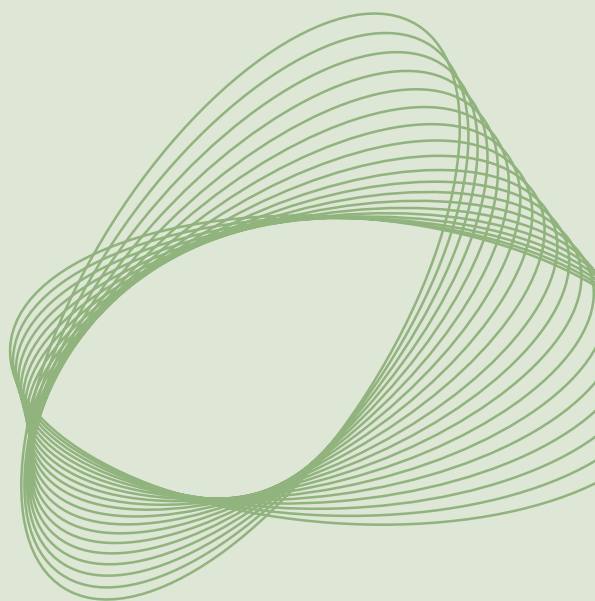




유형의 완성 RPM

기하

정답및풀이



01 이차곡선

교과서 문제 정복하기

본책 007쪽, 009쪽

0001 $y^2=4 \times 5 \times x$, 즉 $y^2=20x$ **답** $y^2=20x$

0002 $x^2=4 \times (-3) \times y$, 즉 $x^2=-12y$ **답** $x^2=-12y$

0003 $y^2=-4x=4 \times (-1) \times x$ 이므로
초점의 좌표는 $(-1, 0)$, 준선의 방정식은 $x=1$ 이다.
답 초점의 좌표: $(-1, 0)$, 준선의 방정식: $x=1$

0004 $y^2=\frac{1}{2}x=4 \times \frac{1}{8}x$ 이므로
초점의 좌표는 $(\frac{1}{8}, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-\frac{1}{8}$ 이다.
답 초점의 좌표: $(\frac{1}{8}, 0)$, 준선의 방정식: $x=-\frac{1}{8}$

0005 $x^2=8y=4 \times 2y$ 이므로
초점의 좌표는 $(0, 2)$, 준선의 방정식은 $y=-2$ 이다.
답 초점의 좌표: $(0, 2)$, 준선의 방정식: $y=-2$

0006 $x^2=-\frac{2}{3}y=4 \times (-\frac{1}{6})y$ 이므로
초점의 좌표는 $(0, -\frac{1}{6})$, 준선의 방정식은 $y=\frac{1}{6}$ 이다.
답 초점의 좌표: $(0, -\frac{1}{6})$, 준선의 방정식: $y=\frac{1}{6}$

0007 **답** $(y+2)^2=2(x-3)$

0008 주어진 포물선은 포물선 $y^2=4x$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.
이때 포물선 $y^2=4x$ 의 초점의 좌표는 $(1, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-1$ 이다.
따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(0, 1)$, 준선의 방정식은 $x=-2$ 이다.
답 초점의 좌표: $(0, 1)$, 준선의 방정식: $x=-2$

0009 주어진 포물선은 포물선 $x^2=-16y$ 를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.
이때 포물선 $x^2=-16y=4 \times (-4)y$ 의 초점의 좌표는 $(0, -4)$, 준선의 방정식은 $y=4$ 이다.
따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(2, -1)$, 준선의 방정식은 $y=7$ 이다.
답 초점의 좌표: $(2, -1)$, 준선의 방정식: $y=7$

0010 (1) $y^2-8x-4y+28=0$ 에서
 $(y-2)^2=8(x-3)$
(2) 주어진 포물선은 포물선 $y^2=8x$ 를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.
이때 포물선 $y^2=8x=4 \times 2x$ 의 초점의 좌표는 $(2, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-2$ 이다.
따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(5, 2)$, 준선의 방정식은 $x=1$ 이다.

답 (1) $(y-2)^2=8(x-3)$
(2) 초점의 좌표: $(5, 2)$, 준선의 방정식: $x=1$

0011 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$)이라 하면
 $2a=8$ 에서 $a=4$
 $a^2-b^2=2^2$ 에서 $b^2=4^2-2^2=12$
 $\therefore \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ **답** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

0012 구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($b>a>0$)이라 하면
 $2b=10$ 에서 $b=5$
 $b^2-a^2=3^2$ 에서 $a^2=5^2-3^2=16$
 $\therefore \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ **답** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

0013 타원 $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{49}=1$ 에서 $\sqrt{49-24}=5$ 이므로 초점의 좌표는 $(0, 5), (0, -5)$
장축의 길이는 $2 \times 7=14$
단축의 길이는 $2 \times 2\sqrt{6}=4\sqrt{6}$
답 초점의 좌표: $(0, 5), (0, -5)$
장축의 길이: 14 , 단축의 길이: $4\sqrt{6}$

0014 타원 $x^2+9y^2=9$, 즉 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 에서 $\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$ 이므로 초점의 좌표는 $(2\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0)$
장축의 길이는 $2 \times 3=6$
단축의 길이는 $2 \times 1=2$
답 초점의 좌표: $(2\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0)$
장축의 길이: 6 , 단축의 길이: 2

0015 **답** $\frac{(x+1)^2}{10}+\frac{(y-5)^2}{3}=1$

0016 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 을 y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.
이때 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 에서 $\sqrt{8-2}=\sqrt{6}$ 이므로 초점의 좌표는 $(\sqrt{6}, 0), (-\sqrt{6}, 0)$

따라서 주어진 타원의 초점의 좌표는

$$(\sqrt{6}, 1), (-\sqrt{6}, 1)$$

한편 타원을 평행이동하여도 장축과 단축의 길이는 변하지 않으므로 주어진 타원의

$$\text{장축의 길이는 } 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{단축의 길이는 } 2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{답 초점의 좌표: } (\sqrt{6}, 1), (-\sqrt{6}, 1)$$

$$\text{장축의 길이: } 4\sqrt{2}, \text{ 단축의 길이: } 2\sqrt{2}$$

0017 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ 에서 $\sqrt{25-9}=4$ 이므로 초점의 좌표는

$$(0, 4), (0, -4)$$

따라서 주어진 타원의 초점의 좌표는

$$(3, 3), (3, -5)$$

한편 타원을 평행이동하여도 장축과 단축의 길이는 변하지 않으므로 주어진 타원의

$$\text{장축의 길이는 } 2 \times 5 = 10$$

$$\text{단축의 길이는 } 2 \times 3 = 6$$

$$\text{답 초점의 좌표: } (3, 3), (3, -5)$$

$$\text{장축의 길이: } 10, \text{ 단축의 길이: } 6$$

0018 (1) $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$ 에서

$$(x-1)^2 + 4(y-2)^2 = 4$$

$$\therefore \frac{(x-1)^2}{4} + (y-2)^2 = 1$$

(2) 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 을 x 축의 방향으로 1만큼,

y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 에서 $\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$ 이므로 초점의 좌표는

$$(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$$

따라서 주어진 타원의 초점의 좌표는

$$(\sqrt{3}+1, 2), (-\sqrt{3}+1, 2)$$

한편 타원을 평행이동하여도 장축과 단축의 길이는 변하지 않으므로 주어진 타원의

$$\text{장축의 길이는 } 2 \times 2 = 4$$

$$\text{단축의 길이는 } 2 \times 1 = 2$$

$$\text{답 (1) } \frac{(x-1)^2}{4} + (y-2)^2 = 1$$

$$(2) \text{ 초점의 좌표: } (\sqrt{3}+1, 2), (-\sqrt{3}+1, 2)$$

$$\text{장축의 길이: } 4, \text{ 단축의 길이: } 2$$

0019 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$)이라 하면

$$2a=8 \text{에서 } a=4$$

$$a^2 + b^2 = 5^2 \text{에서 } b^2 = 5^2 - 4^2 = 9$$

$$\therefore \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\text{답 } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

0020 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ($b > 0$)이라 하면

$$2b=4\sqrt{2} \text{에서 } b=2\sqrt{2}$$

$$a^2 + b^2 = 4^2 \text{에서 } a^2 = 4^2 - (2\sqrt{2})^2 = 8$$

$$\therefore \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = -1$$

$$\text{답 } \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = -1$$

0021 쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ 에서 $\sqrt{12+4}=4$ 이므로 초점의 좌표는

$$(4, 0), (-4, 0)$$

$$\text{꼭짓점의 좌표는 } (2\sqrt{3}, 0), (-2\sqrt{3}, 0)$$

$$\text{주축의 길이는 } 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{답 초점의 좌표: } (4, 0), (-4, 0)$$

$$\text{꼭짓점의 좌표: } (2\sqrt{3}, 0), (-2\sqrt{3}, 0)$$

$$\text{주축의 길이: } 4\sqrt{3}$$

0022 쌍곡선 $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{16} = -1$ 에서 $\sqrt{10+16}=\sqrt{26}$ 이므로 초점의 좌표는

$$(0, \sqrt{26}), (0, -\sqrt{26})$$

$$\text{꼭짓점의 좌표는 } (0, 4), (0, -4)$$

$$\text{주축의 길이는 } 2 \times 4 = 8$$

$$\text{답 초점의 좌표: } (0, \sqrt{26}), (0, -\sqrt{26})$$

$$\text{꼭짓점의 좌표: } (0, 4), (0, -4)$$

$$\text{주축의 길이: } 8$$

0023 쌍곡선 $4x^2 - y^2 = 4$, 즉 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 에서 $\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

이므로 초점의 좌표는

$$(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$$

$$\text{꼭짓점의 좌표는 } (1, 0), (-1, 0)$$

$$\text{주축의 길이는 } 2 \times 1 = 2$$

$$\text{답 초점의 좌표: } (\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$$

$$\text{꼭짓점의 좌표: } (1, 0), (-1, 0)$$

$$\text{주축의 길이: } 2$$

0024 쌍곡선 $4x^2 - 9y^2 = -36$, 즉 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = -1$ 에서

$\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$ 이므로 초점의 좌표는

$$(0, \sqrt{13}), (0, -\sqrt{13})$$

$$\text{꼭짓점의 좌표는 } (0, 2), (0, -2)$$

$$\text{주축의 길이는 } 2 \times 2 = 4$$

$$\text{답 초점의 좌표: } (0, \sqrt{13}), (0, -\sqrt{13})$$

$$\text{꼭짓점의 좌표: } (0, 2), (0, -2)$$

$$\text{주축의 길이: } 4$$

0025 답 $y = \pm \frac{7}{5}x$

0026 답 $y = \pm \frac{1}{3}x$

0027 답 $y = \pm \frac{3}{2}x$

0028 답 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$

0029 답 $\frac{(x-4)^2}{7} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

0030 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ 에서 $\sqrt{3+6} = 3$ 이므로 초점의 좌표는 $(3, 0), (-3, 0)$, 꼭짓점의 좌표는 $(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$ 이고 점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}x$, 즉 $y = \pm \sqrt{2}x$ 이다.

따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는 $(1, 0), (-5, 0)$, 꼭짓점의 좌표는 $(\sqrt{3}-2, 0), (-\sqrt{3}-2, 0)$ 이고 점근선의 방정식은 $y = \pm \sqrt{2}(x+2)$, 즉 $y = \sqrt{2}x + 2\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}$ 이다.

답 초점의 좌표: $(1, 0), (-5, 0)$

꼭짓점의 좌표: $(\sqrt{3}-2, 0), (-\sqrt{3}-2, 0)$

점근선의 방정식: $y = \sqrt{2}x + 2\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}$

0031 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = -1$ 을 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 -7 만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = -1$ 에서 $\sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$ 이므로 초점의 좌표는 $(0, 2\sqrt{5}), (0, -2\sqrt{5})$, 꼭짓점의 좌표는 $(0, 4), (0, -4)$ 이고 점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{4}{2}x$, 즉 $y = \pm 2x$ 이다.

따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는 $(3, 2\sqrt{5}-7), (3, -2\sqrt{5}-7)$, 꼭짓점의 좌표는 $(3, -3), (3, -11)$ 이고 점근선의 방정식은 $y+7 = \pm 2(x-3)$, 즉 $y = 2x-13, y = -2x-1$ 이다.

답 초점의 좌표: $(3, 2\sqrt{5}-7), (3, -2\sqrt{5}-7)$

꼭짓점의 좌표: $(3, -3), (3, -11)$

점근선의 방정식: $y = 2x-13, y = -2x-1$

0032 (1) $7x^2 - 9y^2 - 18y - 72 = 0$ 에서

$$7x^2 - 9(y+1)^2 = 63$$

$$\therefore \frac{x^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{7} = 1$$

(2) 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 을 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 에서 $\sqrt{9+7} = 4$ 이므로 초점의 좌표는 $(4, 0), (-4, 0)$, 꼭짓점의 좌표는 $(3, 0), (-3, 0)$ 이고 점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}x$ 이다.

따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는 $(4, -1), (-4, -1)$, 꼭짓점의 좌표는 $(3, -1), (-3, -1)$ 이고 점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}x - 1$ 이다.

답 (1) $\frac{x^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{7} = 1$

(2) 초점의 좌표: $(4, -1), (-4, -1)$

꼭짓점의 좌표: $(3, -1), (-3, -1)$

점근선의 방정식: $y = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}x - 1$

0033 $x^2 - 4x - 4y + 16 = 0$ 에서

$$(x-2)^2 = 4(y-3)$$

따라서 주어진 방정식은 포물선을 나타낸다.

답 포물선

0034 $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ 에서

$$(x-2)^2 + y^2 = 9$$

따라서 주어진 방정식은 원을 나타낸다.

답 원

0035 $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$ 에서

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

따라서 주어진 방정식은 타원을 나타낸다.

답 타원

0036 $5x^2 - 4y^2 + 24y - 16 = 0$ 에서

$$5x^2 - 4(y-3)^2 = -20$$

$$\therefore \frac{x^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = -1$$

따라서 주어진 방정식은 쌍곡선을 나타낸다.

답 쌍곡선

유형 익히기

• 본책 010~021쪽

0037 원의 중심 $(4, 0)$ 을 초점으로 하고 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선의 방정식은

$$y^2 = 4 \times 4 \times x, \text{ 즉 } y^2 = 16x$$

이 포물선이 점 $(a, 8)$ 을 지나므로

$$64 = 16a \quad \therefore a = 4$$

답 4

0038 포물선 $y^2 = 14x = 4 \times \frac{7}{2}x$ 의 초점의 좌표는 $(\frac{7}{2}, 0)$ 이고, 준선의 방정식은 $x = -\frac{7}{2}$ 이므로 구하는 거리는

$$\frac{7}{2} - \left(-\frac{7}{2}\right) = 7$$

답 ②

0039 포물선 $y^2 = kx = 4 \times \frac{k}{4}x$ 의 초점의 좌표는

$$\left(\frac{k}{4}, 0\right)$$

포물선 $x^2 = -16y = 4 \times (-4)y$ 의 초점의 좌표는
(0, -4)

이때 두 초점 사이의 거리가 5이므로

$$\sqrt{\left(\frac{k}{4}\right)^2 + 4^2} = 5, \quad \frac{k^2}{16} + 16 = 25, \quad k^2 = 144$$

$$\therefore k = 12 \quad (\because k > 0)$$

답 12

0040 주어진 포물선의 방정식은

$$x^2 = 4 \times (-2) \times y, \text{ 즉 } x^2 = -8y$$

$$\therefore A(0, 0)$$

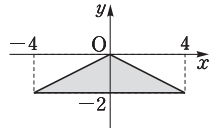
포물선의 초점 F를 지나고 x 축에 평행한 직선의 방정식은
 $y = -2$ 이므로 이 직선과 포물선이 만나는 점의 x 좌표는
 $x^2 = -8 \times (-2)$ 에서

$$x^2 = 16 \quad \therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 두 점 B, C의 좌표는

$(-4, -2), (4, -2)$ 이므로 $\triangle ABC$
의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{4 - (-4)\} \times 2 = 8$$



답 3

0041 주어진 포물선은 포물선 $y^2 = -12x$ 를 x 축의 방향으로
 -2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2 = -12x = 4 \times (-3)x$ 의 초점의 좌표는
 $(-3, 0)$, 준선의 방정식은 $x = 3$ 이다.

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(-5, 1)$, 준선의 방정식
은 $x = 1$ 이므로

$$a = -5, b = 1, c = 1$$

$$\therefore a + b - c = -5$$

답 4

0042 포물선 $x^2 = 4y$ 의 초점의 좌표는 $(0, 1)$ 이므로 포물선
 $x^2 = 4y$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행
이동한 포물선의 초점의 좌표는

$$(m, 1+n)$$

이 점이 점 $(3, -2)$ 와 일치하므로

$$m = 3, 1 + n = -2 \quad \therefore m = 3, n = -3$$

$$\therefore mn = -9$$

답 -9

0043 $y^2 - 8x + 2y + 17 = 0$ 에서

$$(y+1)^2 = 8(x-2)$$

즉 주어진 포물선은 포물선 $y^2 = 8x$ 를 x 축의 방향으로 2 만큼,
 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

ㄱ. 포물선 $y^2 = 8x$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$ 이므로 주어진 포
물선의 꼭짓점의 좌표는 $(2, -1)$ 이다. (참)

ㄴ. 포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점의 좌표는 $(2, 0)$ 이므로 주어진 포물
선의 초점의 좌표는 $(4, -1)$ 이다. (거짓)

ㄷ. 포물선 $y^2 = 8x$ 의 준선의 방정식은 $x = -2$ 이므로 주어진 포
물선의 준선의 방정식은 $x = 0$ 이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 3

0044 $y = x^2 + 2px + q$ 에서

$$(x+p)^2 = y + p^2 - q$$

즉 주어진 포물선은 포물선 $x^2 = y$ 를 x 축의 방향으로 $-p$ 만큼,
 y 축의 방향으로 $-p^2 + q$ 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2 = y = 4 \times \frac{1}{4}y$ 의 초점의 좌표는 $(0, \frac{1}{4})$ 이므로 주
어진 포물선의 초점의 좌표는

$$\left(-p, \frac{1}{4} - p^2 + q\right)$$

이 점이 점 $(\frac{1}{2}, 4)$ 와 일치하므로

$$-p = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4} - p^2 + q = 4$$

$$\therefore p = -\frac{1}{2}, q = 4$$

$$\therefore pq = -2$$

답 -2

0045 주어진 포물선은 포물선 $y^2 = 2kx$ 를 x 축의 방향으로
 $-k + 2$ 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2 = 2kx = 4 \times \frac{k}{2}x$ 의 초점의 좌표는 $(\frac{k}{2}, 0)$, 준선
의 방정식은 $x = -\frac{k}{2}$ 이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는

$$\left(-\frac{k}{2} + 2, k\right), \text{ 준선의 방정식은 } x = -\frac{3}{2}k + 2 \text{이다.} \quad \dots \text{ 1단계}$$

주어진 포물선의 초점이 x 축 위에 있으므로

$$-\frac{k}{2} + 2 = 0 \quad \therefore k = 4$$

... 2단계

따라서 구하는 준선의 방정식은

$$x = -\frac{3}{2} \times 4 + 2, \text{ 즉 } x = -4$$

... 3단계

답 $x = -4$

채점 요소		비율
1단계	초점의 좌표와 준선의 방정식을 k 에 대한 식으로 나타내기	50 %
2단계	k 의 값 구하기	30 %
3단계	준선의 방정식 구하기	20 %

0046 $y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ 에서

$$(y-2)^2 = -4x$$

..... ㉠

포물선 ㉠은 포물선 $y^2 = -4x$ 를 y 축의 방향으로 2 만큼 평행이
동한 것이다.

이때 포물선 $y^2 = -4x$ 의 초점의 좌표는 $(-1, 0)$ 이므로 포물선
㉠의 초점의 좌표는

$$(-1, 2)$$

또 $x^2 - 2x - 4y + a = 0$ 에서

$$(x-1)^2 = 4\left(y - \frac{a-1}{4}\right)$$

..... ㉡

포물선 ㉠은 포물선 $x^2=4y$ 를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 $\frac{a-1}{4}$ 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2=4y$ 의 초점의 좌표는 $(0, 1)$ 이므로 포물선 ㉠의 초점의 좌표는

$$\left(1, \frac{a+3}{4}\right)$$

두 포물선 ㉠, ㉡의 초점이 원점에 대하여 대칭이므로

$$\frac{a+3}{4} = -2 \quad \therefore a = -11 \quad \text{답 -11}$$

0047 축이 y 축에 평행한 포물선의 방정식을

$$x^2 + Ax + By + C = 0 \quad (A, B, C \text{는 상수}, B \neq 0)$$

이라 하자.

이 포물선이 세 점 $(1, -3)$, $(-3, -3)$, $(-1, -2)$ 를 지나므로

$$1 + A - 3B + C = 0,$$

$$9 - 3A - 3B + C = 0,$$

$$1 - A - 2B + C = 0$$

세 식을 연립하여 풀면 $A=2, B=4, C=9$

따라서 포물선의 방정식은

$$x^2 + 2x + 4y + 9 = 0$$

$$\therefore (x+1)^2 = -4(y+2)$$

이 포물선은 포물선 $x^2 = -4y$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2 = -4y$ 의 초점의 좌표가 $(0, -1)$ 이므로 구하는 초점의 좌표는 $(-1, -3)$ **답 $(-1, -3)$**

0048 포물선 위의 임의의 점을

$P(x, y)$ 라 하고 점 P 에서 준선에 내린 수선의 발을 H 라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PH}$ 이므로

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = |x-6|$$

양변을 제곱하면

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = (x-6)^2$$

$$\therefore (y-1)^2 = -8(x-4)$$

이 포물선이 점 $(a, 3)$ 을 지나므로

$$4 = -8(a-4) \quad \therefore a = \frac{7}{2} \quad \text{답 } \frac{7}{2}$$

다른 풀이 주어진 포물선의 꼭짓점의 좌표는

$$\left(\frac{2+6}{2}, 1\right), \text{ 즉 } (4, 1)$$

즉 주어진 포물선은 꼭짓점이 원점인 포물선을 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

평행이동하기 전의 포물선의 초점의 좌표가

$$(2-4, 1-1), \text{ 즉 } (-2, 0)$$

이므로 평행이동하기 전의 포물선의 방정식은

$$y^2 = 4 \times (-2) \times x, \text{ 즉 } y^2 = -8x$$

따라서 주어진 포물선의 방정식은

$$(y-1)^2 = -8(x-4)$$

0049 포물선 위의 임의의 점을

$P(x, y)$ 라 하고 점 P 에서 준선에 내린 수선의 발을 H 라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PH}$ 이므로

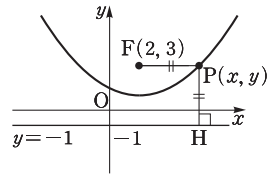
$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$$

$$= |y+1|$$

양변을 제곱하면

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = (y+1)^2$$

$$\therefore (x-2)^2 = 8(y-1) \quad \text{답 ③}$$



0050 포물선의 준선의 방정식을 $x=a$ 라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\sqrt{(4-1)^2 + (3+1)^2} = |4-a|$$

$$4-a = \pm 5 \quad \therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 9$$

한편 포물선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$ 라 하고 점 P 에서 준선에 내린 수선의 발을 H 라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{PF} = \overline{PH}$ 이므로

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = |x-a|$$

양변을 제곱하면

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = (x-a)^2$$

(i) $a = -1$ 일 때

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = (x+1)^2 \text{에서}$$

$$(y+1)^2 = 4x$$

(ii) $a = 9$ 일 때

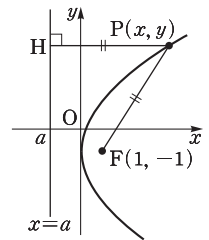
$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = (x-9)^2 \text{에서}$$

$$(y+1)^2 = -16(x-5)$$

(i), (ii)에서 구하는 포물선의 방정식은

$$(y+1)^2 = 4x, (y+1)^2 = -16(x-5)$$

$$\text{답 } (y+1)^2 = 4x, (y+1)^2 = -16(x-5)$$



0051 포물선 위의 임의의 점을

$P(x, y)$ 라 하고 점 P 에서 준선에 내린 수선의 발을 H 라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PH}$ 이므로

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = |x-5|$$

양변을 제곱하면

$$(x-3)^2 + y^2 = (x-5)^2$$

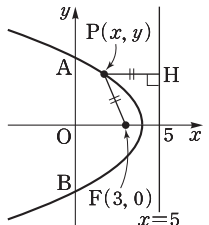
$$\therefore y^2 = -4(x-4)$$

$$x=0 \text{을 대입하면 } y^2 = 16$$

$$\therefore y = -4 \text{ 또는 } y = 4$$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(0, -4)$, $(0, 4)$ 이므로

$$\overline{AB} = 4 - (-4) = 8 \quad \text{답 ③}$$



0052 주어진 포물선은 포물선 $y^2=4x$ 를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=4x$ 의 초점의 좌표는 (1, 0), 준선의 방정식은 $x=-1$ 이므로 주어진 포물선의 초점은 F(2, 0), 준선의 방정식은 $x=0$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H'이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PH'} = \overline{PF} = 5$$

즉 점 P의 x 좌표가 5이므로 y 좌표는 $y^2=4 \times (5-1)$ 에서 $y^2=16$

$$\therefore y = -4 \text{ 또는 } y = 4$$

따라서 점 P의 좌표를 (5, 4)라 하면 H(5, 0)이므로 $\triangle PFH$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (5-2) \times 4 = 6$$

답 ④

0053 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PH}$ 이므로 $\triangle PHF$ 는 이등변삼각형이다.

$$\therefore \angle PFH = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ$$

답 70°

0054 포물선 $x^2=y$ 의 초점을 F라 하면 $F(0, \frac{1}{4})$ 이고, 준선의 방정식은 $y=-\frac{1}{4}$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 점 P(a, b)에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PH} = \overline{PF} = \frac{3}{4}$$

따라서 $b - (-\frac{1}{4}) = \frac{3}{4}$ 이므로

$$b = \frac{1}{2}$$

... 1단계

또 점 P(a, $\frac{1}{2}$)은 포물선 $x^2=y$ 위의 점이므로

$$a^2 = \frac{1}{2}$$

... 2단계

$$\therefore 4(a^2+b^2) = 4 \times \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right\} = 3$$

... 3단계

답 3

채점 요소	비율
1단계 b의 값 구하기	50 %
2단계 a ² 의 값 구하기	30 %
3단계 4(a ² +b ²)의 값 구하기	20 %

0055 포물선 $y^2=8x$ 의 초점은 F(2, 0)이므로 세 점 A, B, C의 x 좌표를 각각 x_1, x_2, x_3 이라 하면

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} = 2 \quad \therefore x_1+x_2+x_3 = 6$$

한편 포물선 $y^2=8x$ 의 준선의 방정식은 $x=-2$ 이므로 오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, C에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 A', B', C'이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF} = \overline{AA'} = x_1 + 2$$

$$\overline{BF} = \overline{BB'} = x_2 + 2$$

$$\overline{CF} = \overline{CC'} = x_3 + 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AF} + \overline{BF} + \overline{CF} &= (x_1+2) + (x_2+2) + (x_3+2) \\ &= (x_1+x_2+x_3) + 6 \\ &= 6+6=12 \end{aligned}$$

답 12

0056 포물선 $y^2=4px$ 의 초점은 F(p, 0)이고 준선의 방정식은 $x=-p$ 이다.

이때 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AB} = \overline{AF}$$

이고 $\overline{AB} = \overline{BF}$ 이므로 $\triangle ABF$ 는 정삼각형이다.

따라서 $\angle ABF = 60^\circ$ 이므로

$$\angle BFO = 60^\circ$$

점 C에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 CHF에서

$$\overline{FH} = \overline{CF} \cos 60^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\overline{CH} = \overline{CF} \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

따라서 점 C의 좌표는 $(p-1, \sqrt{3})$

이때 점 C(p-1, $\sqrt{3}$)이 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이므로

$$(\sqrt{3})^2 = 4p(p-1), \quad 4p^2 - 4p - 3 = 0$$

$$(2p+1)(2p-3) = 0$$

$$\therefore p = \frac{3}{2} \quad (\because p > 0)$$

답 $\frac{3}{2}$

0057 두 점 A, B의 좌표를 각각 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 라 하면 두 점 A, B는 포물선 $y^2=10x$ 위의 점이므로

$$y_1^2 = 10x_1, \quad y_2^2 = 10x_2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 포물선 $y^2=10x$ 의 준선의 방정식은 $x=-\frac{5}{2}$ 이므로 두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H₁, H₂라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF} + \overline{BF} = \overline{AH_1} + \overline{BH_2}$$

$$= \left(x_1 + \frac{5}{2} \right) + \left(x_2 + \frac{5}{2} \right)$$

$$= x_1 + x_2 + 5$$

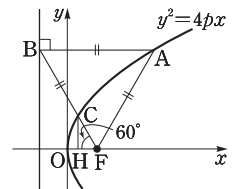
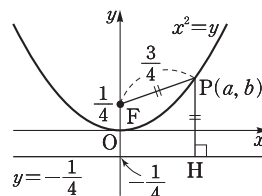
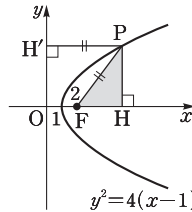
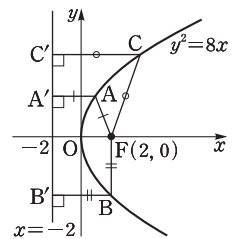
즉 $x_1 + x_2 + 5 = 9$ 이므로 $x_1 + x_2 = 4$

$$\therefore S_1 + S_2 = \pi y_1^2 + \pi y_2^2$$

$$= 10\pi(x_1 + x_2) \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= 10\pi \times 4 = 40\pi$$

답 40π



0058 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PH} = \overline{PF}, \overline{QH'} = \overline{QF}$$

$$\therefore \overline{PH} + \overline{QH'} = \overline{PF} + \overline{QF} = \overline{PQ} = 9$$

따라서 $\square HH'QP$ 의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{PH} + \overline{HH'} + \overline{QH'} + \overline{PQ} &= \overline{HH'} + \overline{PQ} + \overline{PH} + \overline{QH'} \\ &= 8 + 9 + 9 = 26 \end{aligned}$$

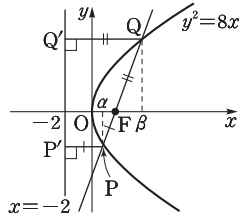
답 26

0059 포물선 $y^2 = 8x$ 의 준선의 방정식은 $x = -2$

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 P', Q'이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{PF} &= \overline{PP'} = \alpha + 2 \\ \overline{QF} &= \overline{QQ'} = \beta + 2 \\ \therefore \overline{PQ} &= \overline{PF} + \overline{QF} \\ &= (\alpha + 2) + (\beta + 2) \\ &= (\alpha + \beta) + 4 \\ &= 6 + 4 = 10 \end{aligned}$$

답 10



0060 포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점을 F라 하면 F(1, 0)이고 준선의 방정식은 $x = -1$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H₁, H₂라 하고, 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 x₁, x₂라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{PF} &= \overline{PH_1} = x_1 + 1 \\ \overline{QF} &= \overline{QH_2} = x_2 + 1 \end{aligned}$$

이때 직선 $y = m(x - 1)$ 은 점 F(1, 0)을 지나므로

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \overline{PF} + \overline{QF} \\ &= (x_1 + 1) + (x_2 + 1) \\ &= x_1 + x_2 + 2 \end{aligned}$$

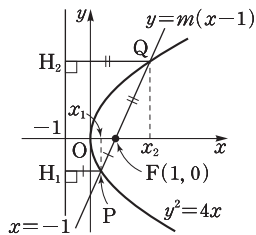
즉 $x_1 + x_2 + 2 = 10$ 이므로

$$x_1 + x_2 = 8$$

따라서 선분 PQ의 중점의 x좌표는

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

답 4



0061 포물선 $y^2 = 4px$ 의 초점은 F(p, 0)이고 준선의 방정식은 $x = -p$ 이다.

이때 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF} = \overline{AA'} = 2p, \overline{BF} = \overline{BB'} = 2p$$

이므로 $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF} = 2p + 2p = 4p$

따라서 $\square A'B'BA$ 의 넓이는

$$2p \times 4p = 8p^2$$

즉 $8p^2 = 32$ 이므로

$$p^2 = 4 \quad \therefore p = 2 \quad (\because p > 0)$$

따라서 $\overline{OF} = 2, \overline{AF} = 4$ 이므로 직각삼각형 AOF에서

$$\overline{OA} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

이때 두 점 A, B는 x축에 대하여 대칭이므로

$$\overline{OB} = \overline{OA} = 2\sqrt{5}$$

따라서 $\triangle AOB$ 의 둘레의 길이는

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{AB} = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 8 = 8 + 4\sqrt{5}$$

답 $8 + 4\sqrt{5}$

0062 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 포물선 $x^2 = 6y$ 의 준선에 내린 수선의 발을 각각 A', B'이라 하자.

$\overline{AF} = 2k, \overline{BF} = 3k$ ($k > 0$)라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AA'} = \overline{AF} = 2k, \overline{BB'} = \overline{BF} = 3k$$

이때 점 A에서 $\overline{BB'}$ 에 내린 수선의 발을 C라 하면

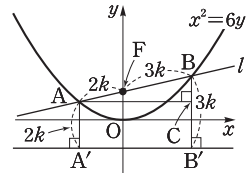
$$\overline{BC} = \overline{B'B} - \overline{A'A} = 3k - 2k = k$$

따라서 직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AC} = \sqrt{(5k)^2 - k^2} = 2\sqrt{6}k$$

$$\therefore m = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{k}{2\sqrt{6}k} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

답 $\frac{\sqrt{6}}{12}$



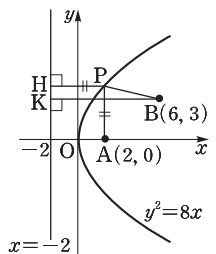
0063 포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점은 점 A(2, 0)이고 준선의 방정식은 $x = -2$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, K라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PA} = \overline{PH}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{PA} + \overline{PB} &= \overline{PH} + \overline{PB} \\ &\geq \overline{BK} \\ &= 6 - (-2) \\ &= 8 \end{aligned}$$

따라서 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 8이다.

답 8



0064 오른쪽 그림과 같이 두 점 P, A에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, K라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PH}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{PF} = \overline{AP} + \overline{PH} \geq \overline{AK}$$

따라서 직선 AP가 포물선의 축과

평행할 때, $\overline{AP} + \overline{PF}$ 의 값이 최소이다.

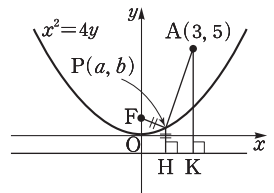
이때 점 P(a, b)는 직선 $x = 3$ 과 포물선 $x^2 = 4y$ 의 교점이므로

$$a = 3, b = \frac{9}{4}$$

즉 구하는 $a + b$ 의 값은

$$3 + \frac{9}{4} = \frac{21}{4}$$

답 $\frac{21}{4}$



0065 $\triangle APB$ 의 둘레의 길이는 $\overline{AP} + \overline{PB} + \overline{AB}$ 이므로 $\overline{AP} + \overline{PB}$ 의 값이 최소일 때, $\triangle APB$ 의 둘레의 길이도 최소이다.

한편 포물선 $y^2=3x$ 의 초점은

점 $B(\frac{3}{4}, 0)$ 이므로 오른쪽 그림과

같이 두 점 P, A에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, K라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PB} = \overline{PH}$$

$$\therefore \overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PH} \geq \overline{AK}$$

즉 직선 AP가 포물선의 축과 평행할 때, $\overline{AP} + \overline{PB}$ 의 값이 최소이다.

이때의 점 P의 y좌표가 3이므로 x좌표는 $3^2=3x$ 에서

$$x=3$$

따라서 구하는 $\triangle APB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (5-3) \times 3 = 3$$

답 ②

0066 타원 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 에서 $\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$ 이므로 초점의 좌표는 $(2\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0)$

구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 이라 하면 이

타원의 초점의 좌표가 $(2\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0)$ 이므로

$$a^2 - b^2 = (2\sqrt{2})^2 \quad \therefore b^2 = a^2 - 8 \quad \dots\dots ①$$

또 장축의 길이가 10이므로

$$2a = 10 \quad \therefore a = 5$$

$a=5$ 를 ①에 대입하면 $b^2=17$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{17} = 1 \quad \text{답 } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{17} = 1$$

0067 주어진 타원의 장축의 길이가 $6 - (-6) = 12$, 단축의 길이가 $3 - (-3) = 6$ 이므로 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$$

이때 $\sqrt{36-9}=3\sqrt{3}$ 이므로 초점의 좌표는

$$(3\sqrt{3}, 0), (-3\sqrt{3}, 0)$$

$$\therefore \overline{FF'} = 3\sqrt{3} - (-3\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$$

답 ⑤

0068 두 초점 F(4, 0), F'(-4, 0)이므로

$$a^2 - b^2 = 4^2 \quad \therefore (a+b)(a-b) = 16 \quad \dots\dots ①$$

장축과 단축의 길이의 차이가 4이므로

$$2a - 2b = 4 \quad \therefore a - b = 2 \quad \dots\dots ②$$

①을 ②에 대입하면

$$2(a+b) = 16 \quad \therefore a+b = 8 \quad \dots\dots ③$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=5, b=3$

$$\therefore ab = 15$$

답 15

0069 주어진 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > a > 0)$ 이라

하면 한 초점이 $F(0, 2\sqrt{7})$ 이므로

$$b^2 - a^2 = (2\sqrt{7})^2 \quad \therefore a^2 = b^2 - 28 \quad \dots\dots ①$$

또 타원이 점 $P(-3\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ 를 지나므로

$$\frac{18}{a^2} + \frac{32}{b^2} = 1 \quad \therefore 18b^2 + 32a^2 = a^2b^2 \quad \dots\dots ②$$

①을 ②에 대입하여 정리하면

$$b^4 - 78b^2 + 896 = 0, \quad (b^2 - 64)(b^2 - 14) = 0$$

①에서 $b^2 - 28 > 0$ 이므로 $b^2 = 64$

$$\therefore b = 8 (\because b > 0)$$

$$\therefore \overline{PF} + \overline{PF'} = 2b = 2 \times 8 = 16$$

답 16

0070 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 8 + 8 = 16$ 이므로 타원의 정의에 의하여

$$2|a| = 16 \quad \therefore |a| = 8$$

또 $\overline{FF'} = 8$ 에서 $F(4, 0), F'(-4, 0)$ 이므로

$$a^2 - b^2 = 4^2 \quad \therefore b^2 = 8^2 - 4^2 = 48$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 64 + 48 = 112$$

답 112

0071 두 초점 F, F'의 y좌표가 같으므로 타원의 장축은 x축과 평행하다.

이때 타원의 중심은 선분 FF'의 중점이므로 중심의 좌표는

$$\left(\frac{5+1}{2}, \frac{1+1}{2}\right), \text{ 즉 } (3, 1)$$

따라서 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{5} = 1$ 을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$$p=3, q=1$$

또 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{5} = 1$ 의 초점의 좌표는

$$(\sqrt{a^2-5}, 0), (-\sqrt{a^2-5}, 0)$$

이므로 주어진 타원의 초점의 좌표는

$$(\sqrt{a^2-5}+3, 1), (-\sqrt{a^2-5}+3, 1)$$

즉 $\sqrt{a^2-5}+3=5, -\sqrt{a^2-5}+3=1$ 이므로

$$\sqrt{a^2-5}=2, \quad a^2-5=4$$

$$a^2=9 \quad \therefore a=3 (\because a>0)$$

$$\therefore a+p+q=7$$

답 7

0072 $5x^2 - 10x + 4y^2 + 16y + 1 = 0$ 에서

$$5(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 20$$

이 타원을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 타원 $5x^2 + 4y^2 - 20 = 0$ 과 일치하므로

$$m=-1, n=2, k=-20$$

$$\therefore m+n+k=-19$$

답 -19

0073 $x^2 + 2y^2 - 4\sqrt{2}x + 8y + 8 = 0$ 에서

$$(x - 2\sqrt{2})^2 + 2(y + 2)^2 = 8$$

$$\therefore \frac{(x - 2\sqrt{2})^2}{8} + \frac{(y + 2)^2}{4} = 1$$

즉 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 을 x 축의 방향으로 $2\sqrt{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에서 $\sqrt{8-4} = 2$ 이므로 초점의 좌표는 $(2, 0), (-2, 0)$

따라서 주어진 타원의 초점의 좌표는 $(2 + 2\sqrt{2}, -2), (-2 + 2\sqrt{2}, -2)$

이므로 두 초점 사이의 거리는

$$2 + 2\sqrt{2} - (-2 + 2\sqrt{2}) = 4 \quad \text{답 4}$$

참고! 타원을 평행이동하면 두 초점도 평행이동하여 좌표가 변하지만 두 초점 사이의 거리는 변하지 않는다.

따라서 주어진 타원의 두 초점 사이의 거리는 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 의 두 초점 사이의 거리와 같다.

0074 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{11} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.

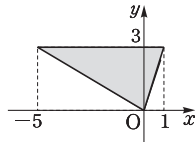
이때 타원 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{11} = 1$ 에서 $\sqrt{20-11} = 3$ 이므로 초점의 좌표는 $(3, 0), (-3, 0)$

따라서 주어진 타원의 두 초점 F, F' 의 좌표는

$$(1, 3), (-5, 3)$$

이므로 $\triangle OFF'$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{1 - (-5)\} \times 3 = 9 \quad \text{답 ②}$$



0075 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 을 x 축의 방향으로 k 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 에서 $\sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ 이므로 초점의 좌표는 $(0, \sqrt{5}), (0, -\sqrt{5})$

즉 주어진 타원의 초점의 좌표는

$$(k, \sqrt{5}-2), (k, -\sqrt{5}-2)$$

따라서 점 $(k, \sqrt{5}-2)$ 와 직선 $2x - y + \sqrt{5} = 0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|2k - (\sqrt{5}-2) + \sqrt{5}|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}, \quad |2k + 2| = 5$$

$$2k + 2 = \pm 5 \quad \therefore k = \frac{3}{2} \quad (\because k > 0) \quad \text{답 ③}$$

RPM 비법 노트

점 (x_1, y_1) 과 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

0076 $x^2 + 2y^2 - 4x - 20y + 44 = 0$ 에 $x = 0$ 을 대입하면

$$2y^2 - 20y + 44 = 0, \quad y^2 - 10y + 22 = 0$$

$$\therefore y = 5 \pm \sqrt{3}$$

즉 두 점 A, B의 좌표는 $(0, 5 + \sqrt{3}), (0, 5 - \sqrt{3})$ 이므로

$$\overline{AB} = (5 + \sqrt{3}) - (5 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \quad \dots \text{1단계}$$

한편 $x^2 + 2y^2 - 4x - 20y + 44 = 0$ 에서

$$(x - 2)^2 + 2(y - 5)^2 = 10$$

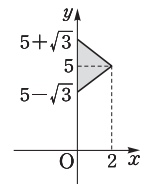
$$\therefore \frac{(x - 2)^2}{10} + \frac{(y - 5)^2}{5} = 1$$

즉 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 5 만큼 평행이동한 것이므로 주어진 타원의 중심은 $C(2, 5)$

따라서 $\triangle ABC$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3} \quad \dots \text{3단계}$$

답 2√3



	채점 요소	비율
1단계	$\overline{AB}$ 의 길이 구하기	40%
2단계	점 C의 좌표 구하기	40%
3단계	$\triangle ABC$ 의 넓이 구하기	20%

0077 타원 위의 임의의 점을 $P(x, y)$ 라 하면

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2\sqrt{13} \text{에서}$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-5)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = 2\sqrt{13}$$

$$\therefore \sqrt{(x+1)^2 + (y-5)^2} = 2\sqrt{13} - \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$3y + 7 = \sqrt{13\{(x+1)^2 + (y+1)^2\}}$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$13(x+1)^2 + 4(y-2)^2 = 52$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{13} = 1$$

따라서 구하는 단축의 길이는

$$2 \times 2 = 4 \quad \text{답 4}$$

다른 풀이 타원의 중심은 선분 FF' 의 중점이므로 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-1 + (-1)}{2}, \frac{5 + (-1)}{2} \right), \text{ 즉 } (-1, 2)$$

따라서 주어진 타원은 중심이 원점인 타원을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

평행이동하기 전의 타원의 두 초점의 좌표가

$$(-1+1, 5-2), (-1+1, -1-2), \text{ 즉 } (0, 3), (0, -3)$$

이므로 평행이동하기 전의 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > a > 0) \text{이라 하면}$$

$$b^2 - a^2 = 3^2 \quad \therefore a^2 = b^2 - 9 \quad \dots \text{①}$$

장축의 길이가 $2\sqrt{13}$ 이므로

$$2b = 2\sqrt{13} \quad \therefore b = \sqrt{13}$$

이것을 ㉠에 대입하면 $a^2=4$

$$\therefore a=2 (\because a>0)$$

따라서 구하는 단축의 길이는

$$2a=2 \times 2=4$$

0078 $\overline{PA} + \overline{PB}=8$ 에서

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-4)^2+y^2}=8$$

$$\therefore \sqrt{(x-4)^2+y^2}=8-\sqrt{x^2+y^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x+6=2\sqrt{x^2+y^2}$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$3(x-2)^2+4y^2=48$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{y^2}{12}=1$$

따라서 장축의 길이는 $2 \times 4=8$, 단축의 길이는 $2 \times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

이므로 구하는 곱은

$$8 \times 4\sqrt{3}=32\sqrt{3}$$

답 ③

0079 타원의 장축의 길이는

$$\overline{AF} + \overline{AF'}=(5-4)+(5+2)=8$$

따라서 타원 위의 점 $P(x, y)$ 에 대하여 $\overline{PF} + \overline{PF'}=8$ 이므로

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2} + \sqrt{(x+2)^2+y^2}=8$$

$$\therefore \sqrt{(x-4)^2+y^2}=8-\sqrt{(x+2)^2+y^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$3x+13=4\sqrt{(x+2)^2+y^2}$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$7(x-1)^2+16y^2=112$$

$$\therefore \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{y^2}{7}=1$$

이 타원이 y 축과 만나는 점의 y 좌표는

$$\frac{1}{16} + \frac{y^2}{7}=1, \quad y^2=\frac{105}{16}$$

$$\therefore y=\pm \frac{\sqrt{105}}{4}$$

따라서 구하는 y 좌표의 곱은

$$\frac{\sqrt{105}}{4} \times \left(-\frac{\sqrt{105}}{4}\right) = -\frac{105}{16}$$

답 ②

0080 주어진 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$)이라

하면 타원의 정의에 의하여

$$\overline{AF} + \overline{AF'} = \overline{BF} + \overline{BF'} = 2a$$

$\triangle AF'B$ 의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{AF'} + \overline{BF'} &= \overline{AF} + \overline{BF} + \overline{AF'} + \overline{BF'} \\ &= 2a + 2a = 4a \end{aligned}$$

즉 $4a=20$ 이므로 $a=5$

이때 $a^2-b^2=3^2$ 이므로 $b^2=5^2-3^2=16$

$$\therefore b=4 (\because b>0)$$

따라서 구하는 단축의 길이는

$$2b=2 \times 4=8$$

답 8

0081 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{9}=1$ 에서 $\sqrt{9-8}=1$ 이므로 초점의 좌표는

$$(0, 1), (0, -1)$$

즉 점 $C(0, -1)$ 은 주어진 타원의 한

초점이므로 다른 한 초점을 $D(0, 1)$

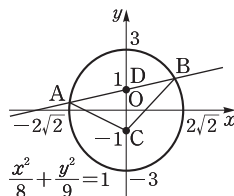
이라 하면 타원의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC} + \overline{AD} &= \overline{BC} + \overline{BD} \\ &= 2 \times 3 = 6 \end{aligned}$$

따라서 $\triangle ABC$ 의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} &= \overline{AD} + \overline{DB} + \overline{BC} + \overline{CA} \\ &= 6 + 6 = 12 \end{aligned}$$

답 12



0082 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9}=1$ 에서 $\sqrt{25-9}=4$ 이므로

$$F(4, 0), F'(-4, 0)$$

$$\therefore \overline{FF'}=4-(-4)=8$$

$\overline{PF}=a$, $\overline{PF'}=b$ 라 하면 직각삼각형 $PF'F$ 에서

$$a^2+b^2=8^2=64$$

또 타원의 정의에 의하여

$$a+b=2 \times 5=10$$

이때 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 이므로

$$64=10^2-2ab \quad \therefore ab=18$$

따라서 $\square PF'QF$ 의 넓이는

$$ab=18$$

답 18

0083 타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11}=1$ 에서 $\sqrt{36-11}=5$ 이므로 초점의 좌

표는 $(5, 0), (-5, 0)$

즉 두 점 $A(-5, 0), B(5, 0)$ 은 주어진 타원의 초점이므로 타

원의 정의에 의하여

$$\overline{AP_k} + \overline{BP_k}=2 \times 6=12 \quad (k=1, 2, \dots, 6)$$

따라서 $\overline{BP_k}=12-\overline{AP_k}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{BP_1} + \overline{BP_2} + \dots + \overline{BP_6} &= (12-\overline{AP_1}) + (12-\overline{AP_2}) + \dots + (12-\overline{AP_6}) \\ &= 12 \times 6 - (\overline{AP_1} + \overline{AP_2} + \dots + \overline{AP_6}) \\ &= 72 - 32 = 40 \end{aligned}$$

답 40

0084 $\overline{PF}=a$, $\overline{PF'}=b$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$a+b=2 \times 4=8$$

이때 $a>0$, $b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

$$8 \geq 2\sqrt{ab}, \quad \sqrt{ab} \leq 4$$

$$\therefore ab \leq 16$$

따라서 $\overline{PF} \times \overline{PF'}$ 의 최댓값은 16이다.

답 ③

RPM 비법 노트

산술평균과 기하평균의 관계

$a > 0, b > 0$ 일 때,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

0085 점 $P(a, b)$ 가 타원 $2x^2 + y^2 = 10$ 위의 점이므로

$$2a^2 + b^2 = 10$$

이때 $a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{2a^2 \times b^2} \quad (\text{단, 등호는 } 2a^2 = b^2 \text{ 일 때 성립})$$

$$10 \geq 2\sqrt{2}ab \quad (\because a > 0, b > 0)$$

$$\therefore ab \leq \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

따라서 ab 의 최댓값은 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 이다.

답 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

0086 점 D 의 좌표를 (a, b) ($a > 0, b > 0$)라 하면 직사각형 $ABCD$ 의 넓이는

$$2a \times 2b = 4ab$$

이때 점 $D(a, b)$ 는 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{25} + \frac{b^2}{16} = 1$$

$a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a^2}{25} + \frac{b^2}{16} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{25} \times \frac{b^2}{16}} \quad (\text{단, 등호는 } \frac{a^2}{25} = \frac{b^2}{16} \text{ 일 때 성립})$$

$$1 \geq \frac{ab}{10} \quad \therefore ab \leq 10$$

따라서 $4ab \leq 40$ 이므로 직사각형 $ABCD$ 의 넓이의 최댓값은 40이다.

답 40

0087 $3x^2 + 2y^2 = 6$ 에서

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$\overline{FP} = a, \overline{F'P} = b$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$a + b = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{FP}^2 + \overline{F'P}^2 = a^2 + b^2$$

$$= (a+b)^2 - 2ab$$

$$= 12 - 2ab$$

한편 $a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a = b \text{ 일 때 성립})$$

$$2\sqrt{3} \geq 2\sqrt{ab}, \quad \sqrt{ab} \leq \sqrt{3}$$

$$\therefore ab \leq 3$$

따라서 $12 - 2ab \geq 6$ 이므로 $\overline{FP}^2 + \overline{F'P}^2$ 의 최솟값은 6이다.

답 6

0088 점 P 가 나타내는 도형은 두 점 A, B 를 초점으로 하는 쌍곡선이다.

$$|\overline{PA} - \overline{PB}| = 8 \text{에서}$$

$$2|a| = 8 \quad \therefore |a| = 4$$

또 두 초점이 $A(5, 0), B(-5, 0)$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 5^2 \quad \therefore b^2 = 5^2 - 4^2 = 9$$

$$\therefore a^2 - b^2 = 4^2 - 9 = 7$$

답 7

0089 $\overline{AF} - \overline{AF'} = 10$ 이므로

$$2|k| = 10 \quad \therefore |k| = 5$$

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{25} = -1$ 에서 $\sqrt{24+25} = 7$ 이므로 초점의

좌표는

$$(0, 7), (0, -7)$$

$$\therefore \overline{FF'} = 7 - (-7) = 14$$

답 14

0090 포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점의 좌표는 $(2, 0)$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 초점의 좌표는

$$(\sqrt{a^2+b^2}, 0), (-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$$

이때 포물선의 초점과 쌍곡선의 한 초점이 일치하므로

$$\sqrt{a^2+b^2} = 2 \quad \therefore a^2+b^2 = 4$$

답 4

0091 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$)이라 하자.

쌍곡선 위의 점 $(6, -2\sqrt{2})$ 에서 두 초점까지의 거리의 차가 $2a$ 이므로

$$2a = |\sqrt{(6+4)^2 + (-2\sqrt{2})^2} - \sqrt{(6-4)^2 + (-2\sqrt{2})^2}|$$

$$= 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\therefore a = 2\sqrt{3}$$

또 $a^2 + b^2 = 4^2$ 이므로

$$b^2 = 4^2 - (2\sqrt{3})^2 = 4$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\text{답 } \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$$

0092 타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ 에서 $\sqrt{36-16} = 2\sqrt{5}$ 이므로 두 초점의 좌표는

$$(2\sqrt{5}, 0), (-2\sqrt{5}, 0)$$

따라서 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하면

$$a^2 + b^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

또 점근선의 방정식이 $y = \pm 2x$ 이므로

$$\frac{b}{a} = 2 \quad \therefore b = 2a \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a^2 = 4, b^2 = 16$

$$\therefore a = 2, b = 4 \quad (\because a > 0, b > 0)$$

$$\therefore |\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2a = 2 \times 2 = 4$$

답 4

0093 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

이때 두 점근선이 서로 수직이므로

$$\frac{b}{a} \times \left(-\frac{b}{a}\right) = -1 \quad \therefore a^2 = b^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 쌍곡선이 점 (6, 4)를 지나므로

$$\frac{36}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a^2 = 20, b^2 = 20$

$$\therefore a^2 + b^2 = 40 \quad \text{답 } \textcircled{5}$$

0094 쌍곡선 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = -1$ 의 점근선의 방정식은

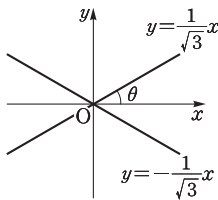
$$y = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}x, \text{ 즉 } y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

오른쪽 그림과 같이 직선 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ 가
x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를
 θ 라 하면

$$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \therefore \theta = 30^\circ$$

따라서 두 점근선이 이루는 예각의 크기는

$$2 \times 30^\circ = 60^\circ \quad \text{답 } 60^\circ$$



0095 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 에서 $\sqrt{9+16} = 5$ 이므로 초점의

좌표는 (5, 0), (-5, 0)

또 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{4}{3}x \quad \therefore 4x \pm 3y = 0 \quad \dots \text{1단계}$$

이때 원의 중심의 좌표를 (5, 0)이라 하면 원의 중심과 점근선
 $4x - 3y = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|20 - 0|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 4 \quad \dots \text{2단계}$$

따라서 원이 점근선에 접하려면 원의 반지름의 길이가 4이어야 하
므로 구하는 원의 둘레의 길이는

$$2\pi \times 4 = 8\pi \quad \dots \text{3단계} \quad \text{답 } 8\pi$$

채점 요소	비율
1단계 쌍곡선의 초점의 좌표와 점근선의 방정식 구하기	40 %
2단계 원의 중심과 점근선 사이의 거리 구하기	40 %
3단계 원의 둘레의 길이 구하기	20 %

참고 주어진 쌍곡선의 한 초점과 점근선 사이의 거리는 점 (-5, 0) 또는
직선 $4x + 3y = 0$ 을 이용하여 구해도 동일하다.

0096 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$ 을 x축의 방향
으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$ 에서 $\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ 이므로 중심의
좌표는 (0, 0), 초점의 좌표는 (0, $\sqrt{13}$), (0, $-\sqrt{13}$), 주축의
길이는 $2 \times 3 = 6$, 점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{3}{2}x$ 이다.

ㄱ. 초점의 좌표는 (2, $\sqrt{13}+1$), (2, $-\sqrt{13}+1$)

따라서 두 초점은 y축 위에 있지 않다. (거짓)

ㄴ. 중심의 좌표는 (2, 1)이다. (참)

ㄷ. 쌍곡선을 평행이동해도 주축의 길이는 변하지 않으므로 주축
의 길이는 6이다. (거짓)

ㄹ. 점근선의 방정식은 $y - 1 = \pm \frac{3}{2}(x - 2)$

$$\therefore y = \frac{3}{2}x - 2, y = -\frac{3}{2}x + 4 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ④

0097 $2x^2 - 5y^2 + 12x + 10y + 3 = 0$ 에서

$$2(x+3)^2 - 5(y-1)^2 = 10$$

$$\therefore \frac{(x+3)^2}{5} - \frac{(y-1)^2}{2} = 1$$

이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$ 을 x축의 방향으로 -3만큼,

y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$$a^2 = 5, b^2 = 2, m = -3, n = 1$$

$$\therefore a^2 + b^2 + m + n = 5 \quad \text{답 } 5$$

0098 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{k^2} = -1$ 을 x축의 방향

으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{k^2} = -1$ 의 초점의 좌표는

$$(0, \sqrt{5+k^2}), (0, -\sqrt{5+k^2})$$

따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$$(-2, \sqrt{5+k^2}-1), (-2, -\sqrt{5+k^2}-1)$$

이므로 두 초점 사이의 거리는

$$\sqrt{5+k^2}-1 - (-\sqrt{5+k^2}-1) = 2\sqrt{5+k^2}$$

$$\text{즉 } 2\sqrt{5+k^2} = 2\sqrt{14} \text{ 이므로 } \sqrt{5+k^2} = \sqrt{14}$$

$$5+k^2 = 14, \quad k^2 = 9$$

$$\therefore k = -3 \text{ 또는 } k = 3$$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$$-3 \times 3 = -9$$

답 -9

참고 쌍곡선을 평행이동하면 두 초점의 좌표는 변하지만 두 초점 사이의
거리는 변하지 않는다. 따라서 주어진 쌍곡선의 두 초점 사이의 거리는 쌍
곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{k^2} = -1$ 의 두 초점 사이의 거리와 같다.

0099 $x^2 - y^2 + 2y + a = 0$ 에서

$$x^2 - (y-1)^2 = -a-1$$

이 쌍곡선의 주축이 x축에 평행하려면

$$-a-1 > 0 \quad \therefore a < -1$$

답 ①

0100 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{4}{2}x, \text{ 즉 } y = \pm 2x$$

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y - 2 = \pm 2(x + 1)$$

$$\therefore y = 2x + 4, y = -2x$$

... 1단계

이때 두 직선 $y = 2x + 4, y = -2x$ 의 교점의 x 좌표는

$$2x + 4 = -2x \text{에서 } 4x = -4 \quad \therefore x = -1$$

$$x = -1 \text{을 } y = -2x \text{에 대입하면 } y = 2$$

즉 두 점근선의 교점의 좌표는

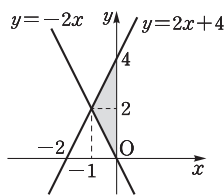
$$(-1, 2)$$

... 2단계

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 2$$

... 3단계



답 2

채점 요소	비율
1단계 평행이동한 쌍곡선의 점근선의 방정식 구하기	50%
2단계 두 점근선의 교점의 좌표 구하기	30%
3단계 도형의 넓이 구하기	20%

0101 $x^2 - 9y^2 + 2x - 8 = 0$ 에서

$$(x+1)^2 - 9y^2 = 9 \quad \therefore \frac{(x+1)^2}{9} - y^2 = 1$$

즉 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$ 에서 $\sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ 이므로 초점의 좌표는 $(\sqrt{10}, 0), (-\sqrt{10}, 0)$

따라서 주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는

$$(\sqrt{10}-1, 0), (-\sqrt{10}-1, 0)$$

또 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$ 의 점근선의 방정식이 $y = \pm \frac{1}{3}x$ 이므로 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{1}{3}(x+1)$$

$$\therefore x - 3y + 1 = 0, x + 3y + 1 = 0$$

따라서 점 $(\sqrt{10}-1, 0)$ 과 직선 $x - 3y + 1 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|(\sqrt{10}-1) - 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = 1$$

답 1

0102 $2x^2 - y^2 + 4x + 8y - 8 = 0$ 에서

$$2(x+1)^2 - (y-4)^2 = -6$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{3} - \frac{(y-4)^2}{6} = -1$$

즉 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = -1$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이다.

