유형의 완성 RPM

공통수학 2

정답 및 풀이

01 평면좌표

교과서 문제 정복하기

본책 007쪽

0001 $\overline{AB}=|7-3|=4$

답 4

0002 $\overline{AB}=|8-(-2)|=10$

답 10

0003 $\overline{AB}=|-9-(-5)|=4$

답 4

0004 점 R의 좌표를 x라 하면 $|x-4|=3$에서

$x-4=\pm3 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=7$

$\therefore$ R(1) 또는 R(7)

답 1, 7

0005 점 S의 좌표를 x라 하면 $|x-(-5)|=5$에서

$x+5=\pm5 \qquad \therefore x=-10$ 또는 $x=0$

$\therefore$ S(-10) 또는 S(0)

답 -10, 0

0006 $\overline{AB}=\sqrt{(3-2)^2+\{5-(-1)\}^2}=\sqrt{37}$

답 $\sqrt{37}$

0007 $\overline{AB}=\sqrt{\{1-(-4)\}^2+\{-7-(-2)\}^2}$

$=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

답 $5\sqrt{2}$

0008 $\overline{OA}=\sqrt{4^2+(-5)^2}=\sqrt{41}$

답 $\sqrt{41}$

0009 $\overline{AB}=\sqrt{(-a)^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

답 $\sqrt{a^2+b^2}$

0010 (1) $P\left(\frac{1\times(-2)+3\times10}{1+3}\right)$, 즉 P$(7)$

(2) $M\left(\frac{10+(-2)}{2}\right)$, 즉 M$(4)$

답 (1) 7 (2) 4

0011 선분 AB의 중점의 좌표가 1이므로

$\frac{-3+a}{2}=1 \qquad \therefore a=5$

답 5

0012 (1) $P\left(\frac{3\times5+2\times(-1)}{3+2}, \frac{3\times(-3)+2\times2}{3+2}\right)$,

즉 $P\left(\frac{13}{5}, -1\right)$

(2) $Q\left(\frac{3\times(-1)+2\times5}{3+2}, \frac{3\times2+2\times(-3)}{3+2}\right)$, 즉 $Q\left(\frac{7}{5}, 0\right)$

(3) $M\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{2+(-3)}{2}\right)$, 즉 $M\left(2, -\frac{1}{2}\right)$

답 (1) $\left(\frac{13}{5}, -1\right)$ (2) $\left(\frac{7}{5}, 0\right)$ (3) $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$

0013 선분 AB의 중점의 좌표가 $(2, 1)$이므로

$\frac{a+(-2)}{2}=2, \frac{4+b}{2}=1$

따라서 $a=6$, $b=-2$이므로

$ab=-12$

답 -12

0014 $G\left(\frac{1+2+(-6)}{3}, \frac{2+(-1)+2}{3}\right)$, 즉 G$(-1, 1)$

답 $(-1, 1)$

0015 $G\left(\frac{-1+5+2}{3}, \frac{2+1+(-3)}{3}\right)$, 즉 G$(2, 0)$

답 $(2, 0)$

0016 $G\left(\frac{0+a+(-a)}{3}, \frac{0+b+2b}{3}\right)$, 즉 G$(0, b)$

답 $(0, b)$

0017 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(3, -1)$이므로

$\frac{5+2+b}{3}=3, \frac{a+3+(-1)}{3}=-1$

따라서 $a=-5$, $b=2$이므로

$a+b=-3$

답 -3

유형 익히기

• 본책 008~014쪽

0018 $\overline{AB}=5\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(a-4)^2+(4-a)^2}=5\sqrt{2}$

양변을 제곱하면

$2a^2-16a+32=50, \qquad a^2-8a-9=0$

$(a+1)(a-9)=0$

$\therefore a=9\ (\because a>0)$

답 9

0019 $\overline{AC}=\overline{BC}$이므로

$\sqrt{(a+1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{(a-2)^2+(1-3)^2}$

양변을 제곱하면

$a^2+2a+2=a^2-4a+8$

$\therefore a=1$

답 ①

0020 $\overline{AB}=2\overline{CD}$이므로

$\sqrt{(7-3)^2+(-1-a)^2}=2\sqrt{(-1+a)^2+(2-4)^2}$

양변을 제곱하면

$a^2+2a+17=4a^2-8a+20$

$3a^2-10a+3=0, \qquad (3a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=\frac{1}{3}$ 또는 $a=3$

따라서 모든 a의 값의 곱은

$\frac{1}{3}\times3=1$

답 1

0021 $\overline{AB}=\sqrt{(1-a)^2+(a+5)^2}$

$=\sqrt{2a^2+8a+26}$

$=\sqrt{2(a+2)^2+18}$

따라서 $a=-2$일 때, 선분 AB의 길이가 최소가 된다. 답 -2

0022 점 $P(a, b)$가 직선 $y=2x-7$ 위에 있으므로

$b=2a-7$ …… ㉠

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-1)^2+(b-3)^2=(a-5)^2+(b+1)^2$

$a^2-2a+b^2-6b+10=a^2-10a+b^2+2b+26$

$8a-8b=16$

$\therefore a-b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5, b=3$

$\therefore a+b=8$ 답 8

0023 $P(a, 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-2)^2+(-1)^2=(a+1)^2+(-4)^2$

$a^2-4a+5=a^2+2a+17$

$-6a=12$ $\therefore a=-2$

$\therefore P(-2, 0)$

$Q(0, b)$라 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$(-2)^2+(b-1)^2=1^2+(b-4)^2$

$b^2-2b+5=b^2-8b+17$

$6b=12$ $\therefore b=2$

$\therefore Q(0, 2)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

0024 $P(a, b)$라 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-8)^2+(b-4)^2=(a-3)^2+(b+1)^2$

$a^2-16a+b^2-8b+80=a^2-6a+b^2+2b+10$

$-10a-10b=-70$

$\therefore a+b=7$ …… ㉠

$\overline{BP}=\overline{CP}$에서 $\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$(a-3)^2+(b+1)^2=(a-6)^2+(b-8)^2$

$a^2-6a+b^2+2b+10=a^2-12a+b^2-16b+100$

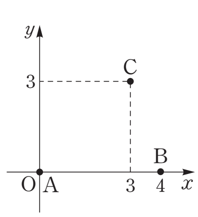
$6a+18b=90$

$\therefore a+3b=15$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3, b=4$

따라서 점 P의 좌표는 $(3, 4)$ 답 $(3, 4)$

0025 오른쪽 그림과 같이 학교 A가 원점, 학교 B가 x축 위에 오도록 좌표평면을 잡으면



$A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(3, 3)$

으로 놓을 수 있다.

도서관을 지으려는 지점을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$a^2+b^2=(a-4)^2+b^2$, $a^2+b^2=a^2-8a+16+b^2$

$8a=16$ $\therefore a=2$

$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$a^2+b^2=(a-3)^2+(b-3)^2$

$a^2+b^2=a^2-6a+b^2-6b+18$, $6b=-6a+18$

$\therefore b=-a+3$ …… ㉠

㉠에 $a=2$를 대입하면 $b=1$

즉 $P(2, 1)$이므로

$\overline{PA}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

따라서 구하는 거리는 $\sqrt{5}$ km이다. 답 $\sqrt{5}$ km

0026 $\overline{AB}^2=(-4)^2+(-4-2)^2=52$,

$\overline{BC}^2=(-2)^2+(-2+4)^2=8$,

$\overline{CA}^2=(4+2)^2+(2+2)^2=52$

이므로 $\overline{AB}^2=\overline{CA}^2$

$\therefore \overline{AB}=\overline{CA}$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이다.

답 ⑤

0027 $\overline{AB}^2=1^2+(-2-1)^2=10$

$\overline{BC}^2=(3-1)^2+(2+2)^2=20$

$\overline{CA}^2=(-3)^2+(1-2)^2=10$ … 1단계

따라서 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$이고 $\overline{AB}^2=\overline{CA}^2$에서 $\overline{AB}=\overline{CA}$이므로 삼각형 ABC는 $\angle A=90°$이고 $\overline{AB}=\overline{CA}$인 직각이등변삼각형이다. … 2단계

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CA}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}=5$ … 3단계

답 5

채점 요소	비율
1단계 $\overline{AB}^2$, $\overline{BC}^2$, $\overline{CA}^2$의 값 구하기	30 %
2단계 삼각형 ABC가 직각이등변삼각형임을 알기	50 %
3단계 삼각형 ABC의 넓이 구하기	20 %

0028 $\overline{AB}^2=(8-a)^2+(3+1)^2=a^2-16a+80$

$\overline{BC}^2=(2-8)^2+(1-3)^2=40$

$\overline{CA}^2=(a-2)^2+(-1-1)^2=a^2-4a+8$

삼각형 ABC가 $\angle A>90°$인 둔각삼각형이 되려면

$\overline{BC}^2>\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$

이어야 하므로

$40>(a^2-16a+80)+(a^2-4a+8)$

$a^2-10a+24<0$, $(a-4)(a-6)<0$

$\therefore 4<a<6$ 답 $4<a<6$

0029 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

제4사분면 위의 점 C의 좌표를 (a, b) $(a>0, b<0)$라 하면

$\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(-2-2)^2+(-4-4)^2=(a+2)^2+(b+4)^2$

$\therefore a^2+b^2+4a+8b-60=0$ …… ㉠

$\overline{BC}=\overline{CA}$에서 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이므로

$(a+2)^2+(b+4)^2=(2-a)^2+(4-b)^2$

$a^2+4a+b^2+8b+20=a^2-4a+b^2-8b+20$

$8a=-16b \qquad \therefore a=-2b$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $4b^2+b^2-8b+8b-60=0$

$b^2=12 \qquad \therefore b=-2\sqrt{3}$ $(\because b<0)$

$b=-2\sqrt{3}$을 ㉡에 대입하면 $a=4\sqrt{3}$

따라서 꼭짓점 C의 좌표는 $(4\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$

답 $\boldsymbol{(4\sqrt{3}, -2\sqrt{3})}$

0030 $O(0, 0)$, $A(x, y)$, $B(2, -1)$이라 하면

$\sqrt{x^2+y^2}=\overline{OA}$, $\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=\overline{AB}$

$\therefore \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$

$=\overline{OA}+\overline{AB}$

$\ge\overline{OB}$

$=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{5}$이다. 답 $\boldsymbol{\sqrt{5}}$

참고 | $\overline{OA}+\overline{AB}$의 값이 최소인 경우는 점 A가 $\overline{OB}$ 위에 있을 때이다.

0031 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 값이 최소인 경우는 점 P가 $\overline{AB}$ 위에 있을 때이므로

$\overline{AP}+\overline{PB}\ge\overline{AB}$

$=\sqrt{(3+2)^2+(8+4)^2}=13$

따라서 구하는 최솟값은 13이다. 답 ④

0032 $\sqrt{x^2+y^2-2x+6y+10}=\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}$

$\sqrt{x^2+y^2+8x-4y+20}=\sqrt{(x+4)^2+(y-2)^2}$

이때 $A(1, -3)$, $B(x, y)$, $C(-4, 2)$라 하면

$\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}=\overline{AB}$, $\sqrt{(x+4)^2+(y-2)^2}=\overline{BC}$

$\therefore$ (주어진 식)$=\overline{AB}+\overline{BC}$

$\ge\overline{AC}$

$=\sqrt{(-4-1)^2+(2+3)^2}=5\sqrt{2}$

따라서 구하는 최솟값은 $5\sqrt{2}$이다. 답 $\boldsymbol{5\sqrt{2}}$

0033 $P(a, 0)$이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(a-1)^2+(-4)^2+(a-5)^2+(-3)^2$

$=2a^2-12a+51$

$=2(a-3)^2+33$

따라서 $a=3$일 때 주어진 식의 최솟값은 33이다. 답 ③

0034 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=(a-4)^2+(b-2)^2+(a-2)^2+(b-6)^2$

$=2a^2-12a+2b^2-16b+60$

$=2(a-3)^2+2(b-4)^2+10$

이때 a, b가 실수이므로 $(a-3)^2\ge0$, $(b-4)^2\ge0$

$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PB}^2\ge10$

따라서 $a=3$, $b=4$일 때 주어진 식이 최솟값을 가지므로 구하는 점 P의 좌표는 $(3, 4)$ 답 ④

0035 $P(0, a)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(-4)^2+(a+2)^2+(-k)^2+(a-6)^2$

$=2a^2-8a+56+k^2$

$=2(a-2)^2+48+k^2$

따라서 $a=2$일 때 주어진 식의 최솟값은 $48+k^2$이므로

$48+k^2=57, \qquad k^2=9$

$\therefore k=3$ $(\because k>0)$ 답 ③

0036 점 P가 직선 $y=x+3$ 위에 있으므로 $P(a, a+3)$이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$

$=(a-1)^2+(a-5)^2+(a+3)^2+(a-2)^2$

$\quad+(a-2)^2+(a+4)^2$

$=6a^2-6a+59=6\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{115}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$일 때 주어진 식이 최솟값을 가지므로 구하는 점 P의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 답 $\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)}$

0037 점 M이 선분 BC의 중점이므로 $B(\boxed{(가)\ -c}, 0)$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

$=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}$

$=(a^2+2ac+c^2+b^2)+(a^2-2ac+c^2+b^2)$

$=2(\boxed{(나)\ a^2+b^2+c^2})$

$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=(a^2+b^2)+c^2$

$=\boxed{(나)\ a^2+b^2+c^2}$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

답 (가) $\boldsymbol{-c}$ (나) $\boldsymbol{a^2+b^2+c^2}$

0038 직사각형 ABCD에서 $A(0, b)$, $C(a, 0)$이므로

$D(\boxed{(가)\ a}, \boxed{(나)\ b})$

$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\{x^2+(y-b)^2\}+\{(x-a)^2+y^2\}$

$=\boxed{(다)\ x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2}$

$\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=(x^2+y^2)+\{(x-a)^2+(y-b)^2\}$

$=\boxed{(다)\ x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2}$

$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$

답 (가) $\boldsymbol{a}$ (나) $\boldsymbol{b}$ (다) $\boldsymbol{x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2}$

0039 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times(-1)+3\times4}{2+3}, \dfrac{2\times2+3\times(-3)}{2+3}\right)$, 즉 $(2, -1)$

점 M의 좌표는

$\left(\dfrac{4+(-1)}{2}, \dfrac{-3+2}{2}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

$\therefore \overline{\mathrm{PM}}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}-2\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}+1\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 답 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

0040 선분 AB를 5 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{5\times10+3\times2}{5+3}, \dfrac{5\times m+3\times15}{5+3}\right)$, 즉 $\left(7, \dfrac{5m+45}{8}\right)$

이 점이 점 $(n, -5)$와 일치하므로

$7=n, \dfrac{5m+45}{8}=-5$

$\therefore m=-17, n=7$

$\therefore m+n=-10$ 답 -10

0041 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times(b+1)+1\times2}{2+1}, \dfrac{2\times(-1)+1\times(a+1)}{2+1}\right)$,

즉 $\left(\dfrac{2b+4}{3}, \dfrac{a-1}{3}\right)$

이 점이 점 $(2, 1)$과 일치하므로

$\dfrac{2b+4}{3}=2, \dfrac{a-1}{3}=1$

$\therefore a=4, b=1$ … 1단계

따라서 두 점 B$(2, -1)$, C$(3, 2)$에 대하여 선분 BC를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표가 (p, q)이므로

$p=\dfrac{1\times3+2\times2}{1+2}=\dfrac{7}{3}, q=\dfrac{1\times2+2\times(-1)}{1+2}=0$

… 2단계

$\therefore p-q=\dfrac{7}{3}$ … 3단계

답 $\dfrac{7}{3}$

채점 요소	비율
1단계 a, b의 값 구하기	50 %
2단계 p, q의 값 구하기	40 %
3단계 $p-q$의 값 구하기	10 %

0042 B◎C는 선분 BC를 1 : 2로 내분하는 점이므로 B◎C의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times6+2\times3}{1+2}, \dfrac{1\times(-4)+2\times(-1)}{1+2}\right)$, 즉 $(4, -2)$

따라서 A◎(B◎C)는 두 점 $(-5, 4)$, $(4, -2)$를 이은 선분을 1 : 2로 내분하는 점이므로 A◎(B◎C)의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times4+2\times(-5)}{1+2}, \dfrac{1\times(-2)+2\times4}{1+2}\right)$, 즉 $(-2, 2)$

답 $(-2, 2)$

0043 선분 AB를 $k : (2-k)$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{k\times(-4)+(2-k)\times1}{k+(2-k)}, \dfrac{k\times6+(2-k)\times(-3)}{k+(2-k)}\right)$,

즉 $\left(\dfrac{2-5k}{2}, \dfrac{9k-6}{2}\right)$

이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$\dfrac{2-5k}{2}<0, \dfrac{9k-6}{2}>0$

$\dfrac{2-5k}{2}<0$에서 $k>\dfrac{2}{5}$ …… ㉠

$\dfrac{9k-6}{2}>0$에서 $k>\dfrac{2}{3}$ …… ㉡

한편 $k>0$, $2-k>0$이므로

$0<k<2$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분은

$\dfrac{2}{3}<k<2$ 답 $\dfrac{2}{3}<k<2$

0044 선분 AB를 $(4-t) : t$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{(4-t)\times1+t\times4}{(4-t)+t}, \dfrac{(4-t)\times a+t\times(-3)}{(4-t)+t}\right)$,

즉 $\left(\dfrac{3t+4}{4}, \dfrac{-(a+3)t+4a}{4}\right)$

이 점이 점 $(2, 3)$과 일치하므로

$\dfrac{3t+4}{4}=2, \dfrac{-(a+3)t+4a}{4}=3$

$\dfrac{3t+4}{4}=2$에서 $3t+4=8$

$\therefore t=\dfrac{4}{3}$

$\dfrac{-(a+3)t+4a}{4}=3$에서 $-(a+3)t+4a=12$

$-\dfrac{4}{3}(a+3)+4a=12, \quad -4a-12+12a=36$

$8a=48 \quad \therefore a=6$ 답 ③

0045 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{m\times5+n\times(-6)}{m+n}, \dfrac{m\times(-6)+n\times4}{m+n}\right)$,

즉 $\left(\dfrac{5m-6n}{m+n}, \dfrac{-6m+4n}{m+n}\right)$

이 점이 y축 위에 있으므로

$\dfrac{5m-6n}{m+n}=0, \quad 5m=6n$

$\therefore m : n=6 : 5$

이때 m, n은 서로소인 자연수이므로 $m=6, n=5$

$\therefore m-n=1$ 답 1

0046 선분 AB를 $k : 5$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{k\times2+5\times(-1)}{k+5}, \dfrac{k\times4+5\times1}{k+5}\right)$,

즉 $\left(\dfrac{2k-5}{k+5}, \dfrac{4k+5}{k+5}\right)$

이 점이 직선 $y=-x+1$ 위에 있으므로

$$\frac{4k+5}{k+5}=-\frac{2k-5}{k+5}+1$$

$4k+5=-2k+5+k+5,\qquad 5k=5$

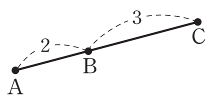
$\therefore\ k=1$

답 1

0047 $3\overline{AB}=2\overline{BC}$에서

$\overline{AB}:\overline{BC}=2:3$

이때 $a>0$에서 세 점 A, B, C의 위치는 오른쪽 그림과 같으므로 점 B는 선분 AC를 2 : 3으로 내분하는 점이다.



따라서 $\dfrac{2\times a+3\times(-1)}{2+3}=5,\ \dfrac{2\times b+3\times 0}{2+3}=2$이므로

$2a-3=25,\ 2b=10$

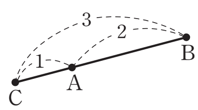
$\therefore\ a=14,\ b=5$

$\therefore\ a+b=19$

답 ⑤

RPM 비법노트

세 점 A, B, C의 위치가 오른쪽 그림과 같을 때에도 $\overline{AB}:\overline{BC}=2:3$이지만 $a<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

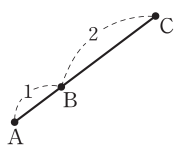


0048 $2\overline{AB}=\overline{BC}$에서

$\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$

이때 점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라 하자.

(i) 점 B가 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점인 경우



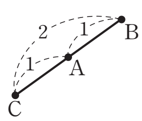
$\dfrac{1\times a+2\times(-1)}{1+2}=1,$

$\dfrac{1\times b+2\times 2}{1+2}=4$이므로

$a-2=3,\ b+4=12\qquad\therefore\ a=5,\ b=8$

$\therefore\ C(5,\ 8)$

(ii) 점 A가 선분 BC의 중점인 경우



$\dfrac{a+1}{2}=-1,\ \dfrac{b+4}{2}=2$이므로

$a=-3,\ b=0$

$\therefore\ C(-3,\ 0)$

(i), (ii)에서 $\quad C(-3,\ 0)$ 또는 $C(5,\ 8)$

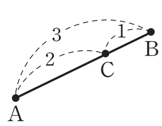
답 ②, ④

0049 $\overline{AB}=3\overline{BC}$에서

$\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$

(i) 점 C가 선분 AB 위에 있는 경우

점 C는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로 점 C의 좌표는

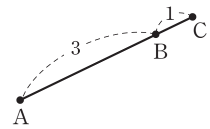


$\left(\dfrac{2\times 1+1\times(-5)}{2+1},\ \dfrac{2\times 3+1\times 0}{2+1}\right),$

즉 $(-1,\ 2)$

(ii) 점 C가 선분 AB의 연장선 위에 있는 경우

점 B는 선분 AC를 3 : 1로 내분하는 점이므로 점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면



$\dfrac{3\times a+1\times(-5)}{3+1}=1,$

$\dfrac{3\times b+1\times 0}{3+1}=3$

$3a-5=4,\ 3b=12\qquad\therefore\ a=3,\ b=4$

$\therefore\ C(3,\ 4)$

(i), (ii)에서 $\quad C(-1,\ 2)$ 또는 $C(3,\ 4)$

답 **(−1, 2), (3, 4)**

0050 $D(a,\ b)$라 하면 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로

$\dfrac{-1+3}{2}=\dfrac{0+a}{2},\ \dfrac{3+2}{2}=\dfrac{0+b}{2}$

$\therefore\ a=2,\ b=5$

따라서 꼭짓점 D의 좌표는 $(2,\ 5)$이다.

답 **(2, 5)**

0051 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로

$\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{1-3}{2},\ \dfrac{4+2}{2}=\dfrac{1+c}{2}$

$\therefore\ a+b=-2,\ c=5$

$\therefore\ a+b+c=3$

답 **3**

0052 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하고 대각선 BD의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{c+d}{2},\ \dfrac{3-5}{2}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{c+d}{2},\ -1\right)$

이 점이 직선 $y=-x$ 위에 있으므로

$-1=-\dfrac{c+d}{2}\qquad\therefore\ c+d=2$

또 대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{a-2}{2},\ \dfrac{b-4}{2}\right)$이고, 이 점은 대각선 BD의 중점 $(1,\ -1)$과 일치하므로

$\dfrac{a-2}{2}=1,\ \dfrac{b-4}{2}=-1\qquad\therefore\ a=4,\ b=2$

$\therefore\ ab+c+d=10$

답 ⑤

0053 마름모 ABCD의 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로

$\dfrac{a+4}{2}=\dfrac{2+b}{2}\qquad\therefore\ b=a+2\qquad\cdots\cdots$ ㉠

또 $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로

$\sqrt{(2-a)^2+(3-1)^2}=\sqrt{(4-2)^2+(4-3)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2-4a+3=0,\qquad(a-1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=3\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=1,\ b=3$ 또는 $a=3,\ b=5$

$\therefore\ ab=3$ 또는 $ab=15$

따라서 ab의 값이 될 수 있는 것은 ④이다. 답 ④

0054 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(6,\ 8)$이므로

$$\frac{2+x_1+x_2}{3}=6,\ \frac{4+y_1+y_2}{3}=8$$

$\therefore\ x_1+x_2=16,\ y_1+y_2=20$

따라서 선분 BC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right),\ \text{즉 } (8,\ 10)$$ 답 ②

다른 풀이 $\overline{BC}$의 중점을 $M(m,\ n)$이라 하면 삼각형 ABC의 무게중심은 $\overline{AM}$을 $2:1$로 내분하는 점이므로

$$\frac{2\times m+1\times 2}{2+1}=6,\ \frac{2\times n+1\times 4}{2+1}=8$$

$2m+2=18,\ 2n+4=24 \qquad \therefore\ m=8,\ n=10$

따라서 $\overline{BC}$의 중점의 좌표는 $(8,\ 10)$이다.

0055 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(1,\ -2)$이므로

$\frac{a-b-2}{3}=1$에서 $\quad a=b+5$ ...... ㉠

$\frac{b+4+5}{3}=-2$에서 $\quad b=-15$

$b=-15$를 ㉠에 대입하면 $\quad a=-10$

$\therefore\ a+b=-25$ 답 ②

0056 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-1+4-6}{3},\ \frac{a+4-1}{3}\right),\ \text{즉 } \left(-1,\ \frac{a+3}{3}\right)$$

따라서 직선 $y=-4x$가 점 $\left(-1,\ \frac{a+3}{3}\right)$을 지나므로

$\frac{a+3}{3}=4 \qquad \therefore\ a=9$ 답 ⑤

0057 $\overline{AB}^2=(-1-3)^2+(4-2)^2=20$

$\overline{BC}^2=1^2+(k-4)^2=k^2-8k+17$

$\overline{CA}^2=3^2+(2-k)^2=k^2-4k+13$ ... 1단계

삼각형 ABC가 $\angle B=90°$인 직각삼각형이므로

$\overline{CA}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$

$k^2-4k+13=20+k^2-8k+17, \qquad 4k=24$

$\therefore\ k=6$ ... 2단계

따라서 $C(0,\ 6)$이므로 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{3-1+0}{3},\ \frac{2+4+6}{3}\right),\ \text{즉 } \left(\frac{2}{3},\ 4\right)$$ ... 3단계

답 $\left(\frac{2}{3},\ 4\right)$

	채점 요소	비율
1단계	$\overline{AB}^2,\ \overline{BC}^2,\ \overline{CA}^2$의 값 구하기	30 %
2단계	k의 값 구하기	40 %
3단계	삼각형 ABC의 무게중심의 좌표 구하기	30 %

0058 삼각형 PQR의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 같으므로 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-2+1+4}{3},\ \frac{3-4+7}{3}\right),\ \text{즉 } (1,\ 2)$$

따라서 $a=1,\ b=2$이므로

$a-b=-1$ 답 ②

다른 풀이 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2\times 1+1\times(-2)}{2+1},\ \frac{2\times(-4)+1\times 3}{2+1}\right),\ \text{즉 } \left(0,\ -\frac{5}{3}\right)$$

점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{2\times 4+1\times 1}{2+1},\ \frac{2\times 7+1\times(-4)}{2+1}\right),\ \text{즉 } \left(3,\ \frac{10}{3}\right)$$

점 R의 좌표는

$$\left(\frac{2\times(-2)+1\times 4}{2+1},\ \frac{2\times 3+1\times 7}{2+1}\right),\ \text{즉 } \left(0,\ \frac{13}{3}\right)$$

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0+3+0}{3},\ \frac{-\frac{5}{3}+\frac{10}{3}+\frac{13}{3}}{3}\right),\ \text{즉 } (1,\ 2)$$

0059 $\triangle ABC$의 세 꼭짓점의 좌표를 $A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2),\ C(x_3,\ y_3)$이라 하고, $P(x,\ y)$라 하면

$$\begin{aligned}&\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2\\&=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2\\&\quad+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2\\&=3x^2-2(x_1+x_2+x_3)x+x_1^2+x_2^2+x_3^2\\&\quad+3y^2-2(y_1+y_2+y_3)y+y_1^2+y_2^2+y_3^2\\&=3\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2\\&\quad+x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2\\&\quad-\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3}-\frac{(y_1+y_2+y_3)^2}{3}\end{aligned}$$

따라서 $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$일 때

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소이고, 이때의 점 P는 $\triangle ABC$의 무게중심이다.

답 ③

0060 $\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$

$\overline{AB}=\sqrt{(-4-1)^2+(-8-4)^2}=13,$

$\overline{AC}=\sqrt{(5-1)^2+(1-4)^2}=5$

이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=13:5$

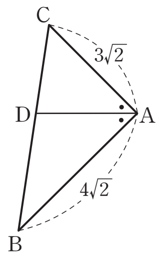
즉 점 D는 $\overline{BC}$를 $13:5$로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{13\times 5+5\times(-4)}{13+5},\ \frac{13\times 1+5\times(-8)}{13+5}\right),$$

즉 $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$ 답 $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$

0061 $\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$



$\overline{AB}=\sqrt{(1-5)^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$,

$\overline{AC}=\sqrt{(2-5)^2+(7-4)^2}=3\sqrt{2}$

이므로

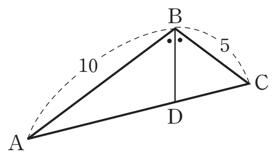
$\overline{BD}:\overline{CD}=4\sqrt{2}:3\sqrt{2}=4:3$

$\therefore \triangle DAB:\triangle DAC=\overline{BD}:\overline{CD}=4:3$

따라서 $p=4$, $q=3$이므로

$p^2-q^2=7$ 답 7

0062 $\overline{BD}$는 $\angle B$의 이등분선이므로



$\overline{AD}:\overline{CD}=\overline{BA}:\overline{BC}$

$\overline{AB}=\sqrt{(6+2)^2+(9-3)^2}=10$,

$\overline{BC}=\sqrt{(10-6)^2+(6-9)^2}=5$

이므로

$\overline{AD}:\overline{CD}=10:5=2:1$

따라서 점 D는 $\overline{AC}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$a=\dfrac{2\times10+1\times(-2)}{2+1}=6$, $b=\dfrac{2\times6+1\times3}{2+1}=5$

$\therefore a-b=1$ 답 ①

0063 $P(x, y)$라 하면 $\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=9$이므로

$(x+1)^2+(y-2)^2-\{(x-2)^2+(y-4)^2\}=9$

$x^2+2x+y^2-4y+5-(x^2-4x+y^2-8y+20)=9$

$6x+4y-24=0$

$\therefore 3x+2y-12=0$ 답 $\mathbf{3x+2y-12=0}$

0064 $P(x, y)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(x+1)^2+(y-5)^2=(x-2)^2+(y-3)^2$

$x^2+2x+y^2-10y+26=x^2-4x+y^2-6y+13$

$\therefore 6x-4y+13=0$

답 $\mathbf{6x-4y+13=0}$

0065 $A(a, b)$라 하고, $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\dfrac{2\times3+1\times a}{2+1}$, $y=\dfrac{2\times2+1\times b}{2+1}$

$\therefore a=3x-6$, $b=3y-4$ …… ㉠

이때 점 A는 직선 $y=3x+2$ 위의 점이므로

$b=3a+2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$3y-4=3(3x-6)+2$, $-9x+3y+12=0$

$\therefore 3x-y-4=0$

답 ⑤

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 015~017쪽

0066 $\overline{AB}\le6$에서 $\overline{AB}^2\le36$이므로

$(t-2)^2+(8-t)^2\le36$, $t^2-10t+16\le0$

$(t-2)(t-8)\le0$ $\therefore 2\le t\le8$

따라서 정수 t는 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 7개이다. 답 ④

0067 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-1)^2+(b-3)^2=(a+3)^2+(b-5)^2$

$a^2-2a+b^2-6b+10=a^2+6a+b^2-10b+34$

$-8a+4b=24$ $\therefore 2a-b=-6$ …… ㉠

$\overline{AP}=\overline{CP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$(a-1)^2+(b-3)^2=(a+1)^2+(b+1)^2$

$a^2-2a+b^2-6b+10=a^2+2a+b^2+2b+2$

$-4a-8b=-8$ $\therefore a+2b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=2$

$\therefore a-b=-4$ 답 $\mathbf{-4}$

0068 $\overline{AB}^2=(2+1)^2+(4+1)^2=34$

$\overline{BC}^2=(3-2)^2+(-4)^2=17$

$\overline{CA}^2=(-1-3)^2+(-1)^2=17$

따라서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$이고 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$에서 $\overline{BC}=\overline{CA}$이므로 삼각형 ABC는 $\angle C=90°$이고 $\overline{BC}=\overline{CA}$인 직각이등변삼각형이다.

답 ②

0069 $P(x, y)$, $A(-1, -2)$, $B(2, 2)$라 하면

$\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=\overline{AP}$,

$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\overline{BP}$

$\therefore \sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$

$=\overline{AP}+\overline{BP}$

$\ge\overline{AB}$

$=\sqrt{(2+1)^2+(2+2)^2}=5$

따라서 구하는 최솟값은 5이다. 답 ③

0070 $P(0, a)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(-1)^2+(a+4)^2+1^2+(a-3)^2$

$=2a^2+2a+27$

$=2\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{53}{2}$

따라서 $a=-\dfrac{1}{2}$일 때 주어진 식의 값이 최소이고 이때의 점 P의 좌표는 $\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$

즉 점 $P\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$은 직선 $2x-5y+k=0$ 위의 점이므로

$\dfrac{5}{2}+k=0$ $\therefore k=-\dfrac{5}{2}$ 답 $\mathbf{-\dfrac{5}{2}}$

0071 $\overline{BD}=2\overline{CD}$이므로

$B(\boxed{(가)\ -2c},\ 0)$

$\therefore\ \overline{AB}^2+2\overline{AC}^2$

$=\{(a+2c)^2+b^2\}+2\{(a-c)^2+b^2\}$

$=a^2+4ac+4c^2+b^2+2a^2-4ac+2c^2+2b^2$

$=3(\boxed{(나)\ a^2+b^2+2c^2})$

$\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2=(a^2+b^2)+2c^2$

$=\boxed{(나)\ a^2+b^2+2c^2}$

$\therefore\ \overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=3(\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2)$ 답 ④

0072 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times3+3\times8}{2+3},\ \dfrac{2\times1+3\times(-4)}{2+3}\right)$, 즉 $(6,\ -2)$

점 $P(6,\ -2)$가 직선 $x-2y+k=0$ 위에 있으므로

$6-2\times(-2)+k=0$

$\therefore\ k=-10$ 답 **−10**

0073 이차함수 $y=ax^2$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{2}x+1$이 만나는 두 점 P, Q의 좌표를 각각 $\left(\alpha,\ \dfrac{1}{2}\alpha+1\right)$, $\left(\beta,\ \dfrac{1}{2}\beta+1\right)$ $(\alpha<\beta)$이라 하면 α, β는 방정식

$ax^2=\dfrac{1}{2}x+1$, 즉 $2ax^2-x-2=0$

의 두 실근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\dfrac{1}{2a}$, $\alpha\beta=-\dfrac{1}{a}$ ...... ㉠

한편 $\overline{MH}=1$에서 선분 PQ의 중점 M의 x좌표가 1이므로

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=1$ $\qquad\therefore\ \alpha+\beta=2$

㉠에서 $\alpha+\beta=\dfrac{1}{2a}=2$이므로

$4a=1$ $\qquad\therefore\ a=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ \alpha\beta=-\dfrac{1}{a}=-\dfrac{1}{\frac{1}{4}}=-4$

$\therefore\ \overline{PQ}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\left\{\left(\dfrac{1}{2}\beta+1\right)-\left(\dfrac{1}{2}\alpha+1\right)\right\}^2}$

$=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\dfrac{1}{4}(\beta-\alpha)^2}$

$=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{(\beta-\alpha)^2}$

$=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\times\sqrt{2^2-4\times(-4)}$

$=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\times2\sqrt{5}$

$=5$ 답 ③

0074 선분 AB를 $1:k$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times0+k\times(-2)}{1+k},\ \dfrac{1\times7+k\times0}{1+k}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{-2k}{1+k},\ \dfrac{7}{1+k}\right)$

이 점이 직선 $x+2y=2$ 위에 있으므로

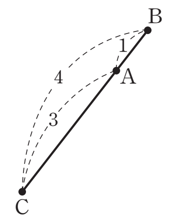
$\dfrac{-2k}{1+k}+2\times\dfrac{7}{1+k}=2$

$-2k+14=2(1+k)$, $\qquad -4k=-12$

$\therefore\ k=3$ 답 ③

0075 $4\overline{AC}=3\overline{BC}$에서 $\qquad\overline{AC}:\overline{BC}=3:4$

이를 만족시키는 세 점 A, B, C의 위치는 오른쪽 그림과 같으므로 점 A는 선분 CB를 3 : 1로 내분하는 점이다.



따라서 $\dfrac{3\times2+1\times a}{3+1}=-1$,

$\dfrac{3\times4+1\times b}{3+1}=-1$이므로

$a+6=-4$, $b+12=-4$

$\therefore\ a=-10$, $b=-16$

$\therefore\ a+b=-26$ 답 **−26**

0076 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로

$4=\dfrac{3+a}{2}$, $2=\dfrac{5+b}{2}$

$\therefore\ a=5$, $b=-1$

$\therefore\ a+b=4$ 답 **4**

0077 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치한다.

이때 대각선 AC의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{0+ab}{2},\ \dfrac{5+1}{2}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{ab}{2},\ 3\right)$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{1+7}{2},\ \dfrac{a+b}{2}\right)$, 즉 $\left(4,\ \dfrac{a+b}{2}\right)$

따라서 두 점 $\left(\dfrac{ab}{2},\ 3\right)$과 $\left(4,\ \dfrac{a+b}{2}\right)$가 일치하므로

$\dfrac{ab}{2}=4$에서 $\qquad ab=8$

$3=\dfrac{a+b}{2}$에서 $\qquad a+b=6$

$\therefore\ a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=6^3-3\times8\times6=72$ 답 ②

0078 $B(b_1,\ b_2)$, $C(c_1,\ c_2)$라 하면 $\overline{AB}$의 중점의 좌표가 $(4,\ 2)$이므로

$\dfrac{3+b_1}{2}=4$, $\dfrac{-2+b_2}{2}=2$

$\therefore\ b_1=5$, $b_2=6$ $\qquad\therefore\ B(5,\ 6)$

또 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $\left(\frac{4}{3},\ 2\right)$이므로

$$\frac{3+5+c_1}{3}=\frac{4}{3},\quad \frac{-2+6+c_2}{3}=2$$

$\therefore\ c_1=-4,\ c_2=2 \qquad \therefore\ \mathrm{C}(-4,\ 2)$

따라서 $\overline{\mathrm{BC}}$를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\times(-4)+1\times5}{2+1},\ \frac{2\times2+1\times6}{2+1}\right),\ 즉\ \left(-1,\ \frac{10}{3}\right)$$

이므로 $\quad a=-1,\ b=\frac{10}{3}$

$\therefore\ a+b=\frac{7}{3}$

답 $\frac{7}{3}$

0079 $\angle$ABC의 이등분선이 선분 AC의 중점을 지나므로

$\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BC}}$

$\overline{\mathrm{BA}}=\sqrt{(-3)^2+(-a)^2}=\sqrt{9+a^2},\ \overline{\mathrm{BC}}=|1-(-3)|=4$

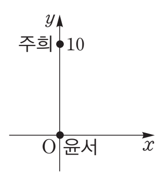
이므로 $\quad \sqrt{9+a^2}=4$

양변을 제곱하면 $\quad 9+a^2=16, \qquad a^2=7$

$\therefore\ a=\sqrt{7}\ (\because\ a>0)$

답 ③

0080 오른쪽 그림과 같이 윤서의 출발점의 위치를 원점, 주희의 출발점의 위치를 점 $(0,\ 10)$으로 하는 좌표평면을 잡자.



주희와 윤서의 위치를 나타내는 점을 각각 P, Q라 하면 두 사람이 출발한 지 t시간 후의 두 점 P, Q의 좌표는

$\mathrm{P}(0,\ 10-8t),\ \mathrm{Q}(6t,\ 0)$ … 1단계

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(6t)^2+(-10+8t)^2}$$
$$=\sqrt{100t^2-160t+100}$$
$$=\sqrt{100\left(t-\frac{4}{5}\right)^2+36}$$ … 2단계

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이는 $t=\frac{4}{5}$일 때 최솟값 $\sqrt{36}$, 즉 6을 가지므로 주희와 윤서 사이의 거리의 최솟값은 6 km이다. … 3단계

답 **6 km**

채점 요소	비율
1단계 주희와 윤서가 출발한 지 t시간 후의 위치를 좌표로 나타내기	30 %
2단계 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이를 t에 대한 식으로 나타내기	50 %
3단계 주희와 윤서 사이의 거리의 최솟값 구하기	20 %

0081 삼각형 OAB가 정삼각형이므로

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{AB}}$

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$에서 $\overline{\mathrm{OA}}^2=\overline{\mathrm{OB}}^2$이므로

$2^2+2^2=a^2+b^2$

$\therefore\ a^2+b^2=8$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$에서 $\overline{\mathrm{OA}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2$이므로

$2^2+2^2=(a-2)^2+(b-2)^2$

$\therefore\ a^2+b^2-4(a+b)=0$ …… ㉡ … 1단계

㉠을 ㉡에 대입하면

$8-4(a+b)=0$

$a+b=2 \qquad \therefore\ b=2-a$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$a^2+(2-a)^2=8, \qquad 2a^2-4a+4=8$

$a^2-2a-2=0$

$\therefore\ a=1-\sqrt{3}\ (\because\ a<0)$

$a=1-\sqrt{3}$을 ㉢에 대입하면

$b=1+\sqrt{3}$ … 2단계

$\therefore\ a-b=-2\sqrt{3}$ … 3단계

답 $-2\sqrt{3}$

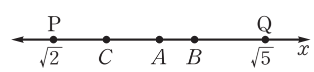
채점 요소	비율
1단계 $a,\ b$에 대한 식 세우기	40 %
2단계 $a,\ b$의 값 구하기	50 %
3단계 $a-b$의 값 구하기	10 %

0082 $A=\frac{1\times\sqrt{2}+1\times\sqrt{5}}{1+1}$이므로 A는 선분 PQ의 중점의 좌표이다.

$B=\frac{2\times\sqrt{5}+1\times\sqrt{2}}{2+1}$이므로 B는 선분 PQ를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표이다.

$C=\frac{1\times\sqrt{5}+3\times\sqrt{2}}{1+3}$이므로 C는 선분 PQ를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표이다. … 1단계

따라서 세 수 $A,\ B,\ C$를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore\ C<A<B$ … 2단계

답 $C<A<B$

채점 요소	비율
1단계 세 수 $A,\ B,\ C$의 의미 파악하기	70 %
2단계 세 수 $A,\ B,\ C$의 대소 관계 구하기	30 %

0083 선분 AB를 $t:(1-t)$로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{t\times5+(1-t)\times0}{t+(1-t)},\ \frac{t\times(-3)+(1-t)\times2}{t+(1-t)}\right),$$

즉 $(5t,\ -5t+2)$ … 1단계

이때 점 P가 x축 위의 점이므로

$-5t+2=0 \qquad \therefore\ t=\frac{2}{5}$

$\therefore\ \mathrm{P}(2,\ 0)$ … 2단계

따라서 선분 OP를 $(1-2t):2t$로 내분하는 점의 x좌표는

$$\frac{(1-2t)\times2+2t\times0}{(1-2t)+2t}=2-4t$$
$$=2-4\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$$ … 3단계

답 $\frac{2}{5}$

채점 요소		비율
1단계	점 P의 좌표를 t로 나타내기	40 %
2단계	점 P의 좌표 구하기	20 %
3단계	선분 OP를 $(1-2t):2t$로 내분하는 점의 x좌표 구하기	40 %

0084 전략 삼각형의 외심의 성질을 이용하여 외심의 x좌표와 y좌표에 대한 식을 세운다.

$\triangle$OAB의 외심을 $P(p,\ q)$라 하면

$\overline{OP}=\overline{AP}=\overline{BP}$

$\overline{OP}=\overline{AP}$에서 $\overline{OP}^2=\overline{AP}^2$이므로

$p^2+q^2=(p-4)^2+(q-2)^2$

$p^2+q^2=p^2-8p+q^2-4q+20$

$\therefore\ 2p+q=5$ …… ㉠

$\overline{OP}=\overline{BP}$에서 $\overline{OP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$p^2+q^2=(p-6)^2+(q+2)^2$

$p^2+q^2=p^2-12p+q^2+4q+40$

$\therefore\ 3p-q=10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=3,\ q=-1$

즉 $P(3,\ -1)$이므로 $\overline{OP}=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

따라서 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 구하는 넓이는

$\pi\times(\sqrt{10}\,)^2=10\pi$ 답 **10π**

다른 풀이 $\overline{OA}^2=4^2+2^2=20$

$\overline{OB}^2=6^2+(-2)^2=40$

$\overline{AB}^2=(6-4)^2+(-2-2)^2=20$

이므로 $\overline{OB}^2=\overline{OA}^2+\overline{AB}^2$

따라서 $\triangle$OAB는 $\angle A=90°$인 직각삼각형이므로 $\triangle$OAB의 외심은 $\overline{OB}$의 중점이다.

즉 외접원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OB}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{10}=\sqrt{10}$

이므로 구하는 넓이는 $\pi\times(\sqrt{10}\,)^2=10\pi$

RPM 비법 노트

삼각형의 외심

① 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점까지의 거리는 모두 같다.
② 직각삼각형의 외심은 빗변의 중점이다.

0085 전략 소매상 A, B, C의 위치를 수직선 위의 좌표로 나타낸 후 도매상에서 각 소매상까지의 거리의 제곱의 합을 구한다.

소매상의 위치를 각각 $A(-2a)$, $B(0)$, $C(a)$ $(a>0)$, 도매상의 위치를 $P(x)$라 하면 도매상에서 각 소매상까지의 거리의 제곱의 합은

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2&=(x+2a)^2+x^2+(x-a)^2\\&=3x^2+2ax+5a^2\\&=3\left(x+\frac{1}{3}a\right)^2+\frac{14}{3}a^2\end{aligned}$$

즉 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$의 값은 $x=-\frac{1}{3}a$일 때 최소이므로 이때 운반 비용도 최소가 된다.

$x=-\frac{1}{3}a$이면

$\overline{AP}=\left|-\frac{1}{3}a-(-2a)\right|=\frac{5}{3}a$,

$\overline{BP}=\left|-\frac{1}{3}a\right|=\frac{1}{3}a$

이므로 $\overline{AP}:\overline{BP}=5:1$

따라서 도매상의 위치는 $\overline{AB}$를 $5:1$로 내분하는 점이다.

답 ④

참고 | $\overline{CP}=\left|a-\left(-\frac{1}{3}a\right)\right|=\frac{4}{3}a$이므로

$\overline{AP}:\overline{CP}=5:4$

따라서 도매상의 위치는 $\overline{AC}$를 $5:4$로 내분하는 점이라 할 수도 있다.

0086 전략 평행선 사이의 길이의 비를 이용하여 $\overline{BC}$와 $\overline{PC}$의 길이의 비를 구한다.

$\overline{AP}\,/\!/\,\overline{DC}$이므로

$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{PB}:\overline{PC}$

$\overline{AB}=\sqrt{(-5)^2+(-9-3)^2}=13$,

$\overline{AD}=\overline{AC}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$이므로

$\overline{PB}:\overline{PC}=13:5$

따라서 점 C는 $\overline{BP}$를 $(13-5):5$, 즉 $8:5$로 내분하는 점이므로 $\frac{8\times a+5\times(-5)}{8+5}=4$, $\frac{8\times b+5\times(-9)}{8+5}=0$

$8a-25=52,\ 8b-45=0$

$\therefore\ a=\frac{77}{8},\ b=\frac{45}{8}$

$\therefore\ a-b=4$ 답 ⑤

02 직선의 방정식

교과서 문제 정복하기

본책 019쪽

0087 답 $\boldsymbol{y=-5x+3}$

0088 $y-(-1)=2(x-1)$ $\quad\therefore y=2x-3$

답 $\boldsymbol{y=2x-3}$

0089 $y-3=\dfrac{-3-3}{4-2}(x-2)$ $\quad\therefore y=-3x+9$

답 $\boldsymbol{y=-3x+9}$

0090 답 $\boldsymbol{y=4}$

0091 답 $\boldsymbol{-\dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{5}=1}$

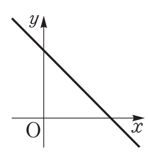
0092 (1) $ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이므로

$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

$a>0$, $b>0$, $c<0$이므로

(기울기)$=-\dfrac{a}{b}<0$,

(y절편)$=-\dfrac{c}{b}>0$

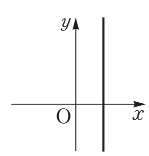


따라서 주어진 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 4 사분면을 지난다.

(2) $ax+by+c=0$에서 $b=0$이므로 $\quad ax+c=0$

$\therefore x=-\dfrac{c}{a}$

$a>0$, $c<0$이므로 $\quad -\dfrac{c}{a}>0$



따라서 주어진 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 4 사분면을 지난다.

답 (1) **제1, 2, 4 사분면** (2) **제1, 4 사분면**

0093 주어진 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$4x+5y+3=0$, $2x+3y+1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=-2$, $y=1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-2, 1)$이다. 답 $\boldsymbol{(-2, 1)}$

0094 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$2x+y-1+k(x-2y+1)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x+y-1=0$, $x-2y+1=0$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=\dfrac{1}{5}$, $y=\dfrac{3}{5}$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$이다. 답 $\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{3}{5}\right)}$

0095 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x-3y-1+k(2x-4y+1)=0$ (k는 실수) $\cdots$ ㉠

이라 하면 이 직선이 원점을 지나므로

$-1+k=0$ $\quad\therefore k=1$

이것을 ㉠에 대입하면

$2x-3y-1+2x-4y+1=0$

$\therefore 4x-7y=0$ 답 $\boldsymbol{4x-7y=0}$

다른 풀이 $2x-3y-1=0$, $2x-4y+1=0$을 연립하여 풀면

$x=\dfrac{7}{2}$, $y=2$

따라서 두 직선의 교점의 좌표가 $\left(\dfrac{7}{2}, 2\right)$이므로 두 점 $(0, 0)$, $\left(\dfrac{7}{2}, 2\right)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\dfrac{2}{\frac{7}{2}}x$ $\quad\therefore 4x-7y=0$

0096 (1) $-\dfrac{1}{2}=a+1$ $\quad\therefore a=-\dfrac{3}{2}$

(2) $-\dfrac{1}{2}\times(a+1)=-1$ $\quad\therefore a=1$

답 (1) $\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}}$ (2) **1**

0097 (1) 두 직선이 평행하려면 $\quad\dfrac{1}{a-1}=\dfrac{a}{2}\neq\dfrac{1}{1}$

$\dfrac{1}{a-1}=\dfrac{a}{2}$에서 $\quad a^2-a=2$, $\quad a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$ $\quad\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

$\dfrac{a}{2}\neq\dfrac{1}{1}$에서 $a\neq2$이므로 $\quad a=-1$

(2) 두 직선이 수직이려면

$1\times(a-1)+a\times2=0$ $\quad\therefore a=\dfrac{1}{3}$

답 (1) **−1** (2) $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

0098 직선 $3x+2y+1=0$, 즉 $y=-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$에 평행한 직선의 기울기는 $-\dfrac{3}{2}$이다.

따라서 기울기가 $-\dfrac{3}{2}$이고 점 $(2, -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-(-3)=-\dfrac{3}{2}(x-2)$

$\therefore y=-\dfrac{3}{2}x$ 답 $\boldsymbol{y=-\dfrac{3}{2}x}$

0099 직선 $y=-3x+1$에 수직인 직선의 기울기는 $\dfrac{1}{3}$이다.

따라서 기울기가 $\dfrac{1}{3}$이고 점 $(-2, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\dfrac{1}{3}\{x-(-2)\}$

$\therefore y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$ 답 $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}}$

0100 $\dfrac{|1\times1-2\times4+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ 　　답 $\sqrt{5}$

0101 $\dfrac{|6\times(-3)+8\times2-3|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$ 　　답 $\dfrac{1}{2}$

0102 $\dfrac{|6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{6}{5}$ 　　답 $\dfrac{6}{5}$

0103 평행한 두 직선 $x-y-3=0$, $x-y+3=0$ 사이의 거리는 직선 $x-y-3=0$ 위의 점 $(3, 0)$과 직선 $x-y+3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|3-0+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$ 　　답 $3\sqrt{2}$

RPM 비법 노트

평행한 두 직선 $ax+by+c=0$, $ax+by+c'=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

유형 익히기

● 본책 020~027쪽

0104 두 점 $(-4, 2)$, $(6, 8)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-4+6}{2}, \dfrac{2+8}{2}\right)$, 즉 $(1, 5)$

따라서 점 $(1, 5)$를 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y-5=-2(x-1)$

$\therefore\ y=-2x+7$ 　　답 $y=-2x+7$

0105 직선 $3x-y-5=0$, 즉 $y=3x-5$의 기울기는 3이므로 점 $(-1, -1)$을 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y-(-1)=3\{x-(-1)\}$ 　　$\therefore\ 3x-y+2=0$

따라서 $a=3$, $b=2$이므로

$ab=6$ 　　답 ⑤

0106 주어진 직선의 기울기는

$\tan 45^\circ=1$

점 $(2, -1)$을 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y-(-1)=x-2$ 　　$\therefore\ y=x-3$

따라서 $m-2=1$, $-n-1=-3$이므로 　　$m=3$, $n=2$

$\therefore\ m+n=5$ 　　답 5

0107 두 점 $A(6, -4)$, $B(1, 1)$에 대하여 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times1+3\times6}{2+3}, \dfrac{2\times1+3\times(-4)}{2+3}\right)$, 즉 $(4, -2)$

따라서 두 점 $(4, -2)$, $(-1, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-(-2)=\dfrac{3-(-2)}{-1-4}(x-4)$

$\therefore\ y=-x+2$

즉 구하는 y절편은 2이다. 　　답 2

0108 두 점 $(-2, 3)$, $(3, -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\dfrac{-2-3}{3-(-2)}\{x-(-2)\}$

$\therefore\ y=-x+1$

직선 $y=-x+1$이 두 점 $(-5, a)$, $(b, 2)$를 지나므로

$a=-(-5)+1$, $2=-b+1$

$\therefore\ a=6$, $b=-1$

$\therefore\ a-b=7$ 　　답 ⑤

0109 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\dfrac{3+4-1}{3}, \dfrac{5+1+3}{3}\right)$, 즉 $(2, 3)$ 　　… 1단계

따라서 두 점 $C(-1, 3)$, $G(2, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=3$ 　　… 2단계

답 $y=3$

	채점 요소	비율
1단계	삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표 구하기	50 %
2단계	직선 CG의 방정식 구하기	50 %

다른 풀이 직선 CG는 $\overline{AB}$의 중점을 지나고 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{3+4}{2}, \dfrac{5+1}{2}\right)$, 즉 $\left(\dfrac{7}{2}, 3\right)$

따라서 두 점 $(-1, 3)$, $\left(\dfrac{7}{2}, 3\right)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=3$

0110 두 점 $A(5, -3)$, $C(1, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-(-3)=\dfrac{5-(-3)}{1-5}(x-5)$

$\therefore\ y=-2x+7$ 　　…… ㉠

두 점 $O(0, 0)$, $B(7, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=0$ 　　…… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 풀면 　　$x=\dfrac{7}{2}$

따라서 두 대각선의 교점의 좌표는 $\left(\dfrac{7}{2}, 0\right)$이다. 　　답 $\left(\dfrac{7}{2}, 0\right)$

0111 x절편과 y절편의 합이 0이므로 x절편을 a $(a\neq0)$라 하면 y절편은 $-a$이다.

따라서 주어진 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{-a}=1$ 　　$\therefore\ y=x-a$

이 직선이 점 $(-2, 4)$를 지나므로

$4=-2-a$ 　　$\therefore\ a=-6$ 　　답 -6

0112 $2x-3y-4=0$에 $y=0$을 대입하면

$2x-4=0 \qquad \therefore x=2$

$3x+y+8=0$에 $x=0$을 대입하면

$y+8=0 \qquad \therefore y=-8$

따라서 직선 l의 x절편은 2, y절편은 -8이므로 직선 l의 방정식은

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-8}=1$$

이 직선이 점 $(a, -4)$를 지나므로

$$\frac{a}{2}+\frac{-4}{-8}=1, \qquad \frac{a}{2}=\frac{1}{2}$$

$\therefore a=1$

답 **1**

0113 세 점 $A(1, 3)$, $B(a, 5)$, $C(3, 2a+3)$이 한 직선 위에 있으므로 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같다.

즉 $\frac{5-3}{a-1}=\frac{(2a+3)-3}{3-1}$이므로

$$\frac{2}{a-1}=a, \qquad a^2-a-2=0$$

$(a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=2 \ (\because a>0)$

따라서 직선의 기울기가 $\frac{5-3}{2-1}=2$이고 점 $A(1, 3)$을 지나므로 구하는 직선의 방정식은

$y-3=2(x-1)$

$\therefore y=2x+1$

답 $\boldsymbol{y=2x+1}$

0114 세 점이 삼각형을 이루지 않으려면 세 점은 한 직선 위에 있어야 하므로 직선 AC의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같아야 한다.

즉 $\frac{7+1}{5-k}=\frac{7-k}{5-2}$이므로

$24=(5-k)(7-k)$

$k^2-12k+11=0, \qquad (k-1)(k-11)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=11$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$1+11=12$

답 **12**

0115 꼭짓점 A를 지나는 직선 $y=ax+b$가 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 선분 BC의 중점을 지나야 한다.

선분 BC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{5-1}{2}, \frac{-5+1}{2}\right)$, 즉 $(2, -2)$

두 점 $(3, 3)$, $(2, -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{-2-3}{2-3}(x-3)$$

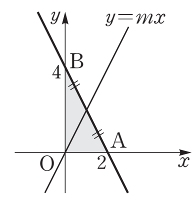
$\therefore y=5x-12$

따라서 $a=5$, $b=-12$이므로

$a+b=-7$

답 **−7**

0116 직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$과 x축, y축의 교점을 각각 A, B라 하면



$A(2, 0)$, $B(0, 4)$

직선 $y=mx$가 삼각형 ABO의 넓이를 이등분하려면 오른쪽 그림과 같이 선분 AB의 중점을 지나야 한다.

이때 선분 AB의 중점의 좌표는

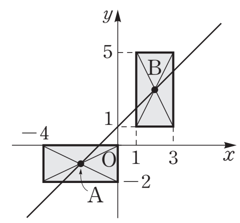
$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right)$, 즉 $(1, 2)$

따라서 직선 $y=mx$가 점 $(1, 2)$를 지나야 하므로

$m=2$

답 ②

0117 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 각 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나야 한다.



오른쪽 그림과 같이 각 직사각형의 두 대각선의 교점을 A, B라 하면

점 A의 좌표는

$\left(\frac{-4+0}{2}, \frac{0-2}{2}\right)$, 즉 $(-2, -1)$

점 B의 좌표는

$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{5+1}{2}\right)$, 즉 $(2, 3)$

두 점 $A(-2, -1)$, $B(2, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-1)=\frac{3-(-1)}{2-(-2)}\{x-(-2)\} \qquad \therefore y=x+1$$

따라서 이 직선의 x절편은 -1, y절편은 1이므로 구하는 곱은

$-1\times1=-1$

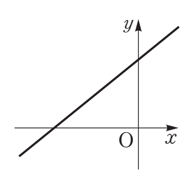
답 **−1**

0118 $ax+by+c=0$에서 $\qquad y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $ab<0$, $bc<0$에서 $\frac{a}{b}<0$, $\frac{c}{b}<0$이므로

$-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}>0$

즉 기울기와 y절편이 모두 양수이므로 주어진 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



따라서 이 직선은 제4사분면을 지나지 않는다.

답 ④

0119 ㄱ. $c=0$이면 $\qquad ax+by=0$

$\therefore y=-\frac{a}{b}x \ (\because ab\neq0)$

따라서 주어진 직선은 원점을 지난다. (참)

ㄴ. $b\neq0$이므로 $ax+by+c=0$에서 $\qquad y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $ab>0$에서 $-\frac{a}{b}<0$이므로 직선의 기울기는 음수이다.

따라서 주어진 직선은 제4사분면을 지난다. (참)

ㄷ. $b\neq0$이므로 $ax+by+c=0$에서

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

이때 $bc<0$에서 $-\frac{c}{b}>0$이므로 직선의 y절편은 양수이다.

따라서 주어진 직선은 제1사분면을 지난다. (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 항상 옳다. 답 ⑤

0120 $ax+by-2=0$에서 $\quad y=-\frac{a}{b}x+\frac{2}{b}$

주어진 그림에서 이 직선의 기울기와 y절편이 모두 음수이므로

$$-\frac{a}{b}<0,\ \frac{2}{b}<0 \qquad \therefore a<0,\ b<0$$

$x-ay+b=0$에서 $\quad y=\frac{1}{a}x+\frac{b}{a}$

이때 $\frac{1}{a}<0$, $\frac{b}{a}>0$이므로 이 직선의 기울기는 음수, y절편은 양수이다.

따라서 직선 $x-ay+b=0$의 개형은 ③이다. 답 ③

0121 $(2k+1)x-(k-1)y-5k-4=0$을 k에 대하여 정리하면

$$(2x-y-5)k+x+y-4=0$$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$2x-y-5=0,\ x+y-4=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=3,\ y=1$

$$\therefore \mathrm{P}(3,\ 1)$$

따라서 기울기가 -2이고 점 $\mathrm{P}(3,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=-2(x-3)$$

$$\therefore 2x+y-7=0$$

답 ④

0122 $mx+y+3m-4=0$을 m에 대하여 정리하면

$$m(x+3)+y-4=0$$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x+3=0,\ y-4=0$$

$$\therefore x=-3,\ y=4$$

즉 $\mathrm{P}(-3,\ 4)$이므로

$$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$$

답 5

0123 점 $(a,\ b)$가 직선 $2x-y+3=0$ 위의 점이므로

$$2a-b+3=0 \qquad \therefore b=2a+3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠을 $2ax-3by=9$에 대입하면

$$2ax-3(2a+3)y=9$$

$$\therefore (2x-6y)a-9y-9=0$$

이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$2x-6y=0,\ -9y-9=0$$

$$\therefore x=-3,\ y=-1$$

따라서 직선 $2ax-3by=9$는 항상 점 $(-3,\ -1)$을 지난다.

답 ②

0124 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$2x-3y-1+k(x+y-3)=0\ (k\text{는 실수}) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이라 하면 직선 ㉠이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$$2-3-1+k(1+1-3)=0$$

$$-2-k=0 \qquad \therefore k=-2$$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad 2x-3y-1-2(x+y-3)=0$

$$-5y+5=0 \qquad \therefore y-1=0$$

따라서 $a=0$, $b=1$이므로 $\quad a-b=-1$ 답 -1

다른 풀이 $2x-3y-1=0$, $x+y-3=0$을 연립하여 풀면

$$x=2,\ y=1$$

따라서 두 직선의 교점의 좌표가 $(2,\ 1)$이므로 두 점 $(2,\ 1)$, $(1,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은 $\quad y=1$

0125 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$x+y+1+k(2x-y-1)=0\ (k\text{는 실수}) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이라 하면 직선 ㉠이 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$$2+0+1+k(4-0-1)=0$$

$$3+3k=0 \qquad \therefore k=-1$$

이것을 ㉠에 대입하면 $\quad x+y+1-(2x-y-1)=0$

$$\therefore x-2y-2=0$$

⑤ $4-2\times1-2=0$이므로 점 $(4,\ 1)$은 직선 $x-2y-2=0$ 위의 점이다.

답 ⑤

0126 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$5x-y+2+k(x+4y-3)=0\ (k\text{는 실수})$$

이라 하면 $\quad (k+5)x+(4k-1)y-3k+2=0 \quad \cdots ㉠$

직선 ㉠의 기울기가 -1이려면

$$-\frac{k+5}{4k-1}=-1, \qquad k+5=4k-1 \qquad \therefore k=2$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$7x+7y-4=0 \qquad \therefore y=-x+\frac{4}{7}$$

따라서 구하는 y절편은 $\frac{4}{7}$이다. 답 $\frac{4}{7}$

0127 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$ax+(a+1)y+2+k\{(a-6)x+ay-2\}$$
$$=0\ (k\text{는 실수}) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이라 하면 직선 ㉠이 원점을 지나므로

$$2-2k=0 \qquad \therefore k=1$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$ax+(a+1)y+2+(a-6)x+ay-2=0$$

$$\therefore (2a-6)x+(2a+1)y=0$$

이 직선의 기울기가 2이므로

$$-\frac{2a-6}{2a+1}=2, \qquad -2a+6=4a+2$$

$$\therefore a=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0128 두 직선이 평행하려면

$$\frac{2}{k+1}=\frac{-k}{-1}\neq\frac{1}{k}$$

$\frac{2}{k+1}=\frac{-k}{-1}$에서 $\quad -2=-k^2-k$

$k^2+k-2=0, \quad (k+2)(k-1)=0$

$\therefore k=-2$ 또는 $k=1$ …… ㉠

$\frac{-k}{-1}\neq\frac{1}{k}$에서 $\quad k^2\neq1$

$\therefore k\neq-1,\ k\neq1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad k=-2$

또 두 직선이 수직이려면

$2(k+1)+(-k)\times(-1)=0$

$3k=-2 \quad \therefore k=-\frac{2}{3}$

따라서 $\alpha=-2,\ \beta=-\frac{2}{3}$이므로 $\quad \alpha-\beta=-\frac{4}{3}$ 답 $-\frac{4}{3}$

0129 두 직선이 수직이려면

$(a-1)(a-2)+3\times(-2)=0$

$a^2-3a-4=0, \quad (a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=4$

따라서 모든 상수 a의 값의 곱은

$-1\times4=-4$ 답 -4

0130 두 직선이 각각 점 $(-1,\ 5)$를 지나므로

$2+5a+3=0$에서 $\quad a=-1$

$-b+5c+11=0$에서 $\quad b-5c=11$ …… ㉠

두 직선 $-2x-y+3=0,\ bx+cy+11=0$이 수직이므로

$-2\times b+(-1)\times c=0 \quad \therefore 2b+c=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad b=1,\ c=-2$

$\therefore abc=2$ 답 ③

0131 직선 $x-ay+1=0$이 직선 $x+(b-2)y-1=0$과 평행하므로

$$\frac{1}{1}=\frac{-a}{b-2}\neq\frac{1}{-1}$$

$\frac{1}{1}=\frac{-a}{b-2}$에서 $\quad a+b=2$ … 1단계

직선 $x-ay+1=0$이 직선 $(a+1)x-(b-1)y+1=0$과 수직이므로

$1\times(a+1)+(-a)\times(-b+1)=0$

$\therefore ab=-1$ … 2단계

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=2^2-2\times(-1)=6$ … 3단계

답 6

채점 요소	비율
1단계 두 직선이 평행할 조건을 이용하여 $a+b$의 값 구하기	40 %
2단계 두 직선이 수직일 조건을 이용하여 ab의 값 구하기	40 %
3단계 a^2+b^2의 값 구하기	20 %

0132 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{4-1}{6-(-3)}=\frac{1}{3}$$

이므로 구하는 직선의 기울기는 -3이다.

선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times6+2\times(-3)}{1+2},\ \frac{1\times4+2\times1}{1+2}\right)$, 즉 $(0,\ 2)$

따라서 기울기가 -3이고 점 $(0,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=-3x+2$ 답 $y=-3x+2$

0133 두 점 $(-3,\ 5)$, $(5,\ -7)$을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-7-5}{5-(-3)}=-\frac{3}{2}$$

기울기가 $-\frac{3}{2}$이고 점 $(2,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-5=-\frac{3}{2}(x-2) \quad \therefore 3x+2y-16=0$

따라서 $a=3,\ b=-16$이므로

$a+b=-13$ 답 ①

0134 두 직선 $3x+2y-5=0,\ 3x+y-1=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$3x+2y-5+k(3x+y-1)=0$ (k는 실수)

이라 하면 $\quad (3k+3)x+(k+2)y-k-5=0$ …… ㉠

직선 ㉠이 직선 $2x-y+4=0$과 수직이므로

$(3k+3)\times2+(k+2)\times(-1)=0, \quad 5k+4=0$

$\therefore k=-\frac{4}{5}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{3}{5}x+\frac{6}{5}y-\frac{21}{5}=0 \quad \therefore x+2y-7=0$

이 직선이 점 $(a,\ -1)$을 지나므로

$a-2-7=0 \quad \therefore a=9$ 답 9

다른 풀이 $3x+2y-5=0,\ 3x+y-1=0$을 연립하여 풀면

$x=-1,\ y=4$

즉 두 직선 $3x+2y-5=0,\ 3x+y-1=0$의 교점의 좌표는

$(-1,\ 4)$

직선 $2x-y+4=0$, 즉 $y=2x+4$의 기울기가 2이므로 이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

따라서 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 점 $(-1,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=-\frac{1}{2}\{x-(-1)\} \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

이 직선이 점 $(a,\ -1)$을 지나므로

$-1=-\frac{1}{2}a+\frac{7}{2} \quad \therefore a=9$

0135 직선 $x+3y-9=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x+3$의 기울기가 $-\frac{1}{3}$이므로 직선 AH의 기울기는 3이다.

따라서 직선 AH의 방정식은

$y-11=3(x-6)\qquad \therefore 3x-y-7=0$

이때 점 H는 직선 AH와 직선 $x+3y-9=0$의 교점이므로

$3x-y-7=0$, $x+3y-9=0$을 연립하여 풀면

$x=3,\ y=2$

즉 $a=3,\ b=2$이므로 $\quad ab=6$ 답 ③

0136 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{3+5}{2},\ \frac{1-3}{2}\right)$, 즉 $(4,\ -1)$

두 점 A$(3,\ 1)$, B$(5,\ -3)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-3-1}{5-3}=-2$

따라서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 $\frac{1}{2}$이고 점 $(4,\ -1)$을 지나므로 그 방정식은

$y-(-1)=\frac{1}{2}(x-4)\qquad \therefore y=\frac{1}{2}x-3$ 답 ②

0137 직선 $y=-x+b$의 기울기가 -1이므로 직선 AB의 기울기는 1이다.

즉 $\frac{5-3}{4-a}=1$이므로 $\quad a=2$

또 직선 $y=-x+b$가 선분 AB의 중점 $\left(\frac{a+4}{2},\ \frac{3+5}{2}\right)$, 즉 $(3,\ 4)$를 지나므로

$4=-3+b\qquad \therefore b=7$

$\therefore a+b=9$ 답 9

0138 직선 $2x+y-3=0$이 선분 AB의 중점 $\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{2+4}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{a+b}{2},\ 3\right)$을 지나므로

$2\times\frac{a+b}{2}+3-3=0\qquad \therefore a+b=0$ …… ㉠

또 직선 $2x+y-3=0$, 즉 $y=-2x+3$의 기울기가 -2이므로 직선 AB의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

즉 $\frac{4-2}{b-a}=\frac{1}{2}$이므로 $\quad b-a=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-2,\ b=2$

$\therefore a^2+b^2=8$ 답 8

0139 선분 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+3}{2},\ \frac{0+6}{2}\right)$, 즉 $(2,\ 3)$

직선 AC의 기울기는 $\quad \frac{6-0}{3-1}=3$

따라서 선분 AC의 수직이등분선은 기울기가 $-\frac{1}{3}$이고 점 $(2,\ 3)$을 지나므로 그 방정식은

$y-3=-\frac{1}{3}(x-2)$

$\therefore y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$ …… ㉠

선분 BC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{7+3}{2},\ \frac{2+6}{2}\right)$, 즉 $(5,\ 4)$

직선 BC의 기울기는 $\quad \frac{6-2}{3-7}=-1$

따라서 선분 BC의 수직이등분선은 기울기가 1이고 점 $(5,\ 4)$를 지나므로 그 방정식은

$y-4=x-5\qquad \therefore y=x-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad x=\frac{7}{2},\ y=\frac{5}{2}$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $\left(\frac{7}{2},\ \frac{5}{2}\right)$이다. 답 $\left(\frac{7}{2},\ \frac{5}{2}\right)$

참고 | 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+7}{2},\ \frac{0+2}{2}\right)$, 즉 $(4,\ 1)$

직선 AB의 기울기는 $\quad \frac{2-0}{7-1}=\frac{1}{3}$

따라서 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 -3이고 점 $(4,\ 1)$을 지나므로 그 방정식은

$y-1=-3(x-4)\qquad \therefore y=-3x+13$

이때 $-3\times\frac{7}{2}+13=\frac{5}{2}$이므로 선분 AB의 수직이등분선도 점 $\left(\frac{7}{2},\ \frac{5}{2}\right)$를 지난다.

0140 $x+2y=0$ …… ㉠

$x-y+3=0$ …… ㉡

$ax+y+a+1=0$ …… ㉢

이때 직선 ㉠과 ㉡은 평행하지 않다.

(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 평행한 경우

$\frac{1}{a}=\frac{2}{1}\neq\frac{0}{a+1}$이므로 $\quad a=\frac{1}{2}$

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 평행한 경우

$\frac{a}{1}=\frac{1}{-1}\neq\frac{a+1}{3}$이므로 $\quad a=-1$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad x=-2,\ y=1$

따라서 직선 ㉢이 점 $(-2,\ 1)$을 지나야 하므로

$-2a+1+a+1=0\qquad \therefore a=2$

이상에서 $\quad a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=2$

따라서 구하는 모든 a의 값의 곱은

$-1\times\frac{1}{2}\times2=-1$ 답 -1

0141 주어진 세 직선이 한 점에서 만나려면 직선 $kx+y=-7$이 두 직선 $3x+y=8$, $2x+y=5$의 교점을 지나야 한다.

$3x+y=8$, $2x+y=5$를 연립하여 풀면

$x=3,\ y=-1$

따라서 직선 $kx+y=-7$이 점 $(3,\ -1)$을 지나야 하므로

$3k-1=-7\qquad \therefore k=-2$ 답 -2

0142 $x+2y-6=0$ …… ㉠

$4x-3y-12=0$ …… ㉡

$ax+y-1=0$ …… ㉢

세 직선 ㉠, ㉡, ㉢으로 둘러싸인 삼각형이 직각삼각형이 되려면 세 직선 중 어느 두 직선이 수직이어야 한다.
이때 두 직선 ㉠, ㉡은 수직이 아니다.
(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 수직인 경우

$1\times a+2\times 1=0$이므로 $\quad a=-2$ ··· 1단계

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 수직인 경우

$4\times a+(-3)\times 1=0$이므로 $\quad a=\frac{3}{4}$ ··· 2단계

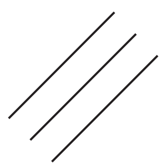
(i), (ii)에서 $\quad a=-2$ 또는 $a=\frac{3}{4}$

따라서 구하는 모든 a의 값의 합은 $\quad -2+\frac{3}{4}=-\frac{5}{4}$ ··· 3단계

답 $-\frac{5}{4}$

채점 요소		비율
1단계	두 직선 $x+2y-6=0$, $ax+y-1=0$이 수직일 때, a의 값 구하기	40 %
2단계	두 직선 $4x-3y-12=0$, $ax+y-1=0$이 수직일 때, a의 값 구하기	40 %
3단계	모든 상수 a의 값의 합 구하기	20 %

0143 서로 다른 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나누려면 오른쪽 그림과 같이 세 직선이 모두 평행해야 한다.



두 직선 $ax+y+5=0$, $x+2y+3=0$이 평행하려면 $\quad \frac{a}{1}=\frac{1}{2}\neq\frac{5}{3} \quad \therefore a=\frac{1}{2}$

두 직선 $2x+by-4=0$, $x+2y+3=0$이 평행하려면

$\frac{2}{1}=\frac{b}{2}\neq\frac{-4}{3} \quad \therefore b=4$

$\therefore a+b=\frac{9}{2}$

답 $\frac{9}{2}$

0144 점 $(a, 3)$에서 두 직선 $2x-y+1=0$, $x+2y-1=0$까지의 거리가 같으므로

$\frac{|2a-3+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|a+6-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}, \quad |2a-2|=|a+5|$

$2a-2=\pm(a+5) \quad \therefore a=7$ 또는 $a=-1$

그런데 $a>0$이므로 $\quad a=7$

답 7

0145 $\frac{|6+24+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=8$이므로 $\quad |30+k|=40$

$30+k=\pm 40 \quad \therefore k=10\ (\because k>0)$

답 ③

0146 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$x+y-2+(x-y)k=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$x+y-2=0$, $x-y=0$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=1$, $y=1 \quad \therefore A(1, 1)$

점 $A(1, 1)$과 직선 $2x-y-6=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2-1-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

답 $\sqrt{5}$

0147 주어진 식을 x, y에 대하여 정리하면

$(2k+1)x+(k+3)y-4=0$

$$\therefore f(k)=\frac{|-4|}{\sqrt{(2k+1)^2+(k+3)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5k^2+10k+10}}=\frac{4}{\sqrt{5(k+1)^2+5}}$$

따라서 $5(k+1)^2+5$가 최소일 때, 즉 $k=-1$일 때 $f(k)$가 최대이므로 구하는 최댓값은

$f(-1)=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

답 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

0148 평행한 두 직선 $x+2y+1=0$, $x+2y+k=0$ 사이의 거리는 직선 $x+2y+1=0$ 위의 점 $(-1, 0)$과 직선 $x+2y+k=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|-1+0+k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=4\sqrt{5}$

$|k-1|=20, \quad k-1=\pm 20$

$\therefore k=21$ 또는 $k=-19$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$21+(-19)=2$

답 ④

0149 두 직선이 평행하므로 선분 AB의 길이의 최솟값은 두 직선 사이의 거리와 같다.
이때 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-y+3=0$ 위의 점 $(0, 3)$과 직선 $x-y-1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|0-3-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

따라서 선분 AB의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{2}$이다.

