

이상에서 54000보다 작은 짝수의 개수는

$12+18+12+4+6=52$ 답 **52**

566

전략 GYRNMEA의 바로 뒤의 문자열과 NGEAMRY의 바로 앞의 문자열을 확인한다.

GYRNMEA는 G□□□□□□의 꼴의 마지막 문자열이므로 바로 뒤의 문자열은 M□□□□□□의 꼴의 첫 번째 문자열이고, NGEAMRY는 NGE□□□□의 꼴의 첫 번째 문자열이므로 바로 앞의 문자열은 NGA□□□□의 꼴의 마지막 문자열이다.

M□□□□□□의 꼴의 문자열의 개수는

$6!=720$

NA□□□□□의 꼴의 문자열의 개수는

$5!=120$

NE□□□□□의 꼴의 문자열의 개수는

$5!=120$

NGA□□□□의 꼴의 문자열의 개수는

$4!=24$

따라서 GYRNMEA와 NGEAMRY 사이에 있는 문자열의 개수는

$720+120+120+24=984$ 답 **984**

567

전략 나누어 주는 장미의 개수를 기준으로 경우를 나누어 생각한다.

(i) 장미 3송이를 나누어 주는 경우

장미 3송이를 나누어 주는 경우의 수는 1

(ii) 장미 2송이를 나누어 주는 경우

3명의 학생 중 1명을 택하여 튤립 또는 해바라기를 나누어 주는 경우의 수는 $3\times2=6$

이때 나머지 2명의 학생에게는 장미를 나누어 주면 된다.

(iii) 장미 1송이를 나누어 주는 경우

3명의 학생 중 1명을 택하여 장미를 나누어 주는 경우의 수는 3

나머지 2명에게 모두 튤립을 나누어 주거나 튤립 1송이, 해바라기 1송이를 나누어 주는 경우의 수는

$1+2!=3$

따라서 이 경우의 수는 $3\times3=9$

(iv) 장미를 나누어 주지 않는 경우

튤립 2송이와 해바라기 1송이를 나누어 주는 경우의 수는 3

이상에서 구하는 경우의 수는

$1+6+9+3=19$ 답 ④

568

전략 우선 8개의 자연수를 합이 같은 두 묶음으로 나눈다.

8개의 자연수 1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14의 합이 60이므로 각 세로줄의 네 수의 합은 30이어야 한다.

주어진 수를 합이 30인 두 묶음으로 나누는 경우는

1, 3, 12, 14와 5, 7, 8, 10 또는

1, 5, 10, 14와 3, 7, 8, 12 또는

1, 7, 8, 14와 3, 5, 10, 12 또는

1, 7, 10, 12와 3, 5, 8, 14

의 4가지이다.

각 경우에 대하여 앞쪽 묶음의 4개의 자연수를 왼쪽 세로줄에, 뒤쪽 묶음의 4개의 자연수를 오른쪽 세로줄에 각각 일렬로 배열하는 경우의 수는

$4!\times4!=576$

왼쪽 세로줄과 오른쪽 세로줄을 서로 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times(576\times2)=4608$ 답 **4608**

569

전략 ㄴ과 ㄹ, ㄹ과 ㅁ이 서로 이웃하는 경우의 수를 각각 구한 후 중복되는 경우의 수를 뺀다.

(i) ㄴ과 ㄹ이 서로 이웃하는 경우

ㄴ과 ㄹ을 한 묶음으로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

그 각각에 대하여 ㄴ과 ㄹ이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 이 경우의 수는

$24\times2=48$

(ii) ㄹ과 ㅁ이 서로 이웃하는 경우

ㄹ과 ㅁ을 한 묶음으로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

그 각각에 대하여 ㄹ과 ㅁ이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 이 경우의 수는

$24\times2=48$

(iii) ㄴ과 ㄹ, ㄹ과 ㅁ이 모두 서로 이웃하는 경우

ㄴㄹㅁ의 순서로 이웃하는 경우의 수는 ㄴㄹㅁ을 한 묶음으로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수이므로 $3!=6$

같은 방법으로 구하면 ㅁㄹㄴ의 순서로 이웃하는 경우의 수도 $3!=6$이다.

따라서 이 경우의 수는

$6+6=12$

이상에서 구하는 경우의 수는

$48+48-12=84$ 답 **84**

570

전략 먼저 두 수의 합이 11이 되는 경우를 구한다.

8개의 자연수 중에서 더해서 11이 되는 두 수를 순서쌍으로 나타내면

$(2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6)$

의 4가지 경우가 있다.

순서쌍으로 묶인 두 수를 같이 사용하면 문제의 조건을 만족시키지 않으므로 네 개의 순서쌍에서 각각 하나씩만 수를 뽑아야 한다.

순서쌍에서 각각 하나씩 수를 뽑는 경우의 수는

$2\times2\times2\times2=16$

순서쌍에서 각각 하나씩 뽑은 4개의 수를 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$4!=24$

따라서 구하는 네 자리 자연수의 개수는

$16\times24=384$ 답 **384**

571

전략 같은 숫자가 있는 경우와 없는 경우로 나누어 생각한다.

(i) 네 자리 자연수 중 같은 숫자가 없는 경우

1, 2, 3, 4, 5 중 서로 다른 4개를 택하여 나열하면 되므로

${}_5P_4=120$

(ii) 네 자리 자연수 중 같은 숫자가 한 쌍 있는 경우

ⓐ 같은 숫자가 2인 경우

2□2□, □2□2, 2□□2의 꼴의 3가지 경우가 있고 각각에 대하여 □의 자리에 1, 3, 4, 5 중 서로 다른 2개를 택하여 나열하면 되므로

$3\times{}_4P_2=36$

ⓑ 같은 숫자가 3인 경우

ⓐ와 같은 방법으로 구하면 네 자리 자연수의 개수는 $3\times{}_4P_2=36$

따라서 이 경우의 수는

$36+36=72$

(iii) 네 자리 자연수 중 같은 숫자가 두 쌍 있는 경우

2323, 3232의 2개

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$120+72+2=194$ 답 **194**

2 조합

Ⅲ. 경우의 수

01 조합

● 본책 258~268쪽

572

(1) ${}_4C_2=\frac{{}_4P_2}{2!}=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

(2) ${}_5C_0=1$

(3) ${}_8C_8=1$

(4) ${}_{15}C_{13}={}_{15}C_{15-13}={}_{15}C_2=\frac{{}_{15}P_2}{2!}=\frac{15\times14}{2\times1}=105$

답 (1) **6** (2) **1** (3) **1** (4) **105**

573

(1) ${}_nC_3=35$에서 $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=35$

$n(n-1)(n-2)=7\times6\times5$

$\therefore n=7$

(2) ${}_6C_r=20$에서 $\frac{6!}{r!(6-r)!}=20$

$6!=20\times r!(6-r)!$

$6\times5\times4\times3\times2\times1=5\times4\times r!(6-r)!$

$3\times2\times1\times3\times2\times1=r!(6-r)!$

$3!\times3!=r!(6-r)!$

$\therefore r=3$

(3) ${}_{2n}C_2=45$에서 $\frac{2n(2n-1)}{2\times1}=45$

$2n^2-n-45=0,\quad (2n+9)(n-5)=0$

$\therefore n=-\frac{9}{2}$ 또는 $n=5$

이때 $2n\geq2$, 즉 $n\geq1$이므로 $n=5$

답 (1) **7** (2) **3** (3) **5**

574

(1) 서로 다른 10개에서 7개를 택하는 방법의 수는

${}_{10}C_7={}_{10}C_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

(2) 전체 경기 수는 서로 다른 9개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_9C_2=\frac{9\times8}{2\times1}=36$

