쉽고 빠르게 정리하는

수학 상

9종 교과서 시크릿

정답과 풀이

Ⅰ. 다항식

되짚어 보기

본문 4쪽

01 (1) $5a-4b$ (2) $4a-5b$
02 (1) $2x^3y^4$ (2) $-3xy^3$
03 (1) $a^2-4ab+4b^2$ (2) x^2+3x+2
04 (1) $ab(a-2)$ (2) $(x+1)(x-4)$

01 다항식의 연산

교과서 유형 흐름잡기

본문 7~9쪽

유형 **1** ③ **1**-1 $2x^2+5xy+y^2$ **1**-2 ④
유형 **2** ① **2**-1 -3 **2**-2 1
유형 **3** ① **3**-1 $2a^3$ **3**-2 ⑤
유형 **4** ③ **4**-1 $x^9+3x^6y^3+3x^3y^6+y^9$
4-2 ③
유형 **5** ④ **5**-1 35 **5**-2 14
유형 **6** ② **6**-1 $-9x+4$ **6**-2 $x-2$

유형 1

$3(2A+3B)-4(A+2B)$
$=6A+9B-4A-8B$
$=2A+B$
$=2(x^2-3xy+4y^2)+(-2x^2+5xy-3y^2)$
$=2x^2-6xy+8y^2-2x^2+5xy-3y^2$
$=-xy+5y^2$ 답 ③

1-1

$2(A+2B)-3(A+B)$
$=2A+4B-3A-3B$
$=-A+B$
$=-(x^2-4xy-3y^2)+(3x^2+xy-2y^2)$
$=-x^2+4xy+3y^2+3x^2+xy-2y^2$
$=2x^2+5xy+y^2$ 답 $2x^2+5xy+y^2$

1-2

$2A-3(X-3B)=5A+3B$를 X에 대하여 풀면
$-3X=3A-6B$
$\therefore X=-A+2B$
$=-(3x^2-x+2)+2(x^2+5x+3)$
$=-x^2+11x+4$ 답 ④

유형 2

$(x^2+x+2)(x^2-3x-1)$의 전개식에서 x^3항은
$x^2\cdot(-3x)+x\cdot x^2=-2x^3$
따라서 x^3의 계수는 -2이다. 답 ①

2-1

$(x^2+2x-1)(x^2-3x+4)$의 전개식에서 x^2항은
$x^2\cdot4+2x\cdot(-3x)+(-1)\cdot x^2=-3x^2$
따라서 x^2의 계수는 -3이다. 답 -3

2-2

$(x^2+3x+a)(x^2+2ax-2)$의 전개식에서 x^2항은
$x^2\cdot(-2)+3x\cdot2ax+a\cdot x^2=(7a-2)x^2$
이때 x^2의 계수가 5이므로
$7a-2=5$ $\therefore a=1$ 답 1

유형 3

$(2x-1)^3-(2x+1)(4x^2-2x+1)$
$=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot1+3\cdot2x\cdot1^2-1^3-\{(2x)^3+1^3\}$
$=8x^3-12x^2+6x-1-8x^3-1$
$=-12x^2+6x-2$ 답 ①

3-1

$(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)+(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$
$=a^3+(2b)^3+a^3-(2b)^3$
$=2a^3$ 답 $2a^3$

3-2

$(x^2+2x+3)^2$
$=(x^2)^2+(2x)^2+3^2+2\cdot x^2\cdot2x+2\cdot2x\cdot3+2\cdot3\cdot x^2$
$=x^4+4x^2+9+4x^3+12x+6x^2$
$=x^4+4x^3+10x^2+12x+9$
따라서 x^3의 계수는 4이다. 답 ⑤
다른풀이 $(x^2+2x+3)^2=(x^2+2x+3)(x^2+2x+3)$의 전개식에서 x^3항은 $x^2\cdot2x+2x\cdot x^2=4x^3$이므로 x^3의 계수는 4이다.

유형 4

$(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^6+x^3y^3+y^6)$
$=(x^3-y^3)\{(x^3)^2+x^3\cdot y^3+(y^3)^2\}$
$=(x^3)^3-(y^3)^3=x^9-y^9$ 답 ③

4-1

$(x+y)^3(x^2-xy+y^2)^3=\{(x+y)(x^2-xy+y^2)\}^3$
$=(x^3+y^3)^3$
$=x^9+3x^6y^3+3x^3y^6+y^9$
답 $x^9+3x^6y^3+3x^3y^6+y^9$

4-2

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a+b)(a^2+b^2)$
$=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$
$=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$
$=a^4-b^4$ 답 ③

유형 5

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서
$7=3^2-2xy$ $\therefore xy=1$
$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=3^3-3\cdot1\cdot3$
$=18$ 답 ④

5-1

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$에서
$13=5^2+2xy$ $\therefore xy=-6$
$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$=5^3+3\cdot(-6)\cdot5$
$=35$ 답 35

5-2

$x^2-2x-1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면
$x-2-\frac{1}{x}=0$ $\therefore x-\frac{1}{x}=2$
$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$
$=2^3+3\cdot2=14$ 답 14

유형 6

$$\begin{array}{r|l} x^2-3x+4 & 3x+2 \\ \hline & 3x^3-7x^2+4x+1 \\ & 3x^3-9x^2+12x \\ \hline & 2x^2-8x+1 \\ & 2x^2-6x+8 \\ \hline & -2x-7 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=3x+2$, $R(x)=-2x-7$이므로
$Q(x)+R(x)=x-5$ 답 ②

6-1

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x+3 & 2x+1 \\ \hline & 2x^3+5x^2-3x+6 \\ & 2x^3+4x^2+6x \\ \hline & x^2-9x+6 \\ & x^2+2x+3 \\ \hline & -11x+3 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=2x+1$, $R(x)=-11x+3$이므로
$Q(x)+R(x)=-9x+4$ 답 $-9x+4$

6-2

$x^3-7x^2+5x+3=A(x^2-5x-5)-7$이므로
$A(x^2-5x-5)=x^3-7x^2+5x+3-(-7)$
$=x^3-7x^2+5x+10$
$\therefore A=(x^3-7x^2+5x+10)\div(x^2-5x-5)$

$$\begin{array}{r|l} x^2-5x-5 & x-2 \\ \hline & x^3-7x^2+5x+10 \\ & x^3-5x^2-5x \\ \hline & -2x^2+10x+10 \\ & -2x^2+10x+10 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\therefore A=x-2$ 답 $x-2$

교과서 문제 정복하기

› 본문 10~11쪽

01 ③	02 2	03 9	04 67	
05 $x^2+9y^2+4z^2-6xy-12yz+4zx$				06 ②
07 ①	08 $-2x^2+3xy-y^2$		09 8	10 18
11 10^8-1	12 ②	13 ⑤	14 9	15 ②

01

$A-(3A+B)+2B$
$=-2A+B$
$=-2(2x^2-3xy-y^2)+(x^2+xy+2y^2)$
$=-4x^2+6xy+2y^2+x^2+xy+2y^2$
$=-3x^2+7xy+4y^2$ 답 ③

02

$(x-4)(x^2-x+3)$의 전개식에서 x^2항은
$x\cdot(-x)+(-4)\cdot x^2=-5x^2$
또, x항은
$x\cdot3+(-4)\cdot(-x)=7x$
따라서 x^2의 계수 a는 -5, x의 계수 b는 7이므로
$a+b=2$ 답 2

03

$(x^2+ax+1)(x^2-ax+1)$의 전개식에서 x^2항은

$x^2\cdot 1+ax\cdot(-ax)+1\cdot x^2=(2-a^2)x^2$

이때 x^2의 계수가 -7이므로

$2-a^2=-7$

$\therefore a^2=9$ 답 9

04

$(1+3x+5x^2+7x^3)^2$

$=(1+3x+5x^2+7x^3)(1+3x+5x^2+7x^3)$

의 전개식에서 x^4항은

$3x\cdot 7x^3+5x^2\cdot 5x^2+7x^3\cdot 3x=67x^4$

이므로 x^4의 계수는 67이다. 답 67

05

$(x-3y+2z)^2$

$=x^2+(-3y)^2+(2z)^2+2\cdot x\cdot(-3y)$

$+2\cdot(-3y)\cdot 2z+2\cdot 2z\cdot x$

$=x^2+9y^2+4z^2-6xy-12yz+4zx$

답 $x^2+9y^2+4z^2-6xy-12yz+4zx$

06

$(x+2)^3(x^2-2x+4)^3=\{(x+2)(x^2-2x+4)\}^3$

$=(x^3+8)^3$

$=x^9+24x^6+192x^3+512$

따라서 x^3의 계수는 192이다. 답 ②

07

$(x-2)(x^2+2x+4)(x^6+8x^3+64)$

$=(x^3-8)\{(x^3)^2+8x^3+8^2\}$

$=(x^3)^3-8^3$

$=x^9-512$

$=500-512\ (\because x^9=500)$

$=-12$ 답 ①

08

업무실은 한 변의 길이가 x인 정사각형 모양이므로 회의실은 한 변의 길이가 $(y-x)$인 정사각형 모양이다.

따라서 탕비실의 넓이는

$xy-x^2-(y-x)^2$

$=xy-x^2-(y^2-2xy+x^2)$

$=-2x^2+3xy-y^2$ 답 $-2x^2+3xy-y^2$

09

$x^3+y^3=(x+y)^2-3xy(x+y)$에서

$16=4^3-3xy\cdot 4$ $\therefore xy=4$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=4^2-2\cdot 4=8$ 답 8

10

$x^2-4x-1=0$에서 $x\neq 0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-4-\frac{1}{x}=0$ $\therefore x-\frac{1}{x}=4$

$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$

$=4^2+2=18$ 답 18

11

$9\times 11\times 101\times 10001$

$=(10-1)(10+1)(100+1)(10000+1)$

$=(10^2-1)(10^2+1)(10^4+1)$

$=(10^4-1)(10^4+1)$

$=10^8-1$ 답 10^8-1

12

직육면체의 밑면의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b, 높이를 c라 하면 겉넓이가 64이므로

$2(ab+bc+ca)=64$

또, 대각선의 길이가 6이므로

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=6$

$\therefore a^2+b^2+c^2=36$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$=36+64$

$=100=10^2$

$\therefore a+b+c=10\ (\because a+b+c>0)$

따라서 모든 모서리의 길이의 합은

$4(a+b+c)=4\cdot 10=40$ 답 ②

13

직사각형의 넓이가 3이므로 $ab=3$

두 정사각형의 넓이의 합은 $a^2+(3b)^2$이고 직사각형의 넓이의 7배이므로

$a^2+9b^2=7ab$

$\therefore a^2+9b^2=21$

따라서 한 변의 길이가 $a+3b$인 정사각형의 넓이는

$(a+3b)^2=a^2+9b^2+6ab$

$=21+6\cdot 3=39$ 답 ⑤

14

$$\begin{array}{r} x+3 \\ x^2-3x+1\,\overline{)\,x^3\qquad -5x+2} \\ x^3-3x^2+\ x \\ \hline 3x^2-6x+2 \\ 3x^2-9x+3 \\ \hline 3x-1 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=x+3$, $R(x)=3x-1$이므로

$Q(1)+R(2)=4+5=9$ 답 9

15

$X=(x^2-2x+5)(2x-1)+(3x+2)$

$=2x^3+(-1-4)x^2+(2+10+3)x+(-5+2)$

$=2x^3-5x^2+15x-3$ 답 ②

02 항등식과 나머지정리

교과서 유형 흐름잡기

본문 13~15쪽

유형 1	④	1-1 2	1-2 3
유형 2	⑤	2-1 15	2-2 ③
유형 3	①	3-1 -15	3-2 10
유형 4	⑤	4-1 4	4-2 ④
유형 5	②	5-1 3	5-2 -24
유형 6	④	6-1 몫: x^2-x+4, 나머지: 7	
		6-2 몫: x^2-x+1, 나머지: 2	

유형 1

$a(2x-1)+b(3x+1)=x-3$에서

$(2a+3b)x+(-a+b)=x-3$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$2a+3b=1$, $-a+b=-3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$

$\therefore a+b=1$ 답 ④

1-1

$a(3x+2)-b(2x-1)=4x+5$에서

$(3a-2b)x+(2a+b)=4x+5$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$3a-2b=4$, $2a+b=5$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

$\therefore ab=2$ 답 2

1-2

$a(x-2y)+b(2x+y)=3x+4y$에서

$(a+2b)x+(-2a+b)y=3x+4y$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a+2b=3$, $-2a+b=4$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$

$\therefore b-a=3$ 답 3

유형 2

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $c=8$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-2b+8=10$ $\therefore b=-1$

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-a+1+8=6$ $\therefore a=3$

$\therefore a+b+c=10$ 답 ⑤

2-1

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$-b=-9$ $\therefore b=9$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$2c=-10 \quad \therefore c=-5$
주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$2a=-6 \quad \therefore a=-3$
$\therefore \frac{bc}{a}=15$ 답 15

2-2
주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$4=2c \quad \therefore c=2$
주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$2=2a \quad \therefore a=1$
주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$12=2b+12 \quad \therefore b=0$
$\therefore a-b-c=-1$ 답 ③

유형 3
x^3+ax+b를 x^2-x-1로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면
$x^3+ax+b=(x^2-x-1)(x+c)+3x-2$
$=x^3+(c-1)x^2+(-c+2)x-c-2$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$0=c-1,\ a=-c+2,\ b=-c-2$
$\therefore a=1,\ b=-3,\ c=1$
$\therefore a+b=-2$ 답 ①

3-1
x^3-2x^2+ax+b를 x^2-x+2로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면
$x^3-2x^2+ax+b=(x^2-x+2)(x+c)+2x-1$
$=x^3+(c-1)x^2+(-c+4)x+2c-1$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$-2=c-1,\ a=-c+4,\ b=2c-1$
$\therefore a=5,\ b=-3,\ c=-1$
$\therefore ab=-15$ 답 -15

3-2
x^3-x^2+3x+a를 x^2-2x+b로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면
$x^3-x^2+3x+a=(x^2-2x+b)(x+c)$
$=x^3+(c-2)x^2+(b-2c)x+bc$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$-1=c-2,\ 3=b-2c,\ a=bc$
$\therefore a=5,\ b=5,\ c=1$
$\therefore a+b=10$ 답 10

유형 4
$P(x)=x^3-5x^2+ax+b$라 하면 나머지정리에 의하여
$P(-1)=-a+b-6=2$
$\therefore -a+b=8$ …… ㉠
$P(1)=a+b-4=6$
$\therefore a+b=10$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=9$
$\therefore a^2+b^2=82$ 답 ⑤

4-1
$P(x)=x^3-3x^2+ax+b$라 하면 나머지정리에 의하여
$P(1)=a+b-2=3$
$\therefore a+b=5$ …… ㉠
$P(2)=2a+b-4=2$
$\therefore 2a+b=6$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=4$
$\therefore ab=4$ 답 4

4-2
다항식 $P(x)$를 $(x+2)(x-4)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면
$P(x)=(x+2)(x-4)Q(x)+3x+4$
따라서 다항식 $P(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여
$P(4)=3\cdot4+4=16$ 답 ④

유형 5
$P(x)=x^3+ax^2+bx-12$라 하면 $P(x)$가 $x+3$, $x-2$로 각각 나누어떨어지므로
$P(-3)=0,\ P(2)=0$
$9a-3b-39=0,\ 4a+2b-4=0$
$\therefore 3a-b=13,\ 2a+b=2$
두 식을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=-4$
$\therefore a+b=-1$ 답 ②

5-1
$P(x)=x^3+ax^2+bx-6$이라 하면 $P(x)$가 $x+2$, $x-1$로 각각 나누어떨어지므로
$P(-2)=0,\ P(1)=0$
$4a-2b-14=0,\ a+b-5=0$
$\therefore 2a-b=7,\ a+b=5$
두 식을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=1$
$\therefore a-b=3$ 답 3

5-2
$P(x)=x^3+ax^2-6x+b$라 하면 $P(x)$가 $x-1$, $x-4$로 각각 나누어떨어지므로

$P(1)=0$, $P(4)=0$

$a+b-5=0$, $16a+b+40=0$

$\therefore a+b=5$, $16a+b=-40$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=8$

$\therefore ab=-24$ 답 -24

유형 6

x^3+3x^2-4x+7을 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 오른쪽과 같다.

2	1	3	−4	7
		2	10	12
	1	5	6	19

$\therefore$ 몫: x^2+5x+6, 나머지: 19 답 ④

6-1

x^3-2x^2+5x+3을 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 오른쪽과 같다.

1	1	−2	5	3
		1	−1	4
	1	−1	4	7

$\therefore$ 몫: x^2-x+4, 나머지: 7 답 몫: x^2-x+4, 나머지: 7

6-2

$2x^3-3x^2+3x+1$을 $2x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면

$\frac{1}{2}$	2	−3	3	1
		1	−1	1
	2	−2	2	2

$2x^3-3x^2+3x+1$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-2x+2)+2$

$=(2x-1)(x^2-x+1)+2$

이므로 몫은 x^2-x+1, 나머지는 2이다.

답 몫: x^2-x+1, 나머지: 2

참고 다항식 $P(x)$를 $x-\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$이면 $ax-b$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{a}Q(x)$이다.

