수학의 시작 개념원리

확률과 통계

정답 및 풀이

1 순열과 조합

01 중복순열

● 본책 10~21쪽

1

x, y가 자연수이므로

$x+y=2$ 또는 $x+y=3$

(ⅰ) $x+y=2$일 때, 순서쌍 (x, y)는

$(1, 1)$의 1개

(ⅱ) $x+y=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는

$(1, 2)$, $(2, 1)$의 2개

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$1+2=3$ 답 **3**

다른 풀이 (ⅰ) $x=1$일 때, $y<3$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(1, 1)$, $(1, 2)$의 2개

(ⅱ) $x=2$일 때, $y<2$이므로 순서쌍 (x, y)는

$(2, 1)$의 1개

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

$2+1=3$

2

두 눈의 수의 차가 1 이하인 경우는 차가 0 또는 1인 경우이다.

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(ⅰ) 차가 0인 경우는

$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$의 6가지

(ⅱ) 차가 1인 경우는

$(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(5, 6)$, $(6, 5)$의 10가지

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$6+10=16$ 답 **16**

3

십의 자리의 숫자가 될 수 있는 수는

1, 3, 5, 7, 9의 5개

일의 자리의 숫자가 될 수 있는 수는

2, 3, 5, 7의 4개

따라서 구하는 두 자리 자연수의 개수는

$5\times4=20$ 답 **20**

4

(1) 54를 소인수분해하면 $54=2\times3^3$

2의 양의 약수는 1, 2의 2개, 3^3의 양의 약수는 1, 3, 3^2, 3^3의 4개이므로 54의 양의 약수의 개수는

$2\times4=8$

(2) 120을 소인수분해하면 $120=2^3\times3\times5$

2^3의 양의 약수는 1, 2, 2^2, 2^3의 4개, 3의 양의 약수는 1, 3의 2개, 5의 양의 약수는 1, 5의 2개이므로 120의 양의 약수의 개수는

$4\times2\times2=16$

답 (1) **8** (2) **16**

5

a를 포함하는 각 항은 p, q 중에서 하나를 택하고, x, y 중에서 하나를 택하여 a와 곱한 것이다.

따라서 구하는 항의 개수는

$2\times2=4$ 답 **4**

6

서로 다른 4개에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_4P_4=4!=24$ 답 **24**

7

서로 다른 5개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_5P_3=5\times4\times3=60$ 답 **60**

8

c와 y를 제외한 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!=120$

c와 y를 양 끝에 나열하는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\times2=240$ 답 **240**

9

서로 다른 책 12권 중에서 3권을 택하는 경우의 수는

${}_{12}C_3=\dfrac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$ 답 **220**

10

7개의 문자 중에서 C, F를 포함하여 4개를 뽑는 경우의 수는 C, F를 제외한 나머지 5개의 문자 중에서 2개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

$${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

C, F를 포함한 4개의 문자 중에서 C, F를 제외한 2개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2!=2$

2개의 문자 사이와 양 끝의 3개의 자리 중에서 2개의 자리에 C, F를 나열하는 경우의 수는

${}_3P_2=3\times2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times2\times6=120$ 답 **120**

개념 노트

이웃하지 않는 경우의 수

이웃하지 않는 경우의 수는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 이웃해도 되는 것을 나열하는 경우의 수를 구한다.

(ii) (i)에서 나열한 것 사이사이와 양 끝에 이웃하지 않는 것을 나열하는 경우의 수를 구한다.

(iii) (i)과 (ii)에서 구한 경우의 수를 곱한다.

11

세 수의 곱이 짝수가 되려면 세 수 중에서 적어도 하나는 짝수이어야 한다.

따라서 구하는 경우의 수는 9개의 자연수 중에서 서로 다른 세 수를 택하는 경우의 수에서 홀수만 세 개를 택하는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

9개의 자연수 중에서 서로 다른 세 수를 택하는 경우의 수는

$${}_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$$

홀수 5개 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$84-10=74$ 답 **74**

12

답 (1) **7** (2) **36** (3) **81** (4) **32**

13

(1) ${}_n\Pi_3=125$이므로 $n^3=125=5^3$

$\therefore n=5$

(2) ${}_n\Pi_5=243$이므로 $n^5=243=3^5$

$\therefore n=3$

(3) ${}_2\Pi_r=128$이므로 $2^r=128=2^7$

$\therefore r=7$

(4) ${}_7\Pi_r=343$이므로 $7^r=343=7^3$

$\therefore r=3$

답 (1) **5** (2) **3** (3) **7** (4) **3**

14

1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_4=5^4=625$ 답 **625**

15

○, ×의 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_5=2^5=32$ 답 **32**

16

서로 다른 2개의 우체통에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$ 답 **8**

17

서로 다른 3개의 호텔에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_5=3^5=243$ 답 **243**

18

남학생 5명을 각각 홀수 반인 1반 또는 3반에 배정하는 경우의 수는 서로 다른 2개의 반에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_5=2^5=32$

남학생 5명을 모두 1반 또는 3반에 배정하는 경우의 수는 2

여학생 4명을 모두 짝수 반인 2반에 배정하는 경우의 수는

1

따라서 구하는 경우의 수는

$(32-2)\times 1=30$ 답 **30**

19

깃발을 1번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_3\Pi_1=3^1=3$

깃발을 2번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_3\Pi_2=3^2=9$

깃발을 3번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

따라서 구하는 신호의 개수는

$3+9+27=39$ 답 **39**

20

n개의 깃발을 올리거나 내려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_n=2^n$

100개 이상의 서로 다른 신호를 만들어야 하므로

$2^n\geq 100$

이때 $2^6=64$, $2^7=128$이므로

$n\geq 7$

따라서 자연수 n의 최솟값은 7이다. 답 **7**

21

(1) 천의 자리에 올 수 있는 숫자는

1, 2, 3, 4, 5의 5개

백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 0, 1, 2, 3, 4, 5의 6개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_6\Pi_2=6^2=36$

일의 자리에 올 수 있는 숫자는

0, 2, 4의 3개

따라서 구하는 자연수의 개수는

$5\times 36\times 3=540$

(2) (i) 한 자리 자연수의 개수는 4

(ii) 두 자리 자연수의 개수는

$4\times {}_5\Pi_1=4\times 5=20$

(iii) 세 자리 자연수의 개수는

$4\times {}_5\Pi_2=4\times 5^2=100$

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$4+20+100=124$

답 (1) **540** (2) **124**

다른 풀이 (2) 한 자리 자연수를 백의 자리와 십의 자리의 숫자가 0인 세 자리 자연수로, 두 자리 자연수를 백의 자리의 숫자가 0인 세 자리 자연수로 생각하면 세 자리 이하의 자연수의 개수는 0, 1, 2, 3, 4의 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수에서 0의 1개를 뺀 것과 같으므로

${}_5\Pi_3-1=5^3-1=124$

22

2000보다 큰 수는 2□□□ 또는 3□□□ 꼴이다.

2□□□, 3□□□ 꼴의 자연수의 개수는 각각 4개의 숫자에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$

이때 2000은 제외해야 하므로 구하는 자연수의 개수는

$64\times 2-1=127$ 답 **127**

23

X에서 Y로의 함수의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, $\cdots$, n의 n개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_n\Pi_2=n^2$

따라서 $n^2=64$이므로

$n=8$ ($\because$ n은 자연수) 답 **8**

24

$f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 Y의 짝수인 원소 6, 8의 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_2=2^2=4$

$f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 Y의 홀수인 원소 5, 7, 9의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_2=3^2=9$$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$$4\times9=36$$

답 **36**

02 같은 것이 있는 순열

• 본책 22~28쪽

25

양 끝에 n을 나열하고 중간에 나머지 문자 c, o, d, i, t, i, o를 일렬로 나열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2!\times2!}=1260$$

답 **1260**

26

자음 c, l, n, d, r를 한 문자 A로 생각하여 4개의 문자

A, a, e, a

를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

이때 자음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$5!=120$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$12\times120=1440$$

답 **1440**

27

(i) 1과 2가 적힌 카드 사이에 3이 적힌 카드를 나열하는 경우

1, 3, 2가 적힌 카드를 하나로 생각하여 3, 4가 적힌 카드와 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$3!=6$$

이때 1과 2가 적힌 카드의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 이 경우의 수는

$$6\times2=12$$

(ii) 1과 2가 적힌 카드 사이에 4가 적힌 카드를 나열하는 경우

1, 4, 2가 적힌 카드를 하나로 생각하여 3이 적힌 2장의 카드와 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}=3$$

이때 1과 2가 적힌 카드의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 이 경우의 수는

$$3\times2=6$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$12+6=18$$

답 **18**

28

일의 자리의 숫자가 1일 때 홀수가 되므로 구하는 홀수의 개수는 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

$$\therefore\ \frac{4!}{2!\times2!}=6$$

답 **6**

29

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

1, 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!\times2!}=60$$

(ii) 일의 자리의 숫자가 2인 경우

0, 1, 1, 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!}=120$$

이때 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 1, 1, 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{3!}=20$$

따라서 일의 자리의 숫자가 2인 짝수의 개수는

$$120-20=100$$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$$60+100=160$$

답 **160**

30

3의 배수는 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

이때 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3 중에서 4개를 택하여 그 합이 3의 배수가 되는 경우는

1, 1, 2, 2 또는 1, 2, 3, 3 또는 2, 2, 2, 3

(i) 1, 1, 2, 2로 만들 수 있는 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{2!\times2!}=6$$

(ii) 1, 2, 3, 3으로 만들 수 있는 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

(iii) 2, 2, 2, 3으로 만들 수 있는 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

이상에서 구하는 3의 배수의 개수는

$6+12+4=22$ 답 **22**

31

d, y의 순서가 정해져 있으므로 d, y를 모두 A로 생각하여 5개의 문자

A, A, s, t, u

를 일렬로 나열한 후 첫 번째 A는 d, 두 번째 A는 y로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$ 답 **60**

32

t, n, i의 순서가 정해져 있으므로 t, n, i를 모두 A로 생각하여 9개의 문자

A, A, A, e, c, h, q, u, e

를 일렬로 나열한 후 첫 번째 A는 t, 두 번째 A는 n, 세 번째 A는 i로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{9!}{3!\times2!}=30240$ 답 **30240**

33

모음 a, i, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

모음 뒤에 자음 h, p, p, n, s, s를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!\times2!}=180$$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times180=1080$ 답 **1080**

34

A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{9!}{5!\times4!}=126$$

A 지점에서 C 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

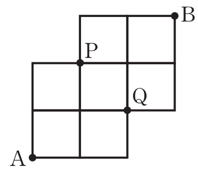
$$\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{5!}{3!\times2!}=6\times10=60$$

따라서 A 지점에서 C 지점을 거치지 않고 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$126-60=66$ 답 **66**

35

오른쪽 그림과 같이 두 지점 P, Q를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는



A → P → B,

A → Q → B

의 2가지이다.

(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}=3\times3=9$$

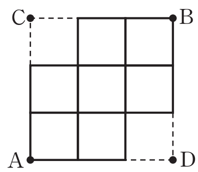
(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}=3\times3=9$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$9+9=18$ 답 **18**

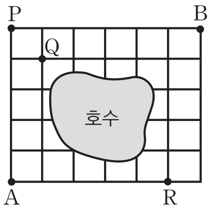
다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하고 두 지점 C, D를 잡으면 구하는 경우의 수는 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 C 지점 또는 D 지점을 거쳐 최단 거리로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로



$$\frac{6!}{3!\times3!}-(1\times1+1\times1)=20-2=18$$

36

오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는



$A \to P \to B$,

$A \to Q \to B$,

$A \to R \to B$

의 3가지이다.

(ⅰ) $A \to P \to B$로 가는 경우의 수는

$1 \times 1 = 1$

(ⅱ) $A \to Q \to B$로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{4!} \times \frac{6!}{5!} = 5 \times 6 = 30$

(ⅲ) $A \to R \to B$로 가는 경우의 수는

$1 \times \frac{6!}{5!} = 6$

이상에서 구하는 경우의 수는

$1 + 30 + 6 = 37$ **답 37**

연습 문제 ● 본책 29~31쪽

37

전략 과일을 나누어 담는 전체 경우의 수에서 모든 과일을 한 바구니에 담는 경우의 수를 뺀다.

두 바구니 A, B에서 6개를 택하는 중복순열의 수는

${}_2\Pi_6 = 2^6 = 64$

이때 모든 과일을 A 바구니에 담거나 B 바구니에 담는 경우는 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

$64 - 2 = 62$ **답 62**

38

전략 천의 자리의 숫자가 1 또는 2이어야 함을 이용한다.

3000보다 작아야 하므로 천의 자리에 올 수 있는 숫자는

1, 2의 2개

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 정하는 경우의 수는 0, 1, 2, 3, 4의 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$2 \times 125 = 250$ **답 250**

39

전략 일대일대응의 개수를 이용하여 n의 값을 구한다.

X에서 X로의 일대일대응의 개수는 X의 n개의 원소에서 서로 다른 n개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_nP_n = n!$

즉 $n! = 120 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$이므로 $n = 5$

따라서 X에서 X로의 함수의 개수는 X의 5개의 원소에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_5 = 5^5 = 3125$ **답 3125**

참고 일대일함수이면서 공역과 치역이 같은 함수를 일대일대응이라 한다.

40

전략 모든 함수의 개수에서 $f(1)=1$인 함수의 개수를 뺀다.

X에서 Y로의 함수의 개수는 Y의 4개의 원소에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$

X에서 Y로의 함수 중 $f(1)=1$인 함수의 개수는 Y의 4개의 원소에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$

따라서 구하는 함수의 개수는

$64 - 16 = 48$ **답 48**

다른 풀이 $f(1) \neq 1$이므로 $f(1)$의 값이 될 수 있는 수는 2, 3, 4의 3개이다.

또 $f(2)$, $f(3)$의 값이 될 수 있는 수는 각각 1, 2, 3, 4의 4개이므로 구하는 함수의 개수는

$3 \times 4 \times 4 = 48$

41

전략 c와 d를 제외한 나머지 문자를 먼저 일렬로 나열한 후 그 사이사이와 양 끝에 c, d를 나열한다.

c와 d를 제외한 4개의 문자 a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!\times 2!}=6$$

4개의 문자 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중에서 2개의 자리에 c, d를 나열하는 경우의 수는

$${}_5P_2=20$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6\times 20=120$$

답 **120**

다른 풀이 6개의 문자 a, a, b, b, c, d를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!\times 2!}=180$$

c, d를 한 문자 A로 생각하여 5개의 문자 a, a, b, b, A를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!\times 2!}=30$$

이때 c와 d가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2!=2$$

즉 c와 d가 이웃하도록 나열하는 경우의 수는

$$30\times 2=60$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$180-60=120$$

42

전략 A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수와 P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 각각 구한다.

A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!\times 3!}=10$$

P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!\times 3!}=20$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10\times 20=200$$

답 ①

43

전략 학생 B가 받을 수 있는 사탕의 개수에 따라 경우를 나누어 생각한다.

조건 (나)에 의하여 학생 B가 받을 수 있는 사탕의 개수는 0 또는 1 또는 2이다.

(i) 학생 B가 사탕을 받지 못하는 경우

서로 다른 5개의 사탕을 두 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2\Pi_5=2^5=32$$

이때 학생 C가 5개의 사탕을 모두 받는 경우의 수는 1이므로 이 경우의 수는

$$32-1=31$$

(ii) 학생 B가 사탕을 1개 받는 경우

학생 B에게 주는 사탕을 정하는 경우의 수는

$${}_5C_1=5$$

남은 4개의 사탕을 두 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2\Pi_4=2^4=16$$

이때 학생 C가 4개의 사탕을 모두 받는 경우의 수는 1이므로 이 경우의 수는

$$5\times(16-1)=75$$

(iii) 학생 B가 사탕을 2개 받는 경우

학생 B에게 주는 사탕을 정하는 경우의 수는

$${}_5C_2=10$$

남은 3개의 사탕을 두 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2\Pi_3=2^3=8$$

이때 학생 C가 3개의 사탕을 모두 받는 경우의 수는 1이므로 이 경우의 수는

$$10\times(8-1)=70$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$31+75+70=176$$

답 ④

44

전략 먼저 $A\cap B$의 원소를 택하는 경우의 수를 구한다.

전체집합 U의 7개의 원소 중에서 $A\cap B$의 원소 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_7C_2=21$$

나머지 5개의 원소는 집합 $A-B$ 또는 집합 $B-A$에 속하므로 5개의 원소가 속하는 집합을 정하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_5=2^5=32$

따라서 순서쌍 (A, B)의 개수는

$$21\times 32=672$$

답 **672**

45

전략 첫 문자가 a인 문자열의 개수를 먼저 구한다.

(i) $a\square\square\square$ 꼴의 문자열의 개수는

$${}_4\Pi_3=4^3=64$$

(ii) $ba\square\square$ 꼴의 문자열의 개수는

$${}_4\Pi_2=4^2=16$$

(iii) $bba\square$ 꼴의 문자열의 개수는 4

(iv) $bbb\square$ 꼴의 문자열의 개수는 4

이상에서 $aaaa$부터 $bbbd$까지의 문자열의 개수는

$$64+16+4+4=88$$

이고, 이 이후의 문자열은 순서대로

$bbca,\ bbcb,\ bbcc,\ \cdots$

이므로 90번째에 오는 문자열은 $bbcb$이다.

답 $bbcb$

46

전략 일의 자리의 숫자에 따라 경우를 나누어 홀수의 개수를 구한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 1인 경우

0, 0, 0, 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!}=120$$

맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 0, 0, 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{2!}=60$$

따라서 일의 자리의 숫자가 1인 홀수의 개수는

$$120-60=60$$

(ii) 일의 자리의 숫자가 3인 경우

0, 0, 0, 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!\times2!}=60$$

맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 0, 0, 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{2!\times2!}=30$$

따라서 일의 자리의 숫자가 3인 홀수의 개수는

$$60-30=30$$

(i), (ii)에서 구하는 홀수의 개수는

$$60+30=90$$

답 90

47

전략 1 이상 5 이하인 세 자연수의 합이 11이 되는 경우를 생각한다.

집합 Y의 원소인 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허용하여 3개를 택해 그 합이 11이 되는 경우는

1, 5, 5 또는 2, 4, 5 또는 3, 3, 5 또는 3, 4, 4

(i) 1, 5, 5를 X의 원소 1, 2, 3에 하나씩 대응시키는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

(ii) 2, 4, 5를 X의 원소 1, 2, 3에 하나씩 대응시키는 경우의 수는 $3!=6$

(iii) 3, 3, 5를 X의 원소 1, 2, 3에 하나씩 대응시키는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

(iv) 3, 4, 4를 X의 원소 1, 2, 3에 하나씩 대응시키는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

이상에서 구하는 함수 f의 개수는

$$3+6+3+3=15$$

답 15

48

전략 a와 c, b와 e를 각각 같은 문자로 생각한다.

a와 c, b와 e의 순서가 각각 정해져 있으므로 a와 c를 모두 x로, b와 e를 모두 y로 생각하여 7개의 문자

$x,\ x,\ y,\ y,\ d,\ f,\ g$

를 일렬로 나열한 후 첫 번째 x는 a, 두 번째 x는 c, 첫 번째 y는 b, 두 번째 y는 e로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

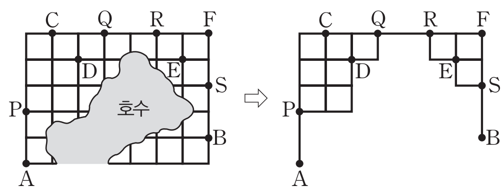
$$\frac{7!}{2!\times2!}=1260$$

답 1260

49

전략 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 갈 때, 반드시 지나야 하는 중간 지점을 파악한다.

다음 그림과 같이 8개의 지점 C, D, E, F, P, Q, R, S를 잡자.



A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는

$A \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow R \longrightarrow S \longrightarrow B$

의 1가지이다.

(i) $A \longrightarrow P$로 가는 경우의 수는 $\quad 1$

(ii) $P \longrightarrow C \longrightarrow Q$로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}\times 1=4$

$P \longrightarrow D \longrightarrow Q$로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times 2!}\times 2=6\times 2=12$

따라서 $P \longrightarrow Q$로 가는 경우의 수는

$4+12=16$

(iii) $Q \longrightarrow R$로 가는 경우의 수는 $\quad 1$

(iv) $R \longrightarrow E \longrightarrow S$로 가는 경우의 수는 $\quad 2\times 2=4$

$R \longrightarrow F \longrightarrow S$로 가는 경우의 수는 $\quad 1\times 1=1$

따라서 $R \longrightarrow S$로 가는 경우의 수는

$4+1=5$

(v) $S \longrightarrow B$로 가는 경우의 수는 $\quad 1$

이상에서 구하는 경우의 수는

$1\times 16\times 1\times 5\times 1=80$

답 **80**

50

전략 모든 다섯 자리의 자연수의 개수에서 0 또는 1을 선택하지 않고 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수를 뺀다.

숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택한 후 일렬로 나열하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는

$\underbrace{2}_{\text{만의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2의 2개}}\times {}_3\Pi_4=2\times 3^4=162$

숫자 0을 제외하고 1, 2 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택한 후 일렬로 나열하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는

${}_2\Pi_5=2^5=32$

숫자 1을 제외하고 0, 2 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택한 후 일렬로 나열하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는

$\underbrace{1}_{\text{만의 자리에 올 수 있는 숫자는 2의 1개}}\times {}_2\Pi_4=1\times 2^4=16$

숫자 0과 1을 모두 제외하고 2를 일렬로 나열하여 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수는 $\quad$ 22222의 1개

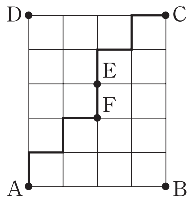
따라서 구하는 자연수의 개수는

$162-(32+16-1)=115$

답 **115**

51

전략 도로망에서 승희, 윤아, 재호가 모두 만나기 위해 재호가 지나야 하는 지점을 찾는다.



승희와 윤아의 속력이 같으므로 승희와 윤아는 오른쪽 그림의 선분 EF의 중점에서 만나게 된다.

따라서 재호는 B 지점에서 선분 EF를 지나 D 지점까지 최단 거리로 가야 한다.

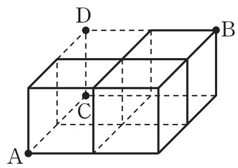
즉 구하는 경우의 수는 재호가 $B \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow D$로 가는 경우의 수이므로

$\frac{4!}{2!\times 2!}\times 1\times \frac{4!}{2!\times 2!}=6\times 1\times 6=36$

답 **36**

52

전략 가로로 한 칸, 세로로 한 칸, 위로 한 칸 이동하는 것을 각각 한 문자로 생각한다.



오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 모서리를 점선으로 연결하고 두 점 C, D를 잡자.

가로로 한 칸 이동하는 것을 a, 세로로 한 칸 이동하는 것을 b, 위로 한 칸 이동하는 것을 c라 하면 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 a, a, b, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{2!\times 2!}=30$

(i) $A \longrightarrow C \longrightarrow B$로 가는 경우의 수는

$1\times \frac{3!}{2!}=3$

(ii) $A \longrightarrow D \longrightarrow B$로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\times 1=3$

(ⅲ) A ⟶ C ⟶ D ⟶ B로 가는 경우의 수는

$1\times1\times1=1$

이상에서 꼭짓점 A에서 꼭짓점 C 또는 꼭짓점 D를 거쳐 꼭짓점 B까지 가는 경우의 수는

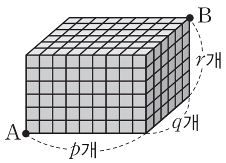
$3+3-1=5$

따라서 구하는 경우의 수는

$30-5=25$ 답 25

개념 노트

입체도형에서 최단 거리로 가는 경우의 수



오른쪽 그림과 같이 크기가 같은 정육면체를 가로, 세로, 높이의 칸의 개수가 각각 p, q, r가 되도록 쌓아 직육면체를 만들었을 때, 정육면체의 모서리를 따라 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수

⇨ $\dfrac{(p+q+r)!}{p!q!r!}$

03 중복조합

● 본책 32~40쪽

53

(1) ${}_{7}H_{4}={}_{7+4-1}C_{4}={}_{10}C_{4}=210$

(2) ${}_{2}H_{5}={}_{2+5-1}C_{5}={}_{6}C_{5}={}_{6}C_{1}=6$

(3) ${}_{4}H_{4}={}_{4+4-1}C_{4}={}_{7}C_{4}={}_{7}C_{3}=35$

(4) ${}_{3}H_{0}={}_{3+0-1}C_{0}={}_{2}C_{0}=1$

답 (1) **210** (2) **6** (3) **35** (4) **1**

54

(1) ${}_{5}H_{2}={}_{6}C_{2}$이므로 $n=6$

(2) ${}_{2}H_{3}={}_{4}C_{3}={}_{4}C_{1}$이므로 $n=4$

답 (1) **6** (2) **4**

55

${}_{4}H_{5}={}_{8}C_{5}={}_{8}C_{3}=56$ 답 **56**

56

서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3}H_{5}={}_{7}C_{5}={}_{7}C_{2}=21$ 답 **21**

57

구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3}H_{7}={}_{9}C_{7}={}_{9}C_{2}=36$ 답 **36**

58

구하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{2}H_{6}={}_{7}C_{6}={}_{7}C_{1}=7$ 답 **7**

59

빵을 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3}H_{2}={}_{4}C_{2}=6$

떡을 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3}H_{4}={}_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=15$

쿠키를 나누어 주는 경우의 수는 ${}_{3}C_{1}=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times15\times3=270$ 답 **270**

60

먼저 4명의 학생에게 영화표를 한 장씩 나누어 주고 나머지 4장의 영화표를 4명의 학생에게 나누어 주면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{4}H_{4}={}_{7}C_{4}={}_{7}C_{3}=35$ 답 **35**

61

먼저 오렌지 주스 2병, 사과 주스 4병을 구입한 후 오렌지 주스, 사과 주스, 포도 주스, 딸기 주스 중에서 5병의 주스를 구입하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_5={}_8C_5={}_8C_3=56$ 답 **56**

62

먼저 4명의 학생에게 초콜릿을 1개씩 나누어 주고 남은 초콜릿 1개를 한 명에게 주면 되므로 초콜릿을 나누어 주는 경우의 수는

$_4C_1=4$

이때 1개의 초콜릿을 받은 3명의 학생에게 먼저 사탕을 1개씩 나누어 준 후 남은 4개의 사탕을 이 3명의 학생에게 나누어 주면 된다.

따라서 사탕을 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times15=60$ 답 **60**

63

(1) 구하는 항의 개수는 2개의 문자 a, b에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_2H_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

(2) 구하는 항의 개수는 4개의 문자 a, b, c, d에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_6={}_9C_6={}_9C_3=84$

답 (1) **5** (2) **84**

64

$(a+b)^5$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 2개의 문자 a, b에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_2H_5={}_6C_5={}_6C_1=6$

$(x+y+z)^4$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

따라서 구하는 항의 개수는

$6\times15=90$ 답 **90**

65

(1) 음이 아닌 정수인 해의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$

(2) $x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$, $w=w'+1$이라 하면 $x+y+z+w=8$에서

$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)+(w'+1)$
$=8$

$\therefore x'+y'+z'+w'=4$

(단, x', y', z', w'은 음이 아닌 정수)

따라서 구하는 해의 개수는 방정식 $x'+y'+z'+w'=4$의 음이 아닌 정수인 해의 개수와 같으므로

$_4H_4={}_7C_4={}_7C_3=35$

답 (1) **165** (2) **35**

66

방정식 $x+y+z=n$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 n개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$_3H_n={}_{n+2}C_n={}_{n+2}C_2=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

따라서 $\frac{(n+2)(n+1)}{2}=105$이므로

$n^2+3n-208=0,\quad (n+16)(n-13)=0$

$\therefore n=13$ ($\because$ n은 자연수) 답 **13**

67

x, y, z가 음이 아닌 정수이므로

$x+y+z=0$ 또는 $x+y+z=1$
또는 $x+y+z=2$

(i) 방정식 $x+y+z=0$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 0개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_0={}_2C_0=1$

(ii) 방정식 $x+y+z=1$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 1개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_1={}_3C_1=3$

(ⅲ) 방정식 $x+y+z=2$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$$

이상에서 구하는 해의 개수는

$$1+3+6=10$$

답 **10**

68

조건 ㈎에서 $a\times b\times c$의 값이 홀수이므로 a, b, c는 모두 홀수이어야 한다.
이때 조건 ㈏에서 $a\le b\le c\le 12$이므로 1, 3, 5, 7, 9, 11의 6개의 홀수 중에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 작거나 같은 수부터 순서대로 a, b, c의 값으로 정하면 된다.
따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$${}_6\mathrm{H}_3={}_8\mathrm{C}_3=56$$

답 **56**

69

$1<a<b\le 5$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 두 자연수를 택하여 작은 수부터 순서대로 a, b의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4\mathrm{C}_2=6$$

또 $5<c\le d\le 10$을 만족시키는 순서쌍 (c, d)의 개수는 6, 7, 8, 9, 10 중에서 중복을 허용하여 두 자연수를 택해 작거나 같은 수부터 순서대로 c, d의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5\mathrm{H}_2={}_6\mathrm{C}_2=15$$

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$$6\times 15=90$$

답 **90**

70

주어진 조건을 만족시키려면 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 중복을 허용하여 3개를 택해 크거나 같은 수부터 순서대로 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.
따라서 구하는 함수 f의 개수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_6\mathrm{H}_3={}_8\mathrm{C}_3=56$$

답 **56**

71

$f(1)\le f(3)\le f(5)$를 만족시키려면 X의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택해 작거나 같은 수부터 순서대로 X의 원소 1, 3, 5에 대응시키면 된다.
따라서 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5\mathrm{H}_3={}_7\mathrm{C}_3=35$$

이때 $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_5\Pi_2=5^2=25$$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$$35\times 25=875$$

답 **875**

연습 문제 ● 본책 41~42쪽

72

전략 ${}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$임을 이용한다.

$${}_4\mathrm{H}_0+{}_4\mathrm{H}_1+{}_4\mathrm{H}_2+{}_4\mathrm{H}_3+{}_4\mathrm{H}_4$$
$$={}_3\mathrm{C}_0+{}_4\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_3+{}_7\mathrm{C}_4$$
$$=1+4+10+20+35=70$$

답 **70**

73

전략 1을 택하지 않는 경우와 1개 택하는 경우로 나누어 생각한다.

(ⅰ) 1을 택하지 않는 경우
1을 제외한 4개의 숫자 2, 3, 4, 5에서 6개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_4\mathrm{H}_6={}_9\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_3=84$$

(ⅱ) 1을 1개 택하는 경우
1을 제외한 4개의 숫자 2, 3, 4, 5에서 5개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_4\mathrm{H}_5={}_8\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_3=56$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$$84+56=140$$

답 **140**

74

전략 $x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$, $w=w'+1$로 놓고 주어진 부등식을 x', y', z', w'에 대한 식으로 나타낸다.