답 $2\sqrt{2}$

0150 두 직선 $ax+2y-1=0$, $3x+(a-1)y-1=0$이 평행하므로

$\frac{a}{3}=\frac{2}{a-1}\neq\frac{-1}{-1}$

$\frac{a}{3}=\frac{2}{a-1}$에서 $\quad a(a-1)=6$

$a^2-a-6=0, \quad (a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=3$

그런데 $\frac{a}{3}\neq\frac{-1}{-1}$에서 $a\neq 3$이므로

$a=-2$

$a=-2$일 때, 두 직선의 방정식은

$-2x+2y-1=0$, $3x-3y-1=0$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $-2x+2y-1=0$ 위의 점 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$과 직선 $3x-3y-1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{\left|0-\frac{3}{2}-1\right|}{\sqrt{3^2+(-3)^2}}=\frac{\frac{5}{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{12}$

답 $\frac{5\sqrt{2}}{12}$

0151 $\overline{AB}=\sqrt{25}=5$이므로 직각삼각형 AOB에서

$$3^2+\overline{OB}^2=5^2 \qquad \therefore \overline{OB}=4\ (\because \overline{OB}>0)$$

따라서 점 B의 좌표가 $(4,\ 0)$이므로 직선 AB의 방정식은

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1 \qquad \therefore 3x+4y-12=0$$

직선 CD는 직선 AB와 평행하므로 직선 CD의 방정식을

$$3x+4y+k=0\ (k<0)$$

이라 하면 두 직선 AB, CD 사이의 거리가 5이므로 점 $A(0,\ 3)$과 직선 CD 사이의 거리가 5이다.

즉 $\dfrac{|12+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=5$이므로

$$|k+12|=25, \qquad k+12=\pm25$$

$$\therefore k=-37\ (\because k<0)$$

따라서 직선 CD의 방정식은

$$3x+4y-37=0$$

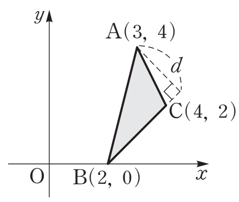
이 식에 $y=0$을 대입하면 $\quad 3x-37=0 \qquad \therefore x=\dfrac{37}{3}$

따라서 구하는 x절편은 $\dfrac{37}{3}$이다.

답 $\dfrac{37}{3}$

0152 $\overline{BC}=\sqrt{(4-2)^2+(2-0)^2}$

$$=2\sqrt{2}$$



직선 BC의 방정식은

$$y=\frac{2-0}{4-2}(x-2)$$

$$\therefore x-y-2=0$$

점 $A(3,\ 4)$와 직선 BC 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|3-4-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times d$$

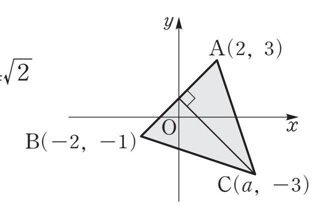
$$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$=3$$

답 3

0153 $\overline{AB}$

$=\sqrt{(-2-2)^2+(-1-3)^2}=4\sqrt{2}$



직선 AB의 방정식은

$$y-3=\frac{-1-3}{-2-2}(x-2)$$

$$\therefore x-y+1=0$$

점 $C(a,\ -3)$과 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|a+3+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|a+4|}{\sqrt{2}}$$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 16이므로

$$\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times\frac{|a+4|}{\sqrt{2}}=16$$

$$|a+4|=8, \qquad a+4=\pm8$$

$$\therefore a=4\ (\because a\text{는 자연수})$$

답 4

0154 직선 OA와 직선 $x-4y+12=0$의 기울기가 $\dfrac{1}{4}$로 같으므로 두 직선은 평행하다.

따라서 삼각형 OAP에서 $\overline{OA}$를 밑변으로 생각하면 원점과 직선 $x-4y+12=0$ 사이의 거리가 높이가 된다.

$\overline{OA}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$이고, 원점과 직선 $x-4y+12=0$ 사이의 거리는 $\quad \dfrac{|12|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\dfrac{12}{\sqrt{17}}$

$$\therefore \triangle OAP=\frac{1}{2}\times\sqrt{17}\times\frac{12}{\sqrt{17}}=6$$

답 6

0155 $x-2y-2=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x+5y-9=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

$4x-y+6=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

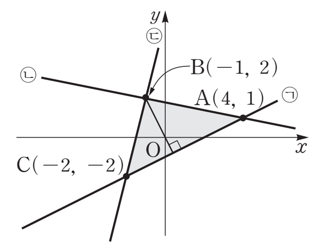
$$x=4,\ y=1$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$x=-1,\ y=2$$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$$x=-2,\ y=-2$$



세 직선의 교점을

$A(4,\ 1)$, $B(-1,\ 2)$, $C(-2,\ -2)$라 하자. … 1단계

$\overline{AC}=\sqrt{(4+2)^2+(1+2)^2}=3\sqrt{5}$이고 점 $B(-1,\ 2)$와 직선 ㉠ 사이의 거리는

$$\frac{|-1-4-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{7}{\sqrt{5}}$$ … 2단계

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times\frac{7}{\sqrt{5}}=\frac{21}{2}$$ … 3단계

답 $\dfrac{21}{2}$

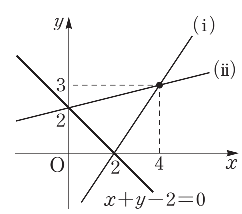
	채점 요소	비율
1단계	세 직선의 교점의 좌표 구하기	30 %
2단계	삼각형의 밑변의 길이와 높이 구하기	50 %
3단계	삼각형의 넓이 구하기	20 %

0156 $mx-y-4m+3=0$에서

$$m(x-4)-(y-3)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 점 $(4,\ 3)$을 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 $(2,\ 0)$을 지날 때

$$-2m+3=0 \qquad \therefore m=\frac{3}{2}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0,\ 2)$를 지날 때

$$-4m+1=0 \qquad \therefore m=\frac{1}{4}$$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$$\frac{1}{4}<m<\frac{3}{2}$$

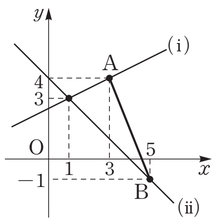
답 $\dfrac{1}{4}<m<\dfrac{3}{2}$

0157 직선

$$y=m(x-1)+3 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

은 m의 값에 관계없이 점 $(1,\ 3)$을 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{A}(3,\ 4)$를 지날 때

$$4=2m+3 \qquad \therefore\ m=\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{B}(5,\ -1)$을 지날 때

$$-1=4m+3 \qquad \therefore\ m=-1$$

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는 $\quad -1\le m\le\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=-1,\ \beta=\frac{1}{2}$이므로 $\quad \alpha+\beta=-\frac{1}{2}$

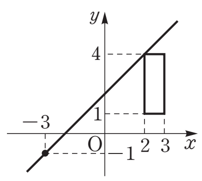
답 ②

0158 $kx-y+3k-1=0$에서

$$(x+3)k-(y+1)=0 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이므로 직선 ㉠은 k의 값에 관계없이 점 $(-3,\ -1)$을 지난다.

이때 직선 ㉠의 기울기가 k이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 점 $(2,\ 4)$를 지날 때 k의 값이 최대이다.



㉠에 $x=2,\ y=4$를 대입하면

$$5k-5=0 \qquad \therefore\ k=1$$

따라서 k의 최댓값은 1이다.

답 **1**

0159 주어진 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x+2y+1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2x-y-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$|x+2y+1|=|2x-y-3|$$

$$x+2y+1=\pm(2x-y-3)$$

$$\therefore\ x-3y-4=0 \text{ 또는 } 3x+y-2=0$$

따라서 두 직선이 이루는 각의 이등분선의 방정식은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ②

0160 각의 이등분선 위의 점 $(2,\ 1)$에서 두 직선까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|4+3+a|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|4-3+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}, \qquad |7+a|=2$$

$$7+a=\pm2 \qquad \therefore\ a=-5 \text{ 또는 } a=-9$$

따라서 구하는 합은 $\quad -5+(-9)=-14$

답 **−14**

0161 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 $\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{PS}}$이므로

$$\frac{|2x+y-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|x+2y-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

$$|2x+y-2|=|x+2y-2|$$

$$2x+y-2=\pm(x+2y-2)$$

$$\therefore\ x-y=0 \text{ 또는 } 3x+3y-4=0$$

답 $\boldsymbol{x-y=0}$ **또는** $\boldsymbol{3x+3y-4=0}$

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 028~031쪽

0162 주어진 직선의 기울기는

$$\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

점 $(\sqrt{3},\ -1)$을 지나고 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$인 직선의 방정식은

$$y-(-1)=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\sqrt{3}) \qquad \therefore\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2$$

이 직선이 점 $(k,\ 4)$를 지나므로

$$4=\frac{\sqrt{3}}{3}k-2 \qquad \therefore\ k=6\sqrt{3}$$

답 ④

0163 주어진 직선의 y절편은 3이고 x절편을 a라 하면 이 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 9이므로

$$\frac{1}{2}\times|a|\times3=9, \qquad |a|=6$$

$$\therefore\ a=\pm6$$

이때 직선이 제3사분면을 지나지 않으므로 $\quad a=6$

따라서 x절편이 6, y절편이 3인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1 \qquad \therefore\ y=-\frac{1}{2}x+3$$

즉 구하는 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다.

답 $\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$

RPM 비법 노트

x절편이 a, y절편이 b인 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times|a|\times|b|=\frac{|ab|}{2} \quad (\text{단, } ab\neq0)$$

0164 ㄱ. 세 점 $\mathrm{A}(-1,\ 5),\ \mathrm{B}(2,\ 9),\ \mathrm{C}(4,\ 15)$에서

$$(\text{직선 AB의 기울기})=\frac{9-5}{2-(-1)}=\frac{4}{3},$$

$$(\text{직선 BC의 기울기})=\frac{15-9}{4-2}=3$$

이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있지 않다.

ㄴ. 세 점 $\mathrm{A}(1,\ -1),\ \mathrm{B}(3,\ -5),\ \mathrm{C}(4,\ -7)$에서

$$(\text{직선 AB의 기울기})=\frac{-5-(-1)}{3-1}=-2,$$

$$(\text{직선 BC의 기울기})=\frac{-7-(-5)}{4-3}=-2$$

이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

ㄷ. 세 점 $\mathrm{A}(2,\ 0),\ \mathrm{B}(3,\ 4),\ \mathrm{C}(4,\ 6)$에서

$$(\text{직선 AB의 기울기})=\frac{4-0}{3-2}=4,$$

$$(\text{직선 BC의 기울기})=\frac{6-4}{4-3}=2$$

이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있지 않다.

이상에서 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있는 것은 ㄴ뿐이다.

답 ②

0165 $\triangle APC : \triangle PBC = 2 : 1$이므로

$\overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 1$

즉 점 P는 $\overline{AB}$를 $2 : 1$로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2\times 5+1\times(-1)}{2+1}, \frac{2\times(-1)+1\times 1}{2+1}\right),$$

즉 $\left(3, -\frac{1}{3}\right)$

따라서 두 점 C, P를 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{-\frac{1}{3}-3}{3-4}(x-4)$$

$\therefore 10x-3y-31=0$

답 ③

0166 $ax+by+c=0$에서

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

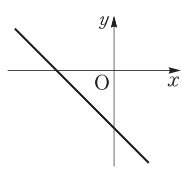
주어진 그림에서 이 직선의 기울기는 음수, y절편은 양수이므로

$-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}>0$ $\quad\therefore ac<0$

$bx-cy+a=0$에서 $\quad y=\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}$

이때 $\frac{b}{c}<0$, $\frac{a}{c}<0$이므로 이 직선의 기울기와 y절편은 모두 음수이다.

따라서 직선 $bx-cy+a=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제 1 사분면을 지나지 않는다.



답 ①

0167 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x-2y+4)k+(-x-y+a)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$x-2y+4=0$, $x+y-a=0$

이때 점 $(2, b)$가 두 직선 $x-2y+4=0$, $x+y-a=0$의 교점이므로

$2-2b+4=0$, $2+b-a=0$

$\therefore a=5, b=3$

$\therefore a+b=8$

답 ⑤

0168 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$5x+15y-7+k(x+5y-11)=0$ (k는 실수) $\cdots$ ㉠

이라 하면 직선 ㉠이 점 $(5, -6)$을 지나므로

$25-90-7+k(5-30-11)=0$

$-72-36k=0 \quad\therefore k=-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$5x+15y-7-2(x+5y-11)=0$

$\therefore 3x+5y+15=0$

이 직선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(-5, 0)$, $(0, -3)$이므로 좌표축에 의하여 잘린 선분의 길이는

$\sqrt{5^2+(-3)^2}=\sqrt{34}$

답 ①

0169 직선 $x+ay+1=0$이 직선 $3x+by+1=0$과 수직이므로

$1\times 3+a\times b=0$

$\therefore ab=-3$

또 직선 $x+ay+1=0$이 직선 $x-(b+2)y-1=0$과 평행하므로

$$\frac{1}{1}=\frac{a}{-(b+2)}\neq\frac{1}{-1}$$

$\frac{1}{1}=\frac{a}{-(b+2)}$에서

$-b-2=a \quad\therefore a+b=-2$

$$\begin{aligned}\therefore a^3+b^3&=(a+b)^3-3ab(a+b)\\&=(-2)^3-3\times(-3)\times(-2)\\&=-8-18=-26\end{aligned}$$

답 **-26**

0170 ㄱ. $a=0$이면 $\quad l: y=-2,\ m: x=0$

따라서 직선 l은 x축에 평행하고 직선 m은 y축이므로 두 직선 l, m은 수직이다. (참)

ㄴ. $4x-ay+2a=0$을 a에 대하여 정리하면

$4x-a(y-2)=0$

이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$x=0$, $y=2$

따라서 직선 m은 a의 값에 관계없이 점 $(0, 2)$를 항상 지난다. (거짓)

ㄷ. 두 직선 l, m이 평행하려면

$$\frac{a}{4}=\frac{-1}{-a}\neq\frac{-2}{2a}$$

$\frac{a}{4}=\frac{-1}{-a}$에서 $\quad a^2=4 \quad\therefore a=\pm 2$

이때 0이 아닌 모든 실수 a에 대하여 $\frac{-1}{-a}\neq\frac{-2}{2a}$, 즉 $\frac{1}{a}\neq-\frac{1}{a}$이므로 두 직선 l, m이 평행하도록 하는 실수 a의 값은 -2, 2의 2개이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0171 $\angle ABO=\angle BCO$에서

$$\begin{aligned}\angle ABC&=\angle ABO+\angle OBC\\&=\angle BCO+\angle OBC=90^\circ\end{aligned}$$

이므로 두 직선 l, m은 수직이다.

이때 직선 l의 기울기는

$$\frac{6-0}{0-(-8)}=\frac{3}{4}$$

이므로 직선 m의 기울기는 $-\frac{4}{3}$이다.

또 직선 m은 점 $B(-8, 0)$을 지나므로 직선 m의 방정식은

$$y=-\frac{4}{3}(x+8)$$

$\therefore y=-\frac{4}{3}x-\frac{32}{3}$

$\therefore C\left(0, -\frac{32}{3}\right)$

답 $\left(\mathbf{0}, -\frac{\mathbf{32}}{\mathbf{3}}\right)$

0172 점 B의 좌표를 (a, b)라 하자.

직선 $x+2y-4=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+2$의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 AB의 기울기는 2이다.

즉 $\frac{b-3}{a-2}=2$이므로 $\quad 2a-b=1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또 직선 $x+2y-4=0$은 선분 AB의 중점 $\left(\frac{a+2}{2}, \frac{b+3}{2}\right)$을 지나므로

$$\frac{a+2}{2}+2\times\frac{b+3}{2}-4=0$$

$\therefore a+2b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{2}{5}, b=-\frac{1}{5}$

따라서 점 B의 좌표는 $\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$이다. 답 $\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$

0173 □ABCD는 마름모이므로 두 점 B, D를 지나는 직선 l은 선분 AC의 수직이등분선이다.

직선 AC의 기울기는 $\quad \frac{1-5}{9-1}=-\frac{1}{2}$

선분 AC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+9}{2}, \frac{5+1}{2}\right)$, 즉 $(5, 3)$

따라서 직선 l은 점 $(5, 3)$을 지나고 기울기가 2인 직선이므로 그 방정식은

$y-3=2(x-5) \quad \therefore 2x-y-7=0$

즉 $a=-1, b=-7$이므로 $\quad ab=7$ 답 ③

0174 두 직선 $4x+y-3=0$, $3x-2y+5=0$은 한 점에서 만나므로 직선 $ax+2y+4=0$이 두 직선 $4x+y-3=0$, $3x-2y+5=0$ 중 하나와 평행해야 한다.

(i) 직선 $ax+2y+4=0$이 직선 $4x+y-3=0$과 평행한 경우

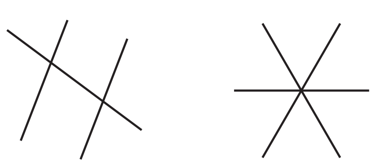
$\frac{4}{a}=\frac{1}{2}\neq\frac{-3}{4}$이므로 $\quad a=8$

(ii) 직선 $ax+2y+4=0$이 직선 $3x-2y+5=0$과 평행한 경우

$\frac{3}{a}=\frac{-2}{2}\neq\frac{5}{4}$이므로 $\quad a=-3$

(i), (ii)에서 $\quad a=-3$ 또는 $a=8$ 답 **−3, 8**

0175 서로 다른 세 직선이 좌표평면을 여섯 부분으로 나누려면 다음 그림과 같이 두 직선만 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.



$3x-y+5=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$x+2y-3=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

$ax+y+7=0 \quad \cdots\cdots$ ㉢

이때 직선 ㉠과 ㉡은 평행하지 않다.

(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 평행한 경우

$\frac{a}{3}=\frac{1}{-1}\neq\frac{7}{5}$이므로 $\quad a=-3$

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 평행한 경우

$\frac{a}{1}=\frac{1}{2}\neq\frac{7}{-3}$이므로 $\quad a=\frac{1}{2}$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad x=-1, y=2$

따라서 직선 ㉢이 점 $(-1, 2)$를 지나야 하므로

$-a+2+7=0 \quad \therefore a=9$

이상에서 $\quad a=-3$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=9$

따라서 구하는 모든 a의 값의 합은

$-3+\frac{1}{2}+9=\frac{13}{2}$ 답 $\frac{13}{2}$

0176 두 직선 $x+y+1=0$, $2x-y=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x+y+1+k(2x-y)=0$ (k는 실수)

이라 하면 $\quad (2k+1)x+(1-k)y+1=0$

이 직선과 원점 사이의 거리는

$$\frac{|1|}{\sqrt{(2k+1)^2+(1-k)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5k^2+2k+2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5\left(k+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{9}{5}}}$$

따라서 $5\left(k+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{9}{5}$가 최소일 때, 즉 $k=-\frac{1}{5}$일 때 거리가 최대이므로 구하는 최댓값은

$\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{5}}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ 답 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

0177 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x+y-3+k(x-y-1)=0$ (k는 실수)

이라 하면 $\quad (k+1)x+(1-k)y-k-3=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

점 $(5, 3)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|5(k+1)+3(1-k)-k-3|}{\sqrt{(k+1)^2+(1-k)^2}}=2$$

$\therefore |k+5|=2\sqrt{2k^2+2}$

양변을 제곱하면 $\quad k^2+10k+25=8k^2+8$

$7k^2-10k-17=0, \quad (k+1)(7k-17)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=\frac{17}{7}$

이것을 ㉠에 대입하면

$2y-2=0$ 또는 $\frac{24}{7}x-\frac{10}{7}y-\frac{38}{7}=0$

$\therefore y=1$ 또는 $12x-5y-19=0$

이때 직선이 제2사분면을 지나지 않으므로 구하는 직선의 방정식은 $12x-5y-19=0$이다.

답 $\mathbf{12x-5y-19=0}$

다른 풀이 $x+y-3=0$, $x-y-1=0$을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=1$

이므로 두 직선의 교점의 좌표는 $(2, 1)$

점 $(2, 1)$을 지나는 직선의 방정식을

$y=m(x-2)+1$, 즉 $mx-y-2m+1=0$ …… ㉡

이라 하면 이 직선과 점 $(5, 3)$ 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|5m-3-2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2 \qquad \therefore |3m-2|=2\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면 $9m^2-12m+4=4m^2+4$

$5m^2-12m=0$, $m(5m-12)=0$

$\therefore m=0$ 또는 $m=\frac{12}{5}$

이것을 ㉡에 대입하면

$-y+1=0$ 또는 $\frac{12}{5}x-y-\frac{19}{5}=0$

$\therefore y=1$ 또는 $12x-5y-19=0$

0178 직선 $3x+4y=8$ 위의 점 $(0, 2)$와 직선 $3x+4y=k$, 즉 $3x+4y-k=0$ 사이의 거리가 4이므로

$$\frac{|0+8-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4, \qquad |8-k|=20$$

$8-k=\pm20$ $\qquad \therefore k=-12$ 또는 $k=28$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $-12+28=16$

답 **16**

0179 $\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$

직선 AB의 방정식은

$y-1=\frac{2-1}{3-1}(x-1)$

$\therefore x-2y+1=0$

점 $C(2, k)$와 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|2-2k+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|3-2k|}{\sqrt{5}}$$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{5}{2}$이므로

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{|3-2k|}{\sqrt{5}}=\frac{5}{2}$$

$|3-2k|=5$, $3-2k=\pm5$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=4$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-1+4=3$

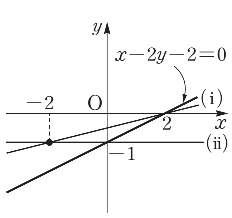
답 ②

0180 $mx-y+2m-1=0$에서

$(x+2)m-(y+1)=0$ …… ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 점 $(-2, -1)$을 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 $(2, 0)$을 지날 때

$4m-1=0$

$\therefore m=\frac{1}{4}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0, -1)$을 지날 때

$2m=0$ $\qquad \therefore m=0$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$0<m<\frac{1}{4}$

답 $\boldsymbol{0<m<\frac{1}{4}}$

0181 주어진 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$라 하면 점 P에서 두 직선까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|x+4y+3|}{\sqrt{1^2+4^2}}=\frac{|4x+y+12|}{\sqrt{4^2+1^2}}$$

$|x+4y+3|=|4x+y+12|$

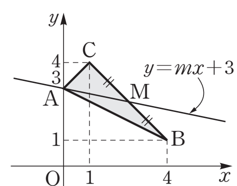
$x+4y+3=\pm(4x+y+12)$

$\therefore x-y+3=0$ 또는 $x+y+3=0$

이 중 기울기가 양수인 것은 $x-y+3=0$이다.

답 ③

0182 직선 $y=mx+3$은 m의 값에 관계없이 점 $A(0, 3)$을 지나므로 이 직선이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 오른쪽 그림과 같이 선분 BC의 중점을 지나야 한다. … 1단계



선분 BC의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

$\left(\frac{4+1}{2}, \frac{1+4}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ … 2단계

따라서 직선 $y=mx+3$이 점 M을 지나야 하므로

$\frac{5}{2}=\frac{5}{2}m+3$ $\qquad \therefore m=-\frac{1}{5}$ … 3단계

답 $\boldsymbol{-\frac{1}{5}}$

	채점 요소	비율
1단계	직선 $y=mx+3$이 $\overline{BC}$의 중점을 지남을 알기	50 %
2단계	$\overline{BC}$의 중점의 좌표 구하기	20 %
3단계	m의 값 구하기	30 %

0183 점 A의 좌표를 $(a, 2a)$, 점 B의 좌표를 $(2b, b)$라 하면 삼각형 AOB의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{a+2b}{3}, \frac{2a+b}{3}\right)$

즉 $\frac{a+2b}{3}=2$, $\frac{2a+b}{3}=3$이므로 $a=4$, $b=1$

$\therefore A(4, 8)$, $B(2, 1)$ … 1단계

따라서 두 점 A, B를 지나는 직선 l의 기울기는

$\frac{1-8}{2-4}=\frac{7}{2}$

이므로 직선 l과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{2}{7}$이다. … 2단계

즉 점 $G(2, 3)$을 지나고 기울기가 $-\frac{2}{7}$인 직선의 방정식은

$y-3=-\frac{2}{7}(x-2)$

$\therefore y=-\frac{2}{7}x+\frac{25}{7}$ … 3단계

답 $\boldsymbol{y=-\frac{2}{7}x+\frac{25}{7}}$

채점 요소		비율
1단계	두 점 A, B의 좌표 구하기	30 %
2단계	직선 l과 수직인 직선의 기울기 구하기	30 %
3단계	점 G를 지나고 직선 l과 수직인 직선의 방정식 구하기	40 %

0184 $x-y+a=0$ ...... ㉠

$2x-y+1=0$ ...... ㉡

$3x-2y-a=0$ ...... ㉢

세 직선 ㉠, ㉡, ㉢ 중 어느 두 직선도 평행하지 않으므로 세 직선이 삼각형을 이루지 않으려면 한 점에서 만나야 한다. ··· 1단계

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=a-1,\ y=2a-1$

따라서 직선 ㉢이 점 $(a-1,\ 2a-1)$을 지나야 하므로

$3(a-1)-2(2a-1)-a=0$

$-2a-1=0 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$ ··· 2단계

답 $-\frac{1}{2}$

채점 요소		비율
1단계	세 직선의 위치 관계 구하기	40 %
2단계	a의 값 구하기	60 %

0185 점 A$(1,\ 1)$과 직선 $2x-y+4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2-1+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ ··· 1단계

정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a라 하면

$\frac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{5} \qquad \therefore a=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{15}}{3}$ ··· 2단계

따라서 정삼각형 ABC의 한 변의 길이가 $\frac{2\sqrt{15}}{3}$이므로 구하는 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{2\sqrt{15}}{3}\right)^2=\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ··· 3단계

답 $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

채점 요소		비율
1단계	점 A와 직선 $2x-y+4=0$ 사이의 거리 구하기	50 %
2단계	△ABC의 한 변의 길이 구하기	30 %
3단계	△ABC의 넓이 구하기	20 %

0186 전략 점 P가 선분 AB를 1 : 2 또는 2 : 1로 내분하는 점임을 이용한다.

선분 AB 위의 점 P에서 만나는 두 직선 l, m에 의하여 삼각형 OAB의 넓이가 삼등분되므로 직선 l에 의하여 삼각형 OAB는 넓이가 $\frac{1}{3}$△OAB, $\frac{2}{3}$△OAB인 두 삼각형으로 나누어진다.

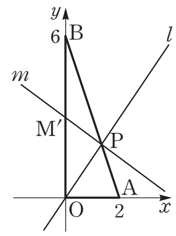
따라서 점 P는 선분 AB를 1 : 2 또는 2 : 1로 내분하는 점이다.

(i) 점 P가 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 경우

점 P의 좌표는

$\left(\frac{1\times0+2\times2}{1+2},\ \frac{1\times6+2\times0}{1+2}\right)$,

즉 $\left(\frac{4}{3},\ 2\right)$



따라서 직선 l의 기울기는

$\frac{2}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{2}$

또 직선 m은 삼각형 OPB의 넓이를 이등분하므로 직선 m과 선분 OB가 만나는 점을 M′이라 하면 점 M′은 선분 OB의 중점이다.

즉 점 M′의 좌표가 $(0,\ 3)$이므로 직선 m의 기울기는

$\frac{2-3}{\frac{4}{3}-0}=-\frac{3}{4}$

따라서 두 직선 l, m의 기울기의 합은

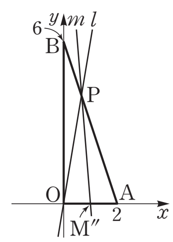
$\frac{3}{2}+\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$

(ii) 점 P가 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 경우

점 P의 좌표는

$\left(\frac{2\times0+1\times2}{2+1},\ \frac{2\times6+1\times0}{2+1}\right)$,

즉 $\left(\frac{2}{3},\ 4\right)$



따라서 직선 l의 기울기는

$\frac{4}{\frac{2}{3}}=6$

또 직선 m은 삼각형 OAP의 넓이를 이등분하므로 직선 m과 선분 OA가 만나는 점을 M″이라 하면 점 M″은 선분 OA의 중점이다.

즉 점 M″의 좌표가 $(1,\ 0)$이므로 직선 m의 기울기는

$\frac{4-0}{\frac{2}{3}-1}=-12$

따라서 두 직선 l, m의 기울기의 합은

$6+(-12)=-6$

(i), (ii)에서 두 직선 l, m의 기울기의 합의 최댓값은 $\frac{3}{4}$이다.

답 ①

0187 전략 먼저 세 교점 A, B, C의 좌표를 구한다.

$x+2y-3=0$ ...... ㉠

$y=1$ ...... ㉡

$x-y+6=0$ ...... ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$x=-3,\ y=3 \qquad \therefore$ A$(-3,\ 3)$

㉡을 ㉠, ㉢에 각각 대입하면

$x-1=0,\ x+5=0 \qquad \therefore x=1,\ x=-5$

$\therefore$ B$(-5,\ 1)$, C$(1,\ 1)$

한편 삼각형의 외심은 각 변의 수직이등분선의 교점이다.

변 BC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-5+1}{2}, \frac{1+1}{2}\right)$, 즉 $(-2, 1)$

따라서 변 BC의 수직이등분선의 방정식은

$x=-2$ ⋯⋯ ㉣

변 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-3-5}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$, 즉 $(-4, 2)$

또 직선 AB, 즉 $x-y+6=0$의 기울기는 1이므로 변 AB의 수직이등분선은 기울기가 -1이다.

따라서 변 AB의 수직이등분선의 방정식은

$y-2=-(x+4)$

$\therefore y=-x-2$ ⋯⋯ ㉤

㉣을 ㉤에 대입하면 $y=0$

즉 삼각형 ABC의 외심의 좌표는 $(-2, 0)$

점 $(-2, 0)$과 직선 $x-y+6=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-2-0+6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ 답 $\mathbf{2\sqrt{2}}$

다른 풀이 삼각형 ABC의 외심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(-3-a)^2+(3-b)^2=(-5-a)^2+(1-b)^2$

$a^2+6a+b^2-6b+18=a^2+10a+b^2-2b+26$

$\therefore a+b=-2$ ⋯⋯ ㉥

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(-5-a)^2+(1-b)^2=(1-a)^2+(1-b)^2$

$a^2+10a+25=a^2-2a+1$

$\therefore a=-2$

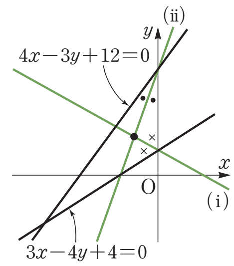
이것을 ㉥에 대입하면 $-2+b=-2$

$\therefore b=0$

따라서 삼각형 ABC의 외심의 좌표는 $(-2, 0)$이다.

0188 **전략** 삼각형의 내심은 세 내각의 이등분선의 교점임을 이용한다.

두 직선 $3x-4y+4=0$, $4x-3y+12=0$과 y축으로 둘러싸인 삼각형은 오른쪽 그림과 같다.



이때 삼각형의 내심은 세 내각의 이등분선의 교점이므로

$\frac{|3a-4b+4|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$

$=\frac{|4a-3b+12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=|a|$

(i) $\frac{|3a-4b+4|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=|a|$에서

$|3a-4b+4|=5|a|$

$3a-4b+4=\pm 5a$

$\therefore a+2b-2=0$ 또는 $2a-b+1=0$

이때 위의 그림에서 각의 이등분선의 기울기가 음수이므로

$a+2b-2=0$ ⋯⋯ ㉠

(ii) $\frac{|4a-3b+12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=|a|$에서

$|4a-3b+12|=5|a|$

$4a-3b+12=\pm 5a$

$\therefore a+3b-12=0$ 또는 $3a-b+4=0$

이때 위의 그림에서 각의 이등분선의 기울기가 양수이므로

$3a-b+4=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\frac{6}{7}$, $b=\frac{10}{7}$

$\therefore \frac{a}{b}=-\frac{3}{5}$ 답 $\mathbf{-\frac{3}{5}}$

02 직선의 방정식

03 원의 방정식

교과서 문제 정복하기

본책 033쪽

0189 답 중심의 좌표: $(4, 1)$, 반지름의 길이: 5

0190 답 중심의 좌표: $(0, 3)$, 반지름의 길이: 3

0191 $x^2+y^2-4x=0$에서 $\quad (x-2)^2+y^2=4$
따라서 중심의 좌표는 $(2, 0)$, 반지름의 길이는 2이다.
답 중심의 좌표: $(2, 0)$, 반지름의 길이: 2

0192 $x^2+y^2-2x-6y+8=0$에서
$(x-1)^2+(y-3)^2=2$
따라서 중심의 좌표는 $(1, 3)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이다.
답 중심의 좌표: $(1, 3)$, 반지름의 길이: $\sqrt{2}$

0193 중심의 좌표가 $(2, 2)$이고 반지름의 길이가 1인 원이므로 $\quad (x-2)^2+(y-2)^2=1$
답 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$

0194 중심의 좌표가 $(3, -2)$이고 반지름의 길이가 2인 원이므로 $\quad (x-3)^2+(y+2)^2=4$
답 $(x-3)^2+(y+2)^2=4$

0195 답 $x^2+y^2=9$

0196 답 $(x-2)^2+(y+1)^2=25$

0197 반지름의 길이를 r라 하면 중심이 점 $(-3, 2)$이므로
$(x+3)^2+(y-2)^2=r^2$
이 원이 점 $(-2, 0)$을 지나므로
$1^2+(-2)^2=r^2 \quad \therefore r^2=5$
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x+3)^2+(y-2)^2=5$ 답 $(x+3)^2+(y-2)^2=5$

0198 답 $(x+2)^2+(y-3)^2=9$

0199 답 $(x-4)^2+(y+1)^2=16$

0200 답 $(x+2)^2+(y+2)^2=4$

0201 $x-y+3=0$에서 $\quad y=x+3$
$y=x+3$을 $x^2+y^2=36$에 대입하면
$x^2+(x+3)^2=36 \quad \therefore 2x^2+6x-27=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4}=3^2-2\times(-27)=63>0$$
따라서 원 C와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다.
답 서로 다른 두 점에서 만난다.

0202 $x-2y-1=0$에서 $\quad x=2y+1$
$x=2y+1$을 $x^2+y^2+4x-2y+4=0$에 대입하면
$(2y+1)^2+y^2+4(2y+1)-2y+4=0$
$\therefore 5y^2+10y+9=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4}=5^2-5\times9=-20<0$$
따라서 원 C와 직선 l은 만나지 않는다. 답 만나지 않는다.

0203 원의 중심 $(1, 2)$와 직선 $2x-y+5=0$ 사이의 거리는
$$\frac{|2-2+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$
이때 원의 반지름의 길이가 5이고 $\sqrt{5}<5$이므로 원 C와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다.
따라서 교점의 개수는 2이다. 답 2

0204 $x^2+y^2-8x+6y+9=0$에서
$(x-4)^2+(y+3)^2=16$
원의 중심 $(4, -3)$과 직선 $3x+y+11=0$ 사이의 거리는
$$\frac{|12-3+11|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{20}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10}$$
이때 원의 반지름의 길이가 4이고 $2\sqrt{10}>4$이므로 원 C와 직선 l은 만나지 않는다.
즉 교점의 개수는 0이다. 답 0

0205 $y=2x\pm\sqrt{5}\times\sqrt{2^2+1} \quad \therefore y=2x\pm5$
답 $y=2x+5$, $y=2x-5$

0206 답 $x+\sqrt{3}y=4$

0207 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-6x-8y+9)=0$
$\therefore 6x+8y-13=0$ 답 $6x+8y-13=0$

0208 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$x^2+y^2-4y+k(x^2+y^2-2x)=0$ (단, $k\neq-1$) ...... ㉠
이 원이 점 $(3, 0)$을 지나므로
$9+3k=0 \quad \therefore k=-3$
$k=-3$을 ㉠에 대입하면
$x^2+y^2-4y-3(x^2+y^2-2x)=0$
$-2x^2-2y^2+6x-4y=0$
$\therefore x^2+y^2-3x+2y=0$ 답 $x^2+y^2-3x+2y=0$

유형 익히기

● 본책 034~043쪽

0209 중심이 x축 위에 있으므로 원의 방정식을

$(x-a)^2+y^2=r^2$

이라 하면 이 원이 두 점 $(0,\ -4)$, $(1,\ 3)$을 지나므로

$a^2+16=r^2$, $(1-a)^2+9=r^2$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-3$, $r^2=25$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 5이다. 답 ④

0210 원 $(x-3)^2+(y+2)^2=1$의 중심의 좌표가 $(3,\ -2)$이므로 이 원과 중심이 같은 원의 방정식을

$(x-3)^2+(y+2)^2=r^2$

이라 하면 이 원이 점 $(5,\ 1)$을 지나므로

$r^2=(5-3)^2+(1+2)^2=13$

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi r^2=\pi\times13=13\pi$ 답 13π

0211 중심이 y축 위에 있으므로 원의 방정식을

$x^2+(y-b)^2=r^2$

이라 하면 이 원이 두 점 $(-1,\ 2)$, $(3,\ 4)$를 지나므로

$1+(2-b)^2=r^2$, $9+(4-b)^2=r^2$

두 식을 연립하여 풀면 $b=5$, $r^2=10$

따라서 원의 방정식은 $x^2+(y-5)^2=10$

ㄱ. 중심의 좌표는 $(0,\ 5)$이다. (참)

ㄴ. $3^2+(6-5)^2=10$이므로 원은 점 $(3,\ 6)$을 지난다. (참)

ㄷ. 넓이는 10π이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

0212 원의 중심 $(a,\ b)$가 직선 $y=2x-1$ 위에 있으므로

$b=2a-1$ …… ㉠

따라서 원의 방정식을

$(x-a)^2+(y-2a+1)^2=r^2$

이라 하면 이 원이 두 점 $(1,\ 4)$, $(3,\ 2)$를 지나므로

$(1-a)^2+(4-2a+1)^2=r^2$, $(3-a)^2+(2-2a+1)^2=r^2$

$\therefore 5a^2-22a+26=r^2$, $5a^2-18a+18=r^2$

두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $r^2=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=3$

$\therefore a+b+r^2=7$ 답 7

다른 풀이 원의 중심 $(a,\ 2a-1)$에서 두 점 $(1,\ 4)$, $(3,\ 2)$까지의 거리가 같으므로

$(a-1)^2+(2a-1-4)^2=(a-3)^2+(2a-1-2)^2$

$5a^2-22a+26=5a^2-18a+18$

$-4a=-8 \qquad \therefore a=2$

0213 원의 중심의 좌표는 $\overline{AB}$의 중점의 좌표와 같으므로

$a=\dfrac{-1+5}{2}=2$, $b=\dfrac{2+6}{2}=4$

원의 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(5+1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{13}$

$\therefore r^2=13$

$\therefore a+b+r^2=19$ 답 19

0214 원의 중심의 좌표는

$\left(\dfrac{2+4}{2},\ \dfrac{4-2}{2}\right)$, 즉 $(3,\ 1)$

원의 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\sqrt{(4-2)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{10}$

따라서 원 C의 방정식은

$(x-3)^2+(y-1)^2=10$

⑤ $(6-3)^2+(2-1)^2=10$이므로 점 $(6,\ 2)$는 원 C 위의 점이다.

답 ⑤

0215 $4x-5y+40=0$에 $y=0$을 대입하면

$4x+40=0 \qquad \therefore x=-10$

$4x-5y+40=0$에 $x=0$을 대입하면

$-5y+40=0 \qquad \therefore y=8$

$\therefore \mathrm{P}(-10,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ 8)$ … 1단계

두 점 P, Q를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는

$\left(\dfrac{-10+0}{2},\ \dfrac{0+8}{2}\right)$, 즉 $(-5,\ 4)$ … 2단계

원의 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\overline{PQ}=\dfrac{1}{2}\sqrt{10^2+8^2}=\sqrt{41}$ … 3단계

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+5)^2+(y-4)^2=41$ … 4단계

답 $(x+5)^2+(y-4)^2=41$

채점 요소		비율
1단계	점 P, Q의 좌표 구하기	20 %
2단계	원의 중심의 좌표 구하기	30 %
3단계	원의 반지름의 길이 구하기	30 %
4단계	원의 방정식 구하기	20 %

0216 $x^2+y^2-4x+ay-3=0$에서

$(x-2)^2+\left(y+\dfrac{a}{2}\right)^2=\dfrac{a^2}{4}+7$

원의 반지름의 길이가 4이므로

$\dfrac{a^2}{4}+7=16, \qquad a^2=36 \qquad \therefore a=\pm6$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(2,\ -3)$ 또는 $(2,\ 3)$이므로 원점과 원의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ 답 $\sqrt{13}$

0217 ① $x^2+y^2+6x=0$에서

$(x+3)^2+y^2=9$

② $x^2+y^2+2x-8y-8=0$에서

$(x+1)^2+(y-4)^2=25$

③ $x^2+y^2+x+y+1=0$에서

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$

④ $x^2+y^2+4x+2y-1=0$에서

$(x+2)^2+(y+1)^2=6$

⑤ $x^2+y^2-2x+4y=0$에서

$(x-1)^2+(y+2)^2=5$

따라서 원의 방정식이 아닌 것은 ③이다. 답 ③

0218 $x^2+y^2+6x-4y+1=0$에서

$(x+3)^2+(y-2)^2=12$ ...... ㉠

$x^2+y^2+2bx=0$에서

$(x+b)^2+y^2=b^2$ ...... ㉡

원 ㉠의 중심의 좌표는 $(-3, 2)$, 원 ㉡의 중심의 좌표는 $(-b, 0)$이고 직선 $ax+y+4=0$이 두 원 ㉠, ㉡의 넓이를 동시에 이등분하려면 두 원의 중심을 모두 지나야 하므로

$-3a+2+4=0$, $-ab+4=0$ $\therefore a=2, b=2$

$\therefore a+b=4$ 답 4

0219 $x^2+y^2+2kx-k^2-6k-4=0$에서

$(x+k)^2+y^2=2k^2+6k+4$

이 방정식이 반지름의 길이가 2 이하인 원을 나타내려면

$0<\sqrt{2k^2+6k+4}\le 2$, $0<2k^2+6k+4\le 4$

$\therefore 0<k^2+3k+2\le 2$

(i) $k^2+3k+2>0$에서 $(k+2)(k+1)>0$

$\therefore k<-2$ 또는 $k>-1$ ...... ㉠

(ii) $k^2+3k+2\le 2$에서 $k^2+3k\le 0$

$k(k+3)\le 0$ $\therefore -3\le k\le 0$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $-3\le k<-2$ 또는 $-1<k\le 0$

답 $-3\le k<-2$ 또는 $-1<k\le 0$

0220 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a-3)^2+(b-4)^2=(a-2)^2+(b+1)^2$

$\therefore a+5b=10$ ...... ㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a-2)^2+(b+1)^2=(a+3)^2+b^2$

$\therefore 5a-b=-2$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0, b=2$

즉 원의 중심은 $P(0, 2)$이므로 원의 반지름의 길이는

$r=\overline{PA}=\sqrt{(0-3)^2+(2-4)^2}=\sqrt{13}$

$\therefore a^2+b^2+r^2=0+4+13=17$ 답 17

다른 풀이 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하면 이 원이 세 점 $A(3, 4)$, $B(2, -1)$, $C(-3, 0)$을 지나므로

$9+16+3A+4B+C=0$ ...... ㉢

$4+1+2A-B+C=0$ ...... ㉣

$9-3A+C=0$ ...... ㉤

㉤에서 $C=3A-9$ ...... ㉥

㉢, ㉣에 각각 ㉥을 대입하여 정리하면

$3A+2B+8=0$, $5A-B-4=0$

두 식을 연립하여 풀면

$A=0$, $B=-4$

$A=0$을 ㉥에 대입하면 $C=-9$

따라서 원의 방정식은

$x^2+y^2-4y-9=0$

$\therefore x^2+(y-2)^2=13$

즉 $a=0$, $b=2$, $r=\sqrt{13}$이므로

$a^2+b^2+r^2=0+4+13=17$

0221 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a+5)^2+b^2=(a-1)^2+(b-2)^2$

$\therefore 3a+b=-5$ ...... ㉠

$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a+5)^2+b^2=(a-3)^2+(b-4)^2$

$\therefore 2a+b=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5$, $b=10$

즉 원의 중심은 $P(-5, 10)$이므로 반지름의 길이는

$\overline{PA}=10$

따라서 원의 방정식은

$(x+5)^2+(y-10)^2=100$

점 $(k, 16)$이 이 원 위의 점이므로

$(k+5)^2+(16-10)^2=100$

$k^2+10k-39=0$, $(k+13)(k-3)=0$

$\therefore k=3$ ($\because k>0$) 답 ①

0222 외접원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a-1)^2+(b-2)^2=(a-2)^2+(b-1)^2$

$\therefore a=b$ ...... ㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a-2)^2+(b-1)^2=(a-3)^2+(b-1)^2$

$2a=5$ $\therefore a=\frac{5}{2}$

$a=\frac{5}{2}$를 ㉠에 대입하면 $b=\frac{5}{2}$

즉 원의 중심은 $P\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$이므로 반지름의 길이는

$$\overline{PA}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}-1\right)^2+\left(\frac{5}{2}-2\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{2}}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$$

답 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$

0223 원의 중심이 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a,\ a+1)$이라 하자.
원이 x축에 접하므로 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-a-1)^2=(a+1)^2$$

이 원이 점 $(-1,\ -1)$을 지나므로

$$(-1-a)^2+(-1-a-1)^2=(a+1)^2$$

$$(a+2)^2=0 \qquad \therefore a=-2$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+2)^2+(y+1)^2=1$$

답 $(x+2)^2+(y+1)^2=1$

0224 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 원이 x축에 접하므로 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$$

이 원이 두 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$를 지나므로

$$(1-a)^2+(1-b)^2=b^2,\ (2-a)^2+(2-b)^2=b^2$$

$$\therefore a^2-2a-2b+2=0,\ a^2-4a-4b+8=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ b=1$ 또는 $a=-2,\ b=5$
이때 원의 반지름의 길이는 $|b|$이므로 두 원의 반지름의 길이의 합은

$$1+5=6$$

답 6

0225 $x^2+y^2-6x+2ky+10=0$에서

$$(x-3)^2+(y+k)^2=k^2-1$$

따라서 이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{k^2-1}$이고 이 원이 y축에 접하므로

$$3=\sqrt{k^2-1}$$

양변을 제곱하면 $\quad 9=k^2-1, \quad k^2=10$

$$\therefore k=\pm\sqrt{10}$$

이때 원의 중심이 제 4 사분면 위에 있으므로

$$-k<0,\ 즉\ k>0 \qquad \therefore k=\sqrt{10}$$

답 $\sqrt{10}$

0226 원 $x^2+y^2+2ax-4y+b=0$이 점 $(3,\ -1)$을 지나므로

$$9+1+6a+4+b=0$$

$$\therefore 6a+b=-14 \qquad \cdots\cdots ㉠$$ … 1단계

$x^2+y^2+2ax-4y+b=0$에서

$$(x+a)^2+(y-2)^2=a^2-b+4$$ … 2단계

따라서 이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{a^2-b+4}$이고 이 원이 y축에 접하므로

$$|-a|=\sqrt{a^2-b+4}$$

양변을 제곱하면 $\quad a^2=a^2-b+4 \qquad \therefore b=4$
$b=4$를 ㉠에 대입하면 $\quad 6a+4=-14$

$$\therefore a=-3$$ … 3단계

$$\therefore a+b=1$$ … 4단계

답 1

	채점 요소	비율
1단계	원이 점 $(3,\ -1)$을 지남을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	20 %
2단계	원의 방정식을 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$의 꼴로 변형하기	20 %
3단계	a, b의 값 구하기	50 %
4단계	$a+b$의 값 구하기	10 %

0227 점 $(2,\ 1)$을 지나고 x축과 y축에 동시에 접하려면 원의 중심이 제 1 사분면 위에 있어야 하므로 반지름의 길이를 r라 하면 원의 중심의 좌표는 $(r,\ r)$이다.
따라서 원의 방정식은 $\quad (x-r)^2+(y-r)^2=r^2$
이 원이 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2, \quad r^2-6r+5=0$$

$$(r-1)(r-5)=0 \qquad \therefore r=1\ 또는\ r=5$$

따라서 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(1,\ 1)$, $(5,\ 5)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(5-1)^2+(5-1)^2}=4\sqrt{2}$$

답 $4\sqrt{2}$

0228 중심의 좌표가 $(-2,\ 2)$이고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이는 2이므로 원의 방정식은

$$(x+2)^2+(y-2)^2=4$$

이 원이 점 $(-1,\ a)$를 지나므로

$$1+(a-2)^2=4, \quad a^2-4a+1=0$$

$$\therefore a=2\pm\sqrt{3}$$

따라서 모든 a의 값의 곱은

$$(2+\sqrt{3})\times(2-\sqrt{3})=1$$

답 1

0229 원의 중심이 제 4 사분면 위에 있고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 중심의 좌표는 $(r,\ -r)$이다.
이때 원의 중심 $(r,\ -r)$가 직선 $x-y-2=0$ 위에 있으므로

$$r+r-2=0 \qquad \therefore r=1$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi\times1^2=\pi$$

답 π

0230 $x^2+y^2+4x+2ay+10-b=0$에서

$$(x+2)^2+(y+a)^2=a^2+b-6$$

따라서 이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{a^2+b-6}$이고 이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$$|-2|=|-a|=\sqrt{a^2+b-6}$$

$$\therefore a=2,\ b=6\ (\because a>0)$$

$$\therefore a+b=8$$

답 ④

0231 $x^2+y^2-4x+8y+4=0$에서

$(x-2)^2+(y+4)^2=16$

점 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$과 원의 중심 $(2,\ -4)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(-2-2)^2+(1+4)^2}=\sqrt{41}$

이때 원의 반지름의 길이가 4이므로

$M=\sqrt{41}+4,\ m=\sqrt{41}-4$

$\therefore\ Mm=(\sqrt{41}+4)\times(\sqrt{41}-4)=25$

답 ④

0232 점 $(3,\ -6)$과 원의 중심 $(0,\ 0)$ 사이의 거리는

$\sqrt{3^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$

이때 원의 반지름의 길이가 r이므로 점 $(3,\ -6)$과 원 위의 점 사이의 거리의 최댓값은

$3\sqrt{5}+r$

즉 $3\sqrt{5}+r=4\sqrt{5}$이므로

$r=\sqrt{5}$

답 $\sqrt{5}$

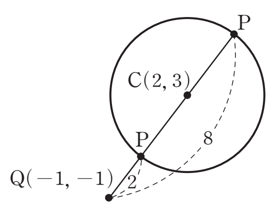
0233 원 $(x-2)^2+(y-3)^2=9$의 중심을 $\mathrm{C}(2,\ 3)$이라 하면

$\overline{\mathrm{CQ}}=\sqrt{(-1-2)^2+(-1-3)^2}=5$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로

$5-3\le\overline{\mathrm{PQ}}\le5+3$

$\therefore\ 2\le\overline{\mathrm{PQ}}\le8$



$\overline{\mathrm{PQ}}=2,\ 8$인 점 P는 각각 1개씩이고, $\overline{\mathrm{PQ}}=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$인 점 P는 각각 2개씩이므로 구하는 점 P의 개수는

$2\times1+5\times2=12$

답 **12**

0234 $\sqrt{(a+4)^2+(b-3)^2}$의 값은 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$와 점 $(-4,\ 3)$ 사이의 거리와 같다.

이때 점 P는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이고 점 $(-4,\ 3)$과 원의 중심 $(0,\ 0)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$

원의 반지름의 길이가 2이므로 점 P와 점 $(-4,\ 3)$ 사이의 거리의 최댓값은

$5+2=7$

따라서 $\sqrt{(a+4)^2+(b-3)^2}$의 최댓값도 7이다.

답 ③

0235 원의 중심 $(-1,\ 2)$와 직선 $y=2x-k$, 즉 $2x-y-k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-2-2-k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k+4|}{\sqrt{5}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\dfrac{|k+4|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5},\qquad |k+4|<5$

$-5<k+4<5\qquad \therefore\ -9<k<1$

따라서 정수 k는 $-8,\ -7,\ -6,\ \cdots,\ 0$의 9개이다.

답 ④

다른 풀이 $y=2x-k$를 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$에 대입하면

$(x+1)^2+(2x-k-2)^2=5$

$\therefore\ 5x^2-(4k+6)x+k^2+4k=0$

x에 대한 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$\dfrac{D}{4}=\{-(2k+3)\}^2-5(k^2+4k)>0$

$-k^2-8k+9>0,\qquad k^2+8k-9<0$

$(k+9)(k-1)<0$

$\therefore\ -9<k<1$

0236 $x^2+y^2+4x-6y+a=0$에서

$(x+2)^2+(y-3)^2=13-a$

원의 중심 $(-2,\ 3)$과 직선 $3x+4y+4=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-6+12+4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{13-a}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$2<\sqrt{13-a}$

양변을 제곱하면 $\quad 4<13-a$

$\therefore\ a<9$

따라서 자연수 a의 최댓값은 8이다.

답 ①

0237 원 C의 방정식은

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

원의 중심 $(1,\ 1)$과 직선 $y=mx-2$, 즉 $mx-y-2=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|m-1-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\dfrac{|m-3|}{\sqrt{m^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\dfrac{|m-3|}{\sqrt{m^2+1}}<1$

$\therefore\ |m-3|<\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$m^2-6m+9<m^2+1,\qquad -6m<-8$

$\therefore\ m>\dfrac{4}{3}$

답 $\boldsymbol{m>\dfrac{4}{3}}$

0238 원의 중심 $(2,\ 0)$과 직선 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|2+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|k-2|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\dfrac{|k-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},\qquad |k-2|=2$

$k-2=\pm2\qquad \therefore\ k=4\ (\because\ k>0)$

답 ④

다른 풀이 $y=-x+k$를 $(x-2)^2+y^2=2$에 대입하면

$(x-2)^2+(-x+k)^2=2$

$\therefore 2x^2-(2k+4)x+k^2+2=0$

x에 대한 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 접하므로

$\frac{D}{4}=\{-(k+2)\}^2-2(k^2+2)=0$

$-k^2+4k=0, \quad k(k-4)=0$

$\therefore k=4\ (\because k>0)$

0239 원의 중심 $(-2, 3)$과 직선 $x-2y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-2-6+k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|k-8|}{\sqrt{5}}$

넓이가 5π인 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|k-8|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}, \quad |k-8|=5$

$k-8=\pm5 \quad \therefore k=13$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$13+3=16$ 답 **16**

0240 x축과 y축에 동시에 접하고 중심이 제1사분면 위에 있는 원의 방정식을

$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2\ (a>0)$

이라 하면 원의 중심 (a, a)와 직선 $5x+12y-8=0$ 사이의 거리는

$\frac{|5a+12a-8|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{|17a-8|}{13}$

원의 반지름의 길이가 a이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|17a-8|}{13}=a, \quad |17a-8|=13a$

$17a-8=\pm13a \quad \therefore a=2$ 또는 $a=\frac{4}{15}$

따라서 두 원 중 큰 원의 넓이는

$\pi\times2^2=4\pi$ 답 4π

0241 $x^2+y^2-6x+2y+8=0$에서

$(x-3)^2+(y+1)^2=2$

기울기가 $\tan 45°=1$인 접선의 방정식을 $y=x+b$로 놓으면 원의 중심 $(3, -1)$과 직선 $y=x+b$, 즉 $x-y+b=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3+1+b|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|b+4|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|b+4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}, \quad |b+4|=2$

$b+4=\pm2 \quad \therefore b=-2$ 또는 $b=-6$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=x-2$ 또는 $y=x-6$ 답 $y=x-2,\ y=x-6$

0242 원의 중심 $(-1, 0)$과 직선 $y=mx-2m$, 즉 $mx-y-2m=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-m-0-2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|3m|}{\sqrt{m^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|3m|}{\sqrt{m^2+1}}>1$

$|3m|>\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$9m^2>m^2+1, \quad m^2>\frac{1}{8}$

$\therefore m<-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $m>\frac{\sqrt{2}}{4}$

따라서 m의 값이 될 수 없는 것은 ③이다. 답 ③

다른 풀이 $y=mx-2m$을 $(x+1)^2+y^2=1$에 대입하면

$(x+1)^2+(mx-2m)^2=1$

$\therefore (m^2+1)x^2-(4m^2-2)x+4m^2=0$

x에 대한 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 만나지 않아야 하므로

$\frac{D}{4}=\{-(2m^2-1)\}^2-(m^2+1)\times4m^2<0$

$-8m^2+1<0, \quad m^2>\frac{1}{8}$

$\therefore m<-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $m>\frac{\sqrt{2}}{4}$

0243 $x^2+y^2-2ax+a^2-1=0$에서

$(x-a)^2+y^2=1$

원의 중심 $(a, 0)$과 직선 $x+y-3=0$ 사이의 거리는

$\frac{|a+0-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|a-3|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|a-3|}{\sqrt{2}}>1, \quad |a-3|>\sqrt{2}$

$a-3<-\sqrt{2}$ 또는 $a-3>\sqrt{2}$

$\therefore a<3-\sqrt{2}$ 또는 $a>3+\sqrt{2}$

따라서 한 자리 자연수 a는 1, 5, 6, 7, 8, 9이므로 구하는 합은

$1+5+6+7+8+9=36$ 답 **36**

0244 두 점 $(-2, -1)$, $(4, -3)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-1-3}{2}\right)$, 즉 $(1, -2)$

반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\sqrt{(4+2)^2+(-3+1)^2}=\sqrt{10}$ … 1단계

원의 중심 $(1, -2)$와 직선 $y=3x+k$, 즉 $3x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3+2+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|k+5|}{\sqrt{10}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|k+5|}{\sqrt{10}}>\sqrt{10}, \qquad |k+5|>10$$

$k+5<-10$ 또는 $k+5>10$

$\therefore k<-15$ 또는 $k>5$ … 2단계

따라서 자연수 k의 최솟값은 6이다. … 3단계

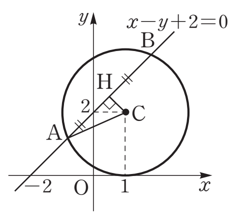
답 **6**

채점 요소	비율
1단계 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이 구하기	40 %
2단계 k의 값의 범위 구하기	50 %
3단계 자연수 k의 최솟값 구하기	10 %

0245 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$에서

$(x-1)^2+(y-2)^2=4$

오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 중심을 C(1, 2)라 하고, 점 C에서 직선 $x-y+2=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{CH}=\frac{|1-2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

직각삼각형 ACH에서

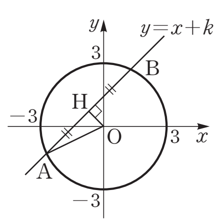
$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{7}{2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=\sqrt{14}$

답 $\sqrt{14}$

0246 오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B, 원의 중심 O(0, 0)에서 직선 $y=x+k$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

직각삼각형 AOH에서

$$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=1$$

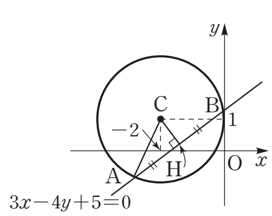
따라서 점 O(0, 0)과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1, \qquad |k|=\sqrt{2}$$

$\therefore k=\sqrt{2}$ ($\because k>0$)

답 ②

0247 오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하면 두 점 A, B를 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 것은 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원이다. … 1단계



원의 중심을 C(−2, 1)이라 하고 점 C에서 직선 $3x-4y+5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CH}=\frac{|-6-4+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$$ … 2단계

직각삼각형 CAH에서

$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}$$

$$=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$$ … 3단계

따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\times(\sqrt{3})^2=3\pi$ … 4단계

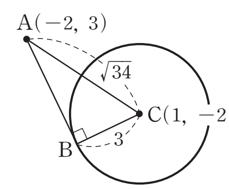
답 3π

채점 요소	비율
1단계 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원이 넓이가 최소인 원임을 알기	30 %
2단계 $\overline{CH}$의 길이 구하기	30 %
3단계 $\overline{AH}$의 길이 구하기	30 %
4단계 넓이가 최소인 원의 넓이 구하기	10 %

0248 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에서

$(x-1)^2+(y+2)^2=9$

원의 중심을 C(1, −2)라 하면 점 C와 점 A(−2, 3) 사이의 거리는



$$\overline{CA}=\sqrt{(-2-1)^2+(3+2)^2}$$

$$=\sqrt{34}$$

따라서 직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CB}^2}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{34})^2-3^2}=5$$

답 ④

0249 직각삼각형 OAP에서

$$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}$$

$$=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$$

이때 △OAP≡△OBP (RHS 합동)이므로 사각형 OAPB의 넓이는

$$2\times\triangle OAP=2\times\left(\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\right)$$

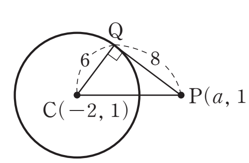
$$=4\sqrt{3}$$

답 $4\sqrt{3}$

0250 $x^2+y^2+4x-2y-31=0$에서

$(x+2)^2+(y-1)^2=36$

원의 중심을 C(−2, 1)이라 하면 점 C와 점 P(a, 1) 사이의 거리는



$\overline{CP}=|a-(-2)|=|a+2|$

따라서 접점을 Q라 하면 직각삼각형 CPQ에서

$\overline{CP}^2=\overline{CQ}^2+\overline{PQ}^2, \qquad |a+2|^2=6^2+8^2$

$(a+2)^2=100$

$a+2=\pm10$

$\therefore a=8$ ($\because a>0$)

답 ③

0251 $x^2+y^2+2x-6y+2=0$에서

$(x+1)^2+(y-3)^2=8$

원의 중심 $(-1, 3)$과 직선 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-1-3-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로

$$M=\frac{5\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}=\frac{9\sqrt{2}}{2},\ m=\frac{5\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore M+m=5\sqrt{2}$ 답 $5\sqrt{2}$

0252 원의 중심 $(1, -2)$와 직선 $y=x+3$, 즉 $x-y+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1+2+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최솟값은

$3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$ 답 ②

0253 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|k|}{5}$$ … 1단계

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은

$$\frac{|k|}{5}+2$$

즉 $\frac{|k|}{5}+2=5$이므로 $|k|=15$

$\therefore k=15\ (\because k>0)$ … 2단계

답 15

채점 요소		비율
1단계	원의 중심과 직선 사이의 거리 구하기	40 %
2단계	k의 값 구하기	60 %

0254 $x^2+y^2-10x+6y+25=0$에서

$(x-5)^2+(y+3)^2=9$

원의 중심 $(5, -3)$과 직선 $x+2y-9=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|5-6-9|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로 원 위의 점 P와 직선 사이의 거리를 d라 하면

$2\sqrt{5}-3\le d\le 2\sqrt{5}+3$

따라서 정수 d의 값은 2, 3, 4, 5, 6, 7이고, 각각의 거리에 해당하는 점 P가 2개씩 있으므로 구하는 점 P의 개수는

$6\times2=12$ 답 12

0255 직선 $x+2\sqrt{2}y-8=0$의 기울기는 $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $2\sqrt{2}$이다.

원 $x^2+y^2=9$에 접하고 기울기가 $2\sqrt{2}$인 직선의 방정식은

$y=2\sqrt{2}x\pm3\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1}$

$\therefore y=2\sqrt{2}x+9$ 또는 $y=2\sqrt{2}x-9$

따라서 두 직선의 y절편은 각각 9, -9이므로

$\overline{PQ}=|9-(-9)|=18$ 답 ④

0256 원 $x^2+y^2=5$에 접하고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y=-2x\pm\sqrt{5}\times\sqrt{(-2)^2+1}$

$\therefore y=-2x+5$ 또는 $y=-2x-5$

따라서 두 직선의 x절편은 각각 $\frac{5}{2}$, $-\frac{5}{2}$이므로 구하는 곱은

$$\frac{5}{2}\times\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{25}{4}$$ 답 ③

0257 원의 방정식을 $x^2+y^2=r^2$이라 하면 이 원이 점 $(2, -2)$를 지나므로

$r^2=2^2+(-2)^2=8$

$\therefore x^2+y^2=8$

한편 직선 $x-2y+1=0$의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 이 직선과 평행한 직선의 기울기도 $\frac{1}{2}$이다.

원 $x^2+y^2=8$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x\pm2\sqrt{2}\times\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}$$

$\therefore y=\frac{1}{2}x+\sqrt{10}$ 또는 $y=\frac{1}{2}x-\sqrt{10}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\sqrt{10}$ 또는 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\sqrt{10}$이므로

$ab^2=\frac{1}{2}\times10=5$ 답 5

0258 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$ax+by=20\quad\therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{20}{b}$

이 접선의 기울기가 3이므로

$-\frac{a}{b}=3\quad\therefore a=-3b$ …… ㉠

또 점 (a, b)는 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=20$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$ 또는 $a=3\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$

$\therefore ab=-6$ 답 ②

0259 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $(1, -3)$에서의 접선의 방정식은

$x-3y-10=0$

따라서 접선의 x절편은 10, y절편은 $-\frac{10}{3}$이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\times10\times\frac{10}{3}=\frac{50}{3}$$ 답 $\frac{50}{3}$

03 원의 방정식

0260 점 $(-4,\ a)$는 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점이므로

$16+a^2=25$, $\quad a^2=9$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

따라서 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(-4,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$-4x+3y=25$

이 접선이 점 $(b,\ -5)$를 지나므로

$-4b-15=25 \qquad \therefore b=-10$

$\therefore a+b=-7$

답 $\mathbf{-7}$

0261 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(-2,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$-2x+y=5 \qquad \therefore 2x-y+5=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x^2+y^2-6x-4y+a=0$에서

$(x-3)^2+(y-2)^2=13-a$

직선 ㉠이 이 원에 접하려면 원의 중심 $(3,\ 2)$와 직선 ㉠ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{13-a}$와 같아야 하므로

$$\frac{|6-2+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{13-a} \qquad \therefore \frac{9}{\sqrt{5}}=\sqrt{13-a}$$

양변을 제곱하면 $\quad \frac{81}{5}=13-a$

$\therefore a=-\frac{16}{5}$

답 $\mathbf{-\frac{16}{5}}$

0262 점 $(1,\ 2)$를 지나는 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y-2=m(x-1)$

$\therefore mx-y-m+2=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

원과 직선 ㉠이 접하려면 원의 중심 $(-2,\ 1)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 반지름의 길이 1과 같아야 하므로

$$\frac{|-2m-1-m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1 \qquad \therefore |1-3m|=\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$1-6m+9m^2=m^2+1, \qquad 4m^2-3m=0$

$m(4m-3)=0 \qquad \therefore m=0$ 또는 $m=\frac{3}{4}$

이것을 ㉠에 대입하면

$-y+2=0$ 또는 $\frac{3}{4}x-y+\frac{5}{4}=0$

$\therefore y=2$ 또는 $3x-4y+5=0$

답 $\mathbf{y=2,\ 3x-4y+5=0}$

0263 직선 l과 원 O의 접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 직선 l의 방정식은 $\quad x_1x+y_1y=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 직선 l이 원 O'의 넓이를 이등분하므로 원 O'의 중심 $(0,\ -2)$를 지난다.

즉 $-2y_1=1$이므로 $\quad y_1=-\frac{1}{2}$

또 점 $(x_1,\ y_1)$이 원 O 위의 점이므로 $\quad {x_1}^2+{y_1}^2=1$

$y_1=-\frac{1}{2}$을 대입하면

$${x_1}^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=1 \qquad \therefore x_1=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 ㉠에서

$$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=1 \qquad \therefore y=\pm\sqrt{3}x-2$$

이때 직선 l의 기울기가 양수이므로 직선 l의 방정식은

$y=\sqrt{3}x-2$

답 $\mathbf{y=\sqrt{3}x-2}$

다른 풀이 직선 l이 원 O'의 넓이를 이등분하므로 직선 l은 원 O'의 중심 $(0,\ -2)$를 지난다.

이때 직선 l의 기울기를 $m\ (m>0)$이라 하면 직선 l의 방정식은

$y=mx-2 \qquad \therefore mx-y-2=0$

원 O와 직선 l이 접하려면 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 1과 같아야 하므로

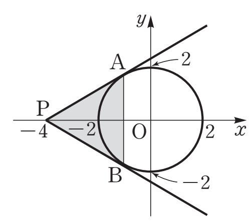
$$\frac{|-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1 \qquad \therefore 2=\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면 $\quad 4=m^2+1$

$m^2=3 \qquad \therefore m=\sqrt{3}\ (\because m>0)$

따라서 직선 l의 방정식은 $\quad y=\sqrt{3}x-2$

0264 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은



$x_1x+y_1y=4$

이 직선이 점 $\mathrm{P}(-4,\ 0)$을 지나므로

$-4x_1=4 \qquad \therefore x_1=-1$

또 점 $(x_1,\ y_1)$이 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로 $\quad {x_1}^2+{y_1}^2=4$

$x_1=-1$을 대입하면 $\quad (-1)^2+{y_1}^2=4$

$\therefore y_1=\pm\sqrt{3}$

따라서 접점의 좌표가 $(-1,\ \sqrt{3}),\ (-1,\ -\sqrt{3})$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}-(-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$

$$\therefore \triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\{-1-(-4)\}$$

$$=3\sqrt{3}$$

답 $\mathbf{3\sqrt{3}}$

0265 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$을 지나는 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$y-1=m(x-1) \qquad \therefore mx-y-m+1=0$

원과 이 직선이 접하려면 원의 중심 $(3,\ -5)$와 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 r와 같아야 하므로

$$\frac{|3m+5-m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=r \qquad \therefore |2m+6|=r\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$4m^2+24m+36=r^2m^2+r^2$

$\therefore (4-r^2)m^2+24m+36-r^2=0$

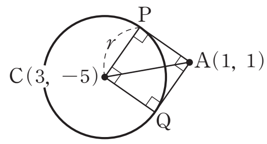
m에 대한 이 이차방정식의 두 근을 $m_1,\ m_2$라 하면 두 접선의 기울기가 $m_1,\ m_2$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$m_1m_2=\frac{36-r^2}{4-r^2}=-1, \qquad 36-r^2=r^2-4$$

$r^2=20 \qquad \therefore r=2\sqrt{5}\ (\because r>0)$

답 $\mathbf{2\sqrt{5}}$

다른 풀이 원의 중심을 $C(3, -5)$, 두 접선의 접점을 P, Q라 하면 두 접선이 서로 수직이므로 사각형 APCQ는 정사각형이다.



따라서 직각삼각형 CAP에서 $\overline{CA}^2=\overline{CP}^2+\overline{AP}^2$

$(1-3)^2+(1+5)^2=r^2+r^2$, $\quad 2r^2=40$

$r^2=20 \quad \therefore r=2\sqrt{5}\ (\because r>0)$

0266 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-8x-(x^2+y^2-6x-4y+3)=0$

$2x-4y+3=0 \quad \therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$

이 직선이 직선 $y=ax+6$과 수직이므로

$\frac{1}{2}\times a=-1 \quad \therefore a=-2$

답 -2

0267 $(x-2)^2+y^2=10$에서 $\quad x^2+y^2-4x-6=0$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-4x-6-(x^2+y^2+y-5)=0$

$4x+y+1=0 \quad \therefore y=-4x-1$

즉 $a=-4$, $b=-1$이므로 $\quad a+b=-5$

답 ①

0268 $(x+2)^2+y^2=12$에서 $\quad x^2+y^2+4x-8=0$

$(x-1)^2+(y+3)^2=10$에서 $\quad x^2+y^2-2x+6y=0$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+4x-8-(x^2+y^2-2x+6y)=0$

$\therefore 3x-3y-4=0$

이 직선과 원점 사이의 거리는

$\frac{|-4|}{\sqrt{3^2+(-3)^2}}=\frac{4}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

답 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

0269 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+x-(x^2+y^2-2x+y)=0$

$3x-y=0 \quad \therefore y=3x$

따라서 기울기가 3이고 점 $(1, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=3(x-1) \quad \therefore y=3x-2$

답 $y=3x-2$

0270 $x^2+y^2=1$에서 $\quad x^2+y^2-1=0$

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$에서 $\quad x^2+y^2-2x-2y+1=0$

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-1+k(x^2+y^2-2x-2y+1)=0$ (단, $k\neq-1$) $\quad \cdots\cdots$ ㉠

이 원이 점 $(3, 1)$을 지나므로 $\quad 9+3k=0 \quad \therefore k=-3$

$k=-3$을 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2-1-3(x^2+y^2-2x-2y+1)=0$

$\therefore x^2+y^2-3x-3y+2=0$

따라서 $A=-3$, $B=-3$, $C=2$이므로

$A+B+C=-4$

답 -4

0271 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-6x+2+k(x^2+y^2-2x-8y+4)=0$

(단, $k\neq-1$) $\quad \cdots\cdots$ ㉠

이 원이 점 $(1, 0)$을 지나므로

$-3+3k=0 \quad \therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2-6x+2+(x^2+y^2-2x-8y+4)=0$

$x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$\therefore (x-2)^2+(y-2)^2=5$

따라서 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 구하는 넓이는

$\pi\times(\sqrt{5})^2=5\pi$

답 5π

0272 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-6y+4+k(x^2+y^2+ax-4y+2)=0$

(단, $k\neq-1$) $\quad \cdots\cdots$ ㉠

이 원이 원점을 지나므로

$4+2k=0 \quad \therefore k=-2$

$k=-2$를 ㉠에 대입하면

$x^2+y^2-6y+4-2(x^2+y^2+ax-4y+2)=0$

$x^2+y^2+2ax-2y=0$

$\therefore (x+a)^2+(y-1)^2=a^2+1$

이 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{a^2+1}$이고 넓이가 10π이므로

$\pi\times(\sqrt{a^2+1})^2=10\pi$, $\quad a^2+1=10$, $\quad a^2=9$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

답 3

0273 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2-8x+4y-8+k(x^2+y^2+4x-8y-14)=0$

(단, $k\neq-1$)

$\therefore (1+k)x^2+(1+k)y^2+(4k-8)x$

$+(4-8k)y-8-14k$

$=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이 원의 중심이 y축 위에 있으므로 중심의 x좌표는 0이다.

즉 ㉠의 x의 계수가 0이므로

$4k-8=0 \quad \therefore k=2$

$k=2$를 ㉠에 대입하면 $\quad 3x^2+3y^2-12y-36=0$

$\therefore x^2+(y-2)^2=16$

따라서 원의 반지름의 길이가 4이므로 둘레의 길이는

$2\pi\times4=8\pi$

답 8π

0274 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 점 P는 원 위의 점이므로

$(a+2)^2+(b+1)^2=4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

선분 AP의 중점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\frac{a+2}{2}$, $y=\frac{b-1}{2}$

$\therefore a=2x-2$, $b=2y+1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(2x)^2+(2y+2)^2=4 \quad \therefore x^2+(y+1)^2=1$

따라서 선분 AP의 중점이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(0,\ -1)$이고 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$2\pi\times1=2\pi$ 답 2π

0275 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=16$에서

$(x+3)^2+y^2+(x-1)^2+y^2=16$

$x^2+y^2+2x-3=0\qquad\therefore\ (x+1)^2+y^2=4$ 답 ③

0276 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=3:1$이므로

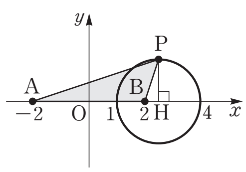
$\overline{\mathrm{AP}}=3\overline{\mathrm{BP}}\qquad\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}^2=9\overline{\mathrm{BP}}^2$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$(x+2)^2+y^2=9\{(x-2)^2+y^2\}$

$x^2+y^2-5x+4=0\qquad\therefore\ \left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{9}{4}$

따라서 점 P는 중심의 좌표가 $\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$이고 반지름의 길이가 $\dfrac{3}{2}$인 원 위의 점이다.



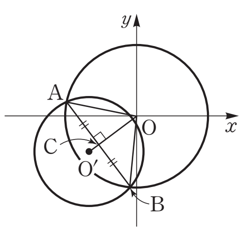
오른쪽 그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{PH}}$

이때 $\overline{\mathrm{PH}}$의 길이의 최댓값은 원의 반지름의 길이인 $\dfrac{3}{2}$이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\times\{2-(-2)\}\times\dfrac{3}{2}=3$ 답 ①

0277 오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2+4x+3y+1=0$의 중심을 각각 O, O′, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{\mathrm{OO'}}$과 $\overline{\mathrm{AB}}$의 교점을 C라 하자.