교과서 문제 정복하기

본문 16~17쪽

01 ①	02 6	03 ⑤	04 0	05 ②
06 5	07 −1	08 ①	09 80	10 4
11 −8	12 ③	13 ②	14 $V(t)=t^2+4t+5$	
15 몫: $2x^2-x-1$, 나머지: −1				

01

$(ax-2)(x-3)=3x^2+bx+c$에서

$ax^2-(3a+2)x+6=3x^2+bx+c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=3$, $b=-11$, $c=6$

$\therefore a+b+c=-2$ 답 ①

02

$a(2x-y)+b(x+y)-1=-x+5y+c$에서

$(2a+b)x+(-a+b)y-1=-x+5y+c$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$2a+b=-1$, $-a+b=5$, $-1=c$

위의 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=3$, $c=-1$

$\therefore abc=6$ 답 6

03

주어진 등식의 양변에 $x=-5$를 대입하면

$-8a=-4$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

주어진 등식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$8b=4$ $\therefore b=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=1$ 답 ⑤

04

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$-1=2c$ $\therefore c=-\frac{1}{2}$

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2=2a$ $\therefore a=1$

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=2b-3$ $\therefore b=\frac{3}{2}$

$\therefore a-b-c=0$ 답 0

05

x^3+ax^2+b를 x^2-x-3으로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

$x^3+ax^2+b=(x^2-x-3)(x+c)+2x+1$

$=x^3+(c-1)x^2+(-c-1)x-3c+1$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=c-1$, $0=-c-1$, $b=-3c+1$

$\therefore a=-2$, $b=4$, $c=-1$

$\therefore ab=-8$ 답 ②

06

다항식 x^4-3x^2+2를 x^2-a로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^4-3x^2+2=(x^2-a)Q(x)+12$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x^2=a$를 대입하면

$a^2-3a+2=12$, $a^2-3a-10=0$

$(a+2)(a-5)=0$ $\therefore a=-2$ 또는 $a=5$

이때 a는 자연수이므로 $a=5$이다. 답 5

07

$P(x)=x^3-2x^2+ax+2$라 하면 나머지정리에 의하여

$P(1)=P(-1)$

$1+a=-1-a$ $\therefore a=-1$ 답 -1

08

다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지와 다항식 $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 같으므로 나머지정리에 의하여

$P(1)=Q(1)$

$4+a=3+b$

$\therefore a-b=-1$ 답 ①

09

$P(x)=\frac{1}{10^2}\times(-x^3+400x)+50$이므로 $P(x)$를 $x-10$으로 나누었을 때의 나머지 R는

$R=P(10)$

$=\frac{1}{10^2}\times(-10^3+400\cdot10)+50$

$=-10+40+50$

$=80$ 답 80

10

$P(x)=x^3-2x^2+ax-3$이라 하면 $P(x)$가 $x-1$을 인수로 가지므로

$P(1)=0$, $a-4=0$

$\therefore a=4$ 답 4

11

$P(x)=x^4+x^3-6x^2+ax+b$라 하면 $P(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지고, $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 -2이므로

$P(-1)=0$, $P(1)=-2$

$-6-a+b=0$, $-4+a+b=-2$

$\therefore a-b=-6$, $a+b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=4$

$\therefore ab=-8$ 답 -8

12

$P(x)=x^3+ax^2+bx+3$이라 하면 $P(x)$가 $x-1$, $x+3$으로 각각 나누어떨어지므로

$P(1)=0$, $P(-3)=0$

$a+b+4=0$, $9a-3b-24=0$

$\therefore a+b=-4$, $3a-b=8$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-5$

$\therefore a-b=6$ 답 ③

13

3	1	−4	6	−8
		3	−3	9
	1	−1	3	1

이므로 $a=-1$, $b=3$, $c=1$

$\therefore a+b+c=3$ 답 ②

14

$P(t)=V(t)I(t)$에서

$t^3+8t^2+21t+20=(t+4)V(t)$

다음과 같이 조립제법을 이용하면

−4	1	8	21	20
		−4	−16	−20
	1	4	5	0

$\therefore V(t)=t^2+4t+5$ 답 $V(t)=t^2+4t+5$

15

$4x^3-3x-2$를 $2x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면

$-\frac{1}{2}$	4	0	−3	−2
		−2	1	1
	4	−2	−2	−1

$4x^3-3x-2$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)(4x^2-2x-2)-1$

$=(2x+1)(2x^2-x-1)-1$

이므로 몫은 $2x^2-x-1$, 나머지는 -1이다.

답 몫: $2x^2-x-1$, 나머지: -1

03 인수분해

교과서 유형 흐름잡기

본문 19~21쪽

유형 1 ①　1-1 $(x+2y+1)(x-3y+4)$
1-2 $(x+y-3)(3x-2y+1)$

유형 2 ①　2-1 $(3x-2y)^3$
2-2 $(a^2+3ab+9b^2)(a^2-3ab+9b^2)$

유형 3 ④　3-1 $(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)$
3-2 -17

유형 4 ④　4-1 $(x+3)(x+1)(x-1)(x-3)$
4-2 ④

유형 5 ①　5-1 $(x-3y-6)(x-3y+2)$
5-2 $(x-y)(y-z)(x-z)$

유형 6 ④　6-1 $(x+1)(x-2)(x-3)$
6-2 ①

유형 1

$x^2-(3y+1)x+(y+2)(2y-1)$

x 와 x 의 곱이 x^2, $-(y+2)$ 와 $-(2y-1)$ 의 곱이 $(y+2)(2y-1)$, 교차곱 $-(y+2)\times x$ 와 $-(2y-1)\times x$ 의 합이 $-(3y+1)x$

이므로

$x^2-(3y+1)x+(y+2)(2y-1)$

$=(x-y-2)(x-2y+1)$

따라서 $a=-1$, $b=-2$, $c=-2$이므로

$a+b+c=-5$

답 ①

1-1

$x^2-(y-5)x-(2y+1)(3y-4)$

x 와 x 의 곱이 x^2, $2y+1$ 과 $-(3y-4)$ 의 곱이 $-(2y+1)(3y-4)$, 교차곱 $(2y+1)\times x$ 와 $-(3y-4)\times x$ 의 합이 $-(y-5)x$

이므로

$x^2-(y-5)x-(2y+1)(3y-4)$

$=(x+2y+1)(x-3y+4)$

답 $(x+2y+1)(x-3y+4)$

1-2

$3x^2+(y-8)x-2y^2+7y-3$

$=3x^2+(y-8)x+(-2y+1)(y-3)$

$=\{x+(y-3)\}\{3x+(-2y+1)\}$

$=(x+y-3)(3x-2y+1)$

답 $(x+y-3)(3x-2y+1)$

유형 2

$4x^2+9y^2+25+12xy-30y-20x$

$=(2x)^2+(3y)^2+(-5)^2+2\cdot2x\cdot3y+2\cdot3y\cdot(-5)$

$+2\cdot(-5)\cdot2x$

$=(2x+3y-5)^2$

따라서 $a=3$, $b=-5$이므로

$a-b=8$

답 ①

다른풀이

$4x^2+9y^2+25+12xy-30y-20x$

$=4x^2+(12y-20)x+(9y^2-30y+25)$

$=(2x)^2+2\cdot2x\cdot(3y-5)+(3y-5)^2$

$=(2x+3y-5)^2$

2-1

$27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$

$=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot2y+3\cdot3x\cdot(2y)^2-(2y)^3$

$=(3x-2y)^3$

답 $(3x-2y)^3$

2-2

$a^4+9a^2b^2+81b^4=a^4+a^2\cdot(3b)^2+(3b)^4$

$=\{a^2+a\cdot3b+(3b)^2\}\{a^2-a\cdot3b+(3b)^2\}$

$=(a^2+3ab+9b^2)(a^2-3ab+9b^2)$

답 $(a^2+3ab+9b^2)(a^2-3ab+9b^2)$

다른풀이

$a^4+9a^2b^2+81b^4=(a^2)^2+18a^2b^2+(9b^2)^2-9a^2b^2$

$=(a^2+9b^2)^2-(3ab)^2$

$=(a^2+3ab+9b^2)(a^2-3ab+9b^2)$

유형 3

$x^2+2x=X$로 치환하면

(주어진 식)$=X(X-11)+24$

$=X^2-11X+24$

$=(X-8)(X-3)$

$=(x^2+2x-8)(x^2+2x-3)$

$=(x+4)(x-2)(x+3)(x-1)$

$=(x+4)(x+a)(x+b)(x+c)$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(-2)^2+3^2+(-1)^2=14$

답 ④

3-1

$x^2-3x=X$로 치환하면

(주어진 식)$=X(X-2)-8=X^2-2X-8$

$=(X-4)(X+2)$

$=(x^2-3x-4)(x^2-3x+2)$

$=(x-4)(x+1)(x-2)(x-1)$

답 $(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)$

3-2

$(x+2)(x+1)(x-4)(x-5)+8$

$=\{(x+1)(x-4)\}\{(x+2)(x-5)\}+8$

$=(x^2-3x-4)(x^2-3x-10)+8$

$x^2-3x=X$로 치환하면

(주어진 식)$=(X-4)(X-10)+8$

$=X^2-14X+48$

$=(X-6)(X-8)$

$=(x^2-3x-6)(x^2-3x-8)$

$=(x^2+ax+b)(x^2+ax+c)$

$\therefore a+b+c=(-3)+(-6)+(-8)=-17$ 답 -17

유형 4

$x^2=X$로 치환하면

(주어진 식)$=X^2-5X+4=(X-1)(X-4)$

$=(x^2-1)(x^2-4)$

$=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

$=(x+1)(x+a)(x+b)(x+c)$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(-1)^2+2^2+(-2)^2=9$ 답 ④

4-1

$x^2=X$로 치환하면

(주어진 식)$=X^2-10X+9$

$=(X-9)(X-1)$

$=(x^2-9)(x^2-1)$

$=(x+3)(x-3)(x+1)(x-1)$

답 $(x+3)(x+1)(x-1)(x-3)$

4-2

$x^2=X$, $y^2=Y$로 치환하면

(주어진 식)$=X^2-13XY+36Y^2$

$=(X-4Y)(X-9Y)$

$=(x^2-4y^2)(x^2-9y^2)$

$=(x+2y)(x-2y)(x+3y)(x-3y)$

따라서 $a=3$, $b=-2$, $c=-3$이므로

$\frac{ab}{c}=\frac{3\cdot(-2)}{-3}=2$ 답 ④

유형 5

$x^2-4xy+4y^2-3x+6y-10$

$=x^2-(4y+3)x+4y^2+6y-10$

$=x^2-(4y+3)x+2(y-1)(2y+5)$

$=\{x-2(y-1)\}\{x-(2y+5)\}$

$=(x-2y+2)(x-2y-5)$

$=(x+ay+b)(x+ay+c)$

$\therefore a+b+c=(-2)+2+(-5)=-5$ 답 ①

다른풀이

$x^2-4xy+4y^2-3x+6y-10$

$=(x-2y)^2-3(x-2y)-10$

$x-2y=X$로 치환하면

(주어진 식)$=X^2-3X-10$

$=(X+2)(X-5)$

$=(x-2y+2)(x-2y-5)$

5-1

$x^2-6xy+9y^2-4x+12y-12$

$=x^2-2(3y+2)x+9y^2+12y-12$

$=x^2-2(3y+2)x+3(y+2)(3y-2)$

$=\{x-3(y+2)\}\{x-(3y-2)\}$

$=(x-3y-6)(x-3y+2)$ 답 $(x-3y-6)(x-3y+2)$

다른풀이

$x^2-6xy+9y^2-4x+12y-12$

$=(x-3y)^2-4(x-3y)-12$

$x-3y=X$로 치환하면

(주어진 식)$=X^2-4X-12$

$=(X-6)(X+2)$

$=(x-3y-6)(x-3y+2)$

5-2

$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$

$=(y-z)x^2-(y^2-z^2)x+y^2z-yz^2$

$=(y-z)x^2-(y-z)(y+z)x+yz(y-z)$

$=(y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$

$=(y-z)(x-y)(x-z)$

$=(x-y)(y-z)(x-z)$ 답 $(x-y)(y-z)(x-z)$

참고 y나 z에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해해도 그 결과는 같다.

유형 6

$P(x)=x^3+6x^2-4x-24$라 하면

$P(2)=8+24-8-24=0$

이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

2	1	6	−4	−24
		2	16	24
	1	8	12	0

$x^3+6x^2-4x-24=(x-2)(x^2+8x+12)$

$=(x-2)(x+2)(x+6)$

$=(x+a)(x+b)(x+c)$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(-2)^2+2^2+6^2=44$ 답 ④

6-1

$P(x)=x^3-4x^2+x+6$이라 하면

$P(-1)=-1-4-1+6=0$

이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

-1	1	-4	1	6
		-1	5	-6
	1	-5	6	0

x^3-4x^2+x+6
$=(x+1)(x^2-5x+6)$
$=(x+1)(x-2)(x-3)$ 답 $(x+1)(x-2)(x-3)$

6-2

$P(x)=3x^3+ax^2-19x+6$이라 하면 $P(x)$가 $x-2$를 인수로 가지므로
$P(2)=24+4a-38+6=0$ $\therefore a=2$

$P(x)=3x^3+2x^2-19x+6$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

2	3	2	-19	6
		6	16	-6
	3	8	-3	0

$3x^3+2x^2-19x+6=(x-2)(3x^2+8x-3)$
$=(x-2)(x+3)(3x-1)$
$=(3x+b)(x+c)(x-2)$
$\therefore b=-1,\ c=3$
$\therefore a+b+c=4$ 답 ①

교과서 문제 정복하기

본문 22~23쪽

01 $(x-2)(x-2y+2)$ **02** $(a+2b-3c)^2$
03 $(x-3y)(x+3y)(x^2+9y^2)$ **04** ②
05 -8 **06** 2 **07** ③
08 $(a+b)(a-b)(b-c)$
09 $(a+b)(b+c)(c+a)$
10 $(x-2)(x^2-2x+2)$ **11** ⑤ **12** 1
13 15 **14** -5 **15** ⑤

01

$x^2-2xy+4y-4$
$=x^2-2yx+4(y-1)$

x $\times$ -2 → $-2x$
x $\times$ $-2(y-1)$ → $+)\ -2(y-1)x$
$-2yx$

이므로
$x^2-2xy+4y-4=(x-2)\{x-2(y-1)\}$
$=(x-2)(x-2y+2)$
답 $(x-2)(x-2y+2)$

02

$a^2+4b^2+9c^2+4ab-12bc-6ca$
$=a^2+(2b)^2+(-3c)^2+2\cdot a\cdot 2b+2\cdot 2b\cdot(-3c)$
$+2\cdot(-3c)\cdot a$
$=(a+2b-3c)^2$ 답 $(a+2b-3c)^2$

03

$x^4-81y^4=(x^2)^2-(9y^2)^2$
$=(x^2-9y^2)(x^2+9y^2)$
$=(x-3y)(x+3y)(x^2+9y^2)$
답 $(x-3y)(x+3y)(x^2+9y^2)$

04

$2x-3y=X$로 치환하면
(주어진 식)$=(X-1)(X+2)-4$
$=X^2+X-6$
$=(X+3)(X-2)$
$=(2x-3y+3)(2x-3y-2)$
$=(2x+ay+b)(2x+ay+c)$
$\therefore a+b+c=(-3)+3+(-2)=-2$ 답 ②

05

$x(x+2)(x-1)(x-3)+8$
$=\{x(x-1)\}\{(x+2)(x-3)\}+8$
$=(x^2-x)(x^2-x-6)+8$
$x^2-x=X$로 치환하면
(주어진 식)$=X(X-6)+8$
$=X^2-6X+8$
$=(X-2)(X-4)$
$=(x^2-x-2)(x^2-x-4)$
$=(x+1)(x-2)(x^2-x-4)$
따라서 $a=-2,\ b=-1,\ c=-4$이므로
$abc=-8$ 답 -8

06

$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2$
$=(x^2+2)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$
$=(x^2+ax+b)(x^2+cx+b)$
$\therefore a+b+c=2+2+(-2)=2$ 답 2

07

x^4+2x^2+9를 인수분해하면
$x^4+2x^2+9=x^4+6x^2+9-4x^2$
$=(x^2+3)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$
또, $(x^2-2x)(x^2-2x-3)-18$에서 $x^2-2x=X$로 치환하면
$X(X-3)-18=X^2-3X-18$
$=(X-6)(X+3)$
$=(x^2-2x-6)(x^2-2x+3)$
즉, 두 다항식의 공통인수는 x^2-2x+3이므로
$a=-2,\ b=3$ $\therefore a+b=1$ 답 ③

08

주어진 식을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}a^2b+b^2c-b^3-ca^2&=(b^2-a^2)c+a^2b-b^3\\&=(b^2-a^2)c-b(b^2-a^2)\\&=(b^2-a^2)(c-b)\\&=(b+a)(b-a)(c-b)\\&=(a+b)(a-b)(b-c)\end{aligned}$$

답 $(a+b)(a-b)(b-c)$

09

주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&2abc+a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)\\&=(b+c)a^2+(b^2+c^2+2bc)a+bc^2+b^2c\\&=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)\\&=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}\\&=(b+c)(a+b)(a+c)\end{aligned}$$

답 $(a+b)(b+c)(c+a)$

10

$P(x)$가 $x-2$를 인수로 가지므로

$P(2)=8-16+12+a=0 \quad \therefore a=-4$

$P(x)=x^3-4x^2+6x-4$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

2	1	−4	6	−4
		2	−4	4
	1	−2	2	0

$x^3-4x^2+6x-4=(x-2)(x^2-2x+2)$

답 $(x-2)(x^2-2x+2)$

11

$P(x)=x^3-2x^2-5x+a$라 하면 $P(x)$가 $x-1$을 인수로 가지므로

$P(1)=1-2-5+a=0 \quad \therefore a=6$

$P(x)=x^3-2x^2-5x+6$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	−2	−5	6
		1	−1	−6
	1	−1	−6	0

$$\begin{aligned}x^3-2x^2-5x+6&=(x-1)(x^2-x-6)\\&=(x-1)(x-3)(x+2)\\&=(x-1)(x+b)(x+c)\end{aligned}$$

$\therefore a^2+b^2+c^2=6^2+(-3)^2+2^2=49$

답 ⑤

12

$P(x)=x^3-2x^2-x+2$라 하면

$P(1)=0$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	−2	−1	2
		1	−1	−2
	1	−1	−2	0

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-1)(x^2-x-2)\\&=(x-1)(x-2)(x+1)\end{aligned}$$

$x^2-(a+1)x+a=(x-1)(x-a)$이므로

$x-a=x-2$ 또는 $x-a=x+1$

$\therefore a=2$ 또는 $a=-1$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 1이다.