$x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$, $w=w'+1$이라 하면 $x+y+z+w<7$에서

$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)+(w'+1)<7$

$\therefore x'+y'+z'+w'<3$

이때 x', y', z', w'은 음이 아닌 정수이므로

$x'+y'+z'+w'=0$

또는 $x'+y'+z'+w'=1$

또는 $x'+y'+z'+w'=2$

(i) 방정식 $x'+y'+z'+w'=0$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는

$_4H_0={}_3C_0=1$

(ii) 방정식 $x'+y'+z'+w'=1$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는

$_4H_1={}_4C_1=4$

(iii) 방정식 $x'+y'+z'+w'=2$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는

$_4H_2={}_5C_2=10$

이상에서 구하는 해의 개수는

$1+4+10=15$ **답 15**

75

전략 $f(1)=5$이고, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값이 될 수 있는 Y의 원소가 5, 7, 9임을 이용한다.

주어진 조건을 만족시키려면

$f(1)=5$, $f(4)\geq f(3)\geq f(2)\geq 5$

따라서 구하는 함수 f의 개수는 5, 7, 9에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$ **답 10**

76

전략 먼저 한 명의 학생에게 3가지 색의 카드를 1장씩 준다.

3가지 색의 카드를 각각 1장 이상 받는 학생을 택하는 경우의 수는 $_3C_1=3$

먼저 이 학생에게 3가지 색의 카드를 1장씩 주고 남은 빨간색 카드 3장과 파란색 카드 1장을 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$_3H_3\times{}_3H_1={}_5C_3\times{}_3C_1=10\times3=30$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times30=90$ **답 ③**

77

전략 포함하지 않는 문자는 제외하고 포함하는 문자는 먼저 뽑는다.

$(p+q+r+s)^6$의 전개식에서 p는 포함하지 않고 r는 포함하는 항은 3개의 문자 q, r, s 중에서 중복을 허용하여 5개를 택해 r와 모두 곱한 것이다.

따라서 구하는 항의 개수는

$_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$ **답 21**

78

전략 w의 값에 따라 경우를 나누어 생각한다.

(i) $w=0$일 때

$x+y+z=6$이므로 이 방정식의 음이 아닌 정수인 해의 개수는

$_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

(ii) $w=1$일 때

$x+y+z=4$이므로 이 방정식의 음이 아닌 정수인 해의 개수는

$_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

(iii) $w=2$일 때

$x+y+z=2$이므로 이 방정식의 음이 아닌 정수인 해의 개수는

$_3H_2={}_4C_2=6$

(iv) $w=3$일 때

$x+y+z=0$이므로 이 방정식의 음이 아닌 정수인 해의 개수는

$_3H_0={}_2C_0=1$

(v) $w\geq4$일 때

$x+y+z<0$이므로 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z는 존재하지 않는다.

이상에서 구하는 해의 개수는

$28+15+6+1=50$ **답 50**

참고 $x+y+z+2w=6$에서

$w=\frac{1}{2}(6-x-y-z)\leq3$

79

전략 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수는 $3k+1$, 나머지가 2인 수는 $3k+2$의 꼴로 나타낸다.

x, y, z, w 중에서 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수 2개와 나머지가 2인 수 2개를 정하는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 = 6 \quad \cdots\cdots ㉠$$

x, y를 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수라 하면 z, w는 3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 수이므로

$$x=3x'+1,\ y=3y'+1,\ z=3z'+2,$$
$$w=3w'+2$$

라 하면 조건 ㈎에서

$$(3x'+1)+(3y'+1)+(3z'+2)+(3w'+2)$$
$$=12$$
$$\therefore\ x'+y'+z'+w'=2$$

(단, x', y', z', w'은 음이 아닌 정수)

따라서 조건 ㈎를 만족시키는 x, y, z, w의 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수는 방정식 $x'+y'+z'+w'=2$의 음이 아닌 정수인 해의 개수와 같으므로

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 구하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수는

$$6 \times 10 = 60$$

답 **60**

80

전략 중복조합을 이용하여 각 조건을 만족시키는 함숫값을 정하는 경우의 수를 구한다.

조건 ㈎에 의하여

$$2 \le f(1) \le f(2) \le f(3)$$

따라서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5, 6에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$$

조건 ㈏에 의하여

$$f(4) \le f(5) \le f(6) \le 4$$

따라서 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

즉 구하는 함수 f의 개수는

$$35 \times 20 = 700$$

답 **700**

81

전략 흰 공을 세 상자에 나누어 넣는 방법에 따라 경우를 나누어 생각한다.

흰 공 3개를 1개의 상자에 모두 넣거나 2개의 상자에 2개, 1개로 나누어 넣거나 3개의 상자에 1개씩 넣을 수 있다.

(i) 흰 공 3개를 1개의 상자에 모두 넣는 경우

흰 공을 넣을 상자를 정하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

흰 공이 들어 있지 않은 2개의 상자에 검은 공을 2개씩 넣고 남은 2개의 검은 공을 3개의 상자에 나누어 넣는 경우의 수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

따라서 이 경우의 수는

$$3 \times 6 = 18$$

(ii) 흰 공을 2개의 상자에 2개, 1개로 나누어 넣는 경우

흰 공을 각각 2개, 1개 넣을 2개의 상자를 정하는 경우의 수는

$${}_3P_2 = 6$$

흰 공이 1개 들어 있는 상자에 검은 공 1개를 넣고 흰 공이 들어 있지 않은 상자에 검은 공 2개를 넣은 후 남은 3개의 검은 공을 3개의 상자에 나누어 넣는 경우의 수는

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

따라서 이 경우의 수는

$$6 \times 10 = 60$$

(iii) 흰 공을 3개의 상자에 1개씩 넣는 경우

3개의 상자에 검은 공을 1개씩 넣고 남은 3개의 검은 공을 3개의 상자에 나누어 넣으면 된다.

따라서 이 경우의 수는

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$18 + 60 + 10 = 88$$

답 **88**

82

전략 조건 ㈎를 만족시키는 순서쌍에서 조건 ㈏를 만족시키지 않는 순서쌍을 제외한다.

$a+b+c+d=12$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

$${}_4H_{12} = {}_{15}C_{12} = {}_{15}C_3 = 455$$

(i) $a=2$일 때

$a+b+c+d=12$에서 $\quad b+c+d=10$

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d의 순서쌍 (b, c, d)의 개수는

$${}_3H_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$$

(ii) $a+b+c=10$일 때

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$${}_3H_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$$

(iii) $a=2$, $a+b+c=10$일 때

$b+c=8$이므로 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c의 순서쌍 (b, c)의 개수는

$${}_2H_8={}_9C_8={}_9C_1=9$$

이상에서 조건 (가)를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d) 중에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 것의 개수는

$$66+66-9=123$$

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$$455-123=332$$

답 **332**

참고 (ii), (iii)에서 $a+b+c=10$이면 $d=2$

01 이항정리

● 본책 44~48쪽

83

답 **${}_6C_1$, ${}_6C_4$, 5, ${}_6C_6$, 6, 15, 5**

84

(1) $(2a+1)^4$

$$={}_4C_0(2a)^4+{}_4C_1(2a)^3\times1+{}_4C_2(2a)^2\times1^2+{}_4C_3(2a)\times1^3+{}_4C_4\times1^4$$

$$=\mathbf{16a^4+32a^3+24a^2+8a+1}$$

(2) $(3x-2y)^5$

$$={}_5C_0(3x)^5+{}_5C_1(3x)^4(-2y)+{}_5C_2(3x)^3(-2y)^2+{}_5C_3(3x)^2(-2y)^3+{}_5C_4(3x)(-2y)^4+{}_5C_5(-2y)^5$$

$$=\mathbf{243x^5-810x^4y+1080x^3y^2-720x^2y^3+240xy^4-32y^5}$$

(3) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$

$$={}_6C_0x^6+{}_6C_1x^5\times\frac{1}{x}+{}_6C_2x^4\times\frac{1}{x^2}+{}_6C_3x^3\times\frac{1}{x^3}+{}_6C_4x^2\times\frac{1}{x^4}+{}_6C_5x\times\frac{1}{x^5}+{}_6C_6\frac{1}{x^6}$$

$$=\mathbf{x^6+6x^4+15x^2+20+\frac{15}{x^2}+\frac{6}{x^4}+\frac{1}{x^6}}$$

답 **풀이 참조**

85

(1) $(2a-3b)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r(2a)^{5-r}(-3b)^r={}_5C_r\times2^{5-r}(-3)^ra^{5-r}b^r$$

(2) $(x^2+x)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r(x^2)^{4-r}x^r={}_4C_rx^{8-2r}x^r={}_4C_rx^{8-r}$$

(3) $\left(x-\dfrac{2}{y}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_rx^{6-r}\left(-\frac{2}{y}\right)^r={}_6C_r(-2)^r\frac{x^{6-r}}{y^r}$$

(4) $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^8$의 전개식의 일반항은

$${}_8C_r(x^2)^{8-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_8C_r\frac{x^{16-2r}}{x^r}$$

답 (1) ${}_5C_r\times2^{5-r}(-3)^ra^{5-r}b^r$
(2) ${}_4C_rx^{8-r}$
(3) ${}_6C_r(-2)^r\frac{x^{6-r}}{y^r}$
(4) ${}_8C_r\frac{x^{16-2r}}{x^r}$

86

(1) $(2x-y)^7$의 전개식의 일반항은

$${}_7C_r(2x)^{7-r}(-y)^r={}_7C_r\times2^{7-r}(-1)^rx^{7-r}y^r$$

x^4y^3항은 $r=3$일 때이므로 x^4y^3의 계수는

$${}_7C_3\times2^4\times(-1)^3=-560$$

(2) $\left(x-\frac{1}{y}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_rx^{6-r}\left(-\frac{1}{y}\right)^r={}_6C_r(-1)^r\frac{x^{6-r}}{y^r}$$

$\frac{x^3}{y^3}$항은 $r=3$일 때이므로 $\frac{x^3}{y^3}$의 계수는

$${}_6C_3(-1)^3=-20$$

(3) $\left(2x^3+\frac{1}{x}\right)^8$의 전개식의 일반항은

$${}_8C_r(2x^3)^{8-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_8C_r\times2^{8-r}\frac{x^{24-3r}}{x^r}$$

상수항은 $24-3r=r$일 때이므로

$$r=6$$

따라서 상수항은

$${}_8C_6\times2^2=112$$

(4) $\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^{10}$의 전개식의 일반항은

$${}_{10}C_r(x^3)^{10-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_{10}C_r(-1)^r\frac{x^{30-3r}}{x^r}$$

$\frac{1}{x^2}$항은 $r-(30-3r)=2$일 때이므로

$$4r=32 \qquad \therefore r=8$$

따라서 $\frac{1}{x^2}$의 계수는

$${}_{10}C_8(-1)^8=45$$

답 (1) **−560** (2) **−20** (3) **112** (4) **45**

개념 노트

자연수 m, n, r에 대하여

① $\frac{x^n}{x^m}=x^r$이면 $\quad n-m=r$

② $\frac{x^n}{x^m}=1$이면 $\quad m=n$

③ $\frac{x^n}{x^m}=\frac{1}{x^r}$이면 $\quad m-n=r$

87

$\left(x-\frac{a}{x^2}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_rx^{6-r}\left(-\frac{a}{x^2}\right)^r={}_6C_r(-a)^r\frac{x^{6-r}}{x^{2r}}$$

상수항은 $6-r=2r$일 때이므로

$$r=2$$

따라서 상수항은

$${}_6C_2(-a)^2=15a^2$$

즉 $15a^2=60$이므로 $\quad a^2=4$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

답 **2**

88

$\left(x-\frac{2}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_rx^{5-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r={}_5C_r(-2)^r\frac{x^{5-r}}{x^r} \quad \cdots ㉠$$

이때 $(2x+3)\left(x-\frac{2}{x}\right)^5=2x\left(x-\frac{2}{x}\right)^5+3\left(x-\frac{2}{x}\right)^5$

이므로 x항은

$2x\times$(㉠의 상수항), $3\times$(㉠의 x항)

일 때 나타난다.

(i) ㉠에서 상수항은 $5-r=r$일 때이므로

$$r=\frac{5}{2}$$

그런데 r는 $0\le r\le5$인 정수이므로 ㉠의 상수항은 존재하지 않는다.

(ii) ㉠에서 x항은 $5-r-r=1$, 즉 $r=2$일 때이므로

$${}_5C_2(-2)^2x=40x$$

(i), (ii)에서 구하는 x의 계수는

$$3\times40=120$$

답 **120**

89

$x(x+a)(x+2)^4$의 전개식에서 x^4의 계수는

$(x+a)(x+2)^4$의 전개식에서 x^3의 계수와 같다.

$(x+2)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r x^{4-r}2^r = {}_4C_r \times 2^r x^{4-r} \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때 $(x+a)(x+2)^4 = x(x+2)^4 + a(x+2)^4$이므로 x^3항은

$$x \times (\text{㉠의 } x^2\text{항}),\ a \times (\text{㉠의 } x^3\text{항})$$

일 때 나타난다.

(i) ㉠에서 x^2항은 $4-r=2$, 즉 $r=2$일 때이므로

$${}_4C_2 \times 2^2 x^2 = 24x^2$$

(ii) ㉠에서 x^3항은 $4-r=3$, 즉 $r=1$일 때이므로

$${}_4C_1 \times 2x^3 = 8x^3$$

(i), (ii)에서 x^3항은

$$x \times 24x^2 + a \times 8x^3 = (24+8a)x^3$$

따라서 $24+8a=32$이므로 $\quad a=1$

답 1

90

$(x+3)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r x^{4-r}3^r = {}_4C_r \times 3^r x^{4-r} \ (\text{단, } 0 \le r \le 4)$$

$(3x^2+1)^3$의 전개식의 일반항은

$${}_3C_p(3x^2)^{3-p}1^p = {}_3C_p \times 3^{3-p}x^{6-2p} \ (\text{단, } 0 \le p \le 3)$$

따라서 $(x+3)^4(3x^2+1)^3$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r \times {}_3C_p \times 3^{r-p+3}x^{10-r-2p}$$

이때 x^4항은 $10-r-2p=4$, 즉 $r+2p=6$일 때이므로

$$r=0,\ p=3 \text{ 또는 } r=2,\ p=2 \text{ 또는 } r=4,\ p=1$$

(i) $r=0$, $p=3$일 때

$${}_4C_0 \times {}_3C_3 \times 3^0 = 1$$

(ii) $r=2$, $p=2$일 때

$${}_4C_2 \times {}_3C_2 \times 3^3 = 486$$

(iii) $r=4$, $p=1$일 때

$${}_4C_4 \times {}_3C_1 \times 3^6 = 2187$$

이상에서 x^4의 계수는

$$1+486+2187=2674$$

답 2674

91

$(1+x)^m$의 전개식의 일반항은

$${}_mC_r \times 1^{m-r}x^r = {}_mC_r x^r \ (\text{단, } 0 \le r \le m)$$

$(1+x^2)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_p \times 1^{5-p}(x^2)^p = {}_5C_p x^{2p} \ (\text{단, } 0 \le p \le 5)$$

따라서 $(1+x)^m(1+x^2)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_mC_r \times {}_5C_p x^{r+2p}$$

이때 x^2항은 $r+2p=2$일 때이므로

$$r=0,\ p=1 \text{ 또는 } r=2,\ p=0$$

(i) $r=0$, $p=1$일 때

$${}_mC_0 \times {}_5C_1 = 5$$

(ii) $r=2$, $p=0$일 때

$${}_mC_2 \times {}_5C_0 = \frac{m(m-1)}{2}$$

(i), (ii)에서 x^2의 계수는 $\quad 5+\dfrac{m(m-1)}{2}$

즉 $5+\dfrac{m(m-1)}{2}=11$이므로

$$m^2-m-12=0, \qquad (m+3)(m-4)=0$$

$$\therefore m=4 \ (\because m\text{은 자연수})$$

답 4

참고 $m=1$이면 $r+2p=2$에서

$$r=0,\ p=1 \ (\because r \le 1)$$

따라서 x^2의 계수가 5이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$\therefore m \ge 2$$

02 이항정리의 활용

• 본책 49~55쪽

92

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \boxed{4} & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & \boxed{10} & & 10 & & \boxed{5} & & 1 & \\
1 & & 6 & & \boxed{15} & & 20 & & \boxed{15} & & 6 & & 1
\end{array}$$

(1) 위의 그림의 파스칼의 삼각형에서 $(x+y)^5$의 전개식의 이항계수는 1, 5, 10, 10, 5, 1이므로

$$(2x+1)^5$$
$$=(2x)^5+5\times(2x)^4+10\times(2x)^3$$
$$+10\times(2x)^2+5\times 2x+1$$
$$=\mathbf{32x^5+80x^4+80x^3+40x^2+10x+1}$$

(2) 앞의 그림의 파스칼의 삼각형에서 $(a+b)^4$의 전개식의 이항계수는 1, 4, 6, 4, 1이므로

$$(a-2b)^4$$
$$=a^4+4a^3(-2b)+6a^2(-2b)^2$$
$$+4a(-2b)^3+(-2b)^4$$
$$=\boldsymbol{a^4-8a^3b+24a^2b^2-32ab^3+16b^4}$$

답 **풀이 참조**

93

(5) ${}_5C_5={}_6C_6$이므로

$${}_5C_5+{}_6C_5={}_6C_6+{}_6C_5={}_7C_6$$
$$\therefore n=7$$

답 (1) **0 또는 4** (2) **11** (3) **6** (4) **5** (5) **7**

94

(1) ${}_3C_0+{}_3C_1+{}_3C_2+{}_3C_3=2^3=8$

(2) ${}_{12}C_0-{}_{12}C_1+{}_{12}C_2-{}_{12}C_3+\cdots+{}_{12}C_{12}=0$

(3) ${}_{51}C_0+{}_{51}C_2+{}_{51}C_4+\cdots+{}_{51}C_{50}=2^{51-1}=2^{50}$

(4) ${}_{100}C_1+{}_{100}C_3+{}_{100}C_5+\cdots+{}_{100}C_{99}=2^{100-1}=2^{99}$

답 (1) **8** (2) **0** (3) $\boldsymbol{2^{50}}$ (4) $\boldsymbol{2^{99}}$

95

(1) ${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{11}C_9$

$$=({}_3C_0+{}_3C_1)+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{11}C_9$$
$$=({}_4C_1+{}_4C_2)+{}_5C_3+\cdots+{}_{11}C_9$$
$$=({}_5C_2+{}_5C_3)+\cdots+{}_{11}C_9$$
$$\vdots$$
$$={}_{11}C_8+{}_{11}C_9$$
$$={}_{12}C_9={}_{12}C_3$$
$$=220$$

(2) ${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_3$

$$=({}_4C_4+{}_4C_3)+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_3$$
$$=({}_5C_4+{}_5C_3)+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_3$$
$$=({}_6C_4+{}_6C_3)+\cdots+{}_{10}C_3$$
$$\vdots$$
$$={}_{10}C_4+{}_{10}C_3$$
$$={}_{11}C_4=330$$

답 (1) **220** (2) **330**

96

$${}_{15}C_6+{}_{16}C_7+{}_{17}C_8+{}_{18}C_9+{}_{19}C_{10}+{}_{20}C_{11}$$
$$=({}_{15}C_5+{}_{15}C_6)+{}_{16}C_7+{}_{17}C_8+{}_{18}C_9+{}_{19}C_{10}+{}_{20}C_{11}$$
$$-{}_{15}C_5$$
$$=({}_{16}C_6+{}_{16}C_7)+{}_{17}C_8+{}_{18}C_9+{}_{19}C_{10}+{}_{20}C_{11}-{}_{15}C_5$$
$$=({}_{17}C_7+{}_{17}C_8)+{}_{18}C_9+{}_{19}C_{10}+{}_{20}C_{11}-{}_{15}C_5$$
$$=({}_{18}C_8+{}_{18}C_9)+{}_{19}C_{10}+{}_{20}C_{11}-{}_{15}C_5$$
$$=({}_{19}C_9+{}_{19}C_{10})+{}_{20}C_{11}-{}_{15}C_5$$
$$=({}_{20}C_{10}+{}_{20}C_{11})-{}_{15}C_5$$
$$={}_{21}C_{11}-{}_{15}C_5$$

답 ③

97

$(1+x^3)^n$의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r(x^3)^r={}_nC_r\,x^{3r}$$

x^6항은 $3r=6$일 때이므로 $r=2$

따라서 x^6항은 $2\le n\le 15$인 경우에만 나오고

$(1+x^3)^2$의 전개식에서 x^6의 계수는 ${}_2C_2$

$(1+x^3)^3$의 전개식에서 x^6의 계수는 ${}_3C_2$

$\vdots$

$(1+x^3)^{15}$의 전개식에서 x^6의 계수는 ${}_{15}C_2$

즉 구하는 x^6의 계수는

$${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{15}C_2$$
$$=({}_3C_3+{}_3C_2)+{}_4C_2+\cdots+{}_{15}C_2$$
$$=({}_4C_3+{}_4C_2)+\cdots+{}_{15}C_2$$
$$\vdots$$
$$={}_{15}C_3+{}_{15}C_2$$
$$={}_{16}C_3=560$$

답 **560**

98

$x^2(1+x^2)^n$의 전개식의 일반항은

$$x^2\times{}_nC_r(x^2)^r={}_nC_r\,x^{2r+2}$$

x^{10}항은 $2r+2=10$일 때이므로 $r=4$

따라서 x^{10}항은 $4\le n\le 10$인 경우에만 나오고

$x^2(1+x^2)^4$의 전개식에서 x^{10}의 계수는 ${}_4C_4$

$x^2(1+x^2)^5$의 전개식에서 x^{10}의 계수는 ${}_5C_4$

$\vdots$

$x^2(1+x^2)^{10}$의 전개식에서 x^{10}의 계수는 ${}_{10}C_4$

즉 구하는 x^{10}의 계수는

$${}_4C_4+{}_5C_4+{}_6C_4+\cdots+{}_{10}C_4$$
$$=({}_5C_5+{}_5C_4)+{}_6C_4+\cdots+{}_{10}C_4$$
$$=({}_6C_5+{}_6C_4)+\cdots+{}_{10}C_4$$
$$\vdots$$
$$={}_{10}C_5+{}_{10}C_4={}_{11}C_5=462$$

답 **462**

99

${}_{19}C_0+{}_{19}C_2+{}_{19}C_4+\cdots+{}_{19}C_{18}=2^{19-1}=2^{18}$이므로

$${}_{19}C_2+{}_{19}C_4+{}_{19}C_6+\cdots+{}_{19}C_{18}$$
$$=2^{18}-{}_{19}C_0=2^{18}-1$$

답 $\mathbf{2^{18}-1}$

100

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

$${}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n-{}_nC_0=2^n-1$$

따라서 $2000<2^n-1<3000$이므로

$$2001<2^n<3001$$

이때 $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$이므로

$$n=11$$

답 **11**

101

${}_{15}C_r={}_{15}C_{15-r}$ $(r=0, 1, 2, \cdots, 15)$이므로

$${}_{15}C_8+{}_{15}C_9+{}_{15}C_{10}+\cdots+{}_{15}C_{15}$$
$$={}_{15}C_7+{}_{15}C_6+{}_{15}C_5+\cdots+{}_{15}C_0$$

이때 ${}_{15}C_0+{}_{15}C_1+{}_{15}C_2+\cdots+{}_{15}C_{15}=2^{15}$이므로

$${}_{15}C_8+{}_{15}C_9+{}_{15}C_{10}+\cdots+{}_{15}C_{15}=\frac{1}{2}\times2^{15}=2^{14}$$

$$\therefore k=14$$

답 **14**

102

$(1+x)^{15}={}_{15}C_0+{}_{15}C_1x+{}_{15}C_2x^2+\cdots+{}_{15}C_{15}x^{15}$

이 식에 $x=3$을 대입하면

$$(1+3)^{15}$$
$$={}_{15}C_0+{}_{15}C_1\times3+{}_{15}C_2\times3^2+\cdots+{}_{15}C_{15}\times3^{15}$$
$$\therefore {}_{15}C_0+3\times{}_{15}C_1+3^2\times{}_{15}C_2+\cdots+3^{15}\times{}_{15}C_{15}$$
$$=4^{15}=(2^2)^{15}=2^{30}$$
$$\therefore k=30$$

답 **30**

103

$(1+x)^{12}={}_{12}C_0+{}_{12}C_1x+{}_{12}C_2x^2+\cdots+{}_{12}C_{12}x^{12}$

이 식에 $x=30$을 대입하면

$$31^{12}={}_{12}C_0+{}_{12}C_1\times30+{}_{12}C_2\times30^2+\cdots$$
$$+{}_{12}C_{12}\times30^{12}$$

이때 ${}_{12}C_2\times30^2+{}_{12}C_3\times30^3+\cdots+{}_{12}C_{12}\times30^{12}$은 900으로 나누어떨어진다.

따라서 31^{12}을 900으로 나누었을 때의 나머지는 ${}_{12}C_0+{}_{12}C_1\times30$, 즉 361을 900으로 나누었을 때의 나머지와 같으므로 361이다.

답 **361**

연습 문제

본책 56~58쪽

104

전략 전개식의 일반항을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

$(1-2x)^7$의 전개식의 일반항은

$${}_7C_r\times1^{7-r}(-2x)^r={}_7C_r(-2)^rx^r$$

x^4항은 $r=4$일 때이므로

$$a={}_7C_4(-2)^4=560$$

x^5항은 $r=5$일 때이므로

$$b={}_7C_5(-2)^5=-672$$
$$\therefore a+b=-112$$

답 **−112**

105

전략 $\frac{1}{x^2}$의 계수와 x의 계수를 a에 대한 식으로 나타낸다.

$\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r(x^2)^{5-r}\left(\frac{a}{x}\right)^r={}_5C_ra^r\times\frac{x^{10-2r}}{x^r}$$

$\frac{1}{x^2}$항은 $r-(10-2r)=2$일 때이므로

$$3r-10=2 \qquad \therefore r=4$$

따라서 $\frac{1}{x^2}$의 계수는 $\quad {}_5C_4a^4=5a^4$

또 x항은 $10-2r-r=1$일 때이므로

$$-3r=-9 \qquad \therefore r=3$$

따라서 x의 계수는 $\quad {}_5C_3a^3=10a^3$

즉 $5a^4=10a^3$이므로

$$a=2\ (\because a>0)$$

답 ②

106

전략 각 거듭제곱의 전개식의 일반항을 곱한다.

$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r(x^2)^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_6C_r\frac{x^{12-2r}}{x^r}\ (\text{단, }0\le r\le 6)$$

$(x+1)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_p x^{4-p}1^p={}_4C_p x^{4-p}\ (\text{단, }0\le p\le 4)$$

따라서 $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^6(x+1)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r\times{}_4C_p\frac{x^{12-2r}}{x^r}\times x^{4-p}={}_6C_r\times{}_4C_p\frac{x^{16-2r-p}}{x^r}$$

이때 x^3항은 $16-2r-p-r=3$, 즉 $3r+p=13$일 때이므로 $r=3,\ p=4$ 또는 $r=4,\ p=1$

(i) $r=3,\ p=4$일 때

$${}_6C_3\times{}_4C_4=20$$

(ii) $r=4,\ p=1$일 때

$${}_6C_4\times{}_4C_1=60$$

(i), (ii)에서 x^3의 계수는 $20+60=80$

답 **80**

107

전략 ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$임을 이용한다.

$${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_{11}C_3$$
$$=({}_4C_4+{}_4C_3)+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_{11}C_3$$
$$=({}_5C_4+{}_5C_3)+{}_6C_3+\cdots+{}_{11}C_3$$
$$=({}_6C_4+{}_6C_3)+\cdots+{}_{11}C_3$$
$$\vdots$$
$$={}_{11}C_4+{}_{11}C_3={}_{12}C_4={}_{12}C_8$$

답 ③

108

전략 $(1+2x)^n$의 전개식의 일반항을 이용하여 x^3의 계수를 조합의 수로 나타낸다.

$(1+2x)^n$의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r(2x)^r={}_nC_r\times 2^r x^r$$

x^3항은 $3\le n\le 8$인 경우에만 나오고

$(1+2x)^3$의 전개식에서 x^3의 계수는 ${}_3C_3\times 2^3$

$(1+2x)^4$의 전개식에서 x^3의 계수는 ${}_4C_3\times 2^3$

$\vdots$

$(1+2x)^8$의 전개식에서 x^3의 계수는 ${}_8C_3\times 2^3$

따라서 구하는 x^3의 계수는

$${}_3C_3\times 2^3+{}_4C_3\times 2^3+{}_5C_3\times 2^3+\cdots+{}_8C_3\times 2^3$$
$$=2^3({}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_8C_3)$$
$$=2^3\{({}_4C_4+{}_4C_3)+{}_5C_3+\cdots+{}_8C_3\}$$
$$=2^3\{({}_5C_4+{}_5C_3)+\cdots+{}_8C_3\}$$
$$\vdots$$
$$=2^3({}_8C_4+{}_8C_3)$$
$$=8\times{}_9C_4=1008$$

답 **1008**

109

전략 ${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots=2^{n-1}$임을 이용한다.

${}_{20}C_0+{}_{20}C_2+{}_{20}C_4+\cdots+{}_{20}C_{20}=2^{20-1}=2^{19}$이므로

$${}_{20}C_2+{}_{20}C_4+{}_{20}C_6+\cdots+{}_{20}C_{18}$$
$$=2^{19}-{}_{20}C_0-{}_{20}C_{20}$$
$$=2^{19}-2$$

답 $\mathbf{2^{19}-2}$

110

전략 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$임을 이용하여 주어진 식의 좌변을 간단히 한다.

${}_{19}C_r={}_{19}C_{19-r}\ (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 19)$이므로

$${}_{19}C_{10}+{}_{19}C_{11}+{}_{19}C_{12}+\cdots+{}_{19}C_{19}$$
$$={}_{19}C_9+{}_{19}C_8+{}_{19}C_7+\cdots+{}_{19}C_0$$

이때 ${}_{19}C_0+{}_{19}C_1+{}_{19}C_2+\cdots+{}_{19}C_{19}=2^{19}$이므로

$${}_{19}C_{10}+{}_{19}C_{11}+{}_{19}C_{12}+\cdots+{}_{19}C_{19}$$
$$=\frac{1}{2}\times 2^{19}=2^{18}=(2^2)^9=4^9$$
$$\therefore\ k=9$$

답 **9**

111

전략 전개식의 일반항을 이용하여 0이 아닌 상수항이 존재하기 위한 조건을 구한다.

$\left(x^n+\frac{1}{x^2}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r(x^n)^{6-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r={}_6C_r\frac{x^{6n-nr}}{x^{2r}}$$

이때 0이 아닌 상수항이 존재하려면

$$6n-nr=2r$$

를 만족시키는 6 이하의 음이 아닌 정수 r가 존재해야 한다.

