유형의 완성 RPM

확률과 통계

정답 및 풀이

01 순열과 조합

교과서 문제 정복하기

본책 007쪽, 009쪽

0001 ${}_{6}\Pi_{1}=6^{1}=6$ 답 **6**

0002 ${}_{2}\Pi_{3}=2^{3}=8$ 답 **8**

0003 ${}_{4}\Pi_{2}=4^{2}=16$ 답 **16**

0004 ${}_{3}\Pi_{5}=3^{5}=243$ 답 **243**

0005 ${}_{n}\Pi_{3}=125$에서 $n^{3}=125=5^{3}$

$\therefore n=5$ 답 **5**

0006 ${}_{2}\Pi_{r}=128$에서 $2^{r}=128=2^{7}$

$\therefore r=7$ 답 **7**

0007 1, 2, 3, 4의 4개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_{4}\Pi_{3}=4^{3}=64$ 답 **64**

0008 ○, ×의 2개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_{2}\Pi_{4}=2^{4}=16$ 답 **16**

0009 6개의 문자 중 B가 2개, C가 3개 있으므로 구하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\times3!}=60$ 답 **60**

0010 5개의 숫자 중 1이 2개, 3이 2개 있으므로 구하는 자연수의 개수는

$\dfrac{5!}{2!\times2!}=30$ 답 **30**

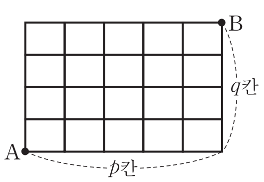
0011 답 (가) **6** (나) **3** (다) **9** (라) **84**

RPM 비법노트

최단 거리로 가는 경우의 수

오른쪽 그림과 같은 도로망에서 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{(p+q)!}{p!q!}$



0012 ${}_{2}H_{4}={}_{2+4-1}C_{4}={}_{5}C_{4}={}_{5}C_{1}=5$ 답 **5**

0013 ${}_{3}H_{5}={}_{3+5-1}C_{5}={}_{7}C_{5}={}_{7}C_{2}=21$ 답 **21**

0014 ${}_{4}H_{4}={}_{4+4-1}C_{4}={}_{7}C_{4}={}_{7}C_{3}=35$ 답 **35**

0015 ${}_{5}H_{0}={}_{5+0-1}C_{0}={}_{4}C_{0}=1$ 답 **1**

0016 ${}_{7}H_{3}={}_{9}C_{3}$이므로 $n=9$ 답 **9**

0017 ${}_{5}H_{r}={}_{r+4}C_{r}={}_{r+4}C_{4}$이므로

$r+4=9$ $\therefore r=5$ 답 **5**

0018 ${}_{4}H_{2}={}_{5}C_{2}=10$ 답 **10**

0019 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3}H_{5}={}_{7}C_{5}={}_{7}C_{2}=21$ 답 **21**

0020 $(x+y)^{4}$

$={}_{4}C_{0}x^{4}+{}_{4}C_{1}x^{3}y+{}_{4}C_{2}x^{2}y^{2}+{}_{4}C_{3}xy^{3}+{}_{4}C_{4}y^{4}$

$=x^{4}+4x^{3}y+6x^{2}y^{2}+4xy^{3}+y^{4}$

답 $\boldsymbol{x^{4}+4x^{3}y+6x^{2}y^{2}+4xy^{3}+y^{4}}$

0021 $(x-2)^{5}$

$={}_{5}C_{0}x^{5}+{}_{5}C_{1}x^{4}(-2)+{}_{5}C_{2}x^{3}(-2)^{2}+{}_{5}C_{3}x^{2}(-2)^{3}$

$+{}_{5}C_{4}x(-2)^{4}+{}_{5}C_{5}(-2)^{5}$

$=x^{5}-10x^{4}+40x^{3}-80x^{2}+80x-32$

답 $\boldsymbol{x^{5}-10x^{4}+40x^{3}-80x^{2}+80x-32}$

0022 $(3a+2b)^{4}$

$={}_{4}C_{0}(3a)^{4}+{}_{4}C_{1}(3a)^{3}(2b)+{}_{4}C_{2}(3a)^{2}(2b)^{2}$

$+{}_{4}C_{3}(3a)(2b)^{3}+{}_{4}C_{4}(2b)^{4}$

$=81a^{4}+216a^{3}b+216a^{2}b^{2}+96ab^{3}+16b^{4}$

답 $\boldsymbol{81a^{4}+216a^{3}b+216a^{2}b^{2}+96ab^{3}+16b^{4}}$

0023 $\left(a-\dfrac{2}{a}\right)^{3}$

$={}_{3}C_{0}a^{3}+{}_{3}C_{1}a^{2}\left(-\dfrac{2}{a}\right)+{}_{3}C_{2}a\left(-\dfrac{2}{a}\right)^{2}+{}_{3}C_{3}\left(-\dfrac{2}{a}\right)^{3}$

$=a^{3}-6a+\dfrac{12}{a}-\dfrac{8}{a^{3}}$

답 $\boldsymbol{a^{3}-6a+\dfrac{12}{a}-\dfrac{8}{a^{3}}}$

0024 $(x+y)^{7}$의 전개식의 일반항은

${}_{7}C_{r}x^{7-r}y^{r}$

(1) $x^{4}y^{3}$항은 $r=3$인 경우이므로 $x^{4}y^{3}$의 계수는

${}_{7}C_{3}=35$

(2) $x^{5}y^{2}$항은 $r=2$인 경우이므로 $x^{5}y^{2}$의 계수는

${}_{7}C_{2}=21$

(3) y^{7}항은 $r=7$인 경우이므로 y^{7}의 계수는

${}_{7}C_{7}=1$

답 (1) **35** (2) **21** (3) **1**

0025 $(x+2)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r x^{4-r}2^r={}_4C_r\times 2^r x^{4-r}$$

x^3항은 $4-r=3$인 경우이므로 $r=1$

따라서 x^3의 계수는 ${}_4C_1\times 2=8$

답 8

0026 $(a-3)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r a^{5-r}(-3)^r={}_5C_r(-3)^r a^{5-r}$$

a^2항은 $5-r=2$인 경우이므로 $r=3$

따라서 a^2의 계수는 ${}_5C_3(-3)^3=-270$

답 -270

0027 $(2x-y)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r(2x)^{5-r}(-y)^r={}_5C_r\times 2^{5-r}(-1)^r x^{5-r}y^r$$

x^3y^2항은 $r=2$인 경우이므로 x^3y^2의 계수는

$${}_5C_2\times 2^3\times(-1)^2=80$$

답 80

0028 $\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r a^{6-r}\left(-\frac{1}{a}\right)^r={}_6C_r(-1)^r\frac{a^{6-r}}{a^r}$$

상수항은 $6-r=r$인 경우이므로 $r=3$

따라서 상수항은 ${}_6C_3(-1)^3=-20$

답 -20

RPM 비법 노트

자연수 m, n, r에 대하여

① $\dfrac{x^n}{x^m}=x^r$이면 $n-m=r$

② $\dfrac{x^n}{x^m}=1$이면 $m=n$

③ $\dfrac{x^n}{x^m}=\dfrac{1}{x^r}$이면 $m-n=r$

0029

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & \boxed{3} & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \boxed{4} & & \boxed{6} & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & \boxed{5} & & \boxed{10} & & 10 & & \boxed{5} & & 1 & \\
1 & & \boxed{6} & & \boxed{15} & & \boxed{20} & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

(1) $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

(2) $(a+2b)^6=a^6+6a^5(2b)+15a^4(2b)^2+20a^3(2b)^3$
$+15a^2(2b)^4+6a(2b)^5+(2b)^6$
$=a^6+12a^5b+60a^4b^2+160a^3b^3+240a^2b^4$
$+192ab^5+64b^6$

답 풀이 참조

0030 ${}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3$

$={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3$ ← ${}_3C_0+{}_3C_1={}_4C_1$

$={}_5C_2+{}_5C_3$ ← ${}_4C_1+{}_4C_2={}_5C_2$

$={}_6C_3$

$\therefore n=6$

답 6

0031 ${}_4C_2+{}_4C_1+{}_5C_1+{}_6C_1$

$={}_5C_2+{}_5C_1+{}_6C_1$ ← ${}_4C_2+{}_4C_1={}_5C_2$

$={}_6C_2+{}_6C_1$ ← ${}_5C_2+{}_5C_1={}_6C_2$

$={}_7C_2$

$\therefore n=7$

답 7

0032 ${}_8C_0+{}_8C_1+{}_8C_2+\cdots+{}_8C_8=2^8=256$

답 256

0033 ${}_9C_0-{}_9C_1+{}_9C_2-{}_9C_3+\cdots-{}_9C_9=0$

답 0

0034 ${}_{10}C_0+{}_{10}C_2+{}_{10}C_4+{}_{10}C_6+{}_{10}C_8+{}_{10}C_{10}$

$=2^{10-1}=2^9=512$

답 512

0035 ${}_7C_1+{}_7C_3+{}_7C_5+{}_7C_7=2^{7-1}=2^6=64$

답 64

유형 익히기

● 본책 010~018쪽

0036 A와 B가 같은 부에 지원하려면 A와 B를 한 사람으로 생각하여 4명의 학생이 축구부, 야구부, 육상부 중 한 곳에 지원하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_4=3^4=81$$

답 ③

0037 구하는 경우의 수는 팥빙수와 딸기빙수 중에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_4=2^4=16$$

답 16

0038 기호 3개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_3=2^3=8$$

기호 4개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_4=2^4=16$$

기호 5개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_5=2^5=32$$

따라서 구하는 신호의 개수는

$$8+16+32=56$$

답 56

0039 서로 다른 구슬 5개를 세 상자 A, B, C에 나누어 담는 경우의 수는

$${}_3\Pi_5=3^5=243$$

이때 구슬을 한 상자에만 담는 경우의 수는 3

구슬을 두 상자에만 나누어 담는 경우의 수는

$${}_3C_2\times({}_2\Pi_5-\underbrace{2}_{\text{구슬을 한 상자에만 담는 경우의 수}})=3\times(2^5-2)=90$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$243-(3+90)=150$$

답 ①

0040 만의 자리에 올 수 있는 숫자는

1, 2, 3, 4의 4개

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 0, 1, 2, 3, 4의 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_5\Pi_3=5^3=125$$

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4의 3개

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$4\times125\times3=1500$$

답 **1500**

0041 (i) 한 자리 자연수의 개수는 4

(ii) 두 자리 자연수의 개수는 ${}_4\Pi_2=4^2=16$

(iii) 세 자리 자연수의 개수는 ${}_4\Pi_3=4^3=64$

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$$4+16+64=84$$

답 **84**

0042 숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허용하여 4개를 택해 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$${}_3\Pi_4=3^4=81$$

1을 제외한 나머지 숫자 2, 3 중에서 중복을 허용하여 4개를 택해 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$${}_2\Pi_4=2^4=16$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$81-16=65$$

답 **65**

0043 (i) 한 자리 자연수의 개수는 5

(ii) 두 자리 자연수의 개수는 $5\times{}_6\Pi_1=5\times6=30$

(iii) 세 자리 자연수의 개수는 $5\times{}_6\Pi_2=5\times6^2=180$

(iv) 1□□□ 꼴의 네 자리 자연수의 개수는

$${}_6\Pi_3=6^3=216$$

이상에서 2000보다 작은 자연수의 개수는

$$5+30+180+216=431$$

이므로 2000은 432번째 수이다.

답 ③

0044 X에서 Y로의 함수의 개수는 Y의 원소 a, b, c, d, e의 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$$m={}_5\Pi_3=5^3=125$$

X에서 Y로의 일대일함수의 개수는 Y의 원소 a, b, c, d, e의 5개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$$n={}_5P_3=60$$

$$\therefore m+n=185$$

답 ②

0045 X에서 Y로의 함수의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_6\Pi_4=6^4=1296$$

X에서 Y로의 함수 중 $f(3)=3$인 함수의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_6\Pi_3=6^3=216$$

따라서 구하는 함수의 개수는

$$1296-216=1080$$

답 **1080**

다른 풀이 $f(3)\neq3$이므로 $f(3)$의 값이 될 수 있는 수는

1, 2, 4, 5, 6의 5개

$f(1)$, $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_6\Pi_3=6^3=216$$

따라서 구하는 함수의 개수는 $5\times216=1080$

0046 $f(1)=f(4)>3$이므로

$f(1)=f(4)=4$ 또는 $f(1)=f(4)=5$

이때 $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 공역 X의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 함수의 개수는

$$2\times125=250$$

답 **250**

0047 $f(1)=1$인 함수의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_5\Pi_3=5^3=125$$

같은 방법으로 하면 $f(2)=2$인 함수의 개수는

$${}_5\Pi_3=5^3=125$$

$f(1)=1$이고 $f(2)=2$인 함수의 개수는 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_5\Pi_2=5^2=25$$

따라서 구하는 함수의 개수는

$$125+125-25=225$$

답 **225**

0048 양 끝에 l을 나열하고 중간에 나머지 7개의 문자 c, h, a, e, n, g, e를 일렬로 나열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2!}=2520$$

답 ②

0049 모음 a, i, e를 한 문자 A로 생각하여 7개의 문자 A, h, p, p, n, s, s를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2!\times2!}=1260$$

모음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$$1260\times6=7560$$

답 **7560**

0050 2개의 t를 제외한 나머지 6개의 문자 i, n, e, r, n, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!\times2!}=180$$

6개의 문자 사이사이와 양 끝의 7개의 자리에서 2개를 택하여 t를 하나씩 나열하는 경우의 수는

$${}_7C_2=21$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$180\times21=3780$$

답 ④

다른 풀이 internet의 8개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{2!\times2!\times2!}=5040$$

2개의 t를 한 문자 A로 생각하여 7개의 문자 A, i, n, e, r, n, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2!\times2!}=1260$$

따라서 구하는 경우의 수는 $5040-1260=3780$

0051 7개의 문자 a, b, b, c, c, c, d를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{7!}{2!\times3!}=420$ … 1단계

(ⅰ) 양 끝에 b를 나열하는 경우

양 끝에 b를 나열하고 중간에 나머지 5개의 문자 a, c, c, c, d를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!}=20$$ … 2단계

(ⅱ) 양 끝에 c를 나열하는 경우

양 끝에 c를 나열하고 중간에 나머지 5개의 문자 a, b, b, c, d를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!}=60$$ … 3단계

(ⅰ), (ⅱ)에서 양 끝에 서로 같은 문자를 나열하는 경우의 수는

$20+60=80$

따라서 구하는 경우의 수는

$420-80=340$ … 4단계

답 **340**

채점 요소	비율
1단계 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수 구하기	20 %
2단계 양 끝에 b를 나열하는 경우의 수 구하기	30 %
3단계 양 끝에 c를 나열하는 경우의 수 구하기	30 %
4단계 양 끝에 서로 다른 문자를 나열하는 경우의 수 구하기	20 %

0052 0, 1, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!\times3!}=60$$

맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 1, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{2!\times3!}=10$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$60-10=50$

답 ④

다른 풀이 (ⅰ) 맨 앞자리의 숫자가 1인 자연수의 개수는

$$\frac{5!}{3!}=20 \leftarrow 0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2\text{를 일렬로 나열하는 경우의 수}$$

(ⅱ) 맨 앞자리의 숫자가 2인 자연수의 개수는

$$\frac{5!}{2!\times2!}=30 \leftarrow 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2\text{를 일렬로 나열하는 경우의 수}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 자연수의 개수는 $20+30=50$

0053 5개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3 중에서 4개를 택하는 경우는

1, 2, 2, 3 또는 1, 2, 3, 3 또는 2, 2, 3, 3

(ⅰ) 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

(ⅱ) 1, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

(ⅲ) 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!\times2!}=6$$

이상에서 구하는 자연수의 개수는

$12+12+6=30$

답 **30**

0054 300000보다 크려면 맨 앞자리의 숫자가 4 또는 5이어야 한다.

(ⅰ) 맨 앞자리의 숫자가 4인 자연수의 개수는 1, 2, 2, 5, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{2!\times2!}=30$$

(ⅱ) 맨 앞자리의 숫자가 5인 자연수의 개수는 1, 2, 2, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{2!}=60$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 자연수의 개수는

$30+60=90$

답 ③

0055 홀수이려면 일의 자리의 숫자가 1 또는 3이어야 한다.

(ⅰ) 일의 자리의 숫자가 1인 경우

0, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!}=60$$

맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{2!}=12$$

따라서 일의 자리의 숫자가 1인 홀수의 개수는

$60-12=48$

(ⅱ) 일의 자리의 숫자가 3인 경우

0, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!\times2!}=30$$

맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{2!\times2!}=6$$

따라서 일의 자리의 숫자가 3인 홀수의 개수는

$30-6=24$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 홀수의 개수는

$48+24=72$

답 **72**

0056 a, e의 순서가 정해져 있으므로 a, e를 모두 A로 생각하여 A, b, c, d, A, f를 일렬로 나열한 후 첫 번째 A를 a로, 두 번째 A를 e로 바꾸면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!}=360$$

답 ①

0057 t, m을 모두 A로 생각하여 A, o, A, o, r, r, o, w를 일렬로 나열한 후 첫 번째 A를 t로, 두 번째 A를 m으로 바꾸면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{2!\times3!\times2!}=1680$$

답 **1680**

0058 2, 3, 4를 모두 A로 생각하여 1, 1, 1, A, A, A, 5를 일렬로 나열한 후 첫 번째 A를 2로, 두 번째 A를 3으로, 세 번째 A를 4로 바꾸거나 첫 번째 A를 4로, 두 번째 A를 3으로, 세 번째 A를 2로 바꾸면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{3!\times3!}\times2=280$$

답 **280**

0059 c, p를 모두 A로, i, r를 모두 B로 생각하여 A, o, m, A, B, o, m, B, s, e를 일렬로 나열한 후 첫 번째 A를 c로, 두 번째 A를 p로 바꾸고 첫 번째 B를 i로, 두 번째 B를 r로 바꾸면 된다.
따라서 주어진 조건을 만족시키도록 나열하는 경우의 수는

$$\frac{10!}{2!\times2!\times2!\times2!}=\frac{1}{16}\times10!$$

$$\therefore k=\frac{1}{16}$$

답 ③

0060 (i) A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!\times2!}=10$$

(ii) P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}=3$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$10\times3=30$$

답 **30**

0061 (i) A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{4!\times2!}=15$$

(ii) P 지점에서 Q 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 1
(iii) Q 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!\times2!}=6$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$$15\times1\times6=90$$

답 **90**

0062 (i) A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}=3$$

… 1단계

(ii) P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{7!}{4!\times3!}=35$$

이때 P 지점에서 Q 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}\times\frac{4!}{2!\times2!}=18$$

따라서 P 지점에서 Q 지점을 지나지 않고 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$35-18=17$$

… 2단계

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$3\times17=51$$

… 3단계

답 **51**

	채점 요소	비율
1단계	A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수 구하기	30 %
2단계	P 지점에서 Q 지점을 지나지 않고 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수 구하기	50 %
3단계	조건을 만족시키는 경우의 수 구하기	20 %

0063 가로로 한 칸 이동하는 것을 a, 세로로 한 칸 이동하는 것을 b, 아래로 한 칸 이동하는 것을 c라 하면 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 a, a, a, b, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{6!}{3!\times2!}=60$$

답 **60**

0064 먼저 4명의 학생에게 볼펜을 1자루씩 나누어 주고 남은 볼펜 6자루를 4명의 학생에게 나누어 주면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_6={}_9C_6={}_9C_3=84$$

답 **84**

0065 구하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_{10}={}_{14}C_{10}={}_{14}C_4=1001$$

답 **1001**

0066 $(a+b+c)^8$을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$$

답 **45**

0067 먼저 접시 A에 초콜릿을 2개, 접시 B에 초콜릿을 3개 담고 남은 초콜릿 5개를 네 개의 접시 A, B, C, D에 나누어 담으면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 네 개의 접시 A, B, C, D 중에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_5={}_8C_5={}_8C_3=56$$

답 ④

0068 (i) 음이 아닌 정수인 해의 개수
x, y, z의 3개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$a={}_3H_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$
(ii) 자연수인 해의 개수
$x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$로 놓으면 x', y', z'은 음이 아닌 정수이고, $x+y+z=10$에서
$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)=10$
$\therefore x'+y'+z'=7$
따라서 방정식 $x+y+z=10$의 자연수인 해의 개수는 방정식 $x'+y'+z'=7$의 음이 아닌 정수인 해의 개수와 같으므로
$b={}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$
(i), (ii)에서 $a+b=102$ 답 ②

0069 x, y, z가 음이 아닌 정수이므로
$x+y+z=0$ 또는 $x+y+z=1$ 또는 $x+y+z=2$
또는 $x+y+z=3$ 또는 $x+y+z=4$
(i) $x+y+z=0$일 때, 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
${}_3H_0={}_2C_0=1$
(ii) $x+y+z=1$일 때, 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
${}_3H_1={}_3C_1=3$
(iii) $x+y+z=2$일 때, 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
${}_3H_2={}_4C_2=6$
(iv) $x+y+z=3$일 때, 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$
(v) $x+y+z=4$일 때, 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$
이상에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
$1+3+6+10+15=35$ 답 ④

0070 x, y, z가 각각 $x\ge2$, $y\ge2$, $z\ge1$인 정수이므로
$x=x'+2$, $y=y'+2$, $z=z'+1$
로 놓으면 x', y', z'은 음이 아닌 정수이고, $x+y+z=11$에서
$(x'+2)+(y'+2)+(z'+1)=11$
$\therefore x'+y'+z'=6$
따라서 구하는 해의 개수는 방정식 $x'+y'+z'=6$의 음이 아닌 정수인 해의 개수와 같으므로
${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$ 답 28

0071 (i) $a=0$일 때
$b+c+d=9$이므로 이 방정식을 만족시키는 순서쌍 (b, c, d)의 개수는
${}_3H_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$
(ii) $a=1$일 때
$b+c+d=8$이므로 이 방정식을 만족시키는 순서쌍 (b, c, d)의 개수는
${}_3H_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$
(iii) $a=2$일 때
$b+c+d=5$이므로 이 방정식을 만족시키는 순서쌍 (b, c, d)의 개수는
${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$
(iv) $a=3$일 때
$b+c+d=0$이므로 이 방정식을 만족시키는 순서쌍 (b, c, d)의 개수는
${}_3H_0={}_2C_0=1$
(v) $a\ge4$일 때
$b+c+d\le-7$이므로 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d는 존재하지 않는다.
이상에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
$55+45+21+1=122$ 답 **122**

0072 주어진 조건에서 $f(1)\ge f(2)\ge f(3)\ge f(4)$
따라서 Y의 원소 3, 4, 5, 6, 7, 8의 6개에서 중복을 허용하여 4개를 택해 크거나 같은 수부터 순서대로 X의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 된다.
즉 구하는 함수의 개수는 서로 다른 6개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_6H_4={}_9C_4=126$ 답 **126**

0073 조건 (가), (나)에서 $f(1)\le3\le f(3)\le f(4)$
$f(1)\le3$이므로 $f(1)$의 값이 될 수 있는 Y의 원소는
1, 2, 3의 3개
$3\le f(3)\le f(4)$이므로 Y의 원소 3, 4, 5, 6의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택해 작거나 같은 수부터 순서대로 X의 원소 3, 4에 대응시키면 된다.
즉 $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4H_2={}_5C_2=10$
이때 $f(5)$의 값이 될 수 있는 Y의 원소는
1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개
따라서 구하는 함수의 개수는
$3\times10\times6=180$ 답 ②

0074 조건 (가)에 의하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값이 될 수 있는 공역 X의 원소는 각각 3, 4, 5의 3개이다.
따라서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_3\Pi_3=3^3=27$
한편 조건 (나)에 의하여 공역 X의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택해 작거나 같은 수부터 순서대로 정의역 X의 원소 4, 5에 대응시키면 된다.
즉 $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_5H_2={}_6C_2=15$

따라서 구하는 함수의 개수는

$27\times15=405$ 답 **405**

0075 $(2+ax)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r\times2^{5-r}(ax)^r={}_5C_r\times2^{5-r}a^rx^r$$

x^2항은 $r=2$인 경우이므로 x^2의 계수는

$${}_5C_2\times2^3a^2=80a^2$$

따라서 $80a^2=2000$이므로 $a^2=25$

$\therefore a=5\ (\because a>0)$ 답 ②

0076 $\left(x+\frac{2}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_rx^{6-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r={}_6C_r\times2^r\times\frac{x^{6-r}}{x^r}$$ … 1단계

(i) 상수항은 $6-r=r$인 경우이므로 $r=3$

따라서 상수항은

$a={}_6C_3\times2^3=160$ … 2단계

(ii) x^2항은 $(6-r)-r=2$인 경우이므로 $r=2$

따라서 x^2의 계수는

$b={}_6C_2\times2^2=60$ … 3단계

(i), (ii)에서 $a+b=220$ … 4단계

답 **220**

채점 요소	비율
1단계 전개식의 일반항 구하기	30 %
2단계 a의 값 구하기	30 %
3단계 b의 값 구하기	30 %
4단계 $a+b$의 값 구하기	10 %

0077 $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^n$의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r(x^2)^{n-r}\left(\frac{1}{x^3}\right)^r={}_nC_r\frac{x^{2n-2r}}{x^{3r}}$$

상수항은 $2n-2r=3r$인 경우이므로 $r=\frac{2}{5}n$

이를 만족시키는 자연수 r가 존재하려면 n은 5의 양의 배수이어야 하므로 자연수 n의 최솟값은 5이다. 답 ②

0078 $(\sqrt{6}+x)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r(\sqrt{6})^{6-r}x^r$$

이때 계수 ${}_6C_r(\sqrt{6})^{6-r}$이 정수이려면 $6-r$가 0 또는 짝수이어야 하므로

$r=0$ 또는 $r=2$ 또는 $r=4$ 또는 $r=6$

따라서 구하는 계수의 합은

$${}_6C_0(\sqrt{6})^6+{}_6C_2(\sqrt{6})^4+{}_6C_4(\sqrt{6})^2+{}_6C_6$$
$$=216+540+90+1=847$$ 답 ①

0079 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_rx^{4-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_4C_r\frac{x^{4-r}}{x^r}$$ …… ㉠

이때 $(x+2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^4=x\left(x+\frac{1}{x}\right)^4+2\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$이므로 x^2항은

$x\times$(㉠의 x항), $2\times$(㉠의 x^2항)

일 때 나타난다.

(i) ㉠에서 x항은 $(4-r)-r=1$인 경우이므로

$$r=\frac{3}{2}$$

그런데 r는 정수이므로 ㉠에서 x항은 존재하지 않는다.

(ii) ㉠에서 x^2항은 $(4-r)-r=2$, 즉 $r=1$인 경우이므로

$${}_4C_1x^2=4x^2$$

(i), (ii)에서 구하는 x^2의 계수는

$2\times4=8$ 답 ③

0080 $(x^2+2)^7$의 전개식의 일반항은

$${}_7C_r(x^2)^{7-r}2^r={}_7C_r\times2^rx^{14-2r}$$ …… ㉠

이때 $(2x^2-x)(x^2+2)^7=2x^2(x^2+2)^7-x(x^2+2)^7$이므로 x^4항은

$2x^2\times$(㉠의 x^2항), $-x\times$(㉠의 x^3항)

일 때 나타난다.

(i) ㉠에서 x^2항은 $14-2r=2$, 즉 $r=6$인 경우이므로

$${}_7C_6\times2^6x^2=448x^2$$

(ii) ㉠에서 x^3항은 $14-2r=3$인 경우이므로 $r=\frac{11}{2}$

그런데 r는 정수이므로 ㉠에서 x^3항은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 구하는 x^4의 계수는

$2\times448=896$ 답 ②

0081 $(3x+2)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r(3x)^{5-r}2^r={}_5C_r\times2^r3^{5-r}x^{5-r}$$ …… ㉠

이때 $(ax^3-3x)(3x+2)^5=ax^3(3x+2)^5-3x(3x+2)^5$이므로 x^5항은

$ax^3\times$(㉠의 x^2항), $-3x\times$(㉠의 x^4항)

일 때 나타난다.

(i) ㉠에서 x^2항은 $5-r=2$, 즉 $r=3$인 경우이므로

$${}_5C_3\times2^3\times3^2x^2=720x^2$$

(ii) ㉠에서 x^4항은 $5-r=4$, 즉 $r=1$인 경우이므로

$${}_5C_1\times2^1\times3^4x^4=810x^4$$

(i), (ii)에서 x^5의 계수는

$a\times720+(-3)\times810=720a-2430$

즉 $720a-2430=1170$이므로

$720a=3600\qquad\therefore a=5$ 답 ④

0082 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_rx^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_6C_r\frac{x^{6-r}}{x^r}$$ …… ㉠

이때

$$(x^2+x+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^6=x^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^6+x\left(x+\frac{1}{x}\right)^6+\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$$

이므로 상수항은

$x^2\times\left(㉠\text{의 } \frac{1}{x^2}\text{항}\right)$, $x\times\left(㉠\text{의 } \frac{1}{x}\text{항}\right)$, (㉠의 상수항)

일 때 나타난다.

(i) ㉠에서 $\frac{1}{x^2}$항은 $r-(6-r)=2$, 즉 $r=4$인 경우이므로

$$\frac{{}_6C_4}{x^2}=\frac{15}{x^2}$$

(ii) ㉠에서 $\frac{1}{x}$항은 $r-(6-r)=1$인 경우이므로 $\quad r=\frac{7}{2}$

그런데 r는 정수이므로 ㉠에서 $\frac{1}{x}$항은 존재하지 않는다.

(iii) ㉠에서 상수항은 $6-r=r$, 즉 $r=3$인 경우이므로

$${}_6C_3=20$$

이상에서 구하는 상수항은

$$15+20=35$$

답 35

0083 $(x-2)^3$의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r x^{3-r}(-2)^r={}_3C_r(-2)^r x^{3-r} \text{ (단, } 0\le r\le 3)$$

$(2x+1)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_s(2x)^{5-s}={}_5C_s\times 2^{5-s}x^{5-s} \text{ (단, } 0\le s\le 5)$$

따라서 $(x-2)^3(2x+1)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r\times{}_5C_s(-2)^r 2^{5-s}x^{8-r-s}$$

이때 x^2항은 $8-r-s=2$, 즉 $r+s=6$인 경우이므로

$r=1,\ s=5$ 또는 $r=2,\ s=4$ 또는 $r=3,\ s=3$

(i) $r=1,\ s=5$일 때

$${}_3C_1\times{}_5C_5\times(-2)^1\times 2^0=-6$$

(ii) $r=2,\ s=4$일 때

$${}_3C_2\times{}_5C_4\times(-2)^2\times 2^1=120$$

(iii) $r=3,\ s=3$일 때

$${}_3C_3\times{}_5C_3\times(-2)^3\times 2^2=-320$$

이상에서 x^2의 계수는

$$-6+120+(-320)=-206$$

답 ①

0084 $(x-3)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r x^{5-r}(-3)^r={}_5C_r(-3)^r x^{5-r} \text{ (단, } 0\le r\le 5)$$

$(x+a)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_s x^{4-s}a^s={}_4C_s a^s x^{4-s} \text{ (단, } 0\le s\le 4)$$

따라서 $(x-3)^5(x+a)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r\times{}_4C_s(-3)^r a^s x^{9-r-s}$$

이때 x^8항은 $9-r-s=8$, 즉 $r+s=1$인 경우이므로

$r=0,\ s=1$ 또는 $r=1,\ s=0$

(i) $r=0,\ s=1$일 때

$${}_5C_0\times{}_4C_1\times(-3)^0\times a^1=4a$$

(ii) $r=1,\ s=0$일 때

$${}_5C_1\times{}_4C_0\times(-3)^1\times a^0=-15$$

(i), (ii)에서 x^8의 계수는

$$4a-15$$

즉 $4a-15=1$이므로 $\quad a=4$

답 ④

0085 $(x-1)^3$의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r x^{3-r}(-1)^r={}_3C_r(-1)^r x^{3-r} \text{ (단, } 0\le r\le 3)$$

$\left(x+\frac{3}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_s x^{5-s}\left(\frac{3}{x}\right)^s={}_5C_s\times 3^s\times\frac{x^{5-s}}{x^s} \text{ (단, } 0\le s\le 5)$$

따라서 $(x-1)^3\left(x+\frac{3}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r\times{}_5C_s(-1)^r 3^s\times\frac{x^{8-r-s}}{x^s}$$

이때 x^6항은 $(8-r-s)-s=6$, 즉 $r+2s=2$인 경우이므로

$r=0,\ s=1$ 또는 $r=2,\ s=0$

(i) $r=0,\ s=1$일 때

$${}_3C_0\times{}_5C_1\times(-1)^0\times 3^1=15$$

(ii) $r=2,\ s=0$일 때

$${}_3C_2\times{}_5C_0\times(-1)^2\times 3^0=3$$

(i), (ii)에서 x^6의 계수는

$$15+3=18$$

답 18

0086 ${}_1C_0={}_2C_0$이므로

$${}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$$
$$={}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$$
$$={}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$$
$$={}_4C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$$
$$={}_5C_3+{}_5C_4+{}_6C_5$$
$$={}_6C_4+{}_6C_5$$
$$={}_7C_5$$
$$={}_7C_2$$

답 ④

0087 ${}_{n-1}C_5+{}_{n-1}C_6={}_nC_6$이므로

$${}_nC_5={}_nC_6$$

즉 ${}_nC_{n-5}={}_nC_6$이므로

$$n-5=6 \qquad \therefore n=11$$

답 11

0088 ${}_7C_1+{}_8C_2+{}_9C_3+{}_{10}C_4+{}_{11}C_5$

$$={}_7C_0+{}_7C_1+{}_8C_2+{}_9C_3+{}_{10}C_4+{}_{11}C_5-{}_7C_0$$
$$={}_8C_1+{}_8C_2+{}_9C_3+{}_{10}C_4+{}_{11}C_5-{}_7C_0$$
$$={}_9C_2+{}_9C_3+{}_{10}C_4+{}_{11}C_5-{}_7C_0$$
$$={}_{10}C_3+{}_{10}C_4+{}_{11}C_5-{}_7C_0$$
$$={}_{11}C_4+{}_{11}C_5-{}_7C_0$$
$$={}_{12}C_5-{}_7C_0$$
$$={}_{12}C_5-1$$

답 ①

0089 $(1+x)^n$의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r x^r$$

x^2항은 $2\le n\le 20$인 경우에만 나오므로 x^2의 계수는 $(1+x)^2$, $(1+x)^3$, $\cdots$, $(1+x)^{20}$의 각각의 전개식의 x^2의 계수를 더하면 된다.

$(1+x)^2$의 전개식에서 x^2의 계수는 $\quad {}_2C_2$

$(1+x)^3$의 전개식에서 x^2의 계수는 $\quad {}_3C_2$

$\vdots$

$(1+x)^{20}$의 전개식에서 x^2의 계수는 $\quad {}_{20}C_2$

따라서 구하는 x^2의 계수는

$$\begin{aligned}&{}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{20}C_2\\&={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{20}C_2\\&={}_4C_3+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{20}C_2\\&={}_5C_3+{}_5C_2+\cdots+{}_{20}C_2\\&\quad\vdots\\&={}_{20}C_3+{}_{20}C_2\\&={}_{21}C_3\end{aligned}$$

답 ⑤

0090 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

$$\begin{aligned}{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n&=2^n-{}_nC_0\\&=2^n-1\end{aligned}$$

따라서 주어진 부등식은 $\quad 64\le 2^n-1<128$

$\therefore\ 65\le 2^n<129$

이때 $2^6=64,\ 2^7=128,\ 2^8=256$이므로

$n=7$

답 **7**

0091 ${}_{20}C_0-{}_{20}C_1+{}_{20}C_2-{}_{20}C_3+\cdots-{}_{20}C_{19}+{}_{20}C_{20}=0$이므로

$$\begin{aligned}{}_{20}C_1-{}_{20}C_2+{}_{20}C_3-\cdots+{}_{20}C_{19}&={}_{20}C_0+{}_{20}C_{20}\\&=1+1=2\end{aligned}$$

답 ④

0092 ㄱ. ${}_{11}C_1+{}_{11}C_3+{}_{11}C_5+{}_{11}C_7+{}_{11}C_9+{}_{11}C_{11}=2^{11-1}=2^{10}$

이므로

$$\begin{aligned}{}_{11}C_1+{}_{11}C_3+{}_{11}C_5+{}_{11}C_7+{}_{11}C_9&=2^{10}-{}_{11}C_{11}\\&=2^{10}-1\ (\text{거짓})\end{aligned}$$

ㄴ. ${}_7C_0-{}_7C_1+{}_7C_2-\cdots-{}_7C_7=0$ (참)

ㄷ. ${}_{30}C_0+{}_{30}C_1+{}_{30}C_2+\cdots+{}_{30}C_{30}=2^{30}=(2^2)^{15}=4^{15}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

0093 ${}_{15}C_0+{}_{15}C_2+{}_{15}C_4+\cdots+{}_{15}C_{14}=2^{15-1}=2^{14}$ … 1단계

또 ${}_9C_k={}_9C_{9-k}\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$이므로

$${}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+{}_9C_3+{}_9C_4={}_9C_9+{}_9C_8+{}_9C_7+{}_9C_6+{}_9C_5$$

이때 ${}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+\cdots+{}_9C_9=2^9$이므로

$${}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+{}_9C_3+{}_9C_4=\frac{1}{2}\times 2^9=2^8$$ … 2단계

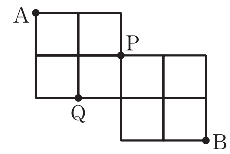
따라서 $\dfrac{{}_{15}C_0+{}_{15}C_2+{}_{15}C_4+\cdots+{}_{15}C_{14}}{{}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+{}_9C_3+{}_9C_4}=\dfrac{2^{14}}{2^8}=2^6$이므로

$n=6$ … 3단계

답 **6**

채점 요소	비율
1단계 ${}_{15}C_0+{}_{15}C_2+{}_{15}C_4+\cdots+{}_{15}C_{14}$의 값 구하기	30 %
2단계 ${}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+{}_9C_3+{}_9C_4$의 값 구하기	50 %
3단계 n의 값 구하기	20 %

0094 오른쪽 그림과 같이 두 지점 P, Q를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는



$\text{A}\to\text{P}\to\text{B},\ \text{A}\to\text{Q}\to\text{B}$

이다.