답 (1) **120** (2) **36**

575

답 (가) $(n-r)!$ (나) $n!$ (다) $r!$

576

(1) ${}_nC_5={}_nC_{n-5}$이므로 ${}_nC_{n-5}={}_nC_4$에서

$n-5=4\qquad \therefore n=9$

(2) (i) ${}_{10}C_r={}_{10}C_{2r+1}$에서 $r=2r+1$

$\therefore r=-1$

이때 $r\geq0$이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) ${}_{10}C_r={}_{10}C_{10-r}$이므로 ${}_{10}C_{10-r}={}_{10}C_{2r+1}$에서

$10-r=2r+1$

$3r=9\qquad \therefore r=3$

(i), (ii)에서 $r=3$

(3) ${}_{10}C_2+{}_{10}C_7={}_{10}C_2+{}_{10}C_3={}_{11}C_3$이고

${}_{11}C_3={}_{11}C_8$이므로

$r=3$ 또는 $r=8$

(4) ${}_{n+1}C_{n-1}={}_{n+1}C_{(n+1)-(n-1)}={}_{n+1}C_2$이므로

${}_{n+2}C_3=2{}_nC_2+{}_{n+1}C_2$에서

$\frac{(n+2)(n+1)n}{3\times2\times1}$

$=2\times\frac{n(n-1)}{2\times1}+\frac{(n+1)n}{2\times1}$

$(n+2)(n+1)n=6n(n-1)+3(n+1)n$

이때 $n+2\geq3$, $n\geq2$, $n+1\geq2$에서 $n\geq2$이므로 양변을 n으로 나누면

$(n+2)(n+1)=6(n-1)+3(n+1)$

$n^2-6n+5=0,\quad (n-1)(n-5)=0$

$\therefore n=5\ (\because n\geq2)$

답 (1) **9** (2) **3** (3) **3 또는 8** (4) **5**

577

${}_nP_2+4{}_nC_2=9{}_{n-1}C_3$에서

$n(n-1)+4\times\frac{n(n-1)}{2\times1}$

$=9\times\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3\times2\times1}$

$3n(n-1)=\frac{3(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$

이때 $n\geq 2$, $n-1\geq 3$에서 $n\geq 4$이므로 양변을 $3(n-1)$로 나누면

$$n=\frac{(n-2)(n-3)}{2},\qquad 2n=n^2-5n+6$$

$$n^2-7n+6=0,\qquad (n-1)(n-6)=0$$

$$\therefore\ n=6\ (\because\ n\geq 4)$$

답 **6**

578

수학책 5권 중에서 3권을 택하는 방법의 수는

$${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times 4}{2\times 1}=10$$

영어책 5권 중에서 3권을 택하는 방법의 수는

$${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times 4}{2\times 1}=10$$

국어책 4권 중에서 3권을 택하는 방법의 수는

$${}_4C_3={}_4C_1=4$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$10+10+4=24$$

답 **24**

579

남학생 5명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

$${}_5C_2=\frac{5\times 4}{2\times 1}=10$$

여학생 n명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$${}_nC_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2\times 1}$$

이때 남학생 2명, 여학생 3명을 뽑는 방법의 수가 560이므로

$$10\times\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=560$$

$$n(n-1)(n-2)=56\times 6=8\times 7\times 6$$

$$\therefore\ n=8$$

답 **8**

580

참석한 회원을 n명이라 하면 악수를 한 총횟수는 n명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수와 같으므로

${}_nC_2=105$에서 $\quad\dfrac{n(n-1)}{2}=105$

$$n^2-n-210=0,\qquad (n+14)(n-15)=0$$

$$\therefore\ n=15\ (\because\ n\geq 2)$$

따라서 참석한 회원의 수는 15이다.

답 **15**

581

(1) A, B, C가 이미 선발되었다고 생각하고 나머지 9명 중에서 2명을 선발하면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_9C_2=36$$

(2) C를 제외한 11명의 학생 중 A, B는 이미 선발되었다고 생각하고 나머지 9명 중에서 3명을 선발하면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_9C_3=84$$

(3) 구하는 경우의 수는 12명 중 5명을 선발하는 모든 경우의 수에서 A, B, C가 모두 선발되지 않는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

전체 12명 중에서 5명을 선발하는 경우의 수는

$${}_{12}C_5=792$$

A, B, C가 모두 선발되지 않으려면 A, B, C를 제외한 9명의 학생 중 5명을 선발하면 되므로 이 경우의 수는 $\quad {}_9C_5={}_9C_4=126$

따라서 구하는 경우의 수는

$$792-126=666$$

답 (1) **36** (2) **84** (3) **666**

582

두 수의 곱이 짝수이려면 두 수 중에서 적어도 하나는 짝수이어야 한다.

따라서 구하는 경우의 수는 10장의 카드 중에서 두 장을 뽑는 모든 경우의 수에서 홀수가 적힌 카드를 두 장 뽑는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

10장의 카드 중에서 두 장을 뽑는 경우의 수는

$${}_{10}C_2=45$$

홀수가 적힌 5장의 카드 중에서 두 장을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_2=10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$45-10=35$$

답 **35**

583

1부터 9까지의 자연수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개, 짝수는 2, 4, 6, 8의 4개이므로 홀수 2개, 짝수 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_5C_2\times{}_4C_2=10\times 6=60$$

뽑은 4개의 자연수를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$60\times24=1440$ 답 **1440**

584

재헌이를 제외한 6명 중 수연이는 이미 뽑았다고 생각하고 나머지 5명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

뽑은 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 방법의 수는

$10\times24=240$ 답 **240**

585

8명 중 A, B는 이미 뽑았다고 생각하고 나머지 6명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

${}_6C_2=15$

A, B를 포함한 4명에서 A, B를 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$3!=6$

그 각각에 대하여 A, B가 자리를 바꾸는 방법의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$15\times6\times2=180$ 답 **180**

586

9개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_9C_2=36$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_2=6$

일직선 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

${}_5C_2=10$

이때 일직선 위에 있는 4개, 5개의 점으로 만들 수 있는 직선은 각각 1개이므로 구하는 직선의 개수는

$36-6-10+2=22$ 답 **22**

다른 풀이 두 직선 위의 점을 각각 하나씩 택하는 방법의 수는

${}_4C_1\times{}_5C_1=20$

이때 일직선 위에 있는 4개, 5개의 점으로 만들 수 있는 직선은 각각 1개이므로 구하는 직선의 개수는

$20+2=22$

587

10개의 점 중에서 2개의 점을 택하는 방법의 수는

${}_{10}C_2=45$

각 변 위에 있는 4개, 5개, 4개의 점 중에서 각각 2개의 점을 택하는 방법의 수는

${}_4C_2+{}_5C_2+{}_4C_2=6+10+6=22$

이때 각 변 위에 있는 4개, 5개, 4개의 점으로 만들 수 있는 직선은 각각 1개이므로 구하는 직선의 개수는

$45-22+3=26$ 답 **26**

588

구하는 다각형의 꼭짓점의 개수를 $n(n\geq3)$이라 하면

${}_nC_2-n=65$에서

$\dfrac{n(n-1)}{2}-n=65$

$n^2-3n-130=0,\qquad (n+10)(n-13)=0$

$\therefore n=13\ (\because n\geq3)$

따라서 구하는 다각형의 꼭짓점의 개수는 13이다.