$6n-nr=2r$에서

$r=0$이면 $6n=0$이므로 $\quad n=0$

$r=1$이면 $5n=2$이므로 $\quad n=\frac{2}{5}$

$r=2$이면 $4n=4$이므로 $\quad n=1$

$r=3$이면 $3n=6$이므로 $\quad n=2$

$r=4$이면 $2n=8$이므로 $\quad n=4$

$r=5$이면 $\quad n=10$

$r=6$이면 $0=12$이므로 등식이 성립하지 않는다.

따라서 구하는 자연수 n의 값의 합은

$1+2+4+10=17$ 답 **17**

112

전략 x^5의 계수를 n에 대한 식으로 나타낸다.

$(x^2+1)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r(x^2)^r={}_4C_r x^{2r}$ (단, $0\le r\le 4$)

$(x^3+1)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_p(x^3)^p={}_nC_p x^{3p}$ (단, $0\le p\le n$)

따라서 $(x^2+1)^4(x^3+1)^n$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r\times{}_nC_p x^{2r+3p}$

이때 x^5항은 $2r+3p=5$일 때이므로

$r=1,\ p=1$

즉 x^5의 계수는 ${}_4C_1\times{}_nC_1=4n$이므로

$4n=12 \qquad \therefore n=3$

또 x^6항은 $2r+3p=6$일 때이므로

$r=0,\ p=2$ 또는 $r=3,\ p=0$

(i) $r=0,\ p=2$일 때

${}_4C_0\times{}_3C_2=3$

(ii) $r=3,\ p=0$일 때

${}_4C_3\times{}_3C_0=4$

(i), (ii)에서 x^6의 계수는

$3+4=7$ 답 ②

113

전략 이항계수의 성질을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. ${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+{}_{10}C_3+\cdots+{}_{10}C_{10}=2^{10}$이므로

${}_{10}C_1+{}_{10}C_2+{}_{10}C_3+\cdots+{}_{10}C_{10}$

$=2^{10}-{}_{10}C_0=1024-1=1023$ (거짓)

ㄴ. ${}_{11}C_0-{}_{11}C_1+{}_{11}C_2-\cdots-{}_{11}C_{11}=0$이므로

${}_{11}C_1-{}_{11}C_2+{}_{11}C_3-\cdots+{}_{11}C_{11}$

$={}_{11}C_0=1$ (참)

ㄷ. ${}_5C_0+{}_6C_1+{}_7C_2+{}_8C_3+{}_9C_4$

$=({}_6C_0+{}_6C_1)+{}_7C_2+{}_8C_3+{}_9C_4$

$=({}_7C_1+{}_7C_2)+{}_8C_3+{}_9C_4$

$=({}_8C_2+{}_8C_3)+{}_9C_4$

$={}_9C_3+{}_9C_4={}_{10}C_4$ (거짓)

ㄹ. ${}_4C_4+{}_5C_4+{}_6C_4+{}_7C_4+{}_8C_4$

$=({}_5C_5+{}_5C_4)+{}_6C_4+{}_7C_4+{}_8C_4$

$=({}_6C_5+{}_6C_4)+{}_7C_4+{}_8C_4$

$=({}_7C_5+{}_7C_4)+{}_8C_4$

$={}_8C_5+{}_8C_4$

$={}_9C_5={}_9C_4$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄹ

114

전략 원소의 개수가 1, 3, …, 19인 부분집합의 개수를 조합의 수로 나타낸다.

원소가 1개인 부분집합의 개수는 $\quad {}_{20}C_1$

원소가 3개인 부분집합의 개수는 $\quad {}_{20}C_3$

원소가 5개인 부분집합의 개수는 $\quad {}_{20}C_5$

$\vdots$

원소가 19개인 부분집합의 개수는 $\quad {}_{20}C_{19}$

따라서 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수는

${}_{20}C_1+{}_{20}C_3+{}_{20}C_5+\cdots+{}_{20}C_{19}$

$=2^{20-1}=2^{19}$ 답 $\mathbf{2^{19}}$

115

전략 주어진 식의 좌변이 $(1+7)^n$의 전개식임을 이용한다.

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$

이 식에 $x=7$을 대입하면

${}_nC_0+{}_nC_1\times7+{}_nC_2\times7^2+\cdots+{}_nC_n\times7^n$

$=(1+7)^n=8^n$

$=(2^3)^n=2^{3n}$

따라서 $2^{3n}=2^{60}$이므로 $\quad 3n=60$

$\therefore n=20$ 답 **20**

116

전략 $19^{19}=(20-1)^{19}$임을 이용한다.

$19^{19}=(20-1)^{19}$

$={}_{19}C_0\times 20^{19}+{}_{19}C_1\times 20^{18}\times(-1)+\cdots$

$+{}_{19}C_{18}\times 20\times(-1)^{18}+{}_{19}C_{19}(-1)^{19}$

이때

${}_{19}C_0\times 20^{19}+{}_{19}C_1\times 20^{18}\times(-1)+\cdots$

$+{}_{19}C_{17}\times 20^2\times(-1)^{17}$

은 400으로 나누어떨어진다.

따라서 19^{19}을 400으로 나누었을 때의 나머지는 ${}_{19}C_{18}\times 20\times(-1)^{18}+{}_{19}C_{19}(-1)^{19}$, 즉 379를 400으로 나누었을 때의 나머지와 같으므로 379이다.

답 379

117

전략 $a_r={}_nC_r$임을 이용하여 n에 대한 식을 세운다.

$(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r x^r$이므로

$a_8={}_nC_8,\ a_9={}_nC_9,\ a_{10}={}_nC_{10}$

이때 $a_9-a_8=a_{10}-a_9$에서 $2a_9=a_8+a_{10}$이므로

$2\times{}_nC_9={}_nC_8+{}_nC_{10}$

$2\times\dfrac{n!}{9!(n-9)!}$

$=\dfrac{n!}{8!(n-8)!}+\dfrac{n!}{10!(n-10)!}$

양변에 $\dfrac{10!(n-8)!}{n!}$을 곱하면

$2\times 10(n-8)=10\times 9+(n-8)(n-9)$

$n^2-37n+322=0,\qquad (n-14)(n-23)=0$

$\therefore n=14$ 또는 $n=23$

따라서 구하는 합은

$14+23=37$

답 37

118

전략 $8^{10}=(1+7)^{10}$임을 이용한다.

$8^{10}=(1+7)^{10}$

$={}_{10}C_0+{}_{10}C_1\times 7+{}_{10}C_2\times 7^2+\cdots+{}_{10}C_{10}\times 7^{10}$

이때 ${}_{10}C_1\times 7+{}_{10}C_2\times 7^2+\cdots+{}_{10}C_{10}\times 7^{10}$은 7로 나누어떨어진다.

따라서 8^{10}을 7로 나누었을 때의 나머지는 ${}_{10}C_0$, 즉 1을 7로 나누었을 때의 나머지와 같으므로 1이다.

즉 오늘부터 8^{10}일 후는 목요일이다.

답 목요일

119

전략 $11^{11}=(1+10)^{11}$임을 이용한다.

11^{11}

$=(1+10)^{11}$

$={}_{11}C_0+{}_{11}C_1\times 10+{}_{11}C_2\times 10^2+{}_{11}C_3\times 10^3+\cdots$

$+{}_{11}C_{11}\times 10^{11}$

$=1+11\times 10+55\times 100$

$+10^3({}_{11}C_3+{}_{11}C_4\times 10+\cdots+{}_{11}C_{11}\times 10^8)$

$=5611+10^3({}_{11}C_3+{}_{11}C_4\times 10+\cdots+{}_{11}C_{11}\times 10^8)$

이때 $10^3({}_{11}C_3+{}_{11}C_4\times 10+\cdots+{}_{11}C_{11}\times 10^8)$은 백의 자리 이하의 숫자가 모두 0이므로 11^{11}의 일의 자리, 십의 자리, 백의 자리의 숫자는 각각 1, 1, 6이다.

따라서 $a=1,\ b=1,\ c=6$이므로

$a+b+c=8$

답 8

120

전략 ${}_{10}C_0,\ {}_{10}C_1,\ {}_{10}C_2,\ \cdots,\ {}_{10}C_{10}$은 $(1+x)^{10}$의 전개식에서 각 항의 계수임을 이용한다.

$(1+x)^{10}(1+x)^{10}$의 전개식의 일반항은

${}_{10}C_r x^r\times{}_{10}C_p x^p={}_{10}C_r\times{}_{10}C_p x^{r+p}$

(단, $0\le r\le 10,\ 0\le p\le 10$)

x^{10}항은 $r+p=10$일 때이므로 이를 만족시키는 $r,\ p$의 순서쌍 $(r,\ p)$는

$(0,\ 10),\ (1,\ 9),\ (2,\ 8),\ \cdots,\ (10,\ 0)$

즉 x^{10}의 계수는

${}_{10}C_0\times{}_{10}C_{10}+{}_{10}C_1\times{}_{10}C_9+{}_{10}C_2\times{}_{10}C_8+\cdots$

$+{}_{10}C_{10}\times{}_{10}C_0$

$={}_{10}C_0\times{}_{10}C_0+{}_{10}C_1\times{}_{10}C_1+{}_{10}C_2\times{}_{10}C_2+\cdots$

$+{}_{10}C_{10}\times{}_{10}C_{10}$

$=({}_{10}C_0)^2+({}_{10}C_1)^2+({}_{10}C_2)^2+\cdots+({}_{10}C_{10})^2$

따라서 주어진 식의 좌변은 $(1+x)^{10}(1+x)^{10}$, 즉 $(1+x)^{20}$의 전개식에서 x^{10}의 계수와 같다.

이때 $(1+x)^{20}$의 전개식에서 x^{10}의 계수는 ${}_{20}C_{10}$이므로

$n=20$

답 20

1 확률의 뜻과 활용

01 시행과 사건

● 본책 60~61쪽

121

$A=\{1, 5\}$, $B=\{3, 6\}$, $C=\{2, 3, 5, 7\}$이므로

$A\cap B=\varnothing$, $B\cap C=\{3\}$, $A\cap C=\{5\}$

따라서 서로 배반사건인 것은 A와 B이다.

답 ㄱ

122

사건 A와 서로 배반인 사건은 A^C의 부분집합이고, 사건 B와 서로 배반인 사건은 B^C의 부분집합이다.

따라서 두 사건 A, B와 모두 배반인 사건은

$A^C\cap B^C=\{4, 5, 6\}\cap\{1, 5, 6\}=\{5, 6\}$

의 부분집합이므로 구하는 사건의 개수는

$2^2=4$

답 **4**

02 확률의 뜻

● 본책 62~70쪽

123

집합 A의 부분집합의 개수는

$2^6=64$

집합 A의 부분집합 중 원소 b는 포함하고 원소 f는 포함하지 않는 집합의 개수는

$2^{6-1-1}=2^4=16$

따라서 구하는 확률은

$\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

개념 노트

부분집합의 개수

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여

① A의 특정한 원소 k개를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수 ⇨ 2^{n-k}

② A의 특정한 원소 l개를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수 ⇨ 2^{n-l}

③ A의 원소 중에서 k개는 반드시 원소로 갖고, l개는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수 ⇨ 2^{n-k-l}

124

두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

이차방정식 $x^2+2ax+b=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 중근을 가지려면

$\frac{D}{4}=a^2-b=0$ $\therefore a^2=b$

$a^2=b$를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$, $(2, 4)$의 2개

따라서 구하는 확률은

$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

답 $\frac{1}{18}$

125

6명이 한 줄로 서는 경우의 수는

$6!=720$

각 부부를 한 사람으로 생각하여 3명이 한 줄로 서는 경우의 수는

$3!=6$

세 쌍의 부부가 부부끼리 서로 자리를 바꾸어 서는 경우의 수는

$2!\times2!\times2!=8$

따라서 세 쌍의 부부가 부부끼리 서로 이웃하여 서는 경우의 수는

$6\times8=48$

이므로 구하는 확률은

$\frac{48}{720}=\frac{1}{15}$

답 $\frac{1}{15}$

126

8개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$8!=40320$

c와 t 사이에 들어가는 2개의 문자를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_6P_2=30$

c와 t를 포함한 4개의 문자를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

c와 t가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 c와 t 사이에 2개의 문자가 있도록 일렬로 나열하는 경우의 수는

$30\times120\times2=7200$

이므로 구하는 확률은

$\frac{7200}{40320}=\frac{5}{28}$ 답 $\frac{5}{28}$

127

7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$7!=5040$

자음 p, r, m, s를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

자음 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중 3개의 자리에 모음 o, i, e를 하나씩 나열하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{P}_3=60$

따라서 모음끼리 이웃하지 않도록 일렬로 나열하는 경우의 수는

$24\times60=1440$

이므로 구하는 확률은

$\frac{1440}{5040}=\frac{2}{7}$ 답 $\frac{2}{7}$

128

세 사람이 다섯 종류의 과자 중에서 임의로 하나씩 택하는 경우의 수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

세 사람이 서로 다른 종류의 과자를 택하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{P}_3=60$

따라서 구하는 확률은

$\frac{60}{125}=\frac{12}{25}$ 답 $\frac{12}{25}$

129

집합 X에서 집합 Y로의 함수 f의 개수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

이때 일대일대응의 개수는

${}_3\mathrm{P}_3=6$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$ 답 $\frac{2}{9}$

개념 노트

함수의 개수

두 집합 X, Y가

$X=\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$, $Y=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$

일 때, X에서 Y로의 함수 f에 대하여

① 함수의 개수 ⇨ ${}_n\Pi_r$

② 일대일함수의 개수 ⇨ ${}_n\mathrm{P}_r$

③ $p<q$이면 $f(p)<f(q)$를 만족시키는 함수 f의 개수 ⇨ ${}_n\mathrm{C}_r$

④ $p<q$이면 $f(p)\le f(q)$를 만족시키는 함수 f의 개수 ⇨ ${}_n\mathrm{H}_r$

130

백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$3\times{}_4\Pi_2=3\times4^2=48$

이때 십의 자리의 숫자가 0인 자연수의 개수는

$3\times4=12$

따라서 구하는 확률은

$\frac{12}{48}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

131

6개의 문자 P, E, P, P, E, R를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times2!}=60$

맨 앞에 E를 나열하고 나머지 문자 P, P, P, E, R를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

따라서 구하는 확률은

$\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

132

8개의 숫자 1, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{8!}{2!\times3!}=3360$

짝수 2, 4, 4, 4와 홀수 1, 1, 3, 5를 각각 하나로 생각하여 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$2!=2$$

짝수 2, 4, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

홀수 1, 1, 3, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

따라서 짝수는 짝수끼리, 홀수는 홀수끼리 이웃하도록 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$2\times4\times12=96$$

이므로 구하는 확률은

$$\frac{96}{3360}=\frac{1}{35}$$

답 $\frac{1}{35}$

133

집합 X에서 X로의 함수 f의 개수는

$${}_3\Pi_3=3^3=27$$

$f(1)+f(2)+f(3)=8$을 만족시키는 함수 f의 개수는 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

2+3+3=8

$$\frac{3!}{2!}=3$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$$

답 $\frac{1}{9}$

134

16개의 제비 중에서 3개의 제비를 뽑는 경우의 수는

$${}_{16}C_3=560$$

7개의 당첨 제비 중에서 1개, 당첨 제비가 아닌 9개의 제비 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는

$${}_7C_1\times{}_9C_2=7\times36=252$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{252}{560}=\frac{9}{20}$$

답 $\frac{9}{20}$

135

6명 중에서 3명의 대표를 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_3=20$$

A는 포함되고 C는 포함되지 않는 경우의 수는 A, C를 제외한 4명 중에서 2명을 뽑고 A를 포함시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_4C_2=6$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

답 $\frac{3}{10}$

136

6개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$${}_6C_2=15$$

흰 공의 개수를 x라 하면 x개의 흰 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_xC_2$이므로

$$\frac{{}_xC_2}{15}=\frac{2}{5},\qquad \frac{x(x-1)}{30}=\frac{2}{5}$$

$$x^2-x-12=0,\qquad (x+3)(x-4)=0$$

$$\therefore x=4\ (\because x>0)$$

따라서 흰 공의 개수는 4이다.

답 4

137

임의로 한 개의 제비를 꺼낼 때, 당첨 제비일 확률은

$$\frac{n}{15}$$

이때 여러 번의 시행에서 5번에 1번 꼴로 당첨 제비가 나왔으므로 통계적 확률은 $\frac{1}{5}$이다.

따라서 $\frac{n}{15}=\frac{1}{5}$이므로

$$n=3$$

답 3

138

전체 학생 수는 $72+104+160+56+8=400$

스마트폰 사용 시간이 3시간 미만인 학생 수는

$$72+104+160=336$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{336}{400}=\frac{21}{25}$$

답 $\frac{21}{25}$

139

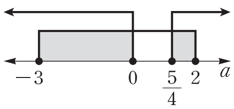
이차방정식 $x^2-4ax+5a=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 실근을 가지려면

$$\frac{D}{4}=(-2a)^2-5a\geq0$$

$4a^2-5a\geq0,\qquad a(4a-5)\geq0$

$\therefore\ a\leq0$ 또는 $a\geq\frac{5}{4}$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 확률은



$$\frac{\{0-(-3)\}+\left(2-\frac{5}{4}\right)}{2-(-3)}$$

$=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

연습 문제 ● 본책 71~73쪽

140

전략 a의 값에 따라 경우를 나누어 $a>b$이고 $a>c$를 만족시키는 b, c의 값을 구한다.

서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6=216$

(i) $a=1$인 경우

$a>b$이고 $a>c$를 만족시키는 b, c의 값은 없다.

(ii) $a=2$인 경우

b, c의 값이 될 수 있는 것은 1이므로 이 경우의 수는 $\quad 1\times1=1$

(iii) $a=3$인 경우

b, c의 값이 될 수 있는 것은 1, 2이므로 이 경우의 수는 $\quad 2\times2=4$

(iv) $a=4$인 경우

b, c의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3이므로 이 경우의 수는 $\quad 3\times3=9$

(v) $a=5$인 경우

b, c의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4이므로 이 경우의 수는 $\quad 4\times4=16$

(vi) $a=6$인 경우

b, c의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4, 5이므로 이 경우의 수는 $\quad 5\times5=25$

이상에서 $a>b$이고 $a>c$인 경우의 수는

$1+4+9+16+25=55$

따라서 구하는 확률은

$\frac{55}{216}$ 답 $\frac{55}{216}$

141

전략 순열의 수를 이용하여 자연수의 개수를 구한다.

만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

${}_7P_4=840$

(i) 46$\square\square$, 47$\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 각각

${}_5P_2=20$

(ii) 5$\square\square\square$, 6$\square\square\square$, 7$\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 각각

${}_6P_3=120$

(i), (ii)에서 4600보다 큰 자연수의 개수는

$2\times20+3\times120=400$

따라서 구하는 확률은

$\frac{400}{840}=\frac{10}{21}$ 답 $\frac{10}{21}$

142

전략 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 최단 거리로 가는 경우의 수를 구한다.

A 지점에서 C 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{11!}{6!\times5!}=462$

A 지점에서 B 지점을 지나 C 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times3!}\times\frac{6!}{4!\times2!}=150$

따라서 구하는 확률은

$\frac{150}{462}=\frac{25}{77}$ 답 $\frac{25}{77}$

143

전략 두 직선 l, m 중 한 직선에서 1개, 다른 한 직선에서 2개의 점을 택하면 삼각형이 만들어짐을 이용한다.

8개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_8C_3=56$

(i) 직선 l에서 2개의 점을 택하고 직선 m에서 1개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_3C_2\times{}_5C_1=15$

(ii) 직선 l에서 1개의 점을 택하고 직선 m에서 2개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_5C_2 = 30$$

(i), (ii)에서 삼각형이 만들어지는 경우의 수는

$$15+30=45$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{45}{56}$ 답 $\frac{45}{56}$

다른 풀이 8개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는 ${}_8C_3=56$

(i) 직선 l에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_3=1$$

(ii) 직선 m에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_5C_3=10$$

(i), (ii)에서 삼각형이 만들어지지 않는 경우의 수는

$$1+10=11$$

따라서 삼각형이 만들어지는 경우의 수는

$$56-11=45$$

144

전략 방정식 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는 ${}_nH_r$임을 이용한다.

방정식 $x+y+z=7$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는

$${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$$

$x+y+z=7$에 $x=3$을 대입하면

$$y+z=4$$

즉 x의 값이 3인 방정식 $x+y+z=7$의 음이 아닌 정수인 해의 개수는 방정식 $y+z=4$의 음이 아닌 정수인 해의 개수와 같으므로

$${}_2H_4={}_5C_4={}_5C_1=5$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{5}{36}$ 답 $\frac{5}{36}$

145

전략 $\mathrm{P}(S)=1$, $\mathrm{P}(\varnothing)=0$임을 이용하여 참, 거짓을 판단한다.

ㄱ. 임의의 사건 A에 대하여

$$0 \le \mathrm{P}(A) \le 1 \text{ (참)}$$

ㄴ. $\mathrm{P}(S)=1$, $\mathrm{P}(\varnothing)=0$이므로

$$\mathrm{P}(S)-\mathrm{P}(\varnothing)=1 \text{ (참)}$$

ㄷ. $A \cup A^C=S$이므로

$$\mathrm{P}(A \cup A^C)=\mathrm{P}(S)=1 \text{ (참)}$$

ㄹ. [반례] $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$이면

$$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{2}>1 \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

참고 $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$, $0 \le \mathrm{P}(B) \le 1$이므로

$$0 \le \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B) \le 2$$

146

전략 자연수 $N=p^a \times q^b$ (p, q는 서로 다른 소수)의 양의 약수의 개수는 $(a+1)(b+1)$임을 이용한다.

$108=2^2 \times 3^3$이므로 108의 양의 약수의 개수는

$$(2+1) \times (3+1)=12$$

108의 양의 약수 중에서 60의 양의 약수는 108과 60의 양의 공약수와 같다.

이때 $60=2^2 \times 3 \times 5$이므로 108과 60의 최대공약수는

$$2^2 \times 3$$

따라서 108과 60의 양의 공약수의 개수는

$$(2+1) \times (1+1)=6$$

이므로 구하는 확률은

$$\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$ 답 $\frac{1}{2}$

147

전략 나이가 가장 적은 사람이 앞에서 두 번째에 서는 경우와 나이가 두 번째로 적은 사람이 앞에서 두 번째에 서는 경우로 나누어 생각한다.

네 사람을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$4!=24$$

앞에서 두 번째에 서 있는 사람이 자신과 이웃한 두 사람보다 나이가 적으려면 두 번째에는 나이가 가장 적은 사람 또는 나이가 두 번째로 적은 사람이 서야 한다.

(i) 나이가 가장 적은 사람이 두 번째에 서는 경우

나머지 3명을 남은 자리에 한 명씩 세우면 되므로 경우의 수는

$$3!=6$$

(ii) 나이가 두 번째로 적은 사람이 두 번째에 서는 경우

나이가 가장 적은 사람을 네 번째에 세우고 나머지 2명을 남은 자리에 한 명씩 세우면 되므로 경우의 수는

$$2!=2$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$6+2=8$

따라서 구하는 확률은

$\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

148

전략 주어진 조건을 만족시키기 위한 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$의 값의 조건을 생각해 본다.

집합 X에서 집합 Y로의 일대일함수 f의 개수는

${}_7P_4=840$

조건 ㈎, ㈏에서 $f(1)\times f(3)\times f(4)$는 2의 배수이어야 하므로 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$의 값 중 적어도 하나는 짝수이어야 한다.

즉 주어진 조건을 만족시키는 일대일함수 f의 개수는 6개의 숫자 1, 3, 4, 5, 6, 7 중에서 3개를 택하는 순열의 수에서 4개의 숫자 1, 3, 5, 7 중에서 3개를 택하는 순열의 수를 뺀 것과 같으므로

${}_6P_3-{}_4P_3=120-24=96$

따라서 구하는 확률은

$\frac{96}{840}=\frac{4}{35}$

답 ④

다른 풀이 (ⅰ) 치역에 4가 포함되는 경우

일대일함수 f의 개수는 5개의 숫자 1, 3, 5, 6, 7 중에서 2개를 택한 후 4와 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_2\times3!=10\times6=60$

(ⅱ) 치역에 6이 포함되는 경우

일대일함수 f의 개수는 5개의 숫자 1, 3, 4, 5, 7 중에서 2개를 택한 후 6과 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_2\times3!=10\times6=60$

(ⅲ) 치역에 4와 6이 모두 포함되는 경우

일대일함수 f의 개수는 4개의 숫자 1, 3, 5, 7 중에서 1개를 택한 후 4, 6과 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_1\times3!=4\times6=24$

이상에서 주어진 조건을 만족시키는 일대일함수 f의 개수는

$60+60-24=96$

149

전략 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수인 세 자리 자연수의 개수를 구한다.

만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

이때 3의 배수가 되려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수가 되어야 한다.

(ⅰ) 각 자리의 숫자의 합이 3인 세 자리 자연수는

111의 1개

(ⅱ) 각 자리의 숫자의 합이 6인 세 자리 자연수는

123, 132, 213, 231, 312, 321, 222의 7개

(ⅲ) 각 자리의 숫자의 합이 9인 세 자리 자연수는

333의 1개

이상에서 3의 배수인 세 자리 자연수의 개수는

$1+7+1=9$

따라서 구하는 확률은

$\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

150

전략 중복조합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구한다.

집합 A에서 집합 B로의 함수 f의 개수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 집합 B의 원소 5개 중에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_3={}_7C_3=35$

따라서 구하는 확률은

$\frac{35}{125}=\frac{7}{25}$

답 $\frac{7}{25}$

151

전략 3번의 시행에서 어떤 동전이 뒤집어져야 하는지 생각해 본다.

3번의 시행에서 나오는 주사위의 눈의 수를 차례대로 a_1, a_2, a_3이라 하면 모든 순서쌍 (a_1, a_2, a_3)의 개수는

$6\times6\times6=216$

주어진 시행을 3번 반복한 후 5개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓이려면 3번째 자리, 4번째 자리, 5번째 자리의 동전이 한 번씩 뒤집어지거나 1번째 자리, 2번째 자리의 동전이 한 번씩 뒤집어지고 모든 동전이 한 번씩 뒤집어져야 한다.
즉 3번의 시행에서 나오는 주사위의 눈의 수가

3, 4, 5 또는 1, 2, 6

이어야 하므로 순서쌍 (a_1, a_2, a_3)의 개수는

$3!+3!=12$

따라서 5개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있을 확률은 $\frac{12}{216}=\frac{1}{18}$이므로

$p=18,\ q=1$

$\therefore p+q=19$

답 **19**

152

전략 $p>q$이려면 $a_1>a_4$ 또는 $a_1=a_4,\ a_2>a_5$이어야 함을 이용한다.

모든 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$의 개수는 6개의 숫자 2, 2, 4, 4, 6, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{6!}{2!\times2!\times2!}=90$$

이때 $p>q$이려면 $a_1>a_4$ 또는 $a_1=a_4,\ a_2>a_5$이어야 한다.

(i) $a_1>a_4$인 경우

$a_1=4,\ a_4=2$일 때 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$의 개수는 숫자 2, 4, 6, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{2!}=12$$

같은 방법으로 하면

$a_1=6,\ a_4=2$ 또는 $a_1=6,\ a_4=4$

인 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$의 개수도 각각 12이다.

(ii) $a_1=a_4,\ a_2>a_5$인 경우

$a_1=a_4=6,\ a_2=4,\ a_5=2$일 때 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$의 개수는 숫자 2, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$2!=2$

같은 방법으로 하면

$a_1=a_4=4,\ a_2=6,\ a_4=2$ 또는

$a_1=a_4=2,\ a_2=6,\ a_4=4$

인 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$의 개수도 각각 2이다.

(i), (ii)에서 $p>q$인 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$의 개수는

$3\times12+3\times2=42$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{42}{90}=\frac{7}{15}$$

답 $\mathbf{\frac{7}{15}}$

참고 $a_1=a_4,\ a_2=a_5$이면 $a_3=a_6$이므로 $p=q$이다.

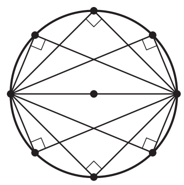
153

전략 원의 지름의 양 끝 점과 원 위의 다른 한 점을 택하면 직각삼각형을 만들 수 있음을 이용한다.

8개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_8C_3=56$

오른쪽 그림과 같이 한 개의 지름에 대하여 만들 수 있는 직각삼각형은 6개이고 8개의 점으로 만들 수 있는 지름은 4개이므로 직각삼각형의 개수는



$6\times4=24$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$$

답 $\mathbf{\frac{3}{7}}$

03 확률의 덧셈정리

● 본책 74~81쪽

154

(1) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{5}{6}$$

(2) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$0.6=0.2+0.5-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=0.1$

답 (1) $\mathbf{\frac{5}{6}}$ (2) **0.1**

155

(1) $A=\{2, 4, 6\}$이므로 $\quad \mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(2) $B=\{1, 2, 4\}$이므로 $\quad \mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(3) $A\cap B=\{2, 4\}$이므로 $\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(4) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

답 (1) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ (2) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ (3) $\mathbf{\frac{1}{3}}$ (4) $\mathbf{\frac{2}{3}}$

156

(1) $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$

(2) $\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\mathrm{P}((A\cap B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$

$$=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

답 (1) $\mathbf{\frac{5}{8}}$ (2) $\mathbf{\frac{3}{5}}$

157

(1) $\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$

(2) 꺼낸 공에 적힌 수가 6의 배수가 아닌 사건을 A라 하면 A^C는 6의 배수인 사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

답 (1) $\mathbf{\frac{1}{6}}$ (2) $\mathbf{\frac{5}{6}}$

158

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{12}$$

답 $\mathbf{\frac{1}{12}}$

159

$\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\mathrm{P}((A\cap B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{6}$

이므로 $\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

두 사건 $A\cap B$와 $A\cap B^C$는 서로 배반사건이고

$A=(A\cap B)\cup(A\cap B^C)$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

답 $\mathbf{\frac{1}{3}}$

160

버스를 이용하는 학생을 택하는 사건을 A, 지하철을 이용하는 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=0.4,\ \mathrm{P}(B)=0.25,\ \mathrm{P}(A\cap B)=0.15$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$=0.4+0.25-0.15$$

$$=0.5$$

답 $\mathbf{0.5}$

161

A가 적힌 카드를 뽑는 사건을 A, G가 적힌 카드를 뽑는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{3}{7},\ \mathrm{P}(B)=\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{3}{7},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_5\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{1}{7}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$=\frac{3}{7}+\frac{3}{7}-\frac{1}{7}=\frac{5}{7}$$

답 $\mathbf{\frac{5}{7}}$

162

$f(1)=1$인 사건을 A, $f(2)=4$인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\Pi_2}{{}_4\Pi_3}=\frac{4^2}{4^3}=\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_4\Pi_2}{{}_4\Pi_3}=\frac{4^2}{4^3}=\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_4\Pi_1}{{}_4\Pi_3}=\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$$

답 $\mathbf{\frac{7}{16}}$

163

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

두 눈의 수의 합이 5인 사건을 A, 차가 5인 사건을 B라 할 때, 나오는 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

$A=\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$,

$B=\{(1, 6), (6, 1)\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}, \mathrm{P}(B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{1}{6}$$

답 $\mathbf{\frac{1}{6}}$

164

A가 맨 앞에 오는 사건을 A, A가 맨 뒤에 오는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{5!}{6!}=\frac{1}{6}, \mathrm{P}(B)=\frac{5!}{6!}=\frac{1}{6}$

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

답 $\mathbf{\frac{1}{3}}$

165

딸기 맛 사탕이 포도 맛 사탕보다 많으려면 꺼낸 5개의 사탕 중에서 딸기 맛 사탕이 3개 또는 4개이어야 한다.
딸기 맛 사탕이 3개인 사건을 A, 4개인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_5}=\frac{20}{63}$,

$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_4\mathrm{C}_4\times{}_5\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_5}=\frac{5}{126}$

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{20}{63}+\frac{5}{126}=\frac{5}{14}$$

답 $\mathbf{\frac{5}{14}}$

166

A와 B가 이웃하지 않게 서는 사건을 A라 하면 A^C는 A와 B가 이웃하게 서는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{2!\times4!}{5!}=\frac{2}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

답 $\mathbf{\frac{3}{5}}$

다른 풀이 A와 B가 이웃하지 않으려면 A와 B를 제외한 3명이 먼저 일렬로 선 다음 그 사이사이와 양 끝의 4개의 자리 중 2개의 자리에 A, B가 서면 된다.