답 1

13

밑면의 가로의 길이, 세로의 길이가 각각 $n+2$, $n+a$이고, 높이가 $n+b$인 직육면체의 부피는 $(n+2)(n+a)(n+b)$이므로 $n^3+10n^2+31n+30=(n+2)(n+a)(n+b)$

한편 $P(n)=n^3+10n^2+31n+30$이라 하면

$P(-2)=0$

따라서 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(n)$을 인수분해하면

−2	1	10	31	30
		−2	−16	−30
	1	8	15	0

$$\begin{aligned}&n^3+10n^2+31n+30\\&=(n+2)(n^2+8n+15)\\&=(n+2)(n+3)(n+5)\end{aligned}$$

$\therefore ab=3\cdot5=15$

답 15

14

밑면의 반지름의 길이가 $x+a$, 높이가 $x+b$인 원기둥의 부피는 $\pi(x+a)^2\times(x+b)=(x+a)^2(x+b)\pi$이므로

$(x^3+25x^2+200x+500)\pi=(x+a)^2(x+b)\pi$

한편 $P(x)=x^3+25x^2+200x+500$이라 하면

$P(-10)=-1000+2500-2000+500=0$

따라서 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

−10	1	25	200	500
		−10	−150	−500
	1	15	50	0

$$\begin{aligned}&x^3+25x^2+200x+500\\&=(x+10)(x^2+15x+50)\\&=(x+10)(x+10)(x+5)\\&=(x+10)^2(x+5)\end{aligned}$$

따라서 $a=10$, $b=5$이므로 $a+b=15$

답 15

15

$$\begin{aligned}13^4-7^4&=(13^2-7^2)(13^2+7^2)\\&=(13-7)(13+7)\times218\\&=6\times20\times218\end{aligned}$$

이므로 $a=6$

답 6

Ⅱ. 방정식과 부등식

되짚어 보기

본문 24쪽

01 (1) $1-2\sqrt{2}$ (2) $-2-3\sqrt{2}$
(3) $-2+7\sqrt{3}$ (4) $\frac{18-7\sqrt{6}}{10}$

02 (1) $x=1$ 또는 $x=2$ (2) $x=\frac{-2\pm\sqrt{14}}{2}$

03 (1) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ (2) $(3, 2)$

04 (1) $(x-1)^2(x+3)$ (2) $(x-1)(x+1)(x^2+2)$

05 (1) $x=-4, y=-7$ (2) $x=2, y=-2$

06 (1) $x\geq 3$ (2) $x>-\frac{1}{2}$

04 복소수

교과서 유형 흐름잡기

본문 27~29쪽

유형 1 ③	1-1 -2	1-2 ①
유형 2 ①	2-1 -5	2-2 3
유형 3 ④	3-1 $-4i$	3-2 37
유형 4 ①	4-1 $3+i$	4-2 $4\pm3i$
유형 5 ③	5-1 0	5-2 ①
유형 6 ③	6-1 ⑤	6-2 0

유형 1

$x(3+2i)+2y-4i=7-2i$에서
$3x+2xi+2y-4i=7-2i$
$(3x+2y)+(2x-4)i=7-2i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$3x+2y=7$, $2x-4=-2$
두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=2$
$\therefore x+y=3$ 답 ③

1-1

$x(2-3i)+y(5+4i)=1+10i$에서
$2x-3xi+5y+4yi=1+10i$
$(2x+5y)+(-3x+4y)i=1+10i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$2x+5y=1$, $-3x+4y=10$
두 식을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=1$
$\therefore xy=-2$ 답 -2

1-2

$\frac{x}{2+i}+\frac{y}{2-i}=4+4i$에서
$\frac{x(2-i)+y(2+i)}{(2+i)(2-i)}=4+4i$
$\frac{2x+2y}{5}+\frac{(-x+y)i}{5}=4+4i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x+y=10$, $-x+y=20$
두 식을 연립하여 풀면 $x=-5$, $y=15$
$\therefore \frac{y}{x}=-3$ 답 ①

유형 2

$(2+i)x^2-(3-4i)x-2-12i$
$=(2x^2-3x-2)+(x^2+4x-12)i$
이 복소수가 순허수가 되려면
$2x^2-3x-2=0$, $x^2+4x-12\neq0$
$2x^2-3x-2=0$에서 $(2x+1)(x-2)=0$
$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$ …… ㉠
$x^2+4x-12\neq0$에서 $(x+6)(x-2)\neq0$
$\therefore x\neq-6$이고 $x\neq2$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $x=-\frac{1}{2}$ 답 ①

2-1

$(1+2i)x^2+(4+i)x-5-3i$
$=(x^2+4x-5)+(2x^2+x-3)i$
이 복소수가 순허수가 되려면
$x^2+4x-5=0$, $2x^2+x-3\neq0$
$x^2+4x-5=0$에서 $(x+5)(x-1)=0$
$\therefore x=-5$ 또는 $x=1$ …… ㉠
$2x^2+x-3\neq0$에서 $(x-1)(2x+3)\neq0$
$\therefore x\neq-\frac{3}{2}$이고 $x\neq1$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $x=-5$ 답 -5

2-2

$z=(1-i)x^2-3xi-9$
$=(x^2-9)-(x^2+3x)i$
$z^2<0$이 되려면 z가 순허수이어야 하므로
$x^2-9=0$, $x^2+3x\neq0$
$x^2-9=0$에서 $(x+3)(x-3)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=3$ …… ㉠
$x^2+3x\neq0$에서 $x(x+3)\neq0$
$\therefore x\neq-3$이고 $x\neq0$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $x=3$ 답 3

참고 복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여
① z^2이 실수이면 $a=0$ 또는 $b=0$
② z^2이 음의 실수이면 $a=0$, $b\neq0$

유형 3

$x=\frac{2i}{1-i}$, $y=\frac{2i}{1+i}$에서

$x-y=\frac{2i}{1-i}-\frac{2i}{1+i}=\frac{2i\{(1+i)-(1-i)\}}{(1-i)(1+i)}$

$=\frac{2i\cdot 2i}{2}=-2$

$xy=\frac{2i}{1-i}\cdot\frac{2i}{1+i}=\frac{-4}{2}=-2$

$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=(-2)^3+3\cdot(-2)\cdot(-2)=4$ 답 ④

3-1

$x=\frac{5i}{2-i}$, $y=\frac{5i}{2+i}$에서

$x+y=\frac{5i}{2-i}+\frac{5i}{2+i}=\frac{5i\{(2+i)+(2-i)\}}{(2-i)(2+i)}$

$=\frac{5i\cdot 4}{5}==4i$

$xy=\frac{5i}{2-i}\cdot\frac{5i}{2+i}=\frac{-25}{5}=-5$

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=(4i)^3-3\cdot(-5)\cdot 4i$

$=-64i+60i=-4i$ 답 $-4i$

3-2

$z_1\overline{z_1}-\overline{z_1}z_2-z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_2}=\overline{z_1}(z_1-z_2)-\overline{z_2}(z_1-z_2)$

$=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})$

$=(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})$

이때 $z_1=2-5i$, $z_2=3+i$이므로

$z_1-z_2=(2-5i)-(3+i)$

$=-1-6i$

$\overline{z_1-z_2}=-1+6i$

$\therefore$ (주어진 식)$=(-1-6i)(-1+6i)=37$ 답 37

유형 4

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$(5-2i)z+i\overline{z}=13+3i$에서

$(5-2i)(a+bi)+i(a-bi)=13+3i$

$5a+5bi-2ai+2b+ai+b=13+3i$

$5a+3b+(-a+5b)i=13+3i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$5a+3b=13$, $-a+5b=3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

$\therefore z=2+i$ 답 ①

4-1

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$(1-i)z+(2+3i)\overline{z}=13+5i$에서

$(1-i)(a+bi)+(2+3i)(a-bi)=13+5i$

$a+bi-ai+b+2a-2bi+3ai+3b=13+5i$

$3a+4b+(2a-b)i=13+5i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3a+4b=13$, $2a-b=5$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=1$

$\therefore z=3+i$ 답 $3+i$

4-2

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$z+\overline{z}=8$, $z\overline{z}=25$에서

$(a+bi)+(a-bi)=8$, $(a+bi)(a-bi)=25$

$2a=8$, $a^2+b^2=25$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=\pm 3$

$\therefore z=4\pm 3i$ 답 $4\pm 3i$

유형 5

n이 음이 아닌 정수일 때, $i^{4n}=1$, $i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$이므로

$i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$

$\therefore i+i^2+i^3+\cdots+i^{100}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)+i^8(i+i^2+i^3+i^4)$

$+\cdots+i^{96}(i+i^2+i^3+i^4)$

$=0$ 답 ③

5-1

n이 음이 아닌 정수일 때, $i^{4n}=1$, $i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$이므로

$i+i^3=i-i=0$

$\therefore i+i^3+i^5+\cdots+i^{99}$

$=(i+i^3)+i^4(i+i^3)+i^8(i+i^3)+\cdots+i^{96}(i+i^3)$

$=0$ 답 0

5-2

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$이므로

$\frac{1+i}{1-i}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}$

$=i+i^2+i^3+\cdots+i^{10}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)+i^8(i+i^2)$

$=i-1$ 답 ①

유형 6

$\sqrt{-2}\sqrt{-8}+\sqrt{-4}\sqrt{9}+\dfrac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-3}}+\dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{-4}}$

$=-\sqrt{16}+\sqrt{-36}+\sqrt{4}-\sqrt{-9}$

$=-4+6i+2-3i=-2+3i$

따라서 $-2+3i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-2,\ b=3 \quad \therefore a+b=1$ 답 ③

6-1

$\sqrt{-2}\sqrt{2}+\sqrt{-3}\sqrt{-27}+\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}+\dfrac{\sqrt{-48}}{\sqrt{-3}}$

$=\sqrt{-4}-\sqrt{81}-\sqrt{-4}+\sqrt{16}$

$=2i-9-2i+4=-5$

따라서 $-5=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-5,\ b=0 \quad \therefore b-a=5$ 답 ⑤

6-2

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$에서 $a>0,\ b<0 \quad \therefore a-b>0$

$\therefore \sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}-|a-b|=|a|+|b|-|a-b|$

$=a-b-(a-b)=0$ 답 0

교과서 문제 정복하기 › 본문 30~31쪽

01 ④ 02 ③ 03 $3+2i$ 04 $24-18i$ 05 18
06 ① 07 3 08 4 09 ④ 10 1
11 $2\pm3i$ 12 ③ 13 -2 14 ①
15 $-23+\dfrac{1}{2}i$

01

$(1-i)(3+2i)+(1+i)(3-i)$

$=3+2i-3i+2+3-i+3i+1$

$=9+i$

따라서 $a=9,\ b=1$이므로 $a+b=10$ 답 ④

02

$\dfrac{2}{2+i}+\dfrac{i}{2-i}=\dfrac{2(2-i)+i(2+i)}{(2+i)(2-i)}$

$=\dfrac{4-2i+2i-1}{5}=\dfrac{3}{5}$ 답 ③

03

$Z=Z_1+Z_2$에서 $4+3i=(1+i)+Z_2$

$\therefore Z_2=(4+3i)-(1+i)=3+2i$ 답 $3+2i$

04

$V=450,\ I=12+9i$이고 $V=I\times Z$이므로

$Z=\dfrac{V}{I}=\dfrac{450}{12+9i}=\dfrac{150}{4+3i}=\dfrac{150(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}$

$=\dfrac{600-450i}{25}=24-18i$ 답 $24-18i$

05

$x(2-i)+3(1+2i)=9+yi$에서

$(2x+3)+(-x+6)i=9+yi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2x+3=9,\ -x+6=y$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3,\ y=3$

$\therefore x^2+y^2=18$ 답 18

06

$\dfrac{x}{3-i}+\dfrac{y}{3+i}=\dfrac{3}{10}+\dfrac{7}{10}i$에서

$\dfrac{x(3+i)+y(3-i)}{(3-i)(3+i)}=\dfrac{3}{10}+\dfrac{7}{10}i$

$\dfrac{3(x+y)}{10}+\dfrac{(x-y)i}{10}=\dfrac{3}{10}+\dfrac{7}{10}i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=1,\ x-y=7$

두 식을 연립하여 풀면 $x=4,\ y=-3$

$\therefore xy=-12$ 답 ①

07

$(1+i)x^2+(-5+2i)x+6-8i$

$=(x^2-5x+6)+(x^2+2x-8)i$

이 복소수가 순허수가 되려면

$x^2-5x+6=0,\ x^2+2x-8\neq0$

$x^2-5x+6=0$에서 $(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$ …… ㉠

$x^2+2x-8\neq0$에서 $(x-2)(x+4)\neq0$

$\therefore x\neq-4$이고 $x\neq2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x=3$ 답 3

08

$z=(x^2-3x-4)+(x^2+4x+3)i$에서 z^2이 음의 실수가 되려면 z가 순허수이어야 하므로

$x^2-3x-4=0,\ x^2+4x+3\neq0$

$x^2-3x-4=0$에서 $(x-4)(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$ …… ㉠

$x^2+4x+3\neq0$에서 $(x+1)(x+3)\neq0$

$\therefore x\neq-3$이고 $x\neq-1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x=4$ 답 4

09

$z_1+\overline{z_2}=5-4i$에서 $a-3i+2-bi=5-4i$

$(a+2)-(b+3)i=5-4i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+2=5$, $b+3=4$

따라서 $a=3$, $b=1$이므로 $a+b=4$ 답 ④

10

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$(1+i)z+(2+i)\overline{z}=i$에서

$(1+i)(a+bi)+(2+i)(a-bi)=i$

$a+bi+ai-b+2a-2bi+ai+b=i$

$3a+(2a-b)i=i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3a=0$, $2a-b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-1$

따라서 $z=-i$, $\overline{z}=i$이므로

$z\overline{z}=1$ 답 1

11

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$z+\overline{z}=4$, $z\overline{z}=13$에서

$(a+bi)+(a-bi)=4$, $(a+bi)(a-bi)=13$

$2a=4$, $a^2+b^2=13$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=\pm3$

$\therefore z=2\pm3i$ 답 $2\pm3i$

12

n이 음이 아닌 정수일 때, $i^{4n}=1$, $i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$이므로

$i^2+i^4=-1+1=0$

$\therefore i^2+i^4+i^6+\cdots+i^{100}$

$=(i^2+i^4)+i^4(i^2+i^4)+\cdots+i^{96}(i^2+i^4)$

$=0$ 답 ③

13

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{100}=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{50}+\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{50}$$

$$=\left(\frac{2i}{2}\right)^{50}+\left(\frac{-2i}{2}\right)^{50}$$

$$=i^{50}+(-i)^{50}$$

$$=(i^4)^{12}\cdot i^2+(-1)^{50}\cdot(i^4)^{12}\cdot i^2$$

$$=i^2+i^2=2i^2=-2$$

답 -2

14

② $\sqrt{-2}\sqrt{5}=\sqrt{-10}$

③ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-5}}=-\sqrt{-\dfrac{2}{5}}$

④ $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-5}}=\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{5}}=\sqrt{-\dfrac{2}{5}}$ 답 ①

15

$$\sqrt{-9}\sqrt{-81}+\frac{\sqrt{-64}}{\sqrt{-4}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-12}}$$

$$=-\sqrt{729}+\sqrt{16}+\sqrt{-\frac{1}{4}}$$

$$=-27+4+\frac{1}{2}i$$

$$=-23+\frac{1}{2}i$$

답 $-23+\dfrac{1}{2}i$

05 이차방정식

교과서 유형 흐름잡기

본문 33~35쪽

유형 1	②	1-1 2	1-2 ④
유형 2	④	2-1 100	2-2 36
유형 3	③	3-1 5	3-2 ④
유형 4	③	4-1 -3	4-2 $\sqrt{6}$
유형 5	③	5-1 $x^2-2x-4=0$	5-2 $2x^2+6x-20=0$
유형 6	⑤	6-1 2	6-2 30

유형 1

이차방정식 $x^2-2kx+k-4=0$의 한 근이 1이므로

$1^2-2k\cdot1+k-4=0$ $\therefore k=-3$

$k=-3$을 주어진 이차방정식에 대입하면

$x^2+6x-7=0$, $(x+7)(x-1)=0$

$\therefore x=-7$ 또는 $x=1$

따라서 다른 한 근은 -7이다. 답 ②

1-1

이차방정식 $x^2+kx-k+1=0$의 한 근이 3이므로

$3^2+k\cdot3-k+1=0$ $\therefore k=-5$

$k=-5$를 주어진 이차방정식에 대입하면

$x^2-5x+6=0$, $(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

따라서 다른 한 근은 2이다. 답 2

1-2

x에 대한 이차방정식 $x^2-4kx+k^2+3=0$의 한 근이 1이므로

$1^2-4k\cdot1+k^2+3=0$, $k^2-4k+4=0$

$(k-2)^2=0$ $\therefore k=2$

$k=2$를 주어진 이차방정식에 대입하면

$x^2-8x+7=0$, $(x-1)(x-7)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=7$

따라서 $\alpha=7$이므로

$k+\alpha=9$ 답 ④

유형 2

$(x+2)(x-3)=50$에서 $x^2-x-56=0$

$(x+7)(x-8)=0$ $\therefore x=8$ ($\because x>3$)

따라서 처음 정사각형의 넓이는 $8\cdot8=64$이다. 답 ④

2-1

$(x+4)(x-6)=56$에서 $x^2-2x-80=0$

$(x+8)(x-10)=0$ $\therefore x=10$ ($\because x>6$)

따라서 처음 정사각형의 넓이는 $10\cdot10=100$이다. 답 100

2-2

$(x+3)(x+2)=2x^2$에서 $x^2-5x-6=0$

$(x+1)(x-6)=0$

$\therefore x=6$ ($\because x>0$)

따라서 처음 정사각형의 넓이는 $6\cdot6=36$이다. 답 36

유형 3

이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k^2+3k-8=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(k^2+3k-8)>0$

$k^2+2k+1-k^2-3k+8>0$

$-k+9>0$

$\therefore k<9$

따라서 자연수 k의 최댓값은 8이다. 답 ③

3-1

이차방정식 $x^2-2(k-3)x+k^2-4k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-3)^2-(k^2-4k-3)>0$

$k^2-6k+9-k^2+4k+3>0$

$-2k+12>0$

$\therefore k<6$

따라서 자연수 k의 최댓값은 5이다. 답 5

3-2

이차방정식 $x^2-(k-1)x+k^2-k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k-1)^2-4(k^2-k-1)=0$

$k^2-2k+1-4k^2+4k+4=0$

$3k^2-2k-5=0$, $(k+1)(3k-5)=0$

$\therefore k=\frac{5}{3}$ ($\because k>0$)

따라서 주어진 이차방정식은 $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=0$이므로

$9x^2-6x+1=0$, $(3x-1)^2=0$

$\therefore x=\frac{1}{3}$

따라서 $\alpha=\frac{1}{3}$이므로

$k+\alpha=2$ 답 ④

유형 4

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-2$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=3^3-3\cdot(-2)\cdot3=45$ 답 ③

4-1

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-4$

$\therefore \dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{2^2-2\cdot(-4)}{-4}=-3$ 답 -3

4-2

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=1$ …… ㉠

$\therefore (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$

$=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$ ($\because$ ㉠에서 $\alpha>0,\ \beta>0$)

$=4+2\cdot1=6$

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{6}$ 답 $\sqrt{6}$

유형 5

이차방정식 $x^2-5x-3=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=-3$

$\therefore (\alpha+2)+(\beta+2)=(\alpha+\beta)+4=5+4=9$

$(\alpha+2)(\beta+2)=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4$

$=-3+2\cdot5+4=11$

따라서 $\alpha+2,\ \beta+2$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-9x+11=0$ 답 ③

5-1

이차방정식 $x^2-4x-1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=-1$

$\therefore (\alpha-1)+(\beta-1)=(\alpha+\beta)-2=4-2=2$

$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$

$=-1-4+1=-4$

따라서 $\alpha-1,\ \beta-1$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-2x-4=0$ 답 $x^2-2x-4=0$

5-2

이차방정식 $x^2-2x-5=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-5$

$\therefore (\alpha+\beta)+\alpha\beta=2+(-5)=-3$

$(\alpha+\beta)\alpha\beta=2\cdot(-5)=-10$

따라서 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은 $2(x^2+3x-10)=0$

$\therefore 2x^2+6x-20=0$ 답 $2x^2+6x-20=0$

유형 6

$a,\ b$가 실수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1-2i$이면 다른 한 근은 $1+2i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-2i)+(1+2i)=-a,\ (1-2i)(1+2i)=b$

$\therefore a=-2,\ b=5$

$\therefore ab=-10$ 답 ⑤

6-1

$a,\ b$가 유리수이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=-a,\ (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=b$

$\therefore a=-2,\ b=-1$

$\therefore \dfrac{a}{b}=2$ 답 2

6-2

$a,\ b$가 실수이므로 $a-b,\ ab$도 실수이다.