답 **13**

589

9개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_9C_3=84$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

이때 4개의 점이 있는 직선은 3개이고, 일직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$84-4\times3=72$ 답 **72**

590

(1) 처음 정사각형의 한 변의 길이를 4라 하면

한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는

$4\times4=16$

한 변의 길이가 2인 정사각형의 개수는

$3\times3=9$

한 변의 길이가 3인 정사각형의 개수는

$2\times2=4$

한 변의 길이가 4인 정사각형의 개수는 1

따라서 구하는 정사각형의 개수는

$16+9+4+1=30$

(2) 가로선 5개 중에서 2개, 세로선 5개 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 만들어지므로 만들 수 있는 직사각형의 개수는

${}_5C_2\times{}_5C_2=10\times10=100$

따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$100-30=70$

답 (1) **30** (2) **70**

591

10권의 책을 5권, 5권씩 두 묶음으로 나누는 모든 방법의 수는

$${}_{10}C_5\times{}_5C_5\times\frac{1}{2!}=252\times1\times\frac{1}{2}=126$$

소설책으로만 이루어진 묶음이 있도록 나누는 방법의 수는

${}_7C_5\times{}_2C_2=21\times1=21$

따라서 구하는 방법의 수는

$126-21=105$

답 **105**

592

6명의 학생을 2명, 2명, 2명씩 세 조로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}=15\times6\times1\times\frac{1}{6}=15$$

세 조가 서로 다른 세 곳으로 봉사 활동을 가는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 방법의 수는

$15\times6=90$

답 **90**

593

8개의 학급을 4개의 학급씩 두 조로 나누는 방법의 수는

$${}_8C_4\times{}_4C_4\times\frac{1}{2!}=70\times1\times\frac{1}{2}=35$$

나누어진 두 조를 각각 2개의 학급씩 두 조로 나누는 방법의 수는

$$\left({}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\right)\times\left({}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\right)$$

$=3\times3=9$

따라서 구하는 방법의 수는

$35\times9=315$

답 **315**

연습 문제

본책 269~271쪽

594

전략 ${}_nP_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$, ${}_nC_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$임을 이용하여 주어진 등식을 n에 대한 식으로 나타낸다.

${}_nC_3+{}_nP_2=5{}_{n-1}C_2$에서

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}+n(n-1)$$

$$=5\times\frac{(n-1)(n-2)}{2\times1}$$

양변에 6을 곱하면

$n(n-1)(n-2)+6n(n-1)$

$=15(n-1)(n-2)$

이때 $n\geq3$, $n\geq2$, $n-1\geq2$에서 $n\geq3$이므로 양변을 $n-1$로 나누면

$n(n-2)+6n=15(n-2)$

$n^2-11n+30=0$, $\quad(n-5)(n-6)=0$

$\therefore n=5$ 또는 $n=6$

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$5+6=11$

답 **11**

595

전략 홀수가 1개인 경우와 홀수가 3개인 경우로 나누어 생각한다.

세 수의 합이 홀수가 되는 경우는

(홀수)+(홀수)+(홀수) 또는 (홀수)+(짝수)+(짝수)

일 때이다.

이때 1부터 15까지의 자연수 중 홀수는 8개, 짝수는 7개이다.

(i) (홀수)+(홀수)+(홀수)인 경우

홀수 8개 중 3개를 뽑으면 되므로 이 경우의 수는

$_8C_3=56$

(ii) (홀수)+(짝수)+(짝수)인 경우

홀수 8개 중 1개를 뽑고, 짝수 7개 중 2개를 뽑으면 되므로 이 경우의 수는

$_8C_1\times{}_7C_2=8\times21=168$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$56+168=224$

답 **224**

596

전략 모든 경우에서 남자만 뽑거나 여자만 뽑는 경우를 제외한다.

구하는 방법의 수는 4명의 대표를 뽑는 모든 방법의 수에서 남자만 뽑는 방법의 수와 여자만 뽑는 방법의 수를 뺀 것과 같다.

전체 10명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는

$_{10}C_4=210$

남자만 4명을 뽑는 방법의 수는

$_6C_4={}_6C_2=15$

여자만 4명을 뽑는 방법의 수는

$_4C_4=1$

따라서 구하는 방법의 수는

$210-(15+1)=194$

답 **194**

597

전략 5를 이미 택했다고 생각하고 나머지 2개의 수를 뽑아 나열한다.

5를 이미 택했다고 생각하고 나머지 7개의 자연수 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$_7C_2=21$

택한 3개의 자연수를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$21\times6=126$

답 **126**

598

전략 원에서 지름에 대한 원주각의 크기는 90°임을 이용하여 직각삼각형의 개수를 구한다.

(i) 직각삼각형의 개수

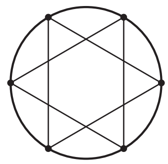
지름에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 직각삼각형을 만들려면 삼각형의 한 변이 원의 지름이어야 한다.

원 위의 6개의 점 중 두 점을 이어 만들 수 있는 지름은 3개이고, 나머지 4개의 점 중에서 1개를 택하는 방법의 수는 $_4C_1$이므로

$a=3\times{}_4C_1=3\times4=12$

(ii) 정삼각형의 개수

정삼각형은 오른쪽 그림과 같이 2개를 만들 수 있으므로



$b=2$

(i), (ii)에서

$a-b=10$

답 **10**

599

전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식 $5x^2-{}_nP_rx-9{}_nC_{n-r}=0$의 두 근이 -3, 9이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+9=\dfrac{_nP_r}{5}$에서 $\quad {}_nP_r=30$

$-3\times9=\dfrac{-9{}_nC_{n-r}}{5}$에서 $\quad {}_nC_{n-r}=15$

이때 ${}_nC_{n-r}={}_nC_r=\dfrac{_nP_r}{r!}$이므로

$15=\dfrac{30}{r!},\quad r!=2$

$\therefore r=2$

따라서 ${}_nP_2=n(n-1)=30$에서

$n=6$

$\therefore n+r=8$

답 **8**

600

전략 악수를 하려면 2명이 있어야 하므로 n명이 서로 악수를 한 번씩 할 때, 악수한 총횟수는 $_nC_2$이다.

26명 중에서 악수할 2명을 뽑는 방법의 수는

$_{26}C_2=325$

이때 부부끼리는 악수하지 않고, 부인들끼리도 악수하지 않는다.
부부끼리 악수하는 방법의 수는 13이고, 부인들끼리 악수하는 방법의 수는

$${}_{13}C_2=78$$

따라서 구하는 악수의 총횟수는

$$325-(13+78)=234$$

답 **234**

다른 풀이 남편들끼리 악수하는 방법의 수는

$${}_{13}C_2=78$$

남편들이 자신의 부인을 제외한 다른 부인들과 악수하는 방법의 수는

$$13\times12=156$$

따라서 구하는 악수의 총횟수는

$$78+156=234$$

601

전략 우선 5개의 인형을 선택하는 경우를 나눈다.

