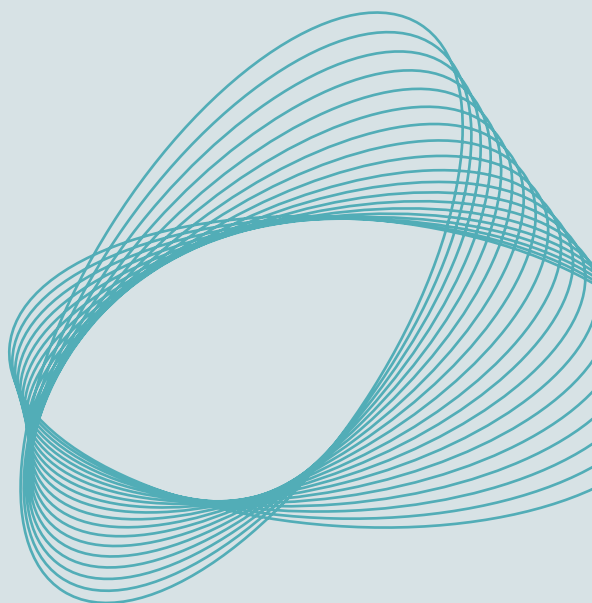


개념

수학의 시작 개념원리

기하

정답 및 풀이



1

이차곡선

I. 이차곡선

01

포물선의 방정식

● 본책 10~18쪽

1

답 (1) $y^2 = \frac{2}{3}x$ (2) $y^2 = -16x$

(3) $x^2 = 8y$ (4) $x^2 = -6y$

2

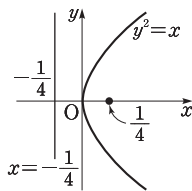
(1) $y^2 = x = 4 \times \frac{1}{4}x$ 이므로 $p = \frac{1}{4}$

따라서 초점의 좌표는

$(\frac{1}{4}, 0)$, 준선의 방정식은

$x = -\frac{1}{4}$ 이고, 그래프는

오른쪽 그림과 같다.



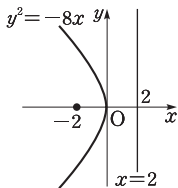
(2) $y^2 = -8x = 4 \times (-2)x$ 이므로

$p = -2$

따라서 초점의 좌표는 $(-2, 0)$,

준선의 방정식은 $x = 2$ 이고, 그

래프는 오른쪽 그림과 같다.



(3) $x^2 = 4y = 4 \times 1 \times y$ 이므로

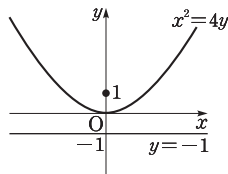
$p = 1$

따라서 초점의 좌표는

$(0, 1)$, 준선의 방정식은

$y = -1$ 이고, 그래프는

오른쪽 그림과 같다.



(4) $x^2 = -12y = 4 \times (-3)y$ 이므로

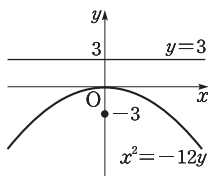
$p = -3$

따라서 초점의 좌표는

$(0, -3)$, 준선의 방정식은

$y = 3$ 이고, 그래프는 오른

쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

3

(1) 주어진 포물선은 포물선 $y^2 = -4x$ 를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2 = -4x = 4 \times (-1)x$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$, 초점의 좌표는 $(-1, 0)$, 준선의 방정식은 $x = 1$ 이다.

따라서 주어진 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(3, 2)$,

초점의 좌표는 $(2, 2)$, 준선의 방정식은 $x = 4$ 이다.

(2) 주어진 포물선은 포물선 $x^2 = 2y$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2 = 2y = 4 \times \frac{1}{2}y$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$, 초점의 좌표는 $(0, \frac{1}{2})$, 준선의 방정식은 $y = -\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 주어진 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 4)$,

초점의 좌표는 $(-1, \frac{9}{2})$, 준선의 방정식은 $y = \frac{7}{2}$ 이다.

답 풀이 참조

4

(1) $(y+2)^2 = 12(x-1)$

(2) 주어진 포물선은 포물선 $y^2 = 12x$ 를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2 = 12x = 4 \times 3x$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$, 초점의 좌표는 $(3, 0)$, 준선의 방정식은 $x = -3$ 이다.

따라서 주어진 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(1, -2)$,

초점의 좌표는 $(4, -2)$, 준선의 방정식은 $x = -2$ 이다.

답 풀이 참조

5

점 P가 나타내는 도형은 초점이 점 $(5, 0)$ 이고 준선이 $x = -5$ 인 포물선이다.

따라서 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$$y^2 = 4 \times 5 \times x, \text{ 즉 } y^2 = 20x \quad \text{답 } y^2 = 20x$$

6

원점을 꼭짓점으로 하고 준선이 $y = -\frac{5}{2}$ 인 포물선의 방정식은

$$x^2 = 4 \times \frac{5}{2} \times y, \text{ 즉 } x^2 = 10y$$

이 포물선이 점 $(5, k)$ 를 지나므로

$$25 = 10k \quad \therefore k = \frac{5}{2} \quad \text{답 } \frac{5}{2}$$

7

$y^2 = -8x = 4 \times (-2)x$ 이므로 $A(-2, 0)$

$x^2 = 12y = 4 \times 3y$ 이므로 $B(0, 3)$

따라서 $\triangle OAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3 \quad \text{답 } 3$$

8

주어진 포물선의 방정식에서

$$(y-3)^2 = -2(x+1)$$

이 포물선은 포물선 $y^2 = -2x$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2 = -2x$ 의 초점의 좌표는 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 이

고 준선의 방정식은 $x = \frac{1}{2}$ 이다.

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(-\frac{3}{2}, 3)$, 준

선의 방정식은 $x = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$a = -\frac{3}{2}, b = 3, c = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore abc = \frac{9}{4} \quad \text{답 } \frac{9}{4}$$

9

주어진 포물선의 방정식에서

$$(x-2)^2 = 4p(y+1)$$

이 포물선은 포물선 $x^2 = 4py$ 를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2 = 4py$ 의 초점의 좌표는 $(0, p)$ 이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는

$$(2, p-1)$$

따라서 $p-1 = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$p = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$

10

$y^2 - 8x + 8a = 0$ 에서 $y^2 = 8(x-a)$

이 포물선은 포물선 $y^2 = 8x$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점의 좌표가 $(2, 0)$ 이므로 포물선 $y^2 = 8(x-a)$ 의 초점의 좌표는

$$(2+a, 0)$$

또 $y^2 + 4x + 4b = 0$ 에서 $y^2 = -4(x+b)$

이 포물선은 포물선 $y^2 = -4x$ 를 x 축의 방향으로 $-b$ 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2 = -4x$ 의 초점의 좌표는 $(-1, 0)$ 이므로 포물선 $y^2 = -4(x+b)$ 의 초점의 좌표는

$$(-1-b, 0)$$

두 포물선의 초점이 일치하므로

$$2+a = -1-b$$

$$\therefore a+b = -3 \quad \text{답 } -3$$

11

포물선 위의 임의의 점을

$P(x, y)$ 라 하고 점 P에서 준

선에 내린 수선의 발을 H라

하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{PF} = \overline{PH}$ 이므로

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y+5)^2} = |y - (-2)|$$

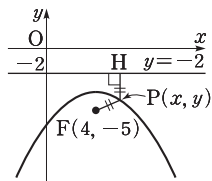
양변을 제곱하면

$$(x-4)^2 + (y+5)^2 = (y+2)^2$$

$$\therefore x^2 - 8x + 6y + 37 = 0$$

따라서 $a = -8, b = 6, c = 37$ 이므로

$$a+b+c = 35 \quad \text{답 } 35$$



12

포물선 위의 임의의 점을

$P(x, y)$ 라 하고 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{PF} = \overline{PH}$ 이므로

$$\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 2)^2} = \left|x - \frac{1}{2}\right|$$

양변을 제곱하면

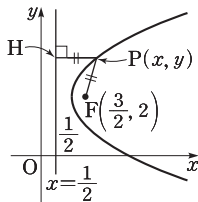
$$\begin{aligned} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \\ \therefore (y - 2)^2 &= 2(x - 1) \end{aligned}$$

이 식에 $y=0$ 을 대입하면

$$4 = 2(x - 1) \quad \therefore x = 3$$

따라서 포물선이 x 축과 만나는 점의 좌표는 (3, 0)이다.

답 (3, 0)



13

포물선 위의 임의의 점을

$P(x, y)$, 준선의 방정식을 $x=a$ 라 하고 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{PF} = \overline{PH}$ 이므로

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 1)^2} = |x - a|$$

양변을 제곱하면

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = (x - a)^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 포물선 $\textcircled{1}$ 이 점 (6, 5)를 지나므로

$$25 = (6 - a)^2, \quad a^2 - 12a + 11 = 0$$

$$(a - 1)(a - 11) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 11$$

(i) $a=1$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서

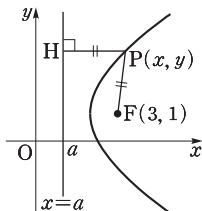
$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = (x - 1)^2$$

$$\therefore (y - 1)^2 = 4(x - 2)$$

(ii) $a=11$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = (x - 11)^2$$

$$\therefore (y - 1)^2 = -16(x - 7)$$



(i), (ii)에서 구하는 포물선의 방정식은

$$(y - 1)^2 = 4(x - 2), \quad (y - 1)^2 = -16(x - 7)$$

$$\text{답 } (y - 1)^2 = 4(x - 2), \quad (y - 1)^2 = -16(x - 7)$$

14

포물선 $y^2 = 12x$ 의 초점 F의 좌표는 (3, 0)이고 준선의 방정식은 $x = -3$ 이다.

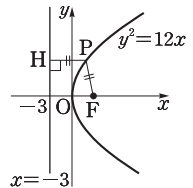
오른쪽 그림과 같이 점 P에서 준선 $x = -3$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PH} = \overline{PF} = 5$$

이때 점 P의 x 좌표를 a 라 하면

$$a + 3 = 5 \quad \therefore a = 2$$

따라서 구하는 x 좌표는 2이다.



답 2

15

포물선 $x^2 = 4y$ 의 초점 F의 좌표는 (0, 1)이고 준선의 방정식은 $y = -1$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두

점 A, B에서 준선

$y = -1$ 에 내린 수선의

발을 각각 C', D'이라

하면 포물선의 정의에 의

하여

$$\overline{AF} = \overline{AC'}, \quad \overline{BF} = \overline{BD'}$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF} = \overline{AC'} + \overline{BD'}$$

$$= (\overline{AC} + 1) + (\overline{BD} + 1)$$

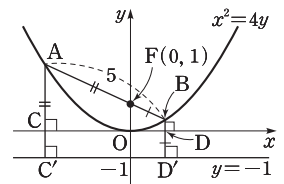
$$= \overline{AC} + \overline{BD} + 2$$

이때 $\overline{AB} = 5$ 이므로

$$\overline{AC} + \overline{BD} + 2 = 5$$

$$\therefore \overline{AC} + \overline{BD} = 3$$

답 3



16

포물선 $y^2 = -12x$ 의 초점은 A(-3, 0)이고 준선의 방정식은 $x = 3$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, B에서 준선 $x=3$ 에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AP} = \overline{PQ} \text{이므로}$$

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{PQ} + \overline{BP}$$

$$\geq \overline{BR}$$

$$= 3 - (-5) = 8$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 8이다.

답 8

17

포물선 $x^2=6y$ 의 초점을 F라 하면

$$F\left(0, \frac{3}{2}\right)$$

이때 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PH}$ 이므로

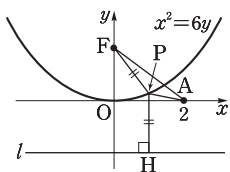
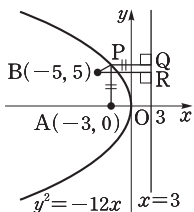
$$\overline{AP} + \overline{PH} = \overline{AP} + \overline{PF}$$

$$\geq \overline{AF}$$

$$= \sqrt{2^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PH}$ 의 최솟값은 $\frac{5}{2}$ 이다.

답 $\frac{5}{2}$



따라서 두 점 B, C의 좌표가

$$\left(-\frac{3}{2}, -3\right), \left(-\frac{3}{2}, 3\right)$$

이므로 $\triangle ABC$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{3 - (-3)\} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

19

전략 포물선을 평행이동하면 포물선의 초점과 준선도 각각 평행이동함을 이용한다.

포물선 $(y-3k)^2=8k(x-k+1)$ 은 포물선 $y^2=8kx$ 를 x 축의 방향으로 $k-1$ 만큼, y 축의 방향으로 $3k$ 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=8kx$ 의 초점의 좌표는 $(2k, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-2k$ 이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(3k-1, 3k)$, 준선의 방정식은 $x=-k-1$ 이다.

이 포물선의 초점이 y 축 위에 있으므로

$$3k-1=0 \quad \therefore k=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 준선의 방정식은

$$x=-\frac{1}{3}-1, \text{ 즉 } x=-\frac{4}{3}$$

답 $x=-\frac{4}{3}$

연습 문제

● 본책 19~20쪽

18

전략 초점이 $(p, 0)$ 이고 준선이 $x=-p$ 인 포물선의 방정식은 $y^2=4px$ 임을 이용한다.

주어진 포물선의 방정식은

$$y^2=4 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times x, \text{ 즉 } y^2=-6x$$

$$\therefore A(0, 0)$$

점 $F\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ 을 지나고 y 축에 평행한 직선의 방정식은

$x=-\frac{3}{2}$ 이므로 이 직선과 포물선의 교점의 y 좌표는

$$y^2=-6 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \text{에서}$$

$$y^2=9 \quad \therefore y=-3 \text{ 또는 } y=3$$

20

전략 두 포물선의 방정식을 각각 표준형으로 변형하여 꼭짓점의 좌표를 구한다.

$$y^2-4x+2ay+9=0 \text{에서}$$

$$(y+a)^2=4\left(x-\frac{9-a^2}{4}\right)$$

이 포물선은 포물선 $y^2=4x$ 를 x 축의 방향으로

$\frac{9-a^2}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것

이므로 꼭짓점의 좌표는

$$\left(\frac{9-a^2}{4}, -a\right)$$

$$\text{또 } x^2-2x-8y+b=0 \text{에서}$$

$$(x-1)^2=8\left(y-\frac{b-1}{8}\right)$$

이 포물선은 포물선 $x^2=8y$ 를 x 축의 방향으로 1만큼,
 y 축의 방향으로 $\frac{b-1}{8}$ 만큼 평행이동한 것이므로 꼭짓
 점의 좌표는

$$\left(1, \frac{b-1}{8}\right)$$

따라서 두 점 $\left(\frac{9-a^2}{4}, -a\right), \left(1, \frac{b-1}{8}\right)$ 이 직선

$y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{9-a^2}{4} = \frac{b-1}{8}, -a=1$$

$-a=1$ 에서 $a=-1$

$$\frac{9-a^2}{4} = \frac{b-1}{8} \text{에서}$$

$$2 = \frac{b-1}{8} \quad \therefore b=17$$

$$\therefore b-a=18$$

답 18

21

전략 포물선의 방정식을 $y^2+Ax+By+C=0$ 으로 놓고 포물
 선이 주어진 세 점을 지남을 이용하여 A, B, C 의 값을 구한다.

축이 x 축에 평행한 포물선의 방정식을

$y^2+Ax+By+C=0$ (A, B, C 는 상수, $A \neq 0$)이
 라 하면 이 포물선이 세 점 $(0, 0), (0, 2), (-1, 1)$
 을 지나므로

$$C=0, 4+2B+C=0, 1-A+B+C=0$$

$$\therefore A=-1, B=-2, C=0$$

따라서 포물선의 방정식은

$$y^2-x-2y=0$$

$$\therefore (y-1)^2=x+1$$

이 포물선은 포물선 $y^2=x$ 를 x 축의 방향으로 -1 만
 큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 구하
 는 초점의 좌표는

$$\left(\frac{1}{4}-1, 0+1\right), \text{ 즉 } \left(-\frac{3}{4}, 1\right) \quad \text{답} \left(-\frac{3}{4}, 1\right)$$

22

전략 점 P의 좌표를 k 에 대한 식으로 나타내고 점 P가 포물선
 $y^2=kx$ 위의 점임을 이용한다.

포물선 $y^2=kx$ 의 초점 F의 좌표는

$$\left(\frac{k}{4}, 0\right)$$

이때 직각삼각형 PFH에서

$$\overline{FH} = \overline{PF} \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$\overline{PH} = \overline{PF} \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

따라서 P $\left(\frac{k}{4}+2, 2\sqrt{3}\right)$ 이고 점 P가 포물선 $y^2=kx$

위의 점이므로 $(2\sqrt{3})^2 = k\left(\frac{k}{4}+2\right)$

$$k^2+8k-48=0, \quad (k+12)(k-4)=0$$

$$\therefore k=4 \quad (\because k>0)$$

답 4

23

전략 포물선의 정의를 이용하여 $\overline{AF}+\overline{BF}+\overline{CF}$ 를 세 점 A, B,
 C의 y 좌표에 대한 식으로 나타낸다.

세 점 A, B, C의 y 좌표를 각각 a, b, c 라 하면

$$\frac{a+b+c}{3}=4 \quad \therefore a+b+c=12$$

한편 포물선 $x^2=12y$ 의 초점 F의 좌표는 $(0, 3)$ 이고
 준선의 방정식은 $y=-3$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 세

점 A, B, C에서 준선

$y=-3$ 에 내린 수선의

발을 각각 A', B', C'

이라 하면 포물선의 정

의에 의하여

$$\overline{AF} = \overline{AA'}, \overline{BF} = \overline{BB'}, \overline{CF} = \overline{CC'}$$

$$\therefore \overline{AF} + \overline{BF} + \overline{CF}$$

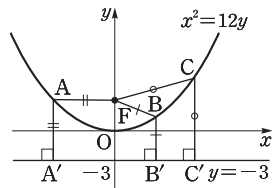
$$= \overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'}$$

$$= (a+3) + (b+3) + (c+3)$$

$$= a+b+c+9$$

$$= 12+9=21$$

답 21



24

전략 포물선의 정의를 이용하여 점 P의 x 좌표를 구한다.

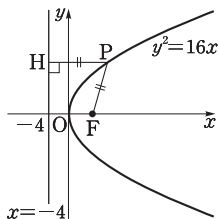
포물선 $y^2=16x$ 의 초점 F의 좌표는 $(4, 0)$ 이고 준선
 의 방정식은 $x=-4$ 이다.

이때 선분 FP를 지름으로 하는 원의 넓이가 25π 이므

$$\text{로 } \pi \times \left(\frac{\overline{FP}}{2}\right)^2 = 25\pi, \quad \overline{FP}^2 = 100$$

$$\therefore \overline{FP} = 10 \quad (\because \overline{FP} > 0)$$

따라서 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 준선 $x=-4$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여



$$\overline{PH} = \overline{FP} = 10$$

즉 점 P의 x 좌표는

$$-4 + 10 = 6$$

이때 선분 FP를 지름으로 하는 원의 중심은 선분 FP의 중점이므로 원의 중심의 x 좌표는

$$\frac{-4 + 6}{2} = 1$$

따라서 원의 중심에서 포물선의 준선까지의 거리는

$$5 - (-4) = 9$$

답 ①

25

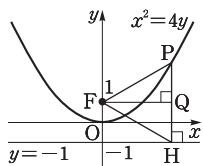
전략 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PH}$ 이므로 $\triangle PFH$ 가 정삼각형을 이용한다.

포물선 $x^2 = 4y$ 의 초점 F의 좌표는 (0, 1)이고 준선의 방정식은 $y = -1$ 이다.

이때 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PH}$ 이고,

$\angle FPH = 60^\circ$ 이므로 $\triangle PFH$ 는 정삼각형이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 점 F에서 선분 PH에 내린 수선의 발을 Q라 하면



$$\overline{PQ} = \overline{QH}$$

이때 점 Q의 y 좌표는 점 F의 y 좌표와 같으므로

$$\overline{QH} = 1 - (-1) = 2$$

즉 점 P의 y 좌표는 $2 + 1 = 3$ 이므로 x 좌표는

$$x^2 = 4 \times 3 \text{에서}$$

$$x^2 = 12 \quad \therefore x = 2\sqrt{3} \quad (\because x > 0)$$

$$\therefore P(2\sqrt{3}, 3) \quad \text{답 } (2\sqrt{3}, 3)$$

다른 풀이 점 P의 좌표를 $(a, \frac{a^2}{4})$ ($a > 0$)이라 하면

$$H(a, -1)$$

이때 $\triangle PFH$ 가 정삼각형이므로 $\overline{FH} = \overline{PH}$ 에서

$$\sqrt{a^2 + (-1 - 1)^2} = \frac{a^2}{4} - (-1)$$

$$\therefore \sqrt{a^2 + 4} = \frac{a^2}{4} + 1$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^4 - 8a^2 - 48 = 0, \quad (a^2 + 4)(a^2 - 12) = 0$$

$$a^2 = 12 \quad \therefore a = 2\sqrt{3} \quad (\because a > 0)$$

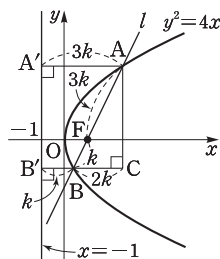
$$\therefore P(2\sqrt{3}, 3)$$

26

전략 $\overline{AF} = 3k$, $\overline{BF} = k$ 로 놓고 포물선의 정의를 이용한다.

포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점 F의 좌표는 (1, 0)이고 준선의 방정식은 $x = -1$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 준선 $x = -1$ 에 내린 수선의 발을 각각 A', B'이라 하자.



$$\overline{AF} : \overline{BF} = 3 : 1 \text{에서}$$

$$\overline{AF} = 3k, \overline{BF} = k \quad (k > 0) \text{라}$$

하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AA'} = \overline{AF} = 3k, \overline{BB'} = \overline{BF} = k$$

이때 점 A에서 $\overline{B'B}$ 의 연장선에 내린 수선의 발을 C라 하면

$$\overline{BC} = \overline{B'C} - \overline{B'B} = \overline{A'A} - \overline{B'B}$$

$$= 3k - k = 2k$$

따라서 직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AC} = \sqrt{(4k)^2 - (2k)^2} = 2\sqrt{3}k$$

이므로 직선 l의 기울기는

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{2\sqrt{3}k}{2k} = \sqrt{3} \quad \text{답 } \sqrt{3}$$

27

전략 두 점 P, Q의 좌표를 각각 (a, b), (x, y)로 놓고 관계식을 세운다.

$$x^2 - 8y + 16 = 0 \text{에서} \quad x^2 = 8(y - 2)$$

점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 점 P는 포물선 위의 점 이므로 $a^2 = 8(b - 2)$ ㉠

선분 OP의 중점 Q의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$$

$$\therefore a = 2x, b = 2y \quad \text{..... ㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $(2x)^2 = 8(2y - 2)$

$$\therefore x^2 = 4(y - 1) \quad \text{답 } x^2 = 4(y - 1)$$

28

전략 포물선의 정의를 이용하여 길이가 같은 선분을 찾고 삼각형의 닮음을 이용한다.

포물선 $y^2=8x$ 의 초점 F의 좌표는 (2, 0)이고 준선의 방정식은 $x=-2$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 세 점

C, D, F에서 준선

$x=-2$ 에 내린 수선의 발을 각각 C', D', F'이라 하자.

$\overline{BC}=\overline{CD}=a$, $\overline{CF}=b$ 라

하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{CC'}=\overline{CF}=b, \overline{DD'}=\overline{DF}=\overline{CD}-\overline{CF}=a-b$$

이때 $\triangle BC'C \sim \triangle BD'D$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{BC} : \overline{BD} = \overline{CC'} : \overline{DD'}$$

$$a : 2a = b : (a-b), \quad a(a-b) = 2ab$$

$a > 0$ 이므로 $a-b=2b \quad \therefore a=3b$

또 $\triangle BC'C \sim \triangle BF'F$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{BC} : \overline{BF} = \overline{CC'} : \overline{FF'}$$

$$3b : 4b = b : 4, \quad 12b = 4b^2$$

$$b(b-3)=0 \quad \therefore b=3 \quad (\because b > 0)$$

따라서 $\overline{BF}=4b=12$ 이므로 직각삼각형 $BF'F$ 에서

$$\overline{BF'} = \sqrt{12^2 - 4^2} = 8\sqrt{2}$$

$$\therefore B(-2, 8\sqrt{2})$$

즉 점 A의 y좌표가 $8\sqrt{2}$ 이므로 x좌표는

$$(8\sqrt{2})^2 = 8x \text{에서} \quad x=16$$

$$\therefore A(16, 8\sqrt{2})$$

또 $\overline{BD}=6b=18$, $\overline{DD'}=2b=6$ 이므로 직각삼각형 $BD'D$ 에서

$$\overline{BD'} = \sqrt{18^2 - 6^2} = 12\sqrt{2}$$

따라서 $\triangle ABD$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{16 - (-2)\} \times 12\sqrt{2} = 108\sqrt{2} \quad \text{답 ③}$$

29

전략 포물선의 정의를 이용하여 $\overline{AP} + \overline{PB}$ 의 최솟값을 구한다.

포물선 $x^2+4y=0$, 즉 $x^2=-4y$ 의 초점은

A(0, -1)이고 준선의 방정식은 $y=1$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점

P, B에서 준선 $y=1$ 에 내

린 수선의 발을 각각 H,

H'이라 하면 포물선의 정

의에 의하여 $\overline{AP} = \overline{PH}$ 이

므로

$$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{PH} + \overline{PB} \geq \overline{BH'}$$

$$= 1 - (-5) = 6$$

따라서 $\triangle ABP$ 의 둘레의 길이는

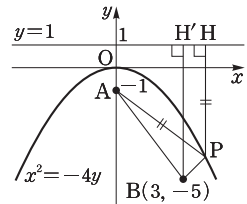
$$\overline{AB} + \overline{AP} + \overline{PB} \geq \overline{AB} + \overline{BH'}$$

$$= \sqrt{3^2 + (-5+1)^2} + 6$$

$$= 5 + 6 = 11$$

즉 $\triangle ABP$ 의 둘레의 길이의 최솟값은 11이다.

답 11



02 타원의 방정식

● 본책 21~29쪽

30

(1) 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)이라 하

면

$$2a=12 \text{에서} \quad a=6$$

$$a^2 - b^2 = 3^2 \text{에서} \quad b^2 = 6^2 - 3^2 = 27$$

$$\therefore \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$$

(2) 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)이라 하

면

$$2a=10 \text{에서} \quad a=5$$

$$a^2 - b^2 = 4^2 \text{에서} \quad b^2 = 5^2 - 4^2 = 9$$

$$\therefore \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

(3) 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > a > 0$)이라 하

면

$$2b=6 \text{에서} \quad b=3$$

$$b^2 - a^2 = 2^2 \text{에서} \quad a^2 = 3^2 - 2^2 = 5$$

$$\therefore \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

- (4) 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > a > 0$)이라 하면

$$2b = 14 \text{에서} \quad b = 7$$

$$b^2 - a^2 = 5^2 \text{에서} \quad a^2 = 7^2 - 5^2 = 24$$

$$\therefore \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{49} = 1$$

$$\text{답 (1) } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1 \quad (2) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$(3) \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (4) \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{49} = 1$$

31

- (1) 타원 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ 에서

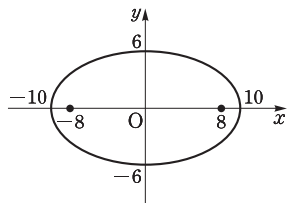
$$\sqrt{100 - 36} = 8 \text{이므로 초점의 좌표는}$$

$$(8, 0), (-8, 0)$$

$$\text{장축의 길이는} \quad 2 \times 10 = 20$$

$$\text{단축의 길이는} \quad 2 \times 6 = 12$$

또 그래프는 다음 그림과 같다.



- (2) $4x^2 + y^2 = 4$ 에서 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

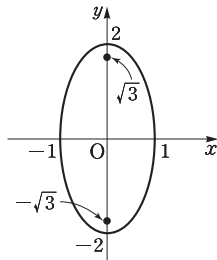
$$\sqrt{4 - 1} = \sqrt{3} \text{이므로 초점의 좌표는}$$

$$(0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$$

$$\text{장축의 길이는} \quad 2 \times 2 = 4$$

$$\text{단축의 길이는} \quad 2 \times 1 = 2$$

또 그래프는 다음 그림과 같다.



답 풀이 참조

32

- (1) 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ 에서 $\sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$ 이므로 중심의 좌표는 $(0, 0)$, 초점의 좌표는 $(0, 2\sqrt{3})$, $(0, -2\sqrt{3})$, 꼭짓점의 좌표는 $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 4)$, $(0, -4)$ 이다.

따라서 주어진 타원의 중심의 좌표는 $(3, -1)$, 초점의 좌표는 $(3, 2\sqrt{3} - 1)$, $(3, -2\sqrt{3} - 1)$, 꼭짓점의 좌표는 $(5, -1)$, $(1, -1)$, $(3, 3)$, $(3, -5)$ 이다.

- (2) $16(x+5)^2 + 25y^2 = 400$ 에서

$$\frac{(x+5)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

이 타원은 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 에서 $\sqrt{25 - 16} = 3$ 이므로 중심의 좌표는 $(0, 0)$, 초점의 좌표는 $(3, 0)$, $(-3, 0)$, 꼭짓점의 좌표는 $(5, 0)$, $(-5, 0)$, $(0, 4)$, $(0, -4)$ 이다.

따라서 주어진 타원의 중심의 좌표는 $(-5, 0)$, 초점의 좌표는 $(-2, 0)$, $(-8, 0)$, 꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$, $(-10, 0)$, $(-5, 4)$, $(-5, -4)$ 이다.

답 풀이 참조

33

- (1) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 12y + 2 = 0$ 에서

$$2(x-1)^2 + 3(y+2)^2 = 12$$

$$\therefore \frac{(x-1)^2}{6} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

- (2) 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에서 $\sqrt{6-4} = \sqrt{2}$ 이므로

중심의 좌표는 $(0, 0)$, 초점의 좌표는 $(\sqrt{2}, 0)$,
 $(-\sqrt{2}, 0)$, 꼭짓점의 좌표는 $(\sqrt{6}, 0)$, $(-\sqrt{6}, 0)$,
 $(0, 2)$, $(0, -2)$ 이다.

따라서 주어진 타원의 중심의 좌표는 $(1, -2)$,
 초점의 좌표는 $(\sqrt{2}+1, -2)$, $(-\sqrt{2}+1, -2)$,
 꼭짓점의 좌표는 $(\sqrt{6}+1, -2)$, $(-\sqrt{6}+1, -2)$,
 $(1, 0)$, $(1, -4)$ 이다.

답 풀이 참조

34

구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > a > 0$)이

라 하면 단축의 길이가 4이므로

$$2a = 4 \quad \therefore a = 2$$

$$b^2 - a^2 = (\sqrt{3})^2 \text{에서} \quad b^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 = 7$$

$$\therefore \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{7} = 1 \quad \text{답} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{7} = 1$$

35

주어진 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

$\sqrt{100-36} = 8$ 에서 초점의 좌표는

$$(8, 0), (-8, 0)$$

$$\therefore \overline{FF'} = 8 - (-8) = 16$$

답 16

36

주어진 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > a > 0$)이

라 하면 장축의 길이는 $2b$, 단축의 길이는 $2a$ 이고 장
 축과 단축의 길이의 차이가 2이므로

$$2b - 2a = 2 \quad \therefore b - a = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 초점의 좌표가 $(0, 5)$, $(0, -5)$ 이므로

$$b^2 - a^2 = 5^2$$

$$\therefore (b+a)(b-a) = 25$$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면 $b+a=25 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=12$, $b=13$

$$\therefore \overline{PF} + \overline{PF'} = 2b = 2 \times 13 = 26 \quad \text{답 26}$$

37

$2x^2 + 3y^2 - 16x + 6y + 11 = 0$ 에서

$$2(x-4)^2 + 3(y+1)^2 = 24$$

$$\therefore \frac{(x-4)^2}{12} + \frac{(y+1)^2}{8} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 타원은 타원 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$ 을 x 축의 방향으로 4만
 큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$$a=4, b=-1$$

이때 타원 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$ 에서 $\sqrt{12-8} = 2$ 이므로 초점

의 좌표는 $(2, 0)$, $(-2, 0)$

따라서 타원 $\textcircled{1}$ 의 초점의 좌표는

$$(6, -1), (2, -1)$$

$$\therefore abcd = 4 \times (-1) \times 6 \times 2 = -48$$

답 -48

38

$9x^2 + 4y^2 - 54x - 16y + 61 = 0$ 에서

$$9(x-3)^2 + 4(y-2)^2 = 36$$

$$\therefore \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

이 타원은 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 을 x 축의 방향으로 3만
 큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 에서 $\sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ 이므로 초

점의 좌표는 $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$

따라서 주어진 타원의 초점의 좌표는

$$(3, \sqrt{5}+2), (3, -\sqrt{5}+2)$$

$$\text{이므로} \quad \overline{FF'} = \sqrt{5}+2 - (-\sqrt{5}+2) = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore \triangle OFF' = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 3 = 3\sqrt{5}$$

답 $3\sqrt{5}$

39

타원 위의 임의의 점을 $P(x, y)$ 라 하면 타원의 정의

에 의하여 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 8$ 이므로

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} \\ = 8 - \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}\end{aligned}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$2\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=y+7$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$4(x-2)^2+3(y-1)^2=48$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{12} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

$$\text{답} \quad \frac{(x-2)^2}{12} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

40

타원 위의 임의의 점을 $P(x, y)$ 라 하면 타원의 장축의 길이가 6이므로 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 6$ 에서

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-5)^2+(y-5)^2} + \sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2} \\ = 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{(x-5)^2+(y-5)^2} \\ = 6 - \sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2}\end{aligned}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$3\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2}=2x+3$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$5(x-3)^2+9(y-5)^2=45$$

$$\therefore \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{5} = 1$$

$$\text{답} \quad \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{5} = 1$$

41

타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = \overline{QF} + \overline{QF'} = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

따라서 $\square PF'QF$ 의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{PF} + \overline{FQ} + \overline{QF'} + \overline{F'P} \\ = (\overline{PF} + \overline{PF'}) + (\overline{QF} + \overline{QF'}) \\ = 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\text{답} \quad 8\sqrt{3}$$

42

$$4x^2+9y^2=36 \text{에서} \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$ 이므로 두 초점 F, F' 의 좌표는 각각

$$(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0) \quad \therefore \overline{FF'}=2\sqrt{5}$$

$\overline{PF}=a, \overline{PF'}=b$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$a+b=2 \times 3=6$$

또 직각삼각형 $PF'F$ 에서

$$a^2+b^2=(2\sqrt{5})^2=20$$

이때 $(a+b)^2-2ab=a^2+b^2$ 에서

$$6^2-2ab=20 \quad \therefore ab=8$$

따라서 $\triangle PF'F$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{PF} \times \overline{PF'} = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \quad \text{답} \quad 4$$

43

$$2x^2+y^2=6 \text{에서} \quad \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$$

$\overline{PF}=a, \overline{PF'}=b$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$a+b=2\sqrt{6}$$

이때 $a>0, b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

$$2\sqrt{6} \geq 2\sqrt{ab}, \quad \sqrt{ab} \leq \sqrt{6}$$

$$\therefore ab \leq 6$$

따라서 $\overline{PF} \times \overline{PF'}$ 의 최댓값은 6이다.

$$\text{답} \quad 6$$

44

점 $P(a, b)$ 가 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 위에 있으므로

$$\frac{a^2}{25} + \frac{b^2}{16} = 1$$

이때 $a^2>0, b^2>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a^2}{25} + \frac{b^2}{16} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{25} \times \frac{b^2}{16}}$$

$$(\text{단, 등호는 } \frac{a^2}{25} = \frac{b^2}{16} \text{ 일 때 성립})$$

$$1 \geq \frac{ab}{10} \quad (\because a>0, b>0)$$

$$\therefore ab \leq 10$$

따라서 ab 의 최댓값은 10이다.

$$\text{답} \quad 10$$

45

점 D의 좌표를 (a, b) ($a > 0, b > 0$)라 하면 직사각형 ABCD의 넓이는

$$2a \times 2b = 4ab$$

점 D(a, b)는 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{4} = 1$$

이때 $a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{9} \times \frac{b^2}{4}} \quad \left(\text{단, 등호는 } \frac{a^2}{9} = \frac{b^2}{4} \text{ 일 때 성립} \right)$$

$$1 \geq \frac{ab}{3} \quad (\because a > 0, b > 0)$$

$$\therefore ab \leq 3$$

따라서 $4ab \leq 12$ 이므로 구하는 넓이의 최댓값은 12이다. 답 12

연습문제

● 본책 30~32쪽

46

전략 장축이 x 축 위에 있는 경우와 y 축 위에 있는 경우로 나누어 생각한다.

(i) $a > 3$ 일 때

장축의 길이는 $2a$, 단축의 길이는 6이므로 장축의 길이가 단축의 길이의 2배가 되려면

$$2a = 2 \times 6 \quad \therefore a = 6$$

(ii) $0 < a < 3$ 일 때

장축의 길이는 6, 단축의 길이는 $2a$ 이므로 장축의 길이가 단축의 길이의 2배가 되려면

$$6 = 2 \times 2a \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

(i), (ii)에서 $a = 6$ 또는 $a = \frac{3}{2}$

따라서 구하는 a 의 값의 합은

$$6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2} \quad \text{답 } \frac{15}{2}$$

47

전략 $a^2 < b^2$ 일 때 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 초점의 좌표는

$(0, \sqrt{b^2 - a^2}), (0, -\sqrt{b^2 - a^2})$ 임을 이용한다.

타원 $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{40} = 1$ 에서 $\sqrt{40 - 15} = 5$ 이므로 이 타원의 초점의 좌표는

$$(0, 5), (0, -5)$$

따라서 두 점 $(0, 5), (0, -5)$ 를 초점으로 하고 점 $(0, 10)$ 을 지나는 타원의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{100} = 1 \quad (0 < a < 10)$$

이라 하면 $100 - a^2 = 5^2$ 에서

$$a^2 = 100 - 5^2 = 75$$

$$\therefore a = 5\sqrt{3} \quad (\because a > 0)$$

즉 구하는 단축의 길이는

$$2a = 2 \times 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \quad \text{답 } 10\sqrt{3}$$

48

전략 삼각형 $AF'F$ 가 정삼각형임을 이용하여 타원의 장축의 길이와 초점의 좌표를 구한다.

$\overline{AF} + \overline{AF'} = 6 + 6 = 12$ 이고 타원의 초점이 x 축 위에 있으므로 타원의 정의에 의하여

$$2|a| = 12 \quad \therefore |a| = 6$$

또 $\overline{FF'} = 6$ 에서 $F(3, 0), F'(-3, 0)$ 이므로

$$a^2 - b^2 = 3^2 \quad \therefore b^2 = 6^2 - 3^2 = 27$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 63 \quad \text{답 } 63$$

49

전략 먼저 주어진 방정식을 $\frac{(x-m)^2}{a} + \frac{(y-n)^2}{b} = 1$ 의 꼴로 변형한다.

$4x^2 - 24x + 16y^2 - 64y + 84 = 0$ 에서

$$4(x-3)^2 + 16(y-2)^2 = 16$$

$$\therefore \frac{(x-3)^2}{4} + (y-2)^2 = 1$$

즉 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

① 장축은 x 축과 평행하다.

② 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 의 중심의 좌표는 (0, 0)이므로
 타원 $\frac{(x-3)^2}{4} + (y-2)^2 = 1$ 의 중심의 좌표는
 (3, 2)이다.

③ 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 에서 $\sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ 이므로 초점의
 좌표는

$$(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$$

따라서 타원 $\frac{(x-3)^2}{4} + (y-2)^2 = 1$ 의 초점의 좌
 표는

$$(\sqrt{3}+3, 2), (-\sqrt{3}+3, 2)$$

이므로 두 초점 사이의 거리는

$$\sqrt{3}+3 - (-\sqrt{3}+3) = 2\sqrt{3}$$

④ 장축의 길이는 $2 \times 2 = 4$

단축의 길이는 $2 \times 1 = 2$

따라서 장축의 길이는 단축의 길이의 2배이다.

⑤ 타원 위의 임의의 점에서 두 초점까지의 거리의 합
 은 장축의 길이와 같으므로 4이다.

답 ③

해설 Focus

타원을 평행이동하면 두 초점도 평행이동하여 좌표가 변
 하지만 두 초점 사이의 거리는 변하지 않는다.

따라서 주어진 타원의 두 초점 사이의 거리는 타원

$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 의 두 초점 사이의 거리인 $2\sqrt{3}$ 과 같다.

50

전략 타원의 정의를 이용하여 $\triangle ABF'$ 의 둘레의 길이를 b 에 대
 한 식으로 나타낸다.

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 초점이 y 축 위에 있으므로 타원
 의 정의에 의하여

$$\overline{AF} + \overline{AF'} = \overline{BF} + \overline{BF'} = 2|b|$$

따라서 $\triangle ABF'$ 의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{BF'} + \overline{F'A} \\ &= (\overline{AF} + \overline{BF}) + \overline{BF'} + \overline{AF'} \\ &= (\overline{AF} + \overline{AF'}) + (\overline{BF} + \overline{BF'}) \\ &= 2|b| + 2|b| = 4|b| \end{aligned}$$

즉 $4|b| = 36$ 이므로

$$|b| = 9$$

이때 $F(0, 6), F'(0, -6)$ 이므로

$$b^2 - a^2 = 6^2 \quad \therefore a^2 = 9^2 - 6^2 = 45$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 126$$

답 126

51

전략 타원의 정의를 이용하여 $\overline{PF}, \overline{PF'}$ 의 길이를 구한다.

타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ 에서 $\sqrt{16-7} = 3$ 이므로

$$F(3, 0), F'(-3, 0)$$

이라 하면 $\overline{F'F} = 6$

한편 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 \times 4 = 8$$

이때 $\overline{PF'} : \overline{PF} = 3 : 1$ 에서 $\overline{PF'} = 3\overline{PF}$ 이므로

$$\overline{PF} + 3\overline{PF} = 4\overline{PF} = 8$$

$$\therefore \overline{PF} = 2, \overline{PF'} = 6$$

즉 $\triangle PFF'$ 은

$\overline{PF'} = \overline{F'F} = 6$ 인 이등변

삼각형이므로 오른쪽 그

림과 같이 점 F' 에서 선분

PF 에 내린 수선의 발을

H 라 하면

$$\overline{FH} = \frac{1}{2} \overline{PF} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

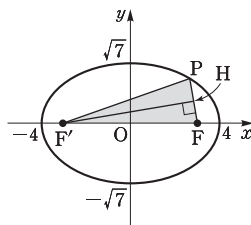
직각삼각형 $F'FH$ 에서

$$\overline{F'H} = \sqrt{6^2 - 1^2} = \sqrt{35}$$

따라서 $\triangle PFF'$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{PF} \times \overline{F'H} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{35} = \sqrt{35}$$

답 $\sqrt{35}$



52

전략 타원의 정의를 이용하여 $\overline{AF}$ 와 $\overline{AF_1}, \overline{AF_2}$ 사이의 관계식,
 $\overline{BF}$ 와 $\overline{BF_1}, \overline{BF_2}$ 사이의 관계식을 구한다.

두 초점이 F, F_1 인 타원의 장축의 길이를 20이라 하면

타원의 정의에 의하여

$$\overline{AF} + \overline{AF_1} = 20 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overline{BF} + \overline{BF_1} = 20 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

두 초점이 F, F₂인 타원의 장축의 길이를 32라 하면
타원의 정의에 의하여

$$\overline{AF} + \overline{AF_2} = 32 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\overline{BF} + \overline{BF_2} = 32 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡} \text{을 하면} \quad \overline{AF_1} - \overline{AF_2} = -12$$

$$\textcircled{㉡} - \textcircled{㉠} \text{을 하면} \quad \overline{BF_1} - \overline{BF_2} = -12$$

$$\therefore |\overline{AF_1} - \overline{AF_2}| + |\overline{BF_1} - \overline{BF_2}| \\ = |-12| + |-12| = 24$$

답 24

53

전략 포물선과 타원의 정의를 이용하여 $\overline{AP} + \overline{PQ}$ 와 값이 같은 식을 찾는다.

포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점의 좌표는 (2, 0)이고 준선의 방정식은 $x = -2$ 이다.

이때 F(2, 0)이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PQ} = \overline{PF}$$

$$\text{한편 } 5x^2 + 9y^2 = 45 \text{에서} \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

$\sqrt{9-5} = 2$ 이므로 타원의 초점의 좌표는

$$(2, 0), (-2, 0)$$

즉 두 점 A(-2, 0), F(2, 0)은 타원의 초점이므로
타원의 정의에 의하여

$$\overline{AP} + \overline{PF} = 2 \times 3 = 6$$

$$\therefore \overline{AP} + \overline{PQ} = \overline{AP} + \overline{PF} = 6$$

답 6

54

전략 $\triangle PF'F$ 가 직각삼각형을 이용하여 $\overline{PF'}$ 의 길이를 c에 대한 식으로 나타낸다.

$$\overline{FF'} = 2c, \overline{PF} = \overline{OF} = c,$$

$$\angle F'PF = 90^\circ \text{이므로 직}$$

각삼각형 $PF'F$ 에서

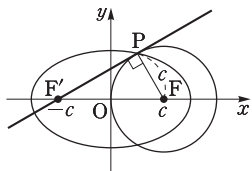
$$\overline{PF'} = \sqrt{(2c)^2 - c^2} \\ = \sqrt{3}c$$

이때 타원의 장축의 길이가 12이므로 타원의 정의에
의하여 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 12$

$$c + \sqrt{3}c = 12, \quad (\sqrt{3} + 1)c = 12$$

$$\therefore c = \frac{12}{\sqrt{3} + 1} = 6(\sqrt{3} - 1)$$

답 6($\sqrt{3} - 1$)



55

전략 점 P의 좌표를 (x, y)로 놓고 x, y를 점 A의 x좌표, 점 B의 y좌표에 대한 식으로 나타낸다.

두 점 A, B의 좌표를 각각 (a, 0), (0, b)라 하면

$$\overline{AB} = 5 \text{에서} \quad \sqrt{a^2 + b^2} = 5$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 25 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 점 P가 선분 AB를
3 : 2로 내분하므로

$$x = \frac{3 \times 0 + 2 \times a}{3 + 2} = \frac{2a}{5},$$

$$y = \frac{3 \times b + 2 \times 0}{3 + 2} = \frac{3b}{5}$$

$$\therefore a = \frac{5x}{2}, b = \frac{5y}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \text{을 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면} \quad \left(\frac{5x}{2}\right)^2 + \left(\frac{5y}{3}\right)^2 = 25$$

$$\therefore \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

답 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

56

전략 원의 중심을 A, 원과 타원의 한 교점을 B라 하면 $\overline{AB} = 1$, $\overline{AF} = 1$ 임을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 타원

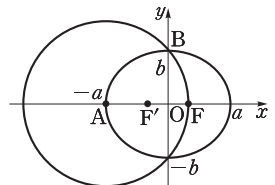
의 중심이 원점, 장축이

x축 위에 오도록 타원을

좌표평면 위에 나타내고

원의 중심을 A, 타원의

꼭짓점 중 y좌표가 양수인 점을 B라 하자.



타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)이라 하면

A(-a, 0), B(0, b)이고 $\overline{AB} = 1$ 이므로

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 F($\sqrt{a^2 - b^2}$, 0)이고 $\overline{AF} = 1$ 이므로

$$\sqrt{a^2 - b^2} - (-a) = 1$$

$$\therefore \sqrt{a^2 - b^2} = 1 - a$$

양변을 제곱하면 $a^2 - b^2 = (1 - a)^2$

$$\therefore b^2 = 2a - 1$$

이것을 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$a^2 + 2a - 1 = 1, \quad a^2 + 2a - 2 = 0$$

$$\therefore a = \sqrt{3} - 1 \quad (\because a > 0)$$

답 ③

57

전략 타원의 정의를 이용하여 $\overline{FP_1} + \overline{FP_2} + \overline{FP_3} + \dots + \overline{FP_9}$ 를 간단히 한다.