(i) $\text{A}\to\text{P}\to\text{B}$로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}\times\frac{4!}{2!\times 2!}=18$$

(ii) $\text{A}\to\text{Q}\to\text{B}$로 가는 경우의 수는

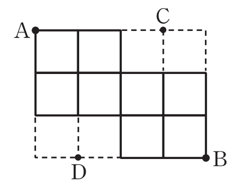
$$\frac{3!}{2!}\times 1\times\frac{3!}{2!}=9$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$18+9=27$

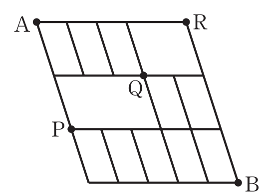
답 **27**

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하고 두 지점 C, D를 잡으면 구하는 경우의 수는 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 C 지점 또는 D 지점을 지나 최단 거리로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로



$$\frac{7!}{4!\times 3!}-\left(1\times\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{3!}\times 1\right)=27$$

0095 오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는



$\text{A}\to\text{P}\to\text{B},\ \text{A}\to\text{Q}\to\text{B},$

$\text{A}\to\text{R}\to\text{B}$

이다.

(i) $\text{A}\to\text{P}\to\text{B}$로 가는 경우의 수는

$$1\times\frac{6!}{5!}=6$$

(ii) $\text{A}\to\text{Q}\to\text{B}$로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}\times\frac{4!}{2!\times 2!}=24$$

(iii) $\text{A}\to\text{R}\to\text{B}$로 가는 경우의 수는

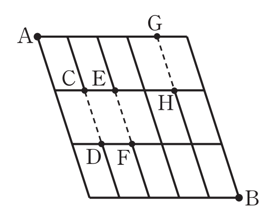
$1\times 1=1$

이상에서 구하는 경우의 수는

$6+24+1=31$

답 **31**

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하고 여섯 지점 C, D, E, F, G, H를 잡으면 구하는 경우의 수는 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서



$\text{A}\to\text{C}\to\text{D}\to\text{B},\ \text{A}\to\text{E}\to\text{F}\to\text{B},$

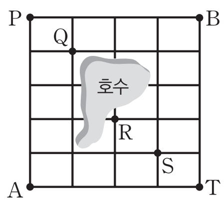
$\text{A}\to\text{G}\to\text{H}\to\text{B}$

로 가는 경우의 수를 빼면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{5!\times3!}-\left(2\times1\times\frac{5!}{4!}+\frac{3!}{2!}\times1\times\frac{4!}{3!}+1\times1\times\frac{3!}{2!}\right)$$
$$=31$$

0096 오른쪽 그림과 같이 다섯 지점 P, Q, R, S, T를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는



A → P → B, A → Q → B,
A → R → B, A → S → B,
A → T → B

이다.

(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$1\times1=1$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{4!}\times\frac{4!}{3!}=20$

(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\times1\times1\times\frac{4!}{3!}=12$

(iv) A → S → B로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}\times\frac{5!}{4!}=20$

(v) A → T → B로 가는 경우의 수는

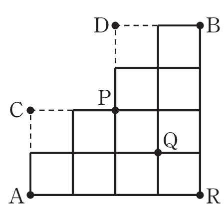
$1\times1=1$

이상에서 구하는 경우의 수는

$1+20+12+20+1=54$

답 54

0097 오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡고 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결한 후 두 지점 C, D를 잡자. A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는



A → P → B, A → Q → B,
A → R → B

이다.

(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$$\left(\frac{4!}{2!\times2!}-\underbrace{1}_{\text{A → C → P로 가는 경우의 수}}\right)$$
$$\times\left(\frac{4!}{2!\times2!}-\underbrace{1}_{\text{P → D → B로 가는 경우의 수}}\right)$$
$$=25$$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}\times\frac{4!}{3!}=16$

(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는

$1\times1=1$

이상에서 구하는 경우의 수는

$25+16+1=42$

답 42

0098 $(1+x)^{20}={}_{20}C_0+{}_{20}C_1x+{}_{20}C_2x^2+\cdots+{}_{20}C_{20}x^{20}$

이 식에 $x=30$을 대입하면

$$31^{20}={}_{20}C_0+{}_{20}C_1\times30+{}_{20}C_2\times30^2+{}_{20}C_3\times30^3+\cdots$$
$$+{}_{20}C_{20}\times30^{20}$$
$$=1+20\times30$$
$$+30^2({}_{20}C_2+{}_{20}C_3\times30+\cdots+{}_{20}C_{20}\times30^{18})$$
$$=601+30^2({}_{20}C_2+{}_{20}C_3\times30+\cdots+{}_{20}C_{20}\times30^{18})$$

이때 $30^2({}_{20}C_2+{}_{20}C_3\times30+\cdots+{}_{20}C_{20}\times30^{18})$은 900으로 나누어떨어지므로 31^{20}을 900으로 나누었을 때의 나머지는 601이다.

답 ⑤

0099 $(1+x)^{20}={}_{20}C_0+{}_{20}C_1x+{}_{20}C_2x^2+\cdots+{}_{20}C_{20}x^{20}$

이 식에 $x=7$을 대입하면

$$(1+7)^{20}={}_{20}C_0+{}_{20}C_1\times7+{}_{20}C_2\times7^2+\cdots+{}_{20}C_{20}\times7^{20}$$
$$\therefore\ {}_{20}C_0+7\times{}_{20}C_1+7^2\times{}_{20}C_2+\cdots+7^{20}\times{}_{20}C_{20}$$
$$=8^{20}=(2^3)^{20}=2^{60}$$

답 ③

0100 11^{30}

$=(1+10)^{30}$

$={}_{30}C_0+{}_{30}C_1\times10+{}_{30}C_2\times10^2+{}_{30}C_3\times10^3+\cdots$

$+{}_{30}C_{30}\times10^{30}$

$=1+30\times10+435\times100+10^3({}_{30}C_3+\cdots+{}_{30}C_{30}\times10^{27})$

$=43801+10^3({}_{30}C_3+\cdots+{}_{30}C_{30}\times10^{27})$ … 1단계

이때 $10^3({}_{30}C_3+\cdots+{}_{30}C_{30}\times10^{27})$은 백의 자리 이하의 숫자가 모두 0이므로 11^{30}의 백의 자리의 숫자는 8, 십의 자리의 숫자는 0, 일의 자리의 숫자는 1이다.

즉 $a=8$, $b=0$, $c=1$이므로

$a-b-c=7$ … 2단계

답 7

	채점 요소	비율
1단계	11^{30} 변형하기	60 %
2단계	$a-b-c$의 값 구하기	40 %

0101 8^{13}

$=(1+7)^{13}$

$={}_{13}C_0+{}_{13}C_1\times7+{}_{13}C_2\times7^2+\cdots+{}_{13}C_{13}\times7^{13}$

이때 ${}_{13}C_1\times7+{}_{13}C_2\times7^2+\cdots+{}_{13}C_{13}\times7^{13}$은 7로 나누어떨어지므로 8^{13}을 7로 나누었을 때의 나머지는 ${}_{13}C_0$, 즉 1이다.

따라서 오늘부터 8^{13}일 후는 화요일이다.

답 ②

0102 11명의 직원 중에서 회의에 참석할 직원을

6명 뽑는 경우의 수는 ${}_{11}C_6$

7명 뽑는 경우의 수는 ${}_{11}C_7$

⋮

11명 뽑는 경우의 수는 ${}_{11}C_{11}$

따라서 회의에 참석할 직원을 6명 이상 뽑는 경우의 수는

${}_{11}C_6+{}_{11}C_7+{}_{11}C_8+{}_{11}C_9+{}_{11}C_{10}+{}_{11}C_{11}$

${}_{11}C_k={}_{11}C_{11-k}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 11)$이므로

$$\begin{aligned}&{}_{11}C_6+{}_{11}C_7+{}_{11}C_8+{}_{11}C_9+{}_{11}C_{10}+{}_{11}C_{11}\\&={}_{11}C_5+{}_{11}C_4+{}_{11}C_3+{}_{11}C_2+{}_{11}C_1+{}_{11}C_0\end{aligned}$$

이때 ${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+\cdots+{}_{11}C_{11}=2^{11}$이므로

$$\begin{aligned}{}_{11}C_6+{}_{11}C_7+{}_{11}C_8+{}_{11}C_9+{}_{11}C_{10}+{}_{11}C_{11}&=\frac{1}{2}\times 2^{11}\\&=2^{10}\\&=1024\end{aligned}$$

답 ②

0103 원소가 1개인 부분집합의 개수는 ${}_8C_1$
원소가 3개인 부분집합의 개수는 ${}_8C_3$
원소가 5개인 부분집합의 개수는 ${}_8C_5$
원소가 7개인 부분집합의 개수는 ${}_8C_7$
따라서 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수는

$${}_8C_1+{}_8C_3+{}_8C_5+{}_8C_7=2^{8-1}=2^7=128$$

답 ④

0104 원 위의 서로 다른 9개의 점 중에서
3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수는
${}_9C_3$
4개의 점을 꼭짓점으로 하는 사각형의 개수는
${}_9C_4$
5개의 점을 꼭짓점으로 하는 오각형의 개수는
${}_9C_5$
⋮
9개의 점을 꼭짓점으로 하는 구각형의 개수는
${}_9C_9$
따라서 모든 다각형의 개수는

$$\begin{aligned}&{}_9C_3+{}_9C_4+{}_9C_5+\cdots+{}_9C_9\\&={}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+\cdots+{}_9C_9-({}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2)\\&=2^9-(1+9+36)=466\end{aligned}$$

답 **466**

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 019~022쪽

0105 서로 다른 6개의 놀이기구에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_6\Pi_3=6^3=216$$

답 **216**

0106 조건 (가)에 의하여 X, Y에서 중복을 허락하여 2개를 택해 양 끝에 나열하는 경우의 수는

$${}_2\Pi_2=2^2=4$$

조건 (나)에 의하여 양 끝을 제외한 네 자리 중에서 a의 자리를 정하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$
b, X, Y에서 중복을 허락하여 3개를 택해 나머지 세 자리에 나열하는 경우의 수는

$${}_3\Pi_3=3^3=27$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$4\times4\times27=432$$

답 ③

0107 $A\cap B=\{1,\ 2\}$이므로 1, 2를 제외한 나머지 4개의 원소 3, 4, 5, 6은 집합 $A-B$ 또는 집합 $B-A$ 또는 집합 $(A\cup B)^C$에 속한다.
따라서 구하는 경우의 수는 세 집합 $A-B$, $B-A$, $(A\cup B)^C$에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_4=3^4=81$$

답 **81**

0108 (i) 3□□□ 꼴의 자연수의 개수는

$${}_5\Pi_3=5^3=125$$

(ii) 4□□□ 꼴의 자연수의 개수는

$${}_5\Pi_3=5^3=125$$

(i), (ii)에서 3000 이상의 자연수의 개수는

$$125+125=250$$

이므로 3000보다 큰 자연수의 개수는

$$250-\underbrace{1}_{\text{3000을 제외한다.}}=249$$

답 **249**

0109 $f(a)=f(b)$이므로 $f(a)$, $f(b)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$
$f(c)$, $f(d)$의 값을 정하는 경우의 수는 Y의 원소 1, 2, 3의 3개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_2=3^2=9$$

따라서 구하는 함수의 개수는 $3\times9=27$

답 **27**

0110 $f(1)=a$인 함수의 개수는 Y의 원소 a, b, c의 3개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_5=3^5=243$$

이때 $f(1)=a$이므로 함수의 치역은

$\{a\}$ 또는 $\{a,\ b\}$ 또는 $\{a,\ c\}$ 또는 $\{a,\ b,\ c\}$

(i) $f(1)=a$이고 치역이 $\{a\}$인 경우
$f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=f(6)=a$이므로 함수의 개수는
1

(ii) $f(1)=a$이고 치역이 $\{a,\ b\}$인 경우
$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 Y의 원소 a, b의 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_5=2^5=32$$

그런데 $f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=f(6)=a$인 경우는 제외해야 하므로 함수의 개수는

$$32-1=31$$

(iii) $f(1)=a$이고 치역이 $\{a,\ c\}$인 경우
(ii)와 같은 방법으로 하면 함수의 개수는 31

이상에서 구하는 함수의 개수는

$$243-(1+31+31)=180$$

답 **180**

0111 (ⅰ) a와 a 사이에 b를 나열하는 경우
a, b, a를 한 문자 X로 생각하여 4개의 문자 X, b, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

(ⅱ) a와 a 사이에 c를 나열하는 경우
a, c, a를 한 문자 Y로 생각하여 4개의 문자 Y, b, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$12+12=24$ 답 **24**

0112 8개의 숫자 중 홀수가 4개, 짝수가 4개이므로 홀수는 홀수 번째 자리에 오고 짝수는 짝수 번째 자리에 오도록 나열하면 된다.
홀수 번째 자리에 홀수 1, 1, 1, 3을 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

짝수 번째 자리에 짝수 2, 2, 4, 4를 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!\times2!}=6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times6=24$ 답 **24**

0113 i, i, e를 모두 A로 생각하여 p, r, A, n, c, A, p, l, A를 일렬로 나열한 후 첫 번째 A와 세 번째 A를 i로, 두 번째 A를 e로 바꾸면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{9!}{2!\times3!}=30240$$ 답 ⑤

0114 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{10!}{5!\times5!}=252$$

A 지점에서 P 지점과 Q 지점 사이의 도로를 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!\times2!}\times1\times\frac{5!}{3!\times2!}=60$$

따라서 구하는 경우의 수는

$252-60=192$ 답 **192**

0115 먼저 3명의 학생 A, B, C에게 검은 바둑돌을 1개씩 주고 남은 흰 바둑돌 4개와 검은 바둑돌 3개를 나누어 주면 된다.
흰 바둑돌 4개를 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$$

검은 바둑돌 3개를 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times10=150$ 답 **150**

0116 (ⅰ) $w=0$일 때
$x+y+z+3w=6$에서
$x+y+z=6$
이 방정식의 음이 아닌 정수인 해의 개수는
${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

(ⅱ) $w=1$일 때
$x+y+z+3w=6$에서
$x+y+z=3$
이 방정식의 음이 아닌 정수인 해의 개수는
${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

(ⅲ) $w=2$일 때
$x+y+z+3w=6$에서
$x+y+z=0$
이 방정식의 음이 아닌 정수인 해의 개수는
${}_3H_0={}_2C_0=1$

이상에서 구하는 해의 개수는

$28+10+1=39$ 답 **39**

0117 조건 (나)에서
$a=2$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=2$
이때 $a+b=5$이므로 조건 (가)에서
$c+d+e=7$
$c=c'+1$, $d=d'+1$, $e=e'+1$로 놓으면 c', d', e'은 음이 아닌 정수이고, $c+d+e=7$에서
$(c'+1)+(d'+1)+(e'+1)=7$
$\therefore c'+d'+e'=4$
이를 만족시키는 c', d', e'의 순서쌍 (c', d', e')의 개수는
${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$
따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$2\times15=30$ 답 ①

0118 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 자연수 중에서 중복을 허용하여 3개를 택해 작거나 같은 수부터 순서대로 $|a|$, $|b|$, $|c|$의 값으로 정하면 되므로 순서쌍 $(|a|, |b|, |c|)$의 개수는
${}_5H_3={}_7C_3=35$
이때 각각의 $|a|$, $|b|$, $|c|$에 대하여 a, b, c는 음의 정수와 양의 정수의 2개가 각각 존재하므로 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$2^3\times35=280$ 답 **280**

0119 $f(1)\le f(2)\le f(3)=f(4)$이므로 Y의 원소 -2, -1, 0, 1, 2의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택해 작거나 같은 수부터 순서대로 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.
이때 $f(3)=f(4)$이므로 $f(3)$의 값이 정해지면 $f(4)$의 값도 정해진다.
따라서 구하는 함수의 개수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_3={}_7C_3=35$$

답 ⑤

0120 $\dfrac{(1+x)^8-1}{x}$의 전개식에서 x^3의 계수는 $(1+x)^8$의 전개식에서 x^4의 계수와 같다.
$(1+x)^8$의 전개식의 일반항은 ${}_8C_r\,x^r$
이때 x^4항은 $r=4$인 경우이므로 x^4의 계수는

$${}_8C_4=70$$

따라서 구하는 x^3의 계수는 70이다.

답 ④

0121 $\left(ax-\dfrac{2}{ax}\right)^7$의 전개식에서 각 항의 계수의 총합은 $x=1$을 대입한 식의 값과 같으므로

$$\left(a-\frac{2}{a}\right)^7=1$$

즉 $a-\dfrac{2}{a}=1$이므로 $a^2-a-2=0$

$$(a+1)(a-2)=0 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$$

따라서 $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^7$의 전개식의 일반항은

$${}_7C_r(2x)^{7-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_7C_r\times 2^{7-r}(-1)^r\frac{x^{7-r}}{x^r}$$

이때 $\dfrac{1}{x}$항은 $r-(7-r)=1$, 즉 $r=4$인 경우이므로 구하는 $\dfrac{1}{x}$의 계수는

$${}_7C_4\times 2^3\times(-1)^4=280$$

답 ④

0122 $(2x+1)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r(2x)^r={}_4C_r\times 2^rx^r \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $(ax^2+1)(2x+1)^4=ax^2(2x+1)^4+(2x+1)^4$이므로 x^4항은

$$ax^2\times(㉠\text{의 } x^2\text{항}),\ (㉠\text{의 } x^4\text{항})$$

일 때 나타난다.
(i) ㉠에서 x^2항은 $r=2$인 경우이므로

$${}_4C_2\times 2^2x^2=24x^2$$

(ii) ㉠에서 x^4항은 $r=4$인 경우이므로

$${}_4C_4\times 2^4x^4=16x^4$$

(i), (ii)에서 x^4의 계수는

$$a\times 24+16=24a+16$$

따라서 $24a+16=-56$이므로

$$24a=-72 \qquad \therefore a=-3$$

즉 주어진 식은 $(-3x^2+1)(2x+1)^4$이고 이 식의 전개식에서 x^3항은

$$-3x^2\times(㉠\text{의 } x\text{항}),\ (㉠\text{의 } x^3\text{항})$$

일 때 나타난다.
(iii) ㉠에서 x항은 $r=1$인 경우이므로

$${}_4C_1\times 2x=8x$$

(iv) ㉠에서 x^3항은 $r=3$인 경우이므로

$${}_4C_3\times 2^3x^3=32x^3$$

(iii), (iv)에서 구하는 x^3의 계수는

$$-3\times 8+32=8$$

답 8

0123 ${}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5+{}_8C_6+{}_9C_7$

$$={}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5+{}_8C_6+{}_9C_7-{}_3C_0$$
$$={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5+{}_8C_6+{}_9C_7-{}_3C_0$$
$$={}_5C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5+{}_8C_6+{}_9C_7-{}_3C_0$$
$$\vdots$$
$$={}_9C_6+{}_9C_7-{}_3C_0$$
$$={}_{10}C_7-{}_3C_0={}_{10}C_3-1$$

답 ①

0124 $(1+2x)^n$의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r(2x)^r={}_nC_r\times 2^rx^r$$

x^4항은 $4\le n\le 10$인 경우에만 나오므로 x^4의 계수는 $(1+2x)^4$, $(1+2x)^5$, $\cdots$, $(1+2x)^{10}$의 각각의 전개식의 x^4의 계수를 더하면 된다.
$(1+2x)^4$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_4C_4\times 2^4$
$(1+2x)^5$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_5C_4\times 2^4$
$\vdots$
$(1+2x)^{10}$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_{10}C_4\times 2^4$
따라서 구하는 x^4의 계수는

$${}_4C_4\times 2^4+{}_5C_4\times 2^4+{}_6C_4\times 2^4+\cdots+{}_{10}C_4\times 2^4$$
$$=2^4({}_4C_4+{}_5C_4+{}_6C_4+\cdots+{}_{10}C_4)$$
$$=2^4({}_5C_5+{}_5C_4+{}_6C_4+\cdots+{}_{10}C_4)$$
$$=2^4({}_6C_5+{}_6C_4+\cdots+{}_{10}C_4)$$
$$\vdots$$
$$=2^4({}_{10}C_5+{}_{10}C_4)$$
$$=2^4\times{}_{11}C_5=2^5\times 231$$
$$\therefore k=231$$

답 ③

0125 ${}_{2n+1}C_0+{}_{2n+1}C_2+{}_{2n+1}C_4+{}_{2n+1}C_6+\cdots+{}_{2n+1}C_{2n}$
$=2^{(2n+1)-1}=2^{2n}$
이므로

$${}_{2n+1}C_2+{}_{2n+1}C_4+{}_{2n+1}C_6+\cdots+{}_{2n+1}C_{2n}$$
$$=2^{2n}-{}_{2n+1}C_0$$
$$=2^{2n}-1$$

즉 $2^{2n}-1=255$이므로 $2^{2n}=256=2^8$

$$\therefore n=4$$

답 4

0126 ㄱ. ${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_9+{}_{10}C_{10}=2^{10}$이므로

$${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_9=2^{10}-{}_{10}C_{10}$$
$$=2^{10}-1 \text{ (참)}$$

ㄴ. ${}_4C_0-{}_4C_1+{}_4C_2-{}_4C_3+{}_4C_4=0$ (거짓)

ㄷ. ${}_{13}C_0+{}_{13}C_2+{}_{13}C_4+{}_{13}C_6+{}_{13}C_8+{}_{13}C_{10}+{}_{13}C_{12}=2^{13-1}=2^{12}$ 이므로

$${}_{13}C_2+{}_{13}C_4+{}_{13}C_6+{}_{13}C_8+{}_{13}C_{10}+{}_{13}C_{12}$$
$$=2^{12}-{}_{13}C_0=2^{12}-1 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

0127 $(x+1)^{10}={}_{10}C_0x^{10}+{}_{10}C_1x^9+{}_{10}C_2x^8+\cdots+{}_{10}C_{10}$

이 식에 $x=2$를 대입하면

$$3^{10}={}_{10}C_0\times2^{10}+{}_{10}C_1\times2^9+{}_{10}C_2\times2^8+\cdots+{}_{10}C_{10}$$
$$\therefore {}_{10}C_1\times2^9+{}_{10}C_2\times2^8+{}_{10}C_3\times2^7+\cdots+{}_{10}C_9\times2+{}_{10}C_{10}$$
$$=3^{10}-{}_{10}C_0\times2^{10}=3^{10}-2^{10}$$

답 ②

0128 $(x-1)^{11}$

$=_{11}C_0x^{11}+{}_{11}C_1x^{10}\times(-1)+{}_{11}C_2x^9\times(-1)^2+\cdots$
$+{}_{11}C_{11}(-1)^{11}$

이 식에 $x=10$을 대입하면

$$9^{11}$$
$$={}_{11}C_0\times10^{11}+{}_{11}C_1\times10^{10}\times(-1)+\cdots$$
$$+{}_{11}C_9\times10^2\times(-1)^9+{}_{11}C_{10}\times10\times(-1)^{10}$$
$$+{}_{11}C_{11}(-1)^{11}$$
$$=10^2\{{}_{11}C_0\times10^9+{}_{11}C_1\times10^8\times(-1)+\cdots$$
$$+{}_{11}C_9(-1)^9\}$$
$$+109$$

이때

$10^2\{{}_{11}C_0\times10^9+{}_{11}C_1\times10^8\times(-1)+\cdots+{}_{11}C_9(-1)^9\}$은 100으로 나누어떨어지므로 9^{11}을 100으로 나누었을 때의 나머지는 109를 100으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

따라서 구하는 나머지는 9이다. 답 **9**

0129 $f(1)+f(2)=2$이므로

$f(1)=0,\ f(2)=2$ 또는 $f(1)=1,\ f(2)=1$
또는 $f(1)=2,\ f(2)=0$ ⋯ 1단계

이때 $f(3),\ f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 Y의 원소 0, 1, 2, 3, 4의 5개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$ ⋯ 2단계

따라서 구하는 함수의 개수는

$3\times25=75$ ⋯ 3단계

답 **75**

채점 요소		비율
1단계	$f(1)+f(2)=2$를 만족시키는 $f(1),\ f(2)$의 값 구하기	40 %
2단계	$f(3),\ f(4)$의 값을 정하는 경우의 수 구하기	40 %
3단계	함수의 개수 구하기	20 %

0130 3의 배수는 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이다.

이때 1, 1, 1, 2, 2, 3 중에서 4개를 택하여 그 합이 3의 배수가 되는 경우는

1, 1, 1, 3 또는 1, 1, 2, 2 ⋯ 1단계

1, 1, 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!\times2!}=6$$ ⋯ 2단계

따라서 구하는 3의 배수의 개수는

$4+6=10$ ⋯ 3단계

답 **10**

채점 요소		비율
1단계	4개의 숫자의 합이 3의 배수인 경우 구하기	40 %
2단계	1, 1, 1, 3과 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수 구하기	50 %
3단계	3의 배수의 개수 구하기	10 %

0131 (i) 짜장면을 3인분 이상 주문하는 경우

먼저 짜장면을 3인분 주문하고 짜장면, 짬뽕, 볶음밥 중에서 5인분을 더 주문하면 된다.

따라서 이 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$a={}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$ ⋯ 1단계

(ii) 짜장면, 짬뽕, 볶음밥을 각각 적어도 2인분씩 주문하는 경우

먼저 짜장면, 짬뽕, 볶음밥을 각각 2인분씩 주문하고 짜장면, 짬뽕, 볶음밥 중에서 2인분을 더 주문하면 된다.

따라서 이 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$b={}_3H_2={}_4C_2=6$ ⋯ 2단계

(i), (ii)에서 $a+b=27$ ⋯ 3단계

답 **27**

채점 요소		비율
1단계	a의 값 구하기	40 %
2단계	b의 값 구하기	40 %
3단계	$a+b$의 값 구하기	20 %

0132 $(3x+k)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r(3x)^{6-r}k^r={}_6C_r\times3^{6-r}k^rx^{6-r}$ ⋯ 1단계

x^3항은 $6-r=3$, 즉 $r=3$인 경우이므로

${}_6C_3\times3^3k^3x^3=540k^3x^3$ ⋯ 2단계

x^2항은 $6-r=2$, 즉 $r=4$인 경우이므로

${}_6C_4\times3^2k^4x^2=135k^4x^2$ ⋯ 3단계

이때 x^3의 계수와 x^2의 계수가 같으므로

$540k^3=135k^4$

$\therefore k=4\ (\because k>0)$ ⋯ 4단계

답 **4**

채점 요소		비율
1단계	전개식의 일반항 구하기	20 %
2단계	x^3의 계수 구하기	30 %
3단계	x^2의 계수 구하기	30 %
4단계	k의 값 구하기	20 %

0133 전략 택한 7장의 카드 중에서 짝수가 적혀 있는 카드와 홀수가 적혀 있는 카드의 장수에 따라 경우를 나누어 생각한다.

서로 이웃한 2장의 카드에 적혀 있는 수의 곱 모두가 짝수가 되려면 홀수가 적혀 있는 카드끼리 이웃하지 않아야 한다.

이때 8장의 카드 중에서 짝수가 적혀 있는 카드와 홀수가 적혀 있는 카드는 각각 4장이다.

(i) 짝수가 적혀 있는 카드 3장과 홀수가 적혀 있는 카드 4장을 택하는 경우

홀수 1, 1, 3, 3이 적혀 있는 카드 4장을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!\times2!}=6$$

홀수가 적혀 있는 카드 사이사이에 짝수 2, 2, 2 또는 2, 2, 4가 적혀 있는 카드 3장을 나열하는 경우의 수는

$$1+\frac{3!}{2!}=4$$

따라서 이 경우의 수는

$$6\times4=24$$

(ii) 짝수가 적혀 있는 카드 4장과 홀수가 적혀 있는 카드 3장을 택하는 경우

짝수 2, 2, 2, 4가 적혀 있는 카드 4장을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

짝수가 적혀 있는 카드 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중에서 3개를 택하여 홀수 1, 1, 3 또는 1, 3, 3이 적혀 있는 카드 3장을 나열하는 경우의 수는

$${}_5C_3\times\left(\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}\right)=60$$

따라서 이 경우의 수는

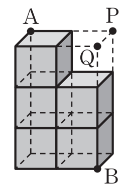
$$4\times60=240$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$24+240=264$$

답 ①

0134 전략 가로, 세로, 아래로 한 칸 이동하는 것을 각각 a, b, c로 생각하고 같은 것이 있는 순열의 수를 이용한다.



오른쪽 그림과 같이 지날 수 없는 모서리를 점선으로 연결하고 두 점 P, Q를 잡자.

가로로 한 칸 이동하는 것을 a, 세로로 한 칸 이동하는 것을 b, 아래로 한 칸 이동하는 것을 c라 하면 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 a, a, b, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{6!}{2!\times3!}=60$

(i) A → P → B로 가는 경우의 수는 $1\times\frac{4!}{3!}=4$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}\times1=3$

(iii) A → P → Q → B로 가는 경우의 수는 $1\times1\times1=1$

이상에서 꼭짓점 A에서 꼭짓점 P 또는 꼭짓점 Q를 지나 꼭짓점 B까지 가는 경우의 수는

$$4+3-1=6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$60-6=54$$

답 **54**

0135 전략 $({}_nC_r)^2={}_nC_r\times{}_nC_{n-r}$임을 이용한다.

$(1+x)^{15}(1+x)^{15}$의 전개식의 일반항은

$${}_{15}C_r x^r\times{}_{15}C_s x^s={}_{15}C_r\times{}_{15}C_s x^{r+s}$$

(단, $0\le r\le15$, $0\le s\le15$)

이때 x^{15}항은 $r+s=15$인 경우이므로 이를 만족시키는 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$$(0, 15), (1, 14), (2, 13), \cdots, (15, 0)$$

따라서 x^{15}의 계수는

$$\begin{aligned}&{}_{15}C_0\times{}_{15}C_{15}+{}_{15}C_1\times{}_{15}C_{14}+{}_{15}C_2\times{}_{15}C_{13}+\cdots\\&\quad+{}_{15}C_{15}\times{}_{15}C_0\\&={}_{15}C_0\times{}_{15}C_0+{}_{15}C_1\times{}_{15}C_1+{}_{15}C_2\times{}_{15}C_2+\cdots\\&\quad+{}_{15}C_{15}\times{}_{15}C_{15}\\&=({}_{15}C_0)^2+({}_{15}C_1)^2+({}_{15}C_2)^2+\cdots+({}_{15}C_{15})^2\end{aligned}$$

이때 $(1+x)^{15}(1+x)^{15}$, 즉 $(1+x)^{30}$의 전개식에서 x^{15}의 계수는 ${}_{30}C_{15}$이므로

$$({}_{15}C_0)^2+({}_{15}C_1)^2+({}_{15}C_2)^2+\cdots+({}_{15}C_{15})^2={}_{30}C_{15}$$

따라서 $n=30$, $r=15$이므로

$$n+r=45$$

답 **45**

02 확률의 뜻과 활용

교과서 문제 정복하기

본책 025쪽, 027쪽

0136 답 (1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
(2) $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$
(3) $\{2, 4, 6\}$
(4) $\{1, 2, 3, 6\}$

0137 표본공간을 S라 하면
$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
$A=\{3, 6, 9\}$, $B=\{1, 3, 9\}$
(1) $A\cup B=\{1, 3, 6, 9\}$
(2) $A\cap B=\{3, 9\}$
(3) $A^C=\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$
(4) $B^C=\{2, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$
답 (1) $\{1, 3, 6, 9\}$ (2) $\{3, 9\}$
(3) $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$ (4) $\{2, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$

0138 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면
$A=\{\mathrm{HT}, \mathrm{TH}\}$, $B=\{\mathrm{HT}, \mathrm{TH}, \mathrm{TT}\}$, $C=\{\mathrm{HH}\}$
$\therefore A\cap B=\{\mathrm{HT}, \mathrm{TH}\}$, $A\cap C=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$
따라서 서로 배반사건인 두 사건은 A와 C, B와 C이다.
답 A와 C, B와 C

0139 한 개의 주사위를 던질 때, 모든 경우의 수는 6이고
$A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 3, 5\}$
(1) $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
(2) $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
(3) $A\cup B=\{1, 2, 3, 5\}$이므로
$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$
(4) $A\cap B=\{3, 5\}$이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{1}{3}$

0140 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$5!=120$
(1) A를 가장 앞에 세우는 경우의 수는
$4!=24$
따라서 구하는 확률은
$\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$
(2) D, E를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는
$4!=24$
D, E가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!=2$
따라서 D, E를 이웃하게 세우는 경우의 수는
$24\times2=48$
이므로 구하는 확률은
$\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$
답 (1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{2}{5}$

0141 $\frac{9900}{10000}=\frac{99}{100}$ 답 $\frac{99}{100}$

0142 $\frac{(4\text{가 적힌 영역의 넓이})}{(\text{전체 과녁의 넓이})}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

0143 답 (1) 0 (2) 1

0144 답 (1) 1 (2) 0

0145 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\frac{2}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{10}=\frac{11}{20}$ 답 $\frac{11}{20}$

0146 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서
$\frac{5}{6}=\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-\mathrm{P}(A\cap B)$
$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{30}$ 답 $\frac{1}{30}$

0147 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에서
$0.7=0.3+\mathrm{P}(B)$ $\therefore \mathrm{P}(B)=0.4$ 답 0.4

0148 (1) 3의 배수가 적힌 공을 꺼내는 사건을 A, 4의 배수가 적힌 공을 꺼내는 사건을 B라 하면 $A\cap B$는 12의 배수가 적힌 공을 꺼내는 사건이므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{13}{40}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{10}{40}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{40}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\frac{13}{40}+\frac{10}{40}-\frac{3}{40}=\frac{1}{2}$
(2) 5의 배수가 적힌 공을 꺼내는 사건을 A, 9의 배수가 적힌 공을 꺼내는 사건을 B라 하면
$\mathrm{P}(A)=\frac{8}{40}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{4}{40}$
이때 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은
40 이하의 자연수 중에서 5의 배수이면서 9의 배수인 수, 즉 45의 배수는 없다.
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$
$=\frac{8}{40}+\frac{4}{40}=\frac{3}{10}$
답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{10}$

0149 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ 답 $\frac{5}{6}$

0150 적어도 한 개는 앞면이 나오는 사건을 A라 하면 $\boxed{A^C}$는 모두 뒷면이 나오는 사건이다.
서로 다른 3개의 동전을 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는
$2\times2\times2=8$
이므로 모두 뒷면이 나올 확률은
$\mathrm{P}(\boxed{A^C})=\boxed{\frac{1}{8}}$
따라서 적어도 한 개는 앞면이 나올 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{8}=\boxed{\frac{7}{8}}$
답 A^C, A^C, $\frac{1}{8}$, $\frac{7}{8}$

0151 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는
$6\times6=36$
(1) 두 눈의 수의 곱이 홀수이려면 두 눈의 수가 모두 홀수이어야 하므로 두 눈의 수의 곱이 홀수인 경우의 수는
$3\times3=9$
따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$
(2) 두 눈의 수의 곱이 짝수인 사건을 A라 하면 A^C는 두 눈의 수의 곱이 홀수인 사건이므로 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{3}{4}$

유형 익히기

• 본책 028~034쪽

0152 $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{1, 3, 5\}$, $C=\{3, 6\}$이므로
$A\cap B=\varnothing$, $A\cap C=\{6\}$, $B\cap C=\{3\}$
따라서 서로 배반사건인 것은 A와 B이다. 답 ㄱ

0153 ㄱ. $A\cap(A^C\cup B)$
$=\{1, 3, 6\}\cap\{2, 3, 4, 5, 7, 8\}=\{3\}$
따라서 A와 $A^C\cup B$는 서로 배반사건이 아니다.
ㄴ. $A\cap(B^C\cap C)=\{1, 3, 6\}\cap\{5\}=\varnothing$
따라서 A와 $B^C\cap C$는 서로 배반사건이다.
ㄷ. $A\cap(B\cap C^C)=\{1, 3, 6\}\cap\{4\}=\varnothing$
따라서 A와 $B\cap C^C$는 서로 배반사건이다.
이상에서 사건 A와 서로 배반사건인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

0154 $A=\{3, 6, 9\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$
A와 서로 배반인 사건은 A^C의 부분집합이고, B와 서로 배반인 사건은 B^C의 부분집합이다.
따라서 두 사건 A, B와 모두 배반인 사건은
$A^C\cap B^C=\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}\cap\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$
$=\{1, 4, 8, 10\}$
의 부분집합이므로 구하는 사건의 개수는
$2^4=16$ 답 16

0155 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는
$6\times6=36$
나오는 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 두 눈의 수의 차가 3인 경우는
(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)의 6가지
(ii) 두 눈의 수의 차가 4인 경우는
(1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)의 4가지
(iii) 두 눈의 수의 차가 5인 경우는
(1, 6), (6, 1)의 2가지
이상에서 두 눈의 수의 차가 3 이상인 경우의 수는
$6+4+2=12$
따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0156 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는
$5\times4=20$
$a\times b>50$을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는
(7, 8), (9, 6), (9, 8)의 3개
따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{20}$ 답 $\frac{3}{20}$

0157 집합 A의 부분집합의 개수는
$2^6=64$
집합 A의 부분집합 중 원소 2, 5를 모두 포함하는 집합의 개수는
$2^{6-2}=2^4=16$
따라서 구하는 확률은 $\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$ 답 ③

RPM 비법노트

부분집합의 개수
집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여
① A의 특정한 원소 k개를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수
⇨ 2^{n-k}
② A의 특정한 원소 l개를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수
⇨ 2^{n-l}
③ A의 원소 중에서 k개는 반드시 원소로 갖고, l개는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수
⇨ 2^{n-k-l}

0158 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\times6=36$ ⋯ 1단계

이차방정식 $x^2-2ax+b=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 허근을 가지려면

$\frac{D}{4}=a^2-b<0 \quad \therefore a^2<b$ ⋯ 2단계

$a^2<b$를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$,

$(2, 5)$, $(2, 6)$의 7개 ⋯ 3단계

따라서 구하는 확률은 $\frac{7}{36}$ ⋯ 4단계

답 $\frac{7}{36}$

	채점 요소	비율
1단계	모든 경우의 수 구하기	20 %
2단계	a, b에 대한 부등식 구하기	30 %
3단계	이차방정식이 허근을 갖는 경우의 수 구하기	30 %
4단계	확률 구하기	20 %

0159 책 7권을 일렬로 꽂는 경우의 수는

$7!=5040$

만화책 3권을 한 권으로 생각하여 5권을 일렬로 꽂는 경우의 수는

$5!=120$

만화책 3권의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 만화책끼리 이웃하게 꽂는 경우의 수는

$120\times6=720$

이므로 구하는 확률은 $\frac{720}{5040}=\frac{1}{7}$

답 ②

0160 8개의 문자 p, r, e, v, i, o, u, s를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$8!=40320$ ⋯ 1단계

p와 s 사이에 들어가는 2개의 문자를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_6P_2=30$

p, s와 그 사이에 나열한 문자 2개를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

p와 s가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 p와 s 사이에 2개의 문자를 나열하는 경우의 수는

$30\times120\times2=7200$ ⋯ 2단계

이므로 구하는 확률은

$\frac{7200}{40320}=\frac{5}{28}$ ⋯ 3단계

답 $\frac{5}{28}$

	채점 요소	비율
1단계	모든 경우의 수 구하기	30 %
2단계	p와 s 사이에 2개의 문자를 나열하는 경우의 수 구하기	50 %
3단계	확률 구하기	20 %

0161 6명이 일렬로 서는 경우의 수는

$6!=720$

남학생 4명 중에서 2명이 양 끝에 서는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

나머지 4명의 학생 중에서 여학생 2명을 한 명으로 생각하여 3명이 일렬로 서는 경우의 수는

$3!=6$

여학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 양 끝에는 남학생이 서고 여학생끼리는 서로 이웃하게 서는 경우의 수는

$12\times6\times2=144$

이므로 구하는 확률은

$\frac{144}{720}=\frac{1}{5}$

답 $\frac{1}{5}$

0162 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 모두 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리 자연수의 개수는

$5!=120$

이때 35000보다 큰 자연수는 35□□□ 또는 4□□□□ 또는 5□□□□ 꼴이다.