서로 다른 네 종류의 인형이 각각 2개씩 있으므로 5개의 인형을 선택하려면 세 종류 이상의 인형을 선택해야 한다.

(i) 서로 다른 세 종류의 인형을 각각 2개, 2개, 1개 선택하는 경우
서로 다른 네 종류의 인형 중에서 2개씩 선택할 두 종류의 인형을 정하는 경우의 수는

$${}_4C_2=6$$

나머지 두 종류의 인형 중에서 1개를 선택할 한 종류의 인형을 정하는 경우의 수는

$${}_2C_1=2$$

따라서 이 경우의 수는

$$6\times2=12$$

(ii) 서로 다른 네 종류의 인형을 각각 2개, 1개, 1개, 1개 선택하는 경우
서로 다른 네 종류의 인형 중에서 2개를 선택할 한 종류의 인형을 정하면 나머지 세 종류의 인형은 각각 1개씩 선택하면 되므로 이 경우의 수는

$${}_4C_1=4$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$12+4=16$$

답 **16**

602

전략 남학생을 x명이라 하고 x에 대한 방정식을 세운다.

여학생이 적어도 한 명 포함되도록 뽑는 방법의 수는 모든 방법의 수에서 남학생만 뽑는 방법의 수를 뺀 것과 같다.
전체 15명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$${}_{15}C_3=455$$

남학생을 x $(x\geq3)$명이라 하면 남학생만 3명을 뽑는 방법의 수는

$${}_xC_3$$

이때 여학생이 적어도 한 명 포함되도록 뽑는 방법의 수가 445이므로

$$455-{}_xC_3=445,\qquad {}_xC_3=10$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{3\times2\times1}=10$$

$$x(x-1)(x-2)=60=5\times4\times3$$

$$\therefore\ x=5$$

따라서 남학생 수는 5이다.

답 **5**

603

전략 2개의 숫자를 선택하는 경우의 수를 순서에 따라 나누어 구한다.

조건 (가)에서 선택한 2개의 숫자가 서로 다른 가로줄에 있어야 하므로 3개의 가로줄 중 2개를 선택하는 경우의 수는

$${}_3C_2={}_3C_1=3$$

선택한 2개의 가로줄 중 한 줄에서 1개의 숫자를 선택하는 경우의 수는

$${}_3C_1=3$$

조건 (나)에서 선택한 2개의 숫자가 서로 다른 세로줄에 있어야 하므로 나머지 가로줄에서 이미 선택한 숫자와 다른 열에 있는 1개의 숫자를 선택하는 경우의 수는

$${}_2C_1=2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$3\times3\times2=18$$

답 ④

다른 풀이 9개의 숫자 중 1개의 숫자를 선택하는 경우의 수는

$${}_9C_1=9$$

선택한 숫자와 같은 가로줄 또는 세로줄에 있는 숫자를 제외한 4개의 숫자 중 1개의 숫자를 선택하는 경우의 수는 $\quad {}_4\mathrm{C}_1=4$

이때 2개의 숫자를 선택하는 순서에 상관이 없으므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{9\times4}{2}=18$$

604

전략 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 서로 다른 n개의 점으로 만들 수 있는 직선의 개수는 ${}_n\mathrm{C}_2$, 삼각형의 개수는 ${}_n\mathrm{C}_3$이다.

(i) 직선의 개수

10개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_{10}\mathrm{C}_2=45$$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_4\mathrm{C}_2=6$$

이때 4개의 점이 있는 직선은 5개이고, 일직선 위에 있는 점들로 만들 수 있는 직선은 1개이므로

$$m=45-6\times5+5=20$$

(ii) 삼각형의 개수

10개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_{10}\mathrm{C}_3=120$$

일직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는 $\quad {}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

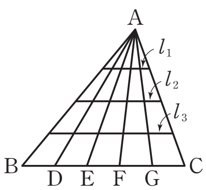
이때 4개의 점이 있는 직선은 5개이고, 일직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로

$$n=120-4\times5=100$$

(i), (ii)에서 $\quad m+n=120$ **답 120**

605

전략 주어진 도형에서 삼각형을 만들기 위해 세 선분을 선택하는 방법을 생각한다.



오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}$ 위의 네 점을 각각 D, E, F, G라 하고, 두 선분 AB, AC 위의 세 점을 연결한 3개의 선분을 각각 l_1, l_2, l_3이라 하자.

주어진 도형의 선들로 삼각형을 만들기 위해서는 점 A를 삼각형의 한 꼭짓점으로 해야 한다.

즉 꼭짓점 A를 지나는 6개의 선분 AB, AD, AE, AF, AG, AC 중에서 2개를 택하고, 4개의 직선 l_1, l_2, l_3, BC 중에서 1개를 택하면 삼각형이 만들어진다.

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$${}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1=15\times4=60$$

답 ④

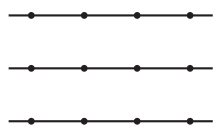
606

전략 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않은 서로 다른 n개의 점으로 만들 수 있는 직선의 개수는 ${}_n\mathrm{C}_2$이다.

12개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_{12}\mathrm{C}_2=66$$

(i) 일직선 위에 4개의 점이 있는 경우

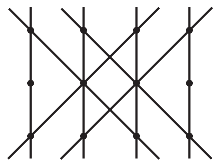


4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_4\mathrm{C}_2=6$$

일직선 위에 4개의 점이 있는 경우는 위의 그림과 같이 3가지이므로 이 경우 만들 수 있는 직선은 3개이다.

(ii) 일직선 위에 3개의 점이 있는 경우



3개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$$

일직선 위에 3개의 점이 있는 경우는 오른쪽 그림과 같이 8가지이므로 이 경우 만들 수 있는 직선은 8개이다.

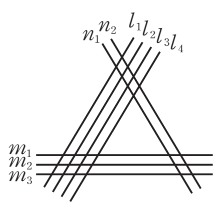
따라서 구하는 직선의 개수는

$$66-6\times3-3\times8+3+8=35$$

답 35

607

전략 평행사변형이 아닌 사다리꼴은 평행한 두 직선과 평행하지 않은 두 직선으로 만들 수 있다.



오른쪽 그림과 같이 평행한 직선을 각각 l_i, m_j, n_k ($i=1$, 2, 3, 4, $j=1$, 2, 3, $k=1$, 2)라 하면 평행사변형이 아닌 사다리꼴이 만들어지는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) l_i에서 2개, m_j에서 1개, n_k에서 1개의 직선을 택하는 경우

$${}_4C_2\times{}_3C_1\times{}_2C_1=6\times3\times2=36$$

(ⅱ) m_j에서 2개, l_i에서 1개, n_k에서 1개의 직선을 택하는 경우

$${}_3C_2\times{}_4C_1\times{}_2C_1=3\times4\times2=24$$

(ⅲ) n_k에서 2개, l_i에서 1개, m_j에서 1개의 직선을 택하는 경우

$${}_2C_2\times{}_4C_1\times{}_3C_1=1\times4\times3=12$$

이상에서 평행사변형이 아닌 사다리꼴의 개수는

$$36+24+12=72$$

답 **72**

608

전략 6명을 3명, 3명으로 분할하여 2개의 층에 분배한다.