타원 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ 의 다른 한 초점을 F' 이라 하면

$\sqrt{100-36}=8$ 이므로 두 초점 F, F' 의 좌표는 각각 $(8, 0), (-8, 0)$

한편 타원의 정의에 의하여

$$\overline{FP_k} + \overline{F'P_k} = 2 \times 10 = 20 \quad (\text{단, } k=1, 2, \dots, 9)$$

또 주어진 타원은 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\overline{F'P_1} = \overline{FP_9}, \overline{F'P_2} = \overline{FP_8},$$

$$\overline{F'P_3} = \overline{FP_7}, \overline{F'P_4} = \overline{FP_6}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{FP_1} + \overline{FP_2} + \overline{FP_3} + \dots + \overline{FP_9} \\ = \overline{FP_1} + \overline{FP_2} + \overline{FP_3} + \overline{FP_4} + \overline{FP_5} \\ + \overline{F'P_4} + \overline{F'P_3} + \overline{F'P_2} + \overline{F'P_1} \\ = (\overline{FP_1} + \overline{F'P_1}) + (\overline{FP_2} + \overline{F'P_2}) \\ + (\overline{FP_3} + \overline{F'P_3}) + (\overline{FP_4} + \overline{F'P_4}) + \overline{FP_5} \\ = 4 \times 20 + \overline{FP_5} = \overline{FP_5} + 80 \end{aligned}$$

이때 $P_5(0, 6)$ 이므로 직각삼각형 P_5OF 에서

$$\overline{FP_5} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = 10 + 80 = 90$$

답 90

58

전략 타원의 정의와 점 P 가 $\overline{GF}$ 의 중점임을 이용한다.

$$\overline{GP} = \overline{PF}, \overline{GP} + \overline{PF'} = 2\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2\sqrt{2}$$

타원 C_1 에서 타원의 정의에 의하여 $2a = 2\sqrt{2}$

$$\therefore a^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

즉 타원 C_1 의 방정식은 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 이고 $\sqrt{2-1}=1$ 이

므로

$$F(1, 0), F'(-1, 0)$$

이때 $\overline{GP} = \overline{PF}$ 에서 점 P 는 $\overline{GF}$ 의 중점이므로

$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{d}{2}\right)$$

점 P 가 타원 C_1 위의 점이므로

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 1 \quad \therefore d^2 = \frac{7}{2}$$

타원 C_2 의 방정식을 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{k} = 1$ 이라 하면

$$k-2=d^2=\frac{7}{2} \quad \therefore k=\frac{11}{2}$$

따라서 타원 C_2 의 장축의 길이는

$$2\sqrt{k} = 2 \times \sqrt{\frac{11}{2}} = \sqrt{22}$$

이므로 타원의 정의에 의하여

$$\overline{QG} + \overline{QG'} = \sqrt{22}$$

답 ④

59

전략 초점의 좌표를 구하고 타원의 정의를 이용한다.

타원 $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{49} = 1$ 에서 $\sqrt{49-24}=5$ 이므로

$$F(0, 5), F'(0, -5)$$

한편 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 \times 7 = 14$$

$$\therefore \overline{PF} = 14 - \overline{PF'}$$

$$\therefore \overline{AP} - \overline{PF} = \overline{AP} - (14 - \overline{PF'})$$

$$= (\overline{AP} + \overline{PF'}) - 14$$

$$\geq \overline{AF'} - 14$$

이때 $\overline{AP} - \overline{PF}$ 의 최솟값이 1이므로

$$\overline{AF'} - 14 = 1 \quad \therefore \overline{AF'} = 15$$

즉 $\sqrt{a^2+5^2}=15$ 이므로

$$a^2+25=225, \quad a^2=200$$

$$\therefore a=10\sqrt{2} \quad (\because a>0)$$

답 10√2

03 쌍곡선의 방정식

● 본책 33~42쪽

60

(1) 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a>0)$ 이라 하면

$$2a=6 \text{에서} \quad a=3$$

$$a^2+b^2=4^2 \text{에서} \quad b^2=4^2-3^2=7$$

$$\therefore \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$$

(2) 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a>0)$ 이라 하면

$$2a=8 \text{에서} \quad a=4$$

$$a^2 + b^2 = (4\sqrt{3})^2 \text{에서} \quad b^2 = (4\sqrt{3})^2 - 4^2 = 32$$

$$\therefore \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{32} = 1$$

(3) 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ($b > 0$)이라 하

면

$$2b = 4 \text{에서} \quad b = 2$$

$$a^2 + b^2 = (\sqrt{7})^2 \text{에서} \quad a^2 = (\sqrt{7})^2 - 2^2 = 3$$

$$\therefore \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = -1$$

(4) 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ($b > 0$)이라 하

면

$$2b = 10 \text{에서} \quad b = 5$$

$$a^2 + b^2 = 8^2 \text{에서} \quad a^2 = 8^2 - 5^2 = 39$$

$$\therefore \frac{x^2}{39} - \frac{y^2}{25} = -1$$

답 (1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ (2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{32} = 1$
 (3) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = -1$ (4) $\frac{x^2}{39} - \frac{y^2}{25} = -1$

61

(1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 에서 $\sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ 이므로

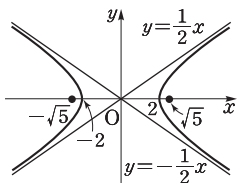
초점의 좌표는 $(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$

꼭짓점의 좌표는 $(2, 0), (-2, 0)$

주축의 길이는 $2 \times 2 = 4$

점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{1}{2}x$

또 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) $x^2 - 2y^2 = -12$ 에서 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{6} = -1$

$\sqrt{12+6} = 3\sqrt{2}$ 이므로 초점의 좌표는

$(0, 3\sqrt{2}), (0, -3\sqrt{2})$

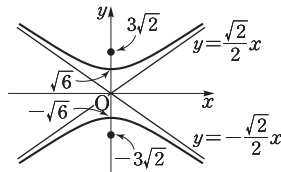
꼭짓점의 좌표는 $(0, \sqrt{6}), (0, -\sqrt{6})$

주축의 길이는 $2 \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}x, \text{ 즉 } y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

또 그래프는 다음 그림과 같다.



답 풀이 참조

62

(1) 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ 을 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ 에서 $\sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$ 이

므로 중심의 좌표는 $(0, 0)$, 초점의 좌표는

$(3\sqrt{5}, 0), (-3\sqrt{5}, 0)$, 꼭짓점의 좌표는 $(3, 0),$

$(-3, 0)$, 점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{6}{3}x$, 즉

$y = \pm 2x$ 이다.

따라서 주어진 쌍곡선의 중심의 좌표는 $(0, 3)$,

초점의 좌표는 $(3\sqrt{5}, 3), (-3\sqrt{5}, 3)$,

꼭짓점의 좌표는 $(3, 3), (-3, 3)$,

점근선의 방정식은 $y = 2x + 3, y = -2x + 3$ 이다.

(2) $-5(x+1)^2 + 4(y-1)^2 = 20$ 에서

$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{5} = -1$$

이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = -1$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = -1$ 에서 $\sqrt{4+5} = 3$ 이므

로 중심의 좌표는 $(0, 0)$, 초점의 좌표는 $(0, 3),$

$(0, -3)$, 꼭짓점의 좌표는 $(0, \sqrt{5}), (0, -\sqrt{5})$,

점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$ 이다.

따라서 주어진 쌍곡선의 중심의 좌표는 $(-1, 1)$,

초점의 좌표는 $(-1, 4), (-1, -2)$,

꼭짓점의 좌표는 $(-1, \sqrt{5}+1), (-1, -\sqrt{5}+1)$,

접근선의 방정식은 $y-1=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x+1)$, 즉

$$y=\frac{\sqrt{5}}{2}x+\frac{\sqrt{5}}{2}+1, y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x-\frac{\sqrt{5}}{2}+1 \text{이다.}$$

답 풀이 참조

63

(1) $x^2-2y^2+4x+12y-10=0$ 에서

$$(x+2)^2-2(y-3)^2=-4$$

$$\therefore \frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{2}=-1$$

(2) 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=-1$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=-1$ 에서 $\sqrt{4+2}=\sqrt{6}$ 이므로 중심의 좌표는 $(0, 0)$, 초점의 좌표는 $(0, \sqrt{6})$, $(0, -\sqrt{6})$, 꼭짓점의 좌표는 $(0, \sqrt{2})$, $(0, -\sqrt{2})$,

접근선의 방정식은 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$ 이다.

따라서 주어진 쌍곡선의 중심의 좌표는 $(-2, 3)$, 초점의 좌표는 $(-2, \sqrt{6}+3)$, $(-2, -\sqrt{6}+3)$, 꼭짓점의 좌표는 $(-2, \sqrt{2}+3)$, $(-2, -\sqrt{2}+3)$,

접근선의 방정식은 $y-3=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x+2)$, 즉

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}+3, y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}+3 \text{이다.}$$

답 풀이 참조

64

타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{5}=1$ 에서 $\sqrt{12-5}=\sqrt{7}$ 이므로 타원의 초점의 좌표는 $(\sqrt{7}, 0)$, $(-\sqrt{7}, 0)$

구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$)이라 하면

$$2a=4 \text{에서 } a=2$$

$$a^2+b^2=(\sqrt{7})^2 \text{에서 } b^2=(\sqrt{7})^2-2^2=3$$

$$\therefore \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$$

$$\text{답 } \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$$

65

구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ 이라 하면

$$a^2+b^2=2^2 \text{에서 } b^2=4-a^2 \dots\dots \textcircled{1}$$

또 쌍곡선이 점 $(2, \sqrt{6})$ 을 지나므로

$$\frac{4}{a^2}-\frac{6}{b^2}=-1$$

$$\therefore 6a^2-4b^2=a^2b^2 \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$6a^2-4(4-a^2)=a^2(4-a^2)$$

$$a^4+6a^2-16=0, (a^2+8)(a^2-2)=0$$

$$\therefore a^2=2 (\because a^2>0)$$

$$a^2=2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b^2=2$$

$$\therefore \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=-1 \quad \text{답 } \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=-1$$

66

쌍곡선의 주축의 길이가 4이므로

$$2b=4 \quad \therefore b=2$$

또 한 점근선의 방정식이 $y=2x$ 이므로

$$\frac{b}{a}=2 \quad \therefore a=1$$

$$\therefore a+b=3$$

답 3

67

주어진 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 이라 하면

쌍곡선의 초점의 좌표가 $(4, 0)$, $(-4, 0)$ 이므로

$$a^2+b^2=4^2=16 \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 이고 두 점근선이 서로 수직이므로

$$\frac{b}{a} \times \left(-\frac{b}{a}\right)=-1$$

$$\therefore a^2=b^2 \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a^2=8, b^2=8$$

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$ 이 점 $(8, k)$ 를 지나므로

$$8-\frac{k^2}{8}=1, \quad k^2=56$$

$$\therefore k=2\sqrt{14} (\because k>0)$$

답 $2\sqrt{14}$

68

주어진 쌍곡선의 방정식에서

$$4(x+2)^2 - 5(y-1)^2 = -20$$

$$\therefore \frac{(x+2)^2}{5} - \frac{(y-1)^2}{4} = -1$$

이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = -1$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = -1$ 에서 $\sqrt{5+4}=3$ 이므로 중심의 좌표는 $(0, 0)$ 이고 초점의 좌표는 $(0, 3)$, $(0, -3)$ 이다.

따라서 주어진 쌍곡선의 중심의 좌표는 $(-2, 1)$ 이고 초점의 좌표는 $(-2, 4)$, $(-2, -2)$ 이므로

$$a+b+c+d = -2+1+4+(-2) = 1$$

답 1

69

주어진 쌍곡선의 방정식에서

$$3(x+3)^2 - (y-2)^2 = -3$$

$$\therefore (x+3)^2 - \frac{(y-2)^2}{3} = -1$$

이 쌍곡선은 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{3} = -1$ 을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{3} = -1$ 에서 $\sqrt{1+3}=2$ 이므로 초점의 좌표는

$$(0, 2), (0, -2)$$

따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$$(-3, 4), (-3, 0)$$

이므로 $\triangle OAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$

답 6

70

쌍곡선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$ 라 하면 쌍곡선의 주축의 길이가 8 이므로 $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 8$ 에서

$$|\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} - \sqrt{(x+6)^2 + (y-2)^2}| = 8$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} \\ = \sqrt{(x+6)^2 + (y-2)^2} \pm 8 \end{aligned}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$5x+21 = \pm 4\sqrt{(x+6)^2 + (y-2)^2}$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$9(x+1)^2 - 16(y-2)^2 = 144$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

$$\text{답 } \frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

71

쌍곡선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$ 라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여 $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 6$ 이므로

$$\begin{aligned} |\sqrt{(x-1)^2 + (y-8)^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}| &= 6 \\ \therefore \sqrt{(x-1)^2 + (y-8)^2} &= \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \pm 6 \end{aligned}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$-4y+7 = \pm 3\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$9(x-1)^2 - 7(y-4)^2 = -63$$

$$\therefore \frac{(x-1)^2}{7} - \frac{(y-4)^2}{9} = -1$$

$$\frac{(x-1)^2}{7} - \frac{(y-4)^2}{9} = -1 \text{에 } y=0 \text{을 대입하면}$$

$$\frac{(x-1)^2}{7} - \frac{16}{9} = -1$$

$$(x-1)^2 = \frac{49}{9}, \quad x-1 = \pm \frac{7}{3}$$

$$\therefore x = -\frac{4}{3} \text{ 또는 } x = \frac{10}{3}$$

따라서 쌍곡선이 x 축과 두 점 $(-\frac{4}{3}, 0), (\frac{10}{3}, 0)$ 에서 만나므로 구하는 두 점 사이의 거리는

$$\frac{10}{3} - (-\frac{4}{3}) = \frac{14}{3} \quad \text{답 } \frac{14}{3}$$

72

쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 에서 $\sqrt{16+9}=5$ 이므로 초점의 좌표는 $(5, 0), (-5, 0)$

$$\therefore \overline{FF'} = 10$$

한편 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2 \times 4 = 8 \quad (\because \overline{PF'} > \overline{PF})$$

$$\overline{PF'} = 2\overline{PF} \text{이므로} \quad 2\overline{PF} - \overline{PF} = 8$$

$$\therefore \overline{PF} = 8, \overline{PF'} = 16$$

따라서 $\triangle PFF'$ 의 둘레의 길이는

$$\overline{PF} + \overline{FF'} + \overline{PF'} = 8 + 10 + 16 = 34 \quad \text{답 34}$$

73

타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ 에서 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} + \overline{PF} = 2 \times 4 = 8$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$ 에서 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{PF'}^2 - \overline{PF}^2 = (\overline{PF'} + \overline{PF})(\overline{PF'} - \overline{PF}) \\ = 8 \times 2\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

답 16√2

04 이차곡선

● 본책 43~44쪽

74

$$y^2 + 12x + 6y - 3 = 0 \text{에서}$$

$$(y+3)^2 = -12(x-1)$$

따라서 주어진 방정식은 포물선 $y^2 = -12x$ 를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 포물선을 나타낸다.

답 포물선

75

$(k+6)x^2 + (k-3)y^2 - 2 = 0$ 이 나타내는 도형이 쌍곡선이 되려면

$$(k+6)(k-3) < 0 \quad \therefore -6 < k < 3$$

따라서 정수 k 는 -5, -4, ..., 2의 8개이다.

답 8

76

$$2x^2 + ky^2 + k - 5 = 0 \text{에서}$$

$$2x^2 + ky^2 = 5 - k$$

이 방정식이 나타내는 도형이 타원이 되려면

$$k > 0, k \neq 2, 5 - k > 0$$

$$\therefore 0 < k < 2 \text{ 또는 } 2 < k < 5$$

답 $0 < k < 2$ 또는 $2 < k < 5$

연습 문제

● 본책 45~47쪽

77

전략 주어진 조건을 이용하여 $\frac{b}{a}$ 의 값을 구한다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점의 좌표가

$$(\sqrt{a^2 + b^2}, 0), (-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$$

이므로 두 초점 사이의 거리는 $2\sqrt{a^2 + b^2}$

이때 주축의 길이가 $2|a|$ 이고 두 초점 사이의 거리가 주축의 길이의 4배이므로

$$2\sqrt{a^2 + b^2} = 4 \times 2|a|$$

$$\therefore \sqrt{a^2 + b^2} = 4|a|$$

양변을 제곱하면 $a^2 + b^2 = 16a^2$

$$b^2 = 15a^2 \quad \therefore \frac{b}{a} = \pm\sqrt{15}$$

따라서 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{b}{a}x, \text{ 즉 } y = \pm\sqrt{15}x$$

답 $y = \pm\sqrt{15}x$

78

전략 타원의 정의와 쌍곡선의 정의를 이용하여 $|a|$, $|b|$ 의 값을 구한다.

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$ 과 쌍곡선 $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1$ 의 두 초점이 일치하므로

$$a^2 - c^2 = b^2 + c^2, \quad 2c^2 = a^2 - b^2$$

$$\therefore c^2 = \frac{a^2 - b^2}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

타원의 정의에 의하여 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2|a|$ 이므로

$$4 + 12 = 2|a| \quad \therefore |a| = 8$$

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'} - \overline{PF} = 2|b|$ 이므로

$$12 - 4 = 2|b| \quad \therefore |b| = 4$$

따라서 ㉠에서

$$c^2 = \frac{64-16}{2} = 24$$

답 24

79

전략 주어진 쌍곡선의 방정식을 $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ 의 꼴로 변형한다.

$$4x^2 - y^2 - 24x + 4y + 28 = 0 \text{에서}$$

$$4(x-3)^2 - (y-2)^2 = 4$$

$$\therefore (x-3)^2 - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

이 쌍곡선은 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄱ. 주축의 길이는 $2 \times 1 = 2$ (거짓)

ㄴ. 주축은 x 축에 평행하다. (참)

ㄷ. 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 에서 $\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ 이므로 초점의 좌표는

$$(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$$

따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$$(\sqrt{5}+3, 2), (-\sqrt{5}+3, 2) \text{ (참)}$$

ㄹ. 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 의 점근선의 방정식이 $y = \pm 2x$

이므로 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y-2 = \pm 2(x-3)$$

$$\therefore y=2x-4, y=-2x+8 \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

80

전략 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 점근선의 방정식이 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 임을 이용하여 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식을 구한다.

$$3x^2 - 4y^2 + 16y - 28 = 0 \text{에서}$$

$$3x^2 - 4(y-2)^2 = 12$$

$$\therefore \frac{x^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{3} = 1$$

이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 을 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 의 점근선의 방정식은

$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$ 이므로 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y-2 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$\therefore y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 2, y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2$$

두 직선의 x 절편은

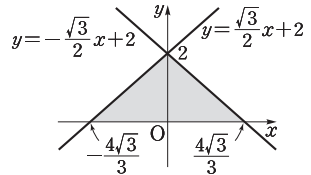
$$\text{각각 } \frac{4\sqrt{3}}{3}, -\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

이고 y 절편은 2이므로

구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left\{ \frac{4\sqrt{3}}{3} - \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3} \right) \right\} \times 2 = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$



81

전략 주어진 식이 $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ 의 꼴이어야 함을 이용한다.

$$x^2 - y^2 + 2y + k = 0 \text{에서}$$

$$x^2 - (y-1)^2 = -k-1$$

$$\therefore \frac{x^2}{-k-1} - \frac{(y-1)^2}{-k-1} = 1$$

이것이 x 축에 평행한 주축을 갖는 쌍곡선의 방정식이 되려면

$$-k-1 > 0 \quad \therefore k < -1$$

답 $k < -1$

82

전략 두 삼각형 $PF'F$, QFF' 이 합동임을 이용한다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 에서 $\sqrt{16+9} = 5$ 이므로

$$F(5, 0), F'(-5, 0)$$

$$\therefore \overline{F'F} = 10$$

이때 두 삼각형 $PF'F$, QFF' 이 합동이므로

$$\square F'QFP = 2\triangle PF'F$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 10 \times b \right)$$

$$= 10b$$

즉 $10b = 60$ 이므로 $b = 6$

따라서 점 $P(a, 6)$ 이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 위의 점
이므로

$$\frac{a^2}{16} - 4 = 1 \quad \therefore a^2 = 80$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 80 + 36 = 116$$

답 116

83

전략 쌍곡선의 점근선의 방정식을 이용하여 a, b 사이의 관계를 구한다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 한 점근선의 방정식이 $y = x$

이므로

$$\frac{b}{a} = 1 \quad \therefore b = a$$

따라서 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이므로 $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$$\therefore c = \sqrt{2}a \quad (\because c > 0)$$

$x = \sqrt{2}a$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{(\sqrt{2}a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad y^2 = a^2$$

$$\therefore y = -a \text{ 또는 } y = a$$

즉 두 점 P, Q 의 좌표는 $(\sqrt{2}a, -a), (\sqrt{2}a, a)$ 이므로 $\overline{PQ} = 8$ 에서

$$a - (-a) = 8 \quad \therefore a = 4$$

따라서 $b = 4, c = 4\sqrt{2}$ 이므로

$$a^2 + b^2 + c^2 = 16 + 16 + 32 = 64$$

답 ③

84

전략 두 점근선이 이루는 각의 크기가 60° 임을 이용하여 점근선의 기울기를 구한다.

주어진 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0) \text{이라 하면}$$

$$a^2 + b^2 = 2^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 두 점근선이 이루는 각의 크기가 60° 이므로 기울기가 양수인 점근선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 30° 이다.

$$\text{즉 } \frac{b}{a} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{이므로}$$

$$a = \sqrt{3}b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$(\sqrt{3}b)^2 + b^2 = 4 \quad \therefore b^2 = 1$$

이것을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$a^2 + 1 = 4 \quad \therefore a^2 = 3$$

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 이 점 $(k, 2)$ 를 지나므로

$$\frac{k^2}{3} - 2^2 = 1, \quad k^2 = 15$$

$$\therefore k = \sqrt{15} \quad (\because k > 0)$$

답 $\sqrt{15}$

85

전략 쌍곡선의 정의를 이용하여 $\overline{PF'}$, $\overline{QF'}$ 을 각각 $\overline{PF}$, $\overline{QF}$ 에 대한 식으로 나타낸다.

쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2 \times 2 = 4, \quad \overline{QF'} - \overline{QF} = 2 \times 2 = 4$$

$$\therefore \overline{PF'} = \overline{PF} + 4, \quad \overline{QF'} = \overline{QF} + 4$$

이때 $\overline{PF'} - \overline{QF'} = 5$ 이므로

$$(\overline{PF} + 4) - (\overline{QF} + 4) = 5$$

$$\therefore \overline{PF} - \overline{QF} = -3$$

$$\overline{PF} = \frac{2}{3} \overline{QF} \text{이므로 } -\frac{1}{3} \overline{QF} = -3$$

$$\therefore \overline{QF} = 9$$

따라서 $\overline{PF} = \frac{2}{3} \times 9 = 6$ 이므로

$$\overline{PF} + \overline{QF} = 6 + 9 = 15$$

답 ④

86

전략 쌍곡선의 다른 한 초점을 F' 이라 하고 쌍곡선의 정의를 이용하여 $\overline{PF'}$ 의 길이를 구한다.

$$\text{쌍곡선 } \frac{x^2}{k} - \frac{y^2}{9} = -1$$

의 다른 한 초점을

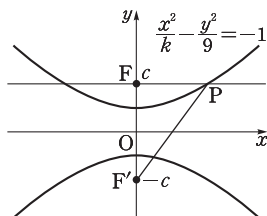
$F'(0, -c)$ 라 하면 쌍

곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2 \times 3$$

$$= 6$$

$$\therefore \overline{PF'} = \overline{PF} + 6 = 9 + 6 = 15$$



따라서 직각삼각형 PFF'에서

$$\overline{FF'} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$$

즉 $c = \frac{1}{2} \times 12 = 6$ 이므로 $k+9=c^2$ 에서

$$k = 6^2 - 9 = 27$$

답 27

87

전략 피타고라스 정리와 쌍곡선의 정의를 이용하여 $\overline{PF}$, $\overline{PF'}$ 사이의 관계식을 구한다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$ 에서 $\sqrt{2+3} = \sqrt{5}$ 이므로

$$F(\sqrt{5}, 0), F'(-\sqrt{5}, 0)$$

$$\therefore \overline{FF'} = 2\sqrt{5}$$

이때 $\overline{PF} = a$, $\overline{PF'} = b$ 라 하면 $\triangle PFF'$ 는

$\angle F'PF = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$a^2 + b^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$$

또 쌍곡선의 정의에 의하여

$$a - b = 2\sqrt{2}$$

따라서 $(a-b)^2 + 2ab = a^2 + b^2$ 에서

$$(2\sqrt{2})^2 + 2ab = 20, \quad 2ab = 12$$

$$\therefore ab = 6$$

$$\therefore \triangle PFF' = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

답 3

88

전략 점 P의 좌표를 (x, y) 로 놓고 주어진 조건을 이용하여 x, y 에 대한 비례식을 세운다.

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overline{PF} = \sqrt{(x+4)^2 + y^2}$$

점 P와 직선 $x = -1$ 사이의 거리는

$$|x+1|$$

이때 점 P에서 점 F(-4, 0)과 직선 $x = -1$ 에 이르는 거리의 비가 2 : 1이므로

$$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} : |x+1| = 2 : 1$$

$$\therefore \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 2|x+1|$$

양변을 제곱하면

$$(x+4)^2 + y^2 = 4(x+1)^2$$

$$\therefore 3x^2 - y^2 = 12$$

$$\text{답 } 3x^2 - y^2 = 12$$

89

전략 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 로 놓고 직선 AF의 기울기를 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하고 $\overline{AF} = 5k$, $\overline{OF} = 3k$ ($k > 0$)라 하면 직각삼각형 AOF에서

$$\overline{AO} = \sqrt{(5k)^2 - (3k)^2} = 4k$$

따라서 직선 AF의 기울기가 $-\frac{4k}{3k}$, 즉 $-\frac{4}{3}$ 이므로

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{3} \quad \therefore b = \frac{4}{3}a$$

즉 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{9y^2}{16a^2} = 1$ 이므로

$$c^2 = a^2 + \frac{16}{9}a^2 = \frac{25}{9}a^2$$

$$\therefore c = \frac{5}{3}a \quad (\because c > 0)$$

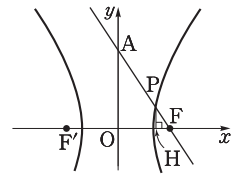
한편 오른쪽 그림과 같이 점

P에서 x 축에 내린 수선의 발

을 H라 하면

$$\triangle PHF \sim \triangle AOF$$

(AA 닮음)



이므로

$$\overline{PF} : \overline{HF} : \overline{PH} = \overline{AF} : \overline{OF} : \overline{AO}$$

이때 $\overline{PF} = 10$ 이므로

$$10 : \overline{HF} : \overline{PH} = 5 : 3 : 4$$

$$\therefore \overline{FH} = 6, \overline{PH} = 8$$

즉 $\overline{OH} = \overline{OF} - \overline{FH} = \frac{5}{3}a - 6$ 이므로

$$P\left(\frac{5}{3}a - 6, 8\right)$$

점 P가 쌍곡선 위의 점이므로

$$\frac{\left(\frac{5}{3}a - 6\right)^2}{a^2} - \frac{9 \times 8^2}{16a^2} = 1$$

$$4a^2 - 45a = 0, \quad a(4a - 45) = 0$$

$$\therefore a = \frac{45}{4} \quad (\because a > 0)$$

따라서 구하는 주축의 길이는

$$2a = 2 \times \frac{45}{4} = \frac{45}{2}$$

$$\text{답 } \frac{45}{2}$$

93

$$\text{답 } -\frac{1}{2}(x+x_1), -1, -1, -1, 1, -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

94

직선 $2x+y+3=0$, 즉 $y=-2x-3$ 에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이므로 포물선 $y^2=-8x$ 에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{-2}{\frac{1}{2}} \quad \therefore y=\frac{1}{2}x-4$$

이 직선이 점 $(-2, k)$ 를 지나므로

$$k=\frac{1}{2} \times (-2) - 4 = -5 \quad \text{답 } -5$$

참고 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이다.

95

x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 인 직선의 기울기는 $\tan 45^\circ=1$ 이므로 포물선 $y^2=\frac{1}{3}x$ 에 접하고 기울기가 1 인 직선의 방정식은

$$y=x+\frac{1}{12} \quad \therefore 12x-12y+1=0$$

따라서 $a=12, b=-12$ 이므로

$$a-b=24 \quad \text{답 } 24$$

96

직선 $y=-x+2$ 와 평행한 직선의 기울기는 -1 이므로 포물선 $y^2=-6x$ 에 접하고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y=-x+\frac{-\frac{3}{2}}{-1} \quad \therefore y=-x+\frac{3}{2}$$

따라서 $A(\frac{3}{2}, 0), B(0, \frac{3}{2})$ 이므로 삼각형 OAB 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{8} \quad \text{답 } \frac{9}{8}$$

97

점 $(6, 3)$ 이 포물선 $x^2=ky$ 위의 점이므로

$$36=3k \quad \therefore k=12$$

따라서 포물선 $x^2=12y$ 위의 점 $(6, 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$6x=6(y+3) \quad \therefore y=x-3$$

$$\text{답 } y=x-3$$

98

포물선 $y^2=6x$ 의 초점의 좌표는

$$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

점 $(\frac{1}{2}, \sqrt{3})$ 에서의 접선의 방정식은

$$\sqrt{3}y=3\left(x+\frac{1}{2}\right) \\ \therefore 6x-2\sqrt{3}y+3=0$$

따라서 구하는 거리는

$$\frac{|9-0+3|}{\sqrt{6^2+(-2\sqrt{3})^2}}=\sqrt{3} \quad \text{답 } \sqrt{3}$$

개념 노트

점과 직선 사이의 거리

점 (x_1, y_1) 과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

99

포물선 $y^2=-4x$ 의 초점의 좌표는

$$(-1, 0)$$

점 $(-2, 2\sqrt{2})$ 에서의 접선의 방정식은

$$2\sqrt{2}y=-2(x-2) \\ \therefore y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}$$

이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $\sqrt{2}$ 이므로 기울기가 $\sqrt{2}$ 이고 점 $(-1, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\sqrt{2}(x+1) \quad \therefore y=\sqrt{2}x+\sqrt{2}$$

따라서 구하는 y 절편은 $\sqrt{2}$ 이다.

$$\text{답 } \sqrt{2}$$

100

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 포물선 $x^2=-2y$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x=-(y+y_1)$$

이 직선이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$0 = -(2 + y_1) \quad \therefore y_1 = -2$$

또 점 (x_1, y_1) 이 포물선 $x^2 = -2y$ 위의 점이므로

$$x_1^2 = -2y_1 = 4$$

$$\therefore x_1 = 2 \text{ 또는 } x_1 = -2$$

따라서 $x_1 = 2, y_1 = -2$ 또는 $x_1 = -2, y_1 = -2$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$2x = -(y - 2), -2x = -(y - 2)$$

$$\therefore y = -2x + 2, y = 2x + 2$$

$$\text{답 } y = -2x + 2, y = 2x + 2$$

101

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 포물선 $y^2 = -4x$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$y_1 y = -2(x + x_1)$$

이 직선이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$y_1 = -2(2 + x_1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 포물선 $y^2 = -4x$ 위의 점이므로

$$y_1^2 = -4x_1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$\{-2(2 + x_1)\}^2 = -4x_1$$

$$x_1^2 + 5x_1 + 4 = 0, \quad (x_1 + 4)(x_1 + 1) = 0$$

$$\therefore x_1 = -4 \text{ 또는 } x_1 = -1$$

①에서 $x_1 = -4$ 일 때 $y_1 = 4, x_1 = -1$ 일 때 $y_1 = -2$

이므로 접선의 방정식은

$$4y = -2(x - 4), -2y = -2(x - 1)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x + 2, y = x - 1$$

따라서 직선 $y = x - 1$ 이 점 $(4, k)$ 를 지나므로

$$k = 3 \quad \text{답 } 3$$

연습문제

● 본책 57~58쪽

102

전략 포물선 $y^2 = 4px$ 에 접하고 기울기가 m 인 직선의 방정식은 $y = mx + \frac{p}{m}$ 임을 이용한다.

직선 $y = 2x$ 를 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y = 2(x - k) \quad \therefore y = 2x - 2k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

포물선 $x + 2y^2 = 0$, 즉 $y^2 = -\frac{1}{2}x$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y = 2x + \frac{-\frac{1}{8}}{2} \quad \therefore y = 2x - \frac{1}{16}$$

이 직선이 직선 ①과 일치하므로

$$-2k = -\frac{1}{16} \quad \therefore k = \frac{1}{32} \quad \text{답 } \frac{1}{32}$$

103

전략 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은 $y_1 y = 2p(x + x_1)$ 임을 이용한다.

포물선 $y^2 = 12x$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$$by = 6(x + a)$$

$$\therefore y = \frac{6}{b}x + \frac{6a}{b} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 $(3, -6)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-6y = 6(x + 3)$$

$$\therefore y = -x - 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

두 직선 ①, ②이 수직이므로

$$\frac{6}{b} \times (-1) = -1 \quad \therefore b = 6$$

이때 점 $(a, 6)$ 이 포물선 $y^2 = 12x$ 위의 점이므로

$$36 = 12a \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore ab = 18 \quad \text{답 } 18$$

104

전략 점 P에서의 접선의 방정식을 구하고 점 Q의 좌표를 a 에 대한 식으로 나타낸다.

점 P(a, b)가 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점이므로

$$b^2 = 4a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 P(a, b)에서의 접선의 방정식은

$$by = 2(x + a)$$

이므로 Q($-a, 0$)

이때 $\overline{PQ} = 4\sqrt{3}$ 이므로 $\sqrt{(2a)^2 + b^2} = 4\sqrt{3}$

$$\text{양변을 제곱하면 } 4a^2 + b^2 = 48 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$4a^2 + 4a = 48, \quad a^2 + a - 12 = 0$$

$$(a+4)(a-3)=0 \quad \therefore a=-4 \text{ 또는 } a=3$$

이때 ㉠에서 $a \geq 0$ 이므로

$$a=3, \quad b^2=12$$

$$\therefore a^2+b^2=21$$

답 21

105

전략 점 $\left(\frac{1}{p}, 2\right)$ 에서의 접선의 방정식을 구하고 접선과 준선이 만나는 점의 좌표를 p 에 대한 식으로 나타낸다.

포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $\left(\frac{1}{p}, 2\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2y=2p\left(x+\frac{1}{p}\right) \quad \therefore y=px+1$$

이때 포물선의 준선의 방정식이 $x=-p$ 이므로 접선과 준선이 만나는 점의 좌표는

$$y=p \times (-p) + 1 = -p^2 + 1$$

즉 $-p^2+1=-\frac{5}{4}$ 이므로

$$p^2=\frac{9}{4} \quad \therefore p=\frac{3}{2} \quad (\because p>0) \quad \text{답 ②}$$

106

전략 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 로 놓고 접선의 방정식을 세운 후 이 직선이 점 P를 지남을 이용한다.

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 포물선 $y^2=12x$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=6(x+x_1)$$

이 직선이 점 P(-2, 0)을 지나므로

$$0=6(-2+x_1) \quad \therefore x_1=2$$

또 점 (x_1, y_1) 이 포물선 $y^2=12x$ 위의 점이므로

$$y_1^2=12x_1=24$$

$$\therefore y_1=-2\sqrt{6} \text{ 또는 } y_1=2\sqrt{6}$$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(2, -2\sqrt{6}), (2, 2\sqrt{6})$

이므로 $\triangle PAB$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-2+2+2}{3}, \frac{0+(-2\sqrt{6})+2\sqrt{6}}{3}\right),$$

$$\text{즉 } \left(\frac{2}{3}, 0\right) \quad \text{답 } \left(\frac{2}{3}, 0\right)$$

107

전략 포물선 $y^2=4px$ 에 접하고 기울기가 m 인 직선의 방정식은 $y=mx+\frac{p}{m}$ 임을 이용한다.

포물선 $y^2=4px$ 에 접하고 기울기가 -1 인 직선 l_1 의 방정식은

$$y=-x+\frac{p}{-1}$$

$$\therefore y=-x-p \quad \dots\dots ㉠$$

㉠을 $y^2=4px$ 에 대입하면

$$(-x-p)^2=4px, \quad x^2-2px+p^2=0$$

$$(x-p)^2=0 \quad \therefore x=p$$

$x=p$ 를 ㉠에 대입하면 $y=-2p$

즉 포물선 $y^2=4px$ 와 직선 l_1 의 접점의 좌표는

$$(p, -2p)$$

한편 직선 l_1 에 수직인 직선의 기울기는 1이므로 점

$(p, -2p)$ 를 지나고 기울기가 1인 직선 l_2 의 방정식은

$$y+2p=x-p \quad \therefore y=x-3p$$

따라서 두 직선 l_1, l_2 의 y 절편이 각각 $-p, -3p$ 이므로 두 직선 l_1, l_2 및 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{-3p - (-p)\} \times (-p) = p^2$$

즉 $p^2=2$ 이므로

$$p=-\sqrt{2} \quad (\because p<0) \quad \text{답 } -\sqrt{2}$$

108

전략 포물선 위의 점과 기울기가 m 인 직선 l 사이의 거리의 최솟값은 기울기가 m 인 포물선의 접선과 직선 l 사이의 거리와 같다.

포물선 $y^2=-8x$ 위의 점과 직선 $2x+y-6=0$ 사이의 거리가 최소이려면 포물선 위의 점에서의 접선이 직선 $2x+y-6=0$ 과 평행해야 한다.

직선 $2x+y-6=0$, 즉 $y=-2x+6$ 과 평행한 직선의 기울기는 -2 이므로 포물선 $y^2=-8x$ 에 접하고 기울기가 -2 인 직선의 방정식은

$$y=-2x+\frac{-2}{-2} \quad \therefore y=-2x+1$$

따라서 구하는 최솟값은 직선 $y=-2x+1$ 위의 점

$(0, 1)$ 과 직선 $2x+y-6=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|0+1-6|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5} \quad \text{답 } \sqrt{5}$$

109

전략 먼저 포물선 $2y^2=x$ 에 접하고 기울기가 $-\frac{1}{4}$ 인 직선의 방정식을 구한다.

포물선 $2y^2=x$, 즉 $y^2=\frac{1}{2}x$ 에 접하고 기울기가 $-\frac{1}{4}$ 인 직선 l 의 방정식은

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{\frac{1}{8}}{-\frac{1}{4}}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 $2y^2=x$ 에 대입하면

$$2\left(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right)^2 = x, \quad x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0 \quad \therefore x = 2$$

$x=2$ 를 ①에 대입하면 $y = -1$

$$\therefore A(2, -1)$$

또 ①을 $x^2=32y$ 에 대입하면

$$x^2 = 32\left(-\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right), \quad x^2 + 8x + 16 = 0$$

$$(x+4)^2 = 0 \quad \therefore x = -4$$

$x = -4$ 를 ①에 대입하면 $y = \frac{1}{2}$

$$\therefore B(-4, \frac{1}{2})$$

따라서 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+(-4)}{2}, \frac{-1+\frac{1}{2}}{2}\right), \text{ 즉 } \left(-1, -\frac{1}{4}\right)$$

답 $\left(-1, -\frac{1}{4}\right)$

110

전략 원과 직선이 만나려면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이보다 작거나 같아야 함을 이용한다.

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(n^2, 2n)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2ny = 2(x+n^2) \quad \therefore x - ny + n^2 = 0$$

이 직선이 점 $(1, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 6인 원 C와 만나려면

$$\frac{|1-0+n^2|}{\sqrt{1^2+(-n)^2}} \leq 6, \quad \sqrt{1+n^2} \leq 6$$

$$1+n^2 \leq 36 \quad \therefore n^2 \leq 35$$

따라서 자연수 n 은 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다. **답** ③

111

전략 접선의 기울기를 m 이라 하고 m 에 대한 이차방정식을 세운 후 이 이차방정식의 두 실근의 곱이 -1 임을 이용한다.

접선의 기울기를 m 이라 하면 포물선 $y^2=-8x$ 에 접하고 기울기가 m ($m \neq 0$)인 직선의 방정식은

$$y = mx - \frac{2}{m}$$

이 직선이 점 $(a, 5)$ 를 지나므로

$$5 = am - \frac{2}{m}$$

$$\therefore am^2 - 5m - 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 두 접선이 수직이므로 m 에 대한 이차방정식 ①의 두 실근의 곱은 -1 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{-2}{a} = -1 \quad \therefore a = 2 \quad \textbf{답} \quad 2$$

해설 Focus

포물선 밖의 점 (p, q) 에서 포물선에 그은 두 접선이 수직이면 점 (p, q) 가 포물선의 준선 위의 점임을 이용하여 a 의 값을 구할 수도 있다.

즉 점 $(a, 5)$ 가 포물선 $y^2=-8x$ 의 준선 $x=2$ 위에 있어야 하므로 $a=2$

112

전략 주어진 조건과 포물선의 정의를 이용하여 점 A의 좌표를 구한다.

포물선 $y^2=16x$ 의 초점 F의 좌표는 $(4, 0)$ 이고 준선의 방정식은 $x=-4$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점

A, B에서 준선 $x=-4$ 에

내린 수선의 발을 각각 H,

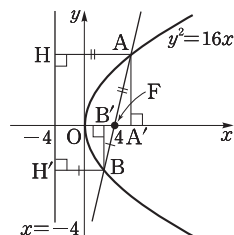
H'이라 하고 $\overline{AF}=3k$,

$\overline{BF}=2k$ ($k>0$)라 하면 포

물선의 정의에 의하여

$$\overline{AH} = \overline{AF} = 3k,$$

$$\overline{BH'} = \overline{BF} = 2k$$



또 두 점 A, B에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 A' , B' 이라 하면

$$\overline{A'F} = 3k - 8, \overline{B'F} = 8 - 2k$$

이때 $\triangle AFA' \sim \triangle BFB'$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{AF} : \overline{BF} = \overline{A'F} : \overline{B'F}$$

$$3 : 2 = (3k - 8) : (8 - 2k)$$

$$24 - 6k = 6k - 16$$

$$12k = 40 \quad \therefore k = \frac{10}{3}$$

즉 점 A의 x 좌표는 $-4 + 3 \times \frac{10}{3} = 6$ 이므로 y 좌표는

$$y^2 = 16 \times 6 \text{에서}$$

$$y = 4\sqrt{6} \quad (\because y > 0)$$

$$\therefore A(6, 4\sqrt{6})$$

따라서 포물선 $y^2 = 16x$ 위의 점 $A(6, 4\sqrt{6})$ 에서의 접선의 방정식은

$$4\sqrt{6}y = 8(x + 6)$$

$y = 0$ 을 대입하면

$$0 = 8(x + 6) \quad \therefore x = -6$$

즉 구하는 x 절편은 -6 이다.

답 -6

113

전략 점 P에서의 접선이 점 A를 지나고 $\triangle PAQ$ 가 정삼각형임을 이용하여 점 P의 좌표를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 점

$A(-4, 0)$ 에서 포물선

$y^2 = 4px$ 에 그은 두 접선의

접점 중 제1사분면 위의 점

을 P, 제4사분면 위의 점

을 Q라 하자.

점 P의 좌표를 (x_1, y_1) ($y_1 > 0$)이라 하면 점 P에서의 접선의 방정식은

$$y_1 y = 2p(x + x_1)$$

이 직선이 점 $A(-4, 0)$ 을 지나므로

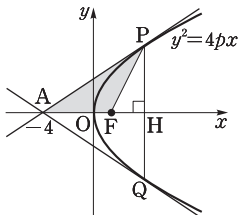
$$0 = 2p(-4 + x_1) \quad \therefore x_1 = 4 \quad (\because p > 0)$$

이때 두 점 P, Q는 x 축에 대하여 대칭이므로 직선 PQ

가 x 축과 만나는 점을 H라 하면

$$H(4, 0)$$

$$\therefore \overline{AH} = 4 - (-4) = 8$$



$\triangle PAQ$ 가 정삼각형이므로 직각삼각형 PAH에서

$$\overline{PH} = \frac{\overline{AH}}{\tan 60^\circ} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

즉 점 P의 좌표는 $(4, \frac{8\sqrt{3}}{3})$ 이고 점 P가 포물선

$y^2 = 4px$ 위의 점이므로

$$\frac{64}{3} = 4p \times 4 \quad \therefore p = \frac{4}{3}$$

따라서 $F(\frac{4}{3}, 0)$ 이므로 $\triangle PAF$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left\{ \frac{4}{3} - (-4) \right\} \times \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{64\sqrt{3}}{9}$$

답 $\frac{64\sqrt{3}}{9}$

02 타원의 접선의 방정식

● 본책 59~65쪽

114

$$(1) y = \frac{1}{3}x \pm \sqrt{9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5}$$

$$\therefore y = \frac{1}{3}x \pm \sqrt{6}$$

$$(2) 4x^2 + 3y^2 = 12 \text{에서} \quad \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = -2x \pm \sqrt{3 \times (-2)^2 + 4}$$

$$\therefore y = -2x \pm 4$$

답 (1) $y = \frac{1}{3}x \pm \sqrt{6}$ (2) $y = -2x \pm 4$

115

$$(1) \frac{-2x}{8} + \frac{y}{2} = 1 \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$(2) 4x + 4y = 20 \quad \therefore y = -x + 5$$

답 (1) $y = \frac{1}{2}x + 2$ (2) $y = -x + 5$

116

답 $x_1 x, y_1 y, x_1, 1, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 2x - 3$

117

직선 $x-y+4=0$, 즉 $y=x+4$ 에 수직인 직선의 기울기는 -1 이다.