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{3!\times{}_4\mathrm{P}_2}{5!}=\frac{3}{5}$

167

치역의 모든 원소의 곱이 짝수인 함수를 택하는 사건을 A라 하면 A^C는 치역의 모든 원소의 곱이 홀수인 함수를 택하는 사건이다.
이때 치역의 모든 원소의 곱이 홀수이려면 치역의 모든 원소가 홀수, 즉 3 또는 5이어야 하므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_2\Pi_3}{{}_3\Pi_3}=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$

답 $\mathbf{\frac{19}{27}}$

168

10과 서로소이려면 2의 배수도 아니고 5의 배수도 아니어야 한다.
따라서 택한 수가 2의 배수인 사건을 A, 5의 배수인 사건을 B라 하면 택한 수가 10과 서로소인 사건은
$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이다.

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}, \mathrm{P}(B)=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{50}=\frac{1}{10}$이므로

택한 수가 10의 배수인 사건

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)$$
$$=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

답 $\frac{2}{5}$

169

적어도 한 명은 남자인 사건을 A라 하면 A^C는 3명 모두 여자인 사건이므로

$$P(A^C)=\frac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

답 $\frac{5}{6}$

170

적어도 한쪽 끝에 여학생을 세우는 사건을 A라 하면 A^C는 양쪽 끝에 모두 남학생을 세우는 사건이므로

$$P(A^C)=\frac{{}_4P_2\times 5!}{7!}=\frac{2}{7}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

답 $\frac{5}{7}$

171

적어도 1개가 당첨 제비인 사건을 A라 하면 A^C는 2개 모두 당첨 제비가 아닌 사건이므로

$$P(A^C)=\frac{{}_{20-n}C_2}{{}_{20}C_2}=\frac{(20-n)(19-n)}{380}$$

$P(A)=1-P(A^C)$이므로

$$\frac{7}{19}=1-\frac{(20-n)(19-n)}{380}$$

$$n^2-39n+140=0,\qquad (n-4)(n-35)=0$$

$\therefore$ $n=4$ 또는 $n=35$

이때 $0<n<20$이므로 $n=4$

답 4

172

딸기 우유가 2개 이하인 사건을 A라 하면 A^C는 딸기 우유가 3개인 사건이므로

$$P(A^C)=\frac{{}_4C_3}{{}_{12}C_3}=\frac{1}{55}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{55}=\frac{54}{55}$$

답 $\frac{54}{55}$

173

빨간 공이 2개 이상인 사건을 A라 하면 A^C는 빨간 공이 0개 또는 1개인 사건이다.

(i) 파란 공 4개를 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_4C_4}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{210}$$

(ii) 빨간 공 1개와 파란 공 3개를 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_6C_1\times{}_4C_3}{{}_{10}C_4}=\frac{4}{35}$$

(i), (ii)에서 $P(A^C)=\frac{1}{210}+\frac{4}{35}=\frac{5}{42}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{5}{42}=\frac{37}{42}$$

답 $\frac{37}{42}$

174

네 자리 자연수가 4500 이하인 사건을 A라 하면 A^C는 4501 이상인 사건이다.

이때 4501 이상인 자연수는 45□□ 또는 5□□□ 꼴이다.

(i) 45□□ 꼴일 확률은 $\frac{{}_3P_2}{{}_5P_4}=\frac{1}{20}$

(ii) 5□□□ 꼴일 확률은 $\frac{{}_4P_3}{{}_5P_4}=\frac{1}{5}$

(i), (ii)에서 $P(A^C)=\frac{1}{20}+\frac{1}{5}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

연습 문제

• 본책 82~83쪽

175

전략 확률의 덧셈정리를 이용한다.

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

$$\therefore P(B)=P(A\cup B)-P(A)=\frac{2}{3}-P(A)$$

이때 $\frac{1}{5}\le P(A)\le\frac{3}{5}$이므로

$$-\frac{3}{5}\le -P(A)\le -\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{15} \le \frac{2}{3} - \mathrm{P}(A) \le \frac{7}{15}$$

$$\therefore \frac{1}{15} \le \mathrm{P}(B) \le \frac{7}{15}$$

따라서 $\mathrm{P}(B)$의 최솟값은 $\frac{1}{15}$이다. 답 $\mathbf{\frac{1}{15}}$

176

전략 먼저 a의 값이 될 수 있는 수를 파악하고 확률의 덧셈정리를 이용한다.

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

두 눈의 수의 합은 2 이상 12 이하의 자연수이고 이 중에서 12와 서로소인 것은 5, 7, 11이다.

두 눈의 수의 합이 5인 사건을 A, 7인 사건을 B, 11인 사건을 C라 할 때, 나오는 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

$$A = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\},$$
$$B = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\},$$
$$C = \{(5, 6), (6, 5)\}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9},\ \mathrm{P}(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$
$$\mathrm{P}(C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

이때 세 사건 A, B, C는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{1}{3}$$

답 $\mathbf{\frac{1}{3}}$

177

전략 부모님 사이에 적어도 한 명을 세우는 사건을 A라 하고 $\mathrm{P}(A^C)$를 구한다.

부모님 사이에 적어도 한 명을 세우는 사건을 A라 하면 A^C는 부모님을 이웃하게 세우는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C) = \frac{5! \times 2!}{6!} = \frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^C) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

답 $\mathbf{\frac{2}{3}}$

178

전략 남녀를 적어도 한 명씩 뽑는 사건을 A라 하고 $\mathrm{P}(A^C)$를 구한다.

남녀를 적어도 한 명씩 뽑는 사건을 A라 하면 A^C는 4명 모두 남자를 뽑거나 4명 모두 여자를 뽑는 사건이다.

(i) 4명 모두 남자를 뽑을 확률은

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_4}{{}_{11}\mathrm{C}_4} = \frac{1}{22}$$

(ii) 4명 모두 여자를 뽑을 확률은

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_{11}\mathrm{C}_4} = \frac{1}{66}$$

(i), (ii)에서 $\mathrm{P}(A^C) = \frac{1}{22} + \frac{1}{66} = \frac{2}{33}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^C) = 1 - \frac{2}{33} = \frac{31}{33}$$

답 $\mathbf{\frac{31}{33}}$

179

전략 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 파악하고 확률의 덧셈정리를 이용한다.

A와 B^C는 서로 배반사건이므로

$$A \cap B^C = \varnothing \qquad \therefore A \subset B$$

따라서 $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{5}$이므로

$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \frac{7}{10}$에서

$$\frac{1}{5} + \mathrm{P}(B) = \frac{7}{10} \qquad \therefore \mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$$

이때 $B = (A^C \cap B) \cup (A \cap B)$이고 두 사건 $A^C \cap B$와 $A \cap B$는 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A^C \cap B) + \mathrm{P}(A \cap B)$$
$$\frac{1}{2} = \mathrm{P}(A^C \cap B) + \frac{1}{5}$$
$$\therefore \mathrm{P}(A^C \cap B) = \frac{3}{10}$$

답 ③

다른 풀이 $\mathrm{P}(A^C \cup B)$
$= \mathrm{P}(A^C) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A^C \cap B)$

이고, $A \subset B$에서 $A^C \cup B = S$ (S는 표본공간)이므로

$$1 = \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2} - \mathrm{P}(A^C \cap B)$$
$$\therefore \mathrm{P}(A^C \cap B) = \frac{3}{10}$$

180

전략 A가 B보다 먼저 발표하는 사건을 A, A와 B 사이에 한 명의 학생이 발표하는 사건을 B라 하고 확률의 덧셈정리를 이용하여 $\mathrm{P}(A\cup B)$를 구한다.

A가 B보다 먼저 발표하는 사건을 A, A와 B 사이에 한 명의 학생이 발표하는 사건을 B라 하자.

A가 B보다 먼저 발표하는 경우의 수는 A와 B를 같은 사람으로 생각하여 7명의 발표 순서를 정하는 경우의 수와 같으므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{\frac{7!}{2!}}{7!}=\frac{1}{2}$$

A와 B 사이에 한 명의 학생이 발표하는 경우의 수는 A, B의 발표 순서를 정하고 A와 B 사이에 발표할 한 명을 택한 후 3명을 한 사람으로 생각하여 5명의 발표 순서를 정하는 경우의 수와 같으므로

$$\mathrm{P}(B)=\frac{2!\times{}_5\mathrm{C}_1\times 5!}{7!}=\frac{5}{21}$$

A가 B보다 먼저 발표하고 A와 B 사이에 한 명의 학생이 발표하는 경우의 수는 A와 B 사이에 발표할 한 명을 택한 후 3명을 한 사람으로 생각하여 5명의 발표 순서를 정하는 경우의 수와 같으므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times 5!}{7!}=\frac{5}{42}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{5}{21}-\frac{5}{42}=\frac{13}{21}$$

답 $\mathbf{\frac{13}{21}}$

181

전략 문자 a가 한 개만 포함된 문자열이 선택되는 사건을 A, 문자 b가 한 개만 포함된 문자열이 선택되는 사건을 B라 하고 확률의 덧셈정리를 이용하여 $\mathrm{P}(A\cup B)$를 구한다.

문자 a가 한 개만 포함된 문자열이 선택되는 사건을 A, 문자 b가 한 개만 포함된 문자열이 선택되는 사건을 B라 하자.

문자 a가 한 개만 포함된 문자열의 개수는 네 자리 중 문자 a가 나열될 한 곳을 택한 후 나머지 세 자리에 b, c, d 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\Pi_3}{{}_4\Pi_4}=\frac{4\times 3^3}{4^4}=\frac{27}{64}$$

같은 방법으로 하면

$$\mathrm{P}(B)=\frac{27}{64}$$

두 문자 a, b가 각각 한 개만 포함된 문자열의 개수는 네 자리 중 두 문자 a, b가 각각 나열될 두 곳을 택한 후 나머지 두 자리에 c, d 중에서 중복을 허락하여 2개를 택해 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_4\mathrm{P}_2\times{}_2\Pi_2}{{}_4\Pi_4}=\frac{12\times 2^2}{4^4}=\frac{3}{16}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{27}{64}+\frac{27}{64}-\frac{3}{16}=\frac{21}{32}$$

답 ③

182

전략 a와 b가 모두 짝수이기 위한 조건을 파악하고 확률의 덧셈정리를 이용한다.

1부터 7까지의 자연수 중에서 짝수는 2, 4, 6의 3개이므로 a와 b가 모두 짝수이려면 택한 4개의 수 중에서 짝수가 1개 또는 2개이어야 한다.

택한 4개의 수 중에서 짝수가 1개인 사건을 A, 짝수가 2개인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_4}=\frac{12}{35},$$

$$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_4}=\frac{18}{35}$$

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{12}{35}+\frac{18}{35}=\frac{6}{7}$$

답 $\mathbf{\frac{6}{7}}$

183

전략 모든 원소의 합이 4 이상인 부분집합을 택하는 사건을 A라 하고 $\mathrm{P}(A^C)$를 구한다.

모든 원소의 합이 4 이상인 부분집합을 택하는 사건을 A라 하면 A^C는 모든 원소의 합이 3 이하인 부분집합을 택하는 사건이다.

모든 원소의 합이 3 이하인 부분집합은

$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$의 5개

$$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{5}{2^6}=\frac{5}{64}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{5}{64}=\frac{59}{64}$$ 답 $\mathbf{\frac{59}{64}}$

184

전략 1부터 11까지의 자연수 중에서 5의 배수는 5와 10임을 이용한다.

1부터 11까지의 자연수 중에서 임의로 택한 서로 다른 3개의 수의 곱이 5의 배수이려면 3개의 수에 5 또는 10이 포함되어야 한다.

따라서 택한 3개의 수에 5가 포함되고 3개의 수의 합이 3의 배수인 사건을 A, 택한 3개의 수에 10이 포함되고 3개의 수의 합이 3의 배수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A\cup B)$이다.

한편 1부터 11까지의 자연수 중에서 3의 배수의 집합을 S_0, 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수의 집합을 S_1, 3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 수의 집합을 S_2라 하면

$$S_0=\{3, 6, 9\},\ S_1=\{1, 4, 7, 10\},$$
$$S_2=\{2, 5, 8, 11\}$$

이때 3개의 수의 합이 3의 배수이려면 3개의 수가 모두 한 집합의 원소이거나 모두 다른 집합의 원소이어야 한다.

따라서 5를 포함하여 택한 3개의 수의 합이 3의 배수이려면 5를 제외한 나머지 2개의 수가 모두 S_2의 원소이거나 각각 S_0, S_1의 원소이어야 하므로

$$P(A)=\frac{{}_3C_2+{}_3C_1\times{}_4C_1}{{}_{11}C_3}=\frac{1}{11}$$

10을 포함하여 택한 3개의 수의 합이 3의 배수이려면 10을 제외한 나머지 2개의 수가 모두 S_1의 원소이거나 각각 S_0, S_2의 원소이어야 하므로

$$P(B)=\frac{{}_3C_2+{}_3C_1\times{}_4C_1}{{}_{11}C_3}=\frac{1}{11}$$

5, 10을 포함하여 택한 3개의 수의 합이 3의 배수이려면 5, 10을 제외한 나머지 1개의 수가 S_0의 원소이어야 하므로

$$P(A\cap B)=\frac{{}_3C_1}{{}_{11}C_3}=\frac{1}{55}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{55}=\frac{9}{55}$$ 답 $\mathbf{\frac{9}{55}}$

185

전략 택한 순서쌍 (x, y, z)가 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq0$을 만족시키는 사건을 A라 하고 $P(A^C)$를 구한다.

방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$${}_3H_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$$

택한 순서쌍 (x, y, z)가 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq0$을 만족시키는 사건을 A라 하면 A^C는 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 사건이다.

이때 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$이려면

$x=y$ 또는 $y=z$ 또는 $z=x$

이어야 한다.

$x=y$인 순서쌍 (x, y, z)는

$(0, 0, 10)$, $(1, 1, 8)$, $(2, 2, 6)$, $(3, 3, 4)$,
$(4, 4, 2)$, $(5, 5, 0)$의 6개

같은 방법으로 하면 $y=z$인 순서쌍 (x, y, z)와 $z=x$인 순서쌍 (x, y, z)도 각각 6개이므로 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$$3\times6=18$$

$$\therefore P(A^C)=\frac{18}{66}=\frac{3}{11}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{3}{11}=\frac{8}{11}$$ 답 $\mathbf{\frac{8}{11}}$

참고 방정식 $x+y+z=10$을 만족시키고 $x=y=z$인 순서쌍 (x, y, z)는 존재하지 않는다.

2 조건부확률

Ⅱ. 확률

01 조건부확률

● 본책 86~93쪽

186

(1) $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{5}$

(2) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}}=\dfrac{1}{4}$

답 (1) $\mathbf{\frac{1}{5}}$ (2) $\mathbf{\frac{1}{4}}$

187

$A=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5\}$

(1) $P(A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

(2) $A\cap B=\{2\}$이므로

$P(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$

(3) $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$

답 (1) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ (2) $\mathbf{\frac{1}{6}}$ (3) $\mathbf{\frac{1}{3}}$

188

(1) $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$

$=0.2\times0.3=0.06$

(2) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0.06}{0.6}=0.1$

답 (1) **0.06** (2) **0.1**

189

(1) $P(A)=\dfrac{3}{10}$

(2) 첫 번째에 당첨 제비를 뽑으면 상자에는 2개의 당첨 제비를 포함하여 9개의 제비가 들어 있으므로

$P(B|A)=\dfrac{2}{9}$

(3) $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{15}$

답 (1) $\mathbf{\frac{3}{10}}$ (2) $\mathbf{\frac{2}{9}}$ (3) $\mathbf{\frac{1}{15}}$

190

$P(A^C)=1-P(A)=1-\dfrac{3}{8}=\dfrac{5}{8}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{8}$

이므로

$P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)$

$=1-P(A\cup B)$

$=1-\dfrac{5}{8}=\dfrac{3}{8}$

$\therefore P(B^C|A^C)=\dfrac{P(A^C\cap B^C)}{P(A^C)}=\dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}}=\dfrac{3}{5}$

답 $\mathbf{\frac{3}{5}}$

191

$A=(A\cap B)\cup(A\cap B^C)$이고 $A\cap B$와 $A\cap B^C$는 서로 배반사건이므로

$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap B^C)$

$=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12}$

$\therefore P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{5}{8}$

답 $\mathbf{\frac{5}{8}}$

192

$P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{1}{4}$에서

$P(A\cap B)=\dfrac{1}{4}P(B)$

$P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)=\dfrac{1}{6}$

이므로

$P(A\cup B)=\dfrac{5}{6}$

이때 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$$\frac{5}{6}=\frac{1}{3}+P(B)-\frac{1}{4}P(B)$$

$$\frac{3}{4}P(B)=\frac{1}{2} \qquad \therefore P(B)=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

193

A형인 학생을 뽑는 사건을 A, 남학생을 뽑는 사건을 B라 하면

$$P(A)=0.3,\ P(A\cap B)=0.18$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.18}{0.3}=0.6$$

답 **0.6**

194

A가 대표로 뽑히는 사건을 A, B가 대표로 뽑히는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{{}_5C_2}{{}_6C_3}=\frac{1}{2},\ P(A\cap B)=\frac{{}_4C_1}{{}_6C_3}=\frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}$$

답 $\frac{2}{5}$

195

조사에 참여한 전체 관객 수는

$$5+x+20+10=35+x$$

여자를 뽑는 사건을 A, A 공연을 선호하는 관객을 뽑는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{10+x}{35+x},\ P(A\cap B)=\frac{x}{35+x}$$

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{x}{35+x}}{\frac{10+x}{35+x}}=\frac{x}{10+x}$$

따라서 $\frac{x}{10+x}=\frac{1}{6}$이므로

$$6x=10+x \qquad \therefore x=2$$

답 **2**

196

상자 B를 택하는 사건을 A, 사과를 꺼내는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{1}{2},\ P(B|A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

197

A가 ○ 표시가 되어 있는 카드를 뒤집는 사건을 A, B가 × 표시가 되어 있는 카드를 뒤집는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3},\ P(B|A)=\frac{3}{8}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

198

A가 흰 공을 꺼내는 사건을 A, B가 흰 공을 꺼내는 사건을 E라 하면 A가 검은 공을 꺼내는 사건은 A^C이다.

(i) $P(A)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3},\ P(E|A)=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$이므로

A가 흰 공을 꺼내고 B도 흰 공을 꺼낼 확률은

$$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{7}=\frac{2}{21}$$

(ii) $P(A^C)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3},\ P(E|A^C)=\frac{5}{14}$이므로 A가 검은 공을 꺼내고 B는 흰 공을 꺼낼 확률은

$$P(A^C\cap E)=P(A^C)P(E|A^C)=\frac{2}{3}\times\frac{5}{14}=\frac{5}{21}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(E)=P(A\cap E)+P(A^C\cap E)=\frac{2}{21}+\frac{5}{21}=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

199

A 반 학생을 뽑는 사건을 A, B 반 학생을 뽑는 사건을 B, 축구 대회에 참가한 학생을 뽑는 사건을 E라 하자.

(i) $P(A)=\frac{6}{6+5}=\frac{6}{11}$, $P(E|A)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$이므로 축구 대회에 참가한 A 반 학생을 뽑을 확률은

$$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)$$
$$=\frac{6}{11}\times\frac{1}{10}=\frac{3}{55}$$

(ii) $P(B)=\frac{5}{6+5}=\frac{5}{11}$, $P(E|B)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$이므로 축구 대회에 참가한 B 반 학생을 뽑을 확률은

$$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)$$
$$=\frac{5}{11}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{11}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)$$
$$=\frac{3}{55}+\frac{1}{11}=\frac{8}{55}$$

답 $\frac{8}{55}$

200

A 기계에서 생산된 제품을 택하는 사건을 A, B 기계에서 생산된 제품을 택하는 사건을 B, 불량품을 택하는 사건을 E라 하자.

(i) A 기계에서 생산된 불량품을 택할 확률은

$$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)$$
$$=\frac{40}{100}\times\frac{5}{100}=\frac{1}{50}$$

(ii) B 기계에서 생산된 불량품을 택할 확률은

$$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)$$
$$=\frac{60}{100}\times\frac{3}{100}=\frac{9}{500}$$

(i), (ii)에서

$$P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)$$
$$=\frac{1}{50}+\frac{9}{500}=\frac{19}{500}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|E)=\frac{P(B\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{9}{500}}{\frac{19}{500}}=\frac{9}{19}$$

답 $\frac{9}{19}$

201

주머니 A를 택하는 사건을 A, 주머니 B를 택하는 사건을 B, 빨간 구슬을 꺼내는 사건을 E라 하자.

(i) 주머니 A에서 빨간 구슬을 꺼낼 확률은

$$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)$$
$$=\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$

(ii) 주머니 B에서 빨간 구슬을 꺼낼 확률은

$$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)$$
$$=\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$$

(i), (ii)에서

$$P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)$$
$$=\frac{4}{15}+\frac{1}{6}=\frac{13}{30}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{13}{30}}=\frac{8}{13}$$

답 $\frac{8}{13}$

연습 문제

● 본책 94~96쪽

202

전략 $P(A|B^C)=\frac{P(A\cap B^C)}{P(B^C)}$임을 이용한다.

$P(B^C)=1-P(B)=1-0.2=0.8$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$0.4=0.3+0.2-P(A\cap B)$

$\therefore P(A\cap B)=0.1$

이때 $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$이므로

$0.3=0.1+P(A\cap B^C)$

$\therefore P(A\cap B^C)=0.2$

$$\therefore P(A|B^C)=\frac{P(A\cap B^C)}{P(B^C)}=\frac{0.2}{0.8}=0.25$$

답 0.25

203

전략 $P(B|A^C)=\frac{P(A^C\cap B)}{P(A^C)}$임을 이용한다.

$P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$$A\cap B=\varnothing \qquad \therefore B\subset A^C$$

따라서 $A^C\cap B=B$이므로

$$P(B|A^C)=\frac{P(A^C\cap B)}{P(A^C)}=\frac{P(B)}{P(A^C)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{9}$$

답 $\mathbf{\frac{4}{9}}$

204

전략 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$임을 이용하여 조건부확률을 구한다.

진로활동 B를 선택한 학생을 선택하는 사건을 A, 1학년 학생을 선택하는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{9}{20},\ P(A\cap B)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{20}}=\frac{5}{9}$$

답 ②

205

전략 $a\times b$가 4의 배수인 경우에서 $a+b\le 7$인 경우를 찾는다.

모든 순서쌍 (a, b)의 개수는

$$6\times 6=36$$

$a\times b$가 4의 배수인 사건을 A, $a+b\le 7$인 사건을 B라 하자.

$a\times b$가 4의 배수인 순서쌍 (a, b)는

$(1, 4)$, $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$,
$(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$, $(4, 4)$, $(4, 5)$,
$(4, 6)$, $(5, 4)$, $(6, 2)$, $(6, 4)$, $(6, 6)$
의 15개

이므로 $\quad P(A)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

$a\times b$가 4의 배수이면서 $a+b\le 7$인 순서쌍 (a, b)는

$(1, 4)$, $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$, $(4, 1)$,
$(4, 2)$, $(4, 3)$의 7개

이므로 $\quad P(A\cap B)=\frac{7}{36}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{7}{36}}{\frac{5}{12}}=\frac{7}{15}$$

답 ②

206

전략 $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$임을 이용한다.

첫 번째에 3의 배수가 적힌 카드를 뒤집는 사건을 A, 두 번째에 3의 배수가 적힌 카드를 뒤집는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3},\ P(B|A)=\frac{3}{11}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{3}{11}=\frac{1}{11}$$

답 $\mathbf{\frac{1}{11}}$

207

전략 기숙사를 신청한 신입생을 택하는 사건과 기숙사를 신청하지 않은 신입생을 택하는 사건으로 나누어 확률의 곱셈정리를 이용한다.

기숙사를 신청한 신입생을 택하는 사건을 A, 남자 신입생을 택하는 사건을 E라 하면 기숙사를 신청하지 않은 신입생을 택하는 사건은 A^C이다.

(i) $P(A)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$, $P(E|A)=\frac{45}{100}=\frac{9}{20}$이므로 기숙사를 신청한 남자 신입생을 택할 확률은

$$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)$$

$$=\frac{2}{5}\times\frac{9}{20}=\frac{9}{50}$$

(ii) $P(A^C)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$, $P(E|A^C)=\frac{55}{100}=\frac{11}{20}$이므로 기숙사를 신청하지 않은 남자 신입생을 택할 확률은

$$P(A^C\cap E)=P(A^C)P(E|A^C)$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{11}{20}=\frac{33}{100}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(E)=P(A\cap E)+P(A^C\cap E)$$

$$=\frac{9}{50}+\frac{33}{100}=\frac{51}{100}$$

답 $\mathbf{\frac{51}{100}}$

208

전략 확률의 곱셈정리와 조건부확률을 이용한다.

유리가 ♥가 그려져 있는 카드를 꺼내는 사건을 A, 유리가 ◆가 그려져 있는 카드를 꺼내는 사건을 B, 수지가 ♥가 그려져 있는 카드를 꺼내는 사건을 E라 하자.

(i) 유리가 ♥가 그려져 있는 카드를 꺼내고 수지도 ♥가 그려져 있는 카드를 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

(ii) 유리가 ◆가 그려져 있는 카드를 꺼내고 수지는 ♥가 그려져 있는 카드를 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{15}$$

(i), (ii)에서

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)=\frac{2}{5}+\frac{4}{15}=\frac{2}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}$$

답 $\mathbf{\frac{3}{5}}$

209

전략 주어진 조건을 표로 나타내고 조건부확률을 구한다.

주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	남학생	여학생	합계
중국어	12	9	21
일본어	6	7	13
합계	18	16	34

중국어 수업을 받는 학생을 뽑는 사건을 A, 여학생을 뽑는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{21}{34},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{9}{34}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{9}{34}}{\frac{21}{34}}=\frac{3}{7}$$

답 $\mathbf{\frac{3}{7}}$

210

전략 $B\subset A$이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)$임을 이용하여 조건부확률을 구한다.

당첨 제비를 뽑는 사건을 A, 2등 당첨 제비를 뽑는 사건을 B라 하면 1개의 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{8}{15}$$

2개의 당첨 제비를 뽑을 확률은 $\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{15}$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{8}{15}+\frac{2}{15}=\frac{2}{3}$$

1개의 2등 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_7\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{7}{15}$$

2개의 2등 당첨 제비를 뽑을 확률은 $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{15}$

$$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{7}{15}+\frac{1}{15}=\frac{8}{15}$$

이때 $B\subset A$에서 $A\cap B=B$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)=\frac{8}{15}$$

$$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{8}{15}}{\frac{2}{3}}=\frac{4}{5}$$

답 $\mathbf{\frac{4}{5}}$

다른 풀이 A^C는 당첨 제비를 뽑지 않는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

B^C는 2등 당첨 제비를 뽑지 않는 사건이므로

$$\mathrm{P}(B^C)=\frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{7}{15}$$

$$\therefore \mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$$

211

전략 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$임을 이용하여 n에 대한 방정식을 세운다.

첫 번째에 빨간 구슬이 나오는 사건을 A, 두 번째에 파란 구슬이 나오는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n}{n+4},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{n+3}$$

따라서 첫 번째에는 빨간 구슬이 나오고 두 번째에는 파란 구슬이 나올 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{n}{n+4}\times\frac{4}{n+3}$$
$$=\frac{4n}{(n+4)(n+3)}$$

즉 $\frac{4n}{(n+4)(n+3)}=\frac{1}{5}$이므로

$(n+4)(n+3)=20n,\quad n^2-13n+12=0$

$(n-1)(n-12)=0\quad \therefore n=1$ 또는 $n=12$

따라서 모든 n의 값의 합은

$1+12=13$ 답 **13**

212

전략 주머니 A에서 공을 꺼내는 경우와 주머니 B에서 공을 꺼내는 경우로 나누어 확률의 곱셈정리를 이용한다.

주머니 A를 택하는 사건을 A, 주머니 B를 택하는 사건을 B, 꺼낸 2개의 공이 서로 다른 색인 사건을 E라 하자.

(i) $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(E|A)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{15}{28}$이므로

주머니 A에서 서로 다른 색의 공을 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{15}{28}=\frac{15}{56}$$

(ii) $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(E|B)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{4}{7}$이므로

주머니 B에서 서로 다른 색의 공을 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}=\frac{2}{7}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)$$
$$=\frac{15}{56}+\frac{2}{7}=\frac{31}{56}$$

답 $\mathbf{\frac{31}{56}}$

213

전략 확률의 곱셈정리와 조건부확률을 이용한다.

양면이 모두 빨간색인 카드를 꺼내는 사건을 A, 양면이 모두 파란색인 카드를 꺼내는 사건을 B, 한 면은 빨간색이고 다른 면은 파란색인 카드를 꺼내는 사건을 C, 보이는 면이 빨간색인 사건을 E라 하자.