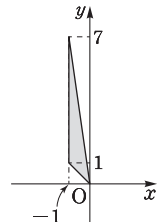
이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = -1$ 에서 $\sqrt{3+6} = 3$ 이므로 초점의 좌표는 $(0, 3), (0, -3)$

따라서 주어진 쌍곡선의 초점 F, F'의 좌표는

$$(-1, 7), (-1, 1)$$

이므로 $\triangle OFF'$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (7-1) \times 1 = 3$$



답 ③

0103 쌍곡선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$ 라 하면

$$|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 8 \text{에서}$$

$$|\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} - \sqrt{(x+6)^2 + (y-2)^2}| = 8$$

$$\therefore \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+6)^2 + (y-2)^2} \pm 8$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$\pm 4\sqrt{(x+6)^2 + (y-2)^2} = 5x + 21$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$9(x+1)^2 - 16(y-2)^2 = 144$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

$$\text{답 } \frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

다른 풀이 주어진 쌍곡선의 중심은 선분 FF'의 중점이므로 중심의 좌표는

$$\left(\frac{4+(-6)}{2}, \frac{2+2}{2}\right), \text{ 즉 } (-1, 2)$$

따라서 주어진 쌍곡선은 중심이 원점인 쌍곡선을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

평행이동하기 전의 쌍곡선의 두 초점의 좌표가

$$(4+1, 2-2), (-6+1, 2-2), \text{ 즉 } (5, 0), (-5, 0)$$

이므로 평행이동하기 전의 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이라 하면

$$a^2 + b^2 = 5^2 \quad \therefore b^2 = 25 - a^2 \quad \dots\dots ①$$

또 주축의 길이가 8이므로

$$2|a| = 8 \quad \therefore |a| = 4$$

이것을 ①에 대입하면

$$b^2 = 9$$

즉 평행이동하기 전의 쌍곡선의 방정식이 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 이므로

주어진 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

0104 $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 10$ 에서

$$|\sqrt{(x+1)^2 + (y-7)^2} - \sqrt{(x+1)^2 + (y+5)^2}| = 10$$

$$\therefore \sqrt{(x+1)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+5)^2} \pm 10$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$\pm 5\sqrt{(x+1)^2 + (y+5)^2} = 6y + 19$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$25(x+1)^2 - 11(y-1)^2 = -275$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{11} - \frac{(y-1)^2}{25} = -1$$

답 ②

0105 쌍곡선의 두 초점을 $F(2, 0)$, $F'(10, 0)$ 이라 하고 쌍곡선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$ 라 하면 $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 4$ 에서

$$|\sqrt{(x-2)^2 + y^2} - \sqrt{(x-10)^2 + y^2}| = 4$$

$$\therefore \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x-10)^2 + y^2} \pm 4$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$2x - 14 = \pm \sqrt{(x-10)^2 + y^2}$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$3(x-6)^2 - y^2 = 12$$

위의 식에 $x=0$ 을 대입하면

$$108 - y^2 = 12, \quad y^2 = 96$$

$$\therefore y = 4\sqrt{6} \text{ 또는 } y = -4\sqrt{6}$$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(0, 4\sqrt{6})$, $(0, -4\sqrt{6})$ 이므로

$$\overline{AB} = 4\sqrt{6} - (-4\sqrt{6}) = 8\sqrt{6}$$

답 ⑤

0106 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 에서 $\sqrt{9+7} = 4$ 이므로 초점의 좌

표는 $(4, 0)$, $(-4, 0)$

즉 두 점 $C(-4, 0)$, $F(4, 0)$ 이 주어진 쌍곡선의 초점이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{AC} - \overline{AF} = 2 \times 3 = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overline{BC} - \overline{BF} = 2 \times 3 = 6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$\overline{AC} + \overline{BC} - (\overline{AF} + \overline{BF}) = 12$$

$$\therefore \overline{AC} + \overline{BC} - \overline{AB} = 12 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

또 $\triangle ABC$ 의 둘레의 길이가 30이므로

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 30 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3} - \textcircled{4}$ 을 하면

$$2\overline{AB} = 18 \quad \therefore \overline{AB} = 9$$

답 9

0107 쌍곡선의 정의에 의하여

$$|\overline{PF'} - \overline{PF}| = |\overline{QF'} - \overline{QF}|$$

$$= 2 \times 4 = 8$$

이때 $\overline{PF} = 1$, $\overline{QF} = 4$ 이므로

$$\overline{PF'} = 8 + 1 = 9, \quad \overline{QF'} = 8 + 4 = 12$$

$$\therefore \overline{PF'} + \overline{QF'} = 21$$

답 21

0108 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 에서 $\sqrt{4+12} = 4$ 이므로 초점의 좌표는

$$(4, 0), (-4, 0) \quad \therefore \overline{FF'} = 4 - (-4) = 8$$

또 $\overline{PF} : \overline{PF'} = 3 : 2$ 에서 $\overline{PF} = 3k$, $\overline{PF'} = 2k$ ($k > 0$)라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} - \overline{PF'} = 2 \times 2 = 4$$

이므로 $k = 4$

$$\therefore \overline{PF} = 3 \times 4 = 12, \quad \overline{PF'} = 2 \times 4 = 8$$

따라서 $\triangle PF'F$ 의 둘레의 길이는

$$\overline{PF} + \overline{PF'} + \overline{FF'} = 12 + 8 + 8 = 28$$

답 28

0109 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 에서 $\sqrt{2+2} = 2$ 이므로

$$F(2, 0), F'(-2, 0)$$

$$\therefore \overline{FF'} = 2 - (-2) = 4$$

이때 점 P는 $\overline{FF'}$ 을 지름으로 하는 원 위의 점이므로

$$\angle F'PF = 90^\circ$$

$\overline{PF'} = a$, $\overline{PF} = b$ 라 하면 직각삼각형 $PF'F$ 에서

$$a^2 + b^2 = 16$$

또 쌍곡선의 정의에 의하여

$$a - b = 2\sqrt{2}$$

이때 $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ 이므로

$$(2\sqrt{2})^2 = 16 - 2ab \quad \therefore ab = 4$$

따라서 $\triangle PF'F$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

답 2

0110 $2x^2 + y^2 - 1 + k(x^2 + y^2 - 1) = 0$ 에서

$$(k+2)x^2 + (k+1)y^2 - (k+1) = 0$$

이 방정식이 나타내는 도형이 쌍곡선이 되려면

$$(k+2)(k+1) < 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$-2 < k < -1$$

답 $-2 < k < -1$

0111 주어진 방정식이 나타내는 도형이 타원이 되려면

$$1 \times k > 0, \quad k \neq 1 \text{ 이어야 하므로}$$

$$0 < k < 1 \text{ 또는 } k > 1$$

따라서 실수 k 의 값이 될 수 있는 것은 ④ $\frac{1}{2}$ 이다.

답 ④

0112 주어진 방정식이 나타내는 도형이 포물선이 되려면

$$k+2=0 \text{ 또는 } 3k-1=0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$k = -2 \text{ 또는 } k = \frac{1}{3}$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-2 + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}$$

답 $-\frac{5}{3}$

0113 $7x^2 - y^2 - 4 - k(x^2 - y^2) = 0$ 에서

$$(7-k)x^2 + (k-1)y^2 - 4 = 0$$

이 방정식이 나타내는 도형이 타원이 되려면
 $(7-k)(k-1) > 0$, $7-k \neq k-1$ 이어야 하므로
 $(k-7)(k-1) < 0$, $2k \neq 8$
 $1 < k < 7$, $k \neq 4$
 $\therefore 1 < k < 4$ 또는 $4 < k < 7$
따라서 정수 k 는 2, 3, 5, 6의 4개이다. **답 4**

0114 $A(a, 0)$, $B(0, b)$ 라 하면 직각삼각형 OAB 에서
 $a^2 + b^2 = 3^2$ ㉠
점 $P(x, y)$ 가 선분 AB 를 1:2로 내분하므로

$$x = \frac{2a}{3}, y = \frac{b}{3} \quad \therefore a = \frac{3}{2}x, b = 3y \quad \text{..... ㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $\left(\frac{3}{2}x\right)^2 + (3y)^2 = 9$
 $\therefore \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ **답** $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

0115 점 P 의 좌표를 (a, b) 라 하면 점 P 가 쌍곡선
 $2x^2 - 7y^2 = 14$ 위의 점이므로

$$2a^2 - 7b^2 = 14 \quad \text{..... ㉠}$$

선분 PQ 의 중점 M 의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \frac{a+1}{2}, y = \frac{b}{2} \quad \therefore a = 2x-1, b = 2y \quad \text{..... ㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $2(2x-1)^2 - 7(2y)^2 = 14$
 $\therefore (2x-1)^2 - 14y^2 = 7$ **답** $(2x-1)^2 - 14y^2 = 7$

0116 점 $P(x, y)$ 에서 점 $A(-2, 0)$ 과 y 축에 이르는 거리
서로 같으므로

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = |x|$$

양변을 제곱하여 정리하면 $y^2 + 4x + 4 = 0$

따라서 $a=4$, $b=0$, $c=4$ 이므로

$$a+b+c=8 \quad \text{답 8}$$

0117 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} + \overline{PF} = 2 \times 8 = 16$$

또 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2 \times 4 = 8$$

$$\therefore \overline{PF'}^2 - \overline{PF}^2 = (\overline{PF'} + \overline{PF})(\overline{PF'} - \overline{PF}) \\ = 16 \times 8 = 128 \quad \text{답 128}$$

0118 포물선 $y^2 = 12x$ 의 초점

의 좌표는 $(3, 0)$

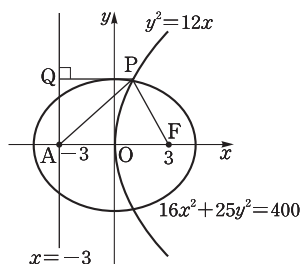
따라서 $F(3, 0)$ 이라 하면 포물

선의 정의에 의하여

$$\overline{PQ} = \overline{PF}$$

한편 $16x^2 + 25y^2 = 400$ 에서

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$



$\sqrt{25-16}=3$ 이므로 타원의 초점의 좌표는

$$(-3, 0), (3, 0)$$

즉 두 점 $A(-3, 0)$, $F(3, 0)$ 은 타원의 초점이므로 타원의 정
의에 의하여

$$\overline{AP} + \overline{PF} = 2 \times 5 = 10$$

$$\therefore \overline{AP} + \overline{PQ} = \overline{AP} + \overline{PF} = 10 \quad \text{답 10}$$

0119 $\overline{PF'} = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{2})^2 + 1^2} = 3$, $\overline{PF} = 1$ 이므로

$$\overline{PF'} + \overline{PF} = 3 + 1 = 4, \overline{PF'} - \overline{PF} = 3 - 1 = 2 \quad \text{... 1단계}$$

이때 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{OA} = \frac{1}{2}(\overline{PF'} - \overline{PF}) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

또 타원의 정의에 의하여

$$\overline{OB} = \frac{1}{2}(\overline{PF'} + \overline{PF}) = \frac{1}{2} \times 4 = 2 \quad \text{... 2단계}$$

따라서 $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = 2 - 1 = 1$ 이므로 $\triangle PAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2} \quad \text{... 3단계}$$

$$\text{답 } \frac{1}{2}$$

	채점 요소	비율
1단계	$\overline{PF'} + \overline{PF}$, $\overline{PF'} - \overline{PF}$ 의 값 구하기	30%
2단계	$\overline{OA}$, $\overline{OB}$ 의 길이 구하기	40%
3단계	$\triangle PAB$ 의 넓이 구하기	30%

0120 오른쪽 그림과 같이 인공위

성이 지구로부터 가장 멀리 있을 때

와 가장 가까이 있을 때의 지점은 타

원 궤도의 장축 위의 꼭짓점과 같으

므로 타원 궤도의 장축의 길이는

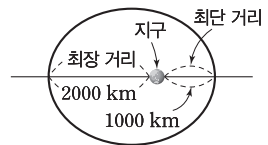
$$1000 + 2000 = 3000 \text{ (km)}$$

타원 궤도의 중심에서 초점인 지구까지의 거리는

$$\frac{3000}{2} - 1000 = 500 \text{ (km)}$$

따라서 구하는 단축의 길이는

$$2\sqrt{\left(\frac{3000}{2}\right)^2 - 500^2} = 2000\sqrt{2} \text{ (km)} \quad \text{답 ⑤}$$



0121 단면인 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)이라

하면 장축의 길이가 60, 단축의 길이가 20이므로

$$2a = 60, 2b = 20 \quad \therefore a = 30, b = 10$$

따라서 타원 $\frac{x^2}{30^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1$ 에서 $\sqrt{900-100} = 20\sqrt{2}$ 이므로 초

점의 좌표는

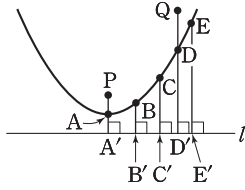
$$(20\sqrt{2}, 0), (-20\sqrt{2}, 0)$$

이때 충격파 발생 장치와 결석 사이의 거리는 타원의 두 초점 사
이의 거리와 같으므로

$$20\sqrt{2} - (-20\sqrt{2}) = 40\sqrt{2}$$

$$\text{답 } 40\sqrt{2}$$

0122 오른쪽 그림과 같이 포물선의 준선을 l 이라 할 때, 점 A, B, C, D, E에서 준선 l 에 내린 수선의 발을 각각 A', B', C', D', E'이라 하면 포물선의 정의에 의하여



$$\begin{aligned}\overline{PA} + \overline{QA} &= \overline{AA'} + \overline{QA} \\ \overline{PB} + \overline{QB} &= \overline{BB'} + \overline{QB} \\ \overline{PC} + \overline{QC} &= \overline{CC'} + \overline{QC} \\ \overline{PD} + \overline{QD} &= \overline{DD'} + \overline{QD} = \overline{QD'} \\ \overline{PE} + \overline{QE} &= \overline{EE'} + \overline{QE}\end{aligned}$$

따라서 두 마을 P, Q까지의 거리의 합이 최소인 지점은 D이므로 하수처리장의 위치로 가장 알맞은 지점은 D이다. **답 D**

시험에 꼭 나오는 문제

● 본책 022~025쪽

0123 포물선 $x^2=4y$ 의 초점은 $F_1(0, 1)$

포물선 $y^2=-8x$ 의 초점은 $F_2(-2, 0)$

$$\therefore \overline{F_1F_2} = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

답 ③

0124 $8x=y^2+4cy$ 에서

$$(y+2c)^2 = 8\left(x + \frac{c^2}{2}\right)$$

즉 주어진 포물선은 포물선 $y^2=8x$ 를 x 축의 방향으로 $-\frac{c^2}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 $-2c$ 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=8x=4 \times 2x$ 의 초점의 좌표가 $(2, 0)$ 이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는

$$\left(2 - \frac{c^2}{2}, -2c\right)$$

이 점이 직선 $y=x-2$ 위에 있으므로

$$-2c = \left(2 - \frac{c^2}{2}\right) - 2, \quad c^2 - 4c = 0$$

$$c(c-4)=0 \quad \therefore c=4 \quad (\because c>0)$$

답 ④

0125 포물선 $x^2=-6(y+a)$ 는 포물선 $x^2=-6y$ 를 y 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2=-6y$ 의 준선의 방정식은 $y=\frac{3}{2}$ 이므로 포물선 $x^2=-6(y+a)$ 의 준선의 방정식은

$$y = \frac{3}{2} - a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 포물선 $x^2=20(y-b)$ 는 포물선 $x^2=20y$ 를 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2=20y$ 의 준선의 방정식은 $y=-5$ 이므로 포물선 $x^2=20(y-b)$ 의 준선의 방정식은

$$y = -5 + b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{이 서로 일치하므로} \quad \frac{3}{2} - a = -5 + b$$

$$\therefore a + b = \frac{13}{2}$$

답 ①

0126 점 $P(x, y)$ 에서 직선 $y=-5$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{PA} = \overline{PH}$ 이므로

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = |y+5|$$

양변을 제곱하면

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = (y+5)^2$$

$$\therefore x^2 - 2x - 16y - 15 = 0$$

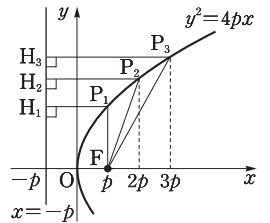
따라서 $a=0, b=-2, c=-16, d=-15$ 이므로

$$a + b - c - d = 29$$

답 ④

0127 포물선 $y^2=4px$ 의 초점은 $F(p, 0)$ 이고 준선의 방정식은 $x=-p$ 이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 세 점 P_1, P_2, P_3 에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2, H_3 이라 하면 포물선의 정의에 의하여



$$\overline{FP_1} = \overline{P_1H_1}$$

$$= p - (-p) = 2p$$

$$\overline{FP_2} = \overline{P_2H_2} = 2p - (-p) = 3p$$

$$\overline{FP_3} = \overline{P_3H_3} = 3p - (-p) = 4p$$

$$\therefore \overline{FP_1} + \overline{FP_2} + \overline{FP_3} = 2p + 3p + 4p = 9p$$

따라서 $9p=27$ 이므로

$$p=3$$

답 ③

0128 $\overline{AC}=2k, \overline{BD}=k \quad (k>0)$

라 하면 포물선의 정의에 의하여

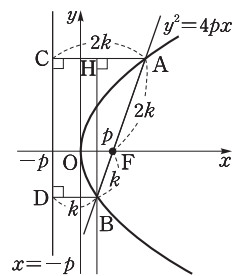
$$\overline{AF} = \overline{AC} = 2k,$$

$$\overline{BF} = \overline{BD} = k$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF}$$

$$= 2k + k = 3k$$

이때 점 B에서 $\overline{AC}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{AH} = \overline{AC} - \overline{HC} = \overline{AC} - \overline{BD}$$

$$= 2k - k = k$$

이므로 직각삼각형 AHB에서

$$\overline{BH} = \sqrt{(3k)^2 - k^2} = 2\sqrt{2}k$$

따라서 $\square ACDB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (2k + k) \times 2\sqrt{2}k = 3\sqrt{2}k^2$$

즉 $3\sqrt{2}k^2=75\sqrt{2}$ 이므로

$$k^2=25 \quad \therefore k=5 \quad (\because k>0)$$

$$\therefore \overline{AB}=3k=3 \times 5=15$$

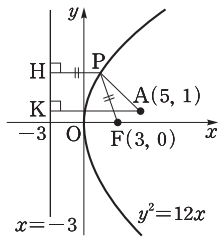
답 15

0129 포물선 $y^2=12x$ 의 초점은 $F(3, 0)$ 이고 준선은 $x=-3$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, A 에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, K 라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{PA}+\overline{PF} &= \overline{PA}+\overline{PH} \\ &\geq \overline{AK} \\ &= 5-(-3)=8\end{aligned}$$

따라서 $\overline{PA}+\overline{PF}$ 의 최솟값은 8이다.



답 8

0130 중심이 원점인 타원이 점 $(2\sqrt{5}, 0)$ 을 지나므로 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{k^2} = 1$ 이라 하면 타원의 두 초점의 좌표가

$$\begin{aligned}(2, 0), (-2, 0) \text{이므로} \\ 20 - k^2 = 2^2, \quad k^2 = 16 \\ \therefore |k| = 4\end{aligned}$$

따라서 구하는 단축의 길이는 $2|k| = 2 \times 4 = 8$

답 8

0131 단면인 타원의 방정식을

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0) \text{이라 하면 단축의 길} \\ \text{이가 밑면인 원의 지름의 길이와 같으므로} \\ 2b = 6 \quad \therefore b = 3\end{aligned}$$

또 장축의 길이가 $2a$ 이므로

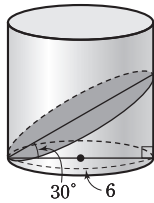
$$2a \cos 30^\circ = 6, \quad \sqrt{3}a = 6 \quad \therefore a = 2\sqrt{3}$$

따라서 타원 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$ 에서 $\sqrt{12-9} = \sqrt{3}$ 이므로 초점의 좌표는 $(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$

즉 구하는 두 초점 사이의 거리는

$$\sqrt{3} - (-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

답 $2\sqrt{3}$



0132 $16x^2 + 7y^2 - 32x + 42y = 33$ 에서

$$\begin{aligned}16(x-1)^2 + 7(y+3)^2 &= 112 \\ \therefore \frac{(x-1)^2}{7} + \frac{(y+3)^2}{16} &= 1\end{aligned}$$

즉 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$ 에서 $\sqrt{16-7} = 3$ 이므로 중심의 좌표는 $(0, 0)$, 초점의 좌표는 $(0, 3), (0, -3)$ 이다.

- ① 중심의 좌표는 $(1, -3)$
- ② 초점의 좌표는 $(1, 0), (1, -6)$
- ③ 장축의 길이는 $2 \times 4 = 8$
- ④ 단축의 길이는 $2 \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$

답 ⑤

0133 두 점 A, C 의 y 좌표가 같으므로 선분 AC 는 타원의 장축 또는 단축이다.

이때 타원의 중심을 M 이라 하면 점 M 은 선분 AC 의 중점이므로 점 M 의 좌표는

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{2+2}{2} \right), \text{ 즉 } (1, 2)$$

따라서 $\overline{AM} = 3, \overline{BM} = 2$ 이므로 주어진 타원은 타원

$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

즉 주어진 타원의 방정식은 $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ 이므로

$$a = -1, b = 9, c = -2, d = 4$$

$$\therefore abcd = 72$$

답 72

0134 타원 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ 에서 $\sqrt{100-36} = 8$ 이므로

$$F(8, 0), F'(-8, 0)$$

이때 원 $(x+8)^2 + y^2 = 9$ 의 중심의 좌표가 $(-8, 0)$ 이므로 점 F' 은 이 원의 중심이다.

$$\therefore \overline{PF'} = 3$$

한편 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 \times 10 = 20$$

이므로 $\overline{PF} = 20 - \overline{PF'} = 20 - 3 = 17$

$$\therefore \overline{PF} \times \overline{PF'} = 51$$

답 51

0135 $\overline{AF'} = 5, \overline{AF} = 3$ 이므로 직각삼각형 $AF'F$ 에서

$$\overline{FF'} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

따라서 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{5} = 1$ 의 두 초점이 $F(2, 0), F'(-2, 0)$ 이므로

$$\begin{aligned}a^2 - 5 = 2^2, \quad a^2 = 9 \\ \therefore a = 3 \quad (\because a > \sqrt{5})\end{aligned}$$

이때 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a = 2 \times 3 = 6$$

이므로 $\triangle PF'F$ 의 둘레의 길이는

$$\overline{PF} + \overline{PF'} + \overline{FF'} = 6 + 4 = 10$$

답 ⑤

0136 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 주축의 길이가 6이므로

$$2|a| = 6 \quad \therefore |a| = 3$$

한편 타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ 에서 $\sqrt{36-9} = 3\sqrt{3}$ 이므로 초점의 좌표는

$$(3\sqrt{3}, 0), (-3\sqrt{3}, 0)$$

따라서 쌍곡선의 초점의 좌표가 $(3\sqrt{3}, 0), (-3\sqrt{3}, 0)$ 이므로

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= (3\sqrt{3})^2 \\ \therefore b^2 &= (3\sqrt{3})^2 - 3^2 = 18 \\ \therefore a^2 - b^2 &= -9\end{aligned}$$

답 ①

0137 쌍곡선 $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$, 즉 $2x^2 - 2y^2 = 1$ 의 점근선의 방정식은 $y = \pm x$
 이때 두 점근선 $y = x$, $y = -x$ 는 서로 수직이므로 $\square PQOR$ 는 직사각형이다.

$$\therefore \square PQOR = \overline{PQ} \times \overline{PR}$$

점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면 $\overline{PQ}$ 의 길이는 점 $P(a, b)$ 와 직선 $y = x$, 즉 $x - y = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{PQ} = \frac{|a - b|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|a - b|}{\sqrt{2}}$$

또 $\overline{PR}$ 의 길이는 점 $P(a, b)$ 와 직선 $y = -x$, 즉 $x + y = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{PR} = \frac{|a + b|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|a + b|}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PQ} \times \overline{PR} &= \frac{|a - b|}{\sqrt{2}} \times \frac{|a + b|}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{|a^2 - b^2|}{2} \end{aligned}$$

한편 점 $P(a, b)$ 는 쌍곡선 $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$ 위의 점이므로

$$a^2 - b^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \square PQOR = \frac{|a^2 - b^2|}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{답 } \frac{1}{4}$$

0138 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$ 에서 $\sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ 이므로 두 초점 F, F'의 좌표는 $(3\sqrt{2}, 0), (-3\sqrt{2}, 0)$

한편 쌍곡선의 정의에 의하여

$$|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2 \times 3 = 6$$

$|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 6$ 의 양변을 제곱하면

$$\overline{PF}^2 - 2\overline{PF} \times \overline{PF'} + \overline{PF'}^2 = 36$$

$$\therefore 2\overline{PF} \times \overline{PF'} = \overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 - 36$$

이때 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 - 36$$

$$= \{(x - 3\sqrt{2})^2 + y^2\} + \{(x + 3\sqrt{2})^2 + y^2\} - 36$$

$$= 2(x^2 + y^2) = 2\overline{OP}^2$$

$$= 2 \times 7^2 = 98$$

따라서 $2\overline{PF} \times \overline{PF'} = 98$ 이므로

$$\overline{PF} \times \overline{PF'} = 49 \quad \text{답 } 3$$

0139 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 에서 $\sqrt{4+5} = 3$ 이므로

$$F(3, 0), F'(-3, 0)$$

$$\therefore \overline{FF'} = 3 - (-3) = 6$$

또 $\overline{AF'} = 1 - (-3) = 4$, $\overline{AF} = 3 - 1 = 2$ 이므로 $\triangle PF'F$ 에서 각의 이등분선의 성질에 의하여

$$\overline{PF'} : \overline{PF} = \overline{AF'} : \overline{AF} = 2 : 1$$

따라서 $\overline{PF'} = 2k$, $\overline{PF} = k$ ($k > 0$)라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2k - k = 2 \times 2 = 4$$

$$\therefore k = 4$$

즉 $\overline{PF'} = 8$, $\overline{PF} = 4$ 이므로 $\triangle PF'F$ 의 둘레의 길이는

$$\overline{PF'} + \overline{PF} + \overline{FF'} = 8 + 4 + 6 = 18 \quad \text{답 } 5$$

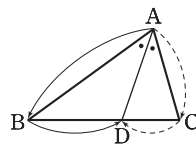
RPM비법노트

삼각형의 내각의 이등분선의 성질

$\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC

와 만나는 점을 D라 하면

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$



0140 $\triangle PQF$ 가 정삼각형이므로

$$\angle PQF = 60^\circ$$

또 $\triangle QF'F$ 가 $\overline{QF} = \overline{QF'}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\angle QF'F = \frac{1}{2} \angle PQF$$

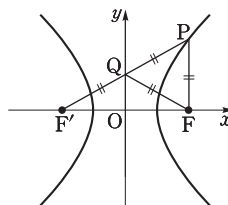
$$= \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$

이때 $\overline{OF'} = 4\sqrt{3}$ 이므로 직각삼각형 $QF'O$ 에서

$$\overline{QF'} = \frac{\overline{OF'}}{\cos 30^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8$$

따라서 $\overline{PF'} = 16$, $\overline{PF} = 8$ 이므로 쌍곡선의 정의에 의하여 구하는 주축의 길이는

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 8 \quad \text{답 } 8$$



0141 $x^2 - y^2 + k(2x^2 - y^2) + 2x - y + 2 = 0$ 에서

$$(2k+1)x^2 - (k+1)y^2 + 2x - y + 2 = 0$$

이 방정식이 나타내는 도형이 축이 y축과 평행한 포물선이 되려면 $k+1=0$ $\therefore k=-1$ 답 -1

0142 점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면 점 P가 포물선 $x^2 = 24y$ 위의 점이므로

$$a^2 = 24b \quad \dots\dots \text{㉠}$$

포물선 $x^2 = 24y$ 의 초점은 $F(0, 6)$ 이므로 선분 FP의 중점 Q의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b+6}{2}$$

$$\therefore a = 2x, b = 2y - 6 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$(2x)^2 = 24(2y - 6)$$

$$\therefore x^2 = 12(y - 3)$$

이 포물선은 포물선 $x^2 = 12y$ 를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2=12y$ 의 초점의 좌표가 $(0, 3)$ 이므로 구하는 포물선의 초점의 좌표는

$(0, 6)$

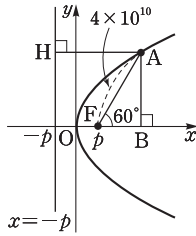
답 (0, 6)

0143 혜성이 포물선 궤도의 꼭짓점에 있을 때 태양에 가장 가까워진다.

오른쪽 그림과 같이 혜성과 태양의 위치를 각각 A, F라 하고 포물선의 방정식을

$y^2=4px$ ($p>0$)라 하면 F($p, 0$)이고 포물선의 준선의 방정식은 $x=-p$ 이다.

이때 점 A에서 x 축에 내린 수선의 발을 B라 하면



$$\overline{FB} = 4 \times 10^{10} \times \cos 60^\circ = 2 \times 10^{10}$$

또 점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AH} = \overline{AF} = 4 \times 10^{10}$$

따라서 $2p + 2 \times 10^{10} = 4 \times 10^{10}$ 이므로

$$p = 10^{10}$$

즉 구하는 거리는 10^{10} km이다.

답 10^{10} km

0144 포물선 $y^2=16x$ 의 초점의 좌표는

$(4, 0)$

... 1단계

즉 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ 의 한 초점의 좌표가 $(4, 0)$ 이므로

$$25 - a^2 = 4^2, \quad a^2 = 9$$

$$\therefore |a| = 3$$

... 2단계

따라서 구하는 단축의 길이는

$$2|a| = 2 \times 3 = 6$$

... 3단계

답 6

채점 요소	비율
1단계 포물선의 초점의 좌표 구하기	30 %
2단계 $ a $ 의 값 구하기	40 %
3단계 단축의 길이 구하기	30 %

0145 두 초점이 F, F₁인 타원의 장축의 길이를 40이라 하면 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF_1} = 40 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overline{QF} + \overline{QF_1} = 40 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

두 초점이 F, F₂인 타원의 장축의 길이를 36이라 하면 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF_2} = 36 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\overline{QF} + \overline{QF_2} = 36 \quad \dots\dots \textcircled{4} \quad \dots \text{1단계}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{3} \text{을 하면} \quad \overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 4$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{4} \text{을 하면} \quad \overline{QF_1} - \overline{QF_2} = 4$$

$$\therefore |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| + |\overline{QF_1} - \overline{QF_2}| = 4 + 4 = 8 \quad \dots \text{2단계}$$

답 8

채점 요소	비율
1단계 타원의 정의를 이용하여 식 세우기	50 %
2단계 $ \overline{PF_1} - \overline{PF_2} + \overline{QF_1} - \overline{QF_2} $ 의 값 구하기	50 %

0146 쌍곡선 $4x^2 - 4y^2 = 1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm x$$

쌍곡선 $4(x-3)^2 - 4(y-1)^2 = 1$ 은 쌍곡선 $4x^2 - 4y^2 = 1$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은

$$y - 1 = \pm(x - 3)$$

$$\therefore y = x - 2, y = -x + 4$$

오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y = x$,

$y = -x + 4$ 의 교점을 A라 하면

$$A(2, 2)$$

두 직선 $y = x - 2$, $y = -x + 4$ 의 교점

을 B라 하면

$$B(3, 1)$$

$$\therefore \overline{OA} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

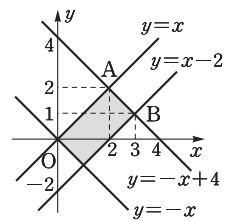
$$\overline{AB} = \sqrt{(3-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$$

이때 네 직선으로 둘러싸인 도형은 직사각형이므로 구하는 넓이는

$$\overline{OA} \times \overline{AB} = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$$

... 2단계

답 4



채점 요소	비율
1단계 네 점근선의 방정식 구하기	50 %
2단계 도형의 넓이 구하기	50 %

0147 점 P(x, y)에서 직선 $x = \frac{4}{3}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{PF} : \overline{PH} = 3 : 2$ 이므로

$$2\overline{PF} = 3\overline{PH}$$

$$\therefore 2\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 3\left|x - \frac{4}{3}\right|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$5x^2 - 4y^2 = 20 \quad \therefore \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \quad \dots \text{1단계}$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 쌍곡선이고 주축의 길이는

$$2 \times 2 = 4$$

... 2단계

답 4

채점 요소	비율
1단계 점 P가 나타내는 도형의 방정식 구하기	70 %
2단계 주축의 길이 구하기	30 %

0148 **전략** 포물선의 정의를 이용하여 $\overline{PQ}$ 의 길이를 구한다.

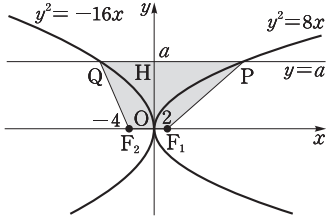
포물선 $y^2=8x$ 의 초점은 F₁(2, 0)이고 준선의 방정식은 $x=-2$ 이다.

또 포물선 $y^2 = -16x$ 의 초점은 $F_2(-4, 0)$ 이고 준선의 방정식은 $x = -4$ 이다.

$$\therefore \overline{F_1F_2} = 2 - (-4) = 6$$

다음 그림과 같이 선분 PQ가 y 축과 만나는 점을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF_1} = \overline{PH} + 2, \quad \overline{QF_2} = \overline{QH} + 4$$



따라서 $\square PQF_2F_1$ 의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{PQ} + \overline{QF_2} + \overline{F_1F_2} + \overline{PF_1} \\ = \overline{PQ} + (\overline{QH} + 4) + 6 + (\overline{PH} + 2) \\ = \overline{PQ} + (\overline{QH} + \overline{PH}) + 12 \\ = 2\overline{PQ} + 12 \end{aligned}$$

즉 $2\overline{PQ} + 12 = 66$ 이므로

$$\overline{PQ} = 27$$

이때 두 점 P, Q의 좌표를 각각 $(x_1, a), (x_2, a)$ 라 하면

$$x_1 - x_2 = 27 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 두 점 P, Q는 각각 포물선 $y^2 = 8x, y^2 = -16x$ 위의 점이므로

$$a^2 = 8x_1, \quad a^2 = -16x_2$$

즉 $8x_1 = -16x_2$ 이므로

$$x_1 = -2x_2$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-3x_2 = 27 \quad \therefore x_2 = -9$$

따라서 $a^2 = -16 \times (-9) = 144$ 이므로

$$a = 12 \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore \square PQF_2F_1 = \frac{1}{2} \times (27 + 6) \times 12 = 198$$

답 198

0149 [전략] 타원과 쌍곡선의 정의를 이용한다.

$$\overline{AF} = 1 \text{이므로} \quad c - a = 1$$

이때 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{PF} &= \overline{PF'} - 2a = \overline{FF'} - 2a \\ &= 2c - 2a = 2(c - a) \\ &= 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

한편 $\triangle PAF \sim \triangle F'FP$ (AA 닮음)이므로

$$\begin{aligned} \overline{PF} : \overline{F'P} &= \overline{AF} : \overline{FP} \\ 2 : \overline{F'P} &= 1 : 2 \quad \therefore \overline{F'P} = 4 \end{aligned}$$

따라서 타원의 장축의 길이는

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 + 4 = 6$$

답 6

0150 [전략] 주어진 도형을 좌표평면 위에 놓는다.

직사각형 ABCD의 가로, 세로의 길이를 각각 $2a, 2b$ 라 하자.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{PR}$ 를 x 축, $\overline{SQ}$ 를 y 축으로 하는 좌표평면에 주어진 도형을 놓으면 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

타원의 초점 F, F'의 좌표를 각각 $(c, 0), (-c, 0) \quad (c > 0)$ 이라 하면

$$a^2 - b^2 = c^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 포물선의 정의에 의하여 $\overline{FF'} = \overline{PF'}$ 이므로

$$2c = a - c \quad \therefore a = 3c$$

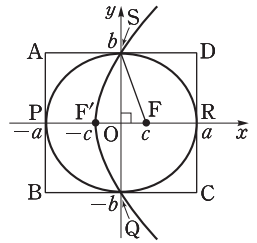
$a = 3c$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} (3c)^2 - b^2 &= c^2, \quad b^2 = 8c^2 \\ \therefore b &= 2\sqrt{2}c \quad (\because b > 0, c > 0) \end{aligned}$$

따라서 $\square ABCD$ 의 넓이에서

$$\begin{aligned} 2a \times 2b &= 6c \times 4\sqrt{2}c = 32\sqrt{2} \\ c^2 &= \frac{4}{3} \quad \therefore c = \frac{2}{3}\sqrt{3} \quad (\because c > 0) \\ \therefore \overline{FF'} = 2c &= \frac{4}{3}\sqrt{3} \end{aligned}$$

답 ②



02 이차곡선의 접선

교과서 문제 정복하기

본책 027쪽

0151 $y^2=3x=4 \times \frac{3}{4}x$ 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y = -x + \frac{3}{-1} \quad \therefore y = -x - \frac{3}{4} \quad \text{답 } y = -x - \frac{3}{4}$$

0152 $y^2=-16x=4 \times (-4)x$ 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y = 3x + \frac{-4}{3} \quad \therefore y = 3x - \frac{4}{3} \quad \text{답 } y = 3x - \frac{4}{3}$$

0153 직선 $y=5x-1$ 과 평행한 직선의 기울기는 5이므로 포물선 $y^2=4x$ 에 접하고 기울기가 5인 직선의 방정식은

$$y = 5x + \frac{1}{5} \quad \text{답 } y = 5x + \frac{1}{5}$$

0154 $y^2=12x=4 \times 3x$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$2\sqrt{6}y = 2 \times 3 \times (x+2) \quad \therefore y = \frac{\sqrt{6}}{2}x + \sqrt{6} \\ \text{답 } y = \frac{\sqrt{6}}{2}x + \sqrt{6}$$

0155 $y^2=-8x=4 \times (-2)x$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$2y = 2 \times (-2) \times \left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \therefore y = -2x + 1 \\ \text{답 } y = -2x + 1$$

0156 $x^2=\frac{3}{2}y=4 \times \frac{3}{8}y$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$3x = 2 \times \frac{3}{8} \times (y+6) \quad \therefore y = 4x - 6 \quad \text{답 } y = 4x - 6$$

0157 $x^2=-4y=4 \times (-1)y$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$-4x = 2 \times (-1) \times (y-4) \quad \therefore y = 2x + 4 \\ \text{답 } y = 2x + 4$$

0158 $y = -x \pm \sqrt{4 \times (-1)^2 + 1} \quad \therefore y = -x \pm \sqrt{5}$

$$\text{답 } y = -x \pm \sqrt{5}$$

0159 $3x^2+2y^2=6$ 에서 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y = 2x \pm \sqrt{2 \times 2^2 + 3} \quad \therefore y = 2x \pm \sqrt{11} \\ \text{답 } y = 2x \pm \sqrt{11}$$

0160 직선 $y = -\frac{1}{3}x - 2$ 에 수직인 직선의 기울기는 3이므로 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{3} = 1$ 에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$$y = 3x \pm \sqrt{8 \times 3^2 + 3} \quad \therefore y = 3x \pm 5\sqrt{3} \\ \text{답 } y = 3x \pm 5\sqrt{3}$$

0161 $\frac{2x}{10} + \frac{-3y}{15} = 1 \quad \therefore y = x - 5 \quad \text{답 } y = x - 5$

0162 $3x + 3y = 12 \quad \therefore y = -x + 4 \quad \text{답 } y = -x + 4$

참고 타원 $Ax^2 + By^2 = C$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식을 구할 때, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 꼴로 변형할 필요 없이 $Ax^2 + By^2 = C$ 에 x^2 대신 x_1x , y^2 대신 y_1y 를 대입하면 된다.

0163 $y = \sqrt{3}x \pm \sqrt{4 \times (\sqrt{3})^2 - 3} \quad \therefore y = \sqrt{3}x \pm 3 \\ \text{답 } y = \sqrt{3}x \pm 3$

0164 $5x^2 - y^2 = -15$ 에서 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{15} = -1$ 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y = -2x \pm \sqrt{15 - 3 \times (-2)^2} \quad \therefore y = -2x \pm \sqrt{3} \\ \text{답 } y = -2x \pm \sqrt{3}$$

0165 직선 $3x + y - 1 = 0$, 즉 $y = -3x + 1$ 과 평행한 직선의 기울기는 -3이므로 쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{9} = 1$ 에 접하고 기울기가 -3인 직선의 방정식은

$$y = -3x \pm \sqrt{5 \times (-3)^2 - 9} \quad \therefore y = -3x \pm 6 \\ \text{답 } y = -3x \pm 6$$

0166 $\frac{-2x}{3} - \frac{y}{3} = 1 \quad \therefore y = -2x - 3 \\ \text{답 } y = -2x - 3$

0167 $\frac{6x}{12} - \frac{4y}{4} = -1 \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + 1 \\ \text{답 } y = \frac{1}{2}x + 1$

0168 $3 \times 4x - 4 \times (-3y) = 12 \quad \therefore y = -x + 1 \\ \text{답 } y = -x + 1$

0169 $-3x - 3 \times 2y = -3 \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ \text{답 } y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

유형 익히기

● 본책 028~034쪽

0170 직선 $2x - y + 1 = 0$, 즉 $y = 2x + 1$ 과 평행한 직선의 기울기는 2이다.

따라서 포물선 $y^2 = -8x = 4 \times (-2)x$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y = 2x + \frac{-2}{2} \quad \therefore y = 2x - 1$$

이 직선이 점 $(-2, k)$ 를 지나므로

$$k = 2 \times (-2) - 1 = -5 \quad \text{답 ①}$$

다른 풀이 포물선 $y^2 = -8x$ 에 접하고 직선 $2x - y + 1 = 0$ 과 평행한 직선의 방정식을 $y = 2x + a$ 라 하자.

$y = 2x + a$ 를 $y^2 = -8x$ 에 대입하면

$$(2x + a)^2 = -8x \quad \therefore 4x^2 + 4(a + 2)x + a^2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{2(a + 2)\}^2 - 4a^2 = 0$$

$$16a + 16 = 0 \quad \therefore a = -1$$

따라서 직선의 방정식은 $y = 2x - 1$

0171 직선 $y = -x + 3$ 에 수직인 직선의 기울기는 1이다.

따라서 포물선 $y^2 + x = 0$, 즉 $y^2 = -x = 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right)x$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y = x + \frac{-1}{1} \quad \therefore -4x + 4y + 1 = 0$$

즉 $a = -4$, $b = 4$ 이므로 $a - b = -8$ 답 ③

0172 포물선 $y^2 = 6x = 4 \times \frac{3}{2}x$ 에 접하고 기울기가 m ($m \neq 0$)인 직선의 방정식은

$$y = mx + \frac{3}{m} \quad \therefore y = mx + \frac{3}{2m}$$

이 직선이 직선 $y = mx + 2$ 와 일치해야 하므로

$$\frac{3}{2m} = 2 \quad \therefore m = \frac{3}{4} \quad \text{답 } \frac{3}{4}$$

다른 풀이 $y = mx + 2$ 를 $y^2 = 6x$ 에 대입하면

$$(mx + 2)^2 = 6x \quad \therefore m^2x^2 + 2(2m - 3)x + 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2m - 3)^2 - m^2 \times 4 = 0$$

$$-12m + 9 = 0 \quad \therefore m = \frac{3}{4}$$

0173 포물선 $y^2 = 2x = 4 \times \frac{1}{2}x$ 에 접하고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y = -x + \frac{1}{-1} \quad \therefore y = -x - \frac{1}{2} \quad \dots\dots \text{①}$$

$$\text{①을 } y^2 = 2x \text{에 대입하면} \quad \left(-x - \frac{1}{2}\right)^2 = 2x$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0, \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{을 ①에 대입하면} \quad y = -1$$

$$\therefore A\left(\frac{1}{2}, -1\right)$$

$$\text{또 ①을 } x^2 = 2y \text{에 대입하면} \quad x^2 = 2\left(-x - \frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0, \quad (x + 1)^2 = 0$$

$$\therefore x = -1$$

$$x = -1 \text{을 ①에 대입하면} \quad y = \frac{1}{2}$$

$$\therefore B\left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

따라서 선분 AB의 길이는

$$\sqrt{\left(-1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + 1\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{답 } \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

0174 점 $(2, a)$ 가 포물선 $y^2 = 6x$ 위의 점이므로

$$a^2 = 6 \times 2 \quad \therefore a = 2\sqrt{3} \quad (\because a > 0)$$

따라서 포물선 $y^2 = 6x = 4 \times \frac{3}{2}x$ 위의 점 $(2, 2\sqrt{3})$ 에서의 접선의 방정식은

$$2\sqrt{3}y = 2 \times \frac{3}{2} \times (x + 2)$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}$$

$$\text{즉 } b = \frac{\sqrt{3}}{2}, c = \sqrt{3} \text{이므로}$$

$$abc = 3\sqrt{3} \quad \text{답 ③}$$

0175 포물선 $x^2 = 3y = 4 \times \frac{3}{4}y$ 위의 점 $(-\sqrt{3}, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-\sqrt{3}x = 2 \times \frac{3}{4} \times (y + 1)$$

$$\therefore -2\sqrt{3}x = 3(y + 1)$$

이 직선이 점 $(a, 3)$ 을 지나므로

$$-2\sqrt{3}a = 3 \times 4 \quad \therefore a = -2\sqrt{3} \quad \text{답 } -2\sqrt{3}$$

0176 $y = -x + 4$ 를 $x^2 = 2y$ 에 대입하면

$$x^2 = 2(-x + 4), \quad x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0 \quad \therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 2$$

$$x = -4 \text{를 } y = -x + 4 \text{에 대입하면} \quad y = 8$$

$$x = 2 \text{를 } y = -x + 4 \text{에 대입하면} \quad y = 2$$

따라서 두 점 A, B의 좌표는

$$(-4, 8), (2, 2)$$

이때 포물선 $x^2=2y=4 \times \frac{1}{2}y$ 위의 두 점 $(-4, 8), (2, 2)$ 에서의 접선의 방정식은 각각

$$\begin{aligned} -4x &= 2 \times \frac{1}{2} \times (y+8), \quad 2x = 2 \times \frac{1}{2} \times (y+2) \\ \therefore y &= -4x-8, \quad y=2x-2 \end{aligned}$$

따라서 구하는 기울기의 곱은

$$-4 \times 2 = -8 \quad \text{답 -8}$$

0177 점 $(k, -3k)$ 가 포물선 $y^2=-18x$ 위의 점이므로

$$\begin{aligned} (-3k)^2 &= -18k, \quad k^2+2k=0 \\ k(k+2) &= 0 \quad \therefore k=-2 \quad (\because k \neq 0) \quad \dots \text{1단계} \end{aligned}$$

따라서 포물선 $y^2=-18x=4 \times \left(-\frac{9}{2}\right)x$ 위의 점 $(-2, 6)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\begin{aligned} 6y &= 2 \times \left(-\frac{9}{2}\right) \times (x-2) \\ \therefore y &= -\frac{3}{2}x+3 \quad \dots \text{2단계} \end{aligned}$$

이때 직선 $y=-\frac{3}{2}x+3$ 과 평행한 직선의 기울기는 $-\frac{3}{2}$ 이므로 점 $(3, 1)$ 을 지나고 기울기가 $-\frac{3}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y-1 = -\frac{3}{2}(x-3) \quad \therefore y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$$

즉 $m = -\frac{3}{2}, n = \frac{11}{2}$ 이므로

$$m+n=4 \quad \dots \text{3단계}$$

답 4

	채점 요소	비율
1단계	k의 값 구하기	30%
2단계	접선의 방정식 구하기	40%
3단계	m+n의 값 구하기	30%

0178 포물선 $y^2=-12x=4 \times (-3)x$ 의 초점은

$$F(-3, 0)$$

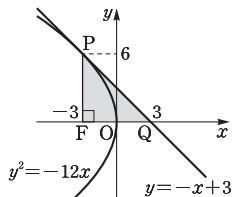
포물선 $y^2=-12x$ 위의 점 $P(-3, 6)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\begin{aligned} 6y &= 2 \times (-3) \times (x-3) \\ \therefore y &= -x+3 \end{aligned}$$

따라서 $Q(3, 0)$ 이므로 $\triangle PFQ$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{3 - (-3)\} \times 6 = 18$$

답 ⑤



0179 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $P(p, 2p)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\begin{aligned} 2py &= 2p(x+p) \quad \therefore y = x+p \\ \therefore A &(-p, 0), B(0, p) \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{p^2+p^2} = p\sqrt{2}, \\ \overline{PB} &= \sqrt{(-p)^2+(-p)^2} = p\sqrt{2} \quad (\because p>0) \end{aligned}$$

$$\text{이므로} \quad \frac{\overline{PB}}{\overline{AB}} = \frac{p\sqrt{2}}{p\sqrt{2}} = 1$$

답 1

0180 포물선 $y^2=16x=4 \times 4x$ 위의 점 $P(a, b)$ 에서의 접선의 방정식은

$$by = 2 \times 4 \times (x+a) \quad \therefore y = \frac{8}{b}x + \frac{8a}{b}$$

또 점 $Q\left(\frac{1}{4}, -2\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-2y = 2 \times 4 \times \left(x + \frac{1}{4}\right) \quad \therefore y = -4x - 1$$

두 접선이 서로 수직이므로

$$\frac{8}{b} \times (-4) = -1 \quad \therefore b = 32$$

이때 점 $P(a, 32)$ 가 포물선 $y^2=16x$ 위의 점이므로

$$32^2 = 16a \quad \therefore a = 64$$

$$\therefore a+b=96$$

답 96

0181 점 $P(a, b)$ 는 포물선 $y^2=8x$ 위의 점이므로

$$b^2 = 8a \quad \dots\dots \text{㉠}$$

포물선 $y^2=8x=4 \times 2x$ 위의 점 $P(a, b)$ 에서의 접선의 방정식은

$$by = 2 \times 2 \times (x+a) \quad \therefore y = \frac{4}{b}(x+a)$$

$$\therefore Q(-a, 0)$$

이때 $\overline{PQ} = 2\sqrt{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sqrt{(-a-a)^2+(-b)^2} &= 2\sqrt{3} \\ \therefore 4a^2+b^2 &= 12 \quad \dots\dots \text{㉡} \end{aligned}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned} 4a^2+8a &= 12, \quad a^2+2a-3=0 \\ (a+3)(a-1) &= 0 \quad \therefore a=-3 \text{ 또는 } a=1 \end{aligned}$$

㉠에서 $a \geq 0$ 이므로 $a=1, b^2=8$

$$\therefore a^2+b^2=9$$

답 ②

0182 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$y_1y = 6(x+x_1)$$

이 직선이 점 $(-3, 0)$ 을 지나므로

$$0 = 6(-3+x_1) \quad \therefore x_1=3$$

또 점 (x_1, y_1) 이 포물선 위의 점이므로

$$y_1^2 = 12x_1$$

이 식에 $x_1=3$ 을 대입하면

$$y_1^2 = 36 \quad \therefore y_1 = \pm 6$$

즉 $x_1=3, y_1=-6$ 또는 $x_1=3, y_1=6$ 이므로 접선의 방정식은

$$-6y = 6(x+3), \quad 6y = 6(x+3)$$

$$\therefore y = -x-3, \quad y = x+3$$

따라서 $m = -1, n = -3$ 또는 $m = 1, n = 3$ 이므로

$$m^2 + n^2 = 10$$

답 ③

다른 풀이 직선 $y = mx + n$ 이 점 $(-3, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -3m + n \quad \therefore n = 3m \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $y = mx + n$, 즉 $y = mx + 3m$ 을 $y^2 = 12x$ 에 대입하면

$$(mx + 3m)^2 = 12x$$

$$\therefore m^2 x^2 + 6(m^2 - 2)x + 9m^2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{3(m^2 - 2)\}^2 - 9m^4 = 0$$

$$m^2 - 1 = 0 \quad \therefore m^2 = 1$$

㉠에서 $n^2 = 9m^2 = 9$ 이므로

$$m^2 + n^2 = 10$$

0183 $\frac{x^2}{4} = y$ 에서 $x^2 = 4y$ 이므로 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라

하면 접선의 방정식은

$$x_1 x = 2(y + y_1)$$

이 직선이 점 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 을 지나므로

$$\frac{1}{2} x_1 = 2\left(-\frac{1}{2} + y_1\right) \quad \therefore y_1 = \frac{x_1}{4} + \frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

또 점 (x_1, y_1) 이 포물선 위의 점이므로

$$x_1^2 = 4y_1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$x_1 = -1, y_1 = \frac{1}{4} \text{ 또는 } x_1 = 2, y_1 = 1$$

따라서 접선의 방정식은

$$-x = 2\left(y + \frac{1}{4}\right), 2x = 2(y + 1)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}, y = x - 1$$

즉 두 접선의 기울기의 곱은

$$-\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}$$

답 ④

0184 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$y_1 y = \frac{1}{2}(x + x_1)$$

이 직선이 점 $(-3, -1)$ 을 지나므로

$$-y_1 = \frac{1}{2}(-3 + x_1)$$

$$\therefore y_1 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

또 점 (x_1, y_1) 이 포물선 위의 점이므로

$$y_1^2 = x_1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$x_1 = 1, y_1 = 1 \text{ 또는 } x_1 = 9, y_1 = -3$$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $(1, 1), (9, -3)$ 이므로

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(9-1)^2 + (-3-1)^2} \\ &= 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

답 $4\sqrt{5}$

0185 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$y_1 y = x + x_1$$

이 직선이 점 $P(-2, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -2 + x_1 \quad \therefore x_1 = 2$$

또 점 (x_1, y_1) 이 포물선 위의 점이므로

$$y_1^2 = 2x_1 = 4 \quad \therefore y_1 = \pm 2$$

즉 $x_1 = 2, y_1 = -2$ 또는 $x_1 = 2, y_1 = 2$ 이므로 접선의 방정식은

$$-2y = x + 2, 2y = x + 2$$

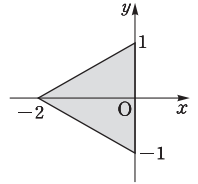
$$\therefore y = -\frac{1}{2}x - 1, y = \frac{1}{2}x + 1$$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(0, -1),$

$(0, 1)$ 이므로 $\triangle PAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{1 - (-1)\} \times 2 = 2$$

답 2



0186 점선의 기울기를 $m (m \neq 0)$ 이라 하면 점선의 방정식은

$$y = mx + \frac{1}{m}$$

이 직선이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로

$$0 = am + \frac{1}{m} \quad \therefore am^2 + 1 = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

이때 두 점선이 서로 수직이므로 m 에 대한 이차방정식 ㉠의 두 실근의 곱은 -1 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{a} = -1 \quad \therefore a = -1$$

답 ④

RPM비법노트

포물선의 점선의 성질

포물선 $y^2 = 4px$ 밖의 점 (m, n) 에서 포물선에 그은 두 접선이 서로 수직이면 점 (m, n) 은 포물선의 준선 $x = -p$ 위에 있다. 따라서 점 $(a, 0)$ 이 포물선 $y^2 = 4x$ 의 준선 $x = -1$ 위에 있어야 하므로 $a = -1$ 임을 알 수 있다.

0187 점선의 기울기를 $m (m \neq 0)$ 이라 하면 점선의 방정식은

$$y = mx + \frac{k}{m} \quad \therefore y = mx + \frac{k}{4m}$$

이 직선이 점 $(1, -\sqrt{3})$ 을 지나므로

$$-\sqrt{3} = m + \frac{k}{4m}$$

$$\therefore 4m^2 + 4\sqrt{3}m + k = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

이때 두 점선이 서로 수직이므로 m 에 대한 이차방정식 ㉠의 두 실근의 곱은 -1 이다.

즉 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{k}{4} = -1 \quad \therefore k = -4$$

따라서 포물선 $y^2 = -4x$ 의 초점의 좌표는

$$(-1, 0)$$

답 $(-1, 0)$

0188 접선의 기울기를 m ($m \neq 0$)이라 하면 접선의 방정식은

$$y = mx + \frac{3}{m}$$

이 직선이 점 (p, q) 를 지나므로

$$q = pm + \frac{3}{m} \quad \therefore pm^2 - qm + 3 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 두 접선이 서로 수직이므로 m 에 대한 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 실근의 곱은 -1 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{3}{p} = -1 \quad \therefore p = -3$$

이때 점 $(-3, q)$ 가 직선 $x + y = -5$ 위의 점이므로

$$-3 + q = -5 \quad \therefore q = -2$$

$$\therefore p - q = -1 \quad \text{답 } \textcircled{2}$$

0189 직선 $2x + y - 3 = 0$, 즉 $y = -2x + 3$ 과 평행한 직선의 기울기는 -2 이므로 타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에 접하고 기울기가 -2 인 직선의 방정식은

$$y = -2x \pm \sqrt{3 \times (-2)^2 + 4}$$

$$\therefore y = -2x \pm 4$$

두 직선 사이의 거리는 직선 $y = -2x + 4$ 위의 점 $(0, 4)$ 와 직선 $y = -2x - 4$, 즉 $2x + y + 4 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|0 + 4 + 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{8\sqrt{5}}{5} \quad \text{답 } \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

0190 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 30° 인 직선의 기울기는 $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 타원 $2x^2 + 3y^2 = 1$, 즉

$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$ 에 접하고 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \pm \sqrt{\frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}}$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 두 직선의 y 절편의 곱은

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{답 } \textcircled{4}$$

0191 직선 $y = 4x - 2$ 를 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y = 4(x - k) - 2$$

$$\therefore y = 4x - 4k - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

타원 $2x^2 + y^2 = 4$, 즉 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에 접하고 기울기가 4 인 직선의 방정식은

$$y = 4x \pm \sqrt{2 \times 4^2 + 4} \quad \therefore y = 4x \pm 6$$

이때 $k > 0$ 이므로 직선 $\textcircled{1}$ 과 직선 $y = 4x - 6$ 이 일치한다.

$$\text{즉 } -4k - 2 = -6 \text{이므로 } k = 1 \quad \text{답 } 1$$

0192 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 점 $(4, 0)$ 을 지나므로

$$\frac{16}{a^2} = 1 \quad \therefore a = 4 \quad (\because a > 0)$$

이때 $x + 3y - 8 = 0$ 에서 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$ 이므로 타원

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하고 기울기가 $-\frac{1}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{3}x \pm \sqrt{16 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + b^2}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3}x \pm \sqrt{\frac{16}{9} + b^2}$$

따라서 직선 $y = -\frac{1}{3}x + \sqrt{\frac{16}{9} + b^2}$ 과 직선 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$ 이

일치하므로

$$\sqrt{\frac{16}{9} + b^2} = \frac{8}{3}, \quad \frac{16}{9} + b^2 = \frac{64}{9}$$

$$b^2 = \frac{48}{9} \quad \therefore b = \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad (\because b > 0)$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{3}}{3}$$

0193 타원 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$ 위의 점 $(2, -2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{12} + \frac{-2y}{6} = 1 \quad \therefore \frac{x}{6} - \frac{y}{3} = 1$$

이 직선이 점 $(a, 4)$ 를 지나므로

$$\frac{a}{6} - \frac{4}{3} = 1, \quad \frac{a}{6} = \frac{7}{3}$$

$$\therefore a = 14 \quad \text{답 } \textcircled{5}$$

0194 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1$ 위의 점 $(-\sqrt{2}, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-\frac{\sqrt{2}x}{4} + \frac{2y}{8} = 1 \quad \therefore y = \sqrt{2}x + 4$$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 기울기가

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고 점 $(\sqrt{2}, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x - \sqrt{2}) \quad \therefore y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 2$$

$$\text{답 } y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 2$$

0195 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 위의 점 $(2, 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{16} + \frac{3y}{12} = 1 \quad \therefore \frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$$

따라서 P(8, 0), Q(0, 4)이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{8^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{5} \quad \text{답 } 4\sqrt{5}$$

0196 점 P(k, 2k)가 타원 $x^2 + 2y^2 = 16$ 위의 점이므로

$$k^2 + 2 \times (2k)^2 = 16, \quad k^2 = \frac{16}{9}$$

$$\therefore k = \frac{4}{3} \quad (\because k > 0) \quad \dots \text{1단계}$$

따라서 타원 위의 점 P($\frac{4}{3}$, $\frac{8}{3}$)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{4}{3}x + \frac{16}{3}y = 16 \quad \therefore x + 4y = 12 \quad \dots \text{2단계}$$

즉 구하는 x절편은 12이다. ... 3단계

답 12

채점 요소		비율
1단계	k의 값 구하기	40%
2단계	접선의 방정식 구하기	40%
3단계	접선의 x절편 구하기	20%

0197 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{6} = 1$ 위의 점 (b, -2)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{bx}{a^2} + \frac{-2y}{6} = 1 \quad \therefore y = \frac{3b}{a^2}x - 3$$

이 직선의 기울기가 1이므로

$$\frac{3b}{a^2} = 1 \quad \therefore a^2 = 3b \quad \dots \dots \text{㉠}$$

또 점 (b, -2)가 타원 위의 점이므로

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{2}{3} = 1, \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3} \quad \therefore a^2 = 3b^2 \quad \dots \dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a^2 = 3, b = 1$ ($\because a^2 \neq 0$)

$$\therefore a^2 + b^2 = 4 \quad \text{답 } 4$$

0198 점 P의 좌표를 (x_1, y_1) ($x_1 > 0, y_1 > 0$)이라 하면

$$H(x_1, 0)$$

타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 위의 점 P(x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{3} + \frac{y_1y}{2} = 1 \quad \therefore T\left(\frac{3}{x_1}, 0\right)$$

따라서 $\overline{OH} = x_1, \overline{OT} = \frac{3}{x_1}$ 이므로

$$\overline{OH} \times \overline{OT} = 3 \quad \text{답 } 3$$

0199 포물선 $x^2 = 2y$ 와 타원 $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{a} = 1$ 이 만나는 점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하자.