따라서 타원 $x^2+2y^2=6$, 즉 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 에 접하고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y = -x \pm \sqrt{6 \times (-1)^2 + 3}$$

$$\therefore y = -x \pm 3$$

답 $y = -x \pm 3$

118

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 이 점 $(2, 0)$ 을 지나므로

$$\frac{4}{a^2}=1, \quad a^2=4$$

$$\therefore a=2 (\because a>0)$$

따라서 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 에 접하고 기울기가 -2 인 직선의 방정식은

$$y = -2x \pm \sqrt{4 \times (-2)^2 + b^2}$$

$$\therefore y = -2x \pm \sqrt{16+b^2}$$

즉 직선 $y = -2x + \sqrt{16+b^2}$ 이 직선 $y = -2x + 5$ 와 일치하므로

$$\sqrt{16+b^2}=5, \quad 16+b^2=25$$

$$b^2=9 \quad \therefore b=3 (\because b>0)$$

$$\therefore a+b=5$$

답 5

119

타원 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 에 접하고 기울기가 1 인 직선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{5 \times 1^2 + 4}$$

$$\therefore y = x \pm 3$$

따라서 구하는 두 직선 사이의 거리는 직선 $y=x+3$ 위의 점 $(0, 3)$ 과 직선 $y=x-3$, 즉 $x-y-3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|0-3-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$$

답 $3\sqrt{2}$

120

타원 $3x^2+4y^2=48$ 위의 점 $(2, 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$3 \times 2x + 4 \times 3y = 48 \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + 4$$

이 직선과 수직인 직선의 기울기는 2 이므로 기울기가 2 이고 점 $(3, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-4=2(x-3)$$

$$\therefore y=2x-2$$

답 $y=2x-2$

121

점 $(\sqrt{2}, 1)$ 이 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ 위의 점이므로

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ 위의 점 $(\sqrt{2}, 1)$ 에서의 접선의 방정식은 $\frac{\sqrt{2}x}{a}+\frac{y}{b}=1$

이 직선이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$\frac{2}{b}=1 \quad \therefore b=2$$

$b=2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $\frac{2}{a}+\frac{1}{2}=1 \quad \therefore a=4$

$$\therefore ab=8$$

답 8

122

타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(3, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{3x}{12}+\frac{y}{4}=1 \quad \therefore y=-x+4$$

이 직선의 x 절편과 y 절편이 모두 4 이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$

답 8

123

점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 타원 $x^2+6y^2=6$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+6y_1y=6$$

이 직선이 점 (2, 1)을 지나므로

$$2x_1 + 6y_1 = 6$$

$$\therefore x_1 = 3(1 - y_1) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 타원 $x^2 + 6y^2 = 6$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + 6y_1^2 = 6 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦을 ⑧에 대입하면

$$9(1 - y_1)^2 + 6y_1^2 = 6$$

$$5y_1^2 - 6y_1 + 1 = 0, \quad (5y_1 - 1)(y_1 - 1) = 0$$

$$\therefore y_1 = \frac{1}{5} \text{ 또는 } y_1 = 1$$

⑦에서 $y_1 = \frac{1}{5}$ 일 때 $x_1 = \frac{12}{5}$, $y_1 = 1$ 일 때 $x_1 = 0$ 이므로

로 접선의 방정식은

$$\frac{12}{5}x + \frac{6}{5}y = 6, \quad 6y = 6$$

$$\therefore y = -2x + 5, \quad y = 1$$

$$\text{답 } y = -2x + 5, \quad y = 1$$

124

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{16} + \frac{y_1 y}{4} = 1$$

이 직선이 점 P(4, 1)을 지나므로

$$\frac{4x_1}{16} + \frac{y_1}{4} = 1$$

$$\therefore y_1 = -x_1 + 4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{4} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦을 ⑧에 대입하면 $\frac{x_1^2}{16} + \frac{(-x_1 + 4)^2}{4} = 1$

$$5x_1^2 - 32x_1 + 48 = 0$$

$$(5x_1 - 12)(x_1 - 4) = 0$$

$$\therefore x_1 = \frac{12}{5} \text{ 또는 } x_1 = 4$$

⑦에서 $x_1 = \frac{12}{5}$ 일 때 $y_1 = \frac{8}{5}$, $x_1 = 4$ 일 때 $y_1 = 0$ 이므로

로 두 점 A, B의 좌표는

$$\left(\frac{12}{5}, \frac{8}{5}\right), (4, 0)$$

따라서 $\triangle PAB$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{4 + \frac{12}{5} + 4}{3}, \frac{1 + \frac{8}{5} + 0}{3}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{52}{15}, \frac{13}{15}\right)$$

$$\text{답 } \left(\frac{52}{15}, \frac{13}{15}\right)$$

연습 문제

● 본책 66~67쪽

125

전략 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하고 기울기가 m 인 직선의 방정식은 $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ 임을 이용한다.

x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 30° 인 직선의 기울기는 $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

따라서 타원 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 에 접하고 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \pm \sqrt{3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1}$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \pm \sqrt{2}$$

이때 원점과 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{2}$, 즉

$\sqrt{3}x - 3y + 3\sqrt{2} = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3\sqrt{2}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{6}}{2}$$

참고 원점과 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{2}$ 사이의 거리도 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 이다.

126

전략 타원 $Ax^2 + By^2 + C = 0$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은 $Ax_1 x + By_1 y + C = 0$ 임을 이용한다.

점 $(2a, a)$ 가 타원 $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$ 위의 점이므로

$$3 \times (2a)^2 + 4a^2 - 12 = 0$$

$$16a^2 - 12 = 0, \quad a^2 = \frac{3}{4}$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because a > 0)$$

따라서 타원 $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$ 위의 점 $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 에
서의 접선의 방정식은

$$3 \times \sqrt{3}x + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}y - 12 = 0$$

$$\therefore 3x + 2y - 4\sqrt{3} = 0$$

이 직선이 점 $(0, b)$ 를 지나므로

$$2b - 4\sqrt{3} = 0 \quad \therefore b = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore ab = 3$$

답 3

127

전략 두 접선의 방정식을 구한 후 기울기가 서로 같음을 이용한다.

타원 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 위의 점 $(-1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 에서의 접선의
방정식은

$$-\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}y = 1 \quad \therefore y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$$

타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정
식은

$$\frac{ax}{4} + \frac{by}{9} = 1 \quad \therefore y = -\frac{9a}{4b}x + \frac{9}{b}$$

두 직선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$, $y = -\frac{9a}{4b}x + \frac{9}{b}$ 가 평행하

므로 $\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{9a}{4b} \quad \therefore a = -\frac{2\sqrt{2}}{9}b$

또 점 (a, b) 가 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{9} = 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$a = -\frac{2\sqrt{2}}{9}b$ 를 ㉠에 대입하면

$$\frac{2b^2}{81} + \frac{b^2}{9} = 1 \quad \therefore b^2 = \frac{81}{11}$$

즉 ㉠에서 $\frac{a^2}{4} + \frac{9}{11} = 1 \quad \therefore a^2 = \frac{8}{11}$

$$\therefore a^2 + b^2 = \frac{89}{11} \quad \text{답 } \frac{89}{11}$$

128

전략 먼저 접선 l 의 방정식과 두 초점 F, F' 의 좌표를 구한다.

타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 위의 점 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 에서의 접선 l 의
방정식은

$$\frac{x}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1 \quad \therefore x + 2\sqrt{3}y - 4 = 0$$

타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 에서 $\sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ 이므로 두 초점 $F,$

F' 의 좌표는

$$(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$$

$$\therefore \overline{FP} \times \overline{F'Q}$$

$$= \frac{|\sqrt{3}+0-4|}{\sqrt{1^2+(2\sqrt{3})^2}} \times \frac{|-\sqrt{3}+0-4|}{\sqrt{1^2+(2\sqrt{3})^2}}$$

$$= \frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \times \frac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

$$= 1$$

답 1

129

전략 점 P 의 좌표를 (x_1, y_1) 로 놓고 접선의 방정식을 세운 후
이 접선이 점 A 를 지남을 이용한다.

점 P 의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 타원 $2x^2 + 3y^2 = 4$
위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2x_1x + 3y_1y = 4$$

이 직선이 점 $A(a, 0)$ 을 지나므로

$$2ax_1 = 4 \quad \therefore x_1 = \frac{2}{a} \quad \dots\dots ㉠$$

한편 $\overline{AP} = \overline{OP}$ 에서

$$\sqrt{(x_1-a)^2 + y_1^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

양변을 제곱하면

$$x_1^2 - 2ax_1 + a^2 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2$$

$$\therefore 2ax_1 = a^2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $a^2 = 4$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

답 2

130

전략 □ABCD의 넓이가 최대가 되기 위한 두 점 B, D 의 조건
을 생각해 본다.

선분 AC 를 △ABC와 △ACD의 밑변으로 생각할
때, 높이를 각각 h_1, h_2 라 하면

$$\square ABCD = \triangle ABC + \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2} \overline{AC} \times h_1 + \frac{1}{2} \overline{AC} \times h_2$$

$$= \frac{\overline{AC}}{2} (h_1 + h_2)$$

따라서 □ABCD의 넓이가 최대하려면 $h_1 + h_2$ 의 값이 최대이어야 하므로 두 점 B, D에서의 접선이 모두 직선 AC와 평행해야 한다.

이때 직선 AC의 기울기가 1이므로 타원 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{3 \times 1^2 + 1} \quad \therefore y = x \pm 2$$

즉 $h_1 + h_2$ 의 최댓값은 두 직선 $y = x + 2$, $y = x - 2$ 사이의 거리와 같고, 두 직선 $y = x + 2$, $y = x - 2$ 사이의 거리는 직선 $y = x + 2$ 위의 점 $(0, 2)$ 와 직선 $y = x - 2$, 즉 $x - y - 2 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$h_1 + h_2 \leq \frac{|0 - 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

한편 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 에 $y = x - 1$ 을 대입하면

$$\frac{x^2}{3} + (x - 1)^2 = 1, \quad 2x^2 - 3x = 0$$

$$x(2x - 3) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}$$

$y = x - 1$ 에 $x = 0$ 을 대입하면 $y = -1$

$y = x - 1$ 에 $x = \frac{3}{2}$ 을 대입하면 $y = \frac{1}{2}$

즉 $A(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, $C(0, -1)$ 이므로

$$AC = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

따라서 □ABCD의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times 2\sqrt{2} = 3 \quad \text{답 ⑤}$$

131

전략 쌍곡선을 평행이동하면 쌍곡선의 점근선도 평행이동함을 이용하여 타원에 접하는 직선의 방정식을 구한다.

쌍곡선 $\frac{(x-8)^2}{16} - y^2 = 1$ 은 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$ 을 x 축의 방향으로 8만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$ 의 점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{1}{4}x$

이므로 쌍곡선 $\frac{(x-8)^2}{16} - y^2 = 1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{1}{4}(x - 8)$$

$$\therefore y = \frac{1}{4}x - 2, y = -\frac{1}{4}x + 2$$

이때 타원 $\frac{x^2}{k} + y^2 = 1$ 에 접하고 기울기가 $\frac{1}{4}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{4}x \pm \sqrt{k \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1}$$

$$\therefore y = \frac{1}{4}x \pm \sqrt{\frac{k}{16} + 1}$$

따라서 직선 $y = \frac{1}{4}x - \sqrt{\frac{k}{16} + 1}$ 이 직선 $y = \frac{1}{4}x - 2$ 와 일치하므로

$$\sqrt{\frac{k}{16} + 1} = 2, \quad \frac{k}{16} + 1 = 4$$

$$\therefore k = 48$$

답 48

참고 타원에 접하고 기울기가 $-\frac{1}{4}$ 인 직선을 이용하여 k 의 값을 구할 수도 있다.

132

전략 점 P의 좌표를 (x_1, y_1) 로 놓고 두 접선의 방정식을 구한 후 두 접선의 기울기의 곱이 -1 임을 이용한다.

점 P의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 포물선 $y^2 = 2x$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y_1 y = x + x_1 \quad \therefore y = \frac{1}{y_1}x + \frac{x_1}{y_1}$$

타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{k^2} = 1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{16} + \frac{y_1 y}{k^2} = 1 \quad \therefore y = -\frac{k^2 x_1}{16 y_1} x + \frac{k^2}{y_1}$$

두 직선 $y = \frac{1}{y_1}x + \frac{x_1}{y_1}$, $y = -\frac{k^2 x_1}{16 y_1}x + \frac{k^2}{y_1}$ 이 수직이므로

$$\frac{1}{y_1} \times \left(-\frac{k^2 x_1}{16 y_1}\right) = -1$$

$$\therefore k^2 x_1 = 16 y_1^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 $P(x_1, y_1)$ 은 포물선 $y^2 = 2x$ 위의 점이므로

$$y_1^2 = 2x_1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$k^2 x_1 = 16 \times 2x_1, \quad k^2 = 32 \quad (\because x_1 \neq 0)$$

$$\therefore k = 4\sqrt{2} \quad (\because k > 0)$$

답 $4\sqrt{2}$

133

전략 접선의 기울기를 m 으로 놓고 m 에 대한 이차방정식을 세운 후 이 이차방정식의 두 실근의 곱이 -1 임을 이용한다.

접선의 기울기를 m 이라 하면 타원 $2x^2 + y^2 = 6$, 즉

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1 \text{에 접하고 기울기가 } m \text{인 직선의 방정식은}$$

$$y = mx \pm \sqrt{3m^2 + 6}$$

이 직선이 점 $(k, 3)$ 을 지나므로

$$3 = km \pm \sqrt{3m^2 + 6}$$

$$\therefore 3 - km = \pm \sqrt{3m^2 + 6}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$(k^2 - 3)m^2 - 6km + 3 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 두 접선이 수직이므로 m 에 대한 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 실근의 곱은 -1 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{3}{k^2 - 3} = -1, \quad k^2 = 0$$

$$\therefore k = 0$$

답 0

134

전략 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

점 P 의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{16} + \frac{y_1 y}{4} = 1$$

이 직선의 x 절편은 $\frac{16}{x_1}$, y 절편은 $\frac{4}{y_1}$ 이므로 $\triangle OAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{16}{|x_1|} \times \frac{4}{|y_1|} = \frac{32}{|x_1 y_1|}$$

이때 점 $P(x_1, y_1)$ 이 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{4} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\frac{x_1^2}{16} > 0$, $\frac{y_1^2}{4} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x_1^2}{16} \times \frac{y_1^2}{4}} \\ \left(\text{단, 등호는 } \frac{x_1^2}{16} = \frac{y_1^2}{4} \text{ 일 때 성립} \right)$$

$$1 \geq \frac{|x_1 y_1|}{4} \quad (\because \textcircled{1}) \quad \therefore |x_1 y_1| \leq 4$$

따라서 $\frac{32}{|x_1 y_1|} \geq \frac{32}{4} = 8$ 이므로 $\triangle OAB$ 의 넓이의 최솟값은 8이다.

답 8

135

전략 $\triangle SRF'$ 과 $\triangle FQF'$ 이 닮음임을 이용한다.

타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 위의 점 $P(2, 3)$ 에서의 접선 l 의 방정식은

$$\frac{2x}{16} + \frac{3y}{12} = 1 \quad \therefore \frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$$

$$\therefore S(8, 0)$$

또 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 에서 $\sqrt{16 - 12} = 2$ 이므로

$$F(2, 0), F'(-2, 0)$$

$$\therefore \overline{F'F} = 4, \overline{F'S} = 10$$

이때 $\overline{RS} \parallel \overline{QF}$ 에서 $\triangle FQF' \sim \triangle SRF'$ (AA 닮음)이고, 닮음비는

$$\overline{F'F} : \overline{F'S} = 4 : 10 = 2 : 5$$

따라서 $\triangle FQF'$ 과 $\triangle SRF'$ 의 둘레의 길이의 비도 $2 : 5$ 이다.

한편 타원의 정의에 의하여

$$\overline{FQ} + \overline{F'Q} = 2 \times 4 = 8$$

이므로 $\triangle FQF'$ 의 둘레의 길이는

$$\overline{FQ} + \overline{F'Q} + \overline{F'F} = 8 + 4 = 12$$

따라서 $\triangle SRF'$ 의 둘레의 길이는

$$\frac{5}{2} \times 12 = 30$$

답 ①

I-2

03 쌍곡선의 접선의 방정식

● 본책 68~75쪽

136

$$(1) y = -x \pm \sqrt{5 \times (-1)^2 - 4}$$

$$\therefore y = -x \pm 1$$

$$(2) y = \frac{1}{4}x \pm \sqrt{9 - 16 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$\therefore y = \frac{1}{4}x \pm 2\sqrt{2}$$

$$\text{답 (1) } y = -x \pm 1 \quad (2) y = \frac{1}{4}x \pm 2\sqrt{2}$$

137

$$(1) \frac{-4x}{8} - \frac{-\sqrt{2}y}{2} = 1 \quad \therefore y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$$

$$(2) -\frac{2y}{4} = -1 \quad \therefore y = 2$$

$$(3) 2x - y = 3 \quad \therefore y = 2x - 3$$

$$(4) 2 \times (-2x) - 9y = -1 \quad \therefore y = -\frac{4}{9}x + \frac{1}{9}$$

$$\text{답 (1) } y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2} \quad (2) y = 2$$

$$(3) y = 2x - 3 \quad (4) y = -\frac{4}{9}x + \frac{1}{9}$$

138

$$\text{답 } x_1x, y_1y, x_1, -5, -\frac{8}{3}, 0, \frac{5}{6}x + \frac{3}{2}$$

139

x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60° 인 직선의 기울기는 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ 이므로 쌍곡선

$$2x^2 - y^2 - 4 = 0, \text{ 즉 } \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1 \text{에 접하고 기울기가}$$

가 $\sqrt{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \sqrt{3}x \pm \sqrt{2 \times (\sqrt{3})^2 - 4}$$

$$\therefore y = \sqrt{3}x \pm \sqrt{2} \quad \text{답 } y = \sqrt{3}x \pm \sqrt{2}$$

140

쌍곡선 $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{5} = -1$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{5 - a \times 1^2}$$

$$\therefore y = x \pm \sqrt{5 - a}$$

즉 직선 $y = x + \sqrt{5 - a}$ 가 직선 $y = x + 1$ 과 일치하므로

$$\sqrt{5 - a} = 1 \quad \therefore a = 4$$

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = -1$ 에서 $\sqrt{4+5} = 3$ 이므로

두 초점의 좌표는

$$(0, 3), (0, -3)$$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$$3 - (-3) = 6$$

답 6

141

쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 에 접하고 기울기가 3인 직선의

방정식은

$$y = 3x \pm \sqrt{9 \times 3^2 - 16}$$

$$\therefore y = 3x \pm \sqrt{65}$$

따라서 구하는 두 직선 사이의 거리는 직선

$$y = 3x + \sqrt{65} \text{ 위의 점 } (0, \sqrt{65}) \text{와 직선}$$

$$y = 3x - \sqrt{65}, \text{ 즉 } 3x - y - \sqrt{65} = 0 \text{ 사이의 거리와 같}$$

으므로

$$\frac{|0 - \sqrt{65} - \sqrt{65}|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \sqrt{26}$$

답 $\sqrt{26}$

142

쌍곡선 $2x^2 - y^2 = -18$ 위의 점 $(3, -6)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2 \times 3x - (-6)y = -18$$

$$\therefore y = -x - 3$$

이 직선과 수직인 직선의 기울기는 1이므로 기울기가 1이고 점 $(2, 5)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 5 = x - 2 \quad \therefore y = x + 3 \quad \text{답 } y = x + 3$$

143

점 $(2, a)$ 가 쌍곡선 $-x^2 + 2y^2 = 10$ 위의 점이므로

$$-4 + 2a^2 = 10 \quad \therefore a^2 = 7$$

쌍곡선 $-x^2 + 2y^2 = 10$ 위의 점 $(2, a)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-2x + 2ay = 10$$

이 직선이 점 $(b, 0)$ 을 지나므로

$$-2b = 10 \quad \therefore b = -5$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 32$$

답 32

144

쌍곡선 $x^2 - 4y^2 = 12$ 위의 점 $(4, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4x - 4y = 12 \quad \therefore y = x - 3$$

이 직선의 x 절편은 3, y 절편은 -3 이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2} \quad \text{답 } \frac{9}{2}$$

145

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 쌍곡선 $3x^2 - y^2 = -9$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$3x_1x - y_1y = -9$$

이 직선이 점 $(0, \sqrt{3})$ 을 지나므로

$$-\sqrt{3}y_1 = -9 \quad \therefore y_1 = 3\sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 쌍곡선 $3x^2 - y^2 = -9$ 위의 점이므로

$$3x_1^2 - y_1^2 = -9 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦을 ⑧에 대입하면

$$3x_1^2 - 27 = -9, \quad x_1^2 = 6$$

$$\therefore x_1 = -\sqrt{6} \text{ 또는 } x_1 = \sqrt{6}$$

따라서 $x_1 = \sqrt{6}$, $y_1 = 3\sqrt{3}$ 또는 $x_1 = -\sqrt{6}$, $y_1 = 3\sqrt{3}$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$$3\sqrt{6}x - 3\sqrt{3}y = -9, \quad -3\sqrt{6}x - 3\sqrt{3}y = -9$$

$$\therefore y = \sqrt{2}x + \sqrt{3}, \quad y = -\sqrt{2}x + \sqrt{3}$$

$$\text{답 } y = \sqrt{2}x + \sqrt{3}, \quad y = -\sqrt{2}x + \sqrt{3}$$

146

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 쌍곡선 $x^2 - 4y^2 = 4$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x - 4y_1y = 4$$

이 직선이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$x_1 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 쌍곡선 $x^2 - 4y^2 = 4$ 위의 점이므로

$$x_1^2 - 4y_1^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦을 ⑧에 대입하면

$$16 - 4y_1^2 = 4, \quad y_1^2 = 3$$

$$\therefore y_1 = \pm\sqrt{3}$$

따라서 두 점 P, Q의 좌표가 $(4, \sqrt{3})$, $(4, -\sqrt{3})$ 이므로 선분 PQ의 길이는

$$\sqrt{3} - (-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \quad \text{답 } 2\sqrt{3}$$

147

$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{x}{10} - \frac{y}{8} \times \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{4x}{5y} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

점 $(5, -2)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{4 \times 5}{5 \times (-2)} = -2$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y + 2 = -2(x - 5)$$

$$\therefore y = -2x + 8 \quad \text{답 } y = -2x + 8$$

148

$x^2 + 2y^2 = 12$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + 4y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 이 점에서의 접선의

기울기가 $-\frac{x_1}{2y_1}$ 이므로 $-\frac{x_1}{2y_1} = \frac{1}{2}$ 에서

$$y_1 = -x_1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 타원 $x^2 + 2y^2 = 12$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + 2y_1^2 = 12 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦을 ⑧에 대입하면

$$x_1^2 + 2x_1^2 = 12, \quad x_1^2 = 4$$

$$\therefore x_1 = -2 \text{ 또는 } x_1 = 2$$

⑦에서 $x_1 = -2$ 일 때 $y_1 = 2$, $x_1 = 2$ 일 때 $y_1 = -2$ 이

므로 구하는 직선의 방정식은

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x + 2), \quad y + 2 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + 3, \quad y = \frac{1}{2}x - 3$$

$$\text{답 } y = \frac{1}{2}x + 3, \quad y = \frac{1}{2}x - 3$$

149

전략 먼저 주어진 조건을 이용하여 쌍곡선의 방정식을 구한다.

주어진 쌍곡선의 중심이 원점이고 점 $(-6, 0)$ 을 지나므로 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{k^2} = 1$ ($k > 0$)이라 하자.

이때 점근선의 방정식이 $y = \pm \frac{2}{3}x$ 이므로

$$\frac{k}{6} = \frac{2}{3} \quad \therefore k = 4$$

따라서 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$

이 쌍곡선에 접하고 기울기가 $\frac{3}{4}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{3}{4}x \pm \sqrt{36 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 16}$$

$$\therefore y = \frac{3}{4}x \pm \frac{\sqrt{17}}{2} \quad \text{답 } y = \frac{3}{4}x \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$$

150

전략 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하고 기울기가 m 인 직선의 방정식은 $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$ 임을 이용한다.

쌍곡선 $3x^2 - 4y^2 = 12$, 즉 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{4 \times 1^2 - 3}$$

$$\therefore y = x \pm 1$$

한편 포물선 $y^2 = ax$ 의 초점의 좌표는 $\left(\frac{a}{4}, 0\right)$ 이므로

$$\frac{a}{4} + 1 = 0 \quad \text{또는} \quad \frac{a}{4} - 1 = 0$$

$$\therefore a = 4 \quad (\because a > 0) \quad \text{답 } 4$$

151

전략 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$ 임을 이용한다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{a} - \frac{y}{b} = 1 \quad \therefore y = \frac{2b}{a}x - b$$

이 직선의 기울기가 4이므로

$$\frac{2b}{a} = 4 \quad \therefore b = 2a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 $(2, 1)$ 이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{4}{a} - \frac{1}{b} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = \frac{7}{2}, b = 7$

$$\therefore a + b = \frac{21}{2} \quad \text{답 } \frac{21}{2}$$

152

전략 접선이 타원의 넓이를 이등분하려면 타원의 중심을 지나야 함을 이용한다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{ax}{12} - \frac{by}{8} = 1$$

이 직선이 타원 $(x-2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 의 넓이를 이등분하려면 타원의 중심 $(2, 0)$ 을 지나야 하므로

$$\frac{a}{6} = 1 \quad \therefore a = 6$$

또 점 $(6, b)$ 가 쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$ 위의 점이므로

$$3 - \frac{b^2}{8} = 1, \quad b^2 = 16$$

$$\therefore b = -4 \quad (\because b < 0)$$

$$\therefore a - b = 10 \quad \text{답 } 10$$

153

전략 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 로 놓고 접선의 방정식을 세운 후 이 접선이 점 P를 지남을 이용한다.

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 쌍곡선 $x^2 - 3y^2 = 6$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x_1 x - 3y_1 y = 6$$

이 직선이 점 P(0, 2)를 지나므로

$$-6y_1 = 6 \quad \therefore y_1 = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 쌍곡선 $x^2 - 3y^2 = 6$ 위의 점이므로

$$x_1^2 - 3y_1^2 = 6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$x_1^2 - 3 = 6, \quad x_1^2 = 9$$

$$\therefore x_1 = \pm 3$$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 (3, -1), (-3, -1)

이므로 $\triangle PAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$

답 9

154

전략 접선의 방정식과 점근선의 방정식을 구한 후 접선과 점근선의 교점의 좌표를 구한다.

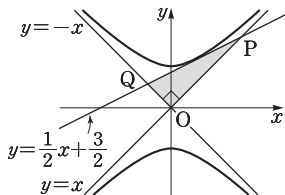
쌍곡선 $x^2 - y^2 = -3$ 위의 점 (1, 2)에서의 접선의 방정식은

$$x - 2y = -3 \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

또 쌍곡선 $x^2 - y^2 = -3$, 즉 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = -1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}x, \text{ 즉 } y = \pm x$$

다음 그림과 같이 직선 $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 과 두 직선 $y = x$, $y = -x$ 의 교점을 각각 P, Q라 하자.



점 P의 x 좌표는 $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = x$ 에서 $x = 3$

$$\therefore P(3, 3)$$

점 Q의 x 좌표는 $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = -x$ 에서 $x = -1$

$$\therefore Q(-1, -1)$$

이때 두 점근선이 수직이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \overline{OP} \times \overline{OQ} \\ &= \frac{1}{2} \times \sqrt{3^2 + 3^2} \times \sqrt{(-1)^2 + 1^2} \\ &= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

답 3

155

전략 타원의 접선과 쌍곡선의 접선의 기울기의 곱이 -1임을 이용한다.

타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 위의 점 $P(\sqrt{2}, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{\sqrt{2}x}{4} + \frac{y}{2} = 1 \quad \therefore y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 2$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(\sqrt{2}, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{\sqrt{2}x}{a^2} - \frac{y}{b^2} = 1 \quad \therefore y = \frac{\sqrt{2}b^2}{a^2}x - b^2$$

이때 두 접선 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 2$, $y = \frac{\sqrt{2}b^2}{a^2}x - b^2$ 이 수직이므로

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}b^2}{a^2} = -1$$

$$\therefore a^2 = b^2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 점 $P(\sqrt{2}, 1)$ 은 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{2}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a^2 = 1$, $b^2 = 1$

따라서 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$ 에서 $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ 이므로 두 초점의 좌표는

$$(\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$$

즉 두 초점 사이의 거리는

$$\sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

답 $2\sqrt{2}$

156

전략 두 점 P, Q에서의 접선의 기울기의 곱이 -1임을 이용한다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 한 점근선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x \text{ 이므로}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2} \quad \therefore a = 2b$$

한편 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 즉 $\frac{x^2}{4b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 직선 $y = 1$ 과 만나는 두 점 중 제1사분면 위의 점을 P, 제2사분면 위의 점을 Q라 하자.

두 점 P, Q는 y 축에 대하여 대칭이므로

$$P(k, 1), Q(-k, 1) \quad (k > 0)$$

이라 하면 점 P($k, 1$)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{kx}{4b^2} - \frac{y}{b^2} = 1 \quad \therefore y = \frac{k}{4}x - b^2$$

또 점 Q($-k, 1$)에서의 접선의 방정식은

$$-\frac{kx}{4b^2} - \frac{y}{b^2} = 1 \quad \therefore y = -\frac{k}{4}x - b^2$$

이때 두 점 P, Q에서의 접선이 수직이므로

$$\frac{k}{4} \times \left(-\frac{k}{4}\right) = -1$$

$$k^2 = 16 \quad \therefore k = 4 \quad (\because k > 0)$$

즉 점 P(4, 1)이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{16}{4b^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \quad \therefore b^2 = 3$$

따라서 $a^2 = (2b)^2 = 4b^2 = 12$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 15 \quad \text{답 ①}$$

157

전략 직선 OH는 원점 O를 지나고 직선 l 과 수직임을 이용하여 직선 OH의 방정식을 구한다.

쌍곡선 $x^2 - y^2 = 15$ 위의 점 (4, 1)에서의 접선 l 의 방정식은

$$4x - y = 15, \text{ 즉 } 4x - y - 15 = 0$$

$$\therefore \overline{OH} = \frac{|0 - 0 - 15|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \frac{15}{\sqrt{17}}$$

한편 직선 $4x - y - 15 = 0$, 즉 $y = 4x - 15$ 에 수직인

직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$ 이므로 직선 OH의 방정식은

$$y = -\frac{1}{4}x$$

이것을 $x^2 - y^2 = 15$ 에 대입하면

$$x^2 - \frac{1}{16}x^2 = 15, \quad x^2 = 16$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 4$$

$x = -4$ 를 $y = -\frac{1}{4}x$ 에 대입하면

$$y = 1$$

따라서 Q(-4, 1)이므로

$$\overline{OQ} = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$\therefore \overline{OH} \times \overline{OQ} = 15 \quad \text{답 15}$$

158

전략 A_1, A_2 를 a, b, k 에 대한 식으로 나타낸다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 P(4, k)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{4x}{a^2} - \frac{ky}{b^2} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

㉠에 $y=0$ 을 대입하면

$$\frac{4x}{a^2} = 1 \quad \therefore x = \frac{a^2}{4}$$

$$\therefore Q\left(\frac{a^2}{4}, 0\right)$$

㉠에 $x=0$ 을 대입하면

$$-\frac{ky}{b^2} = 1 \quad \therefore y = -\frac{b^2}{k}$$

$$\therefore R\left(0, -\frac{b^2}{k}\right)$$

따라서

$$A_1 = \frac{1}{2} \times \frac{a^2}{4} \times \left| -\frac{b^2}{k} \right| = \frac{a^2 b^2}{8k},$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \times k \times 4 = 2k$$

이고 $A_1 : A_2 = 9 : 4$ 이므로

$$\frac{a^2 b^2}{8k} : 2k = 9 : 4$$

$$\frac{a^2 b^2}{2k} = 18k \quad \therefore k^2 = \frac{a^2 b^2}{36} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

한편 점 P(4, k)가 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{16}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉡을 ㉢에 대입하면

$$\frac{16}{a^2} - \frac{a^2}{36} = 1, \quad a^4 + 36a^2 - 576 = 0$$

$$(a^2 + 48)(a^2 - 12) = 0, \quad a^2 = 12 \quad (\because a^2 > 0)$$

$$\therefore |a| = 2\sqrt{3}$$

따라서 구하는 주축의 길이는

$$2|a| = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \quad \text{답 ③}$$

1

공간도형

II. 공간도형과 공간좌표

01

직선과 평면의 위치 관계

● 본책 80~84쪽

159

다섯 개의 점으로 만들 수 있는 서로 다른 평면은

평면 ABC, 평면 ABD, 평면 ABE, 평면 ACD,
평면 ACE, 평면 ADE, 평면 BCD, 평면 BCE,
평면 BDE, 평면 CDE

의 10개이다.

답 10

다른 풀이 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 하나의 평면을 결정하므로 구하는 평면의 개수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$



개념 노트

서로 다른 n 개에서 r ($0 \leq r \leq n$)개를 택하는 조합의 수는

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

160

주어진 사각뿔의 5개의 꼭짓점으로 만들 수 있는 서로 다른 평면은

평면 ABC, 평면 ACD, 평면 ADE, 평면 ABE,
평면 ABD, 평면 ACE, 평면 BCDE

의 7개이다.

답 7

161

ㄱ. 세 점 A, C, G는 한 직선 위에 있지 않으므로 하나의 평면을 결정한다.

ㄴ. 직선 FH와 이 직선 위에 있지 않은 한 점 A는 하나의 평면을 결정한다.

ㄷ. 두 직선 BD, GH는 꼬인 위치에 있으므로 하나의 평면을 결정할 수 없다.

ㄹ. 두 직선 BF, DH는 평행하므로 하나의 평면을 결정한다.

이상에서 하나의 평면을 결정할 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

162

답 직선 AB, 직선 AD, 직선 BF, 직선 DH,
직선 FG, 직선 HG

163

모서리 BF와 평행한 모서리는 모서리 AD의 1개이므로 $a=1$

모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리는

모서리 CD, 모서리 DE, 모서리 CF, 모서리 EF

의 4개이므로 $b=4$

평면 ABE와 평행한 평면은 평면 CFD의 1개이므로

$c=1$

평면 ABC와 평행한 모서리는

모서리 DE, 모서리 DF, 모서리 EF

의 3개이므로 $d=3$

$\therefore a+b+c+d=9$

답 9

02

직선과 평면의 평행

● 본책 85~87쪽

164

삼각형 ABC에서 두 점 P, Q는 각각 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 의 중점이고, 삼각형 ACD에서 두 점 S, R는 각각 $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ 의 중점이므로

$$\overline{PQ} = \overline{SR} = \frac{1}{2} \overline{AC} = 5$$

또 삼각형 BCD에서 두 점 Q, R는 각각 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ 의 중점이고, 삼각형 ABD에서 두 점 P, S는 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ 의 중점이므로

$$\overline{QR} = \overline{PS} = \frac{1}{2} \overline{BD} = 4$$

따라서 사각형 PQRS의 둘레의 길이는

$$\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RS} + \overline{SP} = 5 + 4 + 5 + 4 = 18$$

답 18

165

삼각형 ABD에서 두 점 E, H는 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ 의 중점이고, 삼각형 BCD에서 두 점 F, G는 각각 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ 의 중점이므로

$$\overline{EH} = \overline{FG} = \frac{1}{2} \overline{BD} = 5$$

또 삼각형 ABC에서 두 점 E, F는 각각 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 의 중점이고, 삼각형 ADC에서 두 점 H, G는 각각 $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ 의 중점이므로

$$\overline{EF} = \overline{HG} = \frac{1}{2} \overline{AC} = 6$$

따라서 사각형 EFGH의 둘레의 길이는

$$\overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GH} + \overline{HE} = 6 + 5 + 6 + 5 = 22$$

답 22

03 직선과 평면의 수직

● 본책 88~91쪽

166

사각형 ABCD는 정사각형이므로 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$
또 $\overline{AC} \perp \overline{AE}$, $\overline{AE} \parallel \overline{BF}$ 이므로 $\overline{AC} \perp \overline{BF}$
즉 $\overline{AC}$ 는 평면 BFHD 위의 평행하지 않은 두 선분 BD, BF와 각각 수직이므로

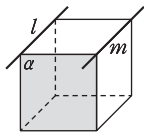
$$\overline{AC} \perp (\text{평면 BFHD})$$

답 풀이 참조

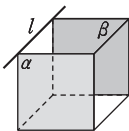
167

ㄱ. 오른쪽 그림의 정육면체에서

$l \perp \alpha$ 이고 $m \perp \alpha$ 이면 $l \parallel m$ 이다. (참)

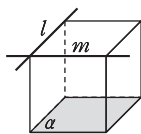


ㄴ. 오른쪽 그림의 정육면체에서 $l \perp \alpha$ 이고 $l \perp \beta$ 이면 $\alpha \parallel \beta$ 이다. (참)



ㄷ. [반례] 오른쪽 그림의 정육면체에서 $l \parallel \alpha$ 이고 $m \parallel \alpha$ 이지만 두 직선 l, m은 한 점에서 만난다.

(거짓)



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

168

(1) $\overline{BG} \parallel \overline{AH}$ 이므로 직선 AF와 직선 BG가 이루는 각의 크기는 직선 AF와 직선 AH가 이루는 각의 크기와 같다.

이때 $\overline{AF} = \overline{AH} = \overline{HF}$ 에서 삼각형 AFH는 정삼각형이므로

$$\angle FAH = 60^\circ$$

따라서 직선 AF와 직선 BG가 이루는 각의 크기는 60° 이다.

(2) $\overline{AB} \perp (\text{평면 BFGC})$ 이므로 $\overline{AB} \perp \overline{CF}$

또 $\overline{BG}$, $\overline{CF}$ 는 정사각형 BFGC의 두 대각선이므로 $\overline{CF} \perp \overline{BG}$

즉 $\overline{CF} \perp (\text{평면 ABG})$ 이므로

$$\overline{CF} \perp \overline{AG}$$

따라서 직선 AG와 직선 CF가 이루는 각의 크기는 90° 이다.

답 (1) 60° (2) 90°

다른 풀이 (2) 오른쪽 그림과

같이 합동인 두 정육면체를 나란히 붙이면

$\overline{CF} \parallel \overline{C'G}$ 이므로 직선 AG와 직선 CF가 이루는 각의 크기는 직선

AG와 직선 $C'G$ 가 이루는 각의 크기와 같다.

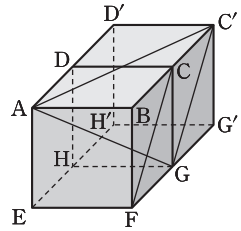
정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

$$\overline{AG} = \sqrt{3}a, \overline{C'G} = \sqrt{2}a, \overline{AC'} = \sqrt{5}a$$

$$\text{이므로 } \overline{AC'}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{C'G}^2$$

즉 삼각형 AGC' 은 $\angle AGC' = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

따라서 직선 AG와 직선 CF가 이루는 각의 크기는 90° 이다.



169

$\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ 이므로 직선 AF와 직선 BC가 이루는 각의 크기는 직선 AF와 직선 EF가 이루는 각의 크기와 같다.

$$\therefore \angle AFE = \theta$$

삼각기둥의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

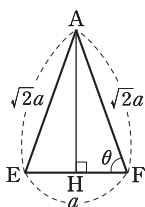
$$\overline{AF} = \overline{AE} = \sqrt{2}a, \overline{EF} = a$$

오른쪽 그림과 같이 $\triangle AEF$ 의 점 A에서 $\overline{EF}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{HF} = \frac{1}{2} \overline{EF} = \frac{1}{2}a$$

따라서 직각삼각형 AHF에서

$$\cos \theta = \frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$



답 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

연습문제

● 본책 92~93쪽

170

전략 공간에서 만나지도 않고 평행하지도 않은 두 직선을 찾는다.

ㄱ. 직선 AD와 직선 BC는 만나지도 않고 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.

ㄴ. 직선 CD와 직선 BQ는 만나지도 않고 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.

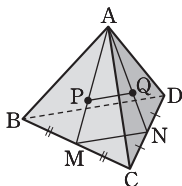
ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AP}$ 의 연장선과 $\overline{BC}$ 의 교점을 M, $\overline{AQ}$ 의 연장선과 $\overline{CD}$ 의 교점을 N이라 하면 두 점 P, Q는 각각 두 삼각형 ABC, ACD의 무게중심이므로

$$\overline{PQ} \parallel \overline{MN}, \overline{MN} \parallel \overline{BD}$$

$$\therefore \overline{PQ} \parallel \overline{BD}$$

이상에서 꼬인 위치에 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

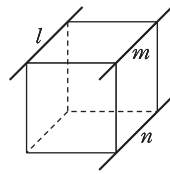
답 ㄱ, ㄴ



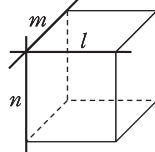
171

전략 정육면체를 이용하여 반례를 찾아본다.

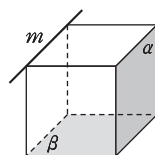
ㄱ. 오른쪽 그림의 정육면체에서 $l \parallel m$ 이고 $m \parallel n$ 이면 $l \parallel n$ 이다. (참)



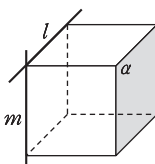
ㄴ. [반례] 오른쪽 그림의 정육면체에서 $l \perp m$ 이고 $m \perp n$ 이지만 두 직선 l, n 은 한 점에서 만난다. (거짓)



ㄷ. [반례] 오른쪽 그림의 정육면체에서 $m \parallel \alpha$ 이고 $m \parallel \beta$ 이지만 두 평면 α, β 는 만난다. (거짓)



ㄹ. [반례] 오른쪽 그림의 정육면체에서 $l \perp m$ 이고 $m \parallel \alpha$ 이지만 $l \parallel \alpha$ 이다. (거짓)



이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

172

전략 직선 AD와 평행하고 직선 CF와 한 점에서 만나는 직선을 찾는다.

$\square ABFD$ 가 평행사변형이므로 $\overline{AD} \parallel \overline{BF}$

따라서 직선 AD와 직선 CF가 이루는 각의 크기는 직선 BF와 직선 CF가 이루는 각의 크기와 같다.

이때 삼각형 BFC는 정삼각형이므로

$$\angle BFC = 60^\circ$$

따라서 직선 AD와 직선 CF가 이루는 각의 크기는 60° 이다.

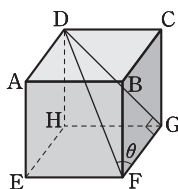
답 60°

173

전략 직선 HE와 평행하고 직선 DF와 한 점에서 만나는 직선을 찾는다.

$\overline{HE} \parallel \overline{GF}$ 이므로 직선 DF와 직선 HE가 이루는 각의 크기는 직선 DF와 직선 GF가 이루는 각의 크기와 같다.

$$\therefore \angle DFG = \theta$$



이때 $\overline{GF} \perp$ (평면 DHGC)이므로 $\overline{GF} \perp \overline{DG}$
정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

$$\overline{DF} = \sqrt{3}a$$

이므로 직각삼각형 DFG에서

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{3}}{3}$$

174

전략 평면의 결정 조건을 이용한다.

(i) 평행한 두 직선으로 만들 수 있는 서로 다른 평면은

평면 ABCD, 평면 EFGH, 평면 AEFB,
평면 DHGC, 평면 BFGC, 평면 AEHD,
평면 ABGH, 평면 BCHE, 평면 CDEF,
평면 DAFG, 평면 AEGC, 평면 BFHD
의 12개

(ii) 어느 두 점도 한 모서리 위에 있지 않은 세 점으로
만들 수 있는 서로 다른 평면은

평면 ACF, 평면 ACH, 평면 BDE,
평면 BDG, 평면 EGB, 평면 EGD,
평면 HFA, 평면 HFC의 8개

(i), (ii)에서 만들 수 있는 서로 다른 평면의 개수는

$$12 + 8 = 20 \quad \text{답 } 20$$

175

전략 $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$ 이라 하고 $\overline{PQ}$, $\overline{PS}$ 의 길이를 각각 m , n 에 대한 식으로 나타낸다.

$\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$, $\overline{SR} \parallel \overline{AC}$ 이므로

$$\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$$

$\overline{PS} \parallel \overline{BD}$, $\overline{QR} \parallel \overline{BD}$ 이므로

$$\overline{PS} \parallel \overline{QR}$$

즉 사각형 PQRS는 평행사변형이다.

$\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$ 이라 하면

$\triangle PBQ \sim \triangle ABC$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{PQ} : \overline{AC} = \overline{PB} : \overline{AB} = n : (m+n)$$

$$\therefore \overline{PQ} = \frac{n}{m+n} \overline{AC} = \frac{5n}{m+n}$$

또 $\triangle APS \sim \triangle ABD$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{PS} : \overline{BD} = \overline{AP} : \overline{AB} = m : (m+n)$$

$$\therefore \overline{PS} = \frac{m}{m+n} \overline{BD} = \frac{5m}{m+n}$$

따라서 사각형 PQRS의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} 2(\overline{PQ} + \overline{PS}) &= 2 \times \left(\frac{5n}{m+n} + \frac{5m}{m+n} \right) \\ &= 2 \times \frac{5(m+n)}{m+n} \\ &= 10 \end{aligned}$$

답 10

176

전략 직선 FH와 평행하고 직선 EM과 한 점에서 만나는 직선을 찾는다.

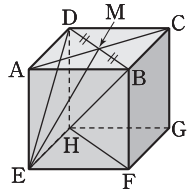
$\overline{FH} \parallel \overline{BD}$ 이므로 직선 FH와 직
선 EM이 이루는 각의 크기는 직
선 BD와 직선 EM이 이루는 각
의 크기와 같다.

이때 $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{BE}$ 이므로 삼
각형 BDE는 정삼각형이다.

또 점 M은 $\overline{BD}$ 의 중점이므로

$$\overline{EM} \perp \overline{BD}$$

따라서 직선 FH와 직선 EM이 이루는 각의 크기는
 90° 이다. 답 90°



177

전략 두 모서리 AB, CD와 각각 수직인 선분을 생각한다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$
의 중점을 각각 M, N이라 하
면 두 삼각형 ACD, BCD는
정삼각형이므로

$$\overline{AN} \perp \overline{CD}, \overline{BN} \perp \overline{CD}$$

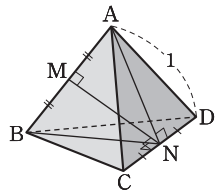
따라서 (평면 ABN) $\perp \overline{CD}$ 이므로

$$\overline{MN} \perp \overline{CD}$$

같은 방법으로 하면

$$\overline{AB} \perp \overline{MN}$$

즉 두 모서리 AB, CD 사이의 거리는 선분 MN의 길
이와 같다.



이때 직각삼각형 AMN에서 $\overline{AM} = \frac{1}{2}$, $\overline{AN} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
이므로

$$\overline{MN} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

178

전략 점 P가 $\overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 의 교점임을 이용한다.

$\overline{GC} \perp$ (평면 BCD)이므로

$$\overline{BD} \perp \overline{GC}$$

또 $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ 이므로

$$\overline{BD} \perp$$
 (평면 AGC)

이때 $\overline{BD} \perp \overline{PQ}$ 이므로 $\overline{PQ}$ 는 평면 AGC에 속한다.

따라서 점 P는 두 대각선 AC, BD의 교점이므로

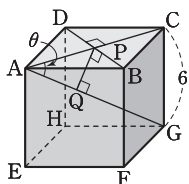
$$\overline{AP} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

한편 $\angle CAG = \theta$ 라 하면 $\overline{AG} = 6\sqrt{3}$ 이므로 직각삼각형 AGC에서

$$\sin \theta = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 직각삼각형 AQP에서

$$\overline{PQ} = \overline{AP} \sin \theta = 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{6} \quad \text{답 } \sqrt{6}$$



따라서 직각삼각형 PAH에서

$$\overline{PA} = \sqrt{(\sqrt{7})^2 + 5^2} = 4\sqrt{2} \quad \text{답 } 4\sqrt{2}$$

180

$\overline{PO} \perp \alpha$ 이고 $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ 이므로

로 삼수선 정리에 의하여

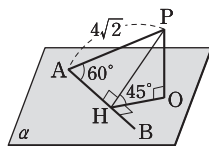
$$\overline{PH} \perp \overline{AB}$$

즉 직각삼각형 PAH에서

$$\begin{aligned} \overline{PH} &= \overline{PA} \sin 60^\circ \\ &= 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

따라서 직각삼각형 PHO에서

$$\begin{aligned} \overline{OH} &= \overline{PH} \cos 45^\circ \\ &= 2\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{3} \quad \text{답 } 2\sqrt{3} \end{aligned}$$



181

$\overline{CF} \perp$ (평면 DEF), $\overline{CH} \perp \overline{DE}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{FH} \perp \overline{DE}$$

이때 직각삼각형 DEF에서

$$\overline{DE} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

이고 $\frac{1}{2} \times \overline{DF} \times \overline{EF} = \frac{1}{2} \times \overline{DE} \times \overline{FH}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times \overline{FH} \quad \therefore \overline{FH} = \frac{12}{5}$$

따라서 직각삼각형 CHF에서

$$\overline{CH} = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + 1^2} = \frac{13}{5} \quad \text{답 } \frac{13}{5}$$

182

$\overline{DH} \perp$ (평면 EFGH), $\overline{DI} \perp \overline{EG}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

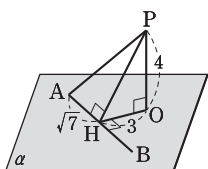
$$\overline{HI} \perp \overline{EG}$$

이때 직각삼각형 EGH에서

$$\overline{EG} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

이고 $\frac{1}{2} \times \overline{EH} \times \overline{HG} = \frac{1}{2} \times \overline{EG} \times \overline{HI}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \overline{HI} \quad \therefore \overline{HI} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$



04 삼수선 정리

● 본책 94~96쪽

179

오른쪽 그림과 같이 선분 PH를 그으면 직각삼각형 PHO에서 $\overline{PH} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
이때 $\overline{PO} \perp \alpha$ 이고 $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{PH} \perp \overline{AB}$$

따라서 직각삼각형 DHI에서

$$\overline{DI} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\overline{DH}}{\overline{DI}} = \frac{1}{\frac{3\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{5}}{3}$$

05 이면각

● 본책 97~99쪽

183

오른쪽 그림과 같이 $\overline{EG}$ 와 $\overline{FH}$ 의 교점을 M이라 하면

$$\overline{DM} \perp \overline{EG}, \overline{HM} \perp \overline{EG}$$

따라서 평면 DEG와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기는 $\overline{DM}$ 과 $\overline{HM}$ 이 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\angle DMH = \theta$$

이때

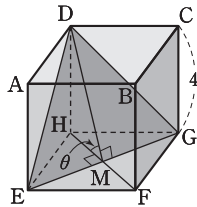
$$\overline{HM} = \frac{1}{2} \overline{HF} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

이므로 직각삼각형 DHM에서

$$\overline{DM} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{6}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{HM}}{\overline{DM}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$



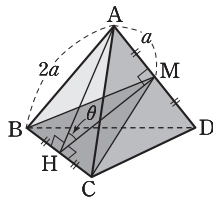
184

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$ 의 중점을 H라 하면

$$\overline{AH} \perp \overline{BC}, \overline{MH} \perp \overline{BC}$$

따라서 평면 ABC와 평면 MBC가 이루는 각의 크기는 $\overline{AH}$ 와 $\overline{MH}$ 가 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\angle AHM = \theta$$



이때 정사면체의 한 모서리의 길이를 $2a$ 라 하면

$$\overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a = \sqrt{3}a$$

또 $\triangle AHD$ 가 $\overline{AH} = \overline{DH}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\overline{AD} \perp \overline{HM}$$

$\overline{AM} = a$ 이므로 직각삼각형 AHM에서

$$\overline{MH} = \sqrt{(\sqrt{3}a)^2 - a^2} = \sqrt{2}a$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{MH}}{\overline{AH}} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{6}}{3}$$

185

오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 점 O를 지나고 직선 m 에 수직인 직선 OB를 그으면

$$\overline{AO} \perp m, \overline{BO} \perp m$$

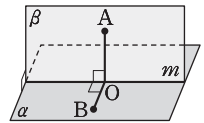
따라서 두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기는 $\angle AOB$ 의 크기와 같다.