즉, 이차방정식 $x^2+(a-b)x+ab=0$의 한 근이 $2-\sqrt{3}i$이면 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-\sqrt{3}i)+(2+\sqrt{3}i)=-(a-b),\ (2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)=ab$

$\therefore a-b=-4,\ ab=7$

$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=(-4)^2+2\cdot7=30$ 답 30

교과서 문제 정복하기

› 본문 36~37쪽

01 -5	02 ③	03 36	04 1	05 ④
06 $-\sqrt{13},\ \sqrt{13}$		07 1, 2	08 만들 수 없다.	
09 ①	10 40	11 8	12 $x^2-9x+9=0$	
13 $3x^2-x-1=0$		14 -4	15 ②	

01

이차방정식 $x^2-(k+1)x+3k+2=0$의 한 근이 2이므로

$2^2-(k+1)\cdot2+3k+2=0$ $\therefore k=-4$

$k=-4$를 주어진 이차방정식에 대입하면

$x^2+3x-10=0,\ (x+5)(x-2)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=2$

따라서 다른 한 근은 -5이다. 답 -5

02

이차방정식 $x^2-2mx+m-5=0$의 한 근이 1이므로

$1^2-2m\cdot1+m-5=0$ $\therefore m=-4$

$m=-4$를 주어진 이차방정식에 대입하면

$x^2+8x-9=0$, $(x+9)(x-1)=0$
$\therefore x=-9$ 또는 $x=1$
따라서 $a=-9$이므로
$m+a=-13$ 답 ③

03

$(x+3)(x-4)=\frac{1}{2}x^2$에서 $x^2-2x-24=0$
$(x+4)(x-6)=0$
$\therefore x=6$ ($\because x>4$)
따라서 처음 정사각형의 넓이는
$6\cdot6=36$ 답 36

04

$(5-x)(3+x)=16x$에서 $x^2+14x-15=0$
$(x+15)(x-1)=0$
$\therefore x=1$ ($\because 0<x<5$) 답 1

05

이차방정식 $x^2-2kx+k^2+2k-15=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=k^2-(k^2+2k-15)>0$
$-2k+15>0$
$\therefore k<\frac{15}{2}$
따라서 자연수 k의 최댓값은 7이다. 답 ④

06

이차방정식 $x^2-2(k-3)x+2k^2-6k-4=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(k-3)^2-(2k^2-6k-4)=0$
$k^2-6k+9-2k^2+6k+4=0$
$k^2=13$
$\therefore k=-\sqrt{13}$ 또는 $k=\sqrt{13}$ 답 $-\sqrt{13}$, $\sqrt{13}$

07

뽑은 2개의 공에 적힌 수 중에서 처음에 x의 계수와 상수항의 자리에 적은 수를 각각 p, q ($p\neq q$)라 하면 이차방정식 $x^2+px+q=0$은 서로 다른 두 허근을 가지므로
$p^2-4q<0$ …… ㉠
이차방정식 $x^2+qx+p=0$은 중근을 가지므로
$q^2-4p=0$ …… ㉡
이때 ㉡을 만족시키는 순서쌍 (p, q)는
$(1, 2)$, $(9, 6)$
이 중에서 ㉠을 만족시키는 순서쌍 (p, q)는
$(1, 2)$
따라서 뽑은 2개의 공에 적힌 두 수는 1과 2이다. 답 1, 2

08

액자의 가로의 길이를 x cm라 하면 세로의 길이는
$(50-x)$ cm이므로
$x(50-x)=650$, 즉 $x^2-50x+650=0$ ($0<x<50$)
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-25)^2-650=-25<0$
이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.
따라서 조건을 모두 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 목공예가는 액자를 만들 수 없다. 답 만들 수 없다.

09

근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-\frac{2}{3}$
$\therefore \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$
$=\frac{2^2-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{-\frac{2}{3}}=-8$ 답 ①

10

근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-5$
$\therefore (\alpha^2+1)(\beta^2+1)=\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1$
$=(\alpha\beta)^2+\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+1$
$=(-5)^2+\{(-2)^2-2\cdot(-5)\}+1$
$=40$ 답 40

11

이차방정식 $x^2-ax+a-4=0$의 두 근을 α, β라 하면
근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=a-4$
이때 두 근의 합이 12이므로 $a=12$
따라서 두 근의 곱은 $12-4=8$이다. 답 8

12

근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$
$\therefore (\alpha^2+1)+(\beta^2+1)=\alpha^2+\beta^2+2$
$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2$
$=3^2-2\cdot1+2=9$
$(\alpha^2+1)(\beta^2+1)=\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1$
$=(\alpha\beta)^2+\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+1$
$=1^2+(3^2-2\cdot1)+1=9$
따라서 α^2+1, β^2+1을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-9x+9=0$ 답 $x^2-9x+9=0$

13

근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-3$

$$\therefore \frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\beta-1}=\frac{(\beta-1)+(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}$$
$$=\frac{\alpha+\beta-2}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$$
$$=\frac{1-2}{-3-1+1}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{\beta-1}=\frac{1}{(\alpha-1)(\beta-1)}$$
$$=\frac{1}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$$
$$=\frac{1}{-3-1+1}=-\frac{1}{3}$$

따라서 $\frac{1}{\alpha-1}$, $\frac{1}{\beta-1}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 3인 이차방정식은

$3\left(x^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)=0$

$\therefore 3x^2-x-1=0$ 답 $3x^2-x-1=0$

14

a, b가 유리수이므로 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이면 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=-a,\ (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=b$

$\therefore a=-4,\ b=1$

$\therefore ab=-4$ 답 -4

15

a, b가 실수이므로 $a-b$, ab도 실수이다.

즉, 이차방정식 $x^2+(a-b)x+ab=0$의 한 근이 $2+i$이면 다른 한 근은 $2-i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+i)+(2-i)=-(a-b),\ (2+i)(2-i)=ab$

$\therefore a-b=-4,\ ab=5$

$\therefore (a+b)^2=(a-b)^2+4ab$
$=(-4)^2+4\cdot5=36$ 답 ②

06 이차방정식과 이차함수

교과서 유형 흐름잡기

본문 39~41쪽

유형 1	②	1-1 30	1-2 6
유형 2	④	2-1 -2	2-2 -3
유형 3	④	3-1 7	3-2 4
유형 4	③	4-1 -16	4-2 ②
유형 5	④	5-1 9	5-2 7
유형 6	⑤	6-1 ④	6-2 9

유형 1

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -2, 3이므로 -2, 3은 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+3=-a,\ -2\cdot3=b$

이므로 $a=-1,\ b=-6$

$\therefore a+b=-7$ 답 ②

다른풀이

이차항의 계수가 1이고 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 좌표가 $(-2,\ 0)$, $(3,\ 0)$이므로

$y=(x+2)(x-3)=x^2-x-6$

따라서 $a=-1,\ b=-6$이므로 $a+b=-7$

1-1

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -3, 5이므로 -3, 5는 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+5=-a,\ -3\cdot5=b$

$\therefore a=-2,\ b=-15$

$\therefore ab=30$ 답 30

다른풀이

이차항의 계수가 1이고 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 좌표가 $(-3,\ 0)$, $(5,\ 0)$이므로

$y=(x+3)(x-5)=x^2-2x-15$

따라서 $a=-2,\ b=-15$이므로 $ab=30$

1-2

이차항의 계수가 a이고 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 좌표가 $(-2,\ 0)$, $(1,\ 0)$이므로

$y=a(x+2)(x-1)=ax^2+ax-2a$

즉, $b=a$, $c=-2a$

이때 그래프의 y절편이 -2이므로 $-2a=-2$

$\therefore a=1,\ b=1,\ c=-2$

$\therefore a^2+b^2+c^2=6$ 답 6

유형 2

이차함수 $y=x^2-2kx+2k^2+4k-5$의 그래프가 x축에 접하므로 방정식 $x^2-2kx+2k^2+4k-5=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=k^2-(2k^2+4k-5)=0$

$k^2+4k-5=0$, $(k+5)(k-1)=0$

$\therefore k=-5$ 또는 $k=1$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $-5+1=-4$이다.

답 ④

2-1

이차함수 $y=x^2-(k-1)x+k^2+k-2$의 그래프가 x축에 접하므로 방정식 $x^2-(k-1)x+k^2+k-2=0$의 판별식을 D라 할 때

$D=(k-1)^2-4(k^2+k-2)=0$

$k^2-2k+1-4k^2-4k+8=0$

$k^2+2k-3=0$, $(k+3)(k-1)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=1$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $-3+1=-2$이다.

답 -2

2-2

이차함수 $y=x^2-2(k+1)x+k^2-7$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식

$x^2-2(k+1)x+k^2-7=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(k^2-7)>0$

$2k+8>0$ $\therefore k>-4$

따라서 정수 k의 최솟값은 -3이다.

답 -3

유형 3

이차함수 $y=x^2-4x+k$의 그래프와 직선 $y=x+3$이 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2-4x+k=x+3$, 즉

$x^2-5x+k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4(k-3)>0$

$-4k+37>0$ $\therefore k<\frac{37}{4}$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, …, 9의 9개이다.

답 ④

3-1

이차함수 $y=x^2-x+k$의 그래프와 직선 $y=2x+5$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2-x+k=2x+5$, 즉

$x^2-3x+k-5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4(k-5)>0$

$-4k+29>0$ $\therefore k<\frac{29}{4}$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, …, 7의 7개이다.

답 7

3-2

이차함수 $y=-x^2+3x-k$의 그래프와 직선 $y=4x-3$이 만나지 않으므로 이차방정식 $-x^2+3x-k=4x-3$, 즉

$x^2+x+k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4(k-3)<0$

$-4k+13<0$ $\therefore k>\frac{13}{4}$

따라서 자연수 k의 최솟값은 4이다.

답 4

유형 4

직선 $y=ax+b$의 기울기가 1이므로 $a=1$

이차함수 $y=x^2-5x+2$의 그래프와 직선 $y=x+b$가 접하므로 이차방정식 $x^2-5x+2=x+b$, 즉 $x^2-6x+2-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(2-b)=0$ $\therefore b=-7$

$\therefore b-a=-8$

답 ③

4-1

직선 $y=ax+b$의 기울기가 -2이므로 $a=-2$

이차함수 $y=-x^2+2x+4$의 그래프와 직선 $y=-2x+b$가 접하므로 이차방정식 $-x^2+2x+4=-2x+b$, 즉

$x^2-4x+b-4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(b-4)=0$ $\therefore b=8$

$\therefore ab=-16$

답 -16

4-2

직선 $y=3x+5$를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y=3(x-k)+5=3x-3k+5$

이 직선이 이차함수 $y=x^2-x+12$의 그래프와 접하므로 이차방정식 $x^2-x+12=3x-3k+5$, 즉 $x^2-4x+3k+7=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(3k+7)=0$

$-3k-3=0$ $\therefore k=-1$

답 ②

유형 5

$y=x^2-4x+6$

$=(x-2)^2+2$

이므로 $x=2$에서 최솟값 2를 갖는다.

따라서 $a=2$, $b=2$이므로 $a+b=4$

답 ④

5-1

$y=x^2-6x+12$

$=(x-3)^2+3$

이므로 $x=3$에서 최솟값 3을 갖는다.

따라서 $a=3$, $b=3$이므로 $ab=9$

답 9

5-2

이차함수 $y=x^2+ax+b$가 $x=3$에서 최솟값을 4를 가지므로

$y=x^2+ax+b$

$=(x-3)^2+4$

$=x^2-6x+13$

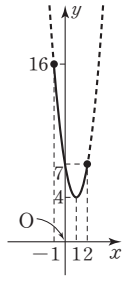
따라서 $a=-6$, $b=13$이므로 $a+b=7$ 답 7

유형 6

$y=3x^2-6x+7$

$=3(x-1)^2+4$

이므로 $-1\le x\le 2$에서 $y=3x^2-6x+7$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=1$에서 최솟값 $m=4$를 갖고,

$x=-1$에서 최댓값 $M=16$을 가지므로

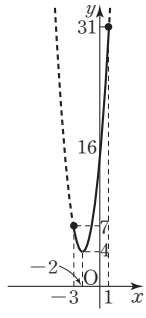
$M+m=20$ 답 ⑤

6-1

$y=3x^2+12x+16$

$=3(x+2)^2+4$

이므로 $-3\le x\le 1$에서 $y=3x^2+12x+16$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=-2$에서 최솟값 $m=4$를 갖고,

$x=1$에서 최댓값 $M=31$을 가지므로

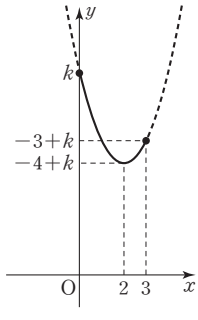
$M-m=27$ 답 ④

6-2

$y=x^2-4x+k$

$=(x-2)^2-4+k$

이므로 $0\le x\le 3$에서 $y=x^2-4x+k$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 $x=2$에서 최솟값 $-4+k$를 가지므로

$-4+k=5$ $\therefore k=9$

따라서 $x=0$에서 최댓값 9를 갖는다.

답 9

교과서 문제 정복하기 › 본문 42~43쪽

01 ①	02 -6	03 $y=-\frac{1}{2}x^2+2$		04 6
05 ②	06 3	07 12	08 ④	09 6
10 $y=(2-2\sqrt{2})x+18$	11 9		12 ①	13 ②
14 12	15 ③			

01

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -2, 4이므로 -2, 4는 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+4=-a$, $-2\cdot 4=b$

$\therefore a=-2$, $b=-8$

$\therefore a+b=-10$ 답 ①

다른풀이

이차항의 계수가 1이고 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 좌표가 $(-2, 0)$, $(4, 0)$이므로

$y=(x+2)(x-4)=x^2-2x-8$

따라서 $a=-2$, $b=-8$이므로 $a+b=-10$

02

이차항의 계수가 a이고 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 좌표가 $(-3, 0)$, $(2, 0)$이므로

$y=a(x+3)(x-2)=ax^2+ax-6a$

즉, $b=a$, $c=-6a$

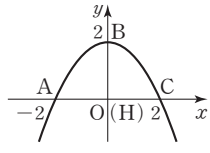
이때 그래프의 y절편이 -6이므로 $-6a=-6$

$\therefore a=1$, $b=1$, $c=-6$

$\therefore abc=-6$ 답 -6

03

주어진 그림을 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 즉, 포물선과 x축의 교점의 좌표가 $(-2, 0)$, $(2, 0)$이므로



$y=a(x+2)(x-2)$

$=ax^2-4a$ $(a<0)$

로 놓을 수 있다.

이때 그래프의 y절편이 2이므로

$-4a=2$ $\therefore a=-\frac{1}{2}$

따라서 구하는 이차함수의 식은

$y=-\frac{1}{2}x^2+2$ 답 $y=-\frac{1}{2}x^2+2$

04

이차함수 $y=x^2-(k-1)x+k+2$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2-(k-1)x+k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k-1)^2-4(k+2)=0$

$k^2-6k-7=0$, $(k+1)(k-7)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=7$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $-1+7=6$이다. 답 6

05

이차함수 $y=-x^2+2kx-k^2+3k+9$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식

$-x^2+2kx-k^2+3k+9=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2+(-k^2+3k+9)>0$

$3k+9>0$

$\therefore k>-3$ 답 ②

06

이차함수 $y=x^2-3x+k$의 그래프와 직선 $y=-2x+3$이 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식

$x^2-3x+k=-2x+3$, 즉

$x^2-x+k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4(k-3)>0$

$-4k+13>0 \quad \therefore k<\frac{13}{4}$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3의 3개이다. 답 3

07

이차함수 $y=x^2-x+k$의 그래프와 직선 $y=3x+8$이 접하므로 이차방정식 $x^2-x+k=3x+8$, 즉 $x^2-4x+k-8=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(k-8)=0$

$-k+12=0$

$\therefore k=12$ 답 12

08

직선 $y=ax+b$의 기울기가 -1이므로 $a=-1$

이차함수 $y=x^2-2x+7$의 그래프와 직선 $y=-x+b$가 접하므로 이차방정식 $x^2-2x+7=-x+b$, 즉 $x^2-x+7-b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4(7-b)=0$

$4b-27=0 \quad \therefore b=\frac{27}{4}$

$\therefore ab=-\frac{27}{4}$ 답 ④

09

이차함수 $y=x^2+3x+6$의 그래프와 직선 $y=mx+2$가 한 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2+3x+6=mx+2$,

즉 $x^2+(3-m)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(3-m)^2-4\cdot4=0$

$m^2-6m-7=0$, $(m+1)(m-7)=0$

$\therefore m=-1$ 또는 $m=7$

따라서 모든 실수 m의 값의 합은

$-1+7=6$ 답 6

10

점 $(0, 18)$을 지나는 직선의 방정식을 $y=ax+18$ $(a<0)$이라 하면 이 직선이 이차함수 $y=-\frac{1}{9}x^2+2x$의 그래프와 접하므로 이차방정식 $-\frac{1}{9}x^2+2x=ax+18$, 즉

$x^2+9(a-2)x+162=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{9(a-2)\}^2-4\cdot162=0$

$a^2-4a-4=0$

$\therefore a=2\pm2\sqrt{2}$

그런데 $a<0$이므로 $a=2-2\sqrt{2}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=(2-2\sqrt{2})x+18$ 답 $y=(2-2\sqrt{2})x+18$

11

$y=-2x^2+4x+6$

$=-2(x^2-2x)+6$

$=-2(x-1)^2+8$

이므로 $x=1$에서 최댓값 8을 갖는다.