(i) 35□□□ 꼴의 자연수의 개수는

$3!=6$

(ii) 4□□□□ 꼴의 자연수의 개수는

$4!=24$

(iii) 5□□□□ 꼴의 자연수의 개수는

$4!=24$

이상에서 35000보다 큰 자연수의 개수는

$6+24+24=54$

이므로 구하는 확률은

$\frac{54}{120}=\frac{9}{20}$

답 $\frac{9}{20}$

0163 세 사람이 4개의 호텔 중에서 한 곳을 택하여 투숙하는 경우의 수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

세 사람이 서로 다른 호텔에 투숙하는 경우의 수는

${}_4P_3=24$

따라서 구하는 확률은

$\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$

답 $\frac{3}{8}$

02 확률의 뜻과 활용

0164 서로 다른 6개의 과일을 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3\Pi_6=3^6=729$$

이때 먼저 사과와 귤을 A에게 주고 나머지 4개의 과일을 3명에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3\Pi_4=3^4=81$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{81}{729}=\frac{1}{9}$$

답 $\frac{1}{9}$

0165 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허용하여 4개를 뽑아 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$${}_5\Pi_4=5^4=625$$

이때 홀수이려면 일의 자리 숫자가 1, 3, 5 중 하나이어야 하므로 홀수의 개수는

$${}_5\Pi_3\times3=5^3\times3=375$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{375}{625}=\frac{3}{5}$$

답 ⑤

0166 집합 X에서 집합 Y로의 함수 f의 개수는

$${}_5\Pi_4=5^4=625$$

집합 X의 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$를 만족시키는 함수 f는 일대일함수이므로 그 개수는

$${}_5P_4=120$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{120}{625}=\frac{24}{125}$$

답 $\frac{24}{125}$

0167 6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!\times3!}=60$$

2, 2, 2를 하나로 생각하여 4개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$$

답 ②

0168 7개의 문자 C, E, C, I, L, I, A를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2!\times2!}=1260$$

이때 자음은 C, C, L의 3개, 모음은 E, I, I, A의 4개이므로 자음과 모음을 번갈아 나열하려면 모음을 일렬로 나열하고 그 사이사이에 자음을 나열하면 된다.

따라서 자음과 모음을 번갈아 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}\times\frac{3!}{2!}=36$$

이므로 구하는 확률은

$$\frac{36}{1260}=\frac{1}{35}$$

답 $\frac{1}{35}$

0169 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{8!}{4!\times4!}=70$$

A 지점에서 C 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}=3$$

C 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!\times2!}=10$$

따라서 A 지점에서 C 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$3\times10=30$$

이므로 구하는 확률은

$$\frac{30}{70}=\frac{3}{7}$$

답 $\frac{3}{7}$

0170 집합 X에서 X로의 함수 f의 개수는

$${}_4\Pi_4=4^4=256$$

$1+1+1+3=6$, $1+1+2+2=6$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=6$을 만족시키는 함수 f의 개수는 1, 1, 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수의 합과 같다.

(i) 1, 1, 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

(ii) 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!\times2!}=6$$

(i), (ii)에서 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=6$을 만족시키는 함수 f의 개수는

$$4+6=10$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{10}{256}=\frac{5}{128}$$

답 $\frac{5}{128}$

0171 6명 중에서 3명의 대표를 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_3=20$$

유미는 대표로 뽑고 준서는 대표로 뽑지 않는 경우의 수는 유미와 준서를 제외한 나머지 4명 중에서 2명의 대표를 뽑고 유미를 포함시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_4C_2=6$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

답 ③

0172 10개의 공 중에서 5개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$_{10}C_5=252$

흰 공 4개 중에서 2개, 검은 공 6개 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

$_4C_2\times{}_6C_3=120$

따라서 구하는 확률은 $\frac{120}{252}=\frac{10}{21}$

답 $\frac{10}{21}$

0173 20개의 제비 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는

$_{20}C_2$

상자에 들어 있는 당첨 제비의 개수를 n이라 하면 n개의 당첨 제비 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는 $_nC_2$이므로

$\frac{_nC_2}{_{20}C_2}=\frac{1}{19}$, $\frac{n(n-1)}{380}=\frac{1}{19}$

$n^2-n-20=0$, $(n+4)(n-5)=0$

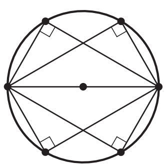
$\therefore n=5$ ($\because n>0$)

따라서 당첨 제비의 개수는 5이다.

답 5

0174 6개의 점 중에서 임의로 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$_6C_3=20$ … 1단계



오른쪽 그림과 같이 하나의 지름에 대하여 4개의 직각삼각형을 만들 수 있고, 6개의 점으로 만들 수 있는 지름은 3개이므로 직각삼각형의 개수는

$4\times3=12$ … 2단계

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$ … 3단계

답 $\frac{3}{5}$

채점 요소	비율
1단계 6개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수 구하기	20 %
2단계 만들 수 있는 직각삼각형의 개수 구하기	60 %
3단계 확률 구하기	20 %

0175 10개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$_{10}C_2=45$

주머니에 들어 있는 흰 공의 개수를 n이라 하면 흰 공 2개를 꺼내는 경우의 수는

$_nC_2$

이때 여러 번의 시행에서 15번에 2번 꼴로 모두 흰 공을 꺼냈으므로 통계적 확률은 $\frac{2}{15}$이다.

즉 $\frac{_nC_2}{45}=\frac{2}{15}$이므로 $\frac{n(n-1)}{2}=6$

$n^2-n-12=0$, $(n+3)(n-4)=0$

$\therefore n=4$ ($\because n>0$)

따라서 주머니 속에는 4개의 흰 공이 들어 있다고 할 수 있다.

답 4개

0176 전체 운전자 수는

$272+160+82+106=620$

따라서 구하는 확률은

$\frac{160}{620}=\frac{8}{31}$

답 $\frac{8}{31}$

0177 60점 이상 80점 미만인 학생 수는

$26+18=44$

따라서 구하는 확률은

$\frac{44}{100}=\frac{11}{25}$

답 $\frac{11}{25}$

0178 ㄱ. 임의의 사건 A에 대하여

$0\le P(A)\le1$ (참)

ㄴ. [반례] $P(A)=\frac{1}{5}$, $P(B)=\frac{2}{5}$이면

$P(A)+P(B)=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

이때 $P(S)=1$이므로

$P(A)+P(B)<P(S)$ (거짓)

ㄷ. $P(S)=1$, $P(\varnothing)=0$이므로

$1-P(S)=P(\varnothing)$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

0179 ㄱ. $0\le P(A)\le1$, $0\le P(B)\le1$이므로

$0\le P(A)P(B)\le1$ (참)

ㄴ. A와 A^C는 서로 배반사건이므로

$P(A\cup A^C)=P(A)+P(A^C)$

이때 $P(A\cup A^C)=P(S)=1$이므로

$P(A)+P(A^C)=1$ (참)

ㄷ. $\varnothing\subset(A\cap B)\subset S$이므로

$P(\varnothing)\le P(A\cap B)\le P(S)$

$\therefore 0\le P(A\cap B)\le1$ (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0180 ㄱ. [반례] $S=\{1, 2, 3\}$, $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3\}$이면 $A\cup B=S$이지만

$P(A)+P(B)=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\ne1$ (거짓)

ㄴ. $0\le P(A)\le1$, $0\le P(B)\le1$이므로

$0\le P(A)+P(B)\le2$ (참)

ㄷ. [반례] $S=\{1, 2, 3\}$, $A=\{1, 2\}$, $B=\{1\}$이면

$P(A)+P(B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$

이지만 $A\cap B\ne\varnothing$이므로 A와 B는 서로 배반사건이 아니다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ㄴ

02 확률의 뜻과 활용

0181 $\mathrm{P}(A^c \cup B^c)=\mathrm{P}((A\cap B)^c)=1-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{6}$

이므로 $\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

0182 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{3}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(A^c\cap B^c)=\mathrm{P}((A\cup B)^c)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ 답 ⑤

0183 $\mathrm{P}(A^c\cap B^c)=\mathrm{P}((A\cup B)^c)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{5}$

이므로 $\quad \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{4}{5}$

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^c)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{4}{5}=\frac{1}{3}+\frac{3}{5}-\mathrm{P}(A\cap B) \qquad \therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{15}$

이때 $A=(A-B)\cup(A\cap B)$이고 두 사건 $A-B$, $A\cap B$는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A-B)+\mathrm{P}(A\cap B)$

$\frac{1}{3}=\mathrm{P}(A-B)+\frac{2}{15}$

$\therefore \mathrm{P}(A-B)=\frac{1}{5}$ 답 ④

RPM 비법 노트

두 사건 A, B에 대하여

$\mathrm{P}(A-B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\mathrm{P}(B-A)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

0184 A와 B^c는 서로 배반사건이므로

$A\cap B^c=\varnothing \qquad \therefore A\subset B$

따라서 $A\cup B=B$이므로

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{8}$

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{13}{16}$에서

$\mathrm{P}(A)+\frac{5}{8}=\frac{13}{16} \qquad \therefore \mathrm{P}(A)=\frac{3}{16}$

이때 $B=A\cup(A^c\cap B)$이고 두 사건 A와 $A^c\cap B$는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^c\cap B)$

$\frac{5}{8}=\frac{3}{16}+\mathrm{P}(A^c\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A^c\cap B)=\frac{7}{16}$ 답 $\frac{7}{16}$

0185 두 상자 A, B에서 각각 카드를 한 장씩 꺼내는 모든 경우의 수는

$4\times5=20$

두 카드에 적힌 숫자의 합이 4 이하인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라 할 때, 두 카드에 적힌 숫자를 순서쌍으로 나타내면

$A=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1)\}$,

$B=\{(1, 2), (1, 5), (3, 3), (5, 1), (5, 4), (7, 2), (7, 5)\}$,

$A\cap B=\{(1, 2)\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{4}{20}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{7}{20}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{20}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{4}{20}+\frac{7}{20}-\frac{1}{20}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0186 A 가수를 좋아하는 학생을 택하는 사건을 A, B 가수를 좋아하는 학생을 택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{15}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{2}{15}=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

0187 $f(1)=0$인 사건을 A, $f(2)=1$인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\Pi_2}{{}_4\Pi_3}=\frac{4^2}{4^3}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_4\Pi_2}{{}_4\Pi_3}=\frac{4^2}{4^3}=\frac{1}{4}$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_4\Pi_1}{{}_4\Pi_3}=\frac{4^1}{4^3}=\frac{1}{16}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$ 답 $\frac{7}{16}$

0188 이차방정식 $10x^2-7ax+a^2=0$에서

$(2x-a)(5x-a)=0$

$\therefore x=\frac{a}{2}$ 또는 $x=\frac{a}{5}$

즉 주어진 이차방정식이 정수인 해를 가지려면 a는 2의 배수이거나 5의 배수이어야 한다.

a가 2의 배수인 사건을 A, 5의 배수인 사건을 B라 하면 $A\cap B$는 10의 배수인 사건이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{15}{30}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{6}{30}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{30}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{15}{30}+\frac{6}{30}-\frac{3}{30}=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

0189 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공인 사건을 A, 모두 검은 공인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{3}{28},\ \mathrm{P}(B)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{5}{14}$$

이때 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{28}+\frac{5}{14}=\frac{13}{28}$$

답 $\mathbf{\frac{13}{28}}$

0190 세 수의 합이 홀수이려면 세 수 중 홀수가 1개, 짝수가 2개이거나 세 수가 모두 홀수이어야 한다.
홀수가 적힌 카드 1장과 짝수가 적힌 카드 2장을 뽑는 사건을 A, 홀수가 적힌 카드 3장을 뽑는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{12}{35},$$

$$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{4}{35}$$

이때 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{12}{35}+\frac{4}{35}=\frac{16}{35}$$

답 ④

0191 1학년 학생이 2학년 학생보다 많이 선발되려면 1학년 학생이 4명, 2학년 학생이 2명 또는 1학년 학생이 5명, 2학년 학생이 1명 선발되어야 한다. ··· 1단계
1학년 학생이 4명 선발되는 사건을 A, 1학년 학생이 5명 선발되는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_4\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_6}=\frac{15}{28},$$

$$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_5\mathrm{C}_5\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_6}=\frac{3}{28}$$ ··· 2단계

이때 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{15}{28}+\frac{3}{28}=\frac{9}{14}$$ ··· 3단계

답 $\mathbf{\frac{9}{14}}$

	채점 요소	비율
1단계	1학년 학생이 4명 또는 5명 선발되어야 함을 알기	20 %
2단계	1학년 학생이 4명, 5명 선발될 확률을 각각 구하기	50 %
3단계	1학년 학생이 2학년 학생보다 많이 선발될 확률 구하기	30 %

0192 A와 B가 1열에 이웃하게 앉는 사건을 A, 2열에 이웃하게 앉는 사건을 B라 하자.
1열에서 A와 B가 이웃하게 앉을 두 좌석을 정하는 경우의 수는 2, A와 B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$, A와 B를 제외한 4명이 앉을 좌석을 정하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_4$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2\times2!\times{}_5\mathrm{P}_4}{{}_7\mathrm{P}_6}=\frac{2}{21}$$

2열에서 A와 B가 이웃하게 앉을 두 좌석을 정하는 경우의 수는 3, A와 B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$, A와 B를 제외한 4명이 앉을 좌석을 정하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_4$이므로

$$\mathrm{P}(B)=\frac{3\times2!\times{}_5\mathrm{P}_4}{{}_7\mathrm{P}_6}=\frac{1}{7}$$

이때 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{2}{21}+\frac{1}{7}=\frac{5}{21}$$

답 $\mathbf{\frac{5}{21}}$

0193 적어도 한 개는 빨간 공인 사건을 A라 하면 A^C는 3개 모두 파란 공인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

답 $\mathbf{\frac{4}{5}}$

0194 적어도 한쪽 끝에 남학생을 세우는 사건을 A라 하면 A^C는 양쪽 끝에 모두 여학생을 세우는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_3\mathrm{P}_2\times3!}{5!}=\frac{3}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$$

답 ⑤

0195 서로 이웃하지 않는 부부가 적어도 1쌍 있는 사건을 A라 하면 A^C는 3쌍의 부부가 모두 부부끼리 서로 이웃하는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{3!\times2!\times2!\times2!}{6!}=\frac{1}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$$

답 ④

0196 적어도 1명은 여학생인 사건을 A라 하면 A^C는 2명 모두 남학생인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_{10-n}\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{(10-n)(9-n)}{90}$$

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{13}{15}$이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{13}{15}=\frac{2}{15}$$

따라서 $\frac{(10-n)(9-n)}{90}=\frac{2}{15}$이므로

$$n^2-19n+78=0,\quad (n-6)(n-13)=0$$

$$\therefore n=6\ (\because n\le10)$$

답 **6**

0197 검은 구슬이 2개 이하로 나오는 사건을 A라 하면 A^C는 검은 구슬이 3개 또는 4개 나오는 사건이다.

02 확률의 뜻과 활용

(ⅰ) 검은 구슬이 3개 나올 확률은

$$\frac{{}_{5}C_{3}\times{}_{4}C_{1}}{{}_{9}C_{4}}=\frac{20}{63}$$

(ⅱ) 검은 구슬이 4개 나올 확률은

$$\frac{{}_{5}C_{4}\times{}_{4}C_{0}}{{}_{9}C_{4}}=\frac{5}{126}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\quad P(A^{C})=\frac{20}{63}+\frac{5}{126}=\frac{5}{14}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^{C})=1-\frac{5}{14}=\frac{9}{14}$$

답 $\frac{9}{14}$

0198 할아버지와 할머니가 서로 이웃하지 않는 사건을 A라 하면 A^{C}는 할아버지와 할머니가 서로 이웃하는 사건이므로

$$P(A^{C})=\frac{7!\times 2!}{8!}=\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^{C})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

0199 2문제 이상 맞히는 사건을 A라 하면 A^{C}는 1문제만 맞히거나 모두 틀리는 사건이다.

(ⅰ) 1문제만 맞힐 확률은 $\quad \frac{{}_{5}C_{1}}{{}_{2}\Pi_{5}}=\frac{5}{32}$

(ⅱ) 모두 틀릴 확률은 $\quad \frac{1}{{}_{2}\Pi_{5}}=\frac{1}{32}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\quad P(A^{C})=\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{3}{16}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^{C})=1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$$

답 ⑤

0200 세 자리 자연수가 550 이하인 사건을 A라 하면 A^{C}는 551 이상인 사건이다.

이때 551 이상인 자연수는 56□ 또는 6□□ 꼴이다.

(ⅰ) 56□ 꼴일 확률은 $\quad \frac{{}_{4}P_{1}}{{}_{6}P_{3}}=\frac{1}{30}$

(ⅱ) 6□□ 꼴일 확률은 $\quad \frac{{}_{5}P_{2}}{{}_{6}P_{3}}=\frac{1}{6}$

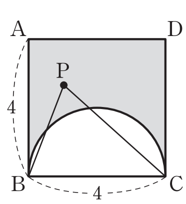
(ⅰ), (ⅱ)에서 $\quad P(A^{C})=\frac{1}{30}+\frac{1}{6}=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^{C})=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

답 $\frac{4}{5}$

0201 삼각형 PBC가 예각삼각형이려면 점 P는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$를 지름으로 하는 반원의 외부에 있어야 한다.



따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square ABCD\text{의 넓이})}=\frac{16-\frac{1}{2}\times\pi\times 2^{2}}{16}=1-\frac{\pi}{8}$$

답 $1-\frac{\pi}{8}$

참고 | 점 P가 $\overline{BC}$를 지름으로 하는 반원 위에 있으면 △PBC는 직각삼각형이 되고, $\overline{BC}$를 지름으로 하는 반원의 내부에 있으면 △PBC는 둔각삼각형이 된다.

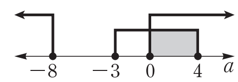
0202 이차방정식 $x^{2}+ax-2a=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 실근을 가지려면

$$D=a^{2}-4\times(-2a)\geq 0$$

$$a^{2}+8a\geq 0, \qquad a(a+8)\geq 0$$

$$\therefore a\leq -8 \text{ 또는 } a\geq 0$$

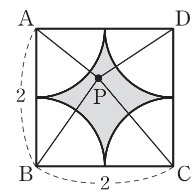
따라서 오른쪽 그림에서 구하는 확률은



$$\frac{4-0}{4-(-3)}=\frac{4}{7}$$

답 ⑤

0203 $\overline{PA}\geq 1$, $\overline{PB}\geq 1$, $\overline{PC}\geq 1$, $\overline{PD}\geq 1$이려면 점 P는 오른쪽 그림과 같이 정사각형의 각 꼭짓점을 중심으로 하는 사분원의 외부에 있어야 한다.



따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square ABCD\text{의 넓이})}=\frac{4-\left(\frac{1}{4}\times\pi\times 1^{2}\right)\times 4}{4}=1-\frac{\pi}{4}$$

답 $1-\frac{\pi}{4}$

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 035~038쪽

0204 나오는 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

$$A=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

$$B=\{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$$

$$C=\{(1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)\}$$

$$\therefore A\cap B=\{(5, 5)\}, A\cap C=\varnothing, B\cap C=\varnothing$$

따라서 서로 배반사건인 것은 A와 C, B와 C이다.

답 ㄴ, ㄷ

0205 한 개의 주사위를 세 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$$6\times 6\times 6=216$$

$a\times b\times c=4$를 만족시키는 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)는

$(1, 1, 4)$, $(1, 4, 1)$, $(4, 1, 1)$,

$(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$의 6개

따라서 구하는 확률은 $\quad \frac{6}{216}=\frac{1}{36}$

답 ①

0206 세 사람이 가위바위보를 한 번 할 때, 모든 경우의 수는

$$3\times 3\times 3=27$$

이기는 한 명을 정하는 경우의 수는 3이고, 이기는 사람이 가위, 바위, 보 중에서 어느 하나를 내면 지는 두 사람이 내는 것은 정해져 있으므로 한 명만 이기는 경우의 수는

$3\times3=9$

따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0207 5명의 학생이 각각 하루씩 청소 당번을 맡는 경우의 수는

$5!=120$

A, B를 한 사람으로 생각하여 네 명의 학생이 각각 하루씩 청소 당번을 맡는 경우의 수는

$4!=24$

A와 B가 청소 당번을 맡은 날을 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 A, B가 연속하여 청소 당번을 맡는 경우의 수는

$24\times2=48$

이므로 구하는 확률은 $\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$ 답 $\frac{2}{5}$

0208 6개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 세 숫자를 뽑아 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$5\times{}_5P_2=100$

이때 짝수는 □□0 또는 □□2 또는 □□4 꼴이다.

(i) □□0 꼴의 자연수의 개수는 ${}_5P_2=20$

(ii) □□2 꼴의 자연수의 개수는 $4\times4=16$

(iii) □□4 꼴의 자연수의 개수는 $4\times4=16$

이상에서 짝수의 개수는

$20+16+16=52$

따라서 구하는 확률은 $\frac{52}{100}=\frac{13}{25}$ 답 $\frac{13}{25}$

0209 9장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$9!$

문자 A가 적혀 있는 카드의 양옆에 숫자가 적혀 있는 카드를 나열하는 경우의 수는

${}_3P_2=6$

문자 A가 적혀 있는 카드와 이 카드의 양옆에 있는 카드 2장을 한 장으로 생각하여 7장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$7!$

따라서 문자 A가 적혀 있는 카드의 양옆에 숫자가 적혀 있는 카드가 놓이도록 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6\times7!$

이므로 구하는 확률은 $\frac{6\times7!}{9!}=\frac{1}{12}$ 답 $\frac{1}{12}$

0210 네 사람이 일렬로 서는 경우의 수는

$4!=24$

네 명을 키가 작은 순서대로 A, B, C, D라 하면 왼쪽에서 세 번째에 선 사람이 자신과 이웃한 두 사람보다 키가 작아야 하므로

□□A□ 또는 A□B□

와 같이 서야 한다.

(i) □□A□와 같이 서는 경우

A를 제외한 나머지 3명이 3개의 자리에 서는 경우의 수는

$3!=6$

(ii) A□B□와 같이 서는 경우

A, B를 제외한 나머지 2명이 2개의 자리에 서는 경우의 수는

$2!=2$

(i), (ii)에서 왼쪽에서 세 번째에 선 사람이 자신과 이웃한 두 사람보다 키가 작도록 서는 경우의 수는

$6+2=8$

따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$ 답 ①

0211 3명의 전학생을 6개의 반에 각각 배정하는 경우의 수는

${}_6\Pi_3=6^3=216$

A와 B를 같은 반에 배정하는 경우의 수는 A, B를 한 사람으로 생각하여 2명을 6개의 반에 각각 배정하는 경우의 수와 같으므로

${}_6\Pi_2=6^2=36$

따라서 구하는 확률은

$\frac{36}{216}=\frac{1}{6}$ 답 ③

0212 집합 X에서 집합 Y로의 함수 f의 개수는

${}_6\Pi_3=6^3=216$

(i) $f(b)=1$인 경우

$f(a)\le1\le f(c)$를 만족시키는 $f(a)$, $f(c)$의 값이 될 수 있는 Y의 원소는 각각 1개, 6개이므로 함수 f의 개수는

$1\times6=6$

(ii) $f(b)=3$인 경우

$f(a)\le3\le f(c)$를 만족시키는 $f(a)$, $f(c)$의 값이 될 수 있는 Y의 원소는 각각 3개, 4개이므로 함수 f의 개수는

$3\times4=12$

(iii) $f(b)=5$인 경우

$f(a)\le5\le f(c)$를 만족시키는 $f(a)$, $f(c)$의 값이 될 수 있는 Y의 원소는 각각 5개, 2개이므로 함수 f의 개수는

$5\times2=10$

이상에서 주어진 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$6+12+10=28$

따라서 구하는 확률은 $\frac{28}{216}=\frac{7}{54}$ 답 $\frac{7}{54}$

0213 6개의 문자 b, a, n, a, n, a를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times2!}=60$

양 끝에 n을 나열하고 나머지 문자 b, a, a, a를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{60}=\frac{1}{15}$ 답 ①

0214 6장의 카드 중에서 3장의 카드를 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_3=20$$

세 수의 곱이 홀수이려면 세 수가 모두 홀수이어야 하므로 홀수가 적힌 3장의 카드 중에서 3장을 뽑는 경우의 수는

$${}_3C_3=1$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{20}$ 답 $\frac{1}{20}$

0215 5명의 자리를 배정하는 경우의 수는 $5!=120$

처음과 같은 자리에 배정받을 학생 2명을 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2=10$$

나머지 3명의 학생을 처음과 다른 자리에 배정하는 경우의 수는

$$2$$

따라서 처음과 같은 자리에 배정받은 학생이 2명인 경우의 수는

$$10\times2=20$$

이므로 구하는 확률은 $\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$ 답 ①

참고 | 세 학생 A, B, C가 이 순서대로 일렬로 앉아 있었다고 하면 이 3명이 처음과 다른 자리에 배정받는 경우는

B, C, A 또는 C, A, B

의 순서대로 앉는 2가지이다.

0216 6명의 선수를 2명씩 짝 지어 3개의 팀을 만드는 경우의 수는 ${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}=15$

이때 남자 선수 1명과 여자 선수 1명으로 이루어진 팀을 만들면 남은 여자 선수 1명은 남자 선수 1명과 팀을 이루어야 한다.

즉 남자 선수 1명과 여자 선수 1명으로 이루어진 팀을 만드는 경우의 수는 남자 선수 4명 중에서 여자 선수 2명과 각각 팀을 이룰 2명을 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4P_2=12$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$ 답 $\frac{4}{5}$

RPM 비법 노트

n명을 p명, q명, r명 $(p+q+r=n)$의 세 팀으로 나누는 경우의 수는 다음과 같다.

(1) p, q, r가 모두 다른 수인 경우

⇨ ${}_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_rC_r$

(2) p, q, r 중 어느 두 수가 같은 경우

⇨ ${}_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_rC_r\times\frac{1}{2!}$

(3) p, q, r가 모두 같은 수인 경우

⇨ ${}_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_rC_r\times\frac{1}{3!}$

0217 주머니에 들어 있는 흰 공의 개수를 x라 하면 검은 공의 개수는 $40-x$이므로

$$p=\frac{{}_xC_2}{{}_{40}C_2},\ q=\frac{{}_xC_1\times{}_{40-x}C_1}{{}_{40}C_2}$$

이때 $\frac{{}_xC_2}{{}_{40}C_2}=\frac{{}_xC_1\times{}_{40-x}C_1}{{}_{40}C_2}$, 즉 ${}_xC_2={}_xC_1\times{}_{40-x}C_1$이므로

$$\frac{x(x-1)}{2}=x(40-x)$$

$x>0$이므로 $x-1=80-2x$

$\therefore x=27$

따라서 주머니에 들어 있는 검은 공의 개수는

$$40-27=13$$

이므로 $r=\frac{{}_{13}C_2}{{}_{40}C_2}=\frac{1}{10}$

$\therefore 60r=60\times\frac{1}{10}=6$ 답 6

0218 방정식 $a+b+c+d=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$${}_4H_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$$

(i) $a=0$인 경우

$a+b+c+d=8$에서 $b+c+d=8$

이때 $b>0$, $c>0$, $d>0$이므로 b, c, d는 자연수이다.

따라서 $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$이라 하면 b', c', d'은 음이 아닌 정수이고 $b+c+d=8$에서

$$(b'+1)+(c'+1)+(d'+1)=8$$

$\therefore b'+c'+d'=5$

즉 이 경우의 순서쌍 (b, c, d)의 개수는 방정식 $b'+c'+d'=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 b', c', d'의 순서쌍 (b', c', d')의 개수와 같으므로

$${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$$

(ii) $a=1$인 경우

$a+b+c+d=8$에서 $b+c+d=7$

이때 $b>1$, $c>1$, $d>1$이므로 b, c, d는 2 이상의 자연수이다.

따라서 이 경우의 순서쌍 (b, c, d)는

$(2, 2, 3)$, $(2, 3, 2)$, $(3, 2, 2)$의 3개

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$$21+3=24$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{165}=\frac{8}{55}$ 답 $\frac{8}{55}$

참고 | $a=2$, $b>2$, $c>2$, $d>20$고 방정식 $a+b+c+d=8$을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)는 존재하지 않는다.

0219 ㄱ. $A\subset B$이면 $n(A)\le n(B)$이므로

$$\frac{n(A)}{n(S)}\le\frac{n(B)}{n(S)}$$

$\therefore \mathrm{P}(A)\le\mathrm{P}(B)$ (참)

ㄴ. $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\le\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$ $(\because \mathrm{P}(A\cap B)\ge0)$ (참)

ㄷ. [반례] $S=\{1, 2, 3\}$, $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3\}$이면
$A\cup B=\{1, 2, 3\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=1$이지만 A는 B의 여사건이 아니다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0220 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에서

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{6}+\mathrm{P}(B) \qquad \therefore \mathrm{P}(B)=\frac{7}{12}$$

$$\therefore \mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$$

답 ②

0221 $\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

이때 $A\cup B=(A\cap B^C)\cup B$이고 두 사건 $A\cap B^C$, B는 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

답 $\frac{5}{6}$

다른 풀이 $A\cap B^C=A-B$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A-B)$$
$$=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$$
$$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

0222 $\mathrm{P}(A\cap B)\le\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A\cap B)\le\mathrm{P}(B)$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)\le\frac{3}{5},\ \mathrm{P}(A\cap B)\le\frac{5}{6}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)\le\frac{3}{5} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 $\mathrm{P}(A\cup B)\le 1$이므로

$$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\le 1$$
$$\frac{3}{5}+\frac{5}{6}-\mathrm{P}(A\cap B)\le 1$$
$$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)\ge\frac{13}{30} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\frac{13}{30}\le\mathrm{P}(A\cap B)\le\frac{3}{5}$

따라서 $M=\frac{3}{5}$, $m=\frac{13}{30}$이므로

$$Mm=\frac{13}{50}$$

답 $\frac{13}{50}$

0223 두 자리 자연수가 홀수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라 하면 $A\cap B$는 홀수이면서 3의 배수인 사건이다.

이때 홀수이려면 일의 자리의 숫자가 1, 3, 5 중 하나이어야 하므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{5\times3}{{}_5\Pi_2}=\frac{15}{5^2}=\frac{3}{5}$$

3의 배수인 두 자리 자연수는

12, 15, 21, 24, 33, 42, 45, 51, 54의 9개

이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{9}{{}_5\Pi_2}=\frac{9}{5^2}=\frac{9}{25}$

홀수이면서 3의 배수인 두 자리 자연수는

15, 21, 33, 45, 51의 5개

이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{{}_5\Pi_2}=\frac{5}{5^2}=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{3}{5}+\frac{9}{25}-\frac{1}{5}=\frac{19}{25}$$

답 $\frac{19}{25}$

0224 B와 D 사이에 적어도 한 명의 학생을 세우는 사건을 A라 하면 A^C는 B와 D를 이웃하게 세우는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{4!\times2!}{5!}=\frac{2}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

0225 접시에 담긴 케이크 중에서 초코 케이크가 2조각 이하인 사건을 A라 하면 A^C는 초코 케이크가 3조각인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3}$$

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{34}{35}$이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{34}{35}=\frac{1}{35}$$

즉 $\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{35}$이므로 ${}_{n+3}\mathrm{C}_3=35$

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}=35$$
$$(n+3)(n+2)(n+1)=7\times6\times5$$
$$\therefore n=4$$

답 4

0226 택한 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이 만들어지는 사건을 A라 하면 A^C는 삼각형이 만들어지지 않는 사건이다.

이때 반원의 지름 위의 5개의 점 중에서 세 점을 택하면 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이 만들어지지 않으므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{12}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$$

답 ④

0227 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 10 이하인 사건을 A라 하면 A^C는 두 수의 합이 11 이상인 사건이다.

이때 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 11 이상이려면 양 끝에 5가 적혀 있는 카드와 6이 적혀 있는 카드를 놓아야 하므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{2!\times4!}{6!}=\frac{1}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$$

답 ⑤

0228 7개의 문자 A, B, C, D, E, F, G를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$7!=5040$ … 1단계

A, B, C를 이 순서대로 나열하려면 A, B, C를 모두 X로 생각하여 X, X, X, D, E, F, G를 일렬로 나열한 후 첫 번째 X를 A로, 두 번째 X를 B로, 세 번째 X를 C로 바꾸면 된다.

따라서 A, B, C를 이 순서대로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{3!}=840$ … 2단계

따라서 구하는 확률은

$\frac{840}{5040}=\frac{1}{6}$ … 3단계

답 $\frac{1}{6}$

채점 요소		비율
1단계	7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수 구하기	30 %
2단계	A, B, C를 이 순서대로 나열하는 경우의 수 구하기	50 %
3단계	확률 구하기	20 %

0229 집합 X에서 집합 Y로의 함수 f의 개수는

${}_6\Pi_4=6^4=1296$ … 1단계

(i) $f(1)<f(2)<f(3)=f(4)$인 경우

Y의 원소 5, 6, 7, 8, 9, 10의 6개에서 서로 다른 3개를 택해 작은 수부터 순서대로 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.

이때 $f(3)=f(4)$이므로 $f(3)$의 값이 정해지면 $f(4)$의 값도 하나로 정해진다.

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

${}_6C_3=20$

(ii) $f(1)=f(2)<f(3)=f(4)$인 경우

Y의 원소 5, 6, 7, 8, 9, 10의 6개에서 서로 다른 2개를 택해 작은 수부터 순서대로 X의 원소 1, 3에 대응시키면 된다.

이때 $f(1)=f(2)$, $f(3)=f(4)$이므로 $f(1)$, $f(3)$의 값이 정해지면 $f(2)$, $f(4)$의 값도 각각 하나로 정해진다.

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

${}_6C_2=15$

(i), (ii)에서 $f(1)\le f(2)<f(3)=f(4)$를 만족시키는 함수 f의 개수는

$20+15=35$ … 2단계

따라서 구하는 확률은

$\frac{35}{1296}$ … 3단계

답 $\frac{35}{1296}$

채점 요소		비율
1단계	집합 X에서 집합 Y로의 함수 f의 개수 구하기	20 %
2단계	$f(1)\le f(2)<f(3)=f(4)$를 만족시키는 함수 f의 개수 구하기	60 %
3단계	확률 구하기	20 %

0230 적어도 한 명은 다른 나라의 여행 상품을 택하는 사건을 A라 하면 A^C는 3명 모두 같은 나라의 여행 상품을 택하는 사건이다. … 1단계

(i) 3명이 모두 대만 여행 상품을 택할 확률은

$\frac{{}_4P_3}{{}_{16}P_3}=\frac{1}{140}$

(ii) 3명이 모두 태국 여행 상품을 택할 확률은

$\frac{{}_5P_3}{{}_{16}P_3}=\frac{1}{56}$

(iii) 3명이 모두 베트남 여행 상품을 택할 확률은

$\frac{{}_7P_3}{{}_{16}P_3}=\frac{1}{16}$

이상에서 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{140}+\frac{1}{56}+\frac{1}{16}=\frac{7}{80}$ … 2단계

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{7}{80}=\frac{73}{80}$ … 3단계

답 $\frac{73}{80}$

채점 요소		비율
1단계	적어도 한 명은 다른 나라의 여행 상품을 택하는 사건을 A라 하고 A^C 알기	20 %
2단계	$\mathrm{P}(A^C)$ 구하기	50 %
3단계	$\mathrm{P}(A)$ 구하기	30 %

0231 $(a-b)(b-c)(c-a)=0$인 사건을 A라 하면 A^C는 $(a-b)(b-c)(c-a)\neq0$인 사건이다. … 1단계

이때 $(a-b)(b-c)(c-a)\neq0$이려면 $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$이어야 하므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_6P_3}{6\times6\times6}=\frac{5}{9}$ … 2단계

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$ … 3단계

답 $\frac{4}{9}$

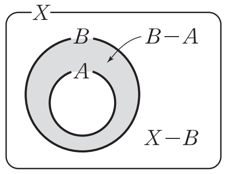
채점 요소		비율
1단계	$(a-b)(b-c)(c-a)=0$인 사건을 A라 하고 A^C 알기	20 %
2단계	$\mathrm{P}(A^C)$ 구하기	50 %
3단계	$\mathrm{P}(A)$ 구하기	30 %

0232 전략 $n(A)$, $n(B-A)$, $n(X-B)$의 값에 따라 경우를 나누어 생각해 본다.