그런데 $\alpha \perp \beta$ 이므로 $\overline{AO} \perp \overline{BO}$

따라서 직선 AO는 평면 α 위의 두 직선 m, OB 와 각각 수직이므로

$$\overline{AO} \perp \alpha$$

답 풀이 참조



186

ㄱ. [반례] 오른쪽 그림의 정육면체에 $l \parallel \alpha$ 이고 $\alpha \perp \beta$ 이지만 직선 l 은 평면 β 와 만난다. (거짓)

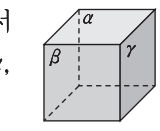
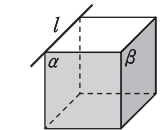
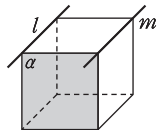
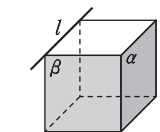
ㄴ. 오른쪽 그림의 정육면체에서 $l \perp \alpha$ 이고 $l \parallel m$ 이면 $m \perp \alpha$ 이다. (참)

ㄷ. 오른쪽 그림의 정육면체에서 $l \perp \alpha$ 이고 $l \parallel \beta$ 이면 $\alpha \perp \beta$ 이다. (참)

ㄹ. [반례] 오른쪽 그림의 정육면체에서 $\alpha \perp \gamma$ 이고 $\beta \perp \gamma$ 이지만 두 평면 α, β 는 만난다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ



연습문제

● 본책 100~101쪽

187

전략 삼수선 정리를 이용하여 $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$ 임을 파악한다.

$\overline{PO} \perp \alpha$ 이고 $\overline{OQ} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{PQ} \perp \overline{AB}$$

따라서 직각삼각형 PAQ에서

$$\overline{PQ} = \sqrt{14^2 - (4\sqrt{6})^2} = 10$$

이므로 직각삼각형 PQO에서

$$\overline{OQ} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad \text{답 } \frac{3}{5}$$

188

전략 삼수선 정리를 이용하여 $\overline{HI} \perp \overline{MG}$ 임을 파악하고 삼각형 HMG의 넓이에서 선분 HI의 길이를 구한다.

$\overline{DH} \perp (\text{평면 EFGH}),$

$\overline{DI} \perp \overline{MG}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{HI} \perp \overline{MG}$$

이때 $\overline{MF} = 2$ 이므로 직각삼각형 GMF에서

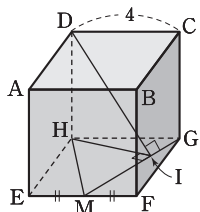
$$\overline{GM} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

삼각형 HMG에서 $\frac{1}{2} \times \overline{HG} \times \overline{GF} = \frac{1}{2} \times \overline{GM} \times \overline{HI}$

이므로

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \overline{HI}$$

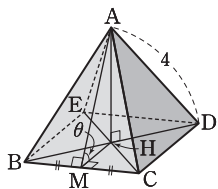
$$\therefore \overline{HI} = \frac{8\sqrt{5}}{5} \quad \text{답 } \frac{8\sqrt{5}}{5}$$



189

전략 점 A에서 밑면과 선분 BC에 각각 수선의 발을 내려 삼수선 정리를 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 밑면에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하면



$\overline{AH} \perp (\text{평면 BCDE}), \overline{AM} \perp \overline{BC}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{HM} \perp \overline{BC}$$

따라서 평면 ABC와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기는 $\overline{AM}$ 과 $\overline{HM}$ 이 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\angle AMH = \theta$$

이때 정삼각형 ABC에서 점 M은 $\overline{BC}$ 의 중점이므로

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

또 $\overline{MH} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ 이므로 직각삼각형 AMH에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{MH}}{\overline{AM}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{3}}{3}$$

참고 점 H는 밑면의 두 대각선 BD, CE의 교점이다.

190

전략 두 평면이 이루는 각의 크기는 두 평면의 교선 위에 한 점을 지나고 교선과 수직인 두 직선이 이루는 각의 크기와 같음을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 의 교점을 M이라 하면

$$\overline{AM} \perp \overline{BD}, \overline{EM} \perp \overline{BD}$$

따라서 평면 ABCD와 평면 BDE가 이루는 각의 크기는

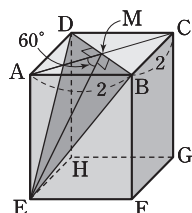
$\overline{AM}$ 과 $\overline{EM}$ 이 이루는 각의 크기와 같으므로 $\angle AME = 60^\circ$

이때 $\overline{AB} = \overline{BC} = 2$ 이므로

$$\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

따라서 직각삼각형 AEM에서

$$\overline{AE} = \overline{AM} \tan 60^\circ = \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6} \quad \text{답 } \sqrt{6}$$

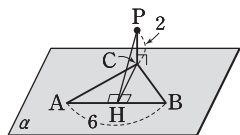


191

전략 삼수선 정리와 피타고라스 정리를 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABC의 넓이가 12이므로

$$\frac{1}{2} \times 6 \times \overline{CH} = 12 \quad \therefore \overline{CH} = 4$$



$\overline{PC} \perp \alpha$ 이고 $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{PH} \perp \overline{AB}$$

따라서 점 P와 $\overline{AB}$ 사이의 거리는 $\overline{PH}$ 의 길이와 같다.

이때 직각삼각형 PHC에서

$$\overline{PH} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

이므로 구하는 거리는 $2\sqrt{5}$ 이다.

답 ②

192

전략 점 O에서 $\overline{AB}$ 에 수선을 그은 후 삼수선 정리를 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 O에

서 $\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 H라

하면 $\overline{CO} \perp$ (평면 OAB),

$\overline{OH} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선 정리에

의하여 $\overline{CH} \perp \overline{AB}$

이때 직각삼각형 OAB에서

$$\overline{AB} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

이고 $\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OH}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{1}{2} \times 2 \times \overline{OH} \quad \therefore \overline{OH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

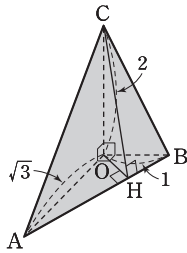
따라서 직각삼각형 COH에서

$$\overline{CH} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CH} = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{19}}{2} = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{19}}{2}$



193

전략 점 A에서 밑면에 수선의 발을 내린 다음 삼수선 정리를 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 점 A에

서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을

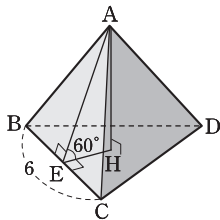
E라 하고, 점 A에서 밑면에

내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH} \perp$ (평면 BCD),

$\overline{AE} \perp \overline{BC}$

이므로 삼수선 정리에 의하여 $\overline{HE} \perp \overline{BC}$



따라서 평면 ABC와 평면 BCD가 이루는 각의 크기는 $\overline{AE}$ 와 $\overline{HE}$ 가 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\angle AEH = 60^\circ$$

한편 삼각형 ABC의 넓이가 18이므로

$$\frac{1}{2} \times 6 \times \overline{AE} = 18 \quad \therefore \overline{AE} = 6$$

따라서 직각삼각형 AEH에서

$$\overline{AH} = \overline{AE} \sin 60^\circ$$

$$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

이므로 사면체의 부피는

$$\frac{1}{3} \times \triangle BCD \times \overline{AH} = \frac{1}{3} \times 15 \times 3\sqrt{3} = 15\sqrt{3}$$

답 $15\sqrt{3}$

194

전략 수선을 그어 삼수선 정리를 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 직선

m 위의 점 A에서 직선 l

에 내린 수선의 발을 B라

하고, 점 B에서 직선 n 에

내린 수선의 발을 C라 하

면 $\overline{AB} \perp \beta$, $\overline{BC} \perp n$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{AC} \perp n$$

이때 두 직선 m , n 이 이루는 각의 크기는 $\angle APC$ 의

크기와 같으므로 $\angle APC = \theta$

한편 $\overline{PA} = a$ 라 하면 직각삼각형 APB에서

$$\overline{PB} = \overline{PA} \cos 60^\circ = \frac{1}{2}a$$

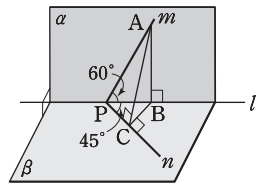
또 직각삼각형 BPC에서

$$\begin{aligned} \overline{PC} &= \overline{PB} \cos 45^\circ \\ &= \frac{1}{2}a \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}a \end{aligned}$$

따라서 직각삼각형 APC에서

$$\cos \theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}a}{a} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{4}$



195

전략 삼각형의 넓이와 삼수선 정리를 이용한다.

202

잘린 단면의 평면 EFGH 위로의 정사영은 정사각형 EFGH이다.

이때 잘린 단면의 넓이를 S라 하면 정사각형 EFGH의 넓이는 $6 \times 6 = 36$ 이므로

$$S \cos 45^\circ = 36, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} S = 36$$

$$\therefore S = 36\sqrt{2} \quad \text{답 } 36\sqrt{2}$$

203

삼각형 AFC의 평면 EFGH 위로의 정사영은 삼각형 EFG이므로

$$\cos \theta = \frac{\triangle EFG}{\triangle AFC}$$

이때 $\overline{FA} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, $\overline{FC} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, $\overline{AC} = 2\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 AFC는 $\overline{FA} = \overline{FC}$ 인 이등변삼각형이다.

오른쪽 그림과 같이 점 F에서 $\overline{AC}$ 에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\overline{AM} = \overline{CM} = \sqrt{2}$ 이므로 직각삼각형 FAM에서

$$\overline{FM} = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{11}$$

$$\therefore \triangle AFC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{11} = \sqrt{22}$$

또 $\triangle EFG = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{22}} = \frac{\sqrt{22}}{11} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{22}}{11}$$

204

삼각형 CEK의 평면 EFGH 위로의 정사영은 삼각형 GEF이므로

$$\cos \theta = \frac{\triangle GEF}{\triangle CEK}$$

이때 $\overline{KE} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $\overline{KC} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $\overline{CE} = 2\sqrt{3}$ 이므로 삼각형 CEK는 $\overline{KE} = \overline{KC}$ 인 이등변삼각형이다.

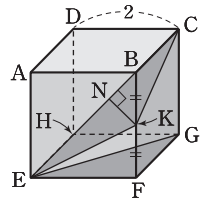
오른쪽 그림과 같이 점 K에서 $\overline{CE}$ 에 내린 수선의 발을 N이라 하면 $\overline{EN} = \overline{CN} = \sqrt{3}$ 이므로 직각삼각형 EKN에서

$$\overline{KN} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \triangle CEK = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$$

또 $\triangle GEF = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{6}}{3}$$



연습 문제

● 본책 109~111쪽

205

전략 직선 DF와 그 정사영이 이루는 각의 크기가 θ 임을 이용한다. 점 F에서 평면 AEHD에 내린 수선의 발은 점 E이므로 $\overline{DE}$ 의 평면 AEHD 위로의 정사영은 $\overline{DE}$ 이다. 즉 직선 DF와 평면 AEHD가 이루는 각의 크기는 $\overline{DE}$, $\overline{DF}$ 가 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\angle FDE = \theta$$

이때 정육면체의 한 모서리의 길이가 2이므로

$$\overline{DE} = 2\sqrt{2}, \quad \overline{DF} = 2\sqrt{3}$$

따라서 직각삼각형 DEF에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{6}}{3}$$

206

전략 직선 AB와 평면 β 가 이루는 각의 크기는 30° 이고 직선 BC는 평면 β 와 평행함을 이용하여 $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ 의 길이를 구한다.

직선 AB와 평면 β 가 이루는 각의 크기가 30° 이므로

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 30^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

직선 BC와 평면 β 는 평행하므로

$$\overline{B'C'} = \overline{BC} = 6$$

따라서 사각형 A'B'C'D'의 둘레의 길이는

$$2 \times (3\sqrt{3} + 6) = 6\sqrt{3} + 12 \quad \text{답 } 6\sqrt{3} + 12$$

207

전략 먼저 $\triangle OAB$ 의 평면 ABCD 위로의 정사영을 찾는다.

오른쪽 그림과 같이 점 O에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 OAB의 평면 ABCD 위로의 정사영은 삼각형 HAB

이므로 $\triangle HAB = \triangle OAB \cos 45^\circ$

이때 점 H는 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이

$$\text{므로 } \triangle HAB = \frac{1}{4} \times 2 \times 2 = 1$$

한편 점 O에서 $\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$$\overline{AM} = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \text{ 이므로 직각삼각형 OAM에서}$$

$$\overline{OM} = \sqrt{a^2 - 1}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{a^2 - 1} = \sqrt{a^2 - 1}$$

$$\text{즉 } 1 = \sqrt{a^2 - 1} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{a^2 - 1} = \sqrt{2}, \quad a^2 = 3$$

$$\therefore a = \sqrt{3} \quad (\because a > 0)$$

답 $\sqrt{3}$

208

전략 평면 AEFB와 평면 NEFM이 이루는 각의 크기를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ 의 중점을 각각 P, Q라 하고 평면 AEFB와 평면 NEFM이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

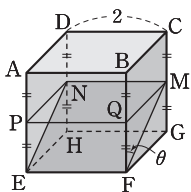
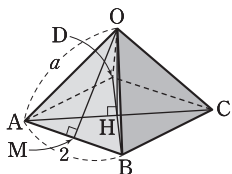
$$\angle MFQ = \theta$$

$\overline{MF} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, $\overline{QF} = 1$ 이므로 직각삼각형 MQF에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{QF}}{\overline{MF}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

이때 $\square AEFB = 2 \times 2 = 4$ 이므로 구하는 정사영의 넓이는

$$\square AEFB \cos \theta = 4 \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \quad \text{답 } \frac{4\sqrt{5}}{5}$$



209

전략 그림자의 정사영이 구의 중심을 지나는 단면인 원임을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 애드벌룬이 지면과 접하도록 이동시킨 후 태양 광선과 수직이고 애드벌룬의 중심을 지나는 평면을 α 라 하면

평면 α 와 지면이 이루는 각의 크기는

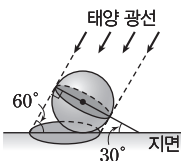
$$180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$$

이때 그림자의 평면 α 위로의 정사영이 애드벌룬의 중심을 지나는 단면인 원이므로 애드벌룬의 반지름의 길이를 r m라 하면

$$6\sqrt{3}\pi \cos 30^\circ = \pi r^2, \quad 6\sqrt{3}\pi \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi r^2$$

$$r^2 = 9 \quad \therefore r = 3 \quad (\because r > 0)$$

따라서 구하는 반지름의 길이는 3 m이다. **답** 3 m



210

전략 선분 BD의 평면 AHGB 위로의 정사영을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 정육면체의 한 모서리의 길이를 a , $\overline{AH}$ 의 중점을 K라 하면

$$\overline{DK} \perp \overline{AH} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $\overline{AB} \perp$ (평면 AEHD)이므로

$$\overline{DK} \perp \overline{AB} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

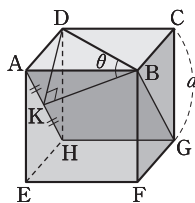
$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 $\overline{DK} \perp$ (평면 AHGB)

따라서 $\overline{BD}$ 의 평면 AHGB 위로의 정사영은 $\overline{BK}$ 이므로 $\angle DBK = \theta$

이때 직각삼각형 BDK에서

$$\overline{BD} = \sqrt{2}a, \quad \overline{DK} = \frac{1}{2} \overline{DE} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\text{이므로 } \sin \theta = \frac{\overline{DK}}{\overline{BD}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{2} \quad \text{답 } \frac{1}{2}$$



211

전략 타원의 장축과 단축의 밑면으로의 정사영은 각각 밑면의 지름임을 이용한다.

타원의 장축의 길이를 $2a$ 라 하면 타원의 장축과 원기둥의 밑면이 이루는 각의 크기는 30° 이고 타원의 장축의 밑면 위로의 정사영은 밑면의 지름이므로

$$12 = 2a \cos 30^\circ, \quad 12 = 2a \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore a = 4\sqrt{3}$$

또 타원의 단축의 길이를 $2b$ 라 하면 타원의 단축과 원기둥의 밑면은 평행하고 타원의 단축의 밑면 위로의 정사영은 밑면의 지름이므로

$$2b = 12 \quad \therefore b = 6$$

이때 $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 6^2} = 2\sqrt{3}$ 이므로 타원의 두 초점 사이의 거리는

$$2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \quad \text{답 } 4\sqrt{3}$$

212

전략 $\overline{BC}$ 의 중점을 H 라 하면 평면 BCM 과 평면 BCD 가 이루는 각의 크기는 $\angle MHD$ 의 크기와 같음을 이용한다.

$\overline{BM}$, $\overline{CM}$ 은 각각 두 정삼각형 ABD , ACD 의 높이이므로

$$\overline{BM} = \overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$$

즉 $\triangle MBC$ 는 $\overline{BM} = \overline{CM}$ 인 이등변삼각형이므로 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$ 의 중점을 H 라 하면 $\overline{MH} \perp \overline{BC}$

또 $\triangle BCD$ 는 정삼각형이므로 $\overline{DH} \perp \overline{BC}$

따라서 평면 BCM 과 평면 BCD 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

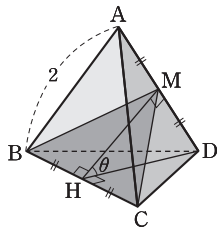
$$\angle MHD = \theta$$

한편 $\triangle AHD$ 는 $\overline{AH} = \overline{DH}$ 인 이등변삼각형이므로 $\overline{HM} \perp \overline{AD}$

이때 $\overline{DH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$, $\overline{DM} = 1$ 이므로 직각삼각형 MHD 에서

$$\overline{MH} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{MH}}{\overline{DH}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$



$\triangle BCM = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$ 이므로 구하는 정사영의 넓이는

$$\triangle BCM \cos \theta = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{답 } \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

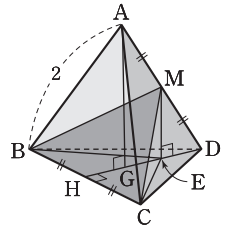
다른 풀이 오른쪽 그림과 같이

$\overline{BC}$ 의 중점을 H , 점 A 와 점 M 의 평면 BCD 위로의 정사영을 각각 G , E 라 하면 점 G 는 삼각형 BCD 의 무게중심이고 점 E 는 선분 DG 의 중점이다.

$$\begin{aligned} \therefore \overline{EH} &= \frac{2}{3} \overline{DH} \\ &= \frac{2}{3} \times \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

이때 삼각형 BCM 의 평면 BCD 위로의 정사영은 삼각형 BCE 이므로 구하는 넓이는

$$\triangle BCE = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



213

전략 삼수선 정리를 이용하여 평면 GHF 와 평면 PHF 가 이루는 각의 크기를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 점 G 에서 $\overline{HF}$ 에 내린 수선의 발을 M 이라 하면 $\overline{PG} \perp$ (평면 GHF), $\overline{GM} \perp \overline{HF}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{PM} \perp \overline{HF}$$

이때 평면 PHF 와 평면 GHF 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\angle PMG = \theta$

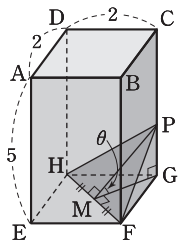
한편 $\overline{GM} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ 이고 점 P 는 $\overline{CG}$ 를 3:2로 내분하는 점이므로

$$\overline{PG} = 5 \times \frac{2}{5} = 2$$

따라서 직각삼각형 PMG 에서

$$\overline{PM} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{GM}}{\overline{PM}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



217

전략 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발은 $\triangle BCD$ 의 무게 중심임을 이용하여 $\square CDNM$ 과 평면 AMN이 이루는 각의 크기를 구한다.

점 A의 평면 BCD 위로의
정사영을 G라 하면 점 G는
삼각형 BCD의 무게중심이다.

또 $\overline{CD}$ 의 중점을 I라 하고
 $\overline{BI}$ 와 $\overline{MN}$ 의 교점을 H라 하
면 점 H는 $\overline{MN}$ 의 중점이다.

이때 $\overline{AM}$, $\overline{AN}$ 은 각각 두 삼각형 ABC, ABD의 높이므로

$$\overline{AM} = \overline{AN} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 = 4\sqrt{3}$$

즉 삼각형 AMN은 $\overline{AM} = \overline{AN}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\overline{AH} \perp \overline{MN}$$

따라서 평면 AMN과 $\square CDNM$ 이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\angle AHG = \theta$

한편 $\overline{MH} = \frac{1}{2} \overline{MN} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \overline{CD} = \frac{1}{4} \times 8 = 2$ 이므로
직각삼각형 AMH에서

$$\overline{AH} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{11}$$

또 $\overline{BI} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 = 4\sqrt{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{GH} &= \overline{BG} - \overline{BH} = \frac{2}{3} \overline{BI} - \frac{1}{2} \overline{BI} \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

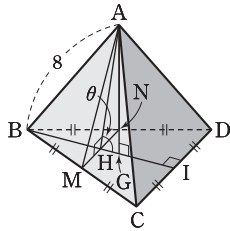
따라서 직각삼각형 AHG에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{GH}}{\overline{AH}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{33}}{33}$$

이때

$$\begin{aligned} \square CDNM &= \triangle BCD - \triangle BMN \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 4\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} \\ &= 12\sqrt{3} \end{aligned}$$

이므로 구하는 정사영의 넓이는



$$\square CDNM \cos \theta = 12\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{33}}{33} = \frac{12\sqrt{11}}{11}$$

$$\text{답 } \frac{12\sqrt{11}}{11}$$

218

전략 수면의 밑면을 포함한 평면 위로의 정사영은 밑면인 원임을 이용한다.

컵을 기울이면 한쪽 수면이 올라온 만큼 반대쪽 수면이 내려간다.

오른쪽 그림과 같이 컵을 기울
이기 전의 수면의 지름을 $\overline{AB}$,
컵을 최대로 기울였을 때의 수
면의 장축을 $\overline{CD}$ 라 하면

$$\overline{AC} = \overline{BD} = 2$$

$$\therefore \overline{DE} = 4$$

한편 컵의 밑면의 반지름의 길이를 r 라 하면 밑넓이가 12π 이므로

$$\pi r^2 = 12\pi, \quad r^2 = 12$$

$$\therefore r = 2\sqrt{3} \quad (\because r > 0)$$

즉 컵의 밑면의 지름의 길이는

$$\overline{CE} = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

이때 직각삼각형 CDE에서

$$\overline{CD} = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8$$

이므로 $\angle DCE = \theta$ 라 하면

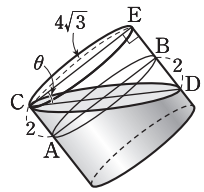
$$\cos \theta = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 구하는 수면의 넓이를 S 라 하면

$$S \cos \theta = 12\pi, \quad S \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\pi$$

$$\therefore S = 8\sqrt{3}\pi$$

$$\text{답 } 8\sqrt{3}\pi$$



2 공간좌표

II. 공간도형과 공간좌표

01 공간좌표

● 본책 114~117쪽

219

- 답 (1) P(4, 0, 2), Q(4, 3, 0), R(0, 3, 2)
 (2) P(2, -1, 3), Q(0, -1, 3), R(2, -1, 0)
 (3) P(0, 0, 5), Q(0, 3, 5), R(-2, 3, 0)
 (4) P(2, -3, 0), Q(0, -3, 0), R(2, 0, 0)

220

- 답 (1) (2, 0, 0) (2) (0, -1, 0)
 (3) (0, 0, -4) (4) (2, -1, 0)
 (5) (0, -1, -4) (6) (2, 0, -4)

221

- 답 (1) (4, -3, 2) (2) (-4, 3, 2)
 (3) (-4, -3, -2) (4) (4, 3, 2)
 (5) (-4, 3, -2) (6) (4, -3, -2)

222

점 P(-1, 5, 6)을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(1, -5, -6)$$

점 (1, -5, -6)에서 yz평면에 내린 수선의 발의 좌표는

$$(0, -5, -6) \quad \text{답 } (0, -5, -6)$$

223

점 A는 점 B(a, 6, 4)에서 zx평면에 내린 수선의 발이므로

$$A(a, 0, 4)$$

점 A와 y축에 대하여 대칭인 점의 좌표는

$$(-a, 0, -4)$$

즉 $-a = -2, -4 = b$ 이므로

$$a = 2, b = -4$$

$$\therefore a - b = 6$$

답 6

02 두 점 사이의 거리

● 본책 118~122쪽

224

$\overline{AB} = 7$ 이므로

$$\sqrt{a^2 + (a+1)^2 + (-3-3)^2} = 7$$

$$a^2 + a - 6 = 0, \quad (a+3)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

답 2

225

$\overline{AB} = 2\overline{AC}$ 에서 $\overline{AB}^2 = 4\overline{AC}^2$ 이므로

$$(2k)^2 + (-1-1)^2 + (-2)^2$$

$$= 4\{(-1)^2 + (2-1)^2 + (k-1)^2\}$$

$$4k^2 + 8 = 4k^2 - 8k + 12$$

$$8k = 4 \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

226

A(1, 1, -1), B(-1, 1, 1), C(1, -1, 1)이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-1)^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-1)^2 + (1-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(1-1)^2 + (1+1)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 정삼각형이므로

$$\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{3} \quad \text{답 } 2\sqrt{3}$$

227

점 P가 z축 위에 있으므로 P(0, 0, c)라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(-3)^2 + 4^2 + (c-1)^2 = 2^2 + (-5)^2 + (c-3)^2$$

$$c^2 - 2c + 26 = c^2 - 6c + 38$$

$$4c = 12 \quad \therefore c = 3$$

따라서 점 P의 좌표는

$$(0, 0, 3)$$

답 (0, 0, 3)

228

점 P(a, b, c)가 yz평면 위에 있으므로

$$a = 0$$

II-2

공간좌표

이때 $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{OP}$ 이므로

$$\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 = \overline{OP}^2$$

$$\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} (-1)^2 + (b-2)^2 + (c-1)^2 &= 1^2 + b^2 + (c-1)^2 \\ -4b + 4 &= 0 \quad \therefore b=1 \end{aligned}$$

$$\text{또 } \overline{BP}^2 = \overline{OP}^2 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} 1^2 + b^2 + (c-1)^2 &= b^2 + c^2 \\ -2c + 2 &= 0 \quad \therefore c=1 \end{aligned}$$

$$\therefore a+b+c=2$$

답 2

229

점 C가 zx 평면 위에 있으므로 $C(a, 0, c)$ 라 하자.

이때 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$$

$$\overline{AB} = \overline{BC} \text{에서 } \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} (2-1)^2 + (-1-1)^2 + (3-2)^2 \\ &= (a-2)^2 + 1^2 + (c-3)^2 \\ \therefore a^2 + c^2 - 4a - 6c + 8 &= 0 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\text{또 } \overline{BC} = \overline{AC} \text{에서 } \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} (a-2)^2 + 1^2 + (c-3)^2 \\ &= (a-1)^2 + (-1)^2 + (c-2)^2 \\ \therefore c &= -a + 4 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①을 ②에 대입하면

$$\begin{aligned} a^2 + (-a+4)^2 - 4a - 6(-a+4) + 8 &= 0 \\ a^2 - 3a &= 0, \quad a(a-3) = 0 \\ \therefore a &= 0 \text{ 또는 } a=3 \end{aligned}$$

①에서 $a=0$ 일 때 $c=4$, $a=3$ 일 때 $c=1$ 이므로 점 C의 좌표는

$$(0, 0, 4), (3, 0, 1) \quad \text{답 } (0, 0, 4), (3, 0, 1)$$

230

점 A(3, 2, -1)의 xy 평면, yz 평면, zx 평면 위로의 정사영을 각각 A', A'', A'''이라 하면

$$A'(3, 2, 0), A''(0, 2, -1), A'''(3, 0, -1)$$

또 점 B(5, -4, 2)의 xy 평면, yz 평면, zx 평면 위로의 정사영을 각각 B', B'', B'''이라 하면

$$B'(5, -4, 0), B''(0, -4, 2), B'''(5, 0, 2)$$

이때 선분 AB의 xy 평면 위로의 정사영은 선분 A'B'이므로 xy 평면 위로의 정사영의 길이는

$$\overline{A'B'} = \sqrt{(5-3)^2 + (-4-2)^2 + 0^2} = 2\sqrt{10}$$

선분 AB의 yz 평면 위로의 정사영은 선분 A''B''이므로 yz 평면 위로의 정사영의 길이는

$$\overline{A''B''} = \sqrt{0^2 + (-4-2)^2 + (2+1)^2} = 3\sqrt{5}$$

선분 AB의 zx 평면 위로의 정사영은 선분 A'''B'''이므로 zx 평면 위로의 정사영의 길이는

$$\overline{A'''B'''} = \sqrt{(5-3)^2 + 0^2 + (2+1)^2} = \sqrt{13}$$

$$\text{답 } xy\text{평면: } 2\sqrt{10}, yz\text{평면: } 3\sqrt{5}, zx\text{평면: } \sqrt{13}$$

231

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-6)^2 + (2+1)^2 + (5-2)^2} = 3\sqrt{3}$$

두 점 A, B의 yz 평면 위로의 정사영을 각각 A', B'이라 하면

$$A'(0, -1, 2), B'(0, 2, 5)$$

$$\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{0^2 + (2+1)^2 + (5-2)^2} = 3\sqrt{2}$$

이때 직선 AB와 yz 평면이 이루는 각의 크기가 θ 이므로 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$ 에서

$$3\sqrt{2} = 3\sqrt{3} \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{6}}{3}$$

232

$$\overline{AB} = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (4-1)^2 + (k-3)^2}$$

$$= \sqrt{k^2 - 6k + 20}$$

두 점 A, B의 zx 평면 위로의 정사영을 각각 A', B'이라 하면

$$A'(\sqrt{2}, 0, 3), B'(0, 0, k)$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{A'B'} &= \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + 0^2 + (k-3)^2} \\ &= \sqrt{k^2 - 6k + 11} \end{aligned}$$

이때 직선 AB와 zx 평면이 이루는 각의 크기가 60° 이므로 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 60^\circ$ 에서

$$\sqrt{k^2 - 6k + 11} = \sqrt{k^2 - 6k + 20} \times \frac{1}{2}$$

$$4(k^2 - 6k + 11) = k^2 - 6k + 20$$

$$k^2 - 6k + 8 = 0, \quad (k-2)(k-4) = 0$$

$$\therefore k=2 \text{ 또는 } k=4$$

답 2, 4

233

두 점 A, B의 y 좌표의 부호가 같으므로 두 점은 좌표 공간에서 zx 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 B와 zx 평면에 대하여 대칭인 점을 B' 이라 하면

$$B'(5, -4, -3)$$

이때 $\overline{BP} = \overline{B'P}$ 이므로

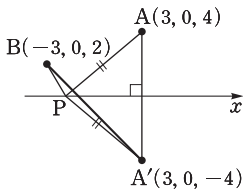
$$\begin{aligned}\overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{AP} + \overline{B'P} \\ &\geq \overline{AB'} \\ &= \sqrt{(5-2)^2 + (-4-2)^2 + (-3-4)^2} \\ &= \sqrt{94}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{94}$ 이다.

답 $\sqrt{94}$

234

두 점 A, B의 y 좌표가 0
이므로 두 점은 zx 평면 위
의 점이고, 두 점의 z 좌표
의 부호가 같으므로 두 점
은 x 축을 기준으로 같은 쪽
에 있다.



점 A와 x 축에 대하여 대칭인 점을 A' 이라 하면

$$A'(3, 0, -4)$$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{A'P} + \overline{BP} \\ &\geq \overline{A'B} \\ &= \sqrt{(-3-3)^2 + 0^2 + (2+4)^2} \\ &= 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $6\sqrt{2}$ 이다.

답 $6\sqrt{2}$

연습문제

● 본책 123~124쪽

235

전략 점 A의 좌표를 (a, b, c) 로 놓고 yz 평면에 대하여 대칭이동한 후 z 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $C(3, -4, 6)$ 와 비교한다.

점 A의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 점 A를 yz 평면에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$$(-a, b, c)$$

점 B를 z 축에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는

$$(a, -b, c)$$

즉 $a=3, -b=-4, c=6$ 이므로

$$a=3, b=4, c=6$$

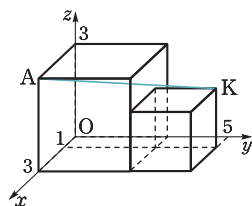
따라서 점 A의 좌표는 $(3, 4, 6)$

답 $(3, 4, 6)$

236

전략 두 정육면체를 좌표공간에 나타내고 두 점 A, K의 좌표를 구한다.

두 정육면체를 오른쪽 그림과 같이 좌표공간에 나타내면 두 점 A, K의 좌표는 각각 $(3, 0, 3), (1, 5, 2)$ 이므로



$$\overline{AK}$$

$$\begin{aligned}&= \sqrt{(1-3)^2 + 5^2 + (2-3)^2} \\ &= \sqrt{30}\end{aligned}$$

답 $\sqrt{30}$

237

전략 $\overline{PQ}$ 의 길이를 t 에 대한 식으로 나타낸다.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \sqrt{(2-t)^2 + (2t-3)^2 + (5-2t)^2} \\ &= \sqrt{9t^2 - 36t + 38} \\ &= \sqrt{9(t-2)^2 + 2}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{PQ}$ 의 길이는 $t=2$ 일 때 최솟값 $\sqrt{2}$ 를 갖는다.

답 $\sqrt{2}$

238

전략 두 점 A, B의 zx 평면 위로의 정사영을 이용한다.

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (1-4)^2 + (9-3)^2} = 7$$

두 점 A, B의 zx 평면 위로의 정사영을 각각 A', B' 이라 하면

$$A'(1, 0, 3), B'(3, 0, 9)$$

$$\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(3-1)^2 + 0^2 + (9-3)^2} = 2\sqrt{10}$$

이때 직선 $\overline{AB}$ 와 zx 평면이 이루는 각의 크기가 θ 이므로 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$ 에서

$$2\sqrt{10} = 7 \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{2\sqrt{10}}{7}$$

오른쪽 그림의 직각삼각형 PQR
에서

$$\overline{PR} = \sqrt{7^2 - (2\sqrt{10})^2} = 3$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}} = \frac{3}{7}$$

답 $\frac{3}{7}$

참고 대수에서 배우는 삼각함수의 성질을 이용하여 $\sin \theta$ 의 값을 구할 수도 있다.

즉 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 10$ 이므로

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{2\sqrt{10}}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$$

이때 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 에서 $\sin \theta > 0$ 이므로 $\sin \theta = \frac{3}{7}$

239

전략 점 A와 yz 평면에 대하여 대칭인 점을 A'이라 하면 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 임을 이용한다.

두 점 A, B의 x 좌표의 부호가 같으므로 두 점은 좌표 공간에서 yz 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A와 yz 평면에 대하여 대칭인 점을 A'이라 하면

$$A'(-2, 3, 1)$$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{A'P} + \overline{BP} \geq \overline{A'B} \\ &= \sqrt{(4+2)^2 + (1-3)^2 + (a-1)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - 2a + 41} \end{aligned}$$

즉 $\sqrt{a^2 - 2a + 41} = 2\sqrt{14}$ 이므로

$$a^2 - 2a - 15 = 0, \quad (a+3)(a-5) = 0$$

$$\therefore a = 5 \quad (\because a > 0)$$

답 5

240

전략 두 점 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ 임을 이용한다.

점 A의 좌표를 (a, b, c) 라 하면

두 점 A, D의 x 좌표, z 좌표가 각각 같으므로

$$a = 3, c = 6$$

두 점 A, F의 y 좌표가 같으므로

$$b = 1 \quad \therefore A(3, 1, 6)$$

또 점 G의 좌표를 (p, q, r) 라 하면 두 점 G, F의 x 좌표, z 좌표가 각각 같으므로

$$p = 5, r = 4$$

두 점 G, D의 y 좌표가 같으므로

$$q = 7 \quad \therefore G(5, 7, 4)$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AG} &= \sqrt{(5-3)^2 + (7-1)^2 + (4-6)^2} \\ &= 2\sqrt{11} \end{aligned}$$

답 $2\sqrt{11}$

다른 풀이 직육면체의 두 대각선 AG, DF의 길이는 서로 같으므로

$$\begin{aligned} \overline{AG} &= \overline{DF} \\ &= \sqrt{(5-3)^2 + (1-7)^2 + (4-6)^2} \\ &= 2\sqrt{11} \end{aligned}$$

241

전략 직각삼각형 POQ에서 피타고라스 정리를 이용한다.

xy 평면 위에 있는 직선 $y=x$ 위의 점 Q의 좌표를 $(t, t, 0)$ ($t \neq 0$)이라 하면 원점 O에 대하여 삼각형 POQ는 $\angle PQO = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\begin{aligned} \overline{OP}^2 &= \overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2 \\ 2^2 + 3^2 + 1^2 &= t^2 + t^2 + (t-2)^2 + (t-3)^2 + (-1)^2 \\ 2t^2 - 5t &= 0, \quad t(2t-5) = 0 \\ \therefore t &= \frac{5}{2} \quad (\because t \neq 0) \end{aligned}$$

따라서 $Q\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \sqrt{\left(\frac{5}{2}-2\right)^2 + \left(\frac{5}{2}-3\right)^2 + (-1)^2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

답 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이

점 P에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 P'이라 하면

$$P'(2, 3, 0)$$

$$\therefore \overline{PP'} = 1$$

이때 삼수선 정리에 의하여

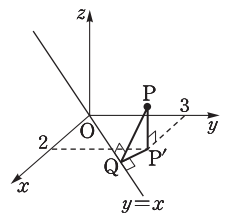
직선 P'Q와 xy 평면 위의 직선 $y=x$ 가 수직이다.

점 P'(2, 3, 0)과 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이므로 직각삼각형 PQP'에서

$$\overline{PQ} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



242

전략 먼저 주어진 조건을 이용하여 두 점 P, Q의 좌표를 구한다.

$$\text{점 P의 } x\text{좌표는 } \overline{OP} \cos 30^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$\text{점 P의 } y\text{좌표는 } \overline{OP} \sin 30^\circ = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

$$\therefore P(3\sqrt{3}, 3, 0)$$

$$\text{점 Q의 } y\text{좌표는 } \overline{OQ} \cos 60^\circ = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

$$\text{점 Q의 } z\text{좌표는 } \overline{OQ} \sin 60^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$\therefore Q(0, 3, 3\sqrt{3})$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 + 0^2 + (3\sqrt{3})^2} = 3\sqrt{6}$$

답 $3\sqrt{6}$

243

전략 삼각형 ABC의 xy 평면 위로의 정사영을 이용한다.

$$\overline{AB} = \sqrt{0^2 + (4-1)^2 + 0^2} = 3$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(4-2)^2 + 0^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(4-2)^2 + (4-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{17}$$

따라서 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ 이므로 삼각형 ABC는 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

한편 세 점 A, B, C의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 A' , B' , C' 이라 하면

$$A'(2, 1, 0), B'(2, 4, 0), C'(4, 4, 0)$$

$$\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{0^2 + (4-1)^2 + 0^2} = 3,$$

$$\overline{B'C'} = \sqrt{(4-2)^2 + 0^2 + 0^2} = 2,$$

$$\overline{A'C'} = \sqrt{(4-2)^2 + (4-1)^2 + 0^2} = \sqrt{13}$$

따라서 $\overline{A'B'}^2 + \overline{B'C'}^2 = \overline{A'C'}^2$ 이므로 삼각형 $A'B'C'$ 은 $\angle B' = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$$\begin{aligned} \therefore \triangle A'B'C' &= \frac{1}{2} \times \overline{A'B'} \times \overline{B'C'} \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

이때 삼각형 ABC와 xy 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \therefore \theta &= 45^\circ \end{aligned}$$

답 45°

244

전략 먼저 직선 AB의 xy 평면 위로의 정사영을 이용하여 a 의 값을 구한다.

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-1)^2 + (8-4)^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + 25}$$

점 A는 xy 평면 위의 점이고, 점 B의 xy 평면 위로의 정사영을 B' 이라 하면

$$B'(4, 8, 0)$$

$$\therefore \overline{AB'} = \sqrt{(4-1)^2 + (8-4)^2 + 0^2} = 5$$

이때 직선 AB와 xy 평면이 이루는 각의 크기가 45° 이

므로 $\overline{AB'} = \overline{AB} \cos 45^\circ$ 에서

$$5 = \sqrt{a^2 + 25} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 = 25 \quad \therefore a = 5 \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore B(4, 8, 5)$$

두 점 A, B의 zx 평면 위로의 정사영을 각각 A'' , B'' 이라 하면

$$A''(1, 0, 0), B''(4, 0, 5)$$

따라서 선분 AB의 zx 평면 위로의 정사영의 길이는

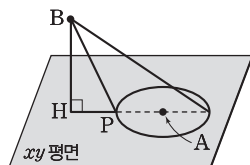
$$\overline{A''B''} = \sqrt{(4-1)^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

답 $\sqrt{34}$

245

전략 점 B에서 xy 평면에 수선의 발을 내린 후 점 B와 원 C 위의 점 사이의 거리가 최소인 경우를 파악한다.

오른쪽 그림과 같이 점 B에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H, $\overline{AH}$ 와 원 C의 교점을 P라 하면 구하는 거리의 최솟값은 $\overline{BP}$ 의 길이와 같다.



즉 $H(0, 0, 0)$ 이므로

$$\overline{AH} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

$$\therefore \overline{PH} = 5 - 3 = 2$$

이때 $\overline{BH} = 4$ 이므로 직각삼각형 BHP에서

$$\overline{BP} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} \quad \text{답 } 2\sqrt{5}$$

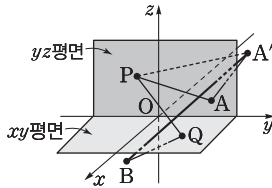
246

전략 두 점 A, B가 yz 평면과 xy 평면을 기준으로 같은 쪽에 있는지 서로 반대쪽에 있는지 파악한다.

두 점 A, B의 x 좌표의 부호가 같으므로 두 점은 좌표공간에서 yz 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

또 두 점 A, B의 z 좌표의 부호가 다르므로 두 점은 좌표공간에서 xy 평면을 기준으로 서로 반대쪽에 있다.

다음 그림과 같이 점 A와 yz 평면에 대하여 대칭인 점을 A' 이라 하면 $A'(-1, 3, 2)$



이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$$

$$= \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB}$$

$$\geq \overline{A'B}$$

$$= \sqrt{(2+1)^2 + (1-3)^2 + (-1-2)^2}$$

$$= \sqrt{22} \quad \text{답 } \sqrt{22}$$

03 선분의 내분점

● 본책 125~129쪽

247

선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times (-3) + 1 \times 1}{3+1}, \frac{3 \times 1 + 1 \times 1}{3+1}, \right.$$

$$\left. \frac{3 \times 5 + 1 \times (-3)}{3+1} \right),$$

$$\text{즉 } (-2, 1, 3)$$

또 선분 BC를 2 : 3으로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 2 + 3 \times (-3)}{2+3}, \frac{2 \times (-4) + 3 \times 1}{2+3}, \right.$$

$$\left. \frac{2 \times (-5) + 3 \times 5}{2+3} \right),$$

$$\text{즉 } (-1, -1, 1)$$

따라서 선분 PQ의 길이는

$$\sqrt{(-1+2)^2 + (-1-1)^2 + (1-3)^2} = 3$$

답 3

248

선분 AB를 $k : 1$ 로 내분하는 점이 yz 평면 위에 있으므로 내분점의 x 좌표는 0이다.

$$\text{즉 } \frac{k \times 1 + 1 \times (-2)}{k+1} = 0 \text{이므로}$$

$$k-2=0 \quad \therefore k=2$$

답 2

249

선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점이 zx 평면 위에 있으므로 내분점의 y 좌표는 0이다.

$$\text{즉 } \frac{3 \times b + 2 \times 3}{3+2} = 0 \text{이므로}$$

$$3b+6=0 \quad \therefore b=-2$$

또 선분 AB의 중점이 y 축 위에 있으므로 중점의 x 좌표와 z 좌표는 모두 0이다.

$$\text{즉 } \frac{4+a}{2} = 0, \frac{-1+c}{2} = 0 \text{이므로}$$

$$a=-4, c=1$$

$$\therefore a+b+c=-5$$

답 -5

250

평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치한다.

이때 대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{3+5}{2} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{1}{2}, 3, 4 \right)$$

점 D의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a-3}{2}, \frac{b+1}{2}, \frac{c+5}{2} \right)$$

따라서 $\frac{a-3}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{b+1}{2} = 3$, $\frac{c+5}{2} = 4$ 이므로

$$a=4, b=5, c=3$$

즉 점 D의 좌표는 (4, 5, 3)

답 (4, 5, 3)

251

평행사변형 ABCD에서 두 대각선 AC, BD의 교점은 두 대각선 AC, BD의 중점과 일치한다.

점 A의 좌표를 (a, b, c)라 하면 대각선 AC의 중점의 좌표가 (0, 4, 3)이므로

$$\frac{a+1}{2} = 0, \frac{b-3}{2} = 4, \frac{c+4}{2} = 3$$

$$\therefore a = -1, b = 11, c = 2$$

즉 A(-1, 11, 2)이므로 선분 AB의 길이는

$$\sqrt{(-3+1)^2 + (2-11)^2 + (-4-2)^2} = 11$$

답 11

252

마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로 마름모 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치한다.