따라서 $a=1$, $b=8$이므로

$a+b=9$ 답 9

12

이차함수 $y=x^2+ax+3$이 $x=2$에서 최솟값 b를 가지므로

$y=x^2+ax+3$

$=(x-2)^2+b$

즉, $x^2+ax+3=x^2-4x+4+b$이므로

$a=-4$, $3=4+b$

따라서 $a=-4$, $b=-1$이므로

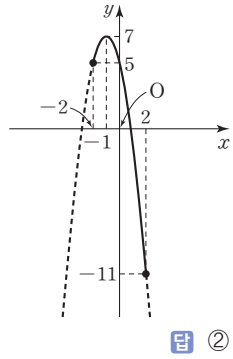
$a+b=-5$ 답 ①

13

$y=-2x^2-4x+5$

$=-2(x+1)^2+7$

이므로 $-2\le x\le2$에서 $y=-2x^2-4x+5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=-1$에서 최댓값 $M=7$을 갖고, $x=2$에서 최솟값 $m=-11$을 가지므로

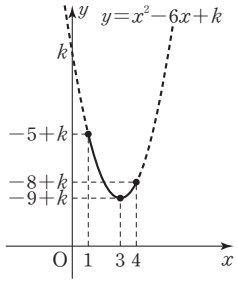
$M+m=-4$ 답 ②

14

$y=x^2-6x+k$

$=(x-3)^2-9+k$

이므로 $1\le x\le 4$에서 $y=x^2-6x+k$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=1$에서 최댓값 $M=-5+k$를 갖고, $x=3$에서 최솟값 $m=-9+k$를 가지므로

$M+m=(-5+k)+(-9+k)$

$=-14+2k=10$

$\therefore k=12$

답 12

15

$f(x)=x^2+ax+b$

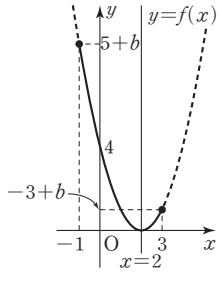
$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 $-\frac{a}{2}=2$에서

$a=-4$

즉, $f(x)=(x-2)^2-4+b$

이때 $-1\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 $5+b$를 가지므로

$5+b=9$

$\therefore b=4$

$\therefore a+b=0$

답 ③

07 여러 가지 방정식

교과서 유형 흐름잡기 본문 45~47쪽

유형 1	①	1-1 -2	1-2 ②
유형 2	④	2-1 2, 3	2-2 2
유형 3	②	3-1 $-\frac{17}{4}$	3-2 -2
유형 4	⑤	4-1 -1	4-2 $-1-2i$
유형 5	⑤	5-1 2	5-2 ①
유형 6	②	6-1 3	6-2 9

유형 1

$P(x)=x^3-2x^2-5x+6$으로 놓으면

$P(1)=1-2-5+6=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	−2	−5	6
		1	−1	−6
	1	−1	−6	0

$P(x)=(x-1)(x^2-x-6)$

$=(x-1)(x+2)(x-3)$

즉, 주어진 방정식은

$(x-1)(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

따라서 세 근 중 가장 큰 근은 3, 가장 작은 근은 -2이므로 구하는 합은

$3+(-2)=1$

답 ①

1-1

$P(x)=x^3+4x^2+x-6$으로 놓으면

$P(1)=1+4+1-6=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	4	1	−6
		1	5	6
	1	5	6	0

$P(x)=(x-1)(x^2+5x+6)$

$=(x-1)(x+2)(x+3)$

즉, 주어진 방정식은

$(x-1)(x+2)(x+3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 세 근 중 가장 큰 근은 1, 가장 작은 근은 -3이므로 구하는 합은

$1+(-3)=-2$

답 -2

1-2

$x^2-x=X$로 치환하면 주어진 방정식은

$X^2-8X+12=0$, $(X-2)(X-6)=0$

$\therefore X=2$ 또는 $X=6$

(i) $X=2$일 때, $x^2-x-2=0$에서

$(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

(ii) $X=6$일 때, $x^2-x-6=0$에서

$(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

(i), (ii)에서 모든 실근의 합은

$-1+2+(-2)+3=2$ 답 ②

유형 2

$x^3-4x^2+kx-\frac{3}{2}k=0$의 한 근이 3이므로

$27-36+3k-\frac{3}{2}k=0$, $\frac{3}{2}k-9=0$ $\therefore k=6$

$P(x)=x^3-4x^2+6x-9$로 놓으면

$P(3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$P(x)=(x-3)(x^2-x+3)$

3	1	−4	6	−9
		3	−3	9
	1	−1	3	0

따라서 주어진 방정식은

$(x-3)(x^2-x+3)=0$

이때 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2-x+3=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 3이다.

답 ④

2-1

$x^3-x^2+kx+24=0$의 한 근이 -4이므로

$-64-16-4k+24=0$, $-4k-56=0$ $\therefore k=-14$

$P(x)=x^3-x^2-14x+24$로 놓으면

$P(-4)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$P(x)=(x+4)(x^2-5x+6)$

$=(x+4)(x-2)(x-3)$

−4	1	−1	−14	24
		−4	20	−24
	1	−5	6	0

즉, 주어진 방정식은 $(x+4)(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 나머지 두 근은 $x=2$ 또는 $x=3$이다. 답 2, 3

2-2

$x^4+ax^3+bx^2+2x-2=0$의 두 근이 -1, 1이므로

$1-a+b-2-2=0$에서 $-a+b=3$ …… ㉠

$1+a+b+2-2=0$에서 $a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=1$

$P(x)=x^4-2x^3+x^2+2x-2$로 놓으면 $P(-1)=0$, $P(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

−1	1	−2	1	2	−2
		−1	3	−4	2
1	1	−3	4	−2	0
		1	−2	2	
	1	−2	2	0	

$\therefore P(x)=(x+1)(x-1)(x^2-2x+2)$

즉, 주어진 방정식은 $(x+1)(x-1)(x^2-2x+2)=0$

이때 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2-2x+2=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 2이다.

답 2

유형 3

방정식 $2x^3-3x^2-3x+2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-\frac{3}{2}$, $\alpha\beta\gamma=-1$

$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=\left(\frac{3}{2}-\gamma\right)\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)\left(\frac{3}{2}-\beta\right)$

$=\frac{27}{8}-\frac{9}{4}(\alpha+\beta+\gamma)+\frac{3}{2}(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=\frac{27}{8}-\frac{9}{4}\cdot\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-(-1)=-\frac{5}{4}$ 답 ②

3-1

방정식 $x^3-5x^2+2x+8=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=5$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=-8$

$\therefore \frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\gamma}=\frac{5-\alpha}{\alpha}+\frac{5-\beta}{\beta}+\frac{5-\gamma}{\gamma}$

$=\frac{5}{\alpha}+\frac{5}{\beta}+\frac{5}{\gamma}-3$

$=5\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-3$

$=5\cdot\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}-3$

$=5\cdot\frac{2}{-8}-3$

$=-\frac{17}{4}$ 답 $-\frac{17}{4}$

3-2

방정식 $x^3+ax^2-9x+18=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-9$, $\alpha\beta\gamma=-18$

$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=-\frac{1}{9}$에서 $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{1}{9}$

$\frac{-a}{-18}=-\frac{1}{9}$ $\therefore a=-2$ 답 -2

유형 4

주어진 방정식의 계수가 유리수이므로 $1+\sqrt{2}$가 근이면 $1-\sqrt{2}$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=-a$
$\alpha(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\alpha=b$
$\alpha(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-2$
위의 세 식을 연립하여 풀면 $\alpha=2$, $a=-4$, $b=3$
$\therefore ab=-12$ 답 ⑤

4-1

주어진 방정식의 계수가 유리수이므로 $2-\sqrt{3}$이 근이면 $2+\sqrt{3}$도 근이다.
나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=-a$
$\alpha(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})\alpha=b$
$\alpha(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$
위의 세 식을 연립하여 풀면 $\alpha=1$, $a=-5$, $b=5$
$\therefore \frac{b}{a}=-1$ 답 -1

4-2

주어진 방정식의 계수가 실수이므로 $1+2i$가 근이면 $1-2i$도 근이다.
나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$(1+2i)(1-2i)\alpha=-10 \quad \therefore \alpha=-2$
따라서 나머지 두 근은 $1-2i$, -2이므로 구하는 합은
$(1-2i)+(-2)=-1-2i$ 답 $-1-2i$

유형 5

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.
따라서 $\omega^2+\omega+1=0$이므로 $\omega+1=-\omega^2$
$\therefore \frac{\omega+1}{\omega^2}+\frac{\omega^2}{\omega+1}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}+\frac{\omega^2}{-\omega^2}=-2$ 답 ⑤

5-1

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, 즉 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이다.
따라서 $\omega^2-\omega+1=0$이므로 $\omega^2=\omega-1$
$\therefore \frac{\omega-1}{\omega^2}+\frac{\omega^2}{\omega-1}=\frac{\omega-1}{\omega-1}+\frac{\omega-1}{\omega-1}=2$ 답 2

5-2

$\omega=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $2\omega-1=\sqrt{3}i$
양변을 제곱하면 $4\omega^2-4\omega+1=-3$
$4\omega^2-4\omega+4=0$
$\therefore \omega^2-\omega+1=0$
양변에 $\omega+1$을 곱하면
$(\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0$
$\omega^3+1=0$
$\therefore \omega^3=-1$
$\therefore \omega^{2019}+\frac{1}{\omega^{2019}}=(\omega^3)^{673}+\frac{1}{(\omega^3)^{673}}$
$=-1-1=-2$ 답 ①

유형 6

$2x-y=3$에서 $y=2x-3$ …… ㉠
㉠을 $3x^2+y^2=4$에 대입하면
$3x^2+(2x-3)^2=4$
$7x^2-12x+5=0$, $(7x-5)(x-1)=0$
$\therefore x=\frac{5}{7}$ 또는 $x=1$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$x=\frac{5}{7}$일 때, $y=-\frac{11}{7}$
$x=1$일 때, $y=-1$
따라서 $a=1$, $b=-1$이므로
$a^2+b^2=2$ 답 ②

6-1

$x-2y=1$에서 $x=2y+1$ …… ㉠
㉠을 $x^2+y^2=10$에 대입하면
$(2y+1)^2+y^2=10$
$5y^2+4y-9=0$, $(5y+9)(y-1)=0$
$\therefore y=-\frac{9}{5}$ 또는 $y=1$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$y=-\frac{9}{5}$일 때, $x=-\frac{13}{5}$
$y=1$일 때, $x=3$
따라서 $a=3$, $b=1$이므로
$ab=3$ 답 3

6-2

$x^2-4y^2=0$에서 $(x+2y)(x-2y)=0$
$\therefore x=-2y$ 또는 $x=2y$
(i) $x=-2y$를 $x^2+xy+y^2=63$에 대입하면
$(-2y)^2+(-2y)\cdot y+y^2=63$, $y^2=21$
$\therefore y=\pm\sqrt{21}$, $x=\mp2\sqrt{21}$ (복부호동순)
(ii) $x=2y$를 $x^2+xy+y^2=63$에 대입하면
$(2y)^2+2y\cdot y+y^2=63$, $y^2=9$
$\therefore y=\pm3$, $x=\pm6$ (복부호동순)
(i), (ii)에서 $a+b$는 $a=6$, $b=3$일 때 최대이므로 구하는 최댓값은
$6+3=9$ 답 9

교과서 문제 정복하기

본문 48~49쪽

01 $x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=3$

02 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ **03** ④

04 -3 **05** ② **06** 23 **07** -24 **08** $1+i$

09 ② **10** ③ **11** 0 **12** 5 **13** 5

14 8 **15** 20

01

$P(x)=x^3+2x^2-9x-18$로 놓으면

$P(-2)=-8+8+18-18=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

-2	1	2	-9	-18
		-2	0	18
	1	0	-9	0

$P(x)=(x+2)(x^2-9)$

$=(x+2)(x+3)(x-3)$

즉, 주어진 방정식은

$(x+2)(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=3$

답 $x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=3$

02

$2x^2-3x=X$로 치환하면 주어진 방정식은

$(X+2)(X-3)+4=0$, $X^2-X-2=0$

$(X+1)(X-2)=0$ $\therefore X=-1$ 또는 $X=2$

(i) $X=-1$일 때, $2x^2-3x+1=0$에서

$(2x-1)(x-1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

(ii) $X=2$일 때, $2x^2-3x-2=0$에서

$(2x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

답 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

03

$x^3+ax^2+bx-6=0$의 두 근이 1, 2이므로

$1+a+b-6=0$에서 $a+b=5$ …… ㉠

$8+4a+2b-6=0$에서 $2a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6$, $b=11$

$P(x)=x^3-6x^2+11x-6$으로 놓으면

$P(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	-6	11	-6
		1	-5	6
	1	-5	6	0

$P(x)=(x-1)(x^2-5x+6)$

$=(x-1)(x-2)(x-3)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 나머지 한 근 a는 3이므로

$a+a+b=8$

답 ④

04

$x^4-3x^3-x^2+ax+b=0$의 두 근이 1, 2이므로

$1-3-1+a+b=0$에서 $a+b=3$ …… ㉠

$16-24-4+2a+b=0$에서 $2a+b=12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=9$, $b=-6$

$P(x)=x^4-3x^3-x^2+9x-6$으로 놓으면

$P(1)=0$, $P(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	-3	-1	9	-6
		1	-2	-3	6
2	1	-2	-3	6	0
		2	0	-6	
	1	0	-3	0	

$\therefore P(x)=(x-1)(x-2)(x^2-3)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x-2)(x^2-3)=0$

이때 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2-3=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 나머지 두 근의 곱은 -3이다.

답 -3

05

방정식 $x^3-10x^2-5x+6=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=10$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-5$, $\alpha\beta\gamma=-6$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$

$=\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)-1$

$=-6-(-5)+10-1=8$

답 ②

06

주어진 방정식의 세 근을 α, 2α, 3α $(\alpha\neq0)$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha+3\alpha=6$, $6\alpha=6$ $\therefore \alpha=1$

따라서 세 근이 1, 2, 3이므로

$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot1=a$ $\therefore a=11$

$1\cdot2\cdot3=-b$ $\therefore b=-6$

$\therefore a-2b=23$

답 23

07

주어진 방정식의 계수가 유리수이므로 $1-\sqrt{3}$이 근이면 $1+\sqrt{3}$도 근이다.

나머지 한 근을 a라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})=0$
$\alpha(1-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})\alpha=a$
$\alpha(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})=b$
위 세 식을 연립하여 풀면 $\alpha=-2$, $a=-6$, $b=4$
$\therefore ab=-24$ 답 -24

08

주어진 방정식의 계수가 실수이므로 $1-i$가 근이면 $1+i$도 근이다.
나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha(1-i)+(1-i)(1+i)+(1+i)\alpha=4$
$2+2\alpha=4$ $\therefore \alpha=1$
따라서 나머지 두 근은 $1+i$, 1이므로 구하는 곱은
$(1+i)\cdot 1=1+i$ 답 $1+i$

09

$P(x)=2x^3+x^2+2x+3$으로 놓으면
$P(-1)=-2+1-2+3=0$
이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면
$P(x)=(x+1)(2x^2-x+3)$

-1	2	1	2	3
		-2	1	-3
	2	-1	3	0

따라서 주어진 방정식은
$(x+1)(2x^2-x+3)=0$
이때 z_1, z_2는 이차방정식 $2x^2-x+3=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$z_1z_2=\frac{3}{2}$
또, 주어진 방정식의 계수가 모두 실수이므로
$\overline{z_1}=z_2$, $\overline{z_2}=z_1$
$\therefore z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=z_1z_2+z_2z_1$
$=2z_1z_2=2\cdot\frac{3}{2}=3$ 답 ②

10

$x^3=1$에서 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$
이므로 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.
따라서 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$이므로
$\omega^6+\omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1$
$=(\omega^3)^2+\omega^3(\omega^2+\omega+1)+(\omega^2+\omega+1)$
$=1$ 답 ③

11

$x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$을 곱하면
$(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x^3-1=0$ $\therefore x^3=1$
$\therefore x^{2022}+x^{2021}+x^{2020}=(x^3)^{674}+(x^3)^{673}\cdot x^2+(x^3)^{673}\cdot x$
$=x^2+x+1=0$ 답 0

12

과자 상자의 모든 모서리의 길이를 각각 x cm씩 늘리면 부피가 3배가 되므로
$(15+x)(10+x)(10+x)=3\cdot 15\cdot 10\cdot 10$
$x^3+35x^2+400x+1500=4500$
$x^3+35x^2+400x-3000=0$
$(x-5)(x^2+40x+600)=0$
$\therefore x=5$ 또는 $x=-20\pm 10\sqrt{2}i$
그런데 x는 실수이므로 $x=5$ 답 5

13

$x-y=1$에서 $x=y+1$ …… ㉠
㉠을 $x^2-2xy+3y^2=3$에 대입하면
$(y+1)^2-2(y+1)y+3y^2=3$
$y^2-1=0$
$\therefore y=1$ ($\because y>0$) …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $x=2$
따라서 $a=2$, $b=1$이므로
$a^2+b^2=5$ 답 5

14

$x^2+3xy-4y^2=0$에서 $(x+4y)(x-y)=0$
$\therefore x=-4y$ 또는 $x=y$
(i) $x=-4y$를 $x^2+2xy=48$에 대입하면
$(-4y)^2+2\cdot(-4y)\cdot y=48$, $y^2=6$
$\therefore y=\pm\sqrt{6}$, $x=\mp 4\sqrt{6}$ (복부호동순)
(ii) $x=y$를 $x^2+2xy=48$에 대입하면
$y^2+2y\cdot y=48$, $y^2=16$
$\therefore y=\pm 4$, $x=\pm 4$ (복부호동순)
(i), (ii)에서 $a+b$는 $a=4$, $b=4$일 때 최대이므로 구하는 최댓값은
$4+4=8$ 답 8

15

$\begin{cases} x+y=9 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2=y^2+3^2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $y=9-x$이므로 이 식을 ㉡에 대입하면
$x^2=(9-x)^2+9$, $x^2=81-18x+x^2+9$
$18x=90$ $\therefore x=5$
$x=5$를 ㉠에 대입하면 $y=4$
$\therefore xy=20$ 답 20