6명을 3명, 3명씩 2개의 조로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=20\times1\times\frac{1}{2}=10$$

2층, 3층, 4층, 5층의 4개의 층 중 사람이 내리는 2개의 층을 택하는 방법의 수는

$${}_4C_2=6$$

2개의 조를 2개의 층에 배열하는 방법의 수는

$$2!=2$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$10\times6\times2=120$$

답 **120**

1 행렬

Ⅳ. 행렬

01 행렬

• 본책 274~278쪽

609

(1) 행렬 A의 제1열의 성분은 -2, 1, 4이므로 구하는 합은

$$-2+1+4=3$$

(2) 행렬 A의 제2행의 성분은 1, 0이므로 구하는 합은

$$1+0=1$$

답 (1) **3** (2) **1**

610

(1) $(1,\ 2)$ 성분은 제1행과 제2열이 만나는 위치의 성분이므로 4이고, $(3,\ 1)$ 성분은 제3행과 제1열이 만나는 위치의 성분이므로 0이다.

따라서 구하는 합은 $4+0=4$

(2) a_{11}은 제1행과 제1열이 만나는 위치의 성분이므로

$$a_{11}=-1$$

a_{23}은 제2행과 제3열이 만나는 위치의 성분이므로

$$a_{23}=-2$$

a_{32}는 제3행과 제2열이 만나는 위치의 성분이므로

$$a_{32}=2$$

$$\therefore\ a_{11}+a_{23}-a_{32}=-1+(-2)-2=-5$$

답 (1) **4** (2) **−5**

611

(1) $a_{11}=1^2-3\times1=-2$, $a_{12}=1^2-3\times2=-5$, $a_{21}=2^2-3\times1=1$, $a_{22}=2^2-3\times2=-2$이므로

$$A=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

(2) $i\le j$이면 $a_{ij}=i$이므로

$$a_{11}=1,\ a_{12}=1,\ a_{13}=1,\ a_{22}=2,\ a_{23}=2,\ a_{33}=3$$

$i>j$이면 $a_{ij}=-j$이므로

$$a_{21}=-1,\ a_{31}=-1,\ a_{32}=-2$$

$$\therefore\ A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 2\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}$$

답 **풀이 참조**

612

a_{ij}는 두 도시 P_i, P_j 사이의 통신망의 수이므로

$a_{11}=0$, $a_{12}=3$, $a_{13}=2$,

$a_{21}=3$, $a_{22}=0$, $a_{23}=1$,

$a_{31}=2$, $a_{32}=1$, $a_{33}=0$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

613

두 행렬의 대응하는 성분이 서로 같아야 하므로

$a+b=5$ …… ㉠

$a-b=-1$ …… ㉡

$-4=2c$ …… ㉢

$1=c-d$ …… ㉣

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$

㉢에서 $c=-2$

㉣에 $c=-2$를 대입하면

$1=-2-d$ $\quad\therefore d=-3$

답 $\boldsymbol{a=2,\ b=3,\ c=-2,\ d=-3}$

614

두 행렬의 대응하는 성분이 서로 같아야 하므로

$x^2+5=6x$, $-3=y^2-4y$

$x^2+5=6x$에서 $x^2-6x+5=0$

$(x-1)(x-5)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=5$

$-3=y^2-4y$에서 $y^2-4y+3=0$

$(y-1)(y-3)=0$ $\quad\therefore y=1$ 또는 $y=3$

따라서 실수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(1, 1)$, $(1, 3)$, $(5, 1)$, $(5, 3)$

답 $\mathbf{(1,\ 1),\ (1,\ 3),\ (5,\ 1),\ (5,\ 3)}$

02 행렬의 덧셈, 뺄셈과 실수배

● 본책 279~285쪽

615

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+1 & -3+1 \\ 3+(-2) & -1+0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -6+2 & 8+6 \\ 7+(-4) & -3+(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{14} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2-1 & -3-1 \\ 3-(-2) & -1-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -6-2 & 8-6 \\ 7-(-4) & -3-(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{-8} & \mathbf{2} \\ \mathbf{11} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

답 **풀이 참조**

616

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}+X=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$에서

$X=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-12} \end{pmatrix}$

(2) $X-\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$에서

$X=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{15} \\ \mathbf{9} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 15 & -1 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}-X=\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$에서

$X=\begin{pmatrix} 15 & -1 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{5} & \mathbf{16} \end{pmatrix}$

답 **풀이 참조**

617

(1) $-3A=-3\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -3\times(-1) & -3\times(-4) \\ -3\times 6 & -3\times 11 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{12} \\ \mathbf{-18} & \mathbf{-33} \end{pmatrix}$

(2) $\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\times 3 & \frac{1}{2}\times 8 \\ \frac{1}{2}\times 4 & \frac{1}{2}\times(-2) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{\frac{3}{2}} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

(3) $2A+B=2\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 12 & 22 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{16} & \mathbf{20} \end{pmatrix}$

(4) $3A-2B=3\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -3 & -12 \\ 18 & 33 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 16 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{-9} & \mathbf{-28} \\ \mathbf{10} & \mathbf{37} \end{pmatrix}$

답 풀이 참조

618

(1) $A-B+C$

$=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{-8} & \mathbf{14} \end{pmatrix}$

(2) $2C-B-A$

$=2\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{-5} & \mathbf{-11} \\ \mathbf{-9} & \mathbf{13} \end{pmatrix}$

(3) $2(A+2C)+3(B-A)$

$=2A+4C+3B-3A$

$=-A+3B+4C$

$=-\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 12 & -18 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -16 \\ -12 & 20 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

답 풀이 참조

619

$A-(B+X)=O$에서

$A-B-X=O$

$\therefore X=A-B=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$

답 $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{6} & \mathbf{-9} \end{pmatrix}$

620

$\frac{1}{3}(A+2B)=\frac{1}{2}(A-X)$의 양변에 6을 곱하면

$2(A+2B)=3(A-X)$

$2A+4B=3A-3X$

$3X=A-4B$

$\therefore X=\frac{1}{3}(A-4B)$

$=\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right\}$

$=\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}\right\}$

$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -9 & -6 & 3 \\ -9 & -6 & -9 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은

$-3+(-2)+1+(-3)+(-2)+(-3)$

$=-12$

답 −12

621

$A-2B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ …… ㉠

$2A+B=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠+㉡×2를 하면

$5A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$

$\therefore A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

㉠×2−㉡을 하면

$$-5B=2\begin{pmatrix}1 & -2\\ 6 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -4\\ -3 & 5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 12 & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -4\\ -3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 15 & 5\end{pmatrix}$$

$$\therefore B=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 15 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -3 & -1\end{pmatrix}$$

$$\therefore A-B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ -3 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A-B$의 $(1, 2)$ 성분은 -2이다.

답 -2

622

$xA+yB=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$에서 $\quad x\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$

좌변을 정리하면 $\quad \begin{pmatrix}2x+y\\ -x-3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x+y=3,\ -x-3y=1$

$\therefore x=2,\ y=-1$

답 $x=2,\ y=-1$

연습 문제 ● 본책 286쪽

623

전략 a_{ij}의 뜻을 이용하여 행렬 A의 각 성분을 구한다.

도시 1에서 도시 1로 가는 도로의 수는 2이므로

$a_{11}=2$

도시 1에서 도시 3으로 가는 도로의 수는 1이므로

$a_{13}=1$

도시 2에서 도시 3으로 가는 도로의 수는 1이므로

$a_{23}=1$

도시 3에서 도시 2로 가는 도로의 수는 1이므로

$a_{32}=1$

그 외의 다른 도로는 없으므로 나머지 성분은 모두 0이다.

$$\therefore A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

답 $\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

624

전략 행렬이 서로 같을 조건을 이용하여 x, y에 대한 식을 세운다.