포물선 $x^2 = 2y$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$x_1x = y + y_1 \quad \therefore y = x_1x - y_1$$

타원 $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{a} = 1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{10} + \frac{y_1y}{a} = 1 \quad \therefore y = -\frac{ax_1}{10y_1}x + \frac{a}{y_1}$$

이때 두 접선이 서로 수직이므로

$$x_1 \times \left(-\frac{ax_1}{10y_1}\right) = -1 \quad \therefore ax_1^2 = 10y_1 \quad \dots \dots \text{㉠}$$

또 점 (x_1, y_1)이 포물선 $x^2 = 2y$ 위의 점이므로

$$x_1^2 = 2y_1 \quad \dots \dots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$2ay_1 = 10y_1 \quad \therefore a = 5 \quad (\because y_1 \neq 0) \quad \text{답 } 3$$

0200 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 위의 점 P(x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{16} + \frac{y_1y}{9} = 1$$

이 직선의 x절편, y절편은 각각 $\frac{16}{x_1}, \frac{9}{y_1}$ 이므로

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times \frac{16}{|x_1|} \times \frac{9}{|y_1|} = \frac{72}{|x_1y_1|}$$

이때 점 P(x_1, y_1)이 타원 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{9} = 1$$

$\frac{x_1^2}{16} > 0, \frac{y_1^2}{9} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{9} \geq 2\sqrt{\frac{x_1^2}{16} \times \frac{y_1^2}{9}} \quad \left(\text{단, 등호는 } \frac{x_1^2}{16} = \frac{y_1^2}{9} \text{ 일 때 성립}\right)$$

$$1 \geq \frac{|x_1y_1|}{6} \quad \therefore |x_1y_1| \leq 6$$

따라서 $\frac{72}{|x_1y_1|} \geq \frac{72}{6} = 12$ 이므로 $\triangle OAB$ 의 넓이의 최솟값은 12이다. 답 12

0201 점점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 점점의 방정식은

$$x_1x + 2y_1y = 2$$

이 직선이 점 (-2, 0)을 지나므로

$$-2x_1 = 2 \quad \therefore x_1 = -1$$

또 점 (x_1, y_1)이 타원 위의 점이므로

$$x_1^2 + 2y_1^2 = 2$$

이 식에 $x_1 = -1$ 을 대입하면

$$1 + 2y_1^2 = 2, \quad y_1^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore y_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

즉 $x_1 = -1, y_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x_1 = -1, y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 점점의 방정식은

$$-x - \sqrt{2}y = 2, \quad -x + \sqrt{2}y = 2$$

$$\therefore y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \sqrt{2}, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$$

따라서 직선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$ 가 점 (4, k)를 지나므로

$$k = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4 + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \quad \text{답 } 3$$

0202 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$4x_1x + 3y_1y = 12$$

이 직선이 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$12y_1 = 12 \quad \therefore y_1 = 1$$

또 점 (x_1, y_1) 이 타원 위의 점이므로

$$4x_1^2 + 3y_1^2 = 12$$

이 식에 $y_1 = 1$ 을 대입하면

$$4x_1^2 + 3 = 12, \quad x_1^2 = \frac{9}{4} \quad \therefore x_1 = \pm \frac{3}{2}$$

즉 두 점 P, Q의 좌표는 $\left(-\frac{3}{2}, 1\right), \left(\frac{3}{2}, 1\right)$

한편 타원 $4x^2 + 3y^2 = 12$, 즉 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에서 $\sqrt{4-3} = 1$ 이므로
F(0, -1)

$$\therefore \triangle PFQ = \frac{1}{2} \times \left\{ \frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) \right\} \times \{1 - (-1)\} = 3$$

답 ②

0203 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{4} + \frac{y_1y}{5} = 1$$

이 직선이 점 $(-8, 5)$ 를 지나므로

$$\frac{-8x_1}{4} + \frac{5y_1}{5} = 1 \quad \therefore y_1 = 2x_1 + 1 \quad \dots\dots ㉠$$

또 점 (x_1, y_1) 이 타원 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{5} = 1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$x_1 = -\frac{4}{3}, y_1 = -\frac{5}{3} \quad \text{또는} \quad x_1 = \frac{4}{7}, y_1 = \frac{15}{7}$$

따라서 접선의 방정식은

$$-\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y = 1, \quad \frac{1}{7}x + \frac{3}{7}y = 1$$

$$\therefore y = -x - 3, \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

$$\therefore m_1 + m_2 = -1 + \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3} \quad \text{답 } -\frac{4}{3}$$

0204 쌍곡선 $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{3} = 1$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y = 2x \pm \sqrt{a \times 2^2 - 3} \quad \therefore y = 2x \pm \sqrt{4a - 3}$$

이때 직선 $y = 2x + \sqrt{4a - 3}$ 이 직선 $y = 2x + 3$ 과 일치하므로

$$\sqrt{4a - 3} = 3, \quad 4a - 3 = 9$$

$$\therefore a = 3$$

즉 쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$ 에서 $\sqrt{3+3} = \sqrt{6}$ 이므로 초점의 좌표는

$$(\sqrt{6}, 0), (-\sqrt{6}, 0)$$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$$\sqrt{6} - (-\sqrt{6}) = 2\sqrt{6} \quad \text{답 ④}$$

0205 직선 $y = x + 1$ 에 수직인 직선의 기울기는 -1 이므로 쌍

곡선 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 에 접하고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y = -x \pm \sqrt{4 \times (-1)^2 - 1}$$

$$\therefore y = -x \pm \sqrt{3}$$

따라서 두 직선의 x 절편은 $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$ 이므로 구하는 곱은

$$-\sqrt{3} \times \sqrt{3} = -3 \quad \text{답 } -3$$

0206 쌍곡선 $11x^2 - 4y^2 = 44$, 즉 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{11} = 1$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y = 2x \pm \sqrt{4 \times 2^2 - 11} \quad \therefore y = 2x \pm \sqrt{5} \quad \dots \text{1단계}$$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $y = 2x + \sqrt{5}$ 위의 점

$(0, \sqrt{5})$ 와 직선 $y = 2x - \sqrt{5}$, 즉 $2x - y - \sqrt{5} = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|0 - \sqrt{5} - \sqrt{5}|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 2 \quad \dots \text{2단계}$$

답 2

채점 요소		비율
1단계	접선의 방정식 구하기	60%
2단계	두 직선 사이의 거리 구하기	40%

0207 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 인 직선의 기울기는 $\tan 45^\circ = 1$ 이므로 쌍곡선 $5x^2 - 3y^2 = -15$, 즉

$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = -1$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{5 - 3 \times 1^2} \quad \therefore y = x \pm \sqrt{2}$$

따라서 y 절편이 양수인 직선 $y = x + \sqrt{2}$ 의 x 절편, y 절편은 각각 $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ 이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times |-\sqrt{2}| \times \sqrt{2} = 1 \quad \text{답 1}$$

0208 쌍곡선 $4x^2 - y^2 = 3$ 위의 점 $(1, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4x + y = 3 \quad \therefore y = -4x + 3$$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{4}$ 이므로 기울기가 $\frac{1}{4}$ 이고 점 $(1, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y + 1 = \frac{1}{4}(x - 1) \quad \therefore y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$$

이 직선이 점 $(2, a)$ 를 지나므로

$$a = \frac{1}{4} \times 2 - \frac{5}{4} = -\frac{3}{4} \quad \text{답 ④}$$

0209 점 (k, k) 가 쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = -1$ 위의 점이므로

$$\frac{k^2}{12} - \frac{k^2}{3} = -1, \quad k^2 = 4$$

$$\therefore k = -2 (\because k < 0)$$

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = -1$ 위의 점 $(-2, -2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{-2x}{12} - \frac{-2y}{3} = -1 \quad \therefore y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$$

답 $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$

0210 쌍곡선 $x^2 - 2y^2 = -2$ 위의 점 $(4, 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4x - 2 \times 3y = -2 \quad \therefore 2x - 3y = -1$$

이 직선의 x 절편, y 절편은 각각 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ 이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left| -\frac{1}{2} \right| \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

답 $\frac{1}{12}$

0211 쌍곡선 $ax^2 - by^2 = 8$ 위의 점 $(3, 5)$ 에서의 접선의 방정식은

$$3ax - 5by = 8 \quad \therefore y = \frac{3a}{5b}x - \frac{8}{5b}$$

이 직선의 기울기가 3이므로

$$\frac{3a}{5b} = 3 \quad \therefore a = 5b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 $(3, 5)$ 가 쌍곡선 위의 점이므로

$$9a - 25b = 8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = 2, b = \frac{2}{5}$

$$\therefore a - b = \frac{8}{5}$$

답 $\frac{8}{5}$

0212 쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = -1$ 위의 점 $(3, 4)$ 에서의 접선 l 의 방정식은

$$\frac{3x}{3} - \frac{4y}{4} = -1 \quad \therefore x - y + 1 = 0$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = -1$ 에서 $\sqrt{3+4} = \sqrt{7}$ 이므로 초점의 좌표는

$$(0, \sqrt{7}), (0, -\sqrt{7})$$

점 $(0, \sqrt{7})$ 과 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{|0 - \sqrt{7} + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{2}}$$

또 점 $(0, -\sqrt{7})$ 과 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{|0 + \sqrt{7} + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{7} + 1}{\sqrt{2}}$$

따라서 구하는 곱은

$$\frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{7} + 1}{\sqrt{2}} = 3$$

답 3

0213 쌍곡선 $2x^2 - y^2 = a$ 위의 점 $(b, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2bx + y = a \quad \therefore y = -2bx + a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

쌍곡선 $2x^2 - y^2 = a$, 즉 $\frac{x^2}{\frac{a}{2}} - \frac{y^2}{a} = 1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \sqrt{\frac{a}{2}}x, \text{ 즉 } y = \pm \sqrt{2}x$$

이때 $b > 0$ 이므로 직선 $\textcircled{1}$ 은 직선 $y = \sqrt{2}x$ 와 수직이다.

즉 $-2b \times \sqrt{2} = -1$ 이므로

$$b = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

따라서 점 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -1\right)$ 이 쌍곡선 위의 점이므로

$$a = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{b}{a} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

답 ②

0214 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 8$ 위의 점 $(3, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$3x - y = 8 \quad \therefore y = 3x - 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

쌍곡선 $x^2 - y^2 = 8$, 즉 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm x$$

이때 두 점근선이 서로 수직이므로 직선 $\textcircled{1}$ 과 두 점근선 $y = x, y = -x$ 의 교점을 각각 A, B라 하면 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB}$$

$$3x - 8 = x \text{에서 } x = 4$$

$$\therefore A(4, 4)$$

$$3x - 8 = -x \text{에서 } x = 2$$

$$\therefore B(2, -2)$$

따라서 $\overline{OA} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}, \overline{OB} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$ 이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 8$$

답 8

0215 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 4$ 위의 점 $P(a, b)$ 에서의 접선의 방정식은

$$ax - by = 4 \quad \therefore y = \frac{a}{b}x - \frac{4}{b}$$

이 직선의 기울기는 $\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}$ 의 값과 같으므로

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{4} \quad \therefore a = \frac{5}{4}b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 $P(a, b)$ 는 쌍곡선 위의 점이므로

$$a^2 - b^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = \frac{10}{3}, b = \frac{8}{3} \quad (\because a > 0, b > 0)$$

$$\therefore a + b = 6$$

답 6

0216 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$4x_1x - y_1y = -4$$

이 직선이 점 $(0, \sqrt{3})$ 을 지나므로

$$-\sqrt{3}y_1 = -4 \quad \therefore y_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 쌍곡선 위의 점이므로

$$4x_1^2 - y_1^2 = -4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$4x_1^2 - \frac{16}{3} = -4, \quad x_1^2 = \frac{1}{3} \quad \therefore x_1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, y_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, y_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 이므로

로 접선의 방정식은

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}x - \frac{4\sqrt{3}}{3}y = -4, \quad -\frac{4\sqrt{3}}{3}x - \frac{4\sqrt{3}}{3}y = -4$$

$$\therefore y = x + \sqrt{3}, \quad y = -x + \sqrt{3}$$

즉 $m = \pm 1, n = \sqrt{3}$ 이므로

$$m^2 + n^2 = 4 \quad \text{답 ④}$$

0217 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 2$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$$ax - by = 2$$

이 직선이 점 $(3, 3)$ 을 지나므로

$$3a - 3b = 2 \quad \therefore a - b = \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (a, b) 가 쌍곡선 위의 점이므로

$$a^2 - b^2 = 2 \quad \therefore (a+b)(a-b) = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면 $\frac{2}{3}(a+b) = 2$

$$\therefore a + b = 3 \quad \text{답 ②}$$

0218 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{3} - y_1y = 1$$

이 직선이 점 $P(0, 1)$ 을 지나므로

$$-y_1 = 1 \quad \therefore y_1 = -1$$

또 점 (x_1, y_1) 이 쌍곡선 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{3} - y_1^2 = 1$$

이 식에 $y_1 = -1$ 을 대입하면

$$\frac{x_1^2}{3} - 1 = 1, \quad x_1^2 = 6$$

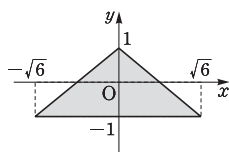
$$\therefore x_1 = \pm\sqrt{6}$$

따라서 두 점 A, B의 좌표는

$(-\sqrt{6}, -1), (\sqrt{6}, -1)$ 이므로

$\triangle PAB$ 의 넓이는

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \{\sqrt{6} - (-\sqrt{6})\} \\ & \times \{1 - (-1)\} \\ & = 2\sqrt{6} \end{aligned}$$



답 2√6

0219 포물선 $y^2 = x$ 위의 점 P와 직선 $y = x + 3$ 사이의 거리가 최소이려면 점 P에서의 접선의 기울기가 1이어야 한다.

이때 포물선 $y^2 = x$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y = x + \frac{1}{4}$$

이 직선이 점 $P(a, b)$ 를 지나야 하므로

$$b = a + \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 $P(a, b)$ 가 포물선 $y^2 = x$ 위의 점이므로

$$b^2 = a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$

$$\therefore ab = \frac{1}{8} \quad \text{답 ⑤}$$

다른 풀이 포물선 $y^2 = x$ 위의 점 $P(a, b)$ 에서의 접선의 방정식은

$$by = \frac{1}{2}(x+a) \quad \therefore y = \frac{1}{2b}x + \frac{a}{2b}$$

이 직선의 기울기가 1이어야 하므로

$$\frac{1}{2b} = 1 \quad \therefore b = \frac{1}{2}$$

이때 점 $P(a, \frac{1}{2})$ 은 포물선 위의 점이므로

$$a = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

0220 쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ 위의 점 P와 직선 $y = \sqrt{2}x - 1$ 사이의 거리가 최소이려면 점 P에서의 접선의 기울기가 $\sqrt{2}$ 이어야 한다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ 에 접하고 기울기가 $\sqrt{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \sqrt{2}x \pm \sqrt{3 \times (\sqrt{2})^2 - 2} \quad \therefore y = \sqrt{2}x \pm 2$$

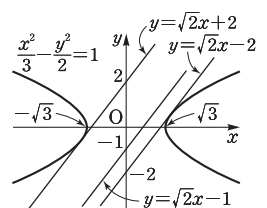
따라서 구하는 최솟값은 직선

$y = \sqrt{2}x - 2$ 위의 점 $(0, -2)$ 와 직선

$y = \sqrt{2}x - 1$, 즉 $\sqrt{2}x - y - 1 = 0$

사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|0 + 2 - 1|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

0221 $\overline{PQ}$ 의 길이가 최소이려면 포물선 $x^2 = 4y$ 위의 점 P에서의 접선과 직선 PQ가 서로 수직이어야 한다.

이때 점 P의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 포물선 $x^2 = 4y$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$x_1x = 2(y + y_1) \quad \therefore y = \frac{x_1}{2}x - y_1$$

이 직선과 직선 PQ가 서로 수직이어야 하므로

$$\frac{x_1}{2} \times \frac{y_1 - 2}{x_1 - 8} = -1, \quad x_1y_1 - 2x_1 = -2x_1 + 16$$

$$\therefore x_1y_1 = 16 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 $P(x_1, y_1)$ 이 포물선 위의 점이므로

$$x_1^2 = 4y_1 \quad \therefore y_1 = \frac{1}{4}x_1^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①, ⑤을 연립하여 풀면

$$x_1 = 4, y_1 = 4$$

따라서 점 P의 좌표가 (4, 4)일 때 $\overline{PQ}$ 의 길이가 최소이므로 구하는 최솟값은

$$\sqrt{(8-4)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{5} \quad \text{답 } 2\sqrt{5}$$

0222 $\triangle PAB$ 의 넓이가 최대하려면 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최대이어야 하므로 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 위의 점 P에서의 접선이 직선 AB와 평행해야 한다.

이때 직선 AB의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2}x - 1$$

타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 에 접하고 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2}x \pm \sqrt{4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x \pm \sqrt{2} \quad \dots \text{1단계}$$

따라서 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값은 직

선 $y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{2}$ 위의

점 $(0, \sqrt{2})$ 와 직선

$$y = -\frac{1}{2}x - 1, \text{ 즉}$$

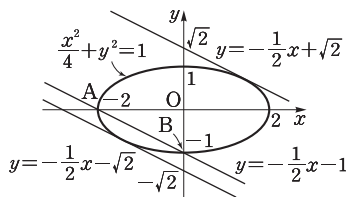
$x + 2y + 2 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|0 + 2\sqrt{2} + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{\sqrt{5}} \quad \dots \text{2단계}$$

이때 $\overline{AB} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ 이므로 $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{2} + 2}{\sqrt{5}} = \sqrt{2} + 1 \quad \dots \text{3단계}$$

답 $\sqrt{2} + 1$



채점 요소	비율
1단계 타원에 접하고 직선 AB와 평행한 직선의 방정식 구하기	50%
2단계 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값 구하기	30%
3단계 $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값 구하기	20%

시험에 꼭 나오는 문제

● 본책 035~037쪽

0223 포물선 $y^2 = kx$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y = x + \frac{k}{4}, \text{ 즉 } x - y + \frac{k}{4} = 0$$

이때 직선 $x - y + \frac{k}{4} = 0$ 과 원점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{\left|\frac{k}{4}\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}, \quad \left|\frac{k}{4}\right| = 4$$

$$\therefore k = 16 \quad (\because k > 0)$$

답 16

0224 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60° 인 직선의 기울기는 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ 이므로 포물선 $y^2 = -4x$ 에 접하고 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \sqrt{3}x + \frac{-1}{\sqrt{3}} \quad \therefore y = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이 직선이 점 $(2, a)$ 를 지나므로

$$a = 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \quad \text{답 } \textcircled{5}$$

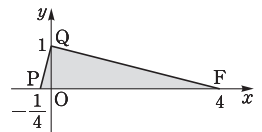
0225 직선 $8x - 2y + 3 = 0$, 즉 $y = 4x + \frac{3}{2}$ 과 평행한 직선의 기울기는 4이므로 포물선 $y^2 = 16x$ 에 접하고 기울기가 4인 직선의 방정식은

$$y = 4x + \frac{4}{4} \quad \therefore y = 4x + 1$$

$$\therefore P\left(-\frac{1}{4}, 0\right), Q(0, 1)$$

이때 $F(4, 0)$ 이므로 $\triangle PQF$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left\{4 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right\} \times 1 = \frac{17}{8}$$



답 $\frac{17}{8}$

0226 포물선 $x^2 = -2y$ 위의 점 $(-4, -8)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-4x = -(y - 8) \quad \therefore y = 4x + 8$$

이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$ 이고, 포물선

$x^2 = -2y$ 의 초점의 좌표는 $(0, -\frac{1}{2})$ 이므로 기울기가 $-\frac{1}{4}$ 이

고 점 $(0, -\frac{1}{2})$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$$

따라서 $m = -\frac{1}{4}$, $n = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$mn = \frac{1}{8} \quad \text{답 } \textcircled{1}$$

0227 포물선 $y^2 = 14x$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은 $by = 7(x + a)$

이때 이 직선이 타원 $\frac{(x+1)^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ 의 넓이를 이등분하려면 타원의 중심 $(-1, 0)$ 을 지나야 하므로

$$0 = 7(-1 + a) \quad \therefore a = 1$$

따라서 점 $(1, b)$ 가 포물선 $y^2=14x$ 위의 점이므로

$$b^2=14$$

$$\therefore a^2+b^2=15$$

답 ②

0228 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$y_1y = -\frac{1}{2}(x+x_1)$$

이 직선이 점 $(4, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -\frac{1}{2}(4+x_1) \quad \therefore x_1 = -4$$

또 점 (x_1, y_1) 이 포물선 위의 점이므로

$$y_1^2 = -x_1 = 4 \quad \therefore y_1 = \pm 2$$

즉 $x_1 = -4, y_1 = -2$ 또는 $x_1 = -4, y_1 = 2$ 이므로 접선의 방정식은

$$-2y = -\frac{1}{2}(x-4), \quad 2y = -\frac{1}{2}(x-4)$$

$$\therefore y = \frac{1}{4}x - 1, \quad y = -\frac{1}{4}x + 1$$

따라서 직선 $y = -\frac{1}{4}x + 1$ 의 y 절편은 1이다.

답 1

0229 직선 $2x - y - 1 = 0$, 즉 $y = 2x - 1$ 에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이므로 타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$ 에 접하고 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2}x \pm \sqrt{3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 6}$$

$$\therefore x + 2y \pm 3\sqrt{3} = 0$$

즉 $a = 2, b = \pm 3\sqrt{3}$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 31$$

답 31

0230 타원 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{k} = 1$ 에 접하고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y = -x \pm \sqrt{6 \times (-1)^2 + k}$$

$$\therefore y = -x \pm \sqrt{6+k}$$

즉 직선 $y = -x + \sqrt{6+k}$ 가 직선 $y = -x + 4$ 와 일치하므로

$$\sqrt{6+k} = 4, \quad 6+k = 16$$

$$\therefore k = 10$$

이때 타원 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{10} = 1$ 에서 $\sqrt{10-6} = 2$ 이므로 초점의 좌표는

$$(0, 2), (0, -2)$$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$$2 - (-2) = 4$$

답 ②

0231 $y^2 = 6x$ 를 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} = 1$ 에 대입하면

$$\frac{x^2}{9} + \frac{x}{2} = 1, \quad 2x^2 + 9x - 18 = 0$$

$$(x+6)(2x-3) = 0 \quad \therefore x = \frac{3}{2} (\because x > 0)$$

$x = \frac{3}{2}$ 을 $y^2 = 6x$ 에 대입하면

$$y^2 = 9 \quad \therefore y = 3 (\because y > 0)$$

따라서 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} = 1$ 위의 점 $P\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{\frac{3}{2}x}{9} + \frac{3y}{12} = 1 \quad \therefore y = -\frac{2}{3}x + 4$$

$$\text{답 } y = -\frac{2}{3}x + 4$$

0232 타원 $\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{4} = 1 (k < 4)$ 의 초점의 좌표는

$$(0, \sqrt{4-k}), (0, -\sqrt{4-k})$$

직선 $y = -2x + 1$ 이 점 $(0, \sqrt{4-k})$ 를 지나므로

$$\sqrt{4-k} = 1, \quad 4-k = 1$$

$$\therefore k = 3$$

따라서 타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{ax}{3} + \frac{by}{4} = 1 \quad \therefore y = -\frac{4a}{3b}x + \frac{4}{b}$$

이 직선이 직선 $y = -2x + 1$ 과 평행하므로

$$-\frac{4a}{3b} = -2 \quad \therefore 2a = 3b \quad \dots\dots ㉠$$

또 점 (a, b) 가 타원 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{4} = 1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = \pm \frac{3}{2}, b = \pm 1$ (복호동순)

$$\therefore ab = \frac{3}{2} \quad \text{답 } \frac{3}{2}$$

0233 점 P의 좌표를 $\left(\frac{1}{n}, y_1\right) (y_1 > 0)$ 이라 하면 타원 C_1 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$\frac{\frac{1}{n}x}{2} + y_1y = 1 \quad \therefore \frac{x}{2n} + y_1y = 1$$

$y = 0$ 을 대입하면 $x = 2n \quad \therefore \alpha = 2n$

또 점 Q의 좌표를 $\left(\frac{1}{n}, y_2\right) (y_2 > 0)$ 라 하면 타원 C_2 위의 점 Q에서의 접선의 방정식은

$$2 \times \frac{1}{n}x + \frac{y_2y}{2} = 1 \quad \therefore \frac{2x}{n} + \frac{y_2y}{2} = 1$$

$y = 0$ 을 대입하면 $x = \frac{n}{2} \quad \therefore \beta = \frac{n}{2}$

따라서 $\alpha - \beta = \frac{3}{2}n$ 이므로 $6 \leq \alpha - \beta \leq 15$ 에서

$$6 \leq \frac{3}{2}n \leq 15 \quad \therefore 4 \leq n \leq 10$$

즉 자연수 n 은 4, 5, ..., 10의 7개이다.

답 ①

0234 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x + 2y_1y = 4$$

이 직선이 점 P(2, 2)를 지나므로

$$2x_1 + 4y_1 = 4 \quad \therefore y_1 = -\frac{1}{2}x_1 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 타원 위의 점이므로

$$x_1^2 + 2y_1^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$x_1 = -\frac{2}{3}, y_1 = \frac{4}{3} \text{ 또는 } x_1 = 2, y_1 = 0$$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}), (2, 0)$ 이므로

$\triangle PAB$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2 + (-\frac{2}{3}) + 2}{3}, \frac{2 + \frac{4}{3} + 0}{3} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{10}{9}, \frac{10}{9} \right) \quad \text{답 ④}$$

0235 중심이 원점이고 점 $(3, 0)$ 을 지나는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{k^2} = 1$ ($k > 0$)이라 하자.

이때 이 쌍곡선의 점근선의 방정식이 $y = \pm \frac{2}{3}x$ 이므로

$$\frac{k}{3} = \frac{2}{3} \quad \therefore k = 2$$

따라서 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

이 쌍곡선에 접하고 기울기가 $-\sqrt{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y = -\sqrt{2}x \pm \sqrt{9 \times (-\sqrt{2})^2 - 4}$$

$$\therefore y = -\sqrt{2}x \pm \sqrt{14} \quad \text{답 } y = -\sqrt{2}x \pm \sqrt{14}$$

0236 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$ 에서 $\sqrt{9+16}=5$ 이므로

$$F(0, 5), F'(0, -5)$$

$$\therefore \overline{FF'} = 5 - (-5) = 10$$

이때 $\triangle PF'F$ 의 둘레의 길이가 30이므로

$$\overline{PF} + \overline{PF'} + \overline{FF'} = 30$$

$$\therefore \overline{PF} + \overline{PF'} = 20 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2 \times 4 = 8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $\overline{PF} = 6, \overline{PF'} = 14$

점 P의 좌표를 (a, b) ($a < 0, b > 0$)라 하면 $\overline{PF} = 6$ 에서

$$\sqrt{a^2 + (b-5)^2} = 6$$

$$\therefore a^2 + (b-5)^2 = 36 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

또 $\overline{PF'} = 14$ 에서 $\sqrt{a^2 + (b+5)^2} = 14$

$$\therefore a^2 + (b+5)^2 = 196 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

③, ④을 연립하여 풀면 $a = -3\sqrt{3}, b = 8$

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$ 위의 점 P($-3\sqrt{3}, 8$)에서의 접선의 방정식은

$$-\frac{3\sqrt{3}x}{9} - \frac{8y}{16} = -1 \quad \therefore y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + 2$$

즉 구하는 접선의 기울기는 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이다. 답 ②

0237 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{4} - \frac{y_1y}{2} = 1$$

이 직선이 점 $(-2, 1)$ 을 지나므로

$$-\frac{x_1}{2} - \frac{y_1}{2} = 1 \quad \therefore x_1 + y_1 = -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 쌍곡선 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{2} = 1 \quad \therefore x_1^2 - 2y_1^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$x_1 = -2, y_1 = 0 \text{ 또는 } x_1 = -6, y_1 = 4$$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $(-2, 0), (-6, 4)$ 이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{(-6+2)^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \quad \text{답 } 4\sqrt{2}$$

0238 쌍곡선 $3x^2 - y^2 = -3$, 즉 $x^2 - \frac{y^2}{3} = -1$ 에 접하고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{3-m^2}$$

이 직선이 점 $(a, 1)$ 을 지나므로

$$1 = am \pm \sqrt{3-m^2}$$

$$\therefore 1 - am = \pm \sqrt{3-m^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$(a^2+1)m^2 - 2am - 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 두 접선이 서로 수직이므로 m 에 대한 이차방정식 ①의 두 실근의 곱은 -1 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{-2}{a^2+1} = -1, \quad a^2 = 1$$

$$\therefore a = 1 \quad (\because a > 0) \quad \text{답 1}$$

0239 포물선 $x^2 + 8y = 0$, 즉 $x^2 = -8y$ 위의 점 $(4, -2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4x = -4(y-2) \quad \therefore y = -x + 2 \quad \dots \text{1단계}$$

이 직선과 평행한 직선의 기울기는 -1 이므로 점 $(-2, 3)$ 을 지나고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y - 3 = -(x + 2) \quad \therefore y = -x + 1 \quad \dots \text{2단계}$$

따라서 구하는 y 절편은 1 이다. ... 3단계

답 1

채점 요소		비율
1단계	점 $(4, -2)$ 에서의 접선의 방정식 구하기	60 %
2단계	접선과 평행하고 점 $(-2, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식 구하기	30 %
3단계	y 절편 구하기	10 %

0240 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{k^2m^2 + 16}$$

이 직선이 점 $(0, 6)$ 을 지나므로

$$6 = \sqrt{k^2m^2 + 16}$$

양변을 제곱하면 $36 = k^2 m^2 + 16$

$$\therefore k^2 m^2 - 20 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots \text{1단계}$$

이때 두 접선의 기울기의 곱이 $-\frac{1}{2}$ 이므로 m 에 대한 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 실근의 곱은 $-\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{-20}{k^2} = -\frac{1}{2}, \quad k^2 = 40$$

$$\therefore |k| = 2\sqrt{10} \quad \dots \text{2단계}$$

$$\text{즉 구하는 장축의 길이는 } 2|k| = 4\sqrt{10} \quad \dots \text{3단계}$$

답 $4\sqrt{10}$

채점 요소	비율
1단계 접선의 기울기를 m 이라 하고 m 에 대한 이차방정식 세우기	40 %
2단계 $ k $ 의 값 구하기	40 %
3단계 장축의 길이 구하기	20 %

0241 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2\sqrt{2}x}{a^2} + \frac{-\sqrt{2}y}{b^2} = 1 \quad \therefore y = \frac{2b^2}{a^2}x - \frac{\sqrt{2}b^2}{2}$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ 위의 점 $P(2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2\sqrt{2}x}{4} - \frac{-\sqrt{2}y}{2} = 1 \quad \therefore y = -x + \sqrt{2}$$

이때 두 직선이 서로 수직이므로

$$\frac{2b^2}{a^2} \times (-1) = -1 \quad \therefore a^2 = 2b^2 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots \text{1단계}$$

한편 점 P 가 타원 위의 점이므로

$$\frac{8}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1 \quad \therefore 2a^2 + 8b^2 = a^2 b^2 \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \dots \text{2단계}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a^2 = 12, b^2 = 6$

$$\therefore a^2 - b^2 = 6 \quad \dots \text{3단계}$$

답 6

채점 요소	비율
1단계 두 접선이 서로 수직임을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	50 %
2단계 점 P 가 타원 위의 점임을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	20 %
3단계 $a^2 - b^2$ 의 값 구하기	30 %

0242 타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 점 P 와 직선 $y = 2x + 5$ 사이의 거리가 최대 또는 최소이려면 점 P 에서의 접선의 기울기가 2이어야 한다.

이때 타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y = 2x \pm \sqrt{3 \times 2^2 + 4} \quad \therefore y = 2x \pm 4 \quad \dots \text{1단계}$$

따라서 점 P 와 직선 $y = 2x + 5$ 사이의 거리의 최댓값은 직선 $y = 2x - 4$ 위의 점 $(0, -4)$ 와 직선 $y = 2x + 5$, 즉 $2x - y + 5 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$M = \frac{|0 + 4 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

또 최솟값은 직선 $y = 2x + 4$ 위의 점

$(0, 4)$ 와 직선 $2x - y + 5 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$m = \frac{|0 - 4 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

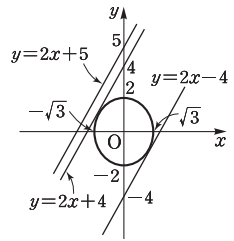
$$\therefore M + m = 2\sqrt{5}$$

$\dots \text{2단계}$

$\dots \text{3단계}$

답 $2\sqrt{5}$

채점 요소	비율
1단계 타원에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식 구하기	40 %
2단계 M, m 의 값 구하기	50 %
3단계 $M + m$ 의 값 구하기	10 %



0243 **전략** 포물선의 정의를 이용하여 점 P 의 좌표를 구한 후 점 P 에서의 접선의 방정식을 구한다.

포물선 $y^2 = \frac{9}{2}x$ 의 초점은 $F(\frac{9}{8}, 0)$ 이고 준선의 방정식은

$$x = -\frac{9}{8} \text{이다.}$$

이때 점 P 의 좌표를 (x_1, y_1) ($x_1 > 0, y_1 > 0$)이라 하면

$$\overline{PF} = \frac{25}{8} \text{이므로 포물선의 정의에 의하여}$$

$$x_1 - \left(-\frac{9}{8}\right) = \frac{25}{8} \quad \therefore x_1 = 2$$

또 점 $P(2, y_1)$ 은 포물선 $y^2 = \frac{9}{2}x$ 위의 점이므로

$$y_1^2 = \frac{9}{2} \times 2 \quad \therefore y_1 = 3 (\because y_1 > 0)$$

따라서 포물선 $y^2 = \frac{9}{2}x$ 위의 점 $P(2, 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$3y = \frac{9}{4}(x+2) \quad \therefore y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$$

이 직선이 점 $F'(-k, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -\frac{3}{4}k + \frac{3}{2} \quad \therefore k = 2$$

즉 $F'(-2, 0)$ 이므로 타원의 장축의 길이는

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = \frac{25}{8} + \sqrt{(2+2)^2 + 3^2} = \frac{65}{8}$$

또 $\overline{FF'} = \frac{9}{8} - (-2) = \frac{25}{8}$ 이므로 타원의 단축의 길이를 $2l$ 이라 하면

$$l^2 = \left(\frac{\overline{PF} + \overline{PF'}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\overline{FF'}}{2}\right)^2 = \left(\frac{65}{16}\right)^2 - \left(\frac{25}{16}\right)^2 = \frac{225}{16}$$

$$\therefore l = \frac{15}{4} (\because l > 0)$$

따라서 타원의 단축의 길이는

$$2l = 2 \times \frac{15}{4} = \frac{15}{2}$$

답 $\frac{15}{2}$

RPM 비법 노트

장축의 길이가 $2a$, 단축의 길이가 $2b$ 이고 두 초점의 좌표가 $(c, 0), (-c, 0)$ 인 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에서 $b^2 = a^2 - c^2$ 이다.
 이때 타원을 평행이동해도 장축과 단축의 길이, 두 초점 사이의 거리는 변하지 않으므로 주어진 타원을 중심이 원점에 오도록 평행이동하여 생각하면

$$l^2 = \left(\frac{\overline{PF} + \overline{PF'}}{2} \right)^2 - \left(\frac{\overline{FF'}}{2} \right)^2$$
 임을 알 수 있다.

0244 [전략] 타원 $x^2 + 4y^2 = 8$ 의 두 꼭짓점을 지나는 직선이 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접함을 이용한다.
 타원 $x^2 + 4y^2 = 8$, 즉 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 의 두 꼭짓점 $(-2\sqrt{2}, 0), (0, \sqrt{2})$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}x + \sqrt{2}, \text{ 즉 } y = \frac{1}{2}x + \sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$
 이때 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{a^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + b^2}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$$
 즉 직선 $y = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ 이 직선 $\textcircled{A}$ 과 일치하므로

$$\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2} = \sqrt{2} \quad \therefore \frac{1}{4}a^2 + b^2 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$
 한편 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 초점의 좌표가 $(b, 0), (-b, 0)$ 이므로

$$b^2 = a^2 - b^2 \quad \therefore a^2 = 2b^2 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$
 $\textcircled{B}, \textcircled{C}$ 을 연립하여 풀면 $a^2 = \frac{8}{3}, b^2 = \frac{4}{3}$
 $\therefore a^2 + b^2 = 4$ 답 4

0245 [전략] 직각삼각형 $PF'F$ 의 넓이와 쌍곡선의 정의를 이용하여 $\overline{PF}, \overline{PF'}$ 의 길이를 구한다.

$\overline{PF'} = k$ ($k > 0$)라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} - k = 2\sqrt{10}$$

$$\therefore \overline{PF} = k + 2\sqrt{10}$$

따라서 직각삼각형 $PF'F$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times k \times (k + 2\sqrt{10}) = \frac{1}{2}k^2 + \sqrt{10}k$$

즉 $\frac{1}{2}k^2 + \sqrt{10}k = 15$ 이므로

$$k^2 + 2\sqrt{10}k - 30 = 0$$

$$(k + 3\sqrt{10})(k - \sqrt{10}) = 0$$

$$\therefore k = \sqrt{10} \quad (\because k > 0)$$

따라서 $\overline{PF'} = \sqrt{10}, \overline{PF} = \sqrt{10} + 2\sqrt{10} = 3\sqrt{10}$ 이므로 직각삼각형 $PF'F$ 에서

$$\overline{FF'} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 + (3\sqrt{10})^2} = 10$$

즉 $F(5, 0), F'(-5, 0)$ 이므로

$$10 + a^2 = 5^2 \quad \therefore a^2 = 15$$

한편 직선 PF' 과 x 축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\triangle PF'F$ 에서

$$\tan \theta = \frac{\overline{PF}}{\overline{PF'}} = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 3$$

즉 직선 PF' 의 기울기는 3이므로 직선 PF' 과 평행한 직선의 기울기도 3이다.

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{15} = 1$ 에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$$y = 3x \pm \sqrt{10 \times 3^2 - 15}$$

$$\therefore y = 3x \pm 5\sqrt{3}$$

즉 $Q_1\left(-\frac{5\sqrt{3}}{3}, 0\right), Q_2\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ 이므로

$$\overline{Q_1Q_2} = \frac{5\sqrt{3}}{3} - \left(-\frac{5\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{10\sqrt{3}}{3} \quad \text{답 } \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

03 공간도형

교과서 문제 정복하기

본책 041쪽, 043쪽

0246 5개의 꼭짓점으로 만들 수 있는 서로 다른 평면은 평면 BCDE, 평면 ABC, 평면 ACD, 평면 ADE, 평면 ABE, 평면 ABD, 평면 ACE 의 7개이다. 답 7

0247 답 모서리 AD, 모서리 AE, 모서리 BC, 모서리 BF

0248 답 모서리 DC, 모서리 EF, 모서리 HG

0249 답 모서리 DH, 모서리 CG, 모서리 EH, 모서리 FG

0250 답 면 ABCD, 면 AEFB

0251 답 면 AEHD, 면 BFGC

0252 답 면 DHGC, 면 EFGH

0253 답 면 ABCD, 면 BFGC, 면 EFGH, 면 AEHD

0254 답 면 DHGC

0255 답 면 ACFD, 면 ABED, 면 BCFE

0256 답 면 DEF

0257 $\overline{BE} \parallel \overline{CF}$ 이므로 직선 AC와 직선 BE가 이루는 각의 크기는 직선 AC와 직선 CF가 이루는 각의 크기와 같다. 이때 $\angle ACF = 90^\circ$ 이므로 직선 AC와 직선 BE가 이루는 각의 크기는 90° 이다. 답 90°

0258 $\overline{DF} \parallel \overline{AC}$ 이므로 직선 BC와 직선 DF가 이루는 각의 크기는 직선 BC와 직선 AC가 이루는 각의 크기와 같다. 이때 삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 인 직각이등변삼각형이므로 $\angle ACB = 45^\circ$ 따라서 직선 BC와 직선 DF가 이루는 각의 크기는 45° 이다. 답 45°

0259 $\overline{AD} \perp \overline{AB}$, $\overline{AD} \perp \overline{AE}$ 이므로 $\overline{AD} \perp$ (면 AEFB)
또 $\overline{AD} \perp \overline{DC}$, $\overline{AD} \perp \overline{DH}$ 이므로 $\overline{AD} \perp$ (면 DHGC) 답 면 AEFB, 면 DHGC

036 정답 및 풀이

0260 답 (가) $\overline{DM}$ (나) AMD

0261 답 (가) $\overline{PO}$ (나) $\overline{OH}$ (다) $\overline{PH}$

0262 답 (가) l (나) n

0263 답 점 A

0264 답 선분 CH

0265 답 삼각형 DHC

0266 답 선분 CF

0267 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$ 답 2

0268 $5\sqrt{3} = 10 \cos \theta$ 에서 $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
이때 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ 이므로 $\theta = 30^\circ$ 답 30°

0269 $15 = S \cos 30^\circ$ 에서 $15 = S \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\therefore S = 10\sqrt{3}$ 답 $10\sqrt{3}$

0270 $6 = 6\sqrt{2} \cos \theta$ 에서 $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$
이때 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ 이므로 $\theta = 45^\circ$ 답 45°

0271 평면 α 위에 있는 정사각형의 넓이는 $4^2 = 16$
따라서 구하는 정사영의 넓이는 $16 \cos 60^\circ = 16 \times \frac{1}{2} = 8$ 답 8

유형 익히기

• 본책 044~052쪽

0272 (i) 두 직선 BD, DF로 만들 수 있는 평면은 평면 BDF 의 1개이다.
(ii) 네 꼭짓점 A, C, E, G로 만들 수 있는 평면은 평면 AEGC 의 1개이다.
(iii) 직선 BD와 점 A, C, E, G로 만들 수 있는 서로 다른 평면은 평면 ABCD, 평면 BDE, 평면 BDG의 3개이다.
(iv) 직선 DF와 점 A, C, E, G로 만들 수 있는 서로 다른 평면은 평면 AFGD, 평면 DEFC의 2개이다.
이상에서 만들 수 있는 서로 다른 평면의 개수는 $1 + 1 + 3 + 2 = 7$ 답 7

0273 (i) 세 점 B, D, E로 만들 수 있는 평면은 평면 BCDE 의 1개이다.
(ii) 직선 AC와 점 B, D, E로 만들 수 있는 서로 다른 평면은 평면 ABC, 평면 ACD, 평면 AEC의 3개이다.
(i), (ii)에서 만들 수 있는 서로 다른 평면의 개수는 $1 + 3 = 4$ 답 4

0274 ⑤ 직선 AE와 직선 BC는 꼬인 위치에 있으므로 한 평면을 결정하지 않는다.

답 ⑤

0275 서로 다른 여섯 개의 점을 각각 A, B, C, D, E, F라 하면 이 여섯 개의 점으로 만들 수 있는 서로 다른 평면은
 평면 ABC, 평면 ABD, 평면 ABE, 평면 ABF,
 평면 ACD, 평면 ACE, 평면 ACF, 평면 ADE,
 평면 ADF, 평면 AEF, 평면 BCD, 평면 BCE,
 평면 BCF, 평면 BDE, 평면 BDF, 평면 BEF,
 평면 CDE, 평면 CDF, 평면 CEF, 평면 DEF
 의 20개이다.

답 20

다른 풀이 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 한 평면을 결정하므로 구하는 평면의 개수는 6개의 점에서 3개를 택하는 조합의 수와 같다.

$$\therefore {}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

0276 ④ 평면 DHIE와 평행한 모서리는 $\overline{AB}$, $\overline{CF}$, $\overline{GJ}$, $\overline{CG}$, $\overline{FJ}$ 의 5개이다.

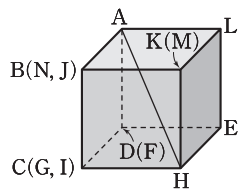
⑤ 직선 AD와 꼬인 위치에 있는 모서리는 $\overline{CF}$, $\overline{EF}$, $\overline{BF}$, $\overline{GJ}$, $\overline{HI}$, $\overline{EI}$, $\overline{FJ}$, $\overline{JI}$ 의 8개이다.

답 ⑤

0277 ㄱ. 직선 DF와 평행한 모서리는 $\overline{AC}$ 의 1개이다. (참)
 ㄴ. 직선 DE와 꼬인 위치에 있는 모서리는 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{CF}$ 의 3개이다. (참)
 ㄷ. 평면 ABC와 평행한 면은 면 DEF의 1개이다. (참)
 이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0278 주어진 전개도를 이용하여 만든 정육면체는 오른쪽 그림과 같으므로 $\overline{AH}$ 와 꼬인 위치에 있는 모서리는 $\overline{BK}$, $\overline{KL}$, $\overline{BC}$, $\overline{LE}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ 의 6개이다.



답 ⑤

0279 직선 AH와 꼬인 위치에 있는 모서리는 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{IJ}$, $\overline{JK}$, $\overline{KL}$, $\overline{LG}$, $\overline{CI}$, $\overline{DJ}$, $\overline{EK}$, $\overline{FL}$ 의 12개이므로 $a=12$
 직선 AH와 평행한 면은 면 EKJD의 1개이므로 $b=1$
 $\therefore a+b=13$

... 1단계

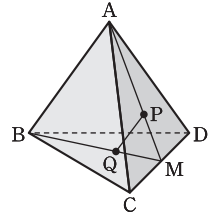
... 2단계

... 3단계

답 13

채점 요소	비율
1단계 a의 값 구하기	70 %
2단계 b의 값 구하기	20 %
3단계 a+b의 값 구하기	10 %

0280 ㄱ. 두 점 P, Q는 각각 두 삼각형 ACD, BCD의 무게중심이므로 오른쪽 그림과 같이 $\overline{CD}$ 의 중점을 M이라 하면



$$\overline{AP} : \overline{PM} = 2 : 1,$$

$$\overline{BQ} : \overline{QM} = 2 : 1$$

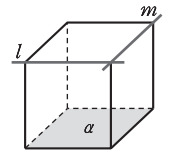
즉 $\overline{AP} : \overline{PM} = \overline{BQ} : \overline{QM}$ 이므로

$$\overline{AB} \parallel \overline{PQ} \text{ (거짓)}$$

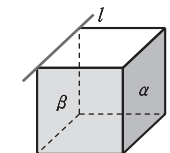
ㄴ. 직선 BD와 직선 PQ는 만나지도 않고 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다. (참)
 ㄷ. 직선 PQ는 평면 ABD에 포함되지도 않고 평면 ABD와 만나지도 않으므로 평행하다. (참)
 이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

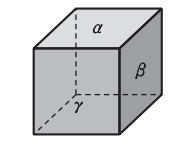
0281 ㄱ. [반례] 오른쪽 그림에서 $l \parallel \alpha$ 이고 $m \parallel \alpha$ 이지만 두 직선 l, m 은 한 점에서 만난다. (거짓)



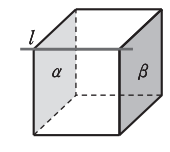
ㄴ. 오른쪽 그림과 같이 $l \parallel \alpha$ 이고 $l \perp \beta$ 이면 $\alpha \perp \beta$ 이다. (참)



ㄷ. [반례] 오른쪽 그림에서 $\alpha \perp \beta$ 이고 $\alpha \perp \gamma$ 이지만 두 평면 β, γ 는 만난다. (거짓)



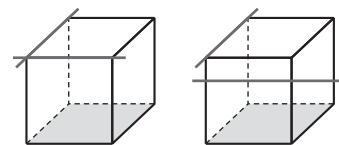
ㄹ. 오른쪽 그림과 같이 $l \perp \alpha$ 이고 $l \perp \beta$ 이면 $\alpha \parallel \beta$ 이다. (참)



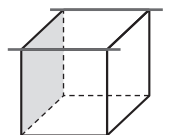
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄹ

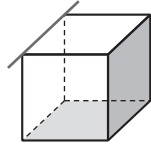
0282 ① 다음 그림과 같이 한 평면에 평행한 서로 다른 두 직선이 한 점에서 만나거나 꼬인 위치에 있을 수 있다.



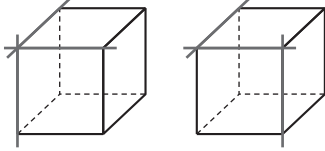
② 오른쪽 그림과 같이 한 평면에 수직인 서로 다른 두 직선은 서로 평행하다.



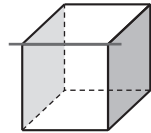
- ③ 오른쪽 그림과 같이 한 직선에 평행한 서로 다른 두 평면은 만날 수도 있다.



- ④ 다음 그림과 같이 한 직선에 수직인 서로 다른 두 직선이 한 점에서 만나거나 꼬인 위치에 있을 수 있다.

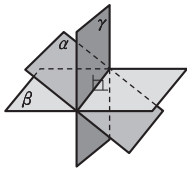


- ⑤ 오른쪽 그림과 같이 한 직선에 수직인 서로 다른 두 평면은 서로 평행하다.

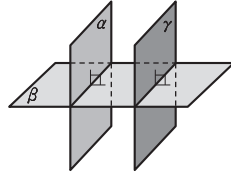


답 ⑤

0283 [그림 1]과 같이 세 평면 α, β, γ 가 한 직선을 공유하거나 [그림 2]와 같이 두 평면 α, β 가 수직일 때, 나누어지는 공간의 개수가 최소이고 그 개수는 6이다.



[그림 1]



[그림 2]

답 ④

0284 $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ 이므로 직선 AG와 직선 BC가 이루는 각의 크기는 직선 AG와 직선 AD가 이루는 각의 크기와 같다.

$$\therefore \angle DAG = \theta$$

이때 $\overline{AG} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$ 이고 삼각형 AGD는 직각삼각형이므로

$$\cos \theta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AG}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

답 ①

참고 $\overline{AD} \perp$ (평면 DHGC)이므로 $\overline{AD} \perp \overline{GD}$

0285 $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ 이므로 직선 AD와 직선 BE가 이루는 각의 크기는 직선 AD와 직선 CD가 이루는 각의 크기와 같다.

$$\therefore \angle ADC = \theta$$

이때 삼각형 ACD는 정삼각형이므로 $\angle ADC = 60^\circ$

$$\therefore \sin \theta = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

0286 $\overline{DE} \parallel \overline{CF}$ 이므로 직선 DE와 직선 HF가 이루는 각의 크기는 직선 CF와 직선 HF가 이루는 각의 크기와 같다.

이때 삼각형 CHF는 정삼각형이므로

$$\angle CFH = 60^\circ$$

따라서 직선 DE와 직선 HF가 이루는 각의 크기는 60° 이다.

답 ③

0287 ① $\overline{EH} \parallel \overline{AD}$ 이므로 직선 AB와 직선 EH가 이루는 각의 크기는 직선 AB와 직선 AD가 이루는 각의 크기와 같다.

$$\therefore \angle BAD = \theta$$

$$\text{이때 } \angle BAD = 90^\circ \text{이므로 } \cos \theta = \cos 90^\circ = 0$$

② $\overline{CG} \parallel \overline{BF}$ 이므로 직선 AB와 직선 CG가 이루는 각의 크기는 직선 AB와 직선 BF가 이루는 각의 크기와 같다.

$$\therefore \angle ABF = \theta$$

$$\text{이때 } \angle ABF = 90^\circ \text{이므로 } \cos \theta = \cos 90^\circ = 0$$

③ $\overline{EG} \parallel \overline{AC}$ 이므로 직선 AB와 직선 EG가 이루는 각의 크기는 직선 AB와 직선 AC가 이루는 각의 크기와 같다.

$$\therefore \angle CAB = \theta$$

이때 삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 인 직각이등변삼각형이므로

$$\angle CAB = 45^\circ$$

$$\therefore \cos \theta = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

④ $\overline{AB} \perp$ (평면 AEHD)이므로

$$\overline{AB} \perp \overline{AH}$$

즉 삼각형 AHB는 직각삼각형이고 $\angle ABH = \theta$ 이므로

$$\overline{AB} = a \text{라 하면}$$

$$\cos \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BH}} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

⑤ $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ 이므로 직선 AB와 직선 DE가 이루는 각의 크기는 직선 EF와 직선 DE가 이루는 각의 크기와 같다.

$$\therefore \angle DEF = \theta$$

이때 $\overline{EF} \perp$ (평면 AEHD)이므로

$$\overline{EF} \perp \overline{DE}$$

$$\text{즉 } \theta = 90^\circ \text{이므로 } \cos \theta = \cos 90^\circ = 0$$

답 ③

0288 오른쪽 그림과 같이 합동인 두 정육면체를 이어 붙여 직육면체를 만들면

$\overline{CF} \parallel \overline{GI}$ 이므로 직선 AG와 직선 CF가 이루는 각의 크기는 직선 AG와 직선 GI가 이루는 각의 크기와 같다.

$$\therefore \angle AGI = \theta$$

이때 정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

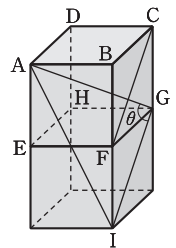
$$\overline{GI} = \sqrt{2}a, \overline{AG} = \sqrt{3}a, \overline{AI} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}a$$

$$\text{이므로 } \overline{AI}^2 = \overline{GI}^2 + \overline{AG}^2$$

즉 삼각형 AIG는 $\angle AGI = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\cos \theta = \cos 90^\circ = 0$$

답 ①



0289 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}$ 의 중점을 L이라 하면 삼각형 ABD에서

$$\overline{ML} \parallel \overline{BD}, \overline{ML} = \frac{1}{2} \overline{BD}$$

또 삼각형 ACD에서

$$\overline{LN} \parallel \overline{AC}, \overline{LN} = \frac{1}{2} \overline{AC}$$

따라서 직선 MN과 직선 AC가 이루는 각의 크기는 직선 MN과 직선 LN이 이루는 각의 크기와 같다.

이때 $\overline{AC} = \overline{BD}$, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 이므로

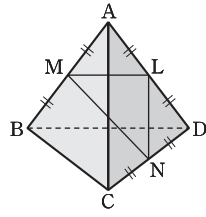
$$\overline{ML} = \overline{LN}, \overline{ML} \perp \overline{LN}$$

즉 삼각형 LMN은 직각이등변삼각형이므로

$$\angle LNM = 45^\circ$$

따라서 직선 MN과 직선 AC가 이루는 각의 크기는 45° 이다.

답 45°



0290 $\overline{PH} \perp \alpha$, $\overline{HQ} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{PQ} \perp \overline{AB}$$

직각삼각형 PQH에서

$$\overline{PQ} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2} = 3\sqrt{2}$$

따라서 직각삼각형 PAQ에서

$$\overline{AP} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = 6$$

답 6

0291 $\overline{AB} \perp \alpha$, $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{AC} \perp \overline{CD}$$

... 1단계

직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AC} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

또 직각삼각형 BCD에서

$$\overline{CD} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

... 2단계

$$\therefore \triangle ACD = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$$

... 3단계

답 10

0292 오른쪽 그림과 같이 점 P에서

$\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

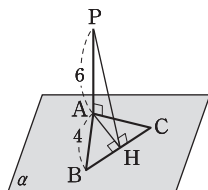
$$\overline{PA} \perp \alpha, \overline{PH} \perp \overline{BC}$$

이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{AH} \perp \overline{BC}$$

이때 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$$\overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$



따라서 직각삼각형 PAH에서

$$\overline{PH} = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3}$$

즉 점 P와 직선 BC 사이의 거리는 $4\sqrt{3}$ 이다.

답 $4\sqrt{3}$

0293 $\overline{DH} \perp$ (평면 EFGH), $\overline{DI} \perp \overline{EG}$ 이므로 삼수선 정리에

의하여 $\overline{HI} \perp \overline{EG}$

이때 직각삼각형 HEG에서

$$\overline{EG} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

이고 $\frac{1}{2} \times \overline{EH} \times \overline{HG} = \frac{1}{2} \times \overline{EG} \times \overline{HI}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \overline{HI} \quad \therefore \overline{HI} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

따라서 직각삼각형 DHI에서

$$\overline{DI} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

답 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

0294 $\overline{CO} \perp \overline{OA}$, $\overline{CO} \perp \overline{OB}$ 이므로 $\overline{CO} \perp$ (평면 OAB)

따라서 $\overline{CO} \perp$ (평면 OAB), $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{OH} \perp \overline{AB}$$

이때 직각삼각형 OAB에서

$$\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

이고 $\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OH}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{1}{2} \times 5 \times \overline{OH} \quad \therefore \overline{OH} = \frac{12}{5}$$

따라서 직각삼각형 COH에서

$$\overline{CH} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{13}{5}$$

답 ①

0295 $\overline{AE} \perp$ (평면 ABCD),

$\overline{AM} \perp \overline{BM}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{EM} \perp \overline{BM}$$

이때 주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

$$\overline{BE} = \sqrt{2}a, \overline{BM} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

따라서 직각삼각형 MEB에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{BM}}{\overline{BE}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

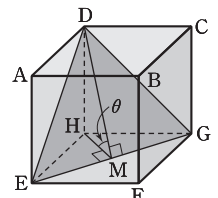
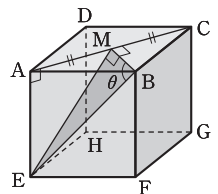
0296 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 선

분 EG에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$$\overline{DH} \perp$$
 (평면 EFGH), $\overline{DM} \perp \overline{EG}$

이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{HM} \perp \overline{EG}$$



즉 평면 EFGH와 평면 DEG가 이루는 각의 크기는 $\overline{DM}$ 과 $\overline{HM}$ 이 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\angle DMH = \theta$$

이때 정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

$$\overline{HM} = \frac{1}{2} \overline{HF} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

이므로 직각삼각형 DHM에서

$$\overline{DM} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{HM}}{\overline{DM}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{6}}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{3}}{3}$$

0297 $\overline{FG} \perp \overline{AF}$, $\overline{FG} \perp \overline{EF}$ 이므로 평면 AFGD와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기는 $\overline{AF}$ 와 $\overline{EF}$ 가 이루는 각의 크기와 같다.