이때 대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+b}{2}, \frac{-5+6}{2}, \frac{-2+3}{2} \right),$$

$$\text{즉} \left(\frac{1+b}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{-1+2}{2}, \frac{3-2}{2} \right), \text{즉} \left(\frac{a}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

따라서 $\frac{1+b}{2} = \frac{a}{2}$ 이므로

$$b = a - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 마름모의 이웃하는 두 변의 길이가 같으므로

$$\overline{AB} = \overline{AD}, \text{ 즉 } \overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 \text{에서}$$

$$(a-1)^2 + (-1+5)^2 + (3+2)^2$$

$$= (-1)^2 + (2+5)^2 + 0^2$$

$$a^2 - 2a - 8 = 0, \quad (a+2)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = -2 \quad (\because a < 0)$$

이것을 ①에 대입하면 $b = -3$

$$\therefore ab = 6$$

답 6

253

점 C의 좌표를 (a, b, c)라 하면 삼각형 ABC의 무게 중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+4+a}{3}, \frac{-3-1+b}{3}, \frac{1+2+c}{3} \right),$$

$$\text{즉} \left(\frac{a+6}{3}, \frac{b-4}{3}, \frac{c+3}{3} \right)$$

따라서 $\frac{a+6}{3} = 3$, $\frac{b-4}{3} = -2$, $\frac{c+3}{3} = -1$ 이므로

$$a = 3, b = -2, c = -6$$

즉 점 C의 좌표는 (3, -2, -6)

답 (3, -2, -6)

254

A(1, 2, -3), B(-1, 2, 3), C(1, -2, 3)이므로

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1-1+1}{3}, \frac{2+2-2}{3}, \frac{-3+3+3}{3} \right),$$

$$\text{즉} \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right)$$

답 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right)$

255

선분 AB를 2:1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times (-2)}{2+1}, \frac{2 \times (-4) + 1 \times 1}{2+1}, \right.$$

$$\left. \frac{2 \times 2 + 1 \times 1}{2+1} \right),$$

$$\text{즉} \left(\frac{4}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{5}{3} \right)$$

선분 BC를 2:1로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 5 + 1 \times 3}{2+1}, \frac{2 \times 3 + 1 \times (-4)}{2+1}, \right.$$

$$\left. \frac{2 \times (-6) + 1 \times 2}{2+1} \right),$$

$$\text{즉} \left(\frac{13}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{10}{3} \right)$$

선분 CA를 2:1로 내분하는 점 R의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times (-2) + 1 \times 5}{2+1}, \frac{2 \times 1 + 1 \times 3}{2+1}, \right.$$

$$\left. \frac{2 \times 1 + 1 \times (-6)}{2+1} \right),$$

$$\text{즉} \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3} \right)$$

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{\frac{4}{3} + \frac{13}{3} + \frac{1}{3}}{3}, \frac{-\frac{7}{3} + \frac{2}{3} + \frac{5}{3}}{3}, \frac{\frac{5}{3} - \frac{10}{3} - \frac{4}{3}}{3} \right),$$

즉 (2, 0, -1) 답 (2, 0, -1)

다른 풀이 삼각형 PQR의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-2+3+5}{3}, \frac{1-4+3}{3}, \frac{1+2-6}{3} \right),$$

즉 (2, 0, -1)

참고 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를 각각

$m : n$ ($m > 0, n > 0$)으로 내분하는 점을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치한다.

연습 문제

● 본책 130쪽

256

전략 점 P가 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점임을 파악한다.

$$3\overline{AP} = 2\overline{PB} \text{에서 } \overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 3$$

따라서 점 P는 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점이므로

$$\frac{2 \times (-10) + 3 \times a}{2+3} = -1,$$

$$\frac{2 \times b + 3 \times (-3)}{2+3} = -1$$

즉 $-20 + 3a = -5, 2b - 9 = -5$ 이므로

$$a = 5, b = 2 \quad \therefore ab = 10$$

답 10

참고 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점의 y좌표는

$$\frac{2 \times 2 + 3 \times 2}{2+3} = 2$$

이므로 점 P의 y좌표와 같다.

257

전략 평행사변형의 대각선의 성질을 이용하여 p, q, r 의 값을 구한다.

$\overline{OA}, \overline{OC}$ 가 이웃하는 두 변인 평행사변형 OABC의 두 대각선은 $\overline{OB}, \overline{AC}$ 이다.

이때 평행사변형의 두 대각선 OB, AC의 중점이 일치한다.

대각선 OB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0-4}{2}, \frac{0+q}{2}, \frac{0-2}{2} \right), \text{ 즉 } \left(-2, \frac{q}{2}, -1 \right)$$

대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{p+2}{2}, \frac{5+1}{2}, \frac{3+r}{2} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{p+2}{2}, 3, \frac{3+r}{2} \right)$$

따라서 $-2 = \frac{p+2}{2}, \frac{q}{2} = 3, -1 = \frac{3+r}{2}$ 이므로

$$p = -6, q = 6, r = -5$$

$$\therefore p + q + r = -5$$

답 -5

258

전략 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 a, b, c, d 에 대한 식으로 나타낸다.

직선 BC가 yz 평면에 평행하면 두 점 B, C의 x 좌표가 같으므로

$$b = c \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+b+c}{3}, \frac{a+2-5}{3}, \frac{-6+4+d}{3} \right),$$

$$\text{즉 } \left(\frac{b+c+2}{3}, \frac{a-3}{3}, \frac{d-2}{3} \right)$$

따라서 $\frac{b+c+2}{3} = 0, \frac{a-3}{3} = 0, \frac{d-2}{3} = 0$ 이므로

$$b+c+2=0, a=3, d=2$$

이때 $b+c+2=0$ 에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$2c+2=0 \quad \therefore c=-1$$

즉 $b=-1$ 이므로 $abcd=6$

답 6

259

전략 점 B의 좌표를 구한 후 내분점의 y 좌표와 z 좌표가 모두 0임을 이용한다.

B(3, -1, -a)이고 선분 BC를 1 : 2로 내분하는 점이 x 축 위에 있으므로 내분점의 y 좌표와 z 좌표는 모두 0이다.

$$\text{따라서 } \frac{1 \times b + 2 \times (-1)}{1+2} = 0,$$

$$\frac{1 \times 4 + 2 \times (-a)}{1+2} = 0 \text{이므로}$$

$$b-2=0, 4-2a=0 \quad \therefore a=2, b=2$$

$$\therefore a+b=4$$

답 ①

260

전략 점 G는 선분 RM을 2:1로 내분하는 점임을 이용한다.

점 R의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 선분 RM을 2:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times a}{2+1}, \frac{2 \times (-4) + 1 \times b}{2+1}, \frac{2 \times 5 + 1 \times c}{2+1} \right),$$

$$\approx \left(\frac{a+6}{3}, \frac{b-8}{3}, \frac{c+10}{3} \right)$$

이 점이 삼각형 PQR의 무게중심 $G(-1, 1, 6)$ 과 일치하므로

$$\frac{a+6}{3} = -1, \frac{b-8}{3} = 1, \frac{c+10}{3} = 6$$

$$\therefore a = -9, b = 11, c = 8$$

따라서 점 R의 좌표는 $(-9, 11, 8)$

답 $(-9, 11, 8)$

261

전략 정육면체를 좌표공간에 나타내고 각 꼭짓점의 좌표를 구한다.

정육면체를 오른쪽 그림과 같이 좌표공간에 나타내면

$$A(2, 0, 2), G(0, 2, 0)$$

따라서 선분 AG를 1:m으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 0 + m \times 2}{1+m}, \frac{1 \times 2 + m \times 0}{1+m}, \frac{1 \times 0 + m \times 2}{1+m} \right),$$

$$\approx \left(\frac{2m}{1+m}, \frac{2}{1+m}, \frac{2m}{1+m} \right) \dots\dots \textcircled{7}$$

한편 $B(2, 2, 2), D(0, 0, 2), E(2, 0, 0)$ 이므로 삼각형 BDE의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+0+2}{3}, \frac{2+0+0}{3}, \frac{2+2+0}{3} \right),$$

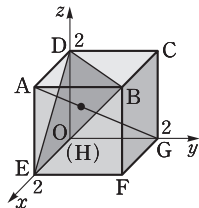
$$\approx \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right) \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 두 점 $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 이 일치하므로

$$\frac{2m}{1+m} = \frac{4}{3}, \frac{2}{1+m} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore m = 2$$

답 2



04 구의 방정식

• 본책 131~139쪽

262

답 (1) 중심의 좌표: $(3, -2, 0)$

반지름의 길이: 3

(2) 중심의 좌표: $(-2, -5, 3)$

반지름의 길이: 4

263

(2) 구의 반지름의 길이는 두 점 $(0, 0, 0), (3, -4, 0)$

사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = 5$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

답 (1) $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9$

(2) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

264

(1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 2 = 0$ 에서

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 12$$

따라서 중심의 좌표는 $(1, 2, -3)$, 반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$ 이다.

(2) $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y + 9 = 0$ 에서

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$$

따라서 중심의 좌표는 $(-3, 2, 0)$, 반지름의 길이는 2이다.

답 (1) 중심의 좌표: $(1, 2, -3)$, 반지름의 길이: $2\sqrt{3}$

(2) 중심의 좌표: $(-3, 2, 0)$, 반지름의 길이: 2

265

(1) (반지름의 길이) = |(중심의 z좌표)| = 4이므로

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 16$$

(2) (반지름의 길이) = |(중심의 x좌표)| = 1이므로

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 1$$

(3) (반지름의 길이) = |(중심의 y좌표)| = 2이므로

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 4$$

답 (1) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 16$

(2) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 1$

(3) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 4$

266

(1) (반지름의 길이) = $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ 이므로

$$(x+3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5$$

(2) (반지름의 길이) = $\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$ 이므로

$$(x+3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=10$$

(3) (반지름의 길이) = $\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$ 이므로

$$(x+3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=13$$

$$\text{답 (1) } (x+3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5$$

$$(2) (x+3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=10$$

$$(3) (x+3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=13$$

267

구 $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=12$ 의 중심의 좌표는 $(2, -1, 2)$

이때 구의 반지름의 길이는 두 점 $(2, -1, 2)$,

$(1, 1, 0)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(1-2)^2+(1+1)^2+(-2)^2}=3$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$$

$$\text{답 } (x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$$

다른 풀이 주어진 구의 반지름의 길이를 r 라 하면 구의 방정식은

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=r^2$$

이 구가 점 $(1, 1, 0)$ 을 지나므로

$$r^2=(-1)^2+2^2+(-2)^2=9$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$$

268

구의 중심을 C라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로

$$C\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{-1-3}{2}\right),$$

$$\text{즉 } C(-1, 2, -2)$$

또 구의 반지름의 길이는

$$\begin{aligned} CA &= \sqrt{(-3+1)^2+(1-2)^2+(-1+2)^2} \\ &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=6$$

$$\text{답 } (x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=6$$

269

구의 반지름의 길이는 두 점 $(-2, 1, 4)$, $(2, 3, 2)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(2+2)^2+(3-1)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{6}$$

따라서 주어진 구의 방정식은

$$(x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=24$$

$$\therefore x^2+y^2+z^2+4x-2y-8z-3=0$$

즉 $a=4$, $b=-2$, $c=-8$, $d=-3$ 이므로

$$a+b+c+d=-9$$

$$\text{답 } -9$$

270

구하는 구의 방정식을

$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ 이라 하면 구가

네 점 $(0, 0, 0)$, $(-1, -1, 1)$, $(2, -2, -3)$,

$(4, 0, 0)$ 을 지나므로

$$D=0$$

$$-A-B+C+D+3=0$$

$$2A-2B-3C+D+17=0$$

$$4A+D+16=0$$

$$\therefore A=-4, B=6, C=-1, D=0$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2-4x+6y-z=0$$

$$\text{답 } x^2+y^2+z^2-4x+6y-z=0$$

271

$x^2+y^2+z^2-6x+4y+2z-k=0$ 에서

$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=k+14$$

따라서 주어진 방정식이 구를 나타내려면 $k+14>0$ 이어야 하므로

$$k>-14$$

$$\text{답 } k>-14$$

272

중심의 좌표가 $(4, k, 5)$ 이고 z 축에 접하는 구의 반지름의 길이는

$$\sqrt{16+k^2}$$

즉 $\sqrt{16+k^2}=5$ 에서 $16+k^2=25$

$$k^2=9 \quad \therefore k=3 (\because k>0)$$

$$\text{답 } 3$$

273

구가 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 동시에 접하고 점 $(-1, 2, 5)$ 를 지나므로 반지름의 길이를 r 라 하면 구의 중심의 좌표는 $(-r, r, r)$

즉 구의 방정식은

$$(x+r)^2 + (y-r)^2 + (z-r)^2 = r^2$$

이 구가 점 $(-1, 2, 5)$ 를 지나므로

$$(-1+r)^2 + (2-r)^2 + (5-r)^2 = r^2$$

$$r^2 - 8r + 15 = 0, \quad (r-3)(r-5) = 0$$

$$\therefore r=3 \text{ 또는 } r=5$$

따라서 두 구의 반지름의 길이의 곱은 15이다.

답 15

274

주어진 구의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면

$$y^2 + z^2 - 4y + 6z + k = 0$$

$$\therefore (y-2)^2 + (z+3)^2 = 13-k$$

이 원의 반지름의 길이가 3이므로

$$\sqrt{13-k} = 3, \quad 13-k=9$$

$$\therefore k=4$$

답 4

275

중심이 점 $(3, 6, 5)$ 이고 반지름의 길이가 10인 구의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z-5)^2 = 100$$

이 구의 방정식에 $y=0$ 을 대입하면

$$(x-3)^2 + (-6)^2 + (z-5)^2 = 100$$

$$\therefore (x-3)^2 + (z-5)^2 = 64$$

따라서 주어진 구와 zx 평면이 만나서 생기는 원의 반지름의 길이는 8이므로 구하는 둘레의 길이는

$$2\pi \times 8 = 16\pi$$

답 16 π

276

구의 중심은 두 점 $(-2, -5, 5)$, $(6, -1, -3)$ 을 이은 선분의 중점이므로 구의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{-5-1}{2}, \frac{5-3}{2} \right), \text{ 즉 } (2, -3, 1)$$

또 구의 반지름의 길이는 두 점 $(-2, -5, 5)$, $(2, -3, 1)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(2+2)^2 + (-3+5)^2 + (1-5)^2} = 6$$

즉 구의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 36$$

이 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (-1)^2 = 36$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y+3)^2 = 35$$

따라서 주어진 구를 xy 평면으로 자를 때 생기는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{35}$ 이므로 구하는 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{35})^2 = 35\pi$$

답 35 π

277

$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 10y + 37 = 0$ 에서

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 + z^2 = 4$$

이 구의 중심을 C라 하면 $C(4, 5, 0)$ 이므로

$$\overline{PC} = \sqrt{(4-1)^2 + (5-3)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{15}$$

오른쪽 그림과 같이 점

P에서 구에 그은 접선

의 접점을 T라 하면 선

분 CT의 길이는 구의

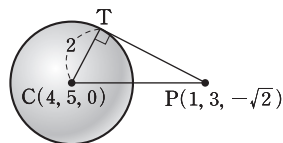
반지름의 길이와 같으므로

$$\overline{CT} = 2$$

따라서 직각삼각형 PTC에서 구하는 접선의 길이는

$$\overline{PT} = \sqrt{(\sqrt{15})^2 - 2^2} = \sqrt{11}$$

답 $\sqrt{11}$



278

$x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 4y + k = 0$ 에서

$$(x+3)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 13-k$$

이 구의 중심을 C라 하면 $C(-3, -2, 0)$ 이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{(-3-1)^2 + (-2-2)^2 + 1^2} = \sqrt{33}$$

오른쪽 그림과 같이 점

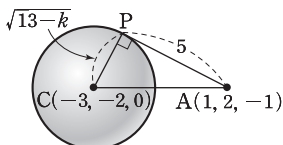
A에서 구에 그은 접선

의 접점을 P라 하면 선

분 CP의 길이는 구의

반지름의 길이와 같으므로

$$\overline{CP} = \sqrt{13-k}$$



또 접선의 길이는 5이므로 $\overline{AP}=5$

따라서 직각삼각형 PCA에서

$$\overline{CP} = \sqrt{(\sqrt{33})^2 - 5^2} = 2\sqrt{2}$$

즉 $\sqrt{13-k} = 2\sqrt{2}$ 이므로 $13-k=8$

$$\therefore k=5$$

답 5

279

$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 6z - 2 = 0$ 에서

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 16$$

이 구의 중심을 C라 하면 $C(-2, -1, 3)$ 이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{(-2+1)^2 + (-1-2)^2 + 3^2} = \sqrt{19}$$

오른쪽 그림과 같이 직

선 AC가 구와 만나는

두 점을 각각 P, Q라 하

면 점 A와 구 위의 점을

이은 선분의 길이의 최댓

값은

$$\overline{AQ} = \overline{AC} + \overline{CQ} = \sqrt{19} + 4$$

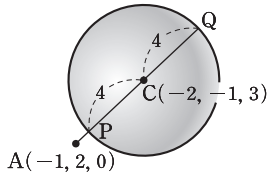
최솟값은

$$\overline{AP} = \overline{AC} - \overline{CP} = \sqrt{19} - 4$$

따라서 구하는 곱은

$$(\sqrt{19}+4) \times (\sqrt{19}-4) = 3$$

답 3



연습 문제

● 본책 140~141쪽

280

전략 구와 y 축의 교점은 구의 방정식에 $x=0, z=0$ 을 대입하여 구한다.

구의 중심은 두 점 $(10, 2, 5), (-6, 10, 11)$ 을 이은

선분의 중점이므로 구의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{10-6}{2}, \frac{2+10}{2}, \frac{5+11}{2} \right), \text{ 즉 } (2, 6, 8)$$

또 구의 반지름의 길이는 두 점 $(2, 6, 8), (10, 2, 5)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(10-2)^2 + (2-6)^2 + (5-8)^2} = \sqrt{89}$$

즉 구의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-6)^2 + (z-8)^2 = 89$$

이때 y 축 위의 점은 x 좌표와 z 좌표가 모두 0이므로 위

의 구의 방정식에 $x=0, z=0$ 을 대입하면

$$4 + (y-6)^2 + 64 = 89, \quad (y-6)^2 = 21$$

$$\therefore y = 6 \pm \sqrt{21}$$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $(0, 6+\sqrt{21}, 0),$

$(0, 6-\sqrt{21}, 0)$ 이므로

$$\overline{PQ} = (6+\sqrt{21}) - (6-\sqrt{21}) = 2\sqrt{21}$$

답 2√21

개념 노트

구와 좌표축의 교점의 좌표는 다음과 같이 구한다.

- ① x 축 $\Rightarrow$ 구의 방정식에 $y=0, z=0$ 을 대입하여 x 좌표를 구한다.
- ② y 축 $\Rightarrow$ 구의 방정식에 $x=0, z=0$ 을 대입하여 y 좌표를 구한다.
- ③ z 축 $\Rightarrow$ 구의 방정식에 $x=0, y=0$ 을 대입하여 z 좌표를 구한다.

281

전략 주어진 구의 방정식을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ 의 꼴로 변형하여 구의 반지름의 길이를 구한다.

$x^2 + y^2 + z^2 - 2kx + 4y - 10z + 4k = 0$ 에서

$$(x-k)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = k^2 - 4k + 29$$

따라서 구의 반지름의 길이는

$$\sqrt{k^2 - 4k + 29} = \sqrt{(k-2)^2 + 25}$$

이므로 $k=2$ 일 때 반지름의 길이가 최소이다.

이때 구의 부피가 최소가 되려면 구의 반지름의 길이가 최소이어야 하므로 구하는 k 의 값은 2이다.

답 2

282

전략 구의 중심 C에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H라 하고 선분 CH의 길이를 구한다.

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$ 에서

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$$

따라서 구의 중심의 좌표는 $(1, -2, 3)$ 이고 반지름의 길이는 4이다.

오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 C, 점 C에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CB}=4, \overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=3$$

따라서 직각삼각형 CBH에서

$$\overline{CH}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$$

즉 구의 중심과 직선 l 사이의 거리는 $\sqrt{7}$ 이다.

답 $\sqrt{7}$

283

전략 두 구의 중심 사이의 거리와 반지름의 길이를 이용한다.

구 $x^2+y^2+z^2=2$ 의 중심의 좌표는 $(0, 0, 0)$ 이고 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이다.

또 구 $(x-4)^2+(y+5)^2+(z-3)^2=8$ 의 중심의 좌표는 $(4, -5, 3)$ 이고 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이다.

따라서 두 구의 중심 사이의 거리는

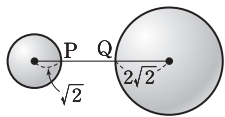
$$\sqrt{4^2+(-5)^2+3^2}=5\sqrt{2}$$

두 점 P, Q가 오른쪽 그림과

같이 두 구의 중심을 이은 선분 위에 있을 때 두 점 P, Q 사이의 거리가 최소이므로 구하는 최솟값은

$$5\sqrt{2}-(\sqrt{2}+2\sqrt{2})=2\sqrt{2}$$

답 $2\sqrt{2}$



284

전략 점 P의 좌표를 (x, y, z) 로 놓고 주어진 조건을 만족시키도록 식을 세운다.

$\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$ 에서 $3\overline{PA}=2\overline{PB}$ 이므로

$$9\overline{PA}^2=4\overline{PB}^2$$

이때 $P(x, y, z)$ 라 하면

$$9\{x^2+(y-2)^2+z^2\}=4\{x^2+(y+3)^2+z^2\}$$

$$9x^2+9y^2-36y+36+9z^2$$

$$=4x^2+4y^2+24y+36+4z^2$$

$$x^2+y^2+z^2-12y=0$$

$$\therefore x^2+(y-6)^2+z^2=36$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 $(0, 6, 0)$ 이고 반지름의 길이가 6인 구이므로 구하는 부피는

$$\frac{4}{3}\pi \times 6^3=288\pi$$

답 288π

개념 노트

구의 부피

반지름의 길이가 r 인 구의 부피를 V 라 하면

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

285

전략 세 좌표축에 동시에 접하는 구의 중심에서 세 좌표축에 이르는 거리가 모두 같음을 이용한다.

구가 x 축, y 축, z 축에 동시에 접하므로 구의 중심에서 x 축, y 축, z 축에 이르는 거리는 모두 반지름의 길이와 같다.

이때 구의 중심을 $P(a, b, c)$ 라 하고 구의 중심에서 x 축, y 축, z 축에 내린 수선의 발을 각각

$$A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$$

라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}=4$ 이므로

$$\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{a^2+b^2}=4$$

각 변을 제곱하면

$$b^2+c^2=a^2+c^2=a^2+b^2=16$$

$$\therefore a^2=b^2=c^2=8$$

따라서 구의 중심과 원점 사이의 거리는

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=2\sqrt{6}$$

답 $2\sqrt{6}$

286

전략 구와 yz 평면이 만나서 생기는 원의 방정식은 구의 방정식에 $x=0$ 을 대입하여 구한다.

주어진 구의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면

$$4+(y-1)^2+(z-2)^2=25$$

$$\therefore (y-1)^2+(z-2)^2=21$$

따라서 구와 yz 평면이 만나서 생기는 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{21}$ 이므로 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $\sqrt{21}$ 이다.

한편 구의 중심을 C라 하면

$$C(2, 1, 2)$$

점 C에서 yz 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{CH}=2$ 이므로 원기둥의 높이는

$$2\overline{CH}=2 \times 2=4$$

따라서 원기둥의 부피는

$$\pi \times (\sqrt{21})^2 \times 4 = 84\pi$$

답 84 π

287

전략 점 A의 좌표를 (a, b, c) 로 놓고, 주어진 조건을 만족시키는 식을 세운다.

점 A의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 $\overline{OA}=7$ 이므로

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=7$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2=49 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 구 S의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=64$$

이므로 $z=0$ 을 대입하면

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(-c)^2=64$$

$$\therefore (x-a)^2+(y-b)^2=64-c^2$$

즉 구 S와 xy 평면이 만나서 생기는 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{64-c^2}$ 이므로

$$\pi \times (\sqrt{64-c^2})^2 = 25\pi$$

$$64-c^2=25 \quad \therefore c^2=39$$

이것을 ①에 대입하면

$$a^2+b^2+39=49 \quad \therefore a^2+b^2=10$$

한편 구 S의 방정식에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$a^2+b^2+(z-c)^2=64$$

$$(z-c)^2=64-(a^2+b^2)=54$$

$$z-c=\pm 3\sqrt{6} \quad \therefore z=c\pm 3\sqrt{6}$$

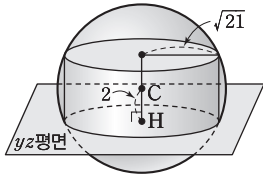
따라서 두 점 B, C의 z 좌표가 $c+3\sqrt{6}, c-3\sqrt{6}$ 이므로

$$\overline{BC}=c+3\sqrt{6}-(c-3\sqrt{6})=6\sqrt{6}$$

답 ⑤

288

전략 두 원이 접하면 두 원의 중심 사이의 거리와 반지름의 길이의 합 또는 차가 같음을 이용한다.



$x^2+y^2+z^2-2x+4y-8z+17=0$ 에서

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=4$$

이 구의 xy 평면 위로의 정사영의 방정식은

$$(x-1)^2+(y+2)^2=4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이므로 정사영은 중심의 좌표가 $(1, -2, 0)$, 반지름의 길이가 2인 원이다.

또 $x^2+y^2+z^2+4x-4y-6z+k=0$ 에서

$$(x+2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=17-k$$

이 구의 xy 평면 위로의 정사영의 방정식은

$$(x+2)^2+(y-2)^2=17-k \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이므로 정사영은 중심의 좌표가 $(-2, 2, 0)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{17-k}$ 인 원이다.

이때 두 원 ①, ②이 접하므로 두 원의 중심 사이의 거리는 반지름의 길이의 합 또는 차와 같다.

두 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(-2-1)^2+(2+2)^2}=5$$

(i) $2+\sqrt{17-k}=5$ 인 경우

$$\sqrt{17-k}=3 \text{이므로} \quad 17-k=9$$

$$\therefore k=8$$

(ii) $\sqrt{17-k}-2=5$ 인 경우

$$\sqrt{17-k}=7 \text{이므로} \quad 17-k=49$$

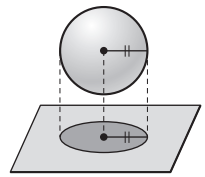
$$\therefore k=-32$$

(i), (ii)에서 $k=8$ 또는 $k=-32$

답 8, -32

개념 노트

구의 평면 위로의 정사영은 원이고 이 원의 반지름의 길이는 구의 반지름의 길이와 같다.



289

전략 구와 xy 평면이 만나서 생기는 도형 위의 점과 점 P에서 xy 평면에 내린 수선의 발 사이의 거리의 최솟값을 이용한다.

주어진 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면

$$(x-1)^2+(y-2)^2+9=13$$

$$\therefore (x-1)^2+(y-2)^2=4$$

즉 주어진 구와 xy 평면이 만나서 생기는 도형은 중심의 좌표가 $(1, 2, 0)$ 이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

오른쪽 그림과 같이 원의

중심을 A, 점 P에서 xy

평면에 내린 수선의 발을

Q라 하면 $Q(5, 5, 0)$ 이

므로

$$\overline{AQ} = \sqrt{(5-1)^2 + (5-2)^2 + 0^2} = 5$$

$$\overline{PQ} = 4$$

$\overline{AQ}$ 와 원의 교점을 B라 하면 구하는 최솟값은 $\overline{PB}$ 의 길이와 같다.

이때 $\overline{BQ} = \overline{AQ} - \overline{AB} = 5 - 2 = 3$ 이므로 직각삼각형 PBQ에서

$$\overline{PB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

답 5

290

전략 삼각형의 닮음을 이용하여 그림자의 반지름의 길이를 구한다.

구 $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4$ 의 중심을 C라 하면

$$C(0, 0, 3)$$

오른쪽 그림과 같이 구의 그림자의 둘레

위의 한 점을 A라 하고, $\overline{PA}$ 와 구의 접

점을 H라 하면 직각삼각형 PHC에서

$$\overline{PH} = \sqrt{7^2 - 2^2} = 3\sqrt{5}$$

이때 $\triangle PAO \sim \triangle PCH$ (AA 닮음)

이므로

$$\overline{PO} : \overline{PH} = \overline{AO} : \overline{CH}$$

$$10 : 3\sqrt{5} = \overline{AO} : 2, \quad 3\sqrt{5} \overline{AO} = 20$$

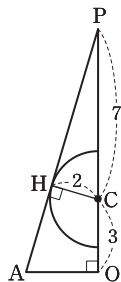
$$\therefore \overline{AO} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$$

따라서 그림자는 반지름의 길이가 $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ 인 원이므로

구하는 그림자의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{4\sqrt{5}}{3} \right)^2 = \frac{80}{9} \pi$$

답 $\frac{80}{9} \pi$



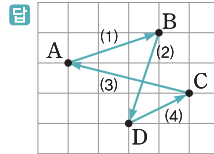
1 벡터의 연산

III. 벡터

01 벡터의 뜻

● 본책 144~147쪽

291



292

$$(1) |\overrightarrow{BC}| = \overline{BC} = 4$$

$$(2) |\overrightarrow{AC}| = \overline{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

답 (1) 4 (2) 5

293

$$\text{답 } (1) \vec{g}, \vec{h} \quad (2) \vec{c}, \vec{d}, \vec{g}, \vec{i} \\ (3) \vec{g} \quad (4) \vec{i}$$

294

$$\text{답 } (1) \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{HG} \\ (2) \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{HD}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{FB}$$

295

$$\neg, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{c} \text{ (참)}$$

$$\perp, \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -\vec{b} \text{ (참)}$$

$$\sqsubset, \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{a} \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \perp$ 이다.

답 $\neg, \perp$

296

(1) $\square ABFD$ 는 마름모이므로

$$\overline{AB} \parallel \overline{DF}, \overline{AB} = \overline{DF}$$

따라서 $\overrightarrow{DF}$ 와 서로 같은 벡터는 $\overrightarrow{AB}$ 이다.

(2) $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{DA}$ 이므로 $\overrightarrow{FB}$ 와 크기가 같고 방향이 반대

인 벡터는 $\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{AD}$ 이다.

(3) $\overrightarrow{AF}$ 와 평면 BCDE의 교점

을 H라 하면 점 H는

□BCDE의 두 대각선 BD,

CE의 교점이므로

$$\overrightarrow{BH} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BD}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

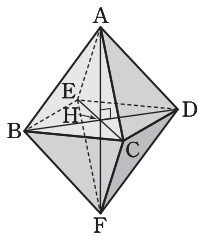
따라서 직각삼각형 ABH에서

$$\overrightarrow{AH} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$

이때 $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AH} = 2\sqrt{2}$ 이므로

$$|\overrightarrow{AF}| = \overrightarrow{AF} = 2\sqrt{2}$$

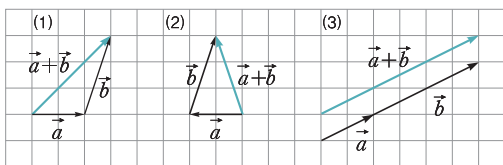
답 (1) $\overrightarrow{AB}$ (2) $\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{AD}$ (3) $2\sqrt{2}$



02 벡터의 덧셈과 뺄셈

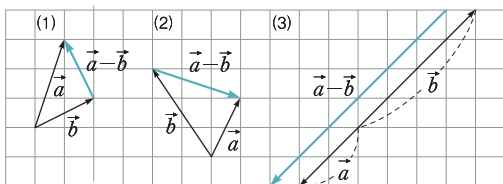
• 본책 148~152쪽

297



답 풀이 참조

298



답 풀이 참조

299

$$(3) \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$$

$$(4) \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

답 (1) $\overrightarrow{AB}$ (2) $\overrightarrow{CA}$ (3) $\overrightarrow{BC}$ (4) $\overrightarrow{AC}$

300

$$(1) \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}$$

$$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$$

$$= \overrightarrow{BA}$$

$$(2) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$$

$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE})$$

$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$$

$$(3) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}$$

$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA})$$

$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA}$$

$$= \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

답 (1) $\overrightarrow{BA}$ (2) $\overrightarrow{AE}$ (3) $\vec{0}$

301

$$(1) \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

$$= (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CB}$$

$$= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$$

$$(2) (\text{좌변}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$$

$$(\text{우변}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$$

$$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$

$$= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{DC}$$

$$= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC}$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

답 풀이 참조

302

$$(1) \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$(2) \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OA}$$

$$= -\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -\vec{a} - \vec{b}$$

답 (1) $-\vec{a} + \vec{b}$ (2) $-\vec{a} - \vec{b}$

다른 풀이 (1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$$= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$(2) \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}$$

$$= -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = -\vec{a} - \vec{b}$$

303

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$$

$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA})$$

$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$$

$$= \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

답 풀이 참조

연습 문제

• 본책 153~154쪽

304

전략 벡터 $\overrightarrow{DF}$ 의 크기는 선분 DF의 길이와 같음을 이용한다.

$$|\overrightarrow{DF}| = DF = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3} \quad \text{답 } 2\sqrt{3}$$

305

전략 벡터의 덧셈에 대한 연산 법칙을 이용한다.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} \\ &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} \\ &= (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA}) \\ &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA} \end{aligned} \quad \text{답 } ④$$

306

전략 벡터의 덧셈과 뺄셈을 이용하여 좌변을 간단히 한다.

$$\begin{aligned} ② \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0} \\ ④ \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} \neq \overrightarrow{CA} \\ ⑤ \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0} \end{aligned} \quad \text{답 } ④$$

참고 ④ $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

307

전략 벡터의 연산을 이용하여 $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD}$ 를 하나의 벡터로 나타낸다.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} \\ \therefore |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD}| &= |\overrightarrow{AC}| = AC = 2\sqrt{2} \end{aligned} \quad \text{답 } 2\sqrt{2}$$

308

전략 벡터 $\overrightarrow{EF}$ 를 시점이 O인 두 벡터의 차로 나타낸다.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AF} \\ &= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} = -\vec{a} - \vec{b} \end{aligned} \quad \text{답 } -\vec{a} - \vec{b}$$

다른 풀이 □OFAB가 평행사변형이므로

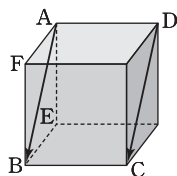
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} = \vec{a} + \vec{b} \\ \therefore \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AO} = -\vec{a} - \vec{b} \end{aligned}$$

309

전략 정육면체에서 $\overrightarrow{AB}$ 를 포함하는 면과 평행한 면을 생각한다.

주어진 전개도를 이용하여 만든 정육면체는 오른쪽 그림과 같으므로 $\overrightarrow{AB}$ 와 서로 같은 벡터는 $\overrightarrow{DC}$ 이다.

답 $\overrightarrow{DC}$



310

전략 벡터의 연산을 이용하여 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE} - \overrightarrow{AF}$ 를 하나의 벡터로 나타낸다.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE} - \overrightarrow{AF} &= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF}) + \overrightarrow{FE} \\ &= \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FE} \\ &= \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FC} \\ \therefore |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE} - \overrightarrow{AF}| &= |\overrightarrow{FC}| \\ &= FC = 2 \end{aligned} \quad \text{답 } 2$$

311

전략 주어진 등식을 변형하여 서로 같은 두 벡터를 찾는다.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \text{에서} \\ \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \\ \therefore \overrightarrow{DA} &= \overrightarrow{CB} \end{aligned}$$

따라서 $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ 이고 $\overrightarrow{DA} \parallel \overrightarrow{CB}$ 이므로 사각형 ABCD는 평행사변형이다.

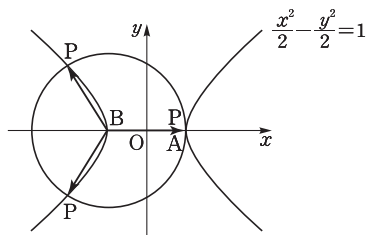
답 평행사변형

312

전략 주어진 쌍곡선의 두 꼭짓점은 원점에 대하여 대칭임을 이용한다.

다음 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 의 꼭짓점 중 x좌표가 음수인 점을 B라 하면

$$A(\sqrt{2}, 0), B(-\sqrt{2}, 0)$$



이때 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BO}$ 이므로

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{BP}$$

따라서 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}| = k$ 에서

$$|\overrightarrow{BP}| = k$$

$$\therefore \overline{BP} = k$$

즉 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}| = k$ 를 만족시키는 점 P는 중심이 점 B이고 반지름의 길이가 k인 원 위의 점이므로 점 P의 개수는 쌍곡선과 원의 교점의 개수와 같다.

이때 교점의 개수가 3이라면 원이 쌍곡선의 꼭짓점 A를 지나야 하므로

$$k = \overline{AB} = \sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

답 ④

개념 노트

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에서

① 꼭짓점의 좌표: $(\pm a, 0)$

② 초점의 좌표: $(\pm \sqrt{a^2 + b^2}, 0)$

313

전략 $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OB}$ 를 크기가 일정한 두 벡터의 합으로 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BB'}$ 인 점 B'을 정하면

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OB} &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}) + \overrightarrow{OB} \\ &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{AP} \\ \therefore |\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OB}| &= |\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{AP}| \end{aligned}$$

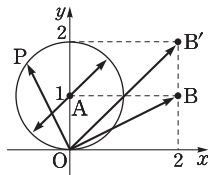
이때 $\overrightarrow{OB'}$ 과 $\overrightarrow{AP}$ 의 크기가 일정하므로 $|\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{AP}|$ 는 $\overrightarrow{OB'}$ 과 $\overrightarrow{AP}$ 의 방향이 같을 때 최대이고, 방향이 반대일 때 최소이다.

$$|\overrightarrow{OB'}| = \overline{OB'} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, |\overrightarrow{AP}| = \overline{AP} = 1$$

이므로 최댓값은 $2\sqrt{2} + 1$

최솟값은 $2\sqrt{2} - 1$

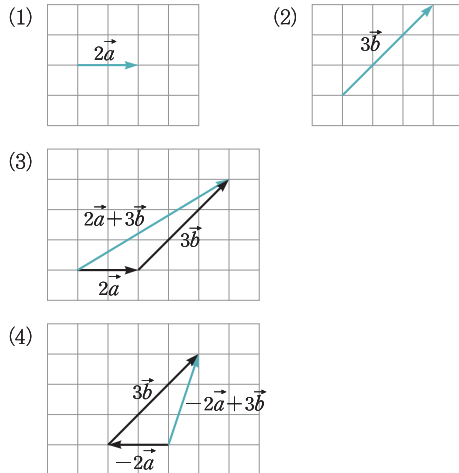
답 최댓값: $2\sqrt{2} + 1$, 최솟값: $2\sqrt{2} - 1$



03 벡터의 실수배

● 본책 155~163쪽

314



답 풀이 참조

315

$$\begin{aligned} (1) 3(\overrightarrow{2a} + \overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c}) - (6\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}) \\ = 6\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} - 9\overrightarrow{c} - 6\overrightarrow{a} - 5\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} \\ = -2\overrightarrow{b} - 8\overrightarrow{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c}) - \frac{3}{2}(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) \\ = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \frac{3}{2}\overrightarrow{c} - \frac{3}{2}\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} - \frac{3}{2}\overrightarrow{c} \\ = -\overrightarrow{a} + 4\overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c} \end{aligned}$$

답 (1) $-2\overrightarrow{b} - 8\overrightarrow{c}$ (2) $-\overrightarrow{a} + 4\overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c}$

316

답 $\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$

317

$$\begin{aligned} (1) 3(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{x}) &= 2(3\overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{a}) + 2\overrightarrow{x} \text{에서} \\ 3\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{x} &= 6\overrightarrow{b} - 4\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{x} \\ \therefore \overrightarrow{x} &= -7\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) 4(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}) &= 3\left(2\overrightarrow{a} - \frac{2}{3}\overrightarrow{b}\right) - \overrightarrow{x} \text{에서} \\ 4\overrightarrow{x} - 4\overrightarrow{a} + 8\overrightarrow{b} &= 6\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} - \overrightarrow{x} \\ 5\overrightarrow{x} &= 10\overrightarrow{a} - 10\overrightarrow{b} \\ \therefore \overrightarrow{x} &= 2\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} \end{aligned}$$

답 (1) $\overrightarrow{x} = -7\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ (2) $\overrightarrow{x} = 2\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$

318

$$2\vec{x} - \vec{y} = -\vec{a} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$-3\vec{x} + 2\vec{y} = -\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7} \times 2 + \textcircled{8} \text{을 하면} \quad \vec{x} = -2\vec{a} - \vec{b}$$

$$\text{이것을 } \textcircled{7} \text{에 대입하면} \quad -4\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{y} = -\vec{a}$$

$$\therefore \vec{y} = -3\vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\text{답 } \vec{x} = -2\vec{a} - \vec{b}, \vec{y} = -3\vec{a} - 2\vec{b}$$

319

$$2\vec{x} - 3\vec{y} = \vec{a} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$3\vec{x} - 5\vec{y} = \vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7} \times 3 - \textcircled{8} \times 2 \text{를 하면} \quad \vec{y} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\text{이것을 } \textcircled{7} \text{에 대입하면} \quad 2\vec{x} - 9\vec{a} + 6\vec{b} = \vec{a}$$

$$2\vec{x} = 10\vec{a} - 6\vec{b} \quad \therefore \vec{x} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$$

$$\therefore \vec{x} - 3\vec{y} = (5\vec{a} - 3\vec{b}) - 3(3\vec{a} - 2\vec{b})$$

$$= 5\vec{a} - 3\vec{b} - 9\vec{a} + 6\vec{b}$$

$$= -4\vec{a} + 3\vec{b} \quad \text{답 } -4\vec{a} + 3\vec{b}$$

320

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{OC} = -2\vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = (\vec{a} - \vec{b}) + (-2\vec{b}) = \vec{a} - 3\vec{b}$$

$$\text{답 } \vec{a} - 3\vec{b}$$

321

$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DC} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2} \vec{b} \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) - \overrightarrow{AB}$$

$$= \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{b} - \vec{c}$$

$$\text{따라서 } p=1, q=-\frac{1}{2}, r=-1 \text{이므로}$$

$$p+q+r = -\frac{1}{2} \quad \text{답 } -\frac{1}{2}$$

322

$$(3x+y-7)\vec{a} + (2x-y-8)\vec{b} = \vec{0} \text{에서}$$

$$3x+y-7=0, 2x-y-8=0$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면} \quad x=3, y=-2$$

$$\therefore x+y=1$$

$$\text{답 } 1$$

323

$$(3k+2l)\vec{a} + (k-l-2)\vec{b} = (k-l)\vec{a} + (l+5)\vec{b} \text{에서}$$

$$3k+2l=k-l, k-l-2=l+5$$

$$\therefore 2k+3l=0, k-2l=7$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면}$$

$$k=3, l=-2$$

$$\therefore k-l=5$$

$$\text{답 } 5$$

다른 풀이 주어진 식의 우변을 좌변으로 이항하여 간단히 하면

$$(2k+3l)\vec{a} + (k-2l-7)\vec{b} = \vec{0}$$

$$\therefore 2k+3l=0, k-2l-7=0$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면} \quad k=3, l=-2$$

324

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (2\vec{a} + k\vec{b}) - \vec{b}$$

$$= 2\vec{a} + (k-1)\vec{b}$$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\text{이때 } 4\overrightarrow{BC} = m\overrightarrow{BA} \text{에서}$$

$$4\{2\vec{a} + (k-1)\vec{b}\} = m(\vec{a} - \vec{b})$$

$$\therefore 8\vec{a} + 4(k-1)\vec{b} = m\vec{a} - m\vec{b}$$

$$\text{따라서 } 8=m, 4(k-1)=-m \text{이므로}$$

$$m=8, k=-1$$

$$\therefore mk=-8$$

$$\text{답 } -8$$

325

두 벡터 $\vec{p}$ 와 $\vec{q}$ 가 서로 평행하므로 $\vec{p} = m\vec{q}$ 를 만족시키는 0이 아닌 실수 m 이 존재한다.

$$\text{이때 } \vec{p} = m\vec{q} \text{에서}$$

$$4\vec{a} - 6\vec{b} = m(2\vec{a} + k\vec{b})$$

$$\therefore 4\vec{a} - 6\vec{b} = 2m\vec{a} + km\vec{b}$$

$$\text{따라서 } 4=2m, -6=km \text{이므로}$$

$$m=2, k=-3$$

$$\text{답 } -3$$

326

두 벡터 $\vec{p}-\vec{q}$ 와 $\vec{q}+\vec{r}$ 가 서로 평행하려면

$$\vec{p}-\vec{q} = m(\vec{q}+\vec{r}) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 m 이 존재해야 한다.

이때

$$\begin{aligned}\vec{p}-\vec{q} &= (9\vec{a}-3\vec{b})-(2\vec{a}+k\vec{b}) \\ &= 7\vec{a}-(k+3)\vec{b}, \\ \vec{q}+\vec{r} &= (2\vec{a}+k\vec{b})+(-8\vec{a}+2\vec{b}) \\ &= -6\vec{a}+(k+2)\vec{b}\end{aligned}$$

이므로 ㉠에서

$$\begin{aligned}7\vec{a}-(k+3)\vec{b} &= m\{-6\vec{a}+(k+2)\vec{b}\} \\ \therefore 7\vec{a}-(k+3)\vec{b} &= -6m\vec{a}+m(k+2)\vec{b}\end{aligned}$$

따라서 $7=-6m$, $-(k+3)=m(k+2)$ 이므로

$$m=-\frac{7}{6}, k=4$$

답 4

다른 풀이 $\vec{p}-\vec{q}=7\vec{a}-(k+3)\vec{b}$,

$\vec{q}+\vec{r}=-6\vec{a}+(k+2)\vec{b}$ 에서

$$\begin{aligned}\frac{7}{-6} &= \frac{-(k+3)}{k+2}, \quad 7k+14=6k+18 \\ \therefore k &= 4\end{aligned}$$

327

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB} \quad \dots\dots ㉠$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.

이때

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(3\vec{a}+m\vec{b})-\vec{a} \\ &= 2\vec{a}+m\vec{b}, \\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}\end{aligned}$$

이므로 ㉠에서

$$\begin{aligned}2\vec{a}+m\vec{b} &= k(\vec{b}-\vec{a}) \\ \therefore 2\vec{a}+m\vec{b} &= -k\vec{a}+k\vec{b}\end{aligned}$$

따라서 $2=-k$, $m=k$ 이므로

$$k=-2, m=-2$$

답 -2

328

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA} \\ &= (3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{OA} \\ &= -2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=-2\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

즉 $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}$ 이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

답 풀이 참조

연습 문제

● 본책 164~166쪽

329

전략 다항식의 계산과 같은 방법으로 주어진 식을 연립하여 푼다.

$$3\vec{x}+2\vec{y}=2\vec{a}-5\vec{b} \quad \dots\dots ㉠$$

$$2\vec{x}+4\vec{y}=3\vec{a}+5\vec{b} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠ $\times 2$ -㉡을 하면

$$4\vec{x}=\vec{a}-15\vec{b} \quad \therefore \vec{x}=\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{15}{4}\vec{b}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$3\left(\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{15}{4}\vec{b}\right)+2\vec{y}=2\vec{a}-5\vec{b}$$

$$2\vec{y}=\frac{5}{4}\vec{a}+\frac{25}{4}\vec{b} \quad \therefore \vec{y}=\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{25}{8}\vec{b}$$

$$\begin{aligned}\therefore \vec{x}+6\vec{y} &= \left(\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{15}{4}\vec{b}\right)+6\left(\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{25}{8}\vec{b}\right) \\ &= 4\vec{a}+15\vec{b}\end{aligned}$$

따라서 $m=4$, $n=15$ 이므로

$$m+n=19$$

답 19

330

전략 벡터 $3\vec{a}-4\vec{b}$ 를 그림으로 나타낸다.

오른쪽 그림에서

$$3\vec{a}-4\vec{b}=\overrightarrow{AE}$$

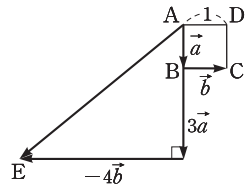
이때 $|3\vec{a}|=3|\vec{a}|=3$,

$|-4\vec{b}|=4|\vec{b}|=4$ 이므로

$$|3\vec{a}-4\vec{b}|$$

$$=|\overrightarrow{AE}|=\overline{AE}$$

$$=\sqrt{3^2+4^2}=5$$



답 5

331

전략 정육각형에서 서로 같은 벡터를 이용하여 주어진 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 로 나타낸다.

$$\textcircled{1} \overrightarrow{OF}=\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}$$

$$\textcircled{2} \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$$

$$\textcircled{3} \overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\vec{a}+\vec{b} \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BO}=2(-\vec{a}+\vec{b})=-2\vec{a}+2\vec{b}$$

$$\textcircled{4} \overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{AB}$$

$$=(-\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}=-2\vec{a}+\vec{b}$$

$$\textcircled{5} \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{BC} \\ = -(-\vec{a} + \vec{b}) - \vec{b} = \vec{a} - 2\vec{b}$$

답 ③

332

전략 두 벡터 $\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{q} - \vec{r}$ 를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 로 나타낸다.