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$3=x+y \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x=2y+1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠에 ㉡을 대입하면

$3=(2y+1)+y, \qquad 3y=2 \qquad \therefore y=\frac{2}{3}$

㉡에 $y=\frac{2}{3}$를 대입하면 $\quad x=2\times\frac{2}{3}+1=\frac{7}{3}$

$\therefore xy=\frac{14}{9}$

답 $\frac{14}{9}$

625

전략 주어진 등식을 X에 대하여 정리한 다음 행렬 A, B를 대입한다.

$2(X+B)=3\{X+2(X+A)\}$에서

$2X+2B=3(3X+2A)$

$2X+2B=9X+6A, \qquad 7X=2B-6A$

$$\therefore X=\frac{1}{7}(2B-6A)$$

$$=\frac{1}{7}\left\{2\begin{pmatrix}3 & 7\\ 0 & 3\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{7}\left\{\begin{pmatrix}6 & 14\\ 0 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}0 & 14\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은 2이다.

답 2

626

전략 주어진 식을 연립하여 행렬 A, B를 구한다.

$A-2B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$3A+B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 7 & 1\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡×2를 하면

$$7A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 7 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 6\\ 14 & 5\end{pmatrix}$$

$$\therefore A=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-1 & 6\\ 14 & 5\end{pmatrix}$$

㉠×3−㉡을 하면

$$-7B=3\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 4\\7 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4 & -10\\-7 & 8\end{pmatrix}$$

$$\therefore B=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-4 & 10\\7 & -8\end{pmatrix}$$

$$\therefore A+B=\frac{1}{7}\left\{\begin{pmatrix}-1 & 6\\14 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 10\\7 & -8\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-5 & 16\\21 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{7} & \frac{16}{7}\\3 & -\frac{3}{7}\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A+B$의 $(2,\ 1)$ 성분은 3이다. **답 3**

627

전략 i와 j의 대소를 비교하여 a_{ij}를 구한다.

$i>j$일 때, $a_{ij}=2i+j$이므로

$a_{21}=2\times2+1=5$,

$a_{31}=2\times3+1=7$,

$a_{32}=2\times3+2=8$

$i=j$일 때, $a_{ij}=ij$이므로

$a_{11}=1\times1=1$,

$a_{22}=2\times2=4$,

$a_{33}=3\times3=9$

$i<j$일 때, $a_{ij}=i-2j$이므로

$a_{12}=1-2\times2=-3$,

$a_{13}=1-2\times3=-5$,

$a_{23}=2-2\times3=-4$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}1 & -3 & -5\\5 & 4 & -4\\7 & 8 & 9\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$1+(-3)+(-5)+5+4+(-4)+7+8+9$

$=22$ **답 22**

628

전략 주어진 등식에 행렬 A, B, C를 대입한다.

$xA+yB=C$에서

$$x\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4 & -1\\2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3\\z & w\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2x & x\\0 & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4y & -y\\2y & 3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3\\z & w\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}2x+4y & x-y\\2y & x+3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3\\z & w\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x+4y=0,\ x-y=3,\ 2y=z,\ x+3y=w$

$\therefore x=2,\ y=-1,\ z=-2,\ w=-1$

$\therefore xy+zw=-2+2=0$

답 0

629

전략 주어진 등식을 이용하여 a, b를 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

$$\begin{pmatrix}x^2 & 0\\x & x^3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}a & 1\\2 & b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y^2 & xy\\y & y^3\end{pmatrix}=O\text{에서}$$

$$\begin{pmatrix}x^2 & 0\\x & x^3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y^2 & xy\\y & y^3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}a & 1\\2 & b\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}x^2+y^2 & xy\\x+y & x^3+y^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a & 2\\4 & 2b\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x^2+y^2=2a,\ xy=2,\ x+y=4,\ x^3+y^3=2b$

$$\therefore a=\frac{1}{2}(x^2+y^2)=\frac{1}{2}\{(x+y)^2-2xy\}$$

$$=\frac{1}{2}(4^2-2\times2)=6$$

$$b=\frac{1}{2}(x^3+y^3)=\frac{1}{2}\{(x+y)^3-3xy(x+y)\}$$

$$=\frac{1}{2}(4^3-3\times2\times4)=20$$

$\therefore a^2+b^2=6^2+20^2=436$

답 436

03 행렬의 곱셈

• 본책 287~289쪽

630

(1) $\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}=(2\times(-1)+3\times4)=\mathbf{(10)}$

(2) $\begin{pmatrix}-5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=(-5\times3+2\times1)=\mathbf{(-13)}$

(3) $(1\quad 3)\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}=(1\times4+3\times2\quad 1\times5+3\times7)$

$=\mathbf{(10\quad 26)}$

(4) $(-2\quad 3)\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$=(-2\times(-1)+3\times3\quad -2\times2+3\times1)$

$=\mathbf{(11\quad -1)}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}(3\quad -1)=\begin{pmatrix} 2\times3 & 2\times(-1) \\ 1\times3 & 1\times(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}(-2\quad 3)=\begin{pmatrix} 5\times(-2) & 5\times3 \\ 7\times(-2) & 7\times3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{-10} & \mathbf{15} \\ \mathbf{-14} & \mathbf{21} \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times4+1\times(-2) \\ 1\times4+3\times(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times8+3\times5 \\ -3\times8+1\times5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{31} \\ \mathbf{-19} \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 8\times2+(-1)\times4 & 8\times0+(-1)\times(-3) \\ 3\times2+5\times4 & 3\times0+5\times(-3) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{12} & \mathbf{3} \\ \mathbf{26} & \mathbf{-15} \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 4\times2+1\times1 & 4\times6+1\times(-4) \\ 3\times2+2\times1 & 3\times6+2\times(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{20} \\ \mathbf{8} & \mathbf{10} \end{pmatrix}$

(11) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1\times1+0\times3 & -1\times2+0\times4 \\ 1\times1+2\times3 & 1\times2+2\times4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{7} & \mathbf{10} \end{pmatrix}$

(12) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2\times1+(-3)\times(-2) & 2\times1+(-3)\times0 \\ 3\times1+(-1)\times(-2) & 3\times1+(-1)\times0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

답 **풀이 참조**

631

(1) $\begin{pmatrix} -1 & x \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ y & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+xy & -2-3x \\ 1+2y & -4 \end{pmatrix}$

따라서 $\begin{pmatrix} -1+xy & -2-3x \\ 1+2y & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & -8 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-1+xy=-9,\ -2-3x=-8,$

$1+2y=-7$

$\therefore\ x=2,\ y=-4$

(2) $\begin{pmatrix} x & 4 \\ 1 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x+4 & 2x-12 \\ -1+y & 2-3y \end{pmatrix}$

따라서 $\begin{pmatrix} -x+4 & 2x-12 \\ -1+y & 2-3y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}$이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-x+4=-2,\ 2x-12=0,$