(i) 양면이 모두 빨간색인 카드를 꺼내고 보이는 면이 빨간색일 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{3}\times1=\frac{1}{3}$$

(ii) 양면이 모두 파란색인 카드를 꺼내고 보이는 면이 빨간색일 확률은

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{1}{3}\times0=0$$

(iii) 한 면은 빨간색이고 다른 면은 파란색인 카드를 꺼내고 보이는 면이 빨간색일 확률은

$$\mathrm{P}(C\cap E)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(E|C)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

이상에서

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)+\mathrm{P}(C\cap E)$$
$$=\frac{1}{3}+0+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

답 $\mathbf{\frac{2}{3}}$

214

전략 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)를 구한다.

모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 ${}_{10}\mathrm{C}_3=120$

$b-a\ge5$인 사건을 A, $c-a\ge8$인 사건을 B라 하자.

$b-a\ge5$인 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하면 다음과 같다.

(i) $a=1$인 경우

$b-a\ge5$에서 $b\ge6$

$b=6$일 때, $c=7, 8, 9, 10$

$b=7$일 때, $c=8, 9, 10$

$b=8$일 때, $c=9, 10$

$b=9$일 때, $c=10$

따라서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$4+3+2+1=10$

(ii) $a=2$인 경우

$b-a\ge5$에서 $b\ge7$

$b=7$일 때, $c=8, 9, 10$

$b=8$일 때, $c=9, 10$

$b=9$일 때, $c=10$

따라서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$3+2+1=6$

(iii) $a=3$인 경우

$b-a\geq5$에서 $\quad b\geq8$

$b=8$일 때, $\quad c=9, 10$

$b=9$일 때, $\quad c=10$

따라서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$2+1=3$

(iv) $a=4$인 경우

$b-a\geq5$에서 $\quad b\geq9$

$b=9$일 때, $\quad c=10$

따라서 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 1이다.

이상에서 $b-a\geq5$인 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$10+6+3+1=20$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$$

한편 $b-a\geq5$이면서 $c-a\geq8$인 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하면 다음과 같다.

(v) $a=1$인 경우

$b-a\geq5$, $c-a\geq8$에서 $\quad b\geq6$, $c\geq9$

(i)에서 $c\geq9$인 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$2+2+2+1=7$

(vi) $a=2$인 경우

$b-a\geq5$, $c-a\geq8$에서 $\quad b\geq7$, $c\geq10$

(ii)에서 $c\geq10$인 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$1+1+1=3$

(v), (vi)에서 $b-a\geq5$이면서 $c-a\geq8$인 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$7+3=10$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

215

전략 [실행 1]에서 주머니 B에 넣는 흰 공과 검은 공의 개수에 따라 경우를 나누어 [실행 2]가 끝난 후 주머니 B에 흰 공이 남아 있지 않을 확률을 구한다.

[실행 2]가 끝난 후 주머니 B에 흰 공이 남아 있지 않으려면 [실행 1]이 끝난 후 주머니 B에 흰 공이 5개 이하로 들어 있어야 한다.

따라서 [실행 1]에서 동전의 앞면이 나오고 흰 공 2개 또는 흰 공 1개와 검은 공 1개를 주머니 B에 넣거나 동전의 뒷면이 나오고 흰 공 2개와 검은 공 1개를 주머니 B에 넣어야 한다.

[실행 2]가 끝난 후 주머니 B에 흰 공이 남아 있지 않은 사건을 A, [실행 1]에서 주머니 B에 넣은 공 중 흰 공이 2개인 사건을 B라 하자.

(i) [실행 1]에서 동전의 앞면이 나오고 흰 공 2개를 주머니 B에 넣는 경우

주머니 B에는 흰 공 5개와 검은 공 1개가 들어 있으므로 [실행 2]가 끝난 후 주머니 B에 흰 공이 남아 있지 않을 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_5\mathrm{C}_5}{{}_6\mathrm{C}_5}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$$

(ii) [실행 1]에서 동전의 앞면이 나오고 흰 공 1개와 검은 공 1개를 주머니 B에 넣는 경우

주머니 B에는 흰 공 4개와 검은 공 2개가 들어 있으므로 [실행 2]가 끝난 후 주머니 B에 흰 공이 남아 있지 않을 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_4\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_5}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{12}$$

(iii) [실행 1]에서 동전의 뒷면이 나오고 흰 공 2개와 검은 공 1개를 주머니 B에 넣는 경우

주머니 B에는 흰 공 5개와 검은 공 2개가 들어 있으므로 [실행 2]가 끝난 후 주머니 B에 흰 공이 남아 있지 않을 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_3}\times\frac{{}_5\mathrm{C}_5}{{}_7\mathrm{C}_5}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{21}=\frac{1}{56}$$

이상에서

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{56}=\frac{1}{7},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{24}+\frac{1}{56}=\frac{5}{84}$$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{5}{84}}{\frac{1}{7}}=\dfrac{5}{12}$

따라서 $p=12$, $q=5$이므로

$p+q=17$

답 **17**

02 사건의 독립과 종속

● 본책 97~103쪽

216

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\boxed{(가)\ \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}$

$\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B^C)$

$=\mathrm{P}((A\cup B)^C)$

$=1-\boxed{(나)\ \mathrm{P}(A\cup B)}$

$=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}$

$=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)\{1-\mathrm{P}(A)\}$

$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\boxed{(다)\ \mathrm{P}(B)}\}$

$=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$

따라서 두 사건 A^C와 B^C도 서로 독립이다.

답 (가) $\mathbf{P(A)P(B)}$ (나) $\mathbf{P(A\cup B)}$ (다) $\mathbf{P(B)}$

217

(1) $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{4}$

(2) $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{3}$

답 (1) $\dfrac{1}{4}$ (2) $\dfrac{1}{3}$

218

(1) $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.15\times0.4=0.06$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

(2) $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.7\times0.3=0.21$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 종속이다.

답 (1) **독립** (2) **종속**

219

두 사건 A와 B가 서로 독립이면 A와 B^C, A^C와 B, A^C와 B^C도 각각 서로 독립이다.

(1) $\mathrm{P}(B^C|A)=\mathrm{P}(B^C)=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

(2) $\mathrm{P}(A^C|B^C)=\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}$

(3) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{10}$

(4) $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{1}{2}$

답 (1) $\dfrac{5}{6}$ (2) $\dfrac{2}{5}$ (3) $\dfrac{1}{10}$ (4) $\dfrac{1}{2}$

220

A가 10점 과녁을 맞히는 사건을 A, B가 10점 과녁을 맞히는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.6$, $\mathrm{P}(B)=0.8$

이고 A, B는 서로 독립이다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=0.6\times0.8=0.48$

답 **0.48**

221

동전을 세 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$2\times2\times2=8$

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고 순서쌍으로 나타내면

$A=\{(\mathrm{H, H, H}), (\mathrm{H, H, T}), (\mathrm{H, T, H}), (\mathrm{H, T, T})\}$,

$B=\{(\mathrm{H, H, H}), (\mathrm{H, H, T}), (\mathrm{T, H, H}), (\mathrm{T, H, T})\}$,

$C=\{(\mathrm{H, H, T}), (\mathrm{T, H, H})\}$

$\therefore A\cap B=\{(\mathrm{H, H, H}), (\mathrm{H, H, T})\}$,

$A\cap C=\{(\mathrm{H, H, T})\}$,

$B\cap C=\{(\mathrm{H, H, T}), (\mathrm{T, H, H})\}$

ㄱ. $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

ㄴ. $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{8}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$$

따라서 두 사건 A와 C는 서로 독립이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{4}$이므로

$$\mathrm{P}(B\cap C)\neq\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$$

따라서 두 사건 B와 C는 서로 종속이다.

이상에서 두 사건이 서로 독립인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

222

$\mathrm{P}(B^C)=3\mathrm{P}(B)$에서

$$1-\mathrm{P}(B)=3\mathrm{P}(B) \qquad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

$$\frac{2}{15}=\frac{1}{4}\mathrm{P}(A) \qquad \therefore \mathrm{P}(A)=\frac{8}{15}$$

답 $\frac{8}{15}$

223

두 사건 A, B가 서로 독립이면 A^C, B^C도 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$$

$$\frac{2}{5}=\left(1-\frac{3}{10}\right)\{1-\mathrm{P}(B)\}$$

$$\frac{4}{7}=1-\mathrm{P}(B) \qquad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{3}{7}$$

답 $\frac{3}{7}$

다른 풀이 $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)$

$$=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{5}$$

이므로 $\quad \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{5}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{10}\mathrm{P}(B)$$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$$\frac{3}{5}=\frac{3}{10}+\mathrm{P}(B)-\frac{3}{10}\mathrm{P}(B)$$

$$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{3}{7}$$

224

두 사건 A와 C는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\mathrm{P}(A) \qquad \therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$$

두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\mathrm{P}(B) \qquad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

225

A, B가 완주하는 사건을 각각 A, B라 하면 A, B는 서로 독립이다.

(1) (i) A만 완주할 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$$
$$=\frac{1}{5}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{20}$$

(ii) B만 완주할 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$$
$$=\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{20}+\frac{1}{5}=\frac{7}{20}$$

(2) 두 참가자 중 적어도 한 명이 완주할 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{5}$$

답 (1) $\frac{7}{20}$ (2) $\frac{2}{5}$

다른 풀이 (2) $\mathrm{P}(A\cup B)=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$

$$=1-\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$$
$$=1-\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{5}$$

226

두 선수 A, B가 승부차기를 성공하는 사건을 각각 A, B라 하면 A, B는 서로 독립이다.

이때 두 선수 중 A만 성공할 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\frac{2}{3}(1-p)$$

따라서 $\frac{2}{3}(1-p)=\frac{4}{15}$이므로

$$1-p=\frac{2}{5} \qquad \therefore p=\frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

연습 문제

본책 104~105쪽

227

전략 두 사건 E, F가 서로 독립일 필요충분조건은 $\mathrm{P}(E\cap F)=\mathrm{P}(E)\mathrm{P}(F)$임을 이용한다.

$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$,
$C=\{1, 2, 5, 10\}$이므로

$A\cap B=\{2\}$, $A\cap C=\{2, 10\}$,
$B\cap C=\{2, 5\}$

ㄱ. $A\cap B\neq\varnothing$이므로 A와 B는 서로 배반사건이 아니다. (거짓)

ㄴ. $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{5}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$$

따라서 두 사건 A와 C는 서로 독립이다. (참)

ㄷ. $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{5}$이므로

$$\mathrm{P}(B\cap C)\neq\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$$

따라서 두 사건 B와 C는 서로 종속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

228

전략 두 사건 A, B가 서로 독립임을 이용한다.

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

③ $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이때 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\neq 0$이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)\neq\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

⑤ $\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$
$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}$
$=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\}$
$=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}$
$=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

답 ③

229

전략 두 사건 A, B가 서로 독립임을 이용한다.

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로

$$\frac{1}{5}=\frac{1}{2}\mathrm{P}(B) \qquad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$$

답 ③

230

전략 두 사건 A, B가 서로 독립이면 A와 B^C, A^C와 B도 각각 서로 독립임을 이용한다.

$A-B$와 $B-A$는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}((A-B)\cup(B-A))$
$=\mathrm{P}(A-B)+\mathrm{P}(B-A)$
$=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이면 A와 B^C, A^C와 B도 각각 서로 독립이므로

$\mathrm{P}((A-B)\cup(B-A))$
$=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$
$=\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{5}{6}\right)+\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{5}{6}$
$=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

다른 풀이 $\mathrm{P}((A-B)\cup(B-A))$
$=\mathrm{P}((A\cup B)-(A\cap B))$
$=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A\cap B)$ ← $(A\cap B)\subset(A\cup B)$
$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-2\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-2\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$=\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-2\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{3}$

231

전략 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$임을 이용한다.

A, B가 표적을 맞히는 사건을 각각 A, B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{4}$$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)$$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$$\frac{3}{4}=\frac{2}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)$$

$$\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{12}\qquad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

232

전략 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이고, 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$임을 이용한다.

ㄱ. A, B가 서로 배반사건이면 $\quad \mathrm{P}(A\cap B)=0$

이때 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$이므로

$$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)>0$$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 A, B는 서로 종속이다. (거짓)

ㄴ. A, B가 서로 배반사건이면

$$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cup B)\leq 1 \text{ (참)}$$

ㄷ. A, B가 서로 독립이면

$$\mathrm{P}(A^C)+\mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A^C)+\mathrm{P}(A)=1 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. **답** ㄴ, ㄷ

233

전략 관람객 투표 점수와 심사 위원 점수에 따라 경우를 나누어 두 점수의 합이 70점일 확률을 구한다.

지호가 받는 두 점수의 합이 70점이려면 관람객 투표 점수와 심사 위원 점수에서 각각 A, C 또는 B, B 또는 C, A를 받아야 한다.

(ⅰ) 관람객 투표 점수에서 A 등급, 심사 위원 점수에서 C 등급을 받을 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

(ⅱ) 관람객 투표 점수에서 B 등급, 심사 위원 점수에서 B 등급을 받을 확률은

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

(ⅲ) 관람객 투표 점수에서 C 등급, 심사 위원 점수에서 A 등급을 받을 확률은

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}=\frac{5}{18}$$

답 $\frac{5}{18}$

234

전략 전류가 흐르기 위해서는 스위치 a, d가 모두 닫혀 있거나 스위치 b, c, d가 모두 닫혀 있어야 한다.

스위치 a가 닫혀 있는 사건을 A, 스위치 b, c가 모두 닫혀 있는 사건을 B, 스위치 d가 닫혀 있는 사건을 C라 하면 P에서 Q로 전류가 흐르는 사건은 $(A\cap C)\cup(B\cap C)$이다.

이때 세 사건 A, B, C는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(C)=\frac{1}{2}$$

이므로 구하는 확률은

$(A\cap C)\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}((A\cap C)\cup(B\cap C))\\&=\mathrm{P}(A\cap C)+\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(A\cap B\cap C)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)+\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{5}{16}\end{aligned}$$

답 $\frac{5}{16}$

235

전략 $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$를 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에 대한 식으로 나타낸 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{16}$$

한편

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(A^C\cap B^C)\\&=\mathrm{P}((A\cup B)^C)\\&=1-\mathrm{P}(A\cup B)\\&=1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}\\&=\frac{17}{16}-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\}\end{aligned}$$

이므로 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$가 최소일 때, $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$는 최대이다.

이때 $\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(B)>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)&\geq 2\sqrt{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}\\&=2\times\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\left(\text{단, 등호는 } \mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$의 최솟값은 $\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$의 최댓값은

$$\frac{17}{16}-\frac{1}{2}=\frac{9}{16}$$

답 $\frac{9}{16}$

개념 노트

산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\ (\text{단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립})$$

03 독립시행의 확률

• 본책 106~109쪽

236

(1) ${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{135}{512}$

(2) 적어도 한 번 이기는 사건의 여사건은 한 번도 이기지 못하는 사건이다.

이때 한 번도 이기지 못할 확률은

$${}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{1}{1024}$$

이므로 구하는 확률은

$$1-\frac{1}{1024}=\frac{1023}{1024}$$

답 (1) $\frac{135}{512}$ (2) $\frac{1023}{1024}$

237

(i) A 팀이 첫 번째, 두 번째 경기를 모두 이길 확률은

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

(ii) A 팀이 첫 번째, 두 번째 경기 중에서 1번을 이기고 세 번째 경기에서 이길 확률은

$${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{4}{9}+\frac{8}{27}=\frac{20}{27}$$

답 $\frac{20}{27}$

238

한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(i) 상자에서 흰 공이 나오고 동전을 5번 던져서 앞면이 3번 나올 확률은

$$\frac{2}{5}\times{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$$

(ii) 상자에서 검은 공이 나오고 동전을 3번 던져서 앞면이 3번 나올 확률은

$$\frac{3}{5}\times{}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{3}{40}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{40}=\frac{1}{5}$$

답 $\frac{1}{5}$

239

한 개의 주사위를 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

2, 4, 6, 8, 10

(i) 주머니에서 짝수가 적힌 공이 나오고 주사위를 4번 던져서 3의 배수의 눈이 1번 나올 확률은

$$\frac{1}{2}\times{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{16}{81}$$

1, 3, 9

(ii) 주머니에서 9의 약수가 적힌 공이 나오고 주사위를 3번 던져서 3의 배수의 눈이 1번 나올 확률은

$$\frac{3}{10}\times{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{15}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{16}{81}+\frac{2}{15}=\frac{134}{405}$$

답 $\frac{134}{405}$

240

주사위를 던져서 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이다.
$\underbrace{\text{6의 약수의 눈}}_{1,\ 2,\ 3,\ 6}$

주사위를 4번 던져서 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 x라 하면 그 외의 눈이 나오는 횟수는 $4-x$이므로 점 P의 위치가 2이려면

$x-(4-x)=2$, $\quad 2x=6$

$\therefore x=3$

따라서 주사위를 4번 던져서 6의 약수의 눈이 3번 나와야 하므로 구하는 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{32}{81}$$

답 $\frac{32}{81}$

241

동전을 3번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 x라 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $3-x$이다.

이때 점 P가 다시 꼭짓점 A로 돌아올 때까지 움직인 거리는 4이므로

$x+2(3-x)=4$ $\quad \therefore x=2$

따라서 동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나와야 하므로 구하는 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$$

답 $\frac{3}{8}$

참고 점 P가 움직일 수 있는 최대 거리는 $2\times3=6$이므로 점 P가 다시 꼭짓점 A로 돌아올 때까지 움직인 거리는 4이다.

연습 문제

● 본책 110~111쪽

242

전략 앞면과 뒷면이 나오는 횟수에 따라 경우를 나누어 확률을 구한다.

한 개의 동전을 5번 던져서 앞면이 나오는 횟수와 뒷면이 나오는 횟수의 차가 1이려면 앞면이 2번, 뒷면이 3번 나오거나 앞면이 3번, 뒷면이 2번 나와야 한다.

(i) 앞면이 2번, 뒷면이 3번 나올 확률은

$${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$$

(ii) 앞면이 3번, 뒷면이 2번 나올 확률은

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{5}{16}+\frac{5}{16}=\frac{5}{8}$$

답 $\frac{5}{8}$

243

전략 점 P에 도착하려면 오른쪽과 위쪽으로 각각 몇 칸씩 움직여야 하는지 알아 본다.

점 O에서 출발하여 점 P에 도착하려면 오른쪽으로 3칸, 위쪽으로 1칸 움직여야 한다.

이때 한 개의 주사위를 던져서 1 또는 6의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 구하는 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$$

답 $\frac{8}{81}$

244

전략 주머니에서 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다른 경우와 서로 같은 경우로 나누어 확률을 구한다.

(i) 주머니에서 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다르고 동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$$\frac{{}_4C_1\times{}_3C_1}{{}_7C_2}\times{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{14}$$

(ii) 주머니에서 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같고 동전을 2번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$$\frac{{}_4C_2+{}_3C_2}{{}_7C_2}\times{}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{3}{28}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{14}+\frac{3}{28}=\frac{9}{28}$$

답 $\frac{9}{28}$

245

전략 한 명의 참가자가 본선에 진출할 확률을 구한 후 독립시행의 확률을 이용한다.

1차 예선을 통과하는 것과 2차 예선을 통과하는 것은 서로 독립이므로 한 명의 참가자가 본선에 진출할 확률은

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

따라서 5명의 참가자 중에서 2명만 본선에 진출할 확률은

$${}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{80}{243}$$

답 $\frac{80}{243}$

246

전략 다은이가 다섯 번째 게임에서 우승하려면 네 번째 게임까지는 2번 이겨야 함을 이용한다.

다섯 번째 게임에서 다은이가 우승하려면 네 번째 게임까지 2번 이기고 다섯 번째 게임에서 이겨야 한다.

따라서 구하는 확률은

$${}_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$$

답 $\frac{16}{81}$

247

전략 앞면이 나온 동전의 개수에 따라 경우를 나누어 확률을 구한다.

(i) 앞면이 나온 동전이 2개이고 주사위의 눈의 수가 1 이하일 확률은

$${}_6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{6}=\frac{5}{128}$$

(ii) 앞면이 나온 동전이 3개이고 주사위의 눈의 수가 2 이하일 확률은

$${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{2}{6}=\frac{5}{48}$$

(iii) 앞면이 나온 동전이 4개이고 주사위의 눈의 수가 3 이하일 확률은

$${}_6C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{3}{6}=\frac{15}{128}$$

(iv) 앞면이 나온 동전이 5개이고 주사위의 눈의 수가 4 이하일 확률은

$${}_6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{4}{6}=\frac{1}{16}$$

(v) 앞면이 나온 동전이 6개이고 주사위의 눈의 수가 5 이하일 확률은

$${}_6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^0\times\frac{5}{6}=\frac{5}{384}$$

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{5}{128}+\frac{5}{48}+\frac{15}{128}+\frac{1}{16}+\frac{5}{384}=\frac{43}{128}$$

답 $\frac{43}{128}$

248

전략 점 P가 처음 출발 위치로 돌아오려면 홀수의 눈이 몇 번 나와야 하는지 구한다.

주사위를 6번 던져서 홀수의 눈이 나오는 횟수를 x라 하면 짝수의 눈이 나오는 횟수는 $6-x$이다.

이때 점 P가 처음 출발 위치로 돌아올 때까지 움직인 거리는 8 또는 16이므로

$3x+(6-x)=8$ 또는 $3x+(6-x)=16$

$\therefore$ $x=1$ 또는 $x=5$

따라서 주사위를 6번 던져서 홀수의 눈이 1번 또는 5번 나와야 하므로 구하는 확률은

$${}_6C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1$$

$$=\frac{3}{32}+\frac{3}{32}=\frac{3}{16}$$

답 $\frac{3}{16}$

249

전략 주어진 시행을 5번 반복한 후 문자 B가 보이도록 카드가 놓여 있으려면 카드를 뒤집은 횟수가 홀수이어야 함을 이용한다.

동전을 두 번 던져 앞면이 나온 횟수가 2일 확률은

$${}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{4}$$

이때 주어진 시행을 5번 반복한 후 문자 B가 보이도록 카드가 놓여 있으려면 카드를 뒤집는 횟수가 홀수이어야 하므로 카드를 1번 또는 3번 또는 5번 뒤집어야 한다.

(i) 카드를 1번 뒤집는 경우

5번의 시행 중 앞면이 나온 횟수가 2인 경우가 1번이어야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_5C_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{405}{1024}$$

(ii) 카드를 3번 뒤집는 경우

5번의 시행 중 앞면이 나온 횟수가 2인 경우가 3번이어야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_5C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{45}{512}$$

(iii) 카드를 5번 뒤집는 경우

5번의 시행 중 앞면이 나온 횟수가 2인 경우가 5번이어야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_5C_5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{1024}$$

이상에서 $p=\frac{405}{1024}+\frac{45}{512}+\frac{1}{1024}=\frac{31}{64}$

$\therefore 128\times p=128\times\frac{31}{64}=62$ 답 62

250

전략 서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져서 나온 두 눈의 수가 서로 같은 경우와 서로 다른 경우로 나누어 생각한다.

동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같은 사건을 A, 주사위의 두 눈의 수가 같은 사건, 즉 동전을 2번 던지는 사건을 B라 하면 주사위의 두 눈의 수가 다른 사건, 즉 동전을 4번 던지는 사건은 B^C이다.

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=\frac{5}{6}$

(i) 주사위를 던져서 나온 두 눈의 수가 서로 같고 동전을 2번 던져서 앞면이 1번, 뒷면이 1번 나올 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{6}\times{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{12}$$

(ii) 주사위를 던져서 나온 두 눈의 수가 서로 다르고 동전을 4번 던져서 앞면이 2번, 뒷면이 2번 나올 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(A|B^C)=\frac{5}{6}\times{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$$

(i), (ii)에서

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{12}+\frac{5}{16}=\frac{19}{48}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{19}{48}}=\frac{4}{19}$$

답 $\frac{4}{19}$

1 확률분포

Ⅲ. 통계

01 확률변수와 확률분포

● 본책 114~119쪽

251

답 (1) **이산확률변수**

(2) **연속확률변수**

(3) **이산확률변수**

(4) **연속확률변수**

252

(1) **0, 1, 2**

(2) 확률변수 X가 0, 1, 2일 때의 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

답 풀이 참조

253

(1) 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{5}+a+\frac{3}{10}+\frac{1}{10}=1 \qquad \therefore a=\frac{2}{5}$

(2) $\mathrm{P}(X=2\ 또는\ X=4)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=4)=\frac{2}{5}+\frac{1}{10}=\frac{1}{2}$

(3) $\mathrm{P}(X\le 3)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=\frac{9}{10}$

답 (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{9}{10}$

다른 풀이 (3) $\mathrm{P}(X\le 3)=1-\mathrm{P}(X>3)=1-\mathrm{P}(X=4)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

254

확률의 총합은 1이므로

$$a^2+\frac{1}{3}+\frac{a}{3}=1, \qquad 3a^2+a-2=0$$

$$(3a-2)(a+1)=0$$

$$\therefore a=\frac{2}{3} \text{ 또는 } a=-1$$

이때 $0\le \mathrm{P}(X=x)\le 1$이므로

$$a=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

255

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	$\cdots$	7	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{k}{1\times2}$	$\frac{k}{2\times3}$	$\cdots$	$\frac{k}{7\times8}$	1

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{k}{1\times2}+\frac{k}{2\times3}+\cdots+\frac{k}{7\times8}=1$$

$$k\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)\right\}=1$$

$$k\left(1-\frac{1}{8}\right)=1, \qquad \frac{7}{8}k=1$$

$$\therefore k=\frac{8}{7}$$

답 $\frac{8}{7}$

개념 노트

부분분수로의 변형

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right) \text{ (단, } A\ne B)$$

256

$\mathrm{P}(-1\le X\le 0)=\frac{3}{4}$에서

$$\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)=a+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore a=\frac{1}{2}$$

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+b=1 \qquad \therefore b=\frac{1}{4}$$

$$\therefore a-b=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

257

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	k	$k-\frac{1}{3}$	$\frac{k}{3}$	$\frac{k}{2}$	$\frac{2}{3}k$	1

확률의 총합은 1이므로

$$k+\left(k-\frac{1}{3}\right)+\frac{k}{3}+\frac{k}{2}+\frac{2}{3}k=1$$

$$\frac{7}{2}k-\frac{1}{3}=1 \qquad \therefore k=\frac{8}{21}$$

$$\therefore \mathrm{P}(X\le 2)$$
$$=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$$
$$=\frac{8}{21}+\frac{1}{21}+\frac{8}{63}=\frac{5}{9}$$

답 $\frac{5}{9}$

258

(1) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

이때 남학생 4명과 여학생 3명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_2$이고, 뽑힌 학생 중에서 여학생이 x명인 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_x\times{}_4\mathrm{C}_{2-x}$이므로 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_3\mathrm{C}_x\times{}_4\mathrm{C}_{2-x}}{{}_7\mathrm{C}_2} \quad (x=0,\ 1,\ 2)$$

$$\therefore \mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7}$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{4}{7}$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_0}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{1}{7}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

(2) 여학생이 1명 이하로 뽑힐 확률은

$$\mathrm{P}(X\le 1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$$
$$=\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=\mathbf{\frac{6}{7}}$$

답 풀이 참조

다른 풀이 (2) $\mathrm{P}(X\le 1)=1-\mathrm{P}(X=2)$

$$=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$$

259

5장의 카드 중에서 2장을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_2=10$$

두 수의 차가 1인 경우는

(5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1)의 4가지

$$\therefore P(X=1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

두 수의 차가 3인 경우는

(5, 2), (4, 1)의 2가지

$$\therefore P(X=3)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$\therefore$ P(X=1 또는 X=3)

$$=P(X=1)+P(X=3)$$

$$=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

참고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

두 수의 합이 3인 경우는

(1, 2), (2, 1)의 2가지

$$\therefore P(X=3)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

두 수의 합이 4인 경우는

(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지

$$\therefore P(X=4)=\frac{3}{16}$$

두 수의 합이 5인 경우는

(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지

$$\therefore P(X=5)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore P(3\le X\le 5)$$

$$=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{1}{4}=\frac{9}{16}$$

답 $\frac{9}{16}$

참고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	7	8	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

연습 문제

● 본책 120쪽

260

전략 확률의 총합이 1임을 이용하여 k의 값을 구한다.

확률의 총합은 1이므로

$$3k^2+k+(k^2+2k)=1$$

$$4k^2+3k-1=0, \qquad (4k-1)(k+1)=0$$

$\therefore k=\frac{1}{4}$ 또는 $k=-1$

이때 $0\le P(X=x)\le 1$이므로

$$k=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

261

전략 $P(X=3)$, $P(X=4)$, $P(X=5)$를 구한다.

정사면체를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$4\times 4=16$$

262

전략 먼저 확률의 총합이 1임을 이용하여 k의 값을 구한다.

$$P(X=x)=\frac{k}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{k(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$$

$$=k(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$$

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=8)$$

$$=k\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{9}-\sqrt{8})\}$$

$$=1$$

$$2k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$$

$$\therefore P(X\ge 4)$$

$$=P(X=4)+P(X=5)+\cdots+P(X=8)$$

$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+\cdots$$

$$+(\sqrt{9}-\sqrt{8})\}$$

$$=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

263

전략 p_2, p_3, p_4를 각각 p_1에 대한 식으로 나타내고, 확률질량함수의 성질을 이용한다.

$p_2-p_1=p_3-p_2=p_4-p_3=\frac{1}{8}$이므로

$$p_2=p_1+\frac{1}{8}$$

$$p_3=p_2+\frac{1}{8}=p_1+\frac{1}{4}$$

$$p_4=p_3+\frac{1}{8}=p_1+\frac{3}{8}$$

확률의 총합은 1이므로 $p_1+p_2+p_3+p_4=1$에서

$$p_1+\left(p_1+\frac{1}{8}\right)+\left(p_1+\frac{1}{4}\right)+\left(p_1+\frac{3}{8}\right)=1$$

$$4p_1+\frac{3}{4}=1 \qquad \therefore p_1=\frac{1}{16}$$

한편 $X^2-6X+8<0$에서

$$(X-2)(X-4)<0 \qquad \therefore 2<X<4$$

$$\therefore P(X^2-6X+8<0)$$
$$=P(2<X<4)=P(X=3)$$
$$=p_3=p_1+\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$$

답 $\mathbf{\frac{5}{16}}$

264

전략 숫자 1, 2, 3이 적혀 있는 공의 개수를 각각 a, b, c로 놓고 주어진 조건을 이용하여 a, b, c에 대한 식을 세운다.