집합 X의 공집합이 아닌 부분집합 15개 중에서 두 집합 A, B를 정하는 경우의 수는

$${}_{15}P_2=210$$

이때 A, B가 집합 X의 공집합이 아닌 서로 다른 두 부분집합이므로



$A\subset B$, $B\neq X$이려면

$$A\neq\varnothing,\ B-A\neq\varnothing,$$
$$X-B\neq\varnothing,$$
$$n(A)+n(B-A)+n(X-B)=4$$

이어야 한다.

(i) $n(A)=1$, $n(B-A)=1$, $n(X-B)=2$인 경우

집합 X의 4개의 원소 a, b, c, d 중에서 두 집합 A, $B-A$에 포함될 원소를 각각 1개씩 택하면 되므로

$${}_4P_2=12$$

(ii) $n(A)=1$, $n(B-A)=2$, $n(X-B)=1$인 경우

집합 X의 4개의 원소 a, b, c, d 중에서 두 집합 A, $X-B$에 포함될 원소를 각각 1개씩 택하면 되므로

$${}_4P_2=12$$

(iii) $n(A)=2$, $n(B-A)=1$, $n(X-B)=1$인 경우

집합 X의 4개의 원소 a, b, c, d 중에서 두 집합 $B-A$, $X-B$에 포함될 원소를 각각 1개씩 택하면 되므로

$${}_4P_2=12$$

이상에서 $A\subset B$, $B\neq X$인 경우의 수는

$$12+12+12=36$$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{36}{210}=\dfrac{6}{35}$

답 $\mathbf{\dfrac{6}{35}}$

0233 전략 꺼낸 두 공의 색에 따라 경우를 나누어 생각해 본다.

8개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$${}_8C_2=28$$

주어진 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 24 이하의 짝수이려면 꺼낸 공이 서로 다른 색이거나 꺼낸 공이 서로 같은 색이고 두 공에 적힌 수의 곱이 24 이하의 짝수이어야 한다.

(i) 꺼낸 두 공이 서로 다른 색인 경우

흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_4C_1\times{}_4C_1=16$$

(ii) 꺼낸 두 공이 서로 같은 색인 경우

흰 공 2개에 적힌 수의 곱은 항상 24 이하이다.

이때 홀수가 적혀 있는 흰 공은 ①, ③의 2개이므로 두 공에 적힌 수의 곱이 짝수가 되도록 흰 공 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_4C_2-{}_2C_2=5$$

또 두 공에 적힌 수의 곱이 24 이하의 짝수가 되도록 검은 공 2개를 꺼내는 경우는

(❹, ❺), (❹, ❻)의 2가지

따라서 두 공에 적힌 수의 곱이 24 이하의 짝수인 경우의 수는

$$5+2=7$$

(i), (ii)에서 주어진 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 24 이하의 짝수인 경우의 수는

$$16+7=23$$

이므로 그 확률은 $\dfrac{23}{28}$

따라서 $p=28$, $q=23$이므로

$$p+q=51$$

답 **51**

0234 전략 3이 적혀 있는 카드와 4가 적혀 있는 카드가 이웃하는 경우와 이웃하지 않는 경우로 나누어 생각한다.

조건 (가)에 의하여 3이 적혀 있는 카드의 양옆에는 4, 5, 6이 적혀 있는 3장의 카드 중에서 2장의 카드가 올 수 있고, 조건 (나)에 의하여 4가 적혀 있는 카드의 양옆에는 1, 2, 3이 적혀 있는 3장의 카드 중에서 2장의 카드가 올 수 있다.

이때 3이 적혀 있는 카드와 4가 적혀 있는 카드가 이웃하고 주어진 조건을 만족시키는 사건을 A, 3이 적혀 있는 카드와 4가 적혀 있는 카드가 이웃하지 않고 주어진 조건을 만족시키는 사건을 B라 하자.

(i) 3이 적혀 있는 카드와 4가 적혀 있는 카드가 이웃하는 경우

3이 적혀 있는 카드와 4가 적혀 있는 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $2!$

3이 적혀 있는 카드의 다른 한쪽에는 5 또는 6이 적혀 있는 카드가 올 수 있으므로 이 카드를 정하는 경우의 수는 2

4가 적혀 있는 카드의 다른 한쪽에는 1 또는 2가 적혀 있는 카드가 올 수 있으므로 이 카드를 정하는 경우의 수는 2

3, 4가 적혀 있는 카드와 양옆의 2장의 카드를 한 장으로 생각하여 3장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{2!\times2\times2\times3!}{6!}=\frac{1}{15}$$

(ii) 3이 적혀 있는 카드와 4가 적혀 있는 카드가 이웃하지 않는 경우

3이 적혀 있는 카드의 양옆에는 5, 6이 적혀 있는 2장의 카드가 올 수 있고 2장의 카드의 위치를 바꾸는 경우의 수는

$$2!$$

4가 적혀 있는 카드의 양옆에는 1, 2가 적혀 있는 2장의 카드가 올 수 있고 2장의 카드의 위치를 바꾸는 경우의 수는

$$2!$$

3이 적혀 있는 카드와 양옆의 2장의 카드를 한 장으로 생각하고, 4가 적혀 있는 카드와 양옆의 2장의 카드를 한 장으로 생각하여 2장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$2!$$

$$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{2!\times2!\times2!}{6!}=\frac{1}{90}$$

(i), (ii)에서 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{1}{15}+\frac{1}{90}=\frac{7}{90}$$

답 $\mathbf{\dfrac{7}{90}}$

03 조건부확률

교과서 문제 정복하기

본책 041쪽

0235 $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$

(1) $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(2) $A\cap B=\{2\}$이므로 $\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

(3) $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{1}{3}$

0236 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고 100원짜리 동전 2개와 10원짜리 동전 1개를 차례대로 나타내면 표본공간은

{HHH, HHT, HTH, THH,
HTT, THT, TTH, TTT}

뒷면이 1개 나오는 사건을 A, 10원짜리 동전의 뒷면이 나오는 사건을 B라 하면

$A=\{\mathrm{HHT, HTH, THH}\}$, $A\cap B=\{\mathrm{HHT}\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{3}{8}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{8}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

0237 (1) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)=0.2\times0.5=0.1$

(2) $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0.1}{0.25}=0.4$

답 (1) 0.1 (2) 0.4

0238 (1) $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{8}$

(2) 첫 번째에 검은 공을 꺼내면 주머니 안에는 검은 공 2개와 흰 공 5개가 들어 있으므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{7}$

(3) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{15}{56}$

답 (1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{5}{7}$ (3) $\frac{15}{56}$

0239 $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{3, 6\}$, $C=\{1, 2, 3, 6\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(1) $A\cap B=\{3\}$이므로 $\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

(2) $B\cap C=\{3, 6\}$이므로 $\quad \mathrm{P}(B\cap C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

따라서 $\mathrm{P}(B\cap C)\neq\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$이므로 두 사건 B, C는 서로 종속이다.

답 (1) 독립 (2) 종속

0240 (1) 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$

(2) 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)\\&=\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(3) 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B^C도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$

답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{4}$

0241 선수 A가 과녁을 명중시키는 사건을 A, 선수 B가 과녁을 명중시키는 사건을 B라 하면 A, B는 서로 독립이다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=0.5\times0.7=0.35\end{aligned}$$

답 0.35

0242 (1) $A=\{1, 5\}$이므로 $\quad \mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(2) $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이고, 각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243}$

답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{40}{243}$

0243 동전을 한 번 던질 때, 앞면이 나오는 사건을 A라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

이때 각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

답 $\frac{3}{8}$

0244 오지선다형인 한 문제에 임의로 답을 할 때, 정답을 맞히는 사건을 A라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

이때 각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^1=\frac{16}{625}$

답 $\frac{16}{625}$

유형 익히기

● 본책 042~048쪽

0245 $\mathrm{P}(A^c\cap B^c)=\mathrm{P}((A\cup B)^c)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=0.5$
이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=0.5$
이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로
$0.5=0.2+0.4-\mathrm{P}(A\cap B)$
$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=0.1$
$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{0.1}{0.4}=0.25$ 답 **0.25**

0246 $B=(A\cap B)\cup(A^c\cap B)$이고 두 사건 $A\cap B$와 $A^c\cap B$는 서로 배반사건이므로
$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$
$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$ 답 $\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

0247 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로
$A\cap B=\varnothing$ $\therefore B\subset A^c$
따라서 $B\cap A^c=B$이므로
$\mathrm{P}(B|A^c)=\dfrac{\mathrm{P}(B\cap A^c)}{\mathrm{P}(A^c)}=\dfrac{\mathrm{P}(B)}{1-\mathrm{P}(A)}$
$=\dfrac{\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{5}$ 답 ⑤

0248 $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{2}{3}$에서
$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{2}{3}\mathrm{P}(B)$
이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로
$\dfrac{3}{4}=\dfrac{2}{3}+\mathrm{P}(B)-\dfrac{2}{3}\mathrm{P}(B)$
$\dfrac{1}{3}\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{12}$ $\therefore \mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{4}$ 답 $\mathbf{\dfrac{1}{4}}$

0249 여학생을 뽑는 사건을 A, 수학을 선호하는 학생을 뽑는 사건을 B라 하면
$\mathrm{P}(A)=\dfrac{28}{60}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{12}{60}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{12}{60}}{\frac{28}{60}}=\dfrac{3}{7}$ 답 ③

0250 국내 여행을 선호하는 회원을 뽑는 사건을 A, 남자 회원을 뽑는 사건을 B라 하면
$\mathrm{P}(A)=\dfrac{40}{100}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{25}{100}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{25}{100}}{\frac{40}{100}}=\dfrac{5}{8}$ 답 $\mathbf{\dfrac{5}{8}}$

0251 아마추어 대회에 참가하는 회원을 뽑는 사건을 A, 여자 회원을 뽑는 사건을 B라 하면
$\mathrm{P}(A)=\dfrac{15+a}{30}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{a}{30}$
$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{a}{30}}{\frac{15+a}{30}}=\dfrac{a}{15+a}$
따라서 $\dfrac{a}{15+a}=\dfrac{2}{7}$이므로
$7a=2(15+a)$, $5a=30$
$\therefore a=6$ 답 **6**

0252 A가 당첨권을 뽑는 사건을 A, B가 당첨권을 뽑는 사건을 B라 하면
$\mathrm{P}(A)=\dfrac{13}{27}$, $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{12}{26}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{13}{27}\times\dfrac{12}{26}=\dfrac{2}{9}$ 답 ②

0253 주머니 A를 택하는 사건을 A, 빨간 구슬을 꺼내는 사건을 B라 하면
$\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{5}{9}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{5}{18}$ 답 $\mathbf{\dfrac{5}{18}}$

0254 첫 번째에 여학생을 호명하는 사건을 A, 두 번째에 남학생을 호명하는 사건을 B라 하면
$\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{9}$, $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{6}{8}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{3}{9}\times\dfrac{6}{8}=\dfrac{1}{4}$ 답 $\mathbf{\dfrac{1}{4}}$

0255 첫 번째에 흰 바둑돌이 나오는 사건을 A, 두 번째에 검은 바둑돌이 나오는 사건을 B라 하면
$\mathrm{P}(A)=\dfrac{n}{n+4}$, $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{4}{n+3}$
따라서 첫 번째에는 흰 바둑돌, 두 번째에는 검은 바둑돌이 나올 확률은
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$
$=\dfrac{n}{n+4}\times\dfrac{4}{n+3}$
$=\dfrac{4n}{(n+4)(n+3)}$ ··· 1단계

즉 $\frac{4n}{(n+4)(n+3)}=\frac{1}{5}$이므로

$(n+4)(n+3)=20n$

$n^2-13n+12=0, \quad (n-1)(n-12)=0$

$\therefore n=1$ 또는 $n=12$ ··· 2단계

따라서 모든 n의 값의 합은

$1+12=13$ ··· 3단계

답 **13**

채점 요소		비율
1단계	첫 번째에는 흰 바둑돌, 두 번째에는 검은 바둑돌이 나올 확률을 n에 대한 식으로 나타내기	60 %
2단계	n의 값 구하기	30 %
3단계	모든 n의 값의 합 구하기	10 %

0256 지우가 검은 공을 꺼내는 사건을 A, 수진이가 검은 공을 꺼내는 사건을 E라 하면 지우가 흰 공을 꺼내는 사건은 A^C이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{7}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{4}{7}$,

$\mathrm{P}(E|A)=\frac{2}{6}$, $\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{3}{6}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)\\&=\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}+\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\\&=\frac{3}{7}\end{aligned}$$

답 $\frac{3}{7}$

0257 이번 주 일요일에 비가 오는 사건을 A, 경기에서 이기는 사건을 E라 하면 이번 주 일요일에 비가 오지 않는 사건은 A^C이므로

$\mathrm{P}(A)=0.3$, $\mathrm{P}(A^C)=0.7$,

$\mathrm{P}(E|A)=0.4$, $\mathrm{P}(E|A^C)=0.6$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)\\&=0.3\times0.4+0.7\times0.6=0.54\end{aligned}$$

답 **0.54**

0258 수시 합격자를 택하는 사건을 A, 여학생을 택하는 사건을 E라 하면 정시 합격자를 택하는 사건은 A^C이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{80}{100}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{20}{100}$,

$\mathrm{P}(E|A)=\frac{70}{100}$, $\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{30}{100}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)\\&=\frac{80}{100}\times\frac{70}{100}+\frac{20}{100}\times\frac{30}{100}\\&=\frac{31}{50}\end{aligned}$$

답 ⑤

0259 A 반 학생을 뽑는 사건을 A, B 반 학생을 뽑는 사건을 B, 방과 후 수업을 신청한 학생을 뽑는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{2+3}=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{2+3}=\frac{3}{5}$,

$\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(E|B)=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)\\&=\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{9}{50}\end{aligned}$$

답 $\frac{9}{50}$

0260 A 공장에서 생산된 제품을 택하는 사건을 A, B 공장에서 생산된 제품을 택하는 사건을 B, 불량품을 택하는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{40}{100}\times\frac{5}{100}=\frac{1}{50}$

$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{60}{100}\times\frac{3}{100}=\frac{9}{500}$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)\\&=\frac{1}{50}+\frac{9}{500}=\frac{19}{500}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{50}}{\frac{19}{500}}=\frac{10}{19}$$

답 $\frac{10}{19}$

0261 K 야구팀이 치르는 경기가 홈 경기인 사건을 A, 원정 경기인 사건을 B, K 야구팀이 승리하는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{50}{100}\times\frac{70}{100}=\frac{7}{20}$

$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{50}{100}\times\frac{40}{100}=\frac{1}{5}$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)\\&=\frac{7}{20}+\frac{1}{5}=\frac{11}{20}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{7}{20}}{\frac{11}{20}}=\frac{7}{11}$$

답 ④

0262 버스로 운송된 제품을 택하는 사건을 A, 기차로 운송된 제품을 택하는 사건을 B, 1일 이내에 배송된 제품을 택하는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{30}{100}\times\frac{80}{100}=\frac{6}{25}$

$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{70}{100}\times\frac{20}{100}=\frac{7}{50}$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)\\&=\frac{6}{25}+\frac{7}{50}=\frac{19}{50}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|E)=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{7}{50}}{\frac{19}{50}}=\frac{7}{19}$$ 답 ③

0263 필통 A를 택하는 사건을 A, 필통 B를 택하는 사건을 B, 빨간 볼펜 1개와 파란 볼펜 1개를 꺼내는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{4}{15}$$

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$$

$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)=\frac{4}{15}+\frac{3}{10}=\frac{17}{30}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|E)=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{17}{30}}=\frac{9}{17}$$ 답 ①

0264 하준이가 흰 공을 꺼내는 사건을 A, 지호가 흰 공을 꺼내는 사건을 E라 하면 하준이가 검은 공을 꺼내는 사건은 A^C이므로

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$$

$$\mathrm{P}(A^C\cap E)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(E|A^C)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$$

$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^C\cap E)=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{2}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{4}$$ 답 ③

0265 카드 A를 뽑는 사건을 A, 카드 B를 뽑는 사건을 B, 카드 C를 뽑는 사건을 C, 보이는 면에 숫자 1이 쓰여 있는 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$\mathrm{P}(C\cap E)=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(E|C)=\frac{1}{3}\times 0=0$$

$$\therefore \mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)+\mathrm{P}(C\cap E)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+0=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|E)=\frac{\mathrm{P}(B\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$ 답 $\mathbf{\frac{1}{3}}$

0266 $A=\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B=\{3, 6, 9, 12\}$, $C=\{2, 3, 5, 7, 11\}$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(C)=\frac{5}{12}$$

ㄱ. $A\cap B=\{3, 9\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

ㄴ. $A\cap C=\{3, 5, 7, 11\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap C)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

따라서 두 사건 A와 C는 서로 종속이다.

ㄷ. $B\cap C=\{3\}$이므로 $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{12}$

$\therefore \mathrm{P}(B\cap C)\neq\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

따라서 두 사건 B와 C는 서로 종속이다.

이상에서 서로 독립인 사건은 ㄱ뿐이다. 답 ㄱ

0267 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고 10원짜리 동전과 100원짜리 동전을 차례대로 나타내면 표본공간은

{HH, HT, TH, TT}

이때 $A=$ {HH, HT}, $B=$ {HT, TT}, $C=$ {HH, TT}, $D=$ {HT, TH}이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(C)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(D)=\frac{1}{2}$$

① $A\cap B=$ {HT}이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

② $A\cap C=$ {HH}이므로 $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

따라서 두 사건 A와 C는 서로 독립이다.

③ $B\cap C=$ {TT}이므로 $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

따라서 두 사건 B와 C는 서로 독립이다.

④ $B\cap D=$ {HT}이므로 $\mathrm{P}(B\cap D)=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(B\cap D)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(D)$

따라서 두 사건 B와 D는 서로 독립이다.

⑤ $C\cap D=\varnothing$이므로 $\mathrm{P}(C\cap D)=0$

$\therefore \mathrm{P}(C\cap D)\neq\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(D)$

따라서 두 사건 C와 D는 서로 종속이다.

답 ⑤

0268 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$$\frac{11}{12}=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}$$

이때 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이다. 답 **독립**

0269 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)$$

따라서 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{2}\mathrm{P}(B),\qquad \frac{1}{2}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

0270 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$$

따라서 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$$\frac{2}{5}=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{11}{15}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{11}{15}$$

답 $\frac{11}{15}$

0271 두 사건 A, C가 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$$

$$\frac{1}{2}=\mathrm{P}(A)\times\frac{5}{6}\qquad\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$$ … 1단계

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

$$\frac{7}{10}=\frac{3}{5}+\mathrm{P}(B)\qquad\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{10}$$ … 2단계

답 $\frac{1}{10}$

	채점 요소	비율
1단계	$\mathrm{P}(A)$ 구하기	50 %
2단계	$\mathrm{P}(B)$ 구하기	50 %

0272 두 사건 A, B가 서로 독립이면 A와 B^C, A^C와 B도 각각 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C),$$
$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{2}{3}$에서

$$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$$

$$\mathrm{P}(A)\times\left(1-\frac{1}{6}\right)+\{1-\mathrm{P}(A)\}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3}\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}\qquad\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

0273 두 선수 A, B가 페널티 킥을 성공하는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

답 $\frac{3}{5}$

다른 풀이 $\mathrm{P}(A\cup B)=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$

$$=1-\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{5}$$

0274 주머니 A에서 파란 구슬을 꺼내는 사건을 A, 주머니 B에서 파란 구슬을 꺼내는 사건을 B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{3}{14}$$

답 $\frac{3}{14}$

0275 다음 주 화요일에 A 지역과 B 지역에 눈이 오는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=(1-0.2)\times 0.3=0.24$$

답 **0.24**

0276 예준이와 나연이가 이벤트에 당첨되는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이므로 두 사람 중 한 명만 이벤트에 당첨될 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(A^C\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)\\&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\\&=\left(1-\frac{1}{10}\right)p+\frac{1}{10}(1-p)\\&=\frac{4}{5}p+\frac{1}{10}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{4}{5}p+\frac{1}{10}=\frac{7}{30}$이므로

$$\frac{4}{5}p=\frac{2}{15}\qquad\therefore\ p=\frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

0277 바이러스 A 보균자를 택하는 사건을 A, 남자를 택하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{240}{450}=\frac{8}{15},\ \mathrm{P}(B)=\frac{150}{450}=\frac{1}{3},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{x}{450}$$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서

$$\frac{x}{450}=\frac{8}{15}\times\frac{1}{3}\qquad\therefore\ x=80$$

답 ①

0278 두 수의 합이 홀수이려면 두 수 중 하나는 홀수이고 다른 하나는 짝수이어야 한다.

두 상자 A, B에서 홀수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 각각 A, B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{4},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$$

이때 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

(ⅰ) 상자 A에서 홀수, 상자 B에서 짝수가 적힌 카드를 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{16}$$

(ⅱ) 상자 A에서 짝수, 상자 B에서 홀수가 적힌 카드를 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{9}{16}+\frac{1}{16}=\frac{5}{8}$$

답 $\frac{5}{8}$

0279 세 스위치 A, B, C가 닫혀 있는 사건을 각각 A, B, C라 하면 전구에 불이 켜지는 사건은 $A\cap(B\cup C)$이다.
이때 세 사건 A, B, C는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A)=1-0.4=0.6$,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B\cup C)&=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B\cap C)\\&=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)\\&=(1-0.5)+(1-0.6)\\&\quad-(1-0.5)\times(1-0.6)\\&=0.7\end{aligned}$$
… 1단계

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap(B\cup C))&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B\cup C)\\&=0.6\times0.7\\&=0.42\end{aligned}$$
… 2단계

답 0.42

	채점 요소	비율
1단계	세 스위치 A, B, C가 닫혀 있는 사건을 각각 A, B, C라 하고 $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B\cup C)$ 구하기	70 %
2단계	전구에 불이 켜질 확률 구하기	30 %

참고 | $\mathrm{P}(A\cap(B\cup C))$
$=\mathrm{P}((A\cap B)\cup(A\cap C))$
$=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap C)-\mathrm{P}(A\cap B\cap C)$
$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$
$=\mathrm{P}(A)\{\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)\}$
$=\mathrm{P}(A)\{\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(B\cap C)\}$
$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B\cup C)$

0280 표적을 한 번 이상 맞히는 사건을 A라 하면 A^C는 표적을 한 번도 맞히지 못하는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)={}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{243}=\frac{242}{243}$$

답 ⑤

0281 구하는 확률은

$${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{3}{64}$$

답 $\frac{3}{64}$

0282 적어도 1개의 객실에서 룸서비스를 이용하는 사건을 A라 하면 A^C는 4개의 객실에서 모두 룸서비스를 이용하지 않는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{3}{5}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{625}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{16}{625}=\frac{609}{625}$$

답 ④

0283 학생이 한 문제를 맞힐 확률은 $\frac{2}{7}$이다.

(ⅰ) 5문제 중에서 4문제를 맞힐 확률은

$${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{7}\right)^4\left(\frac{5}{7}\right)^1=\frac{400}{7^5}$$

(ⅱ) 5문제를 모두 맞힐 확률은

$${}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{2}{7}\right)^5\left(\frac{5}{7}\right)^0=\frac{32}{7^5}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 학생이 시험에 합격할 확률은

$$\frac{400}{7^5}+\frac{32}{7^5}=\frac{432}{7^5}$$

$\therefore k=432$

답 432

0284 공격을 2번 이상 성공시키는 사건을 A라 하면 A^C는 공격을 1번 이하로 성공시키는 사건이다.
이때 공격 성공률은

$$\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$$

(ⅰ) 4번의 공격에서 한 번도 성공시키지 못할 확률은

$${}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{81}{625}$$

(ⅱ) 4번의 공격에서 1번 성공시킬 확률은

$${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{216}{625}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{81}{625}+\frac{216}{625}=\frac{297}{625}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{297}{625}=\frac{328}{625}$$

답 $\frac{328}{625}$

0285 4번째 경기에서 우승팀이 결정되려면 우승팀은 3번째 경기까지 2번 이기고 4번째 경기에서 이겨야 한다.
이때 한 경기에서 A 팀과 B 팀이 이길 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이다.

(ⅰ) A 팀이 우승할 확률은

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$

(ⅱ) B 팀이 우승할 확률은

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{16}+\frac{3}{16}=\frac{3}{8}$$

답 ④

0286 (i) 주사위를 던져서 3의 배수의 눈이 나오고, 동전을 3번 던져서 앞면이 1번 나올 확률은

$$\frac{2}{6}\times{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$$

(ii) 주사위를 던져서 3의 배수의 눈이 나오지 않고, 동전을 2번 던져서 앞면이 1번 나올 확률은

$$\frac{4}{6}\times{}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{3}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{3}=\frac{11}{24}$$

답 $\frac{11}{24}$

0287 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$

이때 $\mathrm{P}(A)\neq\mathrm{P}(B)$이면

$\mathrm{P}(A|B)\neq\mathrm{P}(B|A)$ (거짓)

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0}{\mathrm{P}(A)}=0 \text{ (참)}$$

ㄷ. $A\subset B$이면 $A\cap B=A$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A)}=1 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄴ, ㄷ

0288 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)\end{aligned}$$

따라서 A^C, B는 서로 독립이다. (참)

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$

그런데 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)>0$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 A, B는 서로 종속이다. (거짓)

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)>0$

따라서 A, B는 서로 배반사건이 아니다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ㄱ

0289 ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 A^C, B도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C|B)=\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$ (참)

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 A, B^C도 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)\text{ (참)}\end{aligned}$$

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\end{aligned}$$

이때 $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)>0$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)\neq\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

0290 한 개의 주사위를 던질 때 5의 약수의 눈이 나올 확률은

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

이때 주사위를 4번 던져서 5의 약수의 눈이 나오는 횟수를 x라 하면 그 외의 눈이 나오는 횟수는 $4-x$이므로 점 A의 좌표가 2이려면

$x-(4-x)=2$

$\therefore x=3$

따라서 구하는 확률은

$${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$$

답 ①

0291 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 흰 공이 나올 확률은 $\frac{3}{5}$이다.

이때 게임을 5번 하여 흰 공이 나오는 횟수를 x라 하면 검은 공이 나오는 횟수는 $5-x$이므로 얻은 점수의 합이 14점이려면

$3x+2(5-x)=14$

$\therefore x=4$ … 1단계

따라서 구하는 확률은

$${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^1=\frac{162}{625}$$ … 2단계

답 $\frac{162}{625}$

	채점 요소	비율
1단계	흰 공이 나오는 횟수 구하기	40 %
2단계	게임을 5번 하여 얻은 점수의 합이 14점일 확률 구하기	60 %

0292 동전을 6번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 x라 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $6-x$이다.

이때 꼭짓점 A에서 출발한 점 P가 꼭짓점 A로 돌아오려면 10만큼 움직여야 하므로

$2x+(6-x)=10$

$\therefore x=4$

따라서 구하는 확률은

$${}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{64}$$

답 $\frac{15}{64}$

참고 | 동전을 6번 던져서 점 P가 움직일 수 있는 거리는 6 이상 12 이하이므로 점 P가 다시 꼭짓점 A로 돌아올 때까지 움직인 거리는 10이다.

시험에 꼭 나오는 문제

● 본책 049~051쪽

0293 $P(A|B)=P(B|A)$에서

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \qquad \therefore P(A)=P(B)$$

이때 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$$1=P(A)+P(A)-\frac{1}{3}, \qquad 2P(A)=\frac{4}{3}$$

$$\therefore P(A)=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0294 $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$에서

$$\frac{2}{5}=\frac{P(A\cap B)}{\frac{1}{2}} \qquad \therefore P(A\cap B)=\frac{1}{5}$$

이때 $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$에서

$$\frac{3}{10}=\frac{\frac{1}{5}}{P(B)} \qquad \therefore P(B)=\frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

0295 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는 $6\times6=36$

두 눈의 수의 합이 6인 사건을 A, 두 눈의 수가 모두 홀수인 사건을 B라 하고 두 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

$A=\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$,

$A\cap B=\{(1, 5), (3, 3), (5, 1)\}$

$$\therefore P(A)=\frac{5}{36},\ P(A\cap B)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{36}}=\frac{3}{5}$$

답 ⑤

0296 여자 회원 수를 a라 하고 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	남자 회원	여자 회원	합계
영화 A	45	35	80
영화 B	$135-a$	$a-35$	100
합계	$180-a$	a	180

영화 B를 관람한 회원을 뽑는 사건을 A, 남자 회원을 뽑는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{100}{180},\ P(A\cap B)=\frac{135-a}{180}$$

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{135-a}{180}}{\frac{100}{180}}=\frac{135-a}{100}$$

즉 $\dfrac{135-a}{100}=\dfrac{2}{5}$이므로 $\qquad 135-a=40$

$\therefore a=95$

따라서 구하는 여자 회원 수는 95이다.

답 95

0297 A가 당첨 제비를 뽑는 사건을 A, B가 당첨 제비를 뽑는 사건을 E라 하면 A가 당첨 제비를 뽑지 않는 사건은 A^C이므로

$$P(A)=\frac{3}{10},\ P(A^C)=\frac{7}{10},$$

$$P(E|A)=\frac{2}{9},\ P(E|A^C)=\frac{3}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(E)&=P(A\cap E)+P(A^C\cap E)\\&=P(A)P(E|A)+P(A^C)P(E|A^C)\\&=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

답 $\frac{3}{10}$

0298 상자 A를 택하는 사건을 A, 상자 B를 택하는 사건을 B, 서로 다른 색의 구슬을 꺼내는 사건을 E라 하면

$$P(A)=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{1}{2},$$

$$P(E|A)=\frac{{}_3C_1\times{}_4C_1}{{}_7C_2}=\frac{4}{7},$$

$$P(E|B)=\frac{{}_5C_1\times{}_2C_1}{{}_7C_2}=\frac{10}{21}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(E)&=P(A\cap E)+P(B\cap E)\\&=P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{10}{21}=\frac{11}{21}\end{aligned}$$

답 $\frac{11}{21}$

0299 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 5 이상인 사건을 A, 4 이하인 사건을 B라 하고, 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 모두 흰색인 사건을 E라 하면

$$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=\frac{2}{6}\times\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{45}$$

$$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)=\frac{4}{6}\times\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{2}{15}$$

$$\begin{aligned}\therefore P(E)&=P(A\cap E)+P(B\cap E)\\&=\frac{1}{45}+\frac{2}{15}=\frac{7}{45}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{45}}{\frac{7}{45}}=\frac{1}{7}$$

답 ①

0300 $P(A^C)=2P(A)$에서

$$1-P(A)=2P(A) \qquad \therefore P(A)=\frac{1}{3}$$

03

조건부확률

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{3}P(B) \qquad \therefore P(B)=\frac{3}{4}$$

답 ④

0301 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$$\frac{5}{8}=P(A)+P(B)-\frac{1}{8}$$

$$\therefore P(A)+P(B)=\frac{3}{4} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

$$\therefore P(A)P(B)=\frac{1}{8} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $P(A)=\frac{3}{4}-P(B)$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$$\left\{\frac{3}{4}-P(B)\right\}P(B)=\frac{1}{8}$$

$$8\{P(B)\}^2-6P(B)+1=0$$

$$\{2P(B)-1\}\{4P(B)-1\}=0$$

$$\therefore P(B)=\frac{1}{2} \text{ 또는 } P(B)=\frac{1}{4}$$

$P(B)=\frac{1}{2}$이면 $\qquad P(A)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$P(B)=\frac{1}{4}$이면 $\qquad P(A)=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

이때 $P(A)>P(B)$이므로 $\qquad P(B)=\frac{1}{4}$

답 ③

다른 풀이 ㉠, ㉡에서 $P(A)$, $P(B)$는 이차방정식

$$t^2-\frac{3}{4}t+\frac{1}{8}=0, \text{ 즉 } 8t^2-6t+1=0$$

의 두 근이다.

이때 $8t^2-6t+1=0$에서 $\qquad (2t-1)(4t-1)=0$

$$\therefore t=\frac{1}{2} \text{ 또는 } t=\frac{1}{4}$$

$$\therefore P(B)=\frac{1}{4} \ (\because P(A)>P(B))$$

RPM 비법 노트

두 수를 근으로 하는 이차방정식

두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0, \text{ 즉 } x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

0302 내일 세 공연 A, B, C가 매진되는 사건을 각각 A, B, C라 하면 세 사건 A, B, C는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$$P(A\cap B\cap C^C)+P(A\cap B^C\cap C)+P(A^C\cap B\cap C)$$

$$=P(A)P(B)P(C^C)+P(A)P(B^C)P(C)$$

$$+P(A^C)P(B)P(C)$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$+\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3}{8}$$

답 $\frac{3}{8}$

0303 전체 학생 수는 $16+24=40$이므로

$$P(A)=\frac{8+k}{40},\ P(B)=\frac{16}{40}=\frac{2}{5},$$

$$P(A\cap B)=\frac{8}{40}=\frac{1}{5}$$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이려면

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$이어야 하므로

$$\frac{1}{5}=\frac{8+k}{40}\times\frac{2}{5}, \qquad 20=8+k$$

$$\therefore k=12$$

답 12

0304 한 개의 동전을 6번 던져서 앞면이 나오는 횟수가 뒷면이 나오는 횟수보다 크려면 앞면이 4번 또는 5번 또는 6번 나와야 한다.

(i) 앞면이 4번 나올 확률은

$${}_6C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{64}$$

(ii) 앞면이 5번 나올 확률은

$${}_6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{32}$$

(iii) 앞면이 6번 나올 확률은

$${}_6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{64}$$

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{15}{64}+\frac{3}{32}+\frac{1}{64}=\frac{11}{32}$$

답 ④

0305 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

$$\therefore P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)$$

$$=1-\boxed{(가)\ P(A\cup B)}$$

$$=1-\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}$$

$$=1-\{P(A)+P(B)-\boxed{(나)\ P(A)P(B)}\}$$

$$=1-P(A)-P(B)\{1-P(A)\}$$

$$=\{1-P(A)\}\{1-P(B)\}$$

$$=P(A^C)\boxed{(다)\ P(B^C)}$$

따라서 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이다.

답 ④

0306 한 번의 가위바위보에서 혜진이가 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

이때 가위바위보를 5번 하여 혜진이가 이긴 횟수를 x라 하면 비기거나 진 횟수는 $5-x$이므로 혜진이가 4칸 올라가려면

$$2x-(5-x)=4 \qquad \therefore x=3$$

따라서 구하는 확률은

$${}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243}$$

답 $\frac{40}{243}$

0307 첫 번째에 꺼낸 제품이 불량품인 사건을 A, 두 번째에 꺼낸 제품이 불량품인 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{2}{5},\ P(B|A)=\frac{1}{4}$$

따라서 두 번 모두 불량품을 꺼낼 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$$

$\therefore p_1=\frac{1}{10}$ … 1단계

또 $P(A^C)=\frac{3}{5}$, $P(B|A^C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$이므로 두 번째에만 불량품을 꺼낼 확률은

$$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$$

$\therefore p_2=\frac{3}{10}$ … 2단계

$\therefore p_1+p_2=\frac{2}{5}$ … 3단계

답 $\frac{2}{5}$

채점 요소		비율
1단계	p_1 구하기	40 %
2단계	p_2 구하기	40 %
3단계	p_1+p_2의 값 구하기	20 %

0308 1부터 8까지의 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이므로 A가 이기려면 첫 번째에 소수가 적힌 카드를 뽑거나 세 번째에 처음으로 소수가 적힌 카드를 뽑거나 다섯 번째에 처음으로 소수가 적힌 카드를 뽑아야 한다. … 1단계

(i) 첫 번째에 소수가 적힌 카드를 뽑을 확률은

$$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

(ii) 세 번째에 처음으로 소수가 적힌 카드를 뽑을 확률은

$$\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{1}{7}$$

(iii) 다섯 번째에 처음으로 소수가 적힌 카드를 뽑을 확률은

$$\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\times1=\frac{1}{70}$$ … 2단계

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{70}=\frac{23}{35}$$ … 3단계

답 $\frac{23}{35}$

채점 요소		비율
1단계	A가 이기는 경우 파악하기	30 %
2단계	각 경우의 확률 구하기	50 %
3단계	A가 이길 확률 구하기	20 %

0309 A 약을 투여받은 환자를 택하는 사건을 A, B 약을 투여받은 환자를 택하는 사건을 B, 완치된 환자를 택하는 사건을 E라 하면

$$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)$$
$$=\frac{100}{300}\times\frac{3}{100}=\frac{1}{100}$$
$$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)$$
$$=\frac{200}{300}\times\frac{x}{100}=\frac{x}{150}$$

$$\therefore P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)$$
$$=\frac{1}{100}+\frac{x}{150}=\frac{3+2x}{300}$$ … 1단계

따라서 임의로 택한 한 명이 완치된 환자였을 때, 이 환자가 A 약을 투여받은 환자일 확률은

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{100}}{\frac{3+2x}{300}}=\frac{3}{3+2x}$$ … 2단계

즉 $\frac{3}{3+2x}=\frac{3}{13}$이므로 $3+2x=13$

$\therefore x=5$ … 3단계

답 5

채점 요소		비율
1단계	A 약을 투여받은 환자를 택하는 사건을 A, 완치된 환자를 택하는 사건을 E라 하고 $P(A\cap E)$, $P(E)$ 구하기	50 %
2단계	$P(A\|E)$를 x에 대한 식으로 나타내기	30 %
3단계	x의 값 구하기	20 %

0310 A가 시험에 합격하는 사건을 A, B가 시험에 합격하는 사건을 B라 하면

$$P(A\cap B^C)=\frac{3}{5},\ P(A\cup B)=\frac{4}{5}$$
$$\therefore P(B)=P(A\cup B)-P(A\cap B^C)$$
$$=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$$ … 1단계

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{5}P(A)$$

따라서 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$$\frac{4}{5}=P(A)+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}P(A)$$
$$\frac{4}{5}P(A)=\frac{3}{5}$$
$$\therefore P(A)=\frac{3}{4}$$

즉 A가 시험에 합격할 확률은 $\frac{3}{4}$이다. … 2단계

답 $\frac{3}{4}$

채점 요소		비율
1단계	B가 시험에 합격할 확률 구하기	40 %
2단계	A가 시험에 합격할 확률 구하기	60 %

0311 전략 주어진 시행에서 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자가 같은 것이 있는 사건을 A, 꺼낸 공 중 흰 공이 2개인 사건을 B라 하고 $P(B|A)$를 구한다.