즉 평면 AFGD와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\angle AFE = \theta$$

이때 직각삼각형 AEF에서 $\overline{AF} = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2} = 10$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\overline{EF}}{\overline{AF}} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \theta = 30^\circ$$

따라서 평면 AFGD와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기는 30° 이다. 답 30°

0298 오른쪽 그림과 같은 정사면체에 서 $\overline{BC}$ 의 중점을 M이라 하면

$$\overline{AM} \perp \overline{BC}, \overline{DM} \perp \overline{BC}$$

따라서 정사면체의 두 면이 이루는 각의 크기는 $\overline{AM}$ 과 $\overline{DM}$ 이 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\angle AMD = \theta$$

한편 점 A에서 삼각형 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 $\triangle BCD$ 의 무게중심이므로 점 H는 $\overline{DM}$ 위에 있고

$$\overline{MH} = \frac{1}{3} \overline{DM} = \frac{1}{3} \overline{AM}$$

따라서 직각삼각형 AMH에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{MH}}{\overline{AM}} = \frac{1}{3} \quad \text{답 } \frac{1}{3}$$

RPM비법노트

점 A에서 삼각형 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} \perp \overline{BH}, \overline{AH} \perp \overline{CH}, \overline{AH} \perp \overline{DH}$$

따라서 직각삼각형 AHB, AHC, AHD에서

$$\triangle AHB \cong \triangle AHC \cong \triangle AHD \quad (\text{RHS 합동})$$

즉 $\overline{BH} = \overline{CH} = \overline{DH}$ 이므로 점 H는 삼각형 BCD의 외심이다.

이때 삼각형 BCD는 정삼각형이므로 점 H는 삼각형 BCD의 무게중심이다.

따라서 정사면체의 한 꼭짓점에서 밑면에 내린 수선의 발은 밑면의 무게중심이다.

0299 $\overline{AO} \perp \alpha$, $\overline{AH} \perp l$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{OH} \perp l$$

... 1단계

따라서 점 A와 직선 l 로 결정되는 평면이 평면 α 와 이루는 각을 θ 라 하면

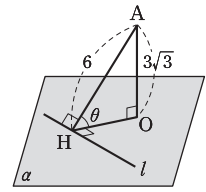
$$\angle AHO = \theta$$

이때 직각삼각형 AHO에서

$$\sin \theta = \frac{\overline{AO}}{\overline{AH}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

따라서 구하는 각의 크기는 60° 이다. 답 60°



	채점 요소	비율
1단계	$\overline{OH} \perp l$ 임을 알기	40 %
2단계	두 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하고 $\sin \theta$ 의 값 구하기	40 %
3단계	두 평면이 이루는 각의 크기 구하기	20 %

0300 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H라 하고, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$$\overline{AH} \perp (\text{평면 BCDE}), \overline{AM} \perp \overline{BC}$$

이므로 삼수선 정리에 의하여 $\overline{HM} \perp \overline{BC}$

따라서 평면 ABC와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기는 $\overline{AM}$ 과 $\overline{HM}$ 이 이루는 각의 크기와 같으므로

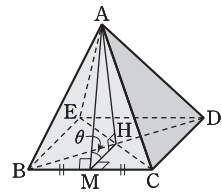
$$\angle AMH = \theta$$

이때 사각형의 한 모서리의 길이를 $2a$ 라 하면 정삼각형 ABC에서

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a = \sqrt{3}a$$

이므로 직각삼각형 AMH에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{MH}}{\overline{AM}} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{답 } \frac{\sqrt{3}}{3}$$



0301 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$ 의 중점을 M이라 하면 두 삼각형 ABC와 DBC는 모두 이등변삼각형이므로

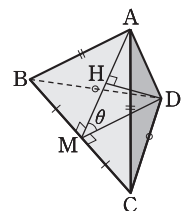
$$\overline{AM} \perp \overline{BC}, \overline{DM} \perp \overline{BC}$$

따라서 평면 ABC와 평면 BCD가 이루는 각의 크기는 $\overline{AM}$ 과 $\overline{DM}$ 이 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\angle AMD = \theta$$

이때 $\overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 4$ 이므로 직각삼각형 ABM에서

$$\overline{AM} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$$



또 직각삼각형 DBM에서 $\overline{DM} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$
 즉 삼각형 AMD는 $\overline{AD} = \overline{DM}$ 인 이등변삼각형이므로 점 D에
 서 $\overline{AM}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{MH} = \frac{1}{2} \overline{AM} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{MH}}{\overline{DM}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

답 ④

0302 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 DHFB에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$$\angle AFM = \theta$$

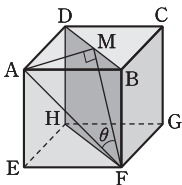
이때 점 M은 $\overline{BD}$ 의 중점이므로 정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

$$\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

또 $\overline{AF} = \sqrt{2}a$ 이므로 직각삼각형 AFM에서

$$\sin \theta = \frac{\overline{AM}}{\overline{AF}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{2}$$

답 ②



0303 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하고,
 $\overline{BH}$ 의 연장선과 $\overline{CD}$ 의 교점을 M이라 하면 $\angle ABH = \theta$

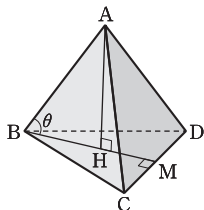
점 H는 정삼각형 BCD의 무게중심이므로 정사면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

$$\overline{AB} = a, \overline{BH} = \frac{2}{3} \overline{BM} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

따라서 직각삼각형 ABH에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$



0304 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H, 직선 AB와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\angle ABH = \theta$$

이때 점 H는 정사각형 BCDE의 두 대각선의 교점이므로 정사면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

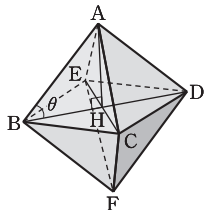
$$\overline{AB} = a, \overline{BH} = \frac{1}{2} \overline{BD} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

따라서 직각삼각형 ABH에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \theta = 45^\circ$$

즉 직선 AB와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기는 45° 이다.

답 45°



0305 오른쪽 그림과 같이 점 G에서 평면 DEF에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\angle GFH = \theta$$

정삼각형 DEF에서 점 H는 $\overline{DE}$ 의 중점이므로

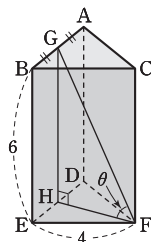
$$\overline{FH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

따라서 직각삼각형 GHF에서

$$\overline{GF} = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{FH}}{\overline{GF}} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$



0306 $\overline{DH} \perp$ (평면 EFGH),

$\overline{DI} \perp \overline{MG}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{HI} \perp \overline{MG}$$

$$\therefore \angle DIH = \theta$$

이때 직각삼각형 MFG에서

$$\overline{MG} = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$$

이고 삼각형 HMG에서 $\frac{1}{2} \times \overline{MG} \times \overline{HI} = \frac{1}{2} \times \overline{HG} \times \overline{GF}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 5\sqrt{5} \times \overline{HI} = \frac{1}{2} \times 10 \times 10$$

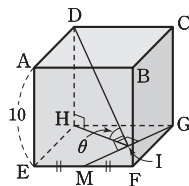
$$\therefore \overline{HI} = 4\sqrt{5}$$

따라서 직각삼각형 DHI에서

$$\overline{DI} = \sqrt{10^2 + (4\sqrt{5})^2} = 6\sqrt{5}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{HI}}{\overline{DI}} = \frac{4\sqrt{5}}{6\sqrt{5}} = \frac{2}{3}$$

답 ③



0307 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 평면 AFC에 내린 수선의 발을 P라 하면

$$\angle BAP = \theta$$

한편 사면체 B-AFC의 부피를 V 라 하면

$$V = \frac{1}{3} \triangle BFC \times \overline{AB}$$

$$= \frac{1}{3} \triangle AFC \times \overline{BP}$$

이때 정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면 삼각형 AFC는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}a$ 인 정삼각형이므로

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} a^2 \times a = \frac{1}{3} \times \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2}a)^2 \right\} \times \overline{BP}$$

$$\therefore \overline{BP} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

따라서 직각삼각형 APB에서

$$\sin \theta = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

다른 풀이 세 삼각형 BAP, BCP, BFP에서

$$\triangle BAP \cong \triangle BCP \cong \triangle BFP \text{ (RHS 합동)}$$

즉 $\overline{PA} = \overline{PC} = \overline{PF}$ 이므로 점 P는 정삼각형 AFC의 외심이다.

이때 정삼각형은 외심과 무게중심이 일치하므로 점 P가 정삼각형 AFC의 무게중심이다.

따라서 정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

$$\overline{AP} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

이므로 직각삼각형 APB에서

$$\overline{BP} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

0308 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영은 선분 A'B'이므로 직선 l 과 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$ 에서

$$\sqrt{3} = 2 \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

답 30°

0309 타원의 장축의 밑면을 포함한 평면 위로의 정사영은 밑면인 원의 지름이다.

따라서 타원의 장축의 길이를 l 이라 하면

$$l \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}, \quad l \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore l = 4$$

답 4

0310 삼각형 AND는 $\overline{AN} = \overline{ND}$ 인

이등변삼각형이므로

$$\overline{NM} \perp \overline{AD}$$

이때

$$\overline{ND} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3},$$

$$\overline{MD} = \frac{1}{2} \overline{AD} = 1$$

이므로 직각삼각형 MND에서

$$\overline{MN} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2}$$

선분 MN과 평면 BCD가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\angle MND = \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{MN}}{\overline{ND}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 선분 MN의 평면 BCD 위로의 정사영의 길이는

$$\overline{MN} \cos \theta = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

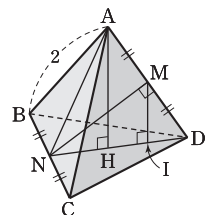
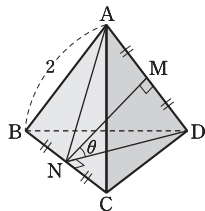
답 ⑤

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, M에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면 선분 MN의 평면 BCD 위로의 정사영은 선분 IN이다.

직각삼각형 AHD에서 $\overline{AM} = \overline{MD}$,

$\overline{AH} \parallel \overline{MI}$ 이므로

$$\overline{HI} = \overline{ID}$$



이때 점 H는 정삼각형 BCD의 무게중심이고 구하는 길이는

$$\begin{aligned} \overline{IN} &= \overline{ND} - \overline{ID} = \overline{ND} - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \overline{ND} = \frac{2}{3} \overline{ND} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

0311 삼각형 AB'C의 평면 ABC 위로의 정사영은 삼각형 ABC이므로 $\triangle ABC = \triangle AB'C \times \cos 30^\circ$ 에서

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \triangle AB'C \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \triangle AB'C = 2$$

답 2

0312 원기둥의 밑면을 포함한 평면 위로의 타원의 정사영은 원기둥의 밑면이다.

이때 원기둥의 밑넓이는 $\pi \times (3\sqrt{2})^2 = 18\pi$

따라서 구하는 단면의 넓이를 S 라 하면

$$18\pi = S \cos 60^\circ, \quad 18\pi = S \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore S = 36\pi$$

답 ③

0313 밑면과 45° 의 각을 이루는 평

면으로 자른 단면은 원이고 오른쪽 그

림과 같이 단면인 원의 지름을 $\overline{AC}$ 라

하면 삼각형 AOC는 $\overline{OA} = \overline{OC} = 8$

인 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AC} = 8\sqrt{2}$

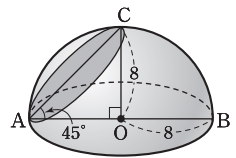
따라서 단면인 원의 넓이는

$$\pi \times (4\sqrt{2})^2 = 32\pi$$

이므로 구하는 정사영의 넓이는

$$32\pi \times \cos 45^\circ = 32\pi \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 16\sqrt{2}\pi$$

답 16√2π



0314 삼각형 DEB의 평면 EFGH 위로의 정사영은 삼각형 HEF이므로

$$\cos \theta = \frac{\triangle HEF}{\triangle DEB}$$

이때 정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

$$\triangle HEF = \frac{1}{2} \times a \times a = \frac{1}{2}a^2$$

또 삼각형 DEB는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}a$ 인 정삼각형이므로

$$\triangle DEB = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2}a)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ③

0315 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A

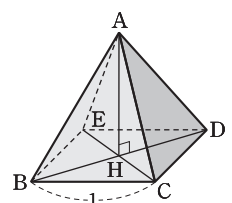
에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을

H라 하면 삼각형 ABC의 평면

BCDE 위로의 정사영은 삼각형 HBC

이므로

$$\cos \theta = \frac{\triangle HBC}{\triangle ABC}$$



이때 점 H는 사각형 BCDE의 두 대각선의 교점이므로

$$\triangle HBC = \frac{1}{4} \square BCDE = \frac{1}{4} \times 1 \times 1 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

답 1/8

0316 삼각형 ABD의 평면 BCD 위로의 정사영은 삼각형 A'BD이므로

$$\cos \theta = \frac{\triangle A'BD}{\triangle ABD}$$

이때 $\overline{CA'} : \overline{A'D} = 16 : 9$ 이므로

$$\triangle A'BC : \triangle A'BD = 16 : 9$$

따라서 $\triangle A'BD = \frac{9}{25} \triangle BCD = \frac{9}{25} \triangle ABD$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{9}{25}$$

답 9/25

0317 평면 BFGC와 평면 MFGN이 이루는 각의 크기를 θ 라 하고 점 M에서 $\overline{BF}$ 에 내린 수선의 발을 M'이라 하면

$$\angle MFM' = \theta$$

이때

$$\overline{M'F} = \frac{1}{2} \overline{BF} = 5, \overline{MF} = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$$

$$\text{이므로 } \cos \theta = \frac{\overline{M'F}}{\overline{MF}} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

따라서 사각형 BFGC의 평면 MFGN 위로의 정사영의 넓이는

$$\square BFGC \cos \theta = 10 \times 10 \times \frac{\sqrt{5}}{5} = 20\sqrt{5}$$

답 20√5

0318 오른쪽 그림과 같이 밑면의 지름의 양 끝 점을 각각 A, B라 하고 수면의 장축의 양 끝 점 중 B가 아닌 점을 C라 하면

$$\overline{BC} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ (cm)}$$

이때 수면과 밑면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

한편 원기둥의 밑면을 포함한 평면 위로의 수면의 정사영은 원기둥의 밑면인 원이므로 수면의 넓이를 $S \text{ cm}^2$ 라 하면

$$S \cos \theta = \pi \times 6^2, \quad S \times \frac{3}{5} = 36\pi \quad \therefore S = 60\pi$$

따라서 수면의 넓이는 $60\pi \text{ cm}^2$ 이다.

답 ③

0319 두 평면 ABC, BCD가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 삼각형 ABC의 평면 BCD 위로의 정사영이 삼각형 GBC이므로

$$\cos \theta = \frac{\triangle GBC}{\triangle ABC}$$

이때 $\triangle GBC = \frac{1}{3} \triangle BCD = \frac{1}{3} \triangle ABC$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{1}{3} \quad \dots \text{1단계}$$

따라서 삼각형 GBC의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는

$$\triangle GBC \cos \theta = \left(\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 \right) \times \frac{1}{3} = \sqrt{3} \quad \dots \text{2단계}$$

답 √3

채점 요소	비율
1단계 평면 ABC와 평면 BCD가 이루는 각의 크기를 θ 라 하고 $\cos \theta$ 의 값 구하기	60 %
2단계 정사영의 넓이 구하기	40 %

0320 $\overline{GC} \perp$ (평면 ABCD)이므로

$$\overline{BD} \perp \overline{GC}$$

또 $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ 이므로

$$\overline{BD} \perp (\text{평면 AGC})$$

이때 $\overline{BD} \perp \overline{PQ}$ 이므로 $\overline{PQ}$ 는 평면 AGC에 속한다.

따라서 점 P는 두 대각선 AC, BD의 교점이므로

$$\overline{AP} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

한편 $\angle CAG = \theta$ 라 하면 $\overline{AG} = 4\sqrt{3}$ 이므로 직각삼각형 AGC에서

$$\sin \theta = \frac{\overline{CG}}{\overline{AG}} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 직각삼각형 PAQ에서

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \overline{AP} \sin \theta \\ &= 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

답 ④

0321 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 삼각형 BCD의 무게중심이고 삼각형 ABH에서 $\overline{AE} = \overline{BE}$, $\overline{AH} \parallel \overline{EF}$ 이므로

$$\overline{HF} = \overline{BF}$$

이때 $\overline{CD}$ 의 중점을 M이라 하면

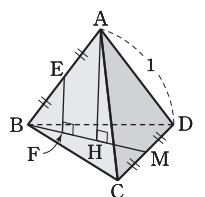
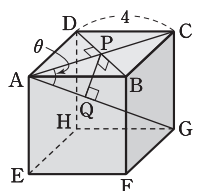
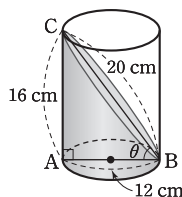
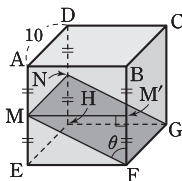
$$\begin{aligned} \overline{BF} &= \frac{1}{2} \overline{BH} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \overline{BM} = \frac{1}{3} \overline{BM} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

또 $\overline{BE} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2}$ 이므로 직각삼각형 EBF에서

$$\overline{EF} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

답 √6/6

0322 $\overline{AC} = 2\sqrt{2}$, $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ 이므로 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다.



오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{AC}$ 에 내린 수선의 발을 I라 하면 직각삼각형 BAI에서

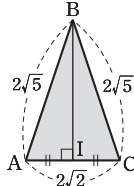
$$\overline{BI} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$$

이때 사면체의 부피에서

$$\frac{1}{3} \triangle OAC \times \overline{OB} = \frac{1}{3} \triangle ABC \times \overline{OH} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \right) \times 4 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \right) \times \overline{OH}$$

$$\therefore \overline{OH} = \frac{4}{3} \quad \text{답 } \frac{4}{3}$$



0323 오른쪽 그림과 같이 태양 광선에 수직이고 애드벌룬의 중심을 지나는 평면이 지면과 이루는 각의 크기는 60° 이다.

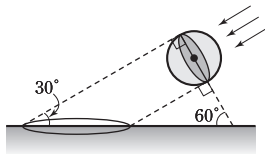
이때 애드벌룬의 중심을 지나는 단면의 넓이는

$$\pi \times 5^2 = 25\pi \text{ (m}^2\text{)}$$

이므로 그림자의 넓이를 $S \text{ m}^2$ 라 하면

$$25\pi = S \cos 60^\circ, \quad 25\pi = S \times \frac{1}{2} \quad \therefore S = 50\pi$$

따라서 애드벌룬의 그림자의 넓이는 $50\pi \text{ m}^2$ 이다. 답 ②



0324 오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있는 원뿔의 모선의 양 끝 점을 각각 A, B, 원뿔의 밑면인 원의 중심을 O라 하고 원뿔의 밑면과 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

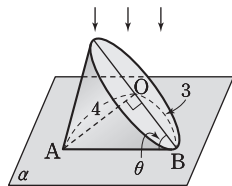
$$\angle OBA = \theta$$

이때 직각삼각형 OAB에서 $\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\overline{BO}}{\overline{AB}} = \frac{3}{5}$$

따라서 구하는 그림자의 넓이는 원뿔의 밑면의 평면 α 위로의 정사영의 넓이와 같으므로

$$\pi \times 3^2 \times \frac{3}{5} = \frac{27}{5} \pi \quad \text{답 } ⑤$$



0325 오른쪽 그림과 같이 햇빛과 수직이고 공의 중심을 지나는 평면이 지면과 이루는 각의 크기는 45° 이다.

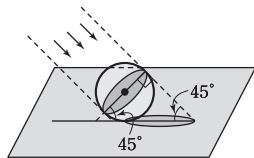
이때 공의 반지름의 길이를 $r \text{ cm}$ 라 하면 공의 그림자의 넓이가 $81\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2$ 이므로

$$\pi r^2 = 81\sqrt{2}\pi \times \cos 45^\circ, \quad \pi r^2 = 81\sqrt{2}\pi \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$r^2 = 81 \quad \therefore r = 9 \text{ (} \because r > 0 \text{)}$$

따라서 구하는 겉넓이는

$$4\pi \times 9^2 = 324\pi \text{ (cm}^2\text{)} \quad \text{답 } 324\pi \text{ cm}^2$$



시험에 꼭 나오는 문제

0326 (i) 네 꼭짓점 B, C, D, E로 만들 수 있는 평면은 평면 BCDE의 1개이다.

(ii) 직선 AC, AE와 점 B, D로 만들 수 있는 서로 다른 평면은 평면 ABC, 평면 ACD, 평면 ACE, 평면 ABE, 평면 ADE

의 5개이다.

(i), (ii)에서 만들 수 있는 서로 다른 평면의 개수는

$$1 + 5 = 6$$

답 6

0327 직선 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리는

$\overline{ED}, \overline{CD}, \overline{EF}, \overline{CF}$

의 4개이므로 $a = 4$

평면 CFD와 평행한 모서리는

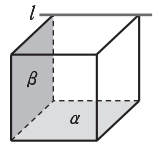
$\overline{BE}, \overline{AB}, \overline{AE}$

의 3개이므로 $b = 3$

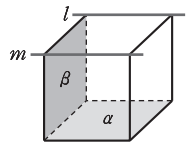
$$\therefore a + b = 7$$

답 7

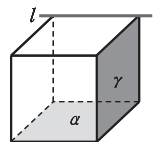
0328 ㄱ. [반례] 오른쪽 그림에서 직선 l 과 평면 β 가 한 점에서 만난다. (거짓)



ㄴ. [반례] 오른쪽 그림에서 평면 β 와 수직인 직선 m 이 직선 l 과 평행하다. (거짓)



ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 직선 l 과 수직인 평면 γ 는 평면 α 와 수직이다. (참)



이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

0329 ① $\overline{CG} \parallel \overline{DH}$ 이고 $\overline{AD} \perp \overline{DH}$ 이므로 $\overline{AD} \perp \overline{CG}$

② $\overline{BG} \parallel \overline{AH}$ 이고 삼각형 AFH는 정삼각형이므로 $\angle FAH = 60^\circ$

따라서 $\overline{AF}$ 와 $\overline{BG}$ 가 이루는 각의 크기는 60° 이다.

③ $\overline{FG} \perp$ (평면 AEFB)이므로 $\overline{BE} \perp \overline{FG}$

④ $\overline{AF} \parallel \overline{DG}$ 이고 정사각형의 두 대각선은 서로 수직이므로 $\overline{BE} \perp \overline{AF} \quad \therefore \overline{BE} \perp \overline{DG}$

⑤ $\overline{BE} \perp \overline{AF}, \overline{BE} \perp \overline{FG}$ 이므로 $\overline{BE} \perp$ (평면 AFG) $\therefore \overline{BE} \perp \overline{AG}$

답 ②

0330 $\overline{DH} \parallel \overline{AE}$ 이므로 직선 ME와 직선 DH가 이루는 각의 크기는 직선 ME와 직선 AE가 이루는 각의 크기와 같다.

$$\therefore \angle AEM = \theta$$

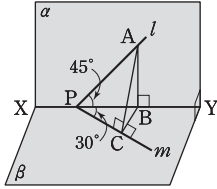
이때 $\overline{AE}=6$, $\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ 이므로 직각삼각형 AEM에서

$$\overline{ME}=\sqrt{6^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{11}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{AE}}{\overline{ME}} = \frac{6}{2\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{11}}{11}$$

답 ③ $\frac{3\sqrt{11}}{11}$

0331 오른쪽 그림과 같이 직선 l 위의 점 A에서 교선 XY에 내린 수선의 발을 B라 하고, 점 B에서 직선 m 에 내린 수선의 발을 C라 하면 삼수선 정리에 의하여 $\overline{AC} \perp m$



이때 $\overline{PA}=a$ 라 하면 직각삼각형 APB에서

$$\overline{PB}=\overline{PA}\cos 45^\circ=a\times \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

또 직각삼각형 BPC에서

$$\overline{PC}=\overline{PB}\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}a\times \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}a$$

이때 $\angle APC=\theta$ 이므로 직각삼각형 APC에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{4}a}{a} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

답 ④ $\frac{\sqrt{6}}{4}$

0332 $\overline{AD} \perp$ (평면 DEF), $\overline{AH} \perp \overline{EF}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여 $\overline{DH} \perp \overline{EF}$

직각삼각형 DEF에서

$$\overline{EF}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

이고 $\frac{1}{2} \times \overline{DE} \times \overline{DF} = \frac{1}{2} \times \overline{EF} \times \overline{DH}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \overline{DH}$$

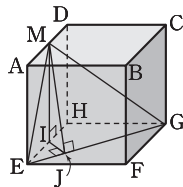
$$\therefore \overline{DH} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

따라서 직각삼각형 ADH에서

$$\overline{AD} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = 1$$

답 ②

0333 오른쪽 그림과 같이 점 M에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 I, 선분 EG에 내린 수선의 발을 J라 하면 $\overline{MI} \perp$ (평면 EFGH), $\overline{MJ} \perp \overline{EG}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여 $\overline{IJ} \perp \overline{EG}$



이때 $\overline{EI}=\frac{1}{2}\overline{EH}=2$ 이고 $\angle HEG=45^\circ$ 이므로 직각삼각형 EJI에서

$$\overline{IJ}=\overline{EI}\sin 45^\circ=2\times \frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

따라서 직각삼각형 MIJ에서

$$\overline{MJ}=\sqrt{4^2+(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$$

이때 $\overline{EG}=4\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 MEG의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 12$$

답 ④

0334 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{BC} \perp \beta$, $\overline{BH} \perp l$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{CH} \perp l$$

따라서 두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기는 $\overline{BH}$ 와 $\overline{CH}$ 가 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\angle BHC = \theta$$

이때 직각삼각형 BAH에서

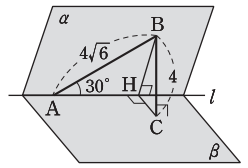
$$\overline{BH}=\overline{AB}\sin 30^\circ=4\sqrt{6}\times \frac{1}{2}=2\sqrt{6}$$

이므로 직각삼각형 BHC에서

$$\overline{CH}=\sqrt{(2\sqrt{6})^2-4^2}=2\sqrt{2}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{CH}}{\overline{BH}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$



0335 점 D에서 평면 BEFC에 내린 수선의 발이 F이므로

$$\angle DBF = \theta$$

이때 $\overline{EF}=\overline{DF}=a$ 라 하면 $\overline{DE}=\sqrt{2}a$

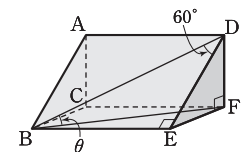
이므로 직각삼각형 BED에서

$$\overline{BD}=\frac{\overline{DE}}{\cos 60^\circ}=\frac{\sqrt{2}a}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}a$$

따라서 직각삼각형 BFD에서

$$\sin \theta = \frac{\overline{DF}}{\overline{BD}} = \frac{a}{2\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

답 ①



0336 구의 중심을 지나면서 모선과 수직인 평면을 α 라 할 때, 밀면인 타원과 평면 α 가 이루는 각의 크기는 30° 이므로 밀면인 타원의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는

$$6\sqrt{3}\pi \times \cos 30^\circ = 6\sqrt{3}\pi \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\pi$$

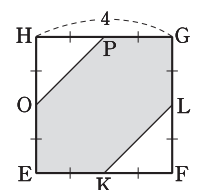
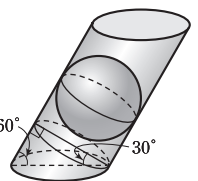
따라서 구의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\pi r^2 = 9\pi, \quad r^2 = 9 \quad \therefore r = 3 \quad (\because r > 0)$$

답 ③

0337 $\overline{HE}$, $\overline{HG}$ 의 중점을 각각 O, P라 하면 정육각형 IJKLMN의 평면 EFGH 위로의 정사영은 육각형 OEKLGP이다. 따라서 정육각형 IJKLMN의 넓이를 S, 육각형 OEKLGP의 넓이를 S' 이라 하면

$$\cos \theta = \frac{S'}{S}$$



이때 정육각형 IJKLMN의 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

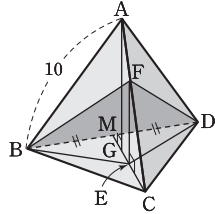
$$S = 6 \times \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{2})^2 \right\} = 12\sqrt{3}$$

또 $S' = 4 \times 4 - 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \right) = 12$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{12}{12\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ③

0338 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$ 의 중점을 M이라 하고, 두 점 A, F에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 각각 G, E라 하면 점 G는 정삼각형 BCD의 무게중심이고 삼각형 FBD의 평면 BCD 위로의 정사영은 삼각형 EBD이다.



이때 직각삼각형 AGC에서 $\overline{AF} : \overline{FC} = 2 : 3$ 이므로

$$\overline{GE} : \overline{EC} = 2 : 3$$

$$\therefore \overline{EM} = \overline{CM} - \overline{EC} = \overline{CM} - \frac{3}{5} \overline{CG}$$

$$= \overline{CM} - \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} \overline{CM} = \frac{3}{5} \overline{CM}$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10$$

$$= 3\sqrt{3}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$\triangle EBD = \frac{1}{2} \times \overline{BD} \times \overline{EM}$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 3\sqrt{3}$$

$$= 15\sqrt{3}$$

답 $15\sqrt{3}$

0339 $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OQ} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{PQ} \perp \overline{AB}$$

... 1단계

직각삼각형 PAQ에서

$$\overline{PQ} = \sqrt{14^2 - (4\sqrt{6})^2} = 10$$

... 2단계

따라서 직각삼각형 PQO에서

$$\overline{OQ} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

... 3단계

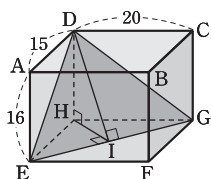
답 6

채점 요소	비율
1단계 $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$ 임을 알기	40 %
2단계 PQ의 길이 구하기	30 %
3단계 OQ의 길이 구하기	30 %

0340 오른쪽 그림과 같이 점 D에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\overline{DH} \perp$ (평면 EFGH), $\overline{DI} \perp \overline{EG}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{HI} \perp \overline{EG}$$

... 1단계



이때 직각삼각형 HEG에서

$$\overline{EG} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$$

이고 $\frac{1}{2} \times \overline{EH} \times \overline{HG} = \frac{1}{2} \times \overline{EG} \times \overline{HI}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 15 \times 20 = \frac{1}{2} \times 25 \times \overline{HI} \quad \therefore \overline{HI} = 12 \quad \dots \text{2단계}$$

따라서 직각삼각형 DHI에서

$$\overline{DI} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$$

... 3단계

이므로 삼각형 DEG의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 25 \times 20 = 250$$

... 4단계

답 250

채점 요소	비율
1단계 점 D에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 I라 하고 $\overline{HI} \perp \overline{EG}$ 임을 알기	30 %
2단계 HI의 길이 구하기	30 %
3단계 DI의 길이 구하기	20 %
4단계 삼각형 DEG의 넓이 구하기	20 %

0341 점 F에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발은 B이므로

$$\angle FDB = \alpha$$

$$\overline{DF} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}, \overline{DB} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{이므로}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{DB}}{\overline{DF}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

... 1단계

점 D에서 평면 AEFB에 내린 수선의 발은 A이므로

$$\angle DFA = \beta$$

$$\overline{AF} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{이므로} \quad \cos \beta = \frac{\overline{AF}}{\overline{DF}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \quad \dots \text{2단계}$$

점 F에서 평면 AEHD에 내린 수선의 발은 E이므로

$$\angle FDE = \gamma$$

$$\overline{DE} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\cos \gamma = \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

... 3단계

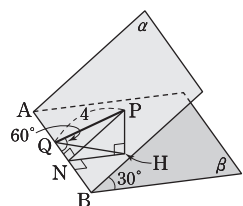
$$\therefore \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{5}{6} + \frac{5}{6} + \frac{2}{6} = 2 \quad \dots \text{4단계}$$

답 2

채점 요소	비율
1단계 $\cos \alpha$ 의 값 구하기	30 %
2단계 $\cos \beta$ 의 값 구하기	30 %
3단계 $\cos \gamma$ 의 값 구하기	30 %
4단계 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$ 의 값 구하기	10 %

0342 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 평면 β 에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 PQ의 평면 β 위로의 정사영은 선분 HQ이다.

점 H에서 $\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 N이라 하면 $\overline{PH} \perp \beta$, $\overline{HN} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여 $\overline{PN} \perp \overline{AB}$



... 1단계

직각삼각형 PQN에서

$$\overline{PN} = \overline{PQ} \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\overline{QN} = \overline{PQ} \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

... 2단계

또 두 평면 α , β 가 이루는 각의 크기가 30° 이므로

$$\angle PNH = 30^\circ$$

$$\therefore \overline{HN} = \overline{PN} \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

... 3단계

따라서 직각삼각형 HQN에서 구하는 정사영의 길이는

$$\overline{HQ} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

... 4단계

답 $\sqrt{13}$

채점 요소	비율
1단계 점 P에서 평면 β 에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 $\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 N이라 하고 $\overline{PN} \perp \overline{AB}$ 임을 알기	40 %
2단계 $\overline{PN}$, $\overline{QN}$ 의 길이 구하기	20 %
3단계 $\overline{HN}$ 의 길이 구하기	20 %
4단계 정사영의 길이 구하기	20 %

0343 [전략] 점 A에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H라 하고 삼수선 정리를 이용하여 $\overline{HQ}$ 의 길이를 $\overline{HP}$ 의 길이에 대한 식으로 나타낸다.

점 A에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AH} \perp \alpha$,

$\overline{AP} \perp \overline{PQ}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{HP} \perp \overline{PQ}$$

직각삼각형 APQ에서 $\overline{PQ} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

따라서 $\overline{HP} = a$ 라 하면 직각삼각형 HPQ에서

$$\overline{HQ} = \sqrt{a^2 + 3^2} = \sqrt{a^2 + 9}$$

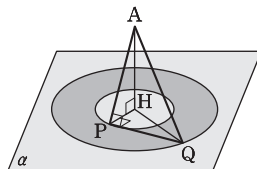
이때 선분 PQ가 그리는 도형의 넓

이는 오른쪽 그림에서 두 원 사이의 넓이와 같으므로

$$\begin{aligned} & \pi \times \overline{HQ}^2 - \pi \times \overline{HP}^2 \\ &= \pi \times (\sqrt{a^2 + 9})^2 - \pi \times a^2 \\ &= 9\pi \end{aligned}$$

답 9π

참고 두 점 P, Q가 그리는 도형은 점 H를 중심으로 하고 반지름의 길이가 각각 $\overline{PH}$, $\overline{QH}$ 인 원이다.



0344 [전략] 반구의 평면 α 위로의 정사영을 파악한다.

오른쪽 그림과 같이 반구의 중심을 지나고 평면 α 와 평행한 평면 β 로 반구를 자를 때 생기는 단면의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S_1 , 반구의 밑면 중 평면 β 의 위쪽 반원의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S_2 라 하면 구하는 정사영의 넓이는 $S_1 + S_2$ 이다.

이때 S_1 은 단면인 반원의 넓이와 같으므로

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \pi \times 4^2 = 8\pi$$

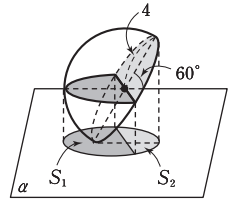
또 반구의 밑면과 평면 α 가 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$$S_2 = \left(\frac{1}{2} \times \pi \times 4^2 \right) \times \cos 60^\circ = 8\pi \times \frac{1}{2} = 4\pi$$

따라서 구하는 넓이는

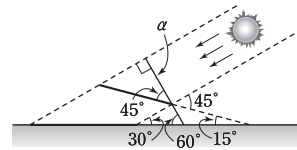
$$S_1 + S_2 = 12\pi$$

답 12π



0345 [전략] 차광막의 그림자와 차광막의 태양 광선에 수직인 평면 위로의 정사영이 일치함을 이용한다.

다음 그림과 같이 태양 광선에 수직인 평면을 α 라 하면 평면 α 가 지면과 이루는 각의 크기는 60° 이고 차광막과 이루는 각의 크기는 45° 이다.



차광막의 그림자의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는

$$20 \cos 60^\circ = 20 \times \frac{1}{2} = 10$$

차광막의 넓이를 S 라 하면 차광막의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는

$$S \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} S$$

이때 차광막의 그림자와 차광막의 평면 α 위로의 정사영은 일치하므로

$$10 = \frac{\sqrt{2}}{2} S \quad \therefore S = 10\sqrt{2}$$

답 $10\sqrt{2}$

04 공간좌표

교과서 문제 정복하기

본책 057쪽

0346 **답** A(2, 0, 1), B(2, 4, 1), C(2, 4, 0)

0347 **답** (1) (-2, 0, 0) (2) (0, 0, 1)
(3) (-2, 3, 0) (4) (0, 3, 1)

0348 **답** (1) (3, 2, -4) (2) (-3, -2, -4)
(3) (3, 2, 4) (4) (-3, 2, -4)

0349 $\overline{OA} = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = 6$ **답** 6

0350 $\overline{AB} = \sqrt{(1+2)^2 + (-3-3)^2 + (1-3)^2} = 7$ **답** 7

0351 $\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (2+2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{29}$ **답** $\sqrt{29}$

0352 (3) B(1, -3, -4), C(-1, 3, 4)이므로
 $\overline{BC} = \sqrt{(-1-1)^2 + (3+3)^2 + (4+4)^2} = 2\sqrt{26}$
답 (1) (1, -3, -4) (2) (-1, 3, 4) (3) $2\sqrt{26}$

0353 (1) $\left(\frac{2 \times 5 + 1 \times (-1)}{2+1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2+1}, \frac{2 \times 5 + 1 \times 2}{2+1}\right)$,
즉 (3, 3, 4)
(2) $\left(\frac{1 \times 5 + 2 \times (-1)}{1+2}, \frac{1 \times 4 + 2 \times 1}{1+2}, \frac{1 \times 5 + 2 \times 2}{1+2}\right)$,
즉 (1, 2, 3)
(3) $\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{1+4}{2}, \frac{2+5}{2}\right)$, 즉 $\left(2, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$
답 (1) (3, 3, 4) (2) (1, 2, 3) (3) $\left(2, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

0354 $\left(\frac{1+2+6}{3}, \frac{2+1+3}{3}, \frac{3+(-2)+2}{3}\right)$, 즉 (3, 2, 1)
답 (3, 2, 1)

0355 **답** 중심의 좌표: (1, -1, 2), 반지름의 길이: 3

0356 **답** 중심의 좌표: (-3, 2, -4), 반지름의 길이: $2\sqrt{3}$

0357 **답** $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 25$

0358 구의 반지름의 길이는

$$\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5 \quad \text{답 } x^2 + y^2 + z^2 = 5$$

0359 (1) (반지름의 길이) = |(중심의 z좌표)| = 4이므로

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 16$$

(2) (반지름의 길이) = |(중심의 y좌표)| = 1이므로

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 1$$

(3) (반지름의 길이) = $\sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$ 이므로

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 17$$

(4) (반지름의 길이) = $\sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20}$ 이므로

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 20$$

답 (1) $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 16$

(2) $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 1$

(3) $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 17$

(4) $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 20$

0360 $x^2 + y^2 + z^2 - 6y = 0$ 에서

$$x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$$

따라서 중심의 좌표는 (0, 3, 0), 반지름의 길이는 3이다.

답 중심의 좌표: (0, 3, 0), 반지름의 길이: 3

0361 $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 6z = 0$ 에서

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 14$$

따라서 중심의 좌표는 (2, -1, -3), 반지름의 길이는 $\sqrt{14}$ 이다.

답 중심의 좌표: (2, -1, -3), 반지름의 길이: $\sqrt{14}$

유형 익히기

• 본책 058~066쪽

0362 점 A(2, -1, 3)과 x축에 대하여 대칭인 점 B의 좌표는
(2, 1, -3)

점 B에서 yz평면에 내린 수선의 발 C의 좌표는

$$(0, 1, -3)$$

따라서 $a=0, b=1, c=-3$ 이므로

$$a+b+c = -2$$

답 -2

0363 점 A(-2, 3, 1)과 zx평면에 대하여 대칭인 점의 좌표는
(-2, -3, 1)

따라서 $a=-2, b=-3, c=1$ 이므로

$$abc = 6$$

답 6

0364 점 A(2, 3, 5)와 원점에 대하여 대칭인 점 B의 좌표는
(-2, -3, -5)

점 B와 y축에 대하여 대칭인 점 C의 좌표는

$$(2, -3, 5)$$

따라서 $a=2, b=-3, c=5$ 이므로

$$a-b+c = 10$$

답 10

0365 점 F는 점 B에서 xy 평면에 내린 수선의 발이므로

$$F(a, 2, 0)$$

점 F와 z 축에 대하여 대칭인 점의 좌표는

$$(-a, -2, 0)$$

즉 $-a = -4, -2 = b$ 이므로 $a = 4, b = -2$

$$\therefore a - b = 6$$

답 6

0366 $P(3, -2, 1), Q(-3, 2, -1)$ 이므로

$$PQ = \sqrt{(-3-3)^2 + (2+2)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{14}$$

답 ③

0367 $\overline{AB} = 3\sqrt{5}$ 이므로

$$\sqrt{(a-2)^2 + (2+3)^2 + (-1-1)^2} = 3\sqrt{5}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 4a - 12 = 0, \quad (a+2)(a-6) = 0$$

$$\therefore a = 6 \quad (\because a > 0)$$

답 6

0368 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 에서 $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로

$$(-3-a)^2 + (2-5)^2 + a^2 = (-3+4)^2 + (2-a)^2 + (a-1)^2$$

$$12a = -12 \quad \therefore a = -1$$

답 ②

0369 $\overline{AB}^2 = (a-2)^2 + (-1-1)^2 + 2^2 = a^2 - 4a + 12$

$$\overline{BC}^2 = (1-a)^2 + (-2+1)^2 + (-1)^2 = a^2 - 2a + 3$$

$$\overline{CA}^2 = (2-1)^2 + (1+2)^2 + (-2+1)^2 = 11$$

이때 삼각형 ABC가 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2$$

$$a^2 - 2a + 3 = a^2 - 4a + 12 + 11$$

$$2a = 20 \quad \therefore a = 10$$

답 10

0370 $P(1, 2, -3), Q(-1, 2, 3)$ 이므로

$$\overline{AP} = \sqrt{(1-1)^2 + (2-2)^2 + (-3-3)^2} = 6$$

$$\overline{AQ} = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-2)^2 + (3-3)^2} = 2$$

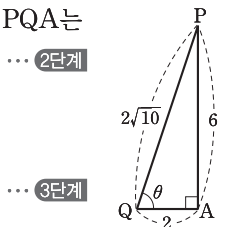
$$\overline{PQ} = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-2)^2 + (3+3)^2} = 2\sqrt{10} \quad \dots \text{1단계}$$

이때 $\overline{PQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2$ 이므로 삼각형 PQA는

$\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다. $\dots$ 2단계

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{AQ}}{\overline{PQ}}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$



$$\frac{\sqrt{10}}{10}$$

답

채점 요소	비율
1단계 $\overline{AP}, \overline{AQ}, \overline{PQ}$ 의 길이 구하기	50 %
2단계 삼각형 PQA가 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형임을 알기	30 %
3단계 $\cos \theta$ 의 값 구하기	20 %

0371 yz 평면 위에 있는 직선 $y=z$ 위의 점 P의 좌표를

$(0, a, a) \quad (a \neq 0)$ 라 하면 원점 O에 대하여 삼각형 APO는

$\angle APO = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{AO}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PO}^2$$

$$2^2 + 3^2 + 1^2 = (-2)^2 + (a-3)^2 + (a-1)^2 + a^2 + a^2$$

$$a^2 - 2a = 0, \quad a(a-2) = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a \neq 0)$$

따라서 $P(0, 2, 2)$ 이므로

$$\overline{AP} = \sqrt{(-2)^2 + (2-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{6}$$

답 $\sqrt{6}$

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 점 A에서

yz 평면에 내린 수선의 발을 A' 이라 하면

$$A'(0, 3, 1)$$

$$\therefore \overline{AA'} = 2$$

이때 삼수선 정리에 의하여 직선 $A'P$ 와

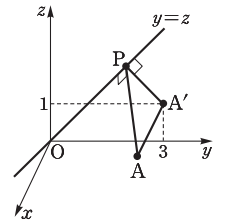
yz 평면 위의 직선 $y=z$ 는 수직이므로

$\overline{A'P}$ 의 길이는 점 $A'(0, 3, 1)$ 과 직선 $y=z$, 즉 $y-z=0$ 사이의 거리와 같다.

$$\therefore \overline{A'P} = \frac{|3-1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

따라서 직각삼각형 $AA'P$ 에서

$$\overline{AP} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}$$



0372 $\overline{OA} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \overline{OB} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7,$

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-4)^2 + (3-3)^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$$

오른쪽 그림과 같이 점 O에서 $\overline{AB}$ 에 내린

수선의 발을 H라 하고 $\overline{AH} = x$ 라 하면

$$5^2 - x^2 = 7^2 - (2\sqrt{10} - x)^2$$

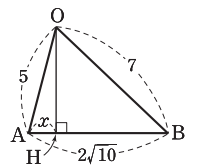
$$25 - x^2 = 49 - (40 - 4\sqrt{10}x + x^2)$$

$$4\sqrt{10}x = 16 \quad \therefore x = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

따라서 $\overline{OH} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$ 이므로

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{26}$$

답 ⑤



0373 $\overline{AB} = \sqrt{(-1-a)^2 + (2-b)^2 + (a-1)^2}$

$$= \sqrt{2a^2 + (b-2)^2 + 2}$$

따라서 두 점 A, B 사이의 거리는 $a=0, b=2$ 일 때 최소이고 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이다. $\dots$ 2

답 ②

0374 y 축 위의 점을 $P(0, y, 0)$ 이라 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서

$\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(-4)^2 + (y-2)^2 + (-1)^2 = 3^2 + (y-3)^2 + (-3)^2$$

$$2y = 6 \quad \therefore y = 3$$

따라서 구하는 점의 y 좌표는 3이다. $\dots$ 2

답 ②

0375 $P(x, 0, 0)$ 이라 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(x+2)^2 + (-2)^2 = (x-1)^2 + 4^2 + (-3)^2$$

$$6x = 18 \quad \therefore x = 3$$

따라서 $P(3, 0, 0)$ 이므로

$$\overline{AP} = \sqrt{(3+2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29} \quad \text{답 ③}$$

0376 점 P는 xy 평면 위의 점이므로 점 P의 z 좌표는 0이다.

즉 $c=0$ 이므로 $P(a, b, 0)$

이때 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(a-1)^2 + (b+1)^2 + (-1)^2 = (a-1)^2 + (b-2)^2 + 2^2$$

$$6b = 6 \quad \therefore b = 1$$

또 $\overline{AP} = \overline{CP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{CP}^2$ 이므로

$$(a-1)^2 + (b+1)^2 + (-1)^2 = (a-2)^2 + (b+1)^2$$

$$2a = 2 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 2 \quad \text{답 2}$$

0377 $C(a, 0, c)$ 라 하면

$$\overline{AB}^2 = 2^2 + (1-2)^2 + (-1)^2 = 6$$

$$\overline{BC}^2 = (a-2)^2 + (-1)^2 + c^2 = a^2 + c^2 - 4a + 5$$

$$\overline{AC}^2 = a^2 + (-2)^2 + (c-1)^2 = a^2 + c^2 - 2c + 5$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \text{이므로} \quad a^2 + c^2 - 4a - 1 = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \text{이므로} \quad c = 2a \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$$5a^2 - 4a - 1 = 0, \quad (5a+1)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{1}{5} \text{ 또는 } a = 1$$

$a = -\frac{1}{5}$ 이면 $c = -\frac{2}{5}$, $a = 1$ 이면 $c = 2$ 이므로

$$C\left(-\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5}\right), C(1, 0, 2)$$

$$\text{답 } \left(-\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5}\right), (1, 0, 2)$$

0378 $\overline{AB} = \sqrt{(1+2)^2 + (2-7)^2 + (-1-3)^2} = 5\sqrt{2}$

두 점 A, B의 zx 평면 위로의 정사영을 각각 A' , B' 이라 하면

$$A'(-2, 0, 3), B'(1, 0, -1)$$

$$\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(1+2)^2 + (-1-3)^2} = 5$$

이때 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{답 ④}$$

0379 $\overline{AB} = \sqrt{(a-3)^2 + (7-3)^2 + (2\sqrt{11}-\sqrt{11})^2}$
 $= \sqrt{a^2 - 6a + 36}$

두 점 A, B의 yz 평면 위로의 정사영을 각각 A' , B' 이라 하면

$$A'(0, 3, \sqrt{11}), B'(0, 7, 2\sqrt{11})$$

$$\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(7-3)^2 + (2\sqrt{11}-\sqrt{11})^2} = 3\sqrt{3}$$

이때 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 60^\circ$ 이므로

$$3\sqrt{3} = \sqrt{a^2 - 6a + 36} \times \frac{1}{2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 6a - 72 = 0, \quad (a+6)(a-12) = 0$$

$$\therefore a = 12 \quad (\because a > 0) \quad \text{답 ⑤}$$

0380 $\overline{AB} = \sqrt{(4-1)^2 + (4-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{17}$

$$\overline{BC} = \sqrt{(4-4)^2 + (2-4)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(4-1)^2 + (2-2)^2 + (3-3)^2} = 3$$

따라서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$ 이므로 삼각형 ABC는 $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3 = 3\sqrt{2}$$

한편 세 점 A, B, C의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 A' , B' , C' 이라 하면

$$A'(1, 2, 0), B'(4, 4, 0), C'(4, 2, 0)$$

$$\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(4-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{13},$$

$$\overline{B'C'} = \sqrt{(4-4)^2 + (2-4)^2} = 2,$$

$$\overline{A'C'} = \sqrt{(4-1)^2 + (2-2)^2} = 3$$

따라서 $\overline{A'B'}^2 = \overline{B'C'}^2 + \overline{A'C'}^2$ 이므로 삼각형 $A'B'C'$ 은 $\angle C' = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$$\therefore \triangle A'B'C' = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$$

이때 삼각형 ABC와 xy 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \theta = 45^\circ \quad \text{답 45}^\circ$$

0381 두 점 A, B의 z 좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 좌표공간에서 xy 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A와 xy 평면에 대하여 대칭인 점을 A' 이라 하면

$$A'(1, 4, -3)$$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로

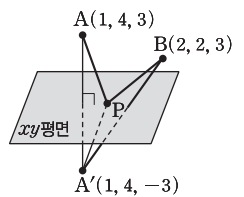
$$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{A'P} + \overline{PB} \geq \overline{A'B}$$

$$= \sqrt{(2-1)^2 + (2-4)^2 + (3+3)^2}$$

$$= \sqrt{41}$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 $\sqrt{41}$ 이다.

답 $\sqrt{41}$

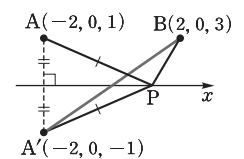


0382 두 점 A, B의 y 좌표가 0이므로

두 점은 zx 평면 위의 점이고, 두 점의 z 좌표의 부호가 같으므로 두 점은 x 축을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A와 x 축에 대하여 대칭인 점을 A' 이라 하면

$$A'(-2, 0, -1)$$



이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP} + \overline{PB} &= \overline{A'P} + \overline{PB} \geq \overline{A'B} \\ &= \sqrt{(2+2)^2 + (3+1)^2} \\ &= 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 $4\sqrt{2}$ 이다.

답 ④

0383 두 점 A, B의 x 좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 좌표공간에서 yz 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A와 yz 평면에 대하여 대칭인 점을 A'이라 하면

$$A'(-2, 3, 1)$$

... 1단계

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP} + \overline{PB} &= \overline{A'P} + \overline{PB} \geq \overline{A'B} \\ &= \sqrt{(4+2)^2 + (1-3)^2 + (a-1)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - 2a + 41}\end{aligned}$$

... 2단계

$$\text{즉 } \sqrt{a^2 - 2a + 41} = 2\sqrt{14} \text{ 이므로 } a^2 - 2a + 41 = 56$$

$$a^2 - 2a - 15 = 0, \quad (a+3)(a-5) = 0$$

$$\therefore a = 5 \quad (\because a > 0)$$

... 3단계

답 5

	채점 요소	비율
1단계	점 A와 yz 평면에 대하여 대칭인 점의 좌표 구하기	30 %
2단계	$\overline{AP} + \overline{PB}$ 의 최솟값을 a 에 대한 식으로 나타내기	40 %
3단계	a 의 값 구하기	30 %

0384 두 점 A, B의 y 좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 좌표공간에서 zx 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A와 zx 평면에 대하여 대칭인 점을 A'이라 하면

$$A'(1, -2, 3)$$

이때 $\overline{PA} = \overline{PA'}$ 이므로 삼각형 ABP의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{BP} + \overline{PA} &= \overline{AB} + \overline{BP} + \overline{PA'} \geq \overline{AB} + \overline{A'B} \\ &= \sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2 + (-2-3)^2} \\ &\quad + \sqrt{(2-1)^2 + (1+2)^2 + (-2-3)^2} \\ &= 3\sqrt{3} + \sqrt{35}\end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABP의 둘레의 길이의 최솟값은 $3\sqrt{3} + \sqrt{35}$ 이다.

답 $3\sqrt{3} + \sqrt{35}$

0385 선분 AB를 1:2로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 4 + 2 \times (-2)}{1+2}, \frac{1 \times 2 + 2 \times 5}{1+2}, \frac{1 \times (-1) + 2 \times 2}{1+2} \right),$$

즉 (0, 4, 1)

선분 BC를 3:2로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times (-6) + 2 \times 4}{3+2}, \frac{3 \times (-8) + 2 \times 2}{3+2}, \frac{3 \times 9 + 2 \times (-1)}{3+2} \right),$$

$$\text{즉 } (-2, -4, 5)$$

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0-2}{2}, \frac{4-4}{2}, \frac{1+5}{2} \right), \text{ 즉 } (-1, 0, 3)$$

답 (-1, 0, 3)

0386 선분 AB를 3:1로 내분하는 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 0 + 1 \times 4}{3+1}, \frac{3 \times (-1) + 1 \times 3}{3+1}, \frac{3 \times 10 + 1 \times (-2)}{3+1} \right),$$

즉 (1, 0, 7)

선분 CD를 2:1로 내분하는 점 E의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 1 + 1 \times (-5)}{2+1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times 3}{2+1}, \frac{2 \times 7 + 1 \times 1}{2+1} \right),$$

즉 (-1, 1, 5)

따라서 $a = -1, b = 1, c = 5$ 이므로

$$a + b + c = 5$$

답 5

0387 선분 AB를 1:3으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times (-7) + 3 \times a}{1+3}, \frac{1 \times 0 + 3 \times b}{1+3}, \frac{1 \times 5 + 3 \times c}{1+3} \right),$$

즉 $\left(\frac{3a-7}{4}, \frac{3b}{4}, \frac{3c+5}{4} \right)$

$$\text{따라서 } \frac{3a-7}{4} = -1, \frac{3b}{4} = 3, \frac{3c+5}{4} = -1 \text{ 이므로}$$

$$a = 1, b = 4, c = -3$$

즉 A(1, 4, -3)이므로 선분 AB의 중점 M의 좌표는

$$\left(\frac{1-7}{2}, \frac{4+0}{2}, \frac{-3+5}{2} \right), \text{ 즉 } (-3, 2, 1)$$

$$\therefore \overline{MP} = \sqrt{(-1+3)^2 + (3-2)^2 + (-1-1)^2} = 3$$

답 3

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 점

M은 선분 PB를 1:2로 내분하

는 점이므로

$$\begin{aligned}\overline{MP} &= \frac{1}{3} \overline{PB} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(-7+1)^2 + (-3)^2 + (5+1)^2} \\ &= \frac{1}{3} \times 9 = 3\end{aligned}$$



0388 $2\triangle ABD = 3\triangle ADC$ 에서

$$\triangle ABD : \triangle ADC = 3 : 2$$

이때 점 D는 선분 BC 위의 점이므로 ㉠을 만

족시키는 점 D는 선분 BC를 3:2로 내분하

는 점이다.