숫자 1, 2, 3이 적혀 있는 공의 개수를 각각 a, b, c라 하면

$$a+b+c=7 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$X=4$이려면 2가 적혀 있는 공 2개를 꺼내야 하므로

$$P(X=4)=\frac{{}_bC_2}{{}_7C_2}=\frac{b(b-1)}{42}$$

즉 $\frac{b(b-1)}{42}=\frac{1}{21}$이므로 $\qquad b^2-b-2=0$

$$(b-2)(b+1)=0 \qquad \therefore b=2\ (\because b>0)$$

$b=2$를 ㉠에 대입하면 $\qquad a+c=5 \qquad \cdots\cdots ㉡$

$X=2$이려면 1과 2가 적혀 있는 공을 각각 1개씩, $X=6$이려면 2와 3이 적혀 있는 공을 각각 1개씩 꺼내야 하므로

$$P(X=2)=\frac{{}_aC_1\times{}_2C_1}{{}_7C_2}=\frac{2a}{21}$$

$$P(X=6)=\frac{{}_2C_1\times{}_cC_1}{{}_7C_2}=\frac{2c}{21}$$

이때 $2P(X=2)=3P(X=6)$에서

$$2\times\frac{2a}{21}=3\times\frac{2c}{21}$$

$$\therefore 2a-3c=0 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $\qquad a=3,\ c=2$

$$\therefore P(X\le3)$$
$$=P(\underbrace{X=1}_{\text{1이 적혀 있는 공 2개}})+P(X=2)+P(\underbrace{X=3}_{\text{1과 3이 적혀 있는 공 1개씩}})$$
$$=\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}+\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_7C_2}+\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_7C_2}$$
$$=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

답 ④

02 이산확률변수의 기댓값과 표준편차

● 본책 121~130쪽

265

(1) $E(X)=0\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{3}+9\times\frac{1}{6}=4$

(2) $E(X^2)=0^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{3}+9^2\times\frac{1}{6}$
$=27$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=27-4^2=11$$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{11}$

답 (1) **4** (2) **11** (3) $\mathbf{\sqrt{11}}$

다른 풀이 (2) $V(X)$

$$=(0-4)^2\times\frac{1}{3}+(3-4)^2\times\frac{1}{6}+(6-4)^2\times\frac{1}{3}$$
$$+(9-4)^2\times\frac{1}{6}$$
$$=11$$

266

(1) 한 개의 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로

$$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

(2) $\mathbf{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=\mathbf{1}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$이므로

$$\mathbf{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{3}{2}-1^2=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

답 풀이 참조

267

$\mathrm{V}(X)=4$에서 $\sigma(X)=2$

(1) $\mathbf{E}(Y)=\mathrm{E}(2X-1)=2\mathrm{E}(X)-1=2\times3-1=\mathbf{5}$

$\mathbf{V}(Y)=\mathrm{V}(2X-1)=2^2\mathrm{V}(X)=4\times4=\mathbf{16}$

$\boldsymbol{\sigma}(Y)=\sigma(2X-1)=|2|\sigma(X)=2\times2=\mathbf{4}$

(2) $\mathbf{E}(Y)=\mathrm{E}(-3X+2)=-3\mathrm{E}(X)+2=-3\times3+2=\mathbf{-7}$

$\mathbf{V}(Y)=\mathrm{V}(-3X+2)=(-3)^2\mathrm{V}(X)=9\times4=\mathbf{36}$

$\boldsymbol{\sigma}(Y)=\sigma(-3X+2)=|-3|\sigma(X)=3\times2=\mathbf{6}$

답 풀이 참조

268

(1) $\mathrm{E}(X)=-1\times\frac{5}{8}+0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{8}=-\frac{1}{2}$

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times\frac{5}{8}+0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(4X-3)=4\mathrm{E}(X)-3=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)-3=-5$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(4X-3)=4^2\mathrm{V}(X)=16\times\frac{1}{2}=8$

$\sigma(Y)=\sigma(4X-3)=|4|\sigma(X)=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

답 (1) **평균: $-\frac{1}{2}$, 분산: $\frac{1}{2}$, 표준편차: $\frac{\sqrt{2}}{2}$**

(2) **평균: -5, 분산: 8, 표준편차: $2\sqrt{2}$**

269

확률의 총합은 1이므로

$$\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=5)=\frac{7}{a}+\frac{5}{a}+\frac{3}{a}+\frac{1}{a}=1$$

$\frac{16}{a}=1$ $\quad\therefore a=16$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	1	3	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

$\mathrm{E}(X)=-1\times\frac{7}{16}+1\times\frac{5}{16}+3\times\frac{3}{16}+5\times\frac{1}{16}=\frac{3}{4}$

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times\frac{7}{16}+1^2\times\frac{5}{16}+3^2\times\frac{3}{16}+5^2\times\frac{1}{16}=4$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=4-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{55}{16}$$

답 $\mathbf{\frac{55}{16}}$

270

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+p=1$ $\quad\therefore p=\frac{1}{2}$

$E(X)=\frac{1}{2}$이므로

$$-k\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{4}+k\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \qquad \therefore k=2$$

$E(X^2)=(-2)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{2}=3$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=3-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{11}{4}$$
$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{11}{4}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{11}}{2}$

271

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{1}{8},\ P(X=1)=\frac{3}{8},$$
$$P(X=2)=\frac{3}{8},\ P(X=3)=\frac{1}{8}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$\therefore E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}$$
$$=\frac{3}{2}$$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{8}=3$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$
$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 **평균: $\frac{3}{2}$, 표준편차: $\frac{\sqrt{3}}{2}$**

272

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{7}{15},$$
$$P(X=1)=\frac{{}_7C_1\times{}_3C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{7}{15},$$
$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{15}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$$\therefore E(X)=0\times\frac{7}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$$

$E(X^2)=0^2\times\frac{7}{15}+1^2\times\frac{7}{15}+2^2\times\frac{1}{15}=\frac{11}{15}$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{11}{15}-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{28}{75}$$
$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{28}{75}}=\frac{2\sqrt{21}}{15}$$

답 **평균: $\frac{3}{5}$, 표준편차: $\frac{2\sqrt{21}}{15}$**

273

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_2C_2}{{}_5C_3}=\frac{3}{10},$$
$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_2C_1}{{}_5C_3}=\frac{3}{5},$$
$$P(X=3)=\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3}=\frac{1}{10}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$E(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=\frac{9}{5}$,

$E(X^2)=1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{3}{5}+3^2\times\frac{1}{10}=\frac{18}{5}$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{18}{5}-\left(\frac{9}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$
$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

274

한 번의 게임에서 받을 수 있는 상금을 X원이라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 500, 750, 1000이고, 그 확률은 각각

$$P(X=500)=\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10},$$

$$P(X=750)=\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{5},$$

$$P(X=1000)=\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	500	750	1000	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$$\therefore E(X)=500\times\frac{3}{10}+750\times\frac{3}{5}+1000\times\frac{1}{10}$$
$$=700$$

따라서 구하는 기댓값은 700원이다. 답 **700원**

275

한 번의 게임에서 받을 수 있는 상금을 X원이라 하면

눈의 수가 1일 때, $X=1\times200=200$

눈의 수가 2일 때, $X=2\times100=200$

눈의 수가 3일 때, $X=3\times200=600$

눈의 수가 4일 때, $X=4\times100=400$

눈의 수가 5일 때, $X=5\times200=1000$

눈의 수가 6일 때, $X=6\times100=600$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	200	400	600	1000	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$$\therefore E(X)=200\times\frac{1}{3}+400\times\frac{1}{6}+600\times\frac{1}{3}+1000\times\frac{1}{6}$$
$$=500$$

즉 구하는 기댓값은 500원이다. 답 **500원**

276

$E(-2X+3)=1$에서

$-2E(X)+3=1 \qquad \therefore E(X)=1$

$\sigma(X)=2$에서 $\qquad V(X)=2^2=4$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$$
$$=4+1^2=5$$

답 **5**

277

$E(X)=5$이므로 $E(Y)=E(aX+b)=42$에서

$aE(X)+b=42$

$\therefore 5a+b=42 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$
$=125-5^2=100$

이므로 $V(Y)=V(aX+b)=16$에서

$a^2V(X)=16$

$100a^2=16, \qquad a^2=\frac{4}{25}$

$\therefore a=\frac{2}{5}\ (\because a>0)$

$a=\frac{2}{5}$를 ㉠에 대입하면

$5\times\frac{2}{5}+b=42 \qquad \therefore b=40$

답 **40**

278

$E(X)=4320$, $\sigma(X)=100$이므로

$$E(Y)=E\left(\frac{5}{4}X+300\right)=\frac{5}{4}E(X)+300$$
$$=\frac{5}{4}\times4320+300=5700$$

$$\sigma(Y)=\sigma\left(\frac{5}{4}X+300\right)=\left|\frac{5}{4}\right|\sigma(X)$$
$$=\frac{5}{4}\times100=125$$

답 **평균: 5700, 표준편차: 125**

279

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	k	$4k$	$9k$	$16k$	1

확률의 총합은 1이므로

$k+4k+9k+16k=1$

$30k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{30}$

$\therefore$ E(X)

$$=1\times\frac{1}{30}+2\times\frac{4}{30}+3\times\frac{9}{30}+4\times\frac{16}{30}$$

$$=\frac{10}{3}$$

$\therefore$ E$(-9X-2)=-9$E$(X)-2$

$$=-9\times\frac{10}{3}-2=-32$$

답 **-32**

280

확률의 총합은 1이므로

$$a+\frac{a}{2}+a^2=1$$

$$2a^2+3a-2=0,\qquad (2a-1)(a+2)=0$$

$$\therefore a=\frac{1}{2} \text{ 또는 } a=-2$$

이때 $0\le$P$(X=x)\le1$이므로

$$a=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \mathrm{E}(X)=-1\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}$$

$$=-\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{2}+0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

$$=\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{11}{16}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{11}{16}}=\frac{\sqrt{11}}{4}$$

따라서 확률변수 $Y=2X+1$에 대하여

$$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X+1)=2\mathrm{E}(X)+1$$

$$=2\times\left(-\frac{1}{4}\right)+1=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(2X+1)=2^2\mathrm{V}(X)$$

$$=4\times\frac{11}{16}=\frac{11}{4}$$

$$\sigma(Y)=\sigma(2X+1)=|2|\sigma(X)$$

$$=2\times\frac{\sqrt{11}}{4}=\frac{\sqrt{11}}{2}$$

답 **평균: $\frac{1}{2}$, 분산: $\frac{11}{4}$, 표준편차: $\frac{\sqrt{11}}{2}$**

281

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_0}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{4}{35},$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{18}{35},$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{12}{35},$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{1}{35}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
P$(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

$$\therefore \mathrm{E}(X)=0\times\frac{4}{35}+1\times\frac{18}{35}+2\times\frac{12}{35}$$

$$+3\times\frac{1}{35}$$

$$=\frac{9}{7}$$

$$\therefore \mathrm{E}(7X-2)=7\mathrm{E}(X)-2$$

$$=7\times\frac{9}{7}-2$$

$$=7$$

답 **7**

282

1, 2, 3, 4, 5, 6의 양의 약수의 개수는 각각

1, 2, 2, 3, 2, 4

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
P$(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}=\frac{7}{3},$$

$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}=\frac{19}{3}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

$$=\frac{19}{3}-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\therefore \sigma(-6X+5)=|-6|\sigma(X)$

$=6\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$

답 $4\sqrt{2}$

연습 문제 ● 본책 131~132쪽

283

전략 확률의 총합이 1이고 $E(X)=3$임을 이용하여 a, b에 대한 식을 세운다.

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+a+b=1$$

$$\therefore a+b=\frac{3}{10} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$E(X)=3$이므로

$$1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{2}{5}+4\times a+5\times b=3$$

$$\therefore 4a+5b=\frac{13}{10} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{1}{10}$

$$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{10}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{2}{5}+4^2\times\frac{1}{5}+5^2\times\frac{1}{10}=\frac{51}{5}$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{51}{5}-3^2=\frac{6}{5}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{6}{5}}=\frac{\sqrt{30}}{5}$$

답 $\frac{\sqrt{30}}{5}$

284

전략 확률변수 X의 확률분포를 구한다.

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10},$$

$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{5},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$$E(X)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5},$$

$$E(X^2)=0^2\times\frac{3}{10}+1^2\times\frac{3}{5}+2^2\times\frac{1}{10}=1\text{이므로}$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

답 $\frac{9}{25}$

285

전략 $E(aX+b)=aE(X)+b$임을 이용한다.

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=7+2^2=11$$

$$\therefore E((X-3)^2)=E(X^2-6X+9)=E(X^2)-6E(X)+9=11-6\times2+9=8$$

답 8

해설 Focus

일반적으로 두 확률변수 X, Y에 대하여

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

가 성립한다.

286

전략 $E(aX+b)=aE(X)+b$, $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$임을 이용한다.

$E(X)=m$, $\sigma(X)=\sigma$이므로

$$E(T)=E\left(10\times\frac{X-m}{\sigma}+50\right)=E\left(\frac{10}{\sigma}X-\frac{10m}{\sigma}+50\right)=\frac{10}{\sigma}E(X)-\frac{10m}{\sigma}+50=\frac{10m}{\sigma}-\frac{10m}{\sigma}+50=50$$

$$\sigma(T)=\sigma\left(10\times\frac{X-m}{\sigma}+50\right)$$
$$=\left|\frac{10}{\sigma}\right|\sigma(X)$$
$$=\frac{10}{\sigma}\times\sigma=10$$

답 **평균: 50, 표준편차: 10**

287

전략 $\mathrm{E}(X)=-1$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

$\mathrm{E}(X)=-1$에서

$$-3\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{4}+a\times\frac{1}{4}=-1$$
$$\frac{1}{4}a=\frac{1}{2}\qquad\therefore a=2$$

$$\mathrm{E}(X^2)=(-3)^2\times\frac{1}{2}+0^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{11}{2}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=\frac{11}{2}-(-1)^2=\frac{9}{2}$$
$$\therefore \mathrm{V}(aX)=\mathrm{V}(2X)=2^2\mathrm{V}(X)$$
$$=4\times\frac{9}{2}=18$$

답 ③

288

전략 확률변수 X의 확률분포를 구한다.

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5, 6이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{2}{15},$$
$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1+{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{4}{15},$$
$$\mathrm{P}(X=5)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5},$$
$$\mathrm{P}(X=6)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{5}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$$\mathrm{E}(X)=3\times\frac{2}{15}+4\times\frac{4}{15}+5\times\frac{2}{5}+6\times\frac{1}{5}=\frac{14}{3},$$

$$\mathrm{E}(X^2)=3^2\times\frac{2}{15}+4^2\times\frac{4}{15}+5^2\times\frac{2}{5}+6^2\times\frac{1}{5}$$
$$=\frac{68}{3}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=\frac{68}{3}-\left(\frac{14}{3}\right)^2$$
$$=\frac{8}{9}$$
$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$
$$\therefore \sigma(-9X+5)=|-9|\sigma(X)$$
$$=9\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=6\sqrt{2}$$

답 **$6\sqrt{2}$**

289

전략 확률의 총합이 1임을 이용하여 b를 a에 대한 식으로 나타낸다.

확률의 총합은 1이므로

$$b+\frac{1}{4}+a=1\qquad\therefore b=\frac{3}{4}-a$$

$$\mathrm{E}(X)=1\times b+2\times\frac{1}{4}+3\times a$$
$$=\left(\frac{3}{4}-a\right)+\frac{1}{2}+3a$$
$$=2a+\frac{5}{4}$$

$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times b+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times a$$
$$=\left(\frac{3}{4}-a\right)+1+9a$$
$$=8a+\frac{7}{4}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=8a+\frac{7}{4}-\left(2a+\frac{5}{4}\right)^2$$
$$=-4a^2+3a+\frac{3}{16}$$
$$=-4\left(a-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{3}{4}$$

이때 $0\le a\le\frac{3}{4}$이므로 $\mathrm{V}(X)$는 $a=\frac{3}{8}$일 때 최대이다.

답 **$\frac{3}{8}$**

290

전략 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타낸다.

$\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(X=k+2)$에 $k=0,\ 1,\ 2$를 각각 대입하면

$$\mathrm{P}(X=0)=\mathrm{P}(X=2),\ \mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(X=3),$$
$$\mathrm{P}(X=2)=\mathrm{P}(X=4)$$

따라서 $\mathrm{P}(X=0)=a$, $\mathrm{P}(X=1)=b$라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	a	b	a	1

확률의 총합은 1이므로

$$3a+2b=1 \qquad \cdots\cdots \ ㉠$$

$\mathrm{E}(X^2)=\frac{35}{6}$이므로

$$0^2\times a+1^2\times b+2^2\times a+3^2\times b+4^2\times a=\frac{35}{6}$$

$$\therefore\ 2a+b=\frac{7}{12} \qquad \cdots\cdots \ ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{1}{6},\ b=\frac{1}{4}$

$$\therefore\ \mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{6}$$

답 ④

291

전략 상품권의 총액을 X원이라 하고 확률변수 X의 확률분포를 구한다.

한 상자를 골라 상품권 2장을 꺼낼 때 나오는 상품권의 총액을 X원이라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 10000, 15000, 20000이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=10000)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{20}$$

$$\mathrm{P}(X=15000)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}+\frac{1}{2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{P}(X=20000)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}+\frac{1}{2}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}$$
$$=\frac{9}{20}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	10000	15000	20000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{20}$	1

$\therefore\ \mathrm{E}(X)$

$$=10000\times\frac{1}{20}+15000\times\frac{1}{2}+20000\times\frac{9}{20}$$
$$=17000$$

즉 구하는 기댓값은 17000원이다.

답 17000원

292

전략 주어진 표를 이용하여 $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$를 구한다.

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{8}+2\times\frac{3}{8}+4\times\frac{3}{8}+6\times\frac{1}{8}=3,$$

$$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+4^2\times\frac{3}{8}+6^2\times\frac{1}{8}=12$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=12-3^2=3$$

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(aX+b)=6$에서

$$a\mathrm{E}(X)+b=6$$
$$\therefore\ 3a+b=6 \qquad \cdots\cdots \ ㉠$$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(aX+b)=3$에서

$$a^2\mathrm{V}(X)=3, \qquad 3a^2=3$$
$$\therefore\ a=-1\ (\because\ a<0)$$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$$-3+b=6 \qquad \therefore\ b=9$$
$$\therefore\ a+b=8$$

답 8

293

전략 확률변수 X의 확률분포를 구한다.

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이다.

(i) $X=1$일 때

맨 앞에 여학생 3명 중 1명을 세우고 그 뒤에 나머지 4명을 세우면 되므로

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{P}_1\times 4!}{5!}=\frac{3}{5}$$

(ii) $X=2$일 때

맨 앞에 남학생 2명 중 1명을, 두 번째 자리에 여학생 3명 중 1명을 세우고 그 뒤에 나머지 3명을 세우면 되므로

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{P}_1\times{}_3\mathrm{P}_1\times 3!}{5!}=\frac{3}{10}$$

(iii) $X=3$일 때

남학생 2명을 세우고 그 뒤에 여학생 3명을 세우면 되므로

$$P(X=3)=\frac{2!\times3!}{5!}=\frac{1}{10}$$

이상에서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$E(X)=1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{10}=\frac{3}{2}$,

$E(X^2)=1^2\times\frac{3}{5}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{10}=\frac{27}{10}$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{27}{10}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{20}$$

$$\therefore\ V(10X)=10^2V(X)=100\times\frac{9}{20}=45$$

답 45

03 이항분포

● 본책 133~139쪽

294

(1) 한 개의 주사위를 던질 때 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이고 각 주사위의 결과는 서로 독립이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

(2) 제비를 차례대로 2개 뽑을 때, 첫 번째에 당첨 제비를 뽑는 사건과 두 번째에 당첨 제비를 뽑는 사건은 서로 독립이 아니므로 이항분포를 따르지 않는다.

(3) 자유투를 한 번 던질 때 성공할 확률은 0.85이고 각 자유투의 결과는 서로 독립이므로 확률변수 X는 이항분포 $B(50,\ 0.85)$를 따른다.

(4) 화장품을 재구매할 확률은 0.4이고 각 구매자가 재구매하는 것은 서로 독립이므로 확률변수 X는 이항분포 $B(100,\ 0.4)$를 따른다.

답 (1) $\mathbf{B\left(10,\ \frac{1}{2}\right)}$ (2) **이항분포를 따르지 않는다.**
(3) $\mathbf{B(50,\ 0.85)}$ (4) $\mathbf{B(100,\ 0.4)}$

295

(1) $\mathbf{P(X=x)={}_3C_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{3-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)}$

(2) $P(X=2)={}_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\mathbf{\frac{4}{9}}$

답 풀이 참조

296

(1) $\mathbf{E(X)}=36\times\frac{1}{3}=\mathbf{12}$

$\mathbf{V(X)}=36\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\mathbf{8}$

$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{(X)}=\sqrt{V(X)}=\sqrt{8}=\mathbf{2\sqrt{2}}$

(2) $\mathbf{E(X)}=100\times\frac{2}{5}=\mathbf{40}$

$\mathbf{V(X)}=100\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\mathbf{24}$

$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{(X)}=\sqrt{V(X)}=\sqrt{24}=\mathbf{2\sqrt{6}}$

답 풀이 참조

297

(1) $\mathbf{B\left(4,\ \frac{3}{4}\right)}$

(2) $\mathbf{P(X=x)={}_4C_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{4-x}}$

$\mathbf{(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)}$

(3) 구하는 확률은

$$P(X\geq1)=1-P(X=0)$$
$$=1-{}_4C_0\left(\frac{1}{4}\right)^4$$
$$=1-\frac{1}{256}=\mathbf{\frac{255}{256}}$$

답 풀이 참조

298

확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_{25}C_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{25-x}$$
$$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 25)$$

이므로 $P(X=2)=aP(X=1)$에서

$${}_{25}C_2\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^{23}=a\times{}_{25}C_1\left(\frac{4}{5}\right)^1\left(\frac{1}{5}\right)^{24}$$

$240=5a\qquad\therefore\ a=48$

답 48

299

(1) $\mathbf{B}\left(50,\ \frac{1}{5}\right)$

(2) $\mathbf{E}(X)=50\times\frac{1}{5}=\mathbf{10}$

$\mathbf{V}(X)=50\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\mathbf{8}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{8}=\mathbf{2\sqrt{2}}$

답 **풀이 참조**

300

$\mathrm{E}(X)=5$에서 $\quad 20p=5 \quad \therefore p=\frac{1}{4}$

즉 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(20,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{V}(X)=20\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$$

이때 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=\frac{15}{4}+5^2=\frac{115}{4}$$

답 $\mathbf{\frac{115}{4}}$

301

$\mathrm{E}(X)=\frac{4}{5}$이므로 $\quad np=\frac{4}{5}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 $\mathrm{E}(X^2)=\frac{32}{25}$이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=\frac{32}{25}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$$

$\therefore np(1-p)=\frac{16}{25}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{4}{5}(1-p)=\frac{16}{25} \quad \therefore p=\frac{1}{5}$

$p=\frac{1}{5}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{5}n=\frac{4}{5} \quad \therefore n=4$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(4,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X=3)={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^1=\frac{16}{625}$$

답 $\mathbf{\frac{16}{625}}$

302

하나의 씨앗이 발아할 확률은 $\frac{1}{5}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(200,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=200\times\frac{1}{5}=40$

답 **40**

303

3개의 동전을 동시에 던져서 앞면이 2개, 뒷면이 1개 나올 확률은

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(160,\ \frac{3}{8}\right)$을 따른다.

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{160\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}}=\frac{5\sqrt{6}}{2}$$

답 $\mathbf{\frac{5\sqrt{6}}{2}}$

304

가위바위보를 한 번 하여 지아가 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=10\times\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$,

$\mathrm{V}(X)=10\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{20}{9}$

이때 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=\frac{20}{9}+\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{40}{3}$$

답 $\mathbf{\frac{40}{3}}$

305

약을 복용한 환자가 완치될 확률은 $\frac{4}{5}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(200,\ \frac{4}{5}\right)$를 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=200\times\frac{4}{5}=160$

$\mathrm{V}(X)=200\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=32$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

따라서 확률변수 $Y=2X-1$에 대하여

$$\begin{aligned}E(Y)&=E(2X-1)=2E(X)-1\\&=2\times160-1=319\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(Y)&=\sigma(2X-1)=|2|\sigma(X)\\&=2\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 **평균: 319, 표준편차: $8\sqrt{2}$**

306

4개의 동전을 동시에 던져서 앞면이 1개, 뒷면이 3개 나올 확률은

$${}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$$\therefore\ E(X)=n\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}n$$

$$V(X)=n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}n$$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$$\frac{3}{16}n=70-\left(\frac{1}{4}n\right)^2$$

$$n^2+3n-1120=0,\qquad (n+35)(n-32)=0$$

$$\therefore\ n=32\ (\because\ n>0)$$

따라서 $V(X)=\frac{3}{16}\times32=6$이므로

$$V(3X-2)=3^2V(X)=9\times6=54$$

답 **54**

연습 문제 ● 본책 140~141쪽

307

전략 합격한 제품의 개수를 X로 놓고 확률변수 X의 확률분포를 구한다.

합격한 제품의 개수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(5,\ \frac{9}{10}\right)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{9}{10}\right)^x\left(\frac{1}{10}\right)^{5-x}$$

$$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\le1)&=P(X=0)+P(X=1)\\&={}_5C_0\left(\frac{1}{10}\right)^5+{}_5C_1\left(\frac{9}{10}\right)^1\left(\frac{1}{10}\right)^4\\&=\frac{23}{50000}\end{aligned}$$

답 $\mathbf{\frac{23}{50000}}$

308

전략 확률변수 X가 따르는 이항분포를 구한다.

확률변수 X는 이항분포 $B\left(160,\ \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$$E(X)=160\times\frac{3}{4}=120$$

$$V(X)=160\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=30$$

답 **평균: 120, 분산: 30**

309

전략 확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따를 때, $E(X)=np$, $V(X)=np(1-p)$임을 이용한다.

$E(X)=15$, $V(X)=\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{45}{4}$이므로

$$np=15 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$np(1-p)=\frac{45}{4} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$15(1-p)=\frac{45}{4}\qquad \therefore\ p=\frac{1}{4}$$

$p=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{4}n=15\qquad \therefore\ n=60$$

$$\therefore\ 4(n+p)=4\times\left(60+\frac{1}{4}\right)=241$$

답 **241**

310

전략 확률변수 X가 따르는 이항분포를 구한다.

1회의 시행에서 같은 색의 공이 나올 확률은

$$\frac{{}_3C_2+{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{3}{7}$$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(49,\ \frac{3}{7}\right)$을 따른다.

$$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{49\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}}=2\sqrt{3}$$

답 $\mathbf{2\sqrt{3}}$

311

전략 X의 확률분포를 이용하여 $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(X^2)$을 구한다.

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(3,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\mathrm{V}(X)=3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

이때 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{2}\right)^2=3$$

$$\begin{aligned}\therefore f(a)&=\mathrm{E}((X-a)^2)=\mathrm{E}(X^2-2aX+a^2)\\&=\mathrm{E}(X^2)-2a\mathrm{E}(X)+a^2\\&=3-2a\times\frac{3}{2}+a^2\\&=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\end{aligned}$$

따라서 $f(a)$는 $a=\frac{3}{2}$일 때 최솟값 $\frac{3}{4}$을 갖는다.

답 $\frac{3}{4}$

다른 풀이 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

이때 $Y=(X-a)^2$이라 하고 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	a^2	$(a-1)^2$	$(a-2)^2$	$(a-3)^2$	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$\begin{aligned}\therefore\ &\mathrm{E}((X-a)^2)\\&=\mathrm{E}(Y)\\&=a^2\times\frac{1}{8}+(a-1)^2\times\frac{3}{8}\\&\quad+(a-2)^2\times\frac{3}{8}+(a-3)^2\times\frac{1}{8}\\&=a^2-3a+3=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\end{aligned}$$

312

전략 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르는 확률변수 X의 확률질량함수는 $\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{n-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$임을 이용한다.

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(3,\ p)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_3\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{3-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

$$\therefore \mathrm{P}(X=3)={}_3\mathrm{C}_3 p^3=p^3$$

확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(4,\ 2p)$를 따르므로 Y의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(Y=y)={}_4\mathrm{C}_y(2p)^y(1-2p)^{4-y}$$
$$(y=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(Y\geq 3)&=\mathrm{P}(Y=3)+\mathrm{P}(Y=4)\\&={}_4\mathrm{C}_3(2p)^3(1-2p)+{}_4\mathrm{C}_4(2p)^4\\&=32p^3(1-2p)+16p^4\\&=16p^3(2-3p)\end{aligned}$$

$10\mathrm{P}(X=3)=\mathrm{P}(Y\geq 3)$에서

$$10p^3=16p^3(2-3p)$$

$p>0$이므로 $\quad 5=16-24p$

$$\therefore p=\frac{11}{24}$$

답 $\frac{11}{24}$

313

전략 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때, $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$임을 이용한다.

$$\begin{aligned}\sigma(X)&=\sqrt{10p(1-p)}=\sqrt{-10(p^2-p)}\\&=\sqrt{-10\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}}\end{aligned}$$

이때 $0\leq p\leq 1$이므로 표준편차 $\sigma(X)$는 $p=\frac{1}{2}$일 때 최대이다.

따라서 이때의 X의 평균은

$$\mathrm{E}(X)=10\times\frac{1}{2}=5$$

답 5

314

전략 X의 평균과 분산을 x와 n에 대한 식으로 나타낸다.

1회의 시행에서 검은 구슬이 나올 확률은 $\frac{x}{x+3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{x}{x+3}\right)$를 따른다.

이때 $\mathrm{E}(X)=4$, $\mathrm{V}(X)=\frac{12}{5}$이므로

$$n\times\frac{x}{x+3}=4 \quad\cdots\cdots ㉠$$

$$n\times\frac{x}{x+3}\times\frac{3}{x+3}=\frac{12}{5} \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\frac{12}{x+3}=\frac{12}{5} \qquad \therefore x=2$$

$x=2$를 ㉠에 대입하면

$$\frac{2}{5}n=4 \qquad \therefore n=10$$

$$\therefore x+n=12$$

답 **12**

315

전략 빨간 공이 나오는 횟수를 X, 총상금을 Y원으로 놓고 X, Y 사이의 관계식을 구한다.

빨간 공이 나오는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5,\ \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=5\times\frac{2}{5}=2$$

이때 파란 공이 나오는 횟수는 $5-X$이므로 총상금을 확률변수 Y원이라 하면

$$\begin{aligned} Y&=100X+200(5-X) \\ &=-100X+1000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \mathrm{E}(Y)&=\mathrm{E}(-100X+1000) \\ &=-100\mathrm{E}(X)+1000 \\ &=-100\times 2+1000 \\ &=800 \end{aligned}$$

따라서 구하는 기댓값은 800원이다.

답 **800원**

316

전략 예약을 취소하는 고객의 수를 X로 놓고 확률변수 X의 확률분포를 구한다.

예약을 취소하는 고객의 수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(50,\ 0.1)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{50}\mathrm{C}_x\times 0.1^x\times 0.9^{50-x}$$

$$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 50)$$

따라서 객실이 부족할 확률은

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(X\le 1) \\ &=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1) \\ &={}_{50}\mathrm{C}_0\times 0.9^{50}+{}_{50}\mathrm{C}_1\times 0.1\times 0.9^{49} \\ &=0.0052+50\times 0.1\times 0.0057 \\ &=0.0337 \end{aligned}$$

답 **0.0337**

317

전략 주사위를 15번 던져서 2 이하의 눈이 나오는 횟수를 Y로 놓고 확률변수 Y의 확률분포를 구한다.