임의로 4개의 공을 동시에 꺼내는 시행에서 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자가 같은 것이 있는 사건을 A, 꺼낸 공 중 흰 공이 2개인 사건을 B라 하자.

4가 적혀 있는 흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼낼 확률은

$$\frac{\overbrace{{}_7C_2}^{\text{나머지 7개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수}}}{{}_9C_4}=\frac{1}{6}$$

5가 적혀 있는 흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{1}{6}$$

4, 5가 각각 적혀 있는 흰 공 2개와 검은 공 2개를 꺼낼 확률은

$$\frac{1}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{1}{126}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{126}=\frac{41}{126}$$

또 4가 적혀 있는 흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼내고 꺼낸 공 중 흰 공이 2개일 확률은

$$\frac{\overbrace{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}^{\text{나머지 흰 공 4개와 검은 공 3개 중에서 흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼내는 경우의 수}}}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{2}{21}$$

5가 적혀 있는 흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼내고 꺼낸 공 중 흰 공이 2개일 확률은

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{2}{21}$$

4, 5가 각각 적혀 있는 흰 공 2개와 검은 공 2개를 꺼내고 꺼낸 공 중 흰 공이 2개일 확률은

$$\frac{1}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{1}{126}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{21}+\frac{2}{21}-\frac{1}{126}=\frac{23}{126}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{23}{126}}{\frac{41}{126}}=\frac{23}{41}$$

답 $\mathbf{\frac{23}{41}}$

0312 전략 주머니에서 꺼낸 공에 적힌 수에 따라 경우를 나누어 생각한다.

주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 수가 3인 사건을 A, 4인 사건을 B라 하고, 얻은 점수가 10점인 사건을 E라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5},\ \mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}$$

이때 주사위를 3번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합이 10인 경우는

$6+3+1$, $6+2+2$, $5+4+1$,

$5+3+2$, $4+4+2$, $4+3+3$

이므로 이 경우의 수는

$$3!+\frac{3!}{2!}+3!+3!+\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}=27$$

$$\therefore \mathrm{P}(E|A)=\frac{27}{6\times6\times6}=\frac{1}{8}$$

또 주사위를 4번 던져서 나오는 네 눈의 수의 합이 10인 경우는

$6+2+1+1$, $5+3+1+1$, $5+2+2+1$, $4+4+1+1$,

$4+3+2+1$, $4+2+2+2$, $3+3+3+1$, $3+3+2+2$

이므로 이 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!\times2!}+4!+\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!\times2!}$$
$$=80$$

$$\therefore \mathrm{P}(E|B)=\frac{80}{6\times6\times6\times6}=\frac{5}{81}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)\\&=\frac{2}{5}\times\frac{1}{8}+\frac{3}{5}\times\frac{5}{81}=\frac{47}{540}\end{aligned}$$

따라서 $p=540$, $q=47$이므로

$p+q=587$

답 **587**

0313 전략 점 P가 점 (2, 2) 또는 점 (3, 2)를 지날 확률을 구한다.

점 P가 색칠한 부분을 지나려면 점 (2, 2) 또는 점 (3, 2)를 지나야 한다.

(i) 점 P가 점 (2, 2)를 지나는 경우

3 이하의 눈이 2번, 4 이상의 눈이 2번 나와야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

(ii) 점 P가 점 (3, 2)를 지나는 경우

3 이하의 눈이 3번, 4 이상의 눈이 2번 나와야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$$

점 (2, 2)에서 x축의 양의 방향으로 1만큼 움직인다.

(iii) 점 P가 두 점 (2, 2), (3, 2)를 모두 지나는 경우

3 이하의 눈이 2번, 4 이상의 눈이 2번 나온 후 다시 3 이하의 눈이 나와야 하므로 이 경우의 확률은

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$

이상에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{16}-\frac{3}{16}=\frac{1}{2}$$

답 $\mathbf{\frac{1}{2}}$

04 확률분포 (1)

교과서 문제 정복하기

본책 055쪽, 057쪽

0314 답 이산확률변수　　**0315** 답 연속확률변수

0316 답 이산확률변수　　**0317** 답 연속확률변수

0318 답 **1, 2, 3, 4, 5, 6**

0319 답 **0, 1, 2, 3, 4**

0320 (1) 0, 1, 2

(2) 확률변수 X가 0, 1, 2일 때의 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

답 풀이 참조

0321 (1) 1, 2, 3

(2) $\mathrm{P}(X=x)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_x\times{}_2\mathrm{C}_{3-x}}{{}_6\mathrm{C}_3}$ $(x=1,\ 2,\ 3)$

(3) 확률변수 X가 1, 2, 3일 때의 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{5},$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{3}{5},$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_2\mathrm{C}_0}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{5}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

답 풀이 참조

0322 (1) 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{3}+a+\frac{2}{9}+3a=1,\qquad 4a=\frac{4}{9}$$

$$\therefore\ a=\frac{1}{9}$$

(2) $\mathrm{P}(X=1$ 또는 $X=2)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$$=\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$$

(3) $\mathrm{P}(-1\le X\le 1)=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{2}{3}$$

답 (1) $\frac{1}{9}$　(2) $\frac{5}{9}$　(3) $\frac{2}{3}$

다른 풀이 (3) $\mathrm{P}(-1\le X\le 1)=1-\mathrm{P}(X=2)$

$$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

0323 (1) $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{3}{8}=\frac{11}{4}$

(2) $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$$=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{8}+3^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{3}{8}-\left(\frac{11}{4}\right)^2$$

$$=\frac{23}{16}$$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{23}{16}}=\frac{\sqrt{23}}{4}$

답 (1) $\frac{11}{4}$　(2) $\frac{23}{16}$　(3) $\frac{\sqrt{23}}{4}$

0324 (1) 한 개의 주사위를 던질 때, 3의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, 그 외의 눈이 나올 확률은 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이므로

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(2) $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{4}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{1}{9}=\frac{2}{3}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$$=0^2\times\frac{4}{9}+1^2\times\frac{4}{9}+2^2\times\frac{1}{9}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

답 풀이 참조

0325 (1) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 50, 100이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{P}(X=50)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{P}(X=100)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	50	100	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

(2) $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+50\times\frac{1}{2}+100\times\frac{1}{4}=50$

따라서 구하는 기댓값은 50이다.

답 풀이 참조

0326 (1) $\mathrm{E}(2X-1)=2\mathrm{E}(X)-1=2\times6-1=11$

$\mathrm{V}(2X-1)=2^2\mathrm{V}(X)=4\times\frac{3}{2}=6$

$\sigma(2X-1)=|2|\sigma(X)=2\times\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{6}$

(2) $\mathrm{E}\left(-\frac{1}{3}X+5\right)=-\frac{1}{3}\mathrm{E}(X)+5=-\frac{1}{3}\times6+5=3$

$\mathrm{V}\left(-\frac{1}{3}X+5\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)^2\mathrm{V}(X)=\frac{1}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{6}$

$\sigma\left(-\frac{1}{3}X+5\right)=\left|-\frac{1}{3}\right|\sigma(X)=\frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$

답 (1) **평균: 11, 분산: 6, 표준편차: $\sqrt{6}$**

(2) **평균: 3, 분산: $\frac{1}{6}$, 표준편차: $\frac{\sqrt{6}}{6}$**

0327 $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$,

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{8}+4^2\times\frac{1}{2}=\frac{35}{4}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{35}{4}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

(1) $\mathrm{E}(4X+2)=4\mathrm{E}(X)+2=4\times\frac{5}{2}+2=12$

(2) $\mathrm{V}(4X+2)=4^2\mathrm{V}(X)=16\times\frac{5}{2}=40$

(3) $\sigma(4X+2)=|4|\sigma(X)=4\times\frac{\sqrt{10}}{2}=2\sqrt{10}$

답 (1) **12** (2) **40** (3) **$2\sqrt{10}$**

0328 답 **$\mathrm{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$**

0329 답 **$\mathrm{B}\left(7, \frac{1}{3}\right)$**

0330 답 **이항분포를 따르지 않는다.**

0331 (1) $\mathrm{P}(X=x)={}_4\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{4-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

(2) $\mathrm{P}(X=3)={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{3}{64}$

답 풀이 참조

0332 (1) $\mathrm{B}\left(5, \frac{3}{5}\right)$

(2) $\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{3}{5}\right)^x\left(\frac{2}{5}\right)^{5-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

(3) $\mathrm{P}(X=2)={}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{144}{625}$

답 풀이 참조

0333 $\mathrm{E}(X)=63\times\frac{1}{3}=21$

$\mathrm{V}(X)=63\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=14$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{14}$

답 **$\mathrm{E}(X)=21,\ \mathrm{V}(X)=14,\ \sigma(X)=\sqrt{14}$**

0334 $\mathrm{E}(X)=128\times\frac{3}{4}=96$

$\mathrm{V}(X)=128\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=24$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

답 **$\mathrm{E}(X)=96,\ \mathrm{V}(X)=24,\ \sigma(X)=2\sqrt{6}$**

0335 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(45, \frac{2}{3}\right)$를 따른다.

(1) $\mathrm{E}(X)=45\times\frac{2}{3}=30$

(2) $\mathrm{V}(X)=45\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=10$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{10}$

답 (1) **30** (2) **10** (3) **$\sqrt{10}$**

유형 익히기

• 본책 058~064쪽

0336 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\cdots+\mathrm{P}(X=9)=1$

$\frac{k}{2\times1}+\frac{k}{3\times2}+\cdots+\frac{k}{9\times8}=1$

$k\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)\right\}=1$

$k\left(1-\frac{1}{9}\right)=1,\qquad \frac{8}{9}k=1$

$\therefore\ k=\frac{9}{8}$

답 **$\frac{9}{8}$**

RPM 비법 노트

부분분수로의 변형

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

0337 확률의 총합은 1이므로

$\frac{3}{8}+\frac{a}{4}+a^2+\frac{1}{4}=1$

$8a^2+2a-3=0,\quad (4a+3)(2a-1)=0$

$\therefore a=-\frac{3}{4}$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

이때 $0\le \mathrm{P}(X=x)\le 1$이므로

$a=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0338 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\cdots+\mathrm{P}(X=4)=1$

$a+\left(\frac{1}{12}+a\right)+\left(\frac{2}{12}+a\right)+\left(\frac{3}{12}-a\right)+\left(\frac{4}{12}-a\right)=1$

$a+\frac{5}{6}=1\quad \therefore a=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

0339 $\mathrm{P}(X=x)=\frac{k}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

$=\frac{k(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}$

$=k(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\cdots+\mathrm{P}(X=15)=1$

$k(\sqrt{2}-1)+k(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+k(\sqrt{16}-\sqrt{15})=1$

$k\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})\}=1$

$3k=1\quad \therefore k=\frac{1}{3}$ 답 ①

0340 확률의 총합은 1이므로

$\frac{k}{2}+\left(\frac{3}{8}-k^2\right)+\frac{1}{8}+k=1$

$2k^2-3k+1=0,\quad (2k-1)(k-1)=0$

$\therefore k=\frac{1}{2}$ 또는 $k=1$

이때 $0\le \mathrm{P}(X=x)\le 1$이므로 $\quad k=\frac{1}{2}$

한편 $X^2-5X+6=0$에서

$(X-2)(X-3)=0\quad \therefore X=2$ 또는 $X=3$

$\therefore \mathrm{P}(X^2-5X+6=0)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$ 답 $\frac{1}{4}$

0341 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)=1$

$k+4k+9k+16k=1$

$30k=1\quad \therefore k=\frac{1}{30}$

$\therefore \mathrm{P}(X\ge 3)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$

$=\frac{3}{10}+\frac{8}{15}=\frac{5}{6}$ 답 $\frac{5}{6}$

0342 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(X=-1)$에서

$q=\frac{2}{3}p$ …… ㉠

확률의 총합은 1이므로

$2p+\frac{4}{3}p+q=1\quad \therefore 10p+3q=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad p=\frac{1}{4},\ q=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(0\le X\le 1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

0343 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이므로

$\mathrm{P}(X\ge 2)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_3}+\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3}$

$=\frac{5}{14}+\frac{1}{21}=\frac{17}{42}$ 답 $\frac{17}{42}$

참고 | 확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_4\mathrm{C}_x\times{}_5\mathrm{C}_{3-x}}{{}_9\mathrm{C}_3}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$	1

0344 한 개의 주사위를 2번 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\times 6=36$

이때 나오는 두 눈의 수를 a, b라 하고, 각 경우를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면

(i) 두 눈의 수의 합이 3인 경우는

$(1,\ 2),\ (2,\ 1)$의 2가지

$\therefore \mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

(ii) 두 눈의 수의 합이 4인 경우는

$(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$의 3가지

$\therefore \mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

(iii) 두 눈의 수의 합이 5인 경우는

$(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$의 4가지

$\therefore \mathrm{P}(X=5)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

이상에서

$\mathrm{P}(3\le X\le 5)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)$

$=\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{9}=\frac{1}{4}$ 답 ②

0345 $X^2-4X+3\le 0$에서

$(X-1)(X-3)\le 0\quad \therefore 1\le X\le 3$

04 확률분포 (1)

이때 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X^2-4X+3\le 0)\\&=\mathrm{P}(1\le X\le 3)\\&=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)\\&=1-\mathrm{P}(X=0)\\&=1-\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}\\&=1-\frac{4}{35}=\frac{31}{35}\end{aligned}$$

답 $\frac{31}{35}$

참고 | 확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_3\mathrm{C}_x\times{}_4\mathrm{C}_{3-x}}{{}_7\mathrm{C}_3}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

0346 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_6\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{1}{14},$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_6\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{8}{21},$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{3}{7},$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_6\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{4}{35},$$

$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_4\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{1}{210}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{210}$	1

이때 $\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)=\frac{5}{42}$이므로

$$\mathrm{P}(X\ge 3)=\frac{5}{42}\qquad\therefore a=3$$

답 3

0347 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+a+\frac{1}{6}=1\qquad\therefore a=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{E}(X)=-1\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3},$$

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\frac{7}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{19}{18}\end{aligned}$$

답 $\frac{19}{18}$

0348 확률의 총합은 1이므로

$$\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)=1$$

$$k+2k+3k+4k=1$$

$$10k=1\qquad\therefore k=\frac{1}{10}$$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

$$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{3}{10}+5\times\frac{2}{5}=4,$$

$\mathrm{E}(X^2)=2^2\times\frac{1}{10}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{3}{10}+5^2\times\frac{2}{5}=17$이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=17-4^2=1$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=1$$

답 ③

0349 $\mathrm{P}(X=-2)=a$, $\mathrm{P}(X=-1)=b$라 하면 확률의 총합은 1이므로

$$a+b+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1$$

$\therefore a+b=\frac{1}{4}$ ······ ㉠ ··· 1단계

$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{6}$이므로

$$-2\times a+(-1)\times b+0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$\therefore 2a+b=\frac{1}{3}$ ······ ㉡ ··· 2단계

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{12}$, $b=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(X=-1)=\frac{1}{6}$ ··· 3단계

답 $\frac{1}{6}$

	채점 요소	비율
1단계	확률의 총합이 1임을 이용하여 식 세우기	30 %
2단계	$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{6}$임을 이용하여 식 세우기	40 %
3단계	$\mathrm{P}(X=-1)$ 구하기	30 %

0350 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{6},$$

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10},$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{30}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$	1

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5},$$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{30}=2$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=2-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{14}{25}$

답 $\frac{14}{25}$

0351 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7}$,

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{4}{7}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{1}{7}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$

답 $\frac{6}{7}$

0352 4장의 카드 중에서 2장의 카드를 뽑는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2=6$

뽑은 카드에 적힌 두 수를 a, b $(a<b)$라 하고, 순서쌍 (a, b)로 나타내면 두 수 중 큰 수가

2인 경우는 $(1, 2)$의 1가지

3인 경우는 $(1, 3)$, $(2, 3)$의 2가지

4인 경우는 $(1, 4)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$의 3가지

따라서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4이고 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{2}=\frac{10}{3}$,

$\mathrm{E}(X^2)=2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{2}=\frac{35}{3}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{35}{3}-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

답 ①

0353 $\mathrm{E}(X)=5$이므로 $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(aX+10)=20$에서

$a\mathrm{E}(X)+10=20$, $\quad 5a+10=20$

$5a=10 \quad \therefore\ a=2$

또 $\mathrm{V}(X)=4$이므로

$b=\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(2X+10)$

$=2^2\mathrm{V}(X)=4\times4=16$

$\therefore\ ab=32$

답 32

0354 $\mathrm{E}(3X+1)=16$에서

$3\mathrm{E}(X)+1=16 \quad \therefore\ \mathrm{E}(X)=5$

$\sigma(-3X+2)=6$에서

$|-3|\sigma(X)=6 \quad \therefore\ \sigma(X)=2$

$\therefore\ \mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)=5+2^2=9$

답 ③

0355 확률변수 $Y=\frac{X-100}{4}=\frac{1}{4}X-25$에 대하여

$a=\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}\left(\frac{1}{4}X-25\right)$

$=\frac{1}{4}\mathrm{E}(X)-25$

$=\frac{1}{4}\times120-25=5$

이때 $\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2$이므로

$b=\mathrm{E}(Y^2)=\mathrm{V}(Y)+\{\mathrm{E}(Y)\}^2$

$=\mathrm{V}\left(\frac{1}{4}X-25\right)+5^2$

$=\left(\frac{1}{4}\right)^2\mathrm{V}(X)+25$

$=\frac{1}{16}\times48+25=28$

$\therefore\ a+b=33$

답 33

0356 $\mathrm{E}(X)=m$이므로

$\mathrm{E}(T)=\mathrm{E}\left(a\times\frac{X-m}{\sigma}+b\right)$

$=\frac{a}{\sigma}\times\mathrm{E}(X)-\frac{am}{\sigma}+b$

$=\frac{am}{\sigma}-\frac{am}{\sigma}+b=b$

$\therefore\ b=65$

또 $\sigma(X)=\sigma$이므로

$\sigma(T)=\sigma\left(a\times\frac{X-m}{\sigma}+b\right)$

$=\left|\frac{a}{\sigma}\right|\sigma(X)=\frac{a}{\sigma}\times\sigma=a$

$\therefore\ a=15$

$\therefore\ b-a=50$

답 50

0357 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=4)=1$

$\frac{-2+k}{16}+\frac{k}{16}+\frac{2+k}{16}+\frac{4+k}{16}=1$

$4k+4=16 \quad \therefore\ k=3$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-2	0	2	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

$\mathrm{E}(X)=-2\times\frac{1}{16}+0\times\frac{3}{16}+2\times\frac{5}{16}+4\times\frac{7}{16}=\frac{9}{4}$,

$\mathrm{E}(X^2)=(-2)^2\times\frac{1}{16}+0^2\times\frac{3}{16}+2^2\times\frac{5}{16}+4^2\times\frac{7}{16}=\frac{17}{2}$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=\frac{17}{2}-\left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{55}{16}$$

$\therefore\ \mathrm{V}(4X+3)=4^2\mathrm{V}(X)=16\times\frac{55}{16}=55$ 　답 ④

0358 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{2}+a+4a^2=1$$
$$8a^2+2a-1=0, \qquad (2a+1)(4a-1)=0$$
$$\therefore\ a=-\frac{1}{2}\ \text{또는}\ a=\frac{1}{4}$$

이때 $0\le \mathrm{P}(X=x)\le 1$이므로 　$a=\frac{1}{4}$ 　⋯ 1단계

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	200	300	500	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=200\times\frac{1}{2}+300\times\frac{1}{4}+500\times\frac{1}{4}$

$=300$ 　⋯ 2단계

$\therefore\ \mathrm{E}(aX-5)=\mathrm{E}\left(\frac{1}{4}X-5\right)=\frac{1}{4}\mathrm{E}(X)-5$

$=\frac{1}{4}\times300-5=70$ 　⋯ 3단계

답 70

채점 요소	비율
1단계 a의 값 구하기	30 %
2단계 $\mathrm{E}(X)$ 구하기	40 %
3단계 $\mathrm{E}(aX-5)$ 구하기	30 %

0359 $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{2}=2$,

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{8}+3^2\times\frac{1}{2}=\frac{21}{4}$이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=\frac{21}{4}-2^2=\frac{5}{4}$$

이때 확률변수 $Y=aX+b$에 대하여

$$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b=2a+b$$
$$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)=\frac{5}{4}a^2$$

따라서 $2a+b=14$, $\frac{5}{4}a^2=20$이므로

$a=4$, $b=6$ ($\because\ a>0$)

$\therefore\ ab=24$ 　답 24

0360 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5},$$
$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{8}{15},$$
$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$,

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{2}{5}+1^2\times\frac{8}{15}+2^2\times\frac{1}{15}=\frac{4}{5}$이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=\frac{4}{5}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{16}{45}$$

$\therefore\ \mathrm{V}(4-3X)=(-3)^2\mathrm{V}(X)$

$=9\times\frac{16}{45}=\frac{16}{5}$ 　답 ⑤

0361 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 3, 5, 7이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{6},$$
$$\mathrm{P}(X=5)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},$$
$$\mathrm{P}(X=7)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	5	7	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=3\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{3}+7\times\frac{1}{2}=\frac{17}{3}$

$\therefore\ \mathrm{E}(9X+2)=9\mathrm{E}(X)+2=9\times\frac{17}{3}+2=53$ 　답 53

0362 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, a이고, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	a	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{2}{5}+a\times\frac{1}{5}=\frac{a+9}{5}$

이때 $E(5X-6)=8$이므로

$$5E(X)-6=8, \quad 5\times\frac{a+9}{5}-6=8$$

$$\therefore a=5 \qquad \cdots \text{1단계}$$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{2}{5}+5^2\times\frac{1}{5}=\frac{48}{5}$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{48}{5}-\left(\frac{14}{5}\right)^2=\frac{44}{25}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{44}{25}}=\frac{2\sqrt{11}}{5} \qquad \cdots \text{2단계}$$

$$\therefore \sigma(5X-6)=|5|\sigma(X)=5\times\frac{2\sqrt{11}}{5}$$
$$=2\sqrt{11} \qquad \cdots \text{3단계}$$

답 $2\sqrt{11}$

채점 요소	비율
1단계 a의 값 구하기	50 %
2단계 $\sigma(X)$ 구하기	30 %
3단계 $\sigma(5X-6)$ 구하기	20 %

0363 확률변수 X는 이항분포 $B\left(5, \frac{1}{10}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{1}{10}\right)^x\left(\frac{9}{10}\right)^{5-x} \ (x=0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

$$\therefore P(X\geq1)=1-P(X=0)$$
$$=1-{}_5C_0\left(\frac{9}{10}\right)^5$$
$$=1-\left(\frac{9}{10}\right)^5$$

답 ⑤

0364 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_nC_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{n-x} \ (x=0, 1, 2, \cdots, n)$$

$P(X=n-1)=16P(X=n)$에서

$${}_nC_{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^1=16\times{}_nC_n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$n\times\frac{2}{3^n}=16\times\frac{1}{3^n}$$

$$2n=16 \qquad \therefore n=8$$

답 8

0365 과녁을 명중시키는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(4, \frac{4}{5}\right)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_4C_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{4-x} \ (x=0, 1, 2, 3, 4)$$

따라서 구하는 확률은

$$P(X\geq2)=1-\{P(X=0)+P(X=1)\}$$
$$=1-\left\{{}_4C_0\left(\frac{1}{5}\right)^4+{}_4C_1\left(\frac{4}{5}\right)^1\left(\frac{1}{5}\right)^3\right\}$$
$$=1-\frac{17}{625}=\frac{608}{625}$$

답 $\frac{608}{625}$

0366 예약을 취소하는 비즈니스석 예약자의 수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B(20, 0.1)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_{20}C_x\times0.1^x\times0.9^{20-x} \ (x=0, 1, 2, \cdots, 20)$$

이때 좌석이 부족하려면 $X\leq1$이어야 하므로 구하는 확률은

$$P(X\leq1)=P(X=0)+P(X=1)$$
$$={}_{20}C_0\times0.9^{20}+{}_{20}C_1\times0.1\times0.9^{19}$$
$$=0.122+20\times0.1\times0.135$$
$$=0.392$$

답 0.392

0367 $E(X)=10$에서 $\quad 20p=10 \quad \therefore p=\frac{1}{2}$

즉 확률변수 X는 이항분포 $B\left(20, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$V(X)=20\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=5$$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$$
$$=5+10^2=105$$

답 ②

0368 확률변수 X는 이항분포 $B\left(36, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$$E(X)=36\times\frac{2}{3}=24$$

$$V(X)=36\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=8$$

$$\therefore E(X)+V(X)=32$$

답 32

0369 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_4C_xp^x(1-p)^{4-x} \ (x=0, 1, 2, 3, 4)$$

따라서 $P(X=4)=\frac{256}{625}$에서

$${}_4C_4p^4=\frac{256}{625}, \quad p^4=\left(\frac{4}{5}\right)^4$$

$$\therefore p=\frac{4}{5} \ (\because 0\leq p\leq1)$$

즉 확률변수 X는 이항분포 $B\left(4, \frac{4}{5}\right)$를 따르므로

$$\sigma(X)=\sqrt{4\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}=\frac{4}{5}$$

답 $\frac{4}{5}$

0370 확률변수 X가 이항분포 $B\left(72, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$$E(X)=72\times\frac{1}{6}=12$$

$$V(X)=72\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=10$$

12와 10을 두 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은

$$(x-12)(x-10)=0$$

$$\therefore x^2-22x+120=0$$

따라서 $a=-22$, $b=120$이므로

$$a+b=98$$

답 98

04 확률분포 (1)

0371 $E(X)=2$, $V(X)=\frac{3}{2}$이므로

$np=2$ ...... ㉠

$np(1-p)=\frac{3}{2}$ ...... ㉡ ··· 1단계

㉠을 ㉡에 대입하면

$2(1-p)=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore p=\frac{1}{4}$

$p=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{4}n=2$ $\quad\therefore n=8$ ··· 2단계

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(8, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_8C_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{8-x}\ (x=0, 1, 2, \cdots, 8)$$

$$\therefore \frac{P(X=3)}{P(X=2)}=\frac{{}_8C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^5}{{}_8C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^6}=\frac{2}{3}$$ ··· 3단계

답 $\frac{2}{3}$

채점 요소	비율
1단계 n, p에 대한 식 세우기	30 %
2단계 n, p의 값 구하기	30 %
3단계 $\frac{P(X=3)}{P(X=2)}$의 값 구하기	40 %

0372 3개의 동전을 동시에 던져서 앞면이 2개, 뒷면이 1개 나올 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(6, \frac{3}{8}\right)$을 따르므로

$E(X)=6\times\frac{3}{8}=\frac{9}{4}$ 답 $\frac{9}{4}$

0373 확률변수 X는 이항분포 $B\left(50, \frac{3}{5}\right)$을 따르므로

$\sigma(X)=\sqrt{50\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}}=2\sqrt{3}$ 답 ③

0374 윷가락 4개를 동시에 던져서 걸이 나올 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^1=\frac{216}{625}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(25, \frac{216}{625}\right)$을 따르므로

$E(X)=25\times\frac{216}{625}=\frac{216}{25}$ 답 ④

0375 장난감 한 개가 정상일 확률은 $\quad 1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

상자 한 개가 정상일 확률은 $\quad 1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

따라서 장난감과 상자가 모두 정상일 확률은

$\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}=\frac{4}{5}$

즉 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100, \frac{4}{5}\right)$를 따르므로

$V(X)=100\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=16$ 답 **16**

0376 주머니에서 한 개의 공을 꺼낼 때, 흰 공이 나올 확률은 $\frac{4}{4+m}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n, \frac{4}{4+m}\right)$를 따른다.

이때 $E(X)=40$, $V(X)=24$이므로

$n\times\frac{4}{4+m}=40$ ...... ㉠

$n\times\frac{4}{4+m}\times\left(1-\frac{4}{4+m}\right)=24$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad 40\times\frac{m}{4+m}=24$

$5m=3m+12$ $\quad\therefore m=6$

$m=6$을 ㉠에 대입하면

$\frac{2}{5}n=40$ $\quad\therefore n=100$

$\therefore n-m=94$ 답 **94**

0377 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$V(X)=n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}n$

$V(2X+3)=32$에서

$2^2V(X)=32$, $\quad \frac{8}{9}n=32$ $\quad\therefore n=36$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(36, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$E(X)=36\times\frac{1}{3}=12$

$\therefore E(2X+3)=2E(X)+3$

$=2\times12+3=27$ 답 **27**

0378 확률변수 X는 이항분포 $B\left(500, \frac{3}{10}\right)$을 따르므로

$V(X)=500\times\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}=105$

$\therefore V\left(\frac{1}{3}X-1\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2V(X)$

$=\frac{1}{9}\times105=\frac{35}{3}$ 답 $\frac{35}{3}$

0379 확률변수 X는 이항분포 $B\left(5, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

$V(X)=5\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$

이때 $E(aX+b)=2$이므로 $\quad aE(X)+b=2$

$\therefore \frac{5}{2}a+b=2$ ...... ㉠

$V(aX+b)=20$이므로

$a^2V(X)=20$, $\frac{5}{4}a^2=20$

$a^2=16$ $\therefore a=4$ ($\because a>0$)

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$10+b=2$ $\therefore b=-8$

$\therefore ab=-32$

답 ③

0380 주사위를 30번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 Y라 하면 확률변수 Y는 이항분포 $B\left(30, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$E(Y)=30\times\frac{1}{3}=10$

이때 3의 배수가 아닌 눈이 나오는 횟수는 $30-Y$이므로

$X=3Y-(30-Y)=4Y-30$

$\therefore E(X)=E(4Y-30)=4E(Y)-30$

$=4\times10-30=10$

답 10

0381 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고 50원짜리 동전 1개와 100원짜리 동전 2개를 동시에 던져서 나오는 결과를 표로 나타내면 다음과 같다.

50원	100원	100원	받는 금액
H	H	H	250원
H	H	T	150원
H	T	H	150원
H	T	T	50원
T	H	H	200원
T	H	T	100원
T	T	H	100원
T	T	T	0원

한 번의 게임에서 받을 수 있는 금액을 X원이라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 50, 100, 150, 200, 250이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{1}{8}$, $P(X=50)=\frac{1}{8}$,

$P(X=100)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, $P(X=150)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$,

$P(X=200)=\frac{1}{8}$, $P(X=250)=\frac{1}{8}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	50	100	150	200	250	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$\therefore E(X)=0\times\frac{1}{8}+50\times\frac{1}{8}+100\times\frac{1}{4}+150\times\frac{1}{4}$

$+200\times\frac{1}{8}+250\times\frac{1}{8}$

$=125$

따라서 구하는 기댓값은 125원이다.

답 ③

0382 한 번의 게임에서 받을 수 있는 금액을 X원이라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1500	5000	합계
$P(X=x)$	$\frac{a}{3+a}$	$\frac{3}{3+a}$	1

… 1단계

이때 $E(X)=450$이므로

$-1500\times\frac{a}{3+a}+5000\times\frac{3}{3+a}=450$ … 2단계

$-1500a+15000=1350+450a$

$1950a=13650$ $\therefore a=7$ … 3단계

답 7

	채점 요소	비율
1단계	한 번의 게임에서 받을 수 있는 금액을 X원으로 놓고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내기	40 %
2단계	기댓값이 450원임을 이용하여 식 세우기	40 %
3단계	a의 값 구하기	20 %

0383 1장의 응모권으로 받을 수 있는 당첨금을 X원이라 하면 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 5500, 22000, 110000이고, 그 확률은 각각

$P(X=0)=\frac{{}_9C_3}{{}_{12}C_3}=\frac{21}{55}$,

$P(X=5500)=\frac{{}_3C_1\times{}_9C_2}{{}_{12}C_3}=\frac{27}{55}$,

$P(X=22000)=\frac{{}_3C_2\times{}_9C_1}{{}_{12}C_3}=\frac{27}{220}$,

$P(X=110000)=\frac{{}_3C_3}{{}_{12}C_3}=\frac{1}{220}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	5500	22000	110000	합계
$P(X=x)$	$\frac{21}{55}$	$\frac{27}{55}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$	1

$\therefore E(X)$

$=0\times\frac{21}{55}+5500\times\frac{27}{55}+22000\times\frac{27}{220}$

$+110000\times\frac{1}{220}$

$=5900$

따라서 손해를 보지 않으려면 응모권 1장을 최소 5900원에 팔아야 한다.

답 5900원

시험에 꼭 나오는 문제

● 본책 065~067쪽

0384 확률의 총합은 1이므로

$P(X=-2)+P(X=-1)+\cdots+P(X=2)=1$

04 확률분포 (1)

$$\frac{k}{3}+\frac{k}{2}+k+\frac{k}{2}+\frac{k}{3}=1$$

$$\frac{8}{3}k=1 \qquad \therefore k=\frac{3}{8}$$

답 $\frac{3}{8}$

0385 확률의 총합은 1이므로

$$a+\frac{a}{2}+a^2=1, \qquad 2a^2+3a-2=0$$

$$(a+2)(2a-1)=0 \qquad \therefore a=-2 \text{ 또는 } a=\frac{1}{2}$$

이때 $0\le \mathrm{P}(X=x)\le 1$이므로 $\quad a=\frac{1}{2}$

한편 $X^2=25$에서 $\quad X=-5$ 또는 $X=5$

$$\therefore \mathrm{P}(X^2=25)=\mathrm{P}(X=-5)+\mathrm{P}(X=5)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

답 $\frac{3}{4}$

0386 $X^2-6X+8<0$에서

$$(X-2)(X-4)<0 \qquad \therefore 2<X<4$$

이때 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로

$$\mathrm{P}(X^2-6X+8<0)=\mathrm{P}(2<X<4)$$
$$=\mathrm{P}(X=3)$$

카드에 적힌 두 수의 차가 3인 경우는 1과 4, 2와 5, 3과 6이 적힌 카드를 뽑는 경우의 3가지이므로

$$\mathrm{P}(X^2-6X+8<0)=\mathrm{P}(X=3)$$
$$=\frac{3}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{5}$$

답 ①

참고 | 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

0387 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이므로

$$\mathrm{P}(X\ge 2)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$$
$$=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}+\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}$$
$$=\frac{3}{10}+\frac{1}{30}=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

0388 $\sigma(X)=\mathrm{E}(X)$에서 $\qquad \{\sigma(X)\}^2=\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$$\therefore \mathrm{V}(X)=\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

이때 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$$\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$\therefore \mathrm{E}(X^2)=2\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{1}{2}+a\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}a+\frac{1}{2},$$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{10}+1^2\times\frac{1}{2}+a^2\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}a^2+\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{2}{5}a^2+\frac{1}{2}=2\left(\frac{2}{5}a+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{2}{25}a^2-\frac{4}{5}a=0, \qquad a^2-10a=0$$

$$a(a-10)=0 \qquad \therefore a=10 \ (\because a>1)$$

$$\therefore \mathrm{E}(X^2)+\mathrm{E}(X)$$
$$=\left(\frac{2}{5}\times100+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{5}\times10+\frac{1}{2}\right)=45$$

답 ⑤

0389 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6},$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3},$$

$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3},$$

$$\mathrm{P}(X=5)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{3}+5\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2},$$

$\mathrm{E}(X^2)=2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{3}+5^2\times\frac{1}{6}=\frac{79}{6}$이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=\frac{79}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{11}{12}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{11}{12}}=\frac{\sqrt{33}}{6}$$

답 $\frac{\sqrt{33}}{6}$

0390 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이므로

$$\mathrm{P}(X=0)={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

$$\mathrm{P}(X=1)={}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(X\ge2)=1-\{\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)\}$$
$$=1-\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\right)=\frac{11}{16}$$

이때 확률변수 Y가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(Y=0)=\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{16},$$

$$\mathrm{P}(Y=1)=\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{P}(Y=2)=\mathrm{P}(X\ge2)=\frac{11}{16}$$

이므로 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{16}$	1

$$\therefore \mathrm{E}(Y)=0\times\frac{1}{16}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{11}{16}=\frac{13}{8}$$

답 ②

0391 $\mathrm{E}(2X+4)=12$에서

$$2\mathrm{E}(X)+4=12 \qquad \therefore \mathrm{E}(X)=4$$

$V(2X)=36$에서 $\quad 2^2V(X)=36$

$\therefore V(X)=9$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$$
$$=9+4^2=25$$

답 25

0392 $E(X)=-2\times\frac{4}{9}+(-1)\times\frac{4}{9}+0\times\frac{1}{9}=-\frac{4}{3}$,

$E(X^2)=(-2)^2\times\frac{4}{9}+(-1)^2\times\frac{4}{9}+0^2\times\frac{1}{9}=\frac{20}{9}$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{20}{9}-\left(-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$이므로

$$\sigma(Y)=\sigma(-3X+7)=|-3|\sigma(X)$$
$$=3\times\frac{2}{3}=2$$

답 2

0393 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{-a+2}{10}+\frac{2}{10}+\frac{a+2}{10}+\frac{2a+2}{10}=1$$

$2a+8=10 \qquad \therefore a=1$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

$E(X)=-1\times\frac{1}{10}+0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{2}{5}=1$,

$E(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{10}+0^2\times\frac{1}{5}+1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{2}{5}=2$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=2-1^2=1$$
$$\therefore V(-5X+1)=(-5)^2V(X)$$
$$=25\times1=25$$

답 25

0394 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_{10}C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{10-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$

$\therefore P(X\le2)$

$$=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$$
$$={}_{10}C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+{}_{10}C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^9+{}_{10}C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^8$$
$$=\frac{7}{128}$$

따라서 $p=128$, $q=7$이므로

$p+q=135$

답 135

0395 $E(X)=6$에서 $\quad np=6 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=40-6^2=4$이므로

$np(1-p)=4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$6(1-p)=4 \qquad \therefore p=\frac{1}{3}$

$p=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{3}n=6 \qquad \therefore n=18$

답 ③

0396 한 번의 시행에서 빨간 공이 나올 확률은 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$이므로

확률변수 X는 이항분포 $B\left(n,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$$\therefore E(X)=n\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}n$$
$$V(X)=n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}n$$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$\frac{3}{16}n=\frac{11}{2}-\left(\frac{1}{4}n\right)^2, \qquad n^2+3n-88=0$

$(n+11)(n-8)=0$

$\therefore n=8$ ($\because n$은 자연수)

답 8

0397 확률변수 X는 이항분포 $B\left(180,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$$E(X)=180\times\frac{1}{6}=30$$
$$\sigma(X)=\sqrt{180\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}}=5$$
$$\therefore E(Y)-\sigma(Y)=E(2X-15)-\sigma(2X-15)$$
$$=2E(X)-15-|2|\sigma(X)$$
$$=2\times30-15-2\times5$$
$$=35$$

답 ②

0398 두 개의 주사위를 동시에 던져서 두 눈의 수의 곱이 홀수일 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(160,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$E(X)=160\times\frac{1}{4}=40$$
$$V(X)=160\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=30$$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$$
$$=30+40^2=1630$$
$$\therefore f(a)=E((X-a)^2)$$
$$=E(X^2-2aX+a^2)$$
$$=E(X^2)-2aE(X)+a^2$$
$$=1630-2a\times40+a^2$$
$$=(a-40)^2+30$$

따라서 $f(a)$는 $a=40$에서 최솟값 30을 갖는다.