따라서 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times (-3) + 2 \times 2}{3+2}, \frac{3 \times 1 + 2 \times 6}{3+2}, \frac{3 \times (-2) + 2 \times 3}{3+2} \right),$$

즉 (-1, 3, 0)

$$\therefore \overline{AD} = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-5)^2 + (-7)^2} = \sqrt{62}$$

답 $\sqrt{62}$

0389 선분 AB를 3:2로 내분하는 점이 zx 평면 위에 있으므로 내분점의 y 좌표는 0이다.

$$\text{즉 } \frac{3 \times 2 + 2 \times a}{3+2} = 0 \text{이므로}$$

$$6+2a=0 \quad \therefore a=-3$$

답 -3

0390 선분 AB를 1: m 으로 내분하는 점이 xy 평면 위에 있으므로 내분점의 z 좌표는 0이다.

$$\text{즉 } \frac{1 \times (-4) + m \times 2}{1+m} = 0 \text{이므로}$$

$$2m-4=0 \quad \therefore m=2$$

답 2

0391 선분 AB를 7:4로 내분하는 점이 yz 평면 위에 있으므로 내분점의 x 좌표는 0이다.

$$\text{즉 } \frac{7 \times a + 4 \times (-7)}{7+4} = 0 \text{이므로}$$

$$7a-28=0 \quad \therefore a=4$$

... **1단계**

또 선분 AB의 중점이 x 축 위에 있으므로 중점의 y 좌표, z 좌표는 0이다.

$$\text{즉 } \frac{4+b}{2} = 0, \frac{-5+c}{2} = 0 \text{이므로}$$

$$b=-4, c=5$$

... **2단계**

$$\therefore a+b+c=5$$

... **3단계**

답 5

	채점 요소	비율
1단계	a 의 값 구하기	30 %
2단계	b, c 의 값 구하기	60 %
3단계	$a+b+c$ 의 값 구하기	10 %

0392 $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$ 에서 점 P는 선분 AB를 $m : n$ 으로 내분하는 점이고 점 P가 xy 평면 위에 있으므로 점 P의 z 좌표는 0이다.

$$\text{즉 } \frac{m \times (-4) + n \times 3}{m+n} = 0 \text{이므로}$$

$$-4m+3n=0 \quad \therefore m=\frac{3}{4}n$$

$$\text{따라서 } \overline{AP} : \overline{BP} = \frac{3}{4} : 1 = 3 : 4 \text{이므로}$$

$$m=3, n=4 \quad \therefore m-n=-1$$

답 ②

0393 선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4+0}{2}, \frac{-7+1}{2}, \frac{-2+0}{2} \right), \text{ 즉 } (2, -3, -1)$$

점 D의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 선분 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+a}{2}, \frac{1+b}{2}, \frac{c}{2} \right)$$

평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC와 BD의 중점은 일치하므로

$$\frac{2+a}{2} = 2, \frac{1+b}{2} = -3, \frac{c}{2} = -1$$

$$\therefore a=2, b=-7, c=-2$$

즉 D(2, -7, -2)이므로

$$\overline{BD} = \sqrt{(2-2)^2 + (-7-1)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{17} \quad \text{답 ①}$$

다른 풀이 선분 AC의 중점을 M이라 하면 $\overline{BD} = 2\overline{BM}$ 이므로

$$\overline{BD} = 2\sqrt{(2-2)^2 + (-3-1)^2 + (-1)^2} = 2\sqrt{17}$$

0394 점 B의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 선분 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a-2}{2}, \frac{b+4}{2}, \frac{c+3}{2} \right)$$

이때 선분 BD의 중점은 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점 M(0, 1, 4)와 일치하므로

$$\frac{a-2}{2} = 0, \frac{b+4}{2} = 1, \frac{c+3}{2} = 4$$

$$\therefore a=2, b=-2, c=5$$

따라서 B(2, -2, 5)이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-3)^2 + (-2+1)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{3} \quad \text{답 ③}$$

0395 선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a-1}{2}, \frac{-5+6}{2}, \frac{-3+2}{2} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{a-1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

선분 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{b+2}{2}, \frac{-1+2}{2}, \frac{2-3}{2} \right), \text{ 즉 } \left(\frac{b+2}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

마름모 ABCD의 두 대각선 AC와 BD의 중점은 일치하므로

$$\frac{a-1}{2} = \frac{b+2}{2} \quad \therefore b=a-3 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots \text{1단계}$$

또 마름모는 네 변의 길이가 모두 같으므로 $\overline{AD} = \overline{CD}$, 즉

$$\overline{AD}^2 = \overline{CD}^2 \text{에서}$$

$$(2-a)^2 + (2+5)^2 + (-3+3)^2$$

$$= (2+1)^2 + (2-6)^2 + (-3-2)^2$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0, \quad (a-1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a=1 (\because a < 2)$$

$$a=1 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b=-2$$

... **2단계**

$$\therefore a+b=-1$$

... **3단계**

답 -1

	채점 요소	비율
1단계	두 대각선의 중점이 일치함을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	40 %
2단계	이웃하는 두 변의 길이가 같음을 이용하여 a, b 의 값 구하기	50 %
3단계	$a+b$ 의 값 구하기	10 %

0396 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{a+0+4}{3}, \frac{2+b+3}{3}, \frac{3+1+c}{3} \right),$$

$$\text{즉 } \left(\frac{a+4}{3}, \frac{b+5}{3}, \frac{c+4}{3} \right)$$

$$\text{따라서 } \frac{a+4}{3} = 1, \frac{b+5}{3} = 3, \frac{c+4}{3} = 5 \text{이므로}$$

$$a=-1, b=4, c=11 \quad \therefore a+b+c=14$$

답 ④

0397 O(0, 0, 0), E(2, 0, 6), G(0, 3, 6)이므로 △OEG의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0+2+0}{3}, \frac{0+0+3}{3}, \frac{0+6+6}{3}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{2}{3}, 1, 4\right)$$

답 $\left(\frac{2}{3}, 1, 4\right)$

0398 A(3, 6, -9), B(-3, 6, 9), C(3, -6, 9)이므로 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{3-3+3}{3}, \frac{6+6-6}{3}, \frac{-9+9+9}{3}\right),$$

즉 (1, 2, 3)

$$\therefore PG = \sqrt{(1-3)^2 + (2-6)^2 + (3-9)^2} = 2\sqrt{14}$$

답 $2\sqrt{14}$

0399 선분 CM을 2:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 4 + 1 \times a}{2+1}, \frac{2 \times 5 + 1 \times b}{2+1}, \frac{2 \times 6 + 1 \times c}{2+1}\right),$$

즉 $\left(\frac{8+a}{3}, \frac{10+b}{3}, \frac{12+c}{3}\right)$

이 점이 삼각형 ABC의 무게중심 G(3, 1, 2)와 일치하므로

$$\frac{8+a}{3} = 3, \frac{10+b}{3} = 1, \frac{12+c}{3} = 2$$

$\therefore a=1, b=-7, c=-6$

$\therefore abc=42$

답 42

다른 풀이 A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)라 하면 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

즉 $\frac{x_1+x_2}{2}=4, \frac{y_1+y_2}{2}=5, \frac{z_1+z_2}{2}=6$ 이므로

$x_1+x_2=8, y_1+y_2=10, z_1+z_2=12$ ㉠

또 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2+a}{3}, \frac{y_1+y_2+b}{3}, \frac{z_1+z_2+c}{3}\right)$$

즉 $\frac{x_1+x_2+a}{3}=3, \frac{y_1+y_2+b}{3}=1, \frac{z_1+z_2+c}{3}=2$ 이므로

$x_1+x_2+a=9, y_1+y_2+b=3, z_1+z_2+c=6$

이 식에 ㉠을 대입하면

$$8+a=9, 10+b=3, 12+c=6$$

$\therefore a=1, b=-7, c=-6$

0400 구의 중심을 C라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로

$$C\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{3-3}{2}\right), \text{ 즉 } C(1, 1, 0)$$

또 구의 반지름의 길이는

$$\overline{CA} = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-1)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 18$$

답 ③

0401 $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z = 11$ 에서

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 25$$

따라서 구의 중심의 좌표는 (2, -3, -1)이고 반지름의 길이는 5이므로

$$a=2, b=-3, c=-1, r=5$$

$\therefore a+b+c-r=-7$

답 -7

0402 구 $(x+6)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 16$ 의 중심의 좌표는 (-6, 2, 5)

따라서 구하는 구의 반지름의 길이는 두 점 (-6, 2, 5), (-4, 1, 3) 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(-4+6)^2 + (1-2)^2 + (3-5)^2} = 3$$

답 ②

0403 구의 방정식을 $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$ 이라 하면 구가 네 점 (0, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (-1, 0, 1)을 지나므로

$$D=0, A+C+D+2=0,$$

$$B+C+D+2=0, A-C-D-2=0$$

위의 식을 연립하여 풀면

$$A=0, B=0, C=-2, D=0$$

따라서 구의 방정식은

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0 \quad \therefore x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

즉 구하는 구의 중심의 좌표는 (0, 0, 1)

답 (0, 0, 1)

0404 구의 방정식을 $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$ 이라 하면 구가 네 점 (0, 0, 0), (-2, 0, 0), (0, 4, 0), (0, -1, 1)을 지나므로

$$D=0, 2A-D-4=0,$$

$$4B+D+16=0, B-C-D-2=0$$

위의 식을 연립하여 풀면

$$A=2, B=-4, C=-6, D=0$$

즉 구의 방정식은

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z = 0$$

이때 점 (1, a, 6)이 이 구 위의 점이므로

$$1+a^2+36+2-4a-36=0$$

$$a^2-4a+3=0, \quad (a-1)(a-3)=0$$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

따라서 모든 a의 값의 합은

$$1+3=4$$

답 ④

0405 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 11$ 에서

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 14$$

즉 구의 중심의 좌표는 (1, 1, 1)이다.

이때 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+a}{2}, \frac{-1+b}{2}, \frac{4+c}{2}\right)$$

이 점이 구의 중심 $(1, 1, 1)$ 과 일치하므로

$$\frac{2+a}{2}=1, \frac{-1+b}{2}=1, \frac{4+c}{2}=1$$

$$\therefore a=0, b=3, c=-2$$

$$\therefore a+b+c=1$$

답 ①

0406 선분 AB를 5:1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{5 \times (-2) + 1 \times 4}{5+1}, \frac{5 \times 0 + 1 \times (-6)}{5+1}, \frac{5 \times (-2) + 1 \times 10}{5+1} \right),$$

$$\text{즉 } (-1, -1, 0)$$

또 선분 AB의 중점 M의 좌표는

$$\left(\frac{4-2}{2}, \frac{-6+0}{2}, \frac{10-2}{2} \right), \text{ 즉 } (1, -3, 4)$$

이때 구의 중심을 C라 하면 점 C는 선분 PM의 중점이므로

$$C\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{-1-3}{2}, \frac{0+4}{2} \right), \text{ 즉 } C(0, -2, 2)$$

또 구의 반지름의 길이는

$$\overline{CP} = \sqrt{(-1)^2 + (-1+2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$x^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 6$$

답 $x^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 6$

0407 $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax + 4y - 4bz + 20 = 0$ 에서

$$(x-a)^2 + (y+2)^2 + (z-2b)^2 = a^2 + 4b^2 - 16$$

따라서 구의 중심의 좌표는 $(a, -2, 2b)$ 이고 반지름의 길이는 $\sqrt{a^2 + 4b^2 - 16}$ 이다.

이때 구가 xy 평면에 접하므로

$$\sqrt{a^2 + 4b^2 - 16} = |2b|$$

양변을 제곱하면 $a^2 + 4b^2 - 16 = 4b^2$

$$a^2 = 16 \quad \therefore a = 4 \quad (\because a > 0)$$

또 구가 yz 평면에 접하므로

$$\sqrt{a^2 + 4b^2 - 16} = |a|$$

양변을 제곱하면 $a^2 + 4b^2 - 16 = a^2$

$$b^2 = 4 \quad \therefore b = 2 \quad (\because b > 0)$$

$$\therefore ab = 8$$

답 ③

0408 중심의 좌표가 $(3, -2, a)$ 이고 x 축에 접하는 구의 반지름의 길이는

$$\sqrt{(-2)^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + 4}$$

즉 $\sqrt{a^2 + 4} = 2\sqrt{10}$ 이므로

$$a^2 + 4 = 40, \quad a^2 = 36$$

$$\therefore a = 6 \quad (\because a > 0)$$

답 6

0409 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 동시에 접하는 구가 점

$(2, -5, 1)$ 을 지나므로 구의 반지름의 길이를 r 라 하면 구의 중심의 좌표는 $(r, -r, r)$ 이다.

즉 구의 방정식은

$$(x-r)^2 + (y+r)^2 + (z-r)^2 = r^2 \quad \dots \text{1단계}$$

이때 이 구가 점 $(2, -5, 1)$ 을 지나므로

$$(2-r)^2 + (-5+r)^2 + (1-r)^2 = r^2$$

$$r^2 - 8r + 15 = 0, \quad (r-3)(r-5) = 0$$

$$\therefore r = 3 \text{ 또는 } r = 5$$

... 2단계

따라서 구하는 두 구의 반지름의 길이의 합은

$$3 + 5 = 8 \quad \dots \text{3단계}$$

답 8

	채점 요소	비율
1단계	구의 방정식 세우기	50 %
2단계	두 구의 반지름의 길이 구하기	40 %
3단계	두 구의 반지름의 길이의 합 구하기	10 %

참고 구가 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 동시에 접하면 구의 중심에서 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 이르는 거리가 모두 구의 반지름의 길이와 같다.

0410 구의 중심을 $P(a, b, c)$ 라 하고 구의 중심에서 x 축, y 축, z 축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R, S라 하면

$$Q(a, 0, 0), R(0, b, 0), S(0, 0, c)$$

이때 $\overline{PQ} = \overline{PR} = \overline{PS} = 6\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = 6\sqrt{2}$$

각 변을 제곱하면

$$b^2 + c^2 = a^2 + c^2 = a^2 + b^2 = 72$$

$$a^2 = b^2 = c^2 = 36$$

$$\therefore a = b = c = 6 \quad (\because a > 0, b > 0, c > 0)$$

따라서 중심이 점 $(6, 6, 6)$ 이고 반지름의 길이가 $6\sqrt{2}$ 인 구의 방정식은

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = 72$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 12y - 12z + 36 = 0$$

즉 $A = -12, B = -12, C = -12, D = 36$ 이므로

$$A + B - C + D = 24$$

답 24

0411 점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 에서 $\overline{AP} = 2\overline{BP}$, 즉 $\overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$ 이므로

$$(x+3)^2 + y^2 + z^2 = 4\{(x-3)^2 + y^2 + z^2\}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 9 = 0$$

$$\therefore (x-5)^2 + y^2 + z^2 = 16$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(5, 0, 0)$ 이고 반지름의 길이가 4인 구이므로

$$a + b + c + r = 5 + 0 + 0 + 4 = 9$$

답 ③

0412 점 B의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 점 B는 구

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4$$

..... ㉠

선분 AB의 중점의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, z = \frac{c+6}{2}$$

$$\therefore a=2x, b=2y, c=2z-6$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$(2x)^2 + (2y)^2 + (2z-6)^2 = 4$$

$$\therefore x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 1$$

답 ①

0413 $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2z + 4 = 0$ 에서

$$(x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

이때 점 B의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 점 B는 구 위의 점이므로

$$(a-2)^2 + b^2 + (c-1)^2 = 1 \quad \dots\dots ㉠$$

선분 AB를 1:2로 내분하는 점의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$x = \frac{1 \times a + 2 \times (-6)}{1+2} = \frac{a-12}{3},$$

$$y = \frac{1 \times b + 2 \times 3}{1+2} = \frac{b+6}{3},$$

$$z = \frac{1 \times c + 2 \times 0}{1+2} = \frac{c}{3}$$

$$\therefore a=3x+12, b=3y-6, c=3z$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$(3x+10)^2 + (3y-6)^2 + (3z-1)^2 = 1$$

$$\therefore \left(x + \frac{10}{3}\right)^2 + (y-2)^2 + \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

따라서 조건을 만족시키는 도형은 중심의 좌표가

$\left(-\frac{10}{3}, 2, \frac{1}{3}\right)$ 이고 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}$ 인 구이므로 구하는 부피는

$$\frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{4}{81}\pi$$

답 ②

0414 x 축 위의 점은 y 좌표와 z 좌표가 모두 0이므로 주어진 구의 방정식에 $y=0, z=0$ 을 대입하면

$$x^2 - 8x - 9 = 0, \quad (x+1)(x-9) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 9$$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(-1, 0, 0), (9, 0, 0)$ 이므로

$$\overline{AB} = 9 - (-1) = 10$$

답 ③

다른 풀이 $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 2z - 9 = 0$ 에서

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 35$$

따라서 주어진 구의 중심을 C라 하면 $C(4, 3, 1)$ 이고 구의 반지름의 길이는 $\sqrt{35}$ 이다.

이때 구의 중심 C에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

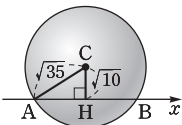
$$H(4, 0, 0)$$

$$\therefore \overline{CH} = \sqrt{(4-4)^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

직각삼각형 CAH에서

$$\overline{AH} = \sqrt{(\sqrt{35})^2 - (\sqrt{10})^2} = 5$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times 5 = 10$$



0415 z 축 위의 점은 x 좌표와 y 좌표가 모두 0이므로 주어진 구의 방정식에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$4 + 36 + (z-8)^2 = r^2, \quad z-8 = \pm\sqrt{r^2-40}$$

$$\therefore z = 8 \pm \sqrt{r^2-40} \quad \dots\dots ㉠$$

주어진 구와 z 축이 만나는 두 점의 좌표가 $(0, 0, 8 + \sqrt{r^2-40}),$

$(0, 0, 8 - \sqrt{r^2-40})$ 이므로

$$8 + \sqrt{r^2-40} - (8 - \sqrt{r^2-40}) = 14$$

$$\sqrt{r^2-40} = 7, \quad r^2 = 89$$

$$\therefore r = \sqrt{89} \quad (\because r > 0)$$

답 ①

0416 구의 중심을 C라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로

$$C\left(\frac{2-4}{2}, \frac{-2+2}{2}, \frac{1+3}{2}\right), \text{ 즉 } C(-1, 0, 2)$$

또 구의 반지름의 길이는

$$\overline{CA} = \sqrt{(2+1)^2 + (-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{14}$$

즉 주어진 구의 방정식은

$$(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 14$$

이때 x 축 위의 점은 y 좌표와 z 좌표가 모두 0이므로 구의 방정식에 $y=0, z=0$ 을 대입하면

$$(x+1)^2 + 4 = 14, \quad (x+1)^2 = 10$$

$$x+1 = \pm\sqrt{10} \quad \therefore x = -1 \pm \sqrt{10}$$

따라서 구와 x 축이 만나는 두 점의 좌표는

$$(-1 + \sqrt{10}, 0, 0), (-1 - \sqrt{10}, 0, 0)$$

이므로 구하는 거리는

$$-1 + \sqrt{10} - (-1 - \sqrt{10}) = 2\sqrt{10}$$

답 $2\sqrt{10}$

0417 y 축 위의 점은 x 좌표와 z 좌표가 모두 0이므로 주어진 구의 방정식에 $x=0, z=0$ 을 대입하면

$$y^2 - 2y - 24 = 0, \quad (y+4)(y-6) = 0$$

$$\therefore y = -4 \text{ 또는 } y = 6$$

즉 두 점 A, B의 좌표는 $(0, -4, 0), (0, 6, 0)$ 이므로

$$\overline{AB} = 6 - (-4) = 10$$

한편 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z - 24 = 0$ 에서

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 30$$

$$\therefore C(-1, 1, -2)$$

따라서 점 C에서 y 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$H(0, 1, 0)$$

$$\therefore \overline{CH} = \sqrt{1^2 + (1-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CH}$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

답 $5\sqrt{5}$

0418 xy 평면 위의 점은 z 좌표가 0이므로 주어진 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면

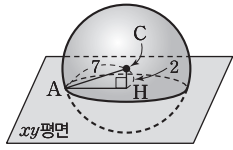
$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 45$$

따라서 구와 xy 평면이 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$ 인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는

$$2\pi \times 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}\pi$$

답 ④

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 주어진 구의 중심을 C라 하고 점 C에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H, 구와 xy 평면이 만나서 생기는 도형 위의 점을 A라 하면 $\overline{AC}=7, \overline{CH}=2$



직각삼각형 CAH에서 $\overline{AH} = \sqrt{7^2 - 2^2} = 3\sqrt{5}$

따라서 구와 xy 평면이 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$ 인 원이다.

0419 yz 평면 위의 점은 x 좌표가 0이므로 주어진 구의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면

$$y^2 + z^2 - 6y - 4z + k = 0$$

$$\therefore (y-3)^2 + (z-2)^2 = 13 - k$$

따라서 구와 yz 평면이 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가 $\sqrt{13-k}$ 인 원이므로

$$\pi \times (\sqrt{13-k})^2 = 5\pi, \quad 13-k=5$$

$$\therefore k=8$$

답 8

0420 구의 중심의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 구의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 25$$

zx 평면 위의 점은 y 좌표가 0이므로 $y=0$ 을 위의 방정식에 대입하면 $(x-a)^2 + (z-c)^2 = 25 - b^2$

이 식이 $(x-2)^2 + (z-3)^2 = 16$ 과 일치하므로

$$a=2, c=3, 25-b^2=16$$

$$25-b^2=16 \text{에서 } b^2=9 \quad \therefore b=\pm 3$$

따라서 두 구의 중심의 좌표는 $(2, 3, 3), (2, -3, 3)$ 이므로 구하는 거리는

$$3 - (-3) = 6$$

답 6

0421 xy 평면 위의 점은 z 좌표가 0이므로 주어진 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0 \quad \therefore (x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$$

즉 구와 xy 평면이 만나서 생기는 원의 반지름의 길이가 1이므로 원기둥의 밑면인 원의 반지름의 길이는 1이다.

한편 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4z + 4 = 0$ 에서

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 5$$

구의 중심을 C라 하면

$$C(-1, 2, 2)$$

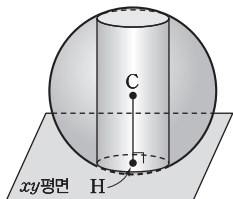
점 C에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{CH}=2$ 이므로 원기둥의 높이는

$$2\overline{CH} = 2 \times 2 = 4$$

따라서 구하는 원기둥의 부피는

$$\pi \times 1^2 \times 4 = 4\pi$$

답 ①



0422 주어진 구의 중심을 C라 하면 $C(-3, -1, -2)$ 이므로

$$\overline{PC} = \sqrt{(-3-1)^2 + (-1-2)^2 + (-2-3)^2} = 5\sqrt{2}$$

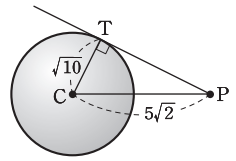
오른쪽 그림과 같이 점 P에서 구에 그은 접선의 접점을 T라 하면

$$\overline{CT} = \sqrt{10}$$

따라서 직각삼각형 CPT에서 구하는 접선의 길이는

$$\overline{PT} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10})^2} = 2\sqrt{10}$$

답 ③



0423 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + k = 0$ 에서

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 5 - k$$

이 구의 중심을 C라 하면 $C(1, -2, 0)$ 이므로

$$\overline{CA} = \sqrt{(3-1)^2 + (2+2)^2 + 3^2} = \sqrt{29}$$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 구에 그은

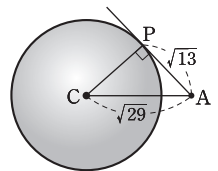
접선의 접점을 P라 하면

$$\overline{PA} = \sqrt{13}$$

따라서 직각삼각형 PCA에서

$$\overline{PC} = \sqrt{(\sqrt{29})^2 - (\sqrt{13})^2} = 4$$

... 1단계



... 2단계

이때 선분 PC의 길이는 구의 반지름의 길이와 같으므로

$$\sqrt{5-k} = 4, \quad 5-k=16$$

$$\therefore k=-11$$

... 3단계

답 -11

채점 요소	비율
1단계 구의 중심과 점 A 사이의 거리 구하기	40 %
2단계 구의 반지름의 길이 구하기	40 %
3단계 k의 값 구하기	20 %

0424 주어진 구의 중심을 C라 하면 $C(-4, 1, -3)$ 이므로

$$\overline{PC} = \sqrt{(-4+2)^2 + (1+1)^2 + (-3-1)^2} = 2\sqrt{6}$$

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 구에

그은 접선의 접점을 T라 하면

$$\overline{CT} = \sqrt{6}$$

따라서 직각삼각형 PCT에서

$$\overline{PT} = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 - (\sqrt{6})^2} = 3\sqrt{2}$$

이때 점 T에서 선분 PC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형

PCT에서 $\frac{1}{2} \times \overline{PT} \times \overline{CT} = \frac{1}{2} \times \overline{PC} \times \overline{TH}$ 이므로

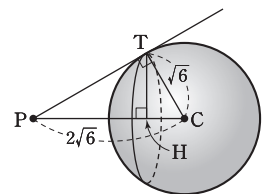
$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{6} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times \overline{TH}$$

$$\therefore \overline{TH} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

따라서 접점이 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 인 원이므로 구하는 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}\pi$$

답 ④



0425 $x^2+y^2+z^2+2x+2y+4z+5=0$ 에서

$$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=1$$

이 구의 중심을 C라 하면 C(-1, -1, -2)이고 반지름의 길이는 1이다.

이때 $\overline{AC}=\sqrt{(-1-1)^2+(-1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{21}$ 이므로

$$M=\overline{AC}+1=\sqrt{21}+1, m=\overline{AC}-1=\sqrt{21}-1$$

$$\therefore Mm=20$$

답 ④

0426 중심이 점 C(-1, $2\sqrt{2}$, 4)이고 z축에 접하는 구의 반지름의 길이는

$$\sqrt{(-1)^2+(2\sqrt{2})^2}=3$$

이때 $\overline{OC}=\sqrt{(-1)^2+(2\sqrt{2})^2+4^2}=5$ 이므로 구하는 최댓값은

$$\overline{OC}+3=5+3=8$$

답 ④

0427 구 $x^2+y^2+z^2=1$ 은 중심의 좌표가 (0, 0, 0)이고 반지름의 길이가 1이다.

또 구 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1$ 은 중심의 좌표가

(2, 1, 2)이고 반지름의 길이가 1이다.

따라서 두 구의 중심 사이의 거리는

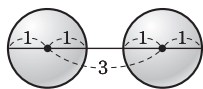
$$\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$$

이므로

$$M=3+(1+1)=5, m=3-(1+1)=1$$

$$\therefore Mm=5$$

답 5



0428 $x^2+y^2+z^2+4x-8y+8z+32=0$ 에서

$$(x+2)^2+(y-4)^2+(z+4)^2=4$$

이 구의 중심을 C라 하면 C(-2, 4, -4)이고 반지름의 길이가 2이다.

한편 원점 O에 대하여

$$a^2+b^2+c^2=\overline{OP}^2$$

이때

$$\overline{OP} \leq \overline{OC}+2$$

$$=\sqrt{(-2)^2+4^2+(-4)^2}+2=8$$

이므로 $a^2+b^2+c^2 \leq 8^2=64$

즉 구하는 최댓값은 64이다.

답 64

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 067~069쪽

0429 두 점 A, P의 y좌표와 z좌표가 각각 같고 두 점 B, P의 x좌표와 z좌표가 각각 같으므로

$$P(5, -4, 3)$$

따라서 점 P와 yz평면에 대하여 대칭인 점의 좌표는

$$(-5, -4, 3)$$

이므로 $a=-5, b=-4, c=3$

$$\therefore a+b+c=-6$$

답 -6

0430 점 C의 좌표를 (a, 0, 0)이라 하면

$$\overline{AB}^2=(4-1)^2+(-4+4)^2+(-4)^2=25$$

$$\overline{BC}^2=(a-4)^2+4^2=a^2-8a+32$$

$$\overline{AC}^2=(a-1)^2+4^2+(-4)^2=a^2-2a+33$$

이때 삼각형 ABC가 변 AC를 빗변으로 하는 직각삼각형이므로

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$$

$$25+a^2-8a+32=a^2-2a+33$$

$$6a=24 \quad \therefore a=4$$

따라서 점 C의 좌표는 (4, 0, 0)

답 (4, 0, 0)

0431 $\overline{AB}=\sqrt{(4-2)^2+(3+1)^2+(7-2)^2}=3\sqrt{5}$

두 점 A, B의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A', B'이라 하면

$$A'(2, -1, 0), B'(4, 3, 0)$$

$$\therefore \overline{A'B'}=\sqrt{(4-2)^2+(3+1)^2}=2\sqrt{5}$$

이때 $\overline{A'B'}=\overline{AB}\cos\theta$ 이므로

$$\cos\theta=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}=\frac{2}{3}$$

답 ⑤

0432 두 점 A, B의 y좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 좌표공간에서 zx평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A와 zx평면에 대하여 대칭인 점을 A'이라 하면

$$A'(2, -3, 1)$$

이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$ 이므로

$$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB} \geq \overline{A'B'}$$

$$=\sqrt{(4-2)^2+(1+3)^2+(5-1)^2}=6$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PB}$ 의 최솟값은 6이다.

답 6

0433 선분 AB의 중점이 zx평면 위에 있으므로 중점의 y좌표는 0이다.

$$\text{즉 } \frac{b+6}{2}=0 \text{이므로 } b=-6$$

또 선분 AB를 1:2로 내분하는 점이 y축 위에 있으므로 내분점의 x좌표, z좌표는 0이다.

$$\text{즉 } \frac{1 \times (-8) + 2 \times a}{1+2}=0, \frac{1 \times c + 2 \times (-5)}{1+2}=0 \text{이므로}$$

$$2a-8=0, c-10=0 \quad \therefore a=4, c=10$$

$$\therefore a+b+c=8$$

답 ⑤

0434 선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+c}{2}, \frac{a-6}{2}, \frac{1+5}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{1+c}{2}, \frac{a-6}{2}, 3\right)$$

선분 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4+0}{2}, \frac{-5+1}{2}, \frac{b+2}{2}\right), \text{ 즉 } \left(2, -2, \frac{b+2}{2}\right)$$

이때 □ABCD가 평행사변형이므로 두 대각선 AC와 BD의 중점은 일치한다.

$$\text{즉 } \frac{1+c}{2}=2, \frac{a-6}{2}=-2, 3=\frac{b+2}{2} \text{이므로}$$

$$a=2, b=4, c=3 \quad \therefore abc=24$$

답 ⑤

0435 직육면체를 오른쪽 그림과 같이 좌표공간에 나타내면

B(3, 3, 6), E(3, 0, 0), G(0, 3, 0)
따라서 삼각형 BEG의 무게중심 P의 좌표는

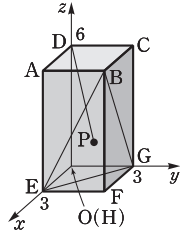
$$\left(\frac{3+3+0}{3}, \frac{3+0+3}{3}, \frac{6+0+0}{3}\right),$$

즉 (2, 2, 2)

이때 D(0, 0, 6)이므로

$$\overline{DP} = \sqrt{2^2 + 2^2 + (2-6)^2} = 2\sqrt{6}$$

답 ②



0436 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-1-6+a}{3}, \frac{1+1+b}{3}, \frac{-2-1+c}{3}\right),$$

$$\text{즉 } \left(\frac{a-7}{3}, \frac{b+2}{3}, \frac{c-3}{3}\right)$$

이 점이 삼각형 ABC의 무게중심 G(-1, 0, 0)과 일치하므로

$$\frac{a-7}{3} = -1, \frac{b+2}{3} = 0, \frac{c-3}{3} = 0$$

$$\therefore a=4, b=-2, c=3$$

$$\therefore a+b+c=5$$

답 5

다른 풀이 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 (x_1, y_1, z_1) ,

(x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) 이라 하면

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} = -1, \frac{y_1+y_2+y_3}{3} = 0, \frac{z_1+z_2+z_3}{3} = 0$$

$$\therefore x_1+x_2+x_3 = -3, y_1+y_2+y_3 = 0, z_1+z_2+z_3 = 0$$

..... ㉠

한편 $\overline{AB}$ 의 중점이 점 P(-1, 1, -2)이므로

$$\frac{x_1+x_2}{2} = -1, \frac{y_1+y_2}{2} = 1, \frac{z_1+z_2}{2} = -2$$

$$\therefore x_1+x_2 = -2, y_1+y_2 = 2, z_1+z_2 = -4 \quad \text{..... ㉡}$$

또 $\overline{BC}$ 의 중점이 점 Q(-6, 1, -1)이므로

$$\frac{x_2+x_3}{2} = -6, \frac{y_2+y_3}{2} = 1, \frac{z_2+z_3}{2} = -1$$

$$\therefore x_2+x_3 = -12, y_2+y_3 = 2, z_2+z_3 = -2 \quad \text{..... ㉢}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } x_3 = -1, y_3 = -2, z_3 = 4$$

$$\text{㉠, ㉢에서 } x_1 = 9, y_1 = -2, z_1 = 2$$

즉 A(9, -2, 2), C(-1, -2, 4)이므로 $\overline{AC}$ 의 중점 R의 좌표는

$$\left(\frac{9-1}{2}, \frac{-2-2}{2}, \frac{2+4}{2}\right), \text{ 즉 } (4, -2, 3)$$

RPM비법노트

삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를 각각 $m:n$ 으로 내분하는 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치한다.

0437 $x^2+y^2+z^2+4x+ky-2z+1-k=0$ 에서

$$(x+2)^2 + \left(y+\frac{k}{2}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{k^2}{4} + k + 4$$

이때 구의 부피가 최소이려면 구의 반지름의 길이 $\sqrt{\frac{k^2}{4} + k + 4}$ 가 최소이어야 한다.

그런데 $\frac{k^2}{4} + k + 4 = \frac{1}{4}(k+2)^2 + 3$ 이므로 구의 반지름의 길이는 $k=-2$ 일 때 최솟값 $\sqrt{3}$ 을 갖는다.

따라서 구의 부피의 최솟값은

$$\frac{4}{3}\pi \times (\sqrt{3})^3 = 4\sqrt{3}\pi$$

답 $4\sqrt{3}\pi$

0438 주어진 구가 점 (3, 4, 1)을 지나므로

$$9+16+1-6-24-2a+b=0$$

$$\therefore 2a-b=-4$$

..... ㉠

한편 $x^2+y^2+z^2-2x-6y-2az+b=0$ 에서

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-a)^2 = a^2 - b + 10$$

따라서 구의 중심의 좌표는 (1, 3, a)이고 반지름의 길이는

$\sqrt{a^2 - b + 10}$ 이다.

이때 구가 xy 평면에 접하므로 $\sqrt{a^2 - b + 10} = |a|$

양변을 제곱하면

$$a^2 - b + 10 = a^2 \quad \therefore b = 10$$

$b=10$ 을 ㉠에 대입하면

$$2a - 10 = -4 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore a+b=13$$

답 ⑤

0439 점 B의 좌표를 (x_1, y_1, z_1) 이라 하면 점 B는 구

$(x-4)^2 + (y+3)^2 + (z+7)^2 = 16$ 위의 점이므로

$$(x_1-4)^2 + (y_1+3)^2 + (z_1+7)^2 = 16$$

..... ㉠

선분 AB의 중점의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$x = \frac{-2+x_1}{2}, y = \frac{5+y_1}{2}, z = \frac{1+z_1}{2}$$

$$\therefore x_1 = 2x+2, y_1 = 2y-5, z_1 = 2z-1$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$(2x-2)^2 + (2y-2)^2 + (2z+6)^2 = 16$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 4$$

따라서 $a=1, b=1, c=-3, r=2$ 이므로

$$a+b+c-r = -3$$

답 ③

0440 z 축 위의 점은 x 좌표와 y 좌표가 모두 0이므로 주어진 구의 방정식에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$1+4+z^2=9$$

$$z^2=4 \quad \therefore z=\pm 2$$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 (0, 0, -2), (0, 0, 2)이므로

$$\overline{AB} = 2 - (-2) = 4$$

답 ③

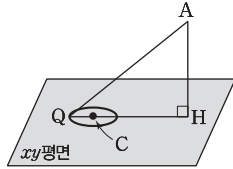
0441 xy 평면 위의 점은 z 좌표가 0이므로 주어진 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$$

즉 주어진 구와 xy 평면이 만나서 생기는 원의 중심의 좌표는

(1, 2, 0)이고 반지름의 길이는 1이다.

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C, 점 A에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하고 CH의 연장선과 원의 교점을 Q라 하면 AP의 길이의 최댓값은 AQ의 길이와 같다.



이때 H(5, 2, 0), C(1, 2, 0)이므로

$$\overline{AH}=4, \overline{CH}=\sqrt{(5-1)^2+(2-2)^2}=4$$

따라서 $\overline{QH}=\overline{CH}+1=5$ 이므로 직각삼각형 AQH에서

$$\overline{AQ}=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$$

즉 구하는 최댓값은 $\sqrt{41}$ 이다.

답 $\sqrt{41}$

0442 $x^2+y^2+z^2+6x+4y+k=0$ 에서

$$(x+3)^2+(y+2)^2+z^2=13-k$$

이 구의 중심을 C라 하면 C(-3, -2, 0)이므로

$$\overline{CA}=\sqrt{(1+3)^2+(2+2)^2+(-1)^2}=\sqrt{33}$$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 구에 그은

접선의 접점을 P라 하면

$$\overline{PA}=5$$

따라서 직각삼각형 PAC에서

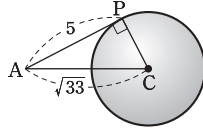
$$\overline{PC}=\sqrt{(\sqrt{33})^2-5^2}=2\sqrt{2}$$

이때 선분 PC의 길이는 구의 반지름의 길이와 같으므로

$$\sqrt{13-k}=2\sqrt{2}, \quad 13-k=8$$

$$\therefore k=5$$

답 ③



0443 구 $x^2+y^2+z^2=9$ 는 중심의 좌표가 (0, 0, 0)이고 반지름의 길이가 3이다.

$x^2+y^2+z^2-10x-8y-6z+49=0$ 에서

$$(x-5)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=1$$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 (5, 4, 3)이고 반지름의 길이는 1이다.

따라서 두 구의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{5^2+4^2+3^2}=5\sqrt{2}$$

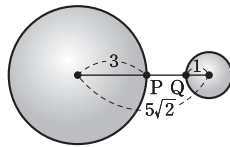
두 점 P, Q의 위치가 오른쪽 그림과

같을 때 두 점 P, Q 사이의 거리가 최

소이므로 구하는 최솟값은

$$5\sqrt{2}-(3+1)=5\sqrt{2}-4$$

답 $5\sqrt{2}-4$



0444 P(a, 0, c)라 하면

... 1단계

$\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로

$$(a+1)^2+(-1)^2+(c-1)^2=(a-1)^2+4^2+(c-2)^2$$

$$\therefore 2a+c=9$$

..... ①

또 $\overline{AP}=\overline{CP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$ 이므로

$$(a+1)^2+(-1)^2+(c-1)^2=(a+1)^2+(-2)^2+c^2$$

$$-2c=2 \quad \therefore c=-1$$

$c=-1$ 을 ①에 대입하면

$$2a-1=9 \quad \therefore a=5$$

... 2단계

따라서 P(5, 0, -1)이므로

$$\overline{OP}=\sqrt{5^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$$

... 3단계

답 $\sqrt{26}$

채점 요소		비율
1단계	점 P의 좌표를 (a, 0, c)로 놓기	20 %
2단계	a, c의 값 구하기	60 %
3단계	OP의 길이 구하기	20 %

0445 A(2, 0, 0), B(0, 4, 0), C(0, 0, 1)

... 1단계

따라서 선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{0+1}{2}\right), \text{ 즉 } \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$$

점 D의 좌표를 (a, b, c)라 하면 선분 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{4+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

... 2단계

이때 사각형 ABCD가 평행사변형이 되려면 두 대각선 AC와

BD의 중점이 일치해야 하므로

$$\frac{a}{2}=1, \frac{4+b}{2}=0, \frac{c}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore a=2, b=-4, c=1$$

따라서 점 D의 좌표는

$$(2, -4, 1)$$

... 3단계

답 (2, -4, 1)

채점 요소		비율
1단계	세 점 A, B, C의 좌표 구하기	20 %
2단계	AC, BD의 중점의 좌표 구하기	40 %
3단계	점 D의 좌표 구하기	40 %

0446 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times (-3) + 1 \times 5}{3+1}, \frac{3 \times 3 + 1 \times 3}{3+1}, \frac{3 \times 6 + 1 \times (-2)}{3+1}\right),$$

$$\text{ 즉 } (-1, 3, 4)$$

선분 BC를 1 : 2로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times (-15) + 2 \times (-3)}{1+2}, \frac{1 \times 3 + 2 \times 3}{1+2}, \frac{1 \times 18 + 2 \times 6}{1+2}\right),$$

$$\text{ 즉 } (-7, 3, 10)$$

... 1단계

이때 구의 중심을 D라 하면 점 D는 선분 PQ의 중점이므로

$$D\left(\frac{-1-7}{2}, \frac{3+3}{2}, \frac{4+10}{2}\right), \text{ 즉 } D(-4, 3, 7)$$

또 구의 반지름의 길이는

$$\overline{DP}=\sqrt{(-1+4)^2+(3-3)^2+(4-7)^2}=3\sqrt{2}$$

... 2단계

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x+4)^2+(y-3)^2+(z-7)^2=18$$

... 3단계

답 $(x+4)^2+(y-3)^2+(z-7)^2=18$

채점 요소	비율
1단계 두 점 P, Q의 좌표 구하기	40 %
2단계 구의 중심의 좌표와 반지름의 길이 구하기	40 %
3단계 구의 방정식 구하기	20 %

0447 xy 평면 위의 점은 z 좌표가 0이므로 주어진 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면

$$x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$$

$$\therefore (x+4)^2 + (y-3)^2 = 16$$

따라서 구와 xy 평면이 만나서 생기는 원의 넓이는 16π 이다.

... 1단계

또 yz 평면 위의 점은 x 좌표가 0이므로 주어진 구의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면

$$y^2 + z^2 - 6y - 2kz + 9 = 0$$

$$\therefore (y-3)^2 + (z-k)^2 = k^2$$

따라서 구와 yz 평면이 만나서 생기는 원의 넓이는 $k^2\pi$ 이다.

... 2단계

즉 $16\pi : k^2\pi = 4 : 1$ 이므로

$$4k^2\pi = 16\pi, \quad k^2 = 4$$

$$\therefore k = 2 \quad (\because k > 0)$$

... 3단계

답 2

채점 요소	비율
1단계 구가 xy 평면과 만나서 생기는 원의 넓이 구하기	40 %
2단계 구가 yz 평면과 만나서 생기는 원의 넓이 구하기	40 %
3단계 k 의 값 구하기	20 %

0448 **전략** 점 A에서 xy 평면에 내린 수선의 발이 삼각형 OBC의 무게중심을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 C에서 x 축에 내린 수선의 발을 M이라 하면 점 M은 $\overline{OB}$ 의 중점이므로

$$\overline{OM} = \frac{1}{2} \overline{OB} = 3$$

$$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$$

또 꼭짓점 A에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 삼각형 OBC의 무게중심이므로

$$\overline{MH} = \frac{1}{3} \overline{CM} = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

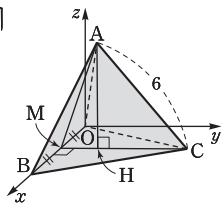
이때 $\overline{AM} = \overline{CM} = 3\sqrt{3}$ 이므로 직각삼각형 AMH에서

$$\overline{AH} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}$$

따라서 A(3, $\sqrt{3}$, $2\sqrt{6}$)이므로

$$a^2 - b^2 + c^2 = 3^2 - (\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{6})^2 = 30$$

답 ④



0449 **전략** 네 점 A, B, C, D의 xy 평면 위로의 정사영을 이용한다.

$$\overline{AB} = \overline{CD} = 5 - 2 = 3$$

$$\overline{AD} = \overline{BC} = \sqrt{0^2 + 5^2 + (b-a)^2}$$

$$= \sqrt{(b-a)^2 + 25}$$

이때 $\overline{AB}$ 는 yz 평면에 수직이고, $\overline{BC}$ 는 yz 평면에 평행하므로 $\overline{AB} \perp \overline{BC}$

따라서 $\square ABCD$ 는 직사각형이므로

$$\square ABCD = \overline{AB} \times \overline{BC}$$

$$= 3\sqrt{(b-a)^2 + 25}$$

네 점 A(2, 0, a), B(5, 0, a), C(5, 5, b), D(2, 5, b)의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 A', B', C', D'이라 하면

$$A'(2, 0, 0), B'(5, 0, 0), C'(5, 5, 0), D'(2, 5, 0)$$

$$\therefore \overline{A'B'} = \overline{C'D'} = 3, \overline{A'D'} = \overline{B'C'} = 5$$

이때 $\overline{A'B'}$ 은 x 축 위에 있고, $\overline{B'C'}$ 은 x 축과 수직이므로 $\overline{A'B'} \perp \overline{B'C'}$

따라서 $\square A'B'C'D'$ 은 직사각형이므로

$$\square A'B'C'D' = \overline{A'B'} \times \overline{B'C'} = 3 \times 5 = 15$$

이때 $\square A'B'C'D' = \square ABCD \cos \theta$ 이므로

$$15 = 3\sqrt{(b-a)^2 + 25} \times \frac{5}{8}$$

$$\sqrt{(b-a)^2 + 25} = 8, \quad (b-a)^2 = 39$$

$$\therefore b-a = \sqrt{39} \quad (\because b > a)$$

답 $\sqrt{39}$

0450 **전략** 삼각형의 닮음을 이용하여 그림자의 반지름의 길이를 구한다.

구 $x^2 + y^2 + (z-6)^2 = 25$ 의 중심을 C라 하면

C(0, 0, 6)이고 구의 반지름의 길이는 5이다.

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 나온 빛이 구와 접하는 한 점을 A라 하고 $\overline{PA}$ 의 연장선이 xy 평면과 만나는 점을 B라 하면

$$\overline{PC} = \overline{OP} - \overline{OC} = 16 - 6 = 10,$$

$$\overline{AC} = 5$$

이므로 직각삼각형 PCA에서

$$\overline{PA} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$$

이때 $\triangle PAC \sim \triangle POB$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{AC} : \overline{OB} = \overline{PA} : \overline{PO}$$

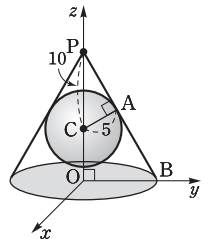
$$5 : \overline{OB} = 5\sqrt{3} : 16, \quad 5\sqrt{3} \overline{OB} = 80$$

$$\therefore \overline{OB} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

즉 구의 그림자는 반지름의 길이가 $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ 인 원이므로 구하는 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{16\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{256}{3} \pi$$

답 $\frac{256}{3} \pi$



05 벡터의 연산

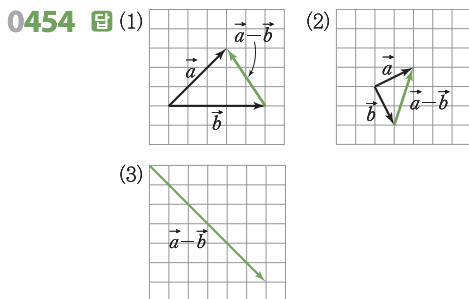
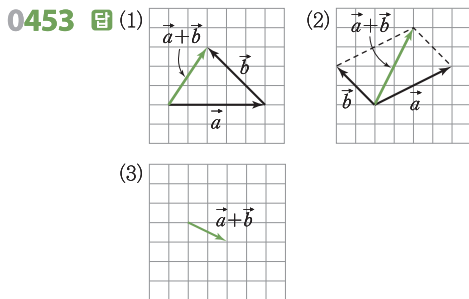
교과서 문제 정복하기

본책 073쪽

- 0451** (1) $|\vec{BC}| = |\vec{BC}| = 4$
 (2) $|\vec{AC}| = |\vec{AC}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

답 (1) 4 (2) 5

- 0452** 답 (1) $\vec{EG}$ (2) $\vec{DC}, \vec{AB}, \vec{EF}, \vec{HG}$



0455 $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$
 $= \vec{AC} + \vec{CD}$
 $= \vec{AD}$

답 $\vec{AD}$

0456 $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{DA} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA}$
 $= \vec{AC} + \vec{CA}$
 $= \vec{AA} = \vec{0}$

답 $\vec{0}$

- 0457** (1) $\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = -\vec{OA} - \vec{OB} = -\vec{a} - \vec{b}$
 (2) $\vec{DC} = \vec{OC} - \vec{OD} = -\vec{OA} + \vec{OB} = -\vec{a} + \vec{b}$

답 (1) $-\vec{a} - \vec{b}$ (2) $-\vec{a} + \vec{b}$

0458 (1) $\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB} = -\vec{a} + \vec{b}$

(2) $\vec{EG} = \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{a} + \vec{b}$

(3) $\vec{DF} = \vec{DB} + \vec{BF} = (\vec{AB} - \vec{AD}) + \vec{AE} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

(4) $\vec{GA} = -\vec{AG} = -(\vec{AE} + \vec{EG}) = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

답 (1) $-\vec{a} + \vec{b}$ (2) $\vec{a} + \vec{b}$
 (3) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ (4) $-\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

0459 $3(\vec{a} + 2\vec{b}) + 2(\vec{a} - 4\vec{b})$
 $= 3\vec{a} + 6\vec{b} + 2\vec{a} - 8\vec{b}$
 $= 5\vec{a} - 2\vec{b}$

답 $5\vec{a} - 2\vec{b}$

0460 $4(3\vec{b} - \vec{a}) - 3(2\vec{a} - \vec{b})$
 $= 12\vec{b} - 4\vec{a} - 6\vec{a} + 3\vec{b}$
 $= -10\vec{a} + 15\vec{b}$

답 $-10\vec{a} + 15\vec{b}$

0461 $\vec{a} - \vec{x} = 2\vec{a} - 5\vec{b}$ 에서
 $\vec{x} = -\vec{a} + 5\vec{b}$

답 $\vec{x} = -\vec{a} + 5\vec{b}$

0462 $3(\vec{x} + 2\vec{a} - 3\vec{b}) = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{x}$ 에서
 $3\vec{x} + 6\vec{a} - 9\vec{b} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{x}$
 $2\vec{x} = -4\vec{a} + 6\vec{b} \quad \therefore \vec{x} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$

답 $\vec{x} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$

0463 두 벡터 $\vec{a} - 2\vec{b}$, $4\vec{a} + k\vec{b}$ 가 서로 평행하므로 0이 아닌 실수 t 에 대하여

$4\vec{a} + k\vec{b} = t(\vec{a} - 2\vec{b})$

$\therefore 4\vec{a} + k\vec{b} = t\vec{a} - 2t\vec{b}$

따라서 $4 = t$, $k = -2t$ 이므로

$k = -8$

답 -8

유형 익히기

• 본책 074~080쪽

0464 오른쪽 그림과 같이 정육각형의 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O라 하면 $\triangle OAB$, $\triangle OCD$ 는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로

$\vec{AD} = 2 \times 2 = 4$

$\therefore |\vec{AD}| = \vec{AD} = 4$

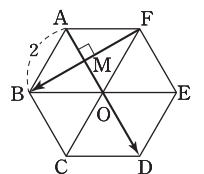
또 두 선분 AD, FB가 만나는 점을 M이라 하면 정삼각형 AOF에서

$\vec{FM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3} \quad \therefore \vec{FB} = 2\vec{FM} = 2\sqrt{3}$

따라서 $|\vec{FB}| = \vec{FB} = 2\sqrt{3}$ 이므로

$|\vec{AD}| \times |\vec{FB}| = 4 \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

답 $8\sqrt{3}$

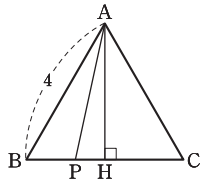


0465 $|\overrightarrow{BH}| = |\overrightarrow{BH}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

답 ⑤

0466 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $|\overrightarrow{AP}|$ 의 최솟값은 $\overrightarrow{AH}$ 의 길이와 같으므로

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$



답 $2\sqrt{3}$

0467 두 점 D, E는 각각 두 선분 AB, BC의 중점이므로

$$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{AF}$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AF}$$

답 ③

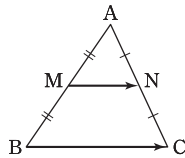
참고! 벡터 $\overrightarrow{AF}$ 와 서로 같은 벡터는 $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{DE}$ 이다.

RPM비법노트

삼각형 ABC에서 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 의 중점을 각각 M, N이라 하면

$$\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$$

$$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$$



0468 답 ③

0469 벡터 $\overrightarrow{AB}$ 와 서로 같은 벡터는 $\overrightarrow{DF}$ 의 1개이므로

$$a = 1$$

... ①단계

벡터 $\overrightarrow{AC}$ 와 크기가 같고 방향이 반대인 벡터는 $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{FE}$ 의 2개이므로

$$b = 2$$

... ②단계

$$\therefore a + b = 3$$

... ③단계

답 3

	채점 요소	비율
①단계	a의 값 구하기	40 %
②단계	b의 값 구하기	40 %
③단계	a+b의 값 구하기	20 %

0470 ㄱ. $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{b}$ (참)

ㄴ. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ (거짓)

ㄷ. $\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ (거짓)

ㄹ. $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

$$\begin{aligned} 0471 \quad \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{HG} - \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HG} - (\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HD}) \\ &= \overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}) = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} \end{aligned}$$

따라서 $l = -1, m = 1, n = -1$ 이므로

$$l - m + n = -3$$

답 -3

다른 풀이 $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HG} = -\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HG}$
 $= -(\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HD}) + \overrightarrow{HG}$
 $= -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$

$$\begin{aligned} 0472 \quad \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FC} \end{aligned}$$

답 ⑤

0473 ㄱ. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ (거짓)

ㄴ. $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ (참)

ㄷ. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

$$\begin{aligned} 0474 \quad \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE} \\ &= (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GF}) + (\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GF}) \\ &\quad + (\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GD}) + (\overrightarrow{GE} - \overrightarrow{GF}) \\ &= (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE}) - \overrightarrow{GF} \\ &= \overrightarrow{0} - \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{FG} \end{aligned}$$

답 ③

0475 $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$ 에서

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$$

$$\therefore \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC}$$

즉 두 벡터 $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{OC}$ 의 크기와 방향이 각각 같으므로

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{OC}$$

따라서 사각형 OBAC는 평행사변형이다.

답 평행사변형

$$0476 \quad 2\vec{x} + \vec{y} = 5\vec{a}$$

..... ㉠

$$3\vec{x} - \vec{y} = \vec{b}$$

..... ㉡

$$\text{㉠} + \text{㉡} \text{을 하면} \quad 5\vec{x} = 5\vec{a} + \vec{b}$$

$$\therefore \vec{x} = \vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$2\left(\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}\right) + \vec{y} = 5\vec{a} \quad \therefore \vec{y} = 3\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{x} + \vec{y} &= \left(\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}\right) + \left(3\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b}\right) \\ &= 4\vec{a} - \frac{1}{5}\vec{b} \end{aligned}$$

답 ④

$$0477 \quad 2\vec{p} + 3(-\vec{p} + \vec{q})$$

$$= 2\vec{p} - 3\vec{p} + 3\vec{q} = -\vec{p} + 3\vec{q}$$

$$= -(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}) + 3(-\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c})$$

$$= -4\vec{a} + 4\vec{b} + 6\vec{c}$$

답 ②

$$0478 \quad -(\vec{x} - 2\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} + \vec{b} \text{에서}$$

$$-\vec{x} + 2\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \vec{b} \quad \therefore \vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$$

따라서 $m = 1, n = -2$ 이므로

$$3m + n = 1$$

답 1

0479 $\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{BP}$ 이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BP}$ 는 방향이 반대이고 $|\overrightarrow{AP}| = 2|\overrightarrow{BP}|$ 이다.

이때 $AB = 12$ 이므로

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3} \times 12 = 8$$

$$\therefore |\overrightarrow{AP}| = \overrightarrow{AP} = 8$$

답 8

0480 오른쪽 그림과 같이 정육각형의 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O라 하면

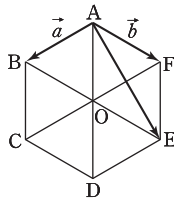
$$\overrightarrow{AO} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE} \\ &= (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} \\ &= \vec{a} + 2\vec{b} \end{aligned}$$

따라서 $m=1$, $n=2$ 이므로

$$m+n=3$$

답 3



0481 ① $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\vec{a}$

② $\overrightarrow{RN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{RP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PR} = -\frac{1}{2}\vec{b}$

③ $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ} = \vec{b} - \vec{a}$

④ $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PM} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$

⑤ $\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} \\ &= \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \end{aligned}$

답 ④

0482 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로 세 중선을 각 꼭짓점으로부터 2:1로 내분한다.

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{GR} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{BR} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) \\ &= -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} \end{aligned}$$

답 $-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$

0483 ㄱ. $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{OE}$ (참)

ㄴ. $\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} \\ &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} \\ &= \overrightarrow{AA} = \vec{0} \end{aligned}$ (참)

ㄷ. $\begin{aligned} 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} &= 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BO} \\ &= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}) \\ &= 2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} \end{aligned}$ (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0484 오른쪽 그림과 같이 한 정육각형의 세 대각선의 교점을 E라 하면

$$\overrightarrow{OE} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{BQ} &= \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PQ} \\ &= 3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} \\ &= 3\vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= 4\vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$$

또 $\overrightarrow{PR} = 2\overrightarrow{OB} = 2\vec{b}$ 이므로

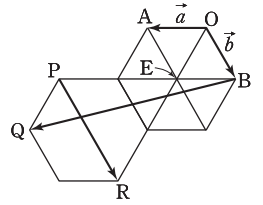
$$\begin{aligned} \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PR} &= (4\vec{a} + \vec{b}) + 2\vec{b} \\ &= 4\vec{a} + 3\vec{b} \end{aligned}$$

... 1단계

... 2단계

... 3단계

답 $4\vec{a} + 3\vec{b}$



채점 요소	비율
1단계 $\overrightarrow{BQ}$ 를 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 로 나타내기	60 %
2단계 $\overrightarrow{PR}$ 를 $\vec{b}$ 로 나타내기	20 %
3단계 $\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PR}$ 를 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 로 나타내기	20 %

0485 $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\vec{a}$ 이므로

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b}\right) = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

또 $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ 이므로

$$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DC} = \left(\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) - \vec{a} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

답 ①

0486 ㄱ. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$= \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} \text{ (참)}$$

ㄴ. $\begin{aligned} \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AE} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \end{aligned}$ (참)

ㄷ. $\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \end{aligned}$ (참)

ㄹ. $\begin{aligned} \overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) - \overrightarrow{AD} \\ &= \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} \end{aligned}$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0487 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BF} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CF} = \vec{c}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EC} &= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED} \\ &= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}) \\ &= (\vec{a} - \vec{c}) + (\vec{b} - \vec{c}) \\ &= \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} \end{aligned}$$

따라서 $l=1$, $m=1$, $n=-2$ 이므로

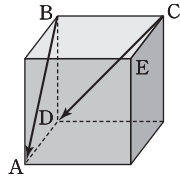
$$l-m+n=-2$$

답 -2

0488 주어진 전개도를 접어서 만든 정육면체는 오른쪽 그림과 같다.

이때 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EA}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{EA} \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BE}\end{aligned}$$



답 ③

0489 $(m+n)\vec{a} + 2(m-2n)\vec{b} = -2m\vec{a} + (m-3n+4)\vec{b}$ 에서

$$m+n = -2m, 2(m-2n) = m-3n+4$$

$$\therefore 3m+n=0, m-n=4$$

두 식을 연립하여 풀면 $m=1, n=-3$

$$\therefore m+n=-2$$

답 ②

0490 $(2m-n-3)\vec{a} - (m+4n-6)\vec{b} = \vec{0}$ 에서

$$2m-n-3=0, m+4n-6=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $m=2, n=1$

$$\therefore m^2+n^2=5$$

답 5

0491 $(x^2-x)\vec{a} + (x+2y)\vec{b} = (7-x+y^2)\vec{a} + (1+y)\vec{b}$

에서

$$x^2-x=7-x+y^2, x+2y=1+y$$

... ①단계

$$x^2-x=7-x+y^2 \text{에서 } x^2-y^2=7$$

$$\therefore (x+y)(x-y)=7$$

..... ㉠

$$x+2y=1+y \text{에서}$$

$$x+y=1$$

..... ㉡

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } x-y=7$$

..... ㉢

$$\textcircled{1}, \textcircled{3} \text{을 연립하여 풀면 } x=4, y=-3$$

... ②단계

$$\therefore xy=-12$$

... ③단계

답 -12

	채점 요소	비율
①단계	x, y 에 대한 방정식 세우기	40 %
②단계	x, y 의 값 구하기	50 %
③단계	xy 의 값 구하기	10 %

0492 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (k\vec{a} + \vec{b}) - (2\vec{a} - 3\vec{b})$
 $= (k-2)\vec{a} + 4\vec{b}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (\vec{a} - 2\vec{b}) - (2\vec{a} - 3\vec{b}) \\ &= -\vec{a} + \vec{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= m\overrightarrow{AB} \text{에서 } (k-2)\vec{a} + 4\vec{b} = m(-\vec{a} + \vec{b}) \\ \therefore (k-2)\vec{a} + 4\vec{b} &= -m\vec{a} + m\vec{b}\end{aligned}$$

따라서 $k-2=-m, 4=m$ 이므로

$$k=-2, m=4$$

$$\therefore m-k=6$$

답 ⑤

0493 오른쪽 그림과 같이 점 O를 시점으로 하는 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 를 정하면

$$\overrightarrow{OA} = -\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OB} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$$

이 식을 $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ 에 대입하면

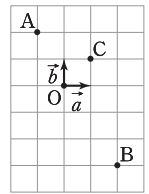
$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= m(-\vec{a} + 2\vec{b}) + n(2\vec{a} - 3\vec{b}) \\ &= (-m+2n)\vec{a} + (2m-3n)\vec{b}\end{aligned}$$

이므로 $-m+2n=1, 2m-3n=1$

두 식을 연립하여 풀면 $m=5, n=3$

$$\therefore m-n=2$$

답 ①



0494 오른쪽 그림과 같이 점 A를 시점으로 하는 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 를 정하면

$$\overrightarrow{AB} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AD} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$$

위의 식을 $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ 에 대입하면

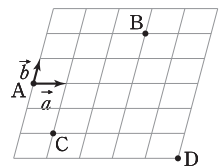
$$\begin{aligned}5\vec{a} - 3\vec{b} &= m(3\vec{a} + 2\vec{b}) + n(\vec{a} - 2\vec{b}) \\ &= (3m+n)\vec{a} + (2m-2n)\vec{b}\end{aligned}$$

이므로 $3m+n=5, 2m-2n=-3$

두 식을 연립하여 풀면 $m=\frac{7}{8}, n=\frac{19}{8}$

$$\therefore m+n=\frac{13}{4}$$

답 ②



0495 오른쪽 그림과 같이 점 O를 시점으로 하는 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 를 정하면

$$\overrightarrow{OP} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OR} = 2\vec{a} + \vec{b}$$

위의 식을 $\overrightarrow{OR} = m\overrightarrow{OP} + n\overrightarrow{OQ}$ 에 대입하면

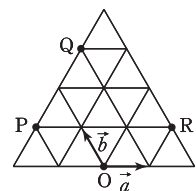
$$\begin{aligned}2\vec{a} + \vec{b} &= m(-\vec{a} + \vec{b}) + n(\vec{a} + 3\vec{b}) \\ &= (-m+n)\vec{a} + (m+3n)\vec{b}\end{aligned}$$

이므로 $-m+n=2, m+3n=1$

두 식을 연립하여 풀면 $m=-\frac{5}{4}, n=\frac{3}{4}$

$$\therefore mn = -\frac{15}{16}$$

답 -15/16



0496 $\vec{p} + \vec{q} = (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} + 3\vec{b}) = 2\vec{a} + 4\vec{b}$

$$\vec{r} - \vec{q} = (2\vec{a} + k\vec{b}) - (\vec{a} + 3\vec{b}) = \vec{a} + (k-3)\vec{b}$$

두 벡터 $\vec{p} + \vec{q}, \vec{r} - \vec{q}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{r} - \vec{q} = t(\vec{p} + \vec{q}) \quad (t \neq 0)$$

라 하면 $\vec{a} + (k-3)\vec{b} = t(2\vec{a} + 4\vec{b})$

$$\therefore \vec{a} + (k-3)\vec{b} = 2t\vec{a} + 4t\vec{b}$$

따라서 $1=2t$, $k-3=4t$ 이므로

$$t=\frac{1}{2}, k=5$$

답 5

다른 풀이 $\vec{r}-\vec{q}=\vec{a}+(k-3)\vec{b}$, $\vec{p}+\vec{q}=2\vec{a}+4\vec{b}$ 에서

$$\frac{1}{2}=\frac{k-3}{4}, \quad k-3=2$$

$$\therefore k=5$$

0497 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{q}=k\vec{p} \quad (k \neq 0)$$

라 하면 $m\vec{a}+8\vec{b}=k(2\vec{a}+m\vec{b})$

$$\therefore m\vec{a}+8\vec{b}=2k\vec{a}+km\vec{b}$$

따라서 $m=2k$, $8=km$ 이므로

$$k=2, m=4 \quad (\because m>0)$$

답 4

0498 $\vec{x}+3\vec{a}=\vec{a}+\vec{b}$ 에서

$$\vec{x}=-2\vec{a}+\vec{b}$$

$\vec{x}+\vec{y}=m(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}$ 에서

$$\vec{y}=m(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}-\vec{x}$$

$$=m\vec{a}-m\vec{b}+\vec{b}-(-2\vec{a}+\vec{b})$$

$$=(m+2)\vec{a}-m\vec{b}$$

... 1단계

두 벡터 $\vec{x}$, $\vec{y}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{y}=k\vec{x} \quad (k \neq 0)$$

라 하면 $(m+2)\vec{a}-m\vec{b}=k(-2\vec{a}+\vec{b})$

$$\therefore (m+2)\vec{a}-m\vec{b}=-2k\vec{a}+k\vec{b}$$

... 2단계

따라서 $m+2=-2k$, $-m=k$ 이므로

$$k=-2, m=2$$

... 3단계

답 2

	채점 요소	비율
1단계	$\vec{x}$, $\vec{y}$ 를 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 로 나타내기	30 %
2단계	$\vec{x}$, $\vec{y}$ 가 서로 평행함을 이용하여 식 세우기	40 %
3단계	실수 m 의 값 구하기	30 %

$$\begin{aligned} 0499 \quad \vec{AB} &= \vec{OB} - \vec{OA} = (2\vec{a} - \vec{b}) - (\vec{a} - 2\vec{b}) \\ &= \vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (5\vec{a} + k\vec{b}) - (\vec{a} - 2\vec{b})$$

$$= 4\vec{a} + (k+2)\vec{b}$$

두 벡터 $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{AC} = t\vec{AB} \quad (t \neq 0)$$

라 하면 $4\vec{a} + (k+2)\vec{b} = t(\vec{a} + \vec{b})$

$$\therefore 4\vec{a} + (k+2)\vec{b} = t\vec{a} + t\vec{b}$$

따라서 $4=t$, $k+2=t$ 이므로

$$k=2$$

답 ②

0500 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$$\vec{AC} = t\vec{AB} \quad (t \neq 0)$$

이어야 한다.