주사위를 15번 던져서 2 이하의 눈이 나오는 횟수를 Y라 하면 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(15,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(Y)=15\times\frac{1}{3}=5$$

이때 3 이상의 눈이 나오는 횟수는 $15-Y$이므로 주어진 시행을 15번 반복하여 이동된 점 P의 좌표는

$$(3Y,\ 15-Y)$$

확률변수 X는 점 P와 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리이므로

$$X=\frac{|3\times 3Y+4(15-Y)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=Y+12$$

$$\begin{aligned} \therefore \mathrm{E}(X)&=\mathrm{E}(Y+12)=\mathrm{E}(Y)+12 \\ &=5+12=17 \end{aligned}$$

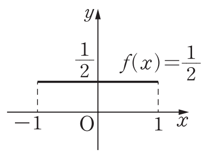
답 ③

04 연속확률변수의 확률분포

● 본책 142~147쪽

318

ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는

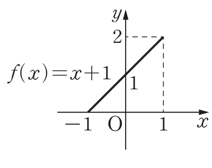


$$2\times\frac{1}{2}=1$$

따라서 $f(x)$는 확률밀도함수가 될 수 있다.

ㄴ. $-1\le x<0$에서 $f(x)<0$이므로 $f(x)$는 확률밀도함수가 될 수 없다.

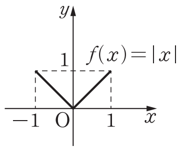
ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$$

따라서 $f(x)$는 확률밀도함수가 될 수 없다.

ㄹ. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times1\times1=1$$

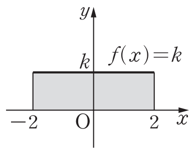
따라서 $f(x)$는 확률밀도함수가 될 수 있다.

이상에서 확률밀도함수가 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

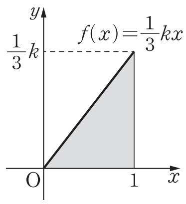
319

(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$4\times k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{4}$$

(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



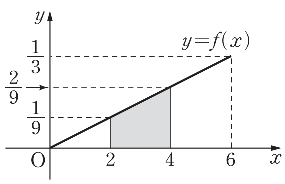
$$\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{3}k=1$$

$$\therefore k=6$$

답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) 6

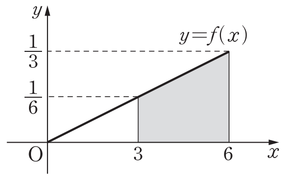
320

(1) $\mathrm{P}(2\le X\le4)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$$\mathrm{P}(2\le X\le4)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\right)\times2=\frac{1}{3}$$

(2) $\mathrm{P}(X\ge3)$은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=3$, $x=6$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$$\mathrm{P}(X\ge3)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)\times3=\frac{3}{4}$$

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{3}{4}$

다른 풀이 (2) $\mathrm{P}(X\ge3)=1-\mathrm{P}(0\le X<3)$

$$=1-\frac{1}{2}\times3\times\frac{1}{6}=\frac{3}{4}$$

321

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=5$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

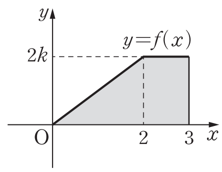
$$\frac{1}{2}\times2\times k+\frac{1}{2}\times3\times k=1$$

$$\frac{5}{2}k=1 \qquad \therefore k=\frac{2}{5}$$

답 $\frac{2}{5}$

322

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

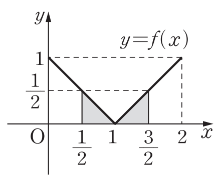


$$\frac{1}{2}\times(1+3)\times2k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

323

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le\frac{3}{2}\right)$은 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{2}$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



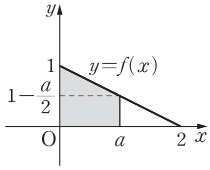
$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

324

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



$\mathrm{P}(0\le X\le a)$는 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=a$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로 $\mathrm{P}(0\le X\le a)=\frac{3}{4}$에서

$$\frac{1}{2}\times\left\{1+\left(1-\frac{a}{2}\right)\right\}\times a=\frac{3}{4}$$

$$a^2-4a+3=0,\qquad (a-1)(a-3)=0$$

$\therefore$ $a=1$ 또는 $a=3$

이때 $0\le a\le 2$이므로

$a=1$

답 **1**

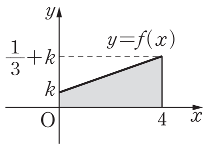
연습 문제

본책 148쪽

325

전략 확률밀도함수의 성질을 이용하여 k의 값을 구한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$\frac{1}{2}\times\left\{k+\left(\frac{1}{3}+k\right)\right\}\times 4=1,\qquad 4k+\frac{2}{3}=1$$

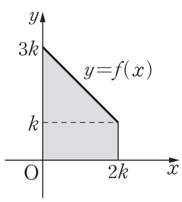
$\therefore$ $k=\frac{1}{12}$

답 $\mathbf{\frac{1}{12}}$

326

전략 확률밀도함수의 성질을 이용하여 k의 값을 구한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2k$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

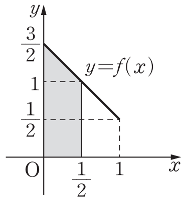


$$\frac{1}{2}\times(3k+k)\times 2k=1$$

$$4k^2=1,\qquad k^2=\frac{1}{4}$$

$\therefore$ $k=\frac{1}{2}$ ($\because$ $k>0$)

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}-x$이므로



$$\mathrm{P}(0\le X\le k)$$
$$=\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}+1\right)\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{5}{8}$$

답 $\mathbf{\frac{5}{8}}$

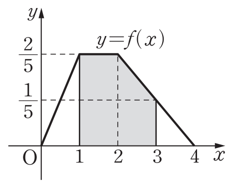
327

전략 확률밀도함수의 성질을 이용하여 k의 값을 구한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2}\times(1+4)\times k=1\qquad\therefore\ k=\frac{2}{5}$$

따라서 $2\le x\le 4$에서



$$f(x)=-\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}$$

이므로 $\quad f(3)=\frac{1}{5}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(1\le X\le 3)$

$$=1\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right)\times 1$$
$$=\frac{7}{10}$$

답 $\mathbf{\frac{7}{10}}$

328

전략 주어진 조건과 확률밀도함수의 성질을 이용하여 a, b, c에 대한 식을 세운다.

확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2}ac=1\qquad\therefore\ ac=2\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

$\mathrm{P}(X\le b)+\mathrm{P}(X\ge b)=1$,

$\mathrm{P}(X\le b)-\mathrm{P}(X\ge b)=\frac{1}{4}$이므로

$$\mathrm{P}(X\le b)=\frac{5}{8},\ \mathrm{P}(X\ge b)=\frac{3}{8}$$

$\mathrm{P}(X\le b)$는 확률밀도함수의 그래프와 x축 및 직선 $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}(X\le b)=\frac{5}{8}$에서

$$\frac{1}{2}\times b\times c=\frac{5}{8}\qquad\therefore\ bc=\frac{5}{4}\qquad\cdots\cdots\ ㉡$$

한편 $P(X\le\sqrt{5})=\frac{1}{2}$에서

$b>\sqrt{5}$

이때 두 점 $(0,\ 0)$, $(b,\ c)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{c}{b}x$이므로

$$P(X\le\sqrt{5})=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\left(\frac{c}{b}\times\sqrt{5}\right)=\frac{1}{2}$$

$\therefore b=5c$

이것을 ㉡에 대입하면

$$5c^2=\frac{5}{4},\qquad c^2=\frac{1}{4}$$

$\therefore c=\frac{1}{2}\ (\because c>0)$

따라서 ㉠, ㉡에서

$a=4,\ b=\frac{5}{2}$

$\therefore a+b+c=7$

답 ④

329

전략 확률밀도함수의 그래프가 y축에 대하여 대칭일 때, 양수 a에 대하여 $P(-a\le X\le 0)=P(0\le X\le a)$임을 이용한다.

조건 ㈎에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, $P(-2\le X\le 2)=1$이므로

$$P(-2\le X\le 0)=P(0\le X\le 2)=\frac{1}{2}$$

이때 조건 ㈏에서 $P\left(\frac{3}{2}\le X\le 2\right)=5P\left(0\le X\le\frac{3}{2}\right)$

이므로

$$\begin{aligned}&P(0\le X\le 2)\\&=P\left(0\le X\le\frac{3}{2}\right)+P\left(\frac{3}{2}\le X\le 2\right)\\&=P\left(0\le X\le\frac{3}{2}\right)+5P\left(0\le X\le\frac{3}{2}\right)\\&=6P\left(0\le X\le\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\therefore P\left(0\le X\le\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{12}$

$$\begin{aligned}\therefore P\left(|X|\le\frac{3}{2}\right)&=P\left(-\frac{3}{2}\le X\le\frac{3}{2}\right)\\&=2P\left(0\le X\le\frac{3}{2}\right)\\&=2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{6}$

05 정규분포

● 본책 149~157쪽

330

답 (1) **N(5, 3^2)** (2) **N(12, 4^2)**

331

답 (1) **낮아진다** (2) **변한다**

332

(1) $P(1\le Z\le 2)=P(0\le Z\le 2)-P(0\le Z\le 1)$
$=0.4772-0.3413=0.1359$

(2) $P(Z\ge 2)=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)$
$=0.5-0.4772=0.0228$

(3) $P(Z\le 0.5)=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 0.5)$
$=0.5+0.1915=0.6915$

(4) $P(-1\le Z\le 1.5)$
$=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1.5)$
$=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 1.5)$
$=0.3413+0.4332=0.7745$

답 (1) **0.1359** (2) **0.0228** (3) **0.6915** (4) **0.7745**

333

답 (1) $Z=\frac{X-8}{2}$ (2) $Z=\frac{X-20}{5}$

334

정규분포곡선은 직선 $x=20$에 대하여 대칭이므로

$P(X\le a)=P(X\ge 29)$에서

$$\frac{a+29}{2}=20,\qquad a+29=40$$

$\therefore a=11$

답 **11**

335

$y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이다.

ㄱ. $P(X\ge m)=P(X\le m)=0.5$ (참)

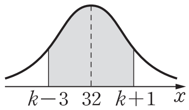
ㄷ. m의 값이 일정할 때, σ의 값이 작아지면 $y=f(x)$의 그래프의 높이는 높아진다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 **ㄱ, ㄴ, ㄹ**

336

정규분포곡선은 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=32$에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{P}(k-3\le X\le k+1)$이 최대가 되려면



$$\frac{(k-3)+(k+1)}{2}=32$$

$k-1=32$ $\quad\therefore k=33$

답 **33**

해설 Focus

$\mathrm{P}(k-3\le X\le k+1)$에서

$k+1-(k-3)=4$

로 일정하고 X의 확률밀도함수는 $x=32$에서 최댓값을 가지므로 위의 그림과 같이 $\frac{(k-3)+(k+1)}{2}=32$일 때, $\mathrm{P}(k-3\le X\le k+1)$은 최대이다.

337

$Z=\frac{X-60}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(48\le X\le 64)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{48-60}{4}\le Z\le \frac{64-60}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(-3\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(-3\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 3)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4987+0.3413=0.84$

(2) $|X-64|\le 4$에서

$-4\le X-64\le 4$ $\quad\therefore 60\le X\le 68$

$\therefore \mathrm{P}(|X-64|\le 4)$

$=\mathrm{P}(60\le X\le 68)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{60-60}{4}\le Z\le \frac{68-60}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$

답 (1) **0.84** (2) **0.4772**

338

$Z=\frac{X-32}{5}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(28\le X\le 36)=0.5762$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{28-32}{5}\le Z\le \frac{36-32}{5}\right)=0.5762$

$\mathrm{P}(-0.8\le Z\le 0.8)=0.5762$

$\mathrm{P}(-0.8\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.8)=0.5762$

$2\mathrm{P}(0\le Z\le 0.8)=0.5762$

$\therefore \mathrm{P}(0\le Z\le 0.8)=0.2881$

$\therefore \mathrm{P}(X\ge 28)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{28-32}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge -0.8)$

$=\mathrm{P}(Z\le 0.8)$

$=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.8)$

$=0.5+0.2881=0.7881$

답 **0.7881**

다른 풀이 $\frac{28+36}{2}=32$이므로

$\mathrm{P}(28\le X\le 32)=\mathrm{P}(32\le X\le 36)=0.2881$

$\therefore \mathrm{P}(X\ge 28)=\mathrm{P}(28\le X\le 32)+\mathrm{P}(X\ge 32)$

$=0.2881+0.5$

$=0.7881$

339

$Z=\frac{X-16}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(k\le X\le 22)=0.9759$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{k-16}{2}\le Z\le \frac{22-16}{2}\right)=0.9759$

$\mathrm{P}\left(\frac{k-16}{2}\le Z\le 3\right)=0.9759$

$\mathrm{P}\left(\frac{k-16}{2}\le Z\le 0\right)+\mathrm{P}(0\le Z\le 3)=0.9759$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{16-k}{2}\right)+0.4987=0.9759$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{16-k}{2}\right)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\frac{16-k}{2}=2$ $\quad\therefore k=12$

답 **12**

참고 $\mathrm{P}\left(\frac{k-16}{2}\le Z\le 3\right)=0.9759>\mathrm{P}(0\le Z\le 3)$에서

$\frac{k-16}{2}<0$

340

$Z=\frac{X-m}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\le 45)=0.1587$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{45-m}{10}\right)=0.1587$$
$$\mathrm{P}(Z\le 0)-\mathrm{P}\left(\frac{45-m}{10}\le Z\le 0\right)=0.1587$$
$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{m-45}{10}\right)=0.1587$$
$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{m-45}{10}\right)=0.3413$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$$\frac{m-45}{10}=1\qquad\therefore\ m=55$$

답 **55**

341

학생들의 몸무게를 X kg이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(53,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-53}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ &\mathrm{P}(50\le X\le 65)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{50-53}{6}\le Z\le\frac{65-53}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.1915+0.4772=0.6687\end{aligned}$$

따라서 몸무게가 50 kg 이상 65 kg 이하인 학생은 전체의 66.87 %이다.

답 **66.87 %**

342

연필의 길이를 X mm라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(154,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-154}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(X\le 148)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{148-154}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -1.5)=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.43\\&=0.07\end{aligned}$$

따라서 길이가 148 mm 이하인 연필은

$400\times 0.07=28$(자루)

답 **28자루**

343

유진이가 등교하는 데 걸리는 시간을 X분이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 5^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-40}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

학교에 8시 40분이 지난 후에 도착하면, 즉 $X>48$이면 지각이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X>48)&=\mathrm{P}\left(Z>\frac{48-40}{5}\right)=\mathrm{P}(Z>1.6)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.6)\\&=0.5-0.4452=0.0548\end{aligned}$$

답 **0.0548**

344

수험생의 성적을 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(75,\ 9^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-75}{9}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

상위 10 %에 속하는 수험생의 최저 점수를 k점이라 하면 $\mathrm{P}(X\ge k)=0.1$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k-75}{9}\right)=0.1$$
$$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-75}{9}\right)=0.1$$
$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-75}{9}\right)=0.1$$
$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-75}{9}\right)=0.4$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.28)=0.4$이므로

$$\frac{k-75}{9}=1.28\qquad\therefore\ k=86.52$$

따라서 상위 10 %에 속하는 수험생의 최저 점수는 86.52점이다.

답 **86.52점**

345

학생의 키를 X cm라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(165,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-165}{10}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

키가 작은 쪽에서 100번째인 학생의 키를 k cm라 하면

$\mathrm{P}(X \le k)=\dfrac{100}{500}=0.2$에서

$$\mathrm{P}\left(Z \le \frac{k-165}{10}\right)=0.2$$

$$\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{165-k}{10}\right)=0.2$$

$$\mathrm{P}(Z \ge 0)-\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{165-k}{10}\right)=0.2$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{165-k}{10}\right)=0.2$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{165-k}{10}\right)=0.3$$

이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.84)=0.3$이므로

$$\frac{165-k}{10}=0.84 \qquad \therefore k=156.6$$

따라서 키가 작은 쪽에서 100번째인 학생의 키는 156.6 cm이다.

답 **156.6 cm**

연습 문제

본책 158~160쪽

346

전략 정규분포곡선의 성질을 이용하여 m_1, m_2와 σ_1, σ_2의 대소를 비교한다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 각각 직선 $x=m_1$, $x=m_2$에 대하여 대칭이므로

$$m_1 < m_2$$

또 곡선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$보다 가운데 부분의 높이가 낮고 양옆으로 퍼진 모양이므로

$$\sigma_1 < \sigma_2$$

답 ④

347

전략 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 판별식의 조건을 이용하여 Z의 값의 범위를 구한다.

이차방정식 $x^2+Zx+1=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식을 D라 할 때

$$D=Z^2-4>0$$

$$\therefore Z<-2 \text{ 또는 } Z>2$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(Z<-2 \text{ 또는 } Z>2)\\&=\mathrm{P}(Z<-2)+\mathrm{P}(Z>2)\\&=2\mathrm{P}(Z>2)\\&=2\{\mathrm{P}(Z \ge 0)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)\}\\&=2\times(0.5-0.4772)=2\times0.0228\\&=0.0456\end{aligned}$$

답 **0.0456**

348

전략 확률변수 Y가 따르는 정규분포를 구한다.

$\mathrm{E}(X)=42$, $\sigma(X)=3$이므로

$$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X+4)=2\mathrm{E}(X)+4=88,$$

$$\sigma(Y)=\sigma(2X+4)=|2|\sigma(X)=6$$

이때 X가 정규분포 $\mathrm{N}(42,\ 3^2)$을 따르므로 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(88,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{Y-88}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y \ge 100)&=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{100-88}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z \ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z \ge 0)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

답 **0.0228**

다른 풀이 $Y=2X+4$이므로 $Y \ge 100$에서

$$2X+4 \ge 100 \qquad \therefore X \ge 48$$

$Z=\dfrac{X-42}{3}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y \ge 100)&=\mathrm{P}(X \ge 48)\\&=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{48-42}{3}\right)=\mathrm{P}(Z \ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z \ge 0)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

349

전략 수험생의 시험 점수를 X점으로 놓고 확률변수 X를 표준화한다.

수험생의 시험 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(68,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-68}{10}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(55\le X\le 78)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{55-68}{10}\le Z\le \frac{78-68}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(-1.3\le Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(-1.3\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.3)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.4032+0.3413=0.7445\end{aligned}$$

답 ②

350

전략 내용물의 용량을 X mL로 놓고 확률변수 X를 표준화한다.

내용물의 용량을 X mL라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(180,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-180}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ &\mathrm{P}(186\le X\le 188)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{186-180}{4}\le Z\le \frac{188-180}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(1.5\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.4772-0.4332=0.044\end{aligned}$$

따라서 내용물의 용량이 186 mL 이상 188 mL 이하인 음료수는

$500\times 0.044=22$(캔)

답 22캔

351

전략 수험생의 시험 성적을 X점, 합격자의 최저 점수를 k점으로 놓고 $\mathrm{P}(X\ge k)=\frac{800}{4000}$임을 이용한다.

수험생의 시험 성적을 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(248,\ 50^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-248}{50}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

합격자의 최저 점수를 k점이라 하면

$\mathrm{P}(X\ge k)=\frac{800}{4000}=0.2$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{k-248}{50}\right)=0.2$$

$$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-248}{50}\right)=0.2$$

$$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-248}{50}\right)=0.2$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-248}{50}\right)=0.3$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.84)=0.3$이므로

$$\frac{k-248}{50}=0.84 \qquad \therefore\ k=290$$

따라서 합격자의 최저 점수는 290점이다.

답 290점

352

전략 세 곡선의 대칭축의 위치와 높이를 비교하여 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. x의 값이 클수록 A의 곡선이 B의 곡선보다 위쪽에 위치하므로 성적이 우수한 학생들은 A 고등학교에 더 많다. (참)

ㄴ. A, B 두 고등학교 학생들의 성적의 평균은 같다. (거짓)

ㄷ. B의 곡선이 C의 곡선보다 가운데 부분의 높이가 더 높으므로 B 고등학교 학생들의 성적의 표준편차가 C 고등학교 학생들의 성적의 표준편차보다 더 작다.
따라서 B 고등학교 학생들의 성적이 더 고르다. (참)

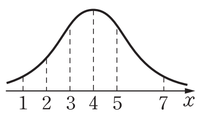
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

353

전략 확률변수 X를 표준화한다.

정규분포곡선은 오른쪽 그림과 같으므로



$$\mathrm{P}(1\le X\le 2)<\mathrm{P}(2\le X\le 3)<\mathrm{P}(4\le X\le 5),$$
$$\mathrm{P}(X\ge 7)<\mathrm{P}(X\le 2)$$

$Z=\frac{X-4}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}① \ \mathrm{P}(1\le X\le 2)&=\mathrm{P}\left(\frac{1-4}{2}\le Z\le \frac{2-4}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le -1)\\&=\mathrm{P}(1\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.4332-0.3413=0.0919\end{aligned}$$

⑤ $P(X\ge7)=P\left(Z\ge\frac{7-4}{2}\right)=P(Z\ge1.5)$

$=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le1.5)$

$=0.5-0.4332=0.0668$

따라서 $P(1\le X\le2)>P(X\ge7)$이므로 확률이 가장 작은 것은 ⑤ $P(X\ge7)$이다. 답 ⑤

354

전략 두 확률변수 X, Y를 각각 표준화한다.

확률변수 X는 정규분포 $N(5, 3^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-5}{3}$로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$\therefore P(X\ge k)=P\left(Z_X\ge\frac{k-5}{3}\right)$

또 확률변수 Y는 정규분포 $N(16, 4^2)$을 따르므로

$Z_Y=\frac{Y-16}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$\therefore P(Y\le -k)=P\left(Z_Y\le\frac{-k-16}{4}\right)$

$P(X\ge k)=P(Y\le -k)$에서

$P\left(Z_X\ge\frac{k-5}{3}\right)=P\left(Z_Y\le\frac{-k-16}{4}\right)$

즉 $\frac{k-5}{3}+\frac{-k-16}{4}=0$이므로

$4k-20-3k-48=0$

$\therefore k=68$ 답 68

355

전략 주어진 부등식을 이용하여 m의 값을 구한다.

(i) $f(8)>f(14)$에서

$|m-8|<|m-14|$

ⓐ $m\le8$일 때, $8-m<14-m$

이 부등식은 항상 성립한다.

ⓑ $8<m\le14$일 때, $m-8<14-m$

$\therefore 8<m<11$ ($\because 8<m\le14$)

ⓒ $m>14$일 때, $m-8<m-14$

이 부등식은 성립하지 않는다.

이상에서 $m<11$

(ii) $f(2)<f(16)$에서

$|m-2|>|m-16|$

(i)과 같은 방법으로 하면 $m>9$

(i), (ii)에서 $9<m<11$

$\therefore m=10$ ($\because m$은 자연수)

따라서 확률변수 X가 정규분포 $N(10, 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-10}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$\therefore P(X\le6)=P\left(Z\le\frac{6-10}{4}\right)$

$=P(Z\le-1)=P(Z\ge1)$

$=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le1)$

$=0.5-0.3413=0.1587$

답 ⑤

356

전략 세 과목의 성적을 확률변수로 놓고 각각 표준화한다.

A의 반 학생들의 국어, 영어, 수학 성적을 각각 X_1점, X_2점, X_3점이라 하면 확률변수 X_1, X_2, X_3은 각각 정규분포 $N(50, 13^2)$, $N(64, 17^2)$, $N(62, 14^2)$을 따르므로

$Z_1=\frac{X_1-50}{13}$, $Z_2=\frac{X_2-64}{17}$, $Z_3=\frac{X_3-62}{14}$

로 놓으면 확률변수 Z_1, Z_2, Z_3은 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

다른 학생들이 A보다 국어, 영어, 수학 성적이 높을 확률은 각각

$P(X_1>65)=P\left(Z_1>\frac{65-50}{13}\right)$

$=P\left(Z_1>\frac{15}{13}\right)$

$P(X_2>82)=P\left(Z_2>\frac{82-64}{17}\right)$

$=P\left(Z_2>\frac{18}{17}\right)$

$P(X_3>75)=P\left(Z_3>\frac{75-62}{14}\right)$

$=P\left(Z_3>\frac{13}{14}\right)$

이때 $P\left(Z_1>\frac{15}{13}\right)<P\left(Z_2>\frac{18}{17}\right)<P\left(Z_3>\frac{13}{14}\right)$이므로

$P(X_1>65)<P(X_2>82)<P(X_3>75)$

따라서 A의 성적이 상대적으로 좋은 과목부터 순서대로 나열하면 국어, 영어, 수학이므로 상대적으로 성적이 가장 좋은 과목은 국어이다. 답 국어

참고 A보다 성적이 높을 확률이 낮은 과목일수록 A의 성적이 상대적으로 좋다고 할 수 있다.

357

전략 주어진 조건을 이용하여 m_1의 값을 구하고 Y를 X에 대한 식으로 나타낸다.

$\mathrm{P}(X\le x)=\mathrm{P}(X\ge 40-x)$에서

$$m_1=\frac{x+(40-x)}{2}=20$$

$\mathrm{P}(Y\le x)=\mathrm{P}(X\le x+10)$에서

$$\mathrm{P}(Y\le x)=\mathrm{P}(X-10\le x)$$

이 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$$Y=X-10$$

따라서 $\mathrm{P}(15\le X\le 20)+\mathrm{P}(15\le Y\le 20)=0.4772$에서

$$\mathrm{P}(15\le X\le 20)+\mathrm{P}(15\le X-10\le 20)=0.4772$$

$$\therefore \mathrm{P}(15\le X\le 20)+\mathrm{P}(25\le X\le 30)=0.4772 \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(20, \sigma_1^{\,2})$을 따르므로 $Z=\frac{X-20}{\sigma_1}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서 ㉠에서

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(15\le X\le 20)+\mathrm{P}(25\le X\le 30)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{15-20}{\sigma_1}\le Z\le \frac{20-20}{\sigma_1}\right)\\&\quad+\mathrm{P}\left(\frac{25-20}{\sigma_1}\le Z\le \frac{30-20}{\sigma_1}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-\frac{5}{\sigma_1}\le Z\le 0\right)+\mathrm{P}\left(\frac{5}{\sigma_1}\le Z\le \frac{10}{\sigma_1}\right)\\&=\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{5}{\sigma_1}\right)+\mathrm{P}\left(\frac{5}{\sigma_1}\le Z\le \frac{10}{\sigma_1}\right)\\&=\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{10}{\sigma_1}\right)=0.4772\end{aligned}$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$$\frac{10}{\sigma_1}=2 \qquad \therefore \sigma_1=5$$

따라서 $\sigma_2=\sigma(X-10)=\sigma(X)=\sigma_1=5$이므로

$$m_1+\sigma_2=25$$

답 25

06 이항분포와 정규분포의 관계

● 본책 161~163쪽

358

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(48, \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=48\times\frac{3}{4}=36$$

$$\mathrm{V}(X)=48\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=9$$

이때 48은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(36, 3^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-36}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(33\le X\le 39)&=\mathrm{P}\left(\frac{33-36}{3}\le Z\le \frac{39-36}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=2\times 0.3413=0.6826\end{aligned}$$

답 **0.6826**

359

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=450\times\frac{2}{3}=300$$

$$\mathrm{V}(X)=450\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=100$$

이때 450은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(300, 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-300}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X\ge 280)&=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{280-300}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -2)=\mathrm{P}(Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5+0.4772\\&=0.9772\end{aligned}$$

답 **0.9772**

360

제품 1개가 불량품일 확률은 $\frac{1}{10}$이므로 100개의 제품

중 불량품의 개수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{10}\right)$을 따른다.

$$\therefore E(X)=100\times\frac{1}{10}=10$$
$$V(X)=100\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}=9$$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(10, 3^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-10}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} &P(7\le X\le 16)\\ &=P\left(\frac{7-10}{3}\le Z\le\frac{16-10}{3}\right)\\ &=P(-1\le Z\le 2)\\ &=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)\\ &=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 2)\\ &=0.3413+0.4772\\ &=0.8185 \end{aligned}$$

답 **0.8185**

361

동전 2개를 동시에 던져서 2개 모두 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$이므로 432번의 시행 중 2개 모두 앞면이 나오는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(432, \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$$\therefore E(X)=432\times\frac{1}{4}=108$$
$$V(X)=432\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=81$$

이때 432는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(108, 9^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-108}{9}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X\le 90)&=P\left(Z\le\frac{90-108}{9}\right)\\ &=P(Z\le -2)=P(Z\ge 2)\\ &=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)\\ &=0.5-0.4772=0.0228 \end{aligned}$$

답 **0.0228**

362

가위바위보를 한 번 하여 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 가위바위보를 72번 하여 이기는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(72, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$$\therefore E(X)=72\times\frac{1}{3}=24$$
$$V(X)=72\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=16$$

이때 72는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(24, 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-24}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(X\ge k)=0.16$에서

$$P\left(Z\ge\frac{k-24}{4}\right)=0.16$$
$$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{k-24}{4}\right)=0.16$$
$$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{k-24}{4}\right)=0.16$$
$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{k-24}{4}\right)=0.34$$

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.34$이므로

$$\frac{k-24}{4}=1 \qquad \therefore k=28$$

답 **28**

연습 문제 ● 본책 164쪽

363

전략 확률변수 X가 근사적으로 정규분포를 따름을 이용한다.

확률변수 X가 이항분포 $B(100, p)$를 따르므로

$$E(X)=100p \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포를 따른다.

따라서 $P(X\ge 25)=0.5$에서

$$E(X)=25 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\quad 100p=25 \quad \therefore p=\frac{1}{4}$

즉 $V(X)=100\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{75}{4}$이므로

$$V(2X)=2^2V(X)=4\times\frac{75}{4}=75$$

답 **75**

364

전략 B 영화를 관람하는 관객의 수를 X로 놓고 확률변수 X가 근사적으로 정규분포를 따름을 이용한다.

한 명의 관객이 B 영화를 관람할 확률은 $\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$이므로 150명의 관객 중 B 영화를 관람하는 관객의 수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(150,\ \frac{2}{5}\right)$를 따른다.

$$\therefore \mathrm{E}(X)=150\times\frac{2}{5}=60$$

$$\mathrm{V}(X)=150\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=36$$

이때 150은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-60}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge54)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{54-60}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge-1)=\mathrm{P}(Z\le1)\\&=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.5+0.3413=0.8413\end{aligned}$$

답 **0.8413**

365

전략 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{n-x}$이면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따른다.

주어진 식은 한 번의 시행에서 일어날 확률이 $\frac{1}{5}$인 사건이 100번의 독립시행에서 22번 이상 일어날 확률이다.