두 벡터 $\vec{p} + \vec{q}$ 와 $\vec{q} - \vec{r}$ 가 서로 평행하려면

$$\vec{q} - \vec{r} = k(\vec{p} + \vec{q}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.

이때

$$\vec{p} + \vec{q} = (\vec{a} - \vec{b}) + (m\vec{a} + 3\vec{b}) \\ = (m+1)\vec{a} + 2\vec{b}, \\ \vec{q} - \vec{r} = (m\vec{a} + 3\vec{b}) - (2\vec{a} - 5\vec{b}) \\ = (m-2)\vec{a} + 8\vec{b}$$

이므로 ①에서

$$(m-2)\vec{a} + 8\vec{b} = k\{(m+1)\vec{a} + 2\vec{b}\} \\ \therefore (m-2)\vec{a} + 8\vec{b} = k(m+1)\vec{a} + 2k\vec{b}$$

따라서 $m-2=k(m+1)$, $8=2k$ 이므로

$$k=4, m=-2$$

답 -2

333

전략 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 로 나타낸다.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2\vec{a} - \vec{b}) - (-\vec{a} + 2\vec{b}) \\ = 3\vec{a} - 3\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - (-\vec{a} + 2\vec{b}) \\ = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\text{이므로 } \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$$

따라서 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

답 풀이 참조

334

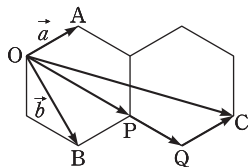
전략 벡터 $\overrightarrow{OC}$ 를 두 벡터의 합으로 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 두 점

P, Q를 잡으면

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\ = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{OQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OP} \\ = \frac{3}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$



$$\therefore \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OA} \\ = \frac{3}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{a} \\ = \frac{5}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$$

$$\text{답 } \frac{5}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$$

335

전략 주어진 식을 간단히 한 후 두 정육면체를 나란히 붙여 구하는 벡터를 그림으로 나타낸다.

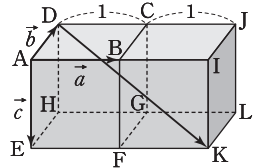
$$3(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) - (\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}) = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

이때 오른쪽 그림과 같이

합동인 두 정육면체를 나

란히 붙이면

$$2\vec{a} = \overrightarrow{AI} \\ \therefore 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} \\ = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \\ = \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IK} \\ = \overrightarrow{DK}$$



따라서 구하는 벡터의 크기는

$$|\overrightarrow{DK}| = DK = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

답 $\sqrt{6}$

336

전략 가로 방향의 벡터를 $\vec{a}$, 세로 방향의 벡터를 $\vec{b}$ 로 놓고 주어진 등식을 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 로 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 점 A를 시

점으로 하는 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 를

정하면

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - \vec{b} \\ \overrightarrow{AC} = 4\vec{a} + \vec{b} \\ \overrightarrow{AD} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$$

이때 $\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AD}$ 에서

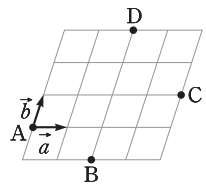
$$4\vec{a} + \vec{b} = m(2\vec{a} - \vec{b}) + n(2\vec{a} + 3\vec{b}) \\ = (2m + 2n)\vec{a} + (-m + 3n)\vec{b}$$

따라서 $4 = 2m + 2n$, $1 = -m + 3n$ 이므로

$$m = \frac{5}{4}, n = \frac{3}{4}$$

$$\therefore m - n = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$



337

전략 $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ 임을 이용하여 보기의 벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 로 나타낸다.

$$\text{ㄱ. } \vec{a} - \vec{c} = \vec{a} - (\vec{a} + 2\vec{b}) = -2\vec{b}$$

따라서 $\vec{a} - \vec{c} = k(\vec{a} + \vec{b})$ 를 만족시키는 실수 k 가 존재하지 않으므로 두 벡터 $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{c}$ 는 서로 평행하지 않다.

$$\text{ㄴ. } \vec{a} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{a} + 2\vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b} = 2(\vec{a} + \vec{b})$$

이므로 두 벡터 $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{c}$ 는 서로 평행하다.

$$\text{ㄷ. } \vec{b} - \vec{c} = \vec{b} - (\vec{a} + 2\vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b} = -(\vec{a} + \vec{b})$$

이므로 두 벡터 $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{c}$ 는 서로 평행하다.

$$\text{ㄹ. } \vec{b} + \vec{c} = \vec{b} + (\vec{a} + 2\vec{b}) = \vec{a} + 3\vec{b}$$

따라서 $\vec{b} + \vec{c} = k(\vec{a} + \vec{b})$ 를 만족시키는 실수 k 가 존재하지 않으므로 두 벡터 $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ 는 서로 평행하지 않다.

이상에서 벡터 $\vec{a} + \vec{b}$ 와 서로 평행한 벡터는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

338

전략 세 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AR}$ 를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 로 나타낸다.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a} \text{ 이고}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (4\vec{a} - 5\vec{b}) - \vec{a} \\ &= 3\vec{a} - 5\vec{b}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA} = (-2\vec{a} + 3\vec{b}) - \vec{a} \\ &= -3\vec{a} + 3\vec{b} = 3(\vec{b} - \vec{a}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OA} = (2\vec{a} - \vec{b}) - \vec{a} \\ &= \vec{a} - \vec{b} = -(\vec{b} - \vec{a}) \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \overrightarrow{AQ} = 3\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR} = -\overrightarrow{AB}$$

따라서 직선 AB 위의 점은 Q, R이다.

답 Q, R

339

전략 주어진 식을 만족시키는 점 P의 위치를 파악한다.

$$\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PC} = \vec{0} \text{ 에서}$$

$$\overrightarrow{PA} = -3\overrightarrow{PC}$$

따라서 세 점 A, P, C는 한 직선 위에 있고 두 벡터 $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PC}$ 의 방향이 반대이다.

또 $|\overrightarrow{PA}| = 3|\overrightarrow{PC}|$, 즉 $\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{PC}$ 에서

$$\overrightarrow{PA} : \overrightarrow{PC} = 3 : 1$$

이므로 점 P는 선분 AC를 3 : 1로 내분하는 점이다.

이때 직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AC} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$$

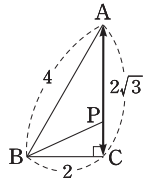
$$\therefore \overline{PC} = \frac{1}{4} \overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 직각삼각형 PBC에서

$$\overline{BP} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

$$\therefore |\overrightarrow{BP}| = \overline{BP} = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{19}}{2}$



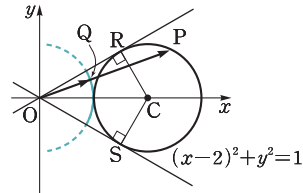
340

전략 점 Q가 나타내는 도형을 파악한다.

$\overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$ 이므로 벡터 $\overrightarrow{OQ}$ 는 벡터 $\overrightarrow{OP}$ 와 방향이

같은 단위벡터이다.

따라서 점 Q가 나타내는 도형은 다음 그림과 같이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원의 일부이다.



이때 원 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 의 중심을 C, 원점에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 R, S라 하면 직각삼각형 ROC에서

$$\sin(\angle COR) = \frac{\overline{CR}}{\overline{OC}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle COR = 30^\circ$$

따라서 $\angle ROS = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$ 이므로 점 Q가 나타내는 도형의 길이는

$$2\pi \times 1 \times \frac{60}{360} = \frac{\pi}{3}$$

답 $\frac{\pi}{3}$

341

전략 네 벡터 $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{DF}$ 를 각각 두 벡터의 합으로 나타낸다.

$$\begin{aligned}
 & \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DF} \\
 &= (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG}) + (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FH}) + (\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GE}) \\
 &\quad + (\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HF}) \\
 &= (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DH}) + (\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GE}) \\
 &\quad + (\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HF}) \\
 &= 4\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EE} + \overrightarrow{FF} = 4\overrightarrow{CG} \\
 &\therefore m=4
 \end{aligned}$$

답 4

342

전략 네 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ 를 각각 시점이 O인 두 벡터의 차로 나타내어 주어진 식을 간단히 한다.

$$\begin{aligned}
 & \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \\
 &= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) \\
 &\quad + (\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA}) \\
 &= (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}) - 4\overrightarrow{OA} \\
 &\text{이때 } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0} \text{에서} \\
 & \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = -\overrightarrow{OA} \text{이므로} \\
 & \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = -5\overrightarrow{OA} \\
 & \therefore |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}| \\
 &= |-5\overrightarrow{OA}| = 5|\overrightarrow{OA}| \\
 &= 5 \times 2 = 10
 \end{aligned}$$

답 10

343

전략 주어진 식을 변형하여 $\overrightarrow{DA}$ 와 $\overrightarrow{CB}$ 사이의 관계식을 세운다.

$$\begin{aligned}
 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} &= 2\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} \text{에서} \\
 2\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \\
 2(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}) &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \\
 \therefore 2\overrightarrow{DA} &= \overrightarrow{CB}
 \end{aligned}$$

따라서 $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ 이므로

$$\triangle AOD \sim \triangle COB \text{ (AA 닮음)}$$

이때 닮음비는 $\overrightarrow{AD} : \overrightarrow{CB} = 1 : 2$ 이므로

$$\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OD}$$

즉 $\overrightarrow{OB} = -2\overrightarrow{OD}$ 이므로

$$k = -2$$

답 -2

2 벡터의 성분과 내적

III. 벡터

01 위치벡터

• 본책 168~175쪽

344

답 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{c}$, 2, 3

345

$$\begin{aligned}
 (1) \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) - 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\
 &= (\vec{b} - \vec{a}) - 2(\vec{c} - \vec{b}) \\
 &= -\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{CA} \\
 &= 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) - 3(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) \\
 &= 2(\vec{b} - \vec{a}) + (\vec{c} - \vec{b}) - 3(\vec{a} - \vec{c}) \\
 &= -5\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{c}
 \end{aligned}$$

답 (1) $-\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$ (2) $-5\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{c}$

346

$$(1) \vec{p} = \frac{3\vec{b} + 2\vec{a}}{3+2} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$$

$$(2) \vec{q} = \frac{2\vec{b} + 3\vec{a}}{2+3} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

$$(3) \vec{m} = \frac{\vec{p} + \vec{q}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

답 (1) $\vec{p} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$ (2) $\vec{q} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

$$(3) \vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

347

$$\begin{aligned}
 (2) \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = \vec{g} - \vec{a} \\
 &= \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} - \vec{a} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}
 \end{aligned}$$

답 (1) $\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$ (2) $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

348

점 M은 선분 OB의 중점이므로

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

III-2

벡터의 성분과 내적

점 N은 선분 AM을 2 : 3으로 내분하는 점이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON} &= \frac{2\overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{OA}}{2+3} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OM} \\ &= \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

따라서 $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{1}{5}$ 이므로

$$x + y = \frac{4}{5} \quad \text{답 } \frac{4}{5}$$

349

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \vec{a} + \vec{c},$$

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \vec{b} + \vec{c} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \frac{2\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH}}{2+1} = \frac{2(\vec{a} + \vec{c}) + (\vec{b} + \vec{c})}{3} \\ &= \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}\end{aligned}$$

$$\text{답 } \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}$$

350

점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

따라서 $\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = -\vec{a} - \vec{b}$ 이므로

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB} = (-\vec{a} - \vec{b}) - \vec{b} = -\vec{a} - 2\vec{b}$$

즉 $x = -1$, $y = -2$ 이므로

$$x + y = -3 \quad \text{답 } -3$$

351

점 T가 삼각형 BDE의 무게중심이므로

$$\overrightarrow{AT} = \frac{\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}}{3}$$

이때

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AE} \\ &= \vec{p} + \vec{q} + \vec{r}\end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AT}$$

따라서 세 점 A, T, G는 한 직선 위에 있다.

답 풀이 참조

352

점 P는 선분 AB의 중점이므로

$$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

이때 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로 선분 CP를 2 : 1로 내분한다.

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{GP} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BC}) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) \\ &= \frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} \quad \text{답 } \frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

다른 풀이 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BG} &= \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{BC}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} \\ \therefore \overrightarrow{GP} &= \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BG} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} = \frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

353

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

점 G는 선분 OM을 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3} \times \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} \\ \therefore \overrightarrow{CG} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c} \\ \therefore p &= \frac{1}{3}, q = \frac{1}{3}, r = -1\end{aligned}$$

$$\text{답 } p = \frac{1}{3}, q = \frac{1}{3}, r = -1$$

354

네 점 A, B, C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$ 라 하면 $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{BA}$ 에서

$$\begin{aligned}2(\vec{a} - \vec{p}) + 3(\vec{b} - \vec{p}) + 3(\vec{c} - \vec{p}) &= 2(\vec{a} - \vec{b}) \\ 5\vec{b} + 3\vec{c} &= 8\vec{p} \\ \therefore \vec{p} &= \frac{5\vec{b} + 3\vec{c}}{8} = \frac{3 \times \vec{c} + 5 \times \vec{b}}{3+5}\end{aligned}$$

따라서 점 P는 선분 BC를 3 : 5로 내분하는 점이므로

$$\frac{m}{n} = \frac{3}{5} \quad \text{답 } \frac{3}{5}$$

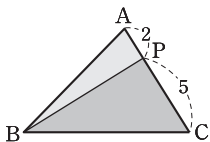
355

네 점 A, B, C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$ 라 하면 $4\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB}$ 에서

$$\begin{aligned}
 4(\vec{a}-\vec{p})+(\vec{b}-\vec{p})+2(\vec{c}-\vec{p}) &= \vec{b}-\vec{a} \\
 5\vec{a}+2\vec{c} &= 7\vec{p} \\
 \therefore \vec{p} &= \frac{5\vec{a}+2\vec{c}}{7} = \frac{2 \times \vec{c} + 5 \times \vec{a}}{2+5}
 \end{aligned}$$

따라서 점 P는 선분 AC를
2 : 5로 내분하는 점이므로

$$\begin{aligned}
 \triangle PBC &= \frac{5}{7} \triangle ABC \\
 &= \frac{5}{7} \times 42 \\
 &= 30
 \end{aligned}$$



답 30

연습문제

• 본책 176쪽

356

전략 각의 이등분선의 성질을 이용하여 점 D의 위치를 파악한다.

$\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = 4 : 3$$

즉 점 D는 선분 BC를 4 : 3으로 내분하는 점이므로

$$\overline{AD} = \frac{4\overline{AC} + 3\overline{AB}}{4+3} = \frac{3}{7}\overline{AB} + \frac{4}{7}\overline{AC}$$

따라서 $m = \frac{3}{7}$, $n = \frac{4}{7}$ 이므로

$$m - n = -\frac{1}{7} \quad \text{답 } -\frac{1}{7}$$

357

전략 내분점의 위치벡터를 이용하여 점 N의 위치벡터를 $\vec{b}$, $\vec{c}$ 로 나타낸다.

점 M은 선분 OA의 중점이므로 $\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{OA}$

점 N은 선분 BC의 중점이므로

$$\begin{aligned}
 \overline{ON} &= \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \\
 \therefore \overline{MN} &= \overline{ON} - \overline{OM} = \left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) - \frac{1}{2}\vec{a} \\
 &= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}
 \end{aligned}$$

따라서 $p = -\frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$ 이므로

$$p - q + r = -\frac{1}{2} \quad \text{답 } -\frac{1}{2}$$

358

전략 무게중심의 성질을 이용하여 $\overline{AG}$ 를 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 로 나타낸다.

선분 AC의 중점을 M이라 하면 $\overline{BM} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

이때 점 G가 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$$\begin{aligned}
 \overline{BG} &= \frac{2}{3}\overline{BM} = \frac{2}{3} \times \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} \\
 \therefore \overline{AG} &= \overline{BG} - \overline{BA} \\
 &= \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) - \vec{a} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}
 \end{aligned}$$

따라서 $m = -\frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{3}$ 이므로

$$m + n = -\frac{1}{3} \quad \text{답 } -\frac{1}{3}$$

359

전략 세 점 P, Q, R의 위치벡터를 차례로 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 로 나타낸다.

점 P는 선분 OA를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$$\overline{OP} = \frac{1}{3}\overline{OA} = \frac{1}{3}\vec{a}$$

점 Q는 선분 BP를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$$\begin{aligned}
 \overline{OQ} &= \frac{1 \times \overline{OP} + 2 \times \overline{OB}}{1+2} \\
 &= \frac{\frac{1}{3}\vec{a} + 2\vec{b}}{3} = \frac{1}{9}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}
 \end{aligned}$$

이때 점 R는 선분 AQ의 중점이므로

$$\begin{aligned}
 \overline{OR} &= \frac{\overline{OA} + \overline{OQ}}{2} \\
 &= \frac{\vec{a} + \left(\frac{1}{9}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right)}{2} = \frac{5}{9}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} \\
 \text{답 } &\frac{5}{9}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}
 \end{aligned}$$

360

전략 $m+n=1$ 임을 이용하여 점 P의 위치를 파악한다.

(i) $m=1$, $n=0$ 이면 $\overline{OP} = \overline{OA}$

(ii) $m=0$, $n=1$ 이면 $\overline{OP} = \overline{OB}$

(iii) $m>0$, $n>0$, $m+n=1$ 이면

$$\overline{OP} = m\overline{OA} + n\overline{OB} = \frac{n\overline{OB} + m\overline{OA}}{m+n}$$

따라서 점 P는 선분 AB를 $n : m$ 으로 내분하는 점이다.

이상에서 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB이므로 구하는 길이는

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-4)^2 + (6-2)^2} = 5 \quad \text{답 5}$$

361

전략 주어진 등식을 만족시키는 점 P의 위치를 파악한다.

$$3\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

$$3\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{PA} &= \frac{-2\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC}}{3} \\ &= -\frac{4}{3} \times \frac{\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{2} \end{aligned}$$

이때 선분 BC의 중점을 M이라 하면

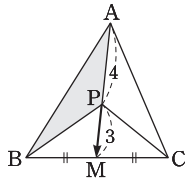
$$\overrightarrow{PM} = \frac{\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{2}$$

$$\text{이므로 } \overrightarrow{PA} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{PM}$$

$$\therefore 3\overrightarrow{PA} = -4\overrightarrow{PM}$$

따라서 세 점 A, P, M은 한 직선 위에 있고 $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PM}$ 의 방향이 반대이다.

또 $|\overrightarrow{PA}| : |\overrightarrow{PM}| = 4 : 3$ 에서 점 P는 선분 AM을 4 : 3으로 내분하는 점이므로



$$\begin{aligned} \triangle PAB &= \frac{4}{7} \triangle ABM = \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} \triangle ABC \\ &= \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} \times 14 = 4 \end{aligned} \quad \text{답 4}$$

02 평면벡터의 성분

● 본책 177~184쪽

362

(1) $\vec{a}$ 의 중점의 좌표가 (2, 3)이므로

$$\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$$

$\vec{b}$ 를 시점이 원점이 되도록 평행이동하면 중점의 좌표가 (0, -3)이므로

$$\vec{b} = -3\vec{e}_2$$

(2) $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (0, -3)$

답 풀이 참조

363

$$(1) |\vec{a}| = \sqrt{(-7)^2 + 0^2} = 7$$

$$(2) |\vec{b}| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$$

답 (1) 7 (2) 10

364

(1) $2 = n - m$, $3 + m = 4$ 이므로

$$m = 1, n = 3$$

(2) $m + 2n = 3$, $6 = 2m + n$ 이므로

$$m = 3, n = 0$$

답 (1) $m = 1, n = 3$ (2) $m = 3, n = 0$

365

$$\begin{aligned} (1) 2\vec{a} - 3\vec{b} &= 2(3, -2) - 3(-1, 4) \\ &= (6, -4) - (-3, 12) \\ &= (9, -16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) 3(2\vec{a} + \vec{b}) - 2(3\vec{a} - 2\vec{b}) &= 6\vec{a} + 3\vec{b} - 6\vec{a} + 4\vec{b} \\ &= 7\vec{b} = 7(-1, 4) \\ &= (-7, 28) \end{aligned}$$

답 (1) (9, -16) (2) (-7, 28)

366

$$(1) \overrightarrow{AB} = (-5, -1) - (3, 2) = (-8, -3)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-8)^2 + (-3)^2} = \sqrt{73}$$

$$(2) \overrightarrow{AB} = (4, -1) - (-2, 3) = (6, -4)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{13}$$

답 (1) $\overrightarrow{AB} = (-8, -3)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{73}$

(2) $\overrightarrow{AB} = (6, -4)$, $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{13}$

367

$$2(\vec{a} + \vec{x}) - 5(\vec{b} - \vec{c}) = 3(\vec{a} - \vec{b} + \vec{x}) \text{에서}$$

$$2\vec{a} + 2\vec{x} - 5\vec{b} + 5\vec{c} = 3\vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{x}$$

$$\therefore \vec{x} = -\vec{a} - 2\vec{b} + 5\vec{c}$$

$$= -(1, 2) - 2(6, 2) + 5(3, -1)$$

$$= (2, -11)$$

$$\therefore |\vec{x}| = \sqrt{2^2 + (-11)^2} = 5\sqrt{5}$$

답 $5\sqrt{5}$

368

$$\begin{aligned} & 3(-\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}) + 2(2\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) \\ &= -3\vec{a} + 3\vec{b} - 6\vec{c} + 4\vec{a} - 4\vec{b} + 2\vec{c} \\ &= \vec{a} - \vec{b} - 4\vec{c} \\ &= (3, 2) - (-4, 2) - 4(1, -1) = (3, 4) \end{aligned}$$

따라서 주어진 벡터의 크기는

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

답 성분: (3, 4), 크기: 5

369

$$\begin{aligned} -t\vec{a} + \vec{b} &= -t(-1, 2) + (3, 4) \\ &= (t+3, -2t+4) \\ \therefore | -t\vec{a} + \vec{b} | &= \sqrt{(t+3)^2 + (-2t+4)^2} \\ &= \sqrt{5t^2 - 10t + 25} \\ &= \sqrt{5(t-1)^2 + 20} \end{aligned}$$

따라서 $| -t\vec{a} + \vec{b} |$ 는 $t=1$ 일 때 최소이므로 구하는 최솟값은

$$\sqrt{20} = 2\sqrt{5} \quad \text{답 } 2\sqrt{5}$$

370

$$\begin{aligned} \vec{c} &= 2\vec{a} + 3\vec{b} \text{를 성분으로 나타내면} \\ (-3q, 4) &= 2(3, -p) + 3(p+q, 2) \\ &= (3p+3q+6, -2p+6) \\ \text{두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여} \\ -3q &= 3p+3q+6, 4 = -2p+6 \\ \therefore p &= 1, q = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\vec{b} = \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ 이므로

$$|\vec{b}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{17}}{2} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{17}}{2}$$

371

$$\begin{aligned} \vec{a} + k\vec{c} &= (5, 4) + k(3, 7) = (5+3k, 4+7k) \\ \vec{b} - \vec{a} &= (-2, 3) - (5, 4) = (-7, -1) \\ \text{이때 두 벡터 } \vec{a} + k\vec{c} \text{와 } \vec{b} - \vec{a} \text{가 서로 평행하므로} \\ \vec{a} + k\vec{c} &= t(\vec{b} - \vec{a}) \quad (t \neq 0) \\ \text{라 하면} \quad (5+3k, 4+7k) &= t(-7, -1) \end{aligned}$$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$5+3k = -7t, 4+7k = -t$$

두 식을 연립하여 풀면

$$t = -\frac{1}{2}, k = -\frac{1}{2} \quad \text{답 } -\frac{1}{2}$$

372

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (1, 1) - (0, 3) = (1, -2) \\ \vec{DC} &= (x, y) - (2, 6) = (x-2, y-6) \\ \text{이때 } \vec{AB} &= \vec{DC} \text{이므로} \quad (1, -2) = (x-2, y-6) \\ \text{두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여} \\ 1 &= x-2, -2 = y-6 \quad \therefore x=3, y=4 \\ \therefore x+y &= 7 \quad \text{답 } 7 \end{aligned}$$

373

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\begin{aligned} \vec{PA} &= (2, 0) - (x, y) = (2-x, -y) \\ \vec{PB} &= (-3, 1) - (x, y) = (-3-x, 1-y) \\ \vec{CP} &= (x, y) - (4, 5) = (x-4, y-5) \\ \text{이때 } \vec{PA} + \vec{PB} &= \vec{CP} \text{이므로} \\ (2-x, -y) + (-3-x, 1-y) &= (x-4, y-5) \\ \therefore (-1-2x, 1-2y) &= (x-4, y-5) \end{aligned}$$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{aligned} -1-2x &= x-4, 1-2y = y-5 \\ \therefore x &= 1, y = 2 \end{aligned}$$

따라서 점 P의 좌표는 $(1, 2)$ **답** (1, 2)

다른 풀이 $\vec{PA} + \vec{PB} = \vec{CP}$ 에서

$$\vec{PA} + \vec{PB} - \vec{CP} = \vec{0} \quad \therefore \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$$

이를 만족시키는 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2-3+4}{3}, \frac{0+1+5}{3}\right), \text{ 즉 } (1, 2)$$

374

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\begin{aligned} \vec{AP} &= (x, y) - (-2, 4) = (x+2, y-4) \\ \vec{BP} &= (x, y) - (5, 3) = (x-5, y-3) \end{aligned}$$

III-2

이때 $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}|$ 이므로

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$7x - y - 7 = 0$$

답 $7x - y - 7 = 0$

참고 $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}|$ 에서 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BP}$

즉 점 P는 두 점 A, B로부터의 거리가 같은 점이므로 점 P의 자취는 $\overline{AB}$ 의 수직이등분선이다.

375

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overrightarrow{PA} = (1, 2) - (x, y) = (1-x, 2-y)$$

$$\overrightarrow{PB} = (3, -1) - (x, y) = (3-x, -1-y)$$

$$\overrightarrow{PC} = (-1, -2) - (x, y) = (-1-x, -2-y)$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$$

$$= (1-x, 2-y) + (3-x, -1-y)$$

$$+ (-1-x, -2-y)$$

$$= (3-3x, -1-3y)$$

이때 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}| = 2$ 이므로

$$\sqrt{(3-3x)^2 + (-1-3y)^2} = 2$$

양변을 제곱하면

$$(3-3x)^2 + (-1-3y)^2 = 4$$

$$\therefore (x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가

$\left(1, -\frac{1}{3}\right)$ 이고 반지름의 길이가 $\frac{2}{3}$ 인 원이므로 구하

는 둘레의 길이는

$$2\pi \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

답 $\frac{4}{3}\pi$

연습문제

● 본책 185~186쪽

376

전략 벡터 $\vec{a}$ 의 크기가 1임을 이용한다.

벡터 $\vec{a}$ 가 단위벡터이려면 $|\vec{a}| = 1$ 이어야 하므로

$$\sqrt{(x-2)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1$$

양변을 제곱하면

$$(x-2)^2 + \frac{16}{25} = 1, \quad 25x^2 - 100x + 91 = 0$$

$$(5x-7)(5x-13) = 0$$

$$\therefore x = \frac{7}{5} \text{ 또는 } x = \frac{13}{5}$$

따라서 모든 x 의 값의 합은

$$\frac{7}{5} + \frac{13}{5} = 4$$

답 4

377

전략 두 식을 연립하여 $\vec{x}, \vec{y}$ 를 성분으로 나타낸다.

$$\vec{x} + 2\vec{y} = (5, 4) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$3\vec{x} - \vec{y} = (-6, 5) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2} \times 2$ 를 하면

$$7\vec{x} = (5, 4) + 2(-6, 5) = (-7, 14)$$

$$\therefore \vec{x} = (-1, 2)$$

이것을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$3(-1, 2) - \vec{y} = (-6, 5)$$

$$\therefore \vec{y} = 3(-1, 2) - (-6, 5) = (3, 1)$$

$$\therefore \vec{x} - \vec{y} = (-1, 2) - (3, 1) = (-4, 1)$$

답 $(-4, 1)$

378

전략 벡터 $\vec{a} + x\vec{b}$ 를 성분으로 나타낸다.

$$\vec{a} + x\vec{b} = (4, -2) + x(0, 2) = (4, 2x-2)$$

이때 $|\vec{a} + x\vec{b}| = |\vec{c}|$ 이어야 하므로

$$\sqrt{4^2 + (2x-2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 - 2x = 0, \quad x(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 2 \quad (\because x \neq 0)$$

답 2

379

전략 벡터 $\vec{a} + t\vec{b}$ 를 성분으로 나타낸다.

$$\vec{a} + t\vec{b} = (2, -1) + t(-1, 1)$$

$$= (2-t, -1+t)$$

$$\therefore |\vec{a} + t\vec{b}| = \sqrt{(2-t)^2 + (-1+t)^2}$$

$$= \sqrt{2t^2 - 6t + 5}$$

$$= \sqrt{2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

따라서 $|\vec{a} + t\vec{b}|$ 는 $t = \frac{3}{2}$ 일 때 최솟값 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 를 갖는다. 답 $t = \frac{3}{2}$, 최솟값: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

380

전략 두 벡터가 서로 평행할 조건을 이용한다.

두 벡터 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 가 서로 평행하므로 $\vec{a} = k\vec{b}$ ($k \neq 0$)라 하면

$$(3x+1, -5) = k(-2, x)$$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$3x+1 = -2k, -5 = kx$$

$$-5 = kx \text{에서 } k = -\frac{5}{x}$$

이것을 $3x+1 = -2k$ 에 대입하면

$$3x+1 = \frac{10}{x}, \quad 3x^2 + x - 10 = 0$$

$$(x+2)(3x-5) = 0 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}$$

따라서 모든 x 의 값의 합은

$$-2 + \frac{5}{3} = -\frac{1}{3} \quad \text{답 } -\frac{1}{3}$$

381

전략 두 벡터 $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ 를 각각 성분으로 나타낸다.

$$\vec{AB} = (3, 5) - (0, 2) = (3, 3)$$

$$\vec{AC} = (1, x) - (0, 2) = (1, x-2)$$

이때 $\vec{AB} \parallel \vec{AC}$ 이므로 $\vec{AC} = k\vec{AB}$ ($k \neq 0$)라 하면

$$(1, x-2) = k(3, 3)$$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$1 = 3k, x-2 = 3k$$

$$\therefore k = \frac{1}{3}, x = 3 \quad \text{답 } 3$$

382

전략 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 를 각각 성분으로 나타낸다.

세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 의 시점을 좌표평면의 원점으로 놓고 각 벡터를 성분으로 나타내면

$$\vec{a} = (2, 1), \vec{b} = (3, -1), \vec{c} = (-3, -4)$$

따라서 $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ 를 성분으로 나타내면

$$\begin{aligned} (-3, -4) &= p(2, 1) + q(3, -1) \\ &= (2p+3q, p-q) \end{aligned}$$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$-3 = 2p+3q, -4 = p-q$$

두 식을 연립하여 풀면 $p = -3, q = 1$

$$\therefore p+q = -2 \quad \text{답 } -2$$

383

전략 벡터 $\vec{b}$ 가 벡터 $\vec{a}$ 와 평행함을 이용하여 벡터 $\vec{b}$ 의 성분을 미지수로 나타낸다.

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ 이므로 $\vec{b} = k\vec{a}$ ($k \neq 0$)라 하면

$$\vec{b} = k(3, -1) = (3k, -k)$$

이때 $|\vec{b}| = 10$ 이므로 $\sqrt{(3k)^2 + (-k)^2} = 10$

$$10k^2 = 100 \quad \therefore k = \pm\sqrt{10}$$

$$k = \sqrt{10} \text{이면 } \vec{b} = (3\sqrt{10}, -\sqrt{10})$$

$$k = -\sqrt{10} \text{이면 } \vec{b} = (-3\sqrt{10}, \sqrt{10})$$

$$\text{답 } \vec{b} = (3\sqrt{10}, -\sqrt{10}), \vec{b} = (-3\sqrt{10}, \sqrt{10})$$

384

전략 주어진 등식을 간단히 한 후 성분으로 나타낸다.

$$\vec{PA} + 3\vec{PB} - \vec{PC} = 2\vec{AC} \text{에서}$$

$$(\vec{PA} - \vec{PC}) + 3\vec{PB} = 2\vec{AC}$$

$$\vec{CA} + 3\vec{PB} = 2\vec{AC}, \quad -\vec{AC} + 3\vec{PB} = 2\vec{AC}$$

$$\therefore \vec{PB} = \vec{AC}$$

$$\text{이때 } \vec{PB} = (-1, 3) - (a, b) = (-1-a, 3-b),$$

$$\vec{AC} = (-2, 4) - (2, 2) = (-4, 2) \text{이므로}$$

$$(-1-a, 3-b) = (-4, 2)$$

따라서 두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$-1-a = -4, 3-b = 2 \quad \therefore a = 3, b = 1$$

$$\therefore ab = 3 \quad \text{답 } 3$$

다른 풀이 원점 $O(0, 0)$ 에 대하여

$$\vec{OA} = (2, 2), \vec{OB} = (-1, 3),$$

$$\vec{OC} = (-2, 4), \vec{OP} = (a, b)$$

$$\vec{PA} + 3\vec{PB} - \vec{PC} = 2\vec{AC} \text{에서}$$

$$(\vec{OA} - \vec{OP}) + 3(\vec{OB} - \vec{OP}) - (\vec{OC} - \vec{OP})$$

$$= 2(\vec{OC} - \vec{OA})$$

$$3\vec{OA} + 3\vec{OB} - 3\vec{OC} = 3\vec{OP}$$

$$\therefore \vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC}$$

$$= (2, 2) + (-1, 3) - (-2, 4)$$

$$= (3, 1)$$

$$\therefore a = 3, b = 1$$

385

전략 점 P의 좌표를 (x, y) 로 놓고 두 벡터 $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ 를 성분으로 나타낸다.

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overrightarrow{PA} = (1, 3) - (x, y) = (1-x, 3-y)$$

$$\overrightarrow{PB} = (3, 1) - (x, y) = (3-x, 1-y)$$

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} &= (1-x, 3-y) + (3-x, 1-y) \\ &= (4-2x, 4-2y)\end{aligned}$$

이때 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}| = 10$ 이므로

$$\sqrt{(4-2x)^2 + (4-2y)^2} = 10$$

양변을 제곱하면 $(4-2x)^2 + (4-2y)^2 = 100$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-2)^2 = 25$$

따라서 점 P가 나타내는 원의 중심인 점 $(2, 2)$ 와 점 $(-4, -6)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(-4-2)^2 + (-6-2)^2} = 10$$

이때 점 P가 나타내는 원의 반지름의 길이가 5이므로 구하는 최솟값은 $10-5=5$ **답 5**

386

전략 정삼각형의 내심은 무게중심과 일치함을 이용한다.

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ 에서

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$

따라서 $\triangle ABC$ 의 내심의 좌표는 $(2, -3)$ 이고 정삼각형의 무게중심은 내심과 일치하므로 $\triangle ABC$ 의 무게중심을 G라 하면 $\overrightarrow{OG} = (2, -3)$

이때 $\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= 3\overrightarrow{OG} \\ &= 3(2, -3) = (6, -9)\end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = \sqrt{6^2 + (-9)^2} = 3\sqrt{13}$$

답 3√13

387

전략 점 P가 직선 $y = -x + 2$ 위의 점임을 이용하여 점 P의 좌표를 미지수로 나타낸다.

직선 $y = -x + 2$ 위의 점 P의 좌표를 $(a, -a+2)$ 라 하면

$$\overrightarrow{AP} = (a, -a+2) - (2, 3) = (a-2, -a-1)$$

$$\overrightarrow{BP} = (a, -a+2) - (3, 2) = (a-3, -a)$$

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} &= (a-2, -a-1) + (a-3, -a) \\ &= (2a-5, -2a-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore |\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP}| &= \sqrt{(2a-5)^2 + (-2a-1)^2} \\ &= \sqrt{8a^2 - 16a + 26} \\ &= \sqrt{8(a-1)^2 + 18}\end{aligned}$$

따라서 $|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP}|$ 는 $a=1$ 일 때 최소이므로 구하는 최솟값은 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ **답 3√2**

03 공간벡터의 성분

● 본책 187~193쪽

388

$$\begin{aligned}\text{답 (1)} \quad \vec{a} &= (2, -5, 1) & (2) \quad \vec{b} &= (-1, 0, 5) \\ (3) \quad \vec{c} &= -2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 & (4) \quad \vec{d} &= 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2\end{aligned}$$

389

$$(1) |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$$

$$(2) |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = 7$$

답 (1) √6 (2) 7

390

$$(1) \begin{cases} l-3=2, -4=-m+1, 2n-1=-n+5 \end{cases} \text{이므로} \\ l=5, m=5, n=2$$

$$(2) \begin{cases} m-4=2m+1, 2n+3=-m, 5-l=2n \end{cases} \text{이므로} \\ l=3, m=-5, n=1$$

답 (1) l=5, m=5, n=2

(2) l=3, m=-5, n=1

391

$$\begin{aligned}(1) -\vec{a} + 3\vec{b} &= -(2, -1, 0) + 3(0, 3, 4) \\ &= (-2, 1, 0) + (0, 9, 12) \\ &= (-2, 10, 12)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) -(\vec{a} - 2\vec{b}) + 3(\vec{a} - 2\vec{b}) &= -\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{a} - 6\vec{b} = 2\vec{a} - 4\vec{b} \\ &= 2(2, -1, 0) - 4(0, 3, 4) \\ &= (4, -2, 0) - (0, 12, 16) \\ &= (4, -14, -16)\end{aligned}$$

답 (1) (-2, 10, 12) (2) (4, -14, -16)

392

$$(1) \overrightarrow{AB} = (-3, 5, 1) - (1, 2, 3) = (-4, 3, -2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

$$(2) \overrightarrow{AB} = (-1, -2, 3) - (2, -1, 3)$$

$$= (-3, -1, 0)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{답 (1) } \overrightarrow{AB} = (-4, 3, -2), |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{29}$$

$$(2) \overrightarrow{AB} = (-3, -1, 0), |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10}$$

393

$$\vec{x} - \vec{a} = 3\vec{b} - \vec{x} \text{에서} \quad 2\vec{x} = \vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\therefore \vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$$

$$= \frac{1}{2}(-1, 3, 2) + \frac{3}{2}(3, 5, 4)$$

$$= (4, 9, 7)$$

따라서 벡터 $\vec{x}$ 의 모든 성분의 합은

$$4 + 9 + 7 = 20$$

답 20

394

$$3(\vec{a} - 2\vec{b}) - 2(3\vec{a} - \vec{c})$$

$$= 3\vec{a} - 6\vec{b} - 6\vec{a} + 2\vec{c}$$

$$= -3\vec{a} - 6\vec{b} + 2\vec{c}$$

$$= -3(1, 2, 1) - 6(-1, 0, 1) + 2(-2, 5, 3)$$

$$= (-1, 4, -3)$$

따라서 구하는 벡터의 크기는

$$\sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{26}$$

답 $\sqrt{26}$

395

$\vec{d} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$ 를 성분으로 나타내면

$$(3, -4, 5)$$

$$= p(0, 1, 1) + q(1, 0, 1) + r(1, 1, 0)$$

$$= (q+r, p+r, p+q)$$

두 공간벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$q+r=3, p+r=-4, p+q=5$$

세 식을 연립하여 풀면

$$p=-1, q=6, r=-3$$

$$\therefore pqr=18$$

답 18

396

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ 이므로 $\vec{b} = k\vec{a}$ ($k \neq 0$)라 하면

$$(x+1, -4, 8) = k(3, y, -2)$$

두 공간벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$x+1=3k, -4=ky, 8=-2k$$

$$\therefore k=-4, x=-13, y=1$$

따라서 $\vec{a} = (3, 1, -2)$, $\vec{b} = (-12, -4, 8)$ 이므로

$$\vec{a} + \vec{b} = (-9, -3, 6) \quad \text{답 } (-9, -3, 6)$$

397

$$\overrightarrow{AB} = (2, 0, -5) - (-1, 4, 0) = (3, -4, -5)$$

$$\overrightarrow{DC} = (1, 1, 3) - (0, -1, 8) = (1, 2, -5)$$

$$\therefore 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = 2(3, -4, -5) - (1, 2, -5)$$

$$= (5, -10, -5)$$

따라서 구하는 벡터의 크기는

$$\sqrt{5^2 + (-10)^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{6}$$

답 $5\sqrt{6}$

398

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재한다.

이때

$$\overrightarrow{AC} = (a, 3, b+2) - (1, 5, -2)$$

$$= (a-1, -2, b+4),$$

$$\overrightarrow{AB} = (2, 4, 1) - (1, 5, -2) = (1, -1, 3)$$

$$\text{이므로} \quad (a-1, -2, b+4) = k(1, -1, 3)$$

두 공간벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$a-1=k, -2=-k, b+4=3k$$

$$\therefore k=2, a=3, b=2$$

$$\therefore a+b=5$$

답 5

399

점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$\overrightarrow{PA} = (0, -1, 3) - (x, y, z)$$

$$= (-x, -y-1, -z+3)$$

$$\overrightarrow{PB} = (1, 3, -2) - (x, y, z)$$

$$= (-x+1, -y+3, -z-2)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PC} &= (2, 1, -1) - (x, y, z) \\ &= (-x+2, -y+1, -z-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} \\ &= (-3x+3, -3y+3, -3z)\end{aligned}$$

이때 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}| = 6$ 이므로

$$\sqrt{(-3x+3)^2 + (-3y+3)^2 + (-3z)^2} = 6$$

양변을 제곱하면

$$9(x-1)^2 + 9(y-1)^2 + 9z^2 = 36$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가

(1, 1, 0)이고 반지름의 길이가 2인 구이므로

$$a=1, b=1, c=0, r=2$$

$$\therefore a+b+c+r=4$$

답 4

연습문제

● 본책 194~195쪽

400

전략 벡터의 성분의 덧셈, 뺄셈, 실수배로 계산한다.

$$\begin{aligned}2(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}) - (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}) \\ &= \overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\end{aligned}$$

$$= (3, 1, -2) - 3(1, 2, -1) - (-4, 2, 1)$$

$$= (4, -7, 0)$$

따라서 구하는 벡터의 크기는

$$\sqrt{4^2 + (-7)^2 + 0^2} = \sqrt{65}$$

답 $\sqrt{65}$

401

전략 두 식을 연립하여 $\vec{x}, \vec{y}$ 를 성분으로 나타낸다.

$$\vec{x} + \vec{y} = (3, 6, 2) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$-\vec{x} + 2\vec{y} = (3, 0, 4) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{을 하면} \quad 3\vec{y} = (6, 6, 6)$$

$$\therefore \vec{y} = (2, 2, 2)$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\vec{x} + (2, 2, 2) = (3, 6, 2)$$

$$\therefore \vec{x} = (3, 6, 2) - (2, 2, 2) = (1, 4, 0)$$

$$\therefore \vec{x} - \vec{y} = (1, 4, 0) - (2, 2, 2)$$

$$= (-1, 2, -2)$$

답 $(-1, 2, -2)$

402

전략 벡터 $\vec{a} + t\vec{b}$ 를 성분으로 나타낸다.

$$\vec{a} + t\vec{b} = (1, -2, 3) + t(-1, 1, -1)$$

$$= (-t+1, t-2, -t+3)$$

$$\therefore |\vec{a} + t\vec{b}|$$

$$= \sqrt{(-t+1)^2 + (t-2)^2 + (-t+3)^2}$$

$$= \sqrt{3t^2 - 12t + 14}$$

$$= \sqrt{3(t-2)^2 + 2}$$

따라서 $|\vec{a} + t\vec{b}|$ 는 $t=2$ 일 때 최솟값 $\sqrt{2}$ 를 가지므로

$$\alpha=2, \beta=\sqrt{2} \quad \therefore \alpha^2 + \beta^2 = 6$$

답 6

403

전략 두 공간벡터가 서로 같을 조건을 이용한다.

$$p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$$

$$= p(1, 1, 1) + q(0, -1, 2) + r(-2, 3, 0)$$

$$= (p-2r, p-q+3r, p+2q)$$

따라서 두 공간벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$p-2r=2, p-q+3r=4, p+2q=-2$$

세 식을 연립하여 풀면 $p=2, q=-2, r=0$

$$\therefore p+q+r=0$$

답 0

404

전략 벡터 $\overrightarrow{AB}$ 와 방향이 반대인 단위벡터는 $-\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ 임을 이용한다.

$$\overrightarrow{AB} = (3, -2, 1) - (1, -4, 2) = (2, 2, -1)$$

$$\text{이므로} \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$

따라서 벡터 $\overrightarrow{AB}$ 와 방향이 반대인 단위벡터는

$$-\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}(2, 2, -1)$$

$$= \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

답 $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

405

전략 두 벡터 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 를 각각 성분으로 나타낸 후 두 벡터가 서로 평행할 조건을 이용한다.

$$\overrightarrow{AB} = (2, 0, -5) - (1, -2, 0) = (1, 2, -5)$$

$$\overrightarrow{AC} = (4, x, y) - (1, -2, 0) = (3, x+2, y)$$

이때 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$ 이므로 $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ ($k \neq 0$)라 하면

$$(3, x+2, y) = k(1, 2, -5)$$

두 공간벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$3 = k, x+2 = 2k, y = -5k$$

$$\therefore x = 4, y = -15$$

$$\therefore x + y = -11$$

답 -11

406

전략 각의 이등분선의 성질을 이용한다.

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}$$

이때 직선 OP가 $\angle AOB$ 의 이등분선이므로

$$|\overrightarrow{PA}| : |\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{OA}| : |\overrightarrow{OB}| \\ = \sqrt{2} : 3\sqrt{2} = 1 : 3$$

즉 점 P는 선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OA}}{1+3} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} \\ = \frac{3}{4}(1, 1, 0) + \frac{1}{4}(4, 1, 1) \\ = \left(\frac{7}{4}, 1, \frac{1}{4}\right)$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$\frac{7}{4} + 1 + \frac{1}{4} = 3$$

답 3

407

전략 두 벡터가 서로 평행할 조건을 이용하여 벡터 $\vec{c}$ 의 성분을 x 로 나타낸다.

$$\vec{a} + \vec{b} = (2, -1, 0) + (0, 2, x) = (2, 1, x)$$

두 벡터 $\vec{a} + \vec{b}$ 와 $\vec{c}$ 가 평행하므로

$$\vec{c} = k(\vec{a} + \vec{b}) \quad (k \neq 0) \text{라 하면}$$

$$(4, \alpha, \beta) = k(2, 1, x)$$

두 공간벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$4 = 2k, \alpha = k, \beta = kx$$

$$\therefore k = 2, \alpha = 2, \beta = 2x$$

즉 $\vec{c} = (4, 2, 2x)$ 이므로

$$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (2x)^2} = \sqrt{4x^2 + 20}$$

따라서 $\sqrt{4x^2 + 20} = 6$ 이므로 $4x^2 + 20 = 36$

$$x^2 = 4 \quad \therefore x = 2 \quad (\because x > 0)$$

답 2

408

전략 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 를 성분으로 나타내고 한 벡터가 다른 벡터의 실수배임을 이용한다.

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재한다.

이때

$$\overrightarrow{AC} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, b\right) - (1, -2, -1) \\ = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, b+1\right),$$

$$\overrightarrow{AB} = (a, -1, 3) - (1, -2, -1) \\ = (a-1, 1, 4)$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, b+1\right) = k(a-1, 1, 4)$$

두 공간벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$\frac{1}{2} = k(a-1), \frac{1}{2} = k, b+1 = 4k \\ \therefore a = 2, b = 1$$

따라서 B(2, -1, 3), C($\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1$)이므로

$$\overrightarrow{BC} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right) - (2, -1, 3) \\ = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2\right)$$

$$\therefore |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-2)^2} \\ = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

답

409

전략 사각형의 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같으면 평행사변형임을 이용한다.

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 0, 3) - (0, 1, 2) \\ = (-1, -1, 1)$$

$$\overrightarrow{DC} = (2, -3, 0) - (3, -2, -1) \\ = (-1, -1, 1)$$

따라서 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ 이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ 는 평행하고 그 크기가 같다.