두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은 $\quad x^2+y^2-9-(x^2+y^2+4x+3y+1)=0$

$\therefore\ 4x+3y+10=0$

원 $x^2+y^2=9$의 중심 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과 공통인 현 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{OC}}=\dfrac{|10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{10}{5}=2$

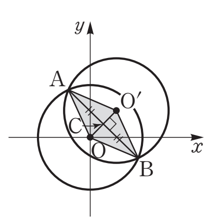
직각삼각형 ACO에서

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OC}}^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

따라서 공통인 현의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{5}$ 답 $2\sqrt{5}$

0278 오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=4$, $(x-1)^2+(y-1)^2=4$에서 $\overline{\mathrm{OO'}}$과 $\overline{\mathrm{AB}}$의 교점을 C라 하자.



이때 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{O'A}}=\overline{\mathrm{O'B}}=2$이므로 □OAO′B는 마름모이다.

한편 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$에서

$x^2+y^2-2x-2y-2=0$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-4-(x^2+y^2-2x-2y-2)=0$

$\therefore\ x+y-1=0$

원 O'의 중심 $\mathrm{O'}(1,\ 1)$과 공통인 현 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{O'C}}=\dfrac{|1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

직각삼각형 O′AC에서

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{O'A}}^2-\overline{\mathrm{O'C}}^2}$

$=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

따라서 공통인 현의 길이는

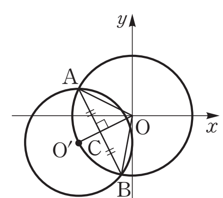
$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{14}$

이때 $\overline{\mathrm{OO'}}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로

$\square\mathrm{OAO'B}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{OO'}}$

$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{14}\times\sqrt{2}=\sqrt{7}$ 답 $\sqrt{7}$

0279 두 원의 교점을 지나는 원의 넓이가 최소가 되려면 공통인 현이 그 원의 지름이어야 한다. … 1단계



오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=5$, $(x+2)^2+(y+1)^2=4$의 중심을 각각 O, O′, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{\mathrm{OO'}}$과 $\overline{\mathrm{AB}}$의 교점을 C라 하자.

$(x+2)^2+(y+1)^2=4$에서

$x^2+y^2+4x+2y+1=0$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-5-(x^2+y^2+4x+2y+1)=0$

$\therefore\ 2x+y+3=0$ … 2단계

원 $x^2+y^2=5$의 중심 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과 공통인 현 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{OC}}=\dfrac{|3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

직각삼각형 ACO에서

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OC}}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)^2}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ … 3단계

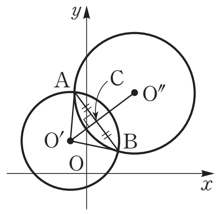
따라서 구하는 원의 넓이는

$\pi\times\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{16}{5}\pi$ … 4단계

답 $\dfrac{16}{5}\pi$

채점 요소	비율
1단계 공통인 현을 지름으로 하는 원이 넓이가 최소인 원임을 알기	30 %
2단계 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식 구하기	30 %
3단계 $\overline{\mathrm{AC}}$의 길이 구하기	30 %
4단계 넓이가 최소인 원의 넓이 구하기	10 %

0280 오른쪽 그림과 같이 두 원
$x^2+y^2+2x-4y-4=0$,
$x^2+y^2-6x-10y+2k=0$의 중심을
각각 O′, O″, 두 원의 교점을 A, B,
$\overline{O'O''}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라 하자.



$x^2+y^2+2x-4y-4=0$에서
$$(x+1)^2+(y-2)^2=9$$
즉 원의 반지름의 길이는 3이므로 $\overline{O'A}=3$
이때 공통인 현의 길이가 $2\sqrt{5}$이므로
$$\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{5}$$
따라서 직각삼각형 AO′C에서
$$\overline{O'C}=\sqrt{\overline{O'A}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$$
한편 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$$x^2+y^2+2x-4y-4-(x^2+y^2-6x-10y+2k)=0$$
$$\therefore\ 4x+3y-2-k=0$$
점 O′$(-1,\ 2)$와 공통인 현 사이의 거리는
$$\overline{O'C}=\frac{|-4+6-2-k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|k|}{5}$$
즉 $\frac{|k|}{5}=2$이므로 $|k|=10$
$$\therefore\ k=10\ (\because\ k>0)$$
답 ④

시험에 꼭 나오는 문제

● 본책 044~047쪽

0281 원의 중심 $(a,\ b)$가 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로
$$b=a+1 \quad \cdots\cdots ㉠$$
원의 방정식을
$$(x-a)^2+(y-a-1)^2=r^2$$
이라 하면 이 원이 두 점 $(1,\ 6)$, $(-3,\ 2)$를 지나므로
$$(1-a)^2+(6-a-1)^2=r^2,\ (-3-a)^2+(2-a-1)^2=r^2$$
$$\therefore\ 2a^2-12a+26=r^2,\ 2a^2+4a+10=r^2$$
두 식을 연립하여 풀면
$$a=1,\ r^2=16$$
$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=2$
$$\therefore\ 2a+b=4$$
답 ④

0282 $x^2+y^2+4x+6y-7=0$에서
$$(x+2)^2+(y+3)^2=20$$
직선 $y=2x+k$가 원 $(x+2)^2+(y+3)^2=20$의 둘레를 이등분하려면 직선이 원의 중심 $(-2,\ -3)$을 지나야 하므로
$$-3=-4+k \qquad \therefore\ k=1$$
답 1

0283 $x^2+y^2+2(m-1)x-2my+3m^2-2=0$에서
$$(x+m-1)^2+(y-m)^2=-m^2-2m+3$$
이 방정식이 원의 방정식이 되려면
$$-m^2-2m+3>0, \qquad m^2+2m-3<0$$
$$(m+3)(m-1)<0$$
$$\therefore\ -3<m<1$$
따라서 정수 m은 -2, -1, 0의 3개이다.
답 ③

0284 $x^2+y^2-4x+a^2-4a-1=0$에서
$$(x-2)^2+y^2=-a^2+4a+5$$
이 방정식이 원을 나타내므로
$$-a^2+4a+5>0$$
$$a^2-4a-5<0, \qquad (a+1)(a-5)<0$$
$$\therefore\ -1<a<5$$
이때 원의 넓이가 최대이려면 반지름의 길이가 최대이어야 하고
$$-a^2+4a+5=-(a-2)^2+9$$
이므로 $-1<a<5$에서 $a=2$일 때 반지름의 길이가 최대이다.
따라서 구하는 반지름의 길이는 $\sqrt{9}=3$이다.
답 3

0285 원의 중심을 P$(a,\ b)$라 하면
$$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$$
$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로
$$(a-1)^2+(b-1)^2=(a+1)^2+(b-1)^2$$
$$-4a=0 \qquad \therefore\ a=0$$
$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로
$$(a+1)^2+(b-1)^2=(a-3)^2+(b-5)^2$$
$$a+b=4 \qquad \therefore\ b=4$$
즉 원의 중심은 P$(0,\ 4)$이므로 반지름의 길이는
$$\overline{PA}=\sqrt{(-1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{10}$$
따라서 원의 방정식은
$$x^2+(y-4)^2=10$$
ㄱ. 중심의 좌표는 $(0,\ 4)$이다. (참)
ㄴ. $0+(3-4)^2=1\neq10$이므로 점 $(0,\ 3)$을 지나지 않는다. (거짓)
ㄷ. 넓이는 10π이다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.
답 ④

0286 $x^2+y^2+4x-2y-10=0$에서
$$(x+2)^2+(y-1)^2=15$$
중심의 좌표가 $(-2,\ 1)$이고 x축에 접하는 원의 반지름의 길이는 1이므로 이 원의 넓이는
$$\pi\times1^2=\pi \qquad \therefore\ a=1$$
또 중심의 좌표가 $(-2,\ 1)$이고 y축에 접하는 원의 반지름의 길이는 $|-2|=2$이므로 이 원의 넓이는
$$\pi\times2^2=4\pi \qquad \therefore\ b=4$$
$$\therefore\ a-b=-3$$
답 -3

0287 점 $(4,\ -2)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하려면 원의 중심이 제 4 사분면 위에 있어야 하므로 반지름의 길이를 r라 하면 원의 중심의 좌표는 $(r,\ -r)$이다.

따라서 원의 방정식은 $\quad (x-r)^2+(y+r)^2=r^2$

이 원이 점 $(4,\ -2)$를 지나므로

$(4-r)^2+(-2+r)^2=r^2, \qquad r^2-12r+20=0$

$(r-2)(r-10)=0$

$\therefore\ r=2$ 또는 $r=10$

즉 두 원의 반지름의 길이의 합은 $\quad 2+10=12$ 답 ④

0288 점 $\mathrm{A}(-4,\ a)$와 원의 중심 $(0,\ 0)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(-4)^2+a^2}=\sqrt{16+a^2}$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 선분 AP의 길이의 최솟값은

$\sqrt{16+a^2}-2$

즉 $\sqrt{16+a^2}-2=3$이므로 $\qquad \sqrt{16+a^2}=5$

양변을 제곱하면 $\qquad 16+a^2=25$

$a^2=9 \qquad \therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$ 답 3

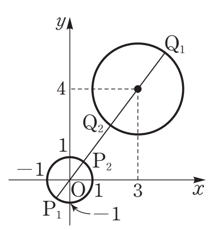
0289 $x^2+y^2-1=0$에서 $\qquad x^2+y^2=1$

$x^2+y^2-6x-8y+21=0$에서 $\qquad (x-3)^2+(y-4)^2=4$

두 원의 중심 $(0,\ 0)$과 $(3,\ 4)$ 사이의 거리는

$\sqrt{3^2+4^2}=5$

이때 두 원의 반지름의 길이가 각각 1, 2 이므로 오른쪽 그림에서



$M=\overline{\mathrm{P_1Q_1}}=1+5+2=8$

$m=\overline{\mathrm{P_2Q_2}}=5-1-2=2$

$\therefore\ M-m=6$ 답 ③

0290 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$에서

$(x-1)^2+(y-2)^2=4$

원의 중심 $(1,\ 2)$와 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1-2+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k-1|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\dfrac{|k-1|}{\sqrt{2}}<2, \qquad |k-1|<2\sqrt{2}$

$-2\sqrt{2}<k-1<2\sqrt{2}$

$\therefore\ 1-2\sqrt{2}<k<1+2\sqrt{2}$

따라서 정수 k는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 5개이다. 답 ④

0291 원의 중심이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(t,\ 2t)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 중심과 두 직선 $x+2y-3=0$, $x+2y-7=0$ 사이의 거리가 모두 원의 반지름의 길이 r와 같으므로

$$\frac{|t+4t-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|t+4t-7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=r$$

$\therefore\ \dfrac{|5t-3|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|5t-7|}{\sqrt{5}}=r \qquad \cdots\cdots ㉠$

즉 $|5t-3|=|5t-7|$이므로 $\qquad 5t-3=\pm(5t-7)$

그런데 $5t-3\neq 5t-7$이므로

$5t-3=-5t+7 \qquad \therefore\ t=1$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(1,\ 2)$이므로

$a=1,\ b=2$

$t=1$을 ㉠에 대입하면 $\qquad r=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

즉 원의 넓이는 $\qquad \pi\times\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{4}{5}\pi \qquad \therefore\ c=\dfrac{4}{5}$

$\therefore\ a+b+5c=7$ 답 7

0292 $y=2x+k$를 $x^2+y^2=16$에 대입하여 정리하면

$5x^2+4kx+k^2-16=0$

x에 대한 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-16)=-k^2+80$

(i) $D>0$, 즉 $-k^2+80>0$일 때

$k^2-80<0 \qquad \therefore\ -4\sqrt{5}<k<4\sqrt{5}$

따라서 $-4\sqrt{5}<k<4\sqrt{5}$이면 교점은 2개이다.

(ii) $D=0$, 즉 $-k^2+80=0$일 때

$k^2-80=0 \qquad \therefore\ k=\pm4\sqrt{5}$

따라서 $k=\pm4\sqrt{5}$이면 교점은 1개이다.

(iii) $D<0$, 즉 $-k^2+80<0$일 때

$k^2-80>0 \qquad \therefore\ k<-4\sqrt{5}$ 또는 $k>4\sqrt{5}$

따라서 $k<-4\sqrt{5}$ 또는 $k>4\sqrt{5}$이면 교점은 0개이다.

이상에서 옳은 것은 ②이다. 답 ②

0293 직선 $x+y+k=0$과 원 $x^2+y^2=9$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 직선과 원의 중심 $(0,\ 0)$ 사이의 거리가 반지름의 길이 3보다 작아야 하므로

$\dfrac{|k|}{\sqrt{1^2+1^2}}<3, \qquad |k|<3\sqrt{2}$

$\therefore\ -3\sqrt{2}<k<3\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$

한편 $x^2+y^2-8x-2ky+k^2=0$에서

$(x-4)^2+(y-k)^2=16$

직선 $x+y+k=0$과 원 $(x-4)^2+(y-k)^2=16$이 만나지 않으려면 직선과 원의 중심 $(4,\ k)$ 사이의 거리가 반지름의 길이 4보다 커야 하므로

$\dfrac{|4+k+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}>4, \qquad |k+2|>2\sqrt{2}$

$k+2<-2\sqrt{2}$ 또는 $k+2>2\sqrt{2}$

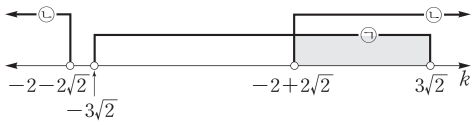
$\therefore\ k<-2-2\sqrt{2}$ 또는 $k>-2+2\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡의 공통부분은 $\qquad -2+2\sqrt{2}<k<3\sqrt{2}$

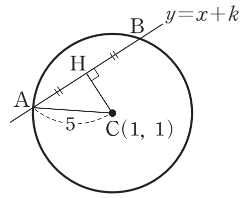
따라서 정수 k는 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$1+2+3+4=10$ 답 10

참고 | $-3\sqrt{2}-(-2-2\sqrt{2})=2-\sqrt{2}>0$이므로
$-3\sqrt{2}>-2-2\sqrt{2}$
따라서 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



0294 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C(1, 1)이라 하고 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=4$$

직각삼각형 AHC에서

$$\overline{CH}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$$

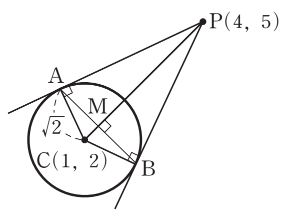
따라서 원의 중심 C(1, 1)과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리가 3이므로

$$\frac{|1-1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3,\qquad |k|=3\sqrt{2}$$

$\therefore k=3\sqrt{2}$ ($\because k>0$)

답 $3\sqrt{2}$

0295 원의 중심을 C(1, 2)라 하면 두 점 C, P 사이의 거리는



$$\overline{CP}=\sqrt{(4-1)^2+(5-2)^2}=3\sqrt{2}$$

직각삼각형 ACP에서

$$\overline{PA}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CA}^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}=4$$

이때 $\overline{AB}$와 $\overline{CP}$의 교점을 M이라 하면 $\overline{AB}\perp\overline{CP}$이므로 삼각형 ACP의 넓이에서

$$\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\overline{AM}\qquad\therefore \overline{AM}=\frac{4}{3}$$

$$\therefore \overline{AB}=2\overline{AM}=\frac{8}{3}$$

답 $\frac{8}{3}$

0296 원의 중심 (3, 2)와 직선 $2x-y+8=0$ 사이의 거리는

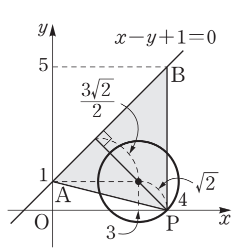
$$\frac{|6-2+8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{12}{\sqrt{5}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$$

이때 원의 반지름이 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최솟값은 $\frac{12\sqrt{5}}{5}-\sqrt{5}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$

답 ①

0297 $x^2+y^2-6x-2y+8=0$에서

$$(x-3)^2+(y-1)^2=2$$



두 점 A(0, 1), B(4, 5)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{5-1}{4-0}x$$

$\therefore x-y+1=0$

따라서 원의 중심 (3, 1)과 직선 $x-y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

이때 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 삼각형 PAB에서 $\overline{AB}$를 밑변으로 생각하면 높이의 최댓값은

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

또 $\overline{AB}=\sqrt{4^2+(5-1)^2}=4\sqrt{2}$이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times\frac{5\sqrt{2}}{2}=10$$

답 10

0298 직선 $x+\sqrt{3}y-1=0$의 기울기는 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $\sqrt{3}$이다.
원 $x^2+y^2=12$에 접하고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선의 방정식은

$$y=\sqrt{3}x\pm2\sqrt{3}\times\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}$$

$\therefore y=\sqrt{3}x+4\sqrt{3}$ 또는 $y=\sqrt{3}x-4\sqrt{3}$

답 $y=\sqrt{3}x+4\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}x-4\sqrt{3}$

0299 점 A$(a, 0)$을 지나는 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$$y=m(x-a)\qquad\therefore mx-y-am=0$$

원과 이 직선이 접하려면 원의 중심 $(-2, -2)$와 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{10}$과 같아야 하므로

$$\frac{|-2m+2-am|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$$

$\therefore |(a+2)m-2|=\sqrt{10(m^2+1)}$

양변을 제곱하면 $(a+2)^2m^2-4(a+2)m+4=10m^2+10$

$\therefore (a^2+4a-6)m^2-4(a+2)m-6=0$

m에 대한 이 이차방정식의 두 근을 m_1, m_2라 하면 두 접선의 기울기가 m_1, m_2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$m_1m_2=\frac{-6}{a^2+4a-6}=-1,\qquad 6=a^2+4a-6$$

$$a^2+4a-12=0,\qquad (a+6)(a-2)=0$$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

답 ①

0300 두 원의 중심을 지나는 직선은 공통인 현을 수직이등분하므로 공통인 현의 중점은 두 원의 공통인 현과 두 원의 중심을 지나는 직선의 교점이다.
$(x+2)^2+(y-1)^2=4$에서 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$
따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2+4x-2y+1-(x^2+y^2-4)=0$$

$\therefore 4x-2y+5=0$ …… ㉠

또 두 원의 중심 $(-2, 1)$, $(0, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}x$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=\frac{1}{2}$

따라서 공통인 현의 중점의 좌표는

$$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

답 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

0301 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2+y^2-ax+2ay+k(x^2+y^2-6)=0 \ (\text{단, } k\neq-1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 원이 두 점 $(1,\ 1)$, $(4,\ -2)$를 지나므로

$$2+a-4k=0,\ 20-8a+14k=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=6,\ k=2$

$a=6,\ k=2$를 ㉠에 대입하면

$$x^2+y^2-6x+12y+2(x^2+y^2-6)=0$$

$$\therefore\ x^2+y^2-2x+4y-4=0$$

따라서 $A=-2,\ B=4,\ C=-4$이므로

$$A-B-C=-2$$

답 ②

0302 $\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=3:2$에서

$$2\overline{\mathrm{PA}}=3\overline{\mathrm{PB}} \qquad \therefore\ 4\overline{\mathrm{PA}}^2=9\overline{\mathrm{PB}}^2$$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$$4\{(x+4)^2+y^2\}=9\{(x-1)^2+y^2\}$$

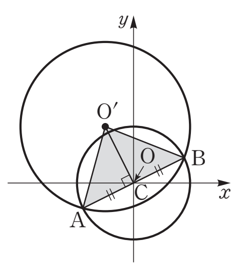
$$x^2+y^2-10x-11=0 \qquad \therefore\ (x-5)^2+y^2=36$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(5,\ 0)$이고 반지름의 길이가 6인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$$2\pi\times6=12\pi$$

답 12π

0303 오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=4$, $(x+1)^2+(y-2)^2=9$의 중심을 각각 O, O′, $\overline{\mathrm{OO'}}$과 $\overline{\mathrm{AB}}$의 교점을 C라 하자.



$(x+1)^2+(y-2)^2=9$에서

$$x^2+y^2+2x-4y-4=0$$

따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-4-(x^2+y^2+2x-4y-4)=0$$

$$\therefore\ x-2y=0$$

원 O'의 중심 $\mathrm{O'}(-1,\ 2)$와 공통인 현 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{O'C}}=\frac{|-1-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt5}=\sqrt5$$

직각삼각형 $\mathrm{O'AC}$에서

$$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{O'A}}^2-\overline{\mathrm{O'C}}^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt5)^2}=2$$

따라서 공통인 현의 길이는 $\quad \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AC}}=4$

$$\therefore\ \triangle\mathrm{O'AB}=\frac12\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{O'C}}=\frac12\times4\times\sqrt5=2\sqrt5$$

답 $2\sqrt5$

0304 점 $(2,\ 3)$을 중심으로 하고 y축에 접하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(y-3)^2=2^2$$

$$\therefore\ x^2+y^2-4x-6y+9=0 \quad \cdots \text{1단계}$$

따라서 $a=-4,\ b=-6,\ c=9$이므로

$$a+b+c=-1 \quad \cdots \text{2단계}$$

답 -1

채점 요소	비율
1단계 원의 방정식 구하기	70 %
2단계 $a+b+c$의 값 구하기	30 %

0305 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(-3,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$$-3x+4y=25 \qquad \therefore\ 3x-4y+25=0 \quad \cdots \text{1단계}$$

이 직선이 원 C에 접하므로 원 C의 반지름의 길이는 원 C의 중심 $(-6,\ 8)$과 직선 $3x-4y+25=0$ 사이의 거리와 같다.

즉 원 C의 반지름의 길이는

$$\frac{|-18-32+25|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{25}{5}=5 \quad \cdots \text{2단계}$$

따라서 원 C의 넓이는 $\quad \pi\times5^2=25\pi \quad \cdots$ 3단계

답 25π

채점 요소	비율
1단계 접선의 방정식 구하기	30 %
2단계 원 C의 반지름의 길이 구하기	50 %
3단계 원 C의 넓이 구하기	20 %

0306 $x^2+y^2+2x-4=0$에서

$$(x+1)^2+y^2=5 \quad \cdots\cdots ㉠$$

원 $x^2+y^2-2ax+2y-6=0$이 원 ㉠의 둘레를 이등분하므로 두 원의 교점을 지나는 직선이 원 ㉠의 중심 $(-1,\ 0)$을 지난다. $\cdots$ 1단계

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2+2x-4-(x^2+y^2-2ax+2y-6)=0$$

$$\therefore\ (a+1)x-y+1=0 \quad \cdots \text{2단계}$$

이 직선이 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$$-(a+1)+1=0 \qquad \therefore\ a=0 \quad \cdots \text{3단계}$$

답 0

채점 요소	비율
1단계 한 원이 다른 원의 둘레를 이등분하는 조건 알기	30 %
2단계 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식 구하기	50 %
3단계 a의 값 구하기	20 %

0307 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2+y^2-4x-6y+7+k(x^2+y^2-ax)=0 \ (\text{단, } k\neq-1) \quad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots \text{1단계}$$

이 원이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $\quad 2+k=0 \qquad \therefore\ k=-2$

$k=-2$를 ㉠에 대입하면

$$x^2+y^2-4x-6y+7-2(x^2+y^2-ax)=0$$

$$x^2+y^2+(4-2a)x+6y-7=0$$

$$\therefore\ \{x+(2-a)\}^2+(y+3)^2=a^2-4a+20 \quad \cdots \text{2단계}$$

이 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{a^2-4a+20}$이고 넓이가 32π이므로

$$\pi\times(\sqrt{a^2-4a+20})^2=32\pi, \qquad a^2-4a+20=32$$

$$a^2-4a-12=0, \qquad (a+2)(a-6)=0$$

$$\therefore\ a=6\ (\because\ a>0) \quad \cdots \text{3단계}$$

답 6

채점 요소		비율
1단계	두 원의 교점을 지나는 원의 방정식 세우기	20 %
2단계	두 원의 교점과 점 $(0,\ 1)$을 지나는 원의 방정식 구하기	40 %
3단계	a의 값 구하기	40 %

0308 전략 원의 중심이 위치하는 사분면에 따라 경우를 나누어 반지름의 길이를 구한다.

주어진 조건을 만족시키는 원의 반지름의 길이를 r라 하자.

(i) 원의 중심이 제1사분면 위에 있는 경우

원의 중심의 좌표가 $(r,\ r)$이고 이 점이 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=18$ 위에 있으므로

$(r-1)^2+(r-1)^2=18$

$(r-1)^2=9, \quad r-1=\pm3$

$\therefore r=4 \ (\because r>0)$

따라서 원의 넓이는 $\quad \pi\times4^2=16\pi$

(ii) 원의 중심이 제2사분면 위에 있는 경우

원의 중심의 좌표가 $(-r,\ r)$이고 이 점이 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=18$ 위에 있으므로

$(-r-1)^2+(r-1)^2=18$

$2r^2+2=18, \quad r^2=8$

$\therefore r=2\sqrt{2} \ (\because r>0)$

따라서 원의 넓이는 $\quad \pi\times(2\sqrt{2})^2=8\pi$

(iii) 원의 중심이 제3사분면 위에 있는 경우

원의 중심의 좌표가 $(-r,\ -r)$이고 이 점이 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=18$ 위에 있으므로

$(-r-1)^2+(-r-1)^2=18$

$(r+1)^2=9, \quad r+1=\pm3$

$\therefore r=2 \ (\because r>0)$

따라서 원의 넓이는 $\quad \pi\times2^2=4\pi$

(iv) 원의 중심이 제4사분면 위에 있는 경우

원의 중심의 좌표가 $(r,\ -r)$이고 이 점이 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=18$ 위에 있으므로

$(r-1)^2+(-r-1)^2=18$

$2r^2+2=18, \quad r^2=8$

$\therefore r=2\sqrt{2} \ (\because r>0)$

따라서 원의 넓이는 $\quad \pi\times(2\sqrt{2})^2=8\pi$

이상에서 모든 원의 넓이의 합은

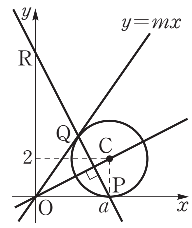
$16\pi+8\pi+4\pi+8\pi=36\pi$

답 36π

0309 전략 원의 중심의 y좌표와 원의 중심과 직선 $y=mx$ 사이의 거리가 모두 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

중심이 제1사분면 위에 있고 반지름의 길이가 2인 원이 x축에 접하므로 양수 a에 대하여 이 원의 중심을 $C(a,\ 2)$라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-2)^2=4$



한편 점 $P(a,\ 0)$에 대하여 직선 PQ와 직선 OC는 수직이고 직선 OC의 기울기가 $\frac{2}{a}$이므로 직선 PQ의 기울기는 $-\frac{a}{2}$이다.

따라서 직선 PQ의 방정식은

$y=-\frac{a}{2}(x-a)$

$\therefore y=-\frac{a}{2}x+\frac{a^2}{2}$

즉 $R\left(0,\ \frac{a^2}{2}\right)$이므로

$\triangle ROP=\frac{1}{2}\times a\times\frac{a^2}{2}=\frac{1}{4}a^3$

이때 삼각형 ROP의 넓이가 16이므로 $\quad \frac{1}{4}a^3=16$

$a^3-64=0, \quad (a-4)(a^2+4a+16)=0$

$\therefore a=4 \ (\because a^2+4a+16>0)$

따라서 원의 중심 $C(4,\ 2)$와 직선 $y=mx$, 즉 $mx-y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같으므로

$\frac{|4m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2 \quad \therefore |2m-1|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

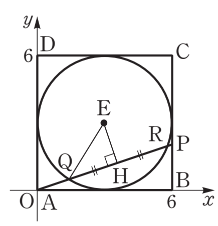
$4m^2-4m+1=m^2+1, \quad 3m^2-4m=0$

$m(3m-4)=0 \quad \therefore m=\frac{4}{3} \ (\because m>0)$

$\therefore 60m=60\times\frac{4}{3}=80$

답 80

0310 전략 정사각형 ABCD를 좌표평면 위에 놓고 각 점의 좌표를 정한다.



오른쪽 그림과 같이 직선 AB를 x축, 직선 AD를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면

$A(0,\ 0)$, $B(6,\ 0)$, $C(6,\ 6)$, $D(0,\ 6)$

점 P는 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$\left(\frac{1\times6+2\times6}{1+2},\ \frac{1\times6+2\times0}{1+2}\right)$, 즉 $(6,\ 2)$

따라서 직선 AP의 방정식은

$y=\frac{1}{3}x \quad \therefore x-3y=0$

원의 중심을 $E(3,\ 3)$이라 하고, 점 E에서 직선 AP에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{EH}=\frac{|3-9|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{6}{\sqrt{10}}$

이때 한 변의 길이가 6인 정사각형 ABCD에 내접하는 원의 반지름의 길이는 3이므로 $\quad \overline{EQ}=3$

따라서 직각삼각형 EQH에서

$\overline{QH}=\sqrt{\overline{EQ}^2-\overline{EH}^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{6}{\sqrt{10}}\right)^2}=\frac{3\sqrt{15}}{5}$

$\therefore \overline{QR}=2\overline{QH}=\frac{6\sqrt{15}}{5}$

답 $\frac{6\sqrt{15}}{5}$

04 도형의 이동

교과서 문제 정복하기

본책 049쪽, 051쪽

0311 $(-1+1,\ 0-1)$, 즉 $(0,\ -1)$ 답 $\mathbf{(0,\ -1)}$

0312 $(3+1,\ 2-1)$, 즉 $(4,\ 1)$ 답 $\mathbf{(4,\ 1)}$

0313 $(2+1,\ -2-1)$, 즉 $(3,\ -3)$ 답 $\mathbf{(3,\ -3)}$

0314 $(-3+1,\ -5-1)$, 즉 $(-2,\ -6)$ 답 $\mathbf{(-2,\ -6)}$

0315 $(3+2,\ 1-3)$, 즉 $(5,\ -2)$ 답 $\mathbf{(5,\ -2)}$

0316 $(-1+2,\ 5-3)$, 즉 $(1,\ 2)$ 답 $\mathbf{(1,\ 2)}$

0317 $(6+2,\ -2-3)$, 즉 $(8,\ -5)$ 답 $\mathbf{(8,\ -5)}$

0318 $(10+2,\ 7-3)$, 즉 $(12,\ 4)$ 답 $\mathbf{(12,\ 4)}$

0319 $x-4=4,\ y+6=5$이므로
$x=8,\ y=-1$ $\quad\therefore (8,\ -1)$ 답 $\mathbf{(8,\ -1)}$

0320 $x-4=0,\ y+6=7$이므로
$x=4,\ y=1$ $\quad\therefore (4,\ 1)$ 답 $\mathbf{(4,\ 1)}$

0321 $x-4=6,\ y+6=-8$이므로
$x=10,\ y=-14$ $\quad\therefore (10,\ -14)$ 답 $\mathbf{(10,\ -14)}$

0322 $x-4=-3,\ y+6=-10$이므로
$x=1,\ y=-16$ $\quad\therefore (1,\ -16)$ 답 $\mathbf{(1,\ -16)}$

0323 $-1+a=1,\ 1+b=-2$이므로
$a=2,\ b=-3$ 답 $\boldsymbol{a=2,\ b=-3}$

0324 $(x-3)-4(y+5)+3=0$
$\therefore x-4y-20=0$ 답 $\boldsymbol{x-4y-20=0}$

0325 $y+5=2(x-3)^2+5(x-3)+2$
$\therefore y=2x^2-7x$ 답 $\boldsymbol{y=2x^2-7x}$

0326 $\{(x-3)-2\}^2+\{(y+5)+1\}^2=6$
$\therefore (x-5)^2+(y+6)^2=6$
답 $\boldsymbol{(x-5)^2+(y+6)^2=6}$

0327 $(x-3)+3(y+6)+5=0$
$\therefore x+3y+20=0$ 답 $\boldsymbol{x+3y+20=0}$

0328 $y+5=-(x+2)^2$
$\therefore y=-x^2-4x-9$ 답 $\boldsymbol{y=-x^2-4x-9}$

0329 $y+1=-2(x-2)-3$
$\therefore y=-2x$ 답 $\boldsymbol{y=-2x}$

0330 $y+1=-(x-2)^2+4$
$\therefore y=-x^2+4x-1$ 답 $\boldsymbol{y=-x^2+4x-1}$

0331 $\{(x-2)+2\}^2+\{(y+1)-1\}^2=1$
$\therefore x^2+y^2=1$ 답 $\boldsymbol{x^2+y^2=1}$

0332 주어진 직선을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동하면 원래의 직선과 일치하므로 구하는 직선의 방정식은
$(x-5)+(y+4)-6=0$
$\therefore x+y-7=0$ 답 $\boldsymbol{x+y-7=0}$

0333 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$가 평행이동
$(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 옮겨지는 원의 방정식은
$\{(x-a)-1\}^2+\{(y-b)+2\}^2=5$
$\therefore (x-a-1)^2+(y-b+2)^2=5$
이 원이 원 $(x-5)^2+(y+3)^2=5$와 일치하므로
$-a-1=-5,\ -b+2=3$
$\therefore a=4,\ b=-1$
답 $\boldsymbol{a=4,\ b=-1}$

다른 풀이 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$의 중심 $(1,\ -2)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 원 $(x-5)^2+(y+3)^2=5$의 중심 $(5,\ -3)$으로 옮겨지므로
$1+a=5,\ -2+b=-3$
$\therefore a=4,\ b=-1$

0334 답 (1) $\mathbf{(-1,\ -3)}$ (2) $\mathbf{(1,\ 3)}$
(3) $\mathbf{(1,\ -3)}$ (4) $\mathbf{(3,\ -1)}$

0335 (1) $2x-(-y)+8=0$ $\quad\therefore 2x+y+8=0$
(2) $2\times(-x)-y+8=0$ $\quad\therefore 2x+y-8=0$
(3) $2\times(-x)-(-y)+8=0$ $\quad\therefore 2x-y-8=0$
(4) $2y-x+8=0$ $\quad\therefore x-2y-8=0$
답 (1) $\boldsymbol{2x+y+8=0}$ (2) $\boldsymbol{2x+y-8=0}$
(3) $\boldsymbol{2x-y-8=0}$ (4) $\boldsymbol{x-2y-8=0}$

0336 (1) $-y=x^2-x+2$ $\quad\therefore y=-x^2+x-2$
(2) $y=(-x)^2-(-x)+2$ $\quad\therefore y=x^2+x+2$
(3) $-y=(-x)^2-(-x)+2$ $\quad\therefore y=-x^2-x-2$
답 (1) $\boldsymbol{y=-x^2+x-2}$ (2) $\boldsymbol{y=x^2+x+2}$
(3) $\boldsymbol{y=-x^2-x-2}$

0337 (1) $(x+1)^2+(-y-5)^2=36$

$\therefore (x+1)^2+(y+5)^2=36$

(2) $(-x+1)^2+(y-5)^2=36$

$\therefore (x-1)^2+(y-5)^2=36$

(3) $(-x+1)^2+(-y-5)^2=36$

$\therefore (x-1)^2+(y+5)^2=36$

(4) $(x-5)^2+(y+1)^2=36$

답 (1) $\boldsymbol{(x+1)^2+(y+5)^2=36}$
(2) $\boldsymbol{(x-1)^2+(y-5)^2=36}$
(3) $\boldsymbol{(x-1)^2+(y+5)^2=36}$
(4) $\boldsymbol{(x-5)^2+(y+1)^2=36}$

0338 $\left(\frac{-4+8}{2}, \frac{6+4}{2}\right)$, 즉 $(2, 5)$ 답 **(2, 5)**

0339 $\left(\frac{7+3}{2}, \frac{-2-10}{2}\right)$, 즉 $(5, -6)$ 답 **(5, −6)**

0340 $\left(\frac{-5-9}{2}, \frac{9+5}{2}\right)$, 즉 $(-7, 7)$ 답 **(−7, 7)**

0341 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{1+a}{2}=-2$, $\frac{4+b}{2}=2$ $\therefore a=-5, b=0$

따라서 구하는 점의 좌표는

$(-5, 0)$ 답 **(−5, 0)**

0342 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{-2+a}{2}=1$, $\frac{-5+b}{2}=-3$ $\therefore a=4, b=-1$

따라서 구하는 점의 좌표는

$(4, -1)$ 답 **(4, −1)**

0343 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$\frac{3+a}{2}=5$, $\frac{-6+b}{2}=-2$ $\therefore a=7, b=2$

따라서 구하는 점의 좌표는

$(7, 2)$ 답 **(7, 2)**

0344 (1) 원 $(x-1)^2+(y+3)^2=2$의 중심 $(1, -3)$을 점 $(2, -2)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (p, q)라 하면

$\frac{1+p}{2}=2$, $\frac{-3+q}{2}=-2$

$\therefore p=3, q=-1$

따라서 대칭이동한 점의 좌표는

$(3, -1)$

(2) 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(3, -1)$이고 대칭이동해도 반지름의 길이는 변하지 않으므로 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+1)^2=2$

답 (1) **(3, −1)** (2) $\boldsymbol{(x-3)^2+(y+1)^2=2}$

0345 (1) $\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b-1}{2}\right)$

(2) $\frac{b+1}{a-3}$

(3) 선분 AB의 중점이 직선 $x-y+1=0$ 위의 점이므로

$\frac{a+3}{2}-\frac{b-1}{2}+1=0$

$\therefore a-b=-6$ ······ ㉠

또 직선 AB가 직선 $x-y+1=0$, 즉 $y=x+1$과 수직이므로

$\frac{b+1}{a-3}=-1$ $\therefore a+b=2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2, b=4$

따라서 점 B의 좌표는 $(-2, 4)$

답 (1) $\boldsymbol{\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b-1}{2}\right)}$ (2) $\boldsymbol{\frac{b+1}{a-3}}$ (3) **(−2, 4)**

0346 선분 PP′의 중점 $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$이 직선 $y=-x$ 위의 점이므로 $\frac{y+y'}{2}=-\frac{x+x'}{2}$

$\therefore x+y=\boxed{(가)\ -x'-y'}$ ······ ㉠

직선 PP′과 직선 $y=-x$가 수직이므로 $\frac{y'-y}{x'-x}=1$

$\therefore x-y=\boxed{(나)\ x'-y'}$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면 $2x=-2y'$ $\therefore y'=\boxed{(다)\ -x}$

㉠−㉡을 하면 $2y=-2x'$ $\therefore x'=\boxed{(라)\ -y}$

$\therefore P'(\boxed{(라)\ -y}, \boxed{(다)\ -x})$

답 (가) $\boldsymbol{-x'-y'}$ (나) $\boldsymbol{x'-y'}$ (다) $\boldsymbol{-x}$ (라) $\boldsymbol{-y}$

유형 익히기

• 본책 052~058쪽

0347 점 $(-3, 2)$를 점 $(1, -4)$로 옮기는 평행이동을 $(x, y) \longrightarrow (x+m, y+n)$이라 하면

$-3+m=1$, $2+n=-4$

$\therefore m=4, n=-6$

따라서 이 평행이동에 의하여 점 $(5, -2)$로 옮겨지는 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$a+4=5$, $b-6=-2$

$\therefore a=1, b=4$

즉 구하는 점의 좌표는 $(1, 4)$이다. 답 **(1, 4)**

0348 점 $(-1, 3)$이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(-1-3, 3+2)$, 즉 $(-4, 5)$

이 점이 직선 $y=mx-7$ 위의 점이므로

$5=-4m-7$ $\therefore m=-3$ 답 ②

04 도형의 이동

0349 주어진 평행이동을 $(x,\ y) \longrightarrow (x+m,\ y+n)$이라 하면

$-2+m=1,\ a+n=4,\ b+m=5,\ 6+n=10$

$\therefore\ m=3,\ n=4,\ a=0,\ b=2$

따라서 점 $(a+b,\ a-b)$, 즉 $(2,\ -2)$가 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(2+3,\ -2+4)$, 즉 $(5,\ 2)$ 답 **(5, 2)**

0350 점 $\mathrm{A}(-1,\ 7)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점 B의 좌표는

$(-1+a,\ 7+3)$, 즉 $(a-1,\ 10)$

이때 $\overline{\mathrm{OB}}=2\overline{\mathrm{OA}}$에서 $\overline{\mathrm{OB}}^2=4\overline{\mathrm{OA}}^2$이므로

$(a-1)^2+10^2=4\{(-1)^2+7^2\}$

$a^2-2a-99=0,\qquad (a+9)(a-11)=0$

$\therefore\ a=11\ (\because\ a>0)$ 답 **11**

0351 직선 $ax-2y-a+1=0$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$a(x-4)-2(y-n)-a+1=0$

$\therefore\ ax-2y-5a+2n+1=0$

이 직선이 직선 $3x-2y-6=0$과 일치하므로

$a=3,\ -5a+2n+1=-6$

$\therefore\ a=3,\ n=4\qquad \therefore\ a+n=7$ 답 ⑤

0352 직선 $y=3x-2$를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-3=3(x-k)-2$

$\therefore\ y=3x-3k+1$

이 직선이 처음 직선과 일치하므로

$-3k+1=-2\qquad \therefore\ k=1$ 답 **1**

0353 주어진 평행이동에 의하여 점 $(2,\ 1)$이 점 $(3,\ 4)$로 옮겨지므로

$2+a=3,\ 1+b=4\qquad \therefore\ a=1,\ b=3$

따라서 직선 $3x-2y+4=0$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$3(x-1)-2(y-3)+4=0$

$\therefore\ 3x-2y+7=0$

이 직선이 점 $(3,\ c)$를 지나므로

$9-2c+7=0\qquad \therefore\ c=8$

$\therefore\ a+b+c=12$ 답 **12**

0354 직선 $y=x-3$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+2=(x-m)-3$

$\therefore\ y=x-m-5$ …… ㉠ … 1단계

직선 $y=-x-1$을 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-n=-x-1$

$\therefore\ y=-x+n-1$ …… ㉡ … 2단계

이때 두 직선 ㉠, ㉡이 모두 점 $(4,\ -2)$를 지나므로

$-2=4-m-5,\ -2=-4+n-1$

$\therefore\ m=1,\ n=3$

$\therefore\ m+n=4$ … 3단계

답 **4**

	채점 요소	비율
1단계	직선 $y=x-3$을 평행이동한 직선의 방정식 구하기	30 %
2단계	직선 $y=-x-1$을 평행이동한 직선의 방정식 구하기	30 %
3단계	$m+n$의 값 구하기	40 %

0355 주어진 평행이동에 의하여 원 $(x-3)^2+y^2=1$이 옮겨지는 원의 방정식은

$(x-a-3)^2+(y+b)^2=1$

이 원이 원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$, 즉

$(x+1)^2+(y-2)^2=1$과 일치하므로

$-a-3=1,\ b=-2\qquad \therefore\ a=-4,\ b=-2$

$\therefore\ ab=8$ 답 **8**

다른 풀이 원 $(x-3)^2+y^2=1$의 중심의 좌표는

$(3,\ 0)$

원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$, 즉 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$의 중심의 좌표는

$(-1,\ 2)$

따라서 $3+a=-1,\ 0-b=2$이므로

$a=-4,\ b=-2$

0356 $x^2+y^2+ax+by+5=0$에서

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-5$$

이 원을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$\left(x-3+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-2+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-5 \quad \cdots ㉠$$

한편 $x^2+y^2-6y+c=0$에서

$x^2+(y-3)^2=9-c$

이 원이 원 ㉠와 일치하므로

$-3+\frac{a}{2}=0,\ -2+\frac{b}{2}=-3,\ \frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-5=9-c$

$\therefore\ a=6,\ b=-2,\ c=4$

$\therefore\ a+b+c=8$ 답 **8**

0357 원점을 점 $(2,\ 1)$로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하는 것이다.

이 평행이동에 의하여 포물선 $y=x^2+6x+1$, 즉 $y=(x+3)^2-8$이 옮겨지는 포물선의 방정식은

$y-1=(x-2+3)^2-8$

$\therefore\ y=(x+1)^2-7$

따라서 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ -7)$이므로

$m=-1,\ n=-7$

$\therefore\ m+n=-8$ 답 -8

다른 풀이 $y=x^2+6x+1=(x+3)^2-8$

이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-3,\ -8)$

주어진 평행이동에 의하여 점 $(-3,\ -8)$이 옮겨지는 점의 좌표는

$(-3+2,\ -8+1)$, 즉 $(-1,\ -7)$

$\therefore\ m=-1,\ n=-7$

0358 포물선 $y=4x^2+8x-5$, 즉 $y=4(x+1)^2-9$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $a+2$만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-a-2=4(x-a+1)^2-9$

$\therefore\ y=4(x-a+1)^2+a-7$

이 포물선의 꼭짓점 $(a-1,\ a-7)$이 x축 위에 있으므로

$a-7=0 \qquad \therefore\ a=7$

따라서 꼭짓점의 x좌표는

$7-1=6$ 답 6

0359 직선 $y=3x-1$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $2a$만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-2a=3(x-a)-1 \qquad \therefore\ y=3x-a-1$

이 직선이 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(1,\ -2)$를 지나야 하므로

$-2=3-a-1 \qquad \therefore\ a=4$ 답 4

0360 원 $x^2+y^2=1$을 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원의 방정식은

$x^2+(y-a)^2=1$

이 원이 직선 $4x+3y+2=0$과 접하려면 원의 중심 $(0,\ a)$와 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같아야 하므로

$\dfrac{|3a+2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1, \qquad |3a+2|=5$

$3a+2=\pm5 \qquad \therefore\ a=1\ (\because\ a>0)$ 답 1

0361 주어진 평행이동에 의하여 원 $(x+2)^2+(y-3)^2=16$이 옮겨지는 원의 방정식은

$(x-a+2)^2+(y-b-3)^2=16$

이 원의 중심이 제1사분면 위에 있고, 원이 x축과 y축에 모두 접하므로

$a-2=4,\ b+3=4 \qquad \therefore\ a=6,\ b=1$

$\therefore\ a+b=7$ 답 7

0362 이차함수 $y=-x^2-3x+1$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y-b=-(x-a)^2-3(x-a)+1$

$\therefore\ y=-x^2+(2a-3)x-a^2+3a+b+1$

이 그래프와 직선 $y=x+3$이 접하려면 방정식

$-x^2+(2a-3)x-a^2+3a+b+1=x+3$,

즉 $x^2-2(a-2)x+a^2-3a-b+2=0$

이 중근을 가져야 한다.

x에 대한 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\{-(a-2)\}^2-(a^2-3a-b+2)=0$

$-a+b+2=0$

$\therefore\ a-b=2$ 답 2

0363 점 $\mathrm{P}(2,\ -1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은

$\mathrm{Q}(-1,\ 2)$

점 $\mathrm{P}(2,\ -1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점은

$\mathrm{R}(2,\ 1)$

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{2-1+2}{3},\ \dfrac{-1+2+1}{3}\right)$, 즉 $\left(1,\ \dfrac{2}{3}\right)$ 답 $\left(1,\ \dfrac{2}{3}\right)$

0364 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 직선 $y=3x$ 위의 점이므로

$b=3a$

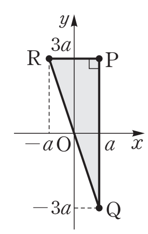
점 $\mathrm{P}(a,\ 3a)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점은

$\mathrm{Q}(a,\ -3a)$

점 $\mathrm{P}(a,\ 3a)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점은

$\mathrm{R}(-a,\ 3a)$

따라서 오른쪽 그림에서



$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{PR}}$

$=\dfrac{1}{2}\times6a\times2a=6a^2$

즉 $6a^2=54$이므로 $\qquad a^2=9$

$\therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$ 답 3

0365 점 $(a,\ b)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a,\ b)$

이 점이 제3사분면 위의 점이므로 $\qquad -a<0,\ b<0$

$\therefore\ a>0,\ b<0$

점 $(a-b,\ ab)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a+b,\ -ab)$

이 점을 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a-b,\ -ab)$

이때 $a>0,\ b<0$이므로

$a-b>0,\ -ab>0$

따라서 점 $(a-b,\ -ab)$는 제1사분면 위에 있다.

답 제1사분면

0366 $(-2, -1) \xrightarrow{(가)} (-2, 1)$

$\xrightarrow{(나)} (2, -1) \xrightarrow{(다)} (-2, -1)$

즉 점 P를 (가), (나), (다)의 순서로 이동하면 처음의 위치로 돌아온다.

따라서 점 P를 99번 이동한 후의 점의 좌표는 $(-2, -1)$이므로 100번 이동한 후의 점의 좌표는

$(-2, 1)$

즉 $a=-2$, $b=1$이므로

$a-b=-3$ 답 -3

RPM 비법 노트

음이 아닌 정수 k에 대하여 점 P를

(i) $(3k+1)$번 이동한 후의 점의 좌표는 $(-2, 1)$

(ii) $(3k+2)$번 이동한 후의 점의 좌표는 $(2, -1)$

(iii) $(3k+3)$번 이동한 후의 점의 좌표는 $(-2, -1)$

0367 직선 $y=\frac{1}{3}x+2$를 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{3}x+2$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 3이므로 기울기가 3이고 점 $(-6, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=3\{x-(-6)\}$

$\therefore y=3x+20$ 답 $y=3x+20$

0368 직선 $x+5y-6=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 l_1의 방정식은

$5x+y-6=0$

직선 l_1을 원점에 대하여 대칭이동한 직선 l_2의 방정식은

$-5x-y-6=0 \quad \therefore y=-5x-6$

따라서 직선 l_2의 기울기는 -5이다. 답 -5

0369 직선 $2x-3y+k=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$2x+3y+k=0$

이 직선이 점 $(1, 1)$을 지나므로

$2+3+k=0 \quad \therefore k=-5$ 답 ①

0370 중심이 점 $(3, -2)$이고 반지름의 길이가 k인 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+2)^2=k^2$

이 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-3)^2+(-y+2)^2=k^2$

$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2=k^2$

이 원이 점 $(3, -3)$을 지나므로

$(3-3)^2+(-3-2)^2=k^2$

$\therefore k=5 \ (\because k>0)$ 답 5

다른 풀이 점 $(3, -2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(3, 2)$

따라서 대칭이동한 원은 중심의 좌표가 $(3, 2)$이고 반지름의 길이가 k이므로 이 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-2)^2=k^2$

0371 $x^2+y^2-2ax-6y+4=0$에서

$(x-a)^2+(y-3)^2=a^2+5$

이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-a)^2+(y-3)^2=a^2+5$

$\therefore (x+a)^2+(y-3)^2=a^2+5$

이 원의 중심 $(-a, 3)$이 직선 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 위에 있으므로

$3=\frac{a}{2}+\frac{1}{2} \quad \therefore a=5$ 답 ③

0372 포물선 $y=x^2+ax+b$를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=(-x)^2+a\times(-x)+b$

$\therefore y=-x^2+ax-b=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-b$

이 포물선의 꼭짓점 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}-b\right)$가 점 $(-2, 7)$과 일치하므로

$\frac{a}{2}=-2, \ \frac{a^2}{4}-b=7 \quad \therefore a=-4, b=-3$

$\therefore a+b=-7$ 답 ②

다른 풀이 점 $(-2, 7)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(2, -7)$

따라서 포물선 $y=x^2+ax+b$의 꼭짓점의 좌표는 $(2, -7)$이므로 $y=(x-2)^2-7=x^2-4x-3$에서

$a=-4, b=-3$

0373 $x^2+y^2-4x+10y-5=0$에서

$(x-2)^2+(y+5)^2=34$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+5)^2+(y-2)^2=34$

$x=0$을 대입하면 $(0+5)^2+(y-2)^2=34$

$y^2-4y-5=0, \quad (y+1)(y-5)=0$

$\therefore y=-1$ 또는 $y=5$

따라서 y축과 만나는 두 점의 좌표는 $(0, -1)$, $(0, 5)$이므로 두 점 사이의 거리는 $5-(-1)=6$ 답 6

0374 직선 $4x+3y+a=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-4x-3y+a=0 \quad \therefore 4x+3y-a=0$

이 직선이 원 $(x-3)^2+(y+1)^2=9$에 접하려면 원의 중심 $(3, -1)$과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 3과 같아야 하므로 $\frac{|12-3-a|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3, \quad |9-a|=15$

$9-a=\pm15 \quad \therefore a=24 \ (\because a>0)$ 답 ④

0375 $x^2+y^2-4x-2y=0$에서

$(x-2)^2+(y-1)^2=5$

이 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-2)^2+(-y-1)^2=5$

$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=5$ … 1단계

이 원이 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$과 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 $(2, -1)$과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$보다 작아야 하므로

$\dfrac{|2+1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}<\sqrt{5}$, $\quad |k+3|<\sqrt{10}$

$-\sqrt{10}<k+3<\sqrt{10}$

$\therefore -3-\sqrt{10}<k<-3+\sqrt{10}$ … 2단계

답 $\mathbf{-3-\sqrt{10}<k<-3+\sqrt{10}}$

채점 요소		비율
1단계	대칭이동한 원의 방정식 구하기	40 %
2단계	k의 값의 범위 구하기	60 %

0376 직선 $3x-2y+2=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-2x+3y+2=0 \qquad \therefore 2x-3y-2=0$

이 직선이 포물선 $y=\dfrac{1}{3}x^2+k$와 만나려면 방정식

$2x-3\left(\dfrac{1}{3}x^2+k\right)-2=0$, 즉 $x^2-2x+3k+2=0$

이 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-(3k+2)\geq 0$, $\quad -3k-1\geq 0$

$\therefore k\leq -\dfrac{1}{3}$

답 $\mathbf{k\leq -\dfrac{1}{3}}$

0377 원 $(x-a)^2+(y+1)^2=9$를 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x-a)^2+(y+1)^2=9$

$\therefore (x+a)^2+(y+1)^2=9$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y+a)^2=9$

이 원의 넓이가 직선 $3x-2y-1=0$에 의하여 이등분되려면 직선이 원의 중심 $(-1, -a)$를 지나야 하므로

$-3+2a-1=0 \qquad \therefore a=2$

답 **2**

0378 포물선 $y=x^2+x+a$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y+1=(x-2)^2+(x-2)+a$

$\therefore y=x^2-3x+a+1$

이 포물선을 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=x^2-3x+a+1 \qquad \therefore y=-x^2+3x-a-1$

이 포물선이 포물선 $y=-x^2+3x+6$과 겹쳐지므로

$-a-1=6 \qquad \therefore a=-7$

답 **−7**

0379 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 점 P를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(a+1, b+2)$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a-1, -b-2)$

이 점이 점 $(3, 2)$와 일치하므로

$-a-1=3, \ -b-2=2$

$\therefore a=-4, b=-4$

따라서 점 P의 좌표는 $(-4, -4)$이다.

답 $\mathbf{(-4, -4)}$

0380 원 $(x+2)^2+(y+2)^2=16$을 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+1+2)^2+(y+2)^2=16$

$\therefore (x+3)^2+(y+2)^2=16$

이 원을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y+3)^2=16$

$y=0$을 대입하면 $\quad (x+2)^2+3^2=16$

$(x+2)^2=7$, $\quad x+2=\pm\sqrt{7}$

$\therefore x=-2+\sqrt{7}$ 또는 $x=-2-\sqrt{7}$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $(-2-\sqrt{7}, 0)$, $(-2+\sqrt{7}, 0)$이므로

$\overline{PQ}=-2+\sqrt{7}-(-2-\sqrt{7})=2\sqrt{7}$

답 $\mathbf{2\sqrt{7}}$

0381 직선 $x-2y+1=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-x-2y+1=0 \qquad \therefore x+2y-1=0$

이 직선을 y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$x+2(y-m)-1=0$

$\therefore y=-\dfrac{1}{2}x+m+\dfrac{1}{2}$

이 직선과 직선 $nx+y-2=0$, 즉 $y=-nx+2$가 y축에서 수직으로 만나므로

$-\dfrac{1}{2}\times(-n)=-1$, $m+\dfrac{1}{2}=2$

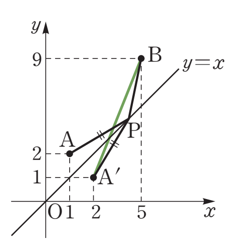
$\therefore m=\dfrac{3}{2}$, $n=-2$

$\therefore mn=-3$

답 ②

0382 점 $A(1, 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

$A'(2, 1)$



이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}$

$=\overline{A'P}+\overline{BP}$

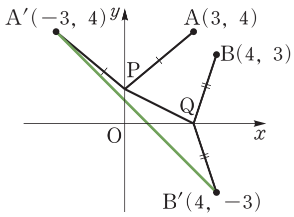
$\geq \overline{A'B}$

$=\sqrt{(5-2)^2+(9-1)^2}=\sqrt{73}$

답 $\mathbf{\sqrt{73}}$

0383 점 A$(3, 4)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A$'$이라 하면

$\quad$ A$'(-3, 4)$



점 B$(4, 3)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B$'$이라 하면

$\quad$ B$'(4, -3)$

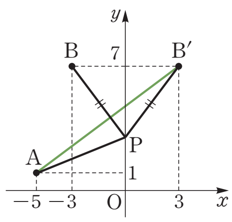
이때 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$, $\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{QB'}}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}&=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB'}}\\&\geq\overline{\mathrm{A'B'}}\\&=\sqrt{(4+3)^2+(-3-4)^2}\\&=7\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 $\mathbf{7\sqrt{2}}$

0384 점 B$(-3, 7)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B$'$이라 하면

$\quad$ B$'(3, 7)$



$\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}&=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}\\&\geq\overline{\mathrm{AB'}}\\&=\sqrt{(3+5)^2+(7-1)^2}\\&=10\end{aligned}$$

이때 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는 직선 AB$'$과 y축의 교점이다.

두 점 A$(-5, 1)$, B$'(3, 7)$을 지나는 직선의 방정식은

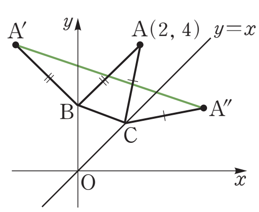
$$y-1=\frac{7-1}{3-(-5)}\{x-(-5)\}$$

$$\therefore\ y=\frac{3}{4}x+\frac{19}{4}$$

따라서 직선 AB$'$의 y절편이 $\frac{19}{4}$이므로 구하는 점 P의 좌표는 $\left(0, \frac{19}{4}\right)$이다.

답 **최솟값: 10, P**$\left(\mathbf{0}, \mathbf{\frac{19}{4}}\right)$

0385 점 A$(2, 4)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A$'$, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A$''$이라 하면



$\quad$ A$'(-2, 4)$, A$''(4, 2)$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{A'B}}$, $\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CA''}}$이므로 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA}}&=\overline{\mathrm{A'B}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA''}}\\&\geq\overline{\mathrm{A'A''}}\\&=\sqrt{(4+2)^2+(2-4)^2}\\&=2\sqrt{10}\end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{10}$이므로

$\quad a=2\sqrt{10}$

이때 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 최소가 되도록 하는 두 점 B, C는 각각 직선 A$'$A$''$과 y축, 직선 $y=x$의 교점이다.

직선 A$'$A$''$의 방정식은

$$y-2=\frac{2-4}{4-(-2)}(x-4)$$

$$\therefore\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$$

따라서 직선 A$'$A$''$의 y절편이 $\frac{10}{3}$이므로

$$\mathrm{B}\left(0, \frac{10}{3}\right) \qquad \therefore\ b=\frac{10}{3}$$

또 $-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}=x$에서

$$-\frac{4}{3}x=-\frac{10}{3} \qquad \therefore\ x=\frac{5}{2}$$

즉 C$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$이므로 $\quad c=\frac{5}{2}$

$$\therefore\ abc=2\sqrt{10}\times\frac{10}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{50\sqrt{10}}{3}$$

답 $\mathbf{\frac{50\sqrt{10}}{3}}$

0386 두 점 $(a, 8)$, $(-6, b)$를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(-4, 6)$이므로

$$\frac{a-6}{2}=-4,\ \frac{8+b}{2}=6 \qquad \therefore\ a=-2,\ b=4$$

$$\therefore\ ab=-8$$

답 ④

0387 $x^2+y^2-2x+6y+1=0$에서

$$(x-1)^2+(y+3)^2=9$$

원의 중심 $(1, -3)$을 점 $(2, 1)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하면

$$\frac{1+a}{2}=2,\ \frac{-3+b}{2}=1$$

$$\therefore\ a=3,\ b=5$$

원을 대칭이동해도 반지름의 길이는 변하지 않으므로 대칭이동한 원은 중심이 점 $(3, 5)$이고 반지름의 길이가 3이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2+(y-5)^2=9$$

답 ①

0388 $y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$이므로 이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $\quad(1, 2)$

$y=-x^2+6x-5=-(x-3)^2+4$이므로 이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $\quad(3, 4)$

두 포물선이 점 P에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점 P에 대하여 대칭이다.

따라서 점 P는 두 꼭짓점을 이은 선분의 중점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+4}{2}\right),\ \text{즉 } (2, 3)$$

답 **(2, 3)**

0389 (1) 두 점 (a, b), (p, q)를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(-2, -1)$이므로

$$\frac{a+p}{2}=-2,\ \frac{b+q}{2}=-1$$

$$\therefore\ a=-p-4,\ b=-q-2$$

(2) 점 (a, b)가 직선 $3x-y-2=0$ 위의 점이므로

$3a-b-2=0$

이 식에 $a=-p-4$, $b=-q-2$를 대입하면

$3(-p-4)-(-q-2)-2=0$

$\therefore 3p-q+12=0$

따라서 점 (p, q)는 직선 $3x-y+12=0$ 위의 점이므로 구하는 직선의 방정식은

$3x-y+12=0$

답 (1) $\boldsymbol{a=-p-4,\ b=-q-2}$ (2) $\boldsymbol{3x-y+12=0}$

0390 두 점 $(-6, -1)$, (a, b)를 이은 선분의 중점 $\left(\dfrac{-6+a}{2}, \dfrac{-1+b}{2}\right)$가 직선 $2x+y+3=0$ 위의 점이므로

$2\times\dfrac{-6+a}{2}+\dfrac{-1+b}{2}+3=0$

$\therefore 2a+b=7$ …… ㉠

또 두 점 $(-6, -1)$, (a, b)를 지나는 직선이 직선 $2x+y+3=0$, 즉 $y=-2x-3$과 수직이므로

$\dfrac{b-(-1)}{a-(-6)}\times(-2)=-1$

$\therefore a-2b=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=3$

$\therefore a+b=5$ 답 ⑤

0391 직선 l의 방정식을 $y=ax+b$라 하자.

두 점 $\mathrm{P}(1, 5)$, $\mathrm{Q}(3, 3)$에 대하여 선분 PQ의 중점 $\left(\dfrac{1+3}{2}, \dfrac{3+5}{2}\right)$, 즉 $(2, 4)$가 직선 l 위의 점이므로

$4=2a+b$ …… ㉠

또 직선 PQ가 직선 l과 수직이므로

$\dfrac{3-5}{3-1}\times a=-1$ $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $4=2+b$ $\therefore b=2$

따라서 직선 l의 방정식은 $y=x+2$

이때 직선 l의 x절편은 -2, y절편은 2이므로 직선 l과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times2\times2=2$ 답 **2**

0392 원 $(x+2)^2+(y+1)^2=5$의 중심 $(-2, -1)$을 직선 $y=x-2$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하자.

두 점 $(-2, -1)$, (a, b)를 이은 선분의 중점 $\left(\dfrac{-2+a}{2}, \dfrac{-1+b}{2}\right)$가 직선 $y=x-2$ 위의 점이므로

$\dfrac{-1+b}{2}=\dfrac{-2+a}{2}-2$ $\therefore a-b=5$ …… ㉠

또 두 점 $(-2, -1)$, (a, b)를 지나는 직선이 직선 $y=x-2$와 수직이므로

$\dfrac{b-(-1)}{a-(-2)}\times1=-1$ $\therefore a+b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-4$

원을 대칭이동해도 반지름의 길이는 변하지 않으므로 대칭이동한 원은 중심이 점 $(1, -4)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y+4)^2=5$ 답 $\boldsymbol{(x-1)^2+(y+4)^2=5}$

0393 두 원의 중심의 좌표는 각각 $(0, 0)$, $(2, -4)$이고 두 원의 중심을 이은 선분의 중점 $\left(\dfrac{0+2}{2}, \dfrac{0-4}{2}\right)$, 즉 $(1, -2)$가 직선 $ax+by+5=0$ 위의 점이므로

$a-2b+5=0$ …… ㉠ … 1단계

또 두 점 $(0, 0)$, $(2, -4)$를 지나는 직선이 직선 $ax+by+5=0$, 즉 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{5}{b}$와 수직이므로

$\dfrac{-4}{2}\times\left(-\dfrac{a}{b}\right)=-1$

$\therefore b=-2a$ …… ㉡ … 2단계

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$

$\therefore a+b=1$ … 3단계

답 **1**

채점 요소	비율
1단계 중점 조건을 이용하여 a, b에 대한 식 세우기	40 %
2단계 수직 조건을 이용하여 a, b에 대한 식 세우기	40 %
3단계 $a+b$의 값 구하기	20 %

0394 방정식 $f(y, x)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 방정식 $f(y, x)=0$이 나타내는 도형은 ④이다. 답 ④

다른 풀이 주어진 도형은 세 직선

$x=0$, $y=x$, $y=1$ …… ㉠

로 둘러싸인 도형이다.

㉠에 x 대신 y, y 대신 x를 대입하면

$y=0$, $x=y$, $x=1$

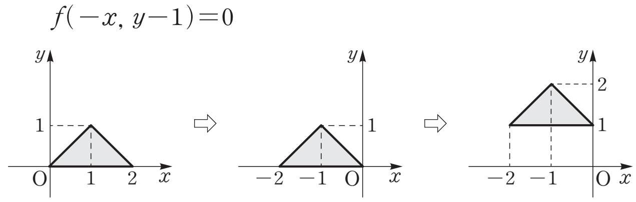
따라서 방정식 $f(y, x)=0$이 나타내는 도형은 세 직선 $y=0$, $x=y$, $x=1$로 둘러싸인 도형이므로 ④이다.

0395 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(-x, y)=0$

방정식 $f(-x, y)=0$이 나타내는 도형을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(-x, y-1)=0$



따라서 방정식 $f(-x, y-1)=0$이 나타내는 도형은 ⑤이다.

답 ⑤

0396 주어진 그림에서 방정식 $g(x,\ y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.
방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

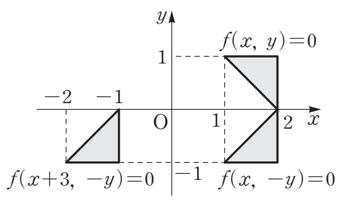
$f(x,\ -y)=0$

방정식 $f(x,\ -y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(x+3,\ -y)=0$

$\therefore\ g(x,\ y)=f(x+3,\ -y)$ 답 ③

참고 |



시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 059~061쪽

0397 점 $(4,\ -1)$이 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y-2)$에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(4+a,\ -1-2)$, 즉 $(a+4,\ -3)$

이 점이 점 $(2,\ b)$와 일치하므로

$a+4=2,\ -3=b \qquad \therefore\ a=-2,\ b=-3$

$\therefore\ a+b=-5$ 답 ①

0398 직선 $y=3x-4$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+3=3(x-m)-4$

$\therefore\ 3x-y-3m-7=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

평행한 두 직선 ㉠, $y=3x-4$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로 직선 $y=3x-4$ 위의 점 $(0,\ -4)$와 직선 ㉠ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이다.

즉 $\dfrac{|4-3m-7|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$이므로

$|3m+3|=10, \qquad 3m+3=\pm 10$

$\therefore\ m=\dfrac{7}{3}\ (\because\ m>0)$ 답 $\dfrac{7}{3}$

0399 $x^2+y^2-4x+2y+a=0$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2=5-a$

주어진 평행이동에 의하여 이 원이 옮겨지는 원의 방정식은

$(x+3-2)^2+(y-1+1)^2=5-a$

$\therefore\ (x+1)^2+y^2=5-a$

따라서 중심의 좌표가 $(-1,\ 0)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{5-a}$이므로

$b=0,\ \sqrt{5-a}=3 \qquad \therefore\ a=-4,\ b=0$

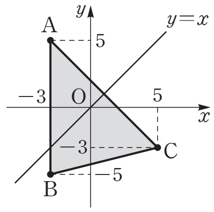
$\therefore\ a+b=-4$ 답 ①

0400 점 $\mathrm{A}(-3,\ 5)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점은

$\mathrm{B}(-3,\ -5)$

점 $\mathrm{A}(-3,\ 5)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은

$\mathrm{C}(5,\ -3)$



따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\{5-(-5)\}\times\{5-(-3)\}=40$

답 **40**

0401 $\mathrm{A_1}(3,\ y_1)$, $\mathrm{A_2}(7,\ y_2)\ (y_1>0,\ y_2>0)$라 하면 두 점 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$는 원 $x^2+y^2=100$ 위의 점이므로

$3^2+{y_1}^2=100$에서 $\qquad {y_1}^2=91$

$\therefore\ y_1=\sqrt{91}\ (\because\ y_1>0)$

$7^2+{y_2}^2=100$에서 $\qquad {y_2}^2=51$

$\therefore\ y_2=\sqrt{51}\ (\because\ y_2>0)$

$\therefore\ \mathrm{A_1}(3,\ \sqrt{91}),\ \mathrm{A_2}(7,\ \sqrt{51})$

이때 $\angle\mathrm{A_1BC_1}=90^\circ$, $\angle\mathrm{A_2BC_2}=90^\circ$이므로 두 삼각형 $\mathrm{A_1BC_1}$, $\mathrm{A_2BC_2}$는 빗변이 각각 $\mathrm{A_1C_1}$, $\mathrm{A_2C_2}$인 직각삼각형이다.
따라서 두 선분 $\mathrm{A_1C_1}$, $\mathrm{A_2C_2}$의 중점은 원의 중심인 원점이므로 두 점 $\mathrm{A_1}$과 $\mathrm{C_1}$, 두 점 $\mathrm{A_2}$와 $\mathrm{C_2}$는 각각 원점에 대하여 대칭이다.

$\therefore\ \mathrm{C_1}(-3,\ -\sqrt{91}),\ \mathrm{C_2}(-7,\ -\sqrt{51})$

즉 $a=-\sqrt{91}$, $b=-7$이므로

$a^2+b^2=140$ 답 **140**

0402 ㄱ. $x^2+y^2=1$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$x^2+y^2=1$

ㄴ. $y=-x$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$x=-y \qquad \therefore\ y=-x$

ㄷ. $y=2x$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$x=2y \qquad \therefore\ y=\dfrac{1}{2}x$

이상에서 대칭이동하였을 때 처음의 도형과 일치하는 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0403 직선 $y=2x+k$를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=-2x+k$

$\therefore\ 2x-y-k=0$

이 직선이 원 $(x-1)^2+(y+1)^2=20$에 접하려면 원의 중심 $(1,\ -1)$과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $2\sqrt{5}$와 같아야 하므로

$\dfrac{|2+1-k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}, \qquad |k-3|=10$

$k-3=\pm 10$

$\therefore\ k=13\ (\because\ k>0)$ 답 ⑤

0404 점 $(-2,\ 5)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(2,\ -5)$

점 $(2,\ -5)$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(2+3,\ -5-2)$, 즉 $(5,\ -7)$

점 $(5,\ -7)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

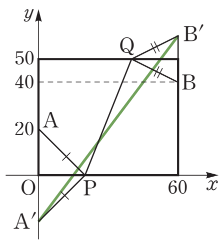
$(-7,\ 5)$

따라서 $a=-7$, $b=5$이므로

$a-b=-12$

답 -12

0405 오른쪽 그림과 같이 좌표평면을 잡고 다람쥐의 출발점의 위치를 A, 도착점의 위치를 B라 하면



$A(0,\ 20)$, $B(60,\ 40)$

으로 놓을 수 있다.

이때 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 점 B를 직선 $y=50$에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

$A'(0,\ -20)$, $B'(60,\ 60)$

또 다람쥐가 아래쪽 벽면에서 거쳐간 지점을 P, 위쪽 벽면에서 거쳐간 지점을 Q라 하면

$\overline{AP}=\overline{A'P}$, $\overline{QB}=\overline{QB'}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}&=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}\\&\geq\overline{A'B'}\\&=\sqrt{(60-0)^2+(60+20)^2}\\&=100\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$의 최솟값이 100이므로 다람쥐가 움직인 총거리는 100 m이다.

답 **100 m**

0406 $y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$이므로 이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 2)$

점 $(-1,\ 2)$를 점 $(1,\ -1)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(p,\ q)$라 하면

$$\frac{-1+p}{2}=1,\ \frac{2+q}{2}=-1$$

$\therefore\ p=3,\ q=-4$

따라서 포물선 $y=x^2+2x+3$을 점 $(1,\ -1)$에 대하여 대칭이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ -4)$이다.

즉 $y=-x^2+ax+b=-\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{4}+b$에서

$$\frac{a}{2}=3,\ \frac{a^2}{4}+b=-4 \qquad \therefore\ a=6,\ b=-13$$

$\therefore\ a+b=-7$

답 ②

0407 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$에서

$(x-1)^2+(y-2)^2=4$

$x^2+y^2-6x-12y+41=0$에서

$(x-3)^2+(y-6)^2=4$

두 원의 중심 $(1,\ 2)$, $(3,\ 6)$을 이은 선분의 중점

$\left(\dfrac{1+3}{2},\ \dfrac{2+6}{2}\right)$, 즉 $(2,\ 4)$가 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$2a+b=4$ ······ ㉠

또 두 점 $(1,\ 2)$, $(3,\ 6)$을 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$와 수직이므로

$$\frac{6-2}{3-1}\times a=-1 \qquad \therefore\ a=-\frac{1}{2}$$

$a=-\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$-1+b=4 \qquad \therefore\ b=5$

$\therefore\ a+b=\dfrac{9}{2}$

답 $\dfrac{9}{2}$

0408 점 $A(1,\ -2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은

$B(-2,\ 1)$

점 C의 좌표를 $(p,\ q)$라 하면 선분 AC의 중점

$\left(\dfrac{1+p}{2},\ \dfrac{-2+q}{2}\right)$가 직선 $y=2x$ 위의 점이므로

$$\frac{-2+q}{2}=2\times\frac{1+p}{2}$$

$\therefore\ 2p-q=-4$ ······ ㉠

또 직선 AC와 직선 $y=2x$가 수직이므로

$$\frac{q-(-2)}{p-1}\times2=-1$$

$\therefore\ p+2q=-3$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=-\dfrac{11}{5}$, $q=-\dfrac{2}{5}$

따라서 $C\left(-\dfrac{11}{5},\ -\dfrac{2}{5}\right)$이므로

$$\overline{BC}=\sqrt{\left(-\frac{11}{5}+2\right)^2+\left(-\frac{2}{5}-1\right)^2}=\sqrt{2}$$

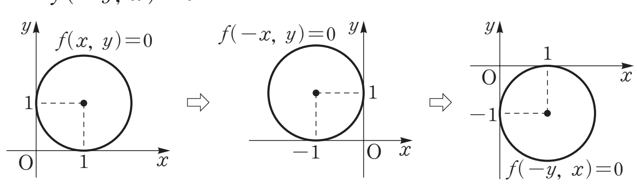
답 $\sqrt{2}$

0409 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(-x,\ y)=0$

방정식 $f(-x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$f(-y,\ x)=0$



따라서 방정식 $f(-y,\ x)=0$이 나타내는 도형은 ①이다.

답 ①

다른 풀이 주어진 원의 방정식은 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

이 식에 x 대신 $-y$, y 대신 x를 대입하면

$(-y-1)^2+(x-1)^2=1$

$\therefore\ (x-1)^2+(y+1)^2=1$

따라서 방정식 $f(-y,\ x)=0$이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(1,\ -1)$이고 반지름의 길이가 1인 원이므로 ①이다.

0410 주어진 평행이동을 $(x,\ y) \longrightarrow (x+m,\ y+n)$이라 하면

$a+m=6,\ 3+n=-2,\ -2+m=1,\ b+n=4$

$\therefore\ m=3,\ n=-5,\ a=3,\ b=9$ … 1단계

따라서 점 $(b,\ a)$, 즉 $(9,\ 3)$이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$(9+3,\ 3-5)$, 즉 $(12,\ -2)$ … 2단계

답 **(12, −2)**

채점 요소	비율
1단계 주어진 평행이동과 a, b의 값 구하기	60 %
2단계 점 $(b,\ a)$가 옮겨지는 점의 좌표 구하기	40 %

0411 주어진 평행이동에 의하여 포물선 $y=x^2-2x$가 옮겨지는 포물선의 방정식은

$y-1=(x+2)^2-2(x+2)$

$\therefore\ y=x^2+2x+1$ … 1단계

이 포물선과 직선 $y=x+4$의 교점의 x좌표는

$x^2+2x+1=x+4$, 즉 $x^2+x-3=0$

의 두 실근이다.