답 30

RPM 비법노트

일반적으로 두 확률변수 X, Y에 대하여

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

가 성립한다.

0399 전체 제비의 개수를 n, 제비 1개를 뽑아서 받을 수 있는 상금을 X원이라 하고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	10000	100000	합계
$P(X=x)$	$\frac{n-6}{n}$	$\frac{5}{n}$	$\frac{1}{n}$	1

이때 $E(X)=100$이므로

$$0\times\frac{n-6}{n}+10000\times\frac{5}{n}+100000\times\frac{1}{n}=100$$

$$100n=150000 \qquad \therefore n=1500$$

따라서 전체 제비의 개수는 1500이다.

답 **1500**

0400 $P(0\le X\le 2)=\frac{5}{6}$에서

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{5}{6}$$

$$1-P(X=-1)=\frac{5}{6}$$

$$\therefore P(X=-1)=\frac{1}{6}$$

즉 $\frac{5-a}{6}=\frac{1}{6}$이므로 $a=4$ … 1단계

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$E(X)=-1\times\frac{1}{6}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$,

$E(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{6}+0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

$$=\frac{7}{6}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{11}{12}$$ … 2단계

$$\therefore V(aX+3)=V(4X+3)$$

$$=4^2V(X)$$

$$=16\times\frac{11}{12}=\frac{44}{3}$$ … 3단계

답 $\frac{44}{3}$

	채점 요소	비율
1단계	a의 값 구하기	30 %
2단계	$V(X)$ 구하기	50 %
3단계	$V(aX+3)$ 구하기	20 %

0401 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$P(X=1)=\frac{{}_5C_1\times{}_2C_2}{{}_7C_3}=\frac{1}{7},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_5C_2\times{}_2C_1}{{}_7C_3}=\frac{4}{7},$$

$$P(X=3)=\frac{{}_5C_3}{{}_7C_3}=\frac{2}{7}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

… 1단계

$$\therefore E(X)=1\times\frac{1}{7}+2\times\frac{4}{7}+3\times\frac{2}{7}=\frac{15}{7}$$ … 2단계

$$\therefore E(7X-5)=7E(X)-5$$

$$=7\times\frac{15}{7}-5=10$$ … 3단계

답 **10**

	채점 요소	비율
1단계	확률변수 X의 확률분포 구하기	40 %
2단계	$E(X)$ 구하기	30 %
3단계	$E(7X-5)$ 구하기	30 %

0402 확률변수 X가 이항분포 $B\left(10, \frac{4}{5}\right)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_{10}C_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{10-x}\ (x=0, 1, 2, \cdots, 10)$$

… 1단계

$$\therefore P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)$$

$$={}_{10}C_0\left(\frac{1}{5}\right)^{10}+{}_{10}C_1\left(\frac{4}{5}\right)^1\left(\frac{1}{5}\right)^9$$

$$=\frac{41}{5^{10}}$$ … 2단계

$$\therefore k=41$$ … 3단계

답 **41**

	채점 요소	비율
1단계	확률변수 X의 확률질량함수 구하기	40 %
2단계	$P(X\le 1)$ 구하기	50 %
3단계	k의 값 구하기	10 %

0403 바닥에 놓인 면에 적힌 수가 1일 확률은 $\frac{1}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(80, \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$$\therefore E(X)=80\times\frac{1}{4}=20$$

$$V(X)=80\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=15$$ … 1단계

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=15+20^2=415 \quad \cdots \text{2단계}$$

답 415

채점 요소	비율
1단계 $E(X)$, $V(X)$ 구하기	70 %
2단계 $E(X^2)$ 구하기	30 %

0404 전략 확률의 총합은 1임과 분산을 이용하여 a, b, c 사이의 관계식을 구한다.

확률변수 X에 대하여 확률의 총합은 1이므로

$$a+b+c+b+a=1$$

$$\therefore 2a+2b+c=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$E(X)=1\times a+3\times b+5\times c+7\times b+9\times a$$
$$=10a+10b+5c=5(2a+2b+c)$$
$$=5\ (\because ㉠),$$

$$E(X^2)=1^2\times a+3^2\times b+5^2\times c+7^2\times b+9^2\times a$$
$$=82a+58b+25c$$

이므로 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$$\frac{31}{5}=82a+58b+25c-5^2$$

$$\therefore 82a+58b+25c=\frac{156}{5} \quad \cdots\cdots ㉡$$

또 확률변수 Y에 대하여

$$E(Y)=1\times\left(a+\frac{1}{20}\right)+3\times b+5\times\left(c-\frac{1}{10}\right)$$
$$+7\times b+9\times\left(a+\frac{1}{20}\right)$$
$$=10a+10b+5c=5(2a+2b+c)$$
$$=5\ (\because ㉠),$$

$$E(Y^2)=1^2\times\left(a+\frac{1}{20}\right)+3^2\times b+5^2\times\left(c-\frac{1}{10}\right)$$
$$+7^2\times b+9^2\times\left(a+\frac{1}{20}\right)$$
$$=82a+58b+25c+\frac{8}{5}$$
$$=\frac{156}{5}+\frac{8}{5}\ (\because ㉡)$$
$$=\frac{164}{5}$$

이므로

$$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2$$
$$=\frac{164}{5}-5^2=\frac{39}{5}$$

$$\therefore 10\times V(Y)=10\times\frac{39}{5}=78$$

답 78

0405 전략 주사위를 던진 횟수에 따른 확률을 각각 구한다.

(i) $X=1$인 경우

주사위를 던져서 3 이상의 눈이 나와야 하므로

$$P(X=1)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

(ii) $X=2$인 경우

주사위를 던질 때, 첫 번째에는 1의 눈이 나오고 두 번째에는 2 이상의 눈이 나오거나 첫 번째에서 2의 눈이 나와야 하므로

$$P(X=2)=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=\frac{11}{36}$$

(iii) $X=3$인 경우

주사위를 던질 때, 첫 번째와 두 번째 모두 1의 눈이 나와야 하므로

$$P(X=3)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

이상에서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

$$\therefore E(X)=1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{11}{36}+3\times\frac{1}{36}$$
$$=\frac{49}{36}$$

답 $\frac{49}{36}$

0406 전략 확률변수 X의 확률질량함수와 $V(X)=1$임을 이용하여 n, p에 대한 식을 세운다.

확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_nC_x\,p^x(1-p)^{n-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이때 $P(X=n-1)=4P(X=n)$이므로

$${}_nC_{n-1}\,p^{n-1}(1-p)^1=4\times{}_nC_n\,p^n$$

$$\therefore n(1-p)=4p \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 $V(X)=1$이므로

$$np(1-p)=1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$4p^2=1,\quad p^2=\frac{1}{4}$$

$$\therefore p=\frac{1}{2}\ (\because 0<p<1)$$

$p=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{2}n=2 \quad \therefore n=4$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(4,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$m=E(X)=4\times\frac{1}{2}=2$$

이때 $\sigma=\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=1$이므로 $|X-m|<\sigma$에서

$$|X-2|<1,\quad -1<X-2<1$$

$$\therefore 1<X<3$$

$$\therefore P(|X-m|<\sigma)=P(1<X<3)$$
$$=P(X=2)$$
$$={}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=\frac{3}{8}$$

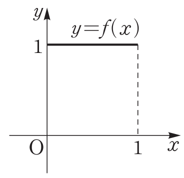
답 $\frac{3}{8}$

05 확률분포 (2)

교과서 문제 정복하기

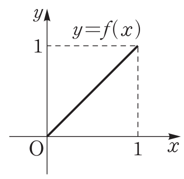
본책 069쪽, 071쪽

0407 ㄱ. $0 \le x \le 1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



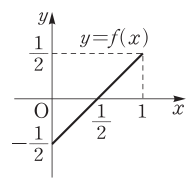
이때 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로 $f(x)$는 확률밀도함수가 될 수 있다.

ㄴ. $0 \le x \le 1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



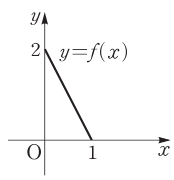
이때 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이 아니므로 $f(x)$는 확률밀도함수가 될 수 없다.

ㄷ. $0 \le x \le 1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 $0 \le x < \frac{1}{2}$에서 $f(x) < 0$이므로 $f(x)$는 확률밀도함수가 될 수 없다.

ㄹ. $0 \le x \le 1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

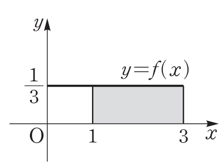


이때 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=0$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로 $f(x)$는 확률밀도함수가 될 수 있다.

이상에서 확률밀도함수가 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

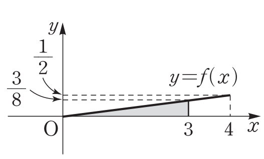
0408 $\mathrm{P}(X \ge 1)$은 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$$\mathrm{P}(X \ge 1) = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

답 $\frac{2}{3}$

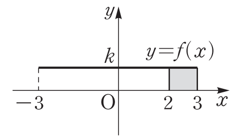
0409 $\mathrm{P}(0 \le X \le 3)$은 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$$\mathrm{P}(0 \le X \le 3) = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{8}$$
$$= \frac{9}{16}$$

답 $\frac{9}{16}$

0410 (1) $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-3$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



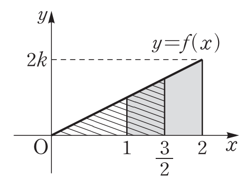
$$6 \times k = 1 \qquad \therefore k = \frac{1}{6}$$

(2) $\mathrm{P}(X \ge 2)$는 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$\mathrm{P}(X \ge 2) = 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{6}$

0411 (1) $f(x)=kx$라 하면 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2k = 1 \qquad \therefore k = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}x$$

(2) $\mathrm{P}(1 \le X \le 2)$는 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$\mathrm{P}(1 \le X \le 2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}+1\right) \times 1 = \frac{3}{4}$$

(3) $\mathrm{P}\left(X \le \frac{3}{2}\right)$은 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=\frac{3}{2}$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$\mathrm{P}\left(X \le \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

답 (1) $f(x)=\frac{1}{2}x$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) $\frac{9}{16}$

0412 답 $\mathrm{N}(6, 2^2)$

0413 답 $\mathrm{N}(8, 3^2)$

0414 (1) $\mathrm{E}(X)=10$, $\sigma(X)=3$이므로

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(2X-1) = 2\mathrm{E}(X) - 1$$
$$= 2 \times 10 - 1 = 19$$
$$\sigma(Y) = \sigma(2X-1) = |2|\sigma(X)$$
$$= 2 \times 3 = 6$$

(2) 확률변수 Y의 평균이 19, 표준편차가 6이므로 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(19, 6^2)$을 따른다.

답 (1) $\mathrm{E}(Y)=19$, $\sigma(Y)=6$ (2) $\mathrm{N}(19, 6^2)$

0415 ㄹ. σ의 값이 작아질수록 폭이 좁아진다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0416 $\mathrm{P}(0.5 \le Z \le 2) = \mathrm{P}(0 \le Z \le 2) - \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)$

$$= 0.4772 - 0.1915$$
$$= 0.2857$$

답 0.2857

0417 $P(Z\geq 2)=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 2)$
$=0.5-0.4772$
$=0.0228$ 답 **0.0228**

0418 $P(Z\leq 1)=P(Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 1)$
$=0.5+0.3413$
$=0.8413$ 답 **0.8413**

0419 $P(Z\leq -1.5)=P(Z\geq 1.5)$
$=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 1.5)$
$=0.5-0.4332$
$=0.0668$ 답 **0.0668**

0420 $P(-0.5\leq Z\leq 0.5)$
$=P(-0.5\leq Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 0.5)$
$=2P(0\leq Z\leq 0.5)$
$=2\times 0.1915=0.383$ 답 **0.383**

0421 $P(Z\geq -0.5)=P(Z\leq 0.5)$
$=P(Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 0.5)$
$=0.5+0.1915$
$=0.6915$ 답 **0.6915**

0422 $P(Z\leq a)=0.9772$에서
$P(Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq a)=0.9772$
$0.5+P(0\leq Z\leq a)=0.9772$
$\therefore P(0\leq Z\leq a)=0.4772$
$\therefore a=2$ 답 **2**

0423 $P(Z\geq a)=0.3085$에서
$P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq a)=0.3085$
$0.5-P(0\leq Z\leq a)=0.3085$
$\therefore P(0\leq Z\leq a)=0.1915$
$\therefore a=0.5$ 답 **0.5**

0424 $P(-a\leq Z\leq a)=0.8664$에서
$P(-a\leq Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq a)=0.8664$
$2P(0\leq Z\leq a)=0.8664$
$\therefore P(0\leq Z\leq a)=0.4332$
$\therefore a=1.5$ 답 **1.5**

0425 $P(-a\leq Z\leq 2a)=0.8185$에서
$P(-a\leq Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 2a)=0.8185$
$\therefore P(0\leq Z\leq a)+P(0\leq Z\leq 2a)=0.8185$
이때
$P(0\leq Z\leq 1)+P(0\leq Z\leq 2)=0.3413+0.4772$
$=0.8185$
이므로 $a=1$ 답 **1**

0426 답 $Z=\dfrac{X-5}{2}$ **0427** 답 $Z=\dfrac{X-30}{3}$

0428 (2) $P(4\leq X\leq 14)=P\left(\dfrac{4-8}{4}\leq Z\leq \dfrac{14-8}{4}\right)$
$=P(-1\leq Z\leq 1.5)$
$=P(-1\leq Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 1.5)$
$=P(0\leq Z\leq 1)+P(0\leq Z\leq 1.5)$
$=0.3413+0.4332$
$=0.7745$
답 (1) $Z=\dfrac{X-8}{4}$ (2) **0.7745**

0429 $E(X)=48\times\dfrac{1}{4}=12$
$\sigma(X)=\sqrt{48\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}}=3$
따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(12,\ 3^2)$을 따른다.
답 $N(12,\ 3^2)$

0430 $E(X)=180\times\dfrac{5}{6}=150$
$\sigma(X)=\sqrt{180\times\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{6}}=5$
따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(150,\ 5^2)$을 따른다.
답 $N(150,\ 5^2)$

0431 (1) $E(X)=162\times\dfrac{1}{3}=54$
$\sigma(X)=\sqrt{162\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}}=6$
따라서 X는 근사적으로 정규분포 $N(54,\ 6^2)$을 따르므로
$Z=\dfrac{X-54}{6}$
(2) $P(42\leq X\leq 60)=P\left(\dfrac{42-54}{6}\leq Z\leq \dfrac{60-54}{6}\right)$
$=P(-2\leq Z\leq 1)$
$=P(-2\leq Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 1)$
$=P(0\leq Z\leq 2)+P(0\leq Z\leq 1)$
$=0.4772+0.3413=0.8185$
답 (1) $Z=\dfrac{X-54}{6}$ (2) **0.8185**

유형 익히기

• 본책 072~080쪽

0432 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로
$\dfrac{1}{2}\times(1+2)\times a=1$ $\therefore a=\dfrac{2}{3}$ 답 $\dfrac{2}{3}$

05 확률분포 (2)

0433 ① $0<x\le1$에서 $f(x)<0$이므로 확률밀도함수의 그래프가 될 수 없다.

② 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이 아니므로 확률밀도함수의 그래프가 될 수 없다.

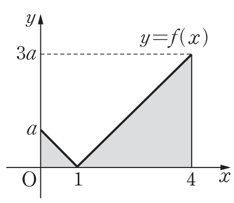
③ $-1<x<1$에서 $f(x)<0$이므로 확률밀도함수의 그래프가 될 수 없다.

④ $f(x)\ge0$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로 확률밀도함수의 그래프가 될 수 있다.

⑤ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이 아니므로 확률밀도함수의 그래프가 될 수 없다.

답 ④

0434 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



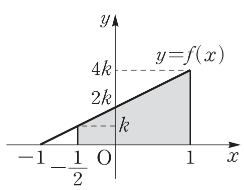
이때 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2}\times1\times a+\frac{1}{2}\times3\times3a=1$$

$$5a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{5}$$

답 $\frac{1}{5}$

0435 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$\frac{1}{2}\times2\times4k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{4}$$

$P\left(-\frac{1}{2}\le X\le1\right)$은 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-\frac{1}{2}$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$P\left(-\frac{1}{2}\le X\le1\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+1\right)\times\frac{3}{2}=\frac{15}{16}$$

답 ⑤

다른 풀이 $P\left(-\frac{1}{2}\le X\le1\right)=1-P\left(-1\le X\le-\frac{1}{2}\right)$

$$=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{15}{16}$$

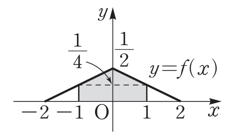
0436 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2}\times4\times a=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$$ ··· 1단계

$0\le x\le2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, $(2,\ 0)$을 지나는 직선이므로 그 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{\frac{1}{2}}=1 \qquad \therefore y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$$

따라서 $f(1)=\frac{1}{4}$이고 $P(|X|\le1)$, 즉 $P(-1\le X\le1)$은 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

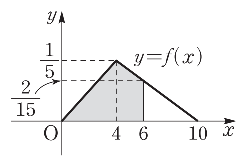


$$P(|X|\le1)=2P(0\le X\le1)$$
$$=2\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\times1=\frac{3}{4}$$ ··· 2단계

답 $\frac{3}{4}$

	채점 요소	비율
1단계	a의 값 구하기	30 %
2단계	$P(\lvert X\rvert\le1)$ 구하기	70 %

0437 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 구하는 확률은 $P(X\le6)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=6$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.



따라서 구하는 확률은

$$P(X\le6)=\frac{1}{2}\times4\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{15}\right)\times2$$
$$=\frac{11}{15}$$

답 $\frac{11}{15}$

다른 풀이 $P(X\le6)=1-P(6\le X\le10)$

$$=1-\frac{1}{2}\times4\times\frac{2}{15}=\frac{11}{15}$$

0438 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 대칭축이 각각 $x=x_1$, $x=x_2$이므로

$$E(X_1)=x_1,\ E(X_2)=x_2$$

ㄱ. 평균이 m인 정규분포의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$P(X_1\ge x_1)=P(X_2\le x_2)=0.5$ (거짓)

ㄴ. $x_1<x_2$이므로 $E(X_1)<E(X_2)$ (참)

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 가운데 부분의 높이는 낮고 양옆으로 퍼져있으므로

$\sigma(X_1)>\sigma(X_2)$ (거짓)

ㄹ. $f(x_1)<g(x_2)$이므로

$f(E(X_1))<g(E(X_2))$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ③

0439 평균이 m인 정규분포의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 평균이 가장 높은 학교는 B이다.
또 표준편차가 클수록 확률밀도함수의 그래프의 가운데 부분의 높이는 낮아지고 양옆으로 퍼지므로 표준편차가 가장 큰 학교는 C이다.

답 B, C

0440 ㄱ. 확률변수 X의 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$$\mathrm{P}(X\le m)=\mathrm{P}(X\ge m)=0.5 \text{ (참)}$$

ㄴ. $a\le 0$이면 $m+a\le m$이므로

$$\mathrm{P}(X\le m+a)\le \mathrm{P}(X\le m)=0.5 \text{ (거짓)}$$

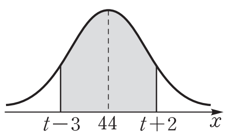
ㄷ. 정규분포곡선과 x축 사이의 넓이는 1이므로

$$\mathrm{P}(X\le a)+\mathrm{P}(X\ge a)=1 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0441 확률변수 X의 정규분포곡선은 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=44$에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{P}(t-3\le X\le t+2)$가 최대가 되려면



$$\frac{(t-3)+(t+2)}{2}=44$$

$$\therefore t=\frac{89}{2}$$

답 ②

0442 확률변수 X의 정규분포곡선은 직선 $x=a$에 대하여 대칭이므로 조건 (가)에서

$$a=\frac{-2+12}{2}=5$$

또 조건 (나)에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{V}(X)=1$

$$\therefore \mathrm{V}(X)=4$$

즉 $b^2=4$이므로 $b=2$ ($\because b>0$)

$$\therefore a+b=7$$

답 **7**

0443 $m=20$, $\sigma=4$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(12\le X\le 28)&=\mathrm{P}(20-8\le X\le 20+8)\\&=\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m+2\sigma)\\&=2\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)\\&=2\times 0.4772\\&=0.9544\end{aligned}$$

답 **0.9544**

0444 $\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+\sigma)=a$에서

$$2\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)=a$$

$$\therefore \mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)=\frac{a}{2}$$

$\mathrm{P}(m-2\sigma\le X\le m+2\sigma)=b$에서

$$2\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=b$$

$$\therefore \mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)=\frac{b}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m+2\sigma)\\&=\mathrm{P}(m-\sigma\le X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)\\&=\frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

답 ④

0445 $\mathrm{P}(X\le k)=0.0013$에서

$$\mathrm{P}(X\le m)-\mathrm{P}(k\le X\le m)=0.0013$$

$$0.5-\mathrm{P}(k\le X\le m)=0.0013$$

$$\therefore \mathrm{P}(k\le X\le m)=0.4987$$

이때 $\mathrm{P}(m\le X\le m+3\sigma)=0.4987$이므로

$$\mathrm{P}(m-3\sigma\le X\le m)=0.4987$$

$$\therefore k=m-3\sigma=48-3\times 3=39$$

답 **39**

0446 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 2^2)$, $\mathrm{N}(20,\ 3^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-10}{2},\ Z_Y=\frac{Y-20}{3}$$

으로 놓으면 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 $\mathrm{P}(10\le X\le 14)=\mathrm{P}(20\le Y\le k)$에서

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left(\frac{10-10}{2}\le Z_X\le \frac{14-10}{2}\right)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{20-20}{3}\le Z_Y\le \frac{k-20}{3}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore \mathrm{P}(0\le Z_X\le 2)=\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le \frac{k-20}{3}\right)$$

따라서 $2=\frac{k-20}{3}$이므로

$$k-20=6 \qquad \therefore k=26$$

답 ③

0447 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(17,\ \sigma^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-17}{\sigma}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 $\frac{X-17}{\sigma}=\frac{X-m}{6}$이므로 $m=17$, $\sigma=6$

$$\therefore m-\sigma=11$$

답 **11**

0448 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(4,\ 1^2)$, $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르므로

$$Z_X=X-4,\ Z_Y=\frac{Y-m}{2}$$

으로 놓으면 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. … 1단계

이때 $\mathrm{P}(1\le X\le 7)=2\mathrm{P}(m\le Y\le 2m+3)$에서

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(1-4\le Z_X\le 7-4)\\&=2\mathrm{P}\left(\frac{m-m}{2}\le Z_Y\le \frac{(2m+3)-m}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\mathrm{P}(-3\le Z_X\le 3)=2\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le \frac{m+3}{2}\right)$$

$$\therefore \mathrm{P}(0\le Z_X\le 3)=\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le \frac{m+3}{2}\right)$$ … 2단계

따라서 $3=\frac{m+3}{2}$이므로 $m=3$ … 3단계

답 **3**

05

확률분포 (2)

채점 요소	비율
1단계 확률변수 X, Y를 각각 표준화하기	20 %
2단계 주어진 식을 Z_X, Z_Y에 대한 식으로 나타내기	50 %
3단계 m의 값 구하기	30 %

0449 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(a,\ 3^2)$, $\mathrm{N}(a+7,\ 4^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-a}{3},\ Z_Y=\frac{Y-(a+7)}{4}$$

로 놓으면 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 $\mathrm{P}(X\ge b)=\mathrm{P}(Y\le b)$에서

$$\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{b-a}{3}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\le\frac{b-(a+7)}{4}\right)$$

즉 $\frac{b-a}{3}+\frac{b-(a+7)}{4}=0$이므로

$$4b-4a+3b-3a-21=0$$

$$\therefore\ a-b=-3$$

답 **−3**

0450 $Z=\frac{X-25}{8}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|X-23|\le10)&=\mathrm{P}(-10\le X-23\le10)\\&=\mathrm{P}(13\le X\le33)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{13-25}{8}\le Z\le\frac{33-25}{8}\right)\\&=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le1)\\&=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.4332+0.3413\\&=0.7745\end{aligned}$$

답 ③

0451 $Z=\frac{X-12}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

① $\mathrm{P}(X\ge12)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{12-12}{6}\right)=\mathrm{P}(Z\ge0)=0.5$

② $\mathrm{P}(X\le18)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{18-12}{6}\right)=\mathrm{P}(Z\le1)$
$=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1)$
$=0.5+0.3413=0.8413$

③ $\mathrm{P}(0\le X\le12)=\mathrm{P}\left(\frac{0-12}{6}\le Z\le\frac{12-12}{6}\right)$
$=\mathrm{P}(-2\le Z\le0)=\mathrm{P}(0\le Z\le2)$
$=0.4772$

④ $\mathrm{P}(6\le X\le18)=\mathrm{P}\left(\frac{6-12}{6}\le Z\le\frac{18-12}{6}\right)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le1)=2\mathrm{P}(0\le Z\le1)$
$=2\times0.3413=0.6826$

⑤ $\mathrm{P}(18\le X\le24)=\mathrm{P}\left(\frac{18-12}{6}\le Z\le\frac{24-12}{6}\right)$
$=\mathrm{P}(1\le Z\le2)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le2)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)$
$=0.4772-0.3413$
$=0.1359$

답 ⑤

0452 $\mathrm{E}(X)=25$, $\sigma(X)=10$이므로

$$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X+4)=2\mathrm{E}(X)+4=2\times25+4=54$$

$$\sigma(Y)=\sigma(2X+4)=|2|\sigma(X)=2\times10=20$$

따라서 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(54,\ 20^2)$을 따르므로

$Z=\frac{Y-54}{20}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(Y\le94)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{94-54}{20}\right)=\mathrm{P}(Z\le2)\\&=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=0.5+0.4772=0.9772\end{aligned}$$

답 **0.9772**

0453 $Z=\frac{X-50}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(40\le X\le a)=0.8185$에서

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left(\frac{40-50}{5}\le Z\le\frac{a-50}{5}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-2\le Z\le\frac{a-50}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-50}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le2)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-50}{5}\right)\\&=0.4772+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-50}{5}\right)=0.8185\end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-50}{5}\right)=0.3413$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1)=0.3413$이므로

$$\frac{a-50}{5}=1,\qquad a-50=5$$

$$\therefore\ a=55$$

답 **55**

0454 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(|X-m|\le k\sigma)=0.9544$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(-k\sigma\le X-m\le k\sigma)&=\mathrm{P}\left(-k\le\frac{X-m}{\sigma}\le k\right)\\&=\mathrm{P}(-k\le Z\le k)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.9544\end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.4772$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$$k=2$$

답 **2**

0455 $Z=\dfrac{X-m}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(X\geq 24)=0.3085$에서

$$P\left(Z\geq \frac{24-m}{2}\right)=P(Z\geq 0)-P\left(0\leq Z\leq \frac{24-m}{2}\right)$$
$$=0.3085$$
$$\therefore P\left(0\leq Z\leq \frac{24-m}{2}\right)=0.1915$$

이때 $P(0\leq Z\leq 0.5)=0.1915$이므로

$$\frac{24-m}{2}=0.5, \quad 24-m=1$$
$$\therefore m=23$$

답 **23**

0456 $Z=\dfrac{X-20}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(X\leq k)=0.9332$에서

$$P\left(Z\leq \frac{k-20}{3}\right)=P(Z\leq 0)+P\left(0\leq Z\leq \frac{k-20}{3}\right)$$
$$=0.9332$$
$$\therefore P\left(0\leq Z\leq \frac{k-20}{3}\right)=0.4332$$

이때 $P(0\leq Z\leq 1.5)=0.4332$이므로

$$\frac{k-20}{3}=1.5, \quad k-20=4.5$$
$$\therefore k=24.5$$

답 **24.5**

0457 사과 한 개의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(250, 15^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-250}{15}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$P(220\leq X\leq 265)=P\left(\frac{220-250}{15}\leq Z\leq \frac{265-250}{15}\right)$$
$$=P(-2\leq Z\leq 1)$$
$$=P(-2\leq Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 1)$$
$$=P(0\leq Z\leq 2)+P(0\leq Z\leq 1)$$
$$=0.48+0.34=0.82$$

답 ④

0458 막대 모양 과자의 길이를 X cm라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(13, 2^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-13}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$P(X\geq 15)=P\left(Z\geq \frac{15-13}{2}\right)$$
$$=P(Z\geq 1)$$
$$=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 1)$$
$$=0.5-0.3413=0.1587$$

답 **0.1587**

0459 2학년 학생들의 수학 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(57, 8^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-57}{8}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$P(X\leq 45)=P\left(Z\leq \frac{45-57}{8}\right)$$
$$=P(Z\leq -1.5)=P(Z\geq 1.5)$$
$$=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 1.5)$$
$$=0.5-0.43=0.07$$

답 ①

0460 신입생들의 키를 X cm라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(165, 5.5^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-165}{5.5}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다. … 1단계

$$\therefore P(X\geq 176)=P\left(Z\geq \frac{176-165}{5.5}\right)$$
$$=P(Z\geq 2)$$
$$=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 2)$$
$$=0.5-0.48=0.02$$ … 2단계

따라서 키가 176 cm 이상인 학생 수는

$1000\times 0.02=20$ … 3단계

답 **20**

채점 요소		비율
1단계	신입생들의 키를 X cm로 놓고 확률변수 X를 표준화하기	40 %
2단계	$P(X\geq 176)$ 구하기	40 %
3단계	키가 176 cm 이상인 학생 수 구하기	20 %

0461 지현이가 등교하는 데 걸리는 시간을 X분이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(35, 5^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-35}{5}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
지각하지 않으려면 등교하는 데 걸리는 시간이 37분 이하이어야 하므로 구하는 확률은

$$P(X\leq 37)=P\left(Z\leq \frac{37-35}{5}\right)=P(Z\leq 0.4)$$
$$=P(Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 0.4)$$
$$=0.5+0.1554=0.6554$$

답 **0.6554**

0462 골프공 한 개의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(45.5, 0.5^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-45.5}{0.5}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
이때 골프공의 기준 무게가 46 g이므로 불량품이려면
$|X-46|\geq 1$에서

$X-46\leq -1$ 또는 $X-46\geq 1$

$\therefore X\leq 45$ 또는 $X\geq 47$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X\le45)+\mathrm{P}(X\ge47)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{45-45.5}{0.5}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{47-45.5}{0.5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le-1)+\mathrm{P}(Z\ge3)\\&=\mathrm{P}(Z\ge1)+\mathrm{P}(Z\ge3)\\&=\{\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)\}\\&\quad+\{\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le3)\}\\&=(0.5-0.3413)+(0.5-0.4987)\\&=0.16\end{aligned}$$

답 ②

0463 응시자의 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(58,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-58}{10}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

합격자의 최저 점수를 a점이라 하면 $\mathrm{P}(X\ge a)=\frac{360}{4500}=0.08$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-58}{10}\right)&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-58}{10}\right)\\&=0.08\end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-58}{10}\right)=0.42$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.4)=0.42$이므로

$$\frac{a-58}{10}=1.4\qquad\therefore\ a=72$$

따라서 합격자의 최저 점수는 72점이다.

답 ②

0464 학생들의 수학 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-80}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

수학 성적이 상위 11 % 이내에 속하는 학생의 최저 점수를 a점이라 하면 $\mathrm{P}(X\ge a)=0.11$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-80}{10}\right)&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-80}{10}\right)\\&=0.11\end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-80}{10}\right)=0.39$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.23)=0.39$이므로

$$\frac{a-80}{10}=1.23\qquad\therefore\ a=92.3$$

따라서 상위 11 % 이내에 속하는 학생의 최저 점수는 92.3점이다.

답 **92.3점**

0465 오렌지의 당도를 X Brix라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(14,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-14}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\le a)=\frac{320}{2000}=0.16$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a-14}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{14-a}{2}\right)&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{14-a}{2}\right)\\&=0.16\end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{14-a}{2}\right)=0.34$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1)=0.34$이므로

$$\frac{14-a}{2}=1\qquad\therefore\ a=12$$

답 **12**

0466 응시한 학생의 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(87.4,\ 2.5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-87.4}{2.5}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

학교 대표로 뽑힌 학생의 최저 점수를 k점이라 하면

$\mathrm{P}(X\ge k)=\frac{5}{400}=0.0125$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k-87.4}{2.5}\right)&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-87.4}{2.5}\right)\\&=0.0125\end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-87.4}{2.5}\right)=0.4875$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le2.24)=0.4875$이므로

$$\frac{k-87.4}{2.5}=2.24\qquad\therefore\ k=93$$

따라서 학교 대표로 뽑힌 학생의 최저 점수는 93점이다.

답 **93점**

0467 제품의 무게를 X kg이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(12.25,\ 0.1^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-12.25}{0.1}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

기계의 가동을 멈추고 조사에 들어갈 확률이 0.0228이므로

$\mathrm{P}(X\le a)=0.0228$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a-12.25}{0.1}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{12.25-a}{0.1}\right)&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{12.25-a}{0.1}\right)\\&=0.0228\end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{12.25-a}{0.1}\right)=0.4772$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$$\frac{12.25-a}{0.1}=2\qquad\therefore\ a=12.05$$

답 ②

0468 A 반 학생들의 몸무게를 X kg이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(57.3,\ 7^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-57.3}{7}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 A 반 학생의 몸무게가 65 kg 이상일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 65)&=\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{65-57.3}{7}\right)=\mathrm{P}(Z_X\ge 1.1)\\&=\mathrm{P}(Z_X\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z_X\le 1.1)\\&=0.5-0.36=0.14\end{aligned}$$

한편 B 반 학생들의 몸무게를 Y kg이라 하면 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(60.1,\ 5^2)$을 따르므로 $Z_Y=\dfrac{Y-60.1}{5}$로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 A 반과 B 반의 학생 수가 서로 같으므로 A 반 학생의 몸무게가 65 kg 이상일 확률은 B 반 학생의 몸무게가 k kg 이상일 확률의 $\dfrac{1}{2}$배이다.

즉 $\mathrm{P}(X\ge 65)=\dfrac{1}{2}\mathrm{P}(Y\ge k)$이므로

$\mathrm{P}(Y\ge k)=2\mathrm{P}(X\ge 65)=2\times 0.14=0.28$에서

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{k-60.1}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_Y\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le\frac{k-60.1}{5}\right)=0.28\end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le\frac{k-60.1}{5}\right)=0.22$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.58)=0.22$이므로

$\dfrac{k-60.1}{5}=0.58\qquad\therefore\ k=63$

답 **63**

0469 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(150,\ \dfrac{3}{5}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=150\times\frac{3}{5}=90$$

$$\mathrm{V}(X)=150\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=36$$

이때 150은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(90,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-90}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(96\le X\le 105)&=\mathrm{P}\left(\frac{96-90}{6}\le Z\le\frac{105-90}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(1\le Z\le 2.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.4938-0.3413\\&=0.1525\end{aligned}$$

답 ③

0470 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(225,\ \dfrac{4}{5}\right)$를 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=225\times\frac{4}{5}=180$$

$$\mathrm{V}(X)=225\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=36$$

이때 225는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(180,\ 6^2)$을 따른다.