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (2\vec{a} - k\vec{b}) - (\vec{a} + \vec{b})$$

$$= \vec{a} - (k+1)\vec{b}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (3\vec{a} + 7\vec{b}) - (\vec{a} + \vec{b})$$

$$= 2\vec{a} + 6\vec{b}$$

$$\text{이므로 } \vec{a} - (k+1)\vec{b} = t(2\vec{a} + 6\vec{b})$$

$$\therefore \vec{a} - (k+1)\vec{b} = 2t\vec{a} + 6t\vec{b}$$

따라서 $1=2t$, $-k-1=6t$ 이므로

$$t=\frac{1}{2}, k=-4$$

답 -4

$$0501 \quad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = 2\vec{b} - (-\vec{a}) = \vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \vec{a} + 4\vec{b} - (-\vec{a})$$

$$= 2\vec{a} + 4\vec{b} = 2(\vec{a} + 2\vec{b})$$

$$\text{이므로 } \vec{AC} = 2\vec{AB}$$

따라서 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

답 풀이 참조

$$0502 \quad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a} \text{ 이고}$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3} - \vec{a}$$

$$= \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA} = \frac{\vec{a} - 3\vec{b}}{4} - \vec{a}$$

$$= -\frac{3}{4}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\vec{AE} = \vec{OE} - \vec{OA} = \frac{3\vec{a} - \vec{b}}{2} - \vec{a}$$

$$= -\frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\text{이므로 } \vec{AC} = \frac{1}{3}\vec{AB}, \vec{AE} = -\frac{1}{2}\vec{AB}$$

따라서 직선 AB 위의 점은 C, E이다.

답 C, E

0503 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$$\vec{AC} = k\vec{AB} \quad (k \neq 0)$$

이어야 한다.

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (3-t)\vec{OA} + 2t\vec{OB} - \vec{OA}$$

$$= (2-t)\vec{OA} + 2t\vec{OB}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \text{ 이므로}$$

$$(2-t)\vec{OA} + 2t\vec{OB} = k(\vec{OB} - \vec{OA})$$

$$\therefore (2-t)\vec{OA} + 2t\vec{OB} = -k\vec{OA} + k\vec{OB}$$

따라서 $2-t=-k$, $2t=k$ 이므로

$$t=-2, k=-4$$

답 -2

05

복
합
의
연
산

$$\begin{aligned}
 0504 \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} &= (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{BC} \\
 &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \\
 &= 2\overrightarrow{CB} \\
 \therefore |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}| &= 2|\overrightarrow{CB}| = 2 \times 1 = 2
 \end{aligned}$$

답 2

$$\begin{aligned}
 0505 \quad 4(\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}) - 3(\vec{a} - \vec{b} - 3\vec{c}) \\
 = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} \\
 = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \\
 = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AE} \\
 = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DF}
 \end{aligned}$$

... 1단계

... 2단계

따라서 구하는 벡터의 크기는

$$|\overrightarrow{DF}| = |\overrightarrow{DF}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

... 3단계

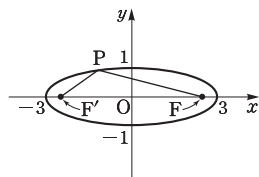
답 $\sqrt{3}$

채점 요소	비율
1단계 주어진 식을 간단히 하기	20 %
2단계 주어진 식을 한 벡터로 나타내기	40 %
3단계 벡터의 크기 구하기	40 %

$$\begin{aligned}
 0506 \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \\
 = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA}) \\
 = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} - 4\overrightarrow{OA} \\
 \text{이때 } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0} \text{에서} \\
 \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = -\overrightarrow{OA} \text{이므로} \\
 \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{OA} - 4\overrightarrow{OA} = -5\overrightarrow{OA} \\
 \therefore |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}| = |-5\overrightarrow{OA}| = 5|\overrightarrow{OA}| \\
 = 5 \times 2 = 10
 \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}
 0507 \quad \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{F'O} \text{이므로} \\
 \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{F'O} \\
 = \overrightarrow{F'P} \\
 \therefore |\overrightarrow{F'P}| = |\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF}| = 2
 \end{aligned}$$



한편 타원의 정의에 의하여

$$|\overrightarrow{PF'}| + |\overrightarrow{PF}| = 2 \times 3 = 6$$

이므로

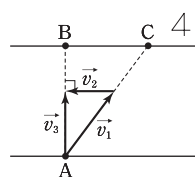
$$|\overrightarrow{PF'}| + |\overrightarrow{PF}| = 6, \quad 2 + |\overrightarrow{PF}| = 6$$

$$\therefore |\overrightarrow{PF}| = 4$$

답 4

0508 배가 B 지점에 도착하기 위해 C 지점을 향해 이동한다고 할 때, 잔잔한 물에서의 배의 속도를 $\vec{v}_1$, 강물의 속도를 $\vec{v}_2$, 강물에서 배가 실제로 움직이는 속도를 $\vec{v}_3$ 이라 하면

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad \therefore |\vec{v}_3| = |\vec{v}_1 + \vec{v}_2|$$



이때 $|\vec{v}_1| = 50$, $|\vec{v}_2| = 30$ 이므로

$$|\vec{v}_3| = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$$

즉 강물에서 배가 실제로 움직이는 속력은 분속 40 m이므로 배가 B 지점에 도착하는 데 걸리는 시간은

$$\frac{200}{40} = 5 \text{ (분)}$$

답 5분

0509 오른쪽 그림과 같이 C 지점에서 세 지점 A, B, D의 방향으로 작용하는 힘을 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 라 하면

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$$

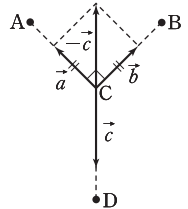
이때 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{c}| = 60 \text{ (N)}$ 이므로

$$|\vec{a}| = |\vec{c}| \cos 45^\circ$$

$$= 60 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 30\sqrt{2} \text{ (N)}$$

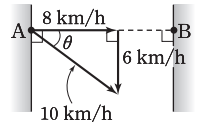
따라서 C 지점에서 A 지점의 방향으로 작용하는 힘의 크기는

$30\sqrt{2}$ N이다. 답 $30\sqrt{2}$ N



0510 (1) 오른쪽 그림에서 흐르는 강물에 서의 배의 속력은

$$\sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ (km/h)}$$



(2) $\overrightarrow{AB}$ 와 배가 실제로 움직이는 방향이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\tan \theta = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

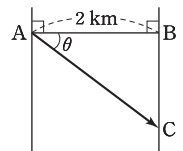
이때 실제로 배가 도착한 지점을 C라 하면

$$\overline{BC} = \overline{AB} \tan \theta$$

$$= 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \text{ (km)}$$

따라서 B 지점으로부터 $\frac{3}{2}$ km 떨어진 곳에 도착한다.

답 (1) 시속 10 km (2) $\frac{3}{2}$ km



시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 081~083쪽

0511 $\vec{OA}$, $\vec{EF}$ 는 크기와 방향이 각각 같으므로 $\vec{OA} = \vec{EF}$ (참)

$\therefore$ 두 벡터 $\vec{OB}$, $\vec{CD}$ 는 크기가 같고 방향이 반대이므로

$$\vec{OB} = -\vec{CD} \text{ (참)}$$

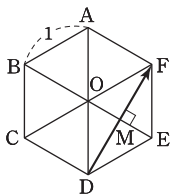
ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 두 선분 OE, DF가
만나는 점을 M이라 하면

$$\overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \overline{DF} = 2\overline{DM} = \sqrt{3}$$

$$\therefore |\overrightarrow{DF}| = \overline{DF} = \sqrt{3} \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.



답 ③

0512 ② $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$

③ $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}$

④ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB}$ 이므로

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

⑤ $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$
 $= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CB}$

답 ⑤

0513 $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$
 $= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$
 $= \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

답 ③

0514 $2(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{x}) = 3(\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{x})$ 에서

$$2\vec{a} - 4\vec{b} + 2\vec{x} = 3\vec{a} - 6\vec{b} + 6\vec{x}$$

$$4\vec{x} = -\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\therefore \vec{x} = -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

따라서 $m = -\frac{1}{4}$, $n = \frac{1}{2}$ 이므로

$$m + n = \frac{1}{4}$$

답 ③

0515 $\overrightarrow{OC} = -\vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{OD} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ 이므로

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = (-\vec{a} + 2\vec{b}) + (2\vec{a} + 3\vec{b})$$

$$= \vec{a} + 5\vec{b}$$

답 $\vec{a} + 5\vec{b}$

0516 $2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$ 에서

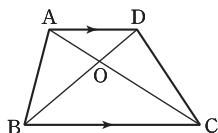
$$2(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$$

$$\therefore 2\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$$

즉 $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ 이므로

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$$

따라서 사각형 ABCD는 사다리꼴이다.



답 사다리꼴

0517 $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{BA} = -2\vec{a}$

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 2(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\therefore \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{AD} = -2\vec{a} + 2(\vec{b} - \vec{a})$$

$$= -4\vec{a} + 2\vec{b}$$

답 ②

0518 오른쪽 그림과 같이 정육각형의 세
대각선 AD, BE, CF의 교점을 O라 하면

$$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\therefore \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$$

$$= -\vec{b} + \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$= \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

따라서 $m = \frac{3}{2}$, $n = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$m - n = 2$$

답 2

0519 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD}$

$$= 2\overrightarrow{OA} - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

$$= 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$$

답 $2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

0520 $m(\vec{a} - \vec{b}) + n(3\vec{a} - 2\vec{b}) - \vec{b} = n\vec{a} + m(-\vec{a} + 2\vec{b})$

에서

$$(m + 3n)\vec{a} - (m + 2n + 1)\vec{b} = (-m + n)\vec{a} + 2m\vec{b}$$

따라서 $m + 3n = -m + n$, $-(m + 2n + 1) = 2m$ 이므로

$$m + n = 0, 3m + 2n + 1 = 0$$

두 식을 연립하여 풀면 $m = -1$, $n = 1$

$$\therefore m - n = -2$$

답 ②

0521 $\vec{p} + \vec{q} = (\vec{a} - \vec{b}) + (m\vec{a} + 3\vec{b})$

$$= (m + 1)\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\vec{q} - \vec{r} = (m\vec{a} + 3\vec{b}) - (2\vec{a} - 5\vec{b}) = (m - 2)\vec{a} + 8\vec{b}$$

두 벡터 $\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{q} - \vec{r}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{q} - \vec{r} = k(\vec{p} + \vec{q}) \quad (k \neq 0)$$

라 하면 $(m - 2)\vec{a} + 8\vec{b} = k\{(m + 1)\vec{a} + 2\vec{b}\}$

$$\therefore (m - 2)\vec{a} + 8\vec{b} = k(m + 1)\vec{a} + 2k\vec{b}$$

따라서 $m - 2 = k(m + 1)$, $8 = 2k$ 이므로

$$k = 4, m = -2$$

답 ①

0522 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \quad (k \neq 0)$$

이어야 한다.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (\vec{a} + t\vec{b}) - (-3\vec{a} - \vec{b})$$

$$= 4\vec{a} + (t + 1)\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (5\vec{a} - 3\vec{b}) - (-3\vec{a} - \vec{b})$$

$$= 8\vec{a} - 2\vec{b}$$

이므로 $4\vec{a} + (t + 1)\vec{b} = k(8\vec{a} - 2\vec{b})$

$$\therefore 4\vec{a} + (t + 1)\vec{b} = 8k\vec{a} - 2k\vec{b}$$

따라서 $4 = 8k$, $t + 1 = -2k$ 이므로

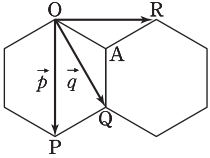
$$k = \frac{1}{2}, t = -2$$

답 -2

0523 $|\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DE}| = |\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DE}|$
 $= |\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DE}|$
 $= |\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE}|$
 $= |\overrightarrow{BE}| = BE = 2$ 답 ③

0524 $2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}$
 $= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$
 $= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DA}$
 $= \overrightarrow{DF}$
 $\therefore |2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = |\overrightarrow{DF}| = DF$
 $= \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$ 답 $2\sqrt{3}$

0525 오른쪽 그림과 같이 공유하는 변을 $\overrightarrow{AQ}$ 라 하면



$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QA}$
 $= \overrightarrow{OQ} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OP}$
 $= -\frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q}$... 1단계
또 $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = -\vec{p} + \vec{q}$ 이므로 ... 2단계
 $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AR}$
 $= \left(-\frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q}\right) + (-\vec{p} + \vec{q})$
 $= -\frac{3}{2}\vec{p} + 2\vec{q}$... 3단계
따라서 $m = -\frac{3}{2}$, $n = 2$ 이므로 ... 4단계
 $mn = -3$ 답 -3

채점 요소	비율
1단계 공유하는 변을 $\overrightarrow{AQ}$ 라 하고 $\overrightarrow{OA}$ 를 $\vec{p}$, $\vec{q}$ 로 나타내기	40 %
2단계 $\overrightarrow{AR}$ 를 $\vec{p}$, $\vec{q}$ 로 나타내기	20 %
3단계 $\overrightarrow{OR}$ 를 $\vec{p}$, $\vec{q}$ 로 나타내기	20 %
4단계 mn 의 값 구하기	20 %

0526 $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{q}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{r}$ 라 하면

$\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$ ㉠
 $\vec{b} = \vec{p} + \vec{r}$ ㉡
 $\vec{c} = \vec{q} + \vec{r}$ ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면
 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 2(\vec{p} + \vec{q} + \vec{r})$
 $\therefore \vec{p} + \vec{q} + \vec{r} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ ㉣

㉣에 ㉢을 대입하면
 $\vec{p} + \vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$
 $\therefore \vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$... 1단계

$\therefore \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB}$
 $= \vec{c} - \vec{p}$
 $= \vec{c} - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$
 $= -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}$... 2단계

답 $-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}$

채점 요소	비율
1단계 벡터 $\overrightarrow{AB}$ 를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 로 나타내기	70 %
2단계 벡터 $\overrightarrow{BH}$ 를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 로 나타내기	30 %

0527 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (-2\vec{a} + 3\vec{b}) - (3\vec{a} + \vec{b})$
 $= -5\vec{a} + 2\vec{b}$
 $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR} = \{(m+3)\vec{a} + \vec{b}\} - (-5\vec{a} + m\vec{b})$
 $= (m+8)\vec{a} + (1-m)\vec{b}$... 1단계

두 벡터 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ 가 서로 평행하므로
 $\overrightarrow{RS} = k\overrightarrow{PQ} \quad (k \neq 0)$
라 하면 $(m+8)\vec{a} + (1-m)\vec{b} = k(-5\vec{a} + 2\vec{b})$
 $\therefore (m+8)\vec{a} + (1-m)\vec{b} = -5k\vec{a} + 2k\vec{b}$... 2단계

따라서 $m+8 = -5k$, $1-m = 2k$ 이므로
 $k = -3$, $m = 7$... 3단계

답 7

채점 요소	비율
1단계 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ 를 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 로 나타내기	30 %
2단계 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ 가 서로 평행함을 이용하여 식 세우기	40 %
3단계 실수 m 의 값 구하기	30 %

0528 $\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BD}$
 $= \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{BD}$
 $= -\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{BD}$
 $= \overrightarrow{BD}$... 1단계

즉 $|\overrightarrow{BD}| = |\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}| = 2$ 이므로
 $|\overrightarrow{BD}| = 2$
따라서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 k 라 하면
 $\sqrt{2}k = 2 \quad \therefore k = \sqrt{2}$... 2단계

답 $\sqrt{2}$

채점 요소	비율
1단계 $\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ 를 한 벡터로 나타내기	70 %
2단계 정사각형 ABCD의 한 변의 길이 구하기	30 %

0529 **전략** 벡터 $\overrightarrow{OP}$ 는 벡터 $\overrightarrow{OA}$ 와 방향이 같은 단위벡터를 이용한다.
 $|\overrightarrow{OP}| = \frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OA}|} = 1$ 이고 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{|\overrightarrow{OA}|} \times \overrightarrow{OA}$ 이므로 벡터
 $\overrightarrow{OP}$ 는 벡터 $\overrightarrow{OA}$ 와 방향이 같은 단위벡터이다.

오른쪽 그림과 같이 원

$(x-1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 1$ 의 중심을 Q,
원점 O에서 원에 그은 접선의 접점 중 제
1사분면 위의 점을 R라 하면 직각삼각형
ORQ에서

$$\tan(\angle QOR) = \frac{QR}{OR} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

이므로 $\angle QOR = 30^\circ$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 1, 중심각의 크
기가 60° 인 부채꼴의 호이므로 구하는 길이는

$$2\pi \times 1 \times \frac{60}{360} = \frac{\pi}{3} \quad \text{답 } \frac{\pi}{3}$$

0530 [전략] 세 점 A, P, D와 세 점 B, P, C가 각각 한 직선 위에 있음을
이용한다.

세 점 A, P, D가 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AD} \quad (k \neq 0)$$

라 하면 $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA})$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OD}$$

$$= (1-k)\overrightarrow{OA} + \frac{k}{2}\overrightarrow{OB} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

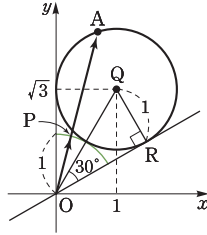
또 세 점 B, P, C가 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{BP} = l\overrightarrow{BC} \quad (l \neq 0)$$

라 하면 $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = l(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = l\overrightarrow{OC} + (1-l)\overrightarrow{OB}$$

$$= \frac{2l}{3}\overrightarrow{OA} + (1-l)\overrightarrow{OB} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$



①, ②에서

$$(1-k)\overrightarrow{OA} + \frac{k}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{2l}{3}\overrightarrow{OA} + (1-l)\overrightarrow{OB}$$

$$\text{즉 } 1-k = \frac{2l}{3}, \quad \frac{k}{2} = 1-l \text{ 이므로}$$

$$k = \frac{1}{2}, \quad l = \frac{3}{4}$$

$$\text{따라서 } \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} \text{ 이므로}$$

$$m = \frac{1}{2}, \quad n = \frac{1}{4} \quad \therefore m+n = \frac{3}{4} \quad \text{답 } \frac{3}{4}$$

0531 [전략] $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OF}$ 를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형을 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 $\overrightarrow{OF}$ 와 같은

벡터 $\overrightarrow{BP}$ 를 생각하면 $\square OBPF$

는 평행사변형이므로

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OP}$$

이때 $\overline{BF}$ 의 중점을 M이라 하

면 점 M은 평행사변형 OBPF

의 두 대각선의 교점이므로

$$\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OM}$$

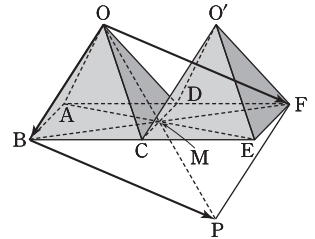
또 점 M은 $\overline{CD}$ 의 중점이므로

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$$

$$\therefore |\overrightarrow{OP}| = 2|\overrightarrow{OM}| = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF}|^2 = |\overrightarrow{OP}|^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$$

답 12



05

100
10
10
10
10

06 벡터의 성분과 내적

교과서 문제 정복하기

본책 085쪽, 087쪽

0532 (1) $\overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c}$
 (2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (\vec{b} - \vec{a}) + (\vec{c} - \vec{a}) = -2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 (3) $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = 2(\vec{b} - \vec{a}) - (\vec{c} - \vec{b}) = -2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$
 [답] (1) $\vec{a} - \vec{c}$ (2) $-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
 (3) $-2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$

0533 $\vec{p} = \frac{3\vec{b} + 2\vec{a}}{3+2} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$ [답] $\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$

0534 $\vec{q} = \frac{2\vec{b} + 3\vec{a}}{2+3} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$ [답] $\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

0535 [답] $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

0536 (1) $\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$
 (2) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = (\vec{a} - \vec{g}) + (\vec{b} - \vec{g}) + (\vec{c} - \vec{g})$
 $= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3\vec{g}$
 $= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3 \times \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$
 $= \vec{0}$

[답] 풀이 참조

0537 [답] (2, -3) **0538** [답] (-1, -5)

0539 [답] $3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ **0540** [답] $-4\vec{e}_1 + 9\vec{e}_2$

0541 $|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ [답] $\sqrt{13}$

0542 $|\vec{b}| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13$ [답] 13

0543 $3 = n - 2, m - 1 = -4$ 이므로
 $m = -3, n = 5$

[답] $m = -3, n = 5$

0544 $2m + 1 = 5, 3 = n + 1$ 이므로
 $m = 2, n = 2$

[답] $m = 2, n = 2$

0545 (1) $\vec{a} + \vec{b} = (-2, 3) + (4, 2) = (2, 5)$
 (2) $-2\vec{a} - \vec{b} = -2(-2, 3) - (4, 2) = (0, -8)$
 [답] (1) (2, 5) (2) (0, -8)

0546 $\vec{a} = t\vec{b} (t \neq 0)$ 라 하면
 $(3, -2) = t(-12, k)$
 따라서 $3 = -12t, -2 = kt$ 이므로

$t = -\frac{1}{4}, k = 8$

[답] 8

[다른 풀이] $\frac{-12}{3} = \frac{k}{-2}$ 에서 $3k = 24$
 $\therefore k = 8$

0547 $\vec{a} = t\vec{b} (t \neq 0)$ 라 하면
 $(1, k+2) = t(k, 3)$
 $\therefore 1 = kt, k+2 = 3t$

$k = 3t - 2$ 를 $kt = 1$ 에 대입하면

$(3t-2)t = 1, \quad 3t^2 - 2t - 1 = 0$

$(3t+1)(t-1) = 0 \quad \therefore t = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } t = 1$

이때 $t = 1$ 이면 $k = 1$ 이므로 $t \neq 1$

따라서 $t = -\frac{1}{3}$ 이므로 $k = -3$

[답] -3

0548 $\overrightarrow{AB} = (2, 1) - (3, -1) = (-1, 2)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

[답] $\overrightarrow{AB} = (-1, 2), |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}$

0549 $\overrightarrow{AB} = (-6, 8) - (-3, 4) = (-3, 4)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

[답] $\overrightarrow{AB} = (-3, 4), |\overrightarrow{AB}| = 5$

0550 [답] (-1, 3, -2)

0551 [답] (5, 0, 4)

0552 [답] $2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 8\vec{e}_3$

0553 [답] $\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$

0554 $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$

[답] 3

0555 $|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{35}$

[답] $\sqrt{35}$

0556 $-7 = p - 2, 4 = 3q - 2, 3r = -12$ 이므로

$p = -5, q = 2, r = -4$

[답] $p = -5, q = 2, r = -4$

0557 $-p = 2, 3 = -q + 1, r - 1 = 2r + 3$ 이므로

$p = -2, q = -2, r = -4$

[답] $p = -2, q = -2, r = -4$

0558 (1) $2\vec{a} + \vec{b} = 2(-1, 4, 2) + (0, 3, -5)$
 $= (-2, 11, -1)$

(2) $3\vec{a} + 2\vec{b} = 3(-1, 4, 2) + 2(0, 3, -5)$
 $= (-3, 18, -4)$

[답] (1) (-2, 11, -1) (2) (-3, 18, -4)

0559 $\overrightarrow{AB} = (-2, 0, 5) - (1, 2, 3) = (-3, -2, 2)$
 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{17}$
답 $\overrightarrow{AB} = (-3, -2, 2), |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{17}$

0560 $\overrightarrow{AB} = (1, 5, 4) - (-2, 1, -1) = (3, 4, 5)$
 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$
답 $\overrightarrow{AB} = (3, 4, 5), |\overrightarrow{AB}| = 5\sqrt{2}$

0561 (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ = 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$
 (2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}| \cos (180^\circ - 120^\circ) = -3 \times 4 \times \frac{1}{2} = -6$
답 (1) $6\sqrt{2}$ (2) -6

0562 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times (-3) + 3 \times 2 = 3$ **답** 3

0563 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times (-2) + (-1) \times 4 = -8$ **답** -8

0564 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 3 + (-3) \times 2 + 2 \times 1 = -1$ **답** -1

0565 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 4 + 2 \times (-2) + (-1) \times 4 = 0$ **답** 0

0566 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 5 + 2 \times 0 = 5 \geq 0$ 이므로
 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{1^2 + 2^2} \sqrt{5^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ **답** $\frac{\sqrt{5}}{5}$

0567 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + (-1) \times (-1) + 2 \times (-1) = 1 \geq 0$ 이므로
 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$ **답** $\frac{\sqrt{3}}{9}$

0568 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \times 2 + 3 \times (-1) = -5 < 0$ 이므로 두 벡터가 이루는 각의 크기를 θ ($90^\circ < \theta \leq 180^\circ$)라 하면
 $\cos (180^\circ - \theta) = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = -\frac{-5}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 따라서 $180^\circ - \theta = 45^\circ$ 이므로 $\theta = 135^\circ$ **답** 135°

0569 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 3 + 3 \times 1 + 1 \times (-2) = 7 \geq 0$ 이므로 두 벡터가 이루는 각의 크기를 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$)라 하면
 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{7}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{2}$
 $\therefore \theta = 60^\circ$ **답** 60°

0570 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 에서
 $3 \times k + 2 \times 6 = 0, \quad 3k = -12$
 $\therefore k = -4$ **답** -4

0571 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 에서
 $k \times 2 + 1 \times (1 - k) + 5 \times (-1) = 0$
 $\therefore k = 4$ **답** 4

유형 익히기

• 본책 088~097쪽

0572 $\overrightarrow{AQ} = \frac{\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{AC}}{1+2} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AP} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$
 이때
 $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AB} = \frac{2}{5} (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{2}{5} (\vec{b} - \vec{a}),$
 $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA} = -\vec{a}$
 이므로
 $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} (\vec{b} - \vec{a}) + \frac{2}{3} \times (-\vec{a})$
 $= -\frac{4}{5} \vec{a} + \frac{2}{15} \vec{b}$
 따라서 $x = -\frac{4}{5}, y = \frac{2}{15}$ 이므로
 $x + y = -\frac{2}{3}$ **답** $-\frac{2}{3}$

0573 $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3} \overrightarrow{OA} = \frac{2}{3} \vec{a}, \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OB} = \frac{1}{3} \vec{b}$ 이므로
 $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} \right) = \frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{6} \vec{b}$ **답** $\frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{6} \vec{b}$

0574 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2} \vec{a}$
 $\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} = \frac{1}{2} \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{c}$
 $\therefore \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$
 $= \left(\frac{1}{2} \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{c} \right) - \frac{1}{2} \vec{a}$
 $= -\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{c}$
 따라서 $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$ 이므로
 $x - y + z = -\frac{1}{2}$ **답** $-\frac{1}{2}$

0575 □ABCD가 평행사변형이면 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치한다.

이때 $\overrightarrow{AC}$ 의 중점의 위치벡터는 $\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$

$\overrightarrow{BD}$ 의 중점의 위치벡터는 $\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}$

따라서 $\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2} = \frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}$ 이므로

$$\vec{b} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{d}$$

답 $\vec{a} + \vec{c} - \vec{d}$

다른 풀이 □ABCD가 평행사변형이면 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ 이므로

$$\vec{b} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{d}$$

$$\therefore \vec{b} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{d}$$

0576 $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AE} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$,

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \vec{b} + \vec{c}$ 이므로

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AH} + 2\overrightarrow{AG}}{1+2}$$

$$= \frac{1}{3} \overrightarrow{AH} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AG}$$

$$= \frac{1}{3} (\vec{b} + \vec{c}) + \frac{2}{3} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$= \frac{2}{3} \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\therefore \overrightarrow{AQ} = \frac{\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{AE}}{1+2}$$

$$= \frac{1}{3} \overrightarrow{AP} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AE}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \right) + \frac{2}{3} \vec{c}$$

$$= \frac{2}{9} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} + \vec{c}$$

답 ②

0577 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$ 이므로

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} = \frac{\vec{a} + (\vec{a} + \vec{b})}{2}$$

$$= \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{4\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AM}}{4+3} = \frac{4}{7} \overrightarrow{AD} + \frac{3}{7} \overrightarrow{AM}$$

$$= \frac{4}{7} \vec{b} + \frac{3}{7} \left(\vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right)$$

$$= \frac{3}{7} \vec{a} + \frac{11}{14} \vec{b}$$

따라서 $m = \frac{3}{7}$, $n = \frac{11}{14}$ 이므로

$$m+n = \frac{17}{14}$$

... 1단계

... 2단계

... 3단계

답 $\frac{17}{14}$

	채점 요소	비율
1단계	$\overrightarrow{AM}$ 을 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 로 나타내기	40 %
2단계	$\overrightarrow{AP}$ 을 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 로 나타내기	40 %
3단계	$m+n$ 의 값 구하기	20 %

0578 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2} \vec{a}$

이때 점 G는 △OAB의 무게중심이므로 $\overrightarrow{BM}$ 을 2 : 1로 내분한다.

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{GB} &= \frac{2}{3} \overrightarrow{MB} = \frac{2}{3} (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) \\ &= \frac{2}{3} \left(\vec{b} - \frac{1}{2} \vec{a} \right) = -\frac{1}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b} \end{aligned}$$

따라서 $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$ 이므로

$$x-y = -1$$

답 -1

다른 풀이 점 G는 △OAB의 무게중심이므로

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}$$

$$\therefore \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG} = \vec{b} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} = -\frac{1}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b}$$

0579 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ 에서

$$\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = -\vec{a} - \vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB} = (-\vec{a} - \vec{b}) - \vec{b} = -\vec{a} - 2\vec{b}$$

따라서 $m = -1$, $n = -2$ 이므로

$$mn = 2$$

답 2

0580 오른쪽 그림과 같이 선분

AB의 중점을 M, 선분 BC의 중점을 N이라 하자.

점 G는 $\overrightarrow{OM}$ 을 2 : 1로 내분하는 점

이므로

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{OM} = \frac{2}{3} \times \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

$$= \frac{\vec{a} + (\vec{a} + \vec{b})}{3}$$

$$= \frac{2}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b}$$

또 점 H는 $\overrightarrow{ON}$ 을 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{OH} = \frac{2}{3} \overrightarrow{ON} = \frac{2}{3} \times \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$$

$$= \frac{(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b}}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OG}$$

$$= \left(\frac{1}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b} \right) - \left(\frac{2}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} \right)$$

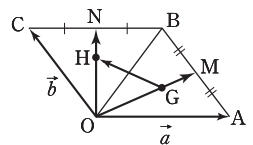
$$= -\frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b}$$

답 $-\frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b}$

다른 풀이 두 점 G, H는 $\overline{AC}$ 위의 점이고 $\overline{AG} = \overline{GH} = \overline{HC}$ 이므로

$$\overrightarrow{GH} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$$

$$= \frac{1}{3} (\vec{b} - \vec{a}) = -\frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b}$$



0581 $\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{2}$

이때 선분 BC의 중점을 M이라 하면 점 G는 $\overrightarrow{AM}$ 을 2:1로 내분하는 점이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{2}{3} \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \times \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} \\ &= \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} \\ \therefore \overrightarrow{GP} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AG} \\ &= \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{2} - \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} \\ &= -\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

따라서 $l = -\frac{1}{3}, m = \frac{1}{6}, n = \frac{1}{2}$ 이므로

$$l + m + n = \frac{1}{3} \quad \text{답 } \frac{1}{3}$$

0582 $\vec{a} + 3\vec{b} = (5, 3) \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$2\vec{a} - \vec{b} = (-4, -1) \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2}$ 을 하면

$$7\vec{b} = (14, 7) \quad \therefore \vec{b} = (2, 1)$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\vec{a} + 3(2, 1) = (5, 3) \quad \therefore \vec{a} = (-1, 0)$$

$$\therefore \vec{a} + \vec{b} = (-1, 0) + (2, 1) = (1, 1) \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

0583 $2(\vec{a} - 3\vec{b}) - (\vec{a} - 2\vec{b}) = \vec{a} - 4\vec{b}$
 $= (3, 1) - 4(2, -2)$
 $= (-5, 9)$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$-5 + 9 = 4 \quad \text{답 } 4$$

0584 $|\vec{x}| = 1$ 이므로 $\sqrt{(2a-3)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = 1$

$$(2a-3)^2 + \frac{16}{25} = 1, \quad (2a-3)^2 = \frac{9}{25}$$

$$2a-3 = \pm \frac{3}{5} \quad \therefore a = \frac{6}{5} \text{ 또는 } a = \frac{9}{5}$$

따라서 모든 a 의 값의 합은

$$\frac{6}{5} + \frac{9}{5} = 3 \quad \text{답 } 3$$

0585 $3\vec{x} - \vec{a} = 2(\vec{a} + 3\vec{b})$ 에서 $3\vec{x} = 3\vec{a} + 6\vec{b}$
 $\therefore \vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b} = (-7, 5) + 2(2, -1) = (-3, 3)$
 $\therefore |\vec{x}| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} \quad \text{답 } \textcircled{4}$

0586 $2\vec{x} - 3\vec{a} = 2\vec{b} + \vec{x}$ 에서
 $\vec{x} = 3\vec{a} + 2\vec{b} = 3(2, 1, -3) + 2(1, -2, 4)$
 $= (8, -1, -1)$

따라서 $l = 8, m = -1, n = -1$ 이므로

$$l + m + n = 6 \quad \text{답 } 6$$

0587 $2(\vec{a} + 3\vec{b}) - 3(2\vec{a} - \vec{c})$
 $= -4\vec{a} + 6\vec{b} + 3\vec{c}$
 $= -4(1, 2, -4) + 6(2, -2, -3) + 3(-2, 6, 1)$
 $= (2, -2, 1)$

따라서 구하는 벡터의 크기는

$$\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3 \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

0588 $\vec{a} + t\vec{b} = (1, -2, 3) + t(-1, 1, -1)$
 $= (1-t, -2+t, 3-t)$
 $\therefore |\vec{a} + t\vec{b}| = \sqrt{(1-t)^2 + (-2+t)^2 + (3-t)^2}$
 $= \sqrt{3t^2 - 12t + 14}$
 $= \sqrt{3(t-2)^2 + 2}$

따라서 $|\vec{a} + t\vec{b}|$ 는 $t=2$ 일 때 최솟값 $\sqrt{2}$ 를 가지므로

$$\alpha = 2, \beta = \sqrt{2} \quad \therefore \alpha\beta = 2\sqrt{2} \quad \text{답 } 2\sqrt{2}$$

0589 $2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$
 $= 2(1, 2, -1) + 3(-1, 3, 2) - (3, 5, -4)$
 $= (-4, 8, 8)$
 $\therefore |2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2 + 8^2} = 12$
 따라서 벡터 $2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$ 와 방향이 같고 크기가 3인 벡터는
 $3 \times \frac{2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}}{|2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}|} = 3 \times \frac{1}{12}(-4, 8, 8) = (-1, 2, 2)$
 답 $(-1, 2, 2)$

0590 $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ 에서
 $(1, 6) = m(-4, 6) + n(3, -2)$
 $= (-4m + 3n, 6m - 2n)$
 따라서 $1 = -4m + 3n, 6 = 6m - 2n$ 이므로
 $m = 2, n = 3 \quad \text{답 } m = 2, n = 3$

0591 $\vec{a} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$ 에서
 $(x+4, -3, -2) = 2(1, y, 2) + 3(-2, 1, 1-z)$
 $= (-4, 2y+3, 7-3z)$
 따라서 $x+4 = -4, -3 = 2y+3, -2 = 7-3z$ 이므로
 $x = -8, y = -3, z = 3$
 $\therefore x - y + z = -2 \quad \text{답 } -2$

0592 $2\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} - \vec{b}$ 에서 $\vec{c} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$ 이므로
 $(-4, q) = 2(2, 3) + 2(p, -1)$
 $= (4+2p, 4)$

따라서 $-4 = 4+2p, q = 4$ 이므로

$$p = -4, q = 4$$

즉 $\vec{b} = (-4, -1), \vec{c} = (-4, 4)$ 이므로

$$\vec{b} - \vec{c} = (0, -5)$$

$$\therefore |\vec{b} - \vec{c}| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5 \quad \text{답 } \textcircled{5}$$

0593 $\vec{d} = l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}$ 에서

$(3, -4, 5)$

$= l(0, 1, 1) + m(1, 0, 1) + n(1, 1, 0)$

$= (m+n, l+n, l+m)$

따라서 $3=m+n, -4=l+n, 5=l+m$ 이므로

$l=-1, m=6, n=-3$

$\therefore lmn=18$

답 ③

0594 $\vec{a} + t\vec{c} = (5, 4) + t(3, 7) = (3t+5, 7t+4)$

$\vec{b} - \vec{a} = (-2, 3) - (5, 4) = (-7, -1)$

두 벡터 $\vec{a} + t\vec{c}, \vec{b} - \vec{a}$ 가 서로 평행하므로

$\vec{a} + t\vec{c} = k(\vec{b} - \vec{a}) \quad (k \neq 0)$

라 하면 $(3t+5, 7t+4) = k(-7, -1)$

따라서 $3t+5=-7k, 7t+4=-k$ 이므로

$t = -\frac{1}{2}, k = -\frac{1}{2}$

답 ②

다른 풀이 $\frac{3t+5}{-7} = \frac{7t+4}{-1}$ 에서 $-3t-5 = -49t-28$

$46t = -23 \quad \therefore t = -\frac{1}{2}$

0595 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$\vec{b} = k\vec{a} \quad (k \neq 0)$

라 하면 $\left(\frac{x-y}{2}, -\frac{y}{3}, -2\right) = k(-1, 2, 4)$

따라서 $\frac{x-y}{2} = -k, -\frac{y}{3} = 2k, -2 = 4k$ 이므로

$k = -\frac{1}{2}, x=4, y=3 \quad \therefore xy=12$

답 ③

0596 $2\vec{a} + \vec{b} = 2(1, 2) + (x, -1) = (x+2, 3)$

$\vec{b} - \vec{a} = (x, -1) - (1, 2) = (x-1, -3)$

두 벡터 $2\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} - \vec{a}$ 가 서로 평행하므로

$2\vec{a} + \vec{b} = k(\vec{b} - \vec{a}) \quad (k \neq 0)$

라 하면 $(x+2, 3) = k(x-1, -3)$

따라서 $x+2=kx-k, 3=-3k$ 이므로

$k = -1, x = -\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

0597 $2\vec{a} - \vec{b} = 2(-2, 3, -4) - (2, x-1, 2y+2)$

$= (-6, -x+7, -2y-10)$

$\vec{a} + 3\vec{b} = (-2, 3, -4) + 3(2, x-1, 2y+2)$

$= (4, 3x, 6y+2)$

두 벡터 $2\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + 3\vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$\vec{a} + 3\vec{b} = k(2\vec{a} - \vec{b}) \quad (k \neq 0)$

라 하면 $(4, 3x, 6y+2) = k(-6, -x+7, -2y-10)$

따라서 $4 = -6k, 3x = -kx+7k, 6y+2 = -2ky-10k$ 이므로

$k = -\frac{2}{3}, x = -2, y = 1$

$\therefore x+y = -1$

답 -1

0598 $\vec{AB} = (-2, -3, 2) - (2, 1, 2) = (-4, -4, 0)$

$\vec{CD} = (a, b, c) - (3, 0, -1) = (a-3, b, c+1)$

$\vec{AB} = 2\vec{CD}$ 에서

$(-4, -4, 0) = 2(a-3, b, c+1)$

$= (2a-6, 2b, 2c+2)$

따라서 $-4=2a-6, -4=2b, 0=2c+2$ 이므로

$a=1, b=-2, c=-1$

$\therefore a+b+c = -2$

답 ②

0599 $\vec{AB} = (1, 3) - (2, 2) = (-1, 1)$

$\vec{CD} = (1, a) - (4, -4) = (-3, a+4)$

$\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ 이므로 $\vec{CD} = k\vec{AB} \quad (k \neq 0)$ 라 하면

$(-3, a+4) = k(-1, 1)$

따라서 $-3 = -k, a+4 = k$ 이므로

$k=3, a=-1$

답 ②

0600 점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$\vec{PA} = (3, 1, -2) - (x, y, z) = (3-x, 1-y, -2-z)$

$\vec{PB} = (1, 2, -1) - (x, y, z) = (1-x, 2-y, -1-z)$

$\vec{PC} = (-1, 0, 3) - (x, y, z) = (-1-x, -y, 3-z)$

$\therefore \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = (3-3x, 3-3y, -3z)$

이때 $|\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}| = 9$ 이므로

$\sqrt{(3-3x)^2 + (3-3y)^2 + (-3z)^2} = 9$

$(3-3x)^2 + (3-3y)^2 + (-3z)^2 = 81$

$\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(1, 1, 0)$ 이고 반지름의 길이가 3인 구이므로 구하는 부피는

$\frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 36\pi$

답 36π

0601 직선 $y=x-1$ 위의 점 P의 좌표를 $(a, a-1)$ 이라 하면

$\vec{AP} = (a, a-1) - (-1, 0) = (a+1, a-1)$

$\vec{BP} = (a, a-1) - (1, 2) = (a-1, a-3)$

$\therefore \vec{AP} + \vec{BP} = (2a, 2a-4)$

... 1단계

$\therefore |\vec{AP} + \vec{BP}| = \sqrt{(2a)^2 + (2a-4)^2}$

$= \sqrt{8a^2 - 16a + 16}$

$= \sqrt{8(a-1)^2 + 8}$

... 2단계

따라서 $|\vec{AP} + \vec{BP}|$ 는 $a=1$ 일 때 최솟값 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ 를 갖는다.

... 3단계

답 $2\sqrt{2}$

	채점 요소	비율
1단계	점 P의 좌표를 $(a, a-1)$ 로 놓고 $\vec{AP} + \vec{BP}$ 를 성분으로 나타내기	40 %
2단계	$ \vec{AP} + \vec{BP} $ 를 a 에 대한 식으로 나타내기	40 %
3단계	$ \vec{AP} + \vec{BP} $ 의 최솟값 구하기	20 %

0602 $\overline{AB}$ 가 원의 지름이므로 $\angle APB=90^\circ$

따라서 직각삼각형 ABP에서

$$\overline{AP}=\sqrt{10^2-8^2}=6$$

이므로 두 벡터 $\overline{AB}$, $\overline{AP}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos \theta=\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$$\therefore \overline{AB} \cdot \overline{AP}=|\overline{AB}| |\overline{AP}| \cos \theta=10 \times 6 \times \frac{3}{5}=36$$

답 36

다른 풀이 $\overline{AB} \cdot \overline{AP}=|\overline{AB}| |\overline{AP}| \cos \theta$

$$=\overline{AB} \times \overline{AP} \times \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$$

$$=\overline{AP}^2=6^2=36$$

0603 $\overline{DE}=\overline{BA}$ 이고 $\angle ABC=120^\circ$ 이므로

$$\overline{DE} \cdot \overline{BC}=\overline{BA} \cdot \overline{BC}$$

$$=-|\overline{BA}| |\overline{BC}| \cos (180^\circ-120^\circ)$$

$$=-2 \times 2 \times \frac{1}{2}=-2$$

답 -2

0604 $\angle DAB=180^\circ-120^\circ=60^\circ$ 이므로

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD}=|\overline{AB}| |\overline{AD}| \cos 60^\circ$$

$$12=6 \times |\overline{AD}| \times \frac{1}{2} \quad \therefore |\overline{AD}|=4$$

$$\therefore \square ABCD=\overline{AD} \times \overline{AB} \times \sin 60^\circ$$

$$=4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$$

답 $12\sqrt{3}$

0605 $\neg$. $\overline{CB} \cdot \overline{CD}=|\overline{CB}| |\overline{CD}| \cos 90^\circ$

$$=2 \times 1 \times 0=0 \text{ (참)}$$

$\perp$. 직각삼각형 ACD에서

$$\overline{AC}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

이므로 $\angle ACD=\theta$ 라 하면

$$\cos \theta=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \overline{CD} \cdot \overline{CA}=|\overline{CD}| |\overline{CA}| \cos \theta$$

$$=1 \times \sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5}=1 \text{ (참)}$$

$\angle$. $\angle ABD=\theta$ 라 하면

$$\cos \theta=\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}=\overline{AD'}$ 이라

하면 $\angle D'AB=180^\circ-\theta$ 이므로

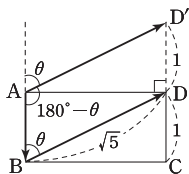
$$\overline{AB} \cdot \overline{BD}=\overline{AB} \cdot \overline{AD'}$$

$$=-|\overline{AB}| |\overline{AD'}| \cos \{180^\circ-(180^\circ-\theta)\}$$

$$=-1 \times \sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5}=-1 \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\perp$ 이다.

답 $\neg, \perp$



0606 정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

$$\overline{AF}=\overline{AH}=\overline{FH}=\sqrt{2}a$$

따라서 $\triangle AFH$ 는 정삼각형이므로

$$\angle FAH=60^\circ$$

즉 $\overline{AF} \cdot \overline{AH}=|\overline{AF}| |\overline{AH}| \cos 60^\circ$ 이므로

$$16=\sqrt{2}a \times \sqrt{2}a \times \frac{1}{2}, \quad a^2=16$$

$$\therefore a=4 \text{ (}\because a>0\text{)}$$

따라서 구하는 정육면체의 겉넓이는

$$6 \times 4^2=96$$

답 ⑤

0607 $\overline{MD}=\overline{MA}=\frac{\sqrt{3}}{2} \times 1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$$\overline{MG}=\frac{1}{3}\overline{MD}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

이때 $\overline{AG} \perp$ (평면 BCD)이므로 두 벡터 $\overline{MA}$, $\overline{MG}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 직각삼각형 AMG에서

$$\cos \theta=\frac{\overline{MG}}{\overline{MA}}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \overline{MA} \cdot \overline{MG}=|\overline{MA}| |\overline{MG}| \cos \theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{12}$$

답 $\frac{1}{12}$

0608 오른쪽 그림과 같이 합동인 두 정

육면체를 붙이면

$$\overline{AC}=\overline{DC'}$$

이때 $\overline{DC'}=\sqrt{2}$, $\overline{DF}=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$,

$\overline{C'F}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ 이므로

$$\overline{DC'}^2+\overline{DF}^2=\overline{C'F}^2$$

즉 $\triangle C'DF$ 는 $\angle C'DF=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{AC} \cdot \overline{DF}=\overline{DC'} \cdot \overline{DF}$$

$$=|\overline{DC'}| |\overline{DF}| \cos 90^\circ$$

$$=\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times 0=0$$

답 ①

다른 풀이 $\overline{AC} \cdot \overline{DF}$

$$=\overline{AC} \cdot (\overline{AF}-\overline{AD})$$

$$=\overline{AC} \cdot \overline{AF}-\overline{AC} \cdot \overline{AD}$$

$$=|\overline{AC}| |\overline{AF}| \cos 60^\circ-|\overline{AC}| |\overline{AD}| \cos 45^\circ$$

$$=\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2}-\sqrt{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=0$$

0609 $\vec{a}-\vec{b}=(x, 3)-(0, 1)=(x, 2)$

$$\vec{a}-\vec{c}=(x, 3)-(x+2, 4)=(-2, -1)$$

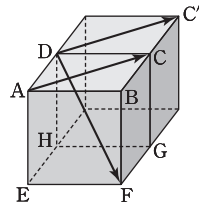
$$\therefore (\vec{a}-\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{c})=(x, 2) \cdot (-2, -1)$$

$$=-2x-2$$

따라서 $-2x-2=6$ 이므로

$$x=-4$$

답 ④



0610 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{x^2+(x+2)^2}=\sqrt{2}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2+2x+1=0$

$$(x+1)^2=0 \quad \therefore x=-1$$

따라서 $\vec{a}=(-1, 1)$, $\vec{b}=(-4, 2)$ 이므로

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (-1, 1) \cdot (-4, 2) \\ &= -1 \times (-4) + 1 \times 2 = 6\end{aligned}$$

답 ③

0611 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(x, \frac{3}{x}\right) \cdot \left(3y, \frac{1}{y}\right) = 3xy + \frac{3}{xy}$

이때 $xy > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}3xy + \frac{3}{xy} &\geq 2\sqrt{3xy \times \frac{3}{xy}} = 6 \\ &\quad \left(\text{단, 등호는 } xy = \frac{1}{xy} \text{ 일 때 성립}\right)\end{aligned}$$

따라서 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 의 최솟값은 6이다.

답 6

0612 두 점 P, Q의 좌표를 각각 $\left(\frac{a^2}{4}, a\right)$, $\left(\frac{b^2}{4}, b\right)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \left(\frac{a^2}{4}, a\right), \overrightarrow{OQ} = \left(\frac{b^2}{4}, b\right) \\ \therefore \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= \left(\frac{a^2}{4}, a\right) \cdot \left(\frac{b^2}{4}, b\right) \\ &= \frac{a^2 b^2}{16} + ab \\ &= \frac{1}{16}(ab+8)^2 - 4\end{aligned}$$

따라서 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 는 $ab = -8$ 일 때 최솟값 -4를 갖는다.

답 ⑤

0613 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, k+1, 1) \cdot (-k, k-1, 4)$

$$\begin{aligned}&= 1 \times (-k) + (k+1)(k-1) + 1 \times 4 \\ &= k^2 - k + 3\end{aligned}$$

따라서 $k^2 - k + 3 = 9$ 이므로

$$\begin{aligned}k^2 - k - 6 &= 0, \quad (k+2)(k-3) = 0 \\ \therefore k &= 3 \quad (\because k > 0)\end{aligned}$$

답 ③

0614 $\overrightarrow{AD} = (7, 0, -3) - (1, 4, -2) = (6, -4, -1)$

$\overrightarrow{BC} = (5, 2, 0) - (4, -1, 2) = (1, 3, -2)$

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= (6, -4, -1) \cdot (1, 3, -2) \\ &= 6 \times 1 + (-4) \times 3 + (-1) \times (-2) \\ &= -4\end{aligned}$$

답 ②

0615 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (x, -1, y) \cdot (2, x, -4)$

$$= x \times 2 + (-1) \times x + y \times (-4) = x - 4y$$

즉 $x - 4y = -5$ 이므로

$$x = 4y - 5 \quad \dots\dots ㉠$$

또 $|\vec{a}| = \sqrt{14}$ 에서

$$\sqrt{x^2 + (-1)^2 + y^2} = \sqrt{14}, \quad x^2 + y^2 + 1 = 14$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 13 \quad \dots\dots ㉡ \quad \dots \text{①단계}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$(4y-5)^2 + y^2 = 13, \quad 17y^2 - 40y + 12 = 0$$

$$(17y-6)(y-2) = 0 \quad \therefore y = 2 \quad (\because y \text{는 정수})$$

$y=2$ 를 ㉠에 대입하면 $x=3$

$$\therefore x+y=5$$

... ②단계

답 5

채점 요소		비율
①단계	내적과 크기를 이용하여 x, y 에 대한 식 세우기	60 %
②단계	$x+y$ 의 값 구하기	40 %

0616 $t\vec{a} + \vec{b} = t(1, 0, 2) + (1, -1, -1)$

$$= (t+1, -1, 2t-1)$$

$$\vec{a} - t\vec{b} = (1, 0, 2) - t(1, -1, -1)$$

$$= (1-t, t, 2+t)$$

$$\therefore f(t) = (t\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - t\vec{b})$$

$$= (t+1, -1, 2t-1) \cdot (1-t, t, 2+t)$$

$$= (t+1)(1-t) + (-1) \times t + (2t-1)(2+t)$$

$$= t^2 + 2t - 1$$

$$= (t+1)^2 - 2$$

따라서 $f(t)$ 는 $t = -1$ 일 때 최솟값 -2를 갖는다.

답 ①

0617 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 3$$

$$2^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 1^2 = 3 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

$$\therefore (3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 4\vec{b}) = 3|\vec{a}|^2 - 11\vec{a} \cdot \vec{b} - 4|\vec{b}|^2$$

$$= 3 \times 2^2 - 11 \times 1 - 4 \times 1^2$$

$$= -3$$

답 -3

0618 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ = 3 \times 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 12$

$$\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{b}|^2$$

$$= 2 \times 3^2 + 12 - (4\sqrt{2})^2$$

$$= -2$$

답 -2

0619 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $\angle A = 60^\circ$ 이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$\therefore |\vec{a} + 3\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2$$

$$= 2^2 + 6 \times 2 + 9 \times 2^2$$

$$= 52$$

$$\therefore |\vec{a} + 3\vec{b}| = 2\sqrt{13}$$

답 ③

0620 $\overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$

$$= |\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 = 0$$

즉 $|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$ 이므로

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이다.