이 이차방정식의 두 실근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$ ...... ㉠ … 2단계

이때 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면

$A(\alpha,\ \alpha+4)$, $B(\beta,\ \beta+4)$

이므로 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{(\alpha+4)+(\beta+4)}{2}\right)$, 즉 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}\right)$ ($\because$ ㉠)

… 3단계

답 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}\right)$

채점 요소	비율
1단계 평행이동한 포물선의 방정식 구하기	30 %
2단계 평행이동한 포물선과 직선의 교점의 x좌표의 합 구하기	40 %
3단계 선분 AB의 중점의 좌표 구하기	30 %

0412 원 $(x+a)^2+(y+b)^2=9$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+b)^2+(y+a)^2=9$ … 1단계

이 원을 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+2+b)^2+(y+a)^2=9$ … 2단계

이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$|-2-b|=|-a|=3$

$|-2-b|=3$에서 $-2-b=\pm3$

$\therefore\ b=-5$ 또는 $b=1$

$|-a|=3$에서 $a=-3$ 또는 $a=3$ … 3단계

따라서 ab의 최댓값은 $-5\times(-3)=15$ … 4단계

답 **15**

채점 요소	비율
1단계 대칭이동한 원의 방정식 구하기	20 %
2단계 평행이동한 원의 방정식 구하기	20 %
3단계 a, b의 값 구하기	40 %
4단계 ab의 최댓값 구하기	20 %

다른 풀이 원 $(x+a)^2+(y+b)^2=9$의 중심의 좌표는

$(-a,\ -b)$

점 $(-a,\ -b)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-b,\ -a)$

점 $(-b,\ -a)$를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-b-2,\ -a)$

따라서 중심의 좌표가 $(-b-2,\ -a)$이고 반지름의 길이가 3인 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$|-b-2|=|-a|=3$

0413 점 Q의 좌표를 $(a,\ b)$, 점 R의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 점 Q는 선분 PR의 중점이므로

$a=\frac{2+x}{2},\ b=\frac{4+y}{2}$ ...... ㉠ … 1단계

이때 점 Q가 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=1$

㉠을 대입하면 $\left(\frac{2+x}{2}\right)^2+\left(\frac{4+y}{2}\right)^2=1$

$\therefore\ (x+2)^2+(y+4)^2=4$ … 2단계

따라서 점 R가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(-2,\ -4)$이고 반지름의 길이가 2인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$\pi\times2^2=4\pi$ … 3단계

답 4π

채점 요소	비율
1단계 두 점 Q, R의 좌표 사이의 관계식 세우기	40 %
2단계 점 R가 나타내는 도형의 방정식 구하기	40 %
3단계 점 R가 나타내는 도형의 넓이 구하기	20 %

0414 전략 p, q를 각각 a에 대한 식으로 나타낸다.

동전을 10번 던지므로 $a+b=10$ $\therefore\ b=10-a$

따라서 점 P를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하는 것을 a번, x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하는 것을 $(10-a)$번 실행한 점이 Q이다.

$\therefore\ p=1+1\times a+(-2)\times(10-a)=3a-19$

$q=2+(-1)\times a+2\times(10-a)=-3a+22$

이때 $\overline{PQ}=11\sqrt{2}$에서 $\overline{PQ}^2=242$이므로

$\{(3a-19)-1\}^2+\{(-3a+22)-2\}^2=242$

$(3a-20)^2=121,\quad 3a-20=\pm11$

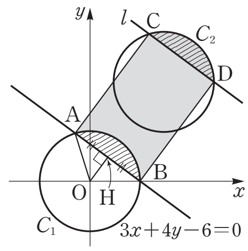
$\therefore\ a=3$ ($\because$ a는 음이 아닌 정수)

따라서 $b=7,\ p=-10,\ q=13$이므로

$ab-pq=3\times7-(-10)\times13=151$

답 **151**

0415 전략 구하는 넓이와 사각형 ABDC의 넓이가 같음을 이용한다.



오른쪽 그림과 같이 직선 $3x+4y-6=0$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 직선을 l이라 하면 원 C_2와 직선 l의 교점이 두 점 C, D이므로 현 AB와 호 AB로 둘러싸인 활꼴과 현 CD와 호 CD로 둘러싸인 활꼴이 합동이다.

즉 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 구하는 넓이는 사각형 ABDC의 넓이와 같다.

이때 점 A의 좌표를 (p, q)라 하면 점 C의 좌표는 $(p+3, q+4)$이므로 직선 AC의 기울기는

$$\frac{(q+4)-q}{(p+3)-p}=\frac{4}{3}$$

직선 $3x+4y-6=0$의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이므로 직선 AB와 직선 AC는 수직이다.

따라서 사각형 ABDC는 직사각형이고

$$\overline{AC}=\sqrt{\{(p+3)-p\}^2+\{(q+4)-q\}^2}$$
$$=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

또 원 C_1의 중심 $O(0, 0)$에서 직선 $3x+4y-6=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{OH}=\frac{|-6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{6}{5}$$

이므로 직각삼각형 AOH에서

$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AO}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{6}{5}\right)^2}=\frac{8}{5}$$

$$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=\frac{16}{5}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\square ABDC=\overline{AB}\times\overline{AC}=\frac{16}{5}\times5=16$$

답 **16**

0416 전략 점 A를 주어진 직선에 대하여 대칭이동한 점을 이용한다.

점 A를 직선 $4x-6y+3=0$에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(a, b)$라 하면 두 점 $A(1, -1)$, $A'(a, b)$를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{1+a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right)$가 직선 $4x-6y+3=0$ 위의 점이므로

$$4\times\frac{1+a}{2}-6\times\frac{-1+b}{2}+3=0$$

$\therefore 2a-3b=-8$ ...... ㉠

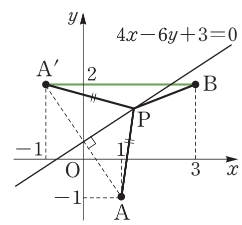
또 두 점 $A(1, -1)$, $A'(a, b)$를 지나는 직선이 직선 $4x-6y+3=0$, 즉 $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}$과 수직이므로

$$\frac{b-(-1)}{a-1}\times\frac{2}{3}=-1$$

$\therefore 3a+2b=1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$

$\therefore A'(-1, 2)$



$\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}$$
$$\geq\overline{A'B}$$
$$=3-(-1)=4$$

$\therefore k=4$

이때 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는 직선 A′B와 직선 $4x-6y+3=0$의 교점이다.

직선 A′B의 방정식은 $y=2$

$y=2$를 $4x-6y+3=0$에 대입하면

$$4x-12+3=0 \qquad \therefore x=\frac{9}{4}$$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{9}{4}, 2\right)$이므로

$$s=\frac{9}{4},\ t=2$$

$$\therefore kst=4\times\frac{9}{4}\times2=18$$

답 **18**

04 도형의 이동

05 집합의 뜻과 포함 관계

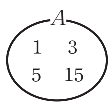
교과서 문제 정복하기

본책 065쪽

0417 ㄱ, ㄹ. '가까운', '무거운'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
이상에서 집합인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 **ㄴ, ㄷ**

0418 답 (1) $\notin$ (2) $\in$ (3) $\in$ (4) $\notin$

0419 답 (1) $\boldsymbol{A=\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}}$
(2) $\boldsymbol{A=\{x \mid x}$**는 15의 양의 약수**$\boldsymbol{\}}$
(3)



0420 1 이상 7 이하의 짝수는 2, 4, 6이므로 주어진 집합은 유한집합이다. 답 **유**

0421 0 미만의 정수는 $-1,\ -2,\ -3,\ \cdots$이므로 주어진 집합은 무한집합이다. 답 **무**

0422 2보다 작은 소수는 존재하지 않으므로 주어진 집합은 공집합이다. 답 **유, 공**
참고 | 공집합은 유한집합이다.

0423 답 **3**

0424 $A=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$이므로 $n(A)=4$ 답 **4**

0425 답 $\boldsymbol{A \subset B}$

0426 $A=\{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ \cdots\}$, $B=\{8,\ 16,\ 24,\ 32,\ \cdots\}$
이므로 $B \subset A$ 답 $\boldsymbol{B \subset A}$

0427 답 (1) $\varnothing$ (2) $\boldsymbol{\{a\},\ \{b\},\ \{c\}}$
(3) $\boldsymbol{\{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{b,\ c\}}$ (4) $\boldsymbol{\{a,\ b,\ c\}}$

0428 답 $\boldsymbol{\varnothing,\ \{x\},\ \{y\},\ \{x,\ y\}}$

0429 주어진 집합을 원소나열법으로 나타내면 $\{1,\ 2,\ 4\}$이므로 구하는 부분집합은
$\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{4\},\ \{1,\ 2\},\ \{1,\ 4\},\ \{2,\ 4\},\ \{1,\ 2,\ 4\}$
답 $\boldsymbol{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{4\},\ \{1,\ 2\},\ \{1,\ 4\},\ \{2,\ 4\},\ \{1,\ 2,\ 4\}}$

0430 답 $\boldsymbol{A=B}$

0431 $x^2-2x-8=0$에서 $(x+2)(x-4)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$
따라서 $A=\{-2,\ 4\}$이므로
$A \neq B$ 답 $\boldsymbol{A \neq B}$

0432 (1) $n(A)=4$이므로 부분집합의 개수는
$2^4=16$
(2) 진부분집합의 개수는
$2^4-1=15$
(3) 3을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는
$2^{4-1}=2^3=8$
답 (1) **16** (2) **15** (3) **8**

유형 익히기

• 본책 066~072쪽

0433 ③ '큰'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
답 ③

0434 ②, ④, ⑤ '맛있는', '높은', '작은'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
따라서 집합인 것은 ①, ③이다. 답 ①, ③

0435 ㄱ, ㄹ. '아름다운', '좋아하는'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
이상에서 집합인 것은 ㄴ, ㄷ의 2개이다. 답 **2**

0436 $A=\{1,\ 3,\ 5\}$
① $0 \notin A$ ③ $4 \notin A$
④ $5 \in A$ ⑤ $7 \notin A$
따라서 옳은 것은 ②이다. 답 ②

0437 $A=\{1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ \cdots\}$
ㄱ. $1 \in A$ (거짓)
ㄴ. $3 \notin A$ (거짓)
이상에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다. 답 **ㄷ, ㄹ**

0438 $x^3-x^2-2x=0$에서
$x(x^2-x-2)=0,\quad x(x+1)(x-2)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
$\therefore A=\{-1,\ 0,\ 2\}$
③ $1 \notin A$ 답 ③

0439 ① $\sqrt{4}=2$는 정수이므로 $\quad \sqrt{4}\in Z$

② $\frac{5}{3}$는 유리수이므로 $\quad \frac{5}{3}\in Q$

③ π는 무리수이므로 $\quad \pi\notin Q$

④ $\sqrt{5}+1$은 실수이므로 $\quad \sqrt{5}+1\in R$

⑤ $i^{100}=(i^4)^{25}=1$은 실수이므로 $\quad i^{100}\in R$

따라서 옳은 것은 ④이다. 답 ④

RPM 비법 노트

***i*의 거듭제곱**

i^n (n은 자연수)의 값은 i, -1, $-i$, 1이 이 순서대로 반복되므로 다음과 같은 규칙을 갖는다.

$$i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i,\ i^{4k+4}=1$$

(단, k는 음이 아닌 정수이다.)

0440 ① $A=\{1, 2, 4, 8\}$

② $A=\{1, 2, 4, 8, 16\}$

③ $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

④ $A=\{4, 8, 12, 16, 20\}$

⑤ $A=\{4, 8, 12, 16\}$

따라서 집합 A를 조건제시법으로 바르게 나타낸 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0441 ①, ②, ④, ⑤ $\{3, 5, 7\}$

③ $\{2, 3, 5, 7\}$

따라서 원소가 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다. 답 ③

0442 각각의 수를 소인수분해하면

① $20=2^2\times5$

② $40=2^3\times5$

③ $100=2^2\times5^2$

④ $150=2\times3\times5^2$

⑤ $250=2\times5^3$

따라서 집합 A의 원소가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

0443 ① 무한집합

② $\{1, 2, 3, \cdots\}$ ⇨ 무한집합

③ $\varnothing$ ⇨ 유한집합

④ $\{4, 8, 12, \cdots, 96\}$ ⇨ 유한집합

⑤ $\{9, 11, 13, \cdots\}$ ⇨ 무한집합

따라서 유한집합인 것은 ③, ④이다. 답 ③, ④

0444 ㄱ. $\{1, 2, 5, 10\}$ ⇨ 유한집합

ㄴ. $\{5, 10, 15, 20, \cdots\}$ ⇨ 무한집합

ㄷ. $\varnothing$ ⇨ 유한집합

ㄹ. $\left\{\cdots, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \cdots\right\}$ ⇨ 무한집합

ㅁ. $\{6, 8, 10, 12, \cdots\}$ ⇨ 무한집합

이상에서 무한집합인 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ의 3개이다. 답 ③

0445 집합 A가 공집합이 되려면 이차부등식 $x^2-2kx-3k+10<0$을 만족시키는 실수 x가 존재하지 않아야 하므로 모든 실수 x에 대하여

$$x^2-2kx-3k+10\geq0$$

이 성립해야 한다.

즉 이차방정식 $x^2-2kx-3k+10=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-(-3k+10)\leq0 \qquad \cdots \text{1단계}$$

$$k^2+3k-10\leq0, \qquad (k+5)(k-2)\leq0$$

$$\therefore\ -5\leq k\leq2 \qquad \cdots \text{2단계}$$

따라서 정수 k는 -5, -4, $\cdots$, 2의 8개이다. $\cdots$ 3단계

답 8

채점 요소		비율
1단계	k에 대한 부등식 세우기	50 %
2단계	k의 값의 범위 구하기	40 %
3단계	정수 k의 개수 구하기	10 %

0446 $A=\{0, 1\}$이므로 $\quad n(A)=2$

$B=\{1, 2, 4, 8\}$이므로 $\quad n(B)=4$

$\therefore\ n(A)+n(B)=6$ 답 6

0447 ② $B=\{2\}$이면 $\quad n(B)=1$

⑤ $E=\{1, 5, 25\}$이므로 $\quad n(E)=3$

답 ②

0448 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 3, 9\}$에 대하여 $x\in A$, $y\in B$일 때, xy의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	1	3	9
1	1	3	9
2	2	6	18
3	3	9	27

$$C=\{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27\}$$

따라서 $n(A)=3$, $n(B)=3$, $n(C)=7$이므로

$$n(A)+n(B)-n(C)=-1$$

답 -1

0449 $A=\{(2, 4), (5, 3), (8, 2), (11, 1)\}$이므로

$$n(A)=4 \qquad \cdots \text{1단계}$$

$B=\{1, 2, 3, \cdots, k\}$이므로 $\quad n(B)=k$

이때 $n(A)+n(B)=10$이므로

$$4+k=10 \qquad \therefore\ k=6 \qquad \cdots \text{2단계}$$

답 6

채점 요소		비율
1단계	$n(A)$ 구하기	50 %
2단계	k의 값 구하기	50 %

0450 ㄱ. a는 집합 A의 원소이므로 $\quad a\in A$ (참)

ㄴ. $b\in A$ 또는 $\{b\}\subset A$ (거짓)

ㄷ. $c\in A$ 또는 $\{c\}\subset A$ (거짓)

05 집합의 뜻과 포함 관계

ㄹ. $a \in A$, $b \in A$, $c \in A$이므로 $\{a, b, c\} \subset A$ (참)
ㅁ. 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이므로
$A \subset \{a, b, c, d\}$ (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ, ㅁ이다. 답 ㄱ, ㄹ, ㅁ

0451 $B=\{1, 2, 3, 6\}$
① 0은 집합 A의 원소가 아니므로 $0 \notin A$
② 3은 집합 B의 원소이므로 $3 \in B$
③ $1 \in A$, $3 \in A$이므로 $\{1, 3\} \subset A$
④ $5 \notin B$이므로 $\{2, 5\} \not\subset B$
⑤ $4 \notin B$이므로 $\{1, 2, 4\} \not\subset B$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0452 ① $1 \in A$ 또는 $\{1\} \subset A$
② $1 \in A$, $2 \in A$이므로 $\{1, 2\} \subset A$
③ $2 \in A$ 또는 $\{2\} \subset A$
④ $\{1, 2\} \in A$이므로 $\{\{1, 2\}\} \subset A$
⑤ 집합 A의 원소는 $1, 2, \{1, 2\}$의 3개이다.
따라서 옳은 것은 ②이다. 답 ②

0453 ① $\varnothing$는 집합 A의 원소이므로 $\varnothing \in A$
② $a \in A$이므로 $\{a\} \subset A$
③ b는 집합 A의 원소이므로 $b \in A$
④ $\varnothing \in A$, $b \in A$이므로 $\{\varnothing, b\} \subset A$
⑤ $\{a, c\} \in A$이므로 $\{\{a, c\}\} \subset A$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

0454 $A=\{0, 1, 2\}$에 대하여 $x \in A$, $y \in A$일 때, xy의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

x \ y	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4

$B=\{0, 1, 2, 4\}$
또 $x \in A$, $y \in A$일 때, $x+2y$의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

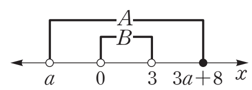
x \ $2y$	0	2	4
0	0	2	4
1	1	3	5
2	2	4	6

$C=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
따라서 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계는
$A \subset B \subset C$ 답 ①

0455 $B=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
$x^2-2x=0$에서
$x(x-2)=0$ $\therefore$ $x=0$ 또는 $x=2$
$\therefore$ $C=\{0, 2\}$
따라서 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계는
$C \subset A \subset B$ 답 ④

0456 주어진 벤다이어그램에서 두 집합 A, B 사이의 포함 관계는 $B \subset A$이다.
① $A \subset B$
② $A \not\subset B$, $B \not\subset A$
③ $A=\{10, 20, 30, 40, \cdots\}$, $B=\{5, 10, 15, 20, \cdots\}$이므로
$A \subset B$
④ $A=\{1, 2, 4\}$, $B=\{1, 2, 4, 8\}$이므로 $A \subset B$
⑤ $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{2, 3, 5\}$이므로 $B \subset A$
답 ⑤

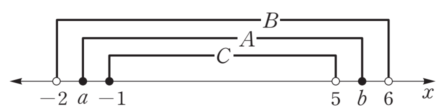
0457 $B \subset A$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



즉 $a \le 0$, $3a+8 \ge 3$이어야 하므로
$-\frac{5}{3} \le a \le 0$
따라서 정수 a는 -1, 0의 2개이다. 답 2

0458 $(x^2-9)(2x-a)=0$에서
$(x+3)(x-3)(2x-a)=0$
$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\frac{a}{2}$
$\therefore$ $A=\left\{-3, 3, \frac{a}{2}\right\}$
이때 $B=\{2, 3\}$이므로 $B \subset A$이려면 $2 \in A$이어야 한다.
즉 $2=\frac{a}{2}$이므로
$a=4$ 답 4

0459 $C \subset A \subset B$가 성립하도록 세 집합 A, B, C를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉 $-2<a \le -1$, $5 \le b<6$이어야 하고 a, b는 정수이므로
$a=-1$, $b=5$
$\therefore$ $a+b=4$ 답 4

0460 $A \subset B$이려면 $2 \in B$이어야 하므로
$a^2+1=2$ 또는 $a-3=2$
(i) $a^2+1=2$, 즉 $a=-1$ 또는 $a=1$일 때
$a=-1$이면 $A=\{1, 2\}$, $B=\{-4, 1, 2\}$이므로
$A \subset B$
$a=1$이면 $A=\{-1, 2\}$, $B=\{-2, 1, 2\}$이므로
$A \not\subset B$
(ii) $a-3=2$, 즉 $a=5$일 때
$A=\{-5, 2\}$, $B=\{1, 2, 26\}$이므로
$A \not\subset B$
(i), (ii)에서 $a=-1$ 답 -1

0461 $A=\{1, 3, 9\}$에 대하여 $X\subset A$이고 $X\neq A$인 집합 X는 집합 A의 진부분집합이다.
따라서 집합 X는
$\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{9\}, \{1, 3\}, \{1, 9\}, \{3, 9\}$

답 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{9\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 9\}$, $\{3, 9\}$

0462 $A=\{4, 8, 12, 16, 20\}$에 대하여 집합 X는 원소가 2개인 집합 A의 부분집합이므로
$\{4, 8\}, \{4, 12\}, \{4, 16\}, \{4, 20\}, \{8, 12\},$
$\{8, 16\}, \{8, 20\}, \{12, 16\}, \{12, 20\}, \{16, 20\}$
의 10개이다. 답 ③

다른 풀이 집합 X의 개수는 집합 A의 원소 5개 중에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_5C_2=10$

0463 (i) 원소가 1개인 경우
$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$의 6개
(ii) 원소가 2개인 경우
$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\},$
$\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$의 9개
(iii) 원소가 3개인 경우
$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}$의 2개
이상에서 구하는 부분집합의 개수는
$6+9+2=17$ 답 ④

0464 $A=B$이려면 $4\in B$이어야 하므로
$b^2=4$ 또는 $b^2-1=4$
(i) $b^2=4$일 때, $b=2$ ($\because$ b는 자연수)
이때 $A=\{1, a, 4\}$, $B=\{1, 3, 4\}$이므로 $a=3$
(ii) $b^2-1=4$일 때, 이를 만족시키는 자연수 b는 존재하지 않는다.
(i), (ii)에서 $a=3$, $b=2$
$\therefore a+b=5$ 답 5

0465 $A=\{1, 4, 7, 10\}$
$A\subset B$이고 $B\subset A$이면 $A=B$이므로
$a+1=7$, $b=10$ 또는 $a+1=10$, $b=7$
$\therefore a=6$, $b=10$ 또는 $a=9$, $b=7$
그런데 $a>b$이므로 $a=9$, $b=7$
$\therefore a-b=2$ 답 2

0466 $A=B$이려면 $5\in A$이어야 한다.
$x^2-ax+10=0$에 $x=5$를 대입하면
$25-5a+10=0$ $\therefore a=7$ … 1단계
따라서 $x^2-7x+10=0$에서 $(x-2)(x-5)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=5$
즉 $A=\{2, 5\}$이므로 $b=2$ … 2단계
$\therefore ab=14$ … 3단계

답 14

	채점 요소	비율
1단계	a의 값 구하기	40 %
2단계	b의 값 구하기	40 %
3단계	ab의 값 구하기	20 %

0467 $A=B$이므로
$x+1=2x-1$ 또는 $x+1=3x-2$
(i) $x+1=2x-1$, 즉 $x=2$일 때
$A=\{3, 4\}$, $B=\{3, 4\}$이므로 $A=B$
(ii) $x+1=3x-2$, 즉 $x=\frac{3}{2}$일 때
$A=\left\{\frac{9}{4}, \frac{5}{2}\right\}$, $B=\left\{2, \frac{5}{2}\right\}$이므로 $A\neq B$
(i), (ii)에서 $x=2$ 답 2

0468 $n(A)=a$, $n(B)=b$라 하면
$2^a=128=2^7$에서 $a=7$
$2^b-1=63$에서 $2^b=64=2^6$ $\therefore b=6$
$\therefore n(A)-n(B)=1$ 답 ①

0469 $A=\{2, 3, 5, 7, 11\}$
따라서 집합 A의 진부분집합의 개수는
$2^5-1=31$ 답 31

0470 $x^2+x-6<0$에서 $(x+3)(x-2)<0$
$\therefore -3<x<2$
$\therefore A=\{-2, -1, 0, 1\}$
따라서 집합 A의 부분집합의 개수는
$2^4=16$ 답 16

0471 집합 A의 원소 중 5의 배수는
$5, 10, 15, \cdots, 50$
따라서 조건을 만족시키는 집합은 $\{5, 10, 15, \cdots, 50\}$의 부분집합 중에서 공집합을 제외한 것이므로 그 개수는
$2^{10}-1=1023$ 답 1023

0472 $A=\{1, 2, 7, 14\}$
집합 X는 집합 A의 진부분집합 중에서 2를 반드시 원소로 갖는 집합이므로 집합 X의 개수는
$2^{4-1}-1=2^3-1=7$ 답 7

0473 집합 A는 집합 S의 부분집합 중에서 1은 반드시 원소로 갖고, 2, 5는 원소로 갖지 않는 집합이므로 집합 A의 개수는
$2^{5-1-2}=2^2=4$ 답 4

0474 집합 A의 부분집합 중에서 1, 2는 반드시 원소로 갖고, 3은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수가 8이므로
$2^{n-2-1}=8$, $2^{n-3}=2^3$
$n-3=3$ $\therefore n=6$ 답 6

0475 $A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
집합 A의 부분집합 중에서 짝수인 원소가 2개인 집합은 집합 A의 짝수인 원소 6, 12, 18 중 6, 12 또는 6, 18 또는 12, 18만을 원소로 가져야 한다.
(i) 6, 12는 반드시 원소로 갖고, 18은 원소로 갖지 않는 집합의 개수는
$2^{6-2-1}=2^3=8$
(ii) 6, 18은 반드시 원소로 갖고, 12는 원소로 갖지 않는 집합의 개수는
$2^{6-2-1}=2^3=8$
(iii) 12, 18은 반드시 원소로 갖고, 6은 원소로 갖지 않는 집합의 개수는
$2^{6-2-1}=2^3=8$
이상에서 구하는 집합의 개수는
$8+8+8=24$ 답 **24**

0476 $x^2-2x-3=0$에서 $(x+1)(x-3)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$
$\therefore A=\{-1, 3\}$
$|x|<4$에서 $-4<x<4$
$\therefore B=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
따라서 집합 X의 개수는 집합 B의 부분집합 중에서 -1, 3을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로
$2^{7-2}=2^5=32$ 답 ④

0477 $A=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$
집합 X의 개수는 집합 A의 부분집합 중에서 2, 3을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로
$2^{n-2}=128=2^7$
$n-2=7 \quad \therefore n=9$ 답 **9**

0478 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$ … 1단계
집합 X는 집합 A의 부분집합 중 2, 4, 6, 8을 반드시 원소로 갖는 집합에서 두 집합 A, B를 제외한 것과 같으므로 집합 X의 개수는
$2^{10-4}-2=2^6-2=64-2=62$ … 2단계
답 **62**

채점 요소	비율
1단계 두 집합 A, B를 원소나열법으로 나타내기	30 %
2단계 집합 X의 개수 구하기	70 %

0479 $A=\{4, 7, 10, 13, 16, 19\}$
집합 A의 부분집합 중에서 적어도 한 개의 소수를 원소로 갖는 집합의 개수는 모든 부분집합의 개수에서 소수 7, 13, 19를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^6-2^{6-3}=64-8=56$ 답 **56**

참고 | 집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여 집합 A의 특정한 원소 $k\,(k<n)$개 중에서 적어도 한 개를 원소로 갖는 부분집합의 개수
⇨ 2^n-2^{n-k}

0480 집합 A의 부분집합 중에서 a 또는 c를 원소로 갖는 집합의 개수는 모든 부분집합의 개수에서 a와 c를 모두 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^6-2^{6-2}=64-16=48$ 답 **48**

다른 풀이 집합 A의 부분집합 중에서
a를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는
$2^{6-1}=2^5=32$
c를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는
$2^{6-1}=2^5=32$
a, c를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는
$2^{6-2}=2^4=16$
따라서 구하는 집합의 개수는
$32+32-16=48$

0481 $B=\{1, 3, 9\}$
집합 A의 부분집합 중에서 집합 B의 원소를 적어도 하나 포함하는 집합의 개수는 모든 부분집합의 개수에서 1, 3, 9를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$2^5-2^{5-3}=32-4=28$ 답 ④

0482 $A=\{3, 6, 9, 12, 15\}$
집합 A의 진부분집합 중에서 홀수를 1개 이상 원소로 갖는 집합의 개수는 집합 A의 진부분집합의 개수에서 홀수 3, 9, 15를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같다.
따라서 구하는 집합의 개수는
$(2^5-1)-2^{5-3}=32-1-4=27$ 답 **27**

시험에 꼭 나오는 문제
• 본책 073~075쪽

0483 ㄴ, ㄷ. '예쁜', '가까운'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
이상에서 집합인 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄹ

0484 $A=\{1, 2\}$, $B=\{0, 1, 2, 4\}$에 대하여 $x\in A$, $y\in B$일 때, $x+y$의 값을 구하면 다음 표와 같다.

x \ y	0	1	2	4
1	1	2	3	5
2	2	3	4	6

$\therefore C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

따라서 집합 C의 모든 원소의 합은

$1+2+3+4+5+6=21$ 답 **21**

0485 ①, ② 원소가 1개 있으므로 공집합이 아니다.
③ $\{3\}$이므로 공집합이 아니다.
⑤ $\{6, 12, 18, \cdots\}$이므로 공집합이 아니다.
따라서 공집합인 것은 ④이다. 답 ④

0486 ① $n(\{ㄱ, ㄴ, ㄷ\})-n(\{ㄹ, ㅁ\})=3-2=1$
② $n(\{1\})+n(\{3\})=1+1=2$
③ $n(\{x, y\})=n(\{8, 9\})=2$
④ $A=B$이면 $A\subset B$이지만 $n(A)=n(B)$이다.
⑤ $n(\varnothing)+n(\{2\})+n(\{0, \varnothing\})=0+1+2=3$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

0487 이차방정식 $x^2-4x+6=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(-2)^2-1\times6=-2<0$$

이므로 이차방정식 $x^2-4x+6=0$은 실근을 갖지 않는다.

$\therefore n(A)=0$

따라서 $n(B)=n(A)=0$이어야 하므로 이차방정식 $x^2+ax+2a=0$이 실근을 갖지 않아야 한다.
이차방정식 $x^2+ax+2a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=a^2-4\times1\times2a<0$

$a(a-8)<0$ $\therefore 0<a<8$

즉 정수 a는 1, 2, 3, $\cdots$, 7의 7개이다. 답 **7**

0488 ① $\varnothing$는 집합 A의 원소이므로 $\varnothing\in A$
② $1\in A$이므로 $\{1\}\subset A$
③ $\varnothing\in A$, $\{\varnothing\}\in A$이므로 $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\subset A$
④ $\{1\}\not\in A$이므로 $\{\varnothing, \{1\}\}\not\subset A$
⑤ $\{\varnothing\}$는 집합 A의 원소이므로 $\{\varnothing\}\in A$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

0489 $X=\{2, 3, 5, 7\}$, $Y=\{2, 5\}$, $Z=\{2, 3, 5\}$
이므로 세 집합 X, Y, Z 사이의 포함 관계는

$Y\subset Z\subset X$ 답 ④

0490 (i) $a=5$일 때

$(x-5)(x-a)=0$에서 $(x-5)^2=0$

$\therefore x=5$

따라서 $A=\{5\}$이므로 $A\subset B$

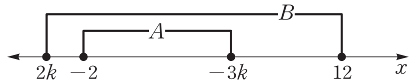
(ii) $a\neq5$일 때

$(x-5)(x-a)=0$에서 $x=5$ 또는 $x=a$

따라서 $A=\{5, a\}$이므로 $A\subset B$를 만족시키는 양수 a는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=5$ 답 **5**

0491 $A\subset B$가 성립하도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉 $2k\leq-2$, $-3k\leq12$이어야 하므로

$-4\leq k\leq-1$

따라서 $M=-1$, $m=-4$이므로 $Mm=4$ 답 **4**

0492 조건 (가)에서 $1\not\in X$, $3\not\in X$이고 조건 (나)에서 $S(X)$의 값이 홀수이므로 집합 X는 집합 A의 홀수인 원소 5, 7 중에서 하나만을 원소로 가져야 한다.
따라서 $S(X)$의 값이 최대가 되려면 집합 X는 집합 A의 원소 중 짝수인 2, 4, 6을 모두 원소로 갖고, 홀수인 7도 원소로 가져야 하므로 $X=\{2, 4, 6, 7\}$
즉 $S(X)$의 최댓값은

$2+4+6+7=19$ 답 ④

0493 $A\subset B$이고 $B\subset A$이므로 $A=B$이다.
따라서 $1\in B$이어야 하므로 $a^2-3=1$, $a^2=4$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

(i) $a=-2$일 때

$A=\{1, 3, 4\}$, $B=\{1, 3, 4\}$이므로 $A=B$

(ii) $a=2$일 때

$A=\{1, 4, 7\}$, $B=\{1, 3, 4\}$이므로 $A\neq B$

(i), (ii)에서 $a=-2$ 답 **−2**

0494 집합 A의 진부분집합 중에서 a_1, a_2를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수가 63이므로

$2^{n-2}-1=63$, $2^{n-2}=64=2^6$

$n-2=6$ $\therefore n=8$ 답 **8**

0495 집합 A의 부분집합 중 조건 (가), (나)를 만족시키는 집합 X의 개수는 다음과 같다.

(i) $8\in X$인 경우

집합 X의 모든 원소의 곱은 8의 배수이다.
집합 A의 부분집합 중 8을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$2^{6-1}=2^5=32$

이때 $n(X)\geq2$이므로 $n(X)=1$, 즉 $X=\{8\}$인 경우를 제외하면 집합 X의 개수는

$32-1=31$

(ii) $8\not\in X$인 경우

집합 X의 모든 원소의 곱이 8의 배수이려면 4, 6을 반드시 원소로 가져야 한다.
집합 A의 부분집합 중 8은 원소로 갖지 않고, 4, 6은 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$2^{6-1-2}=2^3=8$

(i), (ii)에서 구하는 집합 X의 개수는

$31+8=39$

답 39

0496 $x^2-7x+12=0$에서 $(x-3)(x-4)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=4$

$\therefore A=\{3, 4\}$

또 $B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이고, $A\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X의 개수는 집합 B의 부분집합 중에서 3, 4를 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{6-2}=2^4=16$

답 16

0497 집합 A의 부분집합 중에서 적어도 하나의 2의 배수를 원소로 갖고, 3의 배수는 원소로 갖지 않는 집합은 3, 6, 9를 원소로 갖지 않고 2, 4, 8 중 적어도 하나를 원소로 갖는다.
따라서 구하는 집합의 개수는 집합 $\{2, 4, 5, 7, 8\}$의 모든 부분집합의 개수에서 2, 4, 8을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같으므로

$2^5-2^{5-3}=32-4=28$

답 ②

0498 집합 A의 원소는 자연수이고, $x\in A$이면 $\frac{64}{x}\in A$이므로 x가 될 수 있는 수는 64의 양의 약수인 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64이다. … 1단계
이때 1과 64, 2와 32, 4와 16은 둘 중 하나가 집합 A의 원소이면 나머지 하나도 반드시 집합 A의 원소이어야 한다.
따라서 집합 A의 원소의 개수는 $A=\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$일 때 최대이고, $A=\{8\}$일 때 최소이다. … 2단계
즉 $M=7$, $m=1$이므로

$M-m=6$ … 3단계

답 6

채점 요소		비율
1단계	x가 될 수 있는 수 구하기	30 %
2단계	원소의 개수가 최대일 때와 최소일 때의 집합 A 구하기	50 %
3단계	$M-m$의 값 구하기	20 %

0499 $x^2-6x+8\le 0$에서 $(x-2)(x-4)\le 0$

$\therefore 2\le x\le 4$

$\therefore A=\{x|2\le x\le 4\}$ … 1단계

이때 $A\subset B$이려면

$k>4$ … 2단계

따라서 정수 k의 최솟값은 5이다. … 3단계

답 5

채점 요소		비율
1단계	집합 A 구하기	40 %
2단계	k의 값의 범위 구하기	50 %
3단계	정수 k의 최솟값 구하기	10 %

0500 $A=\{-1, 0, 1, 2\}$에 대하여 $a\in A$, $b\in A$일 때, a^2+b^2의 값을 구하면 다음 표와 같다.

a \ b	-1	0	1	2
-1	2	1	2	5
0	1	0	1	4
1	2	1	2	5
2	5	4	5	8

$\therefore B=\{0, 1, 2, 4, 5, 8\}$ … 1단계

따라서 집합 B의 부분집합의 개수는

$2^6=64$ … 2단계

답 64

채점 요소		비율
1단계	집합 B를 원소나열법으로 나타내기	60 %
2단계	집합 B의 부분집합의 개수 구하기	40 %

0501 $\{a, b, c\}\subset X$, $\{a, b, c, g\}\not\subset X$에서 집합 X는 a, b, c는 반드시 원소로 갖고, g는 원소로 갖지 않아야 한다. … 1단계
따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^{7-3-1}=2^3=8$ … 2단계

답 8

채점 요소		비율
1단계	집합 X가 a, b, c는 원소로 갖고, g는 원소로 갖지 않음을 알기	50 %
2단계	집합 X의 개수 구하기	50 %

0502 전략 n 대신에 주어진 숫자를 대입하여 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $4^1=4$, $4^2=16$, $4^3=64$, $\cdots$

따라서 4^k의 일의 자리의 수는 4, 6이 반복되므로

$A(4)=\{4, 6\}$

$\therefore n(A(4))=2$ (참)

ㄴ. $8^1=8$, $8^2=64$, $8^3=512$, $8^4=4096$, $8^5=32768$, $\cdots$

따라서 8^k의 일의 자리의 수는 8, 4, 2, 6이 반복되므로

$A(8)=\{2, 4, 6, 8\}$

$\therefore A(4)\subset A(8)$ (거짓)

ㄷ. $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$, $\cdots$

따라서 3^k의 일의 자리의 수는 3, 9, 7, 1이 반복되므로

$A(3)=\{1, 3, 7, 9\}$

이때 $m=5$이면 3^5, 즉 243의 일의 자리의 수가 3이므로

$A(3^5)=\{1, 3, 7, 9\}$

$\therefore A(3^5)=A(3)$

따라서 $A(3^m)=A(3)$을 만족시키는 2 이상의 자연수 m이 존재한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

참고 | $A(3^3)=A(27)=\{1, 3, 7, 9\}$이므로 $A(3^m)=A(3)$을 만족시키는 2 이상의 자연수 m의 최솟값은 3이다.

0503 전략 a_n의 값에 따라 경우를 나누어 생각한다.

a_n의 값에 따라 집합 A_n의 개수를 구하면 다음과 같다.

(i) $a_n=1$인 경우

$\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}$의 5개

(ii) $a_n=2$인 경우

원소의 최솟값과 최댓값이 각각

1, 3 또는 2, 4 또는 3, 5 또는 4, 6

이어야 한다.

이때 집합 A_n의 원소의 최솟값과 최댓값이 각각 1, 3이려면 1, 3은 반드시 원소로 갖고, 4, 5, 6은 원소로 갖지 않아야 하므로 그 개수는

$2^{6-2-3}=2^1=2$

마찬가지로 최솟값과 최댓값이 각각 2, 4 또는 3, 5 또는 4, 6인 집합 A_n의 개수도 각각 2이므로 $a_n=2$인 집합 A_n의 개수는

$2\times4=8$

(iii) $a_n=3$인 경우

원소의 최솟값과 최댓값이 각각

1, 4 또는 2, 5 또는 3, 6

이어야 한다.

이때 집합 A_n의 원소의 최솟값과 최댓값이 각각 1, 4이려면 1, 4는 반드시 원소로 갖고, 5, 6은 원소로 갖지 않아야 하므로 그 개수는

$2^{6-2-2}=2^2=4$

마찬가지로 최솟값과 최댓값이 각각 2, 5 또는 3, 6인 집합 A_n의 개수도 각각 4이므로 $a_n=3$인 집합 A_n의 개수는

$4\times3=12$

(iv) $a_n=4$인 경우

원소의 최솟값과 최댓값이 각각

1, 5 또는 2, 6

이어야 한다.

이때 집합 A_n의 원소의 최솟값과 최댓값이 각각 1, 5이려면 1, 5는 반드시 원소로 갖고, 6은 원소로 갖지 않아야 하므로 그 개수는

$2^{6-2-1}=2^3=8$

마찬가지로 최솟값과 최댓값이 각각 2, 6인 집합 A_n의 개수도 8이므로 $a_n=4$인 집합 A_n의 개수는

$8\times2=16$

(v) $a_n=5$인 경우

집합 A의 부분집합 중 1, 6을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수와 같으므로

$2^{6-2}=2^4=16$

이상에서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{57}$

$=1\times5+2\times8+3\times12+4\times16+5\times16$

$=201$

답 **201**

참고 | 집합 A의 부분집합 중 원소가 두 개 이상인 집합의 개수는 집합 A의 모든 부분집합의 개수에서 원소가 하나도 없거나 원소가 한 개인 부분집합의 개수를 뺀 것과 같으므로

$2^6-1-6=57$

0504 전략 특정한 원소를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수를 이용한다.

집합 A의 부분집합 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$2^{4-1}=2^3=8$

이므로 집합 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{15}$ 중에서 1을 원소로 갖는 집합은 8개이다.

마찬가지로 2, 4, 8을 원소로 갖는 집합도 각각 8개씩이므로

$f(A_1)\times f(A_2)\times f(A_3)\times\cdots\times f(A_{15})$

$=1^8\times2^8\times4^8\times8^8$

$=2^8\times2^{16}\times2^{24}=2^{48}$

$\therefore m=48$

집합 B의 부분집합 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수는

$2^{5-1}=2^4=16$

이므로 집합 $B_1, B_2, B_3, \cdots, B_{31}$ 중에서 1을 원소로 갖는 집합은 16개이다.

마찬가지로 3, 9, 27, 81을 원소로 갖는 집합도 각각 16개씩이므로

$f(B_1)\times f(B_2)\times f(B_3)\times\cdots\times f(B_{31})$

$=1^{16}\times3^{16}\times9^{16}\times27^{16}\times81^{16}$

$=3^{16}\times3^{32}\times3^{48}\times3^{64}=3^{160}$

$\therefore n=160$

$\therefore \frac{n}{m}=\frac{160}{48}=\frac{10}{3}$

답 $\mathbf{\frac{10}{3}}$

05 집합의 뜻과 포함 관계

06 집합의 연산

교과서 문제 정복하기

본책 077쪽, 079쪽

0505 답 $\{1, 3, 5, 9, 13\}$ **0506** 답 $\{a, b, c, d\}$

0507 $A=\{1, 2, 4, 8\}$이므로
$A\cup B=\{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$ 답 $\{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$

0508 답 $\{2, 7\}$ **0509** 답 $\varnothing$

0510 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 20\}$, $B=\{6, 12, 18, 24, \cdots\}$
이므로 $A\cap B=\{6, 12, 18\}$ 답 $\{6, 12, 18\}$

0511 답 (1) $\{1, 2, 5, 7, 9, 10\}$ (2) $\{1, 2\}$

0512 $A\cap B=\varnothing$이므로 두 집합 A, B는 서로소이다.
답 서로소이다.

0513 $A=\{2, 4, 6, 8\}$이므로 $A\cap B=\{6\}$
따라서 두 집합 A, B는 서로소가 아니다. 답 서로소가 아니다.

0514 $A\cap B=\varnothing$이므로 두 집합 A, B는 서로소이다.
답 서로소이다.

0515 답 $\{2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$

0516 $B=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}=U$이므로
$B^C=\varnothing$ 답 $\varnothing$

0517 답 $\{a, b, d\}$

0518 $A=\{1, 3, 5, 15\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$이므로
$A-B=\{1, 3, 5, 15\}$ 답 $\{1, 3, 5, 15\}$

0519 답 (1) $\{1, 7, 8, 9\}$ (2) $\{1, 2, 6, 8\}$
(3) $\{2, 6\}$ (4) $\{7, 9\}$

0520 $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
$=\{2, 4\}\cap\{1, 2, 3, 5\}$
$=\{2\}$ 답 $\{2\}$

0521 $(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C)$
$=\{1, 2, 3\}\cup\{3, 5\}$
$=\{1, 2, 3, 5\}$
답 $\{1, 2, 3, 5\}$

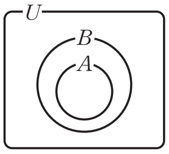
0522 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
$=\{0, 1\}\cup\{1, 3, 5\}$
$=\{0, 1, 3, 5\}$ 답 $\{0, 1, 3, 5\}$

0523 답 $\varnothing$ **0524** 답 A

0525 답 $\varnothing$ **0526** 답 U

0527 답 A **0528** 답 U

0529 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $A\cap B=A$ (참)
ㄴ. $A\cup B=B$ (거짓)
ㄷ. $A-B=\varnothing$ (참)
ㄹ. $A\neq B$이므로 $B-A\neq\varnothing$ (거짓)
ㅁ. $B^C\subset A^C$ (참)
ㅂ. $A\cap B^C=A-B=\varnothing$이므로 $(A\cap B^C)\subset B$ (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㅁ, ㅂ이다.
답 ㄱ, ㄷ, ㅁ, ㅂ

0530 답 (가) 드모르간의 법칙 (나) 결합법칙

0531 답 (가) 드모르간의 법칙 (나) 분배법칙

0532 (1) $A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$이므로
$(A\cup B)^C=\{4\}$
(2) $A^C=\{3, 4, 5\}$, $B^C=\{1, 4, 7\}$이므로
$A^C\cap B^C=\{4\}$
(3) $A\cap B=\{2, 6\}$이므로
$(A\cap B)^C=\{1, 3, 4, 5, 7\}$
(4) $A^C=\{3, 4, 5\}$, $B^C=\{1, 4, 7\}$이므로
$A^C\cup B^C=\{1, 3, 4, 5, 7\}$
답 (1) $\{4\}$ (2) $\{4\}$
(3) $\{1, 3, 4, 5, 7\}$ (4) $\{1, 3, 4, 5, 7\}$

0533 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$이므로
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=7+5-10=2$ 답 2

0534 (1) $n(A^C)=n(U)-n(A)=60-37=23$
(2) $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=40-22=18$
(3) $n(A\cap B^C)=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
$=37-22=15$
(4) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=37+40-22=55$
답 (1) 23 (2) 18 (3) 15 (4) 55

0535 (1) $n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)$
$=n(U)-n(A\cap B)$
$=50-16=34$

(2) $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A\cup B)$
$=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}$
$=50-(32+28-16)=6$

답 (1) **34** (2) **6**

0536 $n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)$
$-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=50+35+26-9-7-8+4$
$=91$

답 **91**

유형 익히기

● 본책 080~089쪽

0537 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$, $B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$,
$C=\{3, 6, 9\}$이므로
$A\cap(B\cup C)=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}\cap\{2, 3, 4, 5, 6, 9\}$
$=\{2, 3, 4, 5, 6\}$

답 $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

0538 $C=\{1, 2, 4, 8\}$
③ $(A\cap B)\cap C=\{4\}\cap\{1, 2, 4, 8\}=\{4\}$
④ $(A\cup B)\cap C=\{3, 4, 5, 6, 8, 9\}\cap\{1, 2, 4, 8\}=\{4, 8\}$
⑤ $A\cup(B\cap C)=\{3, 4, 6, 8\}\cup\{4\}=\{3, 4, 6, 8\}$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

0539 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$,
$B=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$이므로
$A\cap B=\{1, 2, 3, 6\}=\{x|x$는 6의 양의 약수$\}$
$\therefore\ p=6$

답 **6**

참고 | $A\cap B$는 24와 30의 양의 공약수의 집합이므로 24와 30의 최대공약수인 6의 양의 약수의 집합이다.

0540 ① $A\cap B=\{8\}$
② $A\cap B=\varnothing$
③ $A=\{1, 3, 5, 7, \cdots\}$, $B=\{3, 6, 9, 12, \cdots\}$이므로
$A\cap B=\{3, 9, 15, 21, \cdots\}$
④ $A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{2, 4, 8, 16, \cdots\}$이므로
$A\cap B=\{2\}$
⑤ $|x|>1$에서 $x<-1$ 또는 $x>1$이므로
$B=\{\cdots, -3, -2, 2, 3, \cdots\}$
$\therefore\ A\cap B=\varnothing$
따라서 두 집합 A, B가 서로소인 것은 ②, ⑤이다.

답 ②, ⑤

0541 ㄱ. $\{2, 4, 6, \cdots\}$
ㄴ. $\{1, 3, 5, \cdots\}$
ㄷ. $x^2-6x+8=0$에서 $(x-2)(x-4)=0$
$\therefore\ x=2$ 또는 $x=4$
따라서 주어진 집합은 $\{2, 4\}$이다.
ㄹ. $\{1, 3, 9\}$
ㅁ. $x^2<0$을 만족시키는 자연수 x는 없으므로 주어진 집합은 $\varnothing$이다.
이상에서 집합 $\{1, 3, 5, 7\}$과 서로소인 집합은 ㄱ, ㄷ, ㅁ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㅁ

0542 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $B=\{1, 4, 7, 10, 13, \cdots\}$
이므로 $A\cap B=\{1, 4, 7, 10\}$ … 1단계
즉 집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 1, 4, 7, 10을 원소로 갖지 않는 집합이다. … 2단계
따라서 집합 X의 개수는
$2^{10-4}=2^6=64$ … 3단계

답 **64**

채점 요소		비율
1단계	집합 $A\cap B$ 구하기	30 %
2단계	집합 X의 조건 구하기	40 %
3단계	집합 X의 개수 구하기	30 %

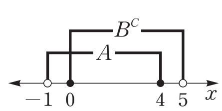
0543 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$, $A=\{1, 2, 4, 8\}$,
$B=\{2, 4, 6, 8\}$이므로
$A^C=\{3, 5, 6, 7, 9\}$
$\therefore\ A^C-B=\{3, 5, 6, 7, 9\}-\{2, 4, 6, 8\}=\{3, 5, 7, 9\}$
따라서 집합 A^C-B의 모든 원소의 합은
$3+5+7+9=24$

답 **24**

0544 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $A=\{3, 5, 7, 9\}$,
$B=\{2, 5, 8\}$이므로
$A\cup B=\{2, 3, 5, 7, 8, 9\}$, $A\cap B=\{5\}$
$\therefore\ (A\cup B)-(A\cap B)=\{2, 3, 5, 7, 8, 9\}-\{5\}$
$=\{2, 3, 7, 8, 9\}$

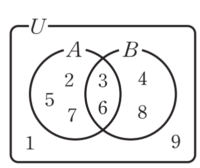
답 $\{2, 3, 7, 8, 9\}$

0545 $B^C=\{x|0\le x<5\}$이므로
오른쪽 그림에서
$A\cup B^C=\{x|-1<x<5\}$



답 ①

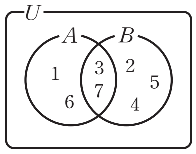
0546 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$이므로 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.
$\therefore\ B=\{3, 4, 6, 8\}$



답 $\{3, 4, 6, 8\}$

06
집합의 연산

0547 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$이므로 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



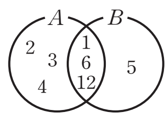
$\therefore B=\{2, 3, 4, 5, 7\}$

답 ⑤

0548 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로

$A-B=\{2, 3, 4\}$, $B-A=\{5\}$

따라서 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



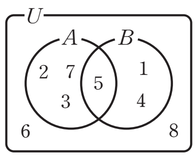
$B=\{1, 5, 6, 12\}$

즉 집합 B의 모든 원소의 합은

$1+5+6+12=24$

답 24

0549 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이므로 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



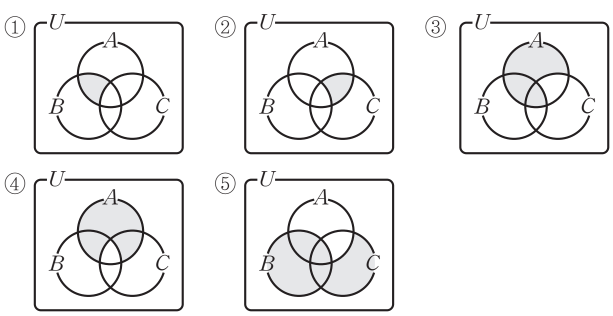
$\therefore B=\{1, 4, 5\}$

따라서 집합 B의 부분집합의 개수는

$2^3=8$

답 8

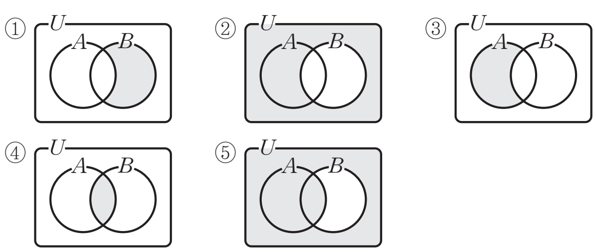
0550 각 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 색칠한 부분을 나타내는 것은 ③이다.

답 ③

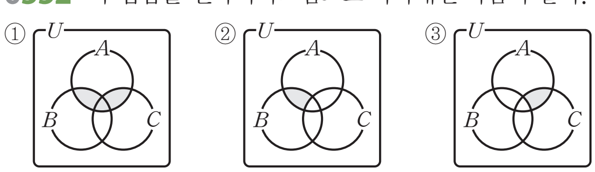
0551 각 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

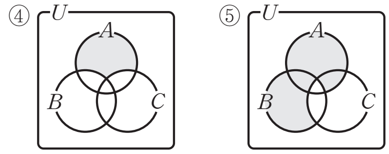


따라서 색칠한 부분을 나타내는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0552 각 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.





따라서 색칠한 부분을 나타내는 것은 ④이다.

답 ④

0553 $A\cap B=\{1, 5\}$이므로 $\quad 5\in A$

즉 $a^2+1=5$이므로 $\quad a^2=4$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

(i) $a=-2$일 때, $A=\{1, 2, 5\}$, $B=\{-7, -4, 5\}$이므로

$A\cap B=\{5\}$

(ii) $a=2$일 때, $A=\{1, 2, 5\}$, $B=\{0, 1, 5\}$이므로

$A\cap B=\{1, 5\}$

(i), (ii)에서 $\quad a=2$

답 2

0554 $A-B=\{3\}$이므로 $2a-b$, 1, 5는 $A\cap B$의 원소이다.

즉 $2a-b\in B$, $1\in B$이므로 $\quad a+3b=1$, $2a-b=9$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=4$, $b=-1$

$\therefore a+b=3$

답 3

0555 $B-A=\{5, 7\}$이므로 5, 7은 집합 B의 원소이다.

(i) $a+2=5$, 즉 $a=3$일 때

$A=\{1, 4, 6, 9\}$, $B=\{4, 5, 7\}$이므로

$B-A=\{5, 7\}$

(ii) $4a-5=5$, 즉 $a=\frac{5}{2}$일 때

$A=\left\{1, 4, 5, \frac{25}{4}\right\}$, $B=\left\{4, \frac{9}{2}, 5\right\}$이므로

$B-A=\left\{\frac{9}{2}\right\}$

(i), (ii)에서 $\quad a=3$

따라서 $A=\{1, 4, 6, 9\}$이므로 집합 A의 모든 원소의 곱은

$1\times4\times6\times9=216$

답 216

다른 풀이 $5\in B$, $7\in B$이므로

$(a+2)+(4a-5)=5+7$

$5a=15 \quad \therefore a=3$

따라서 집합 A의 모든 원소의 곱은

$1\times4\times2a\times a^2=8a^3=8\times3^3=216$

0556 $A\cup B=\{1, 2, 5, 6\}$이므로 $\quad 6\in A$ 또는 $6\in B$

즉 $a+2=6$ 또는 $2a=6$ 또는 $-a+4=6$이므로

$a=4$ 또는 $a=3$ 또는 $a=-2$

(i) $a=4$일 때, $A=\{1, 6, 8\}$, $B=\{0, 2, 5\}$이므로

$A\cup B=\{0, 1, 2, 5, 6, 8\}$

(ii) $a=3$일 때, $A=\{1, 5, 6\}$, $B=\{1, 2, 5\}$이므로

$A\cup B=\{1, 2, 5, 6\}$

(iii) $a=-2$일 때, $A=\{-4, 0, 1\}$, $B=\{2, 5, 6\}$이므로

$A\cup B=\{-4, 0, 1, 2, 5, 6\}$

이상에서 $\quad a=3$

따라서 $A\cap B=\{1, 5\}$이므로 $A\cap B$의 모든 원소의 합은

$1+5=6$ **답 6**

0557 ① $U^C=\varnothing$이므로 $U^C\subset A$

③ $A\cup(A\cap A^C)=A\cup\varnothing=A$

⑤ $A\cup A^C=U$이므로 $B\subset(A\cup A^C)$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다. **답 ③**

0558 ① $A\cup\varnothing=A$

② $A^C\cap A=\varnothing$

③ $U-A=A^C$, $(A^C)^C=A$이므로 $U-A\neq(A^C)^C$

④ $A-B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$

⑤ $A\cap(B\cup U)=A\cap U=A$

따라서 항상 옳은 것은 ④이다. **답 ④**

0559 ② $A\cap B^C=A-B$

③ $B-A^C=B\cap(A^C)^C=A\cap B$

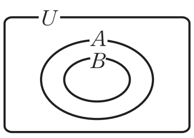
④ $A-(A\cap B)=A-B$

⑤ $A\cap(U-B)=A\cap B^C=A-B$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다. **답 ③**

0560 $A\cup B=A$이므로 $B\subset A$

이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



③ $B\subset A$이면 $A^C\subset B^C$이므로

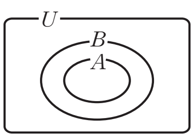
$A^C\cup B^C=B^C$

④ $A-B\neq\varnothing$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. **답 ④**

0561 ㄱ. $B^C\subset A^C$이므로

$A\subset B$ (참)



ㄴ. $A\cup B=B$ (거짓)

ㄷ. $A^C\cap B=B-A\neq\varnothing$ (거짓)

ㄹ. $B^C-A^C=B^C\cap(A^C)^C=B^C\cap A=A-B=\varnothing$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다. **답 ㄱ, ㄹ**

0562 $A\cap B^C=\varnothing$이면 $A\subset B$

이때 $A\subset B$가 성립하려면 k는 12의 양의 약수이어야 한다.

따라서 k의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다. **답 ⑤**

0563 $(A-B)\cup X=X$이므로 $(A-B)\subset X$

$(A\cup B)\cap X=X$이므로 $X\subset(A\cup B)$

$\therefore (A-B)\subset X\subset(A\cup B)$

즉 $\{1, 2, 3\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이므로 집합 X는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 부분집합 중 1, 2, 3을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는 $2^{8-3}=2^5=32$ **답 ④**

0564 $A\cap X=X$이므로 $X\subset A$

$(A\cap B)\cup X=X$이므로 $(A\cap B)\subset X$

$\therefore (A\cap B)\subset X\subset A$ … 1단계

이때 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B=\{1, 2, 4, 8\}$이므로

$A\cap B=\{1, 2, 4\}$

즉 $\{1, 2, 4\}\subset X\subset\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로 집합 X는 $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$의 부분집합 중 1, 2, 4를 반드시 원소로 갖는 집합이다. … 2단계

따라서 집합 X의 개수는

$2^{6-3}=2^3=8$ … 3단계

답 8

	채점 요소	비율
1단계	세 집합 $A\cap B$, X, A 사이의 포함 관계 구하기	30 %
2단계	집합 X의 조건 구하기	40 %
3단계	집합 X의 개수 구하기	30 %

0565 $X-Y=X$이므로 $X\cap Y=\varnothing$

즉 집합 Y는 전체집합 U의 부분집합 중 3, 4, 5, 6을 원소로 갖지 않는 집합이다.

따라서 집합 Y의 개수는 $2^{6-4}=2^2=4$ **답 4**

0566 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$

전체집합 U의 부분집합 C가 $A\cup C=B\cup C$를 만족시키려면 집합 C는 두 집합 A, B의 공통인 원소 6, 9를 제외한 나머지 원소 2, 3, 4를 반드시 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 C의 개수는

$2^{10-3}=2^7=128$ **답 128**

0567 조건 ㈎에서 집합 X는 전체집합 U의 부분집합 중 2, 6은 반드시 원소로 갖고, 4, 7, 8은 원소로 갖지 않는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{8-2-3}=2^3=8$ $\therefore a=8$

조건 ㈏에서 집합 Y는 전체집합 U의 부분집합 중 2, 4, 6, 7은 반드시 원소로 갖고, 3, 5는 원소로 갖지 않는 집합이다.

따라서 집합 Y의 개수는

$2^{8-4-2}=2^2=4$ $\therefore b=4$

$\therefore a+b=12$ **답 12**

0568 $(A-B)-C=(A\cap B^C)\cap C^C$

$=A\cap(B^C\cap C^C)$ ← 결합법칙

$=A\cap(B\cup C)^C$ ← 드모르간의 법칙

$=A-(B\cup C)$ **답 ②**

0569 $(A\cup B)^C\cup(A^C\cap B)=(A^C\cap B^C)\cup(A^C\cap B)$

$=A^C\cap(B^C\cup B)$

$=A^C\cap U$

$=A^C$ **답 ④**

06 집합의 연산

0570 $(A-B)\cup(A-C)=(A\cap B^C)\cup(A\cap C^C)$

$=A\cap(B^C\cup C^C)$

$=A\cap(B\cap C)^C$

$=A-(B\cap C)$ 답 ⑤

0571 $A\cap B^C=\varnothing$, 즉 $A-B=\varnothing$이므로 $A\subset B$

$\therefore A\cap\{(A\cap B)\cup(B-A)\}$

$=A\cap\{(B\cap A)\cup(B\cap A^C)\}$

$=A\cap\{B\cap(A\cup A^C)\}$

$=A\cap(B\cap U)$

$=A\cap B=A$ 답 ②

0572 ㄱ. $A\cap(A\cup B)^C=A\cap(A^C\cap B^C)$

$=(A\cap A^C)\cap B^C$

$=\varnothing\cap B^C=\varnothing$ (참)

ㄴ. $A-(A-B)=A\cap(A\cap B^C)^C$

$=A\cap(A^C\cup B)$

$=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)$

$=\varnothing\cup(A\cap B)=A\cap B$ (거짓)

ㄷ. $(A\cap B)-(A\cap C)$

$=(A\cap B)\cap(A\cap C)^C$

$=(A\cap B)\cap(A^C\cup C^C)$

$=\{(A\cap B)\cap A^C\}\cup\{(A\cap B)\cap C^C\}$

$=\varnothing\cup\{(A\cap B)\cap C^C\}$

$=(A\cap B)\cap C^C=(A\cap B)-C$ (참)

ㄹ. $A-(B\cup C)=A\cap(B\cup C)^C$

$=A\cap(B^C\cap C^C)$

$=A\cap B^C\cap C^C$

$(A-B)\cap(A-C)=(A\cap B^C)\cap(A\cap C^C)$

$=A\cap B^C\cap A\cap C^C$

$=A\cap B^C\cap C^C$

$\therefore A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ④

0573 $\{(A\cap B)\cup(B\cup A^C)^C\}\cap B$

$=\{(A\cap B)\cup(B^C\cap A)\}\cap B$

$=\{(A\cap B)\cup(A\cap B^C)\}\cap B$

$=\{A\cap(B\cup B^C)\}\cap B$

$=(A\cap U)\cap B$

$=A\cap B$

즉 $A\cap B=A$이므로 $A\subset B$

ㄱ. $A\cup B=B$ (거짓)

ㄴ. $A-B=\varnothing$ (참)

ㄷ. $A^C\cup B=U$ (참)

ㄹ. $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=B^C$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

0574 $\{(A^C\cap B^C)\cup(B-A)\}\cup B^C$

$=\{(A^C\cap B^C)\cup(B\cap A^C)\}\cup B^C$

$=\{(A^C\cap B^C)\cup(A^C\cap B)\}\cup B^C$

$=\{A^C\cap(B^C\cup B)\}\cup B^C$

$=(A^C\cap U)\cup B^C=A^C\cup B^C$

즉 $A^C\cup B^C=B^C$이므로 $A^C\subset B^C$ $\therefore B\subset A$

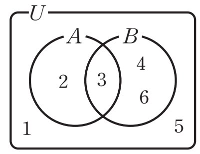
따라서 두 집합 A, B 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 바르게 나타낸 것은 ①이다. 답 ①

0575 $(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$

$=(A\cup B)-(A\cap B)$

$=\{2, 4, 6\}$

이때 $A=\{2, 3\}$이므로 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{1, 5\}$이므로 집합 $A^C\cap B^C$의 모든 원소의 합은

$1+5=6$ 답 6

0576 $(B-A)\cup B^C=(B\cap A^C)\cup B^C$

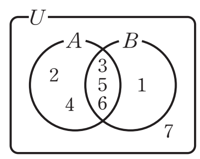
$=(B\cup B^C)\cap(A^C\cup B^C)$

$=U\cap(A^C\cup B^C)$

$=A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$

$=\{1, 2, 4, 7\}$

이므로 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore B=\{1, 3, 5, 6\}$

따라서 집합 B의 원소의 개수는 4이다. 답 4

0577 $(A\cup B)\cap B=B$, $(A\cap B)\cup A=A$이므로

$\{(A\cup B)\cap B\}\cap\{(A\cap B)\cup A\}^C=B\cap A^C=B-A$

즉 $B-A=\{3, 4, 5, 6\}$이므로 3, 4, 5, 6은 집합 $A\cap B\cap C$의 원소가 될 수 없다.

한편 $1\notin C$에서 1도 집합 $A\cap B\cap C$의 원소가 될 수 없다.

따라서 집합 $A\cap B\cap C$의 원소가 될 수 있는 것은 2이다. 답 ①

0578 $A_{20}\cup(A_2\cap A_5)=A_{20}\cup A_{10}=A_{10}$

$=\{10, 20, 30, \cdots, 100\}$

따라서 구하는 원소의 개수는 10이다. 답 10

다른 풀이 $A_{20}\cup(A_2\cap A_5)=(A_{20}\cup A_2)\cap(A_{20}\cup A_5)$

$=A_2\cap A_5=A_{10}$

0579 $(A_{18}\cup A_{36})\cap(A_{36}\cup A_{24})$

$=(A_{36}\cup A_{18})\cap(A_{36}\cup A_{24})$

$=A_{36}\cup(A_{18}\cap A_{24})$

$=A_{36}\cup A_{72}=A_{36}$ 답 ④

0580 $A_{12}\cap A_{18}\cap A_{30}=(A_{12}\cap A_{18})\cap A_{30}$

$=A_6\cap A_{30}=A_6$

$=\{1, 2, 3, 6\}$

따라서 집합 $A_{12}\cap A_{18}\cap A_{30}$의 모든 원소의 합은

$1+2+3+6=12$ 답 **12**

0581 ㄱ. $A_8\cap A_{20}=A_{40}$이므로 $(A_8\cap A_{20})\subset A_4$ (참)

ㄴ. $(A_3\cap A_4)\cup A_6=A_{12}\cup A_6=A_6$ (거짓)

ㄷ. $(A_5\cup A_3)\cap(A_9\cup A_3)=(A_5\cap A_9)\cup A_3$

$=A_{45}\cup A_3=A_3$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 **ㄱ, ㄷ**

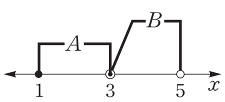
0582 $x^2-4x+3\le0$에서 $(x-1)(x-3)\le0$

$\therefore 1\le x\le3$ $\therefore A=\{x|1\le x\le3\}$

이때 $A\cap B=\varnothing$,

$A\cup B=\{x|1\le x<5\}$이므로

오른쪽 그림에서



$B=\{x|3<x<5\}$

$=\{x|(x-3)(x-5)<0\}$

$=\{x|x^2-8x+15<0\}$

따라서 $a=-8$, $b=15$이므로 $a+b=7$ 답 **7**

RPM 비법 노트

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$의 서로 다른 두 실근이 α, β $(\alpha<\beta)$이다.

⇨ $\{x|ax^2+bx+c=0\}=\{\alpha, \beta\}$

$\{x|ax^2+bx+c<0\}=\{x|\alpha<x<\beta\}$

$\{x|ax^2+bx+c>0\}=\{x|x<\alpha$ 또는 $x>\beta\}$

0583 $x^2-x-6=0$에서

$(x+2)(x-3)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

$\therefore A=\{-2, 3\}$ … 1단계

이때 $A-B=\{3\}$이므로 $-2\in B$이다.

즉 방정식 $x^2-ax-10=0$의 한 근이 -2이므로

$4+2a-10=0$ $\therefore a=3$

$x^2-3x-10=0$에서

$(x+2)(x-5)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=5$

$\therefore B=\{-2, 5\}$ … 2단계

$\therefore A\cup B=\{-2, 3, 5\}$ … 3단계

답 **$\{-2, 3, 5\}$**

채점 요소		비율
1단계	집합 A 구하기	30 %
2단계	집합 B 구하기	50 %
3단계	집합 $A\cup B$ 구하기	20 %

0584 $|x-1|<a$에서

$-a<x-1<a$ $\therefore -a+1<x<a+1$

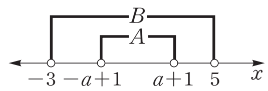
$\therefore A=\{x|-a+1<x<a+1\}$

$x^2-2x-15<0$에서

$(x+3)(x-5)<0$ $\therefore -3<x<5$

$\therefore B=\{x|-3<x<5\}$

이때 $A\cap B=A$, 즉 $A\subset B$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-a+1\ge-3$, $a+1\le5$

$\therefore 0<a\le4$ $(\because a>0)$

따라서 자연수 a는 1, 2, 3, 4의 4개이다. 답 **4**

0585 $x^2-4x+4\ge0$에서 $(x-2)^2\ge0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$A=\{x|x$는 실수$\}$

$x^2-3x>0$에서

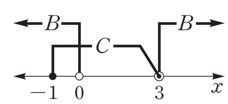
$x(x-3)>0$ $\therefore x<0$ 또는 $x>3$

$\therefore B=\{x|x<0$ 또는 $x>3\}$

이때 $B\cup C=A$,

$B\cap C=\{x|-1\le x<0\}$이므로

오른쪽 그림에서



$C=\{x|-1\le x\le3\}$

$=\{x|(x+1)(x-3)\le0\}$

$=\{x|x^2-2x-3\le0\}$

따라서 $a=-2$, $b=-3$이므로

$ab=6$ 답 **①**

0586 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)$

$=n(U)-n(A\cup B)$

$=20-n(A\cup B)=8$

$\therefore n(A\cup B)=12$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$12=n(A)+n(B)-4$

$\therefore n(A)+n(B)=16$ 답 **16**

0587 $A\subset B^C$이므로 $A\cap B=\varnothing$

$\therefore n(A\cap B)=0$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$10=6+n(B)-0$

$\therefore n(B)=4$ 답 **4**

0588 $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$에서

$5=18-n(A\cap B)$ $\therefore n(A\cap B)=13$

$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=18+20-13=25$

이때 색칠한 부분이 나타내는 집합은 $(A\cup B)^C$이므로

$n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$

$=30-25=5$ 답 **5**

다른 풀이 $n(A\cup B)=n(A-B)+n(B)$

$=5+20=25$

0589 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=11+10-16=5$
$n(B\cap C)=n(B)+n(C)-n(B\cup C)$
$=10+7-12=5$
$A\cap C=\varnothing$에서 $A\cap B\cap C=\varnothing$이므로
$n(A\cap C)=0$, $n(A\cap B\cap C)=0$
$\therefore n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=11+10+7-5-5-0+0=18$ 답 ②

0590 닭을 키우는 가구의 집합을 A, 토끼를 키우는 가구의 집합을 B라 하면
$n(A)=150$, $n(B)=113$, $n(A\cup B)=220$
따라서 닭과 토끼를 모두 키우는 가구 수는
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=150+113-220=43$ 답 43

0591 한라산을 등반해 본 회원의 집합을 A, 설악산을 등반해 본 회원의 집합을 B라 하면
$n(A)=23$, $n(A\cap B)=15$, $n(A\cup B)=33$
이때 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서
$33=23+n(B)-15$ $\therefore n(B)=25$
따라서 설악산을 등반해 본 회원 수는 25이다. 답 ④

0592 학생 전체의 집합을 U, 농구를 좋아하는 학생의 집합을 A, 축구를 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=50$, $n(A)=27$, $n(B)=34$, $n(A\cap B)=19$
$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=27+34-19=42$
따라서 농구와 축구 중 어느 것도 좋아하지 않는 학생 수는
$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$
$=50-42=8$ 답 8

0593 A 문제를 맞힌 학생의 집합을 A, B 문제를 맞힌 학생의 집합을 B라 하면
$n(A)=23$, $n(B)=18$, $n(A\cup B)=30$ … 1단계
따라서 두 문제를 모두 맞힌 학생 수는
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$
$=23+18-30=11$ … 2단계
이때 A 문제만 맞힌 학생의 집합은 $A-B$, B 문제만 맞힌 학생의 집합은 $B-A$이므로 두 문제 중 한 문제만 맞힌 학생 수는
$n(A-B)+n(B-A)$
$=\{n(A)-n(A\cap B)\}+\{n(B)-n(A\cap B)\}$
$=(23-11)+(18-11)=19$ … 3단계
답 19

	채점 요소	비율
1단계	주어진 조건을 집합으로 나타내기	30 %
2단계	두 문제를 모두 맞힌 학생 수 구하기	30 %
3단계	두 문제 중 한 문제만 맞힌 학생 수 구하기	40 %

다른 풀이 두 문제 중 한 문제만 맞힌 학생 수는
$n(A-B)+n(B-A)$
$=\{n(A\cup B)-n(B)\}+\{n(A\cup B)-n(A)\}$
$=(30-18)+(30-23)=19$

0594 학생 전체의 집합을 U, A 사이트를 선호하는 학생의 집합을 A, B 사이트를 선호하는 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=40$, $n(A)=35$, $n(B)=25$, $n(A^C\cap B^C)=2$
$\therefore n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$
$=n(U)-n(A^C\cap B^C)$
$=40-2=38$
따라서 A 사이트만 선호하는 학생 수는
$n(A-B)=n(A\cup B)-n(B)$
$=38-25=13$ 답 ②

0595 책 A, B, C를 읽은 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면
$n(A\cup B\cup C)=50$,
$n(A)=27$, $n(B)=21$, $n(C)=30$, $n(A\cap B\cap C)=6$
$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
에서
$50=27+21+30-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+6$
$\therefore n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=34$
따라서 세 권의 책 중 한 권만 읽은 학생 수는
$n(A\cup B\cup C)-\{n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$
$-2\times n(A\cap B\cap C)\}$
$=50-(34-2\times 6)=28$ 답 28

0596 ① $A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$
$=(B\cup A)-(B\cap A)=B\triangle A$
② $A\triangle\varnothing=(A\cup\varnothing)-(A\cap\varnothing)=A-\varnothing=A$
③ $A\triangle A^C=(A\cup A^C)-(A\cap A^C)=U-\varnothing=U$
④ $A\triangle U=(A\cup U)-(A\cap U)=U-A=A^C$
⑤ $A\triangle A=(A\cup A)-(A\cap A)=A-A=\varnothing$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

0597 $X\diamond Y=(X\cup Y)\cap Y^C=(X\cap Y^C)\cup(Y\cap Y^C)$
$=(X\cap Y^C)\cup\varnothing=X\cap Y^C$
$=X-Y$ … 1단계
즉 $A\diamond B=A-B=\{5, 7, 9\}$이므로
$(A\diamond B)\diamond C=(A-B)-C$
$=\{5, 7, 9\}-\{4, 5, 6\}=\{7, 9\}$ … 2단계

따라서 $(A\diamond B)\diamond C$의 모든 원소의 합은

$7+9=16$ … 3단계

답 16

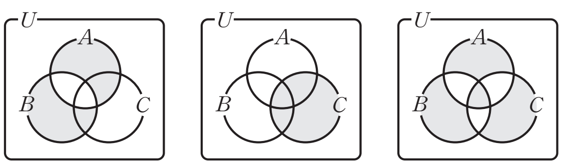
채점 요소		비율
1단계	$X\diamond Y$를 간단히 하기	40 %
2단계	$(A\diamond B)\diamond C$ 구하기	40 %
3단계	$(A\diamond B)\diamond C$의 모든 원소의 합 구하기	20 %

0598 ㄱ. $A*B=(A-B)\cup(B-A)$

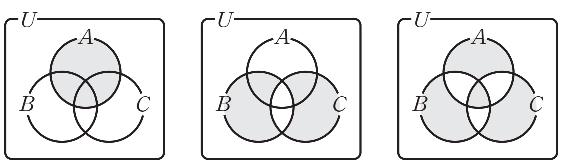
$=(B-A)\cup(A-B)$

$=B*A$ (참)

ㄴ.