$\therefore\ a=180,\ b=36$ … 1단계

따라서 $Z=\dfrac{X-180}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(168\le X\le 180)&=\mathrm{P}\left(\frac{168-180}{6}\le Z\le\frac{180-180}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\end{aligned}$$

$\therefore\ c=2$ … 2단계

$\therefore\ a+b+c=218$ … 3단계

답 **218**

	채점 요소	비율
1단계	a, b의 값 구하기	40 %
2단계	c의 값 구하기	50 %
3단계	$a+b+c$의 값 구하기	10 %

0471 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(180,\ \dfrac{5}{6}\right)$를 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=180\times\frac{5}{6}=150$$

$$\mathrm{V}(X)=180\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=25$$

이때 180은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 5^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-150}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 160)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{160-150}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

답 **0.0228**

0472 1의 눈이 나오는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(720,\ \dfrac{1}{6}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=720\times\frac{1}{6}=120$$

$$\mathrm{V}(X)=720\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=100$$

이때 720은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-120}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(130\le X\le 140)&=\mathrm{P}\left(\frac{130-120}{10}\le Z\le\frac{140-120}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(1\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.4772-0.3413\\&=0.1359\end{aligned}$$

답 ②

0473 흰 공이 나오는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(192,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=192\times\frac{1}{4}=48$$

$$\mathrm{V}(X)=192\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=36$$

이때 192는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(48,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-48}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge57)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{57-48}{6}\right)=\mathrm{P}(Z\ge1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)\\&=0.5-0.4332=0.0668\end{aligned}$$

답 ②

0474 세 학생 A, B, C가 가위바위보를 한 번 하여 비길 확률은

$$\frac{3+3!}{{}_3\Pi_3}=\frac{3+6}{3^3}=\frac{1}{3}$$

이므로 비긴 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(72,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$$\therefore\ \mathrm{E}(X)=72\times\frac{1}{3}=24$$

$$\mathrm{V}(X)=72\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=16$$

이때 72는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(24,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-24}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(20\le X\le26)&=\mathrm{P}\left(\frac{20-24}{4}\le Z\le\frac{26-24}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le0.5)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)\\&=0.3413+0.1915=0.5328\end{aligned}$$

답 ①

0475 예약을 취소하는 승객의 수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=400\times\frac{1}{5}=80$$

$$\mathrm{V}(X)=400\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=64$$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 8^2)$을 따른다. … 1단계

따라서 $Z=\frac{X-80}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. … 2단계

탑승객이 정원을 초과하지 않으려면 예약을 취소하는 승객이 $400-340=60$(명) 이상이어야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge60)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{60-80}{8}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge-2.5)=\mathrm{P}(Z\le2.5)\\&=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)\\&=0.5+0.4938=0.9938\end{aligned}$$ … 3단계

답 **0.9938**

	채점 요소	비율
1단계	예약을 취소하는 승객의 수를 X로 놓고 확률변수 X가 따르는 정규분포 구하기	40 %
2단계	확률변수 X를 표준화하기	20 %
3단계	탑승객이 정원을 초과하지 않을 확률 구하기	40 %

0476 448번의 시행 중 10점을 얻는 횟수를 X라 하면 1점을 잃는 횟수는 $448-X$이므로 이 게임을 448번 시행한 후의 점수는

$$10X-(448-X)=11X-448$$

따라서 $11X-448\ge245$에서

$$X\ge63$$

한편 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(448,\ \frac{1}{8}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=448\times\frac{1}{8}=56$$

$$\mathrm{V}(X)=448\times\frac{1}{8}\times\frac{7}{8}=49$$

이때 448은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(56,\ 7^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-56}{7}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge63)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{63-56}{7}\right)=\mathrm{P}(Z\ge1)\\&=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.5-0.3413=0.1587\end{aligned}$$

답 **0.1587**

0477 현이네 반 학생들의 국어, 영어, 수학 성적을 각각 X_{A}, X_{B}, X_{C}점이라 하면 확률변수 X_{A}, X_{B}, X_{C}는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 6^2)$, $\mathrm{N}(55,\ 15^2)$, $\mathrm{N}(65,\ 8^2)$을 따르므로

$$Z_{\mathrm{A}}=\frac{X_{\mathrm{A}}-80}{6},\ Z_{\mathrm{B}}=\frac{X_{\mathrm{B}}-55}{15},\ Z_{\mathrm{C}}=\frac{X_{\mathrm{C}}-65}{8}$$

로 놓으면 확률변수 Z_{A}, Z_{B}, Z_{C}는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

다른 학생들이 현이보다 국어, 영어, 수학 성적이 높을 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X_{\mathrm{A}}>86)=\mathrm{P}\left(Z_{\mathrm{A}}>\frac{86-80}{6}\right)=\mathrm{P}(Z_{\mathrm{A}}>1)$$

$$\mathrm{P}(X_{\mathrm{B}}>85)=\mathrm{P}\left(Z_{\mathrm{B}}>\frac{85-55}{15}\right)=\mathrm{P}(Z_{\mathrm{B}}>2)$$

$$\mathrm{P}(X_{\mathrm{C}}>80)=\mathrm{P}\left(Z_{\mathrm{C}}>\frac{80-65}{8}\right)=\mathrm{P}\left(Z_{\mathrm{C}}>\frac{15}{8}\right)$$

이때 $P(Z_B>2)<P\left(Z_C>\frac{15}{8}\right)<P(Z_A>1)$이므로

$P(X_B>85)<P(X_C>80)<P(X_A>86)$

따라서 상대적으로 성적이 가장 좋은 과목은 영어이다.

답 영어

참고 | 현이보다 성적이 높을 확률이 낮은 과목일수록 상대적으로 현이의 성적이 좋다.

0478 1반, 2반, 3반 학생들의 봉사 시간을 각각 X_1, X_2, X_3 시간이라 하면 확률변수 X_1, X_2, X_3은 각각 정규분포 $N(40,\ 3^2)$, $N(46,\ 7^2)$, $N(39,\ 4^2)$을 따르므로

$$Z_1=\frac{X_1-40}{3},\ Z_2=\frac{X_2-46}{7},\ Z_3=\frac{X_3-39}{4}$$

로 놓으면 확률변수 Z_1, Z_2, Z_3은 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

1반의 다른 학생들이 A보다 봉사 시간이 길 확률은

$$P(X_1>42)=P\left(Z_1>\frac{42-40}{3}\right)=P\left(Z_1>\frac{2}{3}\right)$$

2반의 다른 학생들이 B보다 봉사 시간이 길 확률은

$$P(X_2>47)=P\left(Z_2>\frac{47-46}{7}\right)=P\left(Z_2>\frac{1}{7}\right)$$

3반의 다른 학생들이 C보다 봉사 시간이 길 확률은

$$P(X_3>49)=P\left(Z_3>\frac{49-39}{4}\right)=P\left(Z_3>\frac{5}{2}\right)$$

이때 $P\left(Z_3>\frac{5}{2}\right)<P\left(Z_1>\frac{2}{3}\right)<P\left(Z_2>\frac{1}{7}\right)$이므로

$$P(X_3>49)<P(X_1>42)<P(X_2>47)$$

따라서 자기 반에서 상대적으로 봉사 시간이 긴 학생부터 차례대로 나열하면 C, A, B이다.

답 ④

0479 맞히는 문제의 개수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$E(X)=100\times\frac{1}{5}=20$$

$$V(X)=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=16$$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(20,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-20}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(X\ge a)=0.02$에서

$$P\left(Z\ge\frac{a-20}{4}\right)=P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\frac{a-20}{4}\right)$$
$$=0.02$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{a-20}{4}\right)=0.48$$

이때 $P(0\le Z\le2)=0.48$이므로

$$\frac{a-20}{4}=2 \qquad \therefore a=28$$

답 ⑤

0480 확률변수 X는 이항분포 $B(2500,\ 0.02)$를 따르므로

$$E(X)=2500\times0.02=50$$

$$V(X)=2500\times0.02\times0.98=49$$

이때 2500은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(50,\ 7^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-50}{7}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(k\le X\le57)=0.6826$에서

$$P\left(\frac{k-50}{7}\le Z\le\frac{57-50}{7}\right)$$
$$=P\left(\frac{k-50}{7}\le Z\le1\right)$$
$$=P\left(\frac{k-50}{7}\le Z\le0\right)+P(0\le Z\le1)$$
$$=P\left(0\le Z\le\frac{50-k}{7}\right)+0.3413=0.6826$$
$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{50-k}{7}\right)=0.3413$$

이때 $P(0\le Z\le1)=0.3413$이므로

$$\frac{50-k}{7}=1 \qquad \therefore k=43$$

답 **43**

0481 확률변수 X는 이항분포 $B\left(600,\ \frac{3}{5}\right)$을 따르므로

$$E(X)=600\times\frac{3}{5}=360,\ V(X)=600\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=144$$

이때 600은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(360,\ 12^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-360}{12}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(|X-360|\ge a)=0.14$, 즉 $P(X-360\le -a)+P(X-360\ge a)=0.14$에서

$$P\left(Z\le-\frac{a}{12}\right)+P\left(Z\ge\frac{a}{12}\right)$$
$$=2P\left(Z\ge\frac{a}{12}\right)=2\left\{P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\frac{a}{12}\right)\right\}$$
$$=0.14$$
$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{a}{12}\right)=0.43$$

이때 $P(0\le Z\le1.5)=0.43$이므로

$$\frac{a}{12}=1.5 \qquad \therefore a=18$$

답 ①

0482 주사위를 288번 던져서 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 X라 하면 그 외의 눈이 나오는 횟수는 $288-X$이다.

따라서 점수를 Y점이라 하면

$$Y=4X-2(288-X)=6X-576$$

이때 확률변수 X는 이항분포 $B\left(288,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$E(X)=288\times\frac{1}{3}=96,\ \sigma(X)=\sqrt{288\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}=8$$

05 확률분포 (2)

$$\therefore\ \mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(6X-576)=6\mathrm{E}(X)-576$$
$$=6\times96-576=0$$
$$\sigma(Y)=\sigma(6X-576)=6\sigma(X)=6\times8=48$$

288은 충분히 큰 수이므로 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 48^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{Y}{48}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(Y\le k)=0.31$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{k}{48}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge-\frac{k}{48}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le-\frac{k}{48}\right)=0.31$$
$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le-\frac{k}{48}\right)=0.19$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)=0.19$이므로

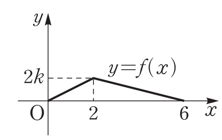
$$-\frac{k}{48}=0.5\qquad\therefore\ k=-24$$

답 ②

시험에 꼭 나오는 문제

• 본책 081~084쪽

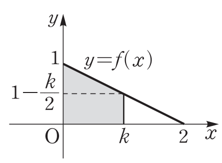
0483 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$\frac{1}{2}\times6\times2k=1\qquad\therefore\ k=\frac{1}{6}$$

답 $\dfrac{1}{6}$

0484 $\mathrm{P}(X\le k)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0,\ x=k$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



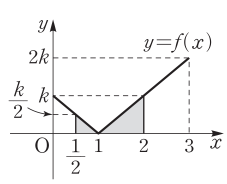
$$\mathrm{P}(X\le k)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{k}{2}+1\right)\times k$$
$$=k-\frac{k^2}{4}$$

즉 $k-\dfrac{k^2}{4}=\dfrac{3}{4}$이므로 $\qquad k^2-4k+3=0$

$$(k-1)(k-3)=0\qquad\therefore\ k=1\ (\because\ 0<k<2)$$

답 ③

0485 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0,\ x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$\frac{1}{2}\times1\times k+\frac{1}{2}\times2\times2k=1$$
$$\frac{5}{2}k=1\qquad\therefore\ k=\frac{2}{5}$$

$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}\le X\le2\right)$는 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\dfrac{1}{2}$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le2\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{5}=\frac{1}{4}$$

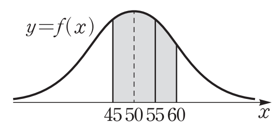
답 ③

0486 확률밀도함수의 그래프는 평균이 클수록 오른쪽에 위치하고, 표준편차가 클수록 가운데 부분의 높이는 낮아지면서 양옆으로 퍼진 모양이 되므로 두 과목의 성적의 확률밀도함수의 그래프로 알맞은 것은 ①이다.

답 ①

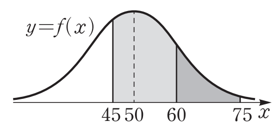
0487 확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하자.

ㄱ. $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=50$에 대하여 대칭이므로



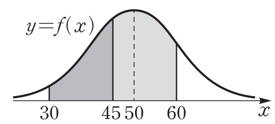
$$\mathrm{P}(45\le X\le60)$$
$$=\mathrm{P}(45\le X\le50)$$
$$+\mathrm{P}(50\le X\le55)+\mathrm{P}(55\le X\le60)$$
$$=\mathrm{P}(50\le X\le55)+\mathrm{P}(50\le X\le55)$$
$$+\mathrm{P}(55\le X\le60)$$
$$=2\mathrm{P}(50\le X\le55)+\mathrm{P}(55\le X\le60)$$
$$>2\mathrm{P}(50\le X\le55)\ (\text{참})$$

ㄴ. [반례] $a=15$일 때



$$\mathrm{P}(45\le X\le60)$$
$$>\mathrm{P}(60\le X\le75)\ (\text{거짓})$$

ㄷ. [반례] $a=15$일 때



$$\mathrm{P}(45\le X\le60)$$
$$>\mathrm{P}(30\le X\le45)\ (\text{거짓})$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

0488 확률변수 $X,\ Y$가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(8,\ 3^2)$, $\mathrm{N}(9,\ 4^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-8}{3},\ Z_Y=\frac{Y-9}{4}$$

로 놓으면 $Z_X,\ Z_Y$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge k)=\mathrm{P}(Y\ge k)$에서

$$\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{k-8}{3}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{k-9}{4}\right)$$

따라서 $\dfrac{k-8}{3}=\dfrac{k-9}{4}$이므로

$$4k-32=3k-27\qquad\therefore\ k=5$$

답 ⑤

0489 확률변수 $X,\ Y$가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$, $\mathrm{N}(40,\ 4^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-m}{\sigma},\ Z_Y=\frac{Y-40}{4}$$

으로 놓으면 $Z_X,\ Z_Y$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(m-4\le X\le m+4)=\mathrm{P}(32\le Y\le48)$에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{m-4-m}{\sigma}\le Z_X\le\frac{m+4-m}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{32-40}{4}\le Z_Y\le\frac{48-40}{4}\right)$$
$$\therefore\ \mathrm{P}\left(-\frac{4}{\sigma}\le Z_X\le\frac{4}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(-2\le Z_Y\le2)$$

따라서 $\frac{4}{\sigma}=2$이므로 $\sigma=2$

$\therefore$ $V(2X+1)=2^2V(X)=4\times2^2=16$ 답 16

0490 조건 (가)에서

$E(Y)=E(3X-a)=3E(X)-a$

즉 $m=3m-a$이므로 $a=2m$

또 $\sigma(Y)=\sigma(3X-a)=|3|\sigma(X)=3\times2=6$이므로 확률변수 Y는 정규분포 $N(m, 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z_X=\frac{X-m}{2}$, $Z_Y=\frac{Y-m}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z_X, Z_Y는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(X\le4)=P(Y\ge a)$, 즉 $P(X\le4)=P(Y\ge2m)$에서

$P\left(Z_X\le\frac{4-m}{2}\right)=P\left(Z_Y\ge\frac{m}{6}\right)$

즉 $\frac{4-m}{2}+\frac{m}{6}=0$이므로

$12-3m+m=0$ $\therefore$ $m=6$

$\therefore$ $P(Y\ge9)=P\left(Z_Y\ge\frac{9-6}{6}\right)$
$=P(Z_Y\ge0.5)$
$=P(Z_Y\ge0)-P(0\le Z_Y\le0.5)$
$=0.5-0.1915=0.3085$ 답 ⑤

0491 $Z=\frac{X-50}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(X\ge a)=0.6915$에서

$P\left(Z\ge\frac{a-50}{4}\right)=P\left(Z\le\frac{50-a}{4}\right)$
$=P(Z\le0)+P\left(0\le Z\le\frac{50-a}{4}\right)$
$=0.6915$

$\therefore$ $P\left(0\le Z\le\frac{50-a}{4}\right)=0.1915$

이때 $P(0\le Z\le0.5)=0.1915$이므로

$\frac{50-a}{4}=0.5$ $\therefore$ $a=48$ 답 48

0492 쿠키 한 개의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(30, 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-30}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$P(29\le X\le32)=P\left(\frac{29-30}{2}\le Z\le\frac{32-30}{2}\right)$
$=P(-0.5\le Z\le1)$
$=P(-0.5\le Z\le0)+P(0\le Z\le1)$
$=P(0\le Z\le0.5)+P(0\le Z\le1)$
$=0.1915+0.3413$
$=0.5328$ 답 ②

0493 지원자의 점수를 X점이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(389, 12^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-389}{12}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

이때 합격하기 위한 최저 점수가 407점이므로 합격할 확률은

$P(X\ge407)=P\left(Z\ge\frac{407-389}{12}\right)=P(Z\ge1.5)$
$=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le1.5)$
$=0.5-0.43=0.07$

따라서 $\frac{n}{600}=0.07$이므로 $n=42$ 답 ④

0494 A 제품의 중량을 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(9, 0.4^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-9}{0.4}$로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 A 제품 중에서 임의로 선택한 1개의 중량이 8.9 이상 9.4 이하일 확률은

$P(8.9\le X\le9.4)=P\left(\frac{8.9-9}{0.4}\le Z_X\le\frac{9.4-9}{0.4}\right)$
$=P(-0.25\le Z_X\le1)$

한편 B 제품의 중량을 Y라 하면 확률변수 Y는 정규분포 $N(20, 1^2)$을 따르므로 $Z_Y=Y-20$으로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 B 제품 중에서 임의로 선택한 1개의 중량이 19 이상 k 이하일 확률은

$P(19\le Y\le k)=P(19-20\le Z_Y\le k-20)$
$=P(-1\le Z_Y\le k-20)$
$=P(20-k\le Z_Y\le1)$

즉 $P(-0.25\le Z_X\le1)=P(20-k\le Z_Y\le1)$이므로

$-0.25=20-k$ $\therefore$ $k=20.25$ 답 ④

0495 참가자들의 기록을 X분이라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(160, 20^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-160}{20}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

기록이 a분 이하일 때 상위 20 % 이내에 든다고 하면

$P(X\le a)=\frac{20}{100}=0.2$이므로

$P\left(Z\le\frac{a-160}{20}\right)=P\left(Z\ge\frac{160-a}{20}\right)$
$=P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\frac{160-a}{20}\right)$
$=0.2$

$\therefore$ $P\left(0\le Z\le\frac{160-a}{20}\right)=0.3$

이때 $P(0\le Z\le0.84)=0.3$이므로

$\frac{160-a}{20}=0.84$ $\therefore$ $a=143.2$

따라서 기록이 143.2분 이하이면 상위 20 % 이내에 든다.

답 **143.2분**

0496 $V(X)=n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{n}{4}$이므로

$\frac{n}{4}=9 \qquad \therefore n=36$

즉 확률변수 X는 이항분포 $B\left(36, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=36\times\frac{1}{2}=18$

이때 36은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(18, 3^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-18}{3}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$P(X\le 24)=P\left(Z\le\frac{24-18}{3}\right)=P(Z\le 2)$$
$$=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)$$
$$=0.5+0.4772=0.9772$$

답 ⑤

0497 맞힌 문제 수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(256, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=256\times\frac{1}{2}=128$

$V(X)=256\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=64$

이때 256은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(128, 8^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-128}{8}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$P(X\ge 120)=P\left(Z\ge\frac{120-128}{8}\right)$$
$$=P(Z\ge -1)=P(Z\le 1)$$
$$=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 1)$$
$$=0.5+0.3413$$
$$=0.8413$$

답 ④

0498 주사위를 162번 던져서 5 이상의 눈이 나오는 횟수를 X라 하면 4 이하의 눈이 나오는 횟수는 $162-X$이므로 게임을 162번 했을 때, 상금에서 벌금을 뺀 금액은

$1000X-300(162-X)=1300X-48600$(원)

따라서 $1300X-48600\ge 25500$에서

$X\ge 57$

한편 확률변수 X는 이항분포 $B\left(162, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$E(X)=162\times\frac{1}{3}=54,\ V(X)=162\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=36$

이때 162는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(54, 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-54}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$P(X\ge 57)=P\left(Z\ge\frac{57-54}{6}\right)=P(Z\ge 0.5)$$
$$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 0.5)$$
$$=0.5-0.1915$$
$$=0.3085$$

답 **0.3085**

0499 $Z_X=\frac{X-42}{4}$, $Z_Y=\frac{Y-37}{5}$, $Z_W=\frac{W-40}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z_X, Z_Y, Z_W는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$a=P(X\ge 45)=P\left(Z_X\ge\frac{45-42}{4}\right)=P\left(Z_X\ge\frac{3}{4}\right)$$
$$b=P(Y\ge 42)=P\left(Z_Y\ge\frac{42-37}{5}\right)=P(Z_Y\ge 1)$$
$$c=P(W\le 39)=P\left(Z_W\le\frac{39-40}{2}\right)$$
$$=P\left(Z_W\le -\frac{1}{2}\right)=P\left(Z_W\ge\frac{1}{2}\right)$$

이때 $P(Z_Y\ge 1)<P\left(Z_X\ge\frac{3}{4}\right)<P\left(Z_W\ge\frac{1}{2}\right)$이므로

$b<a<c$

답 ③

0500 스트라이크의 개수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(1458, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$E(X)=1458\times\frac{1}{3}=486$

$V(X)=1458\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=324$

이때 1458은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(486, 18^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-486}{18}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(X\ge a)=0.0668$에서

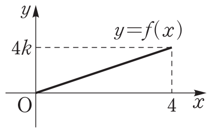
$$P\left(Z\ge\frac{a-486}{18}\right)$$
$$=P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{a-486}{18}\right)$$
$$=0.0668$$
$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{a-486}{18}\right)=0.4332$$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{a-486}{18}=1.5 \qquad \therefore a=513$

답 ③

0501 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$$\frac{1}{2}\times4\times4k=1$$

$$\therefore\ k=\frac{1}{8}$$ … 1단계

한편 t에 대한 이차방정식 $t^2+2Xt+1=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 실근을 가지려면

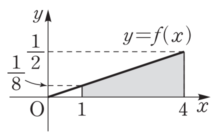
$$\frac{D}{4}=X^2-1\geq0,\qquad (X+1)(X-1)\geq0$$

$$\therefore\ X\leq-1 \text{ 또는 } X\geq1$$

이때 $0\leq X\leq4$이므로

$$1\leq X\leq4$$ … 2단계

$P(1\leq X\leq4)$는 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로 구하는 확률은



$$P(1\leq X\leq4)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right)\times3=\frac{15}{16}$$ … 3단계

답 $\frac{15}{16}$

채점 요소		비율
1단계	k의 값 구하기	30 %
2단계	이차방정식이 실근을 갖도록 하는 X의 값의 범위 구하기	30 %
3단계	확률 구하기	40 %

0502 조건 ㈎에서 $E(2Y-1)=9$이므로

$$2E(Y)-1=9\qquad \therefore\ E(Y)=5$$

또 $\sigma(2Y-1)=2$이므로

$$2\sigma(Y)=2\qquad \therefore\ \sigma(Y)=1$$

이때 확률변수 Y는 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르므로

$$m=5,\ \sigma=1$$ … 1단계

따라서 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(4,\ 3^2)$, $N(5,\ 1^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-4}{3},\ Z_Y=Y-5$$

로 놓으면 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. … 2단계

조건 ㈏에서 $P(X\leq k)>P(Y\geq4)$이므로

$$P\left(Z_X\leq\frac{k-4}{3}\right)>P(Z_Y\geq4-5)$$

$$\therefore\ P\left(Z_X\leq\frac{k-4}{3}\right)>P(Z_Y\geq-1)=P(Z_Y\leq1)$$

따라서 $\frac{k-4}{3}>1$이므로 $\qquad k>7$ … 3단계

답 $k>7$

채점 요소		비율
1단계	m, σ의 값 구하기	30 %
2단계	확률변수 X, Y를 각각 표준화하기	20 %
3단계	k의 값의 범위 구하기	50 %

0503 $Z=\frac{X-100}{20}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. … 1단계

$P(60\leq X\leq a)=0.9759$에서

$$P\left(\frac{60-100}{20}\leq Z\leq\frac{a-100}{20}\right)$$

$$=P\left(-2\leq Z\leq\frac{a-100}{20}\right)$$

$$=P(-2\leq Z\leq0)+P\left(0\leq Z\leq\frac{a-100}{20}\right)$$

$$=P(0\leq Z\leq2)+P\left(0\leq Z\leq\frac{a-100}{20}\right)$$

$$=0.4772+P\left(0\leq Z\leq\frac{a-100}{20}\right)=0.9759$$

$$\therefore\ P\left(0\leq Z\leq\frac{a-100}{20}\right)=0.4987$$ … 2단계

이때 $P(0\leq Z\leq3)=0.4987$이므로

$$\frac{a-100}{20}=3\qquad \therefore\ a=160$$ … 3단계

답 160

채점 요소		비율
1단계	확률변수 X를 표준화하기	20 %
2단계	$P(60\leq X\leq a)=0.9759$를 표준정규분포표를 이용할 수 있도록 변형하기	50 %
3단계	a의 값 구하기	30 %

0504 2개 모두 앞면이 나오는 횟수를 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $B\left(192,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$E(X)=192\times\frac{1}{4}=48$$

$$V(X)=192\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=36$$

이때 192는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(48,\ 6^2)$을 따른다. … 1단계

따라서 $Z=\frac{X-48}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$P(54\leq X\leq60)=P\left(\frac{54-48}{6}\leq Z\leq\frac{60-48}{6}\right)$$

$$=P(1\leq Z\leq2)$$

$$=P(0\leq Z\leq2)-P(0\leq Z\leq1)$$

$$=0.4772-0.3413$$

$$=0.1359$$ … 2단계

답 0.1359

	채점 요소	비율
1단계	2개 모두 앞면이 나오는 횟수를 X로 놓고 확률변수 X가 따르는 정규분포 구하기	50 %
2단계	앞면이 나오는 횟수가 54 이상 60 이하일 확률 구하기	50 %

0505 전략 두 확률변수 X, Y의 분산이 같으면 두 확률밀도함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 모양이 같음을 이용한다.

$\mathrm{E}(X)=m_1$, $\mathrm{E}(Y)=m_2$, $\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(Y)=\sigma^2$으로 놓으면 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m_1$에 대하여 대칭이므로 $f(a)=f(3a)$에서

$$m_1=\frac{a+3a}{2}=2a$$

함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치하고 $f(a)=f(3a)=g(2a)$이므로

$g(0)=g(2a)$ 또는 $g(2a)=g(4a)$

이때 확률밀도함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=m_2$에 대하여 대칭이므로

$$m_2=\frac{0+2a}{2}=a \text{ 또는 } m_2=\frac{2a+4a}{2}=3a$$

그런데 $\mathrm{P}(Y\le 2a)=0.6915$에서 $m_2<2a$이므로

$m_2=a$ ($\because a>0$)

따라서 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(a, \sigma^2)$을 따르므로

$Z_Y=\dfrac{Y-a}{\sigma}$로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(Y\le 2a)=0.6915$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(Z_Y\le\frac{2a-a}{\sigma}\right)&=\mathrm{P}\left(Z_Y\le\frac{a}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_Y\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le\frac{a}{\sigma}\right)\\&=0.6915\end{aligned}$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le\frac{a}{\sigma}\right)=0.1915$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)=0.1915$이므로

$$\frac{a}{\sigma}=0.5 \qquad \therefore \sigma=2a$$

즉 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(2a, (2a)^2)$을 따르므로

$Z_X=\dfrac{X-2a}{2a}$로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(0\le X\le 3a)&\\=\mathrm{P}\left(\frac{0-2a}{2a}\le Z_X\le\frac{3a-2a}{2a}\right)&\\=\mathrm{P}(-1\le Z_X\le 0.5)&\\=\mathrm{P}(-1\le Z_X\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z_X\le 0.5)&\\=\mathrm{P}(0\le Z_X\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z_X\le 0.5)&\\=0.3413+0.1915&\\=0.5328&\end{aligned}$$

답 ①

0506 전략 $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$, $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$임을 이용하여 먼저 $\mathrm{E}(Y)$, $\sigma(Y)$를 구한다.

$\mathrm{E}(X)=32$, $\sigma(X)=4$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X-24)=2\mathrm{E}(X)-24=2\times32-24=40$

$\sigma(Y)=\sigma(2X-24)=2\sigma(X)=2\times4=8$

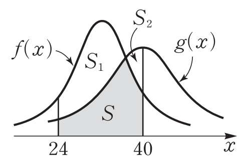
$\therefore m=40$, $\sigma=8$

따라서 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(32, 4^2)$, $\mathrm{N}(40, 8^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-32}{4},\ Z_Y=\frac{Y-40}{8}$$

으로 놓으면 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이를 S라 하면



$S_1=\mathrm{P}(24\le X\le 40)-S$

$S_2=\mathrm{P}(24\le Y\le 40)-S$

$$\begin{aligned}\therefore S_1-S_2&\\=\{\mathrm{P}(24\le X\le 40)-S\}-\{\mathrm{P}(24\le Y\le 40)-S\}&\\=\mathrm{P}(24\le X\le 40)-\mathrm{P}(24\le Y\le 40)&\\=\mathrm{P}\left(\frac{24-32}{4}\le Z_X\le\frac{40-32}{4}\right)&\\-\mathrm{P}\left(\frac{24-40}{8}\le Z_Y\le\frac{40-40}{8}\right)&\\=\mathrm{P}(-2\le Z_X\le 2)-\mathrm{P}(-2\le Z_Y\le 0)&\\=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772&\end{aligned}$$

답 **0.4772**

0507 전략 음료 한 병의 양과 불량품의 개수를 각각 확률변수로 놓는다.

음료 한 병의 양을 X mL라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(250, 5^2)$을 따르므로 $Z_X=\dfrac{X-250}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서 음료 한 병이 불량품일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 245)&=\mathrm{P}\left(Z_X\le\frac{245-250}{5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_X\le -1)=\mathrm{P}(Z_X\ge 1)\\&=\mathrm{P}(Z_X\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z_X\le 1)\\&=0.5-0.34=0.16\end{aligned}$$

따라서 525병의 음료 중 불량품의 개수를 Y라 하면 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(525, 0.16)$을 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=525\times0.16=84$

$\sigma(Y)=\sqrt{525\times0.16\times0.84}=8.4$

이때 525는 충분히 큰 수이므로 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(84, 8.4^2)$을 따른다.

따라서 $Z_Y=\dfrac{Y-84}{8.4}$로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\ge 63)&=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{63-84}{8.4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z_Y\ge -2.5)=\mathrm{P}(Z_Y\le 2.5)\\&=\mathrm{P}(Z_Y\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z_Y\le 2.5)\\&=0.5+0.49=0.99\end{aligned}$$

답 **0.99**

06 통계적 추정

교과서 문제 정복하기

본책 087쪽, 089쪽

0508 답 ㄱ, ㄴ

0509 (1) 4개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 중복순열의 수와 같으므로 $_4\Pi_2=4^2=16$

(2) 4개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 순열의 수와 같으므로

$_4P_2=12$

답 (1) **16** (2) **12**

0510 (1) 모집단의 숫자 1, 2, 3 중에서 크기가 2인 표본을 복원추출하는 경우의 수는

$_3\Pi_2=3^2=9$

$\overline{X}=\frac{3}{2}$인 경우는 (1, 2), (2, 1)의 2가지이므로

$P\left(\overline{X}=\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{9}$

$\overline{X}=\frac{5}{2}$인 경우는 (2, 3), (3, 2)의 2가지이므로

$P\left(\overline{X}=\frac{5}{2}\right)=\frac{2}{9}$

$\overline{X}=3$인 경우는 (3, 3)의 1가지이므로

$P(\overline{X}=3)=\frac{1}{9}$

따라서 표를 완성하면 다음과 같다.

$\overline{X}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	합계
$P(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(2) $E(\overline{X})=1\times\frac{1}{9}+\frac{3}{2}\times\frac{2}{9}+2\times\frac{1}{3}+\frac{5}{2}\times\frac{2}{9}+3\times\frac{1}{9}=2$

$V(\overline{X})=E(\overline{X}^2)-\{E(\overline{X})\}^2$

$=1^2\times\frac{1}{9}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{2}{9}+2^2\times\frac{1}{3}+\left(\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{2}{9}$

$+3^2\times\frac{1}{9}-2^2$

$=\frac{1}{3}$

$\sigma(\overline{X})=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 (1) $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{9}$ (2) **평균: 2, 분산:** $\frac{1}{3}$**, 표준편차:** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

0511 (1) $E(\overline{X})=30$

(2) $V(\overline{X})=\frac{81}{9}=9$

(3) $\sigma(\overline{X})=\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}}=3$

답 (1) **30** (2) **9** (3) **3**

0512 (1) $E(\overline{X})=60$

(2) $V(\overline{X})=\frac{8^2}{16}=4$

(3) $\sigma(\overline{X})=\frac{8}{\sqrt{16}}=2$

답 (1) **60** (2) **4** (3) **2**

0513 (1) $E(X)=-1\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}=0$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=(-1)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{4}-0^2=\frac{1}{2}$

$\sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $E(\overline{X})=E(X)=0$

$V(\overline{X})=\frac{\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{6}$

$\sigma(\overline{X})=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$

답 **풀이 참조**

0514 (1) $E(\overline{X})=300$, $V(\overline{X})=\frac{10^2}{25}=4$

(2) $N(300,\ 2^2)$

(3) $Z=\frac{\overline{X}-300}{2}$

(4) $P(\overline{X}\geq 302)=P\left(Z\geq\frac{302-300}{2}\right)$

$=P(Z\geq 1)=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 1)$

$=0.5-0.3413=0.1587$

답 **풀이 참조**

0515 $E(\overline{X})=600$, $V(\overline{X})=\frac{24^2}{36}=16$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(600,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-600}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $P(\overline{X}\leq 592)=P\left(Z\leq\frac{592-600}{4}\right)$

$=P(Z\leq -2)=P(Z\geq 2)$

$=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$

(2) $P(590\leq\overline{X}\leq 606)=P\left(\frac{590-600}{4}\leq Z\leq\frac{606-600}{4}\right)$

$=P(-2.5\leq Z\leq 1.5)$

$=P(-2.5\leq Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 1.5)$

$=P(0\leq Z\leq 2.5)+P(0\leq Z\leq 1.5)$

$=0.4938+0.4332=0.927$

답 (1) **0.0228** (2) **0.927**

0516 $\hat{p}=\frac{4}{500}=\frac{1}{125}$ 답 $\frac{1}{125}$

0517 $p=\frac{60}{800}=\frac{3}{40}$, $\hat{p}=\frac{8}{80}=\frac{1}{10}$

답 $p=\frac{3}{40}$, $\hat{p}=\frac{1}{10}$

0518 $\mathrm{E}(\hat{p})=0.8$, $\sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{100}}=0.04$

답 **평균: 0.8, 표준편차: 0.04**

0519 $\mathrm{E}(\hat{p})=0.8$, $\sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{2500}}=0.008$

답 **평균: 0.8, 표준편차: 0.008**

0520 모비율이 0.1, 표본의 크기가 100이므로

$\mathrm{E}(\hat{p})=0.1$, $\mathrm{V}(\hat{p})=\frac{0.1\times0.9}{100}=0.0009$,

$\sigma(\hat{p})=\sqrt{0.0009}=0.03$

답 **평균: 0.1, 분산: 0.0009, 표준편차: 0.03**

0521 모비율이 0.2, 표본의 크기가 400이므로

$\mathrm{E}(\hat{p})=0.2$, $\sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{400}}=0.02$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(0.2,\ 0.02^2)$을 따른다. 답 $\mathbf{N(0.2,\ 0.02^2)}$

0522 답 (가) $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$ (나) $\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ (다) $1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

0523 (1) 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$60-1.96\times\frac{6}{\sqrt{100}}\le m\le60+1.96\times\frac{6}{\sqrt{100}}$

$\therefore\ 58.824\le m\le61.176$

(2) 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$60-2.58\times\frac{6}{\sqrt{100}}\le m\le60+2.58\times\frac{6}{\sqrt{100}}$

$\therefore\ 58.452\le m\le61.548$

답 (1) $\mathbf{58.824\le m\le61.176}$ (2) $\mathbf{58.452\le m\le61.548}$

0524 표본의 크기 400은 충분히 큰 수이므로 모표준편차 대신 표본표준편차 10을 이용한다.