08 여러 가지 부등식

교과서 유형 흐름잡기

본문 51~53쪽

유형 1 ④ 1-1 27 1-2 ②

유형 2 ④ 2-1 $x<-\frac{3}{2}$ 또는 $x>3$

2-2 5

유형 3 ④ 3-1 $\frac{7}{2}$ 3-2 1

유형 4 ③ 4-1 $-4<k<4$ 4-2 $-4<k<2$

유형 5 ⑤ 5-1 $-3<x<6$ 5-2 -1

유형 6 ⑤ 6-1 $-5<x\leq-3$ 또는 $\frac{1}{2}\leq x<2$

6-2 $-3<x\leq1$ 또는 $3\leq x<4$

유형 1

$2x-3\geq5$에서 $2x\geq8$

$\therefore x\geq4$ …… ㉠

$3x<x+10$에서 $2x<10$

$\therefore x<5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $4\leq x<5$

따라서 $a=4$, $b=5$이므로

$a+b=9$ 답 ④

1-1

$3x-1>8$에서 $3x>9$

$\therefore x>3$ …… ㉠

$2x<x+9$에서 $x<9$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $3<x<9$

따라서 $a=3$, $b=9$이므로

$ab=27$ 답 27

1-2

$3x-1\leq5x+7$에서 $-2x\leq8$

$\therefore x\geq-4$ …… ㉠

$5x+7\leq2x+16$에서 $3x\leq9$

$\therefore x\leq3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-4\leq x\leq3$ 답 ②

유형 2

$|3x-2|\leq5$에서 $-5\leq3x-2\leq5$

$-3\leq3x\leq7$ $\therefore -1\leq x\leq\frac{7}{3}$

따라서 $a=-1$, $b=\frac{7}{3}$이므로

$a+b=\frac{4}{3}$ 답 ④

2-1

$|4x-3|>9$에서 $4x-3<-9$ 또는 $4x-3>9$

$\therefore x<-\frac{3}{2}$ 또는 $x>3$ 답 $x<-\frac{3}{2}$ 또는 $x>3$

2-2

$|x|+|x-1|\leq5$에서

(i) $x<0$일 때, $-x-(x-1)\leq5$

$-2x\leq4$ $\therefore x\geq-2$

그런데 $x<0$이므로 $-2\leq x<0$

(ii) $0\leq x<1$일 때, $x-(x-1)\leq5$

$\therefore 0\cdot x\leq4$

그런데 $0\leq x<1$이므로 $0\leq x<1$

(iii) $x\geq1$일 때, $x+(x-1)\leq5$

$2x\leq6$ $\therefore x\leq3$

그런데 $x\geq1$이므로 $1\leq x\leq3$

(i), (ii), (iii)에서 $-2\leq x\leq3$

따라서 $a=-2$, $b=3$이므로

$b-a=3-(-2)=5$ 답 5

유형 3

$x^2-4x-5<0$에서 $(x+1)(x-5)<0$

$\therefore -1<x<5$

따라서 $a=-1$, $b=5$이므로

$a+b=4$ 답 ④

3-1

$-2x^2+5x+3\leq0$에서 $2x^2-5x-3\geq0$

$(2x+1)(x-3)\geq0$ $\therefore x\leq-\frac{1}{2}$ 또는 $x\geq3$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=3$이므로

$b-a=\frac{7}{2}$ 답 $\frac{7}{2}$

3-2

$ax^2+bx-6>0$의 해가 $x<-3$ 또는 $x>2$이므로 $a>0$

해가 $x<-3$ 또는 $x>2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+3)(x-2)>0$ $\therefore x^2+x-6>0$

양변에 a를 곱하면 $ax^2+ax-6a>0$

이 부등식이 $ax^2+bx-6>0$과 같으므로

$a=1$, $b=1$

$\therefore ab=1$ 답 1

유형 4

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2-2kx+k+2>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2kx+k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(k+2)<0$

$k^2-k-2<0$, $(k+1)(k-2)<0$

$\therefore -1<k<2$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로

$b-a=3$ 답 ③

4-1

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+kx+4>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+kx+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-16<0$

$(k+4)(k-4)<0$

$\therefore -4<k<4$ 답 $-4<k<4$

4-2

모든 실수 x에 대하여 부등식 $-x^2+2(k+2)x-2(k+6)<0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $-x^2+2(k+2)x-2(k+6)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+2)^2-2(k+6)<0$

$k^2+2k-8<0$, $(k+4)(k-2)<0$

$\therefore -4<k<2$ 답 $-4<k<2$

유형 5

$y=3x^2-4x-5$의 그래프가 $y=x^2+x+7$의 그래프보다 아래쪽에 있으면

$3x^2-4x-5<x^2+x+7$

$2x^2-5x-12<0$, $(2x+3)(x-4)<0$

$\therefore -\frac{3}{2}<x<4$

따라서 $a=-\frac{3}{2}$, $b=4$이므로

$a+b=\frac{5}{2}$ 답 ⑤

5-1

$y=2x^2-5x-4$의 그래프가 $y=x^2-2x+14$의 그래프보다 아래쪽에 있으면

$2x^2-5x-4<x^2-2x+14$

$x^2-3x-18<0$, $(x+3)(x-6)<0$

$\therefore -3<x<6$ 답 $-3<x<6$

5-2

$y=x^2-2ax+4$의 그래프가 직선 $y=-4x+a$보다 위쪽에 있으면

$x^2-2ax+4>-4x+a$

$x^2-2(a-2)x+4-a>0$ …… ㉠

해가 $x<-5$ 또는 $x>-1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+5)(x+1)>0$ $\therefore x^2+6x+5>0$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$-2(a-2)=6$, $4-a=5$

$\therefore a=-1$ 답 -1

유형 6

$x^2-2x-8\geq 0$에서 $(x+2)(x-4)\geq 0$

$\therefore x\leq -2$ 또는 $x\geq 4$ …… ㉠

$2x^2-13x+6<0$에서 $(2x-1)(x-6)<0$

$\therefore \frac{1}{2}<x<6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $4\leq x<6$

따라서 $a=4$, $b=6$이므로

$a+b=10$ 답 ⑤

6-1

$x^2+3x-10<0$에서 $(x+5)(x-2)<0$

$\therefore -5<x<2$ …… ㉠

$2x^2+5x-3\geq 0$에서 $(x+3)(2x-1)\geq 0$

$\therefore x\leq -3$ 또는 $x\geq \frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-5<x\leq -3$ 또는 $\frac{1}{2}\leq x<2$

답 $-5<x\leq -3$ 또는 $\frac{1}{2}\leq x<2$

6-2

$x^2-x-12<0$에서 $(x+3)(x-4)<0$

$\therefore -3<x<4$ …… ㉠

$|x-2|\geq 1$에서 $x-2\leq -1$ 또는 $x-2\geq 1$

$\therefore x\leq 1$ 또는 $x\geq 3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3<x\leq 1$ 또는 $3\leq x<4$

답 $-3<x\leq 1$ 또는 $3\leq x<4$

교과서 문제 정복하기

본문 54~55쪽

01 ③	02 3	03 6	04 ⑤	05 ④
06 노랑	07 5	08 ①	09 ④	10 5
11 7	12 3	13 $1<x\leq 6$		
14 $-1<a\leq 0$ 또는 $2\leq a<3$		15 21 m		

01

$3x-4\geq 5$에서 $3x\geq 9$ $\therefore x\geq 3$ …… ㉠

$2x-3<x+2$에서 $x<5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $3\leq x<5$ 답 ③

02

$2x>x+a$에서 $x>a$

$5(x-1)<3(x+3)$에서 $5x-5<3x+9$

$2x<14$ $\therefore x<7$

이때 주어진 연립부등식의 해가 $3<x<7$이므로

$a=3$ 답 3

03

$|2x-5|>7$에서 $2x-5<-7$ 또는 $2x-5>7$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>6$

$\therefore a=6$ 답 6

04

$|x+a|\le 9$에서 $-9\le x+a\le 9$

$\therefore -9-a\le x\le 9-a$

이때 주어진 부등식의 해가 $b\le x\le 2$이므로

$-9-a=b$, $9-a=2$

$\therefore a=7$, $b=-16$

$\therefore a-b=23$ 답 ⑤

05

$2|x+1|\ge 3|x-2|+1$에서

(i) $x<-1$일 때, $-2(x+1)\ge -3(x-2)+1$

$\therefore x\ge 9$

그런데 $x<-1$이므로 해는 없다.

(ii) $-1\le x<2$일 때, $2(x+1)\ge -3(x-2)+1$

$5x\ge 5$ $\therefore x\ge 1$

그런데 $-1\le x<2$이므로 $1\le x<2$

(iii) $x\ge 2$일 때, $2(x+1)\ge 3(x-2)+1$

$-x\ge -7$ $\therefore x\le 7$

그런데 $x\ge 2$이므로 $2\le x\le 7$

(i), (ii), (iii)에서 부등식의 해는 $1\le x\le 7$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7개이다. 답 ④

06

$|a-580|<10$에서

$-10<a-580<10$

$\therefore 570<a<590$

즉, 나트륨이 불꽃 반응에서 방출하는 빛의 파장 a nm에 대하여 $570\le a<590$이 성립하므로 나타나는 불꽃색은 노랑이다.

답 노랑

07

$x^2-5x+6\le 0$에서 $(x-2)(x-3)\le 0$

$\therefore 2\le x\le 3$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 2, 3이므로 그 합은

$2+3=5$ 답 5

08

해가 $-4<x<6$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+4)(x-6)<0$

$\therefore x^2-2x-24<0$

따라서 $a=-2$, $b=-24$이므로

$a+b=-26$ 답 ①

09

해가 $x=2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-2)^2\le 0$ $\therefore x^2-4x+4\le 0$

이 부등식이 $x^2+ax+b\le 0$과 같으므로

$a=-4$, $b=4$

$\therefore a^2+b^2=32$ 답 ④

10

이차부등식 $(k-2)x^2-2(k-2)x+3\le 0$의 해가 오직 한 개 존재하려면

$k-2>0$ $\therefore k>2$ …… ㉠

또 이차방정식 $(k-2)x^2-2(k-2)x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-3(k-2)=0$

$(k-2)(k-5)=0$

$\therefore k=2$ 또는 $k=5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k=5$ 답 5

11

모든 실수 x에 대하여 $x^2+2(k+1)x+2k^2+3k-11\ge 0$이 성립해야 하므로 이차방정식

$x^2+2(k+1)x+2k^2+3k-11=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(2k^2+3k-11)\le 0$

$k^2+k-12\ge 0$, $(k+4)(k-3)\ge 0$

$\therefore k\le -4$ 또는 $k\ge 3$

따라서 $a=-4$, $b=3$이므로

$b-a=7$ 답 7

12

$y=x^2-ax$의 그래프가 직선 $y=a$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-ax>a$, 즉 $x^2-ax-a>0$이 성립해야 한다.

이때 이차방정식 $x^2-ax-a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\cdot(-a)<0$

$a^2+4a<0$, $a(a+4)<0$

$\therefore -4<a<0$

따라서 정수 a는 -3, -2, -1의 3개이다. 답 3

13

$x^2-5x-6\le 0$에서 $(x+1)(x-6)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 6$ …… ㉠

$x^2+2x-3>0$에서 $(x+3)(x-1)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 부분을 구하면

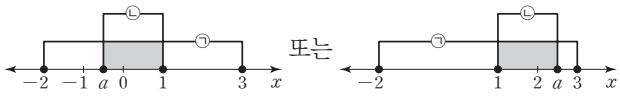
$1<x\le 6$ 답 $1<x\le 6$

14

$x^2-x-6\le 0$에서 $(x+2)(x-3)\le 0$

$\therefore -2\le x\le 3$ …… ㉠

따라서 ㉠과 $(x-1)(x-a)\le 0$ … ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x의 개수가 2가 되려면 공통부분이 다음 그림과 같아야 한다.



$\therefore -1<a\le 0$ 또는 $2\le a<3$

답 $-1<a\le 0$ 또는 $2\le a<3$

15

직사각형 모양의 배추밭의 둘레의 길이가 54 m이므로 가로의 길이를 x m라 하면 세로의 길이는 $(27-x)$ m이다.

배추밭의 넓이가 126 m^2 이상이므로

$x(27-x)\ge 126$

$x^2-27x+126\le 0$

$(x-6)(x-21)\le 0$

$\therefore 6\le x\le 21$ …… ㉠

이때 가로의 길이가 세로의 길이보다 길므로

$x\ge 27-x$, $2x\ge 27$

$\therefore x\ge \frac{27}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{27}{2}\le x\le 21$

따라서 가로의 길이의 최댓값은 21 m이다. 답 21 m

Ⅲ. 도형의 방정식

되짚어 보기

› 본문 56쪽

01 (1) 12 (2) $4\sqrt{3}$

02 (1) 직선의 기울기: $\frac{3}{4}$, x절편: 4, y절편: -3

(2) 직선의 기울기: 3, x절편: 4, y절편: -12

03 (1)과 (4), (2)와 (3)

04 (1) $a<-4$ 또는 $a>4$ (2) -4, 4

(3) $-4<a<4$

05 (1) $4\sqrt{3}$ (2) 12

06 -5, -1

09 평면좌표

교과서 유형 흐름잡기

› 본문 59~60쪽

유형 1 ⑤ **1**-1 4 **1**-2 $P\left(\frac{7}{3}, 0\right)$

유형 2 ③ **2**-1 -5 **2**-2 ④

유형 3 ③ **3**-1 ② **3**-2 27

유형 4 ③ **4**-1 -2 **4**-2 10

유형 1

두 점 A, B 사이의 거리가 $\sqrt{13}$이므로

$\sqrt{(a-3)^2+(1-4)^2}=\sqrt{13}$

$\sqrt{a^2-6a+18}=\sqrt{13}$

양변을 각각 제곱하면

$a^2-6a+18=13$

$a^2-6a+5=0$

$(a-1)(a-5)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=5$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 6이다.

답 ⑤

1-1

두 점 A, B 사이의 거리가 $3\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{\{1-(-2)\}^2+(a-1)^2}=3\sqrt{2}$

$\sqrt{a^2-2a+10}=\sqrt{18}$

양변을 각각 제곱하면

$a^2-2a+10=18$

$a^2-2a-8=0$

$(a+2)(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

답 4

1-2

점 P가 x축 위의 점이므로 P$(a, 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a+2)^2+(-3)^2=(a-4)^2+(-5)^2$

$a^2+4a+13=a^2-8a+41$

$12a=28 \quad \therefore a=\frac{7}{3}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{7}{3}, 0\right)$이다. 답 $\mathrm{P}\left(\frac{7}{3}, 0\right)$

유형 2

$a=\frac{1\cdot 6+2\cdot 3}{1+2}=4,\ b=\frac{1\cdot 1+2\cdot(-2)}{1+2}=-1$

이므로 $a+b=3$ 답 ③

2-1

$a=\frac{1\cdot 2+3\cdot(-2)}{1+3}=-1,\ b=\frac{1\cdot 8+3\cdot 4}{1+3}=5$

이므로 $ab=-5$ 답 -5

2-2

선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점의 좌표가 $(0, 0)$이므로

$\frac{2\cdot b+3\cdot(-2)}{2+3}=0,\ \frac{2\cdot 9+3\cdot a}{2+3}=0$

$2b-6=0,\ 3a+18=0$

$\therefore a=-6,\ b=3$

$\therefore a^2+b^2=45$ 답 ④

유형 3

$a=\frac{2\cdot 4-1\cdot 1}{2-1}=7,\ b=\frac{2\cdot 3-1\cdot 5}{2-1}=1$

이므로 $a+b=8$ 답 ③

3-1

$a=\frac{3\cdot 3-2\cdot 5}{3-2}=-1,\ b=\frac{3\cdot(-2)-2\cdot(-4)}{3-2}=2$

이므로 $b-a=3$ 답 ②

3-2

선분 AB를 2 : b로 외분하는 점의 좌표가 $(0, 0)$이므로

$\frac{2\cdot(-3)-b\cdot(-2)}{2-b}=0,\ \frac{2\cdot a-b\cdot 6}{2-b}=0$

$-6+2b=0,\ a-3b=0$

$\therefore a=9,\ b=3$

$\therefore ab=27$ 답 27

유형 4

$a=\frac{2+3+4}{3}=3,\ b=\frac{-1+4+6}{3}=3$

이므로 $a+b=6$ 답 ③

4-1

$a=\frac{-3+2+4}{3}=1,\ b=\frac{5+(-4)+8}{3}=3$

이므로 $a-b=-2$ 답 -2

4-2

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(3, 1)$이므로

$\frac{a+2+4}{3}=3,\ \frac{5+(-3)+b}{3}=1$

따라서 $a=3,\ b=1$이므로

$a^2+b^2=10$ 답 10

교과서 문제 정복하기

본문 61쪽

01 29 **02** $\mathrm{P}\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ **03** $\sqrt{17}$ **04** -8

05 4 **06** 49 **07** $\sqrt{58}$ **08** 1

01

선분 AB의 길이 l은 두 점 A, B 사이의 거리이므로

$l=\sqrt{(0+2)^2+(5-0)^2}=\sqrt{29}$

$\therefore l^2=29$ 답 29

02

점 P가 y축 위의 점이므로 P$(0, y)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$4^2+(y-3)^2=(-2)^2+(y+5)^2$

$y^2-6y+25=y^2+10y+29$

$16y=-4 \quad \therefore y=-\frac{1}{4}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$이다. 답 $\mathrm{P}\left(0, -\frac{1}{4}\right)$

03

공원을 원점, 동쪽을 x축의 양의 방향, 북쪽을 y축의 양의 방향으로 하는 좌표평면을 생각하면 백화점의 좌표는 $(3, 2)$, 학교의 좌표는 $(-1, 1)$이므로 백화점과 학교 사이의 직선 거리는

$\sqrt{(-1-3)^2+(1-2)^2}=\sqrt{17}$ 답 $\sqrt{17}$

04

$a=\frac{2\cdot 2+1\cdot 8}{2+1}=4,\ b=\frac{2\cdot(-5)+1\cdot 4}{2+1}=-2$

이므로 $ab=-8$ 답 -8

05

$\frac{5\cdot 4+2\cdot(-3)}{5+2}=b,\ \frac{5\cdot a+2\cdot(-5)}{5+2}=0$에서

$2=b$, $5a-10=0$

$\therefore a=2$, $b=2$

$\therefore a+b=4$ 답 4

06

$a=\frac{4\cdot(-5)-3\cdot3}{4-3}=-29$, $b=\frac{4\cdot2-3\cdot(-4)}{4-3}=20$

이므로 $b-a=49$ 답 49

07

두 점 A(0, 4), B(2, 6)에 대하여 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점을 C라 하면

$C\left(\frac{3\cdot2-1\cdot0}{3-1}, \frac{3\cdot6-1\cdot4}{3-1}\right)$, 즉 C(3, 7)

따라서 원점과 점 C 사이의 거리는

$\sqrt{(3-0)^2+(7-0)^2}=\sqrt{58}$ 답 $\sqrt{58}$

08

$a=\frac{5+3+4}{3}=4$, $b=\frac{2+(-4)+(-7)}{3}=-3$

이므로 $a+b=1$ 답 1

10 직선의 방정식

교과서 유형 흐름잡기 본문 63~65쪽

유형 1 ①	1-1 4	1-2 13
유형 2 ③	2-1 제1, 2, 4사분면	2-2 제2, 3, 4사분면
유형 3 ③	3-1 2	3-2 5
유형 4 ③	4-1 4	4-2 ②
유형 5 ②	5-1 3	5-2 30
유형 6 ③	6-1 2	6-2 11

유형 1

기울기가 2이고 점 (1, 3)을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=2(x-1)$

$\therefore y=2x+1$

따라서 y절편은 1이다. 답 ①

1-1

기울기가 -3이고 점 (2, 6)을 지나는 직선의 방정식은

$y-6=-3(x-2)$

$\therefore y=-3x+12$

따라서 x절편은 4이다. 답 4

1-2

두 점 $(-2, 1)$, $(-1, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{5-1}{-1-(-2)}\{x-(-2)\}$

$\therefore y=4x+9$

즉, $4x-y+9=0$이므로 $a=4$, $b=9$

$\therefore a+b=13$ 답 13

유형 2

$ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $ac<0$, $bc>0$에서 a와 b의 부호는 서로 다르므로

$-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}<0$

따라서 주어진 직선의 기울기는 양수이고 y절편은 음수이므로 직선 $ax+by+c=0$은 제1, 3, 4사분면을 지난다. 답 ③

2-1

$ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $ab>0$, $bc<0$에서

$-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}>0$

따라서 주어진 직선의 기울기는 음수이고 y절편은 양수이므로 직선 $ax+by+c=0$은 제1, 2, 4사분면을 지난다.