$(A*B)$ $*$ C $=$ $(A*B)*C$



A $*$ $(B*C)$ $=$ $A*(B*C)$

$\therefore (A*B)*C=A*(B*C)$ (참)

ㄷ. $A^C*B^C=(A^C-B^C)\cup(B^C-A^C)$

$=(A^C\cap B)\cup(B^C\cap A)$

$=(B-A)\cup(A-B)$

$=(A-B)\cup(B-A)$

$=A*B$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0599 학생 전체의 집합을 U, A에 가입한 학생의 집합을 A, B에 가입한 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=30,\ n(A)=20,\ n(B)=14$

(i) $n(A\cap B)$가 최대인 경우

$n(A\cup B)$가 최소일 때, 즉 $B\subset A$일 때이므로

$n(A\cap B)=n(B)=14$

(ii) $n(A\cap B)$가 최소인 경우

$n(A\cup B)$가 최대일 때, 즉 $A\cup B=U$일 때이므로

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서

$30=20+14-n(A\cap B)$ $\quad\therefore n(A\cap B)=4$

(i), (ii)에서 $M=14,\ m=4$이므로

$M-m=10$

답 10

0600 (i) $n(A\cup B)$가 최대인 경우

$n(A\cap B)$가 최소일 때, 즉 $n(A\cap B)=13$일 때이므로

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=35+28-13$

$=50$ … 1단계

(ii) $n(A\cup B)$가 최소인 경우

$n(A\cap B)$가 최대일 때, 즉 $B\subset A$일 때이므로

$n(A\cup B)=n(A)=35$ … 2단계

(i), (ii)에서 $n(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$50+35=85$ … 3단계

답 85

채점 요소		비율
1단계	$n(A\cup B)$의 최댓값 구하기	40 %
2단계	$n(A\cup B)$의 최솟값 구하기	40 %
3단계	$n(A\cup B)$의 최댓값과 최솟값의 합 구하기	20 %

0601 학생 전체의 집합을 U, S 회사 제품을 사용하는 학생의 집합을 A, L 회사 제품을 사용하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=40,\ n(A)=24,\ n(B)=14$

이때 S 회사 제품과 L 회사 제품을 모두 사용하지 않는 학생의 집합은 $A^C\cap B^C$이므로

$n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=n(U)-n(A\cup B)$

$=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}$

$=40-\{24+14-n(A\cap B)\}$

$=2+n(A\cap B)$

(i) $n(A^C\cap B^C)$가 최대인 경우

$n(A\cap B)$가 최대일 때, 즉 $B\subset A$일 때이므로

$n(A^C\cap B^C)=2+n(A\cap B)=2+n(B)$

$=2+14=16$

(ii) $n(A^C\cap B^C)$가 최소인 경우

$n(A\cap B)$가 최소일 때, 즉 $A\cap B=\varnothing$일 때이므로

$n(A^C\cap B^C)=2+n(A\cap B)$

$=2+0=2$

(i), (ii)에서 S 회사 제품과 L 회사 제품을 모두 사용하지 않는 학생 수의 최댓값과 최솟값의 합은

$16+2=18$

답 18

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 090~093쪽

0602 $A=\{2, 3, 5, 7\},\ B=\{1, 5, 9, 13, 17\}$, $C=\{4, 6, 8, 9\}$이므로

$A\cup C=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$\therefore (A\cup C)\cap B$

$=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\cap\{1, 5, 9, 13, 17\}$

$=\{5, 9\}$

따라서 집합 $(A\cup C)\cap B$의 모든 원소의 합은

$5+9=14$

답 14

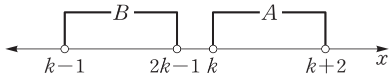
06

집합의 연산

0603 두 집합 A, B가 서로소이면

$A\cap B=\varnothing$

이때 $k-1<k$이므로 $A\cap B=\varnothing$이 되도록 두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉 $2k-1\le k$이어야 하므로

$0<k\le 1$ ($\because k>0$)

따라서 양수 k의 최댓값은 1이다. 답 **1**

0604 주어진 벤다이어그램에서

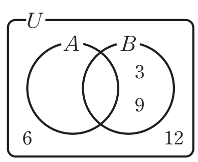
$(A\cup B)^{C}=\{e\}$

또 $B=\{b, c, d\}$, $A^{C}=\{c, d, e\}$이므로

$B-A^{C}=\{b, c, d\}-\{c, d, e\}=\{b\}$

$\therefore (A\cup B)^{C}\cup(B-A^{C})=\{b, e\}$ 답 $\{b, e\}$

0605 $A\cup B$의 원소 중 3과 9는 A^{C}의 원소이므로 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

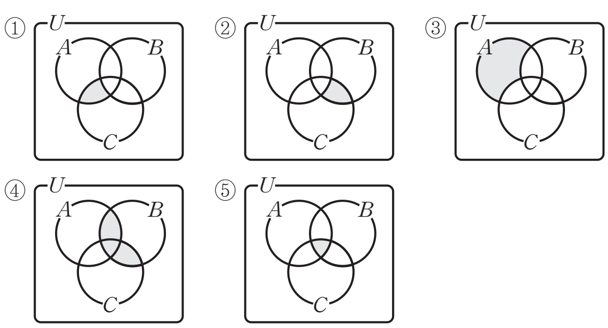


$\therefore B-A=\{3, 9\}$

따라서 집합 $B-A$의 모든 원소의 합은

$3+9=12$ 답 **12**

0606 각 집합을 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 색칠한 부분을 나타내는 것은 ②이다. 답 ②

0607 $A\cup B=\{6, 8, 10\}$이므로 $10\in B$

(i) $a=10$일 때

$B=\{10, 12\}$이므로 $A\cup B=\{6, 8, 10, 12\}$

(ii) $a+2=10$, 즉 $a=8$일 때

$B=\{8, 10\}$이므로 $A\cup B=\{6, 8, 10\}$

(i), (ii)에서 $a=8$ 답 **8**

0608 $B\cap A^{C}=\{2\}$, 즉 $B-A=\{2\}$이므로 $2\in B$

(i) $x=2$일 때

$A=\{1, 3, 4\}$, $B=\{1, 2, 4\}$이므로

$B-A=\{2\}$

(ii) $x+2=2$, 즉 $x=0$일 때

$A=\{-1, 0, 3\}$, $B=\{0, 1, 2\}$이므로

$B-A=\{1, 2\}$

(i), (ii)에서 $x=2$

따라서 $A=\{1, 3, 4\}$이므로 집합 A의 모든 원소의 합은

$1+3+4=8$ 답 **8**

0609 $A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로 $A\cap B=\{1, 3\}$을 만족시키려면 집합 B는 1, 3은 반드시 원소로 갖고, 2, 4, 6, 12는 원소로 갖지 않아야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 a의 값은 1부터 20까지의 자연수 중에서 3의 배수이면서 짝수가 아닌 수이다.

즉 a의 값이 될 수 있는 것은 3, 9, 15이므로

$M=15$, $m=3$

$\therefore M+m=18$ 답 **18**

0610 두 집합 A, B가 서로소이므로 $A\cap B=\varnothing$

ㄱ. $(A\cap B)^{C}=\varnothing^{C}=U$ (참)

ㄴ. $A-(A\cap B)=A-\varnothing=A$ (참)

ㄷ. $A\cap B^{C}=A-B=A$ (거짓)

ㄹ. $A^{C}\subset B^{C}$이려면 $B\subset A$이어야 한다.

그런데 $A\cap B=\varnothing$이므로 $B\not\subset A$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ㄱ, ㄴ

0611 $A=\{1, 3, 9\}$, $B=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$이므로

$A\subset B$

② $B\cap A^{C}=B-A=\{2, 6, 18\}$이므로 $B\cap A^{C}\neq\varnothing$

③ $A\cup B=B$이므로 $(A\cup B)\subset B$

⑤ $A-B=\varnothing$

따라서 옳지 않은 것은 ②, ⑤이다. 답 ②, ⑤

0612 $X\cup A=X-B$에서

$(X-B)\subset X$이므로 $(X\cup A)\subset X$

이때 $X\subset(X\cup A)$이므로 $X\cup A=X$

$\therefore A\subset X$

또 $X\subset(X\cup A)$이므로 $X\subset(X-B)$

이때 $(X-B)\subset X$이므로 $X-B=X$

$\therefore X\cap B=\varnothing$, 즉 $X\subset B^{C}$

$\therefore A\subset X\subset B^{C}$

이때 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$이므로

$B^{C}=\{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$

즉 $\{2, 7\}\subset X\subset\{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$이므로 집합 X는 $\{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$의 부분집합 중 2, 7을 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는

$2^{6-2}=2^{4}=16$ 답 **16**

다른 풀이 $A\subset X$, $X\cap B=\varnothing$이므로 집합 X는 $\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$의 부분집합 중 2, 7은 반드시 원소로 갖고, 1, 5, 8은 원소로 갖지 않는 집합이다.
따라서 집합 X의 개수는 $\quad 2^{9-2-3}=2^4=16$

0613 ① $(A-B^C)^C\cap A=(A\cap B)^C\cap A$
$=(A^C\cup B^C)\cap A$
$=(A^C\cap A)\cup(B^C\cap A)$
$=\varnothing\cup(B^C\cap A)$
$=B^C\cap A=A-B$
② $(A-B)\cup(A\cap B)=(A\cap B^C)\cup(A\cap B)$
$=A\cap(B^C\cup B)$
$=A\cap U=A$
③ $(A\cup B)\cap(A-B)^C=(A\cup B)\cap(A\cap B^C)^C$
$=(A\cup B)\cap(A^C\cup B)$
$=(A\cap A^C)\cup B$
$=\varnothing\cup B=B$
④ $(A-B^C)-C=(A\cap B)\cap C^C$
$=A\cap(B\cap C^C)$
$=A\cap(B-C)$
⑤ $A-(B-C)=A\cap(B\cap C^C)^C$
$=A\cap(B^C\cup C)$
$=(A\cap B^C)\cup(A\cap C)$
$=(A-B)\cup(A\cap C)$
따라서 항상 성립한다고 할 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

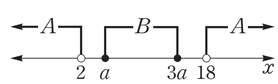
0614 $\{B\cap(B^C-A)^C\}\cup\{B\cap(B^C\cup A)\}$
$=\{B\cap(B^C\cap A^C)^C\}\cup\{B\cap(B^C\cup A)\}$
$=\{B\cap(B\cup A)\}\cup\{B\cap(B^C\cup A)\}$
$=B\cap\{(B\cup A)\cup(B^C\cup A)\}$
$=B\cap\{(B\cup B^C)\cup A\}$
$=B\cap(U\cup A)$
$=B\cap U=B$
즉 $B=A\cup B$이므로 $\quad A\subset B$
① $A\cap B=A$
③ $B-A\neq\varnothing$
④ $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C=A^C$
⑤ $A^C\cap B=B-A\neq\varnothing$이므로 $\quad A\cup B^C\neq U$
따라서 옳은 것은 ②이다. 답 ②

0615 $A=\{4, 8, 12, 16, 20\}$, $B=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$이므로
$(A^C\cup B)^C=A\cap B^C=A-B$
$=\{8, 12, 16\}$
따라서 집합 $(A^C\cup B)^C$의 모든 원소의 합은
$8+12+16=36$ 답 36

0616 $A-B^C=A\cap B=\{1, 6, 7\}$
$(A\cap B^C)\cup(A^C-B)=(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B^C)$
$=(A\cup A^C)\cap B^C$
$=U\cap B^C=B^C$
$=\{2, 3, 8, 9\}$
이때 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$이므로
$B=\{1, 4, 5, 6, 7, 10\}$
$\therefore B-A=B-(A\cap B)=\{4, 5, 10\}$
따라서 집합 $B-A$의 원소의 개수는 3이다. 답 3

0617 $A_m\subset(A_4\cap A_6)$에서 $A_4\cap A_6=A_{12}$이므로
$A_m\subset A_{12}$
즉 m은 12의 배수이므로 m의 최솟값은 12이다.
$(A_{12}\cup A_{18})\subset A_n$에서 $\quad A_{12}\subset A_n$, $A_{18}\subset A_n$
즉 n은 12와 18의 공약수이므로 n의 최댓값은 12와 18의 최대공약수인 6이다.
따라서 m의 최솟값과 n의 최댓값의 곱은
$12\times 6=72$ 답 72

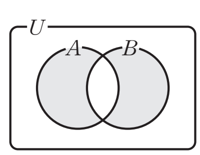
0618 $x^2-20x+36>0$에서
$(x-2)(x-18)>0 \quad \therefore x<2$ 또는 $x>18$
$\therefore A=\{x\,|\,x<2$ 또는 $x>18\}$
$(x-a)(x-3a)\leq 0$에서 $a<3a$이므로
$a\leq x\leq 3a$
$\therefore B=\{x\,|\,a\leq x\leq 3a\}$
이때 $A\cap B=\varnothing$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a\geq 2$, $3a\leq 18$
$\therefore 2\leq a\leq 6$
따라서 자연수 a는 2, 3, 4, 5, 6의 5개이다. 답 5

0619 $A=\{2, 4, 6, \cdots, 30\}$, $B=\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$이므로
$A\cap B=\{2, 4, 8, 16\}$
따라서 $n(A)=15$, $n(A\cap B)=4$이므로
$n(A\cap B^C)=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
$=15-4=11$ 답 11

0620 $n(A^C\cap B)=n(B-A)=13$이므로
$n(A\cup B)=n(A)+n(B-A)$
$=15+13=28$
이때 집합 $(A-B)\cup(B-A)$를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$n(A\cap B)$
$=n(A\cup B)-n((A-B)\cup(B-A))$
$=28-20=8$ 답 ④

06 집합의 연산

다른 풀이 $n(A^C\cap B)=n(B-A)=13$이므로

$$n(A-B)=n((A-B)\cup(B-A))-n(B-A)$$
$$=20-13=7$$
$$\therefore n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)=15-7=8$$

0621 $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$에서

$$14=16-n(A\cap B)\qquad \therefore n(A\cap B)=2$$
$$\therefore n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=17-2=15$$

즉 $(B-A)\subset X\subset B$를 만족시키는 집합 X는 집합 B의 부분집합 중 집합 $B-A$의 원소 15개를 반드시 원소로 갖는 집합이다.

따라서 집합 X의 개수는

$$2^{17-15}=2^2=4$$

답 **4**

0622 은행 A를 이용하는 고객의 집합을 A, 은행 B를 이용하는 고객의 집합을 B라 하면

$$n(A\cup B)=35+30=65$$

조건 (가)에서 $n(A)+n(B)=82$이므로

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$
$$=82-65=17$$

따라서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 고객의 수는

$$n(A\cup B)-n(A\cap B)=65-17=48$$

이때 조건 (나)에서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 여자 고객의 수는

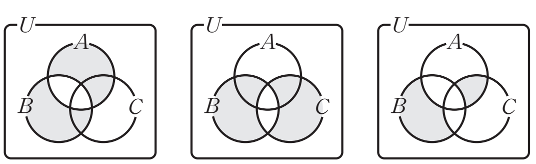
$$\frac{1}{2}\times 48=24$$

따라서 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는

$$30-24=6$$

답 ②

0623



$(A\circledcirc B)\quad\cap\quad(B\circledcirc C)\quad=(A\circledcirc B)\cap(B\circledcirc C)$

따라서 벤다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합이 $(A\circledcirc B)\cap(B\circledcirc C)$인 것은 ①이다.

답 ①

0624 학생 전체의 집합을 U, A 서비스를 구독하는 학생의 집합을 A, B 서비스를 구독하는 학생의 집합을 B라 하면

$$n(U)=50,\ n(A)=27,\ n(B)=32,\ n(A\cap B)\ge 15$$

(i) $n(A\cup B)$가 최대인 경우

$n(A\cap B)$가 최소일 때, 즉 $n(A\cap B)=15$일 때이므로

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=27+32-15=44$$

(ii) $n(A\cup B)$가 최소인 경우

$n(A\cap B)$가 최대일 때, 즉 $A\subset B$일 때이므로

$$n(A\cup B)=n(B)=32$$

(i), (ii)에서 A 또는 B 서비스를 구독하는 학생 수의 최댓값과 최솟값의 합은

$$44+32=76$$

답 **76**

0625 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $A-B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$이므로

$4\in(A\cap B)$, $6\in(A\cap B)$ … 1단계

이때 조건 (가)에서 집합 B의 원소의 개수가 3이므로

$B=\{a,\ 4,\ 6\}$이라 하면 조건 (나)에서 집합 B의 모든 원소의 합이 17이므로

$$a+4+6=17\qquad \therefore a=7$$

$\therefore B=\{4,\ 6,\ 7\}$ … 2단계

$\therefore B-A=\{7\}$ … 3단계

답 **$\{7\}$**

채점 요소	비율
1단계 집합 $A\cap B$에 속하는 원소 구하기	40 %
2단계 집합 B 구하기	40 %
3단계 집합 $B-A$ 구하기	20 %

0626 $A\cap B=\{0,\ 3\}$이므로 $\quad 0\in A$

즉 $a^2+2a=0$이므로 $\quad a(a+2)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=0$ … 1단계

(i) $a=-2$일 때, $A=\{0,\ 1,\ 3\}$, $B=\{-1,\ 0,\ 3\}$이므로

$$A\cap B=\{0,\ 3\}$$

(ii) $a=0$일 때, $A=\{0,\ 1,\ 3\}$, $B=\{-4,\ 1,\ 3\}$이므로

$$A\cap B=\{1,\ 3\}$$

(i), (ii)에서 $\quad a=-2$ … 2단계

답 **-2**

채점 요소	비율
1단계 $0\in A$임을 이용하여 a의 값 구하기	40 %
2단계 조건을 만족시키는 a의 값 구하기	60 %

0627 조건 (가)에서 $A\cap X=A$이므로

$$A\subset X$$

$A^C\cap B=B-A=\{6,\ 7,\ 8\}$이므로 조건 (나)에서

$$X\cap\{6,\ 7,\ 8\}=\{6,\ 7\}$$

따라서 집합 X는 집합 A를 포함하면서 6, 7은 반드시 원소로 갖고, 8은 원소로 갖지 않아야 한다.

즉 집합 X는 전체집합 U의 부분집합 중 3, 4, 5, 6, 7은 반드시 원소로 갖고, 8은 원소로 갖지 않는 집합이다. … 1단계

따라서 집합 X의 개수는

$2^{10-5-1}=2^4=16$ … 2단계

답 **16**

채점 요소	비율
1단계 집합 X의 조건 구하기	70 %
2단계 집합 X의 개수 구하기	30 %

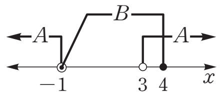
0628 $x^2-2x-3>0$에서

$(x+1)(x-3)>0 \quad \therefore x<-1$ 또는 $x>3$

$\therefore A=\{x|x<-1$ 또는 $x>3\}$ ··· 1단계

이때 $A\cup B=\{x|x$는 실수$\}$,

$A\cap B=\{x|3<x\le4\}$이므로 오른쪽 그림에서



$B=\{x|-1\le x\le4\}$

$=\{x|(x+1)(x-4)\le0\}$

$=\{x|x^2-3x-4\le0\}$ ··· 2단계

따라서 $a=-3$, $b=-4$이므로

$a+b=-7$ ··· 3단계

답 -7

채점 요소		비율
1단계	집합 A의 부등식의 해 구하기	30 %
2단계	집합 B의 부등식 구하기	50 %
3단계	$a+b$의 값 구하기	20 %

0629 전략 서로소인 두 자연수는 1 이외의 공약수를 갖지 않음을 이용하여 집합 X의 원소가 되기 위한 조건을 찾는다.

조건 ㈏에서 $X\cap B=\varnothing$이므로 집합 X의 모든 원소는 20과 서로소가 아니다.

이때 $20=2^2\times5$이므로 집합 X의 모든 원소는 2 또는 5의 배수이다.

또 조건 ㈐에서 $14=2\times7$이므로 집합 X의 모든 원소는 2의 배수도 아니고 7의 배수도 아니다.

따라서 조건 ㈎에서 집합 X의 모든 원소는 120 이하의 5의 배수 중에서 2의 배수도 아니고 7의 배수도 아닌 자연수이므로 집합 X의 원소가 될 수 있는 수는

5, 15, 25, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 115

이때 $X\ne\varnothing$이므로 구하는 집합 X의 개수는

$2^{10}-1=1023$

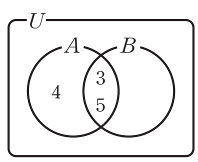
답 1023

0630 전략 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타낸다.

조건 ㈎에서

$A^C\cup B^C=(A\cap B)^C=\{1, 2, 4\}$

따라서 $3\in(A\cap B)$, $4\notin(A\cap B)$, $5\in(A\cap B)$이므로 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때

$(A\cup X)-B=(A\cup X)\cap B^C$

$=(A\cap B^C)\cup(X\cap B^C)$

$=(A-B)\cup(X-B)$

$=\{4\}\cup(X-B)$

이고 조건 ㈏에서 $n(X)=1$인 모든 집합 X에 대하여 집합 $(A\cup X)-B$의 원소의 개수가 1이므로

$X-B=\{4\}$ 또는 $X-B=\varnothing$

이어야 한다.

즉 $X=\{1\}$ 또는 $X=\{2\}$일 때 $X-B=\varnothing$이어야 하므로

$1\in B$, $2\in B \quad \therefore B=\{1, 2, 3, 5\}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$1+2+3+5=11$

답 11

참고 | $X=\{3\}$ 또는 $X=\{5\}$이면 $X-B=\varnothing$이고, $X=\{4\}$이면 $X-B=\{4\}$이므로 조건 ㈏를 만족시킨다.

0631 전략 주어진 조건을 집합을 이용하여 나타낸다.

국어 과목을 수강하는 학생의 집합을 A, 수학 과목을 수강하는 학생의 집합을 B, 영어 과목을 수강하는 학생의 집합을 C라 하면

$n(A\cup B\cup C)=34$, $n(A)=18$, $n(B)=20$, $n(C)=23$

또 두 과목만 수강하는 학생이 9명이므로

$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-3\times n(A\cap B\cap C)$
$=9$

$\therefore n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$
$=3\times n(A\cap B\cap C)+9$

이때

$n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)$
$-\{n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)\}$
$+n(A\cap B\cap C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)$
$-\{3\times n(A\cap B\cap C)+9\}+n(A\cap B\cap C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-2\times n(A\cap B\cap C)-9$

이므로 $34=18+20+23-2\times n(A\cap B\cap C)-9$

$\therefore n(A\cap B\cap C)=9$

따라서 세 과목을 모두 수강하는 학생 수는 9이다.

답 9

06 집합의 연산

07 명제

교과서 문제 정복하기

본책 095쪽, 097쪽

0632 ㄱ. 참인 명제이다.
ㄴ. $x^2=1$은 x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
ㄷ. 2는 소수이지만 짝수이므로 거짓인 명제이다.
ㄹ. 거짓인 명제이다.
ㅁ. '좋다.'의 기준이 명확하지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
이상에서 명제인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. **답 ㄱ, ㄷ, ㄹ**

0633 10 이하의 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7이므로 조건 p의 진리집합은 $\{2, 3, 5, 7\}$ **답 $\{2, 3, 5, 7\}$**

0634 $x^2-2x-8\le0$에서 $(x+2)(x-4)\le0$
$\therefore -2\le x\le4$
따라서 조건 q의 진리집합은 $\{1, 2, 3, 4\}$ **답 $\{1, 2, 3, 4\}$**

0635 **답 자연수는 정수가 아니다. (거짓)**

0636 **답 4는 6의 약수이거나 2의 배수이다. (참)**

0637 $\sim p$: x는 9의 약수가 아니다.
이때 9의 약수는 1, 3, 9이므로 조건 $\sim p$의 진리집합은
$\{5, 7\}$ **답 풀이 참조**

0638 $\sim q$: $x^2-6x+5\ne0$
$x^2-6x+5=0$에서 $(x-1)(x-5)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=5$
따라서 조건 $\sim q$의 진리집합은
$\{3, 7, 9\}$ **답 풀이 참조**

0639 **답 가정: 8의 배수이다., 결론: 2의 배수이다.**

0640 **답 가정: x는 홀수이다., 결론: x^2은 홀수이다.**

0641 [반례] $x=1$, $y=2$이면 $xy=2$이므로 xy는 짝수이지만 x는 홀수이다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다. **답 거짓**

0642 $xy\ne0$이면 $x\ne0$, $y\ne0$이므로 $x^2+y^2\ne0$이다.
따라서 주어진 명제는 참이다. **답 참**

0643 [반례] $x=-\dfrac{3}{2}$이면 $-2<x<1$이지만 $x<-1$이다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다. **답 거짓**

0644 $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$이므로 주어진 명제는 참이다. **답 참**

0645 $x^2<0$을 만족시키는 실수 x는 존재하지 않으므로 주어진 명제는 거짓이다. **답 거짓**

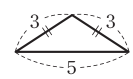
0646 **답 어떤 실수 x에 대하여 $2x+3\le5$이다. (참)**

0647 **답 모든 실수 x에 대하여 $|x|\ge0$이다. (참)**

0648 역: $ab=0$이면 $a=0$, $b=0$이다. (거짓)
[반례] $a=1$, $b=0$이면 $ab=0$이지만 $a\ne0$이다.
대우: $ab\ne0$이면 $a\ne0$ 또는 $b\ne0$이다. (참) **답 풀이 참조**

0649 역: $a+b>0$이면 $a>0$ 또는 $b>0$이다. (참)
대우: $a+b\le0$이면 $a\le0$이고 $b\le0$이다. (거짓)
[반례] $a=1$, $b=-2$이면 $a+b=-1<0$이지만 $a>0$이다.
답 풀이 참조

0650 역: 이등변삼각형이면 정삼각형이다. (거짓)
[반례] 오른쪽 그림의 삼각형은 이등변삼각형이지만 정삼각형이 아니다.



대우: 이등변삼각형이 아니면 정삼각형이 아니다. (참)
답 풀이 참조

0651 p: $|x|\le2$에서 $-2\le x\le2$
따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
답 필요조건

0652 $x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=2$
따라서 $p\Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
답 필요충분조건

0653 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{1, 2, 4\}$, $Q=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
$\therefore P\subset Q$, $Q\not\subset P$
따라서 $p\Longrightarrow q$, $q\not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.
답 충분조건

0654 주어진 명제의 대우는 '두 자연수 a, b에 대하여 a, b가 모두 $\boxed{\text{(가) 짝수}}$이면 $a+b$는 $\boxed{\text{(나) 짝수}}$이다.'이다.
$a=2k$, $b=2l$ (k, l은 자연수)이라 하면
$a+b=2k+2l=2(\boxed{\text{(다) } k+l})$이므로 $a+b$는 $\boxed{\text{(나) 짝수}}$이다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.
답 (가) 짝수 (나) 짝수 (다) $k+l$

0655 $a\ne0$ 또는 $\boxed{\text{(가) } b\ne0}$이라 가정하면 $|a|\ne0$ 또는 $|b|\ne0$이므로 $|a|+|b|\ \boxed{\text{(나) }\ne}\ 0$
그런데 이것은 $\boxed{\text{(다) } |a|+|b|=0}$이라는 가정에 모순이다.

따라서 두 실수 a, b에 대하여 $|a|+|b|=0$이면 $a=0$이고 $b=0$이다.

답 (가) $b\neq0$ (나) $\neq$ (다) $|a|+|b|=0$

0656 $a^2+5b^2-4ab=(a^2-4ab+4b^2)+b^2$

$=(a-2b)^2+\boxed{(가)\ b^2}\geq0$

$\therefore a^2+5b^2\geq4ab$

(단, 등호는 $a-2b=0$, $b=0$, 즉 $a=b=\boxed{(나)\ 0}$일 때 성립)

답 (가) b^2 (나) 0

0657 $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{(\sqrt{a})^2-\boxed{(가)\ 2\sqrt{ab}}+(\sqrt{b})^2}{2}$

$=\dfrac{(\boxed{(나)\ \sqrt{a}-\sqrt{b}})^2}{2}\geq0$

$\therefore \dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

(단, 등호는 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, 즉 $\boxed{(다)\ a=b}$일 때 성립)

답 (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (다) $a=b$

0658 $x>0$, $\dfrac{1}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $x+\dfrac{1}{x}\geq2\sqrt{x\times\dfrac{1}{x}}=2$ (단, 등호는 $x=1$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 2이다.

답 2

참고 | 등호는 $x=\dfrac{1}{x}$에서 $x^2=1$, 즉 $x=1$ ($\because x>0$)일 때 성립한다.

0659 $2x>0$, $\dfrac{18}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+\dfrac{18}{x}\geq2\sqrt{2x\times\dfrac{18}{x}}=2\times6=12$

(단, 등호는 $x=3$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 12이다.

답 12

0660 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(\boxed{(가)\ a^2x^2+2abxy+b^2y^2})$

$=b^2x^2-2abxy+a^2y^2$

$=(\boxed{(나)\ bx-ay})^2\geq0$

$\therefore (a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$

(단, 등호는 $bx-ay=0$, 즉 $\boxed{(다)\ ay=bx}$일 때 성립)

답 (가) $a^2x^2+2abxy+b^2y^2$ (나) $bx-ay$ (다) $ay=bx$

유형 익히기

• 본책 098~109쪽

0661 ① $6+3=9>8$이므로 거짓인 명제이다.

② $\sqrt{4}=2$는 유리수이므로 거짓인 명제이다.

③ $x>4$이면 $x+1>5$이므로 참인 명제이다.

④ x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

⑤ 16의 양의 약수는 1, 2, 4, 8, 16의 5개이므로 참인 명제이다.

답 ④

0662 ① 참인 명제이다.

②, ③ '가까운', '아름답다.'의 기준이 명확하지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

④ 거짓인 명제이다.

⑤ x의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

따라서 명제인 것은 ①, ④이다.

답 ①, ④

0663 ㄴ. 두 직선이 평행할 때에만 엇각의 크기가 서로 같으므로 거짓인 명제이다.

ㄷ. 두 홀수의 합은 짝수이므로 거짓인 명제이다.

이상에서 참인 명제는 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

0664 '$\sim p$ 또는 q'의 부정은 'p 그리고 $\sim q$'

p: $-1<x\leq5$, $\sim q$: $x\geq2$이므로 'p 그리고 $\sim q$'는

$2\leq x\leq5$

답 $2\leq x\leq5$

0665 ㄱ. 15의 양의 약수는 1, 3, 5, 15이므로 그 합은

$1+3+5+15=24$

즉 주어진 명제가 참이므로 그 부정은 거짓이다.

ㄴ. 8은 합성수이므로 주어진 명제는 거짓이고, 그 부정은 참이다.

ㄷ. 직사각형은 평행사변형이므로 주어진 명제는 참이고, 그 부정은 거짓이다.

ㄹ. $\sqrt{9}+2=5$는 유리수이므로 주어진 명제는 거짓이고, 그 부정은 참이다.

이상에서 그 부정이 참인 명제는 ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄹ

0666 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$의 부정은

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq0$

$\therefore a\neq b$ 또는 $b\neq c$ 또는 $c\neq a$

즉 a, b, c 중에 서로 다른 것이 적어도 하나 있다.

답 ⑤

0667 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$x^2-x-6=0$에서 $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$ $\therefore P=\{-2, 3\}$

$x^2-2x-8=0$에서 $(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$ $\therefore Q=\{-2, 4\}$

따라서 조건 'p 또는 q'의 진리집합은

$P\cup Q=\{-2, 3, 4\}$

답 $\{-2, 3, 4\}$

0668 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$

$x^2-7x+10\leq0$에서 $(x-2)(x-5)\leq0$

$\therefore 2\leq x\leq5$

따라서 조건 p의 진리집합을 P라 하면

$P=\{2, 3, 4, 5\}$

이므로 조건 $\sim p$의 진리집합은

$P^C=\{1, 6, 7, 8, 9, 10\}$

따라서 구하는 원소의 합은

$1+6+7+8+9+10=41$

답 ⑤

0669 $-4\le x<2$에서 $\quad x\ge -4$ 그리고 $x<2$

p: $x<-4$에서 $\quad \sim p$: $x\ge -4$

q: $x\ge 2$에서 $\quad \sim q$: $x<2$

따라서 조건 '$-4\le x<2$'는 '$\sim p$ 그리고 $\sim q$'이므로 구하는 진리집합은 $\quad P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C$

답 ④

0670 ① [반례] $x=-1$이면 $x^2=1$이지만 $x\ne 1$이다.

② [반례] $x=3$, $y=-1$이면 $x+y=2>0$이지만 $xy=-3<0$이다.

③ $|x|>1$이면 $x<-1$ 또는 $x>1$이므로 $x^2>1$이다.

④ [반례] $x=0$이면 $-1<x<1$이지만 $x^2=0$이다.

⑤ [반례] 이웃하는 두 변의 길이가 서로 다른 직사각형은 네 각이 모두 직각인 사각형이지만 정사각형은 아니다.

따라서 참인 명제는 ③이다.

답 ③

0671 ② [반례] $a=\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$이면 a, b는 무리수이지만

$$a+b=\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0,\ ab=\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=-2$$

는 모두 유리수이다.

⑤ [반례] $\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{C}=70°$인 삼각형 ABC는 이등변삼각형이지만 $\angle\mathrm{B}=40°$이므로 $\angle\mathrm{A}\ne\angle\mathrm{B}$이다.

답 ②, ⑤

0672 ㄱ. $|a|+|b|=0$이면 $a=0$, $b=0$이므로 $ab=0$이다.

ㄴ. [반례] $a=-2$, $b=-1$, $c=0$이면 $a<b<c$이지만 $ab>bc$이다.

ㄷ. [반례] $a=1$, $b=1$, $c=2$이면 $(a-b)(b-c)=0$이지만 $a=b\ne c$이다.

이상에서 참인 명제는 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

0673 명제 $q \longrightarrow p$가 거짓임을 보이려면 집합 Q의 원소 중에서 집합 P의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.

따라서 구하는 원소는 집합 $Q\cap P^C=Q-P$의 원소인 d, f, g이다.

답 ④

0674 명제 '$\sim p$이면 $\sim q$이다.'가 거짓임을 보이는 원소는 집합 P^C에는 속하고 집합 Q^C에는 속하지 않는다.

따라서 구하는 집합은 $\quad P^C\cap(Q^C)^C=P^C\cap Q$

답 ④

0675 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{3, 6, 9\}$, $Q=\{2, 4, 6, 8, 10\}$ ··· 1단계

명제 $\sim p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이려면 집합 P^C의 원소 중에서 집합 Q의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.

즉 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 반례는 집합 $P^C\cap Q^C=(P\cup Q)^C$의 원소이다.

이때 $P\cup Q=\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$이므로

$(P\cup Q)^C=\{1, 5, 7\}$ ··· 2단계

따라서 구하는 모든 원소의 합은 $\quad 1+5+7=13$ ··· 3단계

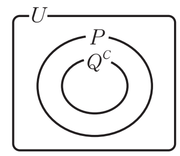
답 13

채점 요소		비율
1단계	두 조건 p, q의 진리집합 구하기	30 %
2단계	명제 $\sim p \longrightarrow q$가 거짓임을 보이는 원소 구하기	60 %
3단계	2단계에서 구한 모든 원소의 합 구하기	10 %

0676 명제 $\sim q \longrightarrow p$가 참이므로

$Q^C\subset P$

이를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$P\cup Q=U$

따라서 항상 옳은 것은 ②이다.

답 ②

0677 ㄱ. $R\not\subset Q$이므로 명제 $r \longrightarrow q$는 거짓이다.

ㄴ. $(P\cap Q)\subset P$이므로 명제 (p이고 q) $\longrightarrow p$는 참이다.

ㄷ. $R\subset(P\cup Q)$이므로 명제 $r \longrightarrow$ (p 또는 q)는 참이다.

이상에서 항상 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

0678 $P\cap Q=P$에서 $\quad P\subset Q$

$P\cup R=R$에서 $\quad P\subset R$

① $P\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

② $P\subset R$이므로 명제 $p \longrightarrow r$는 참이다.

③ $P\subset Q$에서 $Q^C\subset P^C$이므로 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$는 참이다.

④ $P\subset R$에서 $R^C\subset P^C$이므로 명제 $\sim r \longrightarrow \sim p$는 참이다.

따라서 항상 참이라고 할 수 없는 것은 ⑤이다.

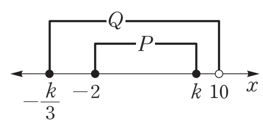
답 ⑤

0679 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,-2\le x\le k\}$,

$Q=\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{k}{3}\le x<10\right\}$

명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-\dfrac{k}{3}\le -2$, $k<10$

$\therefore\ 6\le k<10$

따라서 정수 k는 6, 7, 8, 9이므로 모든 정수 k의 값의 합은

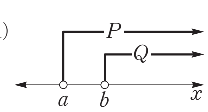
$6+7+8+9=30$

답 30

RPM 비법노트

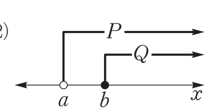
$Q\subset P$가 되도록 하는 a의 값의 범위 구하기

(1)



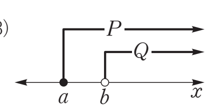
⇨ $a\le b$

(2)



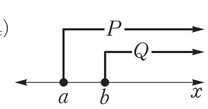
⇨ $a<b$

(3)



⇨ $a\le b$

(4)

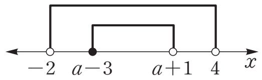


⇨ $a\le b$

0680 주어진 명제가 참이 되려면

$\{x|a-3\le x<a+1\}\subset\{x|-2<x<4\}$

이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-3>-2,\ a+1\le 4$

$\therefore\ 1<a\le 3$

답 ②

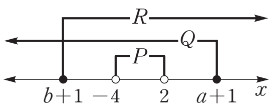
0681 세 조건 $p,\ q,\ r$의 진리집합을 각각 $P,\ Q,\ R$라 하면

$P=\{x|-4<x<2\},\ Q=\{x|x\le a+1\},$

$R=\{x|x\ge b+1\}$

두 명제 $p \longrightarrow q,\ p \longrightarrow r$가 모두 참이 되려면 $P\subset Q,\ P\subset R$이어야 한다. … 1단계

즉 오른쪽 그림에서



$a+1\ge 2,\ b+1\le -4$

$\therefore\ a\ge 1,\ b\le -5$ … 2단계

따라서 a의 최솟값은 1, b의 최댓값은 -5이므로

$m=1,\ M=-5$

$\therefore\ M+m=-4$ … 3단계

답 -4

채점 요소		비율
1단계	세 조건 $p,\ q,\ r$의 진리집합 사이의 포함 관계 구하기	40 %
2단계	$a,\ b$의 값의 범위 구하기	40 %
3단계	$M+m$의 값 구하기	20 %

0682 p: $|x-1|\ge a$에서 $\sim p$: $|x-1|<a$이므로

$-a<x-1<a \qquad \therefore\ -a+1<x<a+1$

q: $|x+2|<5$에서 $\qquad -5<x+2<5$

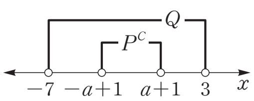
$\therefore\ -7<x<3$

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

$P^C=\{x|-a+1<x<a+1\},$

$Q=\{x|-7<x<3\}$

명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P^C\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$-a+1\ge -7,\ a+1\le 3$

$\therefore\ 0<a\le 2\ (\because\ a>0)$

따라서 양수 a의 최댓값은 2이다.

답 2

0683 ㄱ. [반례] $x=1$이면 $x+6=7>0$이다.

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여

$x^2-2x+1=(x-1)^2\ge 0$

이다.

ㄷ. $x^2=3x$에서 $\qquad x^2-3x=0$

$x(x-3)=0 \qquad \therefore\ x=0$ 또는 $x=3$

따라서 어떤 실수 x에 대하여 $x^2=3x$이다.

ㄹ. 모든 실수 x에 대하여 $|x|\ge x$이다.

이상에서 참인 명제는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

0684 ① $x+2<9$에서 $\qquad x<7$

즉 $x\in U$인 모든 x에 대하여 $x+2<9$이므로 참이다.

② $x=3$이면 $x^2-1=8>7$이므로 참이다.

③ [반례] $x=5$이면 $x^2+3=28$이다.

④ $x=1$이면 $x^2-2=-1$이므로 참이다.

⑤ $x^2-6x<0$에서

$x(x-6)<0 \qquad \therefore\ 0<x<6$

즉 $x\in U$인 모든 x에 대하여 $x^2-6x<0$이므로 참이다.

따라서 거짓인 명제는 ③이다.

답 ③

0685 주어진 명제의 부정은

어떤 실수 x에 대하여 $x^2-4x+a<0$이다.

위의 명제가 참이 되려면 이차방정식 $x^2-4x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times a>0$

$\therefore\ a<4$

답 $a<4$

0686 ① 역: $ab=0$이면 $a=0$이다. (거짓)

[반례] $a=1,\ b=0$이면 $ab=0$이지만 $a\ne 0$이다.

② 역: $a^2\ge 1$이면 $a\ge 1$이다. (거짓)

[반례] $a=-2$이면 $a^2=4>1$이지만 $a<1$이다.

③ 역: $a+b\le 2$이면 $a\le 1$이고 $b\le 1$이다. (거짓)

[반례] $a=-1,\ b=2$이면 $a+b=1<2$이지만 $b>1$이다.

④ 역: $a\ne 0$ 또는 $b\ne 0$이면 $a^2+b^2>0$이다. (참)

⑤ 역: $a+b$가 짝수이면 ab는 홀수이다. (거짓)

[반례] $a=2,\ b=4$이면 $a+b=6$은 짝수이지만 $ab=8$도 짝수이다.

따라서 그 역이 참인 명제는 ④이다.

답 ④

0687 명제 $\sim q \longrightarrow p$의 역 $p \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우인 $q \longrightarrow \sim p$도 참이다.

답 ④

0688 ㄱ. 역: $x=1$이면 $x^3=1$이다. (참)

또 $x^3=1$에서 $\qquad x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore\ x=1\ (\because\ x^2+x+1>0)$

따라서 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

ㄴ. 역: $x=y=0$이면 $x^2+y^2=0$이다. (참)

또 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

ㄷ. 역: $x<y$이면 $|x-y|=y-x$이다. (참)

$x<y$이면 $x-y<0$이므로

$|x-y|=-(x-y)=y-x$

명제: [반례] $x=1,\ y=1$이면 $|x-y|=y-x=0$이지만 $x=y$이다.

따라서 주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

이상에서 그 역과 대우가 모두 참인 명제는 ㄱ, ㄴ이다.

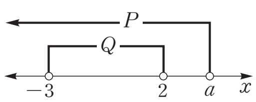
답 ③

07 명제

0689 명제 '$x+y<a$이면 $x<3$ 또는 $y<-1$이다.'가 참이 되려면 그 대우 '$x\ge3$이고 $y\ge-1$이면 $x+y\ge a$이다.'가 참이 되어야 한다.
이때 $x\ge3$, $y\ge-1$에서 $x+y\ge2$이므로
$a\le2$ 답 $a\le2$

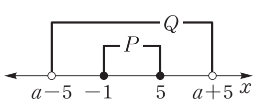
0690 명제 '$x^2-kx+6\ne0$이면 $x-1\ne0$이다.'가 참이 되려면 그 대우 '$x-1=0$이면 $x^2-kx+6=0$이다.'가 참이 되어야 한다.
$x^2-kx+6=0$에 $x-1=0$, 즉 $x=1$을 대입하면
$1-k+6=0$ $\therefore k=7$ 답 7

0691 명제 $\sim p \longrightarrow \sim q$가 참이면 그 대우인 $q \longrightarrow p$도 참이다.
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|x<a\}$, $Q=\{x|-3<x<2\}$
이때 명제 $q \longrightarrow p$가 참이려면 $Q\subset P$이어야 하므로 오른쪽 그림에서 $a\ge2$



따라서 실수 a의 최솟값은 2이다. 답 2

0692 명제 '$|x-a|\ge5$이면 $|x-2|>3$이다.'가 참이 되려면 그 대우 '$|x-2|\le3$이면 $|x-a|<5$이다.'가 참이 되어야 한다. ··· 1단계
이때 두 조건 p, q를 각각 p: $|x-2|\le3$, q: $|x-a|<5$라 하자.
$|x-2|\le3$에서 $-3\le x-2\le3$
$\therefore -1\le x\le5$
$|x-a|<5$에서 $-5<x-a<5$
$\therefore a-5<x<a+5$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|-1\le x\le5\}$, $Q=\{x|a-5<x<a+5\}$
명제 $p \longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$a-5<-1$, $a+5>5$
$\therefore 0<a<4$ ··· 2단계
따라서 정수 a는 1, 2, 3의 3개이다. ··· 3단계
답 3

채점 요소	비율
1단계 주어진 명제의 대우가 참이 되어야 함을 알기	30 %
2단계 a의 값의 범위 구하기	60 %
3단계 정수 a의 개수 구하기	10 %

0693 ① 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim r$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim r$도 참이다.
② 명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이다.
③ 명제 $q \longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우 $r \longrightarrow \sim q$도 참이다.
⑤ 명제 $p \longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.
따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ④이다. 답 ④

0694 ㄱ. 명제 $p \longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우 $r \longrightarrow \sim p$도 참이다.
ㄴ. 명제 $\sim s \longrightarrow r$가 참이므로 그 대우 $\sim r \longrightarrow s$도 참이다.
따라서 두 명제 $p \longrightarrow \sim r$, $\sim r \longrightarrow s$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow s$도 참이다.
ㄷ. 두 명제 $q \longrightarrow r$, $r \longrightarrow \sim p$가 참이므로 명제 $q \longrightarrow \sim p$도 참이다.
이상에서 항상 참인 명제는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0695 명제 $q \longrightarrow \sim p$가 참이므로 그 대우 $p \longrightarrow \sim q$도 참이다.
두 명제 $r \longrightarrow s$, $p \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 명제 $r \longrightarrow \sim q$가 참이 되려면 명제 $s \longrightarrow p$가 참이어야 한다.
또 명제 $s \longrightarrow p$가 참이면 그 대우 $\sim p \longrightarrow \sim s$도 참이다.
따라서 명제 $r \longrightarrow \sim q$가 참임을 보이기 위해 필요한 참인 명제는 ②이다. 답 ②

0696 ① $x^2=4$이면 $x=-2$ 또는 $x=2$
따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.
② $x\ge1$이고 $y\ge1$이면 $x+y\ge2$이므로 $p \Longrightarrow q$
[$\longleftarrow$의 반례] $x=3$, $y=0$이면 $x+y=3>2$이지만 $y<1$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
③ $x=y$이면 $xz=yz$이므로 $p \Longrightarrow q$
[$\longleftarrow$의 반례] $x=1$, $y=2$, $z=0$이면 $xz=yz=0$이지만 $x\ne y$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
④ $x=2$, $y=3$이면 $xy=6$이므로 $p \Longrightarrow q$
[$\longleftarrow$의 반례] $x=-2$, $y=-3$이면 $xy=6$이지만 $x\ne2$, $y\ne3$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
⑤ $x<1$이면 $x\le2$이므로 $p \Longrightarrow q$
[$\longleftarrow$의 반례] $x=\frac{3}{2}$이면 $x\le2$이지만 $x>1$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
즉 p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은 ①이다.
답 ①

0697 ㄱ. $a>1$, $b>1$이면 $a-1>0$, $b-1>0$이므로
$$ab+1-(a+b)=a(b-1)-(b-1)$$
$$=(a-1)(b-1)>0$$
즉 $ab+1>a+b$이므로 $p \Longrightarrow q$
[$\longleftarrow$의 반례] $a=0$, $b=0$이면 $ab+1>a+b$이지만 $a<1$, $b<1$이다.
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
ㄴ. $ab=|ab|$이면 $ab\ge0$이므로
$a\ge0$, $b\ge0$ 또는 $a\le0$, $b\le0$
따라서 $p \not\Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $a>b$이고 $b>c$이면 $a>c$이므로 $\quad p \Longrightarrow q$

[$\longleftarrow$의 반례] $a=1$, $b=2$, $c=-1$이면 $a>c$이지만 $a<b$이다.

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

이상에서 p가 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답** ㄱ, ㄷ

0698 q: $xy=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $y=0$

r: $|x|+|y|=0$에서 $\quad x=0$, $y=0$

ㄱ. $p \Longrightarrow q$, $q \not\Longrightarrow p$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다. (거짓)

ㄴ. $p \Longleftrightarrow r$이므로 p는 r이기 위한 필요충분조건이다. (참)

ㄷ. $\sim r$: $x\neq0$ 또는 $y\neq0$, $\sim q$: $x\neq0$, $y\neq0$

따라서 $\sim r \not\Longrightarrow \sim q$, $\sim q \Longrightarrow \sim r$이므로 $\sim r$는 $\sim q$이기 위한 필요조건이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. **답** ㄴ

0699 p가 q이기 위한 필요조건이므로

$q \Longrightarrow p \quad \therefore Q\subset P$

① $P\cap Q=Q$ ② $P\cup Q=P$

③ $P\neq Q$이면 $\quad P\cap Q^C\neq\varnothing$ ⑤ $P^C-Q=P^C$

따라서 항상 옳은 것은 ④이다. **답** ④

0700 ㄱ. $R\subset Q$이므로 q는 r이기 위한 필요조건이다. (참)

ㄴ. $P\subset R^C$이므로 p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다. (참)

ㄷ. $Q^C\not\subset P^C$이므로 $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 필요조건이 아니다. (거짓)

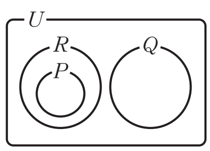
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ㄱ, ㄴ

0701 $(P-R)\cup(Q-R^C)=\varnothing$에서

$P-R=\varnothing$, $Q-R^C=\varnothing$

$\therefore P\subset R$, $Q\cap R=\varnothing$

세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



③ $P\subset R$이므로 p는 r이기 위한 충분조건이다.

⑤ $P\subset Q^C$이므로 $\sim q$는 p이기 위한 필요조건이다.

따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다. **답** ⑤

0702 $(x-5)(x-9)\le0$에서 $\quad 5\le x\le9$

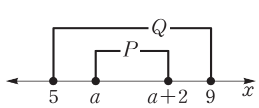
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|a\le x\le a+2\}$, $Q=\{x|5\le x\le9\}$

q가 p이기 위한 필요조건이므로

$p \Longrightarrow q$, 즉 $P\subset Q$

이를 만족시키도록 두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a\ge5$, $a+2\le9 \quad \therefore 5\le a\le7$

따라서 정수 a는 5, 6, 7이므로 모든 정수 a의 값의 합은

$5+6+7=18$ **답** 18

0703 $x-3\neq0$은 $x^2+ax-12\neq0$이기 위한 필요조건이므로 명제 '$x^2+ax-12\neq0$이면 $x-3\neq0$이다.'는 참이다.

따라서 그 대우 '$x-3=0$이면 $x^2+ax-12=0$이다.'도 참이다.

$x^2+ax-12=0$에 $x=3$을 대입하면

$9+3a-12=0 \quad \therefore a=1$ **답** 1

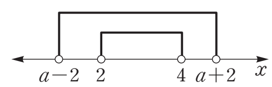
0704 $x^2-6x+8<0$에서 $\quad (x-2)(x-4)<0$

$\therefore 2<x<4$ … 1단계

$|x-a|<2$에서 $\quad -2<x-a<2$

$\therefore a-2<x<a+2$ … 2단계

따라서 $x^2-6x+8<0$이 $|x-a|<2$이기 위한 충분조건이 되려면 명제 '$2<x<4$이면 $a-2<x<a+2$이다.'가 참이어야 하므로 위의 그림에서



$a-2\le2$, $a+2\ge4$

$\therefore 2\le a\le4$ … 3단계

답 $2\le a\le4$

채점 요소	비율
1단계 $x^2-6x+8<0$을 만족시키는 x의 값의 범위 구하기	20 %
2단계 $\lvert x-a\rvert<2$를 만족시키는 x의 값의 범위 구하기	20 %
3단계 a의 값의 범위 구하기	60 %

0705 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

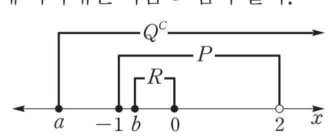
$P=\{x|-1\le x<2\}$, $Q=\{x|x<a\}$, $R=\{x|b\le x\le0\}$

$\sim q$는 p이기 위한 필요조건이고, $\sim p$는 $\sim r$이기 위한 충분조건이므로

$p \Longrightarrow \sim q$, $\sim p \Longrightarrow \sim r$

따라서 $P\subset Q^C$이고 $P^C\subset R^C$, 즉 $R\subset P$이므로 $\quad R\subset P\subset Q^C$

이때 $Q^C=\{x|x\ge a\}$이므로 이를 만족시키도록 세 집합 P, Q^C, R를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 $\quad a\le-1$, $-1\le b\le0$

따라서 a의 최댓값은 -1, b의 최솟값은 -1이므로 $a-b$의 최댓값은

$-1-(-1)=0$ **답** 0

0706 p는 q이기 위한 충분조건이므로 $\quad p \Longrightarrow q$

$\therefore \sim q \Longrightarrow \sim p$

$\sim q$는 r이기 위한 필요조건이므로 $\quad r \Longrightarrow \sim q$

$\therefore q \Longrightarrow \sim r$

$p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow \sim r$이므로 $\quad p \Longrightarrow \sim r \quad \therefore r \Longrightarrow \sim p$

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 ⑤이다. **답** ⑤

07 명제

0707 ㄱ. 명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 q는 p이기 위한 필요조건이지만 충분조건인지는 알 수 없다. (거짓)
ㄴ. 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow r$가 참이다.
즉 r는 q이기 위한 필요조건이다. (참)
ㄷ. 두 명제 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow r$도 참이다.
즉 p는 r이기 위한 충분조건이다. (참)
이상에서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.
답 ④

0708 (가), (나), (다), (라)에서 각각 $p \Longleftrightarrow q$, $s \Longrightarrow r$, $q \Longrightarrow s$, $r \Longrightarrow q$이다.
이때 $p \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow s$이므로 $\quad p \Longrightarrow s$
$s \Longrightarrow r$, $r \Longrightarrow q$, $q \Longrightarrow p$이므로 $\quad s \Longrightarrow p$
따라서 $p \Longleftrightarrow s$이므로 s는 p이기 위한 필요충분조건이다.
답 필요충분조건

0709 n이 3의 배수가 아니면
$n=\boxed{(가)\ 3k-2}$ 또는 $n=3k-1$ (k는 자연수)
로 나타낼 수 있다.
(i) $n=\boxed{(가)\ 3k-2}$일 때
$$n^2=(3k-2)^2=9k^2-12k+4$$
$$=3(\boxed{(나)\ 3k^2-4k+1})+1$$
(ii) $n=3k-1$일 때
$$n^2=(3k-1)^2=9k^2-6k+1$$
$$=3(\boxed{(다)\ 3k^2-2k})+1$$
답 (가) $\mathbf{3k-2}$ (나) $\mathbf{3k^2-4k+1}$ (다) $\mathbf{3k^2-2k}$

0710 주어진 명제의 대우는 'x, y가 모두 유리수이면 $x+y$는 유리수이다.'이다.
x, y가 모두 유리수이면
$$x=\frac{b}{a},\ y=\frac{d}{c}\ (a,\ b,\ c,\ d\text{는 정수},\ a\neq0,\ c\neq0)$$
로 나타낼 수 있으므로
$$x+y=\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{ad+bc}{ac}$$
이때 $ad+bc$와 ac는 정수이고, $ac\neq0$이므로 $x+y$는 유리수이다.
따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.
답 풀이 참조

0711 $\sqrt{n^2-1}=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)의 양변을 제곱하면 $\quad n^2-1=\dfrac{q^2}{p^2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
㉠의 좌변은 자연수이고, p와 q는 서로소이므로
$p^2=\boxed{(가)\ 1}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $\quad n^2-1=q^2$
$n^2-q^2=\boxed{(나)\ 1}$ $\quad\therefore (n+q)(n-q)=\boxed{(나)\ 1}$
따라서 $n+q$, $n-q$의 값은 모두 $\boxed{(다)\ -1 \text{ 또는 } 1}$이다.
답 ②

0712 유리수 a와 무리수 b의 합 $a+b$가 무리수가 아니라고 가정하면 $a+b$는 유리수이므로
$a+b=k$ (k는 유리수)
로 놓을 수 있다.
이때 $b=k-a$이고 b는 무리수, $k-a$는 유리수이므로 모순이다.
따라서 $a+b$는 무리수이므로 유리수와 무리수의 합은 무리수이다.
답 풀이 참조

0713 $A-B=(xy+4)-2(x+y)=xy-2x-2y+4$
$$=x(y-2)-2(y-2)$$
$$=(x-2)(y-2)$$
이때 $x\geq2$, $y\geq2$에서 $x-2\geq0$, $y-2\geq0$이므로
$(x-2)(y-2)\geq0$
$\therefore A\geq B$ (단, 등호는 $x=2$ 또는 $y=2$일 때 성립)
답 ④

0714 $A^2-B^2=(\sqrt{a+4})^2-\left(\dfrac{a}{4}+2\right)^2$
$$=a+4-\left(\frac{a^2}{16}+a+4\right)=-\frac{a^2}{16}<0$$
$\therefore A^2<B^2$
이때 $A>0$, $B>0$이므로 $\quad A<B$
답 $\boldsymbol{A<B}$

0715 ㄱ. $\dfrac{a}{b}-\dfrac{a+1}{b+1}=\dfrac{a(b+1)-b(a+1)}{b(b+1)}$
$$=\frac{a-b}{b(b+1)}>0$$
$\therefore \dfrac{a}{b}>\dfrac{a+1}{b+1}$ (거짓)
ㄴ. $\dfrac{a}{b^2}-\dfrac{b}{a^2}=\dfrac{a^3-b^3}{a^2b^2}=\dfrac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2b^2}>0$
$\therefore \dfrac{a}{b^2}>\dfrac{b}{a^2}$ (참)
ㄷ. $\dfrac{1+b}{1+a}-\dfrac{1+a}{1+b}=\dfrac{(1+b)^2-(1+a)^2}{(1+a)(1+b)}$
$$=\frac{(b-a)(a+b+2)}{(1+a)(1+b)}<0$$
$\therefore \dfrac{1+b}{1+a}<\dfrac{1+a}{1+b}$ (참)
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.
답 ⑤

다른 풀이 ㄷ. $1+a>1+b$이므로 $\quad \dfrac{1+b}{1+a}<1$, $\dfrac{1+a}{1+b}>1$
$\therefore \dfrac{1+b}{1+a}<\dfrac{1+a}{1+b}$ (참)

0716 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2=(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)$
$$=\boxed{(가)\ 2\sqrt{ab}}\geq0$$
$\therefore (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\geq(\sqrt{a+b})^2$
그런데 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq0$, $\sqrt{a+b}\geq0$이므로
$\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq\sqrt{a+b}$
이때 등호는 $2\sqrt{ab}=0$, 즉 $a=0$ 또는 $\boxed{(나)\ b=0}$일 때 성립한다.
답 (가) $\mathbf{2\sqrt{ab}}$ (나) $\boldsymbol{b=0}$

0717 $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=\frac{1}{2}(x+y+z)(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)$

$=\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

양의 실수 x, y, z에 대하여

$x+y+z>0$, $(x-y)^2\geq 0$, $(y-z)^2\geq 0$, $(z-x)^2\geq 0$

이므로 $x^3+y^3+z^3-3xyz\geq 0$

$\therefore x^3+y^3+z^3\geq 3xyz$

이때 등호는 $x-y=0$, $y-z=0$, $z-x=0$, 즉 $x=y=z$일 때 성립한다.

답 풀이 참조

0718 ㄱ. [반례] $a=-4$이면 $a^2+16=-8a$

ㄴ. $a^2+5b^2-b(4a+b)=a^2-4ab+4b^2=(a-2b)^2\geq 0$

$\therefore a^2+5b^2\geq b(4a+b)$

이때 등호는 $a-2b=0$, 즉 $a=2b$일 때 성립한다.

ㄷ. [반례] $a=1$, $b=-1$이면 $|a+b|=0$, $|a-b|=2$

$\therefore |a+b|<|a-b|$

이상에서 절대부등식인 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

0719 $a>0$, $b>0$에서 $2a>0$, $3b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2a+3b\geq 2\sqrt{2a\times 3b}=2\sqrt{6ab}$

이때 $2a+3b=12$이므로 $12\geq 2\sqrt{6ab}$

$\therefore \sqrt{6ab}\leq 6$

양변을 제곱하면 $6ab\leq 36$

$\therefore ab\leq 6$ $\therefore M=6$

한편 등호는 $2a=3b$일 때 성립하므로 $2a+3b=12$에서

$2a=3b=6$ $\therefore a=3$, $b=2$

즉 $\alpha=3$, $\beta=2$이므로

$M+\alpha+\beta=11$

답 11

0720 $x>0$, $y>0$에서 $2x>0$, $4y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x+4y\geq 2\sqrt{2x\times 4y}=2\sqrt{8xy}$

이때 $xy=4$이므로

$2x+4y\geq 2\sqrt{32}=8\sqrt{2}$ (단, 등호는 $x=2y$일 때 성립)

따라서 $2x+4y$의 최솟값은 $8\sqrt{2}$이다.

답 ⑤

0721 $a\neq 0$, $b\neq 0$에서 $a^2>0$, $4b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+4b^2\geq 2\sqrt{a^2\times 4b^2}=4|ab|$

이때 $a^2+4b^2=32$이므로 $32\geq 4|ab|$, $|ab|\leq 8$

$\therefore -8\leq ab\leq 8$

(단, 등호는 $a^2=4b^2$, 즉 $|a|=|2b|$일 때 성립)

따라서 ab의 최댓값은 8, 최솟값은 -8이므로 구하는 곱은

$8\times(-8)=-64$

답 -64

0722 $\frac{1}{a}+\frac{5}{b}=\frac{5a+b}{ab}=\frac{10}{ab}$ …… ㉠

한편 $5a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$5a+b\geq 2\sqrt{5ab}$

이때 $5a+b=10$이므로 $10\geq 2\sqrt{5ab}$

$\therefore \sqrt{5ab}\leq 5$ (단, 등호는 $5a=b$일 때 성립)

양변을 제곱하면 $5ab\leq 25$

$\therefore ab\leq 5$

즉 $\frac{1}{ab}\geq\frac{1}{5}$이므로 $\frac{10}{ab}\geq 2$

따라서 ㉠에서 $\frac{1}{a}+\frac{5}{b}$의 최솟값은 2이다.

답 2

0723 $x>0$, $y>0$에서 $xy>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(x+\frac{4}{y}\right)\left(4y+\frac{1}{x}\right)=4xy+1+16+\frac{4}{xy}$$

$$=17+4xy+\frac{4}{xy}$$

$$\geq 17+2\sqrt{4xy\times\frac{4}{xy}}$$

$$=17+2\times 4=25$$

$\left(\text{단, 등호는 } 4xy=\frac{4}{xy}\text{, 즉 } xy=1\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 25이다.

답 ⑤

0724 $a>0$에서 $a^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(a-\frac{3}{a}\right)\left(3a-\frac{1}{a}\right)=3a^2-1-9+\frac{3}{a^2}$$

$$=-10+3a^2+\frac{3}{a^2}$$

$$\geq -10+2\sqrt{3a^2\times\frac{3}{a^2}}$$

$$=-10+2\times 3=-4$$

$\therefore m=-4$

한편 등호는 $3a^2=\frac{3}{a^2}$일 때 성립하므로

$a^4=1$ $\therefore a=1$ ($\because a>0$)

즉 $\alpha=1$이므로 $m+\alpha=-3$

답 -3

0725 $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$에서 $ad>0$, $bc>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)=1+\frac{ad}{bc}+\frac{bc}{ad}+1$$

$$=2+\frac{ad}{bc}+\frac{bc}{ad}$$

$$\geq 2+2\sqrt{\frac{ad}{bc}\times\frac{bc}{ad}}$$

$$=4$$

$\left(\text{단, 등호는 }\frac{ad}{bc}=\frac{bc}{ad}\text{, 즉 } ad=bc\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

답 4

0726 $a>0$, $b>0$, $c>0$에서 $3b+c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(a+3b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{3b+c}\right)$$
$$=\{a+(3b+c)\}\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{3b+c}\right)$$
$$=1+\frac{4a}{3b+c}+\frac{3b+c}{a}+4=5+\frac{4a}{3b+c}+\frac{3b+c}{a}$$
$$\geq 5+2\sqrt{\frac{4a}{3b+c}\times\frac{3b+c}{a}}$$
$$=5+2\times 2=9$$
$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{4a}{3b+c}=\frac{3b+c}{a}\text{, 즉 } 2a=3b+c\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 구하는 최솟값은 9이다. 답 **9**

0727 $x>-1$에서 $x+1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+\frac{4}{x+1}=x+1+\frac{4}{x+1}-1$$
$$\geq 2\sqrt{(x+1)\times\frac{4}{x+1}}-1$$
$$=2\times 2-1=3$$

$\therefore m=3$

한편 등호는 $x+1=\dfrac{4}{x+1}$일 때 성립하므로

$(x+1)^2=4$, $\quad x+1=2\ (\because x+1>0)\quad \therefore x=1$

즉 $n=1$이므로 $\quad mn=3$ 답 ②

0728 $a>1$에서 $a-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$9a-1+\frac{1}{a-1}=9(a-1)+\frac{1}{a-1}+8$$
$$\geq 2\sqrt{9(a-1)\times\frac{1}{a-1}}+8$$
$$=2\times 3+8=14$$
$$\left(\text{단, 등호는 } 9(a-1)=\frac{1}{a-1}\text{, 즉 } a=\frac{4}{3}\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $9a-1+\dfrac{1}{a-1}\geq k$가 항상 성립하려면 $k\leq 14$이어야 하므로 k의 최댓값은 14이다. 답 ④

0729 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$$
$$=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$
$$=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right) \quad \cdots \text{1단계}$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\times\frac{b}{c}}+2\sqrt{\frac{a}{c}\times\frac{c}{a}}$$
$$=2+2+2=6\ (\text{단, 등호는 } a=b=c\text{일 때 성립})$$

따라서 구하는 최솟값은 6이다. … 2단계

답 **6**

채점 요소	비율
1단계 주어진 식 변형하기	50 %
2단계 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최솟값 구하기	50 %

참고 | 등호는 각각 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}=\frac{b}{c}$, $\frac{a}{c}=\frac{c}{a}$일 때 성립하므로

$a^2=b^2=c^2 \quad \therefore a=b=c\ (\because a>0,\ b>0,\ c>0)$

즉 등호가 동시에 성립할 수 있으므로 앞과 같이 풀 수 있다.

0730 $x>3$에서 $x-3>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x^2-3x+4}{x-3}=\frac{x(x-3)+4}{x-3}=x+\frac{4}{x-3}$$
$$=x-3+\frac{4}{x-3}+3$$
$$\geq 2\sqrt{(x-3)\times\frac{4}{x-3}}+3$$
$$=2\times 2+3=7$$
$$\left(\text{단, 등호는 } x-3=\frac{4}{x-3}\text{, 즉 } x=5\text{일 때 성립}\right)$$

따라서 구하는 최솟값은 7이다. 답 **7**

0731 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+2^2)(x^2+y^2)\geq(x+2y)^2$

이때 $x^2+y^2=4$이므로 $\quad 20\geq(x+2y)^2$

$\therefore -2\sqrt{5}\leq x+2y\leq 2\sqrt{5}$ (단, 등호는 $2x=y$일 때 성립)

따라서 $x+2y$의 최댓값은 $2\sqrt{5}$이다. 답 ②

0732 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}(x^2+y^2)\geq\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{3}\right)^2$$

이때 $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=5$이므로 $\quad \frac{25}{144}(x^2+y^2)\geq 25$

$\therefore x^2+y^2\geq 144$ (단, 등호는 $4x=3y$일 때 성립)

따라서 x^2+y^2의 최솟값은 144이다. 답 **144**

0733 x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(3^2+2^2)(x^2+y^2)\geq(3x+2y)^2$

이때 $x^2+y^2=a$이므로 $\quad 13a\geq(3x+2y)^2$

$\therefore -\sqrt{13a}\leq 3x+2y\leq\sqrt{13a}$

(단, 등호는 $2x=3y$일 때 성립)

즉 $3x+2y$의 최댓값과 최솟값이 각각 $\sqrt{13a}$, $-\sqrt{13a}$이므로

$\sqrt{13a}-(-\sqrt{13a})=13$, $\quad 2\sqrt{13a}=13$

$4\times 13a=13^2 \quad \therefore a=\frac{13}{4}$ 답 $\mathbf{\frac{13}{4}}$

0734 $a+b+c=2$에서 $\quad b+c=2-a \quad \cdots\cdots$ ㉠

$a^2+b^2+c^2=4$에서 $\quad b^2+c^2=4-a^2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

b, c는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(b^2+c^2)\geq(b+c)^2$

㉠, ㉡을 대입하면 $\quad 2(4-a^2)\geq(2-a)^2$

$3a^2-4a-4\leq 0$, $\quad (3a+2)(a-2)\leq 0$

$\therefore -\frac{2}{3}\leq a\leq 2$ (단, 등호는 $b=c$일 때 성립)

따라서 a의 최댓값은 2, 최솟값은 $-\frac{2}{3}$이므로 구하는 합은

$$2+\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

답 $\frac{4}{3}$

다른 풀이 $(b+c)^2=b^2+c^2+2bc$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$(2-a)^2=(4-a^2)+2bc \qquad \therefore\ bc=a^2-2a \qquad \cdots$ ㉢

㉠, ㉢에서 b, c는 t에 대한 이차방정식

$t^2-(b+c)t+bc=0$, 즉 $t^2-(2-a)t+a^2-2a=0$

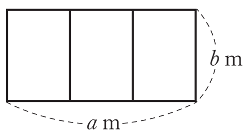
의 두 실근이므로 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2-a)\}^2-4\times1\times(a^2-2a)\geq0$

$3a^2-4a-4\leq0, \qquad (3a+2)(a-2)\leq0$

$\therefore\ -\frac{2}{3}\leq a\leq2$

0735 전체 우리의 가로의 길이를 a m, 세로의 길이를 b m라 하면 철망의 길이가 40 m이므로



$2a+4b=40 \qquad \therefore\ a+2b=20$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+2b\geq2\sqrt{a\times2b}=2\sqrt{2ab}$

이때 $a+2b=20$이므로 $\qquad 20\geq2\sqrt{2ab}$

$\therefore\ \sqrt{2ab}\leq10$ (단, 등호는 $a=2b$일 때 성립)

양변을 제곱하면 $\qquad 2ab\leq100 \qquad \therefore\ ab\leq50$

전체 우리의 넓이는 ab m^2이므로 넓이의 최댓값은 50 m^2이다.

답 ②

0736 소포의 밑면의 가로, 세로의 길이를 각각 x cm, y cm라 하면 소포를 묶는 데 필요한 끈의 길이는

$2x+2y+4\times5=2x+2y+20$ (cm)

그런데 끈의 길이가 100 cm이므로

$2x+2y+20=100 \qquad \therefore\ x+y=40$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+y\geq2\sqrt{xy}$

이때 $x+y=40$이므로 $\qquad 40\geq2\sqrt{xy}$

$\therefore\ \sqrt{xy}\leq20$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

양변을 제곱하면 $\qquad xy\leq400$

소포의 부피는 $5xy$ cm^3이므로 $\qquad 5xy\leq2000$

따라서 소포의 최대 부피는 2000 cm^3이다. 답 2000 cm^3

0737 직사각형의 대각선의 길이가 $2\sqrt{5}$이므로

$a^2+b^2=(2\sqrt{5})^2=20$

상자의 12개의 모서리 길이의 합은 $\qquad 2a+4b$

a, b가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+4^2)(a^2+b^2)\geq(2a+4b)^2$

이때 $a^2+b^2=20$이므로 $\qquad 20\times20\geq(2a+4b)^2$

$\therefore\ -20\leq2a+4b\leq20$ (단, 등호는 $2a=b$일 때 성립)

그런데 $a>0$, $b>0$이므로 $\qquad 0<2a+4b\leq20$

따라서 구하는 최댓값은 20이다. 답 20

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 110~113쪽

0738 ㄱ. $\sim p$: x^2은 9보다 크거나 같다.

ㄴ. $\sim p$: $ab\neq0$에서 $\qquad a\neq0$이고 $b\neq0$

이상에서 조건 p와 그 부정 $\sim p$가 바르게 연결된 것은 ㄷ뿐이다.

답 ㄷ

0739 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{2, 3, 4\}$, $Q=\{4, 5, 6\}$

조건 '$\sim p$이고 q'의 진리집합은 $P^C\cap Q$이고 $P^C=\{1, 5, 6\}$이므로

$P^C\cap Q=\{5, 6\}$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$5+6=11$ 답 11

0740 ① [반례] $x=-3$이면 $x\neq3$이지만 $x^2=9$이다.

② [반례] $x=0$, $y=1$이면 $x^2+y^2=1>0$이지만 $x=0$이다.

③ [반례] $x=0$, $y=-1$이면 $x>y$이지만 $x^2<y^2$이다.

④ $|x|<2$이면 $-2<x<2$이므로 $x<2$이다.

⑤ [반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x+y=0$이지만 $x\neq0$, $y\neq0$이다.

따라서 참인 명제는 ④이다. 답 ④

0741 ④ $x=1+\sqrt{2}$, $y=1-\sqrt{2}$이면 $x+y=2$, $xy=-1$이므로 $x+y$, xy는 모두 유리수이지만 x, y는 모두 무리수이다.

답 ④

0742 ③ $P\cap Q=\varnothing$이므로 $\qquad P\subset Q^C$

따라서 명제 $p\longrightarrow\sim q$는 참이다.

답 ③

0743 $x^2-(a^2+1)x+a^2=0$에서

$(x-1)(x-a^2)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=a^2$

$|x-a|\leq1$에서 $\qquad -1\leq x-a\leq1$

$\therefore\ a-1\leq x\leq a+1$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, a^2\}$, $Q=\{x|a-1\leq x\leq a+1\}$

이때 $p\longrightarrow q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로

$1\in Q$, $a^2\in Q$

즉 $a-1\leq1\leq a+1$, $a-1\leq a^2\leq a+1$에서

$0\leq a\leq2$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leq a\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ 0\leq a\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

따라서 정수 a는 0, 1의 2개이다.

답 2

0744 ① 부정: 모든 실수 x에 대하여 $x^2-x+\frac{1}{4}\geq 0$이다. (참)

모든 실수 x에 대하여 $\quad x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$

② 부정: 모든 실수 x에 대하여 $x^2-1\geq 0$이다. (거짓)

[반례] $x=0$이면 $x^2-1=-1<0$이다.

③ 부정: 모든 실수 x에 대하여 $x+\frac{1}{x}<1$이다. (거짓)

[반례] $x=1$이면 $x+\frac{1}{x}=2>1$이다.

④ 부정: 어떤 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2<0$이다. (거짓)

모든 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2\geq 0$이다.

⑤ 부정: 어떤 실수 x, y에 대하여 $|x|+|y|=|x+y|$이다. (참)

$x=1$, $y=2$이면 $\quad |x|+|y|=|x+y|=3$

따라서 그 부정이 참인 명제는 ①, ⑤이다. 답 ①, ⑤

0745 주어진 명제가 거짓이 되려면 이 명제의 부정이 참이어야 한다.

이때 주어진 명제의 부정은

모든 실수 x에 대하여 $x^2+8x+2k-1>0$이다.

위의 명제가 참이 되어야 하므로 이차방정식

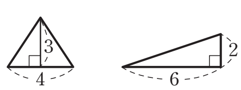
$x^2+8x+2k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=4^2-1\times(2k-1)<0$$

$$\therefore k>\frac{17}{2}$$

따라서 정수 k의 최솟값은 9이다. 답 **9**

0746 ① [반례] 오른쪽 그림의 두 삼각형은 넓이가 6으로 같지만 합동이 아니다.



주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

② [반례] $x=1$, $y=-1$이면 $x>y$이지만 $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$이다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

③ $n=2k$ (k는 자연수)라 하면

$n(n+2)=2k(2k+2)=4k(k+1)$에서 k와 $k+1$ 중 적어도 하나는 짝수이므로 $n(n+2)$는 8의 배수이다.

또 n, $n+1$, $n+2$ 중 적어도 하나는 3의 배수이므로

$n(n+1)(n+2)$는 3의 배수이다.

즉 $n(n+1)(n+2)$는 8의 배수이면서 3의 배수이므로 24의 배수이다.

따라서 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

④ [반례] $x=2$, $y=\frac{1}{2}$이면 $xy=1$은 정수이지만 y는 정수가 아니다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

⑤ [반례] 순환소수는 무한소수이지만 유리수이다.

주어진 명제가 거짓이므로 그 대우도 거짓이다.

따라서 그 대우가 참인 명제는 ③이다. 답 ③

0747 ㄷ. 명제 $s \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim s$도 참이다.

따라서 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow \sim s$가 참이므로 명제 $p \longrightarrow \sim s$도 참이다.

ㄹ. 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$가 참이므로 그 대우 $q \longrightarrow r$도 참이다.

따라서 두 명제 $s \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$가 참이므로 명제 $s \longrightarrow r$도 참이다.

이상에서 항상 참인 명제는 ㄷ, ㄹ이다. 답 ㄷ, ㄹ

0748 네 조건 p, q, r, s를

p: A가 안경을 썼다., q: B가 안경을 썼다.,

r: C가 안경을 썼다., s: D가 안경을 썼다.