$-1+y=3,\ 2-3y=-10$

$\therefore\ x=6,\ y=4$

답 (1) $\boldsymbol{x=2,\ y=-4}$
(2) $\boldsymbol{x=6,\ y=4}$

632

$AB=\begin{pmatrix} 2 & x \\ 3 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4-2x & -2+x \\ 6-2y & -3+y \end{pmatrix}$

$AB=O$이므로

$\begin{pmatrix} 4-2x & -2+x \\ 6-2y & -3+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$4-2x=0,\ -2+x=0,\ 6-2y=0,\ -3+y=0$

$\therefore\ x=2,\ y=3$

$\therefore\ xy=6$

답 **6**

633

$A\begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$에서

$2A\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}\qquad \therefore\ A\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 0 \\ 3b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$에서

$$3A\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix} \qquad \therefore A\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\therefore A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=A\left\{\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}\right\}=A\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

답 $\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}$

04 행렬의 곱셈의 성질

● 본책 290~295쪽

634

케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$$A^2-(1+4)A+(1\times4-2\times3)E=O$$

$$\therefore A^2-5A-2E=O$$

즉 $A^2-5A=2E$이므로 $\quad p=5$

답 **5**

다른 풀이 $A^2=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&10\\15&22\end{pmatrix}$

이므로 $A^2-pA=2E$에서

$$\begin{pmatrix}7&10\\15&22\end{pmatrix}-p\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}7-p&10-2p\\15-3p&22-4p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$7-p=2,\ 10-2p=0,\ 15-3p=0,\ 22-4p=2$$

$$\therefore p=5$$

635

$$A+B=\begin{pmatrix}1&-2\\0&3\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$A-B=\begin{pmatrix}5&0\\2&-3\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$2A=\begin{pmatrix}6&-2\\2&0\end{pmatrix} \qquad \therefore A=\begin{pmatrix}3&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

㉠−㉡을 하면

$$2B=\begin{pmatrix}-4&-2\\-2&6\end{pmatrix} \qquad \therefore B=\begin{pmatrix}-2&-1\\-1&3\end{pmatrix}$$

$$\therefore A^2-B^2=\begin{pmatrix}3&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&-1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-1\\-1&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}8&-3\\3&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&-1\\-1&10\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&-2\\4&-11\end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A^2-B^2의 $(2,\ 1)$ 성분은 4이다.

답 **4**

636

$A=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$에 대하여

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&8\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&8\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&12\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\therefore A^n=\begin{pmatrix}1&4n\\0&1\end{pmatrix}$$

따라서 $A^{10}=\begin{pmatrix}1&40\\0&1\end{pmatrix}$이므로

$$k=40$$

답 **40**

637

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)$$
$$=A^2+AB+BA+B^2$$

이므로 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$에서

$$A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$$

$$\therefore AB=BA$$

즉 $\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&y\\x&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&y\\x&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix}3x&y+36\\4x&2y+48\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y&4y\\x+24&3x+48\end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$3x=2y,\ y+36=4y,$$
$$4x=x+24,\ 2y+48=3x+48$$
$$\therefore x=8,\ y=12$$

답 $\boldsymbol{x=8,\ y=12}$

638

$A+B=E$에서 $B=E-A$이므로

$AB=A(E-A)=A-A^2=O$

$\therefore A^2=A$

$\therefore A^3=A^2A=A^2=A$

또 $B^2=(E-A)(E-A)$이므로

$B^2=E-2A+A^2=E-2A+A$

$=E-A=B$

$\therefore B^3=B^2B=B^2=B$

$\therefore A^3+B^3=A+B=E$

답 E

639

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}2 & -3\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3\\1 & -2\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & -3\\1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}=-E$$

$A^4=A^3A=-EA=-A$

$A^5=A^4A=-AA=-A^2$

$A^6=A^5A=-A^2A=-A^3=-(-E)=E$

따라서 n의 최솟값은 6이다.

답 6

다른 풀이 케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-A+E=O$

양변에 $A+E$를 곱하면

$(A+E)(A^2-A+E)=O$

$A^3+E=O \qquad \therefore A^3=-E$

$\therefore A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$

따라서 n의 최솟값은 6이다.

640

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\-3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\-3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -1\\3 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-2 & -1\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\-3 & -2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=E$$

$\therefore A^{16}=(A^3)^5A=E^5A=A$

따라서 $A^{16}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix}$에서 $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\-3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x+y\\-3x-2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix}$$

즉 $x+y=1$, $-3x-2y=-6$이므로

$x=4$, $y=-3$

$\therefore x-y=7$

답 7

다른 풀이 케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2+A+E=O$

양변에 $A-E$를 곱하면

$(A-E)(A^2+A+E)=O$

$A^3-E=O \qquad \therefore A^3=E$

해설 Focus

행렬 A에 대하여 $A^3=E$이면 자연수 n에 대하여

$A^3=A^6=\cdots=A^{3n}=E$

$A^4=A^7=\cdots=A^{3n+1}=A$

$A^5=A^8=\cdots=A^{3n+2}=A^2$

641

$$A^2=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & -6\\2 & -2\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2 & -6\\2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-8 & 0\\0 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}=-E$$

$A^4=A^3A=-EA=-A$

$A^5=A^4A=-AA=-A^2$

$A^6=A^5A=-A^2A=-A^3=-(-E)=E$

따라서 $A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6=O$이므로

$A+A^2+A^3+\cdots+A^{120}$

$=A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6$

$\quad+A^6(A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6)$

$\quad+\cdots+A^{114}(A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6)$

$=O$

따라서 구하는 모든 성분의 합은 0이다.

답 0

연습 문제

본책 296~297쪽

642

전략 두 행렬 X, Y에 대하여 XY가 정의되려면 X의 열의 개수와 Y의 행의 개수가 같아야 함을 이용한다.

A는 2×1 행렬, B는 1×2 행렬, C는 2×2 행렬이다.

① AB ⇨ $(2\times1$ 행렬$)\times(1\times2$ 행렬$)=(2\times2$ 행렬$)$

② BA ⇨ $(1\times2$ 행렬$)\times(2\times1$ 행렬$)=(1\times1$ 행렬$)$

③ AC ⇨ $(2\times\underbrace{1\text{ 행렬})\times(2}_{\text{다르다.}}\times2$ 행렬$)$

따라서 AC는 정의되지 않는다.

④ CA ⇨ $(2\times2$ 행렬$)\times(2\times1$ 행렬$)=(2\times1$ 행렬$)$

⑤ BC ⇨ $(1\times2$ 행렬$)\times(2\times2$ 행렬$)=(1\times2$ 행렬$)$

답 ③

643

전략 A^2을 구하여 주어진 등식에 대입한다.

$$A^2=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2+1 & x+y \\ x+y & 1+y^2 \end{pmatrix}$$

이므로 $A^2+2A-E=O$에서

$$\begin{pmatrix} x^2+1 & x+y \\ x+y & 1+y^2 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x^2+2x & x+y+2 \\ x+y+2 & y^2+2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

따라서 $x^2+2x=0$, $x+y+2=0$, $y^2+2y=0$이므로

$x^2=-2x$, $y^2=-2y$, $x+y=-2$

$\therefore x^2+y^2=-2x-2y=-2(x+y)$

$=-2\times(-2)=4$

답 4

644

전략 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$로 놓고 주어진 식에 대입하여 A를 구한다.