즉 $\overrightarrow{AB}$ 와 $\overrightarrow{DC}$ 가 평행하고 그 길이가 같으므로 사각형 ABCD는 평행사변형이다.

답 풀이 참조

410

전략 점 P의 xy 평면, yz 평면, zx 평면 위로의 정사영이 각각 점 A, B, C임을 이용한다.

점 P(-1, 1, -1)의 xy 평면, yz 평면, zx 평면 위로의 정사영이 각각 점 A, B, C이므로

$$\begin{aligned} A(-1, 1, 0), B(0, 1, -1), C(-1, 0, -1) \\ \therefore \overrightarrow{OA}=(-1, 1, 0), \overrightarrow{OB}=(0, 1, -1), \\ \overrightarrow{OC}=(-1, 0, -1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } \overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC} \text{에서} \\ (-1, 1, -1) \\ =a(-1, 1, 0)+b(0, 1, -1)+c(-1, 0, -1) \\ =(-a-c, a+b, -b-c) \end{aligned}$$

두 공간벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$-1=-a-c, 1=a+b, -1=-b-c$$

$$\text{세 식을 연립하여 풀면 } a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{2}$$

$$\therefore abc=\frac{1}{8} \quad \text{답 } \frac{1}{8}$$

개념 노트

좌표공간의 점 (a, b, c) 에서 각 좌표평면에 내린 수선의 발의 좌표는 다음과 같다.

- ① xy 평면 $\Rightarrow (a, b, 0)$
- ② yz 평면 $\Rightarrow (0, b, c)$
- ③ zx 평면 $\Rightarrow (a, 0, c)$

411

전략 정육면체를 좌표공간에 나타내고 각 점의 좌표를 정한다.

점 H를 원점으로 하고 $\overline{HE}$, $\overline{HG}$, $\overline{HD}$ 를 각각 x 축, y 축, z 축으로 하는 좌표공간을 생각하여

$$\begin{aligned} A(1, 0, 1), D(0, 0, 1), F(1, 1, 0), \\ G(0, 1, 0) \end{aligned}$$

이라 하면

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG}=(0, 1, 0)-(1, 0, 1)=(-1, 1, -1), \\ \overrightarrow{DF}=(1, 1, 0)-(0, 0, 1)=(1, 1, -1) \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{DF}=(-1, 1, -1)+(1, 1, -1) \\ =(0, 2, -2) \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } |\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{DF}|=\sqrt{0^2+2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$$

답 $2\sqrt{2}$

04 벡터의 내적

● 본책 196~202쪽

412

$$\begin{aligned} (1) \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 30^\circ \\ &= 4 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \vec{a} \cdot \vec{b} &= -|\vec{a}| |\vec{b}| \cos (180^\circ - 120^\circ) \\ &= -4 \times 3 \times \frac{1}{2} = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \vec{a} \cdot \vec{b} &= -|\vec{a}| |\vec{b}| \cos (180^\circ - 180^\circ) \\ &= -4 \times 3 \times 1 = -12 \end{aligned}$$

답 (1) $6\sqrt{3}$ (2) -6 (3) -12

413

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times (-4) + 2 \times 6 = 0$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 3 + (-1) \times 4 = 2$$

$$(3) \vec{a} = (-2, 4), \vec{b} = (5, 0) \text{이므로}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \times 5 + 4 \times 0 = -10$$

답 (1) 0 (2) 2 (3) -10

414

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 = 20$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times (-2) + 2 \times 3 + (-2) \times 2 = 0$$

$$(3) \vec{a} = (3, -1, 2), \vec{b} = (2, 3, -4) \text{이므로}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 2 + (-1) \times 3 + 2 \times (-4) = -5$$

답 (1) 20 (2) 0 (3) -5

415

$$\begin{aligned} (1) \vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) &= \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 3^2 + 2 \times 5 = 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (3\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\ = 3\vec{a} \cdot \vec{a} + 3\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} \\ = 3|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{b}|^2 \\ = 3 \times 3^2 + 2 \times 5 - 4^2 = 21 \end{aligned}$$

답 (1) 19 (2) 21

416

$$(1) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos 60^\circ$$

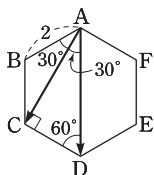
$$= 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$$

(2) $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BC}$ 이고 두 벡터 $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ 가 이루는 각의 크기가 120° 이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{FE} &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= -|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}| \cos (180^\circ - 120^\circ) \\ &= -2 \times 2 \times \frac{1}{2} = -2 \end{aligned}$$

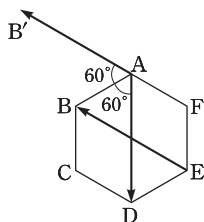
(3) 삼각형 ACD는 $\angle CAD = 30^\circ$, $\angle ACD = 90^\circ$ 인 직각삼각형이고 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} = 4$, $\overrightarrow{CD} = 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3} \\ \therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} &= |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AD}| \cos 30^\circ \\ &= 2\sqrt{3} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 \end{aligned}$$



(4) 오른쪽 그림과 같이 벡터 $\overrightarrow{EB}$ 의 시점을 점 A로 평행 이동하면 $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB'}$ 이고 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB'}$ 이 이루는 각의 크기가 120° 이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EB} &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB'} \\ &= -|\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{AB'}| \cos (180^\circ - 120^\circ) \\ &= -4 \times 4 \times \frac{1}{2} = -8 \end{aligned}$$



답 (1) 2 (2) -2 (3) 12 (4) -8

417

$$(1) |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AF}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

이때 삼각형 AFC는 정삼각형이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$ 가 이루는 각의 크기는 60° 이다.

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF} &= |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AF}| \cos 60^\circ \\ &= 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 4 \end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AF}$ 이고 두 벡터 $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ 가 이루는 각의 크기가 45° 이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DG} &= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} \\ &= |\overrightarrow{AE}| |\overrightarrow{AF}| \cos 45^\circ \\ &= 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$ 이고 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ 가 이루는 각의 크기가 90° 이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CG} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} \\ &= |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AE}| \cos 90^\circ \\ &= 2 \times 2 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

(4) $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ 이고

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} &= \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AC}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

직각삼각형 AGC에서

$$\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AG}|} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EG} &= \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= |\overrightarrow{AG}| |\overrightarrow{AC}| \cos \theta \\ &= 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = 8 \end{aligned}$$

답 (1) 4 (2) 4 (3) 0 (4) 8

다른 풀이 (4) $\triangle AGC$ 에서 $\overrightarrow{AG} \cos \theta = \overrightarrow{AC}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EG} &= \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= |\overrightarrow{AG}| |\overrightarrow{AC}| \cos \theta \\ &= |\overrightarrow{AC}|^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8 \end{aligned}$$

418

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} &= (-2, 2, 3) - (0, 2, 2) = (-2, 0, 1) \\ \overrightarrow{a} - \overrightarrow{c} &= (-2, 2, 3) - (1, 4, 1) = (-3, -2, 2) \\ \therefore (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}) &= -2 \times (-3) + 0 \times (-2) + 1 \times 2 \\ &= 8 \end{aligned}$$

답 8

419

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} &= (3, x-1) \cdot (-2, x+3) \\ &= 3 \times (-2) + (x-1)(x+3) \\ &= x^2 + 2x - 9 \end{aligned}$$

이때 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -1$ 이므로 $x^2 + 2x - 9 = -1$

$$x^2 + 2x - 8 = 0, \quad (x+4)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 2 \quad (\because x > 0)$$

답 2

420

$|\vec{a}| = 5$ 이므로

$$\sqrt{(x+2)^2 + 4^2} = 5$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 + 4x - 5 = 0, \quad (x+5)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = 1 \quad (\because x > 0)$$

따라서 $\vec{a} = (3, 4)$, $\vec{b} = (1, 5)$ 이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 1 + 4 \times 5 = 23$$

답 23

421

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ$$

$$= |\vec{a}| \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} |\vec{a}|$$

$|\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{13}$ 의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 = 13$$

$$|\vec{a}|^2 - 6 \times \frac{1}{2} |\vec{a}| + 9 \times 1^2 = 13$$

$$|\vec{a}|^2 - 3|\vec{a}| - 4 = 0$$

$$(|\vec{a}| + 1)(|\vec{a}| - 4) = 0$$

$$\therefore |\vec{a}| = 4 \quad (\because |\vec{a}| \geq 0)$$

답 4

422

$|\vec{a} + \vec{b}| = 5$ 의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 25 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$|\vec{a} - \vec{b}| = 3$ 의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A} + \textcircled{B}$ 을 하면 $2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 = 34$

$$\therefore |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 17$$

$\textcircled{A} - \textcircled{B}$ 을 하면 $4\vec{a} \cdot \vec{b} = 16 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 4$

$$\therefore |2\vec{a} - \vec{b}|^2 + |\vec{a} - 2\vec{b}|^2$$

$$= (4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2) + (|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2)$$

$$= 5(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) - 8\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= 5 \times 17 - 8 \times 4$$

$$= 53$$

답 53

05 벡터의 내적과 두 벡터가 이루는 각 • 본책 203~209쪽

423

$$\vec{a} - \vec{b} = (3, 1) - (1, 2) = (2, -1)$$

$$\vec{a} + 2\vec{c} = (3, 1) + 2(-2, 1) = (-1, 3)$$

$$\therefore (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{c})$$

$$= 2 \times (-1) + (-1) \times 3$$

$$= -5 < 0$$

따라서 두 벡터 $\vec{a} - \vec{b}$ 와 $\vec{a} + 2\vec{c}$ 가 이루는 각의 크기를

θ ($90^\circ < \theta \leq 180^\circ$)라 하면

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ - \theta) &= -\frac{(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{c})}{|\vec{a} - \vec{b}| |\vec{a} + 2\vec{c}|} \\ &= -\frac{-5}{\sqrt{2^2 + (-1)^2} \sqrt{(-1)^2 + 3^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

따라서 $180^\circ - \theta = 45^\circ$ 이므로

$$\theta = 135^\circ$$

답 135°

424

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x-1)x + 3 \times 2 = x^2 - x + 6$$

이때 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8$ 이므로

$$x^2 - x + 6 = 8$$

$$x^2 - x - 2 = 0, \quad (x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 2 \quad (\because x > 0)$$

따라서 $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (2, 2)$ 이고 $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ &= \frac{8}{\sqrt{1^2 + 3^2} \sqrt{2^2 + 2^2}} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

답 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

425

$$\vec{BA} = (1, -1, 0) - (2, 3, -1) = (-1, -4, 1)$$

$$\vec{BC} = (-2, 2, -2) - (2, 3, -1) = (-4, -1, -1)$$

$$\therefore \vec{BA} \cdot \vec{BC}$$

$$= -1 \times (-4) + (-4) \times (-1) + 1 \times (-1)$$

$$= 7$$

따라서 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} \\ &= \frac{7}{\sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + 1^2} \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{7}{18} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{7}{18}$$

426

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ 에서 $\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$
 즉 $|\vec{c}| = |-\vec{a} - \vec{b}|$ 이므로 양변을 제곱하면
 $|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$
 $14^2 = 6^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 10^2, \quad 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 60$
 $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 30$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 $\theta (0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{30}{6 \times 10} = \frac{1}{2} \\ \therefore \theta &= 60^\circ \end{aligned} \quad \text{답 } 60^\circ$$

427

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \geq 0$ 이므로 두 벡터 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 가 이루는 각의 크기를 $\theta (0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = \frac{3\sqrt{2}}{3 \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \therefore \theta &= 45^\circ \\ \therefore \triangle OAB &= \frac{1}{2} \times \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \times \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \quad \text{답 } \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

428

$2\vec{a} + \vec{b} = 2(-4, 3) + (2, 1) = (-6, 7)$
 $\vec{a} + x\vec{b} = (-4, 3) + x(2, 1) = (-4 + 2x, 3 + x)$
 두 벡터 $2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + x\vec{b}$ 가 서로 수직이면
 $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + x\vec{b}) = 0$ 이므로
 $-6(-4 + 2x) + 7(3 + x) = 0$
 $-5x + 45 = 0 \quad \therefore x = 9$

답 9

429

두 벡터 $\vec{a}, \vec{c}$ 가 서로 수직이면 $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ 이므로

$$3x + 0 \times y = 0 \quad \therefore x = 0$$

따라서 $\vec{c} = (0, y)$ 이므로

$$\vec{c} - \vec{a} = (0, y) - (3, 0) = (-3, y)$$

이때 두 벡터 $\vec{c} - \vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$\begin{aligned} (\vec{c} - \vec{a}) \cdot \vec{b} &= \pm |\vec{c} - \vec{a}| |\vec{b}| \\ -3 \times 1 + y \times (-3) &= \pm \sqrt{(-3)^2 + y^2} \sqrt{1^2 + (-3)^2} \\ -3 - 3y &= \pm \sqrt{10} \sqrt{9 + y^2} \end{aligned}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$\begin{aligned} y^2 - 18y + 81 &= 0, \quad (y - 9)^2 = 0 \\ \therefore y &= 9 \end{aligned}$$

따라서 $\vec{c} = (0, 9)$ 이므로

$$|\vec{c}| = \sqrt{0^2 + 9^2} = 9 \quad \text{답 } 9$$

430

$\vec{a} \parallel \vec{c}$ 에서 $\vec{a} \cdot \vec{c} = \pm |\vec{a}| |\vec{c}|$ 이므로

$$\begin{aligned} 4 \times 8 + (-2) \times (-4) + p \times 2 &= \pm \sqrt{4^2 + (-2)^2 + p^2} \sqrt{8^2 + (-4)^2 + 2^2} \\ 2p + 40 &= \pm 2\sqrt{21} \sqrt{p^2 + 20} \end{aligned}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $p^2 - 2p + 1 = 0$

$$(p - 1)^2 = 0 \quad \therefore p = 1$$

이때 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 에서 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} 4 \times 2 + (-2) \times 3 + 1 \times q &= 0 \quad \therefore q = -2 \\ \therefore p^2 + q^2 &= 5 \end{aligned} \quad \text{답 } 5$$

431

$\vec{p} = (x, y, z)$ 라 하면 $\vec{a} \perp \vec{p}$ 에서 $\vec{a} \cdot \vec{p} = 0$ 이므로

$$2x + 2y + z = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\vec{b} \perp \vec{p}$ 에서 $\vec{b} \cdot \vec{p} = 0$ 이므로

$$2x - 3y - 4z = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

또 $|\vec{p}| = 3$ 이므로 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 3$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면 $5y + 5z = 0 \quad \therefore z = -y$

$z = -y$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $2x + y = 0$

$$\therefore x = -\frac{1}{2}y$$

$x = -\frac{1}{2}y, z = -y$ 를 ㉔에 대입하면

$$\left(-\frac{1}{2}y\right)^2 + y^2 + (-y)^2 = 9$$

$$y^2 = 4 \quad \therefore y = \pm 2$$

$y = -2$ 이면 $x = 1, z = 2$ 이므로

$$\vec{p} = (1, -2, 2)$$

$y = 2$ 이면 $x = -1, z = -2$ 이므로

$$\vec{p} = (-1, 2, -2)$$

$$\text{답 } \vec{p} = (1, -2, 2), \vec{p} = (-1, 2, -2)$$

432

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} &= \vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}| |\vec{c}| \cos 60^\circ - |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} |\vec{a}|^2 - \frac{1}{2} |\vec{a}|^2 = 0 \end{aligned}$$

따라서 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$ 이므로 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$

답 풀이 참조

433

(1) $\overrightarrow{OA} = (1, 2), \overrightarrow{OB} = (4, 1)$ 이므로

$$|\overrightarrow{OA}|^2 = 1^2 + 2^2 = 5,$$

$$|\overrightarrow{OB}|^2 = 4^2 + 1^2 = 17,$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \times 4 + 2 \times 1 = 6$$

$$\therefore \triangle AOB$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{5 \times 17 - 6^2} = \frac{7}{2}$$

(2) $\overrightarrow{OA} = (-3, 4, 3), \overrightarrow{OB} = (-3, 4, 1)$ 이므로

$$|\overrightarrow{OA}|^2 = (-3)^2 + 4^2 + 3^2 = 34,$$

$$|\overrightarrow{OB}|^2 = (-3)^2 + 4^2 + 1^2 = 26,$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -3 \times (-3) + 4 \times 4 + 3 \times 1 = 28$$

$$\therefore \triangle AOB$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{34 \times 26 - 28^2} = 5$$

$$\text{답 (1) } \frac{7}{2} \quad (2) 5$$

다른 풀이 (1) $\triangle AOB = \frac{1}{2} \times |1 \times 1 - 2 \times 4| = \frac{7}{2}$

연습 문제

• 본책 210~212쪽

434

전략 삼각형의 넓이를 이용하여 두 벡터 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 가 이루는 각의 크기를 구한다.

$\angle BAC = \theta$ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$)라 하면 삼각형 ABC의 넓이가 $5\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 5 \sin \theta = 5\sqrt{3} \quad \therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 이므로 $\theta = 60^\circ$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ$$

$$= 4 \times 5 \times \frac{1}{2} = 10$$

답 10

435

전략 벡터의 내적을 성분으로 나타내어 x 에 대한 식을 세운다.

$$\overrightarrow{AC} = (5, 2) - (1, x) = (4, 2-x)$$

$$\overrightarrow{BD} = (x+2, 0) - (2, -1) = (x, 1)$$

이때 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 14$ 이므로

$$4 \times x + (2-x) \times 1 = 14, \quad 3x = 12$$

$$\therefore x = 4$$

답 4

436

전략 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 를 구하여 $|2\vec{a} - 3\vec{b}|^2$ 의 전개식에 대입한다.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3 \text{이므로}$$

$$|2\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2$$

$$= 4 \times 3^2 - 12 \times 3 + 9 \times 2^2$$

$$= 36$$

$$\therefore |2\vec{a} - 3\vec{b}| = 6$$

답 6

437

전략 먼저 주어진 벡터의 크기를 이용하여 x 의 값을 구한다.

$$\vec{b} - \vec{a} = (2x-1, x+2) - (x, -1)$$

$$= (x-1, x+3)$$

이때 $|\vec{b} - \vec{a}| = 2\sqrt{10}$ 이므로

$$\sqrt{(x-1)^2 + (x+3)^2} = 2\sqrt{10}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 + 2x - 15 = 0, \quad (x+5)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 3 \quad (\because x > 0)$$

즉 $\vec{a}=(3, -1), \vec{b}=(5, 5)$ 이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 5 + (-1) \times 5 = 10$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ &= \frac{10}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \sqrt{5^2 + 5^2}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

답 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

438

전략 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 의 크기와 내적을 이용하여 두 벡터가 이루는 각의 크기를 구한다.

$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 θ ($90^\circ < \theta < 180^\circ$)라 하면

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ - \theta) &= -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ &= -\frac{-15}{6 \times 5} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

즉 $180^\circ - \theta = 60^\circ$ 이므로

$$\theta = 120^\circ$$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$\begin{aligned} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(180^\circ - 120^\circ) &= 6 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 15\sqrt{3} \end{aligned}$$

답 $15\sqrt{3}$

439

전략 벡터의 내적의 성질을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

$$\neg. \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{b} \text{이면 } |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$$

$$\therefore |\vec{a}| = |\vec{b}| \text{ (참)}$$

$$\neg. \text{ [반례] } \vec{a}=(1, 0), \vec{b}=(2, 1), \vec{c}=(2, 2) \text{ 이면}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 2 + 0 \times 1 = 2,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \times 2 + 0 \times 2 = 2$$

이므로 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ 이지만 $\vec{b} \neq \vec{c}$ 이다. (거짓)

$$\neg. \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} \text{ 이면 } \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\therefore \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

따라서 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b} - \vec{a}$ 는 서로 수직이다. (참)

이상에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

답 $\neg, \neg$

440

전략 두 벡터가 서로 수직이면 두 벡터의 내적이 0임을 이용하여 p, q, r 의 값을 구한다.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \text{에서 } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ 이므로}$$

$$-7p + 4q + 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\vec{b} \perp \vec{c} \text{에서 } \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \text{ 이므로}$$

$$q + r + 7 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\vec{c} \perp \vec{a} \text{에서 } \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \text{ 이므로 } -p + 2r + 4 = 0$$

$$\therefore p = 2r + 4 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{A} \text{을 } \textcircled{C} \text{에 대입하면 } -7(2r + 4) + 4q + 2 = 0$$

$$\therefore 2q - 7r - 13 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

$$\textcircled{C}, \textcircled{D} \text{을 연립하여 풀면 } q = -4, r = -3$$

$$r = -3 \text{을 } \textcircled{C} \text{에 대입하면 } p = -2$$

$$\therefore pqr = -24 \quad \text{답 } -24$$

441

전략 두 벡터 $\vec{AB}, \vec{AC}$ 와 두 벡터 $\vec{AF}, \vec{AC}$ 가 이루는 각의 크기를 각각 구하여 내적을 구한다.

$$(\vec{AB} + \vec{AF}) \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AF} \cdot \vec{AC}$$

$\dots\dots \textcircled{A}$

이때 두 벡터 $\vec{AB}, \vec{AC}$ 가 이루는

각의 크기는 30° , 두 벡터 $\vec{AF},$

$\vec{AC}$ 가 이루는 각의 크기는 90° 이

고 $|\vec{AB}| = |\vec{AF}| = 2$ 이다.

또 $CF = 4$ 이므로 직각삼각형

ACF에서

$$AC = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$$

따라서 $\textcircled{A}$ 에서

$$\begin{aligned} (\vec{AB} + \vec{AF}) \cdot \vec{AC} &= |\vec{AB}| |\vec{AC}| \cos 30^\circ + |\vec{AF}| |\vec{AC}| \cos 90^\circ \\ &= 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times 2\sqrt{3} \times 0 = 6 \end{aligned}$$

답 6

[다른 풀이] 오른쪽 그림과 같이 정

육각형의 세 대각선 AD, BE,

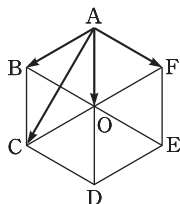
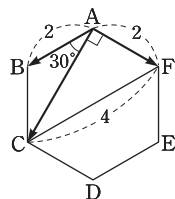
CF의 교점을 O라 하면

$$\vec{AB} + \vec{AF} = \vec{AO}$$

이때 $|\vec{AO}| = 2, |\vec{AC}| = 2\sqrt{3}$ 이

고 두 벡터 $\vec{AO}, \vec{AC}$ 가 이루는

각의 크기가 30° 이므로



$$\begin{aligned}
 (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}) \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} \\
 &= |\overrightarrow{AO}| |\overrightarrow{AC}| \cos 30^\circ \\
 &= 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6
 \end{aligned}$$

442

전략 두 삼각형 ABC, BCD가 모두 정삼각형임을 이용하여 두 벡터 $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MD}$ 의 크기와 두 벡터가 이루는 각의 크기를 구한다. 삼각형 ABC와 삼각형 BCD는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로

$$\overline{AM} = \overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$$

이때 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 삼각형 BCD의 무게중심이므로 선분 DM을 2 : 1로 내분한다.

즉 $\overline{HM} = \frac{1}{3} \overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 두 벡터 $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MD}$ 가

이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\overline{HM}}{\overline{AM}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD} &= |\overrightarrow{MA}| |\overrightarrow{MD}| \cos \theta \\
 &= \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{3} = 1
 \end{aligned}$$

답 1

443

전략 내적의 정의를 이용하여 정사영의 크기를 내적을 포함한 식으로 나타낸다.

$\overrightarrow{OA} = (2, 3, -1)$, $\overrightarrow{OB} = (-1, 2, 2)$ 이므로

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2 \times (-1) + 3 \times 2 + (-1) \times 2 = 2$$

즉 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \geq 0$ 이므로 오

른쪽 그림과 같이 두 벡터

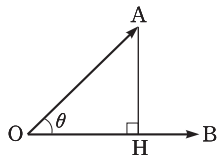
$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 가 이루는 각의 크

기를 θ ($0^\circ \leq \theta < 90^\circ$)라 하

고, 점 A의 직선 OB 위로의 정사영을 H라 하면 벡터 $\overrightarrow{OA}$ 의 직선 OB 위로의 정사영은 벡터 $\overrightarrow{OH}$ 이므로 구하는 정사영의 크기는

$$|\overrightarrow{OH}| = |\overrightarrow{OA}| \cos \theta$$

이때 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos \theta$ 에서



$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{OA}| \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{2}{3} \\
 \therefore |\overrightarrow{OH}| &= |\overrightarrow{OA}| \cos \theta = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

답 $\frac{2}{3}$

444

전략 주어진 조건을 이용하여 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 를 구한다.

$|\vec{a} - \vec{b}| = 2\sqrt{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 12$$

$$4^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2^2 = 12 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 4$$

이때

$$\begin{aligned}
 |t\vec{a} + \vec{b}|^2 &= t^2 |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\
 &= t^2 \times 4^2 + 2t \times 4 + 2^2 \\
 &= 16t^2 + 8t + 4
 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 |t\vec{a} + \vec{b}| &= \sqrt{16t^2 + 8t + 4} \\
 &= \sqrt{16\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + 3}
 \end{aligned}$$

따라서 $|t\vec{a} + \vec{b}|$ 는 $t = -\frac{1}{4}$ 일 때 최솟값 $\sqrt{3}$ 을 갖는다.

답 $\sqrt{3}$

445

전략 수직인 두 벡터의 내적이 0임을 이용한다.

두 벡터 $\vec{a} + \vec{b}$, $5\vec{a} - 2\vec{b}$ 가 서로 수직이면

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 2\vec{b}) = 0$ 이므로

$$5|\vec{a}|^2 + 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 2|\vec{b}|^2 = 0$$

이때 $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$ 이므로

$$5|\vec{a}|^2 + 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 8|\vec{a}|^2 = 0$$

$$3\vec{a} \cdot \vec{b} = 3|\vec{a}|^2 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를

θ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$)라 하면

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}| \times 2|\vec{a}|} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

답 60°

446

전략 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 를 성분으로 나타내고 $|\overrightarrow{AB}|^2$, $|\overrightarrow{AC}|^2$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 를 구한다.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (-1, 3) - (1, 1) = (-2, 2), \\ \overrightarrow{AC} &= (-3, 0) - (1, 1) = (-4, -1) \text{이므로} \\ |\overrightarrow{AB}|^2 &= (-2)^2 + 2^2 = 8, \\ |\overrightarrow{AC}|^2 &= (-4)^2 + (-1)^2 = 17, \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= -2 \times (-4) + 2 \times (-1) = 6 \\ \therefore \triangle ABC \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{8 \times 17 - 6^2} = 5\end{aligned}$$

답 5

다른 풀이 세 점 A(1, 1), B(-1, 3), C(-3, 0)을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점을 각각 A', B', C'이라 하면

$$\begin{aligned}A'(0, 0), B'(-2, 2), C'(-4, -1) \\ \text{이때 } \overrightarrow{A'B'} = (-2, 2), \overrightarrow{A'C'} = (-4, -1) \text{이므로} \\ \triangle ABC = \triangle A'B'C' \\ &= \frac{1}{2} \times |-2 \times (-1) - 2 \times (-4)| \\ &= 5\end{aligned}$$

447

전략 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ 로 놓고 두 벡터 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{CD}$ 를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 로 나타낸다.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b} \text{라 하면} \\ |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4 \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 6\end{aligned}$$

이때 점 P는 $\overrightarrow{AB}$ 를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BA} = \frac{2}{3} \vec{a}$$

또 점 Q는 $\overrightarrow{BC}$ 의 중점이므로

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BP} = -\frac{2}{3} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}$$

한편 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = \vec{a}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CD} &= \left(-\frac{2}{3} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}\right) \cdot \vec{a} \\ &= -\frac{2}{3} |\vec{a}|^2 + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= -\frac{2}{3} \times 3^2 + \frac{1}{2} \times 6 \\ &= -3\end{aligned}$$

답 -3

다른 풀이 $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} = 2$, $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = 2$

즉 $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BQ}$ 이므로 삼각형 PBQ는 정삼각형이다.

$$\therefore |\overrightarrow{PQ}| = \overrightarrow{PQ} = 2$$

이때 $\angle APQ = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ 이므로 두 벡터 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{CD}$ 가 이루는 각의 크기는 120° 이다.

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CD} \\ &= -|\overrightarrow{PQ}| |\overrightarrow{CD}| \cos(180^\circ - 120^\circ) \\ &= -2 \times 3 \times \frac{1}{2} = -3\end{aligned}$$

448

전략 선분의 내분점과 삼각형의 무게중심의 위치벡터를 이용하여 두 벡터 $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{GM}$ 을 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 로 나타낸다.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}, \overrightarrow{OM} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$$

이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GM} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OG} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} \\ &= \frac{-2\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}}{6}\end{aligned}$$

이때 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ 이고

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{GM} \\ &= \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} \cdot \frac{-2\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}}{6} \\ &= \frac{1}{18} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-2\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}) \\ &= \frac{1}{18} (-2|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + 3\vec{a} \cdot \vec{c} + 3\vec{b} \cdot \vec{c}) \\ &= \frac{1}{18} \times \left(-2 \times 1^2 + 1^2 - \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{12}$

449

전략 직육면체를 좌표공간에 나타내고 각 점의 좌표를 정한다.

점 H를 원점으로 하고 직선 HE, HG, HD를 각각 x 축, y 축, z 축으로 하는 좌표공간을 생각하면

$$B(2, 4, 2), D(0, 0, 2), F(2, 4, 0),$$

$$G(0, 4, 0)$$

으로 놓을 수 있다.

따라서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DF} &= (2, 4, 0) - (0, 0, 2) = (2, 4, -2), \\ \overrightarrow{BG} &= (0, 4, 0) - (2, 4, 2) = (-2, 0, -2)\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BG} &= 2 \times (-2) + 4 \times 0 + (-2) \times (-2) = 0 \\ \therefore \overrightarrow{DF} &\perp \overrightarrow{BG}\end{aligned}$$

즉 두 벡터 $\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{BG}$ 가 이루는 각의 크기는 90° 이다.

답 90°

450

전략 세 점 O, H, Q가 한 직선 위에 있고, $\overrightarrow{HP} \perp \overrightarrow{OQ}$ 임을 이용한다.

$\overrightarrow{OQ} = (4, 2)$ 이고 세 점 O, H, Q가 한 직선 위에 있으므로 $\overrightarrow{OH} = k\overrightarrow{OQ}$ 를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재한다.

즉 $\overrightarrow{OH} = (4k, 2k)$ 이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OH} = (2, 2) - (4k, 2k) \\ &= (2-4k, 2-2k)\end{aligned}$$

이때 $\overrightarrow{HP} \perp \overrightarrow{OQ}$ 에서 $\overrightarrow{HP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned}4(2-4k) + 2(2-2k) &= 0 \\ 12-20k &= 0 \quad \therefore k = \frac{3}{5}\end{aligned}$$

따라서 $\overrightarrow{OH} = \left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$ 이므로

$$\begin{aligned}m &= \frac{12}{5}, n = \frac{6}{5} \\ \therefore m+n &= \frac{18}{5}\end{aligned}$$

답 $\frac{18}{5}$

3 도형의 방정식

III. 벡터

01 직선의 방정식

● 본책 214~220쪽

451

$$(1) 2(x+1) + (y-3) = 0$$

$$\therefore 2x + y - 1 = 0$$

$$(2) -3(x+2) + 2(y-1) = 0$$

$$\therefore 3x - 2y + 8 = 0$$

$$(3) \text{ 직선 } \frac{x+4}{5} = -y-1, \text{ 즉 } \frac{x+4}{5} = \frac{y+1}{-1} \text{ 의 방향}$$

$$\text{벡터는 } \vec{u} = (5, -1)$$

따라서 점 $(-2, -4)$ 를 지나고 법선벡터가

$$\vec{u} = (5, -1) \text{ 인 직선의 방정식은}$$

$$5(x+2) - (y+4) = 0$$

$$\therefore 5x - y + 6 = 0$$

$$\text{답 (1) } 2x + y - 1 = 0 \quad (2) 3x - 2y + 8 = 0$$

$$(3) 5x - y + 6 = 0$$

452

$$\text{답 (1) } \frac{x-2}{4} = \frac{3-y}{5} \quad (2) \frac{x}{3} = \frac{y}{2}$$

$$(3) x = 5$$

$$(4) y = -3$$

453

$$(1) \overrightarrow{AB} = (-4, 3) - (2, 1) = (-6, 2)$$

따라서 점 A(2, 1)을 지나고 방향벡터가

$$\overrightarrow{AB} = (-6, 2) \text{ 인 직선의 방정식은}$$

$$\frac{x-2}{-6} = \frac{y-1}{2} \quad \therefore \frac{x-2}{3} = 1-y$$

$$(2) \overrightarrow{AB} = (5, -1) - (-2, 4) = (7, -5)$$

따라서 점 A(-2, 4)를 지나고 방향벡터가

$$\overrightarrow{AB} = (7, -5) \text{ 인 직선의 방정식은}$$

$$\frac{x+2}{7} = \frac{y-4}{-5} \quad \therefore \frac{x+2}{7} = \frac{4-y}{5}$$

$$\text{답 (1) } \frac{x-2}{3} = 1-y$$

$$(2) \frac{x+2}{7} = \frac{4-y}{5}$$

454

- (1) $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-1}$
 $\therefore \frac{x-3}{2} = y = 4-z$
- (2) $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-3}{2}$
 $\therefore \frac{2-x}{3} = y-5 = \frac{z-3}{2}$
- (3) $\frac{x-3}{2} = y+1, z=2$
- (4) $x=2, z=-1$

답 풀이 참조

455

- (1) $\overrightarrow{AB} = (2, -1, 3) - (1, 2, -2) = (1, -3, 5)$
 따라서 점 A(1, 2, -2)를 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{AB} = (1, -3, 5)$ 인 직선의 방정식은
 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+2}{5}$
 $\therefore x-1 = \frac{2-y}{3} = \frac{z+2}{5}$
- (2) $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 4) - (0, -3, 1) = (1, 5, 3)$
 따라서 점 A(0, -3, 1)을 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{AB} = (1, 5, 3)$ 인 직선의 방정식은
 $x = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{3}$

답 (1) $x-1 = \frac{2-y}{3} = \frac{z+2}{5}$

(2) $x = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{3}$

456

두 점 A(2, 3), B(4, 2)를 지나는 직선의 방향벡터는
 $\overrightarrow{AB} = (4, 2) - (2, 3) = (2, -1)$
 평행한 두 직선은 방향벡터가 서로 같으므로 점
 (3, 1)을 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{AB} = (2, -1)$ 인 직선
 의 방정식은

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} \quad \therefore \frac{x-3}{2} = 1-y$$

답 $\frac{x-3}{2} = 1-y$

457

직선 $x-3 = \frac{1-y}{2}$, 즉 $x-3 = \frac{y-1}{-2}$ 의 방향벡터는
 $\vec{u} = (1, -2)$
 평행한 두 직선은 방향벡터가 서로 같으므로 점
 (1, -4)를 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (1, -2)$ 인 직선
 의 방정식은 $x-1 = \frac{y+4}{-2}$
 이 직선이 점 (k, 4)를 지나므로
 $k-1 = -4 \quad \therefore k = -3$

답 -3

458

직선 $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = -z$ 의 방향벡터는
 $\vec{u} = (2, 3, -1)$
 평행한 두 직선은 방향벡터가 서로 같으므로 점
 (4, 5, -1)을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (2, 3, -1)$ 인
 직선의 방정식은
 $\frac{x-4}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+1}{-1}$
 yz 평면 위의 점은 x 좌표가 0이므로 위의 식에 $x=0$ 을
 대입하면
 $-2 = \frac{y-5}{3} = \frac{z+1}{-1} \quad \therefore y = -1, z = 1$
 따라서 구하는 점의 좌표는
 (0, -1, 1)

답 (0, -1, 1)

459

$3(x-2) = -6(y+2) = 2(z+1)$ 에서
 $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{3}$
 이므로 직선의 방향벡터는
 $\vec{u} = (2, -1, 3)$
 평행한 두 직선은 방향벡터가 서로 같으므로 점
 (1, 3, 5)를 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (2, -1, 3)$ 인 직
 선의 방정식은
 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{3}$
 이 직선이 점 (a, 6, b)를 지나므로
 $\frac{a-1}{2} = -3 = \frac{b-5}{3} \quad \therefore a = -5, b = -4$
 $\therefore a+b = -9$

답 -9

460

$$\overrightarrow{AB} = (-3, 6, 1) - (-2, 3, 5) = (-1, 3, -4)$$

따라서 점 A(-2, 3, 5)를 지나고 방향벡터가

$\overrightarrow{AB} = (-1, 3, -4)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-5}{-4}$$

이 직선이 점 (0, a, b)를 지나므로

$$-2 = \frac{a-3}{3} = \frac{b-5}{-4} \quad \therefore a = -3, b = 13$$

$$\therefore ab = -39$$

답 -39

461

$$x-3=2y-4=\frac{2z-10}{3}=t \text{로 놓으면}$$

$$x=t+3, y=\frac{1}{2}t+2, z=\frac{3}{2}t+5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x+1=3y-3=\frac{z+4}{2}=s \text{로 놓으면}$$

$$x=s-1, y=\frac{1}{3}s+1, z=2s-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$t+3=s-1, \frac{1}{2}t+2=\frac{1}{3}s+1,$$

$$\frac{3}{2}t+5=2s-4$$

세 식을 연립하여 풀면 $t=2, s=6$

$t=2$ 를 ①에 대입하면 $x=5, y=3, z=8$

따라서 구하는 교점의 좌표는

$$(5, 3, 8)$$

답 (5, 3, 8)

참고 $s=6$ 을 ②에 대입하여 교점의 좌표를 구할 수도 있다.

한편 ①, ②을 동시에 만족시키는 실수 t, s 가 존재하지 않으면

두 직선은 만나지 않는다.

02 두 직선이 이루는 각

• 본책 221~225쪽

462

직선 $1-x=\frac{y-2}{10}=\frac{z}{7}$ 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (-1, 10, 7)$$

직선 $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z-2}{4}$ 의 방향벡터를 $\vec{v}$ 라 하면

$$\vec{v} = (3, 5, 4)$$

따라서 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \\ &= \frac{|-1 \times 3 + 10 \times 5 + 7 \times 4|}{\sqrt{(-1)^2 + 10^2 + 7^2} \sqrt{3^2 + 5^2 + 4^2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

답 풀이 참조

463

(1) 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (2, 1), \vec{v} = (3, -1)$$

두 직선이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|2 \times 3 + 1 \times (-1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2} \sqrt{3^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

(2) 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (1, 2, -1), \vec{v} = (2, 1, 1)$$

두 직선이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \\ &= \frac{|1 \times 2 + 2 \times 1 + (-1) \times 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

답 (1) 45° (2) 60°

464

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (-2, a), \vec{v} = (6, 3)$$

(1) 두 직선 l, m 이 평행하면 $\vec{u} = k\vec{v}$ ($k \neq 0$)이므로

$$(-2, a) = k(6, 3)$$

따라서 $-2 = 6k, a = 3k$ 이므로

$$k = -\frac{1}{3}, a = -1$$

(2) 두 직선 l, m 이 수직이면 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ 이므로

$$-2 \times 6 + a \times 3 = 0 \quad \therefore a = 4$$

답 (1) -1 (2) 4

465

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (a, -4, 2), \vec{v} = (3, -a+4, 1)$$

(1) 두 직선 l, m 이 평행하면 $\vec{u} = k\vec{v} (k \neq 0)$ 이므로

$$(a, -4, 2) = k(3, -a+4, 1)$$

따라서 $a = 3k, -4 = k(-a+4), 2 = k$ 이므로

$$a = 6$$

(2) 두 직선 l, m 이 수직이면 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ 이므로

$$a \times 3 - 4(-a+4) + 2 \times 1 = 0$$

$$7a = 14 \quad \therefore a = 2$$

답 (1) 6 (2) 2

466

두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (-1, 2, 3), \vec{v} = (3, 1, -2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \\ &= \frac{|-1 \times 3 + 2 \times 1 + 3 \times (-2)|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\theta = 60^\circ$ 이므로

$$\tan \theta = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

답 $\sqrt{3}$

467

두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (\sqrt{3}, 5), \vec{v} = (2, a)$$

이때 두 직선이 이루는 각의 크기가 30° 이므로

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} &= \cos 30^\circ \\ \frac{|\sqrt{3} \times 2 + 5a|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 5^2} \sqrt{2^2 + a^2}} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ |2\sqrt{3} + 5a| &= \sqrt{21} \sqrt{4 + a^2} \end{aligned}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 + 5\sqrt{3}a - 18 = 0$$

$$(a + 6\sqrt{3})(a - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore a = -6\sqrt{3} \text{ 또는 } a = \sqrt{3}$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$-6\sqrt{3} + \sqrt{3} = -5\sqrt{3}$$

답 $-5\sqrt{3}$

468

두 점 A, B를 지나는 직선의 방향벡터는

$$\vec{AB} = (-1, a) - (a, 3)$$

$$= (-1-a, a-3)$$

직선 $\frac{x+1}{3} = y-2$ 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (3, 1)$$

이때 두 직선이 서로 수직이므로 $\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0$ 에서

$$(-1-a) \times 3 + (a-3) \times 1 = 0$$

$$-2a - 6 = 0 \quad \therefore a = -3$$

답 -3

469

세 직선 l, m, n 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 라 하면

$$\vec{u} = (3, 2, 1), \vec{v} = (p, 6, -q), \vec{w} = (1, r, 3)$$

$l \parallel m$ 이므로 $\vec{u} = k\vec{v} (k \neq 0)$ 에서

$$(3, 2, 1) = k(p, 6, -q)$$

따라서 $3 = kp, 2 = 6k, 1 = -kq$ 이므로

$$k = \frac{1}{3}, p = 9, q = -3$$

또 $l \perp n$ 이므로 $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ 에서

$$3 \times 1 + 2r + 1 \times 3 = 0 \quad \therefore r = -3$$

$$\therefore p + q + r = 3$$

답 3

470

$$\frac{x+1}{2} = y-3 = \frac{4-z}{3} = t \text{로 놓으면}$$

$$x = 2t - 1, y = t + 3, z = -3t + 4$$

점 A에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H라 하고

$H(2t-1, t+3, -3t+4)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} \vec{AH} &= (2t-1, t+3, -3t+4) - (1, -2, -1) \\ &= (2t-2, t+5, -3t+5) \end{aligned}$$

이때 직선 l 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (2, 1, -3)$$

$\vec{AH} \perp \vec{u}$ 에서 $\vec{AH} \cdot \vec{u} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} (2t-2) \times 2 + (t+5) \times 1 + (-3t+5) \times (-3) \\ = 0 \end{aligned}$$

$$14t - 14 = 0 \quad \therefore t = 1$$

따라서 $\vec{AH} = (0, 6, 2)$ 이므로 구하는 거리는

$$|\vec{AH}| = \sqrt{0^2 + 6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$$

답 $2\sqrt{10}$



471

전략 점의 좌표와 방향벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구한다.

직선 $2(x+1) = \frac{1-y}{2}$, 즉 $x+1 = \frac{y-1}{-4}$ 의 방향벡터는

$$\vec{u} = (1, -4)$$

평행한 두 직선은 방향벡터가 서로 같으므로 점

$(3, 2)$ 를 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (1, -4)$ 인 직선의 방정식은

$$x-3 = \frac{y-2}{-4}$$

④ 직선의 방정식에 $x=1$ 을 대입하면

$$y=10$$

따라서 점 $(1, 8)$ 은 이 직선 위의 점이 아니다.

답 ④

472

전략 직선 $\frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2} = \frac{z-z_1}{u_3}$ 의 방향벡터는

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 임을 이용한다.

주어진 직선의 방향벡터는 $\vec{u} = (2, -1, 2)$

② $\vec{a} \cdot \vec{u} = 2 \times 2 + 2 \times (-1) + (-1) \times 2 = 0$ 이므로

$$\vec{a} \perp \vec{u}$$

③ $\vec{b} = -2\vec{u}$ 이므로 $\vec{b} \parallel \vec{u}$

④ $\frac{x-1}{2} = 2-y = \frac{z+4}{2}$ 에 $y=0, z=0$ 을 대입하면

$$\frac{x-1}{2} = 2 \quad \therefore x=5$$

따라서 주어진 직선은 x 축과 점 $(5, 0, 0)$ 에서 만난다.

⑤ $\frac{x-1}{2} = 2-y = \frac{z+4}{2}$ 에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

등식이 성립하지 않으므로 주어진 직선은 z 축과 만나지 않는다.

답 ⑤

473

전략 직선 위의 점의 좌표를 실수 t 에 대한 식으로 나타낸다.

$$\frac{1-x}{2} = y = \frac{z-1}{2} = t \text{로 놓으면}$$

$$x=1-2t, y=t, z=2t+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 $x^2+y^2+z^2=38$ 에 대입하면

$$(1-2t)^2 + t^2 + (2t+1)^2 = 38$$

$$9t^2 = 36, \quad t^2 = 4$$

$$\therefore t=2 \text{ 또는 } t=-2$$

$t=2$ 를 ①에 대입하면 $x=-3, y=2, z=5$

$t=-2$ 를 ①에 대입하면 $x=5, y=-2, z=-3$

따라서 두 교점 A, B의 좌표는 $(-3, 2, 5),$

$(5, -2, -3)$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(5+3)^2 + (-2-2)^2 + (-3-5)^2} \\ &= 12 \end{aligned}$$

답 12

474

전략 두 점을 지나는 직선의 방향벡터를 구한다.

두 점 $(-1, -1), (3, 2)$ 를 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (3, 2) - (-1, -1) = (4, 3)$$

두 점 $(-2, 1), (5, 0)$ 을 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{v}$ 라 하면

$$\vec{v} = (5, 0) - (-2, 1) = (7, -1)$$

두 직선이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|4 \times 7 + 3 \times (-1)|}{\sqrt{4^2 + 3^2} \sqrt{7^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

답 45°

475

전략 직선의 방향벡터의 평행 조건과 수직 조건을 이용한다.

세 직선 l, m, n 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 라 하면

$$\vec{u} = (-1, p, q), \vec{v} = (1, 1, -1), \vec{w} = (1, 1, r)$$

$l \parallel m$ 에서 $\vec{u} = k\vec{v} \ (k \neq 0)$ 이므로

$$(-1, p, q) = k(1, 1, -1)$$

따라서 $-1=k, p=k, q=-k$ 이므로

$$p=-1, q=1$$

또 $l \perp n$ 에서 $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ 이므로

$$-1 \times 1 + p \times 1 + q \times r = 0$$

$$r-2=0 \quad \therefore r=2$$

$$\therefore p^2 + q^2 + r^2 = (-1)^2 + 1^2 + 2^2 = 6$$

답 6

476

전략 두 직선 l, m 위의 점의 좌표를 각각 실수 t, s 에 대한 식으로 나타내어 교점의 좌표를 구한다.

$$\frac{x+4}{2}=y=\frac{5-z}{5}=t \text{로 놓으면}$$

$$x=2t-4, y=t, z=-5t+5 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$x+3=\frac{y+4}{2}=\frac{z+14}{3}=s \text{로 놓으면}$$

$$x=s-3, y=2s-4, z=3s-14 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서

$$2t-4=s-3, t=2s-4, -5t+5=3s-14$$

세 식을 연립하여 풀면 $t=2, s=3$

$t=2$ 를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$x=0, y=2, z=-5$$

따라서 두 직선 l, m 의 교점의 좌표는 $(0, 2, -5)$ 이므로 두 점 $(0, 2, -5), (1, 3, -1)$ 을 지나는 직선의 방향벡터는

$$\vec{u}=(1, 3, -1)-(0, 2, -5)=(1, 1, 4)$$

즉 점 $(0, 2, -5)$ 를 지나고 방향벡터가

$\vec{u}=(1, 1, 4)$ 인 직선의 방정식은

$$x=y-2=\frac{z+5}{4}$$

이 직선이 점 $(a, b, 3)$ 을 지나므로

$$a=b-2=2 \quad \therefore a=2, b=4$$

$$\therefore ab=8$$

답 8

477

전략 직선 위의 점의 좌표를 실수 t 에 대한 식으로 나타내어 내적을 구한다.

$$x=y-1=\frac{z-2}{2}=t \text{로 놓으면}$$

$$x=t, y=t+1, z=2t+2$$

$P(t, t+1, 2t+2)$ 로 놓으면

$$\overrightarrow{AP}=(t, t+1, 2t+2)-(1, 1, 0)$$

$$=(t-1, t, 2t+2)$$

$$\overrightarrow{BP}=(t, t+1, 2t+2)-(0, 0, 1)$$

$$=(t, t+1, 2t+1)$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$$

$$=(t-1)t+t(t+1)+(2t+2)(2t+1)$$

$$=6t^2+6t+2=6\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

따라서 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$ 는 $t=-\frac{1}{2}$ 일 때 최솟값 $\frac{1}{2}$ 을 갖는다.