답 제1, 2, 4사분면

2-2

$ax+by+c=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$의 기울기는 음수, y절편도 음수이므로

$-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}<0$

$cx+by+a=0$에서 $y=-\frac{c}{b}x-\frac{a}{b}$

따라서 직선 $cx+by+a=0$의 기울기는 음수, y절편도 음수이므로 이 직선은 제2, 3, 4사분면을 지난다.

답 제2, 3, 4사분면

유형 3

두 직선 $y=(a^2-6)x-a$, $y=ax+2$가 서로 평행하므로

$a^2-6=a$에서 $a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0$ $\therefore a=-2$ 또는 $a=3$

또 y절편이 같지 않아야 하므로 $-a\neq 2$, 즉 $a\neq -2$이다.

$\therefore a=3$ 답 ③

3-1

두 직선 $y=(a^2+2)x+5$, $y=3ax+a+4$가 서로 평행하므로

$a^2+2=3a$에서 $a^2-3a+2=0$

$(a-1)(a-2)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=2$

또 y절편이 같지 않아야 하므로 $5\neq a+4$, 즉 $a\neq 1$이다.

$\therefore a=2$ 답 2

3-2

두 직선 $ax-3y-5=0$, $(a-2)x+(a+2)y+2=0$이 서로 수직이므로

$a(a-2)-3(a+2)=0$에서 $a^2-5a-6=0$

$(a+1)(a-6)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=6$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $-1+6=5$ 답 5

유형 4

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+3y-2)k+(x+2y-4)=0$

이 식이 k에 대한 항등식이므로

$x+3y-2=0$, $x+2y-4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=8$, $y=-2$

따라서 직선 $(k+1)x+(3k+2)y-2k-4=0$은 모든 실수 k에 대하여 항상 점 $(8, -2)$를 지나므로

$a+b=6$ 답 ③

4-1

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+2y-6)k+(x-3y+4)=0$

이 식이 k에 대한 항등식이므로

$x+2y-6=0$, $x-3y+4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=2$

따라서 직선 $(k+1)x+(2k-3)y-6k+4=0$은 모든 실수 k에 대하여 항상 점 $(2, 2)$를 지나므로

$ab=4$ 답 4

4-2

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x+y+5)k+(x-3y-1)=0$

이 식이 k에 대한 항등식이므로

$2x+y+5=0$, $x-3y-1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=-1$

따라서 원점과 점 $\mathrm{P}(-2, -1)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$ 답 ②

유형 5

점 $(1, 2)$와 직선 $4x-3y+7=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4\cdot 1-3\cdot 2+7|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=1$ 답 ②

5-1

점 $(2, -1)$과 직선 $3x+4y+13=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3\cdot 2+4\cdot(-1)+13|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$ 답 3

5-2

점 $(4, 2)$와 직선 $5x-12y+a=0$ 사이의 거리가 2이므로

$\frac{|5\cdot 4-12\cdot 2+a|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=2$

$|a-4|=26$

$\therefore a=30$ ($\because a>0$) 답 30

유형 6

두 직선 $3x-4y+7=0$과 $3x-4y+10=0$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x-4y+10=0$ 위의 한 점 $(-2, 1)$과 직선 $3x-4y+7=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$\frac{|3\cdot(-2)-4\cdot 1+7|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{3}{5}$ 답 ③

6-1

두 직선 $x-\sqrt{3}y+4=0$과 $x-\sqrt{3}y+8=0$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-\sqrt{3}y+4=0$ 위의 한 점 $(-4, 0)$과 직선 $x-\sqrt{3}y+8=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$\frac{|-4-\sqrt{3}\cdot 0+8|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=2$ 답 2

6-2

두 직선 $x-y+5=0$과 $x-y+k=0$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-y+5=0$ 위의 한 점 $(-5, 0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리와 같다.

두 직선 사이의 거리가 $3\sqrt{2}$이므로

$$\frac{|-5-0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$$

$|k-5|=6$

$\therefore k=11$ ($\because k>0$) 답 11

교과서 문제 정복하기

본문 66~67쪽

01 2 **02** 4 **03** -36 **04** $y=\frac{4}{7}x+\frac{5}{7}$

05 ③ **06** -2 **07** 2 **08** 15

09 $\mathrm{P}(2, -4)$ **10** $5\sqrt{2}$ **11** 3 **12** 11

13 $\frac{52}{5}$ m **14** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ **15** $\frac{9}{4}$

01

기울기가 3이고 점 $(2, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-5=3(x-2)$

$\therefore y=3x-1$

이 직선이 점 $(1, a)$를 지나므로

$a=3\cdot1-1=2$ 답 2

02

두 점 $(-3, -5)$, $(2, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+5=\frac{5-(-5)}{2-(-3)}(x+3)$ $\therefore y=2x+1$

이 직선이 점 $(a, 9)$를 지나므로

$9=2a+1$ $\therefore a=4$ 답 4

03

x절편이 3, y절편이 4인 직선의 방정식은

$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ $\therefore 4x+3y-12=0$

따라서 $a=3$, $b=-12$이므로

$ab=-36$ 답 -36

04

직선 l의 방정식은

$y-3=\frac{4}{7}(x-4)$

$\therefore y=\frac{4}{7}x+\frac{5}{7}$ 답 $y=\frac{4}{7}x+\frac{5}{7}$

05

$ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $ab<0$, $bc<0$에서 $-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}>0$

따라서 주어진 직선의 기울기는 양수이고 y절편도 양수이므로 직선 $ax+by+c=0$의 개형은 ③이다. 답 ③

06

두 직선 $kx-2y+4=0$, $x+y+3=0$이 평행하므로

$\frac{k}{1}=\frac{-2}{1}\neq\frac{4}{3}$

$\therefore k=-2$ 답 -2

07

두 직선 $ax-6y+1=0$, $(a+1)x+y+3=0$이 서로 수직이므로

$a(a+1)-6\cdot1=0$

$a^2+a-6=0$

$(a+3)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$) 답 2

08

직선 $mx-y-1=0$이 직선 $nx-3y+2=0$과 수직이므로

$mn+(-1)\cdot(-3)=0$

$\therefore mn=-3$

또 직선 $mx-y-1=0$이 직선 $(n+3)x+y+5=0$과 평행하므로

$\frac{m}{n+3}=\frac{-1}{1}\neq\frac{-1}{5}$

$m=-n-3$

$\therefore m+n=-3$

$\therefore m^2+n^2=(m+n)^2-2mn$

$=(-3)^2-2\cdot(-3)=15$ 답 15

09

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(3x+y-2)k+(-2x+y+8)=0$

이 식이 k에 대한 항등식이므로

$3x+y-2=0$, $-2x+y+8=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=-4$

$\therefore \mathrm{P}(2, -4)$ 답 $\mathrm{P}(2, -4)$

10

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x-y+5)k+(4x-y+3)=0$

이 식이 k에 대한 항등식이므로

$2x-y+5=0$, $4x-y+3=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=7$
따라서 원점과 점 P(1, 7) 사이의 거리는
$\sqrt{1^2+7^2}=5\sqrt{2}$ 답 $5\sqrt{2}$

11
점 $(1, -2)$와 직선 $4x-3y+5=0$ 사이의 거리는
$\frac{|4\cdot1-3\cdot(-2)+5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=3$ 답 3

12
점 $(1, 1)$과 직선 $3x-4y+a=0$ 사이의 거리가 2이므로
$\frac{|3\cdot1-4\cdot1+a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$
$|a-1|=10$
$\therefore a=11$ ($\because a>0$) 답 11

13
주어진 그림에서 두 점 A(0, 6), B(8, 0)을 지나는 직선의 방정식은
$\frac{x}{8}+\frac{y}{6}=1$
$3x+4y=24$
$\therefore 3x+4y-24=0$ …… ㉠
이때 수영해서 이동해야 하는 최소 거리는 점 P(12, 10)과 직선 ㉠ 사이의 거리이므로
$\frac{|3\cdot12+4\cdot10-24|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{52}{5}$(m) 답 $\frac{52}{5}$ m

14
두 직선 $x-2y+4=0$, $x-2y+7=0$은 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-2y+4=0$ 위의 한 점 $(0, 2)$와 직선 $x-2y+7=0$ 사이의 거리와 같다.
따라서 구하는 거리는
$\frac{|0-2\cdot2+7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 답 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

15
두 직선 $3x-4y-9=0$, $3x-4y+k=0$은 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x-4y-9=0$ 위의 한 점 $(3, 0)$과 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리와 같다.
두 직선 사이의 거리가 k이므로
$\frac{|3\cdot3-0+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=k$
$|k+9|=5k$
$k+9=5k$ ($\because k>0$)
$\therefore k=\frac{9}{4}$ 답 $\frac{9}{4}$

11 원의 방정식

교과서 유형 흐름잡기
본문 69~71쪽

유형 1	③	1-1 6	1-2 $(x+3)^2+y^2=25$
유형 2	②	2-1 -18	2-2 ③
유형 3	⑤	3-1 -15	3-2 -14
유형 4	①	4-1 -12	4-2 11
유형 5	①	5-1 $2\sqrt{10}$	5-2 12
유형 6	①, ④	6-1 $y=2x\pm5$	6-2 -9

유형 1
원의 중심이 $(2, 4)$이므로 원의 방정식은
$(x-2)^2+(y-4)^2=r^2$
이 원이 점 $(-1, 2)$를 지나므로
$(-1-2)^2+(2-4)^2=r^2$
$r^2=13$ $\therefore r=\sqrt{13}$ ($\because r>0$)
따라서 $a=2$, $b=4$, $r=\sqrt{13}$이므로
$a^2+b^2+r^2=33$ 답 ③

1-1
원의 중심이 $(3, -2)$이므로 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y+2)^2=r^2$
이 원이 점 $(6, 2)$를 지나므로
$(6-3)^2+(2+2)^2=r^2$
$r^2=25$ $\therefore r=5$ ($\because r>0$)
따라서 $a=3$, $b=-2$, $r=5$이므로
$a+b+r=6$ 답 6

1-2
원의 중심을 $(a, 0)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은
$(x-a)^2+y^2=r^2$
이 원이 점 $(1, 3)$을 지나므로
$(1-a)^2+9=r^2$
$\therefore a^2-2a+10=r^2$ ……㉠
또 이 원이 점 $(0, 4)$를 지나므로
$(-a)^2+16=r^2$
$\therefore a^2+16=r^2$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $r^2=25$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+3)^2+y^2=25$ 답 $(x+3)^2+y^2=25$

유형 2
원의 중심이 $(-1, 4)$이므로 원의 방정식은
$(x+1)^2+(y-4)^2=r^2$
이 원이 x축에 접하므로 반지름의 길이 r는 4이다.

따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+1)^2+(y-4)^2=4^2$
이므로 $a=-1$, $b=4$, $r=4$
$\therefore a+b+r=7$ 답 ②

2-1
원의 중심이 $(-3, 2)$이므로 원의 방정식은
$(x+3)^2+(y-2)^2=r^2$
이 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이 r는 3이다.
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+3)^2+(y-2)^2=3^2$
이므로 $a=-3$, $b=2$, $r=3$
$\therefore abr=-18$ 답 -18

2-2
원이 점 $(3, 0)$에서 x축에 접하므로 원의 중심을 $(3, a)$라 하면 반지름의 길이는 $|a|$이다.
이때 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y-a)^2=a^2$
이 원이 점 $(7, 2)$를 지나므로
$(7-3)^2+(2-a)^2=a^2$
$16+4-4a+a^2=a^2$
$\therefore a=5$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y-5)^2=25$ 답 ③

유형 3
$x^2+y^2-4x=0$ …… ㉠
$x^2+y^2-2x+4y+3=0$ …… ㉡
㉠−㉡을 하면
$-2x-4y-3=0$ $\therefore 2x+4y+3=0$
따라서 두 원 $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2-2x+4y+3=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은 $2x+4y+3=0$이므로
$a=4$, $b=3$
$\therefore a+b=7$ 답 ⑤

3-1
$x^2+y^2-2x-2y=0$ …… ㉠
$x^2+y^2-3x+y-5=0$ …… ㉡
㉠−㉡을 하면
$x-3y+5=0$
따라서 두 원 $x^2+y^2-2x-2y=0$, $x^2+y^2-3x+y-5=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은 $x-3y+5=0$이므로
$a=-3$, $b=5$
$\therefore ab=-15$ 답 -15

3-2
주어진 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을
$x^2+y^2-2x-3+k(x^2+y^2-6y-5)=0$ $(k\neq-1)$
…… ㉠
이라 하면 이 원이 점 $(2, 0)$을 지나므로
$-3-k=0$ $\therefore k=-3$
$k=-3$을 ㉠에 대입하여 정리하면
$x^2+y^2+x-9y-6=0$
따라서 $a=1$, $b=-9$, $c=-6$이므로
$a+b+c=-14$ 답 -14

유형 4
$y=\sqrt{3}x+k$를 $x^2+y^2=9$에 대입하면
$x^2+(\sqrt{3}x+k)^2=9$
$\therefore 4x^2+2\sqrt{3}kx+k^2-9=0$ …… ㉠
원과 직선이 한 점에서 만나므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(\sqrt{3}k)^2-4(k^2-9)=0$
$-k^2+36=0$
$\therefore k=6$ $(\because k>0)$ 답 ①

4-1
$y=2\sqrt{2}x+k$를 $x^2+y^2=16$에 대입하면
$x^2+(2\sqrt{2}x+k)^2=16$
$\therefore 9x^2+4\sqrt{2}kx+k^2-16=0$ …… ㉠
원과 직선이 한 점에서 만나므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(2\sqrt{2}k)^2-9(k^2-16)=0$
$-k^2+144=0$
$\therefore k=-12$ $(\because k<0)$ 답 -12

4-2
$y=\sqrt{3}x+k$를 $x^2+y^2-6y=0$에 대입하면
$x^2+(\sqrt{3}x+k)^2-6(\sqrt{3}x+k)=0$
$\therefore 4x^2+2\sqrt{3}(k-3)x+k^2-6k=0$ …… ㉠
원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=\{\sqrt{3}(k-3)\}^2-4(k^2-6k)>0$
$-k^2+6k+27>0$
$k^2-6k-27<0$
$(k+3)(k-9)<0$
$\therefore -3<k<9$
따라서 정수 k는 -2, -1, 0, …, 8의 11개이다. 답 11

다른풀이

원 $x^2+y^2-6y=0$에서 $x^2+(y-3)^2=9$

원 $x^2+y^2-6y=0$과 직선 $y=\sqrt{3}x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 $(0, 3)$과 직선 $\sqrt{3}x-y+k=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이인 3보다 작아야 하므로

$$\frac{|0-3+k|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}<3$$

$|k-3|<6$

$-6<k-3<6$

$\therefore -3<k<9$

따라서 정수 k는 -2, -1, 0, $\cdots$, 8의 11개이다.

유형 5

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $2x-y+5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0-0+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로

$M=\sqrt{5}+2$, $m=\sqrt{5}-2$

$\therefore Mm=(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)=1$ 답 ①

5-1

원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $x-3y+10=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0-0+10|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

이때 원의 반지름의 길이가 1이므로

$M=\sqrt{10}+1$, $m=\sqrt{10}-1$

$\therefore M+m=(\sqrt{10}+1)+(\sqrt{10}-1)$

$=2\sqrt{10}$ 답 $2\sqrt{10}$

5-2

$x^2+y^2-4x+2y+1=0$에서 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$

원 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$의 중심 $(2, -1)$과 직선 $3x-4y+10=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3\cdot 2-4\cdot(-1)+10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=4$$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로

$M=4+2=6$, $m=4-2=2$

$\therefore Mm=12$ 답 12

유형 6

직선 $x-3y+9=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x+3$에 수직인 직선의 기울기는 -3이고 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=-3x\pm\sqrt{10}\cdot\sqrt{(-3)^2+1}$

$\therefore y=-3x\pm10$ 답 ①, ④

6-1

직선 $x+2y+3=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$에 수직인 직선의 기울기는 2이고 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{2^2+1}$

$\therefore y=2x\pm5$

답 $y=2x\pm5$

6-2

원 $x^2+y^2=18$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$ax+by=18$ $\therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{18}{b}$

$-\frac{a}{b}=1$이므로 $a=-b$ …… ㉠

한편, 점 (a, b)는 원 $x^2+y^2=18$ 위에 있으므로

$a^2+b^2=18$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-3$ 또는 $a=-3$, $b=3$

$\therefore ab=-9$ 답 -9

교과서 문제 정복하기

본문 72~73쪽

01 $(x+3)^2+(y-1)^2=17$ **02** -2 **03** ③

04 $-\frac{4}{5}$ **05** $(x+5)^2+(y+4)^2=16$ **06** 10

07 ① **08** 2π **09** ⑤ **10** 9

11 $y=\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}$ **12** 5 **13** 26

14 $y=x\pm2$ **15** 2

01

반지름의 길이를 r라 하면 원의 중심이 $(-3, 1)$이므로 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y-1)^2=r^2$

이 원이 점 $(-4, 5)$를 지나므로

$(-4+3)^2+(5-1)^2=r^2$ $\therefore r^2=17$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y-1)^2=17$ 답 $(x+3)^2+(y-1)^2=17$

02

원의 중심은 현의 수직이등분선 위에 있으므로 직선 $x=-4$ 위에 있다.