로 놓으면 (나), (다), (라)에 의하여 세 명제 $s \longrightarrow r$, $\sim p \longrightarrow \sim r$, $\sim s \longrightarrow \sim q$가 모두 참이므로 각각의 대우 $\sim r \longrightarrow \sim s$, $r \longrightarrow p$, $q \longrightarrow s$도 참이다.

즉 세 명제 $q \longrightarrow s$, $s \longrightarrow r$, $r \longrightarrow p$가 참이므로

B가 안경을 썼으면 D, C, A도 안경을 써야 하고,

D가 안경을 썼으면 C, A도 안경을 써야 한다.

이는 (가)에 모순이므로 B, D는 안경을 쓰지 않았다.

따라서 안경을 쓴 학생은 A, C이다. 답 **A, C**

0749 ㄱ. [$\longrightarrow$의 반례] $A=\{1, 2\}$, $B=\{1\}$, $C=\{2, 3\}$이면 $B\cup C=\{1, 2, 3\}$이므로 $A\subset(B\cup C)$이지만 $A\not\subset B$, $A\not\subset C$이다.

$A\subset B$ 또는 $A\subset C$이면 $A\subset(B\cup C)$이므로

$q \Longrightarrow p$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

ㄴ. $p \Longleftrightarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. m, n이 모두 짝수이면 $m+n$은 짝수이므로

$p \Longrightarrow q$

[$\longleftarrow$의 반례] $m=1$, $n=3$이면 $m+n=4$는 짝수이지만 m, n은 모두 홀수이다.

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

이상에서 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄴ뿐이다. 답 ㄴ

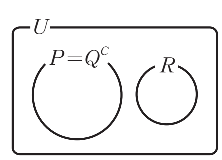
0750 p는 $\sim q$이기 위한 필요충분조건이므로

$p \Longleftrightarrow \sim q \qquad \therefore P=Q^C$

r는 $\sim p$이기 위한 충분조건이므로

$r \Longrightarrow \sim p \qquad \therefore R\subset P^C$

세 집합 P, Q, R 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



① $R\not\subset P$ ③ $R\cap Q^C=\varnothing$

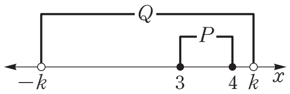
④ $Q\cap R=R$ ⑤ $Q^C-R=Q^C$

따라서 항상 옳은 것은 ②이다. 답 ②

0751 $(x+k)(x-k)<0$에서 $\quad -k<x<k$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|3\le x\le 4\}$, $Q=\{x|-k<x<k\}$

이때 p가 q이기 위한 충분조건, 즉 $p \Longrightarrow q$가 되려면 $P\subset Q$이어야 한다.
이를 만족시키도록 두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$-k<3$, $k>4 \qquad \therefore k>4$

따라서 자연수 k의 최솟값은 5이다. **답 5**

0752 p는 q이기 위한 충분조건이므로

$p \Longrightarrow q \qquad \therefore \sim q \Longrightarrow \sim p$

따라서 '$x-a=0$이면 $2x^2-x-1=0$이다.'가 참이므로
$2x^2-x-1=0$에 $x-a=0$, 즉 $x=a$를 대입하면

$2a^2-a-1=0, \qquad (2a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ $(\because a>0)$

또 q는 r이기 위한 필요조건이므로

$r \Longrightarrow q \qquad \therefore \sim q \Longrightarrow \sim r$

따라서 '$x-a=0$이면 $bx^2-3x+5=0$이다.'가 참이므로
$bx^2-3x+5=0$에 $x-a=0$, 즉 $x=1$을 대입하면

$b-3+5=0 \qquad \therefore b=-2$

$\therefore a-b=3$ **답 3**

0753 p는 r이기 위한 충분조건이므로 $\quad p \Longrightarrow r$
p는 s이기 위한 필요조건이므로 $\quad s \Longrightarrow p$
q는 s이기 위한 필요충분조건이므로 $\quad q \Longleftrightarrow s$

ㄱ. $q \Longrightarrow s$, $s \Longrightarrow p$이므로

$q \Longrightarrow p$

즉 q는 p이기 위한 충분조건이지만 필요조건인지는 알 수 없다. (거짓)

ㄴ. $q \Longrightarrow p$, $p \Longrightarrow r$이므로

$q \Longrightarrow r$

즉 r는 q이기 위한 필요조건이다. (참)

ㄷ. $s \Longrightarrow p$, $p \Longrightarrow r$이므로

$s \Longrightarrow r$

즉 s는 r이기 위한 충분조건이다. (참)

이상에서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. **답 ㄴ, ㄷ**

0754 $x=\dfrac{m}{M}$, $y=\dfrac{n}{N}$ (m과 M, n과 N은 각각 서로소인 자연수)이라 하면 $x^2+y^2=3$에서

$\dfrac{m^2}{M^2}+\dfrac{n^2}{N^2}=3, \qquad \dfrac{m^2}{M^2}=3-\dfrac{n^2}{N^2}$

$\therefore \dfrac{m^2N^2}{M^2}=\boxed{\text{(가) } 3N^2}-n^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$\boxed{\text{(가) } 3N^2}-n^2$은 정수이고 m과 M은 서로소이므로
$N=kM$ (k는 정수)이어야 한다.

즉 ㉠에서 $(km)^2+n^2=\boxed{\text{(가) } 3N^2}$이고

$km=3a+r$, $n=3b+s$

(a, b, r, s는 정수이고, $0\le r<3$, $0\le s<3$)

라 하면

$(km)^2+n^2=(3a+r)^2+(3b+s)^2$

$=3(3a^2+2ar+3b^2+2bs)+\boxed{\text{(나) } r^2}+s^2$

그런데 $(km)^2+n^2$은 $\boxed{\text{(다) } 3}$의 배수이므로 $r=s=0$이어야 한다.
즉 두 수 km, n은 $\boxed{\text{(다) } 3}$의 배수이므로 N도 $\boxed{\text{(다) } 3}$의 배수이다.
따라서 $f(N)=3N^2$, $g(r)=r^2$, $a=3$이므로

$a+\dfrac{f(4)}{g(2)}=3+\dfrac{48}{4}=15$ **답 15**

RPM 비법 노트

$km=3a+r$, $n=3b+s$에 $r=0$, $s=0$을 각각 대입하면

$km=3a$, $n=3b$

이므로 $(km)^2+n^2=3N^2$에서

$(3a)^2+(3b)^2=3N^2, \qquad 9(a^2+b^2)=3N^2$

$\therefore N^2=3(a^2+b^2)$

즉 N^2이 3의 배수이므로 N도 3의 배수이다.

0755 $x>0$, $y>0$에서 $x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2x^2+8y^2\ge 2\sqrt{2x^2\times 8y^2}=8xy$

이때 $2x^2+8y^2=5$이므로 $\quad 5\ge 8xy$

$\therefore xy\le \dfrac{5}{8} \qquad \therefore \gamma=\dfrac{5}{8}$

한편 등호는 $2x^2=8y^2$일 때 성립하므로 $2x^2+8y^2=5$에서

$2x^2=8y^2=\dfrac{5}{2}$

$x^2=\dfrac{5}{4}$, $y^2=\dfrac{5}{16}$

$\therefore x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $y=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ $(\because x>0, y>0)$

즉 $\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$이므로

$\dfrac{\beta}{\alpha}+\gamma=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{8}=\dfrac{9}{8}$ **답 ②**

0756 $a>0$, $b>0$에서 $ab>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(2a+\frac{1}{3b}\right)\left(\frac{1}{a}+6b\right)=2+12ab+\frac{1}{3ab}+2$$
$$=4+12ab+\frac{1}{3ab}$$
$$\ge 4+2\sqrt{12ab\times\frac{1}{3ab}}$$
$$=4+2\times 2=8$$

$\left(\text{단, 등호는 } 12ab=\dfrac{1}{3ab}\text{, 즉 } ab=\dfrac{1}{6}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최솟값은 8이다. **답 ②**

0757 점 P에서의 접선의 방정식은 $ax+by=16$

$\therefore \mathrm{A}\left(\frac{16}{a}, 0\right), \mathrm{B}\left(0, \frac{16}{b}\right)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\times\frac{16}{a}\times\frac{16}{b}=\frac{128}{ab}$ …… ㉠

한편 점 P는 원 $x^2+y^2=16$ 위에 있으므로 $a^2+b^2=16$

$a>0$, $b>0$에서 $a^2>0$, $b^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab$

이때 $a^2+b^2=16$이므로 $16\geq 2ab$

$\therefore ab\leq 8$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

즉 $\frac{1}{ab}\geq\frac{1}{8}$이므로 $\frac{128}{ab}\geq 16$

따라서 ㉠에서 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값은 16이다. 답 **16**

0758 직사각형의 둘레의 길이가 20이므로

$2x+2y=20$ $\therefore x+y=10$

x, y가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$\{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2\}\{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2\}\geq(\sqrt{3x}+\sqrt{2y})^2$

$\therefore 5(x+y)\geq(\sqrt{3x}+\sqrt{2y})^2$

이때 $x+y=10$이므로 $50\geq(\sqrt{3x}+\sqrt{2y})^2$

$\therefore -5\sqrt{2}\leq\sqrt{3x}+\sqrt{2y}\leq 5\sqrt{2}$

(단, 등호는 $\sqrt{2x}=\sqrt{3y}$일 때 성립)

그런데 $\sqrt{3x}>0$, $\sqrt{2y}>0$이므로

$0<\sqrt{3x}+\sqrt{2y}\leq 5\sqrt{2}$

따라서 $\sqrt{3x}+\sqrt{2y}$의 최댓값은 $5\sqrt{2}$이다. 답 **$5\sqrt{2}$**

0759 명제 '$a+b>1$이면 $a\geq 5$ 또는 $b\geq k$이다.'가 참이므로 그 대우 '$a<5$이고 $b<k$이면 $a+b\leq 1$이다.'가 참이다. … 1단계

이때 $a<5$, $b<k$에서 $a+b<5+k$이므로

$5+k\leq 1$ $\therefore k\leq -4$ … 2단계

따라서 k의 최댓값은 -4이다. … 3단계

답 **-4**

채점 요소		비율
1단계	주어진 명제의 대우가 참임을 알기	40 %
2단계	k의 값의 범위 구하기	50 %
3단계	k의 최댓값 구하기	10 %

0760 $|x-2|\leq a$에서 $-a\leq x-2\leq a$ ($\because a\geq 0$)

$\therefore -a+2\leq x\leq a+2$

$|x|>4$에서 $x<-4$ 또는 $x>4$

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x\,|\,-a+2\leq x\leq a+2\}$, $Q=\{x\,|\,x\leq b\}$,

$R=\{x\,|\,x<-4$ 또는 $x>4\}$

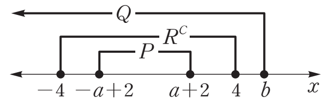
q는 $\sim r$이기 위한 필요조건이고 p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이므로

$\sim r \Longrightarrow q$, $p\Longrightarrow \sim r$

즉 $R^C\subset Q$, $P\subset R^C$이므로

$P\subset R^C\subset Q$ … 1단계

이때 $R^C=\{x\,|\,-4\leq x\leq 4\}$이므로 이를 만족시키도록 세 집합 P, Q, R^C를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉 $-a+2\geq -4$, $a+2\leq 4$, $b\geq 4$이므로

$0\leq a\leq 2$ ($\because a\geq 0$), $b\geq 4$ … 2단계

따라서 a의 최댓값은 2, b의 최솟값은 4이므로 $b-a$의 최솟값은

$4-2=2$ … 3단계

답 **2**

채점 요소		비율
1단계	세 조건 p, q, r의 진리집합 사이의 포함 관계 구하기	40 %
2단계	a, b의 값의 범위 구하기	40 %
3단계	$b-a$의 최솟값 구하기	20 %

0761 $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2-4a+\frac{b}{a}+\frac{9a}{b}=(a-2)^2+\frac{b}{a}+\frac{9a}{b}-4$$

$$\geq(a-2)^2+2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{9a}{b}}-4$$

$$=(a-2)^2+2\times 3-4$$

$$=(a-2)^2+2$$ … 1단계

따라서 주어진 식은 $a=2$일 때 최솟값 2를 갖는다.

$\therefore m=2$ … 2단계

한편 등호는 $\frac{b}{a}=\frac{9a}{b}$, 즉 $b=3a$일 때 성립하므로

$a=2$를 $b=3a$에 대입하면 $b=6$

즉 $\alpha=2$, $\beta=6$이므로 … 3단계

$m+\alpha+\beta=10$ … 4단계

답 **10**

채점 요소		비율
1단계	산술평균과 기하평균의 관계 이용하기	50 %
2단계	m의 값 구하기	20 %
3단계	α, β의 값 구하기	20 %
4단계	$m+\alpha+\beta$의 값 구하기	10 %

0762 x, y는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2^2+1^2)(x^2+y^2)\geq(2x+y)^2$ … 1단계

이때 $x^2+y^2=2$이므로 $10\geq(2x+y)^2$

$\therefore -\sqrt{10}\leq 2x+y\leq\sqrt{10}$ (단, 등호는 $x=2y$일 때 성립)

… 2단계

따라서 $2x+y$의 최댓값은 $\sqrt{10}$, 최솟값은 $-\sqrt{10}$이므로

$M=\sqrt{10}$, $m=-\sqrt{10}$

$\therefore M^2+m^2=20$ … 3단계

답 **20**

채점 요소		비율
1단계	코시-슈바르츠의 부등식 이용하기	30 %
2단계	$2x+y$의 값의 범위 구하기	40 %
3단계	M^2+m^2의 값 구하기	30 %

0763 전략 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 $P\subset Q$임을 이용한다.

(가), (나)에서 두 명제 $q \longrightarrow p$, $\sim p \longrightarrow q$가 참이므로

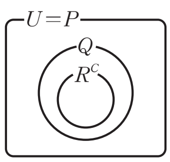
$P^C\subset Q\subset P$ $\quad\therefore U=P$

또 (다)에서 $\sim q \longrightarrow r$가 참이므로

$Q^C\subset R$ $\quad\therefore R^C\subset Q$

$\therefore R^C\subset Q\subset P$

따라서 세 집합 P, Q, R^C 사이의 포함 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $P^C=\varnothing$이므로 $\quad Q-P^C=Q$ (거짓)

ㄴ. $P=U$이므로 $\quad R\subset P$ (참)

ㄷ. $P\cap R=U\cap R=R$이므로

$Q^C\subset(P\cap R)$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

참고 | $P^C\subset P$이려면 $P^C=\varnothing$이어야 하므로 $P=U$이다.

0764 전략 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이면 $P\not\subset Q$임을 이용한다.

$|x-k|\le 2$에서 $\quad -2\le x-k\le 2$

$\therefore k-2\le x\le k+2$

$x^2-4x-5\le 0$에서 $\quad (x+1)(x-5)\le 0$

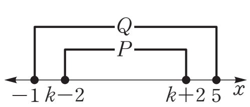
$\therefore -1\le x\le 5$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,k-2\le x\le k+2\}$, $Q=\{x\,|\,-1\le x\le 5\}$

이때 명제 $p \longrightarrow q$와 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 모두 거짓이 되려면 $P\not\subset Q$이고 $P\not\subset Q^C$이어야 한다.

$P\subset Q$를 만족시키는 k의 값의 범위는 오른쪽 그림에서



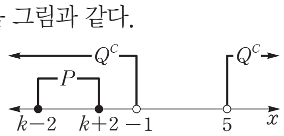
$k-2\ge -1$, $k+2\le 5$

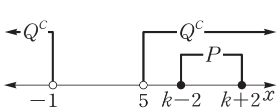
$\therefore 1\le k\le 3$

따라서 $P\not\subset Q$를 만족시키는 k의 값의 범위는

$k<1$ 또는 $k>3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편 $Q^C=\{x\,|\,x<-1$ 또는 $x>5\}$이므로 $P\subset Q^C$인 경우는 다음 그림과 같다.





따라서 $P\subset Q^C$를 만족시키는 k의 값의 범위는

$k+2<-1$ 또는 $k-2>5$

$\therefore k<-3$ 또는 $k>7$

즉 $P\not\subset Q^C$를 만족시키는 k의 값의 범위는

$-3\le k\le 7$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 명제 $p \longrightarrow q$와 명제 $p \longrightarrow \sim q$가 모두 거짓이 되도록 하는 k의 값의 범위는

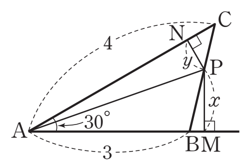
$-3\le k<1$ 또는 $3<k\le 7$

따라서 정수 k는 -3, -2, -1, 0, 4, 5, 6, 7이므로 모든 정수 k의 값의 합은

$-3+(-2)+(-1)+0+4+5+6+7=16$ 답 ②

0765 전략 $\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle APC$임을 이용하여 $\overline{PM}$과 $\overline{PN}$ 사이의 관계식을 구하고 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{PM}=x$, $\overline{PN}=y$라 하고 $\overline{AP}$를 그으면



$\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle APC$이므로

$\frac{1}{2}\times 3\times 4\times\sin 30°$

$=\frac{1}{2}\times 3\times x+\frac{1}{2}\times 4\times y$

$\therefore 3x+4y=6$

이때 $\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}=\frac{3}{x}+\frac{4}{y}$에 $3x+4y$를 곱하면

$\left(\frac{3}{x}+\frac{4}{y}\right)(3x+4y)=9+\frac{12y}{x}+\frac{12x}{y}+16$

$=\frac{12y}{x}+\frac{12x}{y}+25$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{y}{x}>0$, $\frac{x}{y}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{12y}{x}+\frac{12x}{y}+25\ge 2\sqrt{\frac{12y}{x}\times\frac{12x}{y}}+25$

$=2\times 12+25=49$

(단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

$3x+4y=6$이므로 ㉠에서

$\left(\frac{3}{x}+\frac{4}{y}\right)\times 6\ge 49$ $\quad\therefore \frac{3}{x}+\frac{4}{y}\ge\frac{49}{6}$

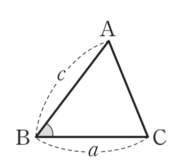
따라서 $\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}$의 최솟값은 $\frac{49}{6}$이다. 답 $\frac{49}{6}$

RPM 비법 노트

삼각형의 넓이

$\triangle ABC$에서 $\angle B$가 예각일 때

$\triangle ABC=\frac{1}{2}ac\sin B$



08 함수

교과서 문제 정복하기

• 본책 117쪽, 119쪽

0766 X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 0, 2의 2개이므로 함수가 아니다. 답 **함수가 아니다.**

0767 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.
이때 정의역은 $\{a, b, c, d\}$, 공역은 $\{0, 1, 2\}$, 치역은 $\{0, 1, 2\}$이다. 답 **풀이 참조**

0768 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.
이때 정의역은 $\{-1, 0, 1\}$, 공역은 $\{5, 7, 8, 9\}$, 치역은 $\{5, 8, 9\}$이다. 답 **풀이 참조**

0769 X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다. 답 **함수가 아니다.**

0770 답 **정의역: $\{x \mid x$는 실수$\}$, 치역: $\{y \mid y$는 실수$\}$**

0771 함수 $y=-x^2+6x$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.
또 $-x^2+6x=-(x-3)^2+9\leq 9$에서 $\quad y\leq 9$
따라서 치역은 $\{y \mid y\leq 9\}$이다.
답 **정의역: $\{x \mid x$는 실수$\}$, 치역: $\{y \mid y\leq 9\}$**

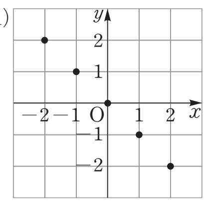
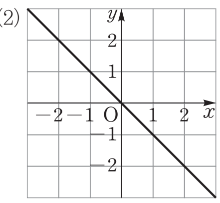
0772 함수 $y=|x|+2$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.
또 $|x|\geq 0$에서 $\quad |x|+2\geq 2 \quad \therefore y\geq 2$
따라서 치역은 $\{y \mid y\geq 2\}$이다.
답 **정의역: $\{x \mid x$는 실수$\}$, 치역: $\{y \mid y\geq 2\}$**

0773 답 **정의역: $\{x \mid x\neq 0$인 실수$\}$, 치역: $\{y \mid y\neq 0$인 실수$\}$**

0774 $f(-1)=1$, $g(-1)=-1$이므로
$f(-1)\neq g(-1) \quad \therefore f\neq g$
답 **서로 같은 함수가 아니다.**

0775 $f(-1)=g(-1)=2$, $f(0)=g(0)=1$,
$f(1)=g(1)=2$이므로
$f=g$ 답 **서로 같은 함수이다.**

0776 $f(-1)=g(-1)=-2$, $f(0)=g(0)=0$,
$f(1)=g(1)=2$이므로
$f=g$ 답 **서로 같은 함수이다.**

0777 답 (1)

(2)


0778 답 (1) ㄱ, ㄴ (2) ㄱ, ㄴ (3) ㄴ (4) ㄷ

0779 답 (1) ㄷ, ㄹ (2) ㄷ, ㄹ (3) ㄷ (4) ㄱ

0780 (1) $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(5)=3$
(2) $(g\circ f)(4)=g(f(4))=g(8)=2$
(3) $(f\circ g)(5)=f(g(5))=f(3)=7$
(4) $(f\circ g)(7)=f(g(7))=f(1)=6$
답 (1) **3** (2) **2** (3) **7** (4) **6**

0781 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x-1)$
$=(3x-1)^2+2$
$=9x^2-6x+3$
답 **$(g\circ f)(x)=9x^2-6x+3$**

0782 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+2)$
$=3(x^2+2)-1$
$=3x^2+5$
답 **$(f\circ g)(x)=3x^2+5$**

0783 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(3x-1)$
$=3(3x-1)-1$
$=9x-4$
답 **$(f\circ f)(x)=9x-4$**

0784 $(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(x^2+2)$
$=(x^2+2)^2+2$
$=x^4+4x^2+6$
답 **$(g\circ g)(x)=x^4+4x^2+6$**

0785 ㄱ, ㄷ. 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
ㄴ. 집합 X의 원소 a, b, c가 모두 집합 Y의 원소 1에 대응하므로 일대일대응이 아니다.
따라서 역함수가 존재하지 않는다.
ㄹ. 집합 X의 원소 -1, 1이 모두 집합 Y의 원소 b에 대응하므로 일대일대응이 아니다.
따라서 역함수가 존재하지 않는다.
이상에서 역함수가 존재하는 함수는 ㄱ, ㄷ이다. 답 **ㄱ, ㄷ**

0786 (1) $f^{-1}(5)=a$에서 $f(a)=5$이므로

$a-2=5 \qquad \therefore a=7$

(2) $f^{-1}(a)=1$에서 $f(1)=a$이므로

$a=1-2=-1$

답 (1) **7** (2) **−1**

0787 함수 $y=2x-2$는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
$y=2x-2$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$2x=y+2 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}y+1$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{1}{2}x+1$

답 $\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x+1}$

0788 함수 $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}$은 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.
$y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}$에서 x를 y에 대한 식으로 나타내면

$\frac{1}{4}x=y-\frac{3}{8} \qquad \therefore x=4y-\frac{3}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=4x-\frac{3}{2}$

답 $\boldsymbol{y=4x-\frac{3}{2}}$

0789 (2) $(f^{-1})^{-1}(1)=f(1)=8$

답 (1) **3** (2) **8** (3) **3** (4) **4**

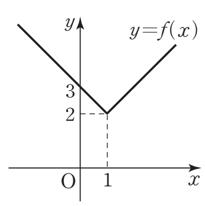
0790 (1) $x\geq1$일 때, $x-1\geq0$이므로

$f(x)=(x-1)+2=x+1$

(2) $x<1$일 때, $x-1<0$이므로

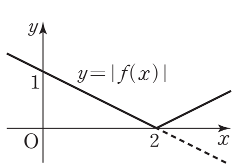
$f(x)=-(x-1)+2=-x+3$

(3) $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



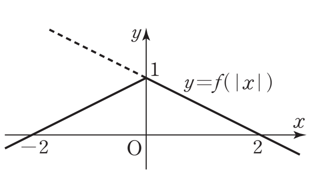
답 풀이 참조

0791 $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

0792 $y=f(|x|)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\geq0$인 부분만 남기고, $x<0$인 부분은 $x\geq0$인 부분의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하여 그린 것이므로 위의 그림과 같다.

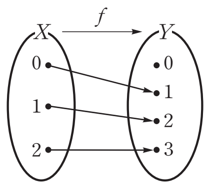


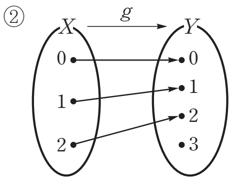
답 풀이 참조

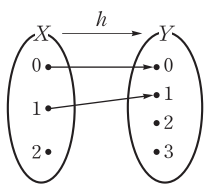
유형 익히기

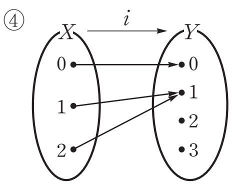
● 본책 120~131쪽

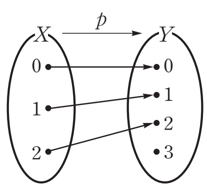
0793 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

①


②


③


④


⑤


③ X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

답 ③

0794 ① 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 그래프가 만나지 않거나 무수히 많은 점에서 만나므로 함수의 그래프가 아니다.
②, ③ 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 그래프가 만나지 않거나 두 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.
④ 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.
⑤ 실수 a에 대하여 직선 $x=a$와 그래프가 무수히 많은 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.
따라서 함수의 그래프인 것은 ④이다.

답 ④

0795 ① $0\leq x\leq2$에서 $\quad -4\leq-2x\leq0$

$-5\leq-2x-1\leq-1 \qquad \therefore -5\leq f(x)\leq-1$

② $0\leq x\leq2$에서 $\quad -2\leq-x\leq0$

$1\leq-x+3\leq3 \qquad \therefore 1\leq f(x)\leq3$

③ $0\leq x\leq2$에서 $\quad -1\leq x-1\leq1$

$\therefore -1\leq f(x)\leq1$

④ $0\leq x\leq2$에서 $\quad 0\leq|x|\leq2$

$1\leq|x|+1\leq3 \qquad \therefore 1\leq f(x)\leq3$

⑤ $0\leq x\leq2$에서 $\quad 0\leq x^2\leq4$

$-3\leq x^2-3\leq1 \qquad \therefore -3\leq f(x)\leq1$

따라서 X에서 Y로의 함수인 것은 ③이다.

답 ③

0796 2는 유리수이므로 $\quad f(2)=2+1=3$
$\sqrt{5}-3$은 무리수이므로

$f(\sqrt{5}-3)=-(\sqrt{5}-3)=-\sqrt{5}+3$

$\therefore f(2)-f(\sqrt{5}-3)=3-(-\sqrt{5}+3)=\sqrt{5}$

답 $\boldsymbol{\sqrt{5}}$

08 함수

0797 $f(-2)=3\times(-2)-3=-9$

$f(3)=-3+5=2$

$\therefore f(-2)+f(3)=-9+2=-7$ 답 -7

0798 $\dfrac{x-4}{2}=-3$에서

$x-4=-6 \qquad \therefore x=-2$

$f\left(\dfrac{x-4}{2}\right)=4x-2$에 $x=-2$를 대입하면

$f(-3)=4\times(-2)-2=-10$ 답 -10

다른 풀이 $\dfrac{x-4}{2}=t$로 놓으면 $\quad x=2t+4$

$\therefore f(t)=4(2t+4)-2=8t+14$

따라서 $f(x)=8x+14$이므로

$f(-3)=8\times(-3)+14=-10$

0799 $f(2)=2-1=1$

$f(18)=f(15)=\cdots=f(3)=3-1=2$

$\therefore f(2)+f(18)=1+2=3$ 답 3

0800 (i) $a>0$일 때

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 서로 같으므로

$f(-2)=-2,\ f(3)=3$

$-2a+b=-2,\ 3a+b=3$

$\therefore a=1,\ b=0$

그런데 $ab=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때

$f(x)=ax+b$의 공역과 치역이 서로 같으므로

$f(-2)=3,\ f(3)=-2$

$-2a+b=3,\ 3a+b=-2$

$\therefore a=-1,\ b=1$

(i), (ii)에서 $\quad a=-1,\ b=1$

$\therefore a-b=-2$ 답 -2

0801 $x^2+5x+2=-4$에서 $\quad x^2+5x+6=0$

$(x+3)(x+2)=0 \qquad \therefore x=-3$ 또는 $x=-2$

$x^2+5x+2=8$에서 $\quad x^2+5x-6=0$

$(x+6)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-6$ 또는 $x=1$

따라서 정의역의 원소가 될 수 없는 것은 ④이다. 답 ④

0802 $f(-1)=a\times(-1)^2+1=a+1$,

$f(0)=a\times 0^2+1=1$,

$f(1)=a\times 1^2+1=a+1$,

$f(2)=a\times 2^2+1=4a+1$

이때 $a=0$이면 치역은 $\{1\}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a\neq 0$이므로 함수 $f(x)$의 치역은

$\{a+1,\ 1,\ 4a+1\}$

치역의 모든 원소의 합이 18이므로

$(a+1)+1+(4a+1)=18$

$5a+3=18 \qquad \therefore a=3$ 답 3

0803 (i) $a>0$일 때

치역이 $\{y\mid -2a-1\le y\le a-1\}$이므로

$-2a-1\ge -3,\ a-1\le 1$

$\therefore a\le 1$

이때 $a>0$이므로 $\quad 0<a\le 1$ … 1단계

(ii) $a<0$일 때

치역이 $\{y\mid a-1\le y\le -2a-1\}$이므로

$a-1\ge -3,\ -2a-1\le 1$

$\therefore a\ge -1$

이때 $a<0$이므로 $\quad -1\le a<0$ … 2단계

(i), (ii)에서 $\quad -1\le a<0$ 또는 $0<a\le 1$

따라서 $M=1,\ m=-1$이므로

$Mm=-1$ … 3단계

답 -1

	채점 요소	비율
1단계	$a>0$일 때, a의 값의 범위 구하기	40 %
2단계	$a<0$일 때, a의 값의 범위 구하기	40 %
3단계	Mm의 값 구하기	20 %

0804 $f(-1)=g(-1)$에서

$3+1-1=-a+b \qquad \therefore a-b=-3$ …… ㉠

$f(1)=g(1)$에서

$3-1-1=a+b \qquad \therefore a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-1,\ b=2$

$\therefore ab=-2$ 답 -2

0805 ㄱ. $f(-2)=g(-2)=-8,\ f(0)=g(0)=0$,

$f(2)=g(2)=8$이므로 $\quad f=g$

ㄴ. $f(0)=-1,\ g(0)=1$이므로 $\quad f(0)\neq g(0)$

$\therefore f\neq g$

ㄷ. $f(-2)=g(-2)=0,\ f(0)=g(0)=2,\ f(2)=g(2)=4$

이므로 $\quad f=g$

이상에서 $f=g$인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

0806 $f(-3)=g(-3)$에서

$9-6+2=3+b \qquad \therefore b=2$

$\therefore g(x)=-x+2$

$f(a)=g(a)$에서

$a^2+2a+2=-a+2, \qquad a^2+3a=0$

$a(a+3)=0 \qquad \therefore a=0\ (\because a\neq -3)$

$\therefore X=\{-3,\ 0\}$

이때 $g(-3)=5,\ g(0)=2$이므로 함수 g의 치역은 $\{2,\ 5\}$이다.

답 $\{2,\ 5\}$

0807 $f(x)=g(x)$에서 $\quad x^3-3x+9=4x+3$

$x^3-7x+6=0, \qquad (x+3)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ … 1단계

이때 집합 X의 모든 원소가 양수이므로 X는 집합 $\{1, 2\}$의 공집합이 아닌 부분집합이다.
따라서 구하는 집합 X의 개수는

$2^2-1=3$ … 2단계

답 3

채점 요소	비율
1단계 $f(x)=g(x)$를 만족시키는 x의 값 구하기	50 %
2단계 집합 X의 개수 구하기	50 %

0808 ㄴ. $f(x)=|x|+1$이라 하면 $x_1=-1$, $x_2=1$일 때, $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=|-1|+1=2$, $f(x_2)=|1|+1=2$

$\therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=|x|+1$은 일대일대응이 아니다.

ㄷ. $f(x)=2x^2-4x$라 하면 $x_1=0$, $x_2=2$일 때, $x_1\neq x_2$이지만

$f(x_1)=0$, $f(x_2)=8-8=0$

$\therefore f(x_1)=f(x_2)$

따라서 함수 $y=2x^2-4x$는 일대일대응이 아니다.

이상에서 일대일대응인 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄹ

0809 ①, ④, ⑤ 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 2개 이상의 점에서 만나기도 하므로 일대일대응이 아니다.

② 치역의 각 원소 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이다.
그런데 치역이 $\{y|y\geq 0\}$이므로 일대일대응이 아니다.

③ 모든 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응이다.

따라서 일대일대응의 그래프인 것은 ③이다. 답 ③

0810 ㄱ. 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 두 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.

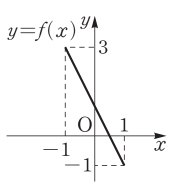
ㄴ. 치역의 각 원소 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이다.
그런데 치역이 $\{y|y\leq 0\}$이므로 일대일대응이 아니다.

ㄷ. 모든 실수 k에 대하여 직선 $y=k$와 그래프가 오직 한 점에서 만나므로 일대일대응이다.

이상에서 일대일함수이지만 일대일대응은 아닌 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

0811 $a<0$이고 함수 $f(x)=ax+b$가 일대일대응이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-1, 3)$, $(1, -1)$을 지나야 한다.



즉 $f(-1)=3$, $f(1)=-1$이므로

$-a+b=3$, $a+b=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=1$

$\therefore ab=-2$ 답 -2

0812 $f(x)=x^2+4x+k=(x+2)^2+k-4$
이므로 $x\geq -2$일 때 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.
따라서 함수 f가 일대일대응이면 $f(-1)=5$이므로

$1-4+k=5$ $\quad\therefore k=8$ 답 8

0813 함수 $f(x)$가 일대일대응이 되려면 $x\geq 1$일 때와 $x<1$일 때의 직선 $y=f(x)$의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.
즉 $(3-a)(2+a)>0$이므로

$(a+2)(a-3)<0$ $\quad\therefore -2<a<3$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1, 2의 4개이다. 답 4

참고 | $f(1)=2$이고, 직선 $y=(2+a)x-a$도 점 $(1, 2)$를 지나므로 치역과 공역이 같다.

0814 $f(x)=x^2-6x=(x-3)^2-9$
함수 f가 일대일대응이 되려면 $x\geq k$일 때 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가해야 하므로

$k\geq 3$ …… ㉠

또 치역과 공역이 같아야 하므로 $f(k)=k$

$k^2-6k=k$, $\quad k^2-7k=0$

$k(k-7)=0$ $\quad\therefore k=0$ 또는 $k=7$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k=7$ 답 ④

0815 함수 f는 항등함수이므로 $f(2)=2$, $f(10)=10$
$f(2)+g(2)=6$에서

$2+g(2)=6$ $\quad\therefore g(2)=4$

함수 g는 상수함수이므로 $g(10)=g(2)=4$

$\therefore f(10)+g(10)=10+4=14$ 답 14

0816 함수 f는 상수함수이므로 모든 자연수 x에 대하여

$f(x)=f(1)=4$

$\therefore f(2)+f(4)+f(6)+\cdots+f(30)=4\times 15=60$

답 60

0817 함수 $f(x)$가 항등함수이므로 $f(x)=x$이어야 한다.
따라서 $\dfrac{x^3}{8}-x=x$에서

$x^3-16x=0$, $\quad x(x+4)(x-4)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=0$ 또는 $x=4$

즉 집합 X는 집합 $\{-4, 0, 4\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 집합이므로 집합 X가 될 수 있는 것은

$\{-4, 0\}$, $\{-4, 4\}$, $\{0, 4\}$

답 $\{-4, 0\}$, $\{-4, 4\}$, $\{0, 4\}$

0818 함수 g는 항등함수이므로

$g(4)=4$, $g(8)=8$

$f(8)=g(4)=h(2)$에서 $\quad f(8)=h(2)=4$

$f(8)f(2)=f(4)$에서 $\quad 4f(2)=f(4)$

이때 함수 f는 일대일대응이므로

$f(2)=2,\ f(4)=8$

또 함수 h는 상수함수이므로

$h(4)=h(2)=4$

$\therefore\ f(2)+g(8)+h(4)=2+8+4=14$ 답 **14**

0819 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 X에서 X로의

함수의 개수는 $4^4=256$

일대일대응의 개수는 ${}_4P_4=4\times3\times2\times1=24$

항등함수의 개수는 1

상수함수의 개수는 4

따라서 $p=256,\ q=24,\ r=1,\ s=4$이므로

$p+q+r+s=285$ 답 **285**

0820 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에서 집합 $Y=\{a, b\}$로의

함수의 개수는 $2^4=16$

치역이 $\{a\}$ 또는 $\{b\}$인 함수의 개수는 2

따라서 공역과 치역이 같은 함수의 개수는

$16-2=14$ 답 ⑤

0821 집합 Y의 원소의 개수를 $m\,(m\geq3)$이라 하면 집합 $X=\{1, 2, 3\}$에서 집합 Y로의 일대일함수의 개수가 60이므로

${}_mP_3=60,\qquad m(m-1)(m-2)=5\times4\times3$

$\therefore\ m=5$ ··· 1단계

따라서 X에서 Y로의 함수의 개수는

$5^3=125$ ··· 2단계

답 **125**

채점 요소	비율
1단계 집합 Y의 원소의 개수 구하기	60 %
2단계 집합 X에서 집합 Y로의 함수의 개수 구하기	40 %

0822 함수 $f: A \longrightarrow B$가 일대일대응이고 $n(U)=6$이므로 조건 (가), (나)에서

$n(A)=n(B)=3$

집합 A의 원소를 정하는 경우의 수는 전체집합 U의 6개의 원소 중에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

이때 집합 B는 전체집합 U의 원소 중에서 집합 A의 원소를 제외한 것을 모두 원소로 갖는 집합이므로 집합 B의 원소를 정하는 경우의 수는 1이다.

각 경우에 집합 A에서 집합 B로의 일대일대응의 개수는

${}_3P_3=3\times2\times1=6$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$20\times1\times6=120$ 답 **120**

0823 $g(2)=2^2-2=2$이므로

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(2)=-2\times2+5=1$

$f(0)=3$이므로

$(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(3)=9-2=7$

$\therefore\ (f\circ g)(2)+(g\circ f)(0)=1+7=8$ 답 ⑤

0824 $(h\circ(g\circ f))(1)=((h\circ g)\circ f)(1)$ ← 합성함수의 결합법칙

$=(h\circ g)(f(1))$

$=(h\circ g)(-1)$ ← $f(1)=1-2=-1$

$=-4+3=-1$ 답 ②

0825 $(f\circ g)(-1)=f(g(-1))=f(-a+4)$

$=3(-a+4)-2$

$=-3a+10$

즉 $-3a+10=7$이므로 $-3a=-3$

$\therefore\ a=1$

따라서 $g(x)=x+4$이므로

$g(-2)=-2+4=2$ 답 **2**

0826 조건 (가), (나)에서

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(3)=1$

조건 (가), (다)에서

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(3)=2$ ··· 1단계

이때 조건 (가)에서 $f(2)=3,\ g(2)=3$이고 두 함수 $f,\ g$는 일대일대응이므로

$f(1)=1,\ g(1)=2$ ··· 2단계

$\therefore\ f(1)+g(1)=3$ ··· 3단계

답 **3**

채점 요소	비율
1단계 $g(3),\ f(3)$의 값 구하기	60 %
2단계 $f(1),\ g(1)$의 값 구하기	30 %
3단계 $f(1)+g(1)$의 값 구하기	10 %

0827 $f(x)=2x+6,\ g(x)=ax-3$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(ax-3)$

$=2(ax-3)+6$

$=2ax$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+6)$

$=a(2x+6)-3$

$=2ax+6a-3$

$f\circ g=g\circ f$이므로 $2ax=2ax+6a-3$

$0=6a-3\qquad\therefore\ a=\frac{1}{2}$

따라서 $g(x)=\frac{1}{2}x-3$이므로

$g(4)=\frac{1}{2}\times4-3=-1$ 답 **−1**

0828 주어진 그림에서

$f(1)=3,\ f(2)=4,\ f(3)=5,\ f(4)=1,\ f(5)=2$

$f\circ g=g\circ f$에서 $f(g(x))=g(f(x))$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(g(1))=g(f(1))$, $\quad f(4)=g(3)$

$\therefore g(3)=1$

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f(g(3))=g(f(3))$, $\quad f(1)=g(5)$

$\therefore g(5)=3$

㉠의 양변에 $x=5$를 대입하면

$f(g(5))=g(f(5))$, $\quad f(3)=g(2)$

$\therefore g(2)=5$

답 ⑤

참고 | ㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(g(2))=g(f(2))$, $\quad f(5)=g(4)$

$\therefore g(4)=2$

0829 $f(x)=2x-3$, $g(x)=ax+b$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+b)$
$=2(ax+b)-3$
$=2ax+2b-3$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x-3)$
$=a(2x-3)+b$
$=2ax-3a+b$

$f\circ g=g\circ f$이므로 $\quad 2ax+2b-3=2ax-3a+b$

$2b-3=-3a+b \quad \therefore b=-3a+3$

$\therefore g(x)=ax-3a+3$
$=a(x-3)+3$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(3,\ 3)$을 지난다.

답 **(3, 3)**

0830 $f(x)=ax+6$, $g(x)=bx-6$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(bx-6)$
$=a(bx-6)+6$
$=abx-6a+6$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+6)$
$=b(ax+6)-6$
$=abx+6b-6$

$f\circ g=g\circ f$이므로 $\quad abx-6a+6=abx+6b-6$

$-6a+6=6b-6$, $\quad 6a+6b=12$

$\therefore a+b=2$

이때 a, b는 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\ge 2\sqrt{ab}$, $\quad 2\ge 2\sqrt{ab}$

$\therefore \sqrt{ab}\le 1$ (단, 등호는 $a=1$, $b=1$일 때 성립)

양변을 제곱하면 $\quad ab\le 1$

따라서 ab의 최댓값은 1이다.

답 **1**

0831 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+b)$
$=a(ax+b)+b$
$=a^2x+ab+b$

$(f\circ f)(x)=4x+3$이므로 $\quad a^2x+ab+b=4x+3$

$\therefore a^2=4$, $ab+b=3$

$a^2=4$에서 $\quad a=2$ ($\because a>0$)

$ab+b=3$에 $a=2$를 대입하면

$2b+b=3 \quad \therefore b=1$

따라서 $f(x)=2x+1$이므로

$f(3)=2\times3+1=7$

답 ①

0832 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x^2+a)$
$=(x^2+a)^2+a$
$=x^4+2ax^2+a^2+a$

$(f\circ f)(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 5이므로

$(f\circ f)(1)=5$, $\quad 1+2a+a^2+a=5$

$a^2+3a-4=0$, $\quad (a+4)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

답 ①

0833 $g(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$
$=f(-3x+k)$
$=-3(-3x+k)+k$
$=9x-2k$

함수 $g(x)$는 x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값도 증가하므로 $-1\le x\le 1$일 때 $x=-1$에서 최솟값, $x=1$에서 최댓값을 갖는다.

이때 최댓값이 3이므로 $\quad g(1)=3$

$9-2k=3 \quad \therefore k=3$

따라서 $g(x)=9x-6$이므로 구하는 최솟값은

$g(-1)=-9-6=-15$

답 ③

0834 $(f\circ h)(x)=g(x)$이므로 $\quad f(h(x))=g(x)$

$-2h(x)+1=4x^2+3$, $\quad -2h(x)=4x^2+2$

$\therefore h(x)=-2x^2-1$

답 ②

0835 $(h\circ g\circ f)(x)=((h\circ g)\circ f)(x)$
$=(h\circ g)(f(x))$
$=3f(x)-2$ … 1단계

즉 $3f(x)-2=6x-5$이므로

$3f(x)=6x-3 \quad \therefore f(x)=2x-1$ … 2단계

$\therefore f(5)=2\times5-1=9$ … 3단계

답 **9**

	채점 요소	비율
1단계	$(h\circ g\circ f)(x)$를 $f(x)$에 대한 식으로 나타내기	40 %
2단계	$f(x)$ 구하기	40 %
3단계	$f(5)$의 값 구하기	20 %

다른 풀이 $(h\circ g\circ f)(5)=(h\circ g)(f(5))$에서

$6\times5-5=3f(5)-2 \quad \therefore f(5)=9$

0836 $(f\circ g)(x)=6x+7$이므로 $\quad f(g(x))=6x+7$

$\therefore f\left(\frac{3x+1}{4}\right)=6x+7$

$\frac{3x+1}{4}=t$로 놓으면

$3x+1=4t \qquad \therefore x=\frac{4t-1}{3}$

따라서 $f(t)=6\times\frac{4t-1}{3}+7=8t+5$이므로

$f(-1)=8\times(-1)+5=-3$ 답 **-3**

다른 풀이 $(f\circ g)(x)=6x+7$에서

$f\left(\frac{3x+1}{4}\right)=6x+7$ …… ㉠

$\frac{3x+1}{4}=-1$에서 $\quad 3x+1=-4 \qquad \therefore x=-\frac{5}{3}$

㉠에 $x=-\frac{5}{3}$를 대입하면

$f(-1)=6\times\left(-\frac{5}{3}\right)+7=-3$

0837 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x-2)$
$\qquad =2(x-2)-1=2x-5$

이므로

$(h\circ g\circ f)(x)=(h\circ(g\circ f))(x)$
$\qquad =h((g\circ f)(x))$
$\qquad =h(2x-5)$

이때 $(h\circ g\circ f)(x)=f(x)$이므로

$h(2x-5)=x-2$

$2x-5=t$로 놓으면 $\quad 2x=t+5 \qquad \therefore x=\frac{t+5}{2}$

따라서 $h(t)=\frac{t+5}{2}-2=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$이므로

$h(3)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$ 답 **2**

0838 $f^1(x)=f(x)=-x+3$

$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f^1(x))=f(-x+3)$
$\qquad =-(-x+3)+3=x$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f(x)=-x+3$

$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))=f(-x+3)=x$

$\vdots$

즉 $f^n(x)=\begin{cases}-x+3 & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$이므로

$f^{99}(x)=-x+3$

$\therefore f^{99}(1)=-1+3=2$ 답 **2**

다른 풀이 $f^1(1)=f(1)=2$이므로

$f^2(1)=(f\circ f^1)(1)=f(f^1(1))=f(2)=1$

$f^3(1)=(f\circ f^2)(1)=f(f^2(1))=f(1)=2$

$\vdots$

즉 $f^n(1)$의 값은 2, 1이 이 순서대로 반복된다.

이때 $99=2\times49+1$이므로

$f^{99}(1)=f^1(1)=2$

0839 $f^1(x)=f(x)=x-1$

$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f^1(x))=f(x-1)$
$\qquad =(x-1)-1=x-2$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f(x-2)$
$\qquad =(x-2)-1=x-3$

$\vdots$

$\therefore f^n(x)=x-n$

따라서 $f^{10}(x)=x-10$이므로 $f^{10}(a)=5$에서

$a-10=5 \qquad \therefore a=15$ 답 **15**

0840 $f^1(2)=f(2)=3$이므로

$f^2(2)=f(f^1(2))=f(3)=4$

$f^3(2)=f(f^2(2))=f(4)=1$

$f^4(2)=f(f^3(2))=f(1)=2$

$f^5(2)=f(f^4(2))=f(2)=3$

$\vdots$

즉 $f^n(2)$의 값은 3, 4, 1, 2가 이 순서대로 반복된다.

이때 $50=4\times12+2$이므로

$f^{50}(2)=f^2(2)=4$ 답 **4**

0841 주어진 그래프에서

$f(x)=\begin{cases}2x & (0\le x<1)\\ -2x+4 & (1\le x\le 2)\end{cases}$

따라서 $f^1\left(\frac{8}{7}\right)=f\left(\frac{8}{7}\right)=-2\times\frac{8}{7}+4=\frac{12}{7}$이므로

$f^2\left(\frac{8}{7}\right)=(f\circ f^1)\left(\frac{8}{7}\right)=f\left(f^1\left(\frac{8}{7}\right)\right)=f\left(\frac{12}{7}\right)$
$\qquad =-2\times\frac{12}{7}+4=\frac{4}{7}$

$f^3\left(\frac{8}{7}\right)=(f\circ f^2)\left(\frac{8}{7}\right)=f\left(f^2\left(\frac{8}{7}\right)\right)=f\left(\frac{4}{7}\right)$
$\qquad =2\times\frac{4}{7}=\frac{8}{7}$

$f^4\left(\frac{8}{7}\right)=(f\circ f^3)\left(\frac{8}{7}\right)=f\left(f^3\left(\frac{8}{7}\right)\right)=f\left(\frac{8}{7}\right)=\frac{12}{7}$

$\vdots$

즉 $f^n\left(\frac{8}{7}\right)$의 값은 $\frac{12}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{8}{7}$이 이 순서대로 반복된다.

이때 $2024=3\times674+2$이므로

$f^{2024}\left(\frac{8}{7}\right)=f^2\left(\frac{8}{7}\right)=\frac{4}{7}$ 답 **$\frac{4}{7}$**

0842 $f(1)=7$이므로

$a+b=7$ …… ㉠

$f^{-1}(10)=4$에서 $f(4)=10$이므로

$4a+b=10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=6$

$\therefore ab=6$ 답 **6**

0843 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f(0)=0$에서 $\quad c=0$

$\therefore f(x)=ax^2+bx$

$f^{-1}(3)=1$에서 $f(1)=3$이므로

$a+b=3$ ······ ㉠

$f^{-1}(8)=4$에서 $f(4)=8$이므로

$16a+4b=8 \quad \therefore 4a+b=2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{10}{3}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{10}{3}x$이므로

$f(-6)=-\frac{1}{3}\times(-6)^2+\frac{10}{3}\times(-6)=-32$

답 ④

0844 $\frac{3x-1}{2}=t$로 놓으면 $\quad 3x-1=2t$

$\therefore x=\frac{2t+1}{3}$

따라서 $f(t)=-6\times\frac{2t+1}{3}+1=-4t-1$이므로

$f(x)=-4x-1$

$f^{-1}(7)=k$라 하면 $f(k)=7$이므로

$-4k-1=7 \quad \therefore k=-2$

$\therefore f^{-1}(7)=-2$

답 -2

다른 풀이 $-6x+1=7$에서 $\quad x=-1$

$x=-1$을 $f\left(\frac{3x-1}{2}\right)=-6x+1$에 대입하면

$f(-2)=7 \quad \therefore f^{-1}(7)=-2$

0845 $x\geq1$일 때, $\quad f(x)=x-2\geq-1$

$x<1$일 때, $\quad f(x)=3x-4<-1$

$f^{-1}(-7)=m$이라 하면 $f(m)=-7$이므로

$3m-4=-7$ ← $-7<-1$이므로 $f(x)=3x-4$에 대입

$\therefore m=-1$

$f^{-1}(4)=n$이라 하면 $f(n)=4$이므로

$n-2=4$ ← $4>-1$이므로 $f(x)=x-2$에 대입

$\therefore n=6$

$\therefore f^{-1}(-7)+f^{-1}(4)=-1+6=5$

답 5

0846 함수 $f(x)=-3x+2$의 역함수가 존재하면 함수 f는 일대일대응이므로 치역과 공역이 같다.

이때 $y=f(x)$의 그래프의 기울기가 음수이므로

$f(-1)=b$, $f(1)=a$

$f(-1)=3+2=5$, $f(1)=-3+2=-1$이므로

$a=-1$, $b=5$

$\therefore a+b=4$

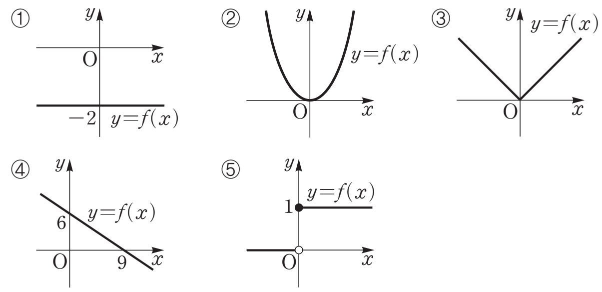
답 4

0847 함수 f의 역함수가 존재하려면 f는 일대일대응이어야 한다.

따라서 역함수가 존재하는 함수는 ④이다.

답 ④

참고 | 주어진 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



0848 $f(x)=-x^2+8x+a=-(x-4)^2+a+16$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 한다.

이때 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=4$이므로 $x\leq3$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$는 일대일함수이고 치역과 공역이 같아야 하므로

$f(3)=3, \quad a+15=3$

$\therefore a=-12$

답 -12

0849 $f(x)=2x-3+a|x-2|$에서

(i) $x\geq2$일 때, $x-2\geq0$이므로

$f(x)=2x-3+a(x-2)=(2+a)x-2a-3$

(ii) $x<2$일 때, $x-2<0$이므로

$f(x)=2x-3-a(x-2)=(2-a)x+2a-3$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 $x\geq2$일 때와 $x<2$일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

즉 $(2+a)(2-a)>0$이므로

$(a+2)(a-2)<0 \quad \therefore -2<a<2$

따라서 정수 a의 최댓값은 1이다.

답 1

0850 $y=\frac{1}{3}x+a$라 하면

$\frac{1}{3}x=y-a \quad \therefore x=3y-3a$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=3x-3a$

$\therefore f^{-1}(x)=3x-3a$

따라서 $3x-3a=bx-6$이므로

$3=b$, $-3a=-6 \quad \therefore a=2$, $b=3$

$\therefore a+b=5$

답 ③

0851 $y=5x-1$이라 하면 $x\geq1$일 때 $y\geq4$이므로 함수 $f(x)$는 집합 $\{x|x\geq1\}$에서 집합 $\{y|y\geq4\}$로의 일대일대응이다.

따라서 $f^{-1}(x)$의 정의역은 $\{x|x\geq4\}$이다.

이때 $y=5x-1$에서

$5x=y+1 \quad \therefore x=\frac{1}{5}y+\frac{1}{5}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}\ (x\geq 4)$

따라서 $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{1}{5}$, $c=4$이므로

$abc=\frac{4}{25}$ 답 $\frac{4}{25}$

0852 $3x-1=t$로 놓으면 $x=\frac{t+1}{3}$

따라서 $f(t)=6\times\frac{t+1}{3}+1=2t+3$이므로

$f(x)=2x+3$ … 1단계

$y=2x+3$이라 하면 $2x=y-3$

$\therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ … 2단계

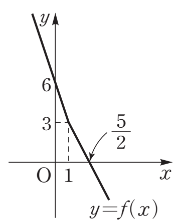
따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$이므로

$a-b=2$ … 3단계

답 2

채점 요소	비율
1단계 함수 $f(x)$ 구하기	40 %
2단계 역함수 $f^{-1}(x)$ 구하기	40 %
3단계 $a-b$의 값 구하기	20 %

0853 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 일대일대응이다.



따라서 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

(i) $x\geq 1$일 때

$y=-2x+5$라 하면 $y\leq 3$이고

$2x=-y+5$ $\therefore x=-\frac{1}{2}y+\frac{5}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\ (x\leq 3)$

(ii) $x<1$일 때

$y=-3x+6$이라 하면 $y>3$이고

$3x=-y+6$ $\therefore x=-\frac{1}{3}y+2$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-\frac{1}{3}x+2\ (x>3)$

(i), (ii)에서

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} & (x\leq 3)\\ -\frac{1}{3}x+2 & (x>3)\end{cases}$$

답 $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} & (x\leq 3)\\ -\frac{1}{3}x+2 & (x>3)\end{cases}$

0854 $y=ax+4$라 하면 $ax=y-4$

$\therefore x=\frac{1}{a}y-\frac{4}{a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{a}x-\frac{4}{a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{4}{a}$

$f=f^{-1}$이므로 $a=\frac{1}{a}$, $4=-\frac{4}{a}$ $\therefore a=-1$

따라서 $f(x)=-x+4$이므로

$f(a)=f(-1)=-(-1)+4=5$ 답 5

다른 풀이 $f=f^{-1}$이면 $(f\circ f)(x)=x$

$\therefore f(f(x))=x$ …… ㉠

이때 $f(x)=ax+4$에서

$f(f(x))=f(ax+4)=a(ax+4)+4$

$=a^2x+4a+4$

㉠에서 $a^2x+4a+4=x$이므로

$a^2=1$, $4a+4=0$ $\therefore a=-1$

0855 $(f\circ f)(x)=x$에서 $f=f^{-1}$이므로

$f^{-1}(2)=f(2)=-1$

또 $(f\circ f)(2)=f(f(2))=2$에서 $f(-1)=2$이므로

$f^{-1}(2)+f(-1)=-1+2=1$ 답 1

0856 $f=f^{-1}$이면 $(f\circ f)(x)=x$

$\therefore f(f(x))=x$

ㄱ. $f(x)=-x$에서

$f(f(x))=f(-x)=-(-x)=x$

ㄴ. $f(x)=5x$에서

$f(f(x))=f(5x)=5\times 5x=25x$

ㄷ. $f(x)=-x+4$에서

$f(f(x))=f(-x+4)=-(-x+4)+4=x$

ㄹ. $f(x)=x-2$에서

$f(f(x))=f(x-2)=(x-2)-2=x-4$

이상에서 $f=f^{-1}$를 만족시키는 함수는 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

다른 풀이 ㄱ. $y=-x$라 하면 $x=-y$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-x$

즉 $f^{-1}(x)=-x$이므로 $f=f^{-1}$

ㄴ. $y=5x$라 하면 $x=\frac{1}{5}y$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{5}x$

즉 $f^{-1}(x)=\frac{1}{5}x$이므로 $f\neq f^{-1}$

ㄷ. $y=-x+4$라 하면 $x=-y+4$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=-x+4$

즉 $f^{-1}(x)=-x+4$이므로 $f=f^{-1}$

ㄹ. $y=x-2$라 하면 $x=y+2$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=x+2$

즉 $f^{-1}(x)=x+2$이므로 $f\neq f^{-1}$

0857 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면
$f(3)=2$에서 $3a+b=2$ …… ㉠
$f=f^{-1}$이므로 $f^{-1}(3)=f(3)=2$
즉 $f(2)=3$이므로 $2a+b=3$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=5$
$\therefore f(x)=-x+5$
따라서 $y=f(x)$의 그래프의 x절편은 5, y절편은 5이므로
$m=5$, $n=5$
$\therefore m+n=10$ 답 ④

다른 풀이 ㉠에서 $b=2-3a$
$\therefore f(x)=ax+2-3a$ …… ㉢
한편 $f=f^{-1}$이면 $(f\circ f)(x)=x$
$\therefore f(f(x))=x$ …… ㉣
$f(f(x))=f(ax+2-3a)$
$=a(ax+2-3a)+2-3a$
$=a^2x-3a^2-a+2$
이므로 ㉣에서 $a^2x-3a^2-a+2=x$
$\therefore a^2=1$, $-3a^2-a+2=0$
(i) $a^2=1$에서 $a=-1$ 또는 $a=1$
(ii) $-3a^2-a+2=0$에서
$3a^2+a-2=0$, $(a+1)(3a-2)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{2}{3}$
(i), (ii)에서 $a=-1$이므로 ㉢에서
$f(x)=-x+5$

0858 $(f^{-1}\circ g)(a)=f^{-1}(g(a))=2$에서
$f(2)=g(a)$
$2\times2-3=3a-5$ $\therefore a=2$ 답 2

0859 $g(8)=6$이므로 $g^{-1}(6)=8$
$\therefore (f\circ g^{-1})(6)=f(g^{-1}(6))=f(8)=2$
$f(4)=6$이므로 $f^{-1}(6)=4$
$\therefore (g^{-1}\circ f^{-1})(6)=g^{-1}(f^{-1}(6))=g^{-1}(4)$
이때 $g(2)=4$이므로 $g^{-1}(4)=2$
$\therefore (g^{-1}\circ f^{-1})(6)=g^{-1}(4)=2$
$\therefore (f\circ g^{-1})(6)+(g^{-1}\circ f^{-1})(6)=2+2=4$ 답 4

0860 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x-a)$
$=3(x-a)-2a=3x-5a$
즉 $3x-5a=3x+10$이므로
$-5a=10$ $\therefore a=-2$
$\therefore f(x)=x+2$, $g(x)=3x+4$
$g^{-1}(-2)=k$라 하면 $g(k)=-2$이므로
$3k+4=-2$ $\therefore k=-2$
$\therefore (f\circ g^{-1})(-2)=f(g^{-1}(-2))=f(-2)$
$=-2+2=0$ 답 ②

0861 $x\geq0$일 때 $g(x)=x+1\geq1$
$x<0$일 때 $g(x)=-x^2+1<1$
$g^{-1}(2)=a$라 하면 $g(a)=2$이므로
$a+1=2$ $\therefore a=1$
$\therefore (f\circ g^{-1})(2)=f(g^{-1}(2))=f(1)=3\times1-1=2$
$g(-1)=-(-1)^2+1=0$이므로
$(f^{-1}\circ g)(-1)=f^{-1}(g(-1))=f^{-1}(0)$
$f^{-1}(0)=b$라 하면 $f(b)=0$이므로
$3b-1=0$ $\therefore b=\frac{1}{3}$
따라서 $(f^{-1}\circ g)(-1)=f^{-1}(0)=\frac{1}{3}$이므로
$(f\circ g^{-1})(2)+(f^{-1}\circ g)(-1)=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ 답 $\frac{7}{3}$

0862 $(f\circ(f\circ g)^{-1}\circ f)(3)=(f\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ f)(3)$
$=(f\circ g^{-1})(3)$
$=f(g^{-1}(3))$
$g^{-1}(3)=k$라 하면 $g(k)=3$이므로
$3k-6=3$ $\therefore k=3$
$\therefore (f\circ(f\circ g)^{-1}\circ f)(3)=f(g^{-1}(3))$
$=f(3)$
$=3+1=4$ 답 4

0863 $(f\circ(f^{-1}\circ g)^{-1})(-1)$
$=(f\circ g^{-1}\circ f)(-1)$
$=f(g^{-1}(f(-1)))$
$=f(g^{-1}(-1))$ ← $f(-1)=-(-1)^2=-1$
$g^{-1}(-1)=k$라 하면 $g(k)=-1$이므로
$-3k+2=-1$ $\therefore k=1$
$\therefore (f\circ(f^{-1}\circ g)^{-1})(-1)=f(g^{-1}(-1))$
$=f(1)$
$=2\times1=2$ 답 ③

0864 $(f^{-1}\circ(g\circ f^{-1})^{-1}\circ f)(x)=(f^{-1}\circ f\circ g^{-1}\circ f)(x)$
$=(g^{-1}\circ f)(x)$
$=g^{-1}(f(x))$
즉 $g^{-1}(f(x))=ax+b$이므로 $g(ax+b)=f(x)$
$3(ax+b)+1=-x+2$
$\therefore 3ax+3b+1=-x+2$
따라서 $3a=-1$, $3b+1=2$이므로 $a=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{3}$
$\therefore a-2b=-1$ 답 -1

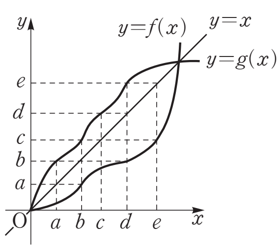
다른 풀이 $y=3x+1$이라 하면 $3x=y-1$
$\therefore x=\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}$
x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$
$\therefore g^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

08 함수

$\therefore (f^{-1} \circ (g \circ f^{-1})^{-1} \circ f)(x)$
$= (g^{-1} \circ f)(x) = g^{-1}(f(x))$
$= g^{-1}(-x+2)$
$= \frac{1}{3}(-x+2) - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

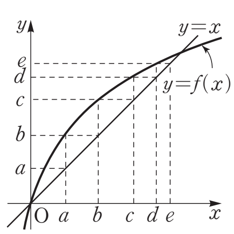
0865 $(g^{-1} \circ f^{-1})(-6) = -4$에서
$(f \circ g)^{-1}(-6) = -4$이므로
$(f \circ g)(-4) = -6 \qquad \therefore f(g(-4)) = -6$
$g(-4) = -4+6 = 2$이므로 $\quad f(2) = -6$
$\therefore 2a + b = -6$ …… ㉠
한편 $g^{-1}(7) = k$라 하면 $g(k) = 7$이므로
$k+6 = 7 \qquad \therefore k = 1$
따라서 $(f \circ g^{-1})(7) = f(g^{-1}(7)) = f(1) = -2$이므로
$a + b = -2$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a = -4,\ b = 2$
$\therefore ab = -8$ 답 **−8**

0866 $(f \circ g^{-1} \circ f^{-1})(c)$
$= f(g^{-1}(f^{-1}(c)))$
$f^{-1}(c) = k$라 하면 $f(k) = c$이므로 $\quad k = e$



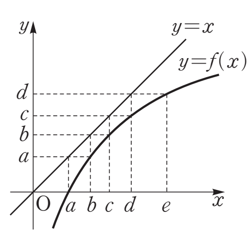
$\therefore (f \circ g^{-1} \circ f^{-1})(c)$
$= f(g^{-1}(f^{-1}(c)))$
$= f(g^{-1}(e))$
$g^{-1}(e) = l$이라 하면 $g(l) = e$이므로
$l = d$
$\therefore (f \circ g^{-1} \circ f^{-1})(c) = f(g^{-1}(e)) = f(d) = b$ 답 ②

0867 $(f \circ f \circ f)(a)$
$= f(f(f(a)))$
$= f(f(b))$
$= f(c)$
$= d$



답 ④

0868 $(f \circ f)^{-1}(b)$
$= (f^{-1} \circ f^{-1})(b)$
$= f^{-1}(f^{-1}(b))$
$f^{-1}(b) = k$라 하면 $f(k) = b$이므로
$k = c$



$\therefore (f \circ f)^{-1}(b) = f^{-1}(f^{-1}(b))$
$= f^{-1}(c)$
$f^{-1}(c) = l$이라 하면 $f(l) = c$이므로
$l = d$
$\therefore (f \circ f)^{-1}(b) = f^{-1}(c) = d$ 답 ④

0869 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=0,\ y=0$을 대입하면
$f(0) = f(0) + f(0) \qquad \therefore f(0) = 0$
㉠의 양변에 $x=2,\ y=-2$를 대입하면
$f(0) = f(2) + f(-2), \qquad 0 = 6 + f(-2)$
$\therefore f(-2) = -6$ 답 **−6**

0870 $f(xy) = f(x) + f(y)$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=2,\ y=2$를 대입하면
$f(4) = f(2) + f(2) = 1 + 1 = 2$
㉠의 양변에 $x=4,\ y=4$를 대입하면
$f(16) = f(4) + f(4) = 2 + 2 = 4$ 답 **4**

0871 $f(x+y) = f(x)f(y)$ …… ㉠
ㄱ. ㉠의 양변에 $x=1,\ y=0$을 대입하면
$f(1) = f(1)f(0), \qquad 2 = 2f(0)$
$\therefore f(0) = 1$ (참)
ㄴ. ㉠의 양변에 $x=1,\ y=1$을 대입하면
$f(2) = f(1)f(1) = 2 \times 2 = 4$
㉠의 양변에 $x=2,\ y=-2$를 대입하면
$f(0) = f(2)f(-2), \qquad 1 = 4f(-2)$
$\therefore f(-2) = \frac{1}{4}$ (거짓)
ㄷ. $f(2x) = f(x+x) = f(x)f(x) = \{f(x)\}^2$
$f(3x) = f(x+2x) = f(x)f(2x) = f(x)\{f(x)\}^2$
$= \{f(x)\}^3$
$f(4x) = f(x+3x) = f(x)f(3x) = f(x)\{f(x)\}^3$
$= \{f(x)\}^4$
$\vdots$
$\therefore f(nx) = \{f(x)\}^n$ (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

0872 $f(1) < f(2) < f(3)$에서 $\quad 3 < f(2) < f(3)$
이를 만족시키려면 공역의 원소 4, 5, 6, 7, 8 중에서 서로 다른 2개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 2, 3에 대응시키면 된다.
즉 $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는
$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$
$f(4) > f(5) > f(6)$에서 $\quad 5 > f(5) > f(6)$
이를 만족시키려면 공역의 원소 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 2개를 택하여 큰 수부터 차례대로 정의역의 원소 5, 6에 대응시키면 된다.
즉 $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는
$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$
따라서 구하는 함수 f의 개수는
$10 \times 6 = 60$ 답 **60**

0873 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$이고, 조건 (나)에서 $f(x)$의 값이 될 수 있는 것은 3, 5, 7, 11이다.
따라서 조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 f는 집합 $\{-1,\ 0,\ 1\}$에서 집합 $\{3,\ 5,\ 7,\ 11\}$로의 일대일함수이므로 구하는 함수 f의 개수는

$${}_4P_3=4\times3\times2=24$$

답 **24**

0874 조건 (가)에서 $f(1)\geq5$이므로

$f(1)=5$ 또는 $f(1)=6$ 또는 $f(1)=7$

(i) $f(1)=5$일 때

조건 (나)에서 $\quad 5>f(2)>f(3)>f(4)$

이를 만족시키려면 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 3개를 택하여 큰 수부터 차례대로 집합 X의 원소 2, 3, 4에 대응시키면 된다.

따라서 함수 f의 개수는

$${}_4C_3={}_4C_1=4$$

(ii) $f(1)=6$일 때

조건 (나)에서 $\quad 6>f(2)>f(3)>f(4)$

이를 만족시키려면 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 3개를 택하여 큰 수부터 차례대로 집합 X의 원소 2, 3, 4에 대응시키면 된다.

따라서 함수 f의 개수는

$${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

(iii) $f(1)=7$일 때

조건 (나)에서 $\quad 7>f(2)>f(3)>f(4)$

이를 만족시키려면 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 3개를 택하여 큰 수부터 차례대로 집합 X의 원소 2, 3, 4에 대응시키면 된다.

따라서 함수 f의 개수는

$${}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

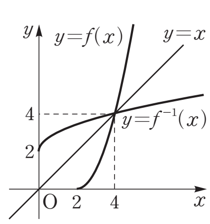
이상에서 구하는 함수 f의 개수는

$$4+10+20=34$$

답 **34**

0875 $f(x)=x^2-4x+4$
$\qquad=(x-2)^2\ (x\geq2)$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$x^2-4x+4=x$에서

$x^2-5x+4=0,\qquad (x-1)(x-4)=0$

$\therefore\ x=4\ (\because\ x\geq2)$

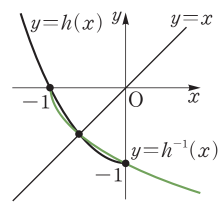
따라서 교점의 좌표는 $(4,\ 4)$이므로 $\qquad a=4,\ b=4$

$\therefore\ ab=16$

답 ③

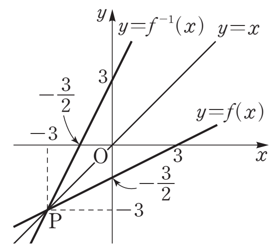
RPM 비법노트

함수 $g(x)=-x$와 같이 역함수가 자기 자신이 되는 경우나 오른쪽 그림의 함수 $h(x)=x^2-1\ (x\leq0)$과 같은 경우에는 함수의 그래프와 그 역함수의 그래프가 직선 $y=x$ 밖에서도 만난다.



따라서 직선 $y=x$를 이용하여 주어진 함수의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점을 구하는 경우에는 반드시 그래프를 그려 직선 $y=x$ 밖에 존재하는 교점이 없는지 확인해야 한다.

0876 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=x$에서 $\qquad -\frac{1}{2}x=\frac{3}{2}$

$\therefore\ x=-3$ … 1단계

따라서 교점 P의 좌표는 $(-3,\ -3)$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$ … 2단계

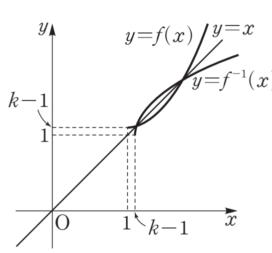
답 $3\sqrt{2}$

	채점 요소	비율
1단계	점 P의 x좌표 구하기	70 %
2단계	선분 OP의 길이 구하기	30 %

참고 | $f^{-1}(x)$를 직접 구하고 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 해를 구하여 점 P의 x좌표를 구할 수도 있다.

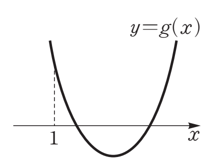
0877 $f(x)=x^2-2x+k=(x-1)^2+k-1\ (x\geq1)$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



따라서 이차방정식 $x^2-2x+k=x$, 즉 $x^2-3x+k=0$의 서로 다른 두 실근이 모두 1보다 크거나 같아야 한다.

$g(x)=x^2-3x+k$라 하면 $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



(i) 이차방정식 $g(x)=0$의 판별식을 D라 할 때

$D=(-3)^2-4\times1\times k>0$

$\therefore\ k<\frac{9}{4}$

(ii) $g(1)\ge 0$이어야 하므로

$$1-3+k\ge 0 \quad \therefore k\ge 2$$

(iii) $y=g(x)$의 그래프의 축의 방정식은

$$x=\frac{3}{2}>1$$

이상에서 조건을 만족시키는 k의 값의 범위는

$$2\le k<\frac{9}{4}$$

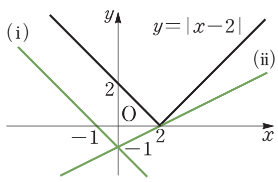
답 $\mathbf{2\le k<\frac{9}{4}}$

0878 $y=|x-2|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값이 2이므로

(i) $x<2$일 때, $\quad y=-(x-2)=-x+2$

(ii) $x\ge 2$일 때, $\quad y=x-2$

(i), (ii)에서 $y=|x-2|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



한편 직선

$$y=mx-1 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

은 m의 값에 관계없이 점 $(0,\ -1)$을 지난다.

(i) 직선 ㉠이 직선 $y=-x+2$와 평행할 때

$$m=-1$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(2,\ 0)$을 지날 때

$$0=2m-1 \quad \therefore m=\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$$m<-1 \text{ 또는 } m\ge\frac{1}{2}$$

답 $\mathbf{m<-1}$ **또는** $\mathbf{m\ge\frac{1}{2}}$

0879 $y=f(|x|)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\ge 0$인 부분만 남기고, $x<0$인 부분은 $x\ge 0$인 부분의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하여 그린 것이므로 그 개형은 ②이다.

답 ②

0880 $y=|x-2|-|x+4|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되도록 하는 x의 값이 -4, 2이므로

(i) $x<-4$일 때

$$y=-(x-2)+(x+4)=6$$

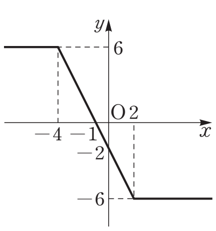
(ii) $-4\le x<2$일 때

$$y=-(x-2)-(x+4)=-2x-2$$

(iii) $x\ge 2$일 때

$$y=(x-2)-(x+4)=-6$$

이상에서 $y=|x-2|-|x+4|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$$M=6,\ m=-6$$

$$\therefore M-m=12$$

답 **12**

참고 | $y=|x-p|+|x-q|$의 그래프는

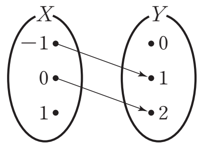
$x<p,\ p\le x<q,\ x\ge q\ (p<q)$

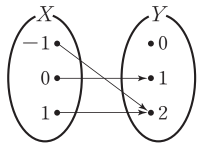
일 때로 나누어 그린다.

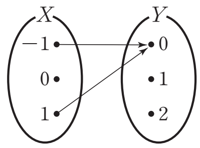
시험에 꼭 나오는 문제

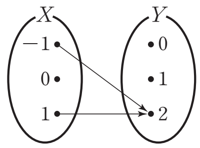
• 본책 132~135쪽

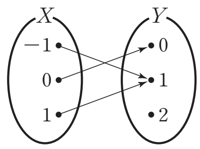
0881 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

①


②


③


④


⑤


① X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

③, ④ X의 원소 0에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

따라서 X에서 Y로의 함수인 것은 ②, ⑤이다.

답 ②, ⑤

0882 $2n-1=9$에서 $\quad n=5$

조건 (나)에 $n=5$를 대입하면

$$f(9)=5+1=6$$

한편 조건 (가)에 $n=12$를 대입하면

$$f(24)=f(13)$$

조건 (나)에 $n=7$을 대입하면

$$f(13)=7+1=8 \quad \therefore f(24)=f(13)=8$$

$$\therefore f(9)+f(24)=6+8=14$$

답 **14**

0883 $8^1=8,\ 8^2=64,\ 8^3=512,\ 8^4=4096,\ 8^5=32768,\ \cdots$

이므로 8^x의 일의 자리의 숫자는 8, 4, 2, 6이 이 순서대로 반복된다.