(1) 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$100-1.96\times\frac{10}{\sqrt{400}}\le m\le100+1.96\times\frac{10}{\sqrt{400}}$

$\therefore\ 99.02\le m\le100.98$

(2) 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$100-2.58\times\frac{10}{\sqrt{400}}\le m\le100+2.58\times\frac{10}{\sqrt{400}}$

$\therefore\ 98.71\le m\le101.29$

답 (1) $\mathbf{99.02\le m\le100.98}$ (2) $\mathbf{98.71\le m\le101.29}$

0525 (1) 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.36-1.96\sqrt{\frac{0.36\times0.64}{1600}}\le p$

$\le0.36+1.96\sqrt{\frac{0.36\times0.64}{1600}}$

$\therefore\ 0.33648\le p\le0.38352$

(2) 모비율 p에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$0.36-2.58\sqrt{\frac{0.36\times0.64}{1600}}\le p$

$\le0.36+2.58\sqrt{\frac{0.36\times0.64}{1600}}$

$\therefore\ 0.32904\le p\le0.39096$

답 (1) $\mathbf{0.33648\le p\le0.38352}$

(2) $\mathbf{0.32904\le p\le0.39096}$

유형 익히기

• 본책 090~097쪽

0526 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+a=1\qquad\therefore\ a=\frac{1}{2}$

따라서 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{E}(X)=-1\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{V}(X)=(-1)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{11}{16}$

이때 표본의 크기가 11이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{1}{4}$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{11}{16}}{11}=\frac{1}{16}$

$\therefore\ \mathrm{E}(\overline{X})+\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{16}$ 답 $\frac{5}{16}$

0527 모평균이 20, 모분산이 10^2, 표본의 크기가 25이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=20$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{10^2}{25}=4$

따라서 $\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$에서

$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$

$=4+20^2=404$ 답 **404**

0528 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

따라서 $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$이므로

$\mathrm{V}(X)=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{2}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

이때 표본의 크기가 4이므로

$$\sigma(\overline{X})=\frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{5}}{6}$$

$$\therefore\ \sigma(6\overline{X})=6\sigma(\overline{X})=6\times\frac{\sqrt{5}}{6}=\sqrt{5}$$

답 $\sqrt{5}$

0529 상자에서 임의로 1장의 카드를 꺼낼 때, 카드에 적힌 숫자를 X라 하면 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	2	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서 $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=2$이므로

$$\mathrm{V}(X)=1^2\times\frac{2}{3}+2^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}-2^2=\frac{10}{3}$$

이때 표본의 크기가 2이므로

$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{10}{3}}{2}=\frac{5}{3}$$

답 $\frac{5}{3}$

0530 주머니에서 임의로 1개의 구슬을 꺼낼 때, 구슬에 적힌 숫자를 X라 하면 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

따라서 $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$이므로

$$\mathrm{V}(X)=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{4}-\left(\frac{5}{2}\right)^2$$
$$=\frac{5}{4}$$

이때 표본의 크기가 3이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{5}{2},\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{5}{4}}{3}=\frac{5}{12}$$

$$\therefore\ \mathrm{E}(2\overline{X}-3)+\mathrm{V}(6\overline{X})=2\mathrm{E}(\overline{X})-3+6^2\mathrm{V}(\overline{X})$$
$$=2\times\frac{5}{2}-3+36\times\frac{5}{12}$$
$$=17$$

답 ④

0531 상자에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 숫자를 X라 하면 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

··· 1단계

따라서 $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{2}{5}=\frac{9}{5}$이므로

$$\mathrm{V}(X)=0^2\times\frac{1}{5}+1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{2}{5}-\left(\frac{9}{5}\right)^2$$
$$=\frac{34}{25}$$

··· 2단계

이때 표본의 크기가 n이므로 $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{34}{25n}$

따라서 $\frac{34}{25n}=\frac{1}{50}$이므로

$n=68$ ··· 3단계

답 68

채점 요소	비율
1단계 모집단의 확률분포를 표로 나타내기	30 %
2단계 모분산 구하기	30 %
3단계 n의 값 구하기	40 %

0532 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 10^2)$을 따르므로 임의추출한 25명이 통근하는 데 걸리는 시간의 평균을 $\overline{X}$분이라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(50,\ \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(50,\ 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-50}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(\overline{X}\le 45)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{45-50}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le -2.5)=\mathrm{P}(Z\ge 2.5)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$$
$$=0.5-0.4938=0.0062$$

답 0.0062

0533 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(60,\ \frac{10^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(60,\ 2.5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{\overline{X}-60}{2.5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\therefore\ \mathrm{P}(55\le\overline{X}\le 65)=\mathrm{P}\left(\frac{55-60}{2.5}\le Z\le\frac{65-60}{2.5}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$$
$$=2\times 0.4772=0.9544$$

답 0.9544

0534 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(52,\ 18^2)$을 따르므로 임의추출한 81명의 모의고사 수학 성적의 평균을 $\overline{X}$점이라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(52,\ \frac{18^2}{81}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(52,\ 2^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-52}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(47\le\overline{X}\le 50)=\mathrm{P}\left(\frac{47-52}{2}\le Z\le\frac{50-52}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-2.5\le Z\le -1)$$
$$=\mathrm{P}(1\le Z\le 2.5)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=0.4938-0.3413$$
$$=0.1525$$

답 0.1525

0535 모집단이 정규분포 $N(300,\ 24^2)$을 따르므로 임의추출한 64개의 공의 무게의 평균을 $\overline{X}$ g이라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(300,\ \frac{24^2}{64}\right)$, 즉 $N(300,\ 3^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-300}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(\overline{X}\ge 294)&=P\left(Z\ge \frac{294-300}{3}\right)\\ &=P(Z\ge -2)\\ &=P(Z\le 2)\\ &=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)\\ &=0.5+0.4772\\ &=0.9772 \end{aligned}$$

답 ⑤

0536 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \frac{20^2}{25}\right)$, 즉 $N(m,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{\overline{X}-m}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(|\overline{X}-m|\ge 6)&=P\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{4}\right|\ge \frac{6}{4}\right)\\ &=P(|Z|\ge 1.5)\\ &=P(Z\le -1.5)+P(Z\ge 1.5)\\ &=2P(Z\ge 1.5)\\ &=2\{P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1.5)\}\\ &=2\times(0.5-0.4332)\\ &=0.1336 \end{aligned}$$

답 **0.1336**

0537 모집단이 정규분포 $N(100,\ 8^2)$을 따르므로 임의추출한 비누 4개의 무게의 평균을 $\overline{X}$ g이라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(100,\ \frac{8^2}{4}\right)$, 즉 $N(100,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-100}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 비누 4개의 무게가 392 g 이상 416 g 이하일 확률은

$$\begin{aligned} P(392\le 4\overline{X}\le 416)&=P(98\le \overline{X}\le 104)\\ &=P\left(\frac{98-100}{4}\le Z\le \frac{104-100}{4}\right)\\ &=P(-0.5\le Z\le 1)\\ &=P(0\le Z\le 0.5)+P(0\le Z\le 1)\\ &=0.1915+0.3413\\ &=0.5328 \end{aligned}$$

이때 정품으로 판정되는 세트의 개수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $B(5000,\ 0.5328)$을 따르므로 구하는 평균 개수는

$$E(Y)=5000\times 0.5328=2664$$

답 **2664**

0538 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(10,\ \frac{2^2}{n}\right)$을 따르므로

$Z=\frac{\overline{X}-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 $P(\overline{X}\ge 11)=0.1587$에서

$$\begin{aligned} P\left(Z\ge \frac{11-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)&=P\left(Z\ge \frac{\sqrt{n}}{2}\right)\\ &=P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{2}\right)\\ &=0.1587 \end{aligned}$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le \frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.3413$$

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{2}=1 \qquad \therefore n=4$$

답 **4**

0539 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(80,\ \frac{16^2}{n}\right)$을 따른다.

··· 1단계

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-80}{\frac{16}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P\left(\overline{X}\le \frac{648}{\sqrt{n}}\right)=0.6915$에서

$$\begin{aligned} &P\left(Z\le \frac{\frac{648}{\sqrt{n}}-80}{\frac{16}{\sqrt{n}}}\right)\\ &=P(Z\le 40.5-5\sqrt{n})\\ &=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 40.5-5\sqrt{n})\\ &=0.6915 \end{aligned}$$

$$\therefore P(0\le Z\le 40.5-5\sqrt{n})=0.1915$$

··· 2단계

이때 $P(0\le Z\le 0.5)=0.1915$이므로

$$40.5-5\sqrt{n}=0.5, \qquad \sqrt{n}=8$$

$$\therefore n=64$$

··· 3단계

답 **64**

	채점 요소	비율
1단계	표본평균 $\overline{X}$의 확률분포 구하기	20 %
2단계	주어진 확률을 표준정규분포표를 이용할 수 있도록 변형하기	50 %
3단계	n의 값 구하기	30 %

0540 모집단이 정규분포 $N(120,\ 5^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(120,\ \frac{5^2}{n}\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-120}{\frac{5}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포

$N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(119\le\overline{X}\le121)\ge0.9$에서

$$P\left(\frac{119-120}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{121-120}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$=P\left(-\frac{\sqrt{n}}{5}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)$$

$$=2P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\ge0.9$$

$$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\ge0.45$$

이때 $P(0\le Z\le1.6)=0.45$이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{5}\ge1.6,\qquad \sqrt{n}\ge8$$

$$\therefore\ n\ge64$$

따라서 n의 최솟값은 64이다. **답 64**

0541 모집단이 정규분포 $N(60,\ 15^2)$을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(60,\ \frac{15^2}{100}\right)$, 즉 $N(60,\ 1.5^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-60}{1.5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\le k)=0.0013$에서

$$P\left(Z\le\frac{k-60}{1.5}\right)=P\left(Z\ge\frac{60-k}{1.5}\right)$$

$$=P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\frac{60-k}{1.5}\right)$$

$$=0.0013$$

$$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{60-k}{1.5}\right)=0.4987$$

이때 $P(0\le Z\le3)=0.4987$이므로

$$\frac{60-k}{1.5}=3,\qquad 60-k=4.5$$

$$\therefore\ k=55.5$$

답 55.5

0542 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(250,\ \frac{14^2}{49}\right)$, 즉 $N(250,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{\overline{X}-250}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 $P(\overline{X}\ge k)\le0.0062$에서

$$P\left(Z\ge\frac{k-250}{2}\right)=P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\frac{k-250}{2}\right)$$

$$\le0.0062$$

$$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{k-250}{2}\right)\ge0.4938$$

이때 $P(0\le Z\le2.5)=0.4938$이므로

$$\frac{k-250}{2}\ge2.5,\qquad k-250\ge5$$

$$\therefore\ k\ge255$$

따라서 실수 k의 최솟값은 255이다. **답 255**

0543 표본평균 $\overline{X}$, $\overline{Y}$는 각각 정규분포 $N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{16}\right)$, $N\left(\frac{m}{2},\ \frac{\sigma^2}{16}\right)$을 따르므로

$$Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{4}},\ Z_{\overline{Y}}=\frac{\overline{Y}-\frac{m}{2}}{\frac{\sigma}{4}}$$

으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$, $Z_{\overline{Y}}$는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 $P(\overline{X}\le21)=P(\overline{Y}\ge21)$에서

$$P\left(Z_{\overline{X}}\le\frac{21-m}{\frac{\sigma}{4}}\right)=P\left(Z_{\overline{Y}}\ge\frac{21-\frac{m}{2}}{\frac{\sigma}{4}}\right)$$

이므로 $\quad\frac{21-m}{\frac{\sigma}{4}}+\frac{21-\frac{m}{2}}{\frac{\sigma}{4}}=0\qquad\therefore\ m=28$

또 $P(\overline{X}\ge m-\sigma)=P(\overline{Y}\le25)$에서

$$P\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{-\sigma}{\frac{\sigma}{4}}\right)=P\left(Z_{\overline{Y}}\le\frac{25-\frac{28}{2}}{\frac{\sigma}{4}}\right)$$

$$\therefore\ P(Z_{\overline{X}}\ge-4)=P\left(Z_{\overline{Y}}\le\frac{44}{\sigma}\right)$$

즉 $-4+\frac{44}{\sigma}=0$이므로 $\qquad\sigma=11$

$$\therefore\ m+\sigma=39$$

답 39

0544 휴대폰 400개 중 불량품의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율은 0.02, 표본의 크기는 400이므로

$$E(\hat{p})=0.02,\ V(\hat{p})=\frac{0.02\times0.98}{400}=0.007^2$$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.02,\ 0.007^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-0.02}{0.007}$로 놓으면 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$P(\hat{p}\le0.027)=P\left(Z\le\frac{0.027-0.02}{0.007}\right)$$

$$=P(Z\le1)$$

$$=P(Z\le0)+P(0\le Z\le1)$$

$$=0.5+0.3413=0.8413$$

답 0.8413

0545 2100명 중에서 혈액형이 B형인 사람의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율은 0.3, 표본의 크기는 2100이므로

$$E(\hat{p})=0.3,\ V(\hat{p})=\frac{0.3\times0.7}{2100}=0.01^2$$

이때 2100은 충분히 큰 수이므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.3,\ 0.01^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-0.3}{0.01}$으로 놓으면 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\hat{p}\geq\frac{588}{2100}\right)&=\mathrm{P}(\hat{p}\geq0.28)\\&=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{0.28-0.3}{0.01}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq-2)=\mathrm{P}(Z\leq2)\\&=\mathrm{P}(Z\leq0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq2)\\&=0.5+0.4772\\&=0.9772\end{aligned}$$

답 ⑤

0546 지하철 승객 100명 중에서 환승하는 승객의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율은 0.2, 표본의 크기는 100이므로

$$\mathrm{E}(\hat{p})=0.2,\ \mathrm{V}(\hat{p})=\frac{0.2\times0.8}{100}=0.04^2$$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(0.2,\ 0.04^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-0.2}{0.04}$로 놓으면 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\frac{20}{100}\leq\hat{p}\leq\frac{30}{100}\right)&=\mathrm{P}(0.2\leq\hat{p}\leq0.3)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{0.2-0.2}{0.04}\leq Z\leq\frac{0.3-0.2}{0.04}\right)\\&=\mathrm{P}(0\leq Z\leq2.5)\\&=0.4938\end{aligned}$$

답 **0.4938**

0547 표본평균이 120, 모표준편차가 5, 표본의 크기가 100이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$120-1.96\times\frac{5}{\sqrt{100}}\leq m\leq120+1.96\times\frac{5}{\sqrt{100}}$$

$\therefore\ 119.02\leq m\leq120.98$

답 $\mathbf{119.02\leq m\leq120.98}$

0548 표본평균이 20, 모표준편차가 10, 표본의 크기가 400이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$20-2.58\times\frac{10}{\sqrt{400}}\leq m\leq20+2.58\times\frac{10}{\sqrt{400}}$$

$\therefore\ 18.71\leq m\leq21.29$

답 ①

0549 표본평균이 245, 표본의 크기가 100이고, 100은 충분히 큰 수이므로 모표준편차 대신 표본표준편차 20을 이용한다.
따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$245-1.96\times\frac{20}{\sqrt{100}}\leq m\leq245+1.96\times\frac{20}{\sqrt{100}}$$

$\therefore\ 241.08\leq m\leq248.92$

즉 신뢰구간에 속하는 자연수는 242, 243, 244, …, 248의 7개이다.

답 **7**

0550 표본의 크기가 225이고, 225는 충분히 큰 수이므로 모표준편차 대신 표본표준편차 3을 이용한다.
따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-3\times\frac{3}{\sqrt{225}}\leq m\leq\overline{x}+3\times\frac{3}{\sqrt{225}}$$

$\therefore\ \overline{x}-0.6\leq m\leq\overline{x}+0.6$

이것이 $9.4\leq m\leq a$와 같으므로

$\overline{x}-0.6=9.4,\ a=\overline{x}+0.6$

$\therefore\ \overline{x}=10,\ a=10.6$

$\therefore\ \overline{x}+a=20.6$

답 ②

0551 표본평균이 140, 모표준편차가 15이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$140-2\times\frac{15}{\sqrt{n}}\leq m\leq140+2\times\frac{15}{\sqrt{n}}$$

이것이 $137\leq m\leq143$과 같으므로

$2\times\frac{15}{\sqrt{n}}=3,\quad \sqrt{n}=10\quad \therefore\ n=100$

답 ②

0552 모표준편차가 5이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}\leq m\leq\overline{x}+2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}$$

이것이 $27.85\leq m\leq32.15$와 같으므로

$\overline{x}-2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}=27.85,\ \overline{x}+2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}=32.15$

$\therefore\ \overline{x}=30,\ n=36$

$\therefore\ \overline{x}+n=66$

답 ①

0553 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq m\leq\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이것이 $138.24\leq m\leq161.76$과 같으므로

$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=138.24,\ \overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=161.76$

$\therefore\ \overline{x}=150,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=6$ … 1단계

따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$150-2.58\times6\leq m\leq150+2.58\times6$

$\therefore\ 134.52\leq m\leq165.48$ … 2단계

즉 신뢰도 99 %의 신뢰구간에 속하는 정수의 최솟값은 135이다. … 3단계

답 **135**

	채점 요소	비율
1단계	표본평균의 값과 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$의 값 구하기	60 %
2단계	모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간 구하기	30 %
3단계	신뢰구간에 속하는 정수의 최솟값 구하기	10 %

0554 표본평균이 66, 모표준편차가 20, 표본의 크기가 25이므로 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 할 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α%의 신뢰구간은

$$66-k\frac{20}{\sqrt{25}}\le m\le 66+k\frac{20}{\sqrt{25}}$$

$\therefore\ 66-4k\le m\le 66+4k$

이것이 $58.48\le m\le 73.52$와 같으므로

$4k=7.52\qquad \therefore\ k=1.88$

이때 $\mathrm{P}(|Z|\le 1.88)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1.88)=2\times 0.47=0.94$이므로

$\frac{\alpha}{100}=0.94\qquad \therefore\ \alpha=94$

답 **94**

0555 모표준편차가 5, 표본의 크기가 100이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times 1.96\times\frac{5}{\sqrt{100}}=1.96$$

답 **1.96**

0556 표본의 크기가 121이고, 121은 충분히 큰 수이므로 모표준편차 대신 표본표준편차 11을 이용한다.

이때 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이므로 $\quad b-a=2\times 1.96\times\frac{11}{\sqrt{121}}=3.92$

또 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $c\le m\le d$이므로 $\quad d-c=2\times 2.58\times\frac{11}{\sqrt{121}}=5.16$

$\therefore\ |(d-c)-(b-a)|=1.24$

답 ④

0557 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 100일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이 l은

$$l=2\times 1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}$$

따라서 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 400일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times 1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{400}}=2\times 1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}l$$

답 ②

0558 모표준편차가 3이고 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이므로 $b-a\le 2$에서

$2\times 3\times\frac{3}{\sqrt{n}}\le 2,\qquad \sqrt{n}\ge 9\qquad \therefore\ n\ge 81$

따라서 n의 최솟값은 81이다.

답 **81**

0559 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 64일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이 l은

$l=2k\frac{\sigma}{\sqrt{64}}=\frac{1}{4}k\sigma$ … 1단계

모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간의 길이 l'은

$l'=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ … 2단계

이때 $l'=2l$이므로 $\qquad 2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2\times\frac{1}{4}k\sigma$

$\sqrt{n}=4\qquad \therefore\ n=16$ … 3단계

답 **16**

	채점 요소	비율
1단계	l을 k, σ에 대한 식으로 나타내기	40 %
2단계	l'을 n, k, σ에 대한 식으로 나타내기	40 %
3단계	n의 값 구하기	20 %

0560 모표준편차가 2, 표본의 크기가 36이고

$\mathrm{P}(|Z|\le 2)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=2\times 0.48=0.96$

이때 모평균 m에 대한 신뢰도 96 %의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이므로

$$b-a=2\times 2\times\frac{2}{\sqrt{36}}=\frac{4}{3}$$

또 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간이 $c\le m\le d$이므로

$$d-c=2\times k\times\frac{2}{\sqrt{36}}=\frac{2}{3}k$$

$d-c=\frac{1}{2}(b-a)$이므로

$\frac{2}{3}k=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\qquad \therefore\ k=1$

이때 $\mathrm{P}(|Z|\le 1)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=2\times 0.34=0.68$이므로

$\frac{\alpha}{100}=0.68\qquad \therefore\ \alpha=68$

답 **68**

0561 모표준편차가 10이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}$$

$$-1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le 1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}$$

$\therefore\ |m-\overline{x}|\le 1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}$

이때 $|m-\overline{x}|\le 2$이어야 하므로

$1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}\le 2,\qquad \sqrt{n}\ge 9.8\qquad \therefore\ n\ge 96.04$

따라서 n의 최솟값은 97이다.

답 ⑤

0562 표본평균의 값을 $\overline{x}$, 표본의 크기를 n이라 하면 모표준편차가 15이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-3\times\frac{15}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+3\times\frac{15}{\sqrt{n}}$$

$$-3\times\frac{15}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le 3\times\frac{15}{\sqrt{n}}$$

$\therefore |m-\overline{x}| \leq 3 \times \frac{15}{\sqrt{n}}$

이때 모평균과 표본평균의 차가 3 cm 이하이어야 하므로

$3 \times \frac{15}{\sqrt{n}} \leq 3, \quad \sqrt{n} \geq 15 \quad \therefore n \geq 225$

따라서 표본의 크기의 최솟값은 225이다. 답 **225**

0563 표본평균의 값을 $\overline{x}$, 모표준편차를 σ라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{x}+2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$-2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m-\overline{x} \leq 2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m-\overline{x}| \leq 2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이때 모평균과 표본평균의 차가 모표준편차의 $\frac{1}{5}$ 이하이어야 하므로

$2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{5}\sigma, \quad \sqrt{n} \geq 10 \quad \therefore n \geq 100$

따라서 n의 최솟값은 100이다. 답 **100**

0564 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}=\frac{320}{400}=0.8$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 모비율 p에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$0.8-2.58\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{400}} \leq p \leq 0.8+2.58\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{400}}$$

$\therefore 0.7484 \leq p \leq 0.8516$ 답 $\mathbf{0.7484 \leq p \leq 0.8516}$

0565 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}=\frac{1}{5}=0.2$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.2-2\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{100}} \leq p \leq 0.2+2\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{100}}$$

$\therefore 0.12 \leq p \leq 0.28$ 답 $\mathbf{0.12 \leq p \leq 0.28}$

0566 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}=0.25$

따라서 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.25-1.96\sqrt{\frac{0.25\times0.75}{n}} \leq p \leq 0.25+1.96\sqrt{\frac{0.25\times0.75}{n}}$$

$$\therefore 0.25-0.49\sqrt{\frac{3}{n}} \leq p \leq 0.25+0.49\sqrt{\frac{3}{n}}$$

이것이 $0.201 \leq p \leq 0.299$와 같으므로

$0.49\sqrt{\frac{3}{n}}=0.049, \quad \sqrt{n}=10\sqrt{3}$

$\therefore n=300$ 답 ③

0567 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}=0.1$

이때 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간의 길이가 0.05 이하이므로

$2\times2\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}} \leq 0.05, \quad \sqrt{n} \geq 24$

$\therefore n \geq 576$

따라서 n의 최솟값은 576이다. 답 **576**

0568 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}=0.64$

이때 900은 충분히 큰 수이고

$\mathrm{P}(|Z| \leq 2.6)=2\times0.495=0.99$

이므로 모비율에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times2.6\sqrt{\frac{0.64\times0.36}{900}}=0.0832$ 답 **0.0832**

0569 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}=0.16$

따라서 모비율 p에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$0.16-3\sqrt{\frac{0.16\times0.84}{n}} \leq p \leq 0.16+3\sqrt{\frac{0.16\times0.84}{n}}$$

$$-3\sqrt{\frac{0.16\times0.84}{n}} \leq p-0.16 \leq 3\sqrt{\frac{0.16\times0.84}{n}}$$

$$\therefore |p-0.16| \leq 3\sqrt{\frac{0.16\times0.84}{n}}$$

이때 모비율과 표본비율의 차가 0.03 이하이어야 하므로

$3\sqrt{\frac{0.16\times0.84}{n}} \leq 0.03, \quad \sqrt{n} \geq \sqrt{1344}$

$\therefore n \geq 1344$

따라서 n의 최솟값은 1344이다. 답 **1344**

0570 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면 표본의 크기가 36일 때, 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이 l은

$$l=2\times3\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{36}}=\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$$

또 표본의 크기가 n일 때, 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이 l'은

$$l'=2\times2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=\frac{4}{\sqrt{n}}\times\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$$

이때 $l=3l'$이므로

$$\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}=3\times\frac{4}{\sqrt{n}}\times\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$$

$\sqrt{n}=12 \quad \therefore n=144$ 답 ③

0571 $\mathrm{P}(|Z| \leq k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면

$$b-a=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ㄱ. α의 값이 커지면 k의 값이 커지므로 $b-a$의 값이 커진다. (참)

ㄴ. 표본평균의 값은 $b-a$의 값과 관계가 없다. (거짓)

ㄷ. n의 값이 커지면 $b-a$의 값은 작아진다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

0572 모표준편차를 σ, 표본의 크기를 n, $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$

라 하면 신뢰구간의 길이는 $\quad 2k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ㄱ. 표본의 크기가 $100n$일 때, 신뢰구간의 길이는

$$2k\frac{\sigma}{\sqrt{100n}}=\frac{1}{10}\times 2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

따라서 신뢰구간의 길이는 $\dfrac{1}{10}$배가 된다. (참)

ㄴ. 표본의 크기가 일정할 때, 신뢰도가 높아지면 k의 값이 커지므로 신뢰구간의 길이는 길어진다. (거짓)

ㄷ. 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\mathrm{P}(|Z|\le k')=\dfrac{\alpha}{200}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 $\dfrac{\alpha}{2}$ %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-k'\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+k'\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이때 $k'<k$이므로 신뢰도 α %의 신뢰구간은 신뢰도 $\dfrac{\alpha}{2}$ %의 신뢰구간을 포함한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

시험에 꼭 나오는 문제

● 본책 098~101쪽

0573 모표준편차가 60, 표본의 크기가 n이므로

$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{60^2}{n}=\frac{3600}{n}$$

이때 $\mathrm{V}(\overline{X})\le 10$이어야 하므로

$$\frac{3600}{n}\le 10 \qquad \therefore n\ge 360$$

따라서 n의 최솟값은 360이다. 답 **360**

0574 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{5}=20,\ \sigma(X)=\sqrt{100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}=4$$

이때 표본의 크기가 4이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=20,\ \sigma(\overline{X})=\frac{4}{\sqrt{4}}=2$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{E}(2\overline{X}-3)+\sigma(2\overline{X}-3)&=2\mathrm{E}(\overline{X})-3+2\sigma(\overline{X})\\&=2\times 20-3+2\times 2=41\end{aligned}$$

답 ②

0575 ㄱ. $\overline{X_1}$, $\overline{X_2}$, $\overline{X_3}$의 값은 알 수 없다. (거짓)

ㄴ. $\mathrm{E}(\overline{X_1})=\mathrm{E}(\overline{X_2})=\mathrm{E}(\overline{X_3})=m$ (참)

ㄷ. $\sigma(\overline{X_1})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}=\dfrac{\sigma}{10}$, $\sigma(\overline{X_2})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{225}}=\dfrac{\sigma}{15}$,

$\sigma(\overline{X_3})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{400}}=\dfrac{\sigma}{20}$ 이므로

$$\sigma(\overline{X_1})>\sigma(\overline{X_2})>\sigma(\overline{X_3})\ (\text{참})$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

0576 $\mathrm{E}(X)=-1\times\dfrac{1}{8}+0\times\dfrac{1}{2}+1\times\dfrac{1}{8}+2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=(-1)^2\times\frac{1}{8}+0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{8}+2^2\times\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\\&=1\end{aligned}$$

이때 표본의 크기가 2이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{1}{2},\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \mathrm{E}(\overline{X})\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{4}$$

답 ①

0577 주머니에서 임의로 1장의 카드를 꺼낼 때, 카드에 적힌 숫자를 X라 하면 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서 $\mathrm{E}(X)=1\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{2}{3}+3\times\dfrac{1}{6}=2$이므로

$$\mathrm{V}(X)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{2}{3}+3^2\times\frac{1}{6}-2^2=\frac{1}{3}$$

이때 표본의 크기가 4이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=2,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{1}{3}}{4}=\frac{1}{12}$$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$에서

$$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2=\frac{1}{12}+2^2=\frac{49}{12}$$

따라서 $p=12$, $q=49$이므로

$$p+q=61$$

답 **61**

0578 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 9^2)$을 따르므로 임의추출한 36명이 일주일 동안 운동하는 시간의 평균을 $\overline{X}$분이라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(40,\ \dfrac{9^2}{36}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(40,\ 1.5^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-40}{1.5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(37\le\overline{X}\le 43)&=\mathrm{P}\left(\frac{37-40}{1.5}\le Z\le\frac{43-40}{1.5}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=2\times 0.4772=0.9544\end{aligned}$$

답 **0.9544**

0579 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 2^2)$을 따르므로 임의추출한 초콜릿 25개의 무게의 평균을 $\overline{X}$ g이라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(10,\ \frac{2^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(10,\ 0.4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-10}{0.4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(25\overline{X}\le 240)&=\mathrm{P}(\overline{X}\le 9.6)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{9.6-10}{0.4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le -1)=\mathrm{P}(Z\ge 1)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.3413=0.1587\end{aligned}$$

답 ②

0580 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(40,\ \frac{4^2}{n}\right)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-40}{\frac{4}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge 42)=0.0228$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{42-40}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)\\&=0.0228\end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.4772$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{2}=2 \qquad \therefore\ n=16$$

답 **16**

0581 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(360,\ 20^2)$을 따르므로 임의추출한 2500개의 무선 이어폰의 사용 시간의 평균을 $\overline{X}$분이라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(360,\ \frac{20^2}{2500}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(360,\ 0.4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\overline{X}-360}{0.4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\le k)=0.0062$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(Z\le\frac{k-360}{0.4}\right)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{360-k}{0.4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{360-k}{0.4}\right)\\&=0.0062\end{aligned}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{360-k}{0.4}\right)=0.4938$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)=0.4938$이므로

$$\frac{360-k}{0.4}=2.5, \qquad 360-k=1$$

$$\therefore\ k=359$$

답 **359**

0582 1600명의 학생 중에서 컴퓨터 자격증 A를 가진 학생의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율은 0.8, 표본의 크기는 1600이므로

$$\mathrm{E}(\hat{p})=0.8,\ \mathrm{V}(\hat{p})=\frac{0.8\times 0.2}{1600}=0.01^2$$

이때 1600은 충분히 큰 수이므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(0.8,\ 0.01^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-0.8}{0.01}$로 놓으면 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\hat{p}\ge\frac{78}{100}\right)&=\mathrm{P}(\hat{p}\ge 0.78)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{0.78-0.8}{0.01}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -2)=\mathrm{P}(Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5+0.4772\\&=0.9772\end{aligned}$$

답 **0.9772**

0583 표본평균이 365, 표본의 크기가 64이고, 64는 충분히 큰 수이므로 모표준편차 대신 표본표준편차 24를 이용한다.
따라서 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$365-1.96\times\frac{24}{\sqrt{64}}\le m\le 365+1.96\times\frac{24}{\sqrt{64}}$$

$$\therefore\ 359.12\le m\le 370.88$$

즉 신뢰구간에 속하는 자연수는 360, 361, 362, ⋯, 370의 11개이다.

답 **11**

0584 모표준편차가 16, 표본의 크기가 64이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{16}{\sqrt{64}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{16}{\sqrt{64}}$$

$$\therefore\ \overline{x}-3.92\le m\le\overline{x}+3.92$$

이것이 $240.12\le m\le a$와 같으므로

$$\overline{x}-3.92=240.12,\ \overline{x}+3.92=a$$

$$\therefore\ \overline{x}=244.04,\ a=247.96$$

$$\therefore\ \overline{x}+a=492$$

답 ③

0585 표본평균이 4860, 모표준편차가 700이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$4860-3\times\frac{700}{\sqrt{n}}\le m\le 4860+3\times\frac{700}{\sqrt{n}}$$

이것이 $4710\le m\le 5010$과 같으므로

$$3\times\frac{700}{\sqrt{n}}=150, \qquad \sqrt{n}=14$$

$$\therefore\ n=196$$

답 **196**

0586 모표준편차가 10, 표본의 크기가 100일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이므로

$$b-a=2\times 2\times\frac{10}{\sqrt{100}}=4$$

모표준편차가 10, 표본의 크기가 n일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $c\le m\le d$이므로

$$d-c=2\times 2.6\times\frac{10}{\sqrt{n}}=\frac{52}{\sqrt{n}}$$

이때 $b-a\ge d-c$이므로

$$4\ge\frac{52}{\sqrt{n}},\qquad \sqrt{n}\ge 13\qquad \therefore\ n\ge 169$$

따라서 n의 최솟값은 169이다. 답 **169**

0587 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}=\frac{240}{600}=0.4$

이때 600은 충분히 큰 수이므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.4-1.96\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{600}}\le p\le 0.4+1.96\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{600}}$$

$$\therefore\ 0.3608\le p\le 0.4392$$

답 ②

0588 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면

$$\hat{p}=\frac{0.5484+0.6516}{2}=0.6$$

따라서 구하는 직장인의 수는

$$600\times0.6=360$$

답 **360**

0589 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}=\frac{90}{100}=0.9$

표본의 크기를 n이라 하면 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.9-2\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{n}}\le p\le 0.9+2\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{n}}$$

$$-\frac{0.6}{\sqrt{n}}\le p-0.9\le\frac{0.6}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore\ |p-0.9|\le\frac{0.6}{\sqrt{n}}$$

이때 모비율과 표본비율의 차가 0.01 이하이어야 하므로

$$\frac{0.6}{\sqrt{n}}\le 0.01,\qquad \sqrt{n}\ge 60\qquad \therefore\ n\ge 3600$$

따라서 표본은 3600명 이상이어야 한다. 답 **3600명**

0590 $\mathrm{P}(|Z|\le k_1)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z|\le k_2)=0.99$라 할 때, 각각의 신뢰구간의 길이를 구하면 다음과 같다.

① $2k_1\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=\frac{k_1}{5}\sigma$

② $2k_2\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=\frac{k_2}{5}\sigma$

③ $2k_1\times\frac{\sigma}{\sqrt{256}}=\frac{k_1}{8}\sigma$

④ $2k_2\times\frac{\sigma}{\sqrt{400}}=\frac{k_2}{10}\sigma$

⑤ $2k_1\times\frac{\sigma}{\sqrt{400}}=\frac{k_1}{10}\sigma$

이때 $k_1<k_2$이므로

$$\frac{k_2}{10}\sigma<\frac{k_2}{5}\sigma,\quad \frac{k_1}{10}\sigma<\frac{k_1}{8}\sigma<\frac{k_1}{5}\sigma<\frac{k_2}{5}\sigma$$

따라서 신뢰구간의 길이가 가장 긴 것은 ②이다. 답 ②

0591 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{4}+a+b=1\qquad \therefore\ a+b=\frac{3}{4}$$ … 1단계

$\mathrm{E}(X)=-8\times\frac{1}{4}+0\times a+8\times b=8b-2$이므로

$$\mathrm{V}(X)=(-8)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times a+8^2\times b-(8b-2)^2$$
$$=-64b^2+96b+12$$

이때 표본의 크기가 4이므로

$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{-64b^2+96b+12}{4}$$
$$=-16b^2+24b+3$$ … 2단계

즉 $-16b^2+24b+3=11$이므로

$$2b^2-3b+1=0,\qquad (2b-1)(b-1)=0$$

$$\therefore\ b=\frac{1}{2}\ (\because\ 0<b<1)$$

따라서 $a+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$이므로 $a=\frac{1}{4}$

$$\therefore\ ab=\frac{1}{8}$$ … 3단계

답 $\mathbf{\frac{1}{8}}$

	채점 요소	비율
1단계	확률의 총합이 1임을 이용하여 a, b에 대한 식 세우기	20 %
2단계	$\mathrm{V}(\overline{X})$를 b에 대한 식으로 나타내기	50 %
3단계	ab의 값 구하기	30 %

0592 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따르므로 임의추출한 225병의 요구르트의 용량의 평균을 $\overline{X}$ mL라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{5^2}{225}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$을 따른다. … 1단계

따라서 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{1}{3}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge198)=0.9987$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{198-m}{\frac{1}{3}}\right)=\mathrm{P}(Z\ge594-3m)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le3m-594)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le3m-594)$$
$$=0.9987$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le3m-594)=0.4987$$ … 2단계

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le3)=0.4987$이므로

$$3m-594=3\qquad \therefore\ m=199$$ … 3단계

답 **199**

06 통계적 추정

채점 요소	비율
1단계 표본평균 $\overline{X}$의 확률분포 구하기	20 %
2단계 주어진 확률을 표준정규분포표를 이용할 수 있도록 변형하기	50 %
3단계 m의 값 구하기	30 %

0593 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}=0.8$

이때 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이가 0.1이므로

$$2\times3\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}=0.1 \quad \cdots \text{1단계}$$

$$\sqrt{n}=24 \qquad \therefore n=576 \quad \cdots \text{2단계}$$

답 576

채점 요소	비율
1단계 신뢰구간의 길이를 이용하여 n에 대한 식 세우기	70 %
2단계 n의 값 구하기	30 %

0594 전략 $\hat{p}$이 근사적으로 따르는 정규분포를 구하여 $\hat{p}$을 표준화한다.

모비율은 0.7, 표본의 크기는 n이므로

$$E(\hat{p})=0.7,\ V(\hat{p})=\frac{0.7\times0.3}{n}=\frac{0.21}{n}$$

따라서 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N\left(0.7,\ \frac{0.21}{n}\right)$을 따르므로

$Z=\dfrac{\hat{p}-0.7}{\sqrt{\frac{0.21}{n}}}$로 놓으면 확률변수 Z는 근사적으로 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(\hat{p}\le0.8)=0.8413$에서

$$P\left(Z\le\frac{0.8-0.7}{\sqrt{\frac{0.21}{n}}}\right)=P\left(Z\le\sqrt{\frac{n}{21}}\right)$$

$$=P(Z\le0)+P\left(0\le Z\le\sqrt{\frac{n}{21}}\right)$$

$$=0.8413$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le\sqrt{\frac{n}{21}}\right)=0.3413$$

이때 $P(0\le Z\le1)=0.3413$이므로

$$\sqrt{\frac{n}{21}}=1,\qquad \frac{n}{21}=1$$

$$\therefore n=21$$

답 21

0595 전략 각 신뢰구간을 $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$, σ에 대한 식으로 나타내고 주어진 조건을 이용한다.

표본평균이 $\overline{x_1}$, 표본의 크기가 100일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}$$

$$\therefore \overline{x_1}-0.196\sigma\le m\le\overline{x_1}+0.196\sigma$$

표본평균이 $\overline{x_2}$, 표본의 크기가 400일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\overline{x_2}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{400}}\le m\le\overline{x_2}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{400}}$$

$$\therefore \overline{x_2}-0.129\sigma\le m\le\overline{x_2}+0.129\sigma$$

이때 $a=c$이므로 $\overline{x_1}-0.196\sigma=\overline{x_2}-0.129\sigma$

$$\therefore \overline{x_1}-\overline{x_2}=0.067\sigma$$

$\overline{x_1}-\overline{x_2}=1.34$이므로 $0.067\sigma=1.34$

$$\therefore \sigma=20$$

$$\therefore b-a=\overline{x_1}+0.196\sigma-(\overline{x_1}-0.196\sigma)$$

$$=0.392\sigma$$

$$=0.392\times20=7.84$$

답 ②

0596 전략 표본평균 $\overline{X_A}$, $\overline{X_B}$의 분포를 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

표본평균 $\overline{X_A}$는 정규분포 $N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{25}\right)$, 즉 $N\left(m,\ \left(\frac{\sigma}{5}\right)^2\right)$을 따르고 표본평균 $\overline{X_B}$는 정규분포 $N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{100}\right)$, 즉 $N\left(m,\ \left(\frac{\sigma}{10}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $Z_A=\dfrac{\overline{X_A}-m}{\frac{\sigma}{5}}$, $Z_B=\dfrac{\overline{X_B}-m}{\frac{\sigma}{10}}$으로 놓으면 확률변수 Z_A, Z_B는 모두 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

ㄱ. $V(\overline{X_A})=\dfrac{\sigma^2}{25}$, $V(\overline{X_B})=\dfrac{\sigma^2}{100}$이므로

$V(\overline{X_A})>V(\overline{X_B})$ (참)

ㄴ. $P(\overline{X_A}\le m+5)=P\left(Z_A\le\dfrac{m+5-m}{\frac{\sigma}{5}}\right)=P\left(Z_A\le\dfrac{25}{\sigma}\right)$

$P(\overline{X_B}\le m+5)=P\left(Z_B\le\dfrac{m+5-m}{\frac{\sigma}{10}}\right)=P\left(Z_B\le\dfrac{50}{\sigma}\right)$

이때 $0<\dfrac{25}{\sigma}<\dfrac{50}{\sigma}$이므로

$$P\left(Z_A\le\frac{25}{\sigma}\right)<P\left(Z_B\le\frac{50}{\sigma}\right)$$

$\therefore P(\overline{X_A}\le m+5)<P(\overline{X_B}\le m+5)$ (참)

ㄷ. $P(|Z|\le k)=0.95$라 하면

$$b-a=2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{25}}=\frac{2k\sigma}{5}$$

$$d-c=2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=\frac{k\sigma}{5}$$

$\therefore b-a>d-c$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