답 ③

$$\begin{aligned} \text{0621 } \vec{a} + \vec{b} &= (1, 1) + (-3, -2) = (-2, -1) \\ 2\vec{a} + \vec{b} &= 2(1, 1) + (-3, -2) = (-1, 0) \\ \therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) &= (-2, -1) \cdot (-1, 0) \\ &= -2 \times (-1) + (-1) \times 0 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{즉 } (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) &\geq 0 \text{이므로} \\ \cos \theta &= \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}| |2\vec{a} + \vec{b}|} \\ &= \frac{2}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} \sqrt{(-1)^2 + 0^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} \text{0622 } \vec{a} \cdot \vec{b} &= (0, 2) \cdot (1, \sqrt{3}) = 0 \times 1 + 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \\ \text{즉 } \vec{a} \cdot \vec{b} &\geq 0 \text{이므로} \end{aligned}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{0^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{따라서 } \theta = 30^\circ \text{이므로} \quad \sin \theta = \frac{1}{2}$$

답 1/2

$$\begin{aligned} \text{0623 } \vec{a} + 2\vec{b} &= (x-1, 3) + 2(-2, x-3) \\ &= (x-5, 2x-3) \end{aligned}$$

$$\text{이때 } |\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{10} \text{이므로}$$

$$\sqrt{(x-5)^2 + (2x-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{양변을 제곱하여 정리하면} \quad 5x^2 - 22x + 24 = 0$$

$$(x-2)(5x-12) = 0 \quad \therefore x = 2 \quad (\because x \text{는 정수})$$

$$\text{따라서 } \vec{a} = (1, 3), \vec{b} = (-2, -1) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (1, 3) \cdot (-2, -1) \\ &= 1 \times (-2) + 3 \times (-1) = -5 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \text{이므로 두 벡터 } \vec{a}, \vec{b} \text{가 이루는 각의 크기를 } \theta \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ - \theta) &= -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ &= -\frac{-5}{\sqrt{1^2 + 3^2} \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } 180^\circ - \theta = 45^\circ \text{이므로} \quad \theta = 135^\circ$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} \text{0624 } 2\vec{a} - \vec{b} &= 2(1, -3, 0) - (-1, -5, 2) \\ &= (3, -1, -2) \\ \therefore (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} &= (3, -1, -2) \cdot (2, -3, 1) \\ &= 3 \times 2 + (-1) \times (-3) + (-2) \times 1 = 7 \\ \text{즉 } (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} &\geq 0 \text{이므로 두 벡터 } 2\vec{a} - \vec{b}, \vec{c} \text{가 이루는 각의} \\ &\text{크기를 } \theta \text{라 하면} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}}{|2\vec{a} - \vec{b}| |\vec{c}|} \\ &= \frac{7}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{1}{2} \\ \therefore \theta &= 60^\circ \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned} \text{0625 } \vec{a} + \vec{b} &= (-1, 2, 1) \quad \dots\dots \text{㉠} \\ \vec{a} - \vec{b} &= (3, 2, -1) \quad \dots\dots \text{㉡} \end{aligned}$$

$$\text{㉠} + \text{㉡을 하면} \quad 2\vec{a} = (2, 4, 0) \quad \therefore \vec{a} = (1, 2, 0)$$

$$\text{㉠} - \text{㉡을 하면} \quad 2\vec{b} = (-4, 0, 2) \quad \therefore \vec{b} = (-2, 0, 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= (1, 2, 0) \cdot (-2, 0, 1) \\ &= 1 \times (-2) + 2 \times 0 + 0 \times 1 = -2 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ - \theta) &= -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ &= -\frac{-2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2}} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

답 2/5

$$\begin{aligned} \text{0626 } \vec{OA} \cdot \vec{OB} &= (1, 2, 3) \cdot (2, -1, 2) \\ &= 1 \times 2 + 2 \times (-1) + 3 \times 2 = 6 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \vec{OA} \cdot \vec{OB} \geq 0 \text{이므로 두 벡터 } \vec{OA}, \vec{OB} \text{가 이루는 각의 크기를 } \theta \text{라 하면}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 점 A에서 } \vec{OB} \text{에 내린 수선의 발을} \\ \text{H라 하면 벡터 } \vec{OA} \text{의 직선 OB 위로의 정} \\ \text{사영은 벡터 } \vec{OH} \text{이므로 구하는 정사영의 크기는} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{OH}| &= |\vec{OA}| \cos \theta \\ &= |\vec{OA}| \times \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|} = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OB}|} \\ &= \frac{6}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 2 \end{aligned}$$

답 2

참고 일반적으로 벡터의 정사영은 벡터이다.

$$\begin{aligned} \text{0627 } \text{꼭짓점 H를 원점, 직선 HE, HG, HD를 각각 } x \text{축,} \\ y \text{축, } z \text{축으로 하는 좌표공간을 생각하면} \end{aligned}$$

$$A(2, 0, 2), G(0, 4, 0), D(0, 0, 2), F(2, 4, 0)$$

$$\text{으로 놓을 수 있다.}$$

$$\text{따라서}$$

$$\vec{AG} = (0, 4, 0) - (2, 0, 2) = (-2, 4, -2),$$

$$\vec{DF} = (2, 4, 0) - (0, 0, 2) = (2, 4, -2)$$

$$\text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \vec{AG} \cdot \vec{DF} &= (-2, 4, -2) \cdot (2, 4, -2) \\ &= -2 \times 2 + 4 \times 4 + (-2) \times (-2) \\ &= 16 \end{aligned}$$

$$\text{즉 } \vec{AG} \cdot \vec{DF} \geq 0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\vec{AG} \cdot \vec{DF}}{|\vec{AG}| |\vec{DF}|} \\ &= \frac{16}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-2)^2} \sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

답 2/3

0628 $|\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{13}$ 의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=13$$

$$4^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+9\times 1^2=13 \quad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=2$$

즉 $\vec{a}\cdot\vec{b}\geq 0$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{2}{4\times 1} = \frac{1}{2}$$

따라서 $\theta=60^\circ$ 이므로 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 ⑤

0629 $|3\vec{a}+\vec{b}|=|3\vec{a}-\vec{b}|$ 의 양변을 제곱하면

$$9|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

$$12\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

따라서 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기는 90° 이다. 답 ⑤

0630 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{5}$ 의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=5 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ 의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①-②을 하면 $4\vec{a}\cdot\vec{b}=4$
 $\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=1$... ①단계

①+②을 하면 $2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)=6$
 $\therefore |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=3$... ②

한편 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=1$ 에서
 $|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=1$... ③

③, ④을 연립하여 풀면 $|\vec{a}|^2=2, |\vec{b}|^2=1$
 $\therefore |\vec{a}|=\sqrt{2}, |\vec{b}|=1$... ②단계

이때 $\vec{a}\cdot\vec{b}\geq 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\times 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \theta=45^\circ \quad \dots\dots \textcircled{3} \quad \text{답 } 45^\circ$$

채점 요소	비율
①단계 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 구하기	40 %
②단계 $ \vec{a} , \vec{b} $ 구하기	40 %
③단계 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기 구하기	20 %

0631 $\vec{a}+k\vec{b}=(2, 1)+k(1, -1)=(2+k, 1-k)$

$$2\vec{a}+\vec{b}=2(2, 1)+(1, -1)=(5, 1)$$

두 벡터 $\vec{a}+k\vec{b}, 2\vec{a}+\vec{b}$ 가 서로 수직이므로

$$(\vec{a}+k\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=0$$

$$(2+k, 1-k)\cdot(5, 1)=0$$

$$5(2+k)+(1-k)=0, \quad 4k=-11$$

$$\therefore k=-\frac{11}{4} \quad \text{답 } ②$$

0632 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 수직이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 에서

$$(3t-1, t)\cdot\left(1, -\frac{2}{t}\right)=0$$

$$3t-1+t\times\left(-\frac{2}{t}\right)=0 \quad \therefore t=1$$

따라서 $\vec{a}=(2, 1), \vec{b}=(1, -2)$ 이므로

$$\vec{a}-3\vec{b}=(2, 1)-3(1, -2)=(-1, 7)$$

$$\therefore |\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+7^2}=5\sqrt{2}$$

답 $5\sqrt{2}$

0633 두 벡터 $\vec{p}$ 와 $\vec{q}$ 가 서로 수직이므로 $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$ 에서

$$(1, -2, a)\cdot(-2, b, 2)=0$$

$$-2-2b+2a=0$$

$$\therefore b=a-1 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots \text{①단계}$$

또 두 벡터 $\vec{p}$ 와 $\vec{r}$ 가 서로 평행하므로 $\vec{p}\cdot\vec{r}=\pm|\vec{p}||\vec{r}|$ 에서

$$(1, -2, a)\cdot(2, -4, 8)$$

$$=\pm\sqrt{1^2+(-2)^2+a^2}\sqrt{2^2+(-4)^2+8^2}$$

$$\therefore 8a+10=\pm 2\sqrt{21(a^2+5)}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2-8a+16=0, \quad (a-4)^2=0$$

$$\therefore a=4 \quad \dots\dots \text{②단계}$$

$a=4$ 를 ①에 대입하면 $b=3$

$$\therefore ab=12 \quad \dots\dots \text{③단계}$$

답 12

채점 요소	비율
①단계 $\vec{p}$ 와 $\vec{q}$ 가 서로 수직임을 이용하여 a, b 에 대한 식 구하기	40 %
②단계 $\vec{p}$ 와 $\vec{r}$ 가 서로 평행함을 이용하여 a 의 값 구하기	40 %
③단계 ab 의 값 구하기	20 %

0634 두 벡터 $3\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}+2\vec{b}$ 가 서로 수직이므로

$$(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=0$$

$$3|\vec{a}|^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $3|\vec{a}|=2|\vec{b}|$ 이므로 $|\vec{b}|=\frac{3}{2}|\vec{a}|$

이를 ①에 대입하면

$$3|\vec{a}|^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{9}{2}|\vec{a}|^2=0$$

$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{10}|\vec{a}|^2$$

즉 $\vec{a}\cdot\vec{b}\geq 0$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\frac{3}{10}|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|\times\frac{3}{2}|\vec{a}|} = \frac{1}{5} \quad \text{답 } \frac{1}{5}$$

0635 $\vec{OA}=(2, -1), \vec{OB}=(1, -3)$ 이므로

$$|\vec{OA}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5},$$

$$|\vec{OB}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10},$$

$$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=2\times 1+(-1)\times(-3)=5$$

이때 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} \geq 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{OA}, \vec{OB}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|} = \frac{5}{\sqrt{5} \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \theta = 45^\circ$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} |\vec{OA}| |\vec{OB}| \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{10} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2}$$

답 5/2

0636 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} \geq 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{AB}, \vec{AC}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{6}{3 \times 4} = \frac{1}{2} \quad \therefore \theta = 60^\circ$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

답 ②

0637 $\vec{OA} = (3, -1, -2), \vec{OB} = (2, -3, 1)$ 이므로

$$|\vec{OA}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14},$$

$$|\vec{OB}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14},$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 3 \times 2 + (-1) \times (-3) + (-2) \times 1 = 7$$

이때 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} \geq 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{OA}, \vec{OB}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|} = \frac{7}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = \frac{1}{2} \quad \therefore \theta = 60^\circ$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} |\vec{OA}| |\vec{OB}| \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times \sqrt{14} \times \sqrt{14} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

답 7√3/2

0638 $\vec{AB} = (0, 2) - (3, 6) = (-3, -4),$

$\vec{AC} = (-1, 6) - (3, 6) = (-4, 0)$ 이므로

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5,$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4,$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -3 \times (-4) + (-4) \times 0 = 12$$

이때 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} \geq 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{AB}, \vec{AC}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

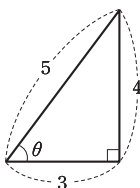
$$\cos \theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{12}{5 \times 4} = \frac{3}{5}$$

오른쪽 그림과 같은 직각삼각형에서

$$\sin \theta = \frac{4}{5}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin \theta \\ = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 \times \frac{4}{5} = 8 \end{aligned}$$



답 ④

0639 $5\vec{PA} + 2\vec{PB} + \vec{PC} = \vec{BC}$ 에서

$$5\vec{PA} + 2\vec{PB} + \vec{PC} = \vec{PC} - \vec{PB}$$

$$\therefore 5\vec{PA} = -3\vec{PB}$$

따라서 두 벡터 $\vec{PA}, \vec{PB}$ 는 방향이 반대이므로 점 P는 $\vec{AB}$ 를 3:5로 내분하는 점이다.

$$\begin{aligned} \therefore \triangle CAP : \triangle CBP &= \vec{AP} : \vec{BP} \\ &= 3 : 5 \end{aligned}$$

답 3:5

0640 $\vec{AC} + 3\vec{PC} + 7\vec{PA} = \vec{0}$ 에서

$$(\vec{PC} - \vec{PA}) + 3\vec{PC} + 7\vec{PA} = \vec{0}$$

$$4\vec{PC} + 6\vec{PA} = \vec{0}$$

$$\therefore 2\vec{PC} = -3\vec{PA}$$

따라서 두 벡터 $\vec{PC}, \vec{PA}$ 는 방향이 반대이므로 점 P는 $\vec{CA}$ 를 3:2로 내분하는 점이다.

즉 $m=3, n=2$ 이므로

$$m-n=1$$

답 1

0641 $\neg. \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{AB}$ 에서

$$\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{PB} - \vec{PA}$$

$$\therefore \vec{PC} = -2\vec{PA} \text{ (참)}$$

나. $\neg$ 에서 두 벡터 $\vec{PC}, \vec{PA}$ 는 방향이 반대이다.

따라서 점 P는 변 AC를 1:2로 내분하는 점이다. (거짓)

다. 나에서 $\vec{PA} : \vec{PC} = 1 : 2$ 이므로

$$\triangle PAB : \triangle PBC = \vec{PA} : \vec{PC} = 1 : 2 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 $\neg, \text{다}$ 이다.

답 나, 다

0642 $4\vec{AP} + 3\vec{BP} + 2\vec{CP} = \vec{0}$ 에서

$$4\vec{AP} = -3\vec{BP} - 2\vec{CP} = 3\vec{PB} + 2\vec{PC}$$

$$= 5 \times \frac{3\vec{PB} + 2\vec{PC}}{5}$$

$$= 5 \times \frac{2\vec{PC} + 3\vec{PB}}{2+3}$$

이때 $\vec{BC}$ 를 2:3으로 내분하는 점을 D라 하면

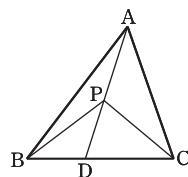
$$\vec{PD} = \frac{2\vec{PC} + 3\vec{PB}}{2+3}$$

즉 $4\vec{AP} = 5\vec{PD}$ 이므로

$$4\vec{PA} = -5\vec{PD}$$

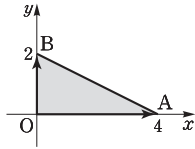
따라서 두 벡터 $\vec{PA}, \vec{PD}$ 는 방향이 반대이므로 점 P는 $\vec{AD}$ 를 5:4로 내분하는 점이다.

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABP &= \frac{5}{9} \triangle ABD \\ &= \frac{5}{9} \times \frac{2}{5} \triangle ABC \\ &= \frac{5}{9} \times \frac{2}{5} \times 90 \\ &= 20 \end{aligned}$$



답 20

0643 조건을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같이 $\triangle OAB$ 와 그 내부이다.
따라서 구하는 넓이는



$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

답 4

0644 조건을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB이므로 구하는 길이는

$$AB = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

답 ④

RPM비법노트

$\vec{OP} = m\vec{OA} + n\vec{OB}$ 에서

(i) $m=1, n=0$ 이면 $\vec{OP} = \vec{OA}$

(ii) $m=0, n=1$ 이면 $\vec{OP} = \vec{OB}$

(iii) $m>0, n>0, m+n=1$ 이면

$$\vec{OP} = m\vec{OA} + n\vec{OB} = \frac{n\vec{OB} + m\vec{OA}}{n+m}$$

즉 점 P는 $\vec{AB}$ 를 $n : m$ 으로 내분하는 점이다.
이상에서 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB이다.

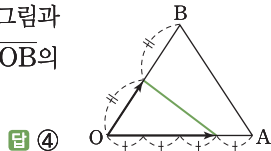
0645 $m = \frac{3}{4}m', n = \frac{1}{2}n'$ 이라 하면 $m' \geq 0, n' \geq 0$ 이고

$$3m' + 3n' = 3 \quad \therefore m' + n' = 1$$

따라서 $\vec{OP} = \frac{3}{4}m'\vec{OA} + \frac{1}{2}n'\vec{OB}$ 이므로

$$\vec{OP} = m' \times \frac{3}{4}\vec{OA} + n' \times \frac{1}{2}\vec{OB}$$

즉 점 P가 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같이 $\vec{OA}$ 를 3:1로 내분하는 점과 $\vec{OB}$ 의 중점을 이은 선분이다.



답 ④

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 098~101쪽

0646 $\triangle ABC$ 에서

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC} = 4 : 3$$

즉 점 D는 $\overline{BC}$ 를 4:3으로 내분하는 점이므로

$$\vec{AD} = \frac{4\vec{AC} + 3\vec{AB}}{4+3} = \frac{3}{7}\vec{AB} + \frac{4}{7}\vec{AC}$$

따라서 $m = \frac{3}{7}, n = \frac{4}{7}$ 이므로

$$m - n = -\frac{1}{7}$$

답 ①

0647 $\overline{AB}$ 의 중점을 M이라 하면

$$\vec{CM} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

이때 점 P는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이므로 $\vec{CM}$ 을 2:1로 내분한다.

$$\therefore \vec{CP} = \frac{2}{3}\vec{CM} = \frac{2}{3} \times \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

따라서 $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}$ 이므로 $xy = \frac{1}{9}$

답 ④

0648 $3(\vec{a} + \vec{b}) - 2\vec{b} = 3\vec{a} + \vec{b}$

$$= 3(1, -2) + (3, 1)$$

$$= (6, -5)$$

$$\therefore |3(\vec{a} + \vec{b}) - 2\vec{b}| = \sqrt{6^2 + (-5)^2} = \sqrt{61}$$

답 ②

0649 $\vec{b} - \vec{a} = (k, 3, 3) - (1, 1, 2) = (k-1, 2, 1)$

$$|\vec{b} - \vec{a}| = 3 \text{에서 } \sqrt{(k-1)^2 + 2^2 + 1^2} = 3$$

$$(k-1)^2 + 5 = 9, \quad k^2 - 2k - 3 = 0$$

$$(k+1)(k-3) = 0 \quad \therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 3$$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$$-1 + 3 = 2$$

답 ②

0650 $A'(0, 3, 2), B'(2, 0, 1), C'(2, 2, 0)$ 이므로

$$\vec{OA'} = (0, 3, 2), \vec{OB'} = (2, 0, 1), \vec{OC'} = (2, 2, 0)$$

$\vec{OD} = l\vec{OA'} + m\vec{OB'} + n\vec{OC'}$ 에서

$$(3, -5, 4) = l(0, 3, 2) + m(2, 0, 1) + n(2, 2, 0)$$

$$= (2m + 2n, 3l + 2n, 2l + m)$$

따라서 $3 = 2m + 2n, -5 = 3l + 2n, 4 = 2l + m$ 이므로

$$l = 0, m = 4, n = -\frac{5}{2}$$

$$\therefore l + m + 2n = -1$$

답 -1

RPM비법노트

좌표공간의 점 (a, b, c) 를

(1) 좌표축에 대하여 대칭이동한 점

$$\textcircled{1} x\text{축} \Rightarrow (a, -b, -c)$$

$$\textcircled{2} y\text{축} \Rightarrow (-a, b, -c)$$

$$\textcircled{3} z\text{축} \Rightarrow (-a, -b, c)$$

(2) 좌표평면에 대하여 대칭이동한 점

$$\textcircled{1} xy\text{평면} \Rightarrow (a, b, -c)$$

$$\textcircled{2} yz\text{평면} \Rightarrow (-a, b, c)$$

$$\textcircled{3} zx\text{평면} \Rightarrow (a, -b, c)$$

0651 $\vec{a} + \vec{b} = (1, 5, 5) + (x+2, 1, y-1)$

$$= (x+3, 6, y+4)$$

$$\vec{c} - \vec{b} = (2, 4, 4) - (x+2, 1, y-1) = (-x, 3, -y+5)$$

두 벡터 $\vec{a} + \vec{b}, \vec{c} - \vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{a} + \vec{b} = k(\vec{c} - \vec{b}) \quad (k \neq 0)$$

라 하면 $(x+3, 6, y+4) = k(-x, 3, -y+5)$

따라서 $x+3 = -kx, 6 = 3k, y+4 = -ky+5k$ 이므로

$$k = 2, x = -1, y = 2 \quad \therefore xy = -2$$

답 -2

0652 $\overrightarrow{AB} = (1, 2) - (2, -1) = (-1, 3)$

$\overrightarrow{CD} = (a, b) - (-1, 3) = (a+1, b-3)$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ 에서 $(-1, 3) = (a+1, b-3)$

따라서 $-1 = a+1, 3 = b-3$ 이므로

$a = -2, b = 6 \quad \therefore a+b=4$

답 ③

0653 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$\overrightarrow{PA} = (2, 0) - (x, y) = (2-x, -y),$

$\overrightarrow{PB} = (4, 5) - (x, y) = (4-x, 5-y),$

$\overrightarrow{PC} = (-3, 1) - (x, y) = (-3-x, 1-y)$

$\therefore \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = (3-3x, 6-3y)$

이때 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}| = 4$ 에서

$\sqrt{(3-3x)^2 + (6-3y)^2} = 4$

$(3-3x)^2 + (6-3y)^2 = 16$

$\therefore (x-1)^2 + (y-2)^2 = \frac{16}{9}$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(1, 2)$ 이고 반지

름의 길이가 $\frac{4}{3}$ 인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$2\pi \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}\pi$

답 $\frac{8}{3}\pi$

0654 $\overrightarrow{AD} = (3, 1, 3) - (2, 3, 1) = (1, -2, 2)$

$\overrightarrow{BC} = (a, b, b) - (0, -2, 1) = (a, b+2, b-1)$

$\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ 이므로 $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AD} (k \neq 0)$ 라 하면

$(a, b+2, b-1) = k(1, -2, 2)$

따라서 $a=k, b+2=-2k, b-1=2k$ 이므로

$k = -\frac{3}{4}, a = -\frac{3}{4}, b = -\frac{1}{2}$

$\therefore a-b = -\frac{1}{4}$

답 $-\frac{1}{4}$

0655 $\overline{BC}$ 가 원의 지름이므로

$\angle BAC = 90^\circ$

따라서 직각삼각형 ABC에서

$\overline{BA} = \sqrt{12^2 - 9^2} = 3\sqrt{7}$

이므로 두 벡터 $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$\cos \theta = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{3\sqrt{7}}{12} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\therefore \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}| \cos \theta$

$= 3\sqrt{7} \times 12 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = 63$

답 ③

0656 $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD}$ 이고 $\angle BCD = 120^\circ$ 이므로 정육각형의 한 변의 길이를 a 라 하면

$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$

$= -|\overrightarrow{CB}| |\overrightarrow{CD}| \cos (180^\circ - 120^\circ)$

$= -a \times a \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}a^2$

즉 $-\frac{1}{2}a^2 = -18$ 이므로

$a^2 = 36 \quad \therefore a = 6 (\because a > 0)$

따라서 한 변의 길이가 6인 정육각형의 넓이는

$\left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2\right) \times 6 = 54\sqrt{3}$

답 $54\sqrt{3}$

0657 ① $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AD}| \cos 45^\circ$

$= \sqrt{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

② $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF}$ 이므로

$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BF}$

$= |\overrightarrow{BD}| |\overrightarrow{BF}| \cos 90^\circ$

$= \sqrt{2} \times 1 \times 0 = 0$

③ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$ 이므로

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{HF}$

$= |\overrightarrow{HG}| |\overrightarrow{HF}| \cos 45^\circ$

$= 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

④ $\triangle CHF$ 는 정삼각형이고 오른쪽 그림

과 같이 $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{CH'}$ 이라 하면

$\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{FH}$

$= \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{CH'}$

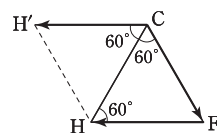
$= -|\overrightarrow{CF}| |\overrightarrow{CH'}| \cos (180^\circ - 120^\circ)$

$= -\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = -1$

⑤ $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$ 이므로

$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} = |\overrightarrow{AH}|^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$

답 ③



0658 $t\vec{a} + \vec{b} = t(1, 0) + (1, 2) = (t+1, 2)$

$\vec{a} + t\vec{b} = (1, 0) + t(1, 2) = (t+1, 2t)$

$\therefore f(t) = (t\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + t\vec{b})$

$= (t+1, 2) \cdot (t+1, 2t)$

$= (t+1)^2 + 4t$

$= t^2 + 6t + 1$

$= (t+3)^2 - 8$

따라서 $f(t)$ 는 $t = -3$ 일 때 최솟값 -8 을 갖는다.

답 -3

0659 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$\overrightarrow{OP} = (x, y)$

이때 $\overrightarrow{AB} = (5, 1) - (2, 3) = (3, -2)$ 이므로

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OP} = (3, -2) \cdot (x, y) = 3x - 2y$

즉 $3x - 2y = 13$ 이므로 점 P는 직선 $3x - 2y - 13 = 0$ 위의 점이다.

따라서 $\overrightarrow{OP}$ 의 길이의 최솟값은 원점 O와 직선 $3x - 2y - 13 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|-13|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \sqrt{13}$

답 ③

다른 풀이 $3x-2y=13$ 에서 $y=\frac{3}{2}x-\frac{13}{2}$

이때 $\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$ 이고

$$\begin{aligned}x^2+y^2 &= x^2 + \left(\frac{3}{2}x - \frac{13}{2}\right)^2 \\&= \frac{13}{4}x^2 - \frac{39}{2}x + \frac{169}{4} \\&= \frac{13}{4}(x-3)^2 + 13\end{aligned}$$

따라서 $\overline{OP}$ 의 길이는 $x=3, y=-2$ 일 때 최소이고 최솟값은 $\sqrt{13}$ 이다.

0660 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (2x, -1, y) \cdot (1, x, -2)$
 $= 2x - x - 2y = x - 2y$

이므로 $x - 2y = -3$

$\vec{b} \cdot \vec{b} = (1, x, -2) \cdot (1, x, -2)$
 $= 1 + x^2 + 4 = x^2 + 5$

즉 $x^2 + 5 = 14$ 이므로

$x^2 = 9 \quad \therefore x = 3 \quad (\because x > 0)$

$x=3$ 을 ㉠에 대입하면

$3 - 2y = -3 \quad \therefore y = 3$

$\therefore x + y = 6$

답 6

0661 $\vec{a} + \vec{b} = (k, 2, -1) + (0, -3, 1)$
 $= (k, -1, 0)$

$\vec{a} - \vec{c} = (k, 2, -1) - (k-1, -2, 0)$
 $= (1, 4, -1)$

$\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = (k, -1, 0) \cdot (1, 4, -1)$
 $= k - 4$

..... ㉠

한편 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{k^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{k^2 + 1}$,

$|\vec{a} - \vec{c}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-1)^2} = 3\sqrt{2}$ 이므로

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = -|\vec{a} + \vec{b}| |\vec{a} - \vec{c}| \cos(180^\circ - 120^\circ)$
 $= -\sqrt{k^2 + 1} \times 3\sqrt{2} \times \frac{1}{2}$
 $= -\frac{3\sqrt{2k^2 + 2}}{2}$

..... ㉡

㉠, ㉡에서 $k - 4 = -\frac{3\sqrt{2k^2 + 2}}{2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $7k^2 + 16k - 23 = 0$

$(7k + 23)(k - 1) = 0$

$\therefore k = 1 \quad (\because k \text{는 정수})$

답 ①

0662 $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$ 의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16$

$2^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 3^2 = 16 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3}{2}$

따라서

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$
 $= 2^2 - 2 \times \frac{3}{2} + 3^2 = 10$

이므로 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{10}$

답 ⑤

0663 $\vec{a} + \vec{b} = (-1, 3) + (2, -1) = (1, 2)$

$\vec{a} - \vec{b} = (-1, 3) - (2, -1) = (-3, 4)$

$\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = (1, 2) \cdot (-3, 4)$
 $= 1 \times (-3) + 2 \times 4$
 $= 5$

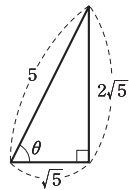
즉 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \geq 0$ 이므로

$\cos \theta = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}| |\vec{a} - \vec{b}|}$
 $= \frac{5}{\sqrt{1^2 + 2^2} \sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형에서

$\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

답 ⑤



0664 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = (3, 4, 5) \cdot (2, 4, -2)$

$= 3 \times 2 + 4 \times 4 + 5 \times (-2) = 12$

즉 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} \geq 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{OA}$,

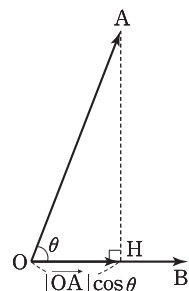
$\vec{OB}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$\cos \theta = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|}$

따라서 점 A에서 $\vec{OB}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 벡터 $\vec{OA}$ 의 벡터 $\vec{OB}$ 위로의 정사영은 벡터 $\vec{OH}$ 이므로 구하는 정사영의 크기는

$|\vec{OH}| = |\vec{OA}| \cos \theta$
 $= |\vec{OA}| \times \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|} = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OB}|}$
 $= \frac{12}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \sqrt{6}$

답 sqrt(6)



0665 $|2\vec{a} + \vec{b}| = 4$ 의 양변을 제곱하면

$4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16$

$4 \times 1^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 3^2 = 16 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3}{4}$

즉 $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$ 이므로

$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\frac{3}{4}}{1 \times 3} = \frac{1}{4}$

답 1/4

0666 $\vec{b} - \vec{c} = (-1, -3) - (-5, -1) = (4, -2)$

$k\vec{a} + \vec{c} = k(2, 1) + (-5, -1) = (2k-5, k-1)$

두 벡터 $\vec{b} - \vec{c}, k\vec{a} + \vec{c}$ 가 서로 수직이므로

$(\vec{b} - \vec{c}) \cdot (k\vec{a} + \vec{c}) = 0$ 에서

$(4, -2) \cdot (2k-5, k-1) = 0$

$4(2k-5) - 2(k-1) = 0, \quad 6k = 18$

$\therefore k = 3$

답 ③

0667 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \geq 0$ 이므로 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = \frac{6\sqrt{3}}{3 \times 4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

따라서 평행사변형 AOBC의 넓이는

$$|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \sin 30^\circ = 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 6$$

답 6

0668 $\vec{a} + \vec{b} = (1, 2) + (-3, 4) = (-2, 6)$

$$k\vec{a} + (1-k)\vec{b} = k(1, 2) + (1-k)(-3, 4)$$

$$= (4k-3, -2k+4)$$

... 1단계

두 벡터 $\vec{a} + \vec{b}$, $k\vec{a} + (1-k)\vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$k\vec{a} + (1-k)\vec{b} = t(\vec{a} + \vec{b}) \quad (t \neq 0)$$

라 하면 $(4k-3, -2k+4) = t(-2, 6)$

따라서 $4k-3 = -2t$, $-2k+4 = 6t$ 이므로

... 2단계

$$t = \frac{1}{2}, k = \frac{1}{2}$$

... 3단계

답 $\frac{1}{2}$

채점 요소	비율
1단계 $\vec{a} + \vec{b}$, $k\vec{a} + (1-k)\vec{b}$ 를 성분으로 나타내기	30 %
2단계 평행 조건을 이용하여 식 세우기	50 %
3단계 k의 값 구하기	20 %

0669 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \quad (k \neq 0)$$

... 1단계

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 1) - (2, 3, 4) = (-3, -1, -3),$$

$$\overrightarrow{AC} = (m+1, 2n-2, -2) - (2, 3, 4)$$

$$= (m-1, 2n-5, -6)$$

이므로 $(m-1, 2n-5, -6) = k(-3, -1, -3)$

따라서 $m-1 = -3k$, $2n-5 = -k$, $-6 = -3k$ 이므로

... 2단계

$$k=2, m=-5, n=\frac{3}{2}$$

$$\therefore mn = -\frac{15}{2}$$

... 3단계

답 $-\frac{15}{2}$

채점 요소	비율
1단계 $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ 임을 알기	20 %
2단계 k, m, n에 대한 식 세우기	60 %
3단계 mn의 값 구하기	20 %

0670 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ 라 하면 점 P는 $\overline{BC}$ 를 1:2로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\vec{b} + 2\vec{a}}{1+2} = \frac{1}{3}(2\vec{a} + \vec{b})$$

점 Q는 $\overline{BC}$ 를 2:1로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{2\vec{b} + \vec{a}}{2+1} = \frac{1}{3}(\vec{a} + 2\vec{b})$$

... 1단계

한편 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $\angle BAC = 60^\circ$ 이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$$

... 2단계

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} &= \frac{1}{9}(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= \frac{1}{9}(2|\vec{a}|^2 + 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 2|\vec{b}|^2) \\ &= \frac{1}{9}(2 \times 2^2 + 5 \times 2 + 2 \times 2^2) \\ &= \frac{26}{9} \end{aligned}$$

... 3단계

답 $\frac{26}{9}$

채점 요소	비율
1단계 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$ 를 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 로 나타내기	30 %
2단계 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 구하기	30 %
3단계 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 구하기	40 %

0671 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB}$ 에서

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}$$

$$\therefore 2\overrightarrow{PA} = -3\overrightarrow{PC}$$

... 1단계

따라서 두 벡터 $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PC}$ 는 방향이 반대
이므로 점 P는 $\overline{AC}$ 를 3:2로 내분하는
점이다.

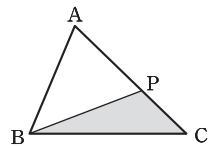
... 2단계

$$\therefore \triangle PBC = \frac{2}{5} \triangle ABC$$

$$= \frac{2}{5} \times 30 = 12$$

... 3단계

답 12



채점 요소	비율
1단계 주어진 식 변형하기	40 %
2단계 점 P의 위치 파악하기	40 %
3단계 $\triangle PBC$ 의 넓이 구하기	20 %

0672 **전략** $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP}$ 가 최소일 때의 점 P의 위치를 파악한다.

점 P에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\angle PAC = \theta$
라 하면

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP} &= |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AP}| \cos \theta \\ &= |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AH}| = 5 |\overrightarrow{AH}| \end{aligned} \quad \text{..... ①}$$

따라서 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP}$ 가 최소하려면 $|\overrightarrow{AH}|$ 가 최소이어야 하므로 점 P에서의 접선이 직선 AC와 수직이어야 한다.

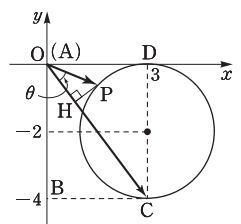
오른쪽 그림과 같이 점 A가 원점, $\overline{AD}$

와 $\overline{AB}$ 가 각각 x축, y축 위에 오도록

주어진 도형을 좌표평면 위에 놓으면

직선 AC의 방정식은

$$y = -\frac{4}{3}x$$



따라서 점 P에서의 접선의 기울기가 $\frac{3}{4}$ 이어야 하므로 접선의 방정식을 $y = \frac{3}{4}x + k$, 즉 $3x - 4y + 4k = 0$ 으로 놓으면 원의 중심 $(3, -2)$ 와 이 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같아야 한다.

$$\begin{aligned} \text{즉 } \frac{|9+8+4k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} &= 2 \text{에서 } |4k+17|=10 \\ 4k+17 &= -10 \text{ 또는 } 4k+17=10 \\ \therefore k &= -\frac{27}{4} \text{ 또는 } k = -\frac{7}{4} \end{aligned}$$

따라서 점 P에서의 접선의 방정식이 $3x - 4y - 7 = 0$ 일 때 $|\vec{AH}|$ 가 최소이다.

이때 점 H는 두 직선 $y = -\frac{4}{3}x$, $3x - 4y - 7 = 0$ 의 교점이므로 두 식을 연립하여 풀면

$$x = \frac{21}{25}, y = -\frac{28}{25}$$

따라서 $|\vec{AH}|$ 의 최솟값은

$$\sqrt{\left(\frac{21}{25}\right)^2 + \left(-\frac{28}{25}\right)^2} = \frac{7}{5}$$

이므로 ㉠에서 $\vec{AC} \cdot \vec{AP}$ 의 최솟값은

$$5 \times \frac{7}{5} = 7$$

답 7

다른 풀이 원의 중심을 Q라 하면

$$\begin{aligned} \vec{AC} \cdot \vec{AP} &= \vec{AC} \cdot (\vec{AQ} + \vec{QP}) \\ &= \vec{AC} \cdot \vec{AQ} + \vec{AC} \cdot \vec{QP} \\ &= (\vec{AD} + \vec{DC}) \cdot (\vec{AD} + \vec{DQ}) + \vec{AC} \cdot \vec{QP} \\ &= |\vec{AD}|^2 + \vec{AD} \cdot \vec{DQ} + \vec{DC} \cdot \vec{AD} \\ &\quad + \vec{DC} \cdot \vec{DQ} + \vec{AC} \cdot \vec{QP} \\ &= 3^2 + 0 + 0 + 4 \times 2 + \vec{AC} \cdot \vec{QP} \\ &= \vec{AC} \cdot \vec{QP} + 17 \\ &\geq -|\vec{AC}| |\vec{QP}| + 17 \\ &= -5 \times 2 + 17 = 7 \end{aligned}$$

참고 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 에 대하여

$$-|\vec{a}| |\vec{b}| \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

0673 전략 두 벡터의 내적이 0이면 두 벡터가 서로 수직임을 이용한다.

조건 ㉠에서 $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0$ 이므로

$$\vec{AC} \perp \vec{BC}$$

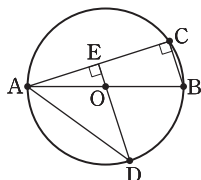
즉 $\angle ACB = 90^\circ$ 이므로 $\vec{AB}$ 는 원의 지름이다. 원의 중심을 O라 하면

$$\vec{AD} = \vec{AO} + \vec{OD} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{OD}$$

조건 ㉡에서 $\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AB} - 2\vec{BC}$ 이므로

$$\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{OD} = \frac{1}{2}\vec{AB} - 2\vec{BC}$$

$$\therefore \vec{BC} = -\frac{1}{2}\vec{OD}$$



이때 $|\vec{OD}| = \frac{1}{2} |\vec{AB}| = 4$ 이므로

$$|\vec{BC}| = \frac{1}{2} |\vec{OD}| = 2$$

따라서 직각삼각형 ABC에서

$$\vec{AC} = \sqrt{8^2 - 2^2} = 2\sqrt{15}$$

한편 직선 BC와 직선 OD는 평행하므로 직선 OD와 $\vec{AC}$ 가 만나는 점을 E라 하면

$$\vec{OE} = \frac{1}{2}\vec{BC} = 1$$

$$\therefore \vec{DE} = \vec{DO} + \vec{OE} = 4 + 1 = 5$$

또 $\vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \sqrt{15}$ 이므로 직각삼각형 ADE에서

$$|\vec{AD}|^2 = \vec{AD}^2 = (\sqrt{15})^2 + 5^2 = 40$$

답 ⑤

다른 풀이 조건 ㉡에서

$$\begin{aligned} \vec{AD} &= \frac{1}{2}\vec{AB} - 2\vec{BC} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{CB} - \vec{CA}) + 2\vec{CB} \\ &= \frac{5}{2}\vec{CB} - \frac{1}{2}\vec{CA} \end{aligned}$$

이때 $\vec{AC} = 2\sqrt{15}$, $\vec{BC} = 2$ 이므로

$$\begin{aligned} |\vec{AD}|^2 &= \left| \frac{5}{2}\vec{CB} - \frac{1}{2}\vec{CA} \right|^2 \\ &= \frac{25}{4} |\vec{CB}|^2 - \frac{5}{2} \vec{CB} \cdot \vec{CA} + \frac{1}{4} |\vec{CA}|^2 \\ &= \frac{25}{4} \times 2^2 - \frac{5}{2} \times 0 + \frac{1}{4} \times (2\sqrt{15})^2 = 40 \end{aligned}$$

0674 전략 벡터의 내적을 이용하여 두 벡터 $\vec{OA}$, $\vec{OC}$ 가 이루는 각의 크기를 구한다.

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ 라 하면

$$\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \text{에서}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = 2$$

$$\therefore |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{c} = 2$$

..... ㉠

$$\vec{OB} \cdot \vec{OC} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 2 \text{에서}$$

$$(\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{c} = 2 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 2 \quad \text{..... ㉡}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OC} = -2 \text{에서 } \vec{a} \cdot \vec{c} = -2 \text{이므로 ㉠, ㉡에서}$$

$$|\vec{a}|^2 - 2 = 2, \quad -2 + |\vec{c}|^2 = 2$$

$$|\vec{a}|^2 = 4, \quad |\vec{c}|^2 = 4$$

$$\therefore |\vec{a}| = 2, \quad |\vec{c}| = 2$$

이때 $\vec{a} \cdot \vec{c} < 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{c}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| |\vec{c}|} = -\frac{-2}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$$

즉 $180^\circ - \theta = 60^\circ$ 이므로 $\theta = 120^\circ$

따라서 평행사변형 OABC의 넓이는

$$|\vec{a}| |\vec{c}| \sin(180^\circ - 120^\circ) = 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

답 $2\sqrt{3}$

07 도형의 방정식

교과서 문제 정복하기

본책 103쪽, 105쪽

0675 $\frac{x-7}{2} = \frac{y+2}{3}$ 0676 $x=3$

0677 $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{5}$

0678 $\frac{x}{2} = z-2, y=3$

0679 $x=3, z=1$

0680 $(x+2)-5(y-3)=0$ 에서 $x-5y+17=0$
 $\Rightarrow x-5y+17=0$

0681 $3(x-4)+4(y-2)=0$ 에서 $3x+4y-20=0$
 $\Rightarrow 3x+4y-20=0$

0682 $\overrightarrow{AB} = (6, 2) - (5, -1) = (1, 3)$
 따라서 점 A를 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{AB} = (1, 3)$ 인 직선의 방정식은
 $x-5 = \frac{y+1}{3}$ $\Rightarrow x-5 = \frac{y+1}{3}$

0683 $\overrightarrow{AB} = (3, 1) - (-2, 4) = (5, -3)$
 따라서 점 A를 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{AB} = (5, -3)$ 인 직선의 방정식은
 $\frac{x+2}{5} = \frac{4-y}{3}$ $\Rightarrow \frac{x+2}{5} = \frac{4-y}{3}$

0684 $\overrightarrow{AB} = (2, 3, 1) - (0, 1, 2) = (2, 2, -1)$
 따라서 점 A를 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{AB} = (2, 2, -1)$ 인 직선의 방정식은
 $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = 2-z$ $\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = 2-z$

0685 $\overrightarrow{AB} = (2, 2, 3) - (2, 1, 0) = (0, 1, 3)$
 따라서 점 A를 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 3)$ 인 직선의 방정식은
 $x=2, y-1 = \frac{z}{3}$ $\Rightarrow x=2, y-1 = \frac{z}{3}$

0686 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면
 $\vec{u} = (3, 2), \vec{v} = (-2, 3)$
 $\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|3 \times (-2) + 2 \times 3|}{\sqrt{3^2+2^2} \sqrt{(-2)^2+3^2}} = 0$
 $\Rightarrow 0$

0687 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면
 $\vec{u} = (1, 2), \vec{v} = (2, 1)$
 $\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|1 \times 2 + 2 \times 1|}{\sqrt{1^2+2^2} \sqrt{2^2+1^2}} = \frac{4}{5}$ $\Rightarrow \frac{4}{5}$

0688 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면
 $\vec{u} = (3, 4, 5), \vec{v} = (4, -3, 5)$
 $\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|3 \times 4 + 4 \times (-3) + 5 \times 5|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2} \sqrt{4^2+(-3)^2+5^2}} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \frac{1}{2}$

0689 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면
 $\vec{u} = (-1, 2, 1), \vec{v} = (1, 1, -2)$
 $\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|-1 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times (-2)|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2} \sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{1}{6}$ $\Rightarrow \frac{1}{6}$

0690 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면
 $\vec{u} = (a, -2), \vec{v} = (-5, 1)$
 (1) 두 직선이 서로 평행하면 두 벡터 $\vec{u}, \vec{v}$ 도 서로 평행하므로
 $\vec{u} = k\vec{v} (k \neq 0)$ 라 하면
 $(a, -2) = k(-5, 1)$
 따라서 $a = -5k, -2 = k$ 이므로 $a = 10$
 (2) 두 직선이 서로 수직이면 두 벡터 $\vec{u}, \vec{v}$ 도 서로 수직이므로
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0, a \times (-5) + (-2) \times 1 = 0$
 $\therefore a = -\frac{2}{5}$
 $\Rightarrow$ (1) 10 (2) $-\frac{2}{5}$

0691 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면
 $\vec{u} = (2, 1, -3), \vec{v} = (m, -2, n)$
 두 직선이 서로 평행하면 두 벡터 $\vec{u}, \vec{v}$ 도 서로 평행하므로
 $\vec{u} = k\vec{v} (k \neq 0)$ 라 하면
 $(2, 1, -3) = k(m, -2, n)$
 따라서 $2 = mk, 1 = -2k, -3 = nk$ 이므로
 $k = -\frac{1}{2}, m = -4, n = 6$ $\Rightarrow m = -4, n = 6$

0692 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면
 $\vec{u} = (2, 1, 4), \vec{v} = (3, -2, k)$
 두 직선이 서로 수직이면 두 벡터 $\vec{u}, \vec{v}$ 도 서로 수직이므로
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0, 2 \times 3 + 1 \times (-2) + 4k = 0$
 $\therefore k = -1$ $\Rightarrow -1$

0693 $(x-2)-2(y+1)-(z-1)=0$ 에서
 $x-2y-z-3=0$ 답 $x-2y-z-3=0$

0694 $-(x-3)+(z+2)=0$ 에서
 $x-z-5=0$ 답 $x-z-5=0$

0695 평면 $x+3y-5z+8=0$ 의 법선벡터는
 $\vec{n}=(1, 3, -5)$
 따라서 구하는 평면의 방정식은
 $(x-4)+3(y-2)-5(z+1)=0$
 $\therefore x+3y-5z-15=0$ 답 $x+3y-5z-15=0$

0696 z 축에 수직인 평면의 법선벡터는 $\vec{n}=(0, 0, 1)$ 이므로
 구하는 평면의 방정식은
 $z-6=0 \quad \therefore z=6$ 답 $z=6$

0697 yz 평면에 평행한 평면, 즉 x 축에 수직인 평면의 법선벡터는 $\vec{n}=(1, 0, 0)$ 이므로 구하는 평면의 방정식은
 $x-1=0 \quad \therefore x=1$ 답 $x=1$

0698 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$ 으로 놓고 세 점
 $(1, -1, 0), (-1, 0, 1), (1, 0, 0)$ 의 좌표를 각각 대입하면
 $a-b+d=0, -a+c+d=0, a+d=0$
 $\therefore a=-d, b=0, c=-2d$

이것을 $ax+by+cz+d=0$ 에 대입하면
 $-dx-2dz+d=0$

이때 $d \neq 0$ 이므로 양변을 d 로 나누어 정리하면
 $x+2z-1=0$ 답 $x+2z-1=0$

0699 두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면
 $\vec{n}_1=(3, -\sqrt{6}, -1), \vec{n}_2=(2, 0, -2)$
 $\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$
 $= \frac{|3 \times 2 + (-\sqrt{6}) \times 0 + (-1) \times (-2)|}{\sqrt{3^2 + (-\sqrt{6})^2 + (-1)^2} \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2}}$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\therefore \theta = 45^\circ$ 답 45°

0700 두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면
 $\vec{n}_1=(1, 2, -1), \vec{n}_2=(2, 1, 1)$
 $\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$
 $= \frac{|1 \times 2 + 2 \times 1 + (-1) \times 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$
 $\therefore \theta = 60^\circ$ 답 60°

0701 두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면
 $\vec{n}_1=(3, -1, -2), \vec{n}_2=(1, 9, -3)$
 $\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$
 $= \frac{|3 \times 1 + (-1) \times 9 + (-2) \times (-3)|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + 9^2 + (-3)^2}}$
 $= 0$
 $\therefore \theta = 90^\circ$ 답 90°

0702 두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면
 $\vec{n}_1=(a, 2, b), \vec{n}_2=(2, 3, -4)$
 두 평면 α, β 가 서로 평행하면 두 벡터 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 도 서로 평행하므로
 $\vec{n}_1=k\vec{n}_2 (k \neq 0)$ 라 하면
 $(a, 2, b)=k(2, 3, -4)$
 따라서 $a=2k, 2=3k, b=-4k$ 이므로
 $k=\frac{2}{3}, a=\frac{4}{3}, b=-\frac{8}{3}$ 답 $a=\frac{4}{3}, b=-\frac{8}{3}$

0703 두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면
 $\vec{n}_1=(1, 3, 1-k), \vec{n}_2=(1, k-3, -2)$
 두 평면 α, β 가 서로 수직이면 두 벡터 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 도 서로 수직이므로
 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$
 $1 \times 1 + 3(k-3) - 2(1-k) = 0$
 $5k-10=0 \quad \therefore k=2$ 답 2

0704 $\frac{|2 \times 1 + 2 \times (-2) + 1 - 2|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 1$ 답 1

0705 $\frac{|0+3-4+4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$

0706 $\vec{a}=(2, 3, 1), \vec{p}=(x, y, z)$
 (1) $|\vec{p}|=1$ 에서 $|\vec{p}|^2=1$ 이므로
 $x^2+y^2+z^2=1$
 (2) $\vec{p}-\vec{a}=(x-2, y-3, z-1)$
 이때 $|\vec{p}-\vec{a}|=3$ 에서 $|\vec{p}-\vec{a}|^2=3^2$ 이므로
 $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$
답 (1) $x^2+y^2+z^2=1$
 (2) $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$

참고 $|\vec{p}|=1 \Rightarrow$ 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 구
 $|\vec{p}-\vec{a}|=3 \Rightarrow$ 중심이 점 A이고 반지름의 길이가 3인 구

0707 $\vec{p}-\vec{a}=\overrightarrow{AP}, \vec{p}-\vec{b}=\overrightarrow{BP}$ 이므로
 $(\vec{p}-\vec{a}) \cdot (\vec{p}-\vec{b})=0$ 에서
 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}=0$
 즉 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$ 이므로 $\angle APB=90^\circ$
 따라서 점 P가 나타내는 도형은 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 구이다.
답 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 구

유형 익히기

• 본책 106~115쪽

0708 직선 $\frac{x-3}{2} = -\frac{y+1}{3}$ 의 방향벡터는

$$\vec{u} = (2, -3)$$

평행한 두 직선은 방향벡터가 같으므로 점 (3, -4)를 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (2, -3)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-3}$$

이 직선이 점 (k, -1)을 지나므로

$$\frac{k-3}{2} = -1 \quad \therefore k=1$$

답 1

0709 두 점 A(-3, 2), B(-4, 6)을 지나는 직선의 방향벡터는

$$\overrightarrow{AB} = (-4, 6) - (-3, 2) = (-1, 4)$$

평행한 두 직선은 방향벡터가 같으므로 점 (3, 0)을 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{AB} = (-1, 4)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y}{4} \quad \therefore y = -4x + 12$$

따라서 $m = -4$, $n = 12$ 이므로

$$m+n=8$$

답 8

0710 $\vec{b} - \vec{a} = (5, 8) - (3, 1) = (2, 7)$

따라서 점 (5, 1)을 지나고 방향벡터가 $\vec{b} - \vec{a} = (2, 7)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{7} \quad \therefore 7x - 2y - 33 = 0$$

즉 $m = -2$, $n = -33$ 이므로

$$m-n=31$$

답 ①

0711 직선 $x=y+1=\frac{1-z}{2}$, 즉 $x=y+1=\frac{z-1}{-2}$ 의 방향

벡터는 $\vec{u} = (1, 1, -2)$

평행한 두 직선은 방향벡터가 같으므로 점 (2, -1, 0)을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (1, 1, -2)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2}$$

이 직선이 점 (a, 3, b)를 지나므로

$$\frac{a-2}{1} = \frac{b-3}{1} \quad \therefore a=6, b=-8$$

$$\therefore a+b=-2$$

답 -2

0712 점 Q의 좌표는 (-1, 2, 6)

직선 $\frac{x-2}{2} = \frac{1-y}{3} = \frac{z+1}{6}$, 즉 $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{6}$ 의

방향벡터는 $\vec{u} = (2, -3, 6)$

평행한 두 직선은 방향벡터가 같으므로 점 Q(-1, 2, 6)을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (2, -3, 6)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x+1}{2} = \frac{2-y}{3} = \frac{z-6}{6} \quad \text{답} \quad \frac{x+1}{2} = \frac{2-y}{3} = \frac{z-6}{6}$$

0713 직선 $\frac{3-x}{2} = \frac{2y-1}{4} = -z$, 즉

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y-\frac{1}{2}}{2} = \frac{z}{-1}$$

$$\vec{u} = (-2, 2, -1)$$

평행한 두 직선은 방향벡터가 같으므로 점 (-3, a, b)를 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (-2, 2, -1)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x+3}{-2} = \frac{y-a}{2} = \frac{z-b}{-1}$$

이 직선이 점 (5, 2, -1)을 지나므로

$$-4 = \frac{2-a}{2} = \frac{-1-b}{-1} \quad \therefore a=10, b=-5$$

$$\therefore a+b=5$$

답 ⑤

0714 점 (2, 0, -1)을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (1, 2, 4)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{4}$$

yz평면 위의 점은 x좌표가 0이므로 위의 식에 $x=0$ 을 대입하면

$$-2 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{4} \quad \therefore y=-4, z=-9$$

따라서 구하는 점의 좌표는

$$(0, -4, -9)$$

답 (0, -4, -9)

0715 $\overrightarrow{AB} = (2, -1, 0) - (1, -2, 3) = (1, 1, -3)$

따라서 점 A(1, -2, 3)을 지나고 방향벡터가

$\overrightarrow{AB} = (1, 1, -3)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-3}$$

zx평면 위의 점은 y좌표가 0이므로 위의 식에 $y=0$ 을 대입하면

$$\frac{x-1}{1} = 2 = \frac{z-3}{-3} \quad \therefore x=3, z=-3$$

따라서 주어진 직선이 zx평면과 만나는 점의 좌표가 (3, 0, -3)이므로

$$a=3, b=0, c=-3$$

$$\therefore a+b+c=0$$

답 0

0716 $\overrightarrow{AB} = (3, 2, -2) - (2, 2, 1) = (1, 0, -3)$

따라서 점 A(2, 2, 1)을 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{AB} = (1, 0, -3)$

인 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{1} = \frac{z-1}{-3}, y=2$$

따라서 $m=1, n=-3, k=2$ 이므로

$$mnk=-6$$

답 -6

0717 두 점 D, F의 좌표는 각각 (0, 0, 5), (4, 6, 0)

$$\therefore \overrightarrow{DF} = (4, 6, 0) - (0, 0, 5) = (4, 6, -5)$$

따라서 점 D(0, 0, 5)를 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{DF} = (4, 6, -5)$

인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{6} = \frac{5-z}{5}$$

답 $\frac{x}{4} = \frac{y}{6} = \frac{5-z}{5}$

07

도형의 방정식

0718 $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 2) - (3, 2, 1) = (-4, -1, 1)$
 따라서 점 A(3, 2, 1)을 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{AB} = (-4, -1, 1)$
 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y-2}{-1} = z-1$$

이때 점 C(a, b-1, 3)이 이 직선 위의 점이므로

$$\frac{a-3}{-4} = \frac{b-3}{-1} = 2 \quad \therefore a = -5, b = 1$$

$$\therefore a+b = -4$$

답 ②

다른 풀이 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \quad (k \neq 0)$$

이어야 한다.

이때 $\overrightarrow{AB} = (-4, -1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (a-3, b-3, 2)$ 이므로

$$(a-3, b-3, 2) = k(-4, -1, 1)$$

따라서 $a-3 = -4k$, $b-3 = -k$, $2 = k$ 이므로

$$a = -5, b = 1$$

0719 $\frac{x+3}{2} = \frac{3-y}{2} = z = t$ 로 놓으면

$$x = 2t - 3, y = 3 - 2t, z = t \quad \dots\dots ㉠$$

$$\frac{x-3}{2} = y = 1 - z = s \text{로 놓으면}$$

$$x = 2s + 3, y = s, z = 1 - s \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $t = 2, s = -1$

$t = 2$ 를 ㉠에 대입하면 $x = 1, y = -1, z = 2$

따라서 구하는 교점의 좌표는

$$(1, -1, 2) \quad \text{답 (1, -1, 2)}$$

0720 $\frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{2} = t$ 로 놓으면

$$x = 2t + 1, y = t, z = 2t - 1 \quad \dots\dots ㉠$$

㉠을 주어진 구의 방정식에 대입하면

$$(2t+1)^2 + t^2 + (2t-1)^2 = 38$$

$$t^2 = 4 \quad \therefore t = \pm 2$$

$t = 2$ 를 ㉠에 대입하면 $x = 5, y = 2, z = 3$

$t = -2$ 를 ㉠에 대입하면 $x = -3, y = -2, z = -5$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 (5, 2, 3), (-3, -2, -5)이므로

$$AB = \sqrt{(-3-5)^2 + (-2-2)^2 + (-5-3)^2} = 12$$

답 ④

0721 $\frac{1-x}{5} = y = \frac{z-5}{2} = t$ 로 놓으면

$$x = -5t + 1, y = t, z = 2t + 5 \quad \dots\dots ㉠$$

$$x + 3 = \frac{y-3}{2} = \frac{2-z}{5} = s \text{로 놓으면}$$

$$x = s - 3, y = 2s + 3, z = -5s + 2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $t = 1, s = -1$

$t = 1$ 을 ㉠에 대입하면 $x = -4, y = 1, z = 7$

즉 두 직선의 교점의 좌표는 $(-4, 1, 7)$ **답 ①**

이때 두 점 $(-4, 1, 7)$, $(2, 3, -1)$ 을 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (2, 3, -1) - (-4, 1, 7) = (6, 2, -8)$$

따라서 점 $(-4, 1, 7)$ 을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (6, 2, -8)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x+4}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-7}{-8}$$

$$\therefore \frac{x+4}{3} = y-1 = \frac{7-z}{4}$$

답 ②

$$\text{답 } \frac{x+4}{3} = y-1 = \frac{7-z}{4}$$

채점 요소		비율
1단계	두 직선의 교점의 좌표 구하기	60 %
2단계	교점과 점 (2, 3, -1)을 지나는 직선의 방정식 구하기	40 %

0722 $x-2 = \frac{y+1}{2} = \frac{3-z}{4} = t$ 로 놓으면

$$x = t + 2, y = 2t - 1, z = -4t + 3 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\frac{x+1}{2} = 3 - y = \frac{z-5}{k} = s \text{로 놓으면}$$

$$x = 2s - 1, y = 3 - s, z = ks + 5 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $t = 1, s = 2$

㉠에 $t = 1$ 을 대입하면 $x = 3, y = 1, z = -1$

㉡에 $s = 2$ 를 대입하면 $x = 3, y = 1, z = 2k + 5$

따라서 두 직선이 한 점에서 만나려면 $2k + 5 = -1$ 이어야 하므로

$$k = -3 \quad \text{답 ①}$$

참고 $k \neq -3$ 이면 두 직선의 교점이 존재하지 않고 두 직선이 평행하지도 않으므로 두 직선은 교인 위치에 있다.