따라서 함수 f의 치역은 $\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$이므로 치역의 모든 원소의 합은

$$2+4+6+8=20$$

답 **20**

0884 $f(0)=g(0)$에서 $\quad 3=a+b \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(1)=g(1)$에서 $\quad 1-2+3=b \quad \therefore b=2$

㉠에 $b=2$를 대입하면 $\quad 3=a+2 \quad \therefore a=1$

$$\therefore 2a+b=4$$

답 **4**

참고 | $g(x)=|x-1|+2$이므로 $\quad f(2)=g(2)=3$

0885 $f(1)+f(2)=8$이고 f는 일대일함수이므로

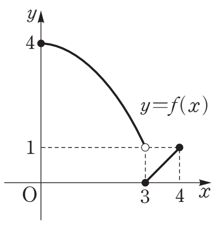
$$f(1)=3,\ f(2)=5 \text{ 또는 } f(1)=5,\ f(2)=3$$

이때 $f(3)$, $f(4)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 4 중 서로 다른 두 수이다.

따라서 $f(3)=2$, $f(4)=4$ 또는 $f(3)=4$, $f(4)=2$일 때 $f(3)+f(4)$의 값이 최대이므로 구하는 최댓값은

$2+4=6$ 답 **6**

0886 함수 f가 일대일대응이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



이때 $g(x)=ax^2+b$라 하면 $y=g(x)$의 그래프가 두 점 $(0,\ 4)$, $(3,\ 1)$을 지나야 하므로

$g(0)=4$, $g(3)=1$

$b=4$, $9a+b=1$

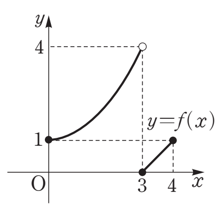
$\therefore a=-\dfrac{1}{3}$, $b=4$

따라서 $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{3}x^2+4 & (0\le x<3) \\ x-3 & (3\le x\le 4) \end{cases}$이므로

$f(1)=-\dfrac{1}{3}+4=\dfrac{11}{3}$ 답 ⑤

RPM 비법 노트

함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으면 공역의 원소 4가 치역에 속하지 않으므로 함수 f는 일대일대응이 아니다.



0887 조건 ㈎에서 함수 f는 항등함수이므로

$f(1)=1$

또 함수 g는 상수함수이므로 $g(x)=k\ (k\in X)$라 하면

$g(1)=g(3)=k$

조건 ㈏에서 $f(1)+g(1)+h(1)=7$이므로

$1+k+h(1)=7 \qquad \therefore h(1)=6-k$

$\therefore g(3)+h(1)=k+(6-k)=6$

답 ⑤

다른 풀이 조건 ㈎에서 함수 f는 항등함수이고 조건 ㈏에서 $f(1)+g(1)+h(1)=7$이므로

$1+g(1)+h(1)=7 \qquad \therefore g(1)+h(1)=6$

이때 조건 ㈎에서 함수 g는 상수함수이므로

$g(3)=g(1)$

$\therefore g(3)+h(1)=g(1)+h(1)=6$

0888 주어진 조건을 만족시키는 함수 f는 일대일함수이다.
따라서 집합 $X=\{a,\ b,\ c,\ d\}$에서 집합 $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$으로의 일대일함수의 개수는

${}_6P_4=6\times5\times4\times3=360$ 답 **360**

0889 $\sqrt{100}$, 즉 10보다 작은 자연수는 1, 2, ⋯, 9의 9개이므로 $\quad g(100)=9$

$\therefore (f\circ f\circ g)(100)=f(f(g(100)))=f(f(9))$

9보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이므로 $\quad f(9)=4$

$\therefore (f\circ f\circ g)(100)=f(f(9))=f(4)$

4보다 작은 소수는 2, 3의 2개이므로 $\quad f(4)=2$

$\therefore (f\circ f\circ g)(100)=f(4)=2$ 답 ①

0890 $f(1)=2$, $f(3)=1$이고 함수 f가 일대일대응이므로

$f(2)=3$

$\therefore (g\circ f)(2)=g(f(2))=g(3)=3$

또 $(f\circ g)(1)=f(g(1))=2$이고 $f(1)=2$이므로

$g(1)=1$

이때 함수 g가 일대일대응이므로 $\quad g(2)=2$

$\therefore g(2)+(g\circ f)(3)=2+g(f(3))=2+g(1)$
$=2+1=3$ 답 **3**

0891 $f(1)=1$에서 $\quad a-1=1 \quad \therefore a=2$

따라서 $f(x)=2x-1$, $g(x)=bx+c$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(bx+c)$
$=2(bx+c)-1$
$=2bx+2c-1$

이때 $(f\circ g)(x)=4x+5$이므로

$2bx+2c-1=4x+5$

$2b=4$, $2c-1=5 \qquad \therefore b=2$, $c=3$

$\therefore abc=2\times2\times3=12$ 답 **12**

0892 $f(2)=4-4+a=a$이므로

$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(a)$
$=a^2-2a+a$
$=a^2-a$

$f(4)=16-8+a=a+8$이므로

$(f\circ f)(4)=f(f(4))=f(a+8)$
$=(a+8)^2-2(a+8)+a$
$=a^2+15a+48$

이때 $(f\circ f)(2)=(f\circ f)(4)$이므로

$a^2-a=a^2+15a+48, \qquad -16a=48$

$\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=x^2-2x-3$이므로

$f(6)=36-12-3=21$ 답 ①

다른 풀이 $(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(a)$

$(f\circ f)(4)=f(f(4))=f(a+8)$

$(f\circ f)(2)=(f\circ f)(4)$이므로

$f(a)=f(a+8)$ ⋯⋯ ㉠

이때 $f(x)=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=1$이다.

08 함수

따라서 ㉠에서

$$\frac{a+(a+8)}{2}=1$$

$$2a+8=2 \qquad \therefore a=-3$$

0893 $((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ(g\circ h))(x)$

$$=f((g\circ h)(x))$$

$$=f(3x-5)$$

이므로 $((f\circ g)\circ h)(x)=x^2$에서

$$f(3x-5)=x^2$$

$3x-5=t$로 놓으면 $\quad 3x=t+5 \quad \therefore x=\frac{t+5}{3}$

따라서 $f(t)=\left(\frac{t+5}{3}\right)^2$이므로

$$f(4)=\left(\frac{4+5}{3}\right)^2=9$$

답 **9**

다른 풀이 $((f\circ g)\circ h)(x)=x^2$에서

$$f(3x-5)=x^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$3x-5=4$에서 $\quad x=3$

㉠에 $x=3$을 대입하면 $\quad f(4)=9$

0894 $f^1\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$이므로

$$f^2\left(\frac{1}{3}\right)=(f\circ f^1)\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(f^1\left(\frac{1}{3}\right)\right)=f\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$$

$$f^3\left(\frac{1}{3}\right)=(f\circ f^2)\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(f^2\left(\frac{1}{3}\right)\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

$$f^4\left(\frac{1}{3}\right)=(f\circ f^3)\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(f^3\left(\frac{1}{3}\right)\right)=f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

$$\vdots$$

$$\therefore f^n\left(\frac{1}{3}\right)=\begin{cases}\frac{4}{3} & (n\text{은 홀수})\\ \frac{1}{3} & (n\text{은 짝수})\end{cases}$$

$$\therefore f^1\left(\frac{1}{3}\right)+f^2\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)=15\times\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\right)$$

$$=25$$

답 **25**

0895 $(g\circ f)(x)=x$이므로

$$g^{-1}(x)=f(x)$$

$f^{-1}(7)=k$라 하면 $f(k)=7$이므로

$$4k-1=7 \qquad \therefore k=2$$

또 $g^{-1}(7)=f(7)=4\times7-1=27$이므로

$$f^{-1}(7)+g^{-1}(7)=2+27=29$$

답 **29**

다른 풀이 $(g\circ f)(x)=x$에서 $\quad g(f(x))=x$

$$\therefore g(4x-1)=x$$

위의 식에 $x=7$을 대입하면

$$g(27)=7 \qquad \therefore g^{-1}(7)=27$$

0896 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f^{-1}(1)=3$에서 $f(3)=1$이므로

$$3a+b=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$(f\circ f)(3)=-1$에서 $\quad f(f(3))=-1$

$$f(1)=-1 \qquad \therefore a+b=-1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=-2$

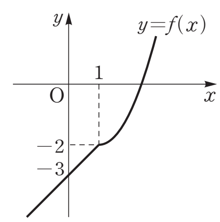
따라서 $f(x)=x-2$이므로

$$f(4)=4-2=2$$

답 **2**

0897 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 $f(x)$는 일대일대응이어야 한다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 $y=x^2-2x+a$의 그래프가 점 $(1,\ -2)$를 지나므로

$$-2=1-2+a \qquad \therefore a=-1$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}x^2-2x-1 & (x>1)\\ x-3 & (x\le1)\end{cases}$$

$f^{-1}(2)=k$라 하면 $\quad f(k)=2$

$x>1$일 때 $f(x)>-2$, $x\le1$일 때 $f(x)\le-2$이므로

$$k>1$$

즉 $f(k)=k^2-2k-1=2$이므로 $\quad k^2-2k-3=0$

$$(k+1)(k-3)=0 \qquad \therefore k=3\ (\because k>1)$$

$$\therefore f^{-1}(2)=3$$

답 **3**

0898 $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(-4x+2)$

$$=2(-4x+2)-1=-8x+3$$

$y=-8x+3$이라 하면 $\quad 8x=-y+3$

$$\therefore x=-\frac{1}{8}y+\frac{3}{8}$$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=-\frac{1}{8}x+\frac{3}{8}$

$$\therefore h^{-1}(x)=-\frac{1}{8}x+\frac{3}{8}$$

답 $\boldsymbol{h^{-1}(x)=-\frac{1}{8}x+\frac{3}{8}}$

0899 $(f\circ g)^{-1}(3x-1)=x$에서

$$(f\circ g)(x)=3x-1$$

이때

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+c)=a(x+c)+b$$

$$=ax+ac+b$$

이므로 $\quad ax+ac+b=3x-1$

$$\therefore a=3,\ ac+b=-1$$

또 $f^{-1}(3)=-1$에서 $f(-1)=3$이므로

$$-a+b=3$$

$a=3$이므로 $\quad -3+b=3 \qquad \therefore b=6$

$a=3$, $b=6$을 $ac+b=-1$에 대입하면

$$3c+6=-1 \qquad \therefore c=-\frac{7}{3}$$

$$\therefore f(x)=3x+6,\ g(x)=x-\frac{7}{3}$$

$g^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)=k$라 하면 $g(k)=\frac{2}{3}$이므로

$k-\frac{7}{3}=\frac{2}{3}$　　$\therefore k=3$

$\therefore (f\circ g^{-1})\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(g^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)=f(3)=3\times3+6=15$

답 ⑤

0900 $f^{-1}(3)=1$에서 $f(1)=3$이므로

$1+k=3$　　$\therefore k=2$

$\therefore f(x)=x|x|+2$

$(f\circ f)^{-1}(3)=(f^{-1}\circ f^{-1})(3)$

$=f^{-1}(f^{-1}(3))=f^{-1}(1)$

에서 $f^{-1}(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로

$a|a|+2=1$　　$\therefore a|a|=-1$

(i) $a\ge0$일 때

$|a|=a$이므로　　$a^2=-1$

이를 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

(ii) $a<0$일 때

$|a|=-a$이므로　　$-a^2=-1$

$a^2=1$　　$\therefore a=-1$ ($\because a<0$)

(i), (ii)에서　　$a=-1$

$\therefore (f\circ f)^{-1}(3)=f^{-1}(1)=-1$

답 ②

0901 주어진 그래프에서

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+1 & (x<2)\\ 2x-4 & (x\ge2)\end{cases},\ g(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ x & (x\ge0)\end{cases}$$

$g(-1)=0$이므로

$(f\circ g)(-1)=f(g(-1))=f(0)=1$

$f(4)=2\times4-4=4$이므로

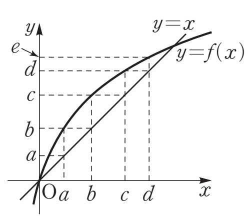
$(g\circ f)(4)=g(f(4))=g(4)=4$

$\therefore (f\circ g)(-1)+(g\circ f)(4)=1+4=5$

답 ②

0902 $(g\circ g\circ g)(e)$

$=g(g(g(e)))$



$g(e)=k$라 하면 $f(k)=e$이므로

$k=d$

$\therefore (g\circ g\circ g)(e)$

$=g(g(g(e)))=g(g(d))$

$g(d)=l$이라 하면 $f(l)=d$이므로

$l=c$

$\therefore (g\circ g\circ g)(e)=g(g(d))=g(c)$

$g(c)=m$이라 하면 $f(m)=c$이므로

$m=b$

$\therefore (g\circ g\circ g)(e)=g(c)=b$

답 ②

0903 $f(-2)$의 값이 될 수 있는 것은

$-2,\ 0,\ 2$의 3개

$f(0)$의 값이 될 수 있는 것은

$-2,\ 0,\ 2$의 3개

$f(2)=f(-2)$이므로 $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은

$f(-2)$의 1개

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$3\times3\times1=9$

답 9

0904 $f(x)=|x+2|+|x-1|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되도록 하는 x의 값이 $-2,\ 1$이므로

(i) $x<-2$일 때

$f(x)=-(x+2)-(x-1)=-2x-1$

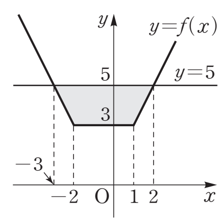
(ii) $-2\le x<1$일 때

$f(x)=(x+2)-(x-1)=3$

(iii) $x\ge1$일 때

$f(x)=(x+2)+(x-1)=2x+1$

이상에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$-2x-1=5$에서　　$x=-3$

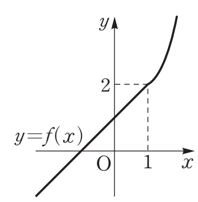
$2x+1=5$에서　　$x=2$

따라서 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=5$의 두 교점의 좌표는 $(-3,\ 5),\ (2,\ 5)$이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times(5+3)\times2=8$

답 8

0905 함수 f가 일대일대응이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 직선 $y=(a-2)x+b$의 기울기가 양수이어야 하므로

$a-2>0$　　$\therefore a>2$　　······ ㉠　… 1단계

또 직선 $y=(a-2)x+b$가 점 $(1,\ 2)$를 지나야 하므로

$2=a-2+b$　　$\therefore b=4-a$　… 2단계

이때 ㉠에서 $4-a<2$이므로

$b<2$

따라서 정수 b의 최댓값은 1이다.　… 3단계

답 1

채점 요소		비율
1단계	a의 값의 범위 구하기	30 %
2단계	$a,\ b$ 사이의 관계식 구하기	30 %
3단계	정수 b의 최댓값 구하기	40 %

0906 (i) a가 짝수일 때

$f(a)=\frac{a}{2}$이므로

$(h\circ g\circ f)(a)=(h\circ g)(f(a))$

$=(h\circ g)\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{3}{2}a-4$

즉 $\frac{3}{2}a-4=5$이므로

$$\frac{3}{2}a=9 \qquad \therefore a=6 \qquad \cdots \text{1단계}$$

(ii) a가 홀수일 때

$f(a)=a+1$이므로

$$\begin{aligned}(h\circ g\circ f)(a)&=(h\circ g)(f(a))\\&=(h\circ g)(a+1)\\&=3(a+1)-4=3a-1\end{aligned}$$

즉 $3a-1=5$이므로 $\quad a=2$

이때 a는 짝수이므로 조건을 만족시키지 않는다. ··· 2단계

(i), (ii)에서 $\quad a=6$ ··· 3단계

답 **6**

채점 요소	비율
1단계 a가 짝수일 때, a의 값 구하기	40 %
2단계 a가 홀수일 때, 조건을 만족시키지 않음을 알기	40 %
3단계 a의 값 구하기	20 %

0907 $(g\circ f^{-1})(a)=2$에서

$g(f^{-1}(a))=2$

$f^{-1}(a)=k$라 하면 $g(k)=2$이므로

$$-3k+1=2 \qquad \therefore k=-\frac{1}{3} \qquad \cdots \text{1단계}$$

따라서 $f^{-1}(a)=-\frac{1}{3}$이므로

$$a=f\left(-\frac{1}{3}\right)=2\times\left(-\frac{1}{3}\right)-3=-\frac{11}{3} \qquad \cdots \text{2단계}$$

답 $-\frac{11}{3}$

채점 요소	비율
1단계 $f^{-1}(a)$의 값 구하기	50 %
2단계 a의 값 구하기	50 %

0908 $f(x)-3f(2-x)=-4x$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)-3f(1)=-4, \qquad -2f(1)=-4$

$\therefore f(1)=2$ ··· 1단계

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)-3f(2)=0$ ······ ㉡

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)-3f(0)=-8$ ······ ㉢

㉡+㉢×3을 하면

$-8f(0)=-24 \qquad \therefore f(0)=3$ ··· 2단계

$\therefore f(0)+f(1)=3+2=5$ ··· 3단계

답 **5**

채점 요소	비율
1단계 $f(1)$의 값 구하기	40 %
2단계 $f(0)$의 값 구하기	50 %
3단계 $f(0)+f(1)$의 값 구하기	10 %

0909 전략 두 함수 f, g의 식을 이용하여 함수 $g\circ f$의 식을 구한다.

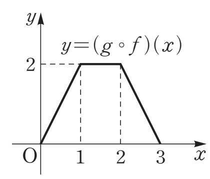
주어진 그래프에서

$$f(x)=\begin{cases} x & (0\le x<1)\\ 1 & (1\le x<2)\\ x-1 & (2\le x\le 3)\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} 2x & (0\le x<1)\\ -2x+4 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore (g\circ f)(x)&=g(f(x))\\&=\begin{cases} 2f(x) & (0\le f(x)<1)\\ -2f(x)+4 & (1\le f(x)\le 2)\end{cases}\\&=\begin{cases} 2x & (0\le x<1)\\ -2\times1+4 & (1\le x<2)\\ -2(x-1)+4 & (2\le x\le 3)\end{cases}\\&=\begin{cases} 2x & (0\le x<1)\\ 2 & (1\le x<2)\\ -2x+6 & (2\le x\le 3)\end{cases}\end{aligned}$$

따라서 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 ①

RPM 비법 노트

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 주어졌을 때, 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 다음과 같은 순서로 그린다.

(i) $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 각각 꺾인 점(함수식이 달라지는 경계)을 기준으로 정의역의 범위를 나누어 $f(x)$, $g(x)$의 식을 구한다.

(ii) $(g\circ f)(x)$의 식을 구하여 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프를 그린다.

0910 전략 $f(t)=t$ (t는 상수)를 만족시키는 t의 값을 $t<2$인 경우와 $t\ge2$인 경우로 나누어 구한다.

$(f\circ f)(a)=f(a)$에서 $\qquad f(f(a))=f(a)$

이때 $f(a)=t$라 하면 $\qquad f(t)=t$

$t<2$일 때 $f(t)=t$에서

$2t+2=t \qquad \therefore t=-2$

$t\ge2$일 때 $f(t)=t$에서

$t^2-7t+16=t, \qquad t^2-8t+16=0$

$(t-4)^2=0 \qquad \therefore t=4$

따라서 $(f\circ f)(a)=f(a)$를 만족시키려면

$f(a)=-2$ 또는 $f(a)=4$

이어야 한다.

(i) $a<2$일 때

$f(a)=-2$에서 $\qquad 2a+2=-2$

$\therefore a=-2$

$f(a)=4$에서 $\qquad 2a+2=4$

$\therefore a=1$

(ii) $a\geq 2$일 때

$f(a)=-2$에서 $\quad a^2-7a+16=-2$

$\therefore\ a^2-7a+18=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-7)^2-4\times1\times18=-23<0$

따라서 이를 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

$f(a)=4$에서 $\quad a^2-7a+16=4$

$a^2-7a+12=0, \quad (a-3)(a-4)=0$

$\therefore\ a=3$ 또는 $a=4$

(i), (ii)에서

$a=-2$ 또는 $a=1$ 또는 $a=3$ 또는 $a=4$

따라서 구하는 합은

$-2+1+3+4=6$ **답 6**

다른 풀이 $f(x)=\begin{cases} 2x+2 & (x<2) \\ x^2-7x+16 & (x\geq 2)\end{cases}$에서

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))$$
$$=\begin{cases} 2f(x)+2 & (f(x)<2) \\ \{f(x)\}^2-7f(x)+16 & (f(x)\geq 2)\end{cases}$$

$x<0$일 때, $f(x)<2$이므로

$(f\circ f)(x)=2(2x+2)+2=4x+6$

$0\leq x<2$일 때, $f(x)\geq 2$이므로

$(f\circ f)(x)=(2x+2)^2-7(2x+2)+16$
$=4x^2-6x+6$

$x\geq 2$일 때, $f(x)\geq 2$이므로

$(f\circ f)(x)=(x^2-7x+16)^2-7(x^2-7x+16)+16$
$=x^4-14x^3+74x^2-175x+160$

$\therefore\ (f\circ f)(x)$

$$=\begin{cases} 4x+6 & (x<0) \\ 4x^2-6x+6 & (0\leq x<2) \\ x^4-14x^3+74x^2-175x+160 & (x\geq 2)\end{cases}$$

(i) $a<0$일 때

$(f\circ f)(a)=f(a)$에서 $\quad 4a+6=2a+2$

$\therefore\ a=-2$

(ii) $0\leq a<2$일 때

$(f\circ f)(a)=f(a)$에서 $\quad 4a^2-6a+6=2a+2$

$a^2-2a+1=0, \quad (a-1)^2=0$

$\therefore\ a=1$

(iii) $a\geq 2$일 때

$(f\circ f)(a)=f(a)$에서

$a^4-14a^3+74a^2-175a+160=a^2-7a+16$

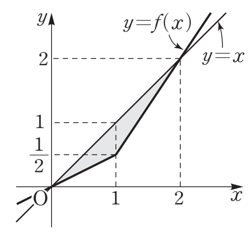
$a^4-14a^3+73a^2-168a+144=0$

$(a-3)^2(a-4)^2=0$

$\therefore\ a=3$ 또는 $a=4$

이상에서 $\quad a=-2$ 또는 $a=1$ 또는 $a=3$ 또는 $a=4$

0911 **전략** 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.



함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

(i) $x<1$일 때

$\frac{1}{2}x=x$에서 $\quad x=0$

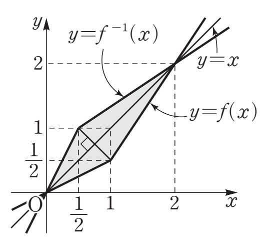
(ii) $x\geq 1$일 때

$\frac{3}{2}x-1=x$에서 $\quad x=2$

(i), (ii)에서 교점의 좌표는 $(0,\ 0)$, $(2,\ 2)$이므로 구하는 도형의 넓이는

$2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1\right)=1$ **답 1**

다른 풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{2^2+2^2}\times\sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$$

09 유리함수

교과서 문제 정복하기

• 본책 137쪽, 139쪽

0912 답 (1) ㄱ, ㄹ, ㅂ (2) ㄴ, ㄷ, ㅁ

0913 $\frac{c}{3ab^2x}$, $\frac{a}{2bcx^2}$의 분모의 최소공배수가 $6ab^2cx^2$이므로 두 유리식을 통분하면

$\frac{2c^2x}{6ab^2cx^2}$, $\frac{3a^2b}{6ab^2cx^2}$ 답 $\boldsymbol{\frac{2c^2x}{6ab^2cx^2}, \frac{3a^2b}{6ab^2cx^2}}$

0914 $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$,
$x^2-x-6=(x+2)(x-3)$이므로 두 유리식을 통분하면

$\frac{2(x+2)}{(x+2)(x-1)(x-3)}$, $\frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x-3)}$

답 $\boldsymbol{\frac{2(x+2)}{(x+2)(x-1)(x-3)}, \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x-3)}}$

0915 답 $\boldsymbol{\frac{3ax^2}{2y}}$

0916 $\frac{x^2-2x-8}{x^2+3x+2}=\frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x+1)}=\frac{x-4}{x+1}$ 답 $\boldsymbol{\frac{x-4}{x+1}}$

0917 $\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-2}=\frac{2(x-2)+x+1}{(x+1)(x-2)}$

$=\frac{3x-3}{(x+1)(x-2)}$

답 $\boldsymbol{\frac{3x-3}{(x+1)(x-2)}}$

0918 $\frac{1}{x+3}-\frac{x-4}{x^2+3x}=\frac{1}{x+3}-\frac{x-4}{x(x+3)}$

$=\frac{x-(x-4)}{x(x+3)}$

$=\frac{4}{x(x+3)}$ 답 $\boldsymbol{\frac{4}{x(x+3)}}$

0919 $\frac{x^2+x-6}{x^2-4x-5}\times\frac{x-5}{x^2+2x-3}$

$=\frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-5)}\times\frac{x-5}{(x+3)(x-1)}$

$=\frac{x-2}{(x+1)(x-1)}$ 답 $\boldsymbol{\frac{x-2}{(x+1)(x-1)}}$

0920 $\frac{x-3}{x+5}\div\frac{x^2-9}{x^2-25}=\frac{x-3}{x+5}\div\frac{(x+3)(x-3)}{(x+5)(x-5)}$

$=\frac{x-3}{x+5}\times\frac{(x+5)(x-5)}{(x+3)(x-3)}$

$=\frac{x-5}{x+3}$ 답 $\boldsymbol{\frac{x-5}{x+3}}$

0921 $\frac{x+5}{x-1}+\frac{2-x}{x+3}=\frac{(x-1)+6}{x-1}+\frac{-(x+3)+5}{x+3}$

$=1+\frac{6}{x-1}-1+\frac{5}{x+3}$

$=\frac{6(x+3)+5(x-1)}{(x-1)(x+3)}$

$=\frac{11x+13}{(x-1)(x+3)}$

답 $\boldsymbol{\frac{11x+13}{(x-1)(x+3)}}$

0922 $\frac{x^2-2x+1}{x-2}-\frac{x^2+2x-2}{x+2}$

$=\frac{x(x-2)+1}{x-2}-\frac{x(x+2)-2}{x+2}$

$=x+\frac{1}{x-2}-x+\frac{2}{x+2}$

$=\frac{x+2+2(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$=\frac{3x-2}{(x-2)(x+2)}$ 답 $\boldsymbol{\frac{3x-2}{(x-2)(x+2)}}$

0923 $\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$

$=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)$

$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{x+3-(x+1)}{(x+1)(x+3)}$

$=\frac{2}{(x+1)(x+3)}$ 답 $\boldsymbol{\frac{2}{(x+1)(x+3)}}$

0924 $\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{x+4-x}{x(x+4)}$

$=\frac{2}{x(x+4)}$ 답 $\boldsymbol{\frac{2}{x(x+4)}}$

0925 $\frac{\frac{1}{x+4}}{\frac{1}{x+1}}=\frac{1}{x+4}\times\frac{x+1}{1}=\frac{x+1}{x+4}$ 답 $\boldsymbol{\frac{x+1}{x+4}}$

0926 $\frac{\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x}}=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{2x-1}{x}}=\frac{1}{x}\times\frac{x}{2x-1}=\frac{1}{2x-1}$

답 $\boldsymbol{\frac{1}{2x-1}}$

0927 $x:y=2:5$이므로 $x=2k$, $y=5k\,(k\neq0)$로 놓으면

$\frac{2x-y}{x+y}=\frac{4k-5k}{2k+5k}=\frac{-k}{7k}=-\frac{1}{7}$ 답 $\boldsymbol{-\frac{1}{7}}$

0928 $x:y=3:2$이므로 $x=3k$, $y=2k\,(k\neq0)$로 놓으면

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{9k^2+4k^2}{9k^2-6k^2+4k^2}=\frac{13k^2}{7k^2}=\frac{13}{7}$$

답 $\dfrac{13}{7}$

0929 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{5}=k\,(k\neq0)$로 놓으면

$x=3k$, $y=2k$, $z=5k$

$$\therefore \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{6k^2+10k^2+15k^2}{9k^2+4k^2+25k^2}=\frac{31k^2}{38k^2}=\frac{31}{38}$$

답 $\dfrac{31}{38}$

0930 답 (1) ㄱ, ㄷ, ㅁ (2) ㄴ, ㄹ, ㅂ

0931 $x+3=0$에서 $x=-3$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq-3$인 실수$\}$이다.

답 $\{x\,|\,x\neq-3$인 실수$\}$

0932 $2-x=0$에서 $x=2$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq2$인 실수$\}$이다.

답 $\{x\,|\,x\neq2$인 실수$\}$

0933 $x^2-1=0$에서 $x=\pm1$

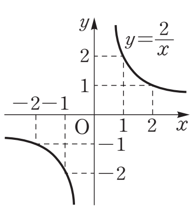
따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\neq\pm1$인 실수$\}$이다.

답 $\{x\,|\,x\neq\pm1$인 실수$\}$

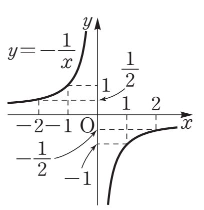
0934 $x^2+4>0$이므로 주어진 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

답 $\{x\,|\,x$는 실수$\}$

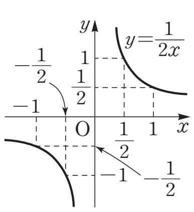
0935 답



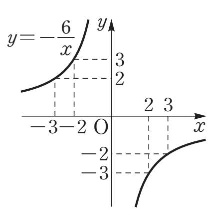
0936 답



0937 답

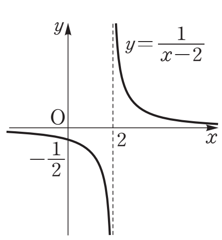


0938 답



0939 답 $y=\dfrac{1}{x-2}+3$

0940 $y=\dfrac{1}{x-2}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,



정의역은 $\{x\,|\,x\neq2$인 실수$\}$,

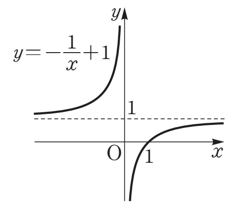
치역은 $\{y\,|\,y\neq0$인 실수$\}$,

점근선의 방정식은 $x=2$, $y=0$

이다.

답 풀이 참조

0941 $y=-\dfrac{1}{x}+1$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,



정의역은 $\{x\,|\,x\neq0$인 실수$\}$,

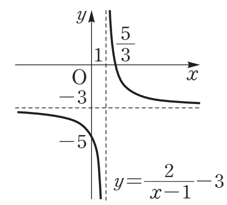
치역은 $\{y\,|\,y\neq1$인 실수$\}$,

점근선의 방정식은 $x=0$, $y=1$

이다.

답 풀이 참조

0942 $y=\dfrac{2}{x-1}-3$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,



정의역은 $\{x\,|\,x\neq1$인 실수$\}$,

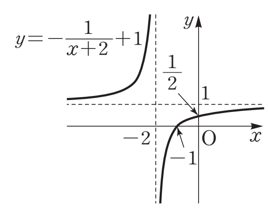
치역은 $\{y\,|\,y\neq-3$인 실수$\}$,

점근선의 방정식은 $x=1$, $y=-3$

이다.

답 풀이 참조

0943 $y=-\dfrac{1}{x+2}+1$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,



정의역은 $\{x\,|\,x\neq-2$인 실수$\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\neq1$인 실수$\}$,

점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=1$

이다.

답 풀이 참조

0944 $y=\dfrac{4x+1}{x-1}=\dfrac{4(x-1)+5}{x-1}=\dfrac{5}{x-1}+4$

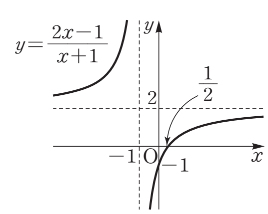
답 $y=\dfrac{5}{x-1}+4$

0945 $y=\dfrac{-3x+5}{x-2}=\dfrac{-3(x-2)-1}{x-2}=-\dfrac{1}{x-2}-3$

답 $y=-\dfrac{1}{x-2}-3$

0946 $y=\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-3}{x+1}=-\dfrac{3}{x+1}+2$

따라서 주어진 함수의 그래프는 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,



정의역은 $\{x|x\neq-1$인 실수$\}$,

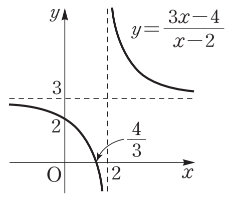
치역은 $\{y|y\neq2$인 실수$\}$,

점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=2$

이다. 답 풀이 참조

0947 $y=\dfrac{3x-4}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+2}{x-2}=\dfrac{2}{x-2}+3$

따라서 주어진 함수의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,



정의역은 $\{x|x\neq2$인 실수$\}$,

치역은 $\{y|y\neq3$인 실수$\}$,

점근선의 방정식은 $x=2$, $y=3$

이다. 답 풀이 참조

유형 익히기

• 본책 140~149쪽

0948 $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-9}\div\dfrac{x^2-3x+2}{x+3}\times\dfrac{x-2}{x^2+2x}$

$=\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-3)}\div\dfrac{(x-1)(x-2)}{x+3}\times\dfrac{x-2}{x(x+2)}$

$=\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-3)}\times\dfrac{x+3}{(x-1)(x-2)}\times\dfrac{x-2}{x(x+2)}$

$=\dfrac{1}{x(x-3)}$ 답 $\dfrac{1}{x(x-3)}$

0949 $\dfrac{x+2}{x^2+x}-\dfrac{3+x}{x^2-1}=\dfrac{x+2}{x(x+1)}-\dfrac{3+x}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{(x+2)(x-1)-x(3+x)}{x(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{x^2+x-2-(3x+x^2)}{x(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{-2(x+1)}{x(x+1)(x-1)}$

$=-\dfrac{2}{x(x-1)}$ 답 $-\dfrac{2}{x(x-1)}$

0950 $\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{2}{a^2+1}-\dfrac{4}{a^4+1}$

$=\dfrac{a+1-(a-1)}{(a-1)(a+1)}-\dfrac{2}{a^2+1}-\dfrac{4}{a^4+1}$

$=\dfrac{2}{a^2-1}-\dfrac{2}{a^2+1}-\dfrac{4}{a^4+1}$

$=\dfrac{2(a^2+1)-2(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2+1)}-\dfrac{4}{a^4+1}$

$=\dfrac{4}{a^4-1}-\dfrac{4}{a^4+1}=\dfrac{4(a^4+1)-4(a^4-1)}{(a^4-1)(a^4+1)}$

$=\dfrac{8}{a^8-1}$ 답 ①

0951 $\dfrac{x^3-y^3}{2(x+y)}\div\dfrac{x^2-y^2}{4x^2+8xy+4y^2}$

$=\dfrac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{2(x+y)}\div\dfrac{(x+y)(x-y)}{4(x+y)^2}$

$=\dfrac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{2(x+y)}\times\dfrac{4(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}$

$=2(x^2+y^2+xy)$

$=2\times(6+2)=16$ 답 16

0952 주어진 등식의 좌변을 통분하면

$\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+1}=\dfrac{a(x+1)+b(x-2)}{(x-2)(x+1)}$

$=\dfrac{(a+b)x+a-2b}{x^2-x-2}$

즉 $\dfrac{(a+b)x+a-2b}{x^2-x-2}=\dfrac{5x+2}{x^2-x-2}$가 x에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$a+b=5$, $a-2b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=1$

$\therefore ab=4$ 답 ②

다른 풀이 $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$이므로 주어진 등식의 양변에 $(x-2)(x+1)$을 곱하면

$a(x+1)+b(x-2)=5x+2$

$\therefore (a+b)x+a-2b=5x+2$

이 식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a+b=5$, $a-2b=2$

RPM 비법 노트

항등식의 성질

① $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식

$\iff a=0,\ b=0,\ c=0$

② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식

$\iff a=a',\ b=b',\ c=c'$

0953 주어진 등식의 우변을 통분하면

$\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x^2+x+1}=\dfrac{2(x^2+x+1)+(x-1)^2}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\dfrac{3x^2+3}{x^3-1}$

즉 $\dfrac{ax^2+bx+c}{x^3-1}=\dfrac{3x^2+3}{x^3-1}$이 x에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면 $a=3$, $b=0$, $c=3$

$\therefore a^2+b^2+c^2=18$ 답 18

0954 주어진 등식의 우변을 통분하면

$\dfrac{a}{1+x}+\dfrac{b}{1-x}+\dfrac{c}{(1-x)^2}$

$=\dfrac{a(1-x)^2+b(1+x)(1-x)+c(1+x)}{(1+x)(1-x)^2}$

$=\dfrac{(a-b)x^2+(-2a+c)x+a+b+c}{x^3-x^2-x+1}$ … 1단계

즉

$$\frac{5-x^2}{x^3-x^2-x+1}=\frac{(a-b)x^2+(-2a+c)x+a+b+c}{x^3-x^2-x+1}$$

가 x에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$a-b=-1$ …… ㉠

$-2a+c=0$ …… ㉡

$a+b+c=5$ …… ㉢

㉠+㉢을 하면 $2a+c=4$ …… ㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $a=1$, $c=2$

㉠에 $a=1$을 대입하면 $1-b=-1$ $\therefore b=2$ … 2단계

$\therefore abc=4$ … 3단계

답 **4**

채점 요소	비율
1단계 주어진 식의 우변을 통분하기	50 %
2단계 a, b, c의 값 구하기	40 %
3단계 abc의 값 구하기	10 %

0955 $\frac{x+2}{x+1}-\frac{x+3}{x+2}-\frac{x+4}{x+3}+\frac{x+5}{x+4}$

$=\frac{(x+1)+1}{x+1}-\frac{(x+2)+1}{x+2}-\frac{(x+3)+1}{x+3}+\frac{(x+4)+1}{x+4}$

$=\left(1+\frac{1}{x+1}\right)-\left(1+\frac{1}{x+2}\right)-\left(1+\frac{1}{x+3}\right)+\left(1+\frac{1}{x+4}\right)$

$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}$

$=\frac{1}{(x+1)(x+2)}-\frac{1}{(x+3)(x+4)}$

$=\frac{(x+3)(x+4)-(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

$=\frac{4x+10}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

즉

$$\frac{4x+10}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}=\frac{ax+b}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

가 x에 대한 항등식이므로 $a=4$, $b=10$

$\therefore a-b=-6$

답 ①

0956 $\frac{2x^2+4x+1}{x^2+2x}-\frac{x^2+x-1}{x^2+x-2}-1$

$=\frac{2(x^2+2x)+1}{x^2+2x}-\frac{(x^2+x-2)+1}{x^2+x-2}-1$

$=\left(2+\frac{1}{x^2+2x}\right)-\left(1+\frac{1}{x^2+x-2}\right)-1$

$=\frac{1}{x^2+2x}-\frac{1}{x^2+x-2}$

$=\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+2)(x-1)}$

$=-\frac{1}{x(x+2)(x-1)}$

답 $-\frac{1}{x(x+2)(x-1)}$

0957 $x^3+1=x(x^2-x)+(x^2-x)+x+1$

$=(x^2-x)(x+1)+x+1$

이므로

$\frac{x^3+1}{x^2-x}=\frac{(x^2-x)(x+1)+x+1}{x^2-x}=x+1+\frac{x+1}{x^2-x}$

$x^2=x(x+1)-(x+1)+1=(x+1)(x-1)+1$이므로

$\frac{x^2}{x+1}=\frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}$

$\therefore \frac{x^3+1}{x^2-x}-\frac{x^2}{x+1}-2$

$=x+1+\frac{x+1}{x^2-x}-\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)-2$

$=\frac{x+1}{x^2-x}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1}{x(x-1)}-\frac{1}{x+1}$

$=\frac{(x+1)^2-x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$

$=\frac{\boxed{3x+1}}{x^3-x}$

답 ⑤

0958 $\frac{3}{x(x+3)}+\frac{4}{(x+3)(x+7)}+\frac{5}{(x+7)(x+12)}$

$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+7}\right)+\left(\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+12}\right)$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+12}=\frac{12}{x(x+12)}$

즉 $\frac{12}{x(x+12)}=\frac{a}{x(x+b)}$가 x에 대한 항등식이므로

$a=12$, $b=12$ $\therefore a+b=24$

답 **24**

0959 $\frac{1}{5\times7}+\frac{1}{7\times9}+\frac{1}{9\times11}+\cdots+\frac{1}{23\times25}$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\cdots\right.$

$\left.+\left(\frac{1}{23}-\frac{1}{25}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{25}\right)=\frac{2}{25}$

답 $\frac{2}{25}$

0960 $\frac{1}{x^2-x}+\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+5x+6}$

$=\frac{1}{(x-1)x}+\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}$

$+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$

$=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)$

$+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)$

$=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}$

$=\frac{4}{(x-1)(x+3)}$

09 유리함수

즉 $\dfrac{4}{(x-1)(x+3)}=\dfrac{m}{(x-1)(x+n)}$이 x에 대한 항등식이므로

$m=4,\ n=3$

$\therefore\ m+n=7$

답 7

0961 $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\cdots+\dfrac{1}{(x+998)(x+999)}$

$=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)+\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{x+998}-\dfrac{1}{x+999}\right)$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+999}=\dfrac{999}{x(x+999)}$

$\therefore\ f(111)=\dfrac{999}{111\times(111+999)}=\dfrac{3}{370}$

답 $\dfrac{3}{370}$

0962 $1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}}=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\cfrac{x-1}{x}}}}$

$=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{x-1}}}$

$=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\cfrac{-1}{x-1}}}$

$=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

즉 $f(x)=x-1$이므로

$f(10)=10-1=9$

답 9

0963 $f(x)=1-\cfrac{1+\cfrac{1}{x+1}}{1-\cfrac{1}{x+1}}=1-\cfrac{\cfrac{x+2}{x+1}}{\cfrac{x}{x+1}}$

$=1-\dfrac{x+2}{x}=-\dfrac{2}{x}$

따라서 $f(a)=\dfrac{1}{4}$에서 $\quad -\dfrac{2}{a}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ a=-8$

답 -8

0964 $\dfrac{43}{15}=2+\dfrac{13}{15}=2+\cfrac{1}{\cfrac{15}{13}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{13}}$

$=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{13}{2}}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2}}}$

따라서 $a=2,\ b=1,\ c=6,\ d=2$이므로

$a+b+c+d=11$

답 ②

0965 $x^2+4x-1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$x+4-\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore\ x-\dfrac{1}{x}=-4$

$\therefore\ 2x^2+9x+1-\dfrac{9}{x}+\dfrac{2}{x^2}$

$=2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+9\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+1$

$=2\left\{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2\right\}+9\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+1$

$=2\times\{(-4)^2+2\}+9\times(-4)+1$

$=1$

답 ①

0966 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=5+2=7$이므로

$x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{7}\ (\because\ x>0)$ $\cdots$ 1단계

$\therefore\ x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=(\sqrt{7})^3-3\times\sqrt{7}=4\sqrt{7}$ $\cdots$ 2단계

답 $4\sqrt{7}$

채점 요소	비율
1단계 $x+\dfrac{1}{x}$의 값 구하기	50 %
2단계 $x^3+\dfrac{1}{x^3}$의 값 구하기	50 %

0967 $x^2-3x+1=0$에서 $x>1$이므로 양변을 x로 나누면

$x-3+\dfrac{1}{x}=0 \qquad \therefore\ x+\dfrac{1}{x}=3$

이때 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4=3^2-4=5$이므로

$x-\dfrac{1}{x}=\sqrt{5}\ (\because\ x>1)$

또 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$이므로

$x^4-\dfrac{1}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

$=7\times3\times\sqrt{5}=21\sqrt{5}$

답 ③

0968 $a+b+c=0$에서

$a+b=-c,\ b+c=-a,\ c+a=-b$

이므로

$a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

$=\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}$

$=\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}$

$=\dfrac{-a}{a}+\dfrac{-b}{b}+\dfrac{-c}{c}$

$=-1+(-1)+(-1)=-3$

답 ②

다른 풀이 $a+b+c=0$에서

$$a+b=-c,\ b+c=-a,\ c+a=-b$$

이므로

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$
$$=a\times\frac{b+c}{bc}+b\times\frac{c+a}{ca}+c\times\frac{a+b}{ab}$$
$$=a\times\frac{-a}{bc}+b\times\frac{-b}{ca}+c\times\frac{-c}{ab}$$
$$=-\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=0$$

이므로 $\quad a^3+b^3+c^3=3abc$

따라서 ㉠에서 $\quad$ (주어진 식)$=-\dfrac{3abc}{abc}=-3$

0969 $a+b+c=0$에서

$$a=-b-c,\ b=-c-a,\ c=-a-b$$

이므로

$$\left(\frac{a-c}{b}-1\right)\left(\frac{b-a}{c}-1\right)\left(\frac{c-b}{a}-1\right)$$
$$=\frac{a-c-b}{b}\times\frac{b-a-c}{c}\times\frac{c-b-a}{a}$$
$$=\frac{a+a}{b}\times\frac{b+b}{c}\times\frac{c+c}{a}$$
$$=\frac{2a}{b}\times\frac{2b}{c}\times\frac{2c}{a}=8$$

답 8

0970 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$에서

$$\frac{ab+bc+ca}{abc}=0 \qquad \therefore ab+bc+ca=0$$

$$\therefore \frac{a}{(a+b)(c+a)}+\frac{b}{(b+c)(a+b)}+\frac{c}{(c+a)(b+c)}$$
$$=\frac{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$
$$=\frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=0$$

답 ③

0971 $(x+y):(y+z):(z+x)=3:4:5$이므로

$$x+y=3k,\ y+z=4k,\ z+x=5k\ (k\neq0) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

로 놓고 세 식을 변끼리 더하면

$$2(x+y+z)=12k$$
$$\therefore x+y+z=6k \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\quad x=2k,\ y=k,\ z=3k$

$$\therefore \frac{xy+2yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{2k^2+6k^2+6k^2}{4k^2+k^2+9k^2}=\frac{14k^2}{14k^2}=1$$

답 1

0972 $x^2-3xy+2y^2=0$에서 $\quad (x-2y)(x-y)=0$

$$\therefore x=2y\ (\because x\neq y)$$

$$\therefore \frac{x^2-xy+3y^2}{xy-2x^2}=\frac{4y^2-2y^2+3y^2}{2y^2-8y^2}$$
$$=\frac{5y^2}{-6y^2}=-\frac{5}{6}$$

답 $-\dfrac{5}{6}$

0973 $\dfrac{x+3y}{2}=\dfrac{y+2z}{3}=\dfrac{z}{4}=k\ (k\neq0)$로 놓으면

$$x+3y=2k,\ y+2z=3k,\ z=4k$$

$z=4k$를 $y+2z=3k$에 대입하면 $\quad y+8k=3k$

$$\therefore y=-5k$$

$y=-5k$를 $x+3y=2k$에 대입하면 $\quad x-15k=2k$

$$\therefore x=17k$$

$$\therefore \frac{x+2y+2z}{2x+y-6z}=\frac{17k-10k+8k}{34k-5k-24k}$$
$$=\frac{15k}{5k}=3$$

답 3

0974 $2x+y-3z=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$x-y+6z=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠+㉡을 하면

$$3x+3z=0 \qquad \therefore z=-x$$

$z=-x$를 ㉠에 대입하면

$$2x+y+3x=0 \qquad \therefore y=-5x$$

$$\therefore \frac{xy+yz-zx}{x^2+yz}=\frac{-5x^2+5x^2+x^2}{x^2+5x^2}$$
$$=\frac{x^2}{6x^2}=\frac{1}{6}$$

답 ③

0975 $y=\dfrac{2x+b}{x+a}=\dfrac{2(x+a)-2a+b}{x+a}=\dfrac{-2a+b}{x+a}+2$

의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\frac{-2a+b}{x-1+a}+2+c$$

이 함수의 그래프가 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프와 일치하므로

$$-2a+b=3,\ -1+a=0,\ 2+c=0$$
$$\therefore a=1,\ b=5,\ c=-2$$
$$\therefore abc=-10$$

답 -10

다른 풀이 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 $-c$만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\frac{3}{x+1}-c=\frac{3-c(x+1)}{x+1}=\frac{-cx-c+3}{x+1}$$

이 함수의 그래프가 $y=\dfrac{2x+b}{x+a}$의 그래프와 일치하므로

$$-c=2,\ -c+3=b,\ 1=a$$
$$\therefore a=1,\ b=5,\ c=-2$$

09 유리함수

0976 $y=\frac{3x-1}{2x-1}=\frac{\frac{3}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}}{2x-1}=\frac{\frac{1}{2}}{2x-1}+\frac{3}{2}$

$=\frac{1}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)}+\frac{3}{2}$ ⋯ 1단계

따라서 $y=\frac{3x-1}{2x-1}$의 그래프는 $y=\frac{1}{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼 평행이동한 것이므로

$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2},\ k=4$ ⋯ 2단계

$\therefore\ a+b+k=6$ ⋯ 3단계

답 6

채점 요소	비율
1단계 $y=\frac{3x-1}{2x-1}$을 변형하기	50 %
2단계 $a,\ b,\ k$의 값 구하기	40 %
3단계 $a+b+k$의 값 구하기	10 %

0977 ① $y=\frac{2x-1}{x-3}=\frac{2(x-3)+5}{x-3}=\frac{5}{x-3}+2$

② $y=\frac{2x+3}{2x-1}=\frac{(2x-1)+4}{2x-1}=\frac{4}{2x-1}+1=\frac{2}{x-\frac{1}{2}}+1$

③ $y=\frac{2x+8}{x+3}=\frac{2(x+3)+2}{x+3}=\frac{2}{x+3}+2$

④ $y=\frac{x+1}{2-x}=\frac{-(x-2)-3}{x-2}=-\frac{3}{x-2}-1$

⑤ $y=\frac{4x-6}{2x-1}=\frac{2(2x-1)-4}{2x-1}=-\frac{4}{2x-1}+2$

$=-\frac{2}{x-\frac{1}{2}}+2$

이므로 $y=\frac{4x-6}{2x-1}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프와 겹쳐진다.

따라서 평행이동에 의하여 $y=-\frac{2}{x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0978 $y=\frac{2x-1}{x-1}=\frac{2(x-1)+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+2$

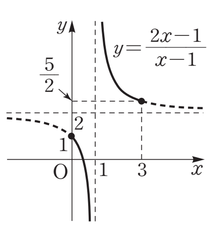
이므로 $y=\frac{2x-1}{x-1}$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $0\le x<1$ 또는 $1<x\le3$에서

$y=\frac{2x-1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과

같으므로 치역은

$\left\{y\,\middle|\,y\le1 \text{ 또는 } y\ge\frac{5}{2}\right\}$



답 ①

0979 $y=\frac{bx+4}{3x+a}=\frac{\frac{b}{3}(3x+a)-\frac{ab}{3}+4}{3x+a}$

$=\frac{-\frac{ab}{3}+4}{3x+a}+\frac{b}{3}$

이므로

정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\ne-\frac{a}{3}\text{인 실수}\right\}$,

치역은 $\left\{y\,\middle|\,y\ne\frac{b}{3}\text{인 실수}\right\}$

따라서 $-\frac{a}{3}=-1,\ \frac{b}{3}=3$이므로

$a=3,\ b=9$

$\therefore\ a+b=12$

답 12

0980 $y=\frac{2x+6}{x+1}=\frac{2(x+1)+4}{x+1}=\frac{4}{x+1}+2$

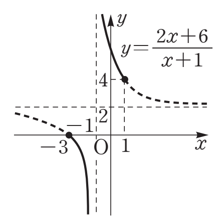
이므로 $y=\frac{2x+6}{x+1}$의 그래프는 $y=\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y\le0$ 또는 $y\ge4$에서

$y=\frac{2x+6}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과

같으므로 정의역은

$\{x\,|\,-3\le x<-1 \text{ 또는 } -1<x\le1\}$



따라서 정의역에 속하는 정수는 $-3,\ -2,$ $0,\ 1$이므로 구하는 합은

$-3+(-2)+0+1=-4$

답 -4

0981 $y=\frac{3x+1}{x+a}=\frac{3(x+a)-3a+1}{x+a}=\frac{-3a+1}{x+a}+3$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-a,\ y=3$

따라서 $2=-a,\ b=3$이므로

$a=-2,\ b=3$

$\therefore\ ab=-6$

답 ②

0982 $y=\frac{2x-3}{-x-3}=\frac{-2(x+3)+9}{x+3}=\frac{9}{x+3}-2$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-3,\ y=-2$

$y=\frac{ax+2}{3x+b}=\frac{\frac{a}{3}(3x+b)-\frac{ab}{3}+2}{3x+b}=\frac{-\frac{ab}{3}+2}{3x+b}+\frac{a}{3}$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\frac{b}{3},\ y=\frac{a}{3}$

두 점근선의 방정식이 같으므로

$-3=-\frac{b}{3},\ -2=\frac{a}{3}$

$\therefore\ a=-6,\ b=9$

$\therefore\ a+b=3$

답 3

0983 $y=\dfrac{bx+c}{ax-2}=\dfrac{\dfrac{b}{a}(ax-2)+\dfrac{2b}{a}+c}{ax-2}$

$=\dfrac{\dfrac{2b}{a}+c}{ax-2}+\dfrac{b}{a}$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\dfrac{2}{a}$, $y=\dfrac{b}{a}$

따라서 $\dfrac{2}{a}=2$, $\dfrac{b}{a}=3$이므로 $a=1$, $b=3$

즉 $y=\dfrac{3x+c}{x-2}$의 그래프가 점 $(3, 4)$를 지나므로

$4=9+c$ $\therefore c=-5$

$\therefore a+b+c=-1$ 답 ③

다른 풀이 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=3$이므로 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x-2}+3\ (k\neq 0)$ ...... ㉠

으로 놓으면 ㉠의 그래프가 점 $(3, 4)$를 지나므로

$4=k+3$ $\therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{1}{x-2}+3=\dfrac{1+3(x-2)}{x-2}=\dfrac{3x-5}{x-2}$

따라서 $a=1$, $b=3$, $c=-5$이므로

$a+b+c=-1$

0984 $y=\dfrac{2x+1}{x+4}=\dfrac{2(x+4)-7}{x+4}=-\dfrac{7}{x+4}+2$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-4$, $y=2$

따라서 주어진 함수의 그래프는 두 점근선의 교점 $(-4, 2)$에 대하여 대칭이므로

$p=-4$, $q=2$

또 직선 $y=x+a$가 점 $(-4, 2)$를 지나므로

$2=-4+a$ $\therefore a=6$

$\therefore a+p+q=4$ 답 ③

0985 $y=\dfrac{3x-5}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}+3$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=2$, $y=3$

따라서 직선 $y=-x+k$가 두 점근선의 교점 $(2, 3)$을 지나므로

$3=-2+k$ $\therefore k=5$ 답 5

0986 $y=\dfrac{ax+3}{x+b}=\dfrac{a(x+b)-ab+3}{x+b}=\dfrac{-ab+3}{x+b}+a$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-b$, $y=a$

따라서 두 직선 $y=x+2$, $y=-x-3$이 두 점근선의 교점 $(-b, a)$를 지나므로

$a=-b+2$, $a=b-3$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{5}{2}$ $\therefore ab=-\dfrac{5}{4}$ 답 $-\dfrac{5}{4}$

0987 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}=\dfrac{a(x+c)-ac+b}{x+c}=\dfrac{-ac+b}{x+c}+a$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-c$, $y=a$

이 함수의 그래프가 점 $(-2, 1)$에 대하여 대칭이므로

$-c=-2$, $a=1$ $\therefore a=1$, $c=2$

즉 $y=\dfrac{x+b}{x+2}$의 그래프의 x절편이 1이므로

$0=\dfrac{1+b}{3}$ $\therefore b=-1$

$\therefore abc=-2$ 답 -2

다른 풀이 주어진 함수의 그래프가 점 $(-2, 1)$에 대하여 대칭이므로 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x+2}+1\ (k\neq 0)$ ...... ㉠

로 놓으면 ㉠의 그래프의 x절편이 1이므로

$0=\dfrac{k}{3}+1$ $\therefore k=-3$

$k=-3$을 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{-3}{x+2}+1=\dfrac{-3+(x+2)}{x+2}=\dfrac{x-1}{x+2}$

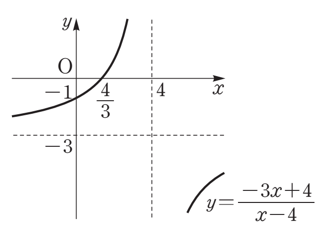
따라서 $a=1$, $b=-1$, $c=2$이므로

$abc=-2$

0988 $y=\dfrac{-3x+4}{x-4}=\dfrac{-3(x-4)-8}{x-4}=-\dfrac{8}{x-4}-3$

이므로 $y=\dfrac{-3x+4}{x-4}$의 그래프는 $y=-\dfrac{8}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

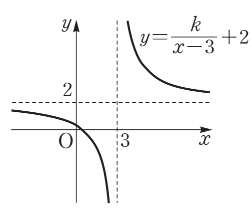
따라서 $y=\dfrac{-3x+4}{x-4}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지나지 않는다.



답 ②

0989 $y=\dfrac{k}{x-3}+2$의 그래프는 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$k>0$에서 $y=\dfrac{k}{x-3}+2$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$일 때 y의 값이 0보다 크거나 같아야 하므로



$-\dfrac{k}{3}+2\geq 0$, $\dfrac{k}{3}\leq 2$

$\therefore k\leq 6$

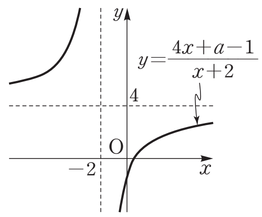
따라서 자연수 k의 최댓값은 6이다. 답 ④

09 유리함수

0990 $y=\dfrac{4x+a-1}{x+2}=\dfrac{4(x+2)+a-9}{x+2}=\dfrac{a-9}{x+2}+4$

이므로 $y=\dfrac{4x+a-1}{x+2}$의 그래프는 $y=\dfrac{a-9}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

이때 이 그래프가 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(ⅰ) $a-9<0$이어야 하므로

$a<9$

(ⅱ) $x=0$일 때 y의 값이 0보다 작아야 하므로

$\dfrac{a-1}{2}<0 \qquad \therefore a<1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 a의 값의 범위는 $\quad a<1$ 　 답 $a<1$

참고 | $a>9$이면 $y=\dfrac{4x+a-1}{x+2}$의 그래프는 제4사분면을 지나지 않는다. 또 $a=9$이면 $y=4$이므로 그래프는 제3, 4사분면을 지나지 않는다.

0991 주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=1$이므로 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x-2}+1\,(k<0)$ 　 …… ㉠

로 놓으면 ㉠의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=\dfrac{k}{-2}+1 \qquad \therefore k=-2$

$k=-2$를 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{-2}{x-2}+1=\dfrac{-2+(x-2)}{x-2}=\dfrac{x-4}{x-2}$

따라서 $a=1$, $b=-4$, $c=-2$이므로

$abc=8$ 　 답 ④

0992 주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=4$, $y=-2$이므로 　 $p=4$, $q=-2$ 　 … 1단계

따라서 $y=\dfrac{a}{x-4}-2$의 그래프가 점 $(8, 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{a}{8-4}-2 \qquad \therefore a=8$ 　 … 2단계

$\therefore a+p+q=10$ 　 … 3단계

답 **10**

채점 요소		비율
1단계	p, q의 값 구하기	40 %
2단계	a의 값 구하기	40 %
3단계	$a+p+q$의 값 구하기	20 %

0993 주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=1$이므로 함수의 식을

$y=\dfrac{k}{x+2}+1\,(k<0)$ 　 …… ㉠

로 놓으면 ㉠의 그래프가 점 $(0, 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{k}{2}+1 \qquad \therefore k=-2$

$k=-2$를 ㉠에 대입하면

$y=\dfrac{-2}{x+2}+1=\dfrac{-2+(x+2)}{x+2}=\dfrac{x}{x+2}$

따라서 $a=0$, $b=1$, $c=2$이므로

$a-b-c=-3$ 　 답 -3

0994 $y=\dfrac{-4x-2}{x-1}=\dfrac{-4(x-1)-6}{x-1}=-\dfrac{6}{x-1}-4$

① 정의역은 $\{x|x\neq1$인 실수$\}$이다.

② 그래프는 $y=-\dfrac{6}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

③ 그래프의 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=-4$이다.

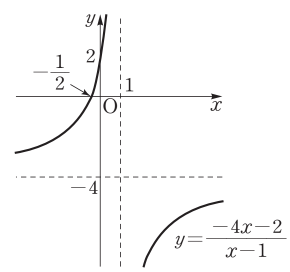
④ $y=\dfrac{-4x-2}{x-1}$에 $y=0$을 대입하면

$0=\dfrac{-4x-2}{x-1}, \qquad -4x-2=0$

$\therefore x=-\dfrac{1}{2}$

즉 그래프와 x축의 교점의 좌표는 $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$이다.

⑤ $y=\dfrac{-4x-2}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 모든 사분면을 지난다.

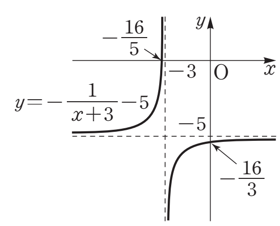


따라서 옳은 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0995 ㄱ. $y=-\dfrac{1}{x+3}-5$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-3$, $y=-5$이므로 그래프는 점 $(-3, -5)$에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. $y=-\dfrac{1}{x+3}-5$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



즉 그래프는 제1사분면을 지나지 않는다. (참)

ㄷ. $y=\dfrac{4x-7}{x-2}=\dfrac{4(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}+4$

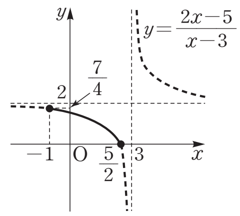
따라서 $y=-\dfrac{1}{x+3}-5$의 그래프와 $y=\dfrac{4x-7}{x-2}$의 그래프는 평행이동에 의하여 겹쳐질 수 없다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 　 답 ③

0996 $y=\dfrac{2x-5}{x-3}=\dfrac{2(x-3)+1}{x-3}=\dfrac{1}{x-3}+2$

이므로 $y=\dfrac{2x-5}{x-3}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-1\le x\le \frac{5}{2}$에서 $y=\frac{2x-5}{x-3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-1$일 때 최댓값 $\frac{7}{4}$,

$x=\frac{5}{2}$일 때 최솟값 0

을 갖는다.

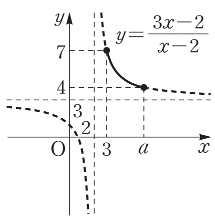
즉 $M=\frac{7}{4}$, $m=0$이므로 $\quad M+m=\frac{7}{4}$

답 ④

0997 $y=\frac{3x-2}{x-2}=\frac{3(x-2)+4}{x-2}=\frac{4}{x-2}+3$

이므로 $y=\frac{3x-2}{x-2}$의 그래프는 $y=\frac{4}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $3\le x\le a$에서 $y=\frac{3x-2}{x-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 $x=3$일 때 최댓값 7을 가지므로

$M=7$

$x=a$일 때 최솟값 4를 가지므로

$\frac{4}{a-2}+3=4 \qquad \therefore a=6$

$\therefore a+M=13$

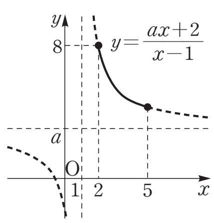
답 13

0998 $y=\frac{ax+2}{x-1}=\frac{a(x-1)+a+2}{x-1}=\frac{a+2}{x-1}+a$

이므로 $y=\frac{ax+2}{x-1}$의 그래프는 $y=\frac{a+2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a>0$에서 $a+2>0$이므로

$2\le x\le 5$에서 $y=\frac{ax+2}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 $x=2$일 때 최댓값 8을 가지므로

$2a+2=8 \qquad \therefore a=3$

따라서 $y=\frac{3x+2}{x-1}$이고, 이 함수는 $x=5$일 때 최솟값을 가지므로 구하는 최솟값은

$\frac{3\times5+2}{5-1}=\frac{17}{4}$

답 ②

0999 $y=\frac{x+2}{3x+a}$로 놓으면 $\quad y(3x+a)=x+2$

$(3y-1)x=-ay+2 \qquad \therefore x=\frac{-ay+2}{3y-1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{-ax+2}{3x-1}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{-ax+2}{3x-1}$

이때 $f=f^{-1}$이므로 $\quad \frac{x+2}{3x+a}=\frac{-ax+2}{3x-1}$

$\therefore a=-1$

답 -1

다른 풀이 $f=f^{-1}$이므로 $\quad (f\circ f)(x)=x$

$f(x)=\frac{x+2}{3x+a}$에서

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x+2}{3x+a}\right)$$

$$=\frac{\frac{x+2}{3x+a}+2}{3\times\frac{x+2}{3x+a}+a}$$

$$=\frac{7x+2a+2}{3(a+1)x+a^2+6}$$

즉 $\frac{7x+2a+2}{3(a+1)x+a^2+6}=x$이므로

$7x+2a+2=3(a+1)x^2+(a^2+6)x$

$\therefore 3(a+1)x^2+(a^2-1)x-2a-2=0$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a+1=0,\ a^2-1=0,\ -2a-2=0$

$\therefore a=-1$

1000 $y=\frac{-x-1}{x+a}$로 놓으면

$y(x+a)=-x-1$

$(y+1)x=-ay-1 \qquad \therefore x=\frac{-ay-1}{y+1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{-ax-1}{x+1}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{-ax-1}{x+1}$

즉 $\frac{-ax-1}{x+1}=\frac{2x+b}{cx+1}$이므로

$-a=2,\ -1=b,\ 1=c$

$\therefore a=-2,\ b=-1,\ c=1$

$\therefore a+b+c=-2$

답 -2

1001 두 함수 $y=\frac{x+3}{x+2}$, $y=\frac{ax+b}{x-1}$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 함수는 서로 역함수 관계이다. … 1단계

$y=\frac{x+3}{x+2}$에서 $\quad y(x+2)=x+3$

$(y-1)x=-2y+3 \qquad \therefore x=\frac{-2y+3}{y-1}$

x와 y를 서로 바꾸면 $\quad y=\frac{-2x+3}{x-1}$

따라서 $y=\frac{x+3}{x+2}$의 역함수는 $y=\frac{-2x+3}{x-1}$이다. … 2단계

즉 $\frac{ax+b}{x-1}=\frac{-2x+3}{x-1}$이므로

$a=-2,\ b=3 \qquad \therefore a+b=1$ … 3단계

답 1

	채점 요소	비율
1단계	주어진 두 함수가 서로 역함수 관계임을 알기	30 %
2단계	$y=\frac{x+3}{x+2}$의 역함수 구하기	50 %
3단계	$a+b$의 값 구하기	20 %

1002 $y=\dfrac{ax+b}{x+1}$의 그래프가 점 $(-2,\ 3)$을 지나므로

$3=\dfrac{-2a+b}{-2+1}$　　$\therefore\ 2a-b=3$　　$\cdots\cdots$ ㉠

또 $y=\dfrac{ax+b}{x+1}$의 역함수의 그래프가 점 $(-2,\ 3)$을 지나면

$y=\dfrac{ax+b}{x+1}$의 그래프는 점 $(3,\ -2)$를 지나므로

$-2=\dfrac{3a+b}{3+1}$　　$\therefore\ 3a+b=-8$　　$\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=-5$

$\therefore\ ab=5$

답 **5**

1003 $(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(2)+(f\circ f^{-1})(3)=f^{-1}(2)+3$

$f^{-1}(2)=k$라 하면 $f(k)=2$이므로

$\dfrac{k+5}{2k+1}=2,$　　$k+5=4k+2$　　$\therefore\ k=1$

$\therefore\ (f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(2)+(f\circ f^{-1})(3)=f^{-1}(2)+3$

$=1+3=4$

답 ⑤

1004 $(g^{-1}\circ f)^{-1}(4)=(f^{-1}\circ g)(4)$

$=f^{-1}(g(4))$

$=f^{-1}(4)$　　$\leftarrow g(4)=\dfrac{2\times 4}{4-2}=4$

$f^{-1}(4)=k$라 하면 $f(k)=4$이므로

$\dfrac{k+4}{k-1}=4,$　　$k+4=4k-4$　　$\therefore\ k=\dfrac{8}{3}$

$\therefore\ (g^{-1}\circ f)^{-1}(4)=f^{-1}(4)=\dfrac{8}{3}$

답 ④

1005 $g(1)=2$에서 $f(2)=1$이므로

$\dfrac{2a-1}{2b+1}=1,$　　$2a-1=2b+1$

$\therefore\ a-b=1$　　$\cdots\cdots$ ㉠

$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(1)=\dfrac{1}{2}$이므로

$\dfrac{a-1}{b+1}=\dfrac{1}{2},$　　$2a-2=b+1$

$\therefore\ 2a-b=3$　　$\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면　　$a=2,\ b=1$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$

$g(3)=k$라 하면 $f(k)=3$이므로

$\dfrac{2k-1}{k+1}=3,$　　$2k-1=3k+3$

$\therefore\ k=-4$

$g(-4)=t$라 하면 $f(t)=-4$이므로

$\dfrac{2t-1}{t+1}=-4,$　　$2t-1=-4t-4$

$\therefore\ t=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ (g\circ g)(3)=g(g(3))=g(-4)=-\dfrac{1}{2}$

답 $-\dfrac{1}{2}$

1006 함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프와 직선 $y=-2x+k$가 한 점에서 만나려면 방정식

$\dfrac{3}{x}=-2x+k$, 즉 $2x^2-kx+3=0$

이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4\times 2\times 3=0$

$k^2=24$　　$\therefore\ k=2\sqrt{6}\ (\because\ k>0)$

답 ④

1007 함수 $y=\dfrac{x+2}{x-1}$의 그래프와 직선 $y=mx+1$이 만나지 않으려면 방정식

$\dfrac{x+2}{x-1}=mx+1$, 즉 $mx^2-mx-3=0$

이 실근을 갖지 않아야 한다.

(i) $m=0$일 때

$0\times x^2-0\times x-3\neq 0$에서 실근을 갖지 않으므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $m\neq 0$일 때

이차방정식 $mx^2-mx-3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-m)^2-4\times m\times(-3)<0$

$m^2+12m<0,$　　$m(m+12)<0$

$\therefore\ -12<m<0$

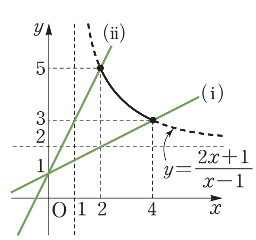
(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$-12<m\le 0$

답 $\boldsymbol{-12<m\le 0}$

1008 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+3}{x-1}$

$=\dfrac{3}{x-1}+2$



이므로 $2\le x\le 4$에서 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=kx+1$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 1)$을 지난다. $\cdots$ 1단계

(i) 직선 $y=kx+1$이 점 $(4,\ 3)$을 지날 때

$3=4k+1$　　$\therefore\ k=\dfrac{1}{2}$

(ii) 직선 $y=kx+1$이 점 $(2,\ 5)$를 지날 때

$5=2k+1$　　$\therefore\ k=2$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 k의 값의 범위는

$\dfrac{1}{2}\le k\le 2$　　$\cdots$ 2단계

따라서 $M=2,\ m=\dfrac{1}{2}$이므로

$M-m=\dfrac{3}{2}$　　$\cdots$ 3단계

답 $\dfrac{3}{2}$

	채점 요소	비율
1단계	함수 $y=\frac{2x+1}{x-1}$의 그래프를 그리고, 직선 $y=kx+1$이 항상 지나는 점의 좌표 구하기	40 %
2단계	k의 값의 범위 구하기	40 %
3단계	$M-m$의 값 구하기	20 %

1009 $f^1(x)=f(x)=\frac{x-1}{x}$에서

$$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f^1(x))=f\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$$=\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}=\frac{1}{1-x}$$

$$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{1-x}-1}{\frac{1}{1-x}}=x$$

$$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=f(f^3(x))=f(x)=\frac{x-1}{x}$$

$\vdots$

즉 음이 아닌 정수 k에 대하여

$$f^n(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x} & (n=3k+1)\\ \frac{1}{1-x} & (n=3k+2)\\ x & (n=3k+3)\end{cases}$$

이때 $50=3\times16+2$이므로

$$f^{50}(x)=\frac{1}{1-x}$$

$$\therefore f^{50}(3)=\frac{1}{1-3}=-\frac{1}{2}$$

답 ②

다른 풀이 $f(x)=\frac{x-1}{x}$에서

$$f^1(3)=f(3)=\frac{2}{3}$$

$$f^2(3)=(f\circ f^1)(3)=f(f^1(3))=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=-\frac{1}{2}$$

$$f^3(3)=(f\circ f^2)(3)=f(f^2(3))=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=3$$

$$f^4(3)=(f\circ f^3)(3)=f(f^3(3))=f(3)=\frac{2}{3}$$

$\vdots$

따라서 $f^n(3)$의 값은 $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{2}$, 3이 이 순서대로 반복된다.

이때 $50=3\times16+2$이므로

$$f^{50}(3)=-\frac{1}{2}$$

1010 $f^1(x)=f(x)=\frac{x+3}{x-1}$

$$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f^1(x))=f\left(\frac{x+3}{x-1}\right)$$

$$=\frac{\frac{x+3}{x-1}+3}{\frac{x+3}{x-1}-1}=x$$

$$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f(x)=\frac{x+3}{x-1}$$

$\vdots$

즉 $f^n(x)=\begin{cases}\frac{x+3}{x-1} & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$이므로

$$f^{1001}(x)=\frac{x+3}{x-1}$$

따라서 $f^{1001}(a)=\frac{a+3}{a-1}=2$에서

$$a+3=2a-2$$

$$\therefore a=5$$

답 5

1011 주어진 그래프에서 $f(6)=0$, $f(0)=6$이므로

$$f^2(6)=(f\circ f^1)(6)=f(f^1(6))=f(0)=6$$

$$f^3(6)=(f\circ f^2)(6)=f(f^2(6))=f(6)=0$$

$$f^4(6)=(f\circ f^3)(6)=f(f^3(6))=f(0)=6$$

$\vdots$

즉 $f^n(6)$의 값은 0, 6이 이 순서대로 반복된다.

이때 $1000=2\times500$이므로

$$f^{1000}(6)=6$$

답 6

다른 풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=-2$이므로

$$f(x)=\frac{a}{x+2}-2$$

로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(0, 6)$, $(6, 0)$을 지나므로

$$6=\frac{a}{2}-2,\ 0=\frac{a}{8}-2 \qquad \therefore a=16$$

$$\therefore f(x)=\frac{16}{x+2}-2$$

$$f^2(x)=(f\circ f^1)(x)=f(f^1(x))=f\left(\frac{16}{x+2}-2\right)$$

$$=\frac{16}{\frac{16}{x+2}-2+2}-2=x$$

즉 $f^n(x)=\begin{cases}\frac{16}{x+2}-2 & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$이므로

$$f^{1000}(x)=x \qquad \therefore f^{1000}(6)=6$$

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 150~153쪽

1012 $\frac{b}{a-1}+\frac{a}{b-1}=\frac{b(b-1)+a(a-1)}{(a-1)(b-1)}$

$$=\frac{a^2+b^2-a-b}{(a-1)(b-1)}$$

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}=\frac{1-b+1-a}{(1-a)(1-b)}=\frac{-a-b+2}{(a-1)(b-1)}$$

$$\therefore \left(\frac{b}{a-1}+\frac{a}{b-1}\right)\div\left(\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}\right)$$

$$=\frac{a^2+b^2-a-b}{(a-1)(b-1)}\div\frac{-a-b+2}{(a-1)(b-1)}$$

$$=\frac{a^2+b^2-a-b}{(a-1)(b-1)}\times\frac{(a-1)(b-1)}{-a-b+2}$$

$$=\frac{a^2+b^2-a-b}{-a-b+2}=\frac{(a+b)^2-2ab-(a+b)}{-(a+b)+2}$$

$$=\frac{3^2-2\times(-4)-3}{-3+2}$$

$$=-14$$

답 **−14**

1013 주어진 등식의 우변을 통분하면

$$\frac{a_1}{x+1}+\frac{a_2}{(x+1)^2}+\frac{a_3}{(x+1)^3}+\frac{a_4}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{a_1(x+1)^3+a_2(x+1)^2+a_3(x+1)+a_4}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{a_1x^3+(3a_1+a_2)x^2+(3a_1+2a_2+a_3)x+a_1+a_2+a_3+a_4}{(x+1)^4}$$

즉

$$\frac{x^3+1}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{a_1x^3+(3a_1+a_2)x^2+(3a_1+2a_2+a_3)x+a_1+a_2+a_3+a_4}{(x+1)^4}$$

가 x에 대한 항등식이므로 양변의 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$1=a_1$, $0=3a_1+a_2$, $0=3a_1+2a_2+a_3$, $1=a_1+a_2+a_3+a_4$

$\therefore a_1=1,\ a_2=-3,\ a_3=3,\ a_4=0$

$\therefore a_1+a_3=4$

답 **4**

다른 풀이 주어진 등식의 양변에 $(x+1)^4$을 곱하면

$x^3+1=a_1(x+1)^3+a_2(x+1)^2+a_3(x+1)+a_4$

이 식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=0$을 대입하면

$1=a_1+a_2+a_3+a_4$ …… ㉠

양변에 $x=-2$를 대입하면

$-7=-a_1+a_2-a_3+a_4$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $8=2a_1+2a_3$

$\therefore a_1+a_3=4$

1014 $$\frac{3x+14}{x+5}-\frac{3x-13}{x-4}=\frac{3(x+5)-1}{x+5}-\frac{3(x-4)-1}{x-4}$$

$$=3-\frac{1}{x+5}-3+\frac{1}{x-4}$$

$$=-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x-4}$$

$$=\frac{-(x-4)+x+5}{(x+5)(x-4)}$$

$$=\frac{9}{(x+5)(x-4)}$$

$\therefore k=9$

답 **9**

1015 $f(x)=4x^2-1=(2x-1)(2x+1)$이므로

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(9)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{19}\right)=\frac{9}{19}$$

답 ①

1016 $$\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+8}}{\frac{1}{n+8}-\frac{1}{n+16}}=\frac{\frac{8}{n(n+8)}}{\frac{8}{(n+8)(n+16)}}$$

$$=\frac{n+16}{n}$$

$$=1+\frac{16}{n}$$

이때 $1+\frac{16}{n}$의 값이 자연수가 되려면 정수 n이 16의 양의 약수이어야 한다.