즉, 원의 중심이 $(-4, b)$이므로 원의 방정식은

$(x+4)^2+(y-b)^2=r^2$

이 원이 점 $(0, 0)$을 지나므로

$16+b^2=r^2$ …… ㉠

또, 이 원이 점 $(-4, 2)$를 지나므로 $(2-b)^2=r^2$

$\therefore b^2-4b+4=r^2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=-3$, $r^2=25$

따라서 원의 중심은 $(-4, -3)$이고 반지름의 길이는 5이므로

$a=-4$, $b=-3$, $r=5$

$\therefore a+b+r=-2$ 답 -2

03

원 $x^2+y^2-10x+12y+12=0$에서

$(x-5)^2+(y+6)^2=49$

따라서 중심은 $(5, -6)$이고 반지름의 길이는 7이므로

$a=5$, $b=-6$, $r=7$

$\therefore a+b+r=6$ 답 ③

04

$x^2+y^2-10x+8y+12=0$에서 $(x-5)^2+(y+4)^2=29$

직선 $y=ax$가 원 $(x-5)^2+(y+4)^2=29$의 넓이를 이등분하므로 원의 중심 $(5, -4)$를 지난다. 즉

$-4=5a$ $\therefore a=-\frac{4}{5}$ 답 $-\frac{4}{5}$

05

반지름의 길이를 r라 하면 원의 중심이 $(-5, -4)$이므로 원의 방정식은

$(x+5)^2+(y+4)^2=r^2$

이 원이 x축에 접하므로 반지름의 길이 r는 4이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+5)^2+(y+4)^2=16$ 답 $(x+5)^2+(y+4)^2=16$

06

중심이 y축에 있고 원이 x축에 접하므로 원의 중심을 $(0, a)$라 하면 반지름의 길이는 $|a|$이다.

이때 원의 방정식은

$x^2+(y-a)^2=a^2$ …… ㉠

이 원이 점 $(6, 2)$를 지나므로

$6^2+(2-a)^2=a^2$

$36+4-4a+a^2=a^2$

$\therefore a=10$

따라서 원의 반지름의 길이는 10이다.

답 10

07

$x^2+y^2+2ax=0$ …… ㉠

$x^2+y^2-x+3y-5=0$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$(2a+1)x-3y+5=0$ …… ㉢

직선 ㉢이 점 $(1, 4)$를 지나므로

$2a+1-12+5=0$

$\therefore a=3$ 답 ①

08

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+2x-4+k(x^2+y^2+2x-4y+4)=0$ $(k\neq-1)$

…… ㉠

이라 하면 이 원이 원점을 지나므로

$-4+4k=0$ $\therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+y^2+2x-2y=0$

$\therefore (x+1)^2+(y-1)^2=2$

따라서 원의 넓이는 2π이다. 답 2π

09

$y=3x+k$를 $x^2+y^2=10$에 대입하면

$x^2+(3x+k)^2=10$

$\therefore 10x^2+6kx+k^2-10=0$ …… ㉠

원과 직선이 한 점에서 만나므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(3k)^2-10(k^2-10)=0$

$-k^2+100=0$

$\therefore k=10$ $(\because k>0)$ 답 ⑤

10

$y=2x+k$를 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$x^2+(2x+k)^2=5$

$\therefore 5x^2+4kx+k^2-5=0$ …… ㉠

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-5)>0$

$-k^2+25>0$, $k^2-25<0$

$(k+5)(k-5)<0$

$\therefore -5<k<5$

따라서 정수 k는 -4, -3, -2, …, 4의 9개이다. 답 9

11

등대는 3 km 떨어진 곳까지만 빛을 비추므로 등대의 불빛이 닿는 영역의 경계를 나타내는 원의 방정식은

$x^2+y^2=9$

구하는 직선의 방정식은 점 A$(-5, 0)$에서 원 $x^2+y^2=9$에 그은 접선의 방정식이다.

접점을 $P(x_1, y_1)$이라 하면 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=9$

이 직선이 점 $A(-5, 0)$을 지나므로

$-5x_1=9 \quad \therefore x_1=-\frac{9}{5}$ …… ㉠

점 $P(x_1, y_1)$은 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=9$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\left(-\frac{9}{5}\right)^2+y_1^2=9$

$\therefore y_1=\frac{12}{5}$ 또는 $y_1=-\frac{12}{5}$

따라서 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$-\frac{9}{5}x+\frac{12}{5}y=9, \ -\frac{9}{5}x-\frac{12}{5}y=9$

$\therefore y=\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}, \ y=-\frac{3}{4}x-\frac{15}{4}$

그런데 구하는 접선의 방정식은 기울기가 양수인 직선의 방정식이므로

$y=\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}$ 답 $y=\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}$

12

원 $x^2+y^2=4$의 중심 $(0, 0)$과 직선 $3x-4y-15=0$ 사이의 거리는

$\frac{|0-0-15|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은

$3+2=5$ 답 5

13

$x^2+y^2-6x+8y=0$에서 $(x-3)^2+(y+4)^2=25$

원의 중심 $(3, -4)$와 직선 $4x-3y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4\cdot3-3\cdot(-4)+k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|24+k|}{5}$

원의 반지름의 길이가 5이고, 원 위의 점 P와 직선 사이의 거리의 최댓값이 15이므로

$\frac{|24+k|}{5}+5=15 \quad \therefore k=26 \ (\because k>0)$ 답 26

14

직선 $x-y+1=0$, 즉 $y=x+1$에 평행한 직선의 기울기는 1이고 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=x\pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{1^2+1}$

$\therefore y=x\pm2$ 답 $y=x\pm2$

15

원 $(x-2)^2+(y+1)^2=5$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선은 점 $(1, 1)$과 원의 중심 $(2, -1)$을 지나는 직선에 수직이다.

이때 점 $(1, 1)$과 원의 중심 $(2, -1)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-1-1}{2-1}=-2$

이므로 원 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 원 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{2}(x-1)$

$\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(3, a)$를 지나므로

$a=\frac{1}{2}\cdot3+\frac{1}{2}$

$\therefore a=2$ 답 2

12 도형의 이동

교과서 유형 흐름잡기

본문 75~77쪽

유형 1 ②	1-1 10	1-2 13
유형 2 ②	2-1 3	2-2 20
유형 3 ③	3-1 2	3-2 ③
유형 4 ①	4-1 -3	4-2 3
유형 5 ②	5-1 -3	5-2 -1
유형 6 ④	6-1 12	
	6-2 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$	

유형 1

점 P(3, 6)을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 점은

P′(3+4, 6−5), 즉 P′(7, 1)

따라서 $a=7$, $b=1$이므로

$ab=7$ 답 ②

1-1

점 P(7, 4)를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점은

P′(7−3, 4+2), 즉 P′(4, 6)

따라서 $a=4$, $b=6$이므로

$a+b=10$ 답 10

1-2

점 P(a, b)를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 $-2a$만큼 평행이동한 점은 P′($a+b$, $b-2a$)이므로

$a+b=5$, $-2a+b=-1$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로

$a^2+b^2=13$ 답 13

유형 2

직선 $x+2y-3=0$을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 $2p$만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$(x-p)+2(y-2p)-3=0$

$\therefore x+2y-5p-3=0$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 (3, 5)를 지나므로

$3+10-5p-3=0$

$\therefore p=2$ 답 ②

2-1

직선 $2x+3y-5=0$을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 $p-2$만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$2(x-p)+3\{y-(p-2)\}-5=0$

$\therefore 2x+3y-5p+1=0$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 (4, 2)를 지나므로

$8+6-5p+1=0$

$\therefore p=3$ 답 3

2-2

원 $(x-4)^2+(y+2)^2=25$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-4)^2+(y-b+2)^2=25$ …… ㉠

원 ㉠의 중심이 원점이므로

$a+4=0$, $b-2=0$

따라서 $a=-4$, $b=2$이므로

$a^2+b^2=20$ 답 20

유형 3

점 (a, 2)를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (a, -2)

점 (a, -2)를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

($-a$, 2)

이 점이 점 (10, b)이므로 $a=-10$, $b=2$

$\therefore a+b=-8$ 답 ③

3-1

점 (5, a)를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (-5, a)

점 (-5, a)를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

(5, $-a$)

이 점이 점 (b, -7)이므로 $a=7$, $b=5$

$\therefore a-b=2$ 답 2

3-2

점 (-2, 4)를 원점에 대하여 대칭이동한 점은 A(2, -4)이고, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 B(4, -2)이다.

따라서 두 점 A, B 사이의 거리는

$\overline{AB}=\sqrt{(4-2)^2+\{-2-(-4)\}^2}=2\sqrt{2}$ 답 ③

유형 4

직선 $4x-3y+7=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$4x-3(-y)+7=0$

$\therefore 4x+3y+7=0$ …… ㉠

직선 ㉠을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$4(-x)+3(-y)+7=0$

$\therefore 4x+3y-7=0$ …… ㉡

직선 ㉡이 점 (1, a)를 지나므로

$4+3a-7=0$ $\therefore a=1$ 답 ①

4-1

직선 $6x-5y+3=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$6(-x)-5y+3=0$

$\therefore 6x+5y-3=0$ …… ㉠

직선 ㉠을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$6(-x)+5(-y)-3=0$

$\therefore 6x+5y+3=0$ …… ㉡

직선 ㉡이 점 $(a, 3)$을 지나므로

$6a+15+3=0$ $\therefore a=-3$ 답 -3

4-2

직선 $5x-4y-3=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$5y-4x-3=0$

$\therefore 4x-5y+3=0$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(3, a)$를 지나므로

$12-5a+3=0$ $\therefore a=3$ 답 3

유형 5

두 점 $(a, 7)$, $(-7, b)$를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(1, 2)$이므로

$\frac{a-7}{2}=1$, $\frac{7+b}{2}=2$

$\therefore a=9$, $b=-3$

$\therefore a+b=6$ 답 ②

5-1

두 점 $(3, a)$, $(-1, 5)$를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(b, 1)$이므로

$\frac{3-1}{2}=b$, $\frac{a+5}{2}=1$

$\therefore a=-3$, $b=1$

$\therefore ab=-3$ 답 -3

5-2

포물선 $y=x^2-2x+5=(x-1)^2+4$의 꼭짓점의 좌표는 $(1, 4)$

포물선 $y=-x^2+4x-7=-(x-2)^2-3$의 꼭짓점의 좌표는 $(2, -3)$

두 포물선이 점 (a, b)에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점 (a, b)에 대하여 대칭이다.

따라서 두 꼭짓점을 이은 선분의 중점의 좌표가 (a, b)이므로

$\frac{1+2}{2}=a$, $\frac{4-3}{2}=b$

따라서 $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이므로 $b-a=-1$ 답 -1

유형 6

두 점 $(2, 1)$, $(-6, 13)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2-6}{2}, \frac{1+13}{2}\right)$, 즉 $(-2, 7)$

이 점이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$7=-2a+b$ …… ㉠

또 두 점 $(2, 1)$, $(-6, 13)$을 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$와 수직이므로

$\frac{13-1}{-6-2}\cdot a=-1$ $\therefore a=\frac{2}{3}$

$a=\frac{2}{3}$를 ㉠에 대입하면 $b=\frac{25}{3}$

$\therefore a+b=9$ 답 ④

6-1

두 점 $(-4, 3)$, $(-1, 4)$를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-4-1}{2}, \frac{3+4}{2}\right)$, 즉 $\left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$\frac{7}{2}=-\frac{5}{2}a+b$ …… ㉠

또 두 점 $(-4, 3)$, $(-1, 4)$를 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$와 수직이므로

$\frac{4-3}{-1-(-4)}\cdot a=-1$ $\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $b=-4$

$\therefore ab=12$ 답 12

6-2

원 $(x-3)^2+y^2=1$의 중심 $(3, 0)$을 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면 두 점 $(3, 0)$, (a, b)를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3+a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=x-1$ 위의 점이므로

$\frac{b}{2}=\frac{3+a}{2}-1$ $\therefore a-b=-1$ …… ㉠

또 두 점 $(3, 0)$, (a, b)를 지나는 직선이 직선 $y=x-1$과 수직이므로

$\frac{b}{a-3}\cdot 1=-1$ $\therefore a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

원을 대칭이동해도 반지름의 길이는 변하지 않으므로 구하는 도형의 방정식은 중심이 $(1, 2)$이고 반지름의 길이가 1인 원의 방정식이다.

$\therefore (x-1)^2+(y-2)^2=1$ 답 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$

교과서 문제 정복하기

본문 78~79쪽

01 -12 **02** ③ **03** 13 **04** $\frac{5}{2}$ **05** 12
06 34 **07** B′(5, 2) **08** 29 **09** -5 **10** 1
11 1 **12** $x^2+(y-3)^2=1$ **13** -21
14 $(x-1)^2+(y-1)^2=9$ **15** $\frac{12}{5}$ km

01

점 P(5, -7)을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점은
P′(5$-$2, $-7+3$), 즉 P′(3, -4)
따라서 $a=3$, $b=-4$이므로
$ab=-12$ 답 -12

02

점 (5, 6)을 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 점의 좌표를 (2, 10)이라 하면
$5+p=2$, $6+q=10$
$\therefore p=-3$, $q=4$
따라서 원점을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점의 좌표는 (-3, 4)이므로
$a=-3$, $b=4$
$\therefore a+b=1$ 답 ③

03

직선 $y=2x+k$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y-(-2)=2(x-3)+k$
$\therefore y=2x+k-8$
이 직선이 직선 $y=2x+5$와 일치하므로
$k-8=5$ $\therefore k=13$ 답 13

04

직선 $y=4x-5$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y-2a=4(x-a)-5$
$\therefore y=4x-2a-5$
이 직선이 직선 $y=4x-10$과 일치하므로
$-2a-5=-10$
$\therefore a=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

05

직선 $2x-3y+6=0$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$2(x-3)-3(y-4)+6=0$
$\therefore 2x-3y+12=0$
이 직선의 x절편은 -6, y절편은 4이므로 이 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는
$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4=12$ 답 12

06

원 $(x-a)^2+(y-b)^2=4$를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 원의 방정식은
$(x-b-a)^2+(y+a-b)^2=4$ …… ㉠
원 ㉠이 원 $(x-2)^2+(y+8)^2=4$와 일치하므로
$a+b=2$, $a-b=8$
따라서 $a=5$, $b=-3$이므로
$a^2+b^2=34$ 답 34

07

점 A(-5, 0)이 점 A′(0, 3)으로 평행이동하였으므로
△A′B′O′은 △ABO를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
따라서 점 B′의 좌표는 (0$+5$, $-1+3$), 즉 (5, 2)이다.
답 B′(5, 2)

08

점 (a, b)를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(a, -b)$
점 $(a, -b)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(-a, b)$
이 점이 점 $(2b-1, -a+3)$이므로
$-a=2b-1$, $b=-a+3$
두 식을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=-2$
$\therefore a^2+b^2=29$ 답 29

09

점 (1, 2)를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 A(1, -2)
직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 B(2, 1)
두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은
$y-1=\frac{-2-1}{1-2}(x-2)$ $\therefore y=3x-5$
따라서 직선 $y=3x-5$의 y절편은 -5이다. 답 -5

10

직선 $ax-y-2=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$-ax+y-2=0$
이 직선을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$ax+y-2=0$
이 직선이 점 (-3, 5)를 지나므로
$-3a+5-2=0$ $\therefore a=1$ 답 1

11

두 점 $(3, 4)$, $(-1, b)$를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(a, 2)$이므로

$\frac{3-1}{2}=a$, $\frac{4+b}{2}=2$

$\therefore a=1, b=0$

$\therefore a+b=1$ 답 1

12

원 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$의 중심 $(2, 1)$을 점 $(1, 2)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{2+a}{2}=1$, $\frac{1+b}{2}=2$

$\therefore a=0, b=3$

원을 대칭이동해도 반지름의 길이는 변하지 않으므로 대칭이동한 원의 중심은 $(0, 3)$이고 반지름의 길이는 1이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+(y-3)^2=1$ 답 $x^2+(y-3)^2=1$

13

두 점 $(5, 2)$, $(-1, 0)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{5-1}{2}, \frac{2+0}{2}\right)$, 즉 $(2, 1)$

이 점이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$1=2a+b$ …… ㉠

또 두 점 $(5, 2)$, $(-1, 0)$을 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$와 수직이므로

$\frac{0-2}{-1-5}\cdot a=-1$ $\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $b=7$

$\therefore ab=-21$ 답 -21

14

원 $x^2+y^2=9$의 중심 $(0, 0)$을 직선 $y=-x+1$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면 두 점 $(0, 0)$, (a, b)를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=-x+1$ 위의 점이므로

$\frac{b}{2}=-\frac{a}{2}+1$ $\therefore a+b=2$ …… ㉠

또 두 점 $(0, 0)$, (a, b)를 지나는 직선이 직선 $y=-x+1$과 수직이므로

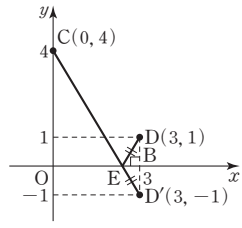
$\frac{b}{a}\cdot(-1)=-1$ $\therefore a=b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=1$

원을 대칭이동해도 반지름의 길이는 변하지 않으므로 대칭이동한 원의 중심은 $(1, 1)$이고 반지름의 길이는 3이다.

$\therefore (x-1)^2+(y-1)^2=9$ 답 $(x-1)^2+(y-1)^2=9$

15



좌표평면에서 직선 AB를 x축, 점 A를 원점에 놓으면

C$(0, 4)$, D$(3, 1)$

점 D를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 D′이라 하면

D′$(3, -1)$

$\overline{EC}+\overline{ED}=\overline{EC}+\overline{ED'}\geq\overline{CD'}$이므로 구하는 점 E는 직선 CD′이 x축과 만나는 점이다.

이때 두 점 C, D′을 지나는 직선의 방정식은

$y-(-1)=\frac{-1-4}{3-0}(x-3)$, 즉 $y=-\frac{5}{3}x+4$이므로 점 E의 좌표는 $\left(\frac{12}{5}, 0\right)$이다.

따라서 지하철역의 위치는 A지점에서 B지점의 방향으로 $\frac{12}{5}$ km 떨어진 곳이다. 답 $\frac{12}{5}$ km

memo

memo

memo