$t=-\frac{1}{2}$ 일 때 점 P 의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ 이므로

$$a=-\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}, c=1$$

$$\therefore a+b+c=1$$

답 1

478

전략 구하는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}=(a, b, c)$ 로 놓고 벡터의 수직 조건을 이용한다.

구하는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}=(a, b, c)$ 로 놓으면 직선의 방정식은

$$\frac{x+2}{a}=\frac{y+2}{b}=\frac{z-1}{c} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{v}, \vec{w}$ 라 하면

$$\vec{v}=(3, 1, -2), \vec{w}=(-1, 2, 1)$$

직선 $\textcircled{7}$ 과 직선 l 이 수직이므로 $\vec{u} \cdot \vec{v}=0$ 에서

$$3a+b-2c=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

직선 $\textcircled{7}$ 과 직선 m 이 수직이므로 $\vec{u} \cdot \vec{w}=0$ 에서

$$-a+2b+c=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$

$$\textcircled{8} \times 2 - \textcircled{9} \text{을 하면} \quad 7a-5c=0$$

$$\therefore c=\frac{7}{5}a$$

$$\textcircled{8} + \textcircled{9} \times 2 \text{를 하면} \quad a+5b=0$$

$$\therefore b=-\frac{1}{5}a$$

이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$\frac{x+2}{a}=\frac{y+2}{-\frac{1}{5}a}=\frac{z-1}{\frac{7}{5}a}$$

$$\therefore \frac{x+2}{5}=-y-2=\frac{z-1}{7}$$

$$\text{답} \quad \frac{x+2}{5}=-y-2=\frac{z-1}{7}$$

479

전략 점 A 와 직선 l 사이의 거리가 정삼각형 ABC 의 높이임을 이용한다.

$$\frac{x-2}{3}=3-y=\frac{z-1}{2}=t \text{로 놓으면}$$

$$x=3t+2, y=-t+3, z=2t+1$$

III-3

도형의 방정식

오른쪽 그림과 같이 점 A에서
직선 l 에 내린 수선의 발을 H
라 하고

$H(3t+2, -t+3, 2t+1)$ 로
놓으면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= (3t+2, -t+3, 2t+1) - (1, 6, -3) \\ &= (3t+1, -t-3, 2t+4)\end{aligned}$$

이때 직선 l 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (3, -1, 2)$$

$\overrightarrow{AH} \perp l$ 에서 $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned}3(3t+1) - (-t-3) + 2(2t+4) &= 0 \\ 14t + 14 &= 0 \quad \therefore t = -1\end{aligned}$$

즉 $\overrightarrow{AH} = (-2, -2, 2)$ 이므로

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AH}| &= |\overrightarrow{AH}| \\ &= \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

이때 선분 AH는 정삼각형 ABC의 높이이므로 한 변
의 길이를 a 라 하면

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times a = 2\sqrt{3} \quad \therefore a = 4$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \quad \text{답 } 4\sqrt{3}$$

480

전략 점 P와 대칭인 점을 Q라 하면 선분 PQ의 중점이 직선 l
위에 있고, 직선 PQ와 직선 l 은 서로 수직이다.

점 P와 직선 l 에 대하여 대칭인 점을 $Q(a, b, c)$ 라 하
면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= (a, b, c) - (4, -1, -3) \\ &= (a-4, b+1, c+3)\end{aligned}$$

이때 직선 l 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (2, -2, -3)$$

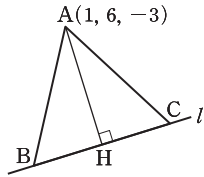
$\overrightarrow{PQ} \perp \vec{u}$ 에서 $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned}2(a-4) - 2(b+1) - 3(c+3) &= 0 \\ \therefore 2a - 2b - 3c &= 19 \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

또 선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b-1}{2}, \frac{c-3}{2} \right)$$

이고 이 점은 직선 l 위의 점이므로



$$\frac{\frac{a+4}{2} + 1}{2} = \frac{1 - \frac{b-1}{2}}{2} = \frac{\frac{c-3}{2} + 2}{-3}$$

$$\therefore \frac{a+6}{2} = \frac{3-b}{2} = \frac{c+1}{-3}$$

$$\frac{a+6}{2} = \frac{3-b}{2} = \frac{c+1}{-3} = t \text{로 놓으면}$$

$$a = 2t - 6, b = -2t + 3, c = -3t - 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

이것을 ①에 대입하면

$$2(2t-6) - 2(-2t+3) - 3(-3t-1) = 19$$

$$17t = 34 \quad \therefore t = 2$$

$t=2$ 를 ②에 대입하면

$$a = -2, b = -1, c = -7$$

따라서 구하는 점의 좌표는

$$(-2, -1, -7) \quad \text{답 } (-2, -1, -7)$$

481

전략 직선 PQ가 두 직선 l, m 과 각각 수직일 때 선분 PQ의 길
이가 최소임을 이용한다.

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{2} = z+2 = t \text{로 놓으면}$$

$$x = 2t + 5, y = 2t + 3, z = t - 2$$

$$\frac{4-x}{2} = y+1 = \frac{z+1}{2} = s \text{로 놓으면}$$

$$x = -2s + 4, y = s - 1, z = 2s - 1$$

따라서 $P(2t+5, 2t+3, t-2)$,

$Q(-2s+4, s-1, 2s-1)$ 로 놓으면

$$\overrightarrow{PQ} = (-2s-2t-1, s-2t-4, 2s-t+1)$$

한편 선분 PQ의 길이는 직선 PQ가 두 직선 l, m 과
각각 수직일 때 최소이고 두 직선 l, m 의 방향벡터를
각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (2, 2, 1), \vec{v} = (-2, 1, 2)$$

직선 PQ와 직선 l 이 서로 수직이면 $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned}2(-2s-2t-1) + 2(s-2t-4) + (2s-t+1) \\ = 0\end{aligned}$$

$$-9t - 9 = 0 \quad \therefore t = -1$$

또 직선 PQ와 직선 m 이 서로 수직이면 $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$ 이
므로

$$\begin{aligned}-2(-2s-2t-1) + (s-2t-4) + 2(2s-t+1) \\ = 0\end{aligned}$$

$$9s = 0 \quad \therefore s = 0$$

따라서 $\overrightarrow{PQ} = (1, -2, 2)$ 일 때 선분 PQ의 길이가 최소이므로 구하는 최솟값은

$$\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3 \quad \text{답 3}$$

03 평면의 방정식

● 본책 228~233쪽

482

두 점 A(1, 2, -1), B(3, -1, 0)을 지나는 직선의 방향벡터는

$$\overrightarrow{AB} = (3, -1, 0) - (1, 2, -1) = (2, -3, 1)$$

이때 주어진 평면의 법선벡터는 직선의 방향벡터와 같으므로 점 (1, -1, 2)를 지나고 법선벡터가

$$\overrightarrow{AB} = (2, -3, 1) \text{인 평면의 방정식은}$$

$$2(x-1) - 3(y+1) + z - 2 = 0$$

$$\therefore 2x - 3y + z - 7 = 0$$

$$\text{답 } 2x - 3y + z - 7 = 0$$

483

평면 $2x + 3y - z = 4$ 의 법선벡터는

$$\vec{n} = (2, 3, -1)$$

평행한 두 평면은 법선벡터가 서로 같으므로 점 (3, 1, -2)를 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = (2, 3, -1)$ 인 평면의 방정식은

$$2(x-3) + 3(y-1) - (z+2) = 0$$

$$\therefore 2x + 3y - z - 11 = 0$$

이 평면이 점 (1, a, -3)을 지나므로

$$2 + 3a + 3 - 11 = 0, \quad 3a = 6$$

$$\therefore a = 2$$

답 2

484

세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식을

$ax + by + cz + d = 0$ 으로 놓고 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 대입하면

$$3a - b + d = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$2a + b - c + d = 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$-2a + c + d = 0 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢에서 a, b, c를 d에 대한 식으로 나타내면

$$a = -d, \quad b = -2d, \quad c = -3d$$

이것을 $ax + by + cz + d = 0$ 에 대입하면

$$-dx - 2dy - 3dz + d = 0$$

이때 $d \neq 0$ 이므로 양변을 $-d$ 로 나누면

$$x + 2y + 3z - 1 = 0$$

이 평면이 점 (p, 1, 0)을 지나므로

$$p + 2 - 1 = 0 \quad \therefore p = -1$$

답 -1

485

세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식을

$ax + by + cz + d = 0$ 으로 놓고 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 대입하면

$$b + 2c + d = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$a + c + d = 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$a + b + d = 0 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢에서 a, b, c를 d에 대한 식으로 나타내면

$$a = -\frac{2}{3}d, \quad b = -\frac{1}{3}d, \quad c = -\frac{1}{3}d$$

이것을 $ax + by + cz + d = 0$ 에 대입하면

$$-\frac{2}{3}dx - \frac{1}{3}dy - \frac{1}{3}dz + d = 0$$

이때 $d \neq 0$ 이므로 양변을 d로 나누어 정리하면

$$2x + y + z - 3 = 0$$

이 평면의 법선벡터는 $\vec{n} = (2, 1, 1)$

따라서 점 A(0, 1, 2)를 지나고 방향벡터가

$$\vec{n} = (2, 1, 1) \text{인 직선의 방정식은}$$

$$\frac{x}{2} = y - 1 = z - 2 \quad \text{답 } \frac{x}{2} = y - 1 = z - 2$$

486

$$3x + 2y - 4z - 1 = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$x + y - z - 5 = 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠} - \text{㉡} \times 2 \text{를 하면} \quad x - 2z + 9 = 0$$

$$\therefore z = \frac{x+9}{2} \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$$\text{㉠} - \text{㉡} \times 3 \text{을 하면} \quad -y - z + 14 = 0$$

$$\therefore z = 14 - y \quad \dots\dots \text{㉣}$$

㉢, ㉣에서 구하는 교선의 방정식은

$$\frac{x+9}{2} = 14 - y = z$$

$$\text{답 } \frac{x+9}{2} = 14 - y = z$$

487

$$x+2y-3z=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$x-2z+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}-\textcircled{㉡}\text{을 하면} \quad 2y-z-1=0$$

$$\therefore y=\frac{z+1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠}\times 2-\textcircled{㉡}\times 3\text{을 하면} \quad -x+4y-3=0$$

$$\therefore y=\frac{x+3}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

$\textcircled{㉢}, \textcircled{㉣}$ 에서 두 평면의 교선의 방정식은

$$\frac{x+3}{4}=y=\frac{z+1}{2}$$

이므로 두 평면의 교선의 방향벡터는

$$\vec{u}=(4, 1, 2)$$

따라서 점 $P(3, -1, 0)$ 을 지나고 법선벡터가

$\vec{u}=(4, 1, 2)$ 인 평면의 방정식은

$$4(x-3)+(y+1)+2z=0$$

$$\therefore 4x+y+2z-11=0$$

$$\text{답 } 4x+y+2z-11=0$$

488

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{1-z}{2}=t\text{로 놓으면}$$

$$x=2t-1, y=3t-2, z=-2t+1$$

따라서 교점의 좌표를 $(2t-1, 3t-2, -2t+1)$ 로

놓고 평면의 방정식에 대입하면

$$3(2t-1)-(3t-2)+4(-2t+1)+2=0$$

$$-5t+5=0$$

$$\therefore t=1$$

즉 교점의 좌표는 $(1, 1, -1)$

$$\text{답 } (1, 1, -1)$$

489

직선 AH는 점 $A(1, 2, 3)$ 을 지나고 평면의 법선벡터 $\vec{n}=(2, -1, 3)$ 에 평행하므로 직선 AH의 방정식은

$$\frac{x-1}{2}=2-y=\frac{z-3}{3}$$

$$\frac{x-1}{2}=2-y=\frac{z-3}{3}=t\text{로 놓으면}$$

$$x=2t+1, y=-t+2, z=3t+3$$

따라서 $H(2t+1, -t+2, 3t+3)$ 으로 놓으면 점 H는 평면 $2x-y+3z+5=0$ 위의 점이므로

$$2(2t+1)-(-t+2)+3(3t+3)+5=0$$

$$14t+14=0 \quad \therefore t=-1$$

따라서 점 H의 좌표는

$$(-1, 3, 0) \quad \text{답 } (-1, 3, 0)$$

연습 문제

● 본책 234~235쪽

490

전략 벡터 $\overrightarrow{AB}$ 가 주어진 평면의 법선벡터임을 이용한다.

선분 AB를 1:2로 내분하는 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{-1+4}{1+2}, \frac{6}{1+2}, \frac{1-4}{1+2}\right), \text{ 즉 } (1, 2, -1)$$

또 직선 AB의 방향벡터는

$$\overrightarrow{AB}=(-1, 0, 1)-(2, 3, -2)$$

$$=(-3, -3, 3)$$

이때 주어진 평면의 법선벡터는 직선 AB의 방향벡터와 같으므로 점 C(1, 2, -1)을 지나고 법선벡터가

$\overrightarrow{AB}=(-3, -3, 3)$ 인 평면의 방정식은

$$-3(x-1)-3(y-2)+3(z+1)=0$$

$$\therefore x+y-z-4=0 \quad \text{답 } x+y-z-4=0$$

491

전략 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식을 구한다.

세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식을

$ax+by+cz+d=0$ 으로 놓고 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 대입하면

$$a-b+c+d=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$-a+2b+c+d=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$4a-b+2c+d=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 에서 b, c, d 를 a 에 대한 식으로 나타내면

$$b=\frac{2}{3}a, c=-3a, d=\frac{8}{3}a$$

이것을 $ax+by+cz+d=0$ 에 대입하면

$$ax+\frac{2}{3}ay-3az+\frac{8}{3}a=0$$

이때 $a \neq 0$ 이므로 양변을 a 로 나누어 정리하면

$$3x + 2y - 9z + 8 = 0$$

점 $D(3, -4, k)$ 가 이 평면 위에 있으므로

$$9 - 8 - 9k + 8 = 0 \quad \therefore k = 1$$

답 1

492

전략 두 평면의 방정식을 연립하여 교선의 방정식을 구한다.

$$x + y + z = 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$2x + 3y - z = 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} \text{을 하면} \quad 3x + 4y = 8$$

$$\therefore x = \frac{8-4y}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠} \times 3 - \textcircled{㉡} \text{을 하면} \quad x + 4z = 4$$

$$\therefore x = 4 - 4z \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

$\textcircled{㉢}, \textcircled{㉣}$ 에서 두 평면의 교선의 방정식은

$$x = \frac{8-4y}{3} = 4 - 4z \quad \dots\dots \textcircled{㉤}$$

$\textcircled{㉤}$ 에 $z=0$ 을 대입하면

$$x = \frac{8-4y}{3} = 4 \quad \therefore x=4, y=-1$$

$$\therefore P(4, -1, 0)$$

$\textcircled{㉤}$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$$0 = \frac{8-4y}{3} = 4 - 4z \quad \therefore y=2, z=1$$

$$\therefore Q(0, 2, 1)$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{(-4)^2 + (2+1)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

답 $\sqrt{26}$

493

전략 직선 위의 점의 좌표를 실수 t 에 대한 식으로 나타낸 후 주어진 평면의 방정식에 대입한다.

$$\frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z-1}{3} = t \text{로 놓으면}$$

$$x=2t+1, y=t-2, z=3t+1$$

따라서 점 A의 좌표를 $(2t+1, t-2, 3t+1)$ 로 놓고 평면의 방정식에 대입하면

$$3(2t+1) + (t-2) - 2(3t+1) + 3 = 0$$

$$\therefore t = -2$$

즉 $A(-3, -4, -5)$ 이므로 점 A와 원점 사이의 거리는

$$\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2} \quad \text{답 } 5\sqrt{2}$$

494

전략 점 A를 지나고 평면 α 에 수직인 직선과 평면 α 의 교점의 좌표를 구한다.

점 A에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 AH는 점 $A(6, -2, 4)$ 를 지나고 평면 α 의 법선벡터 $\vec{n} = (1, -1, 2)$ 에 평행하므로 직선 AH의 방정식은

$$x-6 = -y-2 = \frac{z-4}{2}$$

$$x-6 = -y-2 = \frac{z-4}{2} = t \text{로 놓으면}$$

$$x=t+6, y=-t-2, z=2t+4$$

따라서 $H(t+6, -t-2, 2t+4)$ 로 놓으면 점 H는 평면 α 위의 점이므로

$$(t+6) - (-t-2) + 2(2t+4) + 2 = 0$$

$$6t+18=0 \quad \therefore t=-3$$

즉 $H(3, 1, -2)$ 이므로 $a=3, b=1, c=-2$

$$\therefore abc = -6$$

답 -6

495

전략 직선 AH가 평면 α 에 수직임을 이용한다.

$\alpha \perp \overline{AH}$ 이므로 평면 α 의 법선벡터는

$$\begin{aligned} \overline{AH} &= (-2, 1, 2) - (1, 3, -4) \\ &= (-3, -2, 6) \end{aligned}$$

따라서 점 $H(-2, 1, 2)$ 를 지나고 법선벡터가

$$\overline{AH} = (-3, -2, 6) \text{인 평면 } \alpha \text{의 방정식은}$$

$$-3(x+2) - 2(y-1) + 6(z-2) = 0$$

$$\therefore 3x+2y-6z+16=0$$

이때 점 $(4, k, 2)$ 가 평면 α 위에 있으므로

$$12+2k-12+16=0$$

$$\therefore k = -8$$

답 -8

496

전략 두 구의 중심을 잇는 선분의 중점이 평면 위의 점임을 이용한다.

$$\text{두 구 } (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1,$$

$(x-7)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4$ 의 중심을 각각 A, B라 하면

$$A(1, 2, 3), B(7, -1, 0)$$

이때 평면 $ax+by+cz=6$ 은 선분 AB의 중점을 지나고 직선 AB에 수직이다.

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+7}{2}, \frac{2-1}{2}, \frac{3}{2}\right), \text{ 즉 } \left(4, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{또 } \overrightarrow{AB} = (7, -1, 0) - (1, 2, 3) = (6, -3, -3) \text{ 이}$$

므로 점 $\left(4, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 을 지나고 법선벡터가

$\overrightarrow{AB} = (6, -3, -3)$ 인 평면의 방정식은

$$6(x-4) - 3\left(y - \frac{1}{2}\right) - 3\left(z - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\therefore 2x - y - z = 6$$

따라서 $a=2, b=-1, c=-1$ 이므로

$$a-b-c=4$$

답 4

497

전략 점 A의 좌표와 직선 l 의 방향벡터를 이용하여 평면 α 의 방정식을 구한다.

평면 α 의 법선벡터는 직선 l 의 방향벡터와 같으므로

$$\vec{n} = (3, -2, 1)$$

따라서 점 A(3, 2, 1)을 지나고 법선벡터가

$\vec{n} = (3, -2, 1)$ 인 평면 α 의 방정식은

$$3(x-3) - 2(y-2) + (z-1) = 0$$

$$\therefore 3x - 2y + z - 6 = 0$$

이때 $\frac{x-6}{5} = y = z - 2 = t$ 로 놓으면

$$x = 5t + 6, y = t, z = t + 2$$

따라서 점 B의 좌표를 $(5t+6, t, t+2)$ 로 놓고 평면 α 의 방정식에 대입하면

$$3(5t+6) - 2t + (t+2) - 6 = 0$$

$$14t + 14 = 0 \quad \therefore t = -1$$

$$\therefore B(1, -1, 1)$$

따라서 선분 AB의 길이는

$$\sqrt{(1-3)^2 + (-1-2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{13}$$

답 $\sqrt{13}$

498

전략 직선 AB와 평면 $\sqrt{3}y - z = 0$ 이 수직임을 이용한다.

직선 AB는 점 A(1, 2, 0)을 지나고 평면 $\sqrt{3}y - z = 0$ 의 법선벡터 $\vec{n} = (0, \sqrt{3}, -1)$ 에 평행하므로 직선 AB의 방정식은

$$x = 1, \frac{y-2}{\sqrt{3}} = -z$$

$$\frac{y-2}{\sqrt{3}} = -z = t \text{로 놓으면}$$

$$y = \sqrt{3}t + 2, z = -t$$

따라서 $B(1, \sqrt{3}t+2, -t)$ 로 놓으면 점 B는 평면

$\sqrt{3}y - z = 0$ 위의 점이므로

$$\sqrt{3}(\sqrt{3}t+2) - (-t) = 0$$

$$4t + 2\sqrt{3} = 0 \quad \therefore t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

즉 $B\left(1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 이므로

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \times 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$$

답 2

499

전략 점 B를 평면 α 에 대하여 대칭이동한 점을 이용한다.

점 B와 평면 α 에 대하여 대칭인

점을 B' 이라 하면

$$\overline{BP} = \overline{B'P}$$

$$\therefore \overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P} \geq \overline{AB'}$$

이때 점 B에서 평면 α 에 내린

수선의 발을 H라 하면 직선 BH는 점 B(1, 2, -2)를 지나고 평면 α 의 법선벡터 $\vec{n} = (1, 2, -2)$ 에 평행

하므로 직선 BH의 방정식은

$$x-1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-2}$$

$$x-1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-2} = t \text{로 놓으면}$$

$$x = t+1, y = 2t+2, z = -2t-2$$

따라서 $H(t+1, 2t+2, -2t-2)$ 로 놓으면 점 H는 평면 α 위의 점이므로

$$(t+1) + 2(2t+2) - 2(-2t-2) = 0$$

$$9t + 9 = 0 \quad \therefore t = -1$$

$$\therefore H(0, 0, 0)$$

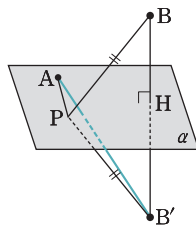
이때 점 H는 $\overline{BB'}$ 의 중점이므로

$$B'(-1, -2, 2)$$

따라서 구하는 최솟값은

$$\overline{AB'} = \sqrt{(-1-2)^2 + (-2-1)^2 + (2+1)^2} = 3\sqrt{3}$$

답 $3\sqrt{3}$



04 두 평면이 이루는 각

● 본책 236~240쪽

500

세 점을 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$ 으로 놓고 세 점의 좌표를 각각 대입하면

$$a+d=0 \quad \therefore a=-d$$

$$2b+d=0 \quad \therefore b=-\frac{1}{2}d$$

$$c+d=0 \quad \therefore c=-d$$

따라서 평면의 방정식은

$$-dx - \frac{1}{2}dy - dz + d = 0$$

이때 $d \neq 0$ 이므로 양변을 d 로 나누어 정리하면

$$2x+y+2z-2=0$$

이 평면의 법선벡터는 $\vec{n}_1=(2, 1, 2)$ 이므로 xy 평면의 법선벡터를 $\vec{n}_2=(0, 0, 1)$ 로 놓으면

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|2 \times 1|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2} \times 1} = \frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$



개념 노트

세 점 $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ 를 지나는 평면의 방정식은

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (\text{단, } abc \neq 0)$$

501

직선 $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = z-3$ 에 수직인 평면의 법선벡터는

$$\vec{n}_1=(3, -2, 1)$$

평면 $2x+y+az+5=0$ 의 법선벡터는

$$\vec{n}_2=(2, 1, a)$$

$$\cos 60^\circ = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|3 \times 2 + (-2) \times 1 + 1 \times a|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2} \sqrt{2^2+1^2+a^2}}$$

$$2|a+4| = \sqrt{14a^2+70}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$5a^2-16a+3=0, \quad (5a-1)(a-3)=0$$

$$\therefore a=3 \quad (\because a \text{는 정수})$$

답 3

502

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1=(3, 8-a, -1), \vec{n}_2=(a, 4, 4-a)$$

$\alpha \parallel \beta$ 이라면 $\vec{n}_1=k\vec{n}_2$ ($k \neq 0$)이어야 하므로

$$(3, 8-a, -1)=k(a, 4, 4-a)$$

$$\therefore 3=ak, 8-a=4k, -1=4k-ak$$

$-1=4k-ak$ 에 $ak=3$ 을 대입하면

$$-1=4k-3 \quad \therefore k=\frac{1}{2}$$

따라서 $\frac{1}{2}a=3$ 이므로

$$a=6$$

답 6

503

두 평면 $x-3y+3z=0, x+y-2z=1$ 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1=(1, -3, 3), \vec{n}_2=(1, 1, -2)$$

구하는 평면의 법선벡터를 $\vec{n}=(a, b, c)$ 라 하면

$$\vec{n} \cdot \vec{n}_1=0 \text{에서} \quad a-3b+3c=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{n}_2=0 \text{에서} \quad a+b-2c=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서} \quad a=\frac{3}{4}c, b=\frac{5}{4}c$$

따라서 점 $(-1, 1, -2)$ 를 지나고 법선벡터가

$$\vec{n}=\left(\frac{3}{4}c, \frac{5}{4}c, c\right) \text{인 평면의 방정식은}$$

$$\frac{3}{4}c(x+1) + \frac{5}{4}c(y-1) + c(z+2) = 0$$

이때 $c \neq 0$ 이므로 양변을 c 로 나누어 정리하면

$$3x+5y+4z+6=0$$

답 $3x+5y+4z+6=0$

504

직선의 방향벡터를 $\vec{u}$, 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{u}=(1, 2, -1), \vec{n}=(a, 1, 1)$$

이때 직선과 평면이 이루는 각의 크기가 30° 이므로

$$\frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} = \cos(90^\circ - 30^\circ)$$

$$\frac{|1 \times a + 2 \times 1 + (-1) \times 1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2} \sqrt{a^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{2}$$

$$2|a+1| = \sqrt{6a^2+12}$$

III-3

도형의 방정식

양변을 제공하여 정리하면

$$a^2 - 4a + 4 = 0, \quad (a-2)^2 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

답 2

505

평면 α 의 법선벡터를 $\vec{n}$, 직선 l 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{n} = (4, a, 2), \quad \vec{u} = (2, -1, b)$$

이때 평면 α 와 직선 l 이 서로 수직이므로 $\vec{n} \parallel \vec{u}$

즉 $\vec{n} = k\vec{u}$ ($k \neq 0$)이므로

$$(4, a, 2) = k(2, -1, b)$$

따라서 $4 = 2k, a = -k, 2 = bk$ 이므로

$$k = 2, a = -2, b = 1$$

$$\therefore a + b = -1$$

답 -1

05 점과 평면 사이의 거리

● 본책 241~243쪽

506

법선벡터가 $\vec{n} = (3, -5, 4)$ 인 평면의 방정식을 $3x - 5y + 4z + d = 0$ 으로 놓으면 원점과 평면 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|d|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2 + 4^2}} = \sqrt{2}, \quad |d| = 10$$

$$\therefore d = -10 \text{ 또는 } d = 10$$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$3x - 5y + 4z + 10 = 0, \quad 3x - 5y + 4z - 10 = 0$$

$$\text{답 } 3x - 5y + 4z + 10 = 0, \quad 3x - 5y + 4z - 10 = 0$$

507

주어진 두 평면의 법선벡터가 $\vec{n} = (1, -2, 2)$ 로 같으므로 두 평면은 평행하다.

따라서 두 평면 사이의 거리는 평면 $x - 2y + 2z - 1 = 0$ 위의 점 $(1, 0, 0)$ 과 평면 $x - 2y + 2z + 5 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|1 + 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 2$$

답 2

508

구의 중심 $(0, 1, -2)$ 와 평면 $x - 2y - 2z = a$, 즉 $x - 2y - 2z - a = 0$ 사이의 거리가 구의 반지름의 길이 2와 같으므로

$$\frac{|-2 + 4 - a|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 2$$

$$|2 - a| = 6, \quad 2 - a = \pm 6$$

$$\therefore a = 8 \quad (\because a > 0)$$

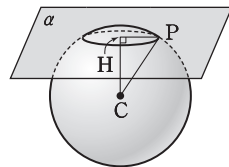
답 8

509

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 31 = 0$ 에서

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 36$$

오른쪽 그림과 같이 구의 중심 $C(1, 0, -2)$ 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H 라 하면



$$\overline{CH} = \frac{|2 - 2 - d|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{|d|}{\sqrt{6}}$$

이때 구와 평면이 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P 라 하면

$$\overline{CP} = 6$$

또 구와 평면이 만나서 생기는 원의 넓이가 11π 이므로 $\overline{PH} = \sqrt{11}$

따라서 직각삼각형 CPH 에서

$$\left(\frac{|d|}{\sqrt{6}}\right)^2 + (\sqrt{11})^2 = 6^2$$

$$\frac{d^2}{6} = 25, \quad d^2 = 150$$

$$\therefore d = 5\sqrt{6} \quad (\because d > 0)$$

답 $5\sqrt{6}$

연습 문제

● 본책 244~245쪽

510

전략 두 평면이 서로 수직이면 두 평면의 법선벡터도 서로 수직임을 이용한다.

두 평면 $2x+y+z=2$, $x-y-2z=1$ 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1=(2, 1, 1), \vec{n}_2=(1, -1, -2)$$

두 평면에 각각 수직인 평면의 법선벡터를

$\vec{n}=(a, b, c)$ 라 하면

$$\vec{n} \cdot \vec{n}_1=0 \text{에서} \quad 2a+b+c=0 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{n}_2=0 \text{에서} \quad a-b-2c=0 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서} \quad b=-5a, \quad c=3a$$

따라서 점 $(1, -1, 2)$ 를 지나고 법선벡터가

$\vec{n}=(a, -5a, 3a)$ 인 평면의 방정식은

$$a(x-1)-5a(y+1)+3a(z-2)=0$$

이때 $a \neq 0$ 이므로 양변을 a 로 나누어 정리하면

$$x-5y+3z-12=0$$

이 평면이 점 $(k, 2, -3)$ 을 지나므로

$$k-10-9-12=0 \quad \therefore k=31 \quad \text{답 31}$$

511

전략 직선의 방향벡터와 평면의 법선벡터가 이루는 각의 크기를 이용한다.

두 점 $(-6, -3, 7)$, $(2, 1, 3)$ 을 지나는 직선의 방향벡터는

$$\vec{u}=(2, 1, 3)-(-6, -3, 7)=(8, 4, -4)$$

평면 $x+2y+z=5$ 의 법선벡터는

$$\vec{n}=(1, 2, 1)$$

이때 직선과 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ-\theta) &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} \\ &= \frac{|8 \times 1 + 4 \times 2 + (-4) \times 1|}{\sqrt{8^2+4^2+(-4)^2} \sqrt{1^2+2^2+1^2}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

즉 $90^\circ-\theta=60^\circ$ 이므로

$$\theta=30^\circ \quad \text{답 } 30^\circ$$

512

전략 직선과 평면이 서로 평행하면 직선의 방향벡터와 평면의 법선벡터가 서로 수직임을 이용한다.

직선 $\frac{x-1}{3}=2-y=\frac{z-2}{2}$ 의 방향벡터는

$$\vec{u}=(3, -1, 2)$$

평면의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 할 때, 직선과 평면이 평행하려면

$$\vec{u} \perp \vec{n} \quad \therefore \vec{u} \cdot \vec{n}=0$$

ㄱ. $\vec{n}=(-1, 1, 2)$ 이므로

$$\vec{u} \cdot \vec{n}=3 \times (-1) + (-1) \times 1 + 2 \times 2=0$$

따라서 직선과 평면은 서로 평행하다.

ㄴ. $\vec{n}=(3, -1, 2)$ 이므로

$$\vec{u} \cdot \vec{n}=3 \times 3 + (-1) \times (-1) + 2 \times 2=14$$

따라서 직선과 평면은 평행하지 않다.

ㄷ. $\vec{n}=(1, 1, -1)$ 이므로

$$\vec{u} \cdot \vec{n}=3 \times 1 + (-1) \times 1 + 2 \times (-1)=0$$

따라서 직선과 평면은 서로 평행하다.

이상에서 주어진 직선과 평행한 평면은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

513

전략 구의 중심과 점 A를 지나는 직선이 평면과 수직임을 이용한다.

구의 중심을 C라 하면 $C(1, -2, 3)$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{AC} &= (1, -2, 3) - (2, 0, 5) \\ &= (-1, -2, -2) \end{aligned}$$

즉 주어진 평면은 점 A(2, 0, 5)를 지나고 법선벡터가

$\vec{AC}=(-1, -2, -2)$ 이므로 평면의 방정식은

$$-(x-2)-2y-2(z-5)=0$$

$$\therefore x+2y+2z-12=0$$

따라서 평면 $x+2y+2z-12=0$ 과 원점 사이의 거리는

$$\frac{|-12|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=4 \quad \text{답 4}$$

514

전략 구의 중심과 평면 사이의 거리를 이용한다.

$x^2+y^2+z^2-2x-6y-4z+6=0$ 에서

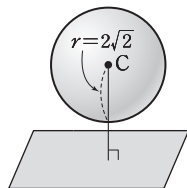
$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=8$$

따라서 구의 중심 C(1, 3, 2)와

평면 $x+2y-z+7=0$ 사이의

거리는

$$\frac{|1+6-2+7|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{6}$$



이때 구의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

$$M=2\sqrt{6}+2\sqrt{2}, m=2\sqrt{6}-2\sqrt{2}$$

$$\therefore Mm=16$$

답 16

515

전략 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$ 으로 놓고 세 점의 좌표를 대입하여 평면의 법선벡터를 구한다.

평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$ 으로 놓고 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 대입하면

$$a+2b+d=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a-c+d=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$-b+c+d=0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 에서 a, c, d 를 b 에 대한 식으로 나타내면

$$a=-5b, c=-2b, d=3b$$

이것을 $ax+by+cz+d=0$ 에 대입하면

$$-5bx+by-2bz+3b=0$$

이때 $b \neq 0$ 이므로 양변을 b 로 나누어 정리하면

$$5x-y+2z-3=0$$

이 평면의 법선벡터는 $\vec{n}=(5, -1, 2)$

또 yz 평면의 법선벡터를 $\vec{e}_1=(1, 0, 0)$, xy 평면의 법선벡터를 $\vec{e}_3=(0, 0, 1)$ 이라 하면

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|\vec{n} \cdot \vec{e}_1|}{|\vec{n}| |\vec{e}_1|} = \frac{|5 \times 1|}{\sqrt{5^2 + (-1)^2 + 2^2} \times 1} \\ &= \frac{\sqrt{30}}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{|\vec{n} \cdot \vec{e}_3|}{|\vec{n}| |\vec{e}_3|} = \frac{|2 \times 1|}{\sqrt{5^2 + (-1)^2 + 2^2} \times 1} \\ &= \frac{\sqrt{30}}{15} \end{aligned}$$

$$\therefore \cos \alpha - \cos \beta = \frac{\sqrt{30}}{6} - \frac{\sqrt{30}}{15} = \frac{\sqrt{30}}{10}$$

답 $\frac{\sqrt{30}}{10}$

516

전략 두 평면의 법선벡터가 수직임을 이용하여 k 의 값을 먼저 구한다.

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1=(3, k-1, -1), \vec{n}_2=(1, 3, k-2)$$

이때 $\alpha \perp \beta$ 에서 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2=0$ 이므로

$$3+3(k-1)-(k-2)=0$$

$$2k+2=0 \quad \therefore k=-1$$

따라서 두 평면의 방정식은

$$3x-2y-z+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x+3y-3z+3=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2}$ 을 하면 $8x-9y=0$

$$\therefore y=\frac{8}{9}x \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 3$ 을 하면 $-11y+8z-8=0$

$$\therefore y=\frac{8z-8}{11} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ 에서 구하는 교선의 방정식은

$$\frac{8}{9}x=y=\frac{8z-8}{11} \quad \therefore \frac{x}{9}=\frac{y}{8}=\frac{z-1}{11}$$

$$\text{답 } \frac{x}{9}=\frac{y}{8}=\frac{z-1}{11}$$

517

전략 직선의 방향벡터가 평면의 법선벡터와 수직임을 이용한다.

점 A(-3, 0, 2)를 지나는 평면의 방정식은

$$a(x+3)+by+c(z-2)=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

으로 놓으면 직선 l 의 방향벡터 $\vec{u}=(3, -1, -1)$ 과

평면 $\textcircled{1}$ 의 법선벡터 $\vec{n}=(a, b, c)$ 는 서로 수직이므로

$$\vec{u} \cdot \vec{n}=0$$

$$\therefore 3a-b-c=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

또 직선 l 위의 점 $(-2, 0, 1)$ 이 평면 $\textcircled{1}$ 위에 있으므로

$$a-c=0 \quad \therefore a=c$$

$a=c$ 를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$2c-b=0 \quad \therefore b=2c$$

$a=c, b=2c$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$c(x+3)+2cy+c(z-2)=0$$

이때 $c \neq 0$ 이므로 양변을 c 로 나누어 정리하면

$$x+2y+z+1=0 \quad \text{답 } x+2y+z+1=0$$

$$\text{다른 풀이 } \frac{x+2}{3}=-y=1-z=t \text{로 놓으면}$$

$$x=3t-2, y=-t, z=-t+1$$

따라서 직선 l 위의 점의 좌표를

$(3t-2, -t, -t+1)$ 로 놓고 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면

$$(3a-b-c)t+a-c=0$$

이 방정식이 모든 실수 t 에 대하여 성립해야 하므로

$$3a - b - c = 0, a - c = 0$$

$$\therefore a = c, b = 2c$$

518

전략 세 점 D, E, G의 좌표를 이용하여 평면 α 의 방정식을 구한다.

평면 α 의 방정식을 $ax + by + cz + d = 0$ 으로 놓고 세 점 D(0, 0, 1), E(2, 0, 0), G(0, 3, 0)의 좌표를 각각 대입하면

$$c + d = 0, 2a + d = 0, 3b + d = 0$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}d, b = -\frac{1}{3}d, c = -d$$

따라서 평면 α 의 방정식은

$$-\frac{1}{2}dx - \frac{1}{3}dy - dz + d = 0$$

$d \neq 0$ 이므로 양변을 d 로 나누어 정리하면

$$3x + 2y + 6z - 6 = 0$$

이때 점 B의 좌표가 (2, 3, 1)이므로 구하는 거리는

$$\frac{|6 + 6 + 6 - 6|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}} = \frac{12}{7} \quad \text{답 } \frac{12}{7}$$

519

전략 직선 l 과 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하고 $\cos \theta$ 의 값을 구한다.

직선 l 의 방향벡터는 $\vec{u} = (2, 1, 2)$

평면 α 의 법선벡터는 $\vec{n} = (1, -2, 2)$

직선 l 과 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \theta) &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} \\ &= \frac{|2 \times 1 + 1 \times (-2) + 2 \times 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

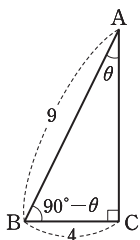
오른쪽 그림과 같이 $\angle C = 90^\circ$,

$\angle A = \theta$ 인 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AB} = 9, \overline{BC} = 4$ 라 하면

$$\overline{AC} = \sqrt{9^2 - 4^2} = \sqrt{65}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{65}}{9}$$



따라서 구하는 정사영의 길이는

$$\overline{AB} \cos \theta = 18 \times \frac{\sqrt{65}}{9} = 2\sqrt{65}$$

답 $2\sqrt{65}$

개념 노트

정사영의 길이

선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A'B'이라 하고, 직선 AB와 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$$

520

전략 이면각의 크기를 이등분하는 평면 위의 점에서 두 평면 α, β 까지의 거리가 같음을 이용한다.

두 평면 α, β 의 이면각의 크기를 이등분하는 평면 위의 점의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 이 점에서 두 평면 α, β 까지의 거리가 같으므로

$$\begin{aligned} \frac{|2a - b - 3c|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2}} &= \frac{|3a + 2b - c - 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2}} \\ 2a - b - 3c &= \pm(3a + 2b - c - 1) \end{aligned}$$

$$\therefore a + 3b + 2c - 1 = 0, 5a + b - 4c - 1 = 0$$

즉 두 평면 α, β 의 이면각의 크기를 이등분하는 평면의 방정식은

$$x + 3y + 2z - 1 = 0, 5x + y - 4z - 1 = 0$$

한편 $\frac{x}{2} = -y = \frac{z+1}{2} = t$ 로 놓으면

$$x = 2t, y = -t, z = 2t - 1$$

이므로 교점의 좌표를 $(2t, -t, 2t-1)$ 로 놓고 두 평면의 방정식에 각각 대입하면

$$2t - 3t + 2(2t - 1) - 1 = 0$$

$$\text{또는 } 10t - t - 4(2t - 1) - 1 = 0$$

$$3t - 3 = 0 \text{ 또는 } t + 3 = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = -3$$

따라서 교점 A, B의 좌표가 $(2, -1, 1),$

$(-6, 3, -7)$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(-6-2)^2 + (3+1)^2 + (-7-1)^2} \\ &= 12 \end{aligned}$$

답 12

06 벡터를 이용한 구의 방정식

• 본책 246~247쪽

521

$|\overrightarrow{AP}|=10$ 을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 $A(-1, 3, 1)$ 이고 반지름의 길이가 10인 구이므로 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=100$$

$y=0, z=0$ 을 대입하면

$$(x+1)^2=90, \quad x+1=\pm 3\sqrt{10}$$

$$\therefore x=-1\pm 3\sqrt{10}$$

따라서 구와 x 축의 교점의 좌표가

$$(-1+3\sqrt{10}, 0, 0), (-1-3\sqrt{10}, 0, 0)$$

이므로 두 교점 사이의 거리는

$$-1+3\sqrt{10}-(-1-3\sqrt{10})=6\sqrt{10}$$

답 $6\sqrt{10}$

522

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}=0$ 에서

$$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 구이다.

즉 구의 반지름의 길이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \overline{AB} &= \frac{1}{2} \times \sqrt{(-3-1)^2+(2-2)^2+(5+3)^2} \\ &= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

따라서 구하는 겉넓이는

$$4\pi \times (2\sqrt{5})^2 = 80\pi$$

답 80π

다른 풀이 점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$\overrightarrow{AP} = (x-1, y-2, z+3),$$

$$\overrightarrow{BP} = (x+3, y-2, z-5)$$

이때 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}=0$ 이므로

$$(x-1)(x+3)+(y-2)(y-2)$$

$$+(z+3)(z-5)=0$$

$$x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z-14=0$$

$$\therefore (x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=20$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가

$(-1, 2, 1)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ 인 구이다.

연습 문제

• 본책 248쪽

523

전략 점 P가 나타내는 도형을 파악한다.

$|\overrightarrow{AP}|=2$ 를 만족시키는 점 P는 중심이 점

$A(0, -1, 3)$ 이고 반지름의 길이가 2인 구 위의 점이다.

이때 점 A와 평면 $x+y+z=8$, 즉 $x+y+z-8=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-1+3-8|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=2\sqrt{3}$$

따라서 $M=2\sqrt{3}+2, m=2\sqrt{3}-2$ 이므로

$$Mm=8$$

답 8

524

전략 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}=0$ 에서 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$ 임을 이용한다.

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}=0 \text{에서 } \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 구이다.

이때 구의 중심을 C라 하면 점 C는 선분 AB의 중점
이므로 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{3+1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3+5}{2}\right), \text{ 즉 } (2, 1, 4)$$

$$\therefore \overrightarrow{CQ} = (1, 2, 3) - (2, 1, 4) = (-1, 1, -1)$$

즉 점 Q(1, 2, 3)을 지나고 법선벡터가

$\overrightarrow{CQ}=(-1, 1, -1)$ 인 평면의 방정식은

$$-(x-1)+(y-2)-(z-3)=0$$

$$\therefore x-y+z-2=0$$

답 $x-y+z-2=0$

다른 풀이 점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$\overrightarrow{AP} = (x-3, y, z-3),$$

$$\overrightarrow{BP} = (x-1, y-2, z-5)$$

이때 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}=0$ 이므로

$$(x-3)(x-1)+y(y-2)$$

$$+(z-3)(z-5)=0$$

$$x^2+y^2+z^2-4x-2y-8z+18=0$$

$$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=3$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가

$(2, 1, 4)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 구이다.

525

전략 점 P가 나타내는 도형을 파악한다.

점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 A(4, 8, 1)이고 반지름의 길이가

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 8^2 + 1^2} = 9$$

인 구이므로 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$$(x-4)^2 + (y-8)^2 + (z-1)^2 = 81 \quad \cdots \textcircled{1}$$

한편 $\frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z-1}{2} = t$ 로 놓으면

$$x=2t+1, y=t-1, z=2t+1$$

따라서 교점의 좌표를 $(2t+1, t-1, 2t+1)$ 로 놓고

①에 대입하면

$$(2t-3)^2 + (t-9)^2 + (2t)^2 = 81$$

$$3t^2 - 10t + 3 = 0, \quad (3t-1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{3} \text{ 또는 } t = 3$$

즉 점 P가 나타내는 도형과 직선의 교점의 좌표가

$(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3}), (7, 2, 7)$ 이므로 두 교점 사이의 거리는

$$\sqrt{\left(7-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(2+\frac{2}{3}\right)^2 + \left(7-\frac{5}{3}\right)^2} = 8$$

답 8

526

전략 벡터의 내적의 성질을 이용하여 주어진 식의 좌변을 정리한다.

$$|\vec{p}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{p} + 9|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 \text{에서}$$

$$|\vec{p} - 3\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$$

이때 $3\vec{a} = 3(3, 1, 2) = (9, 3, 6)$ 이므로 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(9, 3, 6)$ 이고 반지름의 길이가

$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2} = 6$$

인 구이다.

따라서 $l=9, m=3, n=6, r=6$ 이므로

$$l+m+n+r=24$$

답 24

527

전략 직선 위의 점 A의 좌표를 실수 t 에 대한 식으로 나타내어 평면의 방정식에 대입한다.

$$-x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = t \text{로 놓으면}$$

$$x = -t, y = 2t, z = 3t$$

따라서 직선 위의 점 A의 좌표를 $(-t, 2t, 3t)$ 로 놓으면 점 A가 평면 $2x+y-z=6$ 위의 점이므로

$$-2t + 2t - 3t = 6 \quad \therefore t = -2$$

$$\therefore A(2, -4, -6)$$

한편 $\vec{OP} \cdot \vec{OA} = |\vec{OP}|^2$ 에서

$$\vec{OP} \cdot \vec{OA} = \vec{OP} \cdot \vec{OP}$$

$$\vec{OP} \cdot (\vec{OA} - \vec{OP}) = 0$$

$$\therefore \vec{OP} \cdot \vec{PA} = 0$$

즉 $\vec{OP} \perp \vec{PA}$ 이므로 점 P가 나타내는 도형은 $\vec{OA}$ 를 지름으로 하는 구이다.

이때 구의 중심을 C라 하면 점 C는 선분 OA의 중점이므로 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{2}{2}, \frac{-4}{2}, \frac{-6}{2}\right), \text{ 즉 } (1, -2, -3)$$

구의 반지름의 길이는

$$|\vec{OC}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

즉 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점

$C(1, -2, -3)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{14}$ 인 구이다.

구의 중심 C에서 평면

$x+2y-2z=0$ 에 내린 수

선의 발을 H라 하면

$$\vec{CH}$$

$$= \frac{|1-4+6|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}$$

$$= 1$$

따라서 점 P가 나타내는 도형과 평면 $x+2y-2z=0$

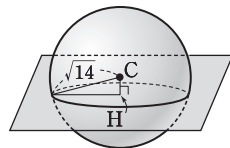
이 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가

$$\sqrt{(\sqrt{14})^2 - 1^2} = \sqrt{13}$$

인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$$2\pi \times \sqrt{13} = 2\sqrt{13}\pi$$

답 $2\sqrt{13}\pi$



III-3

도형의 방정식