따라서 정수 n은 1, 2, 4, 8, 16이므로 구하는 합은

$1+2+4+8+16=31$

답 **31**

1017 $ab\neq0$이므로 $a^2-5ab-b^2=0$의 양변을 ab로 나누면

$\frac{a}{b}-5-\frac{b}{a}=0$ $\quad\therefore \frac{a}{b}-\frac{b}{a}=5$

$$\therefore \frac{a^3}{b^3}-\frac{b^3}{a^3}=\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^3+3\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$$

$$=5^3+3\times5=140$$

답 ⑤

1018 $x:y:z=3:1:7$이므로

$x=3k,\ y=k,\ z=7k\ (k\neq0)$

로 놓으면

$$\frac{-x+4y+z}{2x+3y-z}=\frac{-3k+4k+7k}{6k+3k-7k}$$

$$=\frac{8k}{2k}=4$$

답 **4**

1019 $x+\frac{1}{z}=1$에서 $\quad x=1-\frac{1}{z}=\frac{z-1}{z}$

$\frac{1}{3y}+z=1$에서 $\quad \frac{1}{3y}=1-z$

$$\therefore y=\frac{1}{3(1-z)}$$

$$\therefore \frac{1}{3x}+y=\frac{z}{3(z-1)}+\frac{1}{3(1-z)}$$

$$=\frac{z-1}{3(z-1)}$$

$$=\frac{1}{3}\ (\because z\neq1)$$

답 ②

참고| $x+\frac{1}{z}=1$에서 $x\neq0$이므로 $z\neq1$

1020 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\frac{3}{x+5}+2$$

이 함수의 그래프가 점 $(-2,\ k)$를 지나므로

$$k=\frac{3}{-2+5}+2=3$$

답 **3**

1021 $y=\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x-1)+2}{x-1}=\frac{2}{x-1}+1$

ㄱ. $y=\frac{2x+1}{x-2}=\frac{2(x-2)+5}{x-2}=\frac{5}{x-2}+2$

ㄴ. $y=\frac{3x-1}{x-1}=\frac{3(x-1)+2}{x-1}=\frac{2}{x-1}+3$

이므로 $y=\frac{3x-1}{x-1}$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 $y=\frac{x+1}{x-1}$의 그래프와 겹쳐진다.

ㄷ. $y=\frac{2x+3}{x-2}=\frac{2(x-2)+7}{x-2}=\frac{7}{x-2}+2$

ㄹ. $y=-\frac{2x-6}{x-2}=\frac{-2(x-2)+2}{x-2}=\frac{2}{x-2}-2$

이므로 $y=-\frac{2x-6}{x-2}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 $y=\frac{x+1}{x-1}$의 그래프와 겹쳐진다.

이상에서 평행이동에 의하여 $y=\frac{x+1}{x-1}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 **ㄴ, ㄹ**

1022 $y=\frac{ax+1}{x-3}=\frac{a(x-3)+3a+1}{x-3}=\frac{3a+1}{x-3}+a$

이므로

정의역은 $\{x\,|\,x\neq 3$인 실수$\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\neq a$인 실수$\}$

이때 정의역과 치역이 같으므로

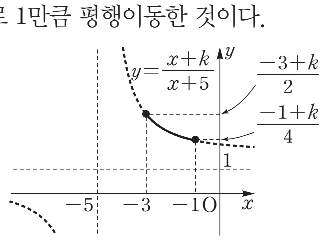
$a=3$

답 ⑤

1023 $y=\frac{x+k}{x+5}=\frac{(x+5)-5+k}{x+5}=\frac{k-5}{x+5}+1$

이므로 $y=\frac{x+k}{x+5}$의 그래프는 $y=\frac{k-5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 정의역이 $\{x\,|\,-3\leq x\leq -1\}$, 공역이 $\{y\,|\,2\leq y\leq 5\}$일 때, 함수가 정의되려면 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$k-5>0$

$\therefore\ k>5$

따라서 치역이 $\left\{y\,\middle|\,\frac{-1+k}{4}\leq y\leq \frac{-3+k}{2}\right\}$이므로

$\frac{-1+k}{4}\geq 2,\ \frac{-3+k}{2}\leq 5$

$\therefore\ 9\leq k\leq 13$

답 **$9\leq k\leq 13$**

참고 | $k=5$이면 $y=1$
$k<5$이면 $y<1$
따라서 $2\leq y\leq 5$를 만족시키지 않으므로 함수가 정의되지 않는다.

1024 $y=\frac{k}{x-1}+5$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=1,\ y=5$

이때 두 점근선의 교점의 좌표가 $(1,\ 2a+1)$이므로

$2a+1=5 \qquad \therefore\ a=2$

따라서 함수 $y=\frac{k}{x-1}+5$의 그래프가 점 $(5,\ 3a)$, 즉 $(5,\ 6)$을 지나므로

$6=\frac{k}{4}+5 \qquad \therefore\ k=4$

답 ④

1025 $y=\frac{3}{x-1}+2$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=1,\ y=2$

따라서 점 Q는 직선 $y=2$, 점 R는 직선 $x=1$ 위의 점이므로

점 P의 좌표를 $\left(a,\ \frac{3}{a-1}+2\right)(a>1)$라 하면

$\mathrm{Q}(a,\ 2),\ \mathrm{R}\left(1,\ \frac{3}{a-1}+2\right)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=\frac{3}{a-1}+2-2=\frac{3}{a-1},\ \overline{\mathrm{PR}}=a-1$

이때 $a>1$에서 $a-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}&=\frac{3}{a-1}+a-1\\&\geq 2\sqrt{\frac{3}{a-1}\times(a-1)}\\&=2\sqrt{3}\ \left(\text{단, 등호는 }\frac{3}{a-1}=a-1\text{일 때 성립}\right)\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}$의 최솟값은 $2\sqrt{3}$이다.

답 ③

1026 $y=\frac{3x-1}{x+k}=\frac{3(x+k)-3k-1}{x+k}=\frac{-3k-1}{x+k}+3$

의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\frac{-3k-1}{x-1+k}+3-2=\frac{-3k-1}{x-1+k}+1$$

이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=1-k,\ y=1$

따라서 점 $(1-k,\ 1)$이 직선 $y=3x$ 위의 점이므로

$1=3(1-k), \qquad 1=3-3k$

$\therefore\ k=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

다른 풀이 $y=\frac{3x-1}{x+k}=\frac{3(x+k)-3k-1}{x+k}=\frac{-3k-1}{x+k}+3$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은 $\quad x=-k,\ y=3$

따라서 $y=\frac{3x-1}{x+k}$의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-k,\ 3)$이다.

점 $(-k,\ 3)$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$(-k+1,\ 3-2)$, 즉 $(-k+1,\ 1)$

이 점이 직선 $y=3x$ 위의 점이므로

$1=3(-k+1) \qquad \therefore k=\frac{2}{3}$

1027 $y=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{a(x+c)-ac+b}{x+c}=\frac{-ac+b}{x+c}+a$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-c,\ y=a$

즉 두 직선 $y=x+2,\ y=-x+4$가 두 점근선의 교점 $(-c,\ a)$를 지나므로

$a=-c+2,\ a=c+4$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=3,\ c=-1$

따라서 $y=\frac{3x+b}{x-1}$의 그래프가 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$2=\frac{-3+b}{-2}, \qquad -4=-3+b \qquad \therefore b=-1$

$\therefore a+b-c=3$ **답 3**

다른 풀이 주어진 함수의 그래프가 두 직선 $y=x+2,\ y=-x+4$의 교점인 점 $(1,\ 3)$에 대하여 대칭이므로 함수의 식을

$y=\frac{k}{x-1}+3\ (k\neq 0)$ $\cdots\cdots$ ㉠

으로 놓으면 ㉠의 그래프가 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$2=\frac{k}{-2}+3 \qquad \therefore k=2$

$k=2$를 ㉠에 대입하면

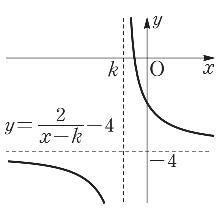
$y=\frac{2}{x-1}+3=\frac{2+3(x-1)}{x-1}=\frac{3x-1}{x-1}$

따라서 $a=3,\ b=-1,\ c=-1$이므로

$a+b-c=3$

1028 $y=\frac{2}{x-k}-4$의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

이 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$k<0$

또 $x=0$일 때 y의 값이 0보다 작거나 같아야 하므로

$-\frac{2}{k}-4\le 0, \qquad -4\le\frac{2}{k}$

양변에 k를 곱하면

$-4k\ge 2\ (\because k<0) \qquad \therefore k\le -\frac{1}{2}$ **답 $k\le -\frac{1}{2}$**

참고 | $k\ge 0$이면 $y=\frac{2}{x-k}-4$의 그래프는 반드시 제1사분면을 지난다.

1029 $y=\frac{ax+b}{x+c}=\frac{a(x+c)-ac+b}{x+c}=\frac{-ac+b}{x+c}+a$

이때 주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1,\ y=-2$이므로 $\quad a=-2,\ c=1$

또 $y=\frac{-ac+b}{x}$의 그래프가 제2사분면과 제4사분면을 지나므로 $\quad -ac+b<0$

$2+b<0 \qquad \therefore b<-2$

ㄱ. $a=-2,\ c=1$이므로 $\quad a+c=-1$ (참)

ㄴ. $a=-2,\ b<-2,\ c=1$이므로 $\quad abc>0$ (참)

ㄷ. [반례] $b=-3$이면

$a^2+b=4-3=1>0$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답 ㄱ, ㄴ**

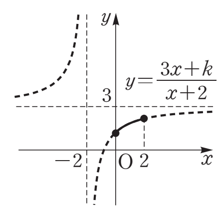
1030 ④ $|k|$의 값이 클수록 그래프는 원점으로부터 멀어진다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다. **답 ④**

1031 $y=\frac{3x+k}{x+2}=\frac{3(x+2)-6+k}{x+2}=\frac{-6+k}{x+2}+3$

(i) $-6+k<0$, 즉 $k<6$일 때

$0\le x\le 2$에서 $y=\frac{3x+k}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

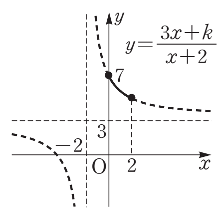


$y<3$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $-6+k>0$, 즉 $k>6$일 때

$0\le x\le 2$에서 $y=\frac{3x+k}{x+2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=0$일 때 최댓값 7을 가지므로

$\frac{k}{2}=7 \qquad \therefore k=14$

(i), (ii)에서 $\quad k=14$ **답 14**

1032 $f^{-1}(1)=2$에서 $f(2)=1$이므로

$\frac{6+2}{-6+a}=1, \qquad 8=-6+a$

$\therefore a=14$

즉 $f(x)=\frac{3x+2}{-3x+14}=\frac{-(3x-14)-16}{3x-14}=-\frac{16}{3x-14}-1$

이므로 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\frac{14}{3},\ y=-1$

또 $g(x)=\frac{bx+3}{x+c}=\frac{b(x+c)-bc+3}{x+c}=\frac{-bc+3}{x+c}+b$이므로

$y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-c,\ y=b$

두 그래프의 점근선이 일치하므로

$$\frac{14}{3}=-c,\ -1=b \qquad \therefore\ b=-1,\ c=-\frac{14}{3}$$

$$\therefore\ a+b+c=\frac{25}{3}$$

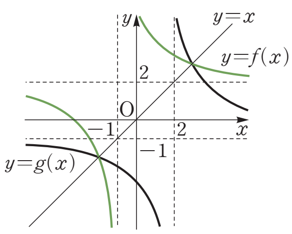
답 ③

1033 $(f\circ g)(x)=x$이므로 $f(x)$와 $g(x)$는 역함수 관계이다.

이때 $f(x)=g(x)$를 만족시키는 실수 x의 값은 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

$$f(x)=\frac{2x+6}{x+1}=\frac{2(x+1)+4}{x+1}$$

$$=\frac{4}{x+1}+2$$



이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.

즉 $\dfrac{2x+6}{x+1}=x$에서 $\qquad 2x+6=x(x+1)$

$$x^2-x-6=0, \qquad (x+2)(x-3)=0$$

$$\therefore\ x=-2 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 $f(x)=g(x)$를 만족시키는 x의 값은 -2, 3이므로 구하는 합은

$$-2+3=1$$

답 ③

다른 풀이 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{2g(x)+6}{g(x)+1}$

즉 $\dfrac{2g(x)+6}{g(x)+1}=x$이므로

$$2g(x)+6=xg(x)+x$$

$$(x-2)g(x)=-x+6 \qquad \therefore\ g(x)=\frac{-x+6}{x-2}$$

따라서 $f(x)=g(x)$에서 $\qquad \dfrac{2x+6}{x+1}=\dfrac{-x+6}{x-2}$

$$(2x+6)(x-2)=(-x+6)(x+1)$$

$$3x^2-3x-18=0, \qquad x^2-x-6=0$$

$$(x+2)(x-3)=0$$

$$\therefore\ x=-2 \text{ 또는 } x=3$$

1034 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(4)=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(4)$

$$=(g^{-1}\circ f)(4)$$

$$=g^{-1}(f(4))$$

$$=g^{-1}(2) \leftarrow f(4)=\frac{4-2}{4-3}=2$$

$g^{-1}(2)=k$라 하면 $g(k)=2$이므로

$$\frac{-2k+2}{k-3}=2, \qquad -2k+2=2k-6$$

$$\therefore\ k=2$$

$$\therefore\ (f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(4)=g^{-1}(2)=2$$

답 **2**

1035 $A\cap B\neq\varnothing$이므로 함수 $y=\dfrac{2x-1}{x}$의 그래프와 직선 $y=ax+1$이 만난다.

따라서 방정식

$$\frac{2x-1}{x}=ax+1, \text{ 즉 } ax^2-x+1=0$$

이 실근을 가져야 한다.

(i) $a=0$일 때

$0\times x^2-x+1=0$에서 $\qquad x=1$

따라서 실근을 가지므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $a\neq0$일 때

이차방정식 $ax^2-x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(-1)^2-4\times a\times1\geq0, \qquad -4a\geq-1$$

$$\therefore\ a\leq\frac{1}{4}$$

그런데 $a\neq0$이므로 $\qquad a<0$ 또는 $0<a\leq\dfrac{1}{4}$

(i), (ii)에서 구하는 a의 값의 범위는

$$a\leq\frac{1}{4}$$

답 $a\leq\dfrac{1}{4}$

1036 $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+2\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\right)$

이므로

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=0, \qquad \frac{a+b+c}{abc}=0$$

$\therefore\ a+b+c=0$ … 1단계

$\therefore\ a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=0$

즉 $a^3+b^3+c^3=3abc$이므로 … 2단계

$\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\dfrac{3abc}{abc}=3$ … 3단계

답 **3**

	채점 요소	비율
1단계	$a+b+c=0$임을 알기	40 %
2단계	$a^3+b^3+c^3=3abc$임을 알기	50 %
3단계	$\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}$의 값 구하기	10 %

1037 $y=\dfrac{-2x-1}{x-a}=\dfrac{-2(x-a)-2a-1}{x-a}$

$$=\frac{-2a-1}{x-a}-2$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=a,\ y=-2$ … 1단계

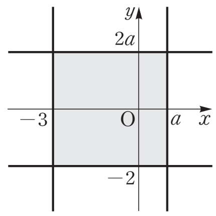
$$y=\frac{2ax-2}{x+3}=\frac{2a(x+3)-6a-2}{x+3}$$

$$=\frac{-6a-2}{x+3}+2a$$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-3,\ y=2a$ … 2단계

이때 $a>0$이므로 두 함수의 그래프의 점근선은 오른쪽 그림과 같고, 색칠한 도형의 넓이가 16이므로



$$(a+3)(2a+2)=16$$
$$2a^2+8a+6=16$$
$$a^2+4a-5=0$$
$$(a+5)(a-1)=0 \qquad \therefore a=1\ (\because a>0)$$ ··· 3단계

답 1

채점 요소	비율
1단계 함수 $y=\dfrac{-2x-1}{x-a}$의 그래프의 점근선의 방정식 구하기	30 %
2단계 함수 $y=\dfrac{2ax-2}{x+3}$의 그래프의 점근선의 방정식 구하기	30 %
3단계 a의 값 구하기	40 %

1038 $f(x)=\dfrac{3x+a}{x+b}$의 그래프가 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$$1=\frac{3+a}{1+b}, \qquad 1+b=3+a$$
$$\therefore a-b=-2 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$에서 $f(0)=\dfrac{1}{2}$이므로

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{2} \qquad \therefore b=2a \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ b=4$ ··· 1단계

따라서 $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+4}$이고, $b-a=2$이므로

$f^{-1}(b-a)=f^{-1}(2)=k$라 하면

$$f(k)=2, \qquad \frac{3k+2}{k+4}=2$$
$$3k+2=2k+8 \qquad \therefore k=6$$
$$\therefore f^{-1}(b-a)=f^{-1}(2)=6$$ ··· 2단계

답 6

채점 요소	비율
1단계 a, b의 값 구하기	50 %
2단계 $f^{-1}(b-a)$의 값 구하기	50 %

1039 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$에서

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x}{1-x}\right)$$
$$=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}$$
$$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=f(f^2(x))=f\left(\frac{x}{1-2x}\right)$$
$$=\frac{\frac{x}{1-2x}}{1-\frac{x}{1-2x}}=\frac{x}{1-3x}$$
$$\vdots$$
$$\therefore f^n(x)=\frac{x}{1-nx}$$ ··· 1단계

따라서 $f^{100}(x)=\dfrac{x}{1-100x}$이므로

$$f^{100}\left(\frac{1}{20}\right)=\frac{\frac{1}{20}}{1-100\times\frac{1}{20}}$$
$$=-\frac{1}{80}$$ ··· 2단계

답 $-\dfrac{1}{80}$

채점 요소	비율
1단계 $f^n(x)$ 구하기	70 %
2단계 $f^{100}\left(\frac{1}{20}\right)$의 값 구하기	30 %

1040 전략 연산 △의 정의를 이용하여 $f(n)$을 구한다.

집합 $A_n\triangle B_n$의 원소의 최솟값은 집합 A_n의 원소 n^2+2n과 B_n의 원소 $2n^2$ 중 작은 값이다.

$n^2+2n-2n^2=-n^2+2n=-n(n-2)$

에서 $n>2$이면 $-n(n-2)<0$이므로

$$n^2+2n<2n^2$$

즉 $n>2$에서 $f(n)=n^2+2n$이므로

$$\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{n^2+2n}=\frac{1}{n(n+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$\therefore \frac{1}{f(3)}+\frac{1}{f(4)}+\frac{1}{f(5)}+\cdots+\frac{1}{f(10)}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)$$
$$=\frac{9}{44}$$

답 $\dfrac{9}{44}$

1041 전략 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{AC}}$의 길이를 점 A의 x좌표에 대한 식으로 나타낸다.

점 A의 좌표를 $\left(p,\ \dfrac{3}{p}\right)$ $(p>0)$이라 하면 점 B의 y좌표는 $\dfrac{3}{p}$이므로 $\dfrac{k}{x}=\dfrac{3}{p}$에서

$$x=\frac{kp}{3} \qquad \therefore \mathrm{B}\left(\frac{kp}{3},\ \frac{3}{p}\right)$$

또 점 C의 x좌표는 p이므로 $\quad \mathrm{C}\left(p,\ \dfrac{k}{p}\right)$

$$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\left|\frac{kp}{3}-p\right|=\left|\frac{(k-3)p}{3}\right|,$$
$$\overline{\mathrm{AC}}=\left|\frac{k}{p}-\frac{3}{p}\right|=\left|\frac{k-3}{p}\right|$$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 24이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}=24$$

$\frac{1}{2}\times\left|\frac{(k-3)p}{3}\right|\times\left|\frac{k-3}{p}\right|=24$

$\frac{|k-3|^2}{6}=24,\qquad |k-3|^2=144$

$k-3=\pm 12$

$\therefore\ k=15\ (\because\ k>0)$ 　**답 15**

1042 전략 $a<0$, $a=0$, $a>0$인 경우로 나누어 $y=\frac{1}{x}-a$, $y=-\frac{1}{x+1}+a$의 그래프를 그려 본다.

$y=\frac{1}{x}-a$의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 $-a$만큼 평행이동한 것이고, $y=-\frac{1}{x+1}+a$의 그래프는 $y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

(i) $a<0$일 때

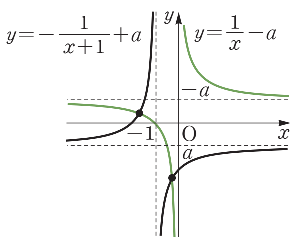
$y=\frac{1}{x}-a$의 그래프와

$y=-\frac{1}{x+1}+a$의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.

이때 x좌표가 음수인 교점의 개수는 2이므로

$h(a)=2$

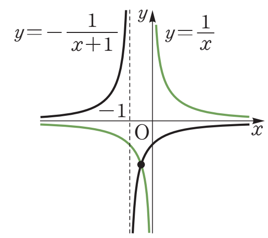


(ii) $a=0$일 때

$y=\frac{1}{x}$의 그래프와

$y=-\frac{1}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 x좌표가 음수인 교점의 개수는 1이므로 　$h(a)=1$



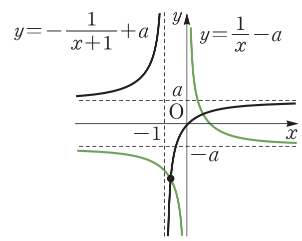
(iii) $a>0$일 때

$y=\frac{1}{x}-a$의 그래프와

$y=-\frac{1}{x+1}+a$의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.

이때 x좌표가 음수인 교점의 개수는 1이므로 　$h(a)=1$



이상에서 　$h(a)=\begin{cases} 2 & (a<0) \\ 1 & (a\ge 0)\end{cases}$

따라서 연속하는 세 정수 a, $a+1$, $a+2$에 대하여

$h(a)+h(a+1)+h(a+2)=5$가 성립하려면

$h(a)=2,\ h(a+1)=2,\ h(a+2)=1$

이어야 하므로

$a+2=0\qquad \therefore\ a=-2$ 　**답 -2**

09 유리함수

10 무리함수

교과서 문제 정복하기

• 본책 155쪽

1043 $3-x\geq 0$이므로 $\quad x\leq 3$ **답** $x\leq 3$

1044 $2x+8\geq 0$, $1-x\geq 0$이므로
$-4\leq x\leq 1$ **답** $-4\leq x\leq 1$

1045 $x-2\geq 0$, $6-x>0$이므로
$2\leq x<6$ **답** $2\leq x<6$

1046
$$\frac{3}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}=\frac{3(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})}$$
$$=\frac{3(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})}{x+3-x}$$
$$=\sqrt{x+3}+\sqrt{x}$$
답 $\sqrt{x+3}+\sqrt{x}$

RPM 비법 노트

분모의 유리화

$a>0$, $b>0$일 때

① $\dfrac{a}{\sqrt{b}}=\dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}}=\dfrac{a\sqrt{b}}{b}$

② $\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$
$=\dfrac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$ (단, $a\neq b$)

1047
$$\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}$$
$$=\frac{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3})}$$
$$=\frac{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3})}{x+1-(x+3)}$$
$$=\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}$$
답 $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}$

1048
$$\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{(\sqrt{x+4}-2)^2}{(\sqrt{x+4}+2)(\sqrt{x+4}-2)}$$
$$=\frac{x+4-4\sqrt{x+4}+4}{x+4-4}$$
$$=\frac{x+8-4\sqrt{x+4}}{x}$$
답 $\dfrac{x+8-4\sqrt{x+4}}{x}$

1049 ㄱ. $y=\sqrt{5}x$는 다항함수이다.
ㄷ. $y=\sqrt{(x+3)^2}$, 즉 $y=|x+3|$은 무리함수가 아니다.
이상에서 무리함수인 것은 ㄴ, ㄹ이다. **답** ㄴ, ㄹ

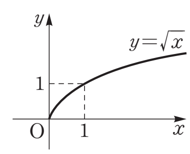
1050 $x-2\geq 0$에서 $\quad x\geq 2$
따라서 주어진 함수의 정의역은
$\{x|x\geq 2\}$ **답** $\{x|x\geq 2\}$

1051 $-2x+6\geq 0$에서 $\quad x\leq 3$
따라서 주어진 함수의 정의역은
$\{x|x\leq 3\}$ **답** $\{x|x\leq 3\}$

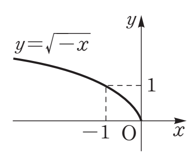
1052 $2x-3\geq 0$에서 $\quad x\geq \dfrac{3}{2}$
따라서 주어진 함수의 정의역은
$\left\{x\middle|x\geq \dfrac{3}{2}\right\}$ **답** $\left\{x\middle|x\geq \dfrac{3}{2}\right\}$

1053 $1-x\geq 0$에서 $\quad x\leq 1$
따라서 주어진 함수의 정의역은
$\{x|x\leq 1\}$ **답** $\{x|x\leq 1\}$

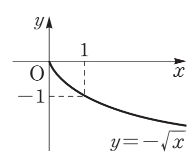
1054 $y=\sqrt{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,
정의역은 $\{x|x\geq 0\}$,
치역은 $\{y|y\geq 0\}$
이다. **답** 풀이 참조



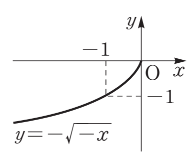
1055 $y=\sqrt{-x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,
정의역은 $\{x|x\leq 0\}$,
치역은 $\{y|y\geq 0\}$
이다. **답** 풀이 참조



1056 $y=-\sqrt{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,
정의역은 $\{x|x\geq 0\}$,
치역은 $\{y|y\leq 0\}$
이다. **답** 풀이 참조



1057 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,
정의역은 $\{x|x\leq 0\}$,
치역은 $\{y|y\leq 0\}$
이다. **답** 풀이 참조

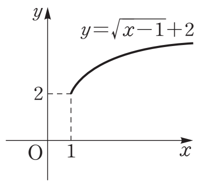


1058 (1) $y=\sqrt{5x}$에 y 대신 $-y$를 대입하면
$-y=\sqrt{5x}$ $\quad\therefore y=-\sqrt{5x}$
(2) $y=\sqrt{5x}$에 x 대신 $-x$를 대입하면
$y=\sqrt{-5x}$
(3) $y=\sqrt{5x}$에 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하면
$-y=\sqrt{-5x}$ $\quad\therefore y=-\sqrt{-5x}$
답 (1) $y=-\sqrt{5x}$ (2) $y=\sqrt{-5x}$ (3) $y=-\sqrt{-5x}$

1059 답 $y=\sqrt{3(x+3)}+2$

1060 $y=\sqrt{x-1}+2$의 그래프는

$y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,



정의역은 $\{x\,|\,x\geq 1\}$,

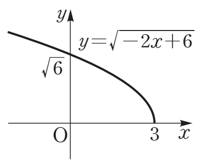
치역은 $\{y\,|\,y\geq 2\}$

이다. 답 풀이 참조

1061 $y=\sqrt{-2x+6}=\sqrt{-2(x-3)}$

따라서 주어진 함수의 그래프는

$y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,



정의역은 $\{x\,|\,x\leq 3\}$,

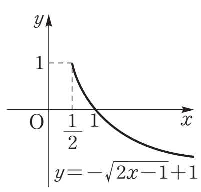
치역은 $\{y\,|\,y\geq 0\}$

이다. 답 풀이 참조

1062 $y=-\sqrt{2x-1}+1=-\sqrt{2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}+1$

따라서 주어진 함수의 그래프는

$y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,



정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\geq \dfrac{1}{2}\right\}$,

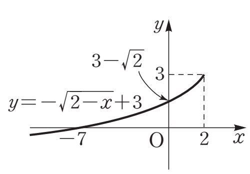
치역은 $\{y\,|\,y\leq 1\}$

이다. 답 풀이 참조

1063 $y=-\sqrt{2-x}+3=-\sqrt{-(x-2)}+3$

따라서 주어진 함수의 그래프는

$y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같고,



정의역은 $\{x\,|\,x\leq 2\}$,

치역은 $\{y\,|\,y\leq 3\}$

이다. 답 풀이 참조

유형 익히기

• 본책 156~162쪽

1064 $6x^2-7x-5\geq 0$이므로

$(2x+1)(3x-5)\geq 0$

$\therefore\ x\leq -\dfrac{1}{2}$ 또는 $x\geq \dfrac{5}{3}$

답 $x\leq -\dfrac{1}{2}$ 또는 $x\geq \dfrac{5}{3}$

1065 $7-2x\geq 0$이므로 $x\leq \dfrac{7}{2}$ …… ㉠

$x+1>0$이므로 $x>-1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$-1<x\leq \dfrac{7}{2}$

따라서 정수 x는 0, 1, 2, 3의 4개이다. 답 ③

1066 $2x+1\geq 0$이므로 $x\geq -\dfrac{1}{2}$ …… ㉠

$1-4x\geq 0$이므로 $x\leq \dfrac{1}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$-\dfrac{1}{2}\leq x\leq \dfrac{1}{4}$

$-\dfrac{1}{2}\leq x\leq \dfrac{1}{4}$일 때, $x-1<0$이므로

$\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}$

$=-(x-1)=-x+1$

답 ②

1067 $x+2\geq 0$이므로 $x\geq -2$ …… ㉠

$8-3x\geq 0$이므로 $x\leq \dfrac{8}{3}$ …… ㉡

$x^2+4x+4\neq 0$이므로 $(x+2)^2\neq 0$

$\therefore\ x\neq -2$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$-2<x\leq \dfrac{8}{3}$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2이므로 구하는 합은

$-1+0+1+2=2$

답 2

1068 $\dfrac{x}{2+\sqrt{x+1}}+\dfrac{x}{2-\sqrt{x+1}}$

$=\dfrac{x(2-\sqrt{x+1})+x(2+\sqrt{x+1})}{(2+\sqrt{x+1})(2-\sqrt{x+1})}$

$=\dfrac{2x-x\sqrt{x+1}+2x+x\sqrt{x+1}}{4-(x+1)}$

$=\dfrac{4x}{3-x}$

답 ④

1069 $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}+\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

$=\dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2+(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}$

$=\dfrac{1}{x+1-(x-1)}$

$\times(x+1-2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}+x-1$

$+x+1+2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}+x-1)$

$=\dfrac{4x}{2}=2x$

답 $2x$

10 무리함수

1070 $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x}-\dfrac{2(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x}-\dfrac{2(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{x+2-x}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x}-(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}$

$=-\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

$=-\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+2}$ 답 ③

1071 $\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}$

$=\dfrac{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})^2}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})}$

$=\dfrac{2x+1-2\sqrt{2x+1}\sqrt{2x-1}+2x-1}{2x+1-(2x-1)}$

$=\dfrac{4x-2\sqrt{4x^2-1}}{2}$

$=2x-\sqrt{4x^2-1}$

$x=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$을 대입하면

$2x-\sqrt{4x^2-1}=2\times\dfrac{\sqrt{7}}{2}-\sqrt{4\times\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)^2-1}$

$=\sqrt{7}-\sqrt{6}$ 답 $\sqrt{7}-\sqrt{6}$

1072 $\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{1+\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}=\dfrac{2}{1-x}$

$x=\sqrt{3}$을 대입하면

$\dfrac{2}{1-x}=\dfrac{2}{1-\sqrt{3}}=\dfrac{2(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{2(1+\sqrt{3})}{-2}=-1-\sqrt{3}$ 답 ②

1073 $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2+(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$

$=\dfrac{x+2\sqrt{x}+1+x-2\sqrt{x}+1}{x-1}$

$=\dfrac{2x+2}{x-1}$

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$을 대입하면

$\dfrac{2x+2}{x-1}=\dfrac{2(\sqrt{2}+1)+2}{(\sqrt{2}+1)-1}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}}=2+2\sqrt{2}$ 답 ⑤

1074 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$

$=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})}$

$=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{x+2-(x+1)}$

$=\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}$ … 1단계

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(30)$

$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+\cdots$

$+(\sqrt{32}-\sqrt{31})$

$=-\sqrt{2}+\sqrt{32}=-\sqrt{2}+4\sqrt{2}$

$=3\sqrt{2}$ … 2단계

답 $3\sqrt{2}$

채점 요소		비율
1단계	$f(x)$를 간단히 하기	60 %
2단계	$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(30)$의 값 구하기	40 %

1075 $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}$

이때 $x+y=(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}$,

$xy=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$이므로

$\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{1}=2\sqrt{2}$ 답 ④

1076 $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})-\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$

$=\dfrac{x-\sqrt{xy}-\sqrt{xy}-y}{x-y}=\dfrac{x-y-2\sqrt{xy}}{x-y}$

이때 $x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=2+\sqrt{3}$,

$y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=2-\sqrt{3}$이므로

$x-y=(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$,

$xy=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$

$\therefore \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{2\sqrt{3}-2\times1}{2\sqrt{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$ 답 ②

1077 $(\sqrt{2x}-\sqrt{2y})^2=2x-2\sqrt{4xy}+2y$

$=2(x+y)-4\sqrt{xy}$

이때 $x+y=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}+\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}=3$,

$xy=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}=1$이므로

$(\sqrt{2x}-\sqrt{2y})^2=2\times3-4\times1=2$

한편 $x>y$에서 $\sqrt{2x}>\sqrt{2y}$이므로 $\quad \sqrt{2x}-\sqrt{2y}>0$

$\therefore \sqrt{2x}-\sqrt{2y}=\sqrt{2}$ 답 $\sqrt{2}$

1078 $y=\sqrt{1-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{1-3(x-2)}+3=\sqrt{-3x+7}+3$

이 함수의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=\sqrt{-3x+7}+3 \qquad \therefore y=-\sqrt{-3x+7}-3$

이 함수의 그래프가 $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프와 일치하므로

$a=-3,\ b=7,\ c=-3$

$\therefore a+b+c=1$ 답 1

1079 $y=\sqrt{2x+6}-1=\sqrt{2(x+3)}-1$

따라서 $y=\sqrt{2x+6}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$a=2,\ b=-3,\ c=-1$

$\therefore a+b+c=-2$ 답 -2

다른 풀이 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{a(x-b)}+c=\sqrt{ax-ab}+c$

이 함수의 그래프가 $y=\sqrt{2x+6}-1$의 그래프와 일치하므로

$a=2,\ -ab=6,\ c=-1 \qquad \therefore a=2,\ b=-3,\ c=-1$

1080 ㄱ. $y=\sqrt{-5x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면 $y=\sqrt{5x}$의 그래프와 겹쳐진다.

ㄹ. $y=-\sqrt{-5x+2}=-\sqrt{-5\left(x-\frac{2}{5}\right)}$

이므로 $y=-\sqrt{-5x+2}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{2}{5}$만큼 평행이동한 후 원점에 대하여 대칭이동하면 $y=\sqrt{5x}$의 그래프와 겹쳐진다.

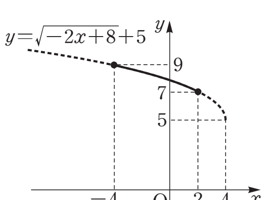
이상에서 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 $y=\sqrt{5x}$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄹ

1081 $y=\sqrt{-2x+8}+5=\sqrt{-2(x-4)}+5$

이므로 $y=\sqrt{-2x+8}+5$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-4\le x\le 2$에서

$y=\sqrt{-2x+8}+5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=-4$일 때 $\qquad y=9$

$x=2$일 때 $\qquad y=7$

즉 구하는 치역은

$\{y\,|\,7\le y\le 9\}$ 답 ③

1082 $y=\sqrt{4x+b}+2$의 그래프가 점 $(2,\ 4)$를 지나므로

$4=\sqrt{8+b}+2, \qquad -\sqrt{8+b}=-2$

$8+b=4 \qquad \therefore b=-4$

$\therefore y=\sqrt{4x-4}+2$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge 1\}$이므로

$a=1$

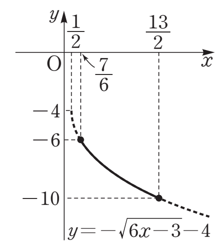
$\therefore a+b=-3$ 답 -3

1083 $y=-\sqrt{6x-3}-4=-\sqrt{6\left(x-\frac{1}{2}\right)}-4$

이므로 $y=-\sqrt{6x-3}-4$의 그래프는 $y=-\sqrt{6x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-10\le y\le -6$에서

$y=-\sqrt{6x-3}-4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$y=-10$일 때 $\qquad x=\frac{13}{2}$

$y=-6$일 때 $\qquad x=\frac{7}{6}$

즉 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,\frac{7}{6}\le x\le \frac{13}{2}\right\}$이므로 정의역에 속하는 정수는 2, 3, 4, 5, 6의 5개이다. 답 5

1084 $y=\frac{3x-2}{x+1}=\frac{3(x+1)-5}{x+1}=-\frac{5}{x+1}+3$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-1,\ y=3$

$\therefore a=-1,\ b=3$

즉 $y=\sqrt{-x+3}+c$의 그래프가 $y=\frac{3x-2}{x+1}$의 그래프의 두 점근선의 교점 $(-1,\ 3)$을 지나므로

$3=\sqrt{-(-1)+3}+c, \qquad 3=2+c$

$\therefore c=1$

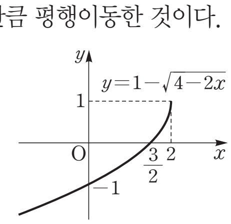
따라서 함수 $y=\sqrt{-x+3}+1$의 정의역은 $\{x\,|\,x\le 3\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\ge 1\}$이다.

답 정의역: $\{x\,|\,x\le 3\}$, 치역: $\{y\,|\,y\ge 1\}$

1085 $y=1-\sqrt{4-2x}=-\sqrt{-2(x-2)}+1$

이므로 $y=1-\sqrt{4-2x}$의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=1-\sqrt{4-2x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 3, 4 사분면을 지난다.

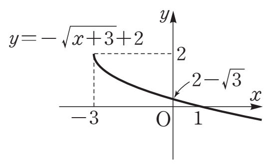


답 ④

10 무리함수

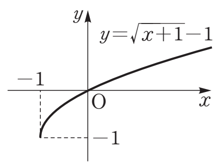
1086 ① $y=-\sqrt{x+3}+2$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=-\sqrt{x+3}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 4사분면을 지난다.



② $y=\sqrt{x+1}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

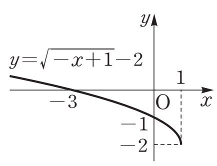
따라서 $y=\sqrt{x+1}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 3사분면을 지난다.



③ $y=\sqrt{-x+1}-2=\sqrt{-(x-1)}-2$

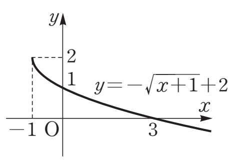
이므로 $y=\sqrt{-x+1}-2$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\sqrt{-x+1}-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2, 3, 4사분면을 지난다.



④ $y=-\sqrt{x+1}+2$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

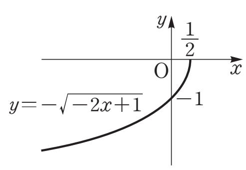
따라서 $y=-\sqrt{x+1}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 4사분면을 지난다.



⑤ $y=-\sqrt{-2x+1}=-\sqrt{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$

이므로 $y=-\sqrt{-2x+1}$의 그래프는 $y=-\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=-\sqrt{-2x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제3, 4사분면을 지난다.



따라서 그래프가 제4사분면을 지나지 않는 것은 ②이다.

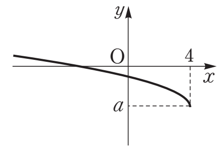
답 ②

1087 $y=\sqrt{-x+4}$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-x+4}+a$ … 1단계

$y=\sqrt{-x+4}+a=\sqrt{-(x-4)}+a$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y=\sqrt{-x+4}+a$의 그래프가 제2, 3, 4사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$일 때 $y<0$이어야 하므로



$\sqrt{4}+a<0$

$\therefore a<-2$ … 2단계

따라서 정수 a의 최댓값은 -3이다. … 3단계

답 -3

채점 요소		비율
1단계	평행이동한 그래프의 식 구하기	30 %
2단계	a의 값의 범위 구하기	50 %
3단계	정수 a의 최댓값 구하기	20 %

1088 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=\sqrt{a(x+2)}-1$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

주어진 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=\sqrt{2a}-1,\quad -\sqrt{2a}=-2,\quad 2a=4$

$\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$y=\sqrt{2(x+2)}-1=\sqrt{2x+4}-1$

따라서 $a=2$, $b=4$, $c=-1$이므로

$abc=-8$

답 -8

1089 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=-\sqrt{a(x-1)}+2$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

주어진 그래프가 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$0=-\sqrt{a(-2-1)}+2,\quad \sqrt{-3a}=2$

$-3a=4\quad \therefore a=-\frac{4}{3}$

$a=-\frac{4}{3}$를 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{-\frac{4}{3}(x-1)}+2=-\sqrt{-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}}+2$

따라서 $a=-\frac{4}{3}$, $b=\frac{4}{3}$, $c=2$이므로

$a+b+c=2$

답 ⑤

1090 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ $(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=\sqrt{a(x-p)}+q=\sqrt{ax-ap}+q$

로 놓을 수 있다.

이 함수가 $y=\sqrt{ax-b}+c$와 같으므로

$b=ap,\ c=q$

ㄱ. 주어진 그래프에서 $p>0$이므로

$ap<0 \qquad \therefore\ b<0$ (참)

ㄴ. 주어진 그래프에서 $q<0$이므로

$c<0 \qquad \therefore\ ac>0$ (거짓)

ㄷ. $x=0$에서의 함숫값이 0보다 크므로

$\sqrt{-b}+c>0$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. **답** ④

다른 풀이 $y=\sqrt{ax-b}+c=\sqrt{a\left(x-\dfrac{b}{a}\right)}+c$이므로

$p=\dfrac{b}{a},\ q=c$

주어진 그래프에서 $p>0,\ q<0$이므로

$a<0,\ b<0,\ c<0$

1091 ① $y=\sqrt{2x+6}-3$에 $y=0$을 대입하면

$0=\sqrt{2x+6}-3, \qquad -\sqrt{2x+6}=-3$

$2x+6=9 \qquad \therefore\ x=\dfrac{3}{2}$

따라서 그래프는 점 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$을 지난다.

② $2x+6\ge 0$에서 $\qquad x\ge -3$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge -3\}$이다.

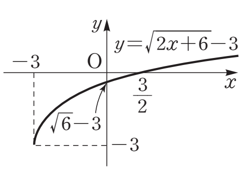
③ $\sqrt{2x+6}\ge 0$에서 $\qquad \sqrt{2x+6}-3\ge -3$

따라서 주어진 함수의 치역은 $\{y\,|\,y\ge -3\}$이다.

④ $y=\sqrt{2x+6}-3=\sqrt{2(x+3)}-3$

이므로 $y=\sqrt{2x+6}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=\sqrt{2x+6}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지나지 않는다.



따라서 옳은 것은 ⑤이다. **답** ⑤

1092 ㄱ. $x+b\ge 0$에서 $\qquad x\ge -b$

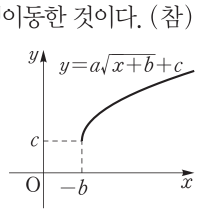
따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge -b\}$이다.

또 $a<0$이면 $a\sqrt{x+b}\le 0$이므로 $\qquad a\sqrt{x+b}+c\le c$

따라서 주어진 함수의 치역은 $\{y\,|\,y\le c\}$이다. (참)

ㄴ. $y=a\sqrt{x+b}+c$의 그래프는 $y=a\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-b$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다. (참)

ㄷ. $a>0,\ b<0,\ c>0$이면 $y=a\sqrt{x+b}+c$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지나지 않는다. (거짓)



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ③

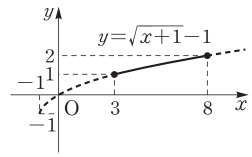
1093 $y=\sqrt{x+1}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $3\le x\le 8$에서 $y=\sqrt{x+1}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=8$일 때 최댓값 2,

$x=3$일 때 최솟값 1

을 갖는다.



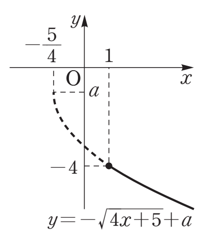
즉 $M=2,\ m=1$이므로

$M+m=3$ **답** ③

1094 $y=-\sqrt{4x+5}+a=-\sqrt{4\left(x+\dfrac{5}{4}\right)}+a$

이므로 $y=-\sqrt{4x+5}+a$의 그래프는 $y=-\sqrt{4x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{5}{4}$만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $x\ge 1$에서 $y=-\sqrt{4x+5}+a$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 $x=1$일 때 최댓값 -4를 가지므로

$-3+a=-4 \qquad \therefore\ a=-1$

따라서 $y=-\sqrt{4x+5}-1$의 그래프가 점 $(b,\ -6)$을 지나므로

$-6=-\sqrt{4b+5}-1$

$\sqrt{4b+5}=5, \qquad 4b+5=25$

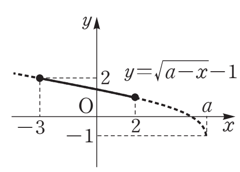
$\therefore\ b=5$

$\therefore\ ab=-5$ **답** -5

1095 $y=\sqrt{a-x}-1=\sqrt{-(x-a)}-1$

이므로 $y=\sqrt{a-x}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $-3\le x\le 2$에서 $y=\sqrt{a-x}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 $x=-3$일 때 최댓값 2를 가지므로

$\sqrt{a+3}-1=2, \qquad \sqrt{a+3}=3$

$a+3=9 \qquad \therefore\ a=6$

따라서 $y=\sqrt{6-x}-1$은 $x=2$일 때 최솟값

$\sqrt{6-2}-1=1$

을 갖는다. **답** 1

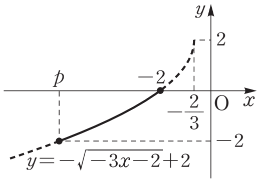
1096 $y=-\sqrt{-3x-2}+2=-\sqrt{-3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)}+2$

이므로 $y=-\sqrt{-3x-2}+2$의 그래프는 $y=-\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{2}{3}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $p\le x\le -2$에서

$y=-\sqrt{-3x-2}+2$의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.



즉 $x=-2$일 때 최댓값 0을 가지므로 $\quad q=0$

$x=p$일 때 최솟값 -2를 가지므로

$-\sqrt{-3p-2}+2=-2, \qquad -\sqrt{-3p-2}=-4$

$-3p-2=16 \qquad \therefore p=-6$

$\therefore p-q=-6$

답 -6

1097 함수 $y=3-\sqrt{4x+2}$의 치역이 $\{y\,|\,y\le 3\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\le 3\}$이다.

$y=3-\sqrt{4x+2}$에서 $\qquad y-3=-\sqrt{4x+2}$

양변을 제곱하면 $\qquad (y-3)^2=4x+2$

$\therefore x=\frac{1}{4}(y-3)^2-\frac{1}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{1}{4}(x-3)^2-\frac{1}{2}\ (x\le 3)$

따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=-3$, $c=-\frac{1}{2}$, $d=3$이므로

$abcd=\frac{9}{8}$

답 $\frac{9}{8}$

1098 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나므로

$2=\sqrt{a+b} \qquad \therefore a+b=4$ …… ㉠

$y=f^{-1}(x)$의 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나므로

$f^{-1}(1)=2 \qquad \therefore f(2)=1$

즉 $\sqrt{2a+b}=1$이므로

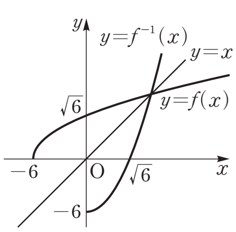
$2a+b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\qquad a=-3$, $b=7$

$\therefore a-b=-10$

답 -10

1099 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다. … 1단계



$\sqrt{x+6}=x$의 양변을 제곱하면 $\qquad x+6=x^2$

$x^2-x-6=0, \qquad (x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=3\ (\because x\ge 0)$ … 2단계

따라서 교점의 좌표가 $(3, 3)$이므로

$a=3$, $b=3$

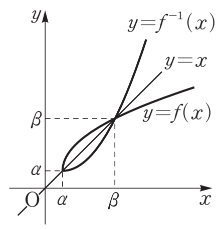
$\therefore a+b=6$ … 3단계

답 6

	채점 요소	비율
1단계	$y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점임을 알기	30 %
2단계	교점의 x좌표 구하기	50 %
3단계	$a+b$의 값 구하기	20 %

참고| 함수 $f(x)=\sqrt{x+6}$의 치역이 $\{y\,|\,y\ge 0\}$이므로 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge 0\}$이다.
따라서 두 그래프의 교점의 x좌표는 0 이상이다.

1100 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{3x+a}+1=x$에서 $\qquad \sqrt{3x+a}=x-1$

양변을 제곱하면 $\qquad 3x+a=x^2-2x+1$

$\therefore x^2-5x+1-a=0$ …… ㉠

이 이차방정식의 두 근을 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$라 하면 두 교점의 좌표는 (α, α), (β, β)이고 두 교점 사이의 거리가 $3\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=3\sqrt{2}$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=9$ …… ㉡

이때 이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=1-a$

㉡에서 $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=9$이므로

$5^2-4(1-a)=9, \qquad 4a=-12$

$\therefore a=-3$

답 ①

1101 $(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(3)=f^{-1}(3)$

$f^{-1}(3)=k$라 하면 $f(k)=3$이므로

$\sqrt{2k-3}=3, \qquad 2k-3=9$

$\therefore k=6$

$\therefore (f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(3)=f^{-1}(3)=6$

답 ⑤

1102 $(f\circ g)(x)=x$에서 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로

$(g\circ g\circ f)(2)=g(2)$

$g(2)=k$라 하면 $f(k)=2$이므로

$\sqrt{4k+1}=2, \qquad 4k+1=4$

$\therefore k=\frac{3}{4}$

$\therefore (g\circ g\circ f)(2)=g(2)=\frac{3}{4}$

답 $\frac{3}{4}$

1103 $(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(3)$

$=(g\circ g^{-1}\circ f^{-1}\circ g)(3)$

$=(f^{-1}\circ g)(3)$

$=f^{-1}(g(3))$

$=f^{-1}(3) \quad \leftarrow g(3)=\frac{2\times 3-3}{3-2}=3$

$f^{-1}(3)=k$라 하면 $f(k)=3$이므로

$\sqrt{3k-5}+1=3, \quad \sqrt{3k-5}=2$

$3k-5=4 \quad \therefore k=3$

$\therefore (g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g)(3)=f^{-1}(3)=3$ 답 **3**

1104 $(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=9$에서 $\quad (f\circ f)^{-1}(a)=9$

$\therefore (f\circ f)(9)=a$

이때 $f(9)=-\sqrt{9}+1=-2$, $f(-2)=\sqrt{1-(-2)}=\sqrt{3}$이므로

$a=(f\circ f)(9)=f(f(9))=f(-2)=\sqrt{3}$ 답 $\sqrt{3}$

다른 풀이 $(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=9$에서

$f^{-1}(f^{-1}(a))=9$

즉 $f^{-1}(a)=f(9)=-\sqrt{9}+1=-2$이므로

$a=f(-2)=\sqrt{1-(-2)}=\sqrt{3}$

1105 $y=\dfrac{ax+b}{cx+1}=\dfrac{\frac{a}{c}(cx+1)-\frac{a}{c}+b}{cx+1}$

$=\dfrac{-\frac{a}{c}+b}{cx+1}+\dfrac{a}{c}$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\dfrac{1}{c}$, $y=\dfrac{a}{c}$

주어진 그래프에서 $-\dfrac{1}{c}>0$, $\dfrac{a}{c}>0$이므로

$a<0$, $c<0$

또 주어진 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표가 양수이므로

$b>0$

$y=\sqrt{ax+b}-c=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}-c$

이므로 $y=\sqrt{ax+b}-c$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 $-c$만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a<0$, $-\dfrac{b}{a}>0$, $-c>0$이므로 $y=\sqrt{ax+b}-c$의 그래프의 개형은 ②이다. 답 ②

1106 $y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}+c$

이므로 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

주어진 그래프에서 $a>0$, $-\dfrac{b}{a}>0$, $c<0$이므로

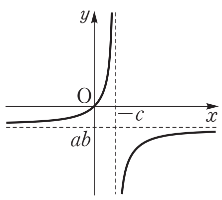
$a>0$, $b<0$, $c<0$

$y=\dfrac{abx}{x+c}=\dfrac{ab(x+c)-abc}{x+c}=\dfrac{-abc}{x+c}+ab$

이므로 그래프의 점근선의 방정식은

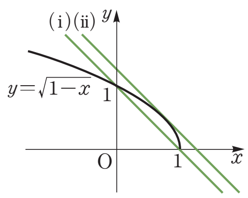
$x=-c$, $y=ab$

이때 $-abc<0$, $-c>0$, $ab<0$이고 $x=0$일 때 $y=0$이므로 함수 $y=\dfrac{abx}{x+c}$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=\dfrac{abx}{x+c}$의 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다. 답 ②

1107 $y=\sqrt{1-x}=\sqrt{-(x-1)}$



이므로 $y=\sqrt{1-x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.

(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(1, 0)$을 지날 때

$0=-1+k \quad \therefore k=1$

(ii) $y=\sqrt{1-x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 접할 때

$\sqrt{1-x}=-x+k$의 양변을 제곱하면

$1-x=x^2-2kx+k^2$

$\therefore x^2-(2k-1)x+k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2k-1)\}^2-4(k^2-1)=0$

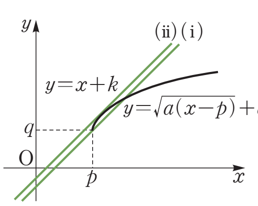
$-4k+5=0 \quad \therefore k=\dfrac{5}{4}$

(i), (ii)에서 구하는 k의 값의 범위는

$1\le k<\dfrac{5}{4}$ 답 $1\le k<\dfrac{5}{4}$

RPM 비법 노트

무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 위치 관계는 다음과 같다.

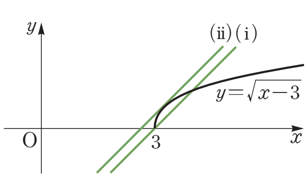


① 직선 $y=x+k$가 (i)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있는 경우
⇨ 서로 다른 두 점에서 만난다.

② 직선 $y=x+k$가 (ii)이거나 (i)의 아래쪽에 있는 경우
⇨ 한 점에서 만난다.

③ 직선 $y=x+k$가 (ii)의 위쪽에 있는 경우
⇨ 만나지 않는다.

1108 $y=\sqrt{x-3}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=x+a$는 기울기가 1이고 y절편이 a이다.



(i) 직선 $y=x+a$가 점 $(3,\ 0)$을 지날 때

$0=3+a \qquad \therefore\ a=-3$

(ii) $y=\sqrt{x-3}$의 그래프와 직선 $y=x+a$가 접할 때

$\sqrt{x-3}=x+a$의 양변을 제곱하면

$x-3=x^2+2ax+a^2$

$\therefore\ x^2+(2a-1)x+a^2+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2a-1)^2-4(a^2+3)=0$

$-4a-11=0 \qquad \therefore\ a=-\frac{11}{4}$

(i), (ii)에서 한 점에서 만나도록 하는 a의 값의 범위는

$a<-3$ 또는 $a=-\frac{11}{4}$

따라서 한 점에서 만나도록 하는 a의 값이 아닌 것은 ⑤이다.

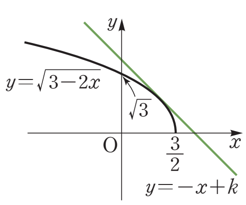
답 ⑤

참고 | ⑤ $a=-\frac{5}{2}$이면 만나지 않는다.

1109 $y=\sqrt{3-2x}=\sqrt{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)}$

이므로 $y=\sqrt{3-2x}$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-x+k$는 기울기가 -1이고 y절편이 k이다.

이때 $n(A\cap B)=0$이므로 $y=\sqrt{3-2x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 만나지 않아야 한다.



$y=\sqrt{3-2x}$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 접할 때,

$\sqrt{3-2x}=-x+k$의 양변을 제곱하면

$3-2x=x^2-2kx+k^2$

$\therefore\ x^2-2(k-1)x+k^2-3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-(k^2-3)=0$

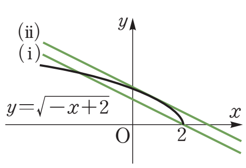
$-2k+4=0 \qquad \therefore\ k=2$

따라서 구하는 k의 값의 범위는

$k>2$

답 $k>2$

1110 $y=\sqrt{-x+2}$
$=\sqrt{-(x-2)}$



이므로 $y=\sqrt{-x+2}$의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$는 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 y절편이 k이다.

(i) 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$가 점 $(2,\ 0)$을 지날 때

$0=-1+k \qquad \therefore\ k=1$

(ii) $y=\sqrt{-x+2}$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$가 접할 때

$\sqrt{-x+2}=-\frac{1}{2}x+k$의 양변을 제곱하면

$-x+2=\frac{1}{4}x^2-kx+k^2$

$\therefore\ x^2-4(k-1)x+4k^2-8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-2(k-1)\}^2-(4k^2-8)=0$

$-8k+12=0 \qquad \therefore\ k=\frac{3}{2}$

(i), (ii)에서

$$f(k)=\begin{cases}0\ \left(k>\frac{3}{2}\right)\\ 1\ \left(k<1 \text{ 또는 } k=\frac{3}{2}\right)\\ 2\ \left(1\le k<\frac{3}{2}\right)\end{cases}$$

$\therefore\ f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)+f\left(\frac{3}{2}\right)+f(2)=1+2+1+0=4$

답 4

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 163~165쪽

1111 $6-x\ge0$이므로 $\qquad x\le6$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$x^2-x-2\ge0$이므로 $\qquad (x+1)(x-2)\ge0$

$\therefore\ x\le-1$ 또는 $x\ge2$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

$x+3>0$이므로 $\qquad x>-3$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $\qquad -3<x\le-1$ 또는 $2\le x\le6$

따라서 정수 x는 $-2,\ -1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$의 7개이다.

답 ③

1112 모든 실수 x에 대하여 $\frac{1}{\sqrt{kx^2+kx+1}}$의 값이 실수가 되려면 $kx^2+kx+1>0$이어야 한다.

(i) $k=0$일 때

$0\times x^2+0\times x+1>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 부등식이 성립한다.

(ii) $k\ne0$일 때

$k>0$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

이어야 하고 이차방정식 $kx^2+kx+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4\times k\times1<0$

$k^2-4k<0, \qquad k(k-4)<0$

$\therefore\ 0<k<4$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\qquad 0<k<4$

(i), (ii)에서 구하는 k의 값의 범위는

$0\le k<4$

답 $0\le k<4$

1113 $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+6}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x+9}}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+3}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+3})(\sqrt{x}-\sqrt{x+3})}$

$+\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+6}}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+6})(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+6})}$

$+\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x+9}}{(\sqrt{x+6}+\sqrt{x+9})(\sqrt{x+6}-\sqrt{x+9})}$

$=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+3}}{x-(x+3)}+\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+6}}{x+3-(x+6)}+\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x+9}}{x+6-(x+9)}$

$=-\dfrac{1}{3}(\sqrt{x}-\sqrt{x+3})-\dfrac{1}{3}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+6})$

$-\dfrac{1}{3}(\sqrt{x+6}-\sqrt{x+9})$

$=-\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+9}}{3}$

$=\dfrac{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}{3}$ 답 ②

1114 $\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}-\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}=\dfrac{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x})^2}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}$

$=\dfrac{1+x-(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}$

$=\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$

$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$를 대입하면

$\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=2$ 답 **2**

1115 $y=-\sqrt{x-k}+1$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=-\sqrt{-x-k}+1$

$\therefore y=\sqrt{-x-k}-1$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\sqrt{-(x+1)-k}-1=\sqrt{-x-1-k}-1$

이 식에 $y=0$을 대입하면

$0=\sqrt{-x-1-k}-1$

$1=\sqrt{-x-1-k}$, $\quad 1=-x-1-k$

$\therefore x=-k-2$

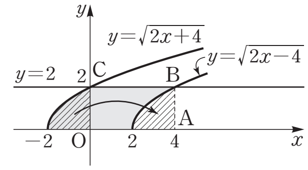
따라서 그래프의 x절편이 $-k-2$이므로

$-k-2>0 \qquad \therefore k<-2$ 답 $\boldsymbol{k<-2}$

1116 $y=\sqrt{2x-4}=\sqrt{2(x-4)+4}$

이므로 $y=\sqrt{2x-4}$의 그래프는 $y=\sqrt{2x+4}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\sqrt{2x+4}$, $y=\sqrt{2x-4}$의 그래프와 직선 $y=2$는 오른쪽 그림과 같고, 빗금 친 두 부분의 넓이는 서로 같다.



즉 구하는 넓이는 직사각형 OABC의 넓이와 같으므로

$4\times2=8$ 답 8

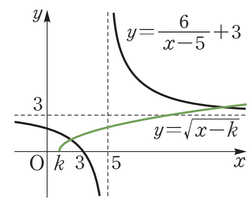
1117 $y=\dfrac{6}{x-5}+3$의 그래프는 $y=\dfrac{6}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

또 $y=\sqrt{x-k}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

$y=\dfrac{6}{x-5}+3$에 $y=0$을 대입하면

$0=\dfrac{6}{x-5}+3 \qquad \therefore x=3$

따라서 곡선 $y=\dfrac{6}{x-5}+3$의 x절편은 3이고, 두 곡선 $y=\dfrac{6}{x-5}+3$, $y=\sqrt{x-k}$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



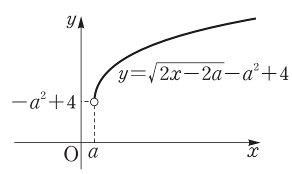
$k\le3$

즉 k의 최댓값은 3이다. 답 ①

1118 $y=\sqrt{2x-2a}-a^2+4=\sqrt{2(x-a)}-a^2+4$

이므로 $y=\sqrt{2x-2a}-a^2+4$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $-a^2+4$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\sqrt{2x-2a}-a^2+4$ $(x>a)$의 그래프가 오직 하나의 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 제1사분면만 지나야 하므로



$a\ge0$, $-a^2+4\ge0$

$-a^2+4\ge0$에서 $\quad (a+2)(a-2)\le0$

$\therefore 0\le a\le2$ $(\because a\ge0)$

따라서 a의 최댓값은 2이다. 답 ①

1119 ① $9-3x\ge0$에서 $\qquad x\le3$

따라서 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x\le3\}$이다.

또 $\sqrt{9-3x}\ge0$에서 $\qquad \sqrt{9-3x}-1\ge-1$

따라서 주어진 함수의 치역은 $\{y|y\ge-1\}$이다.

② $y=\sqrt{9-3x}-1$에 $x=0$을 대입하면

$y=\sqrt{9}-1=2$

즉 $y=\sqrt{9-3x}-1$의 그래프는 점 $(0, 2)$를 지난다.

③ $y=\sqrt{9-3x}-1=\sqrt{-3(x-3)}-1$

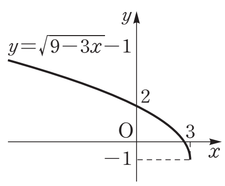
이므로 $y=\sqrt{9-3x}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{-3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=\sqrt{9-3x}-1$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y=\sqrt{3x+9}-1$$

따라서 $y=\sqrt{9-3x}-1$의 그래프는 $y=\sqrt{3x+9}-1$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다.

⑤ $y=\sqrt{9-3x}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면을 지난다.

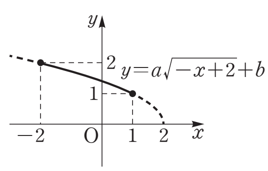


따라서 옳지 않은 것은 ④이다. 답 ④

1120 $y=a\sqrt{-x+2}+b=a\sqrt{-(x-2)}+b$

이므로 $y=a\sqrt{-x+2}+b$의 그래프는 $y=a\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a>0$이므로 $-2\le x\le 1$에서 $y=a\sqrt{-x+2}+b$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉 $x=-2$일 때 최댓값 2, $x=1$일 때 최솟값 1을 가지므로

$2a+b=2,\ a+b=1$

$\therefore\ a=1,\ b=0 \qquad \therefore\ b-a=-1$ 답 -1

1121 $f(1)=5$이므로 $\quad 5=\sqrt{a+b}$

$\therefore\ a+b=25$ …… ㉠

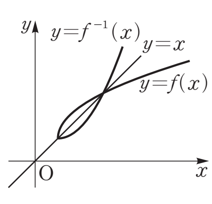
$g(2)=4$에서 $f(4)=2$이므로 $\quad 2=\sqrt{4a+b}$

$\therefore\ 4a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=-7,\ b=32$

$\therefore\ b-a=39$ 답 39

1122 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{2x-2}+1=x$에서 $\quad \sqrt{2x-2}=x-1$

양변을 제곱하면 $\quad 2x-2=x^2-2x+1$

$x^2-4x+3=0, \quad (x-1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=3$

따라서 두 교점의 좌표는 $(1,\ 1),\ (3,\ 3)$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

1123 $(g\circ f^{-1})^{-1}(3)=(f\circ g^{-1})(3)=f(g^{-1}(3))$

$g^{-1}(3)=a$라 하면 $g(a)=3$이므로

$\sqrt{2a-1}=3, \qquad 2a-1=9 \qquad \therefore\ a=5$

$\therefore\ (g\circ f^{-1})^{-1}(3)=f(g^{-1}(3))=f(5)$

$=\dfrac{5+1}{5-1}=\dfrac{3}{2}$ 답 $\dfrac{3}{2}$

1124 $y=\dfrac{a}{x+b}+c$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-b,\ y=c$

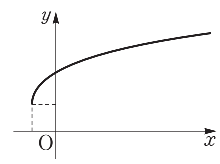
주어진 그래프에서 $a>0,\ -b<0,\ c>0$이므로

$a>0,\ b>0,\ c>0$

$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}+c$

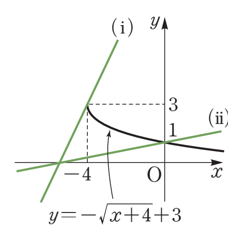
이므로 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\dfrac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a>0,\ -\dfrac{b}{a}<0,\ c>0$이므로 함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 제1, 2사분면을 지난다. 답 ①

1125 $y=-\sqrt{x+4}+3$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=mx+6m$, 즉 $y=m(x+6)$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-6,\ 0)$을 지난다.



(i) 직선 $y=mx+6m$이 점 $(-4,\ 3)$을 지날 때

$3=-4m+6m \qquad \therefore\ m=\dfrac{3}{2}$

(ii) 직선 $y=mx+6m$이 점 $(0,\ 1)$을 지날 때

$1=6m \qquad \therefore\ m=\dfrac{1}{6}$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$\dfrac{1}{6}<m\le\dfrac{3}{2}$ 답 $\dfrac{1}{6}<m\le\dfrac{3}{2}$

1126 $y=\dfrac{-2x+1}{x-3}=\dfrac{-2(x-3)-5}{x-3}=-\dfrac{5}{x-3}-2$

이므로 $y=\dfrac{-2x+1}{x-3}$의 그래프는 $y=-\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore\ a=-5,\ b=3,\ c=-2$ … 1단계

따라서 함수 $y=-\sqrt{-5x+3}-2$의 정의역은 $\left\{x\,\middle|\,x\le\dfrac{3}{5}\right\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\le-2\}$이다. … 2단계

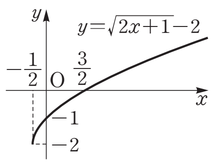
답 정의역: $\left\{x\,\middle|\,x\le\dfrac{3}{5}\right\}$, 치역: $\{y\,|\,y\le-2\}$

채점 요소		비율
1단계	a, b, c의 값 구하기	50 %
2단계	함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 정의역과 치역 구하기	50 %

1127 $y=\sqrt{2x+1}-2=\sqrt{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}-2$

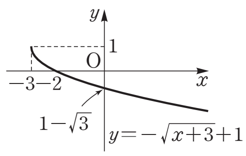
이므로 $y=\sqrt{2x+1}-2$의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

즉 $y=\sqrt{2x+1}-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 3, 4사분면을 지난다. … 1단계



$y=-\sqrt{x+3}+1$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

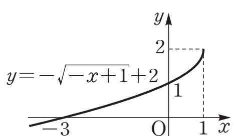
즉 $y=-\sqrt{x+3}+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2, 3, 4사분면을 지난다. … 2단계



$y=-\sqrt{-x+1}+2=-\sqrt{-(x-1)}+2$

이므로 $y=-\sqrt{-x+1}+2$의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

즉 $y=-\sqrt{-x+1}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 3사분면을 지난다. … 3단계



따라서 세 함수의 그래프가 모두 지나는 사분면은 제3사분면이다. … 4단계

답 **제3사분면**

채점 요소		비율
1단계	$y=\sqrt{2x+1}-2$의 그래프가 지나는 사분면 구하기	30 %
2단계	$y=-\sqrt{x+3}+1$의 그래프가 지나는 사분면 구하기	30 %
3단계	$y=-\sqrt{-x+1}+2$의 그래프가 지나는 사분면 구하기	30 %
4단계	세 함수의 그래프가 모두 지나는 사분면 구하기	10 %

1128 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$ $(a>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$y=-\sqrt{a(x+3)}+2$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

주어진 그래프가 점 $(0, -1)$을 지나므로

$-1=-\sqrt{3a}+2,\quad \sqrt{3a}=3,\quad 3a=9$

$\therefore a=3$ … 1단계

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$y=-\sqrt{3(x+3)}+2=-\sqrt{3x+9}+2$

따라서 $b=9$, $c=2$이므로 … 2단계

$a+b+c=14$ … 3단계

답 **14**

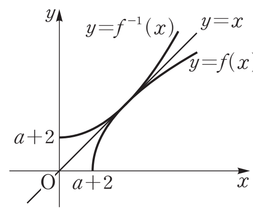
채점 요소		비율
1단계	a의 값 구하기	60 %
2단계	b, c의 값 구하기	30 %
3단계	$a+b+c$의 값 구하기	10 %

1129 $y=3\sqrt{x-2}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=3\sqrt{x-a-2}$

$\therefore f(x)=3\sqrt{x-a-2}$ … 1단계

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 접하면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$도 접한다. … 2단계



$3\sqrt{x-a-2}=x$의 양변을 제곱하면

$9(x-a-2)=x^2$

$\therefore x^2-9x+9a+18=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-9)^2-4(9a+18)=0$

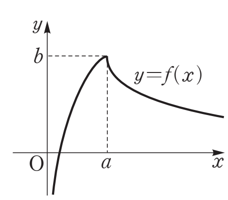
$-36a+9=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}$ … 3단계

답 $\mathbf{\frac{1}{4}}$

채점 요소		비율
1단계	평행이동한 그래프의 식 구하기	20 %
2단계	$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 접함을 알기	30 %
3단계	a의 값 구하기	50 %

1130 전략 주어진 조건을 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=\alpha$, $y=\beta$의 위치 관계를 파악한다.

$y=-\sqrt{x-a}+b$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



한편 방정식 $\{f(x)-\alpha\}\{f(x)-\beta\}=0$에서

$f(x)=\alpha$ 또는 $f(x)=\beta$ …… ㉠

이때 조건 ㈎에서 ㉠을 만족시키는 실수 x의 값은 α, β, γ뿐이고 조건 ㈏에서 $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$이므로 $\alpha<\beta$라 하면

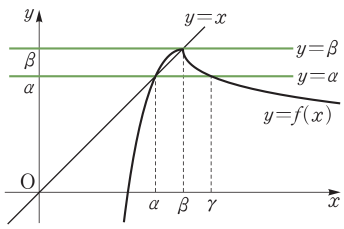
$f(x)=\alpha$의 실근은 α, γ,

$f(x)=\beta$의 실근은 β

이어야 한다.

즉 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\alpha$는 두 점 $(\alpha,\ \alpha)$, $(\gamma,\ \alpha)$에서 만나고, $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\beta$는 한 점 $(\beta,\ \beta)$에서 만난다.

따라서 다음 그림과 같이 점 $(a,\ b)$는 점 $(\beta,\ \beta)$와 일치해야 한다.



$$\therefore\ f(x)=\begin{cases}-(x-\beta)^2+\beta & (x\le\beta)\\ -\sqrt{x-\beta}+\beta & (x>\beta)\end{cases}$$

이때 α는 $x<\beta$에서 함수 $y=-(x-\beta)^2+\beta$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표이므로 $-(x-\beta)^2+\beta=x$에서

$(x-\beta)^2+x-\beta=0,\qquad (x-\beta+1)(x-\beta)=0$

$\therefore\ x=\beta-1$ 또는 $x=\beta$

$\therefore\ \alpha=\beta-1$

또 점 $(\gamma,\ \alpha)$, 즉 $(\gamma,\ \beta-1)$은 함수 $y=-\sqrt{x-\beta}+\beta$의 그래프 위의 점이므로

$\beta-1=-\sqrt{\gamma-\beta}+\beta,\qquad \sqrt{\gamma-\beta}=1$

$\gamma-\beta=1\qquad \therefore\ \gamma=\beta+1$

이때 $\alpha+\beta+\gamma=15$이므로

$(\beta-1)+\beta+(\beta+1)=15,\qquad 3\beta=15\qquad \therefore\ \beta=5$

따라서 $\alpha=\beta-1=4$이고 $f(x)=\begin{cases}-(x-5)^2+5 & (x\le5)\\ -\sqrt{x-5}+5 & (x>5)\end{cases}$이므로

$f(\alpha+\beta)=f(4+5)=f(9)$

$\quad=-\sqrt{9-5}+5=3$

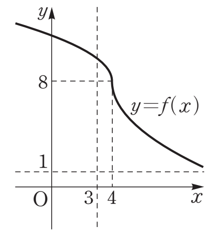
답 ③

1131 전략 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

$$y=\frac{x+4}{x-3}=\frac{(x-3)+7}{x-3}=\frac{7}{x-3}+1$$

이므로 $y=\dfrac{x+4}{x-3}$의 그래프는 $y=\dfrac{7}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 f의 치역이 $\{y\,|\,y>1\}$이고, 함수 f는 일대일함수이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 $(4,\ 8)$을 지나야 한다.



즉 $8=\sqrt{4-4}+k$이므로 $\qquad k=8$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x}+8 & (x\le4)\\ \dfrac{x+4}{x-3} & (x>4)\end{cases}$$

따라서 $f(0)=\sqrt{4}+8=10$이므로 $f(p)f(0)=20$에서

$10f(p)=20$

$\therefore\ f(p)=2$

$f(p)=2$일 때 $p>4$이므로

$\dfrac{p+4}{p-3}=2,\qquad p+4=2p-6$

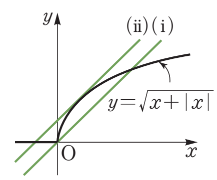
$\therefore\ p=10$

답 10

1132 전략 $x\ge0$인 경우와 $x<0$인 경우로 나누어 $y=\sqrt{x+|x|}$의 그래프를 그린다.

$$y=\sqrt{x+|x|}=\begin{cases}\sqrt{2x} & (x\ge0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(i) 직선 $y=x+k$가 원점을 지날 때

$k=0$

(ii) $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때

$\sqrt{2x}=x+k$의 양변을 제곱하면

$2x=x^2+2kx+k^2$

$\therefore\ x^2+2(k-1)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(k-1)^2-k^2=0$$

$-2k+1=0\qquad \therefore\ k=\dfrac{1}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 k의 값의 범위는

$0<k<\dfrac{1}{2}$

답 $\mathbf{0<k<\dfrac{1}{2}}$