0723 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (a, 1), \vec{v} = (1, \sqrt{3})$$

이때 두 직선이 이루는 각의 크기가 30° 이므로

$$\cos 30^\circ = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|a + \sqrt{3}|}{\sqrt{a^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}}$$

$$\therefore \sqrt{3(a^2 + 1)} = |a + \sqrt{3}|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - \sqrt{3}a = 0, \quad a(a - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore a = \sqrt{3} \quad (\because a \neq 0) \quad \text{답 ①}$$

0724 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (1, k, 1), \vec{v} = (k, 1, -1)$$

이때 두 직선이 이루는 각의 크기가 60° 이려면

$$\cos 60^\circ = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|k + k - 1|}{\sqrt{1^2 + k^2 + 1^2} \sqrt{k^2 + 1^2 + (-1)^2}}$$

$$\therefore k^2 + 2 = 2|2k - 1|$$

(i) $k \geq \frac{1}{2}$ 일 때

$$k^2 + 2 = 2(2k - 1) \text{ 이므로 } k^2 - 4k + 4 = 0 \\ (k - 2)^2 = 0 \quad \therefore k = 2$$

(ii) $k < \frac{1}{2}$ 일 때

$$k^2 + 2 = -2(2k - 1) \text{ 이므로 } k^2 + 4k = 0 \\ k(k + 4) = 0 \quad \therefore k = -4 \quad (\because k \neq 0)$$

(i), (ii)에서 $k = 2$ 또는 $k = -4$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$2 + (-4) = -2$$

답 -2

0725 두 직선 l_1, l_2 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

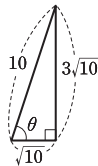
$$\vec{u} = (4, 3), \vec{v} = (-1, 3)$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|-4 + 9|}{\sqrt{4^2 + 3^2} \sqrt{(-1)^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

따라서 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형에서

$$\sin \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

답 ③



0726 주어진 직선의 방향벡터는

$$\vec{u} = (2, -1, 2)$$

이때 x 축, y 축, z 축의 방향벡터를 각각

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

이라 하면

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{e}_1|}{|\vec{u}| |\vec{e}_1|} = \frac{|2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \times 1} = \frac{2}{3}$$

$$\cos \beta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{e}_2|}{|\vec{u}| |\vec{e}_2|} = \frac{|-1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \times 1} = \frac{1}{3}$$

$$\cos \gamma = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{e}_3|}{|\vec{u}| |\vec{e}_3|} = \frac{|2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \times 1} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{5}{3}$$

답 5/3

0727 두 직선 l_1, l_2 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (a, -b, 4), \vec{v} = (3, 2, 2)$$

이때 두 직선이 서로 평행하므로 $\vec{u} = k\vec{v}$ ($k \neq 0$)라 하면

$$(a, -b, 4) = k(3, 2, 2)$$

따라서 $a = 3k, -b = 2k, 4 = 2k$ 이므로

$$k = 2, a = 6, b = -4$$

$$\therefore a + b = 2$$

답 2

0728 두 점 $(4, 6), (7, -3)$ 을 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (7, -3) - (4, 6) = (3, -9)$$

직선 $x + 1 = \frac{y}{2k - 1}$ 의 방향벡터를 $\vec{v}$ 라 하면

$$\vec{v} = (1, 2k - 1)$$

이때 두 직선이 서로 수직이므로 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ 에서

$$3 - 9(2k - 1) = 0, \quad 18k = 12$$

$$\therefore k = \frac{2}{3}$$

답 2/3

0729 세 직선 l_1, l_2, l_3 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ 이라 하면

$$\vec{u}_1 = (2, 3, 1), \vec{u}_2 = (6, -p, -q), \vec{u}_3 = (r, 1, 3)$$

$l_1 \parallel l_2$ 이므로 $\vec{u}_2 = k\vec{u}_1$ ($k \neq 0$)이라 하면

$$(6, -p, -q) = k(2, 3, 1)$$

따라서 $6 = 2k, -p = 3k, -q = k$ 이므로

$$k = 3, p = -9, q = -3$$

... 1단계

또 $l_1 \perp l_3$ 이므로 $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 0$ 에서

$$2r + 3 + 3 = 0$$

$$\therefore r = -3$$

... 2단계

$$\therefore p + q + r = -15$$

... 3단계

답 -15

채점 요소	비율
1단계 $l_1 \parallel l_2$ 임을 이용하여 p, q 의 값 구하기	60 %
2단계 $l_1 \perp l_3$ 임을 이용하여 r 의 값 구하기	30 %
3단계 $p + q + r$ 의 값 구하기	10 %

0730 두 직선 l_1, l_2 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (2, 3, 4), \vec{v} = (1, 2, 3)$$

구하는 직선의 방향벡터를 $\vec{w} = (a, b, c)$ 라 하면

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \text{에서 } 2a + 3b + 4c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \text{에서 } a + 2b + 3c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a = c, b = -2c$$

$$\therefore \vec{w} = (c, -2c, c)$$

따라서 원점을 지나고 방향벡터가 $\vec{w} = (c, -2c, c)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{-2c} = \frac{z}{c}$$

$$\therefore x = -\frac{y}{2} = z$$

답 $x = -\frac{y}{2} = z$

0731 $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = -z = t$ 로 놓으면

$$x = 2t - 1, y = 3t + 2, z = -t$$

점 A에서 직선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$H(2t - 1, 3t + 2, -t)$$

로 놓을 수 있으므로

$$\vec{AH} = (2t - 1, 3t + 2, -t) - (5, 3, 1) \\ = (2t - 6, 3t - 1, -t - 1)$$

이때 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (2, 3, -1)$$

$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$ 이므로 $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$ 에서

$$2(2t-6) + 3(3t-1) - (-t-1) = 0$$

$$14t - 14 = 0 \quad \therefore t = 1$$

따라서 $\overrightarrow{AH} = (-4, 2, -2)$ 이므로 구하는 거리는

$$\overline{AH} = |\overrightarrow{AH}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{6}$$

답 $2\sqrt{6}$

0732 $x-4 = \frac{y+1}{3} = 1-z = t$ 로 놓으면

$$x = t+4, y = 3t-1, z = 1-t$$

점 A에서 직선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$H(t+4, 3t-1, 1-t)$$

로 놓을 수 있으므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} &= (t+4, 3t-1, 1-t) - (3, -3, 5) \\ &= (t+1, 3t+2, -t-4) \end{aligned}$$

이때 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (1, 3, -1)$$

$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$ 이므로 $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$ 에서

$$(t+1) + 3(3t+2) - (-t-4) = 0$$

$$11t + 11 = 0 \quad \therefore t = -1$$

따라서 수선의 발 H의 좌표는

$$(3, -4, 2)$$

답 $(3, -4, 2)$

0733 $\frac{x+1}{2} = y-4 = \frac{7-z}{3} = t$ 로 놓으면

$$x = 2t-1, y = t+4, z = 7-3t$$

따라서 $H(2t-1, t+4, 7-3t)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} &= (2t-1, t+4, 7-3t) - (5, -1, 0) \\ &= (2t-6, t+5, 7-3t) \end{aligned}$$

이때 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (2, 1, -3)$$

$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$ 이므로 $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$ 에서

$$2(2t-6) + (t+5) - 3(7-3t) = 0$$

$$14t - 28 = 0 \quad \therefore t = 2$$

따라서 $\overrightarrow{AH} = (-2, 7, 1)$ 이므로

$$\overline{AH} = |\overrightarrow{AH}| = \sqrt{(-2)^2 + 7^2 + 1^2} = 3\sqrt{6}$$

답 ③

0734 $x-3 = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-4} = t$ 로 놓으면

$$x = t+3, y = 2t, z = -4t-2$$

점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$H(t+3, 2t, -4t-2)$$

로 놓을 수 있으므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} &= (t+3, 2t, -4t-2) - (-2, 0, 2) \\ &= (t+5, 2t, -4t-4) \end{aligned}$$

이때 직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (1, 2, -4)$$

$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$ 이므로 $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$ 에서

$$(t+5) + 4t - 4(-4t-4) = 0$$

$$21t + 21 = 0 \quad \therefore t = -1$$

즉 $\overrightarrow{AH} = (4, -2, 0)$ 이므로

$$\overline{AH} = |\overrightarrow{AH}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 0^2} = 2\sqrt{5}$$

이때 선분 AH는 정삼각형 ABC의 높이이므로 한 변의 길이를 a라 하면

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times a = 2\sqrt{5} \quad \therefore a = \frac{4\sqrt{15}}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$\frac{4\sqrt{15}}{3} \times 3 = 4\sqrt{15}$$

답 $4\sqrt{15}$

0735 주어진 평면의 법선벡터는 직선

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{2}$$

$$\vec{n} = (3, 4, 2)$$

따라서 점 $(2, 1, 4)$ 를 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = (3, 4, 2)$ 인 평면의 방정식은

$$3(x-2) + 4(y-1) + 2(z-4) = 0$$

$$\therefore 3x + 4y + 2z - 18 = 0$$

이 평면이 점 $(k, 2, -1)$ 을 지나므로

$$3k - 12 = 0 \quad \therefore k = 4$$

답 ④

0736 두 점 A, B를 지나는 직선의 방향벡터는

$$\overrightarrow{AB} = (2, -2, 0) - (0, 1, -1) = (2, -3, 1)$$

이때 주어진 평면의 법선벡터는 직선의 방향벡터와 같으므로 점 $(1, -1, 2)$ 를 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{AB} = (2, -3, 1)$ 인 평면의 방정식은

$$2(x-1) - 3(y+1) + (z-2) = 0$$

$$\therefore 2x - 3y + z - 7 = 0$$

답 $2x - 3y + z - 7 = 0$

0737 평면 $x+2y-z=3$ 의 법선벡터는

$$\vec{n} = (1, 2, -1)$$

따라서 점 $(3, 1, -2)$ 를 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = (1, 2, -1)$ 인 평면의 방정식은

$$(x-3) + 2(y-1) - (z+2) = 0$$

$$\therefore x + 2y - z - 7 = 0$$

이 평면이 점 $(a, 1, 1)$ 을 지나므로

$$a - 6 = 0 \quad \therefore a = 6$$

답 ④

0738 구의 중심을 C라 하면 $C(0, 0, 3)$

이때 점 P에서 구에 접하는 평면의 법선벡터는

$$\overrightarrow{CP} = (1, 0, 4) - (0, 0, 3) = (1, 0, 1)$$

따라서 점 P(1, 0, 4)를 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{CP} = (1, 0, 1)$ 인 평면의 방정식은

$$(x-1) + (z-4) = 0 \quad \therefore x + z - 5 = 0$$

앞의 식에 $x=0$ 을 대입하면 $z-5=0 \quad \therefore z=5$

따라서 평면과 z 축의 교점의 좌표는

$$(0, 0, 5) \quad \text{답 (0, 0, 5)}$$

0739 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식을

$ax+by+cz+d=0$ 으로 놓고 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 대입하면

$$a-2b+c+d=0, -a-3b+2c+d=0, 2a+c+d=0$$

$$\therefore a=-2b, c=-3b, d=7b$$

이것을 $ax+by+cz+d=0$ 에 대입하면

$$-2bx+by-3bz+7b=0$$

이때 $b \neq 0$ 이므로 양변을 b 로 나누어 정리하면

$$2x-y+3z-7=0$$

이 평면이 점 $(3, k, 3)$ 을 지나므로

$$6-k+9-7=0$$

$$\therefore k=8$$

답 ④

0740 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식을

$ax+by+cz+d=0$ 으로 놓고 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 대입하면

$$a+3b+c+d=0, 5b+2c+d=0, -a-2b-3c+d=0$$

$$\therefore a=\frac{1}{2}b, c=-\frac{3}{2}b, d=-2b$$

따라서 평면의 법선벡터가

$$\vec{n}=\left(\frac{1}{2}b, b, -\frac{3}{2}b\right), \text{ 즉 } \vec{n}=(1, 2, -3)$$

이므로 점 A(1, 3, 1)을 지나고 방향벡터가 $\vec{n}=(1, 2, -3)$ 인 직선의 방정식은

$$x-1=\frac{y-3}{2}=\frac{1-z}{3} \quad \text{답 } x-1=\frac{y-3}{2}=\frac{1-z}{3}$$

0741 $x^2+y^2+z^2-4x-2z-40=0$ 에서

$$(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=45$$

따라서 세 구 C_1, C_2, C_3 의 중심의 좌표는 각각

$$(-1, 3, 0), (0, 4, 1), (2, 0, 1)$$

이때 구의 부피를 이등분하는 평면은 구의 중심을 지나므로 세 구 C_1, C_2, C_3 의 부피를 모두 이등분하는 평면의 방정식을

$ax+by+cz+d=0$ 으로 놓고 세 구 C_1, C_2, C_3 의 중심의 좌표를 각각 대입하면

$$-a+3b+d=0, 4b+c+d=0, 2a+c+d=0$$

$$\therefore a=2b, c=-3b, d=-b$$

이것을 $ax+by+cz+d=0$ 에 대입하면

$$2bx+by-3bz-b=0$$

이때 $b \neq 0$ 이므로 양변을 b 로 나누면

$$2x+y-3z-1=0$$

위의 식에 $y=0, z=0$ 을 대입하면

$$2x-1=0 \quad \therefore x=\frac{1}{2}$$

따라서 평면이 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 $\frac{1}{2}$ 이다.

답 ④

0742 $x-2y-4z+2=0$

..... ㉠

$$x-y+2=0$$

..... ㉡

$$\text{㉠}-\text{㉡을 하면} \quad -y-4z=0$$

$$\therefore z=-\frac{y}{4}$$

$$\text{㉠}-\text{㉡} \times 2 \text{를 하면} \quad -x-4z-2=0$$

$$\therefore z=\frac{-x-2}{4}$$

따라서 구하는 교선의 방정식은

$$\frac{-x-2}{4}=-\frac{y}{4}=z \quad \therefore \frac{x+2}{4}=\frac{y}{4}=-z$$

$$\text{답 } \frac{x+2}{4}=\frac{y}{4}=-z$$

0743 $x-y+z+2=0$

..... ㉠

$$2x+y-2z+1=0$$

..... ㉡

$$\text{㉠}+\text{㉡을 하면} \quad 3x-z+3=0$$

$$\therefore x=\frac{z-3}{3}$$

$$\text{㉠} \times 2 + \text{㉡을 하면} \quad 4x-y+5=0$$

$$\therefore x=\frac{y-5}{4}$$

따라서 두 평면의 교선의 방정식은

$$x=\frac{y-5}{4}=\frac{z-3}{3}$$

즉 교선의 방향벡터는 $\vec{u}=(1, 4, 3)$ 이므로

$$a=1, b=4 \quad \therefore a+b=5$$

답 ④

0744 $x-2y+z=0$

..... ㉠

$$x+y-2z+3=0$$

..... ㉡

$$\text{㉠}-\text{㉡을 하면} \quad -3y+3z-3=0$$

$$\therefore z=y+1$$

$$\text{㉠}+\text{㉡} \times 2 \text{를 하면} \quad 3x-3z+6=0$$

$$\therefore z=x+2$$

따라서 두 평면의 교선의 방정식은

$$x+2=y+1=z$$

이때 교선의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면 $\vec{u}=(1, 1, 1)$

따라서 점 $(3, 2, 1)$ 을 지나고 법선벡터가 $\vec{u}=(1, 1, 1)$ 인 평면의 방정식은

$$(x-3)+(y-2)+(z-1)=0$$

$$\therefore x+y+z-6=0$$

즉 $a=1, b=1, c=-6$ 이므로

$$a+b-c=8$$

답 ①

0745 $\frac{x-1}{2}=y-3=\frac{z+2}{5}=t$ 로 놓으면

$$x=2t+1, y=t+3, z=5t-2$$

..... ㉠

$x+y-z=0$ 에 ㉠을 대입하면

$$(2t+1)+(t+3)-(5t-2)=0$$

$$-2t+6=0 \quad \therefore t=3$$

$t=3$ 을 ①에 대입하면 $x=7, y=6, z=13$
 따라서 직선과 평면이 만나는 점의 좌표가 $(7, 6, 13)$ 이므로
 $a=7, b=6, c=13$
 $\therefore a+b+c=26$ 답 ⑤

0746 점 $(-1, 2, 4)$ 를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(2, 2, -3)$ 인
 직선의 방정식은

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{-3}$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{-3} = t \text{로 놓으면}$$

$$x=2t-1, y=2t+2, z=-3t+4 \quad \dots\dots ①$$

$$x+2y-z=8 \text{에 } ① \text{을 대입하면}$$

$$(2t-1)+2(2t+2)-(-3t+4)=8$$

$$9t-1=8 \quad \therefore t=1$$

$$t=1 \text{을 } ① \text{에 대입하면 } x=1, y=4, z=1$$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(1, 4, 1)$ 답 (1, 4, 1)

0747 $\frac{3-x}{3}=y=z-2=t$ 로 놓으면

$$x=3-3t, y=t, z=t+2 \quad \dots\dots ① \quad \dots \text{1단계}$$

$$x-y+3z-6=0 \text{에 } ① \text{을 대입하면}$$

$$(3-3t)-t+3(t+2)-6=0 \quad \therefore t=3$$

$$t=3 \text{을 } ① \text{에 대입하면 } x=-6, y=3, z=5$$

$$\therefore A(-6, 3, 5) \quad \dots \text{2단계}$$

또 $2x+y+z-4=0$ 에 ①을 대입하면

$$2(3-3t)+t+(t+2)-4=0$$

$$-4t+4=0 \quad \therefore t=1$$

$$t=1 \text{을 } ① \text{에 대입하면 } x=0, y=1, z=3$$

$$\therefore B(0, 1, 3) \quad \dots \text{3단계}$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{6^2 + (1-3)^2 + (3-5)^2} = 2\sqrt{11} \quad \dots \text{4단계}$$

답 $2\sqrt{11}$

	채점 요소	비율
1단계	직선 위의 점의 좌표를 실수 t 로 나타내기	20 %
2단계	점 A의 좌표 구하기	30 %
3단계	점 B의 좌표 구하기	30 %
4단계	선분 AB의 길이 구하기	20 %

0748 두 평면 $3x-y-2z-4=0, 2x-3y+z+5=0$ 의 법
 선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1=(3, -1, -2), \vec{n}_2=(2, -3, 1)$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

$$= \frac{|6+3-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2} \sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

따라서 $\theta=60^\circ$ 이므로 $\tan \theta = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$

0749 평면 $x-y-2z+1=0$ 과 xy 평면의 법선벡터를 각각
 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1=(1, -1, -2), \vec{n}_2=(0, 0, 1)$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

$$= \frac{|-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2} \times 1}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \text{답 ④}$$

0750 두 평면 $-x+(k+1)y+(k-2)z=5, x+4y+z=7$
 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1=(-1, k+1, k-2), \vec{n}_2=(1, 4, 1)$$

이때 두 평면이 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$$\cos 60^\circ = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|-1+4(k+1)+(k-2)|}{\sqrt{(-1)^2+(k+1)^2+(k-2)^2} \sqrt{1^2+4^2+1^2}}$$

$$6\sqrt{k^2-k+3}=2|5k+1|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$16k^2+19k-26=0, \quad (k+2)(16k-13)=0$$

$$\therefore k=-2 (\because k \text{는 정수}) \quad \text{답 ④}$$

0751 두 평면 $x+2y-2z=1, 2x+2y+z=3$ 의 법선벡터를
 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1=(1, 2, -2), \vec{n}_2=(2, 2, 1)$$

두 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

$$= \frac{|2+4-2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2} \sqrt{2^2+2^2+1^2}}$$

$$= \frac{4}{9}$$

이때 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

이므로 구하는 정사영의 넓이는

$$\frac{9\sqrt{3}}{4} \times \frac{4}{9} = \sqrt{3} \quad \text{답 } \sqrt{3}$$

0752 두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1=(3, 1, k-3), \vec{n}_2=(5, -7, 1-k)$$

이때 두 평면이 서로 수직이려면 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2=0$ 이어야 하므로

$$3 \times 5 + 1 \times (-7) + (k-3)(1-k) = 0$$

$$k^2 - 4k - 5 = 0, \quad (k+1)(k-5) = 0$$

$$\therefore k=5 (\because k>0)$$

0753 두 평면 $(a+2)x+12y+(2-a)z=0$,
 $5x+(a-2)y-3z-2=0$ 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면
 $\vec{n}_1=(a+2, 12, 2-a), \vec{n}_2=(5, a-2, -3)$
 이때 두 평면이 서로 평행하려면 $\vec{n}_1=k\vec{n}_2 (k \neq 0)$ 이어야 하므로
 $(a+2, 12, 2-a)=k(5, a-2, -3)$
 따라서 $a+2=5k, 12=k(a-2), 2-a=-3k$ 이므로
 $k=2, a=8$ 답 ①

0754 두 평면 $x+y+z=1, x-4y+3z=5$ 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면
 $\vec{n}_1=(1, 1, 1), \vec{n}_2=(1, -4, 3)$
 두 평면에 모두 수직인 평면의 법선벡터를 $\vec{n}=(a, b, c)$ 라 하면
 $\vec{n} \cdot \vec{n}_1=0$ 에서 $a+b+c=0$ ㉠
 $\vec{n} \cdot \vec{n}_2=0$ 에서 $a-4b+3c=0$ ㉡
 ㉠, ㉡에서 $a=-\frac{7}{2}b, c=\frac{5}{2}b$
 따라서 점 $(1, -1, 4)$ 를 지나고 법선벡터가
 $\vec{n}=(-\frac{7}{2}b, b, \frac{5}{2}b)$ 인 평면의 방정식은
 $-\frac{7}{2}b(x-1)+b(y+1)+\frac{5}{2}b(z-4)=0$
 이때 $b \neq 0$ 이므로 양변을 b 로 나누어 정리하면
 $7x-2y-5z+11=0$
 이 평면이 점 $(3, 6, p)$ 를 지나므로
 $20-5p=0 \quad \therefore p=4$ 답 ③

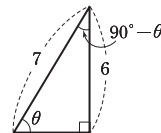
0755 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$, 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면
 $\vec{u}=(1, -1, \sqrt{2}), \vec{n}=(1, 0, \sqrt{2})$
 이때 직선과 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면
 $\cos(90^\circ-\theta)=\frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|}$
 $=\frac{|1+0+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(\sqrt{2})^2} \sqrt{1^2+0^2+(\sqrt{2})^2}}$
 $=\frac{\sqrt{3}}{2}$
 따라서 $90^\circ-\theta=30^\circ$ 이므로 $\theta=60^\circ$ 답 60°

0756 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$, 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면
 $\vec{u}=(1, -1, 2), \vec{n}=(a, 1, 1)$
 이때 직선과 평면이 이루는 각의 크기가 30° 이므로
 $\cos(90^\circ-30^\circ)=\frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|}$
 $\frac{1}{2}=\frac{|a-1+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2} \sqrt{a^2+1^2+1^2}}$
 $\sqrt{6(a^2+2)}=2|a+1|$
 양변을 제곱하여 정리하면
 $a^2-4a+4=0, (a-2)^2=0$
 $\therefore a=2$ 답 ⑤

0757 두 점 $(-1, -2, 0), (2, 0, 1)$ 을 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$, 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면
 $\vec{u}=(2, 0, 1)-(-1, -2, 0)=(3, 2, 1),$
 $\vec{n}=(3, 2, -1)$
 $\therefore \cos(90^\circ-\theta)=\frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|}$
 $=\frac{|9+4-1|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2} \sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}}$
 $=\frac{6}{7}$

오른쪽 그림과 같은 직각삼각형에서

$$\sin \theta = \frac{6}{7}$$



답 ⑤

0758 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$, 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면
 $\vec{n}=(4, a, 2), \vec{u}=(2, -1, b)$
 이때 평면과 직선이 서로 수직이므로 $\vec{n} \perp \vec{u}$
 즉 $\vec{u} \cdot \vec{n}=0$ ($k \neq 0$)이라 하면
 $(2, -1, b) \cdot (4, a, 2)=0$
 따라서 $2=4k, -1=ak, b=2k$ 이므로
 $k=\frac{1}{2}, a=-2, b=1$
 $\therefore a-b=-3$ 답 ①

0759 두 점 A, B를 지나는 직선의 방향벡터는
 $\vec{AB}=(5, -1, 4)-(-2, 1, -1)$
 $= (7, -2, 5)$
 이때 직선 AB와 평면이 서로 평행하면 직선의 방향벡터 $\vec{AB}$ 와 평면의 법선벡터 $\vec{n}$ 이 서로 수직이므로
 $\vec{AB} \cdot \vec{n}=0$
 ① 주어진 평면의 법선벡터는 $\vec{n}=(1, 1, 1)$
 $\therefore \vec{AB} \cdot \vec{n}=7-2+5=10 \neq 0$
 ② 주어진 평면의 법선벡터는 $\vec{n}=(1, -1, 1)$
 $\therefore \vec{AB} \cdot \vec{n}=7+2+5=14 \neq 0$
 ③ 주어진 평면의 법선벡터는 $\vec{n}=(1, 1, -1)$
 $\therefore \vec{AB} \cdot \vec{n}=7-2-5=0$
 ④ 주어진 평면의 법선벡터는 $\vec{n}=(2, 1, -1)$
 $\therefore \vec{AB} \cdot \vec{n}=14-2-5=7 \neq 0$
 ⑤ 주어진 평면의 법선벡터는 $\vec{n}=(2, -1, -1)$
 $\therefore \vec{AB} \cdot \vec{n}=14+2-5=11 \neq 0$ 답 ③

0760 주어진 평면의 법선벡터를 $\vec{n}=(a, b, c)$ 라 하면 점
 $(-2, 4, 1)$ 을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}$ 인 평면의 방정식은
 $a(x+2)+b(y-4)+c(z-1)=0$ ㉠ ... 1단계

이때 평면 ⑦의 법선벡터 $\vec{n}=(a, b, c)$ 와 직선

$\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-3}$ 의 방향벡터 $\vec{u}=(2, 1, -3)$ 은 서로 수직이므로

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad \therefore 2a + b - 3c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

또 직선 $\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-3}$ 위의 점 $(3, 2, 1)$ 이 평면 ⑦ 위에 있으므로

$$5a - 2b = 0 \quad \therefore b = \frac{5}{2}a$$

이것을 ①에 대입하면

$$\frac{9}{2}a - 3c = 0 \quad \therefore c = \frac{3}{2}a \quad \dots \textcircled{B} \text{ 2단계}$$

$b = \frac{5}{2}a, c = \frac{3}{2}a$ 를 ①에 대입하면

$$a(x+2) + \frac{5}{2}a(y-4) + \frac{3}{2}a(z-1) = 0$$

이때 $a \neq 0$ 이므로 양변을 a 로 나누어 정리하면

$$2x + 5y + 3z - 19 = 0 \quad \dots \textcircled{C} \text{ 3단계}$$

$$\text{답 } 2x + 5y + 3z - 19 = 0$$

채점 요소	비율
①단계 법선벡터를 $\vec{n}=(a, b, c)$ 로 놓고 평면의 방정식 세우기	20 %
②단계 b, c 를 a 에 대한 식으로 나타내기	60 %
③단계 평면의 방정식 구하기	20 %

0761 점 $(4, 1, 1)$ 을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(1, 2, 2)$ 인 평면 α 의 방정식은

$$(x-4) + 2(y-1) + 2(z-1) = 0$$

$$\therefore x + 2y + 2z - 8 = 0$$

따라서 점 $(0, 1, 1)$ 과 평면 α 사이의 거리는

$$\frac{|0+2+2-8|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{4}{3} \quad \text{답 } \textcircled{1}$$

0762 평면 $x+y+2z+k=0$ 과 원점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \sqrt{2}, \quad |k| = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore k = 2\sqrt{3} (\because k > 0) \quad \text{답 } 2\sqrt{3}$$

0763 두 평면의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1 = (2, 1, -2), \vec{n}_2 = (a, 2, b)$$

이때 두 평면이 서로 평행하므로 $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$

즉 $\vec{n}_2 = k\vec{n}_1 (k \neq 0)$ 이라 하면

$$(a, 2, b) = k(2, 1, -2)$$

따라서 $a=2k, 2=k, b=-2k$ 이므로

$$a=4, b=-4$$

이때 평면 $2x+y-2z-5=0$ 위의 점 $(0, 5, 0)$ 과 평면

$4x+2y-4z+c=0$ 사이의 거리가 3이므로

$$\frac{|0+10+0+c|}{\sqrt{4^2+2^2+(-4)^2}} = 3, \quad |10+c| = 18$$

$$10+c = \pm 18 \quad \therefore c = 8 (\because c > 0)$$

$$\therefore a-b+c = 16$$

답 16

0764 $x-2=\frac{y}{2}=\frac{z+4}{3}=t$ 로 놓으면

$$x=t+2, y=2t, z=3t-4 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y+6}{4}=1-z=s \text{로 놓으면}$$

$$x=2s-1, y=4s-6, z=1-s \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$t=1, s=2$$

①에 $t=1$ 을 대입하면 $x=3, y=2, z=-1$

$$\therefore P(3, 2, -1)$$

따라서 점 P와 평면 $x+y-z=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3+2+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{3} \quad \text{답 } \textcircled{3}$$

0765 오른쪽 그림과 같이 구의 중심

$C(-1, -2, 1)$ 에서 평면 α 에 내린 수선의

발을 H라 하면

$$\overline{CH} = \frac{|-2-2+2-7|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = 3$$

이때 구와 평면의 교선인 원 위의 한 점을 P라 하면

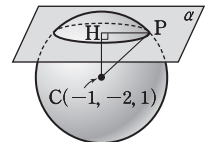
$$\overline{CP} = 4$$

이므로 직각삼각형 HCP에서

$$\overline{HP} = \sqrt{4^2-3^2} = \sqrt{7}$$

따라서 교선인 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$ 이므로 구하는 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{7})^2 = 7\pi \quad \text{답 } \textcircled{3}$$



0766 $x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-3=0$ 에서

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=9$$

이때 구와 평면이 접하므로 구의 중심 $(2, -1, -1)$ 과 평면

$x+2y+2z+k=0$ 사이의 거리가 구의 반지름의 길이 3과 같다.

$$\text{즉 } \frac{|2-2-2+k|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = 3 \text{이므로}$$

$$|k-2|=9, \quad k-2=\pm 9$$

$$\therefore k=11 (\because k > 0)$$

답 ④

0767 오른쪽 그림과 같이 구의 중심

$C(1, 2, -1)$ 에서 평면 $x+y+z=11$, 즉

$x+y+z-11=0$ 에 내린 수선의 발을 H

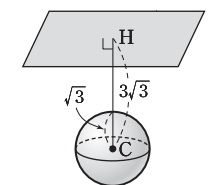
라 하면

$$\overline{CH} = \frac{|1+2-1-11|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = 3\sqrt{3}$$

이때 구의 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 이므로 구 위의 점과 평면 사이의 거리의 최솟값은

$$3\sqrt{3}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

답 $2\sqrt{3}$



0768 직선 $\frac{x-3}{2}=y-1=1-z$ 에 수직인 평면의 법선벡터는

$$\vec{n}=(2, 1, -1)$$

따라서 구하는 평면의 방정식을

$$2x+y-z+d=0$$

으로 놓으면 이 평면과 구가 접하므로 구의 중심 $(0, -1, 3)$ 과 평면 사이의 거리가 구의 반지름의 길이 $\sqrt{6}$ 과 같다.

$$\text{즉 } \frac{|0-1-3+d|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\sqrt{6} \text{ 이므로}$$

$$|-4+d|=6, \quad -4+d=\pm 6$$

$$\therefore d=10 \text{ 또는 } d=-2$$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$2x+y-z+10=0, 2x+y-z-2=0$$

$$\text{답 } 2x+y-z+10=0, 2x+y-z-2=0$$

0769 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}=0$ 에서 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$

따라서 $\angle APB=90^\circ$ 이므로 점 P는 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 구 위의 점이다.

이때

$$\overline{AB}=\sqrt{(-2-2)^2+(2-4)^2+(5+1)^2}=2\sqrt{14}$$

이므로 구의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{14}$$

따라서 점 P가 나타내는 도형의 겉넓이는

$$4\pi \times (\sqrt{14})^2=56\pi$$

답 ③

다른 풀이 점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$\overrightarrow{AP}=(x, y, z)-(2, 4, -1)$$

$$=(x-2, y-4, z+1)$$

$$\overrightarrow{BP}=(x, y, z)-(-2, 2, 5)$$

$$=(x+2, y-2, z-5)$$

이때 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}=0$ 이므로

$$(x-2)(x+2)+(y-4)(y-2)+(z+1)(z-5)=0$$

$$x^2+y^2+z^2-6y-4z-1=0$$

$$\therefore x^2+(y-3)^2+(z-2)^2=14$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(0, 3, 2)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{14}$ 인 구이므로 구하는 겉넓이는

$$4\pi \times (\sqrt{14})^2=56\pi$$

0770 $|\vec{p}|^2-2\vec{b} \cdot \vec{p}+|\vec{b}|^2=9|\vec{a}|^2$ 에서

$$|\vec{p}-\vec{b}|^2=|3\vec{a}|^2$$

... 1단계

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 $B(3, 4, -2)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $|3\vec{a}|$ 인 구이다.

... 2단계

이때 $3\vec{a}=3(2, -1, 1)=(6, -3, 3)$ 이므로

$$|3\vec{a}|=\sqrt{6^2+(-3)^2+3^2}=3\sqrt{6}$$

즉 $x=3, y=4, z=-2, r=3\sqrt{6}$ 이므로

$$x+y+z+r^2=59$$

... 3단계

답 59

채점 요소	비율
1단계 주어진 식을 변형하기	30 %
2단계 점 P가 나타내는 도형 설명하기	50 %
3단계 $x+y+z+r^2$ 의 값 구하기	20 %

0771 $\frac{x-4}{2}=\frac{y}{-2}=z-3=t$ 로 놓으면

$$x=2t+4, y=-2t, z=t+3$$

$$x-1=\frac{y-1}{2}=5-z=s \text{로 놓으면}$$

$$x=s+1, y=2s+1, z=5-s$$

따라서 직선 l_1 위의 점 P와 직선 l_2 위의 점 Q의 좌표를 각각

$$(2t+4, -2t, t+3), (s+1, 2s+1, 5-s)$$

로 놓으면

$$\overrightarrow{PQ}=(s-2t-3, 2s+2t+1, -s-t+2)$$

한편 두 직선 l_1, l_2 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u}=(2, -2, 1), \vec{v}=(1, 2, -1)$$

이때 직선 PQ와 직선 l_1 이 서로 수직이면 $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}=0$ 이므로

$$2(s-2t-3)-2(2s+2t+1)+(-s-t+2)=0$$

$$\therefore s+3t+2=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 직선 PQ와 직선 l_2 가 서로 수직이면 $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}=0$ 이므로

$$(s-2t-3)+2(2s+2t+1)-(-s-t+2)=0$$

$$\therefore 2s+t-1=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$t=-1, s=1$$

따라서 $\overrightarrow{PQ}=(0, 1, 2)$ 이므로 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리는

$$PQ=|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{0^2+1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

답 ⑤

0772 $\frac{4-x}{2}=y+1=\frac{z+1}{2}=t$ 로 놓으면

$$x=-2t+4, y=t-1, z=2t-1$$

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{2}=z+2=s \text{로 놓으면}$$

$$x=2s+5, y=2s+3, z=s-2$$

따라서 $P(-2t+4, t-1, 2t-1), Q(2s+5, 2s+3, s-2)$ 로 놓으면

$$\overrightarrow{PQ}=(2s+2t+1, 2s-t+4, s-2t-1) \quad \dots \textcircled{1\text{단계}}$$

한편 두 직선 l_1, l_2 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u}=(-2, 1, 2), \vec{v}=(2, 2, 1)$$

이고 선분 PQ의 길이는 직선 PQ가 두 직선 l_1, l_2 에 각각 수직 일 때 최소이다.

직선 PQ와 직선 l_1 이 서로 수직이면 $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}=0$ 이므로

$$-2(2s+2t+1)+(2s-t+4)+2(s-2t-1)=0$$

$$-9t=0 \quad \therefore t=0$$

또 직선 PQ와 직선 l_2 가 서로 수직이면 $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}=0$ 이므로

$$2(2s+2t+1)+2(2s-t+4)+(s-2t-1)=0$$

$$9s+9=0 \quad \therefore s=-1$$

... 2단계

따라서 구하는 두 점 P, Q의 좌표는 각각

$$(4, -1, -1), (3, 1, -3) \quad \dots \text{③단계}$$

답 P(4, -1, -1), Q(3, 1, -3)

	채점 요소	비율
①단계	$\overrightarrow{PQ}$ 의 성분을 실수 t, s 로 나타내기	40 %
②단계	선분 PQ의 길이가 최소일 때의 t, s 의 값 구하기	50 %
③단계	두 점 P, Q의 좌표 구하기	10 %

0773 $x-2=\frac{y+1}{2}=1-z=t$ 로 놓으면

$$x=t+2, y=2t-1, z=-t+1$$

$$\frac{x-1}{2}=y-2=z+1=s \text{로 놓으면}$$

$$x=2s+1, y=s+2, z=s-1$$

따라서 직선 l_1 위의 점 P와 직선 l_2 위의 점 Q의 좌표를 각각

$$(t+2, 2t-1, -t+1), (2s+1, s+2, s-1)$$

로 놓으면

$$\overrightarrow{PQ}=(2s-t-1, s-2t+3, s+t-2)$$

한편 두 직선 l_1, l_2 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u}=(1, 2, -1), \vec{v}=(2, 1, 1)$$

이때 직선 PQ와 직선 l_1 이 서로 수직이면 $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}=0$ 이므로

$$(2s-t-1)+2(s-2t+3)-(s+t-2)=0$$

$$\therefore 3s-6t+7=0 \quad \dots \text{①}$$

또 직선 PQ와 직선 l_2 가 서로 수직이면 $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}=0$ 이므로

$$2(2s-t-1)+(s-2t+3)+(s+t-2)=0$$

$$\therefore 6s-3t-1=0 \quad \dots \text{②}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$t=\frac{5}{3}, s=1$$

따라서 $\overrightarrow{PQ}=\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 이므로 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리는

$$PQ=|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{답 } \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

0774 평면 α 는 선분 AB의 중점을 지나고 직선 AB와 수직이다.

이때 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{0+2}{2}\right), \text{ 즉 } (3, 0, 1)$$

또 $\overrightarrow{AB}=(4, 1, 2)-(2, -1, 0)=(2, 2, 2)$ 이므로 점

(3, 0, 1)을 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{AB}=(2, 2, 2)$ 인 평면의 방정식은

$$2(x-3)+2y+2(z-1)=0$$

$$\therefore x+y+z-4=0$$

따라서 $a=1, b=1, c=1$ 이므로

$$a+b+c=3 \quad \text{답 } \text{③}$$

0775 두 구의 중심을 각각 P, Q라 하면

$$P(-5, 4, 3), Q(3, 0, 1)$$

평면 α 는 선분 PQ의 중점을 지나고 직선 PQ와 수직이다.

이때 선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{4+0}{2}, \frac{3+1}{2}\right), \text{ 즉 } (-1, 2, 2)$$

또 $\overrightarrow{PQ}=(3, 0, 1)-(-5, 4, 3)=(8, -4, -2)$ 이므로 점

(-1, 2, 2)를 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{PQ}=(8, -4, -2)$ 인 평면의 방정식은

$$8(x+1)-4(y-2)-2(z-2)=0$$

$$\therefore 4x-2y-z+10=0$$

$$\text{답 } 4x-2y-z+10=0$$

0776 선분 AA'의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

이때 선분 AA'의 중점은 평면 α 위에 있으므로

$$\frac{a+1}{2}+\frac{b+1}{2}+\frac{c}{2}+1=0$$

$$\therefore a+b+c+4=0 \quad \dots \text{①}$$

한편 평면 α 의 법선벡터는

$$\vec{n}=(1, 1, 1)$$

또 $\overrightarrow{AA'}=(a, b, c)-(1, 1, 0)=(a-1, b-1, c)$ 이고 직선

AA'과 평면 α 는 서로 수직이므로

$$\overrightarrow{AA'} \parallel \vec{n}$$

즉 $\overrightarrow{AA'}=k\vec{n} (k \neq 0)$ 이라 하면

$$(a-1, b-1, c)=k(1, 1, 1)$$

따라서 $a-1=k, b-1=k, c=k$ 이므로

$$a=k+1, b=k+1, c=k \quad \dots \text{②}$$

②를 ①에 대입하면

$$(k+1)+(k+1)+k+4=0, \quad 3k+6=0$$

$$\therefore k=-2$$

즉 ②에서

$$a=-1, b=-1, c=-2$$

$$\therefore abc=-2$$

$$\text{답 } \text{⑤}$$

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 116~119쪽

0777 점 P의 좌표를 (p, q) 라 하면

$$\overrightarrow{AP}=(p, q)-(2, 6)=(p-2, q-6)$$

직선 l 의 방향벡터는 $\vec{u}=(2, 1)$

이때 두 벡터 $\overrightarrow{AP}, \vec{u}$ 가 서로 수직이므로 $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u}=0$

$$(p-2, q-6) \cdot (2, 1)=0$$

$$2(p-2)+(q-6)=0$$

$$\therefore 2p+q=10$$

$$\dots \text{①}$$

또 점 P가 직선 l 위의 점이므로

$$\frac{p-5}{2}=q-5$$

$$\therefore p-2q=-5$$

..... ㉠

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=3, q=4$

따라서 $\overrightarrow{OP}=(3, 4)$ 이므로

$$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

답 ⑤

다른 풀이 $\frac{x-5}{2}=y-5=t$ 로 놓으면

$$x=2t+5, y=t+5$$

따라서 점 P의 좌표를 $(2t+5, t+5)$ 라 하면

$$\overrightarrow{AP}=(2t+5, t+5)-(2, 6)=(2t+3, t-1)$$

한편 직선 l 의 방향벡터는

$$\vec{u}=(2, 1)$$

이때 두 벡터 $\overrightarrow{AP}, \vec{u}$ 가 서로 수직이므로 $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u}=0$

$$(2t+3, t-1) \cdot (2, 1)=0$$

$$2(2t+3)+(t-1)=0$$

$$5t+5=0 \quad \therefore t=-1$$

$$\therefore P(3, 4)$$

0778 직선 $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{2}=3-z$ 의 방향벡터는

$$\vec{u}=(3, 2, -1)$$

평행한 두 직선은 방향벡터가 같으므로 점 $(1, 4, 0)$ 을 지나고

방향벡터가 $\vec{u}=(3, 2, -1)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-4}{2}=-z$$

zx 평면 위의 점은 y 좌표가 0이므로 위의 식에 $y=0$ 을 대입하면

$$\frac{x-1}{3}=-2=-z$$

$$\therefore x=-5, z=2$$

따라서 zx 평면과 만나는 점의 좌표는 $(-5, 0, 2)$

즉 $a=-5, b=0, c=2$ 이므로

$$a+b+c=-3$$

답 -3

0779 $\overrightarrow{AB}=(3, a, 5)-(-4, 4, -2)$

$$=(7, a-4, 7)$$

점 $A(-4, 4, -2)$ 를 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{AB}=(7, a-4, 7)$

인 직선의 방정식은

$$\frac{x+4}{7}=\frac{y-4}{a-4}=\frac{z+2}{7}$$

z 축 위의 점은 x 좌표와 y 좌표가 0이므로 위의 식에 $x=0, y=0$

을 대입하면

$$\frac{4}{7}=-\frac{4}{a-4}=\frac{z+2}{7}$$

따라서 직선이 z 축과 만나려면 $\frac{4}{7}=-\frac{4}{a-4}$ 이어야 하므로

$$a=-3$$

답 ②

참고 $a=-3$ 일 때, $z=2$ 이므로 직선 AB 와 z 축의 교점의 좌표는 $(0, 0, 2)$

0780 $5-x=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{2}=t$ 로 놓으면

$$x=5-t, y=2t-1, z=2t+1$$

..... ㉠

㉠을 주어진 구의 방정식에 대입하면

$$(2-t)^2+(2t+1)^2+(2t)^2=14$$

$$t^2=1 \quad \therefore t=1 \text{ 또는 } t=-1$$

$t=1$ 을 ㉠에 대입하면

$$x=4, y=1, z=3$$

$t=-1$ 을 ㉠에 대입하면

$$x=6, y=-3, z=-1$$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(4, 1, 3), (6, -3, -1)$ 이므로

$$AB=\sqrt{(6-4)^2+(-3-1)^2+(-1-3)^2}=6$$

답 6

0781 $\frac{x-1}{2}=2-y=\frac{3-z}{4}=t$ 로 놓으면

$$x=2t+1, y=2-t, z=3-4t$$

..... ㉠

$2-x=\frac{a-y}{2}=\frac{z-2}{3}=s$ 로 놓으면

$$x=2-s, y=a-2s, z=3s+2$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$t=1, s=-1$$

$t=1$ 을 ㉠에 대입하면 $x=3, y=1, z=-1$

$s=-1$ 을 ㉡에 대입하면 $x=3, y=a+2, z=-1$

따라서 두 직선이 만나려면 $1=a+2 \quad \therefore a=-1$

답 ⑤

0782 두 직선 l_1, l_2 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u}=(k, -1), \vec{v}=(-3, 4)$$

이때 두 직선이 이루는 각의 크기가 45° 이므로

$$\cos 45^\circ = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|-3k-4|}{\sqrt{k^2+(-1)^2} \sqrt{(-3)^2+4^2}}$$

$$\therefore 5\sqrt{2k^2+2}=|-6k-8|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$7k^2-48k-7=0, \quad (7k+1)(k-7)=0$$

$$\therefore k=7 (\because k \text{는 자연수})$$

답 ①

0783 세 직선 l_1, l_2, l_3 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ 이라 하면

$$\vec{u}_1=(a, -1, b), \vec{u}_2=(1, 1, -1), \vec{u}_3=(1, 1, c)$$

$l_1 \parallel l_2$ 이므로 $\vec{u}_1=k\vec{u}_2 (k \neq 0)$ 라 하면

$$(a, -1, b)=k(1, 1, -1)$$

따라서 $a=k, -1=k, b=-k$ 이므로

$$a=-1, b=1$$

또 $l_1 \perp l_3$ 이므로 $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3=0$ 에서

$$a-1+bc=0$$

즉 $-2+c=0$ 이므로 $c=2$

$$\therefore abc=-2$$

답 -2

0784 $\frac{x-1}{2}=3-y=z+1=t$ 로 놓으면

$$x=2t+1, y=3-t, z=t-1$$

따라서 $H(2t+1, 3-t, t-1)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PH} &= (2t+1, 3-t, t-1) - (1, 2, 1) \\ &= (2t, 1-t, t-2)\end{aligned}$$

이때 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (2, -1, 1)$$

$\overrightarrow{PH} \perp \vec{u}$ 이므로 $\overrightarrow{PH} \cdot \vec{u} = 0$ 에서

$$4t - (1-t) + (t-2) = 0$$

$$6t - 3 = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{2}$$

즉 $H(2, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$ 이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OH} &= (1, 2, 1) \cdot (2, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}) \\ &= 2 + 5 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{13}{2}\end{aligned}$$

답 ④

0785 $\frac{x}{2} = \frac{2-y}{2} = z-3=t$ 로 놓으면

$$x=2t, y=2-2t, z=t+3$$

구의 중심 $C(-1, 0, 1)$ 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$H(2t, 2-2t, t+3)$$

으로 놓을 수 있으므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH} &= (2t, 2-2t, t+3) - (-1, 0, 1) \\ &= (2t+1, 2-2t, t+2)\end{aligned}$$

이때 직선 l 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (2, -2, 1)$$

$\overrightarrow{CH} \perp \vec{u}$ 이므로 $\overrightarrow{CH} \cdot \vec{u} = 0$ 에서

$$2(2t+1) - 2(2-2t) + (t+2) = 0$$

$$9t = 0 \quad \therefore t = 0$$

따라서 $\overrightarrow{CH} = (1, 2, 2)$ 이므로 구의 중심과 직선 l 사이의 거리는

$$CH = |\overrightarrow{CH}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

이때 구의 반지름의 길이가 2이므로

$$M = 3 + 2 = 5, m = 3 - 2 = 1$$

$$\therefore Mm = 5$$

답 5

0786 평면 α 의 법선벡터는

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= (2, 1, 1) - (1, 2, -1) \\ &= (1, -1, 2)\end{aligned}$$

따라서 점 $H(2, 1, 1)$ 을 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{AH} = (1, -1, 2)$

인 평면 α 의 방정식은

$$(x-2) - (y-1) + 2(z-1) = 0$$

$$\therefore x - y + 2z - 3 = 0$$

이때 점 $(k, 1, 0)$ 이 평면 α 위의 점이므로

$$k - 4 = 0 \quad \therefore k = 4$$

답 ⑤

0787 세 점 A, B, D를 지나는 평면의 방정식을

$ax + by + cz + d = 0$ 으로 놓고 세 점의 좌표를 각각 대입하면

$$a + 2b + c + d = 0, 2a + 3b + 2c + d = 0, a + b + 2c + d = 0$$

$$\therefore a = -2c, b = c, d = -c$$

이것을 $ax + by + cz + d = 0$ 에 대입하면

$$-2cx + cy + cz - c = 0$$

이때 $c \neq 0$ 이므로 양변을 c 로 나누어 정리하면

$$2x - y - z + 1 = 0$$

점 $C(-3, 4, k)$ 가 이 평면 위에 있으므로

$$-9 - k = 0 \quad \therefore k = -9$$

답 ②

0788 $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3} = z+2=t$ 로 놓으면

$$x=2t+3, y=3t+1, z=t-2$$

..... ㉠

$3x - 2y + z = 6$ 에 ㉠을 대입하면

$$3(2t+3) - 2(3t+1) + (t-2) = 6$$

$$t + 5 = 6 \quad \therefore t = 1$$

$t=1$ 을 ㉠에 대입하면

$$x=5, y=4, z=-1$$

따라서 $P(5, 4, -1)$ 이므로

$$\overline{OP} = \sqrt{5^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{42}$$

답 ③

0789 두 평면의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1 = (4, -2, 4), \vec{n}_2 = (1, 2, -2)$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

$$= \frac{|4 - 4 - 8|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{4}{9}$$

답 $\frac{4}{9}$

0790 직선 AB의 방향벡터를 $\vec{u}$, 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3, -1, 2) - (1, -2, 3) = (2, 1, -1)$$

$$\vec{n} = (1, 2, 1)$$

직선 AB와 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|}$$

$$= \frac{|2 + 2 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

즉 $90^\circ - \theta = 60^\circ$ 이므로

$$\theta = 30^\circ$$

이때 $\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$ 이므로 선분 AB의

평면 $x + 2y + z = 1$ 위로의 정사영의 길이는

$$\overline{AB} \cos 30^\circ = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

0791 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$, 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{u}=(2, 3, k-3), \vec{n}=(1, k-2, 2)$$

이때 직선과 평면이 서로 평행하므로 $\vec{u} \perp \vec{n}$

즉 $\vec{u} \cdot \vec{n}=0$ 이므로

$$2+3(k-2)+2(k-3)=0$$

$$5k-10=0 \quad \therefore k=2$$

답 ⑤

0792 직선 l 의 방향벡터를 $\vec{u}$, 평면 α 의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{u}=(3, 2, 1), \vec{n}=(2, -1, -4)$$

$$\therefore \vec{u} \cdot \vec{n}=6-2-4=0$$

즉 $\vec{u} \perp \vec{n}$ 이므로 직선 l 은 평면 α 와 평행하거나 평면 α 에 포함된 다.

이때 직선 l 위의 점 $(2, 3, 1)$ 의 좌표를 $2x-y-4z+3=0$ 에 대입하면 등식이 성립하므로 이 점은 평면 α 위의 점이다.

따라서 직선 l 은 평면 α 에 포함된다.

답 ①

0793 점 $A(2, -1, 1)$ 에서 평면 $x-y+2z+1=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{AH}=\frac{|2+1+2+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\sqrt{6}$$

$$\therefore \overline{AA'}=2\overline{AH}=2\sqrt{6}$$

답 2√6

0794 주어진 두 평면의 법선벡터가 $\vec{n}=(3, 4, -5)$ 로 같으므로 두 평면은 서로 평행하다.

따라서 두 평면 사이의 거리는 평면 $3x+4y-5z-7=0$ 위의 점 $(1, 1, 0)$ 과 평면 $3x+4y-5z+3=0$ 사이의 거리와 같으

$$\text{로} \quad \frac{|3+4+0+3|}{\sqrt{3^2+4^2+(-5)^2}}=\sqrt{2}$$

답 ③

0795 주어진 평면의 법선벡터를 $\vec{n}=(a, b, c)$ 라 하면 점

$(2, 1, -1)$ 을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}$ 인 평면의 방정식은

$$a(x-2)+b(y-1)+c(z+1)=0 \quad \dots\dots ①$$

이때 평면 ①의 법선벡터 $\vec{n}=(a, b, c)$ 와 직선

$x-1=\frac{y-1}{2}=z-2$ 의 방향벡터 $\vec{u}=(1, 2, 1)$ 은 서로 수직이

므로

$$\vec{u} \cdot \vec{n}=0 \quad \therefore a+2b+c=0 \quad \dots\dots ②$$

또 직선 $x-1=\frac{y-1}{2}=z-2$ 위의 점 $(1, 1, 2)$ 가 평면 ① 위에 있으므로

$$-a+3c=0 \quad \therefore a=3c$$

$a=3c$ 를 ②에 대입하면

$$2b+4c=0 \quad \therefore b=-2c$$

$a=3c, b=-2c$ 를 ①에 대입하면

$$3c(x-2)-2c(y-1)+c(z+1)=0$$

이때 $c \neq 0$ 이므로 양변을 c 로 나누어 정리하면

$$3x-2y+z-3=0$$

따라서 평면 $3x-2y+z-3=0$ 과 점 $(4, 1, 7)$ 사이의 거리는

$$\frac{|12-2+7-3|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}}=\sqrt{14}$$

답 ④

0796 구와 평면이 접하므로 구의 중심 $(1, 1, 1)$ 과 평면

$x+2y-2z+d=0$ 사이의 거리가 구의 반지름의 길이 6과 같다.

$$\text{즉} \quad \frac{|1+2-2+d|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=6 \text{이므로}$$

$$|d+1|=18, \quad d+1=\pm 18$$

$$\therefore d=17 (\because d>0)$$

답 ④

0797 $|\vec{p}-\vec{a}|=4$ 를 만족시키는 점 P 가 나타내는 도형은 중

심이 점 $A(1, 1, -1)$ 이고 반지름의 길이가 4인 구이다.

이때 평면 $2x-2y+z-8=0$ 의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{n}=(2, -2, 1)$$

이므로 구의 중심 $(1, 1, -1)$ 을 지나고 방향벡터가

$\vec{n}=(2, -2, 1)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-2}=z+1$$

..... ①

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-2}=z+1=t \text{로 놓으면}$$

$$x=2t+1, y=1-2t, z=t-1$$

따라서 직선 ① 위의 점 H 의 좌표를

$$(2t+1, 1-2t, t-1)$$

로 놓으면 점 H 는 평면 $2x-2y+z-8=0$ 위에 있으므로

$$2(2t+1)-2(1-2t)+(t-1)-8=0$$

$$9t-9=0 \quad \therefore t=1$$

$$\therefore H(3, -1, 0)$$

답 (3, -1, 0)

0798 $\frac{x}{2}=y=-\frac{z}{2}=t$ 로 놓으면

$$x=2t, y=t, z=-2t$$

$$x+1=3-y=\frac{z+1}{2}=s \text{로 놓으면}$$

$$x=s-1, y=-s+3, z=2s-1$$

따라서 $P(2t, t, -2t), Q(s-1, -s+3, 2s-1)$ 로 놓으면

$$\overrightarrow{PQ}=(-2t+s-1, -t-s+3, 2t+2s-1)$$

한편 두 직선 l_1, l_2 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u}=(2, 1, -2), \vec{v}=(1, -1, 2)$$

이고 선분 PQ 의 길이는 직선 PQ 가 두 직선 l_1, l_2 에 각각 수직 일 때 최소이다.

직선 PQ 와 직선 l_1 이 서로 수직이면 $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}=0$ 이므로

$$2(-2t+s-1)+(-t-s+3)-2(2t+2s-1)=0$$

$$\therefore 3t+s-1=0$$

..... ①

또 직선 PQ 와 직선 l_2 가 서로 수직이면 $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}=0$ 이므로

$$(-2t+s-1)-(-t-s+3)+2(2t+2s-1)=0$$

$$\therefore t+2s-2=0$$

..... ②

①, ②를 연립하여 풀면 $t=0, s=1$

따라서 선분 PQ의 길이는 $\overrightarrow{PQ}=(0, 2, 1)$ 일 때 최소이므로 구하는 최소값은

$$\sqrt{0^2+2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

답 ③

0799 $x^2+y^2+z^2-10x-6y+2z+34=0$ 에서

$$(x-5)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=1$$

$$x^2+y^2+z^2-6x+2y-2z+7=0$$

$$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$$

따라서 두 구의 중심을 각각 A, B라 하면

$$A(5, 3, -1), B(3, -1, 1)$$

이때 평면 $ax+by+cz=6$ 은 선분 AB의 중점을 지나고 직선 AB와 수직이다.

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{5+3}{2}, \frac{3-1}{2}, \frac{-1+1}{2}\right), \text{ 즉 } (4, 1, 0)$$

또 $\overrightarrow{AB}=(3, -1, 1)-(5, 3, -1)=(-2, -4, 2)$ 이므로 점 $(4, 1, 0)$ 을 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{AB}=(-2, -4, 2)$ 인 평면의 방정식은

$$-2(x-4)-4(y-1)+2z=0$$

$$\therefore x+2y-z=6$$

따라서 $a=1, b=2, c=-1$ 이므로

$$a+b+c=2$$

답 2

0800 $\overrightarrow{AB}=(3, 1, -1)-(1, 2, 3)=(2, -1, -4)$

따라서 점 A(1, 2, 3)을 지나고 방향벡터가

$\overrightarrow{AB}=(2, -1, -4)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{2}=2-y=\frac{3-z}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \quad \dots \text{1단계}$$

$$\overrightarrow{CD}=(1, -3, 5)-(2, -1, 2)=(-1, -2, 3)$$

따라서 점 C(2, -1, 2)를 지나고 방향벡터가

$\overrightarrow{CD}=(-1, -2, 3)$ 인 직선의 방정식은

$$2-x=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \quad \dots \text{2단계}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } \frac{x-1}{2}=2-y=\frac{3-z}{4}=t \text{로 놓으면}$$

$$x=2t+1, y=2-t, z=3-4t \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } 2-x=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{3}=s \text{로 놓으면}$$

$$x=2-s, y=-2s-1, z=3s+2 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉢}, \textcircled{㉣} \text{을 연립하여 풀면 } t=1, s=-1$$

$t=1$ 을 $\textcircled{㉢}$ 에 대입하면

$$x=3, y=1, z=-1$$

즉 구하는 교점의 좌표는 $(3, 1, -1)$ 이다.

... 3단계

답 $(3, 1, -1)$

채점 요소	비율
1단계 직선 AB의 방정식 구하기	30 %
2단계 직선 CD의 방정식 구하기	30 %
3단계 두 직선의 교점의 좌표 구하기	40 %

0801 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u}=(p, 3, 5), \vec{v}=(1, q, -2)$$

이때 두 직선이 서로 수직이려면 $\vec{u} \cdot \vec{v}=0$ 이어야 하므로

$$p+3q-10=0 \quad \therefore p+3q=10$$

... 1단계

이를 만족시키는 자연수 p, q 의 순서쌍 (p, q) 는

$$(1, 3), (4, 2), (7, 1)$$

의 3개이다.

... 2단계

답 3

채점 요소	비율
1단계 p, q 사이의 관계식 구하기	70 %
2단계 순서쌍 (p, q) 의 개수 구하기	30 %

0802 $x+y-3z+5=0$

..... ㉠

$$x+2y+2z-10=0$$

..... ㉡

$$\textcircled{㉠}-\textcircled{㉡} \text{을 하면 } -y-5z+15=0$$

$$\therefore z=\frac{15-y}{5}$$

$$\textcircled{㉠} \times 2 - \textcircled{㉡} \text{을 하면 } x-8z+20=0$$

$$\therefore z=\frac{x+20}{8}$$

따라서 두 평면의 교선의 방정식은

$$\frac{x+20}{8}=\frac{15-y}{5}=z$$

... 1단계

$$\text{위의 식에 } z=0 \text{을 대입하면 } \frac{x+20}{8}=\frac{15-y}{5}=0$$

$$\therefore x=-20, y=15$$

$$\therefore A(-20, 15, 0)$$

$$\text{또 } y=0 \text{을 대입하면 } \frac{x+20}{8}=3=z$$

$$\therefore x=4, z=3$$

$$\therefore B(4, 0, 3)$$

... 2단계

따라서 선분 AB의 길이는

$$\sqrt{(4+20)^2+(-15)^2+3^2}=9\sqrt{10}$$

... 3단계

답 $9\sqrt{10}$

채점 요소	비율
1단계 교선의 방정식 구하기	40 %
2단계 두 점 A, B의 좌표 구하기	40 %
3단계 선분 AB의 길이 구하기	20 %

0803 벡터 $\vec{a}=(1, -2, 2)$ 에 수직인 평면의 방정식을

$$x-2y+2z+d=0$$

으로 놓자.

... 1단계

구 $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4$ 의 중심 $(1, 0, -1)$ 과 평면 사이의 거리가 구의 반지름의 길이 2와 같으므로

$$\frac{|1+0-2+d|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=2$$

$$|d-1|=6, \quad d-1=\pm 6$$

$$\therefore d=7 \text{ 또는 } d=-5$$

..... ㉠

또 구 $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 16$ 의 중심 $(-1, 1, 4)$ 와 평면 사이의 거리가 구의 반지름의 길이 4와 같으므로

$$\frac{|-1-2+8+d|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=4$$

$$|d+5|=12, \quad d+5=\pm 12$$

$$\therefore d=7 \text{ 또는 } d=-17$$

..... ㉠

㉠, ㉡에서 $d=7$

... 2단계

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$x-2y+2z+7=0$$

... 3단계

답 $x-2y+2z+7=0$

	채점 요소	비율
1단계	평면의 방정식을 d 를 이용하여 나타내기	30 %
2단계	구가 평면과 접함을 이용하여 d 의 값 구하기	60 %
3단계	평면의 방정식 구하기	10 %

0804 전략 각의 이등분선의 성질을 이용한다.

$$\overline{AC} = \sqrt{(3-4)^2 + (-1-2)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{14}$$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형이므로 $\angle ACB$ 의 이등분선은 $\overline{AB}$

의 중점 $M(\frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2})$ 을 지난다.

이때

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM} &= \left(\frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}\right) - (3, -1, 2) \\ &= \left(-\frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

이므로 점 C를 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{CM} = (-\frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{2})$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{-\frac{1}{2}} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore x-3 = \frac{y+1}{-6} = z-2$$

이 직선이 점 $P(a, b, 0)$ 을 지나므로

$$a-3 = \frac{b+1}{-6} = -2 \quad \therefore a=1, b=11$$

$$\therefore a+b=12$$

답 ②

0805 전략 공간의 서로 다른 두 직선은 평행하거나 한 점에서 만나거나 꼬인 위치에 있다.

(i) 두 직선 l_1, l_2 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (2, -1, 1), \vec{v} = (1, 2, 3)$$

이때 $\vec{u} = k\vec{v}$ 를 만족시키는 실수 k 가 존재하지 않으므로 두 직선은 평행하지 않다.

(ii) $\frac{x-1}{2} = 2-y = z-4 = t$ 로 놓으면

$$x=2t+1, y=-t+2, z=t+4$$

..... ㉠

$$x+2 = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{3} = s \text{로 놓으면}$$

$$x=s-2, y=2s-1, z=3s-3 \quad \dots\dots ㉡$$

이때 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 t, s 가 존재하지 않으므로 두 직선은 만나지 않는다.

(i), (ii)에서 두 직선 l_1, l_2 는 꼬인 위치에 있다.

답 꼬인 위치에 있다.

0806 전략 점 B와 평면 α 에 대하여 대칭인 점을 이용한다.

점 B와 평면 α 에 대하여 대칭인

점을 B' 이라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{AP} + \overline{B'P} \\ &\geq \overline{AB'}\end{aligned}$$

이때 점 B' 의 좌표를 (a, b, c) 라

하면 선분 BB' 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b-1}{2}, \frac{c-1}{2}\right)$$

선분 BB' 의 중점은 평면 α 위에 있으므로

$$2 \times \frac{a+4}{2} - 2 \times \frac{b-1}{2} + \frac{c-1}{2} = 0$$

$$\therefore 2a - 2b + c + 9 = 0$$

..... ㉠

한편 평면 α 의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{n} = (2, -2, 1)$$

또 $\overrightarrow{BB'} = (a, b, c) - (4, -1, -1) = (a-4, b+1, c+1)$ 이고

고 직선 BB' 과 평면 α 가 서로 수직이므로 $\overrightarrow{BB'} \parallel \vec{n}$

즉 $\overrightarrow{BB'} = k\vec{n} (k \neq 0)$ 이라 하면

$$(a-4, b+1, c+1) = k(2, -2, 1)$$

따라서 $a-4=2k, b+1=-2k, c+1=k$ 이므로

$$a=2k+4, b=-2k-1, c=k-1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$2(2k+4) - 2(-2k-1) + (k-1) + 9 = 0$$

$$9k + 18 = 0 \quad \therefore k = -2$$

즉 $a=0, b=3, c=-3$ 이므로 $B'(0, 3, -3)$

따라서 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은

$$\overline{AB'} = \sqrt{(-5)^2 + (3-1)^2 + (-3-1)^2} = 3\sqrt{5}$$

답 $3\sqrt{5}$

다른 풀이 점 B를 지나고 평면 α 에 수직인 직선의 방정식은

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{-2} = z+1$$

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{-2} = z+1 = t \text{로 놓으면}$$

$$x=2t+4, y=-2t-1, z=t-1$$

점 B에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 $H(2t+4, -2t-1, t-1)$

이라 하면 점 H는 평면 α 위의 점이므로

$$2(2t+4) - 2(-2t-1) + (t-1) = 0$$

$$9t + 9 = 0 \quad \therefore t = -1$$

즉 $H(2, 1, -2)$ 이고 선분 BB' 의 중점이 H이므로

$$B'(0, 3, -3)$$



A series of horizontal lines for writing, spanning the width of the page.



A series of horizontal lines for writing, spanning the width of the page. The lines are evenly spaced and cover the majority of the page area, leaving a small margin at the top and bottom.



A series of horizontal lines for writing, spanning the width of the page.