한 번의 시행에서 어떤 사건이 일어날 확률이 $\frac{1}{5}$일 때, 100번의 독립시행에서 이 사건이 일어나는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{5}=20$$

$$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=16$$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-20}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}&(\text{주어진 식})\\&=\mathrm{P}(X=22)+\mathrm{P}(X=23)+\cdots\\&\quad+\mathrm{P}(X=100)\\&=\mathrm{P}(X\ge22)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{22-20}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)\\&=0.5-0.1915=0.3085\end{aligned}$$

답 **0.3085**

366

전략 1 또는 2의 눈이 나오는 횟수를 X로 놓고 확률변수 X가 근사적으로 정규분포를 따름을 이용한다.

한 개의 주사위를 던져서 1 또는 2의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 한 개의 주사위를 450번 던질 때, 1 또는 2의 눈이 나오는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$$\therefore \mathrm{E}(X)=450\times\frac{1}{3}=150$$

$$\mathrm{V}(X)=450\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=100$$

이때 450은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-150}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(130\le X\le c)=0.8185$에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{130-150}{10}\le Z\le\frac{c-150}{10}\right)=0.8185$$

$$\mathrm{P}\left(-2\le Z\le\frac{c-150}{10}\right)=0.8185$$

$$\mathrm{P}(-2\le Z\le0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{c-150}{10}\right)=0.8185$$

$$\mathrm{P}(0\le Z\le2)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{c-150}{10}\right)=0.8185$$

$$0.4772+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{c-150}{10}\right)=0.8185$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{c-150}{10}\right)=0.3413$$

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$$\frac{c-150}{10}=1 \qquad \therefore c=160$$

답 **160**

367

전략 10점을 얻는 횟수를 확률변수 X로 놓고 점수가 832점 이상이기 위한 X의 값의 범위를 구한다.

1600번의 시행 중 10점을 얻는 횟수를 확률변수 X라 하면 2점을 잃는 횟수는 $1600-X$이므로 이 게임을 1600번 시행한 후의 점수는

$$10X-2(1600-X)=12X-3200$$

따라서 $12X-3200\ge 832$에서

$$X\ge 336$$

한편 확률변수 X는 이항분포 $B\left(1600, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$E(X)=1600\times\frac{1}{5}=320$$

$$V(X)=1600\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=256$$

이때 1600은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(320, 16^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-320}{16}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\ge 336)&=P\left(Z\ge\frac{336-320}{16}\right)\\&=P(Z\ge 1)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.3413=0.1587\end{aligned}$$

답 **0.1587**

2 통계적 추정

01 모집단과 표본

● 본책 166~167쪽

368

답 ㄱ

369

10장의 카드 중에서 2장을 뽑는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_{10}\Pi_2=10^2=100$$

답 **100**

02 모평균과 표본평균

● 본책 168~173쪽

370

(1) 표본이 (1, 1)일 때, $\overline{X}=1$

표본이 (1, 3), (3, 1)일 때, $\overline{X}=2$

표본이 (1, 5), (3, 3), (5, 1)일 때, $\overline{X}=3$

표본이 (3, 5), (5, 3)일 때, $\overline{X}=4$

표본이 (5, 5)일 때, $\overline{X}=5$

따라서 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	1	2	3	4	5	합계
$P(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(2) $E(\overline{X})$

$$=1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{2}{9}+5\times\frac{1}{9}$$

$$=3$$

$$V(\overline{X})=1^2\times\frac{1}{9}+2^2\times\frac{2}{9}+3^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{2}{9}+5^2\times\frac{1}{9}-3^2$$

$$=\frac{4}{3}$$

$$\sigma(\overline{X})=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

답 풀이 참조

371

(1) $E(\overline{X})=30$

(2) $V(\overline{X})=\frac{16}{100}=\frac{4}{25}$

(3) $\sigma(\overline{X})=\frac{4}{\sqrt{100}}=\frac{2}{5}$

답 (1) **30** (2) $\mathbf{\frac{4}{25}}$ (3) $\mathbf{\frac{2}{5}}$

372

(1) 모평균이 200, 모표준편차가 10, 표본의 크기가 100이므로

$$E(\overline{X})=200$$

$$\sigma(\overline{X})=\frac{10}{\sqrt{100}}=1$$

(2) 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(200,\ 1^2)$을 따르므로 $Z=\overline{X}-200$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(\overline{X}\ge 202)&=P(Z\ge 202-200)\\&=P(Z\ge 2)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

답 (1) **평균: 200, 표준편차: 1** (2) **0.0228**

373

모평균이 40이므로

$$a=E(\overline{X})=40$$

모분산이 4, 표본의 크기가 n이므로

$$V(\overline{X})=\frac{4}{n}$$

즉 $\frac{4}{n}=\frac{1}{15}$에서 $n=60$

$\therefore a+n=100$

답 **100**

374

확률변수 X에 대하여

$$E(X)=0\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$$

$$\begin{aligned}V(X)&=0^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{2}+4^2\times\frac{1}{6}-\left(\frac{5}{3}\right)^2\\&=\frac{17}{9}\end{aligned}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{17}{9}}=\frac{\sqrt{17}}{3}$$

이때 표본의 크기가 9이므로

$$E(\overline{X})=\frac{5}{3}$$

$$\sigma(\overline{X})=\frac{\frac{\sqrt{17}}{3}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{17}}{9}$$

답 $\mathbf{E(\overline{X})=\frac{5}{3},\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sqrt{17}}{9}}$

375

상자에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 숫자를 X라 하면 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	2	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

$E(X)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{6}=2$이므로

$$\begin{aligned}V(X)&=1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{2}+4^2\times\frac{1}{6}-2^2\\&=1\end{aligned}$$

이때 표본의 크기가 4이므로

$$V(\overline{X})=\frac{1}{4}$$

$$\therefore V(2\overline{X}+3)=2^2V(\overline{X})=4\times\frac{1}{4}=1$$

답 **1**

376

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(70,\ \frac{20^2}{100}\right)$, 즉 $N(70,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{\overline{X}-70}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(\overline{X}\ge 73)&=P\left(Z\ge\frac{73-70}{2}\right)\\&=P(Z\ge 1.5)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

답 **0.0668**

377

모집단이 정규분포 $N(200,\ 10^2)$을 따르므로 임의추출한 25명의 성적의 평균을 $\overline{X}$점이라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(200,\ \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $N(200,\ 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-200}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&P(198\le\overline{X}\le204)\\&=P\left(\frac{198-200}{2}\le Z\le\frac{204-200}{2}\right)\\&=P(-1\le Z\le2)\\&=P(-1\le Z\le0)+P(0\le Z\le2)\\&=P(0\le Z\le1)+P(0\le Z\le2)\\&=0.3413+0.4772\\&=0.8185\end{aligned}$$

답 **0.8185**

378

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(50,\ \frac{10^2}{n}\right)$을 따르므로

$$Z=\frac{\overline{X}-50}{\frac{10}{\sqrt{n}}}$$

으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 $P(\overline{X}\ge52)=0.1587$에서

$$P\left(Z\ge\frac{52-50}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right)=0.1587$$

$$P\left(Z\ge\frac{\sqrt{n}}{5}\right)=0.1587$$

$$P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)=0.1587$$

$$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)=0.3413$$

이때 $P(0\le Z\le1)=0.3413$이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{5}=1,\qquad \sqrt{n}=5$$

$$\therefore\ n=25$$

답 **25**

379

모집단이 정규분포 $N(1000,\ 50^2)$을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포

$N\left(1000,\ \frac{50^2}{100}\right)$, 즉 $N(1000,\ 5^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-1000}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(\overline{X}\ge k)=0.0228$에서

$$P\left(Z\ge\frac{k-1000}{5}\right)=0.0228$$

$$P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\frac{k-1000}{5}\right)=0.0228$$

$$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{k-1000}{5}\right)=0.4772$$

이때 $P(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$$\frac{k-1000}{5}=2,\qquad k-1000=10$$

$$\therefore\ k=1010$$

답 **1010**

03 모비율과 표본비율

● 본책 174~176쪽

380

모비율이 0.25, 표본의 크기가 1200이므로

$$E(\hat{p})=0.25=\frac{1}{4}$$

$$V(\hat{p})=\frac{0.25\times0.75}{1200}=\frac{1}{6400}$$

$$\therefore\ \frac{E(\hat{p})}{V(\hat{p})}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{6400}}=1600$$

답 **1600**

381

고등학생 100명 중에서 아르바이트를 하는 학생의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율은 0.2, 표본의 크기는 100이므로

$$E(\hat{p})=0.2$$

$$V(\hat{p})=\frac{0.2\times0.8}{100}=0.04^2$$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.2,\ 0.04^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\hat{p}-0.2}{0.04}$로 놓으면 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&P(\hat{p}\le 0.25)\\&=P\left(Z\le \frac{0.25-0.2}{0.04}\right)\\&=P(Z\le 1.25)\\&=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 1.25)\\&=0.5+0.3944\\&=0.8944\end{aligned}$$

답 **0.8944**

연습 문제

• 본책 177~179쪽

382

전략 모평균과 모분산을 이용하여 $\overline{X}$의 평균과 분산을 구한다.

주머니에서 임의로 1장의 카드를 꺼낼 때, 카드에 적힌 숫자를 X라 하면 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	3	5	7	9	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$$\begin{aligned}\therefore\ &E(X)\\&=1\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{5}+5\times\frac{1}{5}+7\times\frac{1}{5}+9\times\frac{1}{5}\\&=5\\&V(X)\\&=1^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{1}{5}+5^2\times\frac{1}{5}+7^2\times\frac{1}{5}\\&\quad+9^2\times\frac{1}{5}-5^2\\&=8\end{aligned}$$

이때 표본의 크기가 2이므로

$$E(\overline{X})=5,\ V(\overline{X})=\frac{8}{2}=4$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &E(\overline{X}^2)+V(4\overline{X}+2)\\&=V(\overline{X})+\{E(\overline{X})\}^2+4^2V(\overline{X})\\&=4+5^2+16\times 4=93\end{aligned}$$

답 **93**

383

전략 모분산을 구하여 $\overline{X}$의 분산을 n에 대한 식으로 나타낸다.

상자에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 숫자를 X라 하면 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

$E(X)=1\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{1}{3}+3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{3}$이므로

$$\begin{aligned}V(X)&=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{2}-\left(\frac{7}{3}\right)^2\\&=\frac{5}{9}\end{aligned}$$

이때 표본의 크기가 n이므로

$$V(\overline{X})=\frac{\frac{5}{9}}{n}=\frac{5}{9n}$$

즉 $\dfrac{5}{9n}=\dfrac{5}{36}$이므로 $\quad n=4$

답 **4**

384

전략 $\overline{X}$를 표준화하여 확률을 구한다.

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(170,\ \dfrac{12^2}{16}\right)$, 즉 $N(170,\ 3^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{\overline{X}-170}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ &P(164\le\overline{X}\le 173)\\&=P\left(\frac{164-170}{3}\le Z\le\frac{173-170}{3}\right)\\&=P(-2\le Z\le 1)\\&=P(-2\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1)\\&=P(0\le Z\le 2)+P(0\le Z\le 1)\\&=0.4772+0.3413\\&=0.8185\end{aligned}$$

답 **0.8185**

385

전략 $\overline{X}$를 표준화하고 표준정규분포표를 이용하여 m의 값을 구한다.

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따르므로 임의추출한 36명의 일주일 근무 시간의 평균을 $\overline{X}$시간이라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{5^2}{36}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{5}{6}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{5}{6}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\geq 38)=0.9332$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{38-m}{\frac{5}{6}}\right)=0.9332$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{38-m}{\frac{5}{6}}\leq Z\leq 0\right)+\mathrm{P}(Z\geq 0)=0.9332$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{38-m}{\frac{5}{6}}\leq Z\leq 0\right)=0.4332$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \frac{m-38}{\frac{5}{6}}\right)=0.4332$$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)=0.4332$이므로

$$\frac{m-38}{\frac{5}{6}}=1.5, \qquad m-38=1.25$$

$$\therefore\ m=39.25$$

답 ③

386

전략 표본비율이 근사적으로 따르는 정규분포를 구한다.

표본비율 $\hat{p}$의 평균과 분산은

$$\mathrm{E}(\hat{p})=0.4,\ \mathrm{V}(\hat{p})=\frac{0.4\times 0.6}{600}=0.02^2$$

이때 600은 충분히 큰 수이므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(0.4,\ 0.02^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\hat{p}-0.4}{0.02}$로 놓으면 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\hat{p}\leq 0.38)&=\mathrm{P}\left(Z\leq \frac{0.38-0.4}{0.02}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\leq -1)=\mathrm{P}(Z\geq 1)\\&=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

답 **0.1587**

387

전략 표본비율이 근사적으로 따르는 정규분포를 구하여 표본비율을 표준화한다.

100명 중에서 복지 정책을 지지하는 주민의 비율을 $\hat{p}$이라 하면

$$\mathrm{E}(\hat{p})=0.8,\ \mathrm{V}(\hat{p})=\frac{0.8\times 0.2}{100}=0.04^2$$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(0.8,\ 0.04^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\hat{p}-0.8}{0.04}$로 놓으면 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left(\frac{72}{100}\leq \hat{p}\leq \frac{84}{100}\right)\\&=\mathrm{P}(0.72\leq \hat{p}\leq 0.84)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{0.72-0.8}{0.04}\leq Z\leq \frac{0.84-0.8}{0.04}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\leq Z\leq 1)\\&=\mathrm{P}(-2\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)\\&=0.4772+0.3413\\&=0.8185\end{aligned}$$

답 **0.8185**

388

전략 $\overline{X}=0$, $\overline{X}=2$인 경우를 생각한다.

확률의 총합이 1이므로

$$a+2a+a=1 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{4}$$

$\overline{X}=0$인 경우를 순서쌍으로 나타내면

$(-2,\ 0,\ 2)$, $(0,\ 0,\ 0)$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\mathrm{P}(\overline{X}=0)\\&=3!\times\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right)+1\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{3}{16}+\frac{1}{8}=\frac{5}{16}\end{aligned}$$

또 $\overline{X}=2$인 경우를 순서쌍으로 나타내면

$(2,\ 2,\ 2)$

$$\therefore\ \mathrm{P}(\overline{X}=2)=1\times\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{64}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(\overline{X}=0)+\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\frac{21}{64}$$

답 $\mathbf{\dfrac{21}{64}}$

389

전략 표본평균이 따르는 정규분포를 구하여 표본평균을 표준화한다.

모집단이 정규분포 $N(60,\ 10^2)$을 따르므로 임의로 택한 딸기 25개의 무게의 평균을 $\overline{X}$ g이라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(60,\ \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $N(60,\ 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-60}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 1개의 상자가 무게 미달로 판정될 확률은

$$\begin{aligned}P(25\overline{X}\le 1400)&=P(\overline{X}\le 56)\\&=P\left(Z\le\frac{56-60}{2}\right)\\&=P(Z\le -2)=P(Z\ge 2)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

이때 상자의 개수가 $\frac{1000000}{25}=40000$이므로 무게 미달로 판정되는 상자의 개수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $B(40000,\ 0.0228)$을 따른다.

따라서 구하는 상자의 평균 개수는

$E(Y)=40000\times 0.0228=912$

답 **912**

390

전략 확률변수 X에 대한 확률을 이용하여 모평균과 모표준편차를 구한다.

$P(X\ge 3.4)=\frac{1}{2}$에서

$E(X)=3.4$

확률변수 X의 표준편차를 σ라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(3.4,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-3.4}{\sigma}$로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 $P(X\le 3.9)+P(Z\le -1)=1$에서

$P\left(Z_X\le\frac{3.9-3.4}{\sigma}\right)+P(Z\le -1)=1$

$\therefore\ P\left(Z_X\le\frac{0.5}{\sigma}\right)+P(Z\ge 1)=1$

즉 $\frac{0.5}{\sigma}=1$이므로 $\quad\sigma=0.5$

따라서 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(3.4,\ \frac{0.5^2}{25}\right)$, 즉 $N(3.4,\ 0.1^2)$을 따르므로 $\overline{Z}=\frac{\overline{X}-3.4}{0.1}$로 놓으면 확률변수 $\overline{Z}$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ P(\overline{X}\ge 3.55)&=P\left(\overline{Z}\ge\frac{3.55-3.4}{0.1}\right)\\&=P(\overline{Z}\ge 1.5)\\&=P(\overline{Z}\ge 0)-P(0\le\overline{Z}\le 1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

답 ③

391

전략 $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구하여 $\overline{X}$를 표준화한다.

모집단이 정규분포 $N(1400,\ 100^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포

$N\left(1400,\ \frac{100^2}{n}\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-1400}{\frac{100}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P\left(\overline{X}\ge 1350+\frac{165}{\sqrt{n}}\right)\ge 0.9$에서

$$P\left(Z\ge\frac{1350+\frac{165}{\sqrt{n}}-1400}{\frac{100}{\sqrt{n}}}\right)\ge 0.9$$

$$P\left(Z\ge 1.65-\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge 0.9$$

$$P\left(Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}-1.65\right)\ge 0.9$$

$$P(Z\le 0)+P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}-1.65\right)\ge 0.9$$

$$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}-1.65\right)\ge 0.4$$

그런데 $P(0\le Z\le 1.28)=0.4$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2}-1.65\ge 1.28,\qquad \sqrt{n}\ge 5.86$

$\therefore\ n\ge 34.3396$

따라서 n의 최솟값은 35이다.

답 **35**

392

전략 표본비율이 근사적으로 따르는 정규분포를 구하여 표본비율을 표준화한다.

스마트폰 중독 판정을 받은 학생의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 중독 판정을 받지 않은 학생의 비율은 $1-\hat{p}$이므로 구하는 확률은

$$P\left(1-\hat{p}\le\frac{210}{300}\right)=P(\hat{p}\ge0.3)$$

한편 모비율이 0.25이고, 표본의 크기가 300이므로

$$E(\hat{p})=0.25$$

$$V(\hat{p})=\frac{0.25\times0.75}{300}=0.025^2$$

이때 300은 충분히 큰 수이므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.25,\ 0.025^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-0.25}{0.025}$로 놓으면 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&P(\hat{p}\ge0.3)\\&=P\left(Z\ge\frac{0.3-0.25}{0.025}\right)=P(Z\ge2)\\&=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

답 **0.0228**

393

전략 $\overline{X}$에 대한 확률을 이용하여 X의 표준편차와 n에 대한 식을 세운다.

확률변수 X의 표준편차를 σ라 하면 X는 정규분포 $N(220,\ \sigma^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(220,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-220}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(\overline{X}\le215)=0.1587$에서

$$P\left(Z\le\frac{215-220}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)=0.1587$$

$$P\left(Z\ge\frac{5}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)=0.1587$$

$$P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\frac{5}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)=0.1587$$

$$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{5}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)=0.3413$$

이때 $P(0\le Z\le1)=0.3413$이므로

$$\frac{5}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=1\qquad\therefore\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=5$$

한편 확률변수 Y는 정규분포 $N(240,\ (1.5\sigma)^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $N\left(240,\ \frac{(1.5\sigma)^2}{9n}\right)$, 즉 $N\left(240,\ \frac{\sigma^2}{4n}\right)$을 따른다.

따라서 $\overline{Z}=\frac{\overline{Y}-240}{\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}}=\frac{\overline{Y}-240}{\frac{5}{2}}$으로 놓으면 확률변수 $\overline{Z}$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(\overline{Y}\ge235)&=P\left(\overline{Z}\ge\frac{235-240}{\frac{5}{2}}\right)\\&=P(\overline{Z}\ge-2)=P(\overline{Z}\le2)\\&=P(\overline{Z}\le0)+P(0\le\overline{Z}\le2)\\&=0.5+0.4772=0.9772\end{aligned}$$

답 ⑤

04 모평균의 추정

● 본책 180~184쪽

394

표본평균이 167, 표본의 크기가 64이고, 64는 충분히 큰 수이므로 모표준편차 대신 표본표준편차 12를 이용한다.

따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$167-1.96\times\frac{12}{\sqrt{64}}\le m\le167+1.96\times\frac{12}{\sqrt{64}}$$

$$\therefore\ 164.06\le m\le169.94$$

답 $\mathbf{164.06\le m\le169.94}$

395

표본평균이 150, 모표준편차가 5이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$150-2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le 150+2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}$$

이것이 $148.71\le m\le 151.29$와 같으므로

$$2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}=1.29$$

$$\sqrt{n}=10 \qquad \therefore\ n=100$$

답 **100**

396

모집단이 정규분포를 따르고 100은 충분히 큰 수이므로 모표준편차 대신 표본표준편차 15를 이용한다.
따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times2.58\times\frac{15}{\sqrt{100}}=7.74$$

답 **7.74**

397

모표준편차가 5이므로 표본의 크기를 n이라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}=\frac{25.8}{\sqrt{n}}$$

즉 $\frac{25.8}{\sqrt{n}}=0.3$이므로 $\qquad \sqrt{n}=86$

$$\therefore\ n=7396$$

따라서 구하는 표본의 크기는 7396이다. 답 **7396**

398

표본의 크기를 n이라 하면 신뢰도 95 %로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간은

$$\overline{x}-2\times\frac{30}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2\times\frac{30}{\sqrt{n}}$$

$$-2\times\frac{30}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le 2\times\frac{30}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore\ |m-\overline{x}|\le 2\times\frac{30}{\sqrt{n}}$$

이때 모평균과 표본평균의 차가 2 g 이하이어야 하므로

$$2\times\frac{30}{\sqrt{n}}\le 2, \qquad \sqrt{n}\ge 30$$

$$\therefore\ n\ge 900$$

따라서 적어도 900개의 제품을 추출하여 조사해야 한다.

답 **900개**

399

표본의 크기를 n이라 하면 신뢰도 99 %로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간은

$$\overline{x}-2.58\times\frac{75}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{75}{\sqrt{n}}$$

$$-2.58\times\frac{75}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le 2.58\times\frac{75}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore\ |m-\overline{x}|\le 2.58\times\frac{75}{\sqrt{n}}$$

이때 모평균과 표본평균의 차가 12.9 m 이하이어야 하므로

$$2.58\times\frac{75}{\sqrt{n}}\le 12.9, \qquad \sqrt{n}\ge 15$$

$$\therefore\ n\ge 225$$

따라서 표본의 크기의 최솟값은 225이다.

답 **225**

05 모비율의 추정

● 본책 185~187쪽

400

표본비율을 $\hat{p}$이라 하면

$$\hat{p}=\frac{144}{400}=0.36,\ \hat{q}=1-0.36=0.64$$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 모비율 p에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$0.36-2.58\sqrt{\frac{0.36\times0.64}{400}}\le p$$
$$\le 0.36+2.58\sqrt{\frac{0.36\times0.64}{400}}$$

$$\therefore\ 0.29808\le p\le 0.42192$$

답 **$0.29808\le p\le 0.42192$**

401

표본비율을 $\hat{p}$이라 하면

$$\hat{p}=\frac{1250}{2500}=0.5,\ \hat{q}=1-0.5=0.5$$

이때 2500은 충분히 큰 수이므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.5-1.96\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{2500}}\le p\le 0.5+1.96\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{2500}}$$

$\therefore\ 0.4804\le p\le 0.5196$

답 **$0.4804\le p\le 0.5196$**

402

표본비율을 $\hat{p}$이라 하면

$\hat{p}=0.8,\ \hat{q}=1-0.8=0.2$

이므로 모비율 p에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$0.8-2.58\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}\le p\le 0.8+2.58\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}$$

$\therefore\ 0.8-\frac{1.032}{\sqrt{n}}\le p\le 0.8+\frac{1.032}{\sqrt{n}}$

이것이 $0.671\le p\le 0.929$와 같으므로

$\frac{1.032}{\sqrt{n}}=0.129,\qquad \sqrt{n}=8$

$\therefore\ n=64$

답 **64**

403

표본비율을 $\hat{p}$이라 하면

$\hat{p}=0.7,\ \hat{q}=1-0.7=0.3$

이때 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이가 0.2 이하이므로

$2\times3\sqrt{\frac{0.7\times0.3}{n}}\le 0.2,\qquad \sqrt{n}\ge 3\sqrt{21}$

$\therefore\ n\ge 189$

따라서 n의 최솟값은 189이다.

답 **189**

연습 문제

본책 188~189쪽

404

전략 표본평균과 표본표준편차를 이용하여 모평균에 대한 신뢰구간을 구한다.

표본평균이 300, 표본의 크기가 400이고, 400은 충분히 큰 수이므로 모표준편차 대신 표본표준편차 50을 이용한다.

따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$300-1.96\times\frac{50}{\sqrt{400}}\le m\le 300+1.96\times\frac{50}{\sqrt{400}}$$

$\therefore\ 295.1\le m\le 304.9$

즉 신뢰구간에 속하는 자연수는 296, 297, ⋯, 304의 9개이다.

답 **9**

405

전략 신뢰구간을 구하여 $\overline{x}$와 a에 대한 식을 세운다.

모표준편차가 5, 표본의 크기가 49이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{5}{\sqrt{49}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{5}{\sqrt{49}}$$

$\therefore\ \overline{x}-1.4\le m\le\overline{x}+1.4$

이것이 $a\le m\le\frac{6}{5}a$와 같으므로

$\overline{x}-1.4=a,\ \overline{x}+1.4=\frac{6}{5}a$

$\therefore\ \overline{x}=15.4$

답 ②

다른 풀이 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$\frac{6}{5}a-a=\frac{1}{5}a$

즉 $\frac{1}{5}a=2\times1.96\times\frac{5}{\sqrt{49}}$이므로

$a=14$

따라서 신뢰구간이 $14\le m\le 16.8$이므로

$\overline{x}=\frac{14+16.8}{2}=15.4$

개념 노트

표본평균의 값이 $\overline{x}$이고 모평균 m에 대한 신뢰구간이 $a\le m\le b$이면

$\overline{x}=\frac{a+b}{2}$

406

전략 신뢰구간을 이용하여 $|m-\overline{x}|$에 대한 부등식을 세운다.

표본의 크기를 n이라 하면 신뢰도 99 %로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간은

$$\overline{x}-2.58\times\frac{1}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$-2.58\times\frac{1}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le 2.58\times\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore\ |m-\overline{x}|\le\frac{2.58}{\sqrt{n}}$$

모평균과 표본평균의 차가 0.43 km/L 이하이어야 하므로

$$\frac{2.58}{\sqrt{n}}\le 0.43,\qquad \sqrt{n}\ge 6$$

$$\therefore\ n\ge 36$$

따라서 적어도 36대의 자동차를 조사해야 한다.

답 **36대**

407

전략 표본비율을 이용하여 모비율에 대한 신뢰구간의 길이를 구한다.

표본비율을 $\hat{p}$이라 하면

$$\hat{p}=\frac{360}{600}=0.6$$

이때 600은 충분히 큰 수이므로 신뢰도 95 %로 추정한 모비율에 대한 신뢰구간의 길이는

$$2\times 1.96\sqrt{\frac{0.6\times 0.4}{600}}=0.0784$$

답 **0.0784**

408

전략 $b-a$와 $d-c$가 각각 신뢰구간의 길이임을 이용한다.

표본평균 $\overline{x_1}$를 이용하여 추정한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이므로

$$b-a=2\times 2\times\frac{\sigma}{\sqrt{4}}=2\sigma$$

표본평균 $\overline{x_2}$를 이용하여 추정한 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $c\le m\le d$이므로

$$d-c=2\times 3\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{6\sigma}{\sqrt{n}}$$

이때 $b-a=2(d-c)$이므로

$$2\sigma=2\times\frac{6\sigma}{\sqrt{n}},\qquad \sqrt{n}=6$$

$$\therefore\ n=36$$

답 **36**

409

전략 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 이용하여 σ의 값을 구한다.

모표준편차가 σ이므로 크기가 16인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 $\overline{x}$라 하면 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

$$\therefore\ \overline{x}-0.49\sigma\le m\le\overline{x}+0.49\sigma$$

이것이 $746.1\le m\le 755.9$와 같으므로

$$\overline{x}-0.49\sigma=746.1,\ \overline{x}+0.49\sigma=755.9$$

$$\therefore\ \sigma=10$$

따라서 모표준편차가 10이고 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이므로

$$b-a=2\times 2.58\times\frac{10}{\sqrt{n}}=\frac{51.6}{\sqrt{n}}$$

$b-a\le 6$에서

$$\frac{51.6}{\sqrt{n}}\le 6,\qquad \sqrt{n}\ge 8.6$$

$$\therefore\ n\ge 73.96$$

따라서 자연수 n의 최솟값은 74이다.

답 ②

410

전략 신뢰구간을 이용하여 모비율과 표본비율의 차에 대한 부등식을 세운다.

표본비율을 $\hat{p}$이라 하면

$$\hat{p}=0.9$$

이므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.9-2\sqrt{\frac{0.9\times 0.1}{n}}\le p\le 0.9+2\sqrt{\frac{0.9\times 0.1}{n}}$$

$$-\frac{0.6}{\sqrt{n}}\le p-0.9\le\frac{0.6}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore\ |p-0.9|\le\frac{0.6}{\sqrt{n}}$$

이때 모비율과 표본비율의 차가 0.5 %, 즉 0.005 이하이어야 하므로

$$\frac{0.6}{\sqrt{n}}\le 0.005,\qquad \sqrt{n}\ge 120$$

$$\therefore\ n\ge 14400$$

따라서 n의 최솟값은 14400이다.

답 **14400**

411

전략 표본의 크기, 신뢰도와 신뢰구간의 길이 사이의 관계를 파악한다.

$\mathrm{P}(-k \le Z \le k)=\frac{\alpha}{100}$일 때, 모표준편차를 σ라 하면

$$l=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ㄱ. n이 일정할 때, 신뢰도 α %가 높아지면 k의 값이 커지므로 l의 값은 커진다. (참)

ㄴ. 신뢰도 α %가 일정하면 k의 값도 일정하므로 n이 커지면 l의 값은 작아진다. (거짓)

ㄷ. 신뢰도 α %가 일정하면 k의 값도 일정하므로 n이 2배가 되면 l의 값은 $\frac{1}{\sqrt{2}}$배가 된다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. **답** ㄱ

412

전략 $\hat{p}$을 표준화한다.

n이 충분히 크므로

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}=\frac{(\hat{p}-p)\sqrt{n}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}$$

으로 놓으면 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

한편 $\mathrm{P}(|\hat{p}-p| \le 0.05\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}) \ge 0.95$에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{|\hat{p}-p|}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}} \le 0.05\right) \ge 0.95$$

$$\therefore \mathrm{P}(|Z| \le 0.05\sqrt{n}) \ge 0.95$$

이때 $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$이므로

$$0.05\sqrt{n} \ge 1.96, \qquad \sqrt{n} \ge 39.2$$

$$\therefore n \ge 1536.64$$

따라서 n의 최솟값은 1537이다. **답 1537**