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$에서

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\therefore a=1$, $c=3$ …… ㉠

$A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=A\left\{A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}=A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$이므로

$A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$에서 $\quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} a+3b \\ c+3d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\therefore a+3b=-5$, $c+3d=6$ …… ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$1+3b=-5$, $3+3d=6$

$\therefore b=-2$, $d=1$

즉 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$$A^3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=A\left\{A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}=A\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -17 \\ -9 \end{pmatrix}$$

따라서 $A^3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은

$-17+(-9)=-26$

답 -26

645

전략 A^2, A^3을 직접 구하여 A^n을 추정한다.

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\therefore A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

따라서 $2^n=64$이므로

$n=6$

답 6

646

전략 행렬의 곱셈에서 교환법칙이 성립하지 않음을 이용한다.

② $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$이면

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$=E$,

$$B^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=E$$

이므로 $A^2-B^2=E-E=O$이지만

$A\neq B$, $A\neq -B$이다. (거짓)

④ $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$이면

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$
$$=-E$$

$\therefore A^2+E=O$ (참)

⑤ $B=C$, 즉 $B-C=O$이므로

$AB-AC=A(B-C)=AO=O$

$\therefore AB=AC$ (참)

답 ②

647

전략 $E^n=E$, $AE=EA=A$임을 이용하여 좌변을 간단히 한다.

$$(2E+3A)(3E+2A)=6E+4A+9A+6A^2$$
$$=6A^2+13A+6E$$

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}=-E$$

이므로

$$(2E+3A)(3E+2A)=-6E+13A+6E$$
$$=13A$$

따라서 $13A=xE+yA$이므로

$x=0$, $y=13$ $\qquad\therefore x+y=13$

답 13

다른 풀이 $2E+3A=2\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}2 & -3\\3 & 2\end{pmatrix}$$

$$3E+2A=3\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\2 & 3\end{pmatrix}$$

$(2E+3A)(3E+2A)=xE+yA$에서

$$\begin{pmatrix}2 & -3\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\2 & 3\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}0 & -13\\13 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & -y\\y & x\end{pmatrix}$$

따라서 $x=0$, $y=13$이므로 $\quad x+y=13$

648

전략 $A^n=E$를 만족시키는 n의 최솟값을 구한다.

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}=-E$$

따라서 $A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$이므로

$A^{2025}=(A^6)^{337}A^3=E^{337}(-E)=-E$

$$A^{2025}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-E\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$$

이므로 $A^{2025}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$에서 $\quad\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

따라서 $x=2$, $y=-4$이므로

$x-y=6$

답 6

다른 풀이 케일리-해밀턴의 정리에 의하여

$A^2-A+E=O$

양변에 $A+E$를 곱하면

$(A+E)(A^2-A+E)=O$

$A^3+E=O \qquad \therefore A^3=-E$

649

전략 XY와 YX의 각 성분의 의미를 파악한다.

$$XY=\begin{pmatrix}800 & 500\\700 & 600\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\3 & 5\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}800\times3+500\times3 & 800\times2+500\times5\\700\times3+600\times3 & 700\times2+600\times5\end{pmatrix}$$

이때 A가 Q 문구점에서 노트와 펜을 구입한 가격은

$700\times3+600\times3$

이므로 행렬 XY의 $(2,\ 1)$ 성분이다.

답 ②

650

전략 $\begin{pmatrix}2a\\3b\end{pmatrix}$를 $\begin{pmatrix}2a\\b\end{pmatrix}$와 $\begin{pmatrix}a\\2b\end{pmatrix}$의 실수배의 합으로 변형한다.

실수 x, y에 대하여

$$x\begin{pmatrix}2a\\b\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}a\\2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a\\3b\end{pmatrix}$$

가 성립한다고 하면

$$\begin{pmatrix} 2ax+ay \\ bx+2by \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a \\ 3b \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2ax+ay=2a,\ bx+2by=3b$$

$a\neq 0$, $b\neq 0$이므로 $\quad 2x+y=2,\ x+2y=3$

$$\therefore\ x=\frac{1}{3},\ y=\frac{4}{3}$$

즉 $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix}+\frac{4}{3}\begin{pmatrix} a \\ 2b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a \\ 3b \end{pmatrix}$이므로

$$A\begin{pmatrix} 2a \\ 3b \end{pmatrix}=\frac{1}{3}A\begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix}+\frac{4}{3}A\begin{pmatrix} a \\ 2b \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}+\frac{4}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

답 $\begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

651

전략 A^2의 각 성분을 α, β에 대한 식으로 나타내고, 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

이차방정식 $x^2-7x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=7,\ \alpha\beta=-1$$

한편 $A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$에서

$$A^2=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^2+1 & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta & 1+\beta^2 \end{pmatrix}$$

이므로 $\quad a=\alpha^2+1,\ d=1+\beta^2$

$$\begin{aligned} \therefore\ a+d&=\alpha^2+1+1+\beta^2 \\ &=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2 \\ &=7^2-2\times(-1)+2=53 \end{aligned}$$

답 **53**

652

전략 $(A-B)^2$을 $A+B$, $AB+BA$에 대한 식으로 나타낸다.

$$\begin{aligned} (A+B)^2&=(A+B)(A+B) \\ &=A^2+AB+BA+B^2 \end{aligned}$$

이므로 $\quad A^2+B^2=(A+B)^2-(AB+BA)$

$$\begin{aligned} \therefore\ &(A-B)^2 \\ &=(A-B)(A-B) \\ &=A^2-AB-BA+B^2 \\ &=A^2+B^2-(AB+BA) \\ &=(A+B)^2-2(AB+BA) \\ &=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -24 & 0 \\ 24 & 0 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 20 & -3 \\ -12 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

답 $\begin{pmatrix} \mathbf{20} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-12} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

653

전략 $(AB)^4=ABABABAB$임을 이용한다.

$AB=2BA$에서 $\quad BA=\frac{1}{2}AB$

$$\begin{aligned} \therefore\ (AB)^4&=ABABABAB \\ &=A\left(\frac{1}{2}AB\right)\left(\frac{1}{2}AB\right)\left(\frac{1}{2}AB\right)B \\ &=\frac{1}{8}A^2BABAB^2 \\ &=\frac{1}{8}A^2\left(\frac{1}{2}AB\right)\left(\frac{1}{2}AB\right)B^2 \\ &=\frac{1}{32}A^3BAB^3 \\ &=\frac{1}{32}A^3\left(\frac{1}{2}AB\right)B^3=\frac{1}{64}A^4B^4 \end{aligned}$$

즉 $A^4B^4=64(AB)^4$이므로

$$k=64$$

답 **64**

654

전략 주어진 등식을 만족시키는 a의 값을 먼저 구한다.

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -a \\ a & a^2-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ &A^2+A+E \\ &=\begin{pmatrix} -1 & -a \\ a & a^2-1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} 0 & -a-1 \\ a+1 & a^2+a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

즉 $\begin{pmatrix} 0 & -a-1 \\ a+1 & a^2+a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로

$$a+1=0,\ a^2+a=0 \qquad \therefore\ a=-1$$

한편 $A^2+A+E=O$의 양변에 $A-E$를 곱하면

$$(A-E)(A^2+A+E)=O$$

$$A^3-E=O \qquad \therefore\ A^3=E$$

$$\therefore\ A^{101}=(A^3)^{33}A^2=E^{33}A^2=A^2=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$-1+1+(-1)=-1$$

답 